

Université de Montréal

Entropie d'intrication de régions squelettiques

par

**Alex Vigeant**

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

30 avril 2021



# Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

## Entropie d'intrication de régions squelettiques

présenté par

**Alex Vigeant**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Luc Vinet*

---

(président-rapporteur)

*William Witczak-Krempa*

---

(directeur de recherche)

*Manu Paranjape*

---

(membre du jury)



# Résumé

---

Ces vingt dernières années ont vu le concept d'intrication quantique prendre une place importante dans l'étude des systèmes quantiques à  $N$  corps rencontrés par exemple en théorie de la matière condensée. L'entropie d'intrication est une mesure de l'intrication entre deux parties formant un système dans un état quantique pur. L'étude de cette entropie permet d'obtenir des informations cruciales sur les systèmes considérés.

Dans ce mémoire, nous étudions l'entropie d'intrication de régions dites squelettiques, pour un réseau harmonique bidimensionnel correspondant à une version discrète de la théorie d'un champ scalaire relativiste sans masse. Une région squelettique ne possède pas de volume, en opposition à une région dite pleine. Au sein d'un réseau à deux dimensions, il s'agira d'une chaîne finie de sites. Nous montrons que le comportement de l'entropie d'intrication d'une région unidimensionnelle diffère de celui de l'entropie d'une région pleine (à deux dimensions). En particulier, nous montrons qu'il apparaît de nouveaux termes universels associés à ces nouveaux comportements pour des régions squelettiques. Notre étude est principalement menée à l'aide de calculs numériques, bien que certains résultats soient obtenus de manière semi-analytique.

**Mots clés:** Entropie d'intrication, Loi du périmètre, Termes universels, Limite ultraviolette, Bosons libres, Tore bidimensionnel, Conditions aux frontières de Dirichlet, Termes de coins



# Abstract

---

In the last twenty years, the concept of entanglement entropy has taken an important place in the study of  $N$ -body quantum systems seen in condensed matter, among others. Entanglement entropy is an entanglement measure between two parts forming a system in a pure quantum state. The study of this entropy allows one to obtain crucial information about  $N$ -body quantum systems.

In this master's thesis, we will study the entanglement entropy of so-called skeletal regions, for a harmonic two-dimensional lattice corresponding to a discrete version of a massless relativistic scalar field theory. A skeletal region doesn't possess a volume, unlike a region said to be full. In the case of a two-dimensional lattice, the skeletal region is defined by a finite chain of sites. We show that the behaviour of entanglement entropy of an unidimensional region differs from the case of a full region (which is two-dimensional). In particular, we show the appearance of new universal coefficients linked to skeletal regions. Our study consists mainly of numerical calculations, although some results are obtained in a semi-analytical manner.

**Keywords:** Entanglement entropy, Area law, Universal coefficients, Ultraviolet limit, Free bosons, Two-dimensional torus, Dirichlet boundary conditions, Corner coefficients





# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>Liste des tableaux</b> .....	11
<b>Liste des figures</b> .....	13
<b>Liste des sigles et des abréviations</b> .....	15
<b>Remerciements</b> .....	17
<b>Chapitre 1. Entropie d'intrication</b> .....	19
1.1. Propriétés de l'entropie d'intrication .....	20
1.1.1. Inégalités .....	20
1.1.2. Divergence ultraviolette .....	20
1.2. Loi du périmètre .....	21
1.2.1. Systèmes en 1+1 dimensions .....	21
1.2.2. Systèmes en 2+1 dimensions .....	22
1.3. Sous-régions squelettiques .....	23
<b>Chapitre 2. Méthodes de calcul de l'entropie d'intrication</b> .....	25
2.1. Approche Euclidienne .....	25
2.2. Approche avec temps réel .....	26
2.2.1. Réduction de dimension .....	31
2.3. Théorie pour un tore bidimensionnel .....	32
2.3.1. Vérification du code pour le cas d'un tore fin .....	33
2.4. Termes de coins à la frontière .....	33
<b>Chapitre 3. Entropie d'intrication de régions squelettiques</b> .....	37

3.1. Démarches analytiques .....	37
3.2. Résultats numériques pour une sous-région squelettique .....	41
3.3. Entropie de Rényi pour une sous-région squelettique .....	43
3.4. Entropie d'intrication pour un système PBC-OBC pour une sous-région squelettique.....	44
<b>Chapitre 4. Conclusion.....</b>	<b>47</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>49</b>
<b>Annexe A. Données numériques.....</b>	<b>51</b>

## Liste des tableaux

---

- A.1 Valeurs de l'EE selon la masse d'un réseau unidimensionnel périodique avec une sous-région composée d'un site unique..... 52
- A.2 Valeurs de  $\gamma_{\mathcal{A}}$  selon la longueur du réseau  $L$  obtenue à l'aide de l'opération  $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ , où  $a_{1d} = 0.0563118$ ..... 53



# Liste des figures

---

1.1	Exemples de sous-région pleine (a) et sans volume (b).....	24
2.1	Réseau carré torique bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en $x$ et conditions anti-périodiques (APBC) en $y$ . La sous-région $\mathcal{A}$ (représentée ici en gris) est de dimension $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ .....	32
2.2	Terme $s_0$ en fonction de $L_y$ , obtenu en appliquant un LSF avec 20 valeurs pour chaque point pour la formule 2.3.1. Le tore fin utilisé ici, avec conditions aux frontières PBC-APBC, est de $L_x = 400$ sites dans la direction $x$ et possède une sous-région $\mathcal{A}$ de dimension $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ , où $L_x^{\mathcal{A}} = 150$ sites. La valeur de $s_0$ converge dans la limite du tore fin, c'est-à-dire quand $L_y \ll L_x$ .....	34
2.3	Terme $a$ en fonction de $L_y$ , obtenu en appliquant un LSF avec 20 valeurs pour chaque point pour la formule 2.3.1. Le tore utilisé ici, avec conditions aux frontières PBC-APBC, est de $L_x = 400$ sites dans la direction $x$ et possède une sous-région $\mathcal{A}$ de dimension $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ , où $L_x^{\mathcal{A}} = 150$ sites. La valeur de $a$ converge dans la limite du tore fin, c'est-à-dire quand $L_y \ll L_x$ .....	35
2.4	Réseau bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en $x$ et conditions ouvertes ou Dirichlet (OBC) en $y$ . Les quatre coins de la sous-région squelettique $\mathcal{A}$ donnent quatre nouveaux termes de coins $b(\pi/2)$ .....	36
3.1	Réseau carré torique bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en $x$ et conditions anti-périodiques (APBC) en $y$ . La sous-région $\mathcal{A}$ (représentée ici en gris) est unidimensionnelle et est composée d'une chaîne de sites. Le reste du réseau $\mathcal{A}^c$ est également représenté.....	38
3.2	Valeurs de l'EE $S_{\mathcal{A}}^{1d}$ en fonction de la masse $m$ d'un réseau 1d périodique de $2 \times 10^3$ sites avec une sous-région composée d'un site unique.....	41
3.3	Terme $a_{1d}$ en fonction de $L$ pour la sous-région $\mathcal{A}$ unidimensionnelle, obtenu en appliquant un LSF avec 40 valeurs pour chaque point.....	42

3.4	Terme $\gamma_{\mathcal{A}}$ en fonction de $L$ pour la sous-région $\mathcal{A}$ unidimensionnelle. La valeur de $a_{1d}$ étant bien connue, les valeurs de $\gamma_{\mathcal{A}}$ ont été obtenues en faisant $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ . L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.2.2 pour $n=4$ . . . . .	42
3.5	Valeurs de l'EE $S_{2,\mathcal{A}} - a'_{1d}2L$ en fonction de $L$ pour un réseau bidimensionnel avec conditions PBC-APBC pour une sous-région squelettique. L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.3.2 pour $n=4$ . . . . .	44
3.6	Réseau carré bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en $x$ et conditions ouvertes ou Dirichlet (OBC) en $y$ . La sous-région $\mathcal{A}$ (représentée ici en gris) est unidimensionnelle et est composée d'une chaîne de sites. Les deux extrémités de la sous-région squelettique $\mathcal{A}$ donnent possiblement de nouveaux termes de coins. . . . .	45
3.7	Valeurs de $S_{\mathcal{A}} - a_{1d}2L$ en fonction de $L$ pour un réseau bidimensionnel avec conditions PBC-OBC pour une sous-région squelettique. L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.4.2 pour $n=3$ . . . . .	46

## Liste des sigles et des abréviations

---

APBC	Conditions aux bords anti-périodiques, de l'anglais <i>anti-periodic boundary conditions</i>
CFT	Théorie conforme des champs, de l'anglais <i>conformal field theory</i>
EE	Entropie d'intrication, de l'anglais <i>entanglement entropy</i>
LSF	Méthode des moindres carrés, de l'anglais <i>least squares fit</i>
OBC	Conditions aux bords ouverts, de l'anglais <i>open boundary conditions</i>
PBC	Conditions aux bords périodiques, de l'anglais <i>periodic boundary conditions</i>
QFT	Théorie quantique des champs, de l'anglais <i>quantum field theory</i>
UV	Ultraviolet(te)





## Remerciements

---

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, William Witzak-Krempa, pour m'avoir appris de nombreuses choses durant ma maîtrise, pour s'être montré patient et pour m'avoir accompagné tout le long de ma recherche. J'aimerais également remercier Clément Berthière pour son aide précieuse et pour ses commentaires pertinents lors de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie ensuite Sergueï Tchoumakov et Éric Dupuis pour leur soutien, pour m'avoir aidé à traverser certains obstacles que je pensais impossibles à franchir et pour leurs judicieux conseils qui m'ont débloqué plus d'une fois. Merci également aux autres membres du groupe de William, sans lesquels mes années de maîtrise n'auraient pas été les mêmes.

Finalement, un gros merci à ma famille pour leurs encouragements, pour leur soutien et pour m'avoir accompagné durant mes années d'études, et ce depuis le tout début de ma scolarité jusqu'à présent.



# Chapitre 1

---

## Entropie d'intrication

L'entropie d'intrication (EE, de l'anglais *entanglement entropy*) est une quantité non-locale de la mécanique quantique. Cette grandeur, introduite pour la première fois par von Neumann en 1932 [35], permet de caractériser les systèmes quantiques à plusieurs corps et permet d'avoir un aperçu sur leurs propriétés à grandes distances [15, 22, 37]. Une cinquantaine d'années après son introduction, l'entropie de von Neumann a refait surface et est utilisée comme outil dans plusieurs domaines de recherche, tels que les trous noirs [5, 33], la théorie holographique [30] et l'informatique quantique [24].

Dans le chapitre présent, la définition et les propriétés de l'EE seront présentées, ainsi que la loi du périmètre et les sous-régions squelettiques, qui sont au coeur de ce mémoire. Dans le deuxième chapitre, deux différentes méthodes de calcul de l'EE seront détaillées et la théorie pour des sous-régions non-squelettiques sera présentée. Finalement, le troisième chapitre contient les nouveaux résultats et détaillera les recherches effectuées sur le comportement de l'EE dans les sous-régions squelettiques.

On prendra ici une théorie des champs quantique (QFT, de l'anglais *Quantum field theory*), où l'on suppose avoir un système quantique à température nulle sans dégénérescence à l'état fondamental. Le système est donc décrit par la matrice de densité  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  qui représente un état pur. On sépare ensuite ce système en deux sous-régions,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^c$  (où  $\mathcal{A}$  est habituellement une petite sous-région du système) séparées par une frontière  $\partial\mathcal{A}$ . L'espace d'Hilbert peut donc être défini comme le produit  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ . L'EE de von Neumann (souvent appelée plus simplement entropie de von Neumann) est définie de la façon suivante:

$$S_{\mathcal{A}} = -\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}} \ln \rho_{\mathcal{A}}) \tag{1.0.1}$$

où  $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{A}^c} \rho$  est la matrice de densité réduite, obtenue en traçant sur l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}^c}$ . On peut également calculer l'EE de Rényi, qui contient plus d'information sur le système [28]:

$$S_{\alpha, \mathcal{A}} = \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}^{\alpha}) \quad (1.0.2)$$

Cette quantité est caractérisée par un paramètre  $\alpha$  et permet d'obtenir l'entropie de von Neumann quand  $\alpha$  tend vers 1:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_{\alpha, \mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} \quad (1.0.3)$$

## 1.1. Propriétés de l'entropie d'intrication

### 1.1.1. Inégalités

Les propriétés de l'EE de von Neumann sont bien connues [29, 27]. On a en premier lieu l'inégalité  $S \geq 0$ , l'EE étant nulle dans le cas d'un état pur pour un système bipartite fermé. Si on reprend la division de ce système entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^c$ , on a la propriété:

$$S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}^c} \quad (1.1.1)$$

Il faut cependant noter que cette égalité est violée pour une température finie. Si une région du système (supposons la région  $\mathcal{A}$ ) est divisée en deux sous-régions  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  (incluant le cas où ces deux régions se chevauchent), on se retrouve avec une propriété appelée subadditivité:

$$S_{\mathcal{A}_1} + S_{\mathcal{A}_2} \geq S_{\mathcal{A}} \quad (1.1.2)$$

Il existe également une version plus forte:

$$S_{\mathcal{A}_1} + S_{\mathcal{A}_2} \geq S_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2} + S_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} \quad (1.1.3)$$

Dans les deux équations, l'égalité est seulement présente dans le cas où les deux régions  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  ne seraient pas corrélées (dans ce cas,  $\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{A}_1} \otimes \rho_{\mathcal{A}_2}$ ). Une autre inégalité intéressante est l'inégalité d'Araki-Lieb:

$$|S_{\mathcal{A}_1} - S_{\mathcal{A}_2}| \leq S_{\mathcal{A}} \quad (1.1.4)$$

Si on prend trois sous-régions  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  qui ne se chevauchent pas, l'expression pour la subadditivité est:

$$S_{B_1+B_2+B_3} + S_{B_2} \leq S_{B_1+B_2} + S_{B_2+B_3} \quad (1.1.5)$$

### 1.1.2. Divergence ultraviolette

Intuitivement, on s'attend à ce que l'EE soit proportionnelle au nombre de paires intriquées le long de la frontière  $\partial\mathcal{A}$ . Dans une QFT locale, les états ont des corrélations à

courte portée dans la limite ultraviolette (UV). Cela a pour conséquence la divergence de l’EE dans la limite où l’on prend en compte les corrélations trop près de  $\partial\mathcal{A}$ . Pour remédier à ce problème, on doit donc introduire une coupure UV, qu’on nommera ici  $\epsilon$ . Dans les théories de réseaux, cette coupure sera considérée comme le pas du réseau.

