

Université de Montréal

Mécanique quantique supersymétrique et opérateurs  
d'échelle pour le système de Rosen-Morse

par

**Simon Garneau-Desroches**

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

Juillet 2021



**Université de Montréal**

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

**Mécanique quantique supersymétrique et opérateurs  
d'échelle pour le système de Rosen-Morse**

présenté par

**Simon Garneau-Desroches**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Manu Paranjape*

---

(président-rapporteur)

*Véronique Hussin*

---

(directrice de recherche)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(membre du jury)



## Résumé

---

Le présent mémoire est dédié à l'étude du rôle de la mécanique quantique supersymétrique dans la construction d'opérateurs d'échelle et de leurs applications pour le système quantique de Rosen-Morse. L'aboutissement de ces travaux est contenu dans un article qui constitue le dernier chapitre du mémoire. Précisément, on motive l'échec de la réalisation des opérateurs d'échelle comme opérateurs différentiels pour le potentiel de Rosen-Morse avec les méthodes traditionnelles. On exploite la propriété d'invariance de forme dans le contexte de la mécanique quantique supersymétrique comme un outil alternatif pour offrir une première approche quantique à la réalisation des opérateurs d'échelle pour la version hyperbolique de ce potentiel. On utilise cette réalisation pour obtenir celle d'opérateurs d'échelle pour une classe particulière d'extensions rationnelles du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique avec des techniques issues de la supersymétrie. Des états cohérents sont construits à partir des réalisations obtenues pour les différents systèmes. Certaines de leurs propriétés sont analysées et mises en comparaison. En parallèle, on utilise une transformation canonique ponctuelle pour déduire une première réalisation des opérateurs d'échelle comme opérateurs différentiels pour le système de Rosen-Morse trigonométrique. De cette réalisation sont construits des états cohérents pour lesquels des propriétés sont similairement analysées.

**Mots-clés:** opérateurs d'échelle, mécanique quantique supersymétrique, extensions rationnelles, états cohérents, potentiel de Rosen-Morse, systèmes exactement résolubles.



# Abstract

---

This master thesis is dedicated to the study of the role of supersymmetric quantum mechanics in the construction of ladder operators and of their applications for the quantum Rosen-Morse system. The results of this work are presented in an article that constitutes the last chapter of the thesis. Precisely, we motivate the failure of traditional methods in providing a realization for the Rosen-Morse ladder operators as differential operators. We provide a first quantum-based solution to this problem by using the shape invariance property in supersymmetric quantum mechanics as a tool in the construction of the ladder operators for the hyperbolic version of this potential. We use the latter realization to obtain that of a specific class of rational extensions of the hyperbolic Rosen-Morse system by means of supersymmetric techniques. Coherent states are constructed from the ladder operators obtained for the different systems. Some properties are analyzed and compared. In addition, we make use of a point canonical transformation in the derivation of the first realization of the ladder operators of the trigonometric Rosen-Morse system as differential operators. From this realization, we construct coherent states for which some properties are similarly analyzed.

**Key-words:** ladder operators, supersymmetric quantum mechanics, rational extensions, coherent states, Rosen-Morse potential, exactly solvable systems.



# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>Liste des figures</b> .....	11
<b>Remerciements</b> .....	13
<b>Introduction</b> .....	15
Contributions de l'auteur .....	17
<b>Chapitre 1. Le problème des opérateurs d'échelle du système de Rosen-Morse</b> .....	19
1.1. Systèmes quantiques résolubles .....	19
1.2. L'oscillateur harmonique .....	20
1.3. Opérateurs d'échelle .....	22
1.4. Construction par la méthode algébrique .....	24
1.5. Le potentiel de Rosen-Morse hyperbolique .....	27
1.6. Échec de la méthode algébrique .....	28
<b>Chapitre 2. Supersymétrie en mécanique quantique et le système de Rosen-Morse</b> .....	31
2.1. SUSYQM de premier ordre .....	31
2.2. Invariance de forme en SUSYQM .....	34
2.3. Extensions rationnelles du système de Rosen-Morse hyperbolique .....	36
2.3.1. SUSY isospectrales: types I et II .....	37
2.3.2. SUSY d'ajout: type III .....	38

<b>Chapitre 3. Ladder operators and coherent states for the Rosen-Morse system and its rational extensions.....</b>	<b>41</b>
3.1. Introduction.....	42
3.2. Ladder operators and SUSYQM.....	43
3.2.1. Ladder operators.....	43
3.2.2. Supersymmetric quantum mechanics.....	45
3.3. RMII ladder operators from SUSYQM.....	46
3.3.1. The RMII potential.....	46
3.3.2. SUSYQM and shape invariance for the RMII potential.....	48
3.3.3. Construction of the ladder operators.....	49
3.4. Application to type III rational extensions.....	51
3.4.1. Type III rational extensions of the RMII potential.....	51
3.4.2. Ladder operators for the type III rational extensions.....	53
3.5. Coherent states for the RMII potential and the type III rational extensions...	54
3.5.1. Coherent states constructions.....	55
3.5.2. Properties.....	56
3.6. Generalization to the RMI potential.....	59
3.6.1. The RMI system from a point canonical transformation.....	59
3.6.2. Ladder operators for the RMI potential.....	61
3.6.3. Coherent states of the RMI potential.....	62
3.7. Conclusion and outlook.....	64
Acknowledgements.....	65
References.....	65
<b>Conclusion.....</b>	<b>69</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>71</b>

# Liste des figures

---

1.1	Tracés du potentiel $V_s(x)$ de Rosen-Morse hyperbolique (RMII) pour différents paramètres.....	28
2.1	Comparaison de différents types d'extensions rationnelles $V_{rat}(x)$ pour le potentiel de Rosen-Morse $V_s(x)$ aux paramètres $s = 8.5$ et $\lambda = 5$ (rouge, trait pointillé). On illustre $V_{rat}(x)$ pour le type I (bleu, trait plein) en (a) et $V_{rat}(x)$ pour le type III (vert, trait plein) en (b).....	40
3.1	Hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential $V_s(x)$ with parameters $s = 2$ and $\lambda = 1$ .	47
3.2	Connection between the $n$ -th excited state $\psi_s(n; x)$ of $H_s$ and the ground state $\psi_{s-n}(0; x)$ of $H_{s-n}$ with operators $B_s^\pm$ .....	49
3.3	Connection between ground states of adjacent members of the RMII hierarchy by action with $\gamma_s(x)$ or $\gamma_s^{-1}(x)$ . ....	50
3.4	Initial RMII potential $V_s(x)$ (blue, dashed) and its type III rational extension SUSY partner potential $\tilde{V}(x)$ (green, solid) for parameters $s = 20$ , $\lambda = 16$ and $k = 2$ . The additional energy level is $\varepsilon \approx -529.48$ . ....	52
3.5	Construction of the ladder operators $\mathcal{A}^\pm$ for the rational extension of the RMII system using $A^\pm$ and $\mathcal{B}^\pm$ .....	54
3.6	Space localization of the probability densities of the coherent states for $w \in [0,10]$ with parameters $s = 20$ and $\lambda = 16$ .....	57
3.7	Space localization of the probability densities $ \Phi(w; x, t) ^2$ and $ \tilde{\Phi}(w; x, t) ^2$ of the coherent states in time $t \in [0,1]$ for fixed $w$ with parameters $s = 20$ and $\lambda = 16$ . .	57
3.8	Trajectories ( $\langle x \rangle(w; t)$ , $\langle p \rangle(w; t)$ ) of position and momentum expectation values in time $t \in [0,3]$ for the coherent states (a)-(c) for $w$ fixed compared to phase space trajectories $(x(t), p(t))$ of bounded motion of their classical analogues (b)-(d) . Parameters: $s = 20$ and $\lambda = 16$ . ....	58
3.9	Position-momentum uncertainty relation $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$ at $t = 0$ for the RMII coherent states (blue, dashed) and for that of the type III rational extension	

	(green, solid) as a function of $w \in [0,15]$ . Parameters: $s = 20$ and $\lambda = 16$ . A black dotted line indicates the lower bound of $1/4$ . . . . .	59
3.10	Trigonometric Rosen-Morse (RMI) potential $V_I(x)$ with parameters $s = 2$ and $\lambda = 20$ . . . . .	60
3.11	Space localization of the probability density $ \phi(w; x) ^2$ of the coherent states at $t = 0$ in terms of the real parameter $w$ (a). Time evolution of the probability densities $ \Phi(w; x, t) ^2$ for $w$ fixed (b)-(c). Parameters: $s = 2$ and $\lambda = 20$ . . . . .	63
3.12	Trajectories $(\langle x \rangle (w; t), \langle p \rangle (w; t))$ of position and momentum expectation values in time $t \in [0,3]$ for the coherent states for $w$ fixed (a) compared to phase space trajectories $(x(t), p(t))$ of bounded motion of its classical analogue (b). Parameters: $s = 2$ and $\lambda = 20$ . . . . .	63

## Remerciements

---

Je souhaite d'abord remercier ma directrice de recherche, Véronique Hussin, pour tout le temps, les conseils et les encouragements qu'elle m'a donnés pendant la réalisation de ce projet. Sa gentillesse et son dévouement m'ont fait vivre une expérience plus humaine, malgré la distance. Je suis également reconnaissant pour les opportunités pédagogiques enrichissantes qu'elle m'a offertes dans la dernière année. J'adresse également des remerciements particuliers à Julien Gaboriaud pour son chaleureux accueil au CRM.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers tous les excellents professeurs qui ont teinté et inspiré mon parcours en physique. En particulier, je désire remercier Simon Lévesque pour avoir cru en moi. Sans lui, mon introduction à la physique, mais surtout au monde fascinant de la physique quantique, n'aurait pas été la même.

Mes remerciements vont ensuite à mes parents, Suzanne et Joël, pour leur soutien et leur enthousiasme vis-à-vis mes études. Merci pour l'amour et l'hospitalité dont j'ai pu bénéficier pendant ma maîtrise. Merci également à mes soeurs, Evelyne et Ariane, pour avoir partagé mon quotidien dans la dernière année. Finalement, merci à mes amis pour les précieux moments passés et pour ceux à venir...



# Introduction

---

Dans la théorie des systèmes quantiques exactement résolubles, la réalisation d'opérateurs d'échelle s'avère un outil d'importance fondamentale. Alors qu'ils ont été introduits et popularisés dans la résolution élégante de l'oscillateur harmonique quantique [1, 2], leur action connectant les espaces propres d'énergies adjacentes du hamiltonien a été généralisée pour convenir à un système résoluble arbitraire [3]. L'étude systématique de ces objets mathématiques pour les divers systèmes exactement résolubles connus contribua, à travers les années, à approfondir considérablement nos connaissances et notre capacité à composer avec ces systèmes dans le monde physique qui nous entoure. Par exemple, le potentiel de Morse est un modèle anharmonique exactement résoluble adapté à la physique moléculaire. On peut alors penser à la contribution majeure des opérateurs d'échelles de ce système dans le calcul analytique d'éléments matriciels émergeant dans différents processus physiques comme les probabilités de transition d'une molécule soumise à un champ électrique variable [4]. Une autre contribution marquante des opérateurs d'échelle relève du développement de la théorie mathématique et physique des états cohérents et comprimés [5, 6].

Le traitement des opérateurs d'échelle dans différents problèmes de physique (potentiel de Morse [7], oscillateur pseudo-harmonique [8], électron dans un champ magnétique uniforme [9], etc.) ont mené à l'élaboration d'une méthode pour construire ces opérateurs pour un système donné. Cette technique, qu'on nommera la *méthode algébrique*, s'avère efficace chez tous les systèmes communs en une dimension d'espace, enfin presque... Toutefois, les potentiels de Rosen-Morse hyperboliques (RMII) et trigonométriques (RMI) semblent échapper à cette méthode. Le premier de ces systèmes exactement résolubles relève de la modélisation des vibrations de molécules diatomiques [10], alors que le second correspond au problème de Kepler sur l'hypersphère [11, 12]. Dans ces deux cas, la réalisation des opérateurs d'échelle doit passer par une autre méthode. Par contre, les chemins pour y parvenir sont restés jusqu'à récemment plutôt flous.

Bien que cela puisse paraître surprenant, les premiers développements sur la question sont apparus du côté de la mécanique classique. En effet, il existe un analogue classique aux opérateurs d'échelles: les *fonctions d'échelles*. Celles-ci peuvent être définies de façon à calquer le comportement algébrique que les opérateurs d'échelles quantiques partagent

avec le hamiltonien d'un système. Celles-ci contribuent également à la résolution algébrique d'un système classique [13]. En 2019, L. Delisle-Doray *et al.* [14] réalisèrent une première expression pour les fonctions d'échelle classiques du système de Rosen-Morse hyperbolique. Cette contribution majeure mena ensuite, via une quantification non-triviale, à une première réalisation des opérateurs d'échelle du modèle quantique comme un produit d'opérateurs différentiels factorisant le hamiltonien [15]. En fait, l'action des opérateurs d'échelles se décompose en plusieurs sous-actions, chacune engendrant un changement de système intermédiaire. Cette remarque a suggéré une potentielle analogie avec la mécanique quantique supersymétrique, d'où est né le projet qui compose ce mémoire.

La mécanique quantique supersymétrique (SUSYQM) fut introduite au départ comme un proto-modèle en physique des hautes énergies [16]. Pourtant, ses répercussions en théorie quantique non-relativiste l'ont rapidement fait évoluer comme une branche de la physique mathématique en soi. L'idée derrière son formalisme est de connecter, à l'aide d'opérateurs différentiels, des systèmes quantiques aux spectres quasi-identiques. D'un point de vue pratique, elle permet de générer de nouveaux systèmes exactement résolubles à partir de systèmes résolubles déjà connus [17]. Plusieurs nouvelles familles de systèmes exactement résolubles en sont issues [18, 19, 20]. Cette formulation puissante englobe par ailleurs la célèbre *méthode de factorisation* d'Infeld et Hull [21].

Ainsi, le projet dont il est question dans ce mémoire consiste en premier lieu à réaliser les opérateurs d'échelle du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique avec une approche complètement quantique, en déterminant précisément le lien avec la mécanique quantique supersymétrique. Une fois réalisés, la suite du projet vise à mettre ces opérateurs à profit dans la construction d'opérateurs d'échelles pour des déformations peu explorées du système de Rosen-Morse, accessibles par la mécanique quantique supersymétrique. L'idée est ensuite d'utiliser les différents opérateurs d'échelle comme point de départ dans la construction d'états cohérents pour les systèmes respectifs. Cela donne donc la chance de comparer le comportement de ces états cohérents issus de systèmes quasi-isospectraux. La dernière partie du projet est consacrée à l'adaptation des méthodes et des résultats obtenus pour le potentiel de Rosen-Morse trigonométrique.

La présentation de ces travaux à l'intérieur de ce mémoire se divise en trois chapitres. Le Chapitre 1 oeuvre à poser le problème des opérateurs d'échelles pour le système de Rosen-Morse hyperbolique. On débute avec des rappels techniques qui établissent le cadre du travail. On poursuit avec une introduction historique menant à la définition formelle des opérateurs d'échelle. La méthode algébrique de construction de ces opérateurs pour les systèmes exactement résolubles à une dimension d'espace  $y$  est discutée et illustrée à l'aide de l'exemple du potentiel de Pöschl-Teller. Le potentiel de Rosen-Morse hyperbolique est ensuite présenté comme une généralisation du Pöschl-Teller, après quoi l'échec de la réalisation de ses opérateurs d'échelles par la méthode algébrique est exposée.

Le Chapitre 2, quant à lui, présente le formalisme de la mécanique quantique supersymétrique (SUSYQM) qui sera l'outil principal dans les différentes constructions du travail. Les transformations supersymétriques de premier ordre seront détaillées selon trois cas. L'un d'entre eux mène directement au concept d'*invariance de forme* qu'on y développe. Les deux autres sont exploités à travers l'introduction de la notion d'*extension rationnelle* d'un potentiel, que l'on traite pour le cas du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique.

Le Chapitre 3 est un article dont les auteurs sont ma directrice de recherche, Véronique Hussin, et moi-même. Le rôle exact de la mécanique quantique superymétrique dans la construction des opérateurs d'échelle des potentiels de Rosen-Morse hyperboliques et trigonométriques est clairement exposé, proposant une première résolution quantique au problème des opérateurs d'échelle pour ces systèmes. On répond aux pistes de recherches introduites dans la description du projet ci-haut à travers la présentation de résultats originaux.

## Contributions de l'auteur

Les travaux présentés dans ce mémoire relèvent d'un projet qui m'a été proposé par ma directrice de recherche, Véronique Hussin. Ces derniers ont été réalisés en collaboration avec elle. Le matériel présenté dans le Chapitre 1 et le Chapitre 2 est issu en grande majorité de résultats connus. Cependant, je me suis assuré de reproduire par moi-même les résultats et d'assimiler tout ce qui y est présenté.

Le Chapitre 3 est un article soumis dont je suis le premier auteur et pour lequel Véronique Hussin est coauteure. La réalisation des opérateurs d'échelle telle que présentée à la Section 3.3 a été le fruit de mon travail. L'adaptation dans le contexte des extensions rationnelles à la Section 3.4 est venue de discussions entre Véronique Hussin et moi-même. C'est moi qui l'ai ensuite élaborée. J'ai fait la construction des états cohérents de la Section 3.5 en me basant sur des constructions similaires réalisées par Véronique Hussin pour d'autres systèmes, notamment. La généralisation au cas trigonométrique via la transformation de la Section 3.6 a été proposée par Véronique Hussin; je l'ai moi-même élaborée ensuite. J'ai fait tous les calculs présentés dans l'article. J'ai également rédigé l'entièreté de l'article qui a été orienté, commenté, et révisé à diverses reprises par Véronique Hussin.



# Chapitre 1

---

## Le problème des opérateurs d'échelle du système de Rosen-Morse

Ce premier chapitre contribue à mettre en contexte le travail de ce mémoire et de poser la première problématique traitée. Des concepts clefs de mécanique quantique sont d'abord présentés à la Section 1.1. L'introduction aux opérateurs d'échelle débute par un retour sur le traitement de l'oscillateur harmonique à la Section 1.2, puis la définition formelle de ces opérateurs est présentée à la Section 1.3. On résume ensuite la méthode algébrique traditionnelle pour construire les opérateurs d'échelle à la Section 1.4. Finalement, la Section 1.5 et la Section 1.6 développent respectivement le système de Rosen-Morse hyperbolique et l'échec de son traitement par la méthode algébrique.

### 1.1. Systèmes quantiques résolubles

En mécanique quantique non-relativiste à une dimension d'espace, un *système* est caractérisé par l'opérateur d'énergie, le hamiltonien [1]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad (1.1.1)$$

où le potentiel  $V(x)$  est une fonction réelle ayant comme domaine un segment de l'axe réel  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$  et où  $m$  est la masse de l'objet à l'étude. Le hamiltonien est construit à partir des opérateurs canoniques de position  $\hat{x}$  et de quantité de mouvement  $\hat{p}$ . La représentation employée dans ce mémoire est celle des positions, dans laquelle ces opérateurs prennent la forme

$$\hat{x} = x \quad \text{et} \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad (1.1.2)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Pour des fins pratiques, on choisit de travailler dans un système d'unités pour lequel  $\hbar = 2m = 1$ . On rappelle que la présence de la constante de Planck réduite et de la masse peut être retracée à tout moment par analyse dimensionnelle.

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux *états propres liés* de ce système qui sont représentés par une *fonction d'onde* réelle  $\psi \in L^2(\mathcal{D})$ , solution du problème aux valeurs propres de l'équation de Schrödinger indépendante du temps:

$$H\psi(x) = \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x), \quad (1.1.3)$$

où l'énergie  $E$  est la valeur propre associée à  $\psi$ . Pour chaque système, l'ensemble discret (fini ou infini) des énergies des différents états propres liés est appelé le *spectre*  $\text{Sp}(H)$  du système. On étiquette alors les états propres  $\psi(n; x)$  et leur énergie  $E(n)$  en ordre croissant d'énergie ( $n = 0, 1, \dots, n_{\max} \leq \infty$ ). L'énergie  $E(0)$  la plus basse et son état associé  $\psi(0; x)$  se nomment respectivement l'*énergie fondamentale* et l'*état fondamental* du système. Les autres états propres liés de plus hautes énergies sont les *états excités* du système. Dans ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes quantiques *résolubles*, soit ceux pour lesquels les solutions analytiques de l'équation de Schrödinger (1.1.3) sont connues.

Un état arbitraire  $\psi(x)$  du système appartient à l'espace de Hilbert engendré par les états propres liés, où le produit scalaire est hérité de  $L^2(\mathcal{D})$ . Pour avoir une interprétation probabiliste de la fonction d'onde  $\psi(x)$ , on se restreint aux états *normalisés*, c'est-à-dire satisfaisant

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (1.1.4)$$

De cette façon, on peut associer la fonction  $|\psi(x)|^2$  à la densité de probabilité de la position d'une particule quantique dans l'état  $\psi(x)$  [1]. De cette manière, la fonction d'onde est associée à l'amplitude probabiliste et la condition de normalisation (1.1.4) impose que la somme des probabilités soit égale à 1. Tout état non-nul de  $L^2(\mathcal{D})$  peut être normalisé via multiplication par une constante de normalisation adéquate. Finalement,  $H$  étant hermitien, les états propres liés choisis réels forment une base orthonormée pour l'espace de Hilbert du système:

$$\int_{\mathcal{D}} \psi(n; x)\psi(m; x) dx = \delta_{nm}. \quad (1.1.5)$$

Dans ce qui suit, on laissera tomber l'appellation *états propres liés* et emploierons l'expression *états propres* simplement pour faire référence à ceux-ci.

## 1.2. L'oscillateur harmonique

On amorce notre étude avec le cas de l'oscillateur harmonique quantique. Rappelons que ce dernier est d'une importance fondamentale dans diverses branches de la physique théorique, notamment dans la modélisation de systèmes près d'un point d'équilibre [22] et dans la quantification des champs [23]. Ici, son importance est à la fois de nature historique et pédagogique dans l'introduction du concept d'opérateurs d'échelle.

