Université de Montréal

Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire

Par
Sébastien Cyr

Science de l'éducation, département de didactique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de M.A.
Maîtrise ès arts, option didactique

Janvier 2021

Université de Montréal
Faculté des sciences de l'éducation, département de didactique

Ce mémoire intitulé

Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire

Présenté par
Sébastien Cyr

A été évalué par un jury composé des personnes suivantes

France Caron
Président-rapporteur

Philippe R. Richard
Directeur de recherche

Annette Braconne-Michoux
Membre du jury

Résumé

Durant leur parcours au secondaire (12 à 17 ans), les élèves sont amenés à résoudre des problèmes de preuves en classe de mathématiques (MELS, 2006a, 2006b). En géométrie, ces preuves doivent s'appuyer sur un référentiel théorique composé de propriétés et de définitions (Kuzniak et Richard, 2014). Afin de dégager les particularités des référentiels utilisés en classe, nous avons relevé et analysé les propriétés et les définitions de dix-neuf ouvrages scolaires québécois de 1re secondaire à la 5e secondaire. Chacun des éléments ainsi relevés a été identifié selon les concepts sous-tendus dans leurs énoncés, leurs valeurs épistémiques possibles, leur dépendance à une figure et leur place au sein du chapitre. Cette étude se base sur le concept des paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006) et le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak et Richard, 2014) où le référentiel fait partie de la genèse discursive engendrée par un travail mathématique. L'étude des référentiels montre que plusieurs modalités discursives dans leur enseignement peuvent générer des difficultés lorsque vient le temps de les utiliser dans une preuve. Cette étude confirme aussi l'oscillation entre les paradigmes géométriques (Gauthier, 2015; Tanguay et Geeraerts, 2012) dans l'enseignement de la géométrie. Enfin, nous proposons un référentiel possible pour un agent tuteur d'aide à la démonstration selon le curriculum québécois.

Mots-clés :

Géométrie, démonstration, espace de travail mathématique, référentiel, genèse discursive, paradigmes géométriques, secondaire, QED-Tutrix, manuel scolaire, raccourci inférentiel,

Abstract

During their high school career (12 to 17 years old), students are required to solve proof-based problems in their mathematics classes (MELS, 2006a, 2006b). In geometry, these mathemactical proofs must be supported by a theoretical referential of properties and definitions (Kuzniak et Richard, 2014). To determine the specifics of the referentials used in classes, we noted and analyzed the properties and definitions of nineteen Quebec secondary school textbooks. Each item was identified according to the concepts underlying in their statements, their possible epistemic value, their reliance on a figure, and their placement in the chapter. This study is based on the concept of geometric paradigms (Houdement et Kuzniak, 2006) and on the Mathematical Working Space model (MWS or ETM in French) (Kuzniak et Richard, 2014) where the referential is part of the discursive genesis generated by a mathematical work. This study on referentials demonstrates that there are many discursive modalities used in teaching, which can produce difficulties when they are required to be used in a proof. This study also confirms the oscillation between the geometric