## 1.2. Loi du périmètre

Il est bien connu que le comportement de l’EE suit pour de nombreux systèmes ce qu’on appelle la “loi” du périmètre (*area law* en anglais) [32, 5, 14, 33], qui est donnée, pour un système en  $d$  dimensions spatiales, par:

$$S_{\mathcal{A}} = a \frac{\text{Area}(\partial\mathcal{A})}{\epsilon^{d-1}} + \dots \quad (1.2.1)$$

où des termes moins divergents ont été omis.  $\epsilon$  est la coupure ultraviolette définie dans la sous-section 1.1.2 et le coefficient  $a$  dépend de la théorie étudiée.

Il a également été découvert que le comportement de l’EE dépend fortement de la géométrie de la frontière  $\partial\mathcal{A}$ . Pour une QFT relativiste, l’EE pour une sous-région définie par une frontière lisse a le comportement suivant [27]:

$$S_{\mathcal{A}} = \begin{cases} a_{d-1}(\frac{L}{\epsilon})^{d-1} + a_{d-3}(\frac{L}{\epsilon})^{d-3} + \dots + a_1 \frac{L}{\epsilon} + (-1)^{\frac{d}{2}} \mathbf{U}_{\mathcal{A}} + \mathcal{O}(\epsilon), & d+1 \text{ impair} \\ a_{d-1}(\frac{L}{\epsilon})^{d-1} + a_{d-3}(\frac{L}{\epsilon})^{d-3} + \dots + (-1)^{\frac{d-1}{2}} \mathbf{U}_{\mathcal{A}} \log(\frac{L}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^0), & d+1 \text{ pair} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où  $L$  représente la taille de la sous-région  $\mathcal{A}$ . Le terme  $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$  est un terme universel, c’est-à-dire un terme ne dépendant que de la géométrie du système indépendamment de la coupure UV et qui contient de l’information non-triviale sur la théorie utilisée.

### 1.2.1. Systèmes en 1+1 dimensions

Pour les systèmes en 1+1 dimensions, le comportement de l’EE a été largement étudié [34, 7, 23, 21]. Dans notre cas, la frontière  $\partial\mathcal{A}$  est constituée des deux points séparant le segment de la sous-région  $\mathcal{A}$  du reste du réseau. Pour un système de longueur totale  $D$  avec une sous-région  $\mathcal{A}$  de longueur  $L$  utilisant une théorie conforme des champs (CFT, de l’anglais *conformal field theory*) relativiste sans masse, l’EE pour des conditions aux frontières périodiques devient:

$$S_{\mathcal{A}} = (c/3) \log((D/\pi\epsilon) \sin(\pi L/D)) + c_1 \quad (1.2.3)$$

Lorsque  $L \ll D$ , on trouve le célèbre résultat  $S_{\mathcal{A}} = (c/3) \log(L/\epsilon)$  qui signale une violation logarithmique de la loi du périmètre pour un système en  $d = 1$  sans écart (gap) d’énergie. Dans le cas où les conditions aux frontières sont ouvertes, le comportement de l’EE devient:

$$S_{\mathcal{A}} = (c/6) \log((D/\pi\epsilon) \sin(\pi L/D)) + 2g + c_1 \quad (1.2.4)$$

où  $g$  est ici l'entropie aux frontières d'Affleck et Ludwig [1]. Dans les deux équations précédentes,  $c$  représente la charge centrale de la CFT. On peut donc obtenir de l'information sur la théorie en étudiant le comportement de l'EE pour une dimension spatiale en étudiant les termes universels.

### 1.2.2. Systèmes en 2+1 dimensions

Il sera question dans ce mémoire d'un réseau en 2+1 dimensions. Pour une surface lisse, la loi du périmètre prendra donc la forme:

$$S_{\mathcal{A}} = a_1 \frac{L}{\epsilon} - \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \quad (1.2.5)$$

La sous-région  $\mathcal{A}$  sera également bidimensionnelle. La frontière  $\partial\mathcal{A}$  sera quant à elle unidimensionnelle.

Dans le cas où la sous-région  $\mathcal{A}$  possède une géométrie acceptant un ou plusieurs coins, des termes logarithmiques seront ajoutés à l'expression plus haut [10]. La loi du périmètre sera donc décrite par la formule suivante:

$$S_{\mathcal{A}} = a \frac{L}{\epsilon} - \sum_i^N b(\theta_i) \log\left(\frac{L}{\epsilon}\right) + s_0 \quad (1.2.6)$$

où on a renommé  $a_1$  par  $a$  par souci de simplicité. On suppose ici que la sous-région  $\mathcal{A}$  possède  $N$  coins d'angles  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Les  $N$  coefficients logarithmiques  $b$  dépendront de l'angle de chacun des coins [10, 18, 25].

Le coefficient logarithmique,  $b(\theta)$ , est symétrique par rapport à  $\pi$ , c'est-à-dire:

$$b(2\pi - \theta) = b(\theta) \quad (1.2.7)$$

On peut donc restreindre les angles dans l'intervalle  $0 < \theta \leq \pi$ . Pour ces angles, les valeurs de  $b(\theta)$  sont convexes et décroissantes [19]:

$$b'(\theta) \leq 0 \quad (1.2.8)$$

$$b''(\theta) \geq 0 \quad (1.2.9)$$

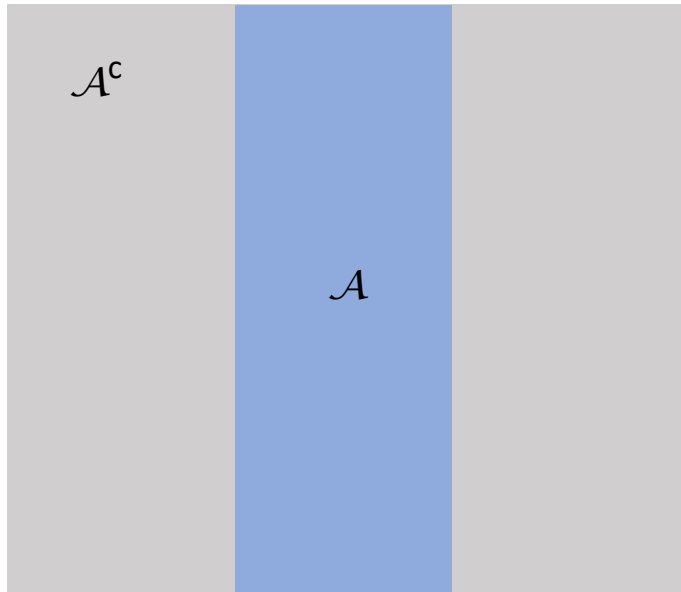
Finalement, dans la limite où il n'y a pas de coins (c'est à dire quand l'angle tend vers  $\pi$ ), le terme logarithmique disparaît:

$$b(\pi) = 0 \quad (1.2.10)$$

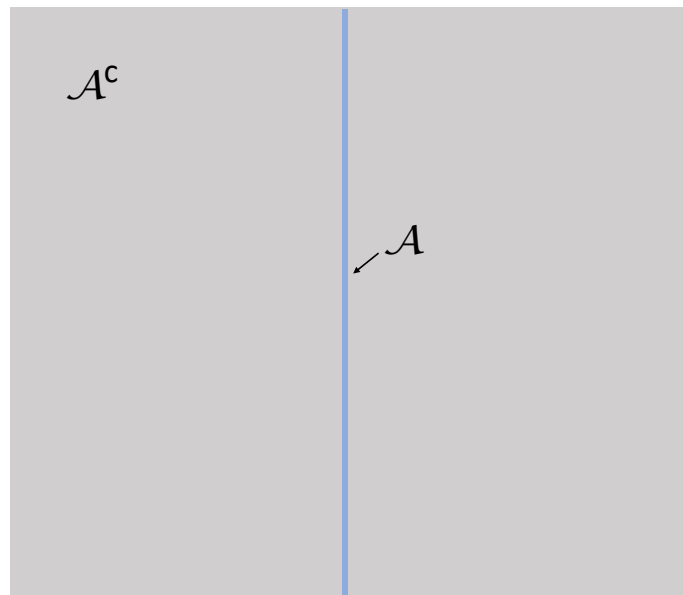
### 1.3. Sous-régions squelettiques

Les comportements de l'EE vus dans la section précédente ont été étudiés et observés généralement pour des sous-régions pleines, c'est-à-dire des sous-régions possédant un volume de même dimension spatiale que l'environnement dans lequel elles se trouvent (voir l'exemple dans la figure 1(a)). Les dimensions de ces sous-régions sont pour la plupart beaucoup plus grandes que la limite UV.

Le but de ce mémoire est d'étudier de manière systématique le comportement de l'EE dans des sous-régions dites squelettiques, c'est-à-dire une sous-région ne possédant pas de volume (par exemple une ligne dans un environnement possédant deux dimensions spatiales, voir l'exemple dans la figure 1(b)) et de potentiellement trouver de nouveaux termes universels. Ce type de sous-région se trouvant dans la limite UV a été peu étudié et le comportement de l'EE pour ce cas particulier demeure largement inconnu. Une CFT bidimensionnelle consistant en un scalaire libre sera discrétisée en réseau afin d'effectuer les calculs.



(a) Sous-région  $\mathcal{A}$  pleine dans un environnement bidimensionnel. Ses dimensions sont beaucoup plus grandes que la limite UV.



(b) Sous-région  $\mathcal{A}$  ne possédant pas de volume (unidimensionnelle) dans un environnement bidimensionnel. Dans l'exemple présent, le plus petit côté de  $\mathcal{A}$  se trouve dans la limite UV.

**Fig. 1.1.** Exemples de sous-région pleine (a) et sans volume (b).



# Chapitre 2

---

## Méthodes de calcul de l'entropie d'intrication

### 2.1. Approche Euclidienne

La méthode la plus directe pour calculer l'EE avec un état quantique comportant un nombre fini de degrés de liberté est d'obtenir les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice de densité réduite et de calculer directement la somme:

$$S_{\mathcal{A}} = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (2.1.1)$$

Malheureusement, pour la plupart des QFTs, cela peut se révéler très difficile, il faut donc se tourner vers une procédure connue sous le nom de la méthode replica (de l'anglais *replica trick*) [9, 20, 11, 8]. La démarche décrite ici est basée sur celle de Casini et Huerta. On voit facilement que:

$$S_{\mathcal{A}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} S_{\alpha, \mathcal{A}} = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}^{\alpha})|_{\alpha=1} \quad (2.1.2)$$

où  $S_{\alpha, \mathcal{A}}$  est l'entropie de Rényi (équation 1.0.2). Il faut donc calculer le terme  $\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}^{\alpha})$ , ce qui sera fait en utilisant le formalisme des intégrales de chemin.

Soit un champ scalaire  $\hat{\phi}(\vec{x}, \tau)$  utilisant le temps imaginaire  $\tau$  avec une base formée par des vecteurs propres à  $\tau=0$  tels que  $\hat{\phi}(\vec{x}, 0) |f\rangle = f(\vec{x}) |f\rangle$ , où  $f(\vec{x})$  est une fonction réelle quelconque. La fonctionnelle d'onde du vide s'écrit:

$$\Phi(f) = \langle 0|f\rangle = \Lambda^{-1/2} \int_{\phi(\vec{x}, -\infty)=0}^{\phi(\vec{x}, 0)=f(\vec{x})} D\phi e^{-S_E(\phi)} \quad (2.1.3)$$

où  $S_E(\phi)$  est l'action Euclidienne et  $\Lambda^{-1/2}$  est un facteur de normalisation. La matrice de densité dans le vide est, dans cette base:

$$\rho(f, f') = \langle f|0\rangle \langle 0|f'\rangle = \Phi(f)^* \Phi(f') \quad (2.1.4)$$

Pour tracer sur les degrés de liberté de  $\mathcal{A}^c$ , le choix pour les fonctions sera  $f = g \oplus f_{\mathcal{A}}$  et  $f' = g \oplus f'_{\mathcal{A}}$ , qui sont toutes les deux égales à  $g$  dans  $\mathcal{A}^c$ . En utilisant l'équation 2.1.3, la somme sur toutes les fonctions  $g$  est effectuée, deux copies du semi-espaces sont collées sur  $\mathcal{A}^c$  et l'intégrale fonctionnelle est prise sur cet espace:

$$\rho_{\mathcal{A}}(f_{\mathcal{A}}, f'_{\mathcal{A}}) = \int Dg \Phi(g \oplus f_{\mathcal{A}})^* \Phi(g \oplus f'_{\mathcal{A}}) = \Lambda^{-1} \int_{\phi(\vec{x}, 0^-) = f'_{\mathcal{A}}(\vec{x}), x \in \mathcal{A}}^{\phi(\vec{x}, 0^+) = f_{\mathcal{A}}(\vec{x}), x \in \mathcal{A}} D\phi e^{-S_E(\phi)} \quad (2.1.5)$$

Pour les fermions, le raisonnement est similaire mais différent, les champs anticommutant à temps égaux.