Le potentiel de l'oscillateur harmonique quantique correspond à son analogue classique. Le système est défini sur  $\mathbb{R}$  par le hamiltonien [1]

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \text{où} \quad V(x) = x^2 \quad \left( = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right), \quad (1.2.1)$$

pour lequel on a pris une fréquence  $\omega = 2$  par simplicité. À l'aube de la mécanique quantique, la méthode pour résoudre un système consistait à résoudre l'équation différentielle de Schrödinger directement, puis d'imposer ensuite la normalisation des solutions pour ainsi quantifier le spectre d'énergies. Dirac cependant, dans [1], proposa une approche différente pour l'oscillateur harmonique. Celle-ci fut ensuite popularisée par Schrödinger, notamment, pour d'autres systèmes [2, 11, 24]. Dans la représentation des positions, l'idée consiste à introduire deux opérateurs différentiels du premier ordre:

$$A^\pm = x \mp \frac{d}{dx}, \quad (1.2.2)$$

factorisant le hamiltonien  $H$  de l'équation de Schrödinger comme

$$\{A^+A^- - (E - 1)\}\psi = 0 \quad (1.2.3)$$

et

$$\{A^-A^+ - (E + 1)\}\psi = 0. \quad (1.2.4)$$

Ici, agir par  $A^-$  sur (1.2.3) montre que  $A^-\psi$  satisfait (1.2.4) pour  $E \rightarrow E - 2$ , à moins d'avoir l'annihilation de  $\psi$  par  $A^-$ . Similairement, on peut montrer à l'inverse que  $A^+\psi$  est une solution à (1.2.3) pour  $E \rightarrow E + 2$  cette fois. Cela signifie que les opérateurs  $A^\pm$  transforment un état de l'oscillateur harmonique d'énergie  $E$  en états d'énergie  $E \pm 2$  respectivement. De plus, ces opérateurs sont mutuellement adjoints au sens donné par  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} (A^-\psi)\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(A^+\phi) \, dx, \quad (1.2.5)$$

pour des états propres  $\psi$  et  $\phi$ , ce qui veut dire qu'ils préservent la normalisabilité. En effet, si  $\psi$  est un état propre, alors par (1.2.3) et (1.2.5):

$$\int_{\mathbb{R}} (A^-\psi)^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi A^+A^-\psi \, dx = (E - 1) \int_{\mathbb{R}} \psi^2 \, dx < \infty. \quad (1.2.6)$$

Un argument analogue permet de conclure que  $A^+\psi$  est aussi normalisable.

Ensuite, à l'aide de l'opérateur  $A^+A^-$  hermitien et défini semi-positif par construction, il est clair par la factorisation (1.2.3) que la plus petite valeur d'énergie possible est  $E = 1$ . On voit que cette dernière intègre le spectre du système si la solution à  $A^-\psi = 0$  est normalisable. On a

$$A^-\psi = 0 \quad \implies \quad \psi(x) \propto e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R}), \quad (1.2.7)$$

confirmant que  $\text{Sp}(H)$  débute à 1. En imposant la condition de normalisation, on obtient l'état fondamental:

$$\psi(0; x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{avec} \quad E(0) = 1. \quad (1.2.8)$$

Tel que suggéré précédemment, des états propres normalisables d'énergie  $E(n) = 1 + 2n$  sont obtenus par applications successives de  $A^+$  sur l'état fondamental. Par ailleurs, l'existence d'autres états propres d'énergies différentes mènerait à contredire le caractère semi-positif de  $A^+A^-$ . Cela permet de conclure que  $A^+$  génère en effet tous les autres états propres de l'oscillateur harmonique quantique.

Le rôle des  $A^\pm$  est maintenant clair: ces opérateurs servent d'échelles connectant les espaces propres voisins du hamiltonien. C'est pour cette raison qu'ils portent le nom d'*opérateurs d'échelle* dans la littérature. L'opérateur de *création*  $A^+$  permet de monter dans le spectre, alors que l'opérateur d'*annihilation*  $A^-$  nous fait descendre:  $A^\pm \psi(n; x) \propto \psi(n \pm 1; x)$ . En imposant la normalisation des états, on peut prendre avantage de  $A^+A^-$  dans (1.2.6) et son analogue pour obtenir la relation exacte entre les états propres d'excitations voisines:

$$A^- \psi(n; x) = \sqrt{2n} \psi(n-1; x) \quad \text{et} \quad A^+ \psi(n; x) = \sqrt{2(n+1)} \psi(n+1; x). \quad (1.2.9)$$

Ces dernières relations permettent d'obtenir l'expression normalisée de tous les états propres en termes de l'état fondamental:

$$\psi(n; x) = \frac{(A^+)^n}{\sqrt{(2n)!!}} \psi(0; x), \quad E(n) = E(0) + 2n. \quad (1.2.10)$$

À ce point, les opérateurs d'échelle ont permis de résoudre complètement le problème de l'oscillateur harmonique quantique en fournissant d'abord une simple équation différentielle pour l'état fondamental, puis une méthode algébrique pour générer les états excités. Les solutions (1.2.10) sont équivalentes à celles données en termes des polynômes de Hermite  $H_n(x)$  issues d'une résolution directe de l'équation de Schrödinger [25, 26]. C'est précisément via ce traitement de l'oscillateur harmonique que le concept d'opérateur d'échelle a vu le jour en mécanique quantique. La section qui suit aura pour objectif d'introduire la généralisation des  $A^\pm$  en mécanique quantique pour d'autres systèmes.

### 1.3. Opérateurs d'échelle

Le formalisme entourant les opérateurs d'échelle a grandement évolué depuis l'oscillateur harmonique. Parmi les différentes approches possibles [3, 27, 28, 29], celle la mieux adaptée à l'utilisation des  $A^\pm$  dans ce mémoire définit les opérateurs d'échelle d'un système comme

des opérateurs différentiels agissant sur les états propres  $\psi(n; x)$  de  $H$  via les relations

$$A^- \psi(n; x) = \sqrt{k(n)} \psi(n-1; x) \quad \text{et} \quad A^+ \psi(n; x) = \sqrt{k(n+1)} \psi(n+1; x), \quad (1.3.1)$$

pour une certaine fonction  $k(n)$  positive [15, 29]. On met l'accent sur le fait que cette définition des opérateurs d'échelle, dans certains cas, nécessite la décomposition d'un état dans la base d'états propres du système. Cela fait opposition aux opérateurs d'échelle de l'oscillateur harmonique dont la forme (1.2.2) permet l'action directe sur un état  $\psi(x)$  arbitraire.

Avec ce point de vue, on dit des opérateurs d'échelle qu'ils factorisent le hamiltonien  $H$  dans le sens où  $A^+A^-$  est diagonal dans la base des états propres. Cette affirmation peut être rendue explicite en introduisant un opérateur  $\delta(H)$  tel que

$$A^+A^- \psi(n; x) = \delta(H) \psi(n; x), \quad \text{avec} \quad \delta(E(n)) = k(n). \quad (1.3.2)$$

Un raisonnement similaire s'applique en inversant l'ordre des  $A^\pm$ , ce qui permet d'écrire leur commutateur  $[A^-, A^+] \equiv A^-A^+ - A^+A^-$  en introduisant un second opérateur diagonal  $\Omega(H)$  selon

$$[A^-, A^+] \psi(n; x) = \Omega(H) \psi(n; x), \quad \text{avec} \quad \Omega(E(n)) = k(n+1) - k(n). \quad (1.3.3)$$

De l'action (1.3.1), on déduit également les commutateurs partagés avec le hamiltonien:

$$[H, A^\pm] \psi(n; x) = A^\pm \Delta_\pm(H) \psi(n; x), \quad \text{avec} \quad \Delta_\pm(E(n)) = E(n \pm 1) - E(n), \quad (1.3.4)$$

où l'opérateur diagonal  $\Delta_\pm(E(n))$  donne les sauts d'énergie entre  $\psi(n; x)$  et  $\psi(n \pm 1; x)$ . De par ces relations de commutation, l'ensemble  $\{A^-, A^+, H\}$  définit l'algèbre de Heisenberg généralisée (GHA) du système [15, 28, 29]. Elle se réduit à l'algèbre de Heisenberg dans le cas de l'oscillateur harmonique. Celle-ci est caractérisée par les fonctions  $k(n)$  et  $E(n)$ , étant à la source des opérateurs  $\delta(H)$ ,  $\Omega(H)$  et  $\Delta_\pm(H)$ . Tous ces opérateurs dépendent donc ultimement de l'excitation  $n$  de l'état sur lequel ils agissent. C'est entre autres pourquoi il est utile de définir l'opérateur nombre  $N$  d'un système général par son action sur les états propres [30]:

$$N\psi(n; x) = n\psi(n; x). \quad (1.3.5)$$

Ce dernier sera d'une grande aide dans la construction des opérateurs d'échelle. Pour l'oscillateur harmonique, puisqu'on avait  $k(n) = 2n$ , l'opérateur satisfaisant cette action selon (1.3.2) s'écrivait directement comme  $N = (A^+A^-)/2$ . Cependant, ce n'est pas le cas pour un système en général.

L'obtention d'opérateurs d'échelle pour un système quantique est un atout majeur à plusieurs niveaux. D'abord, comme cela a été vu pour l'oscillateur harmonique, les  $A^\pm$  permettent la résolution du système. D'abord, par (1.3.1),  $A^-$  doit annihiler l'état fondamental avec  $k(0) = 0$ . Pour  $A^-$  du premier ordre, cette équation d'annihilation est non-dégénérée

et sert à résoudre pour l'état fondamental  $\psi(0; x)$ . Les autres états normalisés sont obtenus similairement par applications successives de  $A^+$ . La résolution se résume par les équations

$$A^- \psi(0; x) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(n; x) = \left( \prod_{j=1}^n \frac{A^+}{\sqrt{k(j)}} \right) \psi(0; x). \quad (1.3.6)$$

Ce n'est pas tout: on peut aussi bénéficier des opérateurs d'échelle pour étudier un système déjà résolu. Par exemple, la possibilité d'inverser la relation  $A^\pm(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$  pour  $\mathcal{O}_1(A^-, A^+)$  et  $\mathcal{O}_2(A^-, A^+)$  permet de simplifier grandement le calcul d'éléments matriciels<sup>1</sup> pour des observables en  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  en utilisant l'action des opérateurs d'échelle sur les états propres, ainsi que les relation d'orthogonalité entre eux (voir, par exemple, [7, 31]). Également, les opérateurs d'échelle sont aussi d'une grande utilité dans l'étude de la structure algébrique fondamentale d'un système quantique [30, 32, 33]. Notamment, ils sont utilisés dans la construction d'intégrales du mouvement pour des systèmes quantiques superintégrables [34, 35]. Finalement, c'est aussi à partir des opérateurs d'échelle que l'on peut construire des états cohérents de type Barut-Girardello [5, 36, 37] et des états comprimés [38]. Ces états propres des opérateurs d'échelle typiquement localisés spatialement, présentent un comportement classique et ont des applications entre autres en optique quantique [6, 39]. C'est particulièrement dans la construction d'états cohérents que seront mis à profit les opérateurs d'échelle qui seront construits dans ce travail.

La pertinence des opérateurs d'échelle étant établie, il reste à savoir comment ceux-ci sont construits pour des systèmes quantiques résolubles. On présente dans ce qui suit la façon traditionnelle de les construire pour des systèmes résolubles à une dimension d'espace.

## 1.4. Construction par la méthode algébrique

Pour les systèmes résolubles à une dimension d'espace les plus courants (oscillateur harmonique, puits de potentiel infini, potentiel de Morse, etc.), on peut obtenir une réalisation des opérateurs d'échelle comme des opérateurs différentiels du premier ordre ayant la forme

$$A^\pm = f^\pm(x, N) + g^\pm(x, N) \frac{d}{dx}, \quad (1.4.1)$$

où l'opérateur nombre  $N$  intervient dans les fonctions  $f^\pm$  et  $g^\pm$  à déterminer selon le système. Contrairement au cas de l'oscillateur harmonique, les opérateurs d'échelle doivent en général s'adapter en fonction de l'excitation de l'état sur lequel ils agissent, d'où la nécessité d'inclure  $N$  dans la construction. L'approche pour construire ces opérateurs d'échelle fait l'objet du livre de Shi-Hai Dong [30]. Ailleurs dans la littérature, cette méthode porte parfois le nom de *méthode algébrique*, que l'on adopte dans ce travail [7, 40, 41]. Sa particularité principale est qu'elle se base a priori sur la résolution du système et utilise les états propres comme

<sup>1</sup>Pour un observable  $\mathcal{O}$ , les éléments matriciels sont donnés par  $\int_{\mathcal{D}} \psi^*(i; x) \mathcal{O} \psi(j; x) dx$ , pour tout  $i, j$ .

des outils pour obtenir les  $A^\pm$ . L'idée générale consiste à d'abord appliquer l'opérateur différentiel ( $d/dx$ ) sur une excitation arbitraire  $\psi(n; x)$  du système. Comme les fonctions  $\psi(n; x)$  sont généralement données en termes de fonctions connues et documentées, l'idée est d'utiliser les propriétés différentielles de ces fonctions pour établir une connection avec la fonction de l'excitation voisine. L'effet désiré peut être encapsulé dans l'équation suivante:

$$\frac{d}{dx}\psi(n; x) = R_\pm(n; x)\psi(n \pm 1; x) + Q_\pm(n; x)\psi(n; x), \quad (1.4.2)$$

pour des fonctions  $R_\pm$  et  $Q_\pm$  propres au système. Si ( $d/dx$ ) réalise en effet (1.4.2), on peut réarranger l'équation pour exprimer  $\psi(n \pm 1; x)$  via, entre autres, la dérivée de  $\psi(n; x)$ . Par comparaison, il est ensuite possible d'inférer les fonctions  $f^\pm(x, N)$  et  $g^\pm(x, N)$  de (1.4.1) permettant de réaliser l'action (1.3.1) pour un  $k(n)$  désiré. Lorsque les états propres sont donnés en termes de polynômes orthogonaux, leurs relations de récurrence [42, 43] deviennent particulièrement avantageuses dans ce processus.

On souhaite d'abord appliquer cette méthode dans le cas du potentiel de Pöschl-Teller hyperbolique, un cas particulier du potentiel de Rosen-Morse. D'un point de vue pédagogique, l'exemple du potentiel de Pöschl-Teller permet non seulement de bien comprendre le fonctionnement de cette méthode répandue, mais permettra de bien cerner ses limitations lorsqu'il sera question de construire les opérateurs d'échelle pour le système de Rosen-Morse.

Le potentiel de Pöschl-Teller hyperbolique [44] est défini sur  $\mathbb{R}$  en fonction d'un paramètre  $s$  par

$$V(x) = -s(s+1)\operatorname{sech}^2 x. \quad (1.4.3)$$

Il est symétrique par rapport à  $x = 0$  et il a la forme d'un puits pour  $s \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ . Un nombre fini d'états liés existent pour  $s^2 > 0$ . Ces derniers peuvent s'exprimer en termes des polynômes de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  [45]:

$$\psi(n; x) = K(n) \cosh^{-(s-n)}(x) P_n^{(s-n, s-n)}(\tanh x), \quad \text{où } n = 0, 1, \dots, n_{\max} < |s|, \quad (1.4.4)$$

et où  $K(n) = (-1)^n 2^{s-n} \sqrt{n!(s-n)\Gamma(2s-n+1)/[\Gamma(s+1)]^2}$  est la constante de normalisation. L'énergie  $E(n) = -(s-n)^2$  est quadratique en l'excitation  $n$ .

On construit les opérateurs d'échelle en agissant d'abord avec ( $d/dx$ ) sur  $\psi(n; x)$ :

$$\frac{d}{dx}\psi(n; x) = -(s-n)\frac{\sinh x}{\cosh x}\psi(n; x) + M(n) \cosh^{-(s-n)}(x) \frac{d}{dx}P_n^{(s-n, s-n)}(\tanh x). \quad (1.4.5)$$

On fait ensuite usage de la relation 8.961-4 de [43] pour substituer la dérivée sur le polynôme de Jacobi. En tenant compte du jacobien, on obtient

$$\frac{d}{dx}P_n^{(s-n, s-n)}(\tanh x) = \frac{2s-n+1}{2\cosh^2 x} P_{n-1}^{(s-n+1, s-n+1)}(\tanh x). \quad (1.4.6)$$

Il est possible d'interpréter le polynôme du côté droit de l'égalité comme celui apparaissant dans l'état  $\psi(n-1; x)$  d'excitation inférieure en faisant l'association au niveau du degré et

du paramètre  $s - n + 1 = s - (n - 1)$ . Après avoir réintégré ce dernier développement dans (1.4.5), on arrive à

$$\frac{d}{dx}\psi(n; x) = -\sqrt{\frac{n(s-n)(2s-n+1)}{s-n+1}} \frac{\psi(n-1; x)}{\cosh x} - (s-n) \frac{\sinh x}{\cosh x} \psi(n; x), \quad (1.4.7)$$

ce qui réalise l'équation (1.4.2) de la méthode algébrique. Un raisonnement similaire utilisant cette fois la relation 18.9.16 de [46] nous permet de relier la dérivée du polynôme en (1.4.5) à l'état  $\psi(n+1; x)$  d'excitation supérieure:

$$\frac{d}{dx}\psi(n; x) = \sqrt{\frac{(n+1)(2s-n)(s-n)}{s-n-1}} \frac{\psi(n+1; x)}{\cosh x} + (s-n) \frac{\sinh x}{\cosh x} \psi(n; x), \quad (1.4.8)$$

réalisant ainsi l'autre forme de l'équation (1.4.2). En réarrangeant les équations (1.4.7)-(1.4.8) puis en invoquant l'opérateur  $N$ , on identifie des opérateurs d'échelles  $A^\pm$  pour différents choix de la fonction  $k(n)$ . Un premier exemple [30] s'obtient directement:

$$A^\pm = \left[ -(s-N) \sinh(x) \pm \cosh(x) \frac{d}{dx} \right] \sqrt{\frac{s-N \mp 1}{s-N}}, \quad \text{avec} \quad k(n) = n(2s-n+1). \quad (1.4.9)$$

Ces opérateurs d'échelle satisfont l'action (1.3.1). Cependant, pour la construction d'états cohérents, il est standard de choisir  $k(n) = E(n) - E(0)$  comme l'énergie translatée par rapport au niveau fondamental [47, 48, 49]. Pour le potentiel de Pöschl-Teller, on peut obtenir cette réalisation en manipulant davantage:

$$\begin{cases} A^- = \left[ -(s-N) \sinh(x) - \cosh(x) \frac{d}{dx} \right] \sqrt{\frac{(2s-N)(s-N+1)}{(s-N)(2s-n+1)}}, \\ A^+ = \left[ -(s-N) \sinh(x) + \cosh(x) \frac{d}{dx} \right] \sqrt{\frac{(2s-N-1)(s-N-1)}{(s-N)(2s-n)}}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad k(n) = n(2s-n). \quad (1.4.10)$$

D'autres choix sont également possibles (voir, par exemple, [33, 47]). On mentionne finalement que la même technique fonctionne lorsqu'on exprime les états propres du potentiel de Pöschl-Teller au départ en termes des polynômes de Legendre associés  $P_l^m(y)$  [30].

En somme, l'action de la dérivée permet ici de modifier les paramètres et le degré du polynôme de Jacobi de sorte à retrouver celui qui intervient dans l'état propre inférieur ou supérieur. C'est l'élément clef qui permet la construction des opérateurs d'échelle. On verra sous peu pourquoi des complications surviennent dans le cas du potentiel de Rosen-Morse, malgré que celui-ci s'exprime aussi en termes des polynômes de Jacobi.

## 1.5. Le potentiel de Rosen-Morse hyperbolique

Le potentiel de Rosen-Morse hyperbolique<sup>2</sup>, également appelé Rosen-Morse II (RMII) [50, 51], a été introduit en 1932 par N. Rosen et P. M. Morse comme un système exactement résoluble intervenant dans la modélisation de certaines molécules polyatomiques, notamment le comportement de l'azote (N) dans la molécule d'ammoniac (NH<sub>3</sub>) [10]. La forme employée dans ce mémoire est la suivante:

$$V_s(x) = 2\lambda \tanh x - s(s+1) \operatorname{sech}^2 x, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \quad (1.5.1)$$

Les paramètres  $\lambda$  et  $s$  sont choisis réels [51, 52]. On exige la restriction  $\lambda \geq 0$  dans notre étude:  $\lambda$  négatif peut être mis positif par le changement de variable  $x \rightarrow -x$ . On impose similairement  $s > 0$  puisque  $s$  négatif peut être mis positif par  $s \rightarrow -s - 1$ . Dans ce cas, le potentiel a la forme d'un puits pour  $\lambda < s(s+1)$  et le système admet au moins un état lié lorsque  $\lambda < s^2$ . Cette dernière condition sera imposée tout au long de notre traitement. Toutes les restrictions sont encapsulées dans les inéquations

$$0 < s \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda < s^2. \quad (1.5.2)$$

Physiquement, le paramètre  $\lambda$  dicte le comportement asymptotique du potentiel selon

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_s(x) = \pm 2\lambda. \quad (1.5.3)$$

Le paramètre  $s$ , quant à lui, contrôle l'attraction du potentiel: la profondeur du puits augmente avec  $s$ . Le potentiel de Rosen-Morse a son minimum en  $x_0$  et sa profondeur en ce point est donné par

$$V_s(x_0) = -\frac{s^2(s+1)^2 + \lambda^2}{s(s+1)}, \quad \text{avec} \quad x_0 = -\tanh^{-1} \frac{\lambda}{s(s+1)}. \quad (1.5.4)$$

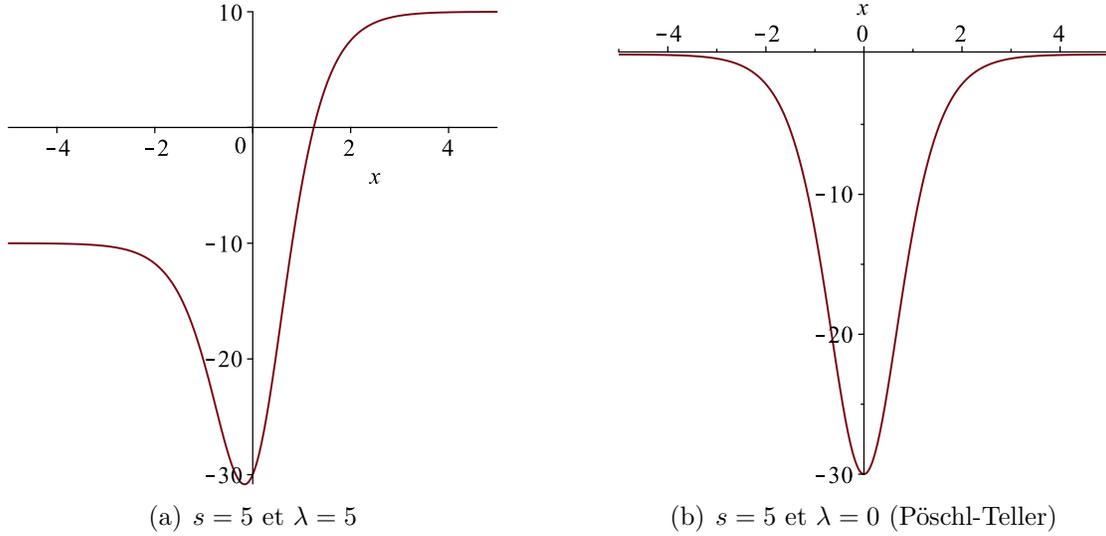
Pour des raisons qui seront présentées dans le contexte de la mécanique quantique supersymétrique, on choisit d'étiqueter le potentiel  $V_s(x)$  avec le paramètre  $s$  seulement (et non  $\lambda$ ). Le potentiel de Rosen-Morse est donc une généralisation du potentiel de Pöschl-Teller présenté à la section précédente. Les deux systèmes coïncident lorsque  $\lambda = 0$ . Des tracés pour différents paramètres sont illustrés à la Fig. 1.1.

Dû à son comportement asymptotique (1.5.3), le système admet un spectre fini d'énergies prenant la forme

$$E_s(n) = -(s-n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s-n)^2}, \quad \text{où} \quad n = 0, 1, \dots, n_{max} < s - \sqrt{\lambda}, \quad (1.5.5)$$

tel que la borne supérieure de  $n_{max}$  empêche l'énergie d'excéder l'asymptote gauche en (1.5.3). On remarque que contrairement au potentiel de Pöschl-Teller, l'énergie  $E(n)$  est ici une

<sup>2</sup>Par opposition à son analogue trigonométrique. Sauf si mentionné, on fait pour l'instant référence au potentiel hyperbolique.



**Fig. 1.1.** Tracés du potentiel  $V_s(x)$  de Rosen-Morse hyperbolique (RMII) pour différents paramètres.

fonction rationnelle de l'excitation  $n$ . Les états propres liés associés satisfaisant l'équation de Schrödinger pour ce système s'expriment eux aussi en termes des polynômes de Jacobi selon

$$\psi_s(n; x) = M_s(n) \cosh^{-(s-n)}(x) e^{-\frac{\lambda x}{s-n}} P_n^{(a_s(n), b_s(n))}(\tanh x), \quad (1.5.6)$$

où les paramètres du polynôme sont également rationnels en  $n$ :

$$a_s(n) = s - n + \frac{\lambda}{s - n}, \quad \text{et} \quad b_s(n) = s - n - \frac{\lambda}{s - n}. \quad (1.5.7)$$

La constante de normalisation prend la forme [51, 53]:

$$M_s(n) = (-1)^n 2^{n-s} \sqrt{\frac{n! \left( (s-n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s-n)^2} \right) \Gamma(2s-n+1)}{(s-n) \Gamma\left(s+1 + \frac{\lambda}{s-n}\right) \Gamma\left(s+1 - \frac{\lambda}{s-n}\right)}}. \quad (1.5.8)$$

Maintenant que le système d'intérêt de ce mémoire est introduit, on s'intéresse ensuite à la construction des opérateurs d'échelle pour celui-ci. L'échec de la méthode algébrique, telle que présentée dans la prochaine section, sert de point de départ aux travaux originaux présentés au Chapitre 3.

## 1.6. Échec de la méthode algébrique

La construction des opérateurs d'échelle du potentiel de Pöschl-Teller avec la méthode algébrique à la Section 1.4 suggère que la généralisation qu'est le potentiel de Rosen-Morse puisse être traité de la même façon. Ce n'est pourtant pas le cas. La visée de la présente section est d'en exposer la raison.

Essayons d'appliquer la méthode algébrique pour construire les opérateurs d'échelle du système de Rosen-Morse. On agit d'abord avec l'opérateur  $(d/dx)$  sur un état  $\psi_s(n; x)$  et on arrive une équation analogue à (1.4.5) pour le cas de Pöschl-Teller:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_s(n; x) = & \left[ -(s-n) \frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\lambda}{s-n} \right] \psi_s(n; x) \\ & + M_s(n) \cosh^{-(s-n)}(x) e^{-\frac{\lambda x}{s-n}} \frac{d}{dx} P_n^{(a_s(n), b_s(n))}(\tanh x). \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Maintenant, si on applique naïvement la relation des polynômes de Jacobi qu'on a utilisée en (1.4.6) pour construire  $A^-$ , on obtient:

$$\frac{d}{dx} P_n^{(a_s(n), b_s(n))}(\tanh x) = \frac{2s-n+1}{2 \cosh^2 x} P_{n-1}^{(a_s(n)+1, b_s(n)+1)}(\tanh x). \quad (1.6.2)$$

La diminution du degré du polynôme du côté droit de l'égalité est en principe suffisante pour récupérer l'état  $\psi_s(n-1; x)$  d'excitation inférieure. En rappelant la forme rationnelle selon  $n$  des paramètres  $a_s(n)$  et  $b_s(n)$  définis en (1.5.7), on voit cependant que l'association avec les paramètres  $a_s(n-1)$  et  $b_s(n-1)$  de l'état  $\psi_s(n-1; x)$  est possible seulement dans le cas Pöschl-Teller:

$$\left. \begin{aligned} a_s(n) + 1 &= a_s(n-1) \\ b_s(n) + 1 &= b_s(n-1) \end{aligned} \right\} \iff \lambda = 0. \quad (1.6.3)$$

On constate alors qu'on ne peut pas retrouver l'état  $\psi_s(n-1; x)$  avec cette relation pour un système de Rosen-Morse général. La même problématique survient lorsqu'on tente de retrouver  $\psi_s(n+1; x)$  de la façon dont on l'a fait en (1.4.8). Ce n'est pas non plus possible avec d'autres relations fonctionnelles pour les polynômes de Jacobi.

Fondamentalement, le problème découle directement du caractère rationnel que les paramètres  $a_s(n)$  et  $b_s(n)$  ont en fonction de  $n$ . En fait, les relations fonctionnelles que partagent les polynômes de Jacobi permettent au mieux de relier  $P_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  avec  $P_n^{(\alpha+k, \beta+h)}(y)$  pour des entiers  $h$  et  $k$  arbitraires [54]. Ces translations des paramètres par des entiers demeurent insuffisantes pour faire des associations avec les paramètres rationnels  $a_s(n \pm 1)$  et  $b_s(n \pm 1)$  des états adjacents  $\psi_s(n \pm 1; x)$  du système de Rosen-Morse. On constate alors l'échec de la méthode algébrique pour construire les opérateurs d'échelle  $A^\pm$  du potentiel de Rosen-Morse.



# Chapitre 2

---

## Supersymétrie en mécanique quantique et le système de Rosen-Morse

Alors que le problème des opérateurs d'échelle pour le potentiel de Rosen-Morse a été posé, ce deuxième chapitre vise à introduire le matériel nécessaire qui servira à sa résolution, et aux contributions additionnelles qui en découleront. La mécanique quantique supersymétrique provient d'un modèle simplifié proposé pour l'étude de la brisure de symétrie en physique des particules [16]. Lorsqu'appliqué à la mécanique quantique non-relativiste, le modèle de supersymétrie met en relation un paire de systèmes exactement résolubles à l'aide d'opérateurs différentiels d'ordre arbitraires. Dans ce mémoire, on se restreint au cas où les systèmes sont reliés par des opérateurs du premier ordre. On présente le formalisme de la SUSYQM de premier ordre et ses trois différents cas à la Section 2.1. Un de ces cas mène au concept d'invariance de forme qui est discuté à la Section 2.2. Les autres cas sont utilisés en ce qui a trait aux extensions rationnelles du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique. Celles-ci sont finalement introduites à la Section 2.3.

### 2.1. SUSYQM de premier ordre

On considère un système résoluble initial  $H^0$ . On souhaite générer un système résoluble  $H^1$  partageant le spectre du système  $H^0$ , et dont les états propres  $\psi^1(n; x)$  peuvent être obtenus à partir des états propres  $\psi^0(n; x)$  du système initial. Pour ce faire, la méthode de supersymétrie (SUSY) de premier ordre propose l'existence de deux opérateurs différentiels mutuellement adjoints du premier ordre:

$$B^\pm = W(x) \pm \frac{d}{dx}, \quad (2.1.1)$$

venant entrelacer les hamiltoniens [17, 55, 56]:

$$B^- H^0 = H^1 B^-. \quad (2.1.2)$$

En imposant la forme des opérateurs d'entrelacement  $B^\pm$  dans (2.1.2), le *superpotentiel*  $W(x)$  doit satisfaire deux équations:

$$W'(x) + W^2(x) = V^0(x) - \varepsilon, \quad (2.1.3)$$

$$V^1(x) = V^0(x) - 2W'(x), \quad (2.1.4)$$

où  $\varepsilon$  est une constante appelée l'*énergie de factorisation*. On remarque qu'un couple  $(W(x), \varepsilon)$  satisfaisant l'équation de Riccati (2.1.3) permet, via (2.1.4), de déterminer le potentiel  $V^1$  du système généré à partir du potentiel initial  $V^0$  connu. Ces couples ne sont en général pas uniques pour un potentiel initial  $V^0$  donné. De plus, l'équation (2.1.3) assure également la factorisation des hamiltoniens [57]:

$$H^0 = B^+ B^- + \varepsilon \quad \text{et} \quad H^1 = B^- B^+ + \varepsilon, \quad (2.1.5)$$

à partir de quoi le nom d'énergie de factorisation prend tout son sens. On dit alors des hamiltoniens  $H^0$  et  $H^1$  qu'ils sont des partenaires supersymétriques.

Décrivons à présent la procédure pour obtenir des superpotentiels. On pose  $W(x) = u'(x)/u(x)$  pour une fonction  $u(x)$  n'ayant aucun zéro sur le domaine [58]. Ainsi, ce processus de linéarisation de l'équation (2.1.3) la réduit à l'équation de Schrödinger de  $H^0$  pour  $u(x)$ , la *solution souche* d'énergie  $\varepsilon$ :

$$-u''(x) + V^0(x)u(x) = \varepsilon u(x). \quad (2.1.6)$$

Puisque l'équation de Schrödinger (2.1.6) apparaît comme pur artefact mathématique dans la résolution, la solution souche  $u(x)$  n'est pas soumise à aucune contrainte physique. Elle n'a donc pas à être normalisable. En fait, on peut montrer qu'une condition nécessaire, mais non-suffisante, à l'absence de zéro pour  $u(x)$  est  $\varepsilon \leq E^0(0)$  [17, 59]. La solution souche  $u(x)$ , permettant ultimement de connecter les hamiltoniens partenaires, est alors soit l'état fondamental  $\psi^0(0; x)$  de  $H^0$  d'énergie  $E^0(0)$  ou un état non-normalisable de  $H^0$  sans zéro et d'énergie inférieure à  $E^0(0)$ .

Après avoir trouvé un superpotentiel  $W(x)$  et généré un système partenaire  $H^1$ , il reste à obtenir les états propres et le spectre de ce dernier. À partir de l'équation de Schrödinger du système initial, on invoque la relation d'entrelacement (2.1.2) pour obtenir:

$$H^1(B^- \psi^0(n; x)) = B^- H^0 \psi^0(n; x) = E^0(n)(B^- \psi^0(n; x)). \quad (2.1.7)$$

Si  $B^- \psi^0(n; x) \neq 0$ , on déduit de cette équation que  $B^- \psi^0(n; x)$  est un état propre du partenaire  $H^1$  avec la même énergie  $E^0(n)$ . Donc,  $H^1$  partage le spectre de  $H^0$ , à l'exception du cas où  $B^-$  annihile un des  $\psi^0(n; x)$ . Les états des deux systèmes sont alors en correspondance

quasi-exacte. En normalisant, on écrit précisément:

$$\psi^1(n; x) = \frac{B^- \psi^0(m; x)}{\sqrt{E^0(m) - \varepsilon}}, \quad \text{avec} \quad E^1(n) = E^0(m), \quad (2.1.8)$$

où  $m \in \{n, n \pm 1\}$  est une translation de  $n$  qui dépend de si un niveau d'énergie est ajouté ou retiré de  $\text{Sp}(H^0)$  durant la transformation, ou si les spectres d'énergies sont identiques. Ces trois cas de modifications spectrales dépendent directement du choix de solution souche  $u(x)$  [17, 60]. Il est à ce stade important de comprendre l'origine et les conséquences de chacun de ces cas, tel qu'exposé dans ce qui suit. On commence avant tout par une courte proposition, après laquelle on décrit les trois cas.

**Proposition 2.1.1.** *Soient deux fonctions  $\phi_1(x)$  et  $\phi_2(x)$  telles que  $B^- \phi_1(x) = 0$  et  $B^+ \phi_2(x) = 0$ . Alors  $\phi_1(x)$  et  $\phi_2(x)$  ne peuvent pas être toutes les deux normalisables.*

DÉMONSTRATION. La solution aux équations différentielles  $B^- \phi_1(x) = 0$  et  $B^+ \phi_2(x) = 0$  sont

$$\phi_1(x) \propto e^{\int^x W(y) dy} = u(x) \quad \text{et} \quad \phi_2(x) \propto e^{-\int^x W(y) dy} = \frac{1}{u(x)}. \quad (2.1.9)$$

Ainsi, si une de  $\phi_1(x)$  ou  $\phi_2(x)$  est normalisable, l'autre diverge nécessairement aux frontières.  $\square$

(a) SUSY de retrait ( $m = n + 1$ ). Ce cas survient avec l'état fondamental, c'est-à-dire lorsque  $u(x) = \psi^0(0; x)$  et  $\varepsilon = E^0(0)$ . La factorisation (2.1.5) pour  $H^0$  implique que  $B^- \psi^0(0; x) = 0$ . L'état fondamental  $\psi^0(0; x)$  de  $H^0$  n'est donc connecté à aucun état de  $H^1$ . On utilise alors  $m = n + 1$  dans la correspondance (2.1.8). De plus, la Proposition 2.1.1 ainsi que la factorisation (2.1.5) pour  $H^1$  indiquent qu'il n'y a pas d'état normalisable d'énergie  $E^0(0)$  pour le système  $H^1$ . Ce niveau d'énergie est donc retiré par la transformation supersymétrique. On a  $\text{Sp}(H^1) = \text{Sp}(H^0) \setminus \{E^0(0)\}$ .

(b) SUSY d'ajout ( $m = n - 1$ ). Ce cas survient avec une solution souche  $u(x)$  non-normalisable, sans zéro, et d'énergie  $\varepsilon < E^0(0)$ , mais telle que son inverse  $1/u(x)$  est normalisable. De la factorisation (2.1.5) pour  $H^0$ , il est clair que  $B^-$  n'annihile aucun état  $\psi^0(n; x)$ . Chaque état de  $H^0$  est alors en correspondance avec un état de  $H^1$  et tout le spectre de  $H^0$  est partagé avec  $H^1$ . Il découle cependant de la Proposition 2.1.1 ainsi que la factorisation (2.1.5) pour  $H^1$  que  $1/u(x)$ , normalisable, est un état propre de  $H^1$  avec énergie  $\varepsilon$ . Puisque  $\varepsilon < E^0(0)$ , cet état est l'état fondamental  $\psi^1(0; x)$  à  $H^1$ :

$$\psi^1(0; x) \propto \frac{1}{u(x)}, \quad \text{avec} \quad E^1(0) = \varepsilon. \quad (2.1.10)$$

On utilise alors  $m = n - 1$  pour les autres états dans la correspondance (2.1.8). Le partenaire  $H^1$  a donc un niveau d'énergie supplémentaire par rapport à  $H^0$ . On a  $\text{Sp}(H^1) = \text{Sp}(H^0) \cup \{\varepsilon\}$ .

- (c) SUSY isospectrale ( $m = n$ ). Ce cas survient également avec une solution souche  $u(x)$  non-normalisable, sans zéro, et d'énergie  $\varepsilon < E^0(0)$ , mais telle que son inverse  $1/u(x)$  n'est pas normalisable non plus. Similairement au cas précédent, chaque état de  $H^0$  est en correspondance avec un état de  $H^1$  et tout le spectre de  $H^0$  est partagé avec  $H^1$ . De la proposition 2.1.1, on déduit également que  $H^1$  n'a pas d'état de niveau d'énergie additionnel  $\varepsilon$ . En fait, tous les états des deux systèmes et leurs énergies sont en parfaite correspondance, d'où  $m = n$ . On a une transformation isospectrale:  $\text{Sp}(H^1) = \text{Sp}(H^0)$ .

Dans cet ouvrage, les supersymétries de retrait auront un rôle fondamental dans la caractérisation de la propriété d'invariance de forme discutée dans la prochaine section. Cette propriété aura un rôle fondamental dans notre développement sur les opérateurs d'échelle. En revanche, les supersymétries d'ajout et isospectrales sont celles qui donnent naissance aux partenaires supersymétriques que sont les extensions rationnelles. Celles-ci seront ensuite discutées et feront l'objet d'une extension de notre travail sur les opérateurs d'échelle du système de Rosen-Morse dans l'article présenté au Chapitre 3.

## 2.2. Invariance de forme en SUSYQM

L'introduction des opérateurs  $A^\pm$  dans la résolution du problème de l'oscillateur harmonique a non-seulement donné naissance au concept d'opérateurs d'échelle, mais aussi à une autre technique similaire pour obtenir le spectre et les états propres de potentiels quantiques: la *méthode de factorisation*. Après Dirac et Schrödinger, elle connut son triomphe avec la publication [21] d'Infeld et Hull, devenant la référence en mécanique quantique exactement résoluble [60]. Comme son nom l'indique, la méthode repose sur l'idée de factorisation du hamiltonien, mais aussi d'une relation d'entrelacement. De plus, il s'avère que la méthode de factorisation est englobée dans la SUSYQM, sous le concept d'invariance de forme [61, 62]. Alors que ce concept jouera un rôle central dans la construction des opérateurs d'échelle du système de Rosen-Morse, cette section vise à résumer l'invariance de forme dans le langage de la supersymétrie comme un cas particulier de la SUSY de retrait.

L'invariance de forme est une propriété intéressante que possèdent certains potentiels dans le contexte de la supersymétrie [55]. Elle représente un certain lien d'invariance entre un potentiel et son partenaire à travers une SUSY de retrait. En effet, soit un potentiel initial  $V^0(x) = V_{R_0}(x)$  donné en termes d'un ensemble  $R_0$  de paramètres. Par exemple, on aurait

$R_0 = \{s\}$  pour le Pöschl-Teller, alors qu'on aurait plutôt  $R_0 = \{s, \lambda\}$  pour le Rosen-Morse. On dit d'un tel potentiel qu'il est invariant de forme si le superpotentiel  $W_{R_0}$  issu de la SUSY de retrait génère un partenaire supersymétrique  $V^1$  satisfaisant:

$$V^1(x) = V_{R_1}(x) + L(R_1). \quad (2.2.1)$$

Cela signifie que  $V^1$  est le même potentiel que  $V^0$ , mais avec des paramètres  $R_1 = f(R_0)$  modifiés par une fonction  $f$  des paramètres initiaux, et translaté par une constante  $L(R_1)$ . Le nom d'invariance de forme est alors justifié puisque la transformation supersymétrique ne change donc pas fondamentalement la forme des potentiels. Les cas les plus communs sont ceux où  $f$  agit comme une translation ou une dilatation sur un ou plusieurs des paramètres initiaux [63].

On note ensuite que le potentiel  $V^1$  hérite lui aussi de la propriété d'invariance de forme par (2.2.1). Ainsi, on peut procéder à faire une nouvelle SUSY de retrait à partir de  $V^1$ . Le superpotentiel  $W_{R_1}$  obtenu a alors la même forme que  $W_{R_0}$  mais avec les paramètres modifiés en conséquence, et permet de générer un partenaire  $V^2$  à  $V^1$ . En continuant ce processus de façon itérative, on génère une hiérarchie de systèmes  $\{H^0, H^1, H^2, \dots\}$  dont les potentiels  $V^n$  invariants de forme s'écrivent tous comme [63]:

$$V^n(x) = V_{R_n}(x) + \sum_{i=1}^n L(R_i), \quad \text{où} \quad R_n \equiv f(R_{n-1}) = (f^n)(R_0). \quad (2.2.2)$$

Dans l'approche présentée à la section précédente, les SUSY de retrait sont générées à partir de la connaissance de l'état fondamental du système. On peut à l'inverse montrer que la propriété d'invariance de forme (2.2.1) est en soi une condition suffisante à la résolution algébrique du spectre et des états propres de  $V^0 = V_{R_0}$ . En effet, soient  $B_{R_n}^\pm$  les opérateurs formés avec  $W_{R_n}(x)$  entrelaçant les partenaires  $H^n$  et  $H^{n+1}$  dans (2.1.2). La factorisation

$$H^0 = H_{R_0} = B_{R_0}^+ B_{R_0}^- + E(R_0), \quad (2.2.3)$$

où  $E(R_0) \equiv E^0(0)$  permet d'abord d'obtenir  $\psi^0(0; x)$  via l'équation d'annihilation  $B_{R_0}^- \psi^0(0; x) = 0$ . L'équation de Schrödinger permet ensuite de résoudre pour l'énergie  $E(R_0)$  en fonction des paramètres  $R_0$  initiaux, complétant ainsi le niveau fondamental. Ce sont les autres factorisations qui vont permettre d'achever la résolution. En effet, l'invariance de forme impose la forme de factorisation de  $H^n$  comme:

$$H^n = H_{R_n} + \sum_{i=1}^n L(R_i) = B_{R_n}^+ B_{R_n}^- + E(R_n) + \sum_{i=1}^n L(R_i). \quad (2.2.4)$$

Ainsi, comme le dicte la SUSY de retrait, les termes constants de cette équation correspondent à l'énergie fondamentale  $E^n(0)$  de  $H^n$ . Cependant, le processus itératif implique que  $H^n$  partage le même spectre que  $H^0$ , mais avec les  $n$  premiers niveaux d'énergie retirés. On sait alors que cette énergie  $E^n(0)$  fondamentale correspond à celle de la  $n$ -ième excitation

de  $H^0$ , soit  $E^0(n)$ . Tout le spectre de  $H^0$  est obtenu ainsi pour chaque  $n$ :

$$E^0(n) = E(R_n) + \sum_{i=1}^n L(R_i). \quad (2.2.5)$$

La factorisation de  $H^n$  (2.2.4) donne également une équation d'annihilation pour son état fondamental:  $B_{R_n}^- \psi^n(0; x) = 0$ . On utilise finalement la correspondance (2.1.8) entre chaque membre de la hiérarchie pour retrouver le  $n$ -ième état propre de  $H^0$ :

$$\psi^0(n; x) = \frac{B_{R_0}^+}{\sqrt{E^0(n) - E^0(0)}} \cdots \frac{B_{R_{n-2}}^+}{\sqrt{E^0(n) - E^0(n-2)}} \frac{B_{R_{n-1}}^+}{\sqrt{E^0(n) - E^0(n-1)}} \psi^n(0; x). \quad (2.2.6)$$

Cette dernière relation entre les états propres excités et les états fondamentaux de différents membres de la hiérarchie sera directement utilisée dans la construction des opérateurs d'échelles au Chapitre 3, puisqu'on verra que le système de Rosen-Morse est invariant de forme.