Afin d'évaluer  $\text{Tr}\rho_{\mathcal{A}}^\alpha$ , on utilise la méthode replica, qui consiste à créer  $\alpha$  copies du plan Euclidien coupées le long de la sous-région  $\mathcal{A}$ . Ensuite, la partie supérieure de la coupure de la  $k$ ème copie ( $k = 1, \dots, \alpha$ ) est jointe à la partie inférieure de la coupure de la  $(k + 1)$ ème copie (en faisant coïncider les copies  $k = \alpha + 1$  et  $k = 1$ ). Nous retrouvons alors un espace Euclidien de  $d + 1$  dimensions avec  $\alpha$  plans contenant des singularités coniques d'angles  $2\pi n$  situées à la frontière  $\partial\mathcal{A}$  (pour les fermions, on assistera à un changement de signe pour chaque copie lors de la prise de la trace). Finalement, on obtient:

$$\text{Tr}\rho_{\mathcal{A}}^\alpha = \frac{Z(\alpha)}{Z(1)^\alpha} \quad (2.1.6)$$

où  $Z(\alpha)$  est l'intégrale fonctionnelle sur l'espace à  $\alpha$  plans. Ici, le facteur de normalisation  $\Lambda = Z(1)$  est utilisé pour que  $\text{Tr}\rho_{\mathcal{A}} = 1$ . On peut ensuite en déduire l'entropie de Rényi:

$$S_{\alpha, \mathcal{A}} = \frac{\log Z(\alpha) - \alpha \log Z(1)}{1 - \alpha} \quad (2.1.7)$$

On utilise ensuite l'équation 1.0.3 afin d'obtenir l'entropie de von Neumann. Généralement, une fonction possédant des valeurs entières ne permet pas de continuation analytique de son argument. Un bon exemple est la fonction  $\sin(\pi x)$  qui devient nulle quand  $x$  est un nombre entier. La résolution de ce problème est que les fonctions de ce type qui sont non seulement définies sur des entiers mais qui se comportent proprement quand  $x \rightarrow \pm i\infty$  permettent une continuation analytique loin des entiers si la fonction ne grandit pas rapidement à l'infini (théorème de Carlson).

L'approche euclidienne permet notamment d'obtenir les résultats donnés par la loi du périmètre décrite dans la section 1.2.

## 2.2. Approche avec temps réel

Le but de l'approche avec temps réel est de calculer la valeur exacte de l'EE en calculant directement la matrice de densité réduite [3, 36]. Cette méthode est largement utilisée afin d'obtenir des résultats numériques. Les étapes suivantes sont basées sur la description de

cette approche dans la thèse d'Hayward Sierens [17]. Pour commencer, on prend l'Hamiltonien correspondant à un réseau d'oscillateurs harmoniques menant à une théorie de bosons libres:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} (\pi_{\mathbf{x}}^2 + m^2 \phi_{\mathbf{x}}^2) + \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}\mathbf{x}' \rangle} (\phi_{\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}'})^2 \quad (2.2.1)$$

où le pas du réseau a été mis à l'unité.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  représente les coordonnées spatiales des sites du réseau ( $x_i = 1, \dots, L_i$  où  $L_i$  est la longueur du réseau dans la direction  $i$ ) tandis que  $m$  est l'analogie de la masse des bosons. La somme  $\sum_{\langle \mathbf{x}\mathbf{x}' \rangle}$  représente la somme de tous les sites adjacents les uns aux autres. On posera la masse des bosons comme nulle pour se retrouver avec une théorie critique sans écart (de l'anglais *gapless critical theory*). Les champs  $\phi_{\mathbf{x}}$  et les impulsions canoniques  $\pi_{\mathbf{x}}$  obéissent aux relations de commutation:

$$[\phi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}'}] = i\delta_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \quad (2.2.2)$$

$$[\phi_{\mathbf{x}}, \phi_{\mathbf{x}'}] = [\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{x}'}] = 0 \quad (2.2.3)$$

Le nombre total de sites dans le réseau est  $\mathcal{N} = L_1 L_2 \dots L_d$ . Dans cet Hamiltonien, le pas du réseau  $\epsilon$  a été mis à l'unité. On peut réécrire cet Hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}\mathbf{x}' \rangle} \phi_{\mathbf{x}} K_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \phi_{\mathbf{x}'} \quad (2.2.4)$$

où  $K_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}$  est une matrice  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  définie positive. Grâce à cette propriété, cette matrice peut être diagonalisée par une matrice orthogonale  $Q$  et s'écrire  $K = QDQ^T$ . En introduisant de nouveaux champs dans l'espace de Fourier:

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{x}} Q_{\mathbf{q}\mathbf{x}}^T \phi_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{x}} Q_{\mathbf{x}\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{x}} \quad , \quad \tilde{\pi}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{x}} Q_{\mathbf{x}\mathbf{q}} \pi_{\mathbf{x}} \quad (2.2.5)$$

où  $\mathbf{q}$  sont les impulsions dans l'espace de Fourier, on peut écrire l'Hamiltonien de la façon suivante:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} (\tilde{\pi}_{\mathbf{q}}^2 + D_{\mathbf{q}\mathbf{q}} \tilde{\phi}_{\mathbf{q}}^2) \quad (2.2.6)$$

En posant des opérateurs de création et d'annihilation  $a_{\mathbf{q}}^\dagger$  et  $a_{\mathbf{q}}$ , on peut écrire  $H$  comme une somme d'oscillateurs harmoniques indépendants:

$$H = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}) \quad (2.2.7)$$

où les opérateurs ont la forme:

$$a_{\mathbf{q}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}D_{\mathbf{q}}^{1/4}}(D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{1/2}\tilde{\phi}_{\mathbf{q}} - i\tilde{\pi}_{\mathbf{q}}) \quad , \quad a_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}D_{\mathbf{q}}^{1/4}}(D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{1/2}\tilde{\phi}_{\mathbf{q}} + i\tilde{\pi}_{\mathbf{q}}) \quad (2.2.8)$$

et où le spectre  $\omega_{\mathbf{q}}$  est donné par:

$$\omega_{\mathbf{q}}^2 = m^2 + 4 \sum_{\mathbf{q}} \sin^2\left(\frac{\mathbf{q}}{2}\right) \quad (2.2.9)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation obéissent aux relations de commutation suivantes:

$$[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \quad (2.2.10)$$

$$[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{q}'}] = [a_{\mathbf{q}}^\dagger, a_{\mathbf{q}'}^\dagger] = 0 \quad (2.2.11)$$

On peut donc écrire les fonctions de corrélations à deux points de l'état fondamental comme:

$$\langle \phi_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}'} \rangle_0 = \frac{1}{2D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{1/2}} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \quad (2.2.12)$$

$$\langle \pi_{\mathbf{q}} \pi_{\mathbf{q}'} \rangle_0 = \frac{D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{1/2}}{2} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \quad (2.2.13)$$

On peut ensuite exprimer ces fonctions de corrélation en fonction des champs originaux:

$$\langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{x}\mathbf{q}} D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{-1/2} Q_{\mathbf{q}\mathbf{x}'}^T = \frac{1}{2} (K^{-1/2})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad (2.2.14)$$

$$\langle \pi_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} Q_{\mathbf{x}\mathbf{q}} D_{\mathbf{q}\mathbf{q}}^{1/2} Q_{\mathbf{q}\mathbf{x}'}^T = \frac{1}{2} (K^{1/2})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'}, \quad (2.2.15)$$

Pour un champ bosonique libre invariant sous translation, on peut également éviter de diagonaliser la matrice  $K$  et trouver chaque élément de  $\langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0$  et de  $\langle \pi_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}'} \rangle_0$  directement sous forme de sommes:

$$\langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 = \frac{1}{2L_1 L_2 \cdots L_d} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\cos[k_1(x_1 - x'_1)] \cos[k_2(x_2 - x'_2)] \cdots \cos[k_d(x_d - x'_d)]}{\omega_{\mathbf{k}}}, \quad (2.2.16)$$

$$\langle \pi_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 = \frac{1}{2L_1 L_2 \cdots L_d} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \cos[k_1(x_1 - x'_1)] \cos[k_2(x_2 - x'_2)] \cdots \cos[k_d(x_d - x'_d)] \quad (2.2.17)$$

pour un système de  $d + 1$  dimensions, où  $\mathbf{k}$  diffère si les conditions aux frontières sont périodiques (PBC de l'anglais *periodic boundary conditions*) ou anti-périodiques (APBC de l'anglais *antiperiodic boundary conditions*):

$$k_i = \begin{cases} \frac{2n_i\pi}{L_i} & \text{(PBC)} \\ \frac{(2n_i+1)\pi}{L_i} & \text{(APBC)} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

où  $n_i = 0, 1, \dots, L_i - 1$ . Il est à noter que dans le cas où le réseau est sans masse ( $m = 0$ ) et où on a PBC dans toutes les directions, il existe une valeur de  $\mathbf{k}$  connue sous le nom de *mode zéro* qui fait diverger la fonction de corrélation  $\langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0$ . En effet, si  $k_1 = k_2 = \dots = k_d = 0$ , alors le dénominateur  $\omega_{\mathbf{k}} = 0$  fait diverger la fonction 2.2.16.

On introduit ensuite les matrices  $X_{\mathcal{A}}$  et  $P_{\mathcal{A}}$  dont les éléments sont donnés par:

$$\begin{aligned} (X_{\mathcal{A}})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} &= \langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0, \\ (P_{\mathcal{A}})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} &= \langle \pi_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

où les sites  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont choisis uniquement à l'intérieur de la sous-région  $\mathcal{A}$ . La matrice de densité peut être exprimée sous la forme [26]:

$$\rho_{\mathcal{A}} = \kappa \exp\left(-\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{A}} \pi_{\mathbf{x}} M_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \pi_{\mathbf{x}'} + \phi_{\mathbf{x}} N_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \phi_{\mathbf{x}'}\right) = \kappa \exp\left(-\sum_l \epsilon_l a_l^\dagger a_l\right) \quad (2.2.20)$$

où le terme de droite a été obtenu en diagonalisant.  $\epsilon_l$  est l'énergie propre du mode  $l$  et  $\kappa$  est une constante de normalisation. On peut également décrire  $\rho_{\mathcal{A}}$  comme:

$$\rho_{\mathcal{A}} = \kappa e^{-H_{\mathcal{A}}} \quad (2.2.21)$$

où  $H_{\mathcal{A}} = \sum_l \epsilon_l a_l^\dagger a_l$  est l'Hamiltonien modulaire (de l'anglais *modular Hamiltonian*).  $H_{\mathcal{A}}$  est quadratique et agit seulement sur les sites faisant partie de la région  $\mathcal{A}$ . On réécrit ensuite la matrice de densité comme:

$$\rho_{\mathcal{A}} = \sum_n \rho_{nn} |n\rangle \langle n| = \kappa \bigotimes_l \left( \sum_{n_l} e^{-\epsilon_l n_l} |n_l\rangle \langle n_l| \right) \quad (2.2.22)$$

où  $n$  est le nombre d'occupation et  $|n\rangle = \bigotimes_l |n_l\rangle$  est l'état du système. On peut ensuite prendre la trace de  $\rho_{\mathcal{A}}$  et évaluer la somme pour obtenir:

$$\text{Tr} \rho_{\mathcal{A}} = \kappa \prod_l \left( \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_l}} \right) \quad (2.2.23)$$

En appliquant la contrainte selon laquelle  $\text{Tr} \rho_{\mathcal{A}} = 1$ , on trouve facilement la constante de normalisation:

$$\kappa = \prod_l (1 - e^{-\epsilon_l}) \quad (2.2.24)$$

Nous pouvons également calculer le terme  $n_l$  en termes des énergies propres  $\epsilon_l$ :

$$n_l = \langle a_l^\dagger a_l \rangle = \text{Tr}(\rho_{\mathcal{A}} a_l^\dagger a_l) = \kappa \prod_{m \neq l} \left( \sum_{n_m} e^{-\epsilon_m n_m} \right) \times \sum_{n_l} n_l e^{-\epsilon_l n_l} \quad (2.2.25)$$

$$= \kappa \left( \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\epsilon_l}) \right) \times \frac{e^{-\epsilon_l}}{(1 - e^{-\epsilon_l})^2} = \frac{1}{e^{\epsilon_l} - 1} \quad (2.2.26)$$

ce qui correspond à la distribution de Bose-Einstein.

On peut maintenant calculer l'EE en termes des énergies propres  $\epsilon_l$  en plaçant l'expression 2.2.23 dans les équations 1.0.1 et 1.0.2 afin d'obtenir respectivement les entropies de von Neumann et de Rényi. Pour l'entropie de von Neumann, on trouve:

$$S_{\mathcal{A}} = \sum_l \left[ -\log(1 - e^{-\epsilon_l}) + \frac{\epsilon_l}{e^{\epsilon_l} - 1} \right] \quad (2.2.27)$$

tandis que pour l'entropie de Rényi, on trouve:

$$S_{\alpha, \mathcal{A}} = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_l \left[ \alpha \log(1 - e^{-\epsilon_l}) - \log(1 - e^{-\alpha \epsilon_l}) \right] \quad (2.2.28)$$

La prochaine étape est d'établir un lien entre les deux équations précédentes et les fonctions de corrélation qui peuvent être calculées avec les équations 2.2.16 et 2.2.17. On définit tout d'abord les matrices  $X_{\mathcal{A}}$  et  $P_{\mathcal{A}}$  dont les éléments sont définis par:

$$(X_{\mathcal{A}})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} = \langle \phi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}'} \rangle_0, \quad (P_{\mathcal{A}})_{\mathbf{x}\mathbf{x}'} = \langle \pi_{\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{x}'} \rangle_0 \quad (2.2.29)$$

où les sites  $x$  et  $x'$  sont situés uniquement dans la sous-région  $\mathcal{A}$ . Les opérateurs de position  $\phi_x$  et d'impulsion  $\pi_x$  peuvent être écrits comme une combinaison linéaire d'opérateurs de création et d'annihilation  $a_l$  et  $a_l^\dagger$ :

$$\phi_{\mathbf{x}} = \beta_{\mathbf{x}l} (a_l^\dagger + a_l), \quad \pi_{\mathbf{x}} = -i\gamma_{\mathbf{x}l} (a_l^\dagger - a_l) \quad (2.2.30)$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des matrices réelles et  $\beta = -\frac{1}{2}(\gamma^T)^{-1}$ . La somme sur les indices  $l$  est implicite. Cette formulation respecte les relations de commutation vues précédemment. En utilisant ces relations, on peut montrer que [11]:

$$\beta \frac{1}{4} (2n + 1)^2 \beta^{-1} = X_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}} \quad (2.2.31)$$

où  $n$  est la matrice diagonale du nombre d'occupation. À partir de la forme précédente, on peut observer que les valeurs propres de  $C_{\mathcal{A}} = \sqrt{X_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}}}$  (désignées ici par  $\nu_l$ ) prennent la forme:

$$\nu_l = \frac{2n_l + 1}{2} \quad (2.2.32)$$

On peut ensuite utiliser l'équation 2.2.26 pour écrire les valeurs propres  $\nu_l$  de  $C_{\mathcal{A}}$  en fonction des valeurs propres  $\epsilon_l$  de l'Hamiltonien modulaire:

$$\nu_l = \frac{1}{2} \coth \left( \frac{\epsilon_l}{2} \right) \quad (2.2.33)$$

et, inversement:

$$\epsilon_l = 2 \operatorname{arccoth}(2\nu_l) = \log \left( \frac{\nu_l + 1/2}{\nu_l - 1/2} \right) \quad (2.2.34)$$