### 2.3. Extensions rationnelles du système de Rosen-Morse hyperbolique

Une application particulière des transformations supersymétriques isospectrales et d'ajout est la construction d'extensions rationnelles, également appelées déformations algébriques, aux potentiels exactement résolubles connus [64, 65]. Pour un potentiel  $V_R$  défini par un ensemble  $R$  de paramètres, une extension rationnelle  $V_{\text{ext}}$  de ce potentiel s'écrit comme

$$V_{\text{ext}}(x) = V_{R'}(x) + V_{\text{rat}}(z(x)), \quad (2.3.1)$$

où  $V_{R'}$  a la même forme que  $V_R$ , au sens décrit dans la section précédente, et où  $V_{\text{rat}}(z(x))$  est une fonction rationnelle en une variable  $z(x)$  propre au contexte [66]. L'intérêt pour ces potentiels a grandi considérablement dans la dernière décennie notamment puisqu'ils fournissent une interprétation quantique aux polynômes orthogonaux exceptionnels (EOP) [19] intervenant, dans plusieurs cas, dans l'expression de leurs états propres [50, 67, 68]. La présente section met de l'avant les extensions du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique dans l'optique d'illustrer les cas de supersymétries isospectrales et d'ajout, mais aussi pour en comprendre la provenance dans les contributions du Chapitre 3.

Les extensions rationnelles sont générées par des solutions souches polynomiales à l'équation de Schrödinger du système initial  $H^0$ . Dans le cas du potentiel de Rosen-Morse, ces solutions sont trouvées à partir de la solution générale et s'expriment, tout comme les états propres, en termes des polynômes de Jacobi  $P_k^{(\alpha, \beta)}(z)$  de degré  $k$  en la variable  $z = \tanh x$ . Cependant, pour qu'elles soient candidates pour des SUSY d'ajout ou isospectrales, on demande à ces solutions non-normalisables d'avoir une énergie  $\varepsilon < E^0(0)$  et de n'avoir aucun

zéro sur  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $z \in (-1,1)$ . Ces conditions divisent les solutions souches polynomiales en trois types (I, II et III), qui ont été étudiés dans [52]. Avant de développer davantage chacun des cas, on rappelle l'expression du potentiel de Rosen-Morse initial, cette fois en termes de la variable d'intérêt  $z = \tanh x$ :

$$V^0(x) = V_s(x) = 2\lambda z - s(s+1)(1-z^2). \quad (2.3.2)$$

### 2.3.1. SUSY isospectrales: types I et II

Les extensions rationnelles du potentiel de Rosen-Morse de type I et de type II sont issues de la même solution à l'équation de Schrödinger. Leur différence se trouve dans la fenêtre où les paramètres  $\lambda$  et  $s$  satisfont les conditions nécessaires à la SUSY. Pour cette raison, on traite ces deux cas comme un seul. Alors, les solutions polynomiales de degré  $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$  en  $z$  caractérisant les types I et II sont respectivement données par [52]:

$$u_I(x) = (1-z)^{\frac{\alpha}{2}}(1+z)^{\frac{\beta}{2}}P_k^{(\alpha,\beta)}(z), \quad \text{où} \quad s > k, \quad s(s-k) < \lambda < s^2, \quad (2.3.3)$$

et

$$u_{II}(x) = u_I(x), \quad \text{où} \quad \frac{k}{2} < s < k, \quad -s(s-k) < \lambda < s^2. \quad (2.3.4)$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  varient en fonction du degré  $k$  du polynôme selon:

$$\alpha = s - k + \frac{\lambda}{s - k}, \quad \text{et} \quad \beta = s - k - \frac{\lambda}{s - k}. \quad (2.3.5)$$

L'énergie de factorisation est donnée par

$$\varepsilon = -(s-k)^2 - \frac{\lambda^2}{(s-k)^2}. \quad (2.3.6)$$

On peut montrer que ces solutions souches divergent à une extrémité du domaine tout en étant nulles à l'autre [52]. Ainsi, leur inverse n'est pas normalisable, et ces solutions mènent à des transformations SUSY isospectrales. On trouve le superpotentiel et les opérateurs d'entrelacement:

$$W(x) = -(s-k)z - \frac{\lambda}{s-k} + (1-z^2)\frac{d}{dz} \log P_k^{(\alpha,\beta)}(z), \quad \text{et} \quad B^\pm = W(x) \pm \frac{d}{dx}. \quad (2.3.7)$$

Par conséquent, les extensions rationnelles  $V_{ext}$  de type I ou II sont les partenaires supersymétriques obtenu de (2.1.4) s'exprimant comme la somme de deux termes:

$$V^1(x) = V_{ext}(x) = V_{s-1}(x) + V_{rat}(x). \quad (2.3.8)$$

Le premier terme,  $V_{s-1}(x)$ , est un potentiel de Rosen-Morse avec le paramètre  $s$  translaté par  $-1$ , alors que le second terme est une fonction rationnelle de  $z = \tanh x$ :

$$V_{rat}(x) = 2(1 - z^2) \left\{ 2z \frac{P'_k(z)}{P_k(z)} - (1 - z^2) \left[ \frac{P''_k(z)}{P_k(z)} - \left( \frac{P'_k(z)}{P_k(z)} \right)^2 \right] - k \right\}, \quad (2.3.9)$$

où le prime dénote la dérivée par rapport à  $z$  et où on a abrégé  $P_k(z) \equiv P_k^{(\alpha, \beta)}(z)$  [52].

Ce potentiel est exactement résoluble par les méthodes de supersymétrie. En effet, les états propres sont obtenus selon (2.1.8):

$$\psi^1(n; x) = \frac{B^- \psi^0(n; x)}{\sqrt{E^0(n) - \varepsilon}}, \quad \text{avec} \quad E^1(n) = E^0(n). \quad (2.3.10)$$

La Fig. 2.1(a) met en comparaison le potentiel de Rosen-Morse initial aux paramètres  $s = 8.5$  et  $\lambda = 5$  avec l'extension rationnelle  $V_{ext}$  de type I issue de la solution souche  $u_I(x)$  de degré  $k = 8$ . On remarque que le terme rationnel  $V_{rat}$  contribue à modifier légèrement l'emplacement du point d'équilibre du puits, tout en maintenant le même comportement asymptotique. De plus, pour les raisons mentionnées précédemment, on comprend que les extensions rationnelles de type II aboutissent à des tracés similaires à ceux de type I.

### 2.3.2. SUSY d'ajout: type III

Les extensions rationnelles de type III, en revanche, se démarquent des deux précédentes par la forme de leurs solutions souches et, conséquemment, par leurs répercussions dans les transformations supersymétriques. Les solutions souches polynomiales qui génèrent ce dernier type d'extensions rationnelles pour le potentiel de Rosen-Morse s'écrivent plutôt comme:

$$u_{III}(x) = (1 - z)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + z)^{-\frac{\beta}{2}} P_k^{(-\alpha, -\beta)}(z), \quad \text{où} \quad k \in \{2, 4, 6, \dots\}, \quad 0 \leq \lambda < s^2, \quad (2.3.11)$$

où cette fois les paramètres sont

$$\alpha = s + k + 1 + \frac{\lambda}{s + k + 1} \quad \text{et} \quad \beta = s + k + 1 - \frac{\lambda}{s + k + 1}, \quad (2.3.12)$$

alors que l'énergie de factorisation prend la forme:

$$\varepsilon = -(s + k + 1)^2 - \frac{\lambda^2}{(s + k + 1)^2}. \quad (2.3.13)$$

On montre dans [52] que les solutions souches  $u_{III}(x)$  divergent aux deux frontières du domaine. Les inverses  $1/u_{III}(x)$  sont alors normalisables, ce qui mène à des SUSY d'ajout. Similairement, on génère le système partenaire en trouvant d'abord le superpotentiel et les

opérateurs d'entrelacement:

$$W(x) = (s + k + 1)z + \frac{\lambda}{s + k + 1} + (1 - z^2) \frac{d}{dz} \log P_k^{(-\alpha, -\beta)}(z), \quad \text{et} \quad B^\pm = W(x) \pm \frac{d}{dx}. \quad (2.3.14)$$

L'expression pour les extensions rationnelles de type III déduite est [52]:

$$V^1(x) = V_{ext}(x) = V_{s+1}(x) + V_{rat}(x), \quad (2.3.15)$$

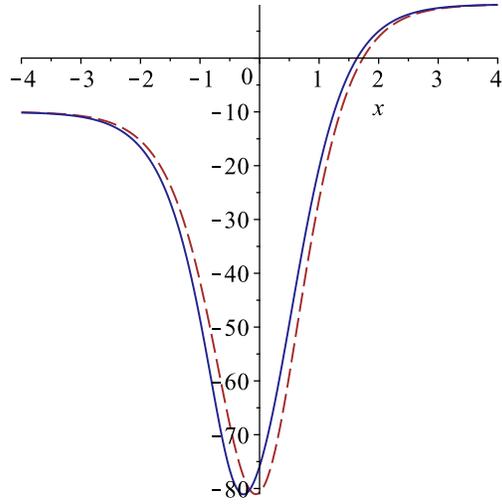
où cette fois le terme Rosen-Morse a son paramètre translaté par +1. Le terme rationnel en  $z$  s'exprime avec la même équation (2.3.9), dans laquelle on prend plutôt  $P_k(z) \equiv P_k^{(-\alpha, -\beta)}(z)$ .

Les états propres sont donnés similairement par la connexion (2.1.8) pour  $m = n - 1$ . À ceux-ci vient s'ajouter l'état fondamental associé au niveau d'énergie  $E^1(0) = \varepsilon$  additionnel. On obtient:

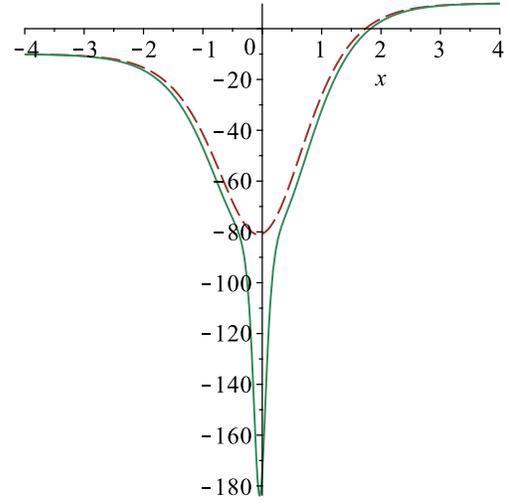
$$\begin{cases} \psi^1(n + 1; x) = \frac{B^- \psi^0(n; x)}{\sqrt{E^0(n) - \varepsilon}}, & E^1(n + 1) = E^0(n), \\ \psi^1(0; x) \propto \frac{1}{u_{III}(x)}, & E^1(0) = \varepsilon. \end{cases} \quad (2.3.16)$$

La Fig. 2.1(b) permet de comparer l'extension rationnelle de type III pour  $k = 2$  avec le tracé du potentiel de Rosen-Morse initial avec les mêmes paramètres ( $s = 8.5$  et  $\lambda = 5$ ). La Fig. 2.1 permet également comparer le caractère fondamentalement différent de la contribution entre le terme rationnel du type III et celui du type I (ou II). Celui du type III creuse considérablement le puits du potentiel de Rosen-Morse, dénaturant son apparence originale. L'apparition d'un sous-puits est justifiée par la nécessité d'admettre l'état fondamental  $\psi^1(0; x)$  dont l'énergie est inférieure à celles du spectre du système initial. Finalement, puisque l'énergie de factorisation  $\varepsilon$  diminue lorsque le degré  $k$  augmente, le choix d'une solution souche  $u_{III}(x)$  de degré  $k$  plus élevé aurait pour effet de creuser encore davantage le puits de l'extension rationnelle de type III.

Ayant désormais posé le problème à résoudre, et introduit les outils pour y parvenir, on présente dans le chapitre qui suit les contributions originales sous la forme d'un article.



(a) Type I (SUSY isospectrale) avec  $k = 8$



(b) Type III (SUSY d'ajout) avec  $k = 2$

**Fig. 2.1.** Comparaison de différents types d'extensions rationnelles  $V_{rat}(x)$  pour le potentiel de Rosen-Morse  $V_s(x)$  aux paramètres  $s = 8.5$  et  $\lambda = 5$  (rouge, trait pointillé). On illustre  $V_{rat}(x)$  pour le type I (bleu, trait plein) en (a) et  $V_{rat}(x)$  pour le type III (vert, trait plein) en (b).

# Chapitre 3

---

## Ladder operators and coherent states for the Rosen-Morse system and its rational extensions

par

Simon Garneau-Desroches<sup>1</sup> et Véronique Hussin<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>) Département de Physique & Centre de Recherches Mathématiques  
Université de Montréal, QC, H3C 3J7, Canada

(<sup>2</sup>) Département de Mathématiques et de Statistique & Centre de Recherches Mathématiques  
Université de Montréal, QC, H3C 3J7, Canada

Cet article a été soumis dans *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*.

**ABSTRACT.** Ladder operators for the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential are realized using the shape invariance property from supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM). The extension of the ladder operators to a specific class of rational extensions of the RMII potential is presented and technicalities are discussed. Coherent states are then constructed as almost eigenstates of the lowering operators. Properties are analyzed and compared. Generalization of the ladder operators and coherent states constructions to the trigonometric Rosen-Morse potential (RMI) is obtained through a point canonical transformation (PCT).  
**Keywords:** ladder operators, supersymmetric quantum mechanics, rational extensions, coherent states

### 3.1. Introduction

Ladder operators are of interest in quantum mechanics due to their wide range of applications. Algebraic resolution of different systems [1, 2], computation of matrix elements for observables [2], study of underlying structure of quantum systems [3] and coherent states construction [4] are common examples. For exactly solvable 1D quantum systems, ladder operators connect bounded eigenstates of adjacent energy levels of a Hamiltonian. Their realizations as first order differential operators in the case of an energy spectrum that is polynomial in the excitation number  $n$  has been extensively studied (see, e.g., [3, 5, 6, 7]). This is however not so easy for systems where the energy is a rational function of the excitation number  $n$  such as the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential. This system admits a finite discrete bounded spectrum and has been studied in different contexts [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Recently, a realization of the ladder operators was obtained for this system through an analogy with classical mechanics [14, 15]. In this paper, we intend to motivate a realization of the ladder operators for the RMII system from a purely quantum mechanical point of view.

Supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) was introduced in 1981 in the context of high-energy physics [16]. However, its application to non-relativistic quantum mechanics proliferated in the last decades since it can be used as a technique to generate new exactly solvable potentials from known initial ones with quasi-identical spectra. The hyperbolic Rosen-Morse system has been studied in the context of SUSYQM at the first order [12, 17] and the second order [13]. In particular, it is known that this potential is shape invariant [17], meaning that it returns to itself, with modified parameters, after a particular SUSY transformation. The aim of this work is to use this shape invariance to construct the ladder operators of the RMII system. We then make use of SUSYQM one step further in adapting the ladder operators to suit specific rational extensions (types of solvable potentials obtained from the RMII by a SUSY transformation), namely the type III from the classification [12].

Barut-Girardello coherent states of an infinite discrete bounded spectrum system are defined as eigenstates of a lowering ladder operator [4]. This definition has been extended for systems with a finite bounded spectrum [18, 19] as almost eigenstate of a lowering operator. Therefore, the realization of ladder operators motivates a precise coherent states construction which we work out both for the RMII system and for its rational extensions. Once built, standard coherent state properties such as space localization, trajectory of position and momentum expectation values, and minimization of the Heisenberg uncertainty principle are explored.

It is also known that shape invariant potentials are connected through point canonical transformations (PCT) [11]. This offers a direct link to the trigonometric counterpart of the Rosen-Morse potential (RMI) [20], which also have energies rational in the excitation number  $n$ , but for which the discrete bounded spectrum is infinite. We exploit this connection to

carry our results and constructions onto the RMI potential, therefore covering both Rosen-Morse potentials.

The plan of the paper is as follows. In Section 3.2, we review some of the known formalisms for ladder operators and first order supersymmetric quantum mechanics. In Section 3.3, we introduce the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential and expose its shape invariance property in SUSYQM. From there, the construction of ladder operators is carried out completely. In Section 3.4 we introduce the type III rational extensions of the RMII potential. We then proceed to adapt the RMII ladder operators to the type III rational extensions using SUSYQM. In Section 3.5, we construct the associated coherent states as almost eigenstates of the lowering operators previously obtained for the RMII potential and its rational extensions. The space-localization, the trajectory and the position-momentum uncertainty relation are analyzed and then compared for these states. In Section 3.6, we generalize the results to the trigonometric Rosen-Morse (RMI) system by means of a PCT. Conclusions are drawn in Section 3.7, where further investigations are also suggested.

## 3.2. Ladder operators and SUSYQM

We present the theory on which the work is based. First, in Section 3.2.1, we introduce ladder operators for 1D solvable quantum systems as operators connecting eigenstates of adjacent energies according to a precise action. A realization of this action is precisely what will be attempted for the Rosen-Morse systems, and will play an fundamental role in the coherent states construction. Then, a review of first order supersymmetric quantum mechanics (SUSYQM) is presented in Section 3.2.2. SUSYQM is a tool to generate new solvable systems from a known initial one. This formalism will play a role throughout this work both as a tool to realize the desired ladder operator action and as a way to extend the ladder operators to the rational extensions of the Rosen-Morse system.

### 3.2.1. Ladder operators

Consider a 1D exactly solvable quantum system described by a Hamiltonian  $H$  and its associated Schrödinger equation ( $\hbar = 2m = 1$ ):

$$H\psi(n; x) = E(n)\psi(n; x), \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad (3.2.1)$$

where  $V(x)$  is the potential and  $\psi(n; x) \in L^2(\mathcal{D})$  is a bounded eigenstate of  $H$  with energy  $E(n)$ . The associated bounded spectrum  $\text{Sp}(H) = \{E(n)\}_{n \geq 0}$  is discrete and can be either finite or infinite.

In this context, we usually define ladder operators  $A^\pm$  as differential operators connecting eigenstates of  $H$  of adjacent energies in  $\text{Sp}(H)$ . Formally, we define  $A^\pm$  by their action on

the eigenstates [5, 6, 7]:

$$A^- \psi(n; x) = \sqrt{k(n)} \psi(n-1; x), \quad A^+ \psi(n; x) = \sqrt{k(n+1)} \psi(n+1; x), \quad (3.2.2)$$

for a certain choice of a real positive function  $k(n)$ , and such that we have the ground state annihilation  $A^- \psi(0; x) = 0$ . In the case where the spectrum is finite, namely that there is a maximal excitation  $n_{max}$ , one may choose  $k(n)$  to impose as well  $A^+ \psi(n_{max}; x) = 0$  (see, e.g., [21]). In this paper, we do not impose such restriction but consider the action  $A^+ \psi(n_{max}; x)$  to be ill-defined in the sense that it yields an unbounded state.

Introducing an operator  $\delta(H)$  diagonal in the eigenstates basis, the operator  $A^+ A^-$  factorizes the Hamiltonian as:

$$A^+ A^- \psi(n; x) = \delta(H) \psi(n; x), \quad \delta(E(n)) = k(n), \quad (3.2.3)$$

and similarly for the reverse product  $A^- A^+$ . Moreover, it is known [7, 14] that from the ladder operator action (3.2.2), one obtains commutation relations with the Hamiltonian by introducing further diagonal operators  $\Delta_{\pm}(H)$  and  $\Omega(H)$ :

$$[H, A^{\pm}] \psi(n; x) = A^{\pm} \Delta_{\pm}(H) \psi(n; x), \quad \Delta_{\pm}(E(n)) = E(n \pm 1) - E(n), \quad (3.2.4)$$

$$[A^-, A^+] \psi(n; x) = \Omega(H) \psi(n; x), \quad \Omega(E(n)) = k(n+1) - k(n). \quad (3.2.5)$$

From the later, one extracts the Generalized Heisenberg Algebra (GHA) [6, 7] generated by  $\{H, A^-, A^+\}$ :

$$[H, A^{\pm}] = A^{\pm} \Delta_{\pm}(H), \quad [A^-, A^+] = \Omega(H). \quad (3.2.6)$$

For common exactly solvable 1D quantum systems (harmonic oscillator, infinite square well, Morse, Pöschl-Teller, etc.), the realization (3.2.2) for  $A^{\pm}$  can be achieved with first order differential operators of the form [3]:

$$A^{\pm} = f^{\pm}(x, N) + g^{\pm}(x, N) \frac{d}{dx}, \quad (3.2.7)$$

where  $f^{\pm}$  and  $g^{\pm}$  are to be determined and where  $N$  is the diagonal number operator defined by:

$$N \psi(n; x) = n \psi(n; x). \quad (3.2.8)$$

The use of the number operator in the construction of  $A^{\pm}$  arise from the fact that the operators needs to vary depending on the excitation of the state it acts on. Standard construction techniques can be found in [3, 22, 23, 24]. However, in this work we consider the Rosen-Morse system, for which a first order realization such as (3.2.7) cannot be achieved using standard methods [14].

### 3.2.2. Supersymmetric quantum mechanics

Suppose two Hamiltonians  $H$  and  $\tilde{H}$  are connected by intertwining operators  $B^\pm$  in the following way [17, 25, 26, 27, 28]:

$$B^- H = \tilde{H} B^-, \quad H B^+ = B^+ \tilde{H}. \quad (3.2.9)$$

For first order SUSYQM, we take  $B^\pm$  to be differential operators of the first order:

$$B^\pm = W(x) \pm \frac{d}{dx}, \quad (3.2.10)$$

where the superpotential  $W(x)$  is a real function. Necessary and sufficient conditions for (3.2.9) are then obtained:

$$\tilde{V}(x) = V(x) - 2W'(x), \quad (3.2.11)$$

$$W'(x) + W^2(x) = V(x) - \varepsilon, \quad (3.2.12)$$

where  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  is an integration constant referred to as the factorization energy. We know that SUSYQM is a technique to generate new exactly solvable systems from a known initial one [26]. Taking  $H$  to be such initial solved system, it is seen that finding a couple  $(W(x), \varepsilon)$  solving the Ricatti equation (3.2.12) yields an expression for the new potential  $\tilde{V}(x)$  through (3.2.11). Solutions are usually achieved by setting  $W(x) = u'(x)/u(x)$ . Equation (3.2.12) thus reduces to a Schrödinger equation for  $u(x)$  with energy  $\varepsilon$ :

$$-u''(x) + V(x)u(x) = \varepsilon u(x). \quad (3.2.13)$$

The seed solution  $u(x)$  need not be normalizable, but has to be nodeless in order to avoid singularities in  $W(x)$ . The factorization energy is restricted by  $\varepsilon \leq E(0)$  accordingly.

It is well known that the intertwining relations (3.2.9) allow to obtain the eigenstates of the new system  $\tilde{H}$  from that of the initial one  $H$ . Indeed, we have:

$$\tilde{H}(B^- \psi(n; x)) = B^- H \psi(n; x) = E(n)(B^- \psi(n; x)), \quad (3.2.14)$$

making  $B^- \psi(n; x)$  an eigenstate of  $\tilde{H}$  with energy  $E(n)$  unless  $B^-$  annihilates  $\psi(n; x)$ . Normalized eigenstates  $\tilde{\psi}(n; x)$  and energies  $\tilde{E}(n)$  are recovered:

$$\tilde{\psi}(n; x) = \frac{B^- \psi(m; x)}{\sqrt{E(m) - \varepsilon}}, \quad \psi(m; x) = \frac{B^+ \tilde{\psi}(n; x)}{\sqrt{\tilde{E}(n) - \varepsilon}}, \quad \tilde{E}(n) = E(m), \quad (3.2.15)$$

where  $m = n \pm 1$  according to whether an energy level is created or suppressed during the transformation. If the spectra agree perfectly, we have  $m = n$  instead. Let us shortly exhibit the three cases for further referring. More details can be found in [27, 29, 30, 31].

- (a) State-deleting SUSY ( $m = n + 1$ ). This case arises when  $u(x)$  is the ground state  $\psi(0; x)$  of  $H$  with  $\varepsilon = E(0)$ . Every state of  $H$  is connected to one state of  $\tilde{H}$  according to (3.2.15), except for the ground state since  $B^- \psi(0; x) = 0$ . The energy level  $E(0)$  is

removed of the spectrum of  $\tilde{H}$  during the transformation:  $\text{Sp}(\tilde{H}) = \text{Sp}(H) \setminus \{E(0)\}$ . The ground state of  $\tilde{H}$  has energy  $\tilde{E}(0) = E(1)$ .

- (b) State-adding SUSY ( $m = n - 1$ ). This case arises for unbounded seed solutions  $u(x)$  with  $\varepsilon < E(0)$  such that  $1/u(x)$  is normalizable. All the states of  $H$  are connected to that of  $\tilde{H}$  according to (3.2.15). It is known however in this case that  $B^+$  annihilates  $1/u(x)$ , making it a normalizable eigenstate of  $\tilde{H}$  with energy  $\varepsilon < E(0)$ . An energy level  $\varepsilon$  is created during the transformation:  $\text{Sp}(\tilde{H}) = \text{Sp}(H) \cup \{\varepsilon\}$ . The ground state of the new system is thus:

$$\tilde{\psi}(0; x) \propto \frac{1}{u(x)}, \quad \tilde{E}(0) = \varepsilon. \quad (3.2.16)$$

- (c) Isospectral SUSY ( $m = n$ ). This case arises when both  $u(x)$  and  $1/u(x)$  are unbounded. Every states and energy levels of  $H$  are in exact correspondence with that of  $\tilde{H}$  without any suppression nor creation of energy levels during the transformation:  $\text{Sp}(\tilde{H}) = \text{Sp}(H)$ .

Finally, the operators  $B^\pm$  allow the factorization of the Hamiltonians [27]:

$$H = B^+ B^- + \varepsilon, \quad \tilde{H} = B^- B^+ + \varepsilon. \quad (3.2.17)$$

### 3.3. RMII ladder operators from SUSYQM

We first study the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) system which was introduced in 1932 as an exactly solvable quantum system of use in the modelization of vibrations in polyatomic molecules [8]. The known solutions and the associated spectrum is presented in Section 3.3.1. The potential is given by two parameters:  $\lambda$  dictates the value on the boundaries of the domain, while  $s$  controls the attraction (depth) of the potential. In Section 3.3.2, we expose how a change in the parameter  $s$ , known as shape invariance, occurs when the RMII potential goes under a state-deleting SUSY transformation. For this reason, we will label the RMII potential by  $V_s(x)$  according to the value of  $s$ , while taking  $\lambda$  to be fixed. This shape invariance property generates a hierarchy of RMII potentials for different values of  $s$ . In Section 3.3.3, we show how the connection between members of the hierarchy using SUSYQM allows the construction of ladder operators  $A^\pm$  for a specific (fixed  $s$ ) member. This new ladder operators realization is presented step by step.

#### 3.3.1. The RMII potential

The hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential is defined as [8, 10, 13]:

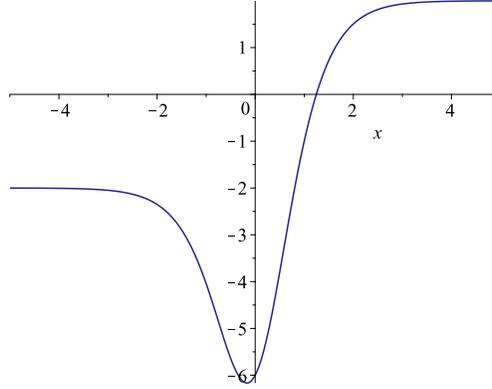
$$V_s(x) = 2\lambda \tanh x - s(s+1) \text{sech}^2 x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3.1)$$

We can without loss of generality assume  $\lambda \geq 0$ . We further impose  $s > 0$  and  $0 \leq \lambda < s^2$ , ensuring the well-shape of the potential and the existence of at least one bounded eigenstate.

Solutions to the Schrödinger equation (3.2.1) allows for a finite number of bounded sates and for scattering states due to the asymptotic behaviour:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V_s(x) = \pm 2\lambda, \quad (3.3.2)$$

as shown in Fig. 3.1.



**Fig. 3.1.** Hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential  $V_s(x)$  with parameters  $s = 2$  and  $\lambda = 1$ .

This work focuses on the normalizable eigenstates which are expressed in terms of the Jacobi polynomials  $P_n^{(\alpha,\beta)}(y)$  [32] as:

$$\psi_s(n; x) = M_s(n) \cosh^{-(s-n)}(x) e^{-\frac{\lambda x}{s-n}} P_n^{(a_s(n), b_s(n))}(\tanh x), \quad (3.3.3)$$

for which the parameters take the form:

$$a_s(n) = s - n + \frac{\lambda}{s - n}, \quad b_s(n) = s - n - \frac{\lambda}{s - n}. \quad (3.3.4)$$

Here,  $M_s(n)$  is the normalization constant given by [10, 33]:

$$M_s(n) = (-1)^n 2^{n-s} \sqrt{\frac{n! \left( (s-n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s-n)^2} \right) \Gamma(2s-n+1)}{(s-n) \Gamma\left(s+1 + \frac{\lambda}{s-n}\right) \Gamma\left(s+1 - \frac{\lambda}{s-n}\right)}}. \quad (3.3.5)$$

The associated bounded spectrum is finite and the energies are rational in the excitation number  $n$ :

$$E_s(n) = -(s-n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s-n)^2}, \quad n = 0, 1, \dots, n_{max} < s - \sqrt{\lambda}, \quad (3.3.6)$$

where the upper bound on  $n_{max}$  prevents the energy to exceed the lowest asymptote in (3.3.2).

### 3.3.2. SUSYQM and shape invariance for the RMII potential

We perform a first order state-deleting SUSY transformation on the RMII potential using the ground state as seed solution:

$$u(x) = \psi_s(0; x) = M_s(0) \cosh^{-s}(x) e^{-\frac{\lambda x}{s}}, \quad \varepsilon = E_s(0) = -s^2 - \frac{\lambda^2}{s^2}. \quad (3.3.7)$$

Following the steps from Section 3.2.2, the intertwining operators and the superpotential are:

$$B_s^\pm = W_s(x) \pm \frac{d}{dx}, \quad W_s(x) = -s \tanh x - \frac{\lambda}{s}. \quad (3.3.8)$$

Then, the partner potential is obtained from equation (3.2.11) and takes the form:

$$\tilde{V}_s(x) = 2\lambda \tanh x - s(s-1) \operatorname{sech}^2 x, \quad (3.3.9)$$

where  $\tilde{V}_s(x)$  is in fact a RMII potential with translated parameter  $s \rightarrow s-1$ . The eigenstates connection (3.2.15) of the state-deleting SUSY is thus established to be:

$$\psi_{s-1}(n; x) = \frac{B_s^- \psi_s(n+1; x)}{\sqrt{E_s(n+1) - E_s(0)}}, \quad \psi_s(n+1; x) = \frac{B_s^+ \psi_{s-1}(n; x)}{\sqrt{E_{s-1}(n) - E_s(0)}}, \quad (3.3.10)$$

with the energy relation:

$$E_{s-1}(n) = E_s(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} - 1. \quad (3.3.11)$$

Indeed, the relation  $\tilde{V}_s(x) = V_{s-1}(x)$  is known as shape invariance [17, 34, 35] and allows the following hierarchy generating procedure. One could now take  $\tilde{V}_s = V_{s-1}$  as the starting potential for that same state-deleting SUSY transformation and obtain another RMII partner potential  $\tilde{V}_{s-1} = V_{s-2}$ , invoquing the shape invariance a second time. Thus, performing this SUSY transformation iteratively by translating the  $s$  parameter accordingly at each step generates a hierarchy of RMII potentials  $\{V_s, V_{s-1}, \dots, V_{s-n_{max}}\}$ . The eigenstates connection of any two adjacent Hamiltonians in the hierarchy is ensured by the appropriate  $B_s^\pm$  operators following (3.3.10). Moreover, loosing the ground state energy level at each stage of the iteration, it becomes possible to express any eigenstate  $\psi_s(n; x)$  of  $H_s$  in terms of the ground state of another Hamiltonian in the hierarchy [17]. Precisely, we have:

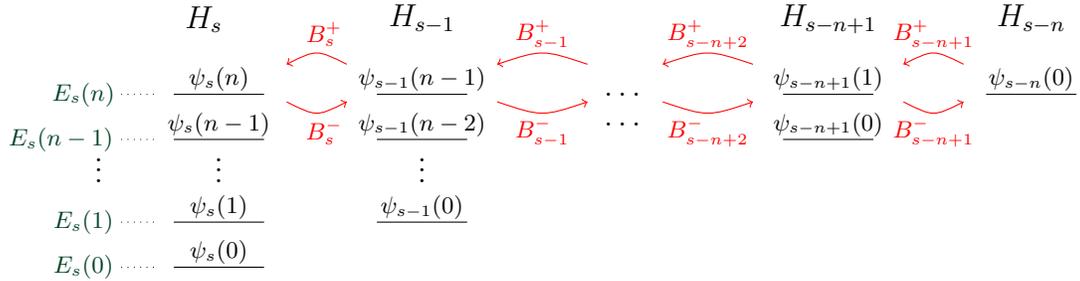
$$\psi_s(n; x) = \frac{B_s^+}{\sqrt{E_s(n) - E_s(0)}} \frac{B_{s-1}^+}{\sqrt{E_s(n) - E_s(1)}} \dots \frac{B_{s-n+1}^+}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-1)}} \psi_{s-n}(0; x), \quad (3.3.12)$$

where we have used the energy relation (3.3.11) to express all the energies appearing in the formula as energies of the  $H_s$  system. It is through this precise connection (3.3.12) that the equivalence between shape invariance in SUSYQM and the Factorization Method of Infeld

and Hull [9] is established [36]. The relation converse to (3.3.12) is obtained with the  $B_s^-$ :

$$\psi_{s-n}(0; x) = \frac{B_{s-n+1}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-1)}} \frac{B_{s-n+2}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-2)}} \cdots \frac{B_s^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(0)}} \psi_s(n; x). \quad (3.3.13)$$

The connections (3.3.12) and (3.3.13) in the hierarchy are illustrated in Fig. 3.2, where each column fixes a specific system while each row fixes a specific value of energy. Indeed, action with  $B_s^\pm$  does not affect the value of the energy, but modifies the place this energy occupies in the spectrum.



**Fig. 3.2.** Connection between the  $n$ -th excited state  $\psi_s(n; x)$  of  $H_s$  and the ground state  $\psi_{s-n}(0; x)$  of  $H_{s-n}$  with operators  $B_s^\pm$ .

Hence, shape invariance allows the connection between eigenstates of different RMII systems having the same energy. These horizontal displacements in Fig. 3.2 allowed by the  $B_s^\pm$  will play a central role in the construction of the RMII ladder operators.

### 3.3.3. Construction of the ladder operators

The previous section highlighted our ability to link eigenstates of different RMII systems for fixed energy. What remains is to find a way to connect at least two eigenstates of adjacent energy levels, regardless of the systems to which they belong in the hierarchy. Once this is achieved, we can combine the different actions to construct ladder operators that connects eigenstates of adjacent energy levels within a fixed system.

We establish this connection for different energies between the ground states (3.3.7) of adjacent members of the hierarchy. Defining:

$$\gamma_s(x) = \cosh x e^{-\frac{\lambda x}{s(s-1)}}, \quad (3.3.14)$$

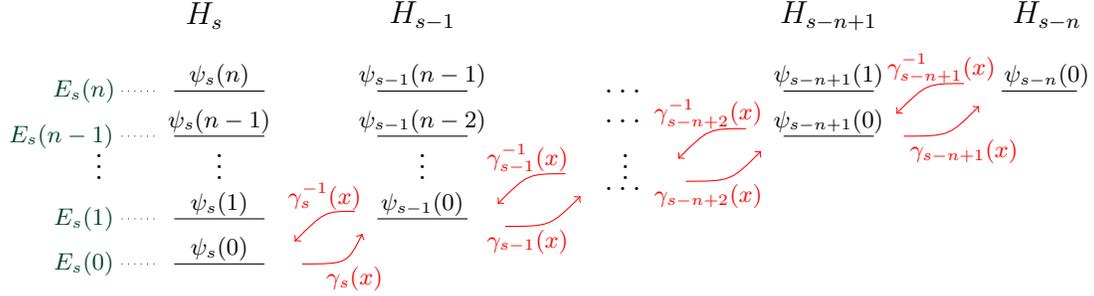
we have the relations

$$\psi_{s-1}(0; x) = \left( \frac{M_{s-1}(0)}{M_s(0)} \gamma_s(x) \right) \psi_s(0; x), \quad (3.3.15)$$

and

$$\psi_{s+1}(0; x) = \left( \frac{M_{s+1}(0)}{M_s(0)} \gamma_{s+1}^{-1}(x) \right) \psi_s(0; x). \quad (3.3.16)$$

As ground state energy is what is lost or gained as we switch from adjacent systems, the action of  $\gamma_s(x)$  or its inverse respectively increase or decrease energy. Hence, equations (3.3.15) and (3.3.16) amount to vertical displacements in the hierarchy scheme, as illustrated in Fig. 3.3.



**Fig. 3.3.** Connection between ground states of adjacent members of the RMII hierarchy by action with  $\gamma_s(x)$  or  $\gamma_s^{-1}(x)$ .

Now composing the action of the  $B_s^\pm, \gamma_s(x)$  and  $\gamma_s^{-1}(x)$ , we can finally construct the ladder operators for the RMII system  $H_s$  for  $s$  fixed. Starting with an arbitrary state  $\psi_s(n; x)$ , we first act with the appropriate product of the  $B_s^-$  operators following equation (3.3.13) to reach the ground state  $\psi_{s-n}(0; x)$ . At this point the energy has remained fixed in the process. From there, we act with  $\gamma_{s-n}(x)$  or  $\gamma_{s-n+1}^{-1}(x)$  respectively for a raising or lowering action. The energy has been raised or lowered accordingly during this step. Finally, we go back to the  $H_s$  system by acting successively with the appropriate products of  $B_s^+$  operators following (3.3.12). The states obtained are respectively  $\psi_s(n+1; x)$  in the case of a raising action and  $\psi_s(n-1; x)$  for a lowering action. While the initial product of  $B_s^-$  only depends on  $n$ , the final product of  $B_s^+$  depends also on the raising or lowering nature of the action. Taking the constants into account, the expression for the ladder operators  $A^\pm(n)$  acting on the  $n$ -th excited eigenstate  $\psi_s(n; x)$  of  $H_s$  are given as ordered products:

$$A^+(n) = B_s^+ \left( \prod_{i=1}^n \frac{B_{s-i}^+}{\sqrt{E_s(n+1) - E_s(i)}} \right) \left( \frac{M_{s-n-1}(0)}{M_{s-n}(0)} \gamma_{s-n}(x) \right) \left( \prod_{i=1}^n \frac{B_{s-n+i}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-i)}} \right), \quad (3.3.17)$$

$$A^-(n) = \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{B_{s-i}^+}{\sqrt{E_s(n-1) - E_s(i)}} \right) \left( \frac{M_{s-n+1}(0)}{M_{s-n}(0)} \gamma_{s-n+1}^{-1}(x) \right) \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{B_{s-n+i}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-i)}} \right) B_s^-. \quad (3.3.18)$$

The obtained ladder operators  $A^\pm(n)$  are differential operators in  $x$  of order  $2n \pm 1$  except for  $A^-(0)$  which is also of the first order. This family of operators realize the ladder operator

action (3.2.2):

$$A^-(n) \psi_s(n; x) = \sqrt{k(n)} \psi_s(n-1; x), \quad A^+(n) \psi_s(n; x) = \sqrt{k(n+1)} \psi_s(n+1; x), \quad (3.3.19)$$

with  $k(n)$  being the shifted energy:

$$k(n) = E_s(n) - E_s(0). \quad (3.3.20)$$

We insist on the fact that the choice of  $k(n)$  to be the shifted energy is not only a common one [37, 18, 19], but arises naturally from our construction as it appears in the normalization factor of every SUSY transformation (recall (3.3.10)). We further wish to stress the fact that we have used the different members (different  $s$ ) of the hierarchy only at intermediate steps in the construction of the ladder operators for a precise (fixed  $s$ ) RMII system  $H_s$ .

## 3.4. Application to type III rational extensions

In this section, we wish to extend our ladder operators realization to other SUSY partners of the RMII system. First order rational extensions are particular state-adding or isospectral SUSY partners arising from a polynomial seed solution [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]. The expression for these partner potentials can be decomposed in two terms: one of which is the initial potential with modified parameters and the other being a rational function of some variable. In the case of the RMII system, rational extensions have been classified into three distinct classes in [12]. The first two classes, referred to as "type I" and "type II" in [12], arise from isospectral SUSY transformations and affect only slightly the shape of the initial potential. They are not considered in this work. On the other hand, the last class, "type III", arises as a state-adding SUSY transformation and drastically modify the shape of the initial potential to allow for the extra energy level  $\varepsilon$ . In Section 3.4.1, we briefly present the type III rational extensions of the RMII potential. In Section 3.4.2, we construct ladder operators for these partner systems using that of the RMII. Technicalities involving the additional energy level are addressed.