En utilisant les équations 2.2.27 et 2.2.28, nous obtenons finalement les expressions de l'EE en fonction des valeurs propres  $\nu_l$ :

$$S_{\mathcal{A}} = \sum_l \left[ \left( \nu_l + \frac{1}{2} \right) \log \left( \nu_l + \frac{1}{2} \right) - \left( \nu_l - \frac{1}{2} \right) \log \left( \nu_l - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.2.35)$$

$$S_{\alpha, \mathcal{A}} = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_l \log \left[ \left( \nu_l + \frac{1}{2} \right)^\alpha - \left( \nu_l - \frac{1}{2} \right)^\alpha \right] \quad (2.2.36)$$

### 2.2.1. Réduction de dimension

Dans le cas où la sous-région  $\mathcal{A}$  possède une symétrie transitionnelle dans au moins une des directions du réseau, il est possible d'utiliser un algorithme plus efficace afin de calculer l'entropie de von Neumann et de Rényi. Supposons que, dans un réseau de  $d$  dimensions, la sous-région  $\mathcal{A}$  soit invariante sous translation dans la direction  $x_d$ , avec des conditions aux bords PBC ou APBC. Dans ce cas, il est possible de décomposer les champs  $\phi$  et  $\pi$  de la façon suivante:

$$\phi_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{L_d}} \sum_{k_d} e^{ik_d x_d} \phi_{\mathbf{x}_{d-1}}(k_d) \quad (2.2.37)$$

$$\pi_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{L_d}} \sum_{k_d} e^{ik_d x_d} \pi_{\mathbf{x}_{d-1}}(k_d) \quad (2.2.38)$$

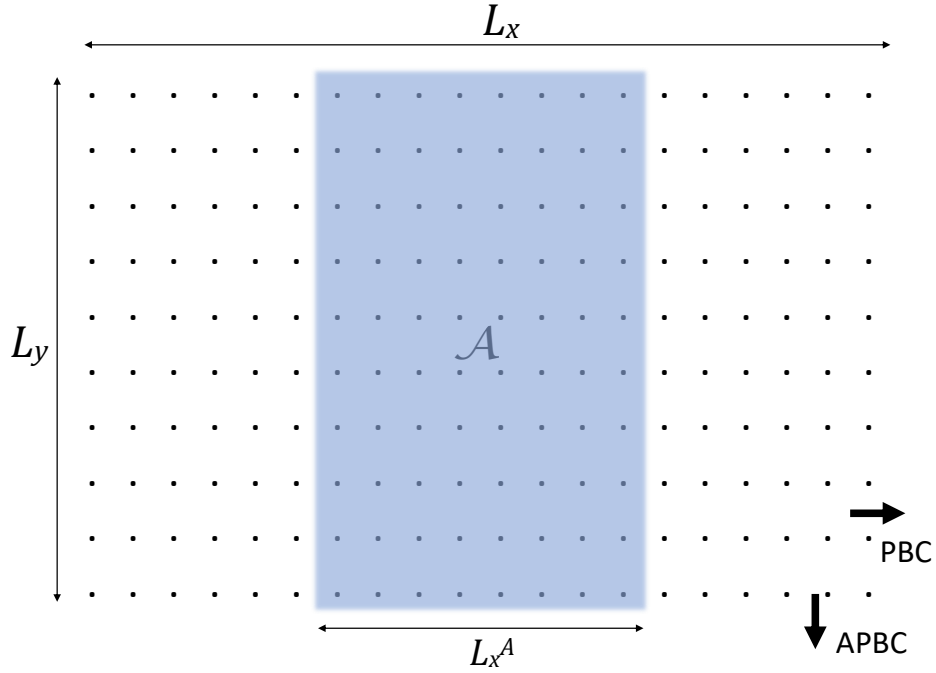
où les valeurs de  $k_d$  sont calculées de la même façon que l'équation 2.2.18 et  $\mathbf{x}_{d-1}$  représente les  $d - 1$  dimensions spatiales restantes. On peut donc écrire l'Hamiltonien de  $d$  dimensions comme une somme de  $L_d$  Hamiltoniens découplés de dimension spatiale  $d - 1$ :

$$H = \sum_{k_d} H_{d-1}(k_d) \quad (2.2.39)$$

où

$$H_{d-1}(k_d) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}_{d-1}} \left[ \pi_{\mathbf{x}_{d-1}}(k_d) \pi_{\mathbf{x}_{d-1}}(-k_d) + (m^2 + 4 \sin^2(k_d/2)) \phi_{\mathbf{x}_{d-1}}(k_d) \phi_{\mathbf{x}_{d-1}}(-k_d) \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{\langle \mathbf{x}_{d-1}, \mathbf{x}'_{d-1} \rangle} (\phi_{\mathbf{x}_{d-1}}(k_d) - \phi_{\mathbf{x}'_{d-1}}(k_d)) (\phi_{\mathbf{x}_{d-1}}(-k_d) - \phi_{\mathbf{x}'_{d-1}}(-k_d)) \quad (2.2.40)$$

Si l'on compare cet Hamiltonien avec l'équation 2.2.1, on s'aperçoit que chacun de ces Hamiltoniens à  $d - 1$  dimensions correspondent à des champs scalaires non-interagissants avec une masse effective  $m_{eff}$  donnée par:



**Fig. 2.1.** Réseau carré torique bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en  $x$  et conditions anti-périodiques (APBC) en  $y$ . La sous-région  $\mathcal{A}$  (représentée ici en gris) est de dimension  $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ .

$$m_{eff}^2 = m^2 + 4 \sin^2(k_d/2) \quad (2.2.41)$$

Étant donné que ces Hamiltoniens de basses dimensions sont indépendants, l'EE total peut donc être calculé par la somme de  $L_d$  EE de dimension  $d-1$  avec masses effectives  $m_{eff}$ . Cela réduit les dimensions de la matrice à diagonaliser, la faisant passer de dimension  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  à  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_{d-1}} \times \mathcal{N}_{\mathcal{A}_{d-1}}$ , où  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_{d-1}} = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}/L_d$  et où  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  est le nombre de site dans la sous-région  $\mathcal{A}$ .

### 2.3. Théorie pour un tore bidimensionnel

On prend ici un réseau torique bidimensionnel de dimension  $L_x \times L_y$  avec conditions aux frontières périodiques (PBC) et anti-périodiques (APBC). La sous-région  $\mathcal{A}$  sera également bidimensionnelle et de dimension  $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$  (voir figure 2.1). Dans le cas d'un tore bidimensionnel possédant une sous-région avec  $L_x^{\mathcal{A}} \gg 1$ , l'EE prend la forme [12, 13] :

$$S_{\alpha, \mathcal{A}} = a2L_y - s_0 + \dots \quad (2.3.1)$$

où  $\alpha$  est l'indice de Rényi. Les termes dominants sont proportionnels à  $2L_y$ , ce qui représente la frontière entre la sous-région  $\mathcal{A}$  et le reste du réseau.  $s_0$  est un terme universel dépendant



des rapports  $u = L_x^A/L_x$  et  $b = L_x/L_y$ , ainsi que du paramètre de Rényi  $\alpha$ .  $a$  est un terme non-universel dépendant de la coupure ultraviolette  $\epsilon$ .

Comme énoncé plus haut,  $s_0$  dépend fortement de la forme du tore utilisé. Pour un tore fin, c'est-à-dire un tore où  $b \rightarrow \infty$ , le terme universel pour un modèle de bosons libres se comporte comme:

$$s_0(u; b \rightarrow \infty; \alpha) = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \log(2 \sin(\pi\lambda)) \quad (2.3.2)$$

où  $\lambda$  représente les conditions aux frontières dans la direction  $y$  de la façon suivante:

$$\phi(x, y + L_y) = e^{i2\pi\lambda} \phi(x, y) \quad (2.3.3)$$

Pour le tore de ce chapitre,  $\lambda = 1/2$ . Pour l'entropie de von Neumann ( $\alpha = 1$ ),  $s_0 = \frac{\log(2)}{3} \approx 0.231$ . Pour un tore possédant une coupe mince, c'est-à-dire  $L_x^A \rightarrow 0$ ,  $s_0$  prend la forme:

$$s_0(u \rightarrow 0; b; \alpha) = \frac{\kappa_\alpha}{u} \quad (2.3.4)$$

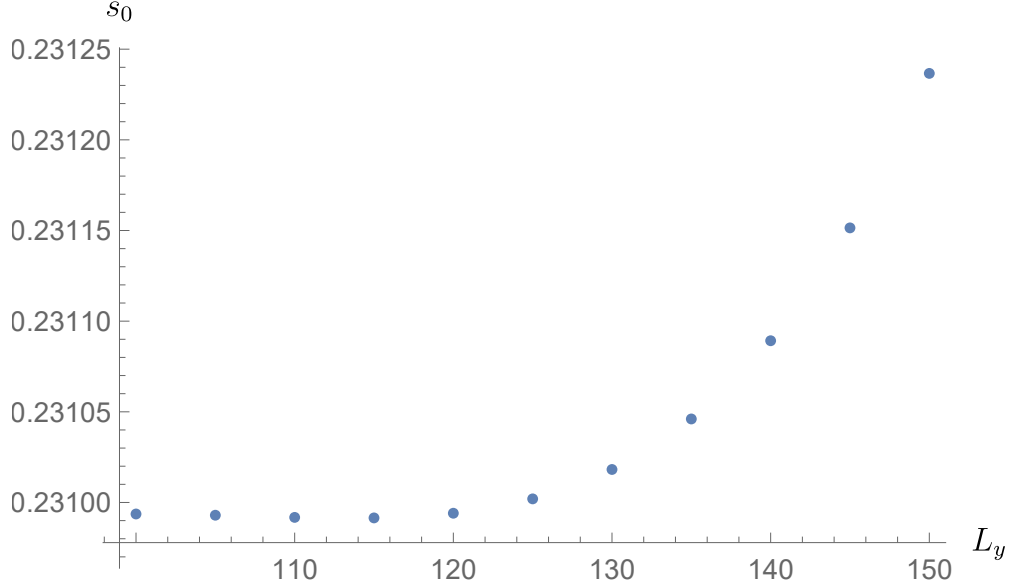
où  $\kappa_\alpha$  est un coefficient universel caractérisant la théorie ( $\kappa_1 = 0.0397$  [11]). Il est à noter que dans cette limite, on a toujours  $L_x^A \gg 1$ .

### 2.3.1. Vérification du code pour le cas d'un tore fin

Les mesures sont celles de l'EE d'un tore fin avec conditions aux frontières PBC-APBC (périodiques en  $x$  et anti-périodiques en  $y$ ), avec une sous-région  $\mathcal{A}$  bidimensionnelle en utilisant l'algorithme de la section 2.2. La grandeur du tore dans la direction  $x$  est de  $L_x = 400$  sites, et les dimensions de la sous-région  $\mathcal{A}$  sont  $L_x^A \times L_y$ , où  $L_x^A = 150$  sites. En faisant varier  $L_y$  et en appliquant la méthode des moindres carrés (LSF, de l'anglais *Least Squares Fit*) avec la formule 2.3.1, le terme  $s_0$  converge vers la valeur 0.2310, comme prédit par la théorie (figure 2.2). Le coefficient linéaire  $a$  tend quant à lui vers la valeur  $a = 0.0774513$  (figure 2.3).

## 2.4. Termes de coins à la frontière

Dans le cas où la sous-région  $\mathcal{A}$  possède un ou plusieurs coins, un terme variant de façon logarithmique  $b$  dépendant de l'angle  $\theta$  s'ajoute à la loi du périmètre, et ce pour chaque coin de la sous-région  $\mathcal{A}$ . Il est souvent utile de s'intéresser à ce type de réseau, car les termes supplémentaires sont universels dans le cas où  $\mathcal{A}$  possède un volume. Il y a deux façons d'obtenir des coins, la première étant de choisir une sous-région  $\mathcal{A}$  dont la frontière  $\partial\mathcal{A}$  ne soit pas lisse et possède un ou plusieurs coins. Le problème avec cette première solution est qu'on ne peut plus appliquer la réduction de dimension (sous-section 2.2.1) pour simplifier les calculs, car la sous-région  $\mathcal{A}$  ne possède plus d'invariance sous translation dans ce cas.



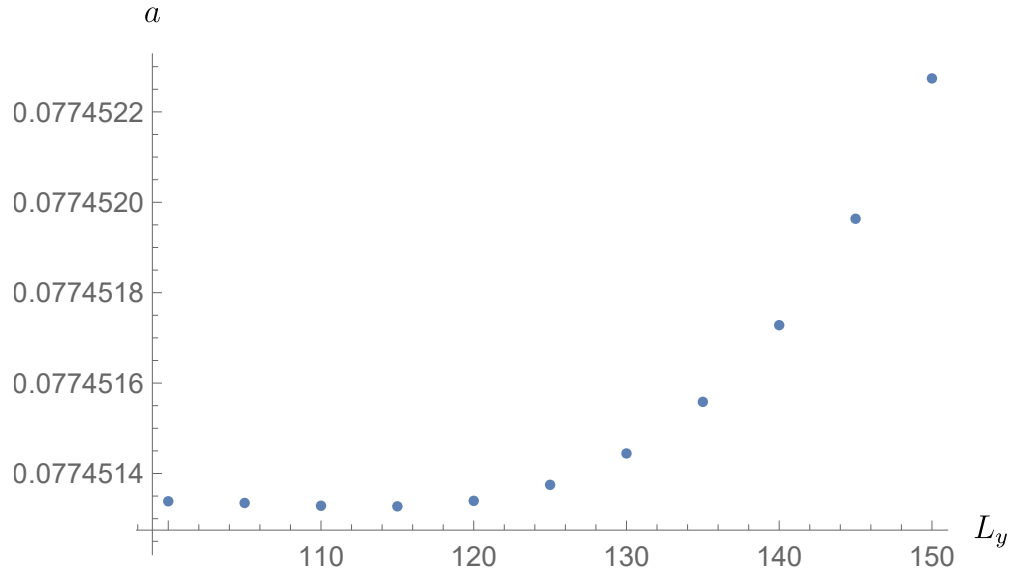
**Fig. 2.2.** Terme  $s_0$  en fonction de  $L_y$ , obtenu en appliquant un LSF avec 20 valeurs pour chaque point pour la formule 2.3.1. Le tore fin utilisé ici, avec conditions aux frontières PBC-APBC, est de  $L_x = 400$  sites dans la direction  $x$  et possède une sous-région  $\mathcal{A}$  de dimension  $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ , où  $L_x^{\mathcal{A}} = 150$  sites. La valeur de  $s_0$  converge dans la limite du tore fin, c'est-à-dire quand  $L_y \ll L_x$ .

La deuxième solution, qui sera utilisée dans ce mémoire, consiste à imposer des conditions aux bords PBC-OBC à la place de PBC-APBC, où OBC, de l'anglais *open boundary conditions*, sont des conditions aux frontières ouvertes (également appelées conditions aux frontières de Dirichlet). Ces conditions sont calculées dans la direction  $i$  en utilisant  $k_i = n_i\pi/(L_i + 1)$ , où  $L_i$  est la longueur du réseau dans la direction  $i$  et  $n_i = 1, \dots, L_i$ . L'imposition de ces conditions aux frontières fait en sorte que le système se retrouve avec une frontière physique. On se retrouve alors avec quatre termes de coins  $b(\pi/2)$  qui apparaissent aux croisements entre la frontière  $\partial\mathcal{A}$  et la frontière physique du réseau, c'est-à-dire les conditions aux bords de Dirichlet (voir figure 2.4)[4].

Une formulation théorique de  $b(\theta)$  provient d'une publication de Fursaev and Solodukhin [16]. Il a récemment été montré numériquement que cette formule ne décrit pas bien l'évolution des termes de coins pour des angles autres que  $\pi/2$  [3]. Pour des angles droits, la formulation de Fursaev and Solodukhin reste par contre valide. En prenant  $\theta = \pi/2$ , cette formulation du terme de coin donne:

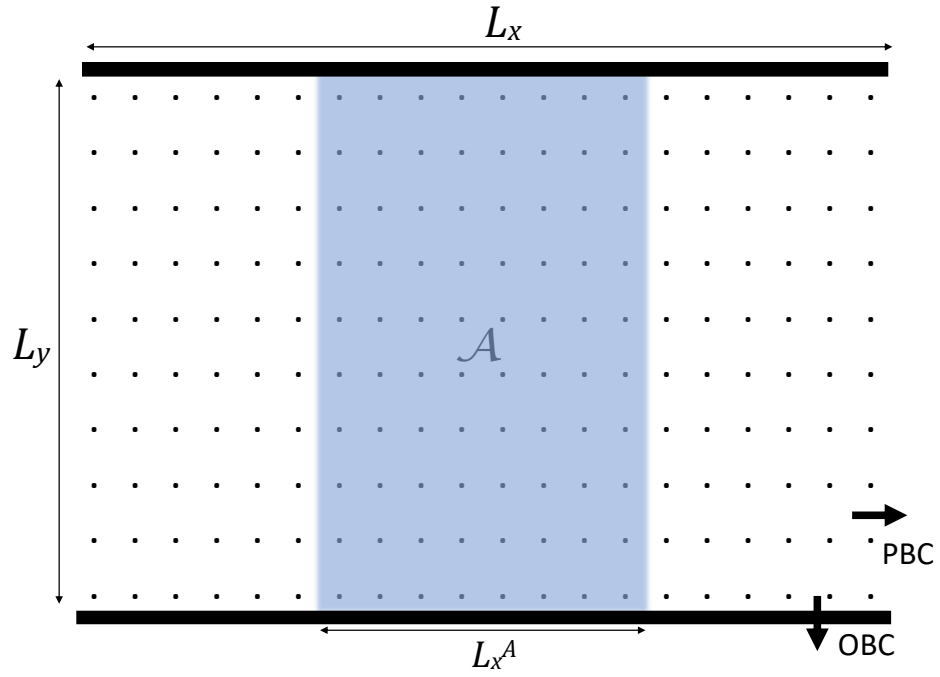
$$b(\pi/2) = \frac{\mathfrak{a}}{24} \quad (2.4.1)$$

où  $\mathfrak{a}$  est la charge centrale aux frontières dans l'anomalie conforme aux frontières en 2+1 dimensions. Dans une théorie scalaire réelle avec des conditions aux frontières ouvertes de Dirichlet, cette charge centrale est égale à 1 [31]. En appliquant cette formule pour le



**Fig. 2.3.** Terme  $a$  en fonction de  $L_y$ , obtenu en appliquant un LSF avec 20 valeurs pour chaque point pour la formule 2.3.1. Le tore utilisé ici, avec conditions aux frontières PBC-APBC, est de  $L_x = 400$  sites dans la direction  $x$  et possède une sous-région  $\mathcal{A}$  de dimension  $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ , où  $L_x^{\mathcal{A}} = 150$  sites. La valeur de  $a$  converge dans la limite du tore fin, c'est-à-dire quand  $L_y \ll L_x$ .

cas présent, un terme logarithmique apparaît avec un coefficient universel d'une valeur de  $4b(\pi/2) = 4/24 = 0.166666\dots$  .



**Fig. 2.4.** Réseau bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en  $x$  et conditions ouvertes ou Dirichlet (OBC) en  $y$ . Les quatre coins de la sous-région squelettique  $\mathcal{A}$  donnent quatre nouveaux termes de coins  $b(\pi/2)$ .

# Chapitre 3

---

## Entropie d'intrication de régions squelettiques

On étudie dans ce chapitre le comportement de l'EE pour des sous-régions squelettiques, c'est-à-dire une chaîne de sites dans un réseau bidimensionnel. Comme précédemment, un réseau bosonique de 2+1 dimensions sera utilisé comme canevas afin d'observer les différentes propriétés de la sous-région squelettique. Encore une fois, les conditions aux frontières seront périodiques dans la direction  $x$  et anti-périodiques dans la direction  $y$ . De plus, la sous-région  $\mathcal{A}$  sera invariante sous translation dans le sens  $y$  et aura les dimensions  $L_x^{\mathcal{A}} \times L_y$ , où  $L_x^{\mathcal{A}} = 1$  dans le cas particulier d'une sous-région squelettique (voir figure 3.1).

### 3.1. Démarches analytiques

On peut en premier lieu calculer l'EE pour un réseau unidimensionnel avec une sous-région étant composée d'un seul site. Les matrices de corrélation de ce type de réseau sont données par:

$$(X_{\mathcal{A}})_{ij} = \frac{1}{2L_x} \sum_{k_x} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \cos[k_x(i-j)] \quad (3.1.1)$$

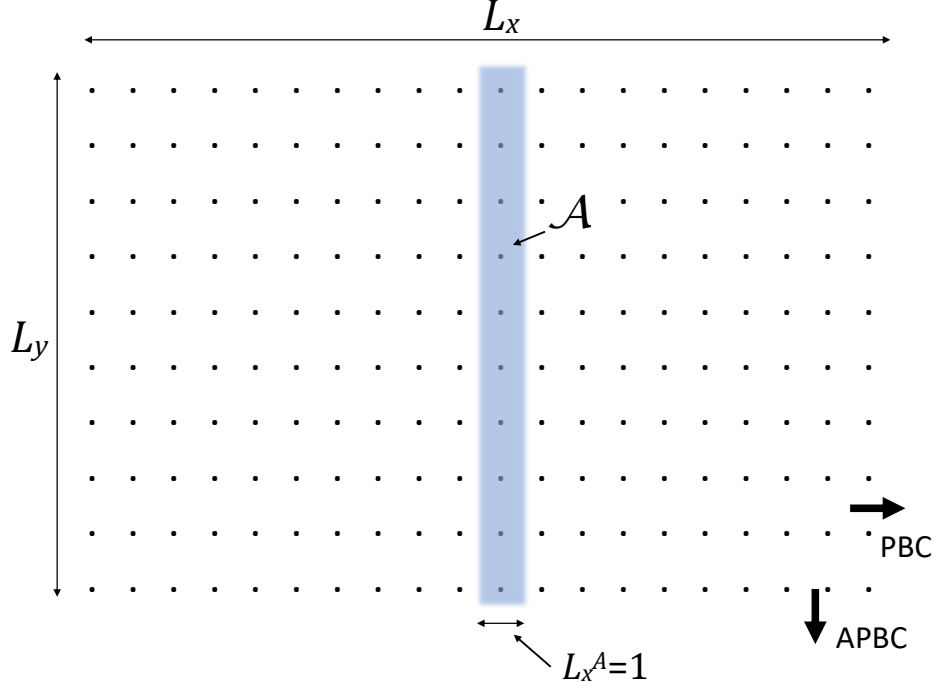
$$(P_{\mathcal{A}})_{ij} = \frac{1}{2L_x} \sum_{k_x} \omega_{\mathbf{k}} \cos[k_x(i-j)] \quad (3.1.2)$$

Il est également possible de prendre la limite thermodynamique  $L_x \rightarrow \infty$  (où  $\frac{1}{L_x} \sum_{k_x} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dk_y$ ). Dans ce cas, les équations deviennent [6]:

$$(X_{\mathcal{A}})_{ij} = \frac{z^{i-j}}{2} \sqrt{\frac{z}{1-z^2}} \binom{i-j-1/2}{i-j} \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; i-j+1; \frac{z^2}{z^2-1}\right) \quad (3.1.3)$$

$$(P_{\mathcal{A}})_{ij} = \frac{z^{i-j}}{2} \sqrt{\frac{1-z^2}{z}} \binom{i-j-3/2}{i-j} \times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; i-j+1; \frac{z^2}{z^2-1}\right) \quad (3.1.4)$$

où  $z = \frac{1}{4}(m_{k_y} - \sqrt{m_{k_y}^2 + 4})^2$  et  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique.



**Fig. 3.1.** Réseau carré torique bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en  $x$  et conditions anti-périodiques (APBC) en  $y$ . La sous-région  $\mathcal{A}$  (représentée ici en gris) est unidimensionnelle et est composée d'une chaîne de sites. Le reste du réseau  $\mathcal{A}^c$  est également représenté.

Dans le cas présent, on observe des matrices  $1 \times 1$ , on pose donc  $i = j$  ou  $i - j = 0$ . Le résultat est:

$$X_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{1-z^2}} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{z^2}{z^2-1} \right) \quad (3.1.5)$$

$$P_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-z^2}{z}} {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \frac{z^2}{z^2-1} \right) \quad (3.1.6)$$

en utilisant  $\binom{-1/2}{0} = \binom{-3/2}{0} = 1$ . En multipliant ces deux expressions, les termes dans les racines s'annulent:

$$X_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}} = \frac{1}{4} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{z^2}{z^2-1} \right) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \frac{z^2}{z^2-1} \right) \quad (3.1.7)$$

Les étapes suivantes sont les mêmes que celles vues précédemment:

$$C_{\mathcal{A}} = \sqrt{X_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}}} = \nu \quad (3.1.8)$$

Dans ce cas, la valeur propre  $\nu$  est égale à la seule valeur de la matrice  $1 \times 1$ . Pour obtenir l'entropie d'intrication unidimensionnelle,  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$ , on applique finalement:

$$S_{\mathcal{A}}^{1d} = (\nu + 1/2) \log(\nu + 1/2) - (\nu - 1/2) \log(\nu - 1/2) \quad (3.1.9)$$

Dans le cas où les masses sont petites, on obtient par série de Taylor:

$$S_{\mathcal{A}}^{1d} = \frac{(\pi - 2\sqrt{\log(8/m)}) \log(-1/2 + \sqrt{\log(8/m)/\pi}) + (\pi + 2\sqrt{\log(8/m)}) \log(1/2 + \sqrt{\log(8/m)/\pi})}{2\pi} + O(m)^2 \quad (3.1.10)$$

Il est à noter qu'il n'y a pas de terme linéaire. En posant  $u = 2\sqrt{\log(8/m)}$  et en faisant une deuxième série de Taylor pour grands  $u$ , on obtient une simple expression pour petites masses:

$$S_{\mathcal{A}}^{1d} = \log(u) + 1 - \log(2\pi) + O(1/u)^2 \quad (3.1.11)$$

Pour des masses générales, l'invariance de la sous-région  $\mathcal{A}$  dans la direction  $y$  permet d'utiliser la réduction de dimension de la sous-section 2.2.1:

$$S_{\mathcal{A}} = \sum_{k_y} S_{\mathcal{A}}^{1d}(m_{eff}) \quad (3.1.12)$$

où  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$  est l'EE unidimensionnelle pour masses générales (pas nécessairement petites) avec PBC. La sous-région utilisée pour calculer  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$  est la projection de la sous-région  $\mathcal{A}$  bidimensionnelle (dans le cas d'une sous-région squelettique, la sous-région  $\mathcal{A}$  de  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$  est composée d'un seul site). La somme se fait sur les masses effectives  $m_{eff}^2 = m^2 + 4 \sin^2(k/2)$  où  $k = \frac{(2n+1)\pi}{L}$ ,  $n$  allant de 0 à  $L - 1$ .