### 3.4.1. Type III rational extensions of the RMII potential

The seed solutions used to generate a type III rational extension of RMII are nodeless unbounded polynomial solutions, in the variable  $z = \tanh x$ , of the associated Schrödinger equation with factorization energy  $\varepsilon < E_s(0)$ . These seed solutions are given by [12]:

$$u(x) = (1-z)^{-\frac{\bar{a}}{2}} (1+z)^{-\frac{\bar{b}}{2}} P_k^{(-\bar{a}, -\bar{b})}(z), \quad \varepsilon = -(s+k+1)^2 - \frac{\lambda^2}{(s+k+1)^2}, \quad (3.4.1)$$

where  $k \in \{2,4,6,\dots\}$  corresponds to the degree of the different polynomial solutions available<sup>1</sup>. Once chosen,  $k$  remains fixed for the transformation. The associated parameters are:

$$\tilde{a} = s + k + 1 + \frac{\lambda}{s + k + 1}, \quad \tilde{b} = s + k + 1 - \frac{\lambda}{s + k + 1}. \quad (3.4.2)$$

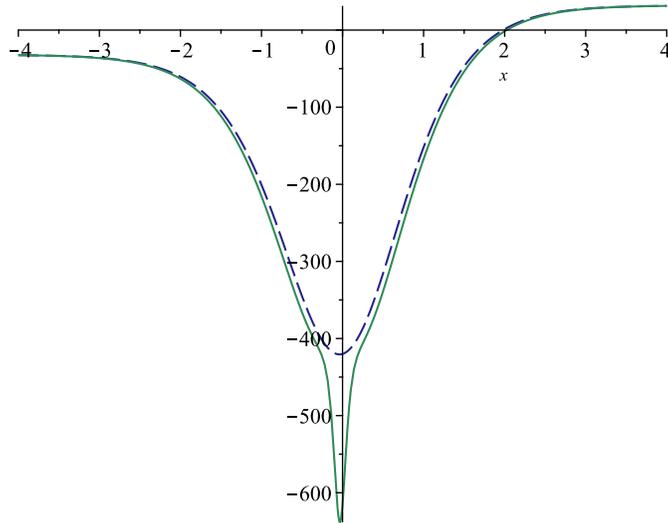
It is shown that  $1/u(x)$  is normalizable [12], hence these polynomial seed solutions are indeed candidates for state-adding SUSY transformations. Fixing  $k$  and implementing the SUSY transformation, the intertwining operators are:

$$\mathcal{B}^\pm = (s + k + 1) \tanh x + \frac{\lambda}{s + k + 1} + \frac{d}{dx} \log P_k^{(-\tilde{a}, -\tilde{b})}(\tanh x) \pm \frac{d}{dx}. \quad (3.4.3)$$

The three first terms correspond to the superpotential, from which the partner potential  $\tilde{V}(x)$  is derived. After manipulations, the type III rational extensions of the RMII potential are [12]:

$$\tilde{V}(x) = V_{s+1}(x) + 2(1 - z^2) \left\{ 2z \frac{P'_k(z)}{P_k(z)} - (1 - z^2) \left[ \frac{P''_k(z)}{P_k(z)} - \left( \frac{P'_k(z)}{P_k(z)} \right)^2 \right] - k \right\}, \quad (3.4.4)$$

where we have abbreviated  $P_k(z) \equiv P_k^{(-\tilde{a}, -\tilde{b})}(z)$  and where the prime denotes differentiation with respect to  $z$ . The first term is a RMII potential with parameter  $s$  translated by  $+1$ , while the second term is rational in  $z$ . Fig. 3.4 provides a comparison of the two partner potentials for this SUSY transformation. The well is dug from the RMII system to the rational extension in order to allow the additional energy level  $\varepsilon$ .



**Fig. 3.4.** Initial RMII potential  $V_s(x)$  (blue, dashed) and its type III rational extension SUSY partner potential  $\tilde{V}(x)$  (green, solid) for parameters  $s = 20$ ,  $\lambda = 16$  and  $k = 2$ . The additional energy level is  $\varepsilon \approx -529.48$ .

<sup>1</sup>Taking polynomials of even degree ensures  $u(x)$  to be nodeless for  $z \in (-1, +1)$  (see [12]).

The normalizable eigenstates for the rational extensions are obtained via the correspondence (3.2.15) for state-adding SUSY:

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(n+1; x) = \frac{\mathcal{B}^- \psi_s(n; x)}{\sqrt{E_s(n) - \varepsilon}}, & \tilde{E}(n+1) = E_s(n), \\ \tilde{\psi}(0; x) \propto \frac{1}{u(x)}, & \tilde{E}(0) = \varepsilon. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

### 3.4.2. Ladder operators for the type III rational extensions

For most solvable systems, SUSYQM offers a natural way to adapt the ladder operators of the initial system to that of any partner [45, 46, 47]. Suppose that ladder operators are known for the initial system. The idea is to use the relation (3.2.15) to perform the raising or lowering action on the eigenstates of the initial system with the known ladder operators, then to make use of the same relation in the opposite direction to return to the SUSY partner system. The composition of these three actions acts as ladder operators on the SUSY partner system. We wish to construct ladder operators  $\mathcal{A}^\pm$  for the type III rational extension  $\tilde{V}(x)$  of the RMII system according to this technique.

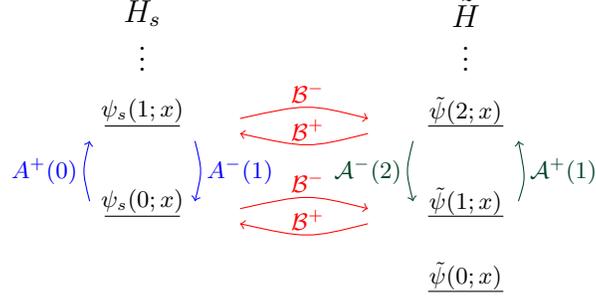
On the other hand, the additional ground state  $\tilde{\psi}(0; x)$  is not related to any state of the initial RMII system  $H_s$ , where the previously constructed  $A^\pm$  operates. This fundamental distinction that  $\tilde{\psi}(0; x)$  has from the rest of the eigenstates of  $\tilde{H}$  in the state-adding SUSY transformation induces a direct sum decomposition of the Hilbert space for the type III rational extensions into two subspaces: one spanned by the states  $\tilde{\psi}(n; x)$ ,  $n \geq 1$ , in correspondence with  $H_s$ , and one with the added state  $\tilde{\psi}(0; x)$ . Such decomposition has been discussed for higher order state-adding SUSY transformations, for instance, in [48].

In this sense, the ladder operators obtained from the above mentioned technique are only consistent in the subspace that is in correspondence with the initial system  $H_s$ , meaning that it does not allow to construct ladder operators connecting  $\tilde{\psi}(0; x)$  to  $\tilde{\psi}(1; x)$ . Moreover, the lowering action obtained acting on  $\tilde{\psi}(1; x)$  yields the annihilation of the state. Therefore, we use the technique to construct ladder operators  $\mathcal{A}^\pm$  acting within the subspace spanned by  $\{\tilde{\psi}(1; x), \tilde{\psi}(2; x), \dots, \tilde{\psi}(n_{max}; x)\}$  only. In some cases (see, e.g. [48, 31]), it is possible to construct ladder operators separately in the state-added subspace. But since in our case this subspace is spanned by  $\{\tilde{\psi}(0; x)\}$  and contains only one energy level, the idea of a consistent ladder operator is not well-defined.

Hence, starting from an excited eigenstate  $\tilde{\psi}(n; x)$ ,  $n \geq 1$ , of the rational extension  $\tilde{V}(x)$  of (3.4.4), we first act with  $\mathcal{B}^+$  to return to  $\psi_s(n-1; x)$  of the initial RMII system. Then, we apply the raising  $A^+$  or lowering operators  $A^-$  developed in (3.3.17) and (3.3.15) within the initial system to get to  $\psi_s(n; x)$  or  $\psi_s(n-2; x)$ <sup>2</sup>. This switches to the adjacent energy level. We then finally recover the corresponding states  $\tilde{\psi}(n \pm 1; x)$  of the rational extension

<sup>2</sup>Starting with  $\tilde{\psi}(1; x)$ , a lowering action will yield the annihilation of the state.

after acting with  $\mathcal{B}^-$ . The composition of these actions produce  $\mathcal{A}^\pm$  as illustrated in Fig. 3.5 for the states  $\tilde{\psi}(1; x)$  and  $\tilde{\psi}(2; x)$ .



**Fig. 3.5.** Construction of the ladder operators  $\mathcal{A}^\pm$  for the rational extension of the RMII system using  $A^\pm$  and  $\mathcal{B}^\pm$ .

With this approach, we obtain ladder operators  $\mathcal{A}^\pm$  acting on all eigenstates of the type III rational extensions except  $\tilde{\psi}(0; x)$ :

$$\mathcal{A}^\pm(n) = \frac{\mathcal{B}^- A^\pm(n-1) \mathcal{B}^+}{\sqrt{(\tilde{E}(n \pm 1) - \varepsilon)(\tilde{E}(n) - \varepsilon)}}. \quad (3.4.6)$$

The ladder operator action is realized on that subspace ( $n \geq 1$ ):

$$\mathcal{A}^-(n) \tilde{\psi}(n; x) = \sqrt{\tilde{k}(n)} \tilde{\psi}(n-1; x), \quad \mathcal{A}^+(n) \tilde{\psi}(n; x) = \sqrt{\tilde{k}(n+1)} \tilde{\psi}(n+1; x), \quad (3.4.7)$$

this time with the annihilation  $\mathcal{A}^-(1)\tilde{\psi}(1; x) = 0$ . The function  $\tilde{k}(n)$  is again chosen to be the shifted energy with respect to the lowest excitation considered ( $n = 1$ ):

$$\tilde{k}(n) = \tilde{E}(n) - \tilde{E}(1) = E_s(n-1) - E_s(0) = k(n-1). \quad (3.4.8)$$

The ladder are thus again  $2n \pm 1$  order differential operators due to the shift  $m = n - 1$  occurring in the excitation for a state-adding SUSY transformation, except for  $\mathcal{A}^-(1)$ , which is of the second order.

### 3.5. Coherent states for the RMII potential and the type III rational extensions

The Barut-Girardello coherent states are defined as eigenstates of the lowering operator  $A^-$  of the system under study. After obtaining ladder operators realizations for the RMII system and for its type III rational extensions, we now use them for the construction of such coherent states. Section 3.5.1 briefly present the formalism of Barut-Girardello coherent states and how it adapts for finite discrete spectrum systems like the RMII. We further adapt the construction of the coherent states for the type III rational extensions. Then, in

Section 3.5.2, properties of space-localization, trajectories and position-momentum uncertainty relations are analyzed and compared for the coherent states of the type III rational extensions with respect to the work of [18] on the RMII system.

### 3.5.1. Coherent states constructions

Barut-Girardello coherent states  $\phi(w; x)$  are defined as normalizable eigenstates of a lowering operator  $A^-$  of a given solvable system [4]. For infinite discrete spectrum systems, the definition

$$A^- \phi(w; x) = w \phi(w; x), \quad w \in \mathbb{C}, \quad (3.5.1)$$

forces the coherent states to be a superposition of the energy eigenstates  $\psi(n; x)$  of the form:

$$\phi(w; x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|w|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{\rho(n)}} \psi(n; x), \quad (3.5.2)$$

where  $\mathcal{N}(|w|^2)$  ensures normalization and where:

$$\mathcal{N}(|w|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{\rho(n)}, \quad \rho(n) = \prod_{j=1}^n k(j), \quad \rho(0) = 1, \quad (3.5.3)$$

are defined in terms of a function  $k(n)$  coming from the ladder operator action (3.2.2). In this sense, the existence and realization of a lowering operator is important in the construction of Barut-Girardello coherent states for the system.

The superposition (3.5.2) has been extended in the case of finite spectrum systems [18, 19] by terminating the sums in (3.5.2) and (3.5.3) at  $n_{max}$ . Due to the finiteness of the superposition in this case, these states are called *almost eigenstates* of the lowering operator:

$$A^- \phi(w; x) \approx w \phi(w; x), \quad w \in \mathbb{C}, \quad (3.5.4)$$

in the sense that the deviation from being an exact eigenstate is small [18, 19]. According to this definition, the coherent states defined as almost eigenstates of the RMII lowering operator  $A^-$  constructed in Section 3.3 are:

$$\phi_s(w; x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_s(|w|^2)}} \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{w^n}{\sqrt{\rho_s(n)}} \psi_s(n; x), \quad w \in \mathbb{C}, \quad (3.5.5)$$

with  $\rho_s(n)$  given through (3.5.3) by  $k(n) = E_s(n) - E_s(0)$ , the RMII shifted energy appearing in the action of  $A^\pm$ . This superposition of the RMII eigenstates has been studied in [18], and their properties will be used to compare with that of the following coherent states construction for the type III rational extensions.

We adapt this construction for the type III rational extensions of the RMII system to obtain almost eigenstates  $\tilde{\phi}(w; x)$  of the lowering operator  $\mathcal{A}^-$ . Since the lowering operator  $\mathcal{A}^-$  does not act on the ground state of the rational extensions, we adapt the superposition

(3.5.5) to take eigenstates  $\tilde{\psi}(n; x)$  of excitation  $n \geq 1$  [37]. Therefore, the adapted coherent states for the type III rational extensions can be written as:

$$\tilde{\phi}(w; x) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathcal{N}}(|w|^2)}} \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{w^n}{\sqrt{\tilde{\rho}(n+1)}} \tilde{\psi}(n+1; x), \quad (3.5.6)$$

where:

$$\tilde{\mathcal{N}}(|w|^2) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \frac{|w|^{2n}}{\tilde{\rho}(n+1)}, \quad \tilde{\rho}(n) = \prod_{j=1}^n \tilde{k}(j), \quad \tilde{\rho}(1) = 1, \quad (3.5.7)$$

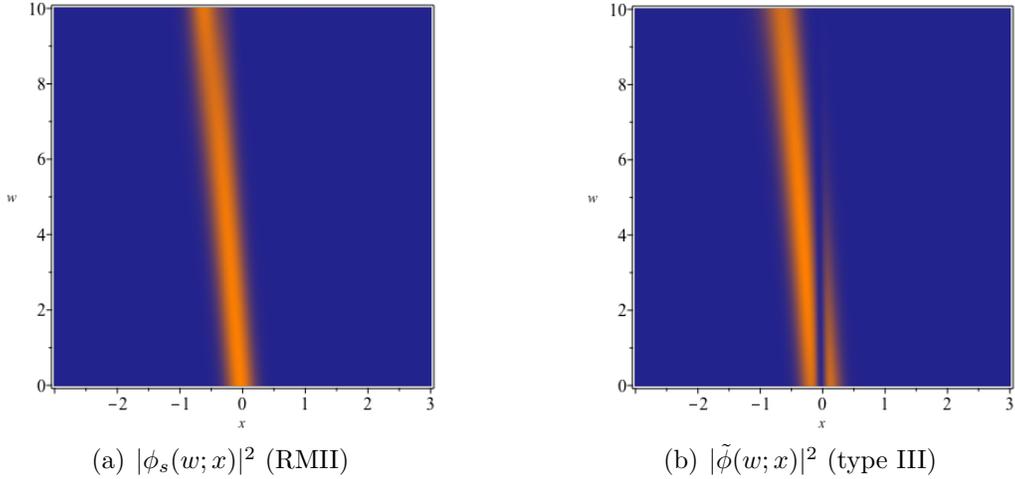
with  $\tilde{k}(n)$  taken from the action of  $\mathcal{A}^\pm$  (3.4.8). Since the energies of the states considered in this superposition are connected through SUSYQM with that of the states considered in the coherent states  $\phi_s(w; s)$  of the RMII system, one has the association  $\tilde{\rho}(n+1) = \rho_s(n)$  and thus  $\tilde{\mathcal{N}}(|w|^2) = \mathcal{N}_s(|w|^2)$ .

### 3.5.2. Properties

Having Barut-Girardello type coherent states for the RMII potential and for its type III rational extensions, we now analyze some properties. In the following, we consider the case with parameters  $s = 20$  and  $\lambda = 16$ . We focus on the coherent states  $\tilde{\phi}(w; x)$  of the type III rational extension obtained from a degree  $k = 2$  seed solution and compare it to that  $\phi_s(w; x)$  of the initial RMII system.

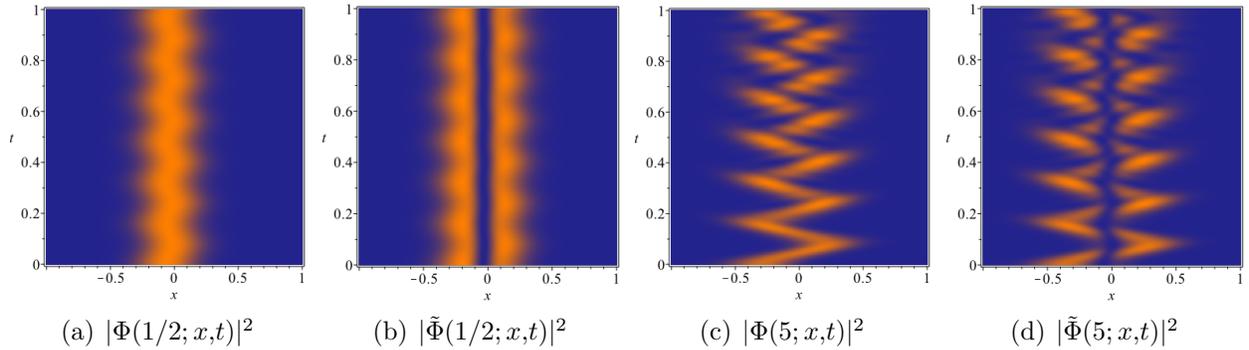
One property that share most of the different types of coherent states is space localization [19]. Firstly, this is analyzed as a function of the parameter  $w \in \mathbb{R}$  for the probability densities  $|\phi_s(w; x)|^2$  and  $|\tilde{\phi}(w; x)|^2$  exposed in Fig. 3.6. The probability density of the rational extension allows a secondary maximum that contributes more and more as  $w \rightarrow 0$ . This splitting of the probability density could be explained by the fact that the lowest energy eigenstate considered in the superposition,  $\tilde{\psi}(1; x)$ , has one node. Since the low energy eigenstates have a larger weight in the superposition for smaller  $w$  (especially for  $w < 1$ ), we get a probability density that tends to that of a one-node state when  $w \rightarrow 0$ .

We then analyze time evolution of the space localization of the probability densities for  $w$  fixed. Indeed, the time evolved coherent states denoted  $\tilde{\Phi}_s(w; x, t)$  and  $\tilde{\Phi}(w; x, t)$  are obtained in the standard way by acting with the unitary time evolution operators  $\exp(-iH_s t)$  and  $\exp(-i\tilde{H}t)$  respectively on  $\phi_s(w; x)$  and  $\tilde{\phi}(w; x)$  [1]. Time evolution of the probability densities for the two coherent states are presented in Fig. 3.7 for  $w = 1/2$  (a)-(b) and  $w = 5$  (c)-(d). Except for the node in the probability density  $|\tilde{\Phi}(w; x, t)|^2$ , behaviours are similar in time for both constructions. Frequency are similar since the states of same energy in the SUSY correspondence have the same weight in both constructions. We remark a smaller oscillation amplitude for  $w = 1/2$  compared to  $w = 5$ . Moreover, it is seen that the space



**Fig. 3.6.** Space localization of the probability densities of the coherent states for  $w \in [0, 10]$  with parameters  $s = 20$  and  $\lambda = 16$ .

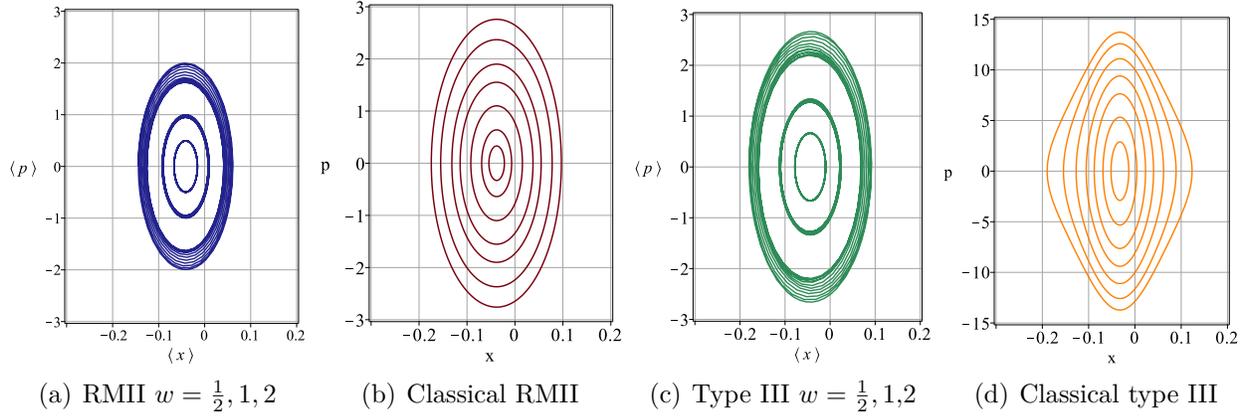
localization is lost as  $t \rightarrow 1$  for both coherent states when  $w = 5$ , while it seems less affected for  $w = 1/2$  over that same period of time.



**Fig. 3.7.** Space localization of the probability densities  $|\Phi(w; x, t)|^2$  and  $|\tilde{\Phi}(w; x, t)|^2$  of the coherent states in time  $t \in [0, 1]$  for fixed  $w$  with parameters  $s = 20$  and  $\lambda = 16$ .

It is known that for the coherent states construction (3.5.5), the trajectory  $(\langle x \rangle(w; t), \langle p \rangle(w; t))$  of the expectation values of position  $x$  and momentum  $p$  tends to mimics the phase space trajectory  $(x, p)$  describing bounded motion of the classical analogue of the quantum system. This has been verified in [18] for the RMII coherent states. We investigate how the trajectory of the coherent states of the rational extension compares with respect to that of RMII. Fig. 3.8(a) and 3.8(c) expose the trajectory for the coherent states of the RMII and of the type III rational extension respectively, for different values of  $w$ . We have  $w = 2$  (exterior),  $w = 1$  (middle) and  $w = 1/2$  (interior) for the three trajectories in each plot. When comparing to Fig. 3.8(b), we see that both coherent states have classical RMII-like trajectories. We also see from Fig. 3.8(d) that the trajectory

the coherent states of the rational extension does not approximate that of its own classical analogue which has greater amplitude in momentum due to the deep and narrow sub-well of  $\tilde{V}(x)$ . Indeed, by neglecting the ground state in the construction, the trajectory obtained is expected to be that of a classical bounded motion in a potential  $\tilde{V}(x)$  for which that sub-well is removed. Such potential would be slightly deeper than the initial RMII potential  $V_s(x)$  (see Fig. 3.4), explaining the greater range in momentum that the trajectory of the rational extension coherent states have with respect to that of the RMII.

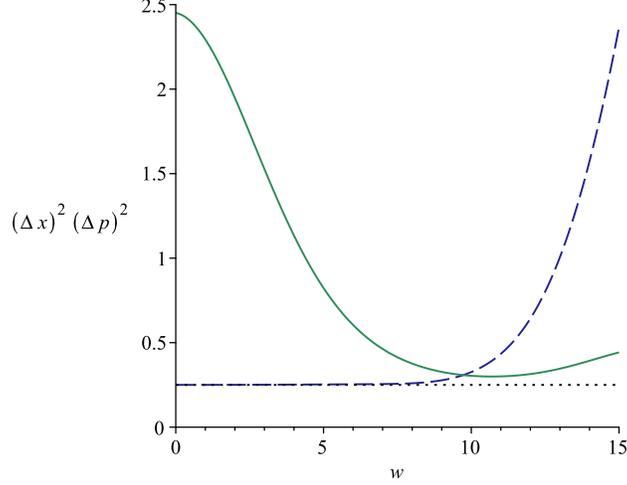


**Fig. 3.8.** Trajectories  $(\langle x \rangle(w; t), \langle p \rangle(w; t))$  of position and momentum expectation values in time  $t \in [0, 3]$  for the coherent states (a)-(c) for  $w$  fixed compared to phase space trajectories  $(x(t), p(t))$  of bounded motion of their classical analogues (b)-(d). Parameters:  $s = 20$  and  $\lambda = 16$ .