Pour  $L \gg 1$ , on peut approximer la somme 3.1.12 comme une intégrale de 0 à  $L - 1$  en utilisant la formule d'Euler-Maclaurin pour observer le comportement général de l'EE en fonction de  $L$ . Soit  $f$  une fonction  $r$  fois différentiable sur l'intervalle  $[p, q]$ , la formule d'Euler-Maclaurin se lit [2]:

$$\sum_{i=p}^q f(i) = \int_p^q f(x) dx + \frac{f(q) + f(p)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(p) - f^{(2k-1)}(q)) + R_r \quad (3.1.13)$$

où  $B_k$  est le nombre de Bernoulli  $k$  et  $R_r$  est le reste, qui s'exprime comme:

$$R_r = (-1)^{r+1} \int_p^q f^{(r)}(x) \frac{P_r(x)}{r!} dx \quad (3.1.14)$$

où  $P_r(x) = B_r(x - \lfloor x \rfloor)$ ,  $B_r(x)$  étant un polynôme de Bernoulli.

En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin pour la somme 3.1.12 (en posant  $f(i) \rightarrow S_{\mathcal{A}}^{1d}(n)$ ,  $p \rightarrow 0$  et  $q \rightarrow L - 1$ ), l'EE prend la forme:

$$S_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L + \frac{s_1}{\log(L)} + \frac{s_2}{(\log(L))^2} + \frac{s_3}{(\log(L))^3} + \dots \quad (3.1.15)$$

ce qui est différent de la loi du périmètre pour une sous-région bidimensionnelle. Il est possible de calculer de façon semi-analytique le terme  $a_{1d}$  en calculant le premier terme à droite de la formule 3.1.13:

$$\int_0^{L-1} S_{\mathcal{A}}^{1d}(k(n))dn \quad (3.1.16)$$

On peut faire le changement de variable de  $n$  vers  $k = \pi(n + 1/2)/L$  et appliquer ensuite l'approximation  $L \gg 1$ :

$$\int_0^{L-1} S_{\mathcal{A}}^{1d}(n)dn \xrightarrow[n \rightarrow k]{} \frac{L}{\pi} \int_{\pi/(2L)}^{\pi(2L-1)/(2L)} S_{\mathcal{A}}^{1d}(k)dk \xrightarrow[L \gg 1]{} \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} S_{\mathcal{A}}^{1d}(k)dk + R_L \quad (3.1.17)$$

où  $R_L$  est le reste de l'intégrale, c'est à dire la soustraction d'intégrales de 0 à  $\pi/(2L)$  et de  $\pi(2L-1)/(2L)$  à  $\pi$ . La forme explicite de l'intégrale à résoudre selon  $k$  de 0 à  $\pi$  est la suivante:

$$\frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \left( v(k) + \frac{1}{2} \right) \log \left( v(k) + \frac{1}{2} \right) - \left( v(k) - \frac{1}{2} \right) \log \left( v(k) - \frac{1}{2} \right) \right] dk \quad (3.1.18)$$

où

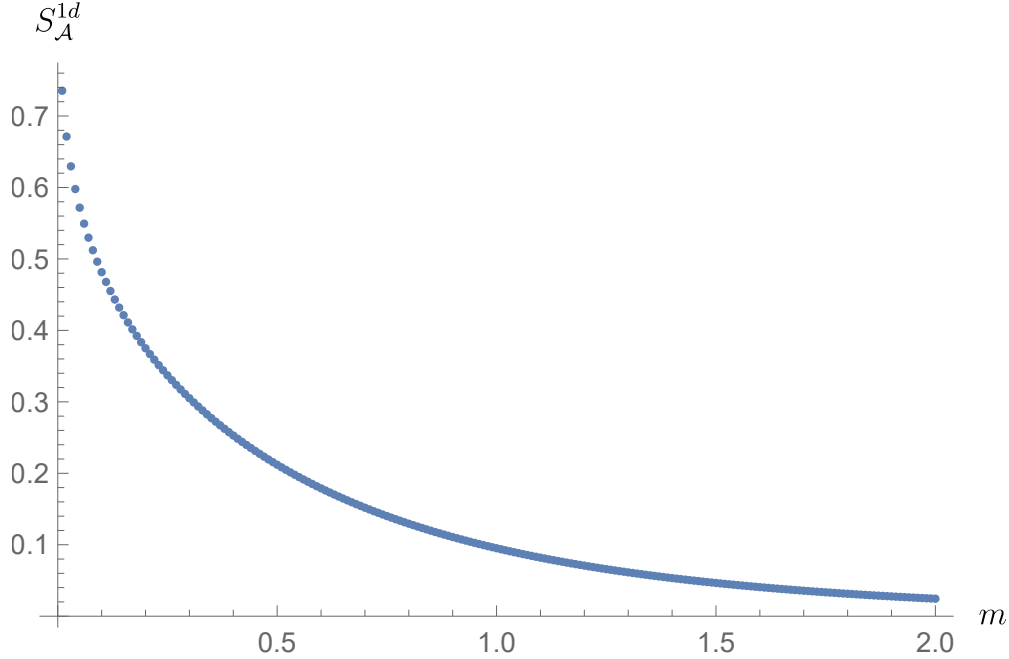
$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{K \left( \frac{\sqrt{6-2\cos(k)+(-2+\cos(k))\csc(k/2)}}{4\sqrt{1+\sin^2(k/2)}} \right) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \frac{\sqrt{6-2\cos(k)+(-2+\cos(k))\csc(k/2)}}{4\sqrt{1+\sin^2(k/2)}} \right)} \quad (3.1.19)$$

où  $K$  est l'intégrale elliptique complète du premier type et  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique. En évaluant numériquement l'intégrale 3.1.18 de 0 à  $\pi$  et en comparant avec  $2a_{1d}L$ , on trouve  $a_{1d} = 0.0563118$ , valeur qui peut être calculée avec une précision arbitraire. Les termes  $s_i/(\log(L))^i$  ( $i = 1,2,3,\dots$ ) sont extraits du deuxième et troisième termes du côté droit de l'équation 3.1.13:

$$\frac{f(q) + f(p)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(p) - f^{(2k-1)}(q)) \quad (3.1.20)$$

ainsi que du reste de l'intégrale 3.1.18,  $R_L$ . Comme la somme dans la dernière équation ne converge pas, un LSF doit être numériquement appliqué afin de trouver la valeur de  $s_1$ , qui est un terme universel.





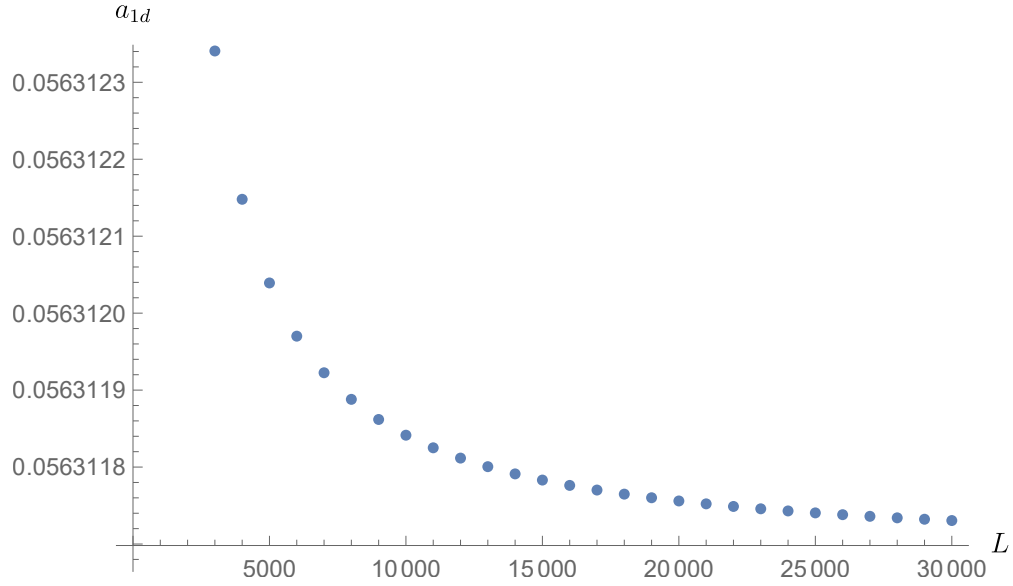
**Fig. 3.2.** Valeurs de l’EE  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$  en fonction de la masse  $m$  d’un réseau 1d périodique de  $2 \times 10^3$  sites avec une sous-région composée d’un site unique.

## 3.2. Résultats numériques pour une sous-région squelettique

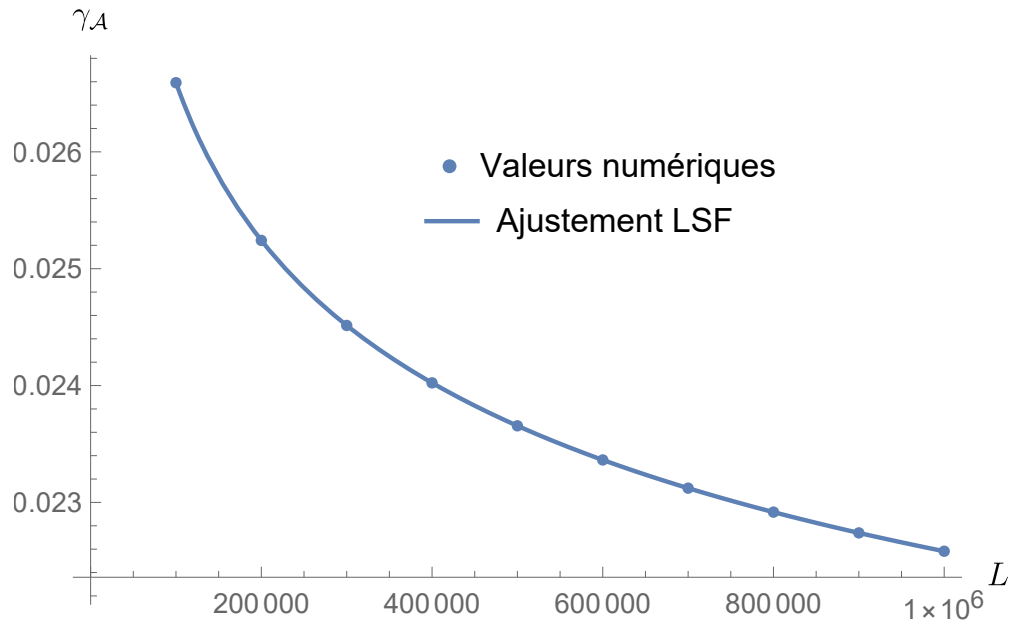
Toutes les mesures de l’EE ont été calculées numériquement en utilisant la méthode de la section 2.2. Des exemples de valeurs de l’EE  $S_{\mathcal{A}}^{1d}$  dans un réseau unidimensionnel pour une sous-région d’un seul site ont été donnés dans la figure 3.2 pour différentes masses (les données numériques sont énumérées dans le tableau A.1).

Passons à présent au cas d’un réseau bidimensionnel possédant une sous-région  $\mathcal{A}$  squelettique (figure 3.1). Les dimensions du tore sont  $L_x = L_y = L$ . La sous-région est de dimension  $L_x^{\mathcal{A}} \times L$ , où  $L_x^{\mathcal{A}} = 1$ , afin que la région  $\mathcal{A}$  soit unidimensionnelle. La loi du périmètre classique (c’est-à-dire pour une sous-région possédant un volume) a été hypothétisée en premier lieu. Les données ont été obtenues en appliquant un LSF sur la formule 2.3.1. Le terme linéaire  $a_{1d}$  converge vers la valeur  $a_{1d} = 0.0563118$  (figure 3.3), ce qui vérifie la valeur de  $a_{1d}$  trouvée de façon semi-analytique dans la section 3.1. Ce coefficient peut être déterminé numériquement avec une grande précision en résolvant l’intégrale 3.1.18.

Le terme  $\gamma_{\mathcal{A}}$ , défini par  $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ , a une très lente convergence lors d’un ajustement LSF avec l’Equation 2.3.1. Des exemples de valeurs de  $\gamma_{\mathcal{A}}$  pour grands  $L$  ont été donnés dans la figure 3.4 (les données numériques sont énumérées dans le tableau A.2). En effet,  $\gamma_{\mathcal{A}}$  ne converge toujours pas vers une valeur finie pour  $L$  allant jusqu’à  $L = 10^6$ . Ceci suggère que  $\gamma_{\mathcal{A}}$  tend vers zéro lorsque  $L$  tend vers  $\infty$ , ce qui est en accord avec l’équation



**Fig. 3.3.** Terme  $a_{1d}$  en fonction de  $L$  pour la sous-région  $\mathcal{A}$  unidimensionnelle, obtenu en appliquant un LSF avec 40 valeurs pour chaque point.



**Fig. 3.4.** Terme  $\gamma_{\mathcal{A}}$  en fonction de  $L$  pour la sous-région  $\mathcal{A}$  unidimensionnelle. La valeur de  $a_{1d}$  étant bien connue, les valeurs de  $\gamma_{\mathcal{A}}$  ont été obtenues en faisant  $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ . L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.2.2 pour  $n=4$ .

3.1.15. Une possible interprétation de ces résultats serait d'utiliser la formule 2.3.4 pour une coupe mince. Selon cette formule, l'EE évoluerait de la manière suivante:

$$S_{\mathcal{A}} = a2L - \kappa_1/u = (2a - \kappa_1)L \quad (3.2.1)$$

car  $u = L_x^A/L_x = 1/L$  dans le cas présent. Il n'y aurait donc pas de terme de correction dominant. Le résultat obtenu,  $a_{1d} = 0.0563118$  (ou  $2a_{1d} = 0.1126236$ ) se rapproche en effet de la valeur attendue,  $2a - \kappa_1 = 2 \cdot 0.0774513 - 0.0397 = 0.115$ . Il subsiste par contre une petite différence de 2.1 pourcents, ce qui est tout de même significatif. La lente convergence n'est pas non plus expliquée. Il ne faut pas oublier que si la formule 2.3.4 requiert la condition  $L_x^A \ll L_x$ , elle n'est plus valide pour une sous-région se trouvant dans la limite UV (ou sans volume), dont le comportement demeure peu étudié. Le terme  $\gamma_{\mathcal{A}}$  posséderait donc très probablement une dépendance en  $L$  précédemment inconnue, comme constaté dans la dernière section.

Plusieurs ajustements LSF ont été appliqués sur la formule 3.1.15 afin de trouver la valeur de  $s_1$ . Pour chaque valeur de  $L$ , le coefficient bien connu  $a_{1d} = 0.0563118$  a été soustrait afin de mieux isoler les autres coefficients. Les ajustements LSF ont été effectués pour des valeurs de  $L$  allant de  $10^5$  à  $10^7$ , en utilisant des incréments de  $2 \times 10^5$  (50 valeurs). La formule utilisée pour les ajustements LSF est:

$$S_{\mathcal{A}} - a_{1d}2L = \frac{s_1}{\log(L)} + \dots + \frac{s_n}{(\log(L))^n} \quad (3.2.2)$$

En appliquant plusieurs ajustements LSF avec  $n$  allant de 2 à 6, il a été déterminé que  $s_1$  possède une valeur de  $-0.346(5)$ . L'ajustement LSF a été inclus dans la figure 3.4.

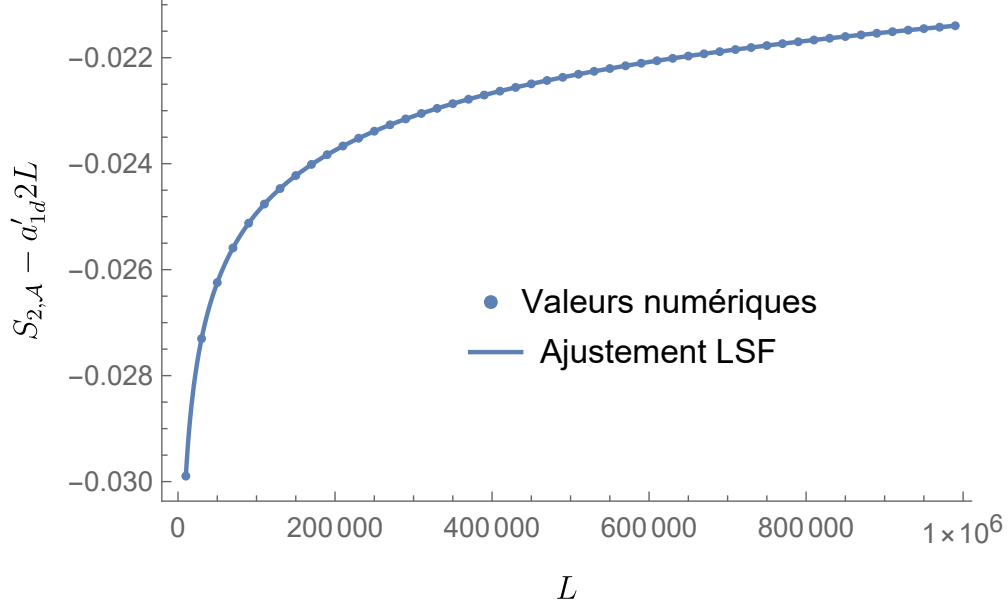
### 3.3. Entropie de Rényi pour une sous-région squelettique

Des mesures de l'EE avec un indice de Rényi  $\alpha = 2$  (aussi appelée entropie de Rényi) ont été effectuées pour une sous-région squelettique en utilisant l'équation 2.2.36 à la place de l'équation 2.2.35. Ces mesures utilisent les mêmes conditions aux bords que les sections précédentes, c'est-à-dire PBC-APBC. En utilisant la même démarche analytique que celle de la section 3.1, il a été déterminé que l'entropie de Rényi a le même comportement que l'entropie de von Neumann ( $\alpha = 1$ ):

$$S_{2,\mathcal{A}} = a'_{1d}2L + \frac{s'_1}{\log(L)} + \frac{s'_2}{(\log(L))^2} + \frac{s'_3}{(\log(L))^3} + \dots \quad (3.3.1)$$

où  $a'_{1d}$  et  $s'_n$  sont les nouveaux coefficients pour l'entropie de Rényi. Comme mentionné dans la section 3.1, en appliquant l'équation d'Euler-MacLaurin à la somme et en résolvant l'intégrale numériquement, le coefficient linéaire  $a'_{1d} = 0.0273974$  a été trouvé. En appliquant un LSF d'une manière similaire à la section 3.2, c'est-à-dire en appliquant cette méthode sur le côté droit de l'équation:

$$S_{2,\mathcal{A}} - a'_{1d}2L = \frac{s'_1}{\log(L)} + \dots + \frac{s'_n}{(\log(L))^n} \quad (3.3.2)$$



**Fig. 3.5.** Valeurs de l'EE  $S_{2,\mathcal{A}} - a'_{1d}2L$  en fonction de  $L$  pour un réseau bidimensionnel avec conditions PBC-APBC pour une sous-région squelettique. L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.3.2 pour  $n=4$ .

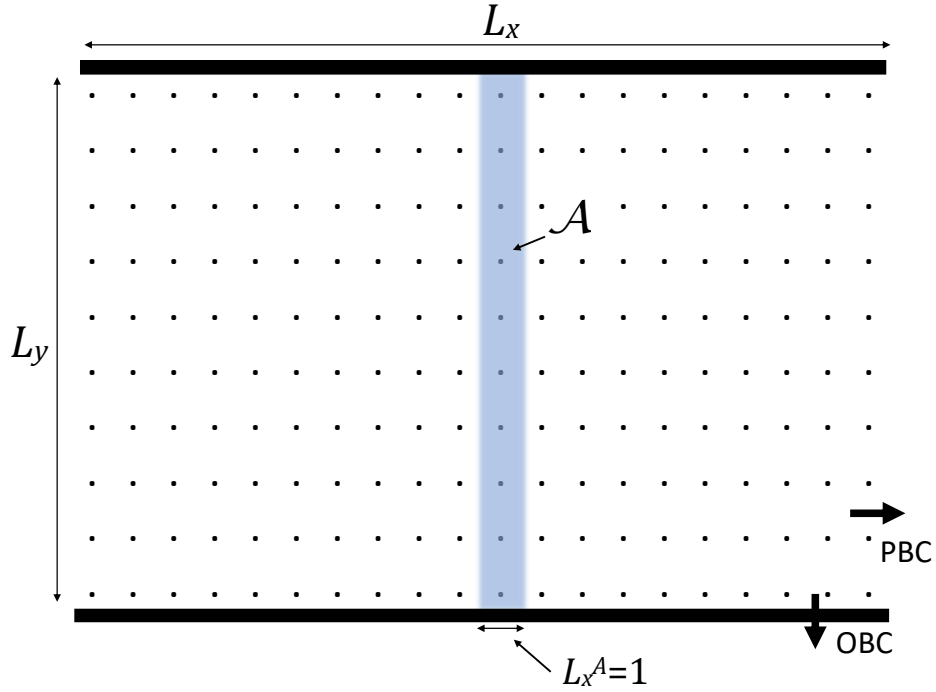
pour  $n$  de 3 à 7, une valeur de  $s'_1 = -0.346(3)$  a été trouvée, ce qui coïncide avec  $s_1$ , c'est-à-dire le coefficient pour l'entropie de von Neumann. Différentes valeurs de  $S_{2,\mathcal{A}} - a'_{1d}2L$  ainsi que l'ajustement LSF de l'équation 3.3.2 avec  $n = 4$  sont affichés dans la figure 3.5.

### 3.4. Entropie d'intrication pour un système PBC-OBC pour une sous-région squelettique

Des mesures de l'entropie de von Neumann ont cette fois été effectuées en changeant les conditions aux frontières de PBC-APBC à PBC-OBC. Pour une sous-région  $\mathcal{A}$  possédant un volume (c'est-à-dire avec  $L_x^{\mathcal{A}} \gg 1$ , comme dans la figure 2.4), à cause de l'intersection entre la frontière  $\partial\mathcal{A}$  et la frontière ouverte du réseau, quatre termes de coins logarithmiques apparaissent et l'EE obéit à l'équation 1.2.6. Dans le cas d'une sous-région squelettique, on peut s'attendre à également avoir des termes supplémentaires dus aux intersections entre la frontière ouverte et la sous-région  $\mathcal{A}$  (voir figure 3.6).

En utilisant la même démarche analytique que la section 3.1, il a été déterminé que l'EE dans ce système obéit au comportement suivant:

$$S_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L + b^{(D)} \log(\log(L)) + s_0^{(D)} + \frac{s_1^{(D)}}{\log(L)} + \frac{s_2^{(D)}}{(\log(L))^2} + \frac{s_3^{(D)}}{(\log(L))^3} + \dots \quad (3.4.1)$$

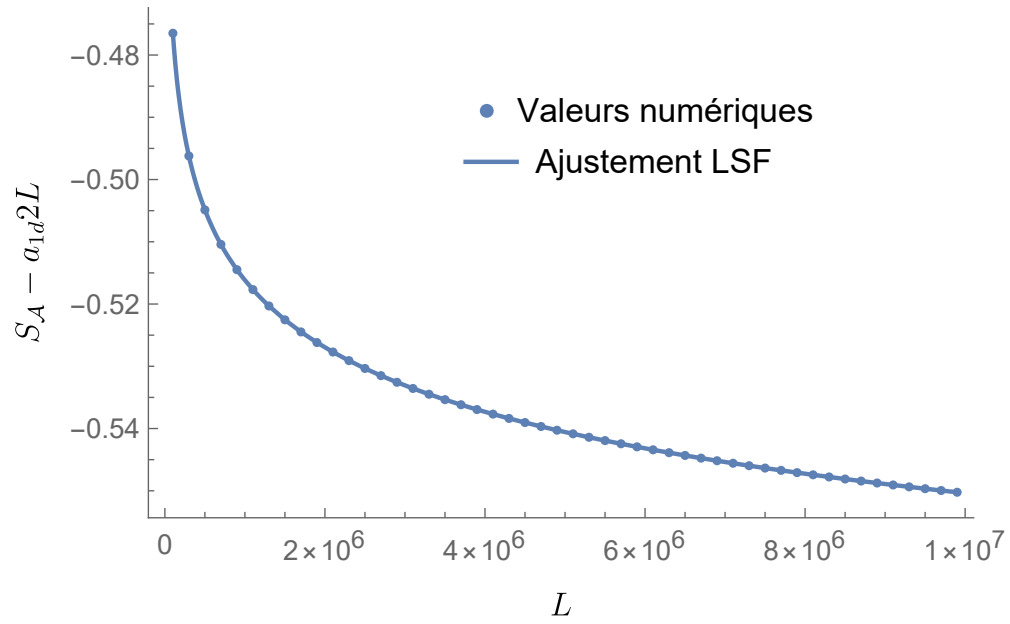


**Fig. 3.6.** Réseau carré bidimensionnel avec conditions périodiques (PBC) en  $x$  et conditions ouvertes ou Dirichlet (OBC) en  $y$ . La sous-région  $\mathcal{A}$  (représentée ici en gris) est unidimensionnelle et est composée d'une chaîne de sites. Les deux extrémités de la sous-région squelettique  $\mathcal{A}$  donnent possiblement de nouveaux termes de coins.

où  $S_{\mathcal{A}}$  est l'entropie de von Neumann mesurée dans le système PBC-OBC tandis que  $b^{(D)}$  et  $s_n^{(D)}$  ( $n \geq 0$ ) sont les nouveaux termes dus aux deux extrémités de la sous-région  $\mathcal{A}$ . Parmi ces nouveaux termes,  $b^{(D)}$  et  $s_0^{(D)}$  sont des termes universels. Le terme linéaire  $a_{1d}$ , calculé encore une fois à l'aide de l'intégrale de la formule d'Euler-MacLaurin, est le même que pour le système PBC-APBC. En utilisant encore une fois un LSF sur l'équation:

$$S_{\mathcal{A}} - a_{1d}2L = b^{(D)} \log(\log(L)) + s_0^{(D)} + \frac{s_1^{(D)}}{\log(L)} + \dots + \frac{s_n^{(D)}}{(\log(L))^n} \quad (3.4.2)$$

pour  $n$  de 1 à 4, on trouve  $b^{(D)} = -0.250(6)$  et  $s_0^{(D)} = 0.17(3)$ . Différentes valeurs de  $S_{\mathcal{A}} - a_{1d}2L$  sont affichées dans la figure 3.7. Le comportement de l'EE dans le cas d'une sous-région squelettique  $\mathcal{A}$  possédant des coins n'est pas le même que celui détaillé par Fursaev et Solodukin pour une sous-région possédant un volume caractérisé par des angles de  $\pi/2$  (équation 2.4.1), où un coefficient logarithmique  $4b = 1/6$  apparaît. Dans notre cas, deux nouveaux coefficients universels apparaissent,  $s_0^{(D)}$  étant constant et  $b^{(D)}$  étant proportionnel à  $\log(\log(L))$ . À première vue, il ne semble pas y avoir de relation claire entre  $b^{(D)}$  et  $b$ , même si les deux sont des termes de coins liés à un comportement relatif à  $\log(L)$ .



**Fig. 3.7.** Valeurs de  $S_A - a_{1d}2L$  en fonction de  $L$  pour un réseau bidimensionnel avec conditions PBC-OBC pour une sous-région squelettique. L'ajustement LSF a été réalisé à partir de l'équation 3.4.2 pour  $n=3$ .

# Chapitre 4

---

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'entropie d'intrication de régions dites squelettiques pour un réseau harmonique en 2 dimensions spatiales, qui est une version discrète de la théorie d'un champ scalaire relativiste sans masse (une CFT). Nous avons montré que le comportement de l'EE dans un tore bidimensionnel avec conditions PBC-APBC change dans le cas d'une sous-région unidimensionnelle par rapport à celui d'une région pleine. À la place d'une valeur constante pour  $\gamma_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}} - 2aL$  trouvée pour une région pleine, on retrouve dans le cas squelettique une dépendance en puissances négatives de  $\log(L)$  (équation 3.1.15), dont le premier coefficient  $s_1$  est universel (indépendant de la coupure UV). À l'aide de calculs numériques sur des réseaux de taille finie, nous avons obtenu  $s_1 = -0.346(3)$ . Il serait intéressant de déterminer à quelle propriété de la CFT correspond ce coefficient. Le coefficient de la loi du périmètre  $a$  change également lors du passage de la sous-région pleine à la région squelettique:  $a_{1d} = 0.0563118$ . Par comparaison, sa valeur pour une sous-région bidimensionnelle est  $a = 0.0774513$ .