The last property we analyze is the minimization of Heisenberg's uncertainty relation for position and momentum:

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4}, \quad \Delta \mathcal{O} = \sqrt{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}, \quad (3.5.8)$$

which is realized for certain types of coherent states, but not necessarily for Barut-Girardello types [18]. We numerically computed the uncertainty  $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$  at  $t = 0$  as a function of the parameter  $w$  for the coherent states of the RMII system and of its type III rational extension and displayed them in Fig. 3.9. For the small  $w$  studied regime, the RMII coherent states approximate the lower bound of the uncertainty relation, but begin to diverge from it at around  $w = 9$ , where the almost eigenstate status of the coherent state is less and less realized. For the coherent states of the type III rational extension, the non-approximation of the lower bound for small  $w$  is in correspondence with the amplitude of the second maxima in the probability density  $|\tilde{\phi}(w; x)|^2$  shown in Fig. 3.6(b). Once this second maximum is negligible (about  $w \in [9, 13]$ ), the uncertainty relation is better minimized, before diverging away from the lower bound at larger  $w$ .



**Fig. 3.9.** Position-momentum uncertainty relation  $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$  at  $t = 0$  for the RMII coherent states (blue, dashed) and for that of the type III rational extension (green, solid) as a function of  $w \in [0,15]$ . Parameters:  $s = 20$  and  $\lambda = 16$ . A black dotted line indicates the lower bound of  $1/4$ .

## 3.6. Generalization to the RMI potential

This section intends to generalize the ladder operators construction and coherent states to the trigonometric Rosen-Morse (RMI) potential [20, 49, 50]. It is known that both RMI and RMII systems can each be mapped onto the other by a point canonical transformation (PCT) [11, 51, 52]. We summarize the transition from the RMII to the RMI system in Section 3.6.1. We will label the different systems by  $I$  and  $II$  accordingly. We show how the ingredients for the ladder operators construction transform and obtain analogue ladder operators for this system in Section 3.6.2. Once all necessary components of the ladder operators construction have been recovered in the RMI setting, we will drop the  $I$  and  $II$  labeling and transfer our usual  $s$  labeling to the RMI system for the rest. The associated Barut-Girardello coherent states are then analyzed in Section 3.6.3.

### 3.6.1. The RMI system from a point canonical transformation

In quantum mechanics, PCT is a method that allows to transform a given Schrödinger equation into a new one when a change of variables is applied [11, 51, 52]. We summarize how this is done for the Rosen-Morse potentials. We label by  $V_{II}(x)$  the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) potential defined in Section 3.3.1 and label accordingly by  $\psi_{II}(n; x)$  and  $E_{II}(n)$  its bounded eigenstates and energies. The Schrödinger equation for the normalizable eigenstates of this system can be written as

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_{II}(x) - E_{II}(n) \right) \psi_{II}(n; x) = 0. \quad (3.6.1)$$

The PCT is performed through the following complex transformation of variable and parameters [52, 53]:

$$x \rightarrow ix + \frac{i\pi}{2}, \quad \lambda \rightarrow i\lambda, \quad s \rightarrow -s. \quad (3.6.2)$$

Equation (3.6.1) becomes:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda \cot x - s(s-1) \csc^2 x + (s-n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s+n)^2} \right) \psi_{II} \left( n; ix + \frac{i\pi}{2} \right) = 0, \quad (3.6.3)$$

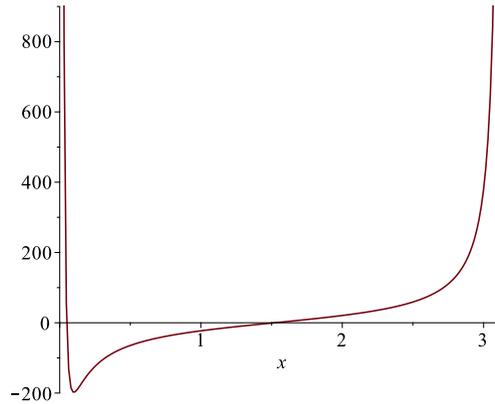
where the parameters  $\lambda$  and  $s$  are changed in the eigenstate according to (3.6.2). In order to associate the later to a Schrödinger equation, we have to multiply the operator factor by  $-1$ . We furthermore restrict the domain of the new spatial variable to  $x \in [0, \pi]$  due to divergences and periodicity. This way, the Schrödinger equation for the trigonometric Rosen-Morse (RMI) potential  $V_I(x)$  is recovered:

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_I(x) - E_I(n) \right) \psi_I(n; x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (3.6.4)$$

where the potential takes the form [17, 20, 49, 50]:

$$V_I(x) = -2\lambda \cot x + s(s-1) \csc^2 x. \quad (3.6.5)$$

We demand  $s > 1$  to ensure  $V_I(x)$  to be a well, and similarly restrict to  $\lambda \geq 0$  without loss of generality. Fig. 3.10 illustrates the case for  $s = 2$  and  $\lambda = 20$ .



**Fig. 3.10.** Trigonometric Rosen-Morse (RMI) potential  $V_I(x)$  with parameters  $s = 2$  and  $\lambda = 20$ .

The transformed eigenstates and energies take the form:

$$\psi_I(n; x) = K(n) \sin^{s+n}(x) e^{-\frac{\lambda x}{s+n}} i^n P_n^{(c(n), d(n))}(i \cot x), \quad E_I(n) = (s+n)^2 - \frac{\lambda^2}{(s+n)^2}, \quad (3.6.6)$$

where the analogue parameters  $c(n)$  and  $d(n)$  and the normalization constant  $K(n)$  are now [49]:

$$c(n) = -(s+n) + \frac{i\lambda}{s+n}, \quad d(n) = -(s+n) - \frac{i\lambda}{s+n}, \quad (3.6.7)$$

$$K(n) = e^{\frac{\lambda\pi}{2(s+n)}} 2^{n+s} \sqrt{\frac{n! \left( (s+n)^2 + \frac{\lambda^2}{(s+n)^2} \right) \left| \Gamma\left(s + \frac{i\lambda}{s+n}\right) \right|^2}{\pi(2s+2n)\Gamma(2s+n)}}. \quad (3.6.8)$$

Through the PCT, the modification of the potential results here in a infinite spectrum ( $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ), as opposed to the hyperbolic case. Despite the presence of complex parameters and arguments, all eigenstates  $\psi_I(n; x)$  are purely real. An expression involving only real parameters and arguments can be given in terms of the Romanovski polynomials  $R_n^{(\alpha, \beta)}(y)$  and is developed in [20, 53, 54], for instance.

### 3.6.2. Ladder operators for the RMI potential

In this section we construct the ladder operators for the RMI system by recovering every component of the ladder operators construction from the point canonical transformation presented in the previous section.

We first investigate how to recover a hierarchy of RMI systems. We use the Hamiltonian factorization realized by the intertwining operators of SUSYQM (3.2.17). Using  $II$  or  $I$  as indices to distinguish between systems, we indeed start with the result from the state-deleting SUSY:

$$H_{II} - E_{II}(0) = B_{II}^+ B_{II}^-. \quad (3.6.9)$$

The LHS is precisely the operator factor of (3.6.1). To get to the trigonometric Hamiltonian  $H_I$ , we apply the transformation (3.6.2) and multiply by  $-1 = (-i) \cdot (-i)$ . Therefore, the intertwining operators of the RHS transform according to :

$$iB_{II}^\pm \xrightarrow[\substack{\lambda \rightarrow i\lambda \\ s \rightarrow -s \\ x \rightarrow ix + i\pi/2}]{\substack{\lambda \rightarrow i\lambda \\ s \rightarrow -s \\ x \rightarrow ix + i\pi/2}} B_I^\pm, \quad (3.6.10)$$

and take precisely the form:

$$B_I^\pm = s \cot x - \frac{\lambda}{s} \pm \frac{d}{dx}. \quad (3.6.11)$$

The shape invariance property of  $V_I(x)$  is inherited from that of  $V_{II}(x)$ , but the passage  $s \rightarrow -s$  in the PCT results in the translation of the parameter to now become  $s \rightarrow s + 1$  at each state-deleting SUSY transformation creating the hierarchy [50]. Now that the transition to the trigonometric system is completed and that shape invariance properties are established, we drop the index  $I$  from now on and use the notation of Section 3.3 (labeling with  $s$ ) without ambiguity on the trigonometric Rosen-Morse system.

The invertible ground state connection is inferred from the transformation of the ground states of each member of the hierarchy:

$$\psi_{s+1}(0; x) = \left( \frac{K_{s+1}(0)}{K_s(0)} \gamma_s(x) \right) \psi_s(0; x), \quad \gamma_s(x) = \sin x e^{-\frac{\lambda x}{s(s+1)}}. \quad (3.6.12)$$

Then, the ladder operators for the trigonometric RM system are constructed in the same fashion as done in Section 3.3.3:

$$A^+(n) = B_s^+ \left( \prod_{i=1}^n \frac{B_{s+i}^+}{\sqrt{E_s(n+1) - E_s(i)}} \right) \left( \frac{K_{s+n+1}(0)}{K_{s+n}(0)} \gamma_{s+n}(x) \right) \left( \prod_{i=1}^n \frac{B_{s+n-i}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-i)}} \right), \quad (3.6.13)$$

$$A^-(n) = \left( \prod_{i=0}^{n-2} \frac{B_{s+i}^+}{\sqrt{E_s(n-1) - E_s(i)}} \right) \left( \frac{K_{s+n-1}(0)}{K_{s+n}(0)} \gamma_{s+n-1}^{-1}(x) \right) \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{B_{s+n-i}^-}{\sqrt{E_s(n) - E_s(n-i)}} \right) B_s^-. \quad (3.6.14)$$

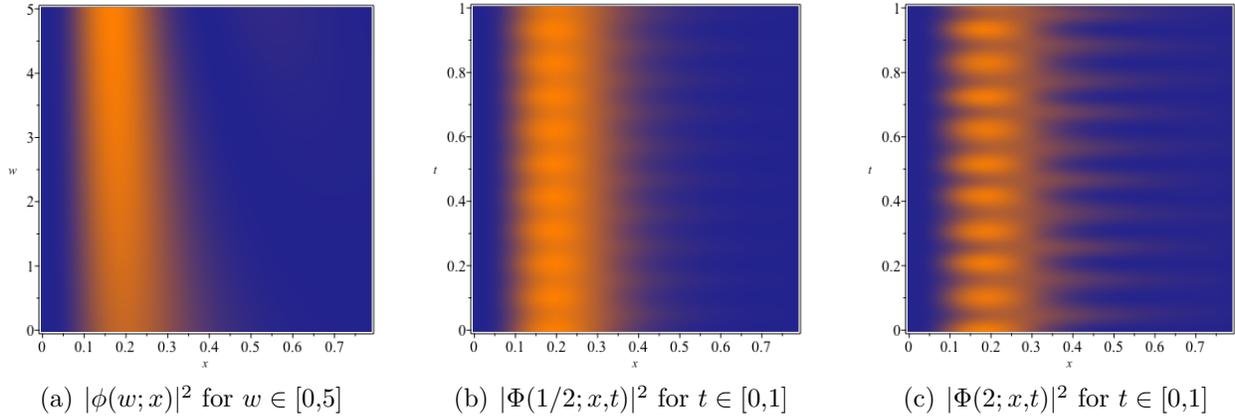
Hence, the ladder operators  $A^\pm(n)$  are differential operators of order  $2n \pm 1$  except for  $A^-(0)$  which is also of the first order. The ladder operators action (3.2.2) is realized with  $k(n)$  being now the RMI shifted energy.

### 3.6.3. Coherent states of the RMI potential

As presented in Section 3.5.1, the ladder operators (3.6.13)-(3.6.14) for the RMI potential motivate a coherent states construction. In this case, we recall that the trigonometric Rosen-Morse system has an infinite discrete spectrum. Hence, we construct new exact Barut-Girardello coherent states  $\phi(w; x)$  from (3.5.2)-(3.5.3) for  $k(n) = E_s(n) - E_s(0)$  accordingly being the RMI shifted energy (3.6.6). Other coherent states constructions for this system have been investigated, for instance, in [55, 56, 57].

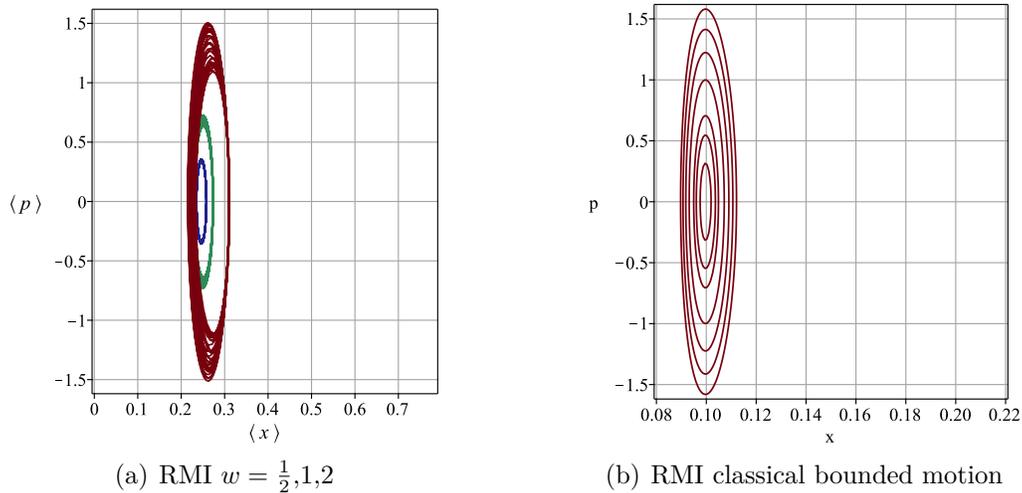
Space localization of the probability density is exposed in Fig. 3.3.11 for the coherent states of a RMI potential of parameters  $s = 2$  and  $\lambda = 20$ . The localization of  $|\phi(w; x)|^2$  at  $t = 0$  appears in Fig. 11(a) from which we remark a low-amplitude secondary maximum appearing around  $x \approx 0.6$  as  $w$  increases. This secondary maximum is negligible for  $w < 1$ , where the coherent states are most localized. We further analyze the time evolution of the probability densities  $|\Phi(w; x, t)|^2$  for  $w = 1/2$  in Fig. 3.11(b) and  $w = 2$  in 3.11(c). Space localization is best preserved in time for  $w < 1$ . For both values of  $w$ , the oscillating behaviour of the probability density is uniform for  $t \in [0, 1]$  as opposed to that of the RMII in Fig. 3.7.

The trajectory  $(\langle x \rangle(w; t), \langle p \rangle(w; t))$  is computed numerically for different values of  $w$  and compared to the phase space trajectory of bounded motion of the classical system in Fig. 3.12. We have  $w = 2$  (exterior),  $w = 1$  (middle) and  $w = 1/2$  (interior). The trajectories do not agree well, as the classical trajectory is compressed spatially and translated towards



**Fig. 3.11.** Space localization of the probability density  $|\phi(w; x)|^2$  of the coherent states at  $t = 0$  in terms of the real parameter  $w$  (a). Time evolution of the probability densities  $|\Phi(w; x, t)|^2$  for  $w$  fixed (b)-(c). Parameters:  $s = 2$  and  $\lambda = 20$ .

to deeper part of the well. An explanation for this could be that only a finite number of eigenstates have their energies in the deep left part of the well, and are thus constrained in the deeper left part of  $V_s(x)$ . The rest of the eigenstates in the infinite superposition have their probability density spread over the whole domain and would overcome the previously mentioned ones in a way to obtain an effective trajectory whose mean position is farther right with respect to the classical one.



**Fig. 3.12.** Trajectories  $(\langle x \rangle(w; t), \langle p \rangle(w; t))$  of position and momentum expectation values in time  $t \in [0, 3]$  for the coherent states for  $w$  fixed (a) compared to phase space trajectories  $(x(t), p(t))$  of bounded motion of its classical analogue (b). Parameters:  $s = 2$  and  $\lambda = 20$ .

### 3.7. Conclusion and outlook

In this paper, we have constructed ladder operators for the hyperbolic Rosen-Morse (RMII) quantum system whose energies are given by a rational function of the excitation number  $n$ . Unlike usual solvable systems for which ladder operators are realized as first order differential operators using traditional methods, we used the shape invariance property in SUSYQM together with a ground state connection to recover  $A^\pm$  for the RMII potential as  $2n \pm 1$  order differential operators. These ladder operators were derived completely from a quantum mechanical standpoint, and thus stand apart from the classical approach proposed in [14]. The choice of  $k(n)$  being the shifted energy was natural from construction since the shifted energy appears as proportionality factor in SUSYQM. As an outlook, one could investigate the reducibility of the ladder operators to lower orders, in particular by iteratively making use of the Schrödinger equation to substitute second order derivatives as they act on an eigenstate. Ideas of [58] could be useful in that direction.

We have shown that the construction is well suited to be transferred to SUSY partners of the RMII system by constructing that  $\mathcal{A}^\pm$  of its type III rational extensions using standard methods. Due to the additional energy level, we restricted the ladder operations on the excited subspace ( $n \geq 1$ ) that is in SUSY correspondence to the initial RMII system. The technique generalizes to other SUSY partners and ladder operators could be constructed for higher-order SUSY partners [13], for instance.

In both cases, we used the realization of the ladder operators to construct coherent states as almost eigenstates of the lowering operator. We compared their behaviours with respect to space localization, trajectory and minimization of the Heisenberg uncertainty principle. In a similar fashion to what was done in [18], our constructions could be generalized to squeezed states. In this case, the issue of acting with the raising operator on the maximally excited state would have to be addressed, for example, by removing that state from the superposition.

Finally, point canonical transformation has proven to be a successful method to extend our constructions and results to the trigonometric Rosen-Morse (RMI) system. Ladder operators and associated exact Barut-Girardello coherent states we constructed similarly. An outlook would be to fully exploit the PCT network for shape invariant potentials [11, 52] to seek ladder operators for other solvable systems. The remaining Kepler-Coulomb potentials are such examples [15]. These connections could offer a new approach to tackle the reducibility problem for the ladder operators. Moreover, the classification of the RMI rational extensions have been done in [53] using Romanovski polynomials, offering the possibility for an analogous treatment to what was done in this work, this time for type III RMI rational extensions.

## Acknowledgements

V. Hussin acknowledges the support of research grant from NSERC of Canada. S. Garneau-Desroches acknowledges the Department of Physics of Université de Montréal for a recruitment scholarship.

## References

- [1] Dirac P A M 1935 *The Principles of Quantum Mechanics* 2 edition (Oxford University Press)
- [2] Schrödinger E 1940 A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* **46** 9–16
- [3] Dong S H 2007 *Factorization Method in Quantum Mechanics* Fundamental Theories of Physics (Springer Netherlands)
- [4] Barut A O and Girardello L 1971 New “coherent” states associated with non-compact groups *Communications in Mathematical Physics* **21** 41 – 55
- [5] Eleonsky V M and Korolev V G 1995 On the nonlinear generalization of the Fock method *Journal of Physics A: Mathematical and General* **28** 4973–4985
- [6] Curado E, Hassouni Y, Rego-Monteiro M and Rodrigues L M 2008 Generalized Heisenberg algebra and algebraic method: The example of an infinite square-well potential *Physics Letters A* **372** 3350 – 3355
- [7] Hussin V and Marquette I 2011 Generalized Heisenberg algebras, SUSYQM and degeneracies: Infinite well and Morse potential *SIGMA* **7** 24
- [8] Rosen N and Morse P 1932 On the Vibrations of Polyatomic Molecules *Physical Review* **42** 210
- [9] Infeld L and Hull T E 1951 The Factorization Method *Reviews of Modern Physics* **23** 21–68
- [10] Lévai G and Magyari E 2009 The PT-symmetric Rosen–Morse II potential: effects of the asymptotically non-vanishing imaginary potential component *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** 195302
- [11] De R, Dutt R and Sukhatme U 1992 Mapping of shape invariant potentials under point canonical transformations *Journal of Physics A: Mathematical and General* **25** L843–L850
- [12] Quesne C 2012 Novel enlarged shape invariance property and exactly solvable rational extensions of the Rosen–Morse II and Eckart potentials *SIGMA* **8** 080
- [13] Fernández D J and Roy B 2020 Confluent second-order supersymmetric quantum mechanics and spectral design *Physica Scripta* **95** 055210
- [14] Delisle-Doray L and Hussin V 2020 Ladder Operators for the Rosen–Morse System Through Classical Analogy *Journal of Physics: Conference Series* **1540** 012001
- [15] Delisle-Doray L, Hussin V, Ş Kuru and Negro J 2019 Classical ladder functions for Rosen–Morse and curved Kepler–Coulomb systems *Annals of Physics* **405** 69 – 82
- [16] Witten E 1981 Dynamical breaking of supersymmetry *Nuclear Physics B* **188** 513 – 554
- [17] Cooper F, Khare A and Sukhatme U 2001 *Supersymmetry in quantum mechanics* (Singapore ; River Edge, NJ: World Scientific)
- [18] Angelova M, Hertz A and Hussin V 2012 Trajectories of generalized quantum states for systems with finite discrete spectrum and classical analogs *AIP Conference Proceedings* **1488** 122–129
- [19] Angelova M and Hussin V 2008 Generalized and Gaussian coherent states for the Morse potential *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** 304016