Ensuite, l'entropie de Rényi a été calculée pour une sous-région squelettique. Il a été constaté que son comportement (équation 3.3.1) est le même que pour l'EE de von Neumann avec un coefficient universel  $s'_1$  similaire. Le coefficient linéaire  $a'_{1d}$  a été calculé de manière semi-analytique et est différent de son équivalent pour l'entropie de von Neumann. Il a également été trouvé, avec des ajustements LSF, que le coefficient  $s'_1$  est identique à  $s_1$ .

Pour finir, l'EE de von Neumann a été obtenue en remplaçant la condition APBC par la condition OBC afin de potentiellement voir apparaître de nouveaux coefficients universels. Dans le comportement observé, un terme constant et un terme proportionnel à  $\log(\log(L))$  sont en effet observés (équation 3.4.1) et sont universels.

Nous avons montré que l'étude de l'EE pour des régions squelettiques (sans volume) donne lieu à de nouveaux termes universels. Premièrement, il serait pertinent de trouver quelles quantités physiques sont décrites par ces termes. Une analyse approfondie de la CFT du scalaire libre serait nécessaire. Deuxièmement, il serait intéressant d'étudier d'autres

systèmes critiques tels que la CFT de fermions de Dirac libres, ou bien la CFT d'Ising, qui décrit la transition de phase quantique entre un ferro-aimant et un para-aimant en deux dimensions spatiales. On pourrait alors voir si la structure de l'EE découverte dans ce mémoire s'applique à d'autres théories. Finalement, une extension à 3 dimensions serait naturelle. Pour le cas de la CFT du scalaire libre, l'analyse tridimensionnelle serait simplifiée grâce aux résultats obtenus dans ce mémoire.



# Références bibliographiques

---

- [1] Ian AFFLECK et Andreas W. W. LUDWIG : Universal noninteger “ground-state degeneracy” in critical quantum systems. *Physical Review Letters*, 67(2):161–164, juillet 1991.
- [2] Tom M. APOSTOL : *An Elementary View of Euler’s Summation Formula*, volume 106. mai 1999. Publisher: Taylor & Francis.
- [3] Clément BERTHIERE : Boundary-corner entanglement for free bosons. *Physical Review B*, 99(16):165113, avril 2019.
- [4] Clément BERTHIERE et Sergey N. SOLODUKHIN : Boundary effects in entanglement entropy. *Nuclear Physics B*, 910:823–841. septembre 2016.
- [5] Luca BOMBELLI, Rabinder K. KOUL, Joochan LEE et Rafael D. SORKIN : Quantum source of entropy for black holes. *Physical Review D*, 34(2):373–383, juillet 1986.
- [6] Alonso BOTERO et Benni REZNIK : Spatial structures and localization of vacuum entanglement in the linear harmonic chain. *Physical Review A*, 70(5):052329, novembre 2004.
- [7] Pasquale CALABRESE et John CARDY : Entanglement Entropy and Quantum Field Theory. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2004(06):P06002, juin 2004.
- [8] Pasquale CALABRESE et John CARDY : Entanglement entropy and conformal field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504005, décembre 2009.
- [9] Curtis CALLAN et Frank WILCZEK : On geometric entropy. *Physics Letters B*, 333(1):55–61. juillet 1994.
- [10] Horacio CASINI et Marina HUERTA : Universal terms for the entanglement entropy in 2+1 dimensions. *Nuclear Physics B*, 764(3):183–201, mars 2007.
- [11] Horacio CASINI et Marina HUERTA : Entanglement entropy in free quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504007, décembre 2009.
- [12] Xiao CHEN, Gil Young CHO, Thomas FAULKNER et Eduardo FRADKIN : Scaling of entanglement in 2 + 1-dimensional scale-invariant field theories. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015(2):P02010.
- [13] Xiao CHEN, William WITCZAK-KREMPA, Thomas FAULKNER et Eduardo FRADKIN : Two-cylinder entanglement entropy under a twist. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(4): 043104, avril 2017.
- [14] Jens EISERT, Marcus CRAMER et Martin B. PLENIO : Colloquium: Area laws for the entanglement entropy. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):277–306, février 2010.
- [15] Eduardo FRADKIN : *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [16] Dmitry V. FURSAEV et Sergey N. SOLODUKHIN : Anomalies, entropy, and boundaries. *Physical Review D*, 93(8):084021, avril 2016.

- [17] Lauren HAYWARD SIERENS : Simulating quantum matter through lattice field theories. Publisher: University of Waterloo, mai 2017.
- [18] Johannes HELMES, Lauren E. Hayward SIERENS, Anushya CHANDRAN, William WITCZAK-KREMPA et Roger G. MELKO : Universal corner entanglement of Dirac fermions and gapless bosons from the continuum to the lattice. *Physical Review B*, 94(12):125142, septembre 2016.
- [19] Tomoyoshi HIRATA et Tadashi TAKAYANAGI : AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2007(02):042–042, février 2007.
- [20] Christoph HOLZHEY, Finn LARSEN et Frank WILCZEK : Geometric and renormalized entropy in conformal field theory. *Nuclear Physics B*, 424(3):443–467. août 1994.
- [21] Vladimir E. KOREPIN : Universality of entropy scaling in one dimensional gapless models. *Physical Review Letters*, 92(9):096402. mars 2004.
- [22] Nicolas LAFLORENCIE : Quantum entanglement in condensed matter systems. *Physics Reports*, 646:1–59. août 2016.
- [23] José I. LATORRE, Enrique RICO et Guifre VIDAL : Ground state entanglement in quantum spin chains. *CaltechAUTHORS*, 4(1):48–92. mars 2004.
- [24] Michael A. NIELSEN et Isaac L. CHUANG : *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [25] Cristiano De NOBILI, Andrea COSER et Erik TONNI : Entanglement negativity in a two dimensional harmonic lattice: area law and corner contributions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016(8):083102. août 2016.
- [26] Ingo PESCHEL : Calculation of reduced density matrices from correlation functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(14):L205–L208, avril 2003.
- [27] Mukund RANGAMANI et Tadashi TAKAYANAGI : Holographic Entanglement Entropy. 931, 2017. Publisher: Springer.
- [28] Alfréd RÉNYI : On the foundations of information theory. 33(1):1–14. 1965. Publisher: International Statistical Institute (ISI).
- [29] Shinsei RYU et Tadashi TAKAYANAGI : Aspects of Holographic Entanglement Entropy. *Journal of High Energy Physics*, 2006(08):045–045, août 2006.
- [30] Shinsei RYU et Tadashi TAKAYANAGI : Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT. *Physical Review Letters*, 96(18):181602, mai 2006.
- [31] Sergey N. SOLODUKHIN : Boundary terms of conformal anomaly. *Nuclear Physics B*, 752:131–134. janvier 2016.
- [32] Rafael D. SORKIN : 1983 paper on entanglement entropy: "on the entropy of the vacuum outside a horizon". février 2014. arXiv:1402.3589.
- [33] Mark SREDNICKI : Entropy and Area. *Physical Review Letters*, 71(5):666–669, août 1993.
- [34] Guifre VIDAL, José I. LATORRE, Enrique RICO et Alexei KITAEV : Entanglement in quantum critical phenomena. *Physical Review Letters*, 90(22):227902. juin 2003.
- [35] John von NEUMANN : *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton university press, février 2018.
- [36] William WITCZAK-KREMPA, Lauren E. HAYWARD SIERENS et Roger G. MELKO : Cornering Gapless Quantum States via Their Torus Entanglement. *Physical Review Letters*, 118(7):077202, février 2017.
- [37] Bei ZENG, Xie CHEN, Duan-Lu ZHOU et Xiao-Gang WEN : Quantum information meets quantum matter – from quantum entanglement to topological phase in many-body systems. février 2018, arXiv:1508.02595v4.

# Annexe A

---

## Données numériques

Dans le tableau A.1 sont données les valeurs de l'EE  $S_{\mathcal{A}}$  selon la masse dans un réseau périodique unidimensionnel de 2000 sites avec une sous-région  $\mathcal{A}$  composée d'un seul site.

Dans le tableau A.2 sont données les valeurs du terme  $\gamma_{\mathcal{A}}$  dans un tore avec conditions PBC et APBC pour le cas d'une sous-région  $\mathcal{A}$  unidimensionnelle avec dimensions  $L_x = L_y = L$ . La valeur de  $a_{1d} = 0.0563118$  étant bien connue, les valeurs de  $\gamma_{\mathcal{A}}$  ont été obtenues en faisant  $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ .

$m$	$S$	$m$	$S$	$m$	$S$	$m$	$S$	$m$	$S$
0.01	0.735351	0.41	0.248392	0.81	0.127436	1.21	0.0697776	1.61	0.0401526
0.02	0.671286	0.42	0.24397	0.82	0.125448	1.22	0.0687798	1.62	0.0396258
0.03	0.629607	0.43	0.239649	0.83	0.123497	1.23	0.0677982	1.63	0.0391071
0.04	0.597805	0.44	0.235426	0.84	0.12158	1.24	0.0668328	1.64	0.0385962
0.05	0.571709	0.45	0.231299	0.85	0.119697	1.25	0.0658831	1.65	0.0380932
0.06	0.549378	0.46	0.227263	0.86	0.117847	1.26	0.0649488	1.66	0.0375978
0.07	0.529741	0.47	0.223315	0.87	0.116031	1.27	0.0640298	1.67	0.0371099
0.08	0.51214	0.48	0.219454	0.88	0.114246	1.28	0.0631257	1.68	0.0366294
0.09	0.496141	0.49	0.215675	0.89	0.112492	1.29	0.0622363	1.69	0.0361561
0.1	0.481439	0.5	0.211978	0.9	0.11077	1.3	0.0613612	1.7	0.0356901
0.11	0.467814	0.51	0.208358	0.91	0.109077	1.31	0.0605003	1.71	0.035231
0.12	0.455099	0.52	0.204814	0.92	0.107414	1.32	0.0596533	1.72	0.0347788
0.13	0.443166	0.53	0.201344	0.93	0.10578	1.33	0.0588199	1.73	0.0343335
0.14	0.431913	0.54	0.197945	0.94	0.104175	1.34	0.0579999	1.74	0.0338948
0.15	0.42126	0.55	0.194616	0.95	0.102597	1.35	0.0571931	1.75	0.0334627
0.16	0.411139	0.56	0.191354	0.96	0.101046	1.36	0.0563992	1.76	0.033037
0.17	0.401495	0.57	0.188158	0.97	0.0995226	1.37	0.055618	1.77	0.0326177
0.18	0.392282	0.58	0.185026	0.98	0.098025	1.38	0.0548492	1.78	0.0322046
0.19	0.38346	0.59	0.181956	0.99	0.0965531	1.39	0.0540927	1.79	0.0317977
0.2	0.374995	0.6	0.178947	1.	0.0951064	1.4	0.0533483	1.8	0.0313968
0.21	0.366858	0.61	0.175997	1.01	0.0936844	1.41	0.0526156	1.81	0.0310018
0.22	0.359025	0.62	0.173104	1.02	0.0922867	1.42	0.0518946	1.82	0.0306127
0.23	0.351472	0.63	0.170268	1.03	0.0909128	1.43	0.051185	1.83	0.0302293
0.24	0.34418	0.64	0.167486	1.04	0.0895622	1.44	0.0504866	1.84	0.0298515
0.25	0.337132	0.65	0.164758	1.05	0.0882345	1.45	0.0497992	1.85	0.0294793
0.26	0.330313	0.66	0.162082	1.06	0.0869292	1.46	0.0491227	1.86	0.0291126
0.27	0.323707	0.67	0.159457	1.07	0.085646	1.47	0.0484567	1.87	0.0287512
0.28	0.317304	0.68	0.156881	1.08	0.0843844	1.48	0.0478013	1.88	0.0283951
0.29	0.311091	0.69	0.154354	1.09	0.083144	1.49	0.047156	1.89	0.0280443
0.3	0.305058	0.7	0.151874	1.1	0.0819245	1.5	0.0465209	1.9	0.0276985
0.31	0.299196	0.71	0.149441	1.11	0.0807253	1.51	0.0458957	1.91	0.0273577
0.32	0.293496	0.72	0.147053	1.12	0.0795463	1.52	0.0452802	1.92	0.0270219
0.33	0.287951	0.73	0.144709	1.13	0.0783868	1.53	0.0446743	1.93	0.026691
0.34	0.282554	0.74	0.142408	1.14	0.0772467	1.54	0.0440778	1.94	0.0263648
0.35	0.277297	0.75	0.140149	1.15	0.0761256	1.55	0.0434906	1.95	0.0260434
0.36	0.272174	0.76	0.137932	1.16	0.075023	1.56	0.0429125	1.96	0.0257265
0.37	0.26718	0.77	0.135755	1.17	0.0739388	1.57	0.0423432	1.97	0.0254143
0.38	0.26231	0.78	0.133618	1.18	0.0728724	1.58	0.0417828	1.98	0.0251065
0.39	0.257558	0.79	0.13152	1.19	0.0718236	1.59	0.041231	1.99	0.0248031
0.4	0.25292	0.8	0.129459	1.2	0.0707922	1.6	0.0406876	2.	0.0245041

**Tableau A.1.** Valeurs de l'EE selon la masse d'un réseau unidimensionnel périodique avec une sous-région composée d'un site unique.

$L$	$\gamma_{\mathcal{A}}$
100000	0.0265918
200000	0.025242
300000	0.0245143
400000	0.0240231
500000	0.0236555
600000	0.0233634
700000	0.023122
800000	0.022917
900000	0.0227391
1000000	0.0225823

**Tableau A.2.** Valeurs de  $\gamma_{\mathcal{A}}$  selon la longueur du réseau  $L$  obtenue à l'aide de l'opération  $\gamma_{\mathcal{A}} = a_{1d}2L - S_{\mathcal{A}}$ , où  $a_{1d} = 0.0563118$ .