- [20] Compean C B and Kirchbach M 2005 The trigonometric Rosen–Morse potential in the supersymmetric quantum mechanics and its exact solutions *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39** 547–557
- [21] Cruz y Cruz S, Ş Kuru and Negro J 2008 Classical motion and coherent states for Pöschl–Teller potentials *Physics Letters A* **372** 1391 – 1405
- [22] Dong S H, Lemus R and Frank A 2001 Ladder operators for the Morse potential *International Journal of Quantum Chemistry* **86** 433–439
- [23] Dong S H and Lemus R 2002 Ladder operators for the modified Pöschl–Teller potential *International Journal of Quantum Chemistry* **86** 265–272
- [24] Mikulski D, Eder K and Molski M 2014 The algebraic approach for the derivation of ladder operators and coherent states for the Goldman and Krivchenkov oscillator by the use of supersymmetric quantum mechanics *Journal of Mathematical Chemistry* **52** 1610–1623
- [25] Sukumar C V 1985 Supersymmetric quantum mechanics of one-dimensional systems *Journal of Physics A: Mathematical and General* **18** 2917–2936
- [26] Fernández D J 2010 Supersymmetric Quantum Mechanics *AIP Conference Proceedings* **1287** 3–36
- [27] Fernández D J and Fernández-García N 2004 Higher-order supersymmetric quantum mechanics *AIP Conference Proceedings* **744** 236–273
- [28] Mielnik B 1984 Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum *Journal of Mathematical Physics* **25** 3387–3389
- [29] Fernández D J and Salinas-Hernández E 2003 The confluent algorithm in second-order supersymmetric quantum mechanics *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** 2537–2543
- [30] Kuru Ş, Negro J and Nieto L 2019 *Integrability, Supersymmetry and Coherent States: A Volume in Honour of Professor Véronique Hussin* CRM Series in Mathematical Physics (Springer)
- [31] Hoffmann S E, Hussin V, Marquette I and Zhang Y Z 2019 Ladder operators and coherent states for multi-step supersymmetric rational extensions of the truncated oscillator *Journal of Mathematical Physics* **60** 052105
- [32] Temme N M 1996 *Special functions : an introduction to the classical functions of mathematical physics* (New York: Wiley)
- [33] Nieto M M 1978 Exact wave-function normalization constants for the  $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$  and Pöschl–Teller potentials *Physical Review A* **17** 1273–1283
- [34] Sukumar C V 1985 Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a Hamiltonian hierarchy *Journal of Physics A: Mathematical and General* **18** L57–L61
- [35] Dutt R, Khare A and Sukhatme U P 1988 Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials *American Journal of Physics* **56** 163–168
- [36] Stahlfhofen A 1989 Remarks on the equivalence between the shape-invariance condition and the factorisation condition *Journal of Physics A: Mathematical and General* **22** 1053–1058
- [37] Fernández D J, Hussin V and Rosas-Ortiz O 2007 Coherent states for Hamiltonians generated by supersymmetry *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **40** 6491–6511
- [38] Gómez-Ullate D, Kamran N and Milson R 2004 The Darboux transformation and algebraic deformations of shape-invariant potentials *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** 1789–1804
- [39] Gómez-Ullate D, Grandati Y and Milson R 2013 Rational extensions of the quantum harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47** 015203
- [40] Grandati Y and Bérard A 2009 Solvable rational extension of translationally shape invariant potentials *arXiv e-prints* arXiv:0912.3061

- [41] Grandati Y 2012 Rational extensions of solvable potentials and exceptional orthogonal polynomials *Journal of Physics: Conference Series* **343** 012041
- [42] Marquette I and Quesne C 2013 Two-step rational extensions of the harmonic oscillator: exceptional orthogonal polynomials and ladder operators *Journal of Physics A* **46** 155201
- [43] Yadav R K, Banerjee S, Kumari N et al. 2020 One parameter family of rationally extended isospectral potentials *arXiv e-prints* arXiv:2004.13478
- [44] Quesne C 2009 Solvable Rational Potentials and Exceptional Orthogonal Polynomials in Supersymmetric Quantum Mechanics *SIGMA* **5** 084
- [45] Fernández D J and Morales-Salgado V S 2013 Supersymmetric partners of the harmonic oscillator with an infinite potential barrier *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47** 035304
- [46] Estrada-Delgado M I and Fernández D J 2019 Ladder operators for the Ben Daniel-Duke Hamiltonians and their SUSY partners *European Physical Journal Plus* **134** 341
- [47] Hoffmann S E, Hussin V, Marquette I and Zhang Y Z 2019 Coherent states for rational extensions and ladder operators related to infinite-dimensional representations *Journal of Physics: Conference Series* **1416** 012013
- [48] Fernández D J, Hussin V and Morales-Salgado V S 2019 Coherent states for the supersymmetric partners of the truncated oscillator *The European Physical Journal Plus* **134** 18
- [49] Lévai G 2008 On the normalization constant of PT-symmetric and real Rosen–Morse I potentials *Physics Letters A* **372** 6484–6489
- [50] Domínguez-Hernández S and Fernández D J 2011 Rosen–Morse Potential and Its Supersymmetric Partners *International Journal of Theoretical Physics* **50** 1993–2001
- [51] Bhattacharjie A and Sudarshan E C G 1962 A class of solvable potentials *Il Nuovo Cimento Series 10* **25** 864–879
- [52] Mallow J V, Gangopadhyaya A, Bougie J and Rasinariu C 2020 Inter-relations between additive shape invariant superpotentials *Physics Letters A* **384** 126129
- [53] Quesne C 2013 Extending Romanovski polynomials in quantum mechanics *Journal of Mathematical Physics* **54** 122103
- [54] Raposo A P, Weber H J, Alvarez-Castillo D E and Kirchbach M 2007 Romanovski polynomials in selected physics problems *Central European Journal of Physics* **5** 253–284
- [55] Bergeron H, Siegl P and Youssef A 2012 New SUSYQM coherent states for Pöschl-Teller potentials: a detailed mathematical analysis *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45** 244028
- [56] Chenaghlou A and Faizy O 2008 Gazeau-Klauder coherent states for trigonometric Rosen-Morse potential *Journal of Mathematical Physics* **49** 022104
- [57] Bergeron H, Gazeau J P, Siegl P and Youssef A 2011 Semi-classical behavior of Pöschl-Teller coherent states *Europhysics Letters* **92** 60003
- [58] Ş Kuru and Negro J 2009 Dynamical algebras for Pöschl–Teller Hamiltonian hierarchies *Annals of Physics* **324** 2548 – 2560



## Conclusion

---

Le retour et la discussion faits dans cette conclusion se veulent en partie complémentaires à la conclusion de l'article du dernier chapitre. En bref, ce mémoire a posé le problème de la réalisation des opérateurs d'échelle pour le système quantique de Rosen-Morse hyperbolique avec la méthode algébrique. Alors que celle-ci s'avère adéquate pour traiter le cas particulier du système de Pöschl-Teller, on a constaté qu'elle était non concluante dans le cas général de Rosen-Morse. Après avoir introduit le formalisme de mécanique quantique supersymétrique, on l'a utilisé dans la résolution de ce problème selon une approche complètement quantique. Précisément, la possibilité de voyager entre les différents membres d'une hiérarchie de systèmes de Rosen-Morse due à l'invariance de forme a permis de recréer l'action des opérateurs d'échelle comme des opérateurs différentiels d'ordre  $2n \pm 1$ . Les récents progrès [14, 15] ont fait en sorte que le problème a été attaqué par la version hyperbolique en premier lieu, mais on mentionne que le projet aurait également pu être élaboré en commençant d'abord avec le cas trigonométrique. Tel que mentionné dans la conclusion de l'article, on a effectivement vérifié que les opérateurs d'échelle (3.3.17)-(3.3.18) obtenus se réconcilient avec ceux du Pöschl-Teller (1.4.10) lorsqu'on prend  $\lambda = 0$ . Les idées élaborées dans [33] ont permis de commuter les opérateurs  $B_s^+$  à droite de la connexion  $\gamma_s(x)$  (ou  $\gamma_s^{-1}(x)$ ) dans l'expression des opérateurs d'échelle. En faisant ensuite appel à la factorisation du hamiltonien réalisée par les opérateurs d'entrelacement, on arrive à réduire les opérateurs d'échelle au premier ordre. Cette vérification renforce les résultats présentés dans l'article.

Ensuite, on a utilisé les opérateurs d'échelle réalisés ainsi que la supersymétrie à nouveau pour construire des opérateurs d'échelle pour les extensions rationnelles de type III du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique. L'état fondamental additionnel issu de cette SUSY d'ajout a forcé une séparation de l'espace de Hilbert pour définir le domaine d'action des opérateurs obtenus. Des séparations différentes de l'espace de Hilbert existent pour les extensions rationnelles de l'oscillateur harmonique [35, 69], menant à des opérateurs d'échelle (et des états cohérents) différents. La dépendance linéaire de l'énergie de l'oscillateur harmonique en fonction de l'excitation  $n$  joue un rôle important dans de telles réalisations. Il serait intéressant de voir si ces idées peuvent s'adapter aux extensions rationnelles du potentiel de Rosen-Morse, d'autant plus vu son spectre rationnel en  $n$ . En parallèle, le formalisme de

mécanique quantique supersymétrique a été étudié par l’auteur de ce mémoire à des ordres plus élevés [17], entre autres dans le contexte du potentiel de Rosen-Morse hyperbolique [70]. Une prochaine étape aurait été d’étudier le comportement des opérateurs d’échelle dans un tel contexte, notamment pour les supersymétries de deuxième ordre de type *confluentes* [59, 71].

Dans l’article, on a construit des états cohérents comme presque états propres des opérateurs d’échelle réalisés pour les deux systèmes (RMII et extensions rationnelles de type III). Le fait que l’état fondamental de l’extension rationnelle ne soit pas inclus dans la superposition pour ses états cohérents a mené à des états qui se comportent de façon similaire aux états cohérents du potentiel de Rosen-Morse initial au niveau de la trajectoire. Cependant, l’absence de l’état fondamental a affecté la localisation dans l’espace de leur probabilité de densité pour une certaine fenêtre de paramètres  $w \in \mathbb{R}$ , ainsi que leur approximation de la relation d’incertitude de Heisenberg. De plus, lors d’une présentation donnée le 13 avril 2021 dans le cadre du Séminaire Physique Mathématique du Centre de Recherches Mathématiques (CRM), on a présenté des états cohérents comme presque états propres d’opérateurs d’échelle pour l’extension rationnelle de type I montrée à la Fig. 2.1(a) et discutée à la Section 2.3.1. Ceux-ci avaient été construits en utilisant les mêmes techniques de supersymétrie que celles présentées dans ce mémoire. Dans ces cas, le caractère isospectral de la transformation a mené à des états cohérents aux comportements pratiquement identiques à ceux construits pour le système de Rosen-Morse initial, c’est-à-dire en parfait accord avec la façon dont la forme du potentiel avait été modifiée par la SUSY. On a décidé de les omettre de ce mémoire pour cette raison.

Finalement, on a revu la transformation canonique ponctuelle connue permettant de transformer le potentiel, les états et le spectre du système de Rosen-Morse hyperbolique en ceux du système de Rosen-Morse trigonométrique. De cette transformation ont pu être déduits les éléments nécessaires à l’adaptation de la construction des opérateurs d’échelle pour la version trigonométrique du système. Cette première réalisation des opérateurs d’échelle du système de Rosen-Morse trigonométrique comme opérateurs différentiels a complété la solution au problème des opérateurs d’échelle pour l’ensemble des systèmes de Rosen-Morse. D’autre part, le spectre lié étant infini pour cette version, on a pu construire des états cohérents comme des états propres exacts de nos opérateurs d’échelle. Tel que suggéré dans la conclusion de l’article, une exploitation plus complète du réseau de transformations connectant les potentiels invariants (voir, par exemple, [72]) permettrait de généraliser notre construction d’opérateurs d’échelle pour d’autres potentiels. Par exemple, le cas du potentiel de Kepler-Coulomb (version Eckart) [73, 74] serait un premier cas à tenter, ayant lui aussi un spectre rationnel en l’excitation  $n$ . Encore une fois, une telle connexion ouvrirait la porte vers de nombreuses nouvelles possibilités en ce qui a trait à l’étude des extensions rationnelles et des états cohérents.

# Références bibliographiques

---

- [1] Dirac P A M 1935 *The Principles of Quantum Mechanics* 2 edition (Oxford University Press)
- [2] Schrödinger E 1940 A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* **46** 9–16
- [3] Eleonsky V M and Korolev V G 1995 On the nonlinear generalization of the Fock method *Journal of Physics A: Mathematical and General* **28** 4973–4985
- [4] Draganescu G D E and Avram N M 1998 *Canadian Journal of Physics* **76** 273–281
- [5] Gazeau J P 2009 *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley)
- [6] Klauder J and Skagerstam B 1985 *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific)
- [7] Zuniga J, Alacid M, Requena A and Bastida A 1996 Matrix elements for the modified Pöschl-Teller potential *International Journal of Quantum Chemistry* **57** 43–51
- [8] Dong S H 2003 The realization of dynamic group for the pseudoharmonic oscillator *Applied Mathematics Letters* **16** 199–203
- [9] Dong S and Dong S H 2002 A Realization of Dynamic Group for an Electron in a Uniform Magnetic Field *International Journal of Modern Physics E* **11** 265–271
- [10] Rosen N and Morse P 1932 On the Vibrations of Polyatomic Molecules *Physical Review* **42** 210
- [11] Schrödinger E 1940 Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* **46** 183–206
- [12] Stevenson A F 1941 Note on the "Kepler Problem" in a Spherical Space, and the Factorization Method of Solving Eigenvalue Problems *Physical Review* **59** 842–843
- [13] Şengül Kuru and Negro J 2008 Factorizations of one-dimensional classical systems *Annals of Physics* **323** 413 – 431
- [14] Delisle-Doray L, Hussin V, Ş Kuru and Negro J 2019 Classical ladder functions for Rosen–Morse and curved Kepler–Coulomb systems *Annals of Physics* **405** 69 – 82
- [15] Delisle-Doray L and Hussin V 2020 Ladder Operators for the Rosen-Morse System Through Classical Analogy *Journal of Physics: Conference Series* **1540** 012001
- [16] Witten E 1981 Dynamical breaking of supersymmetry *Nuclear Physics B* **188** 513 – 554
- [17] Fernández D J and Fernández-García N 2004 Higher-order supersymmetric quantum mechanics *AIP Conference Proceedings* **744** 236–273
- [18] Mielnik B 1984 Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum *Journal of Mathematical Physics* **25** 3387–3389
- [19] Gómez-Ullate D, Kamran N and Milson R 2009 An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **359** 352 – 367

- [20] Fernández D J and Salinas-Hernández E 2011 Hyperconfluent third-order supersymmetric quantum mechanics *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **44** 365302
- [21] Infeld L and Hull T E 1951 The Factorization Method *Reviews of Modern Physics* **23** 21–68
- [22] Goldstein H, Poole C and Safko J 2002 *Classical Mechanics* (Addison Wesley)
- [23] Peskin M E and Schroeder D V 1995 *An Introduction to Quantum Field Theory* (Reading, USA: Addison-Wesley)
- [24] Schrödinger E 1941 The Factorization of the Hypergeometric Equation *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* **47** 53–54
- [25] Bromley D and Greiner W 2012 *Quantum Mechanics: An Introduction* (Springer Berlin Heidelberg)
- [26] Sakurai J J and Napolitano J 2017 *Modern Quantum Mechanics* 2 edition (Cambridge University Press)
- [27] Joseph A 1967 Self-Adjoint Ladder Operators (I) *Reviews of Modern Physics* **39** 829–837
- [28] Curado E, Hassouni Y, Rego-Monteiro M and Rodrigues L M 2008 Generalized Heisenberg algebra and algebraic method: The example of an infinite square-well potential *Physics Letters A* **372** 3350 – 3355
- [29] Hussin V and Marquette I 2011 Generalized Heisenberg algebras, SUSYQM and degeneracies: Infinite well and Morse potential *SIGMA* **7** 24
- [30] Dong S H 2007 *Factorization Method in Quantum Mechanics* Fundamental Theories of Physics (Springer Netherlands)
- [31] Berrondo M, Palma A and López-Bonilla J 1987 Matrix elements for the Morse potential using ladder operators *International Journal of Quantum Chemistry* **31** 243–249
- [32] Dothan Y 1970 Finite-dimensional spectrum-generating algebras *Physical Review D* **2** 2944–2954
- [33] Ş Kuru and Negro J 2009 Dynamical algebras for Pöschl–Teller Hamiltonian hierarchies *Annals of Physics* **324** 2548 – 2560
- [34] Marquette I 2011 An infinite family of superintegrable systems from higher order ladder operators and supersymmetry *Journal of Physics: Conference Series* **284** 012047
- [35] Marquette I and Quesne C 2013 New ladder operators for a rational extension of the harmonic oscillator and superintegrability of some two-dimensional systems *Journal of Mathematical Physics* **54** 102102
- [36] Barut A O and Girardello L 1971 New “coherent” states associated with non-compact groups *Communications in Mathematical Physics* **21** 41 – 55
- [37] Howard S and Roy S K 1987 Coherent states of a harmonic oscillator *American Journal of Physics* **55** 1109–1117
- [38] Angelova M, Hertz A and Hussin V 2012 Squeezed coherent states and the one-dimensional Morse quantum system *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45** 244007
- [39] Mandel L and Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press)
- [40] Dong S H, Lemus R and Frank A 2001 Ladder operators for the Morse potential *International Journal of Quantum Chemistry* **86** 433–439
- [41] Mikulski D, Eder K and Molski M 2014 The algebraic approach for the derivation of ladder operators and coherent states for the Goldman and Krivchenkov oscillator by the use of supersymmetric quantum mechanics *Journal of Mathematical Chemistry* **52** 1610–1623
- [42] Szegő G 1975 *Orthogonal Polynomials* American Mathematical Society: Colloquium Publications (American Mathematical Society)
- [43] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 2007 *Table of integrals, series, and products* seventh edition (Elsevier/Academic Press, Amsterdam) translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX)

- [44] Pöschl G and Teller E 1933 Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators *Zeitschrift für Physik* **83** 143–151
- [45] Nikiforov A F and Uvarov V 1988 *Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications* (Springer Basel AG)
- [46] *NIST Digital Library of Mathematical Functions* <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.2 of 2021-06-15 f. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [47] Gazeau J P and Monceau P 2000 *Generalized coherent states for arbitrary quantum systems* (Dordrecht: Springer Netherlands) 131–144
- [48] Fernández D J, Hussin V and Rosas-Ortiz O 2007 Coherent states for Hamiltonians generated by supersymmetry *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **40** 6491–6511
- [49] Angelova M and Hussin V 2008 Generalized and Gaussian coherent states for the Morse potential *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41** 304016
- [50] Quesne C 2012 Exceptional orthogonal polynomials and new exactly solvable potentials in quantum mechanics *Journal of Physics: Conference Series* **380** 012016
- [51] Lévai G and Magyari E 2009 The PT-symmetric Rosen–Morse II potential: effects of the asymptotically non-vanishing imaginary potential component *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** 195302
- [52] Quesne C 2012 Novel enlarged shape invariance property and exactly solvable rational extensions of the Rosen–Morse II and Eckart potentials *SIGMA* **8** 080
- [53] Nieto M M 1978 Exact wave-function normalization constants for the  $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$  and Pöschl–Teller potentials *Physical Review A* **17** 1273–1283
- [54] Project B M, Bateman H, Erdélyi A and of Naval Research U S O 1953 *Higher Transcendental Functions* number vol. 2 in *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill)
- [55] Cooper F, Khare A and Sukhatme U 1995 Supersymmetry and quantum mechanics *Physics Reports* **251** 267 – 385
- [56] Sukumar C V 1985 Supersymmetric quantum mechanics of one-dimensional systems *Journal of Physics A: Mathematical and General* **18** 2917–2936
- [57] Rosas-Ortiz O 1999 On the factorization method in quantum mechanics *arXiv e-prints* quant-ph/9812003
- [58] Ince E L 1956 *Ordinary Differential Equations* Dover Books on Mathematics (New York: Dover Publications)
- [59] Kuru Ş, Negro J and Nieto L 2019 *Integrability, Supersymmetry and Coherent States: A Volume in Honour of Professor Véronique Hussin* CRM Series in Mathematical Physics (Springer)
- [60] Fernández D J 2010 Supersymmetric Quantum Mechanics *AIP Conference Proceedings* **1287** 3–36
- [61] Stahlhofen A 1989 Remarks on the equivalence between the shape-invariance condition and the factorisation condition *Journal of Physics A: Mathematical and General* **22** 1053–1058
- [62] Cariñena J and Ramos A 2000 Riccati equation, Factorization Method and Shape Invariance *Reviews in Mathematical Physics* **12** 1279–1304
- [63] Cooper F, Khare A and Sukhatme U 2001 *Supersymmetry in quantum mechanics* (Singapore ; River Edge, NJ: World Scientific)
- [64] Gómez-Ullate D, Kamran N and Milson R 2004 The Darboux transformation and algebraic deformations of shape-invariant potentials *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37** 1789–1804

- [65] Grandati Y and Bérard A 2009 Solvable rational extension of translationally shape invariant potentials *arXiv e-prints* arXiv:0912.3061
- [66] Gómez-Ullate D, Grandati Y and Milson R 2013 Rational extensions of the quantum harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47** 015203
- [67] Marquette I and Quesne C 2013 Two-step rational extensions of the harmonic oscillator: exceptional orthogonal polynomials and ladder operators *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46** 155201
- [68] Grandati Y 2012 Rational extensions of solvable potentials and exceptional orthogonal polynomials *Journal of Physics: Conference Series* **343** 012041
- [69] Hoffmann S E, Hussin V, Marquette I and Zhang Y Z 2018 Coherent states for ladder operators of general order related to exceptional orthogonal polynomials *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **51** 315203
- [70] Fernández D J and Roy B 2020 Confluent second-order supersymmetric quantum mechanics and spectral design *Physica Scripta* **95** 055210
- [71] Fernández D J and Salinas-Hernández E 2003 The confluent algorithm in second-order supersymmetric quantum mechanics *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** 2537–2543
- [72] Mallow J V, Gangopadhyaya A, Bougie J and Rasinariu C 2020 Inter-relations between additive shape invariant superpotentials *Physics Letters A* **384** 126129
- [73] Hoffmann S E, Hussin V, Marquette I and Zhang Y Z 2019 Coherent states for rational extensions and ladder operators related to infinite-dimensional representations *Journal of Physics: Conference Series* **1416** 012013
- [74] De R, Dutt R and Sukhatme U 1992 Mapping of shape invariant potentials under point canonical transformations *Journal of Physics A: Mathematical and General* **25** L843–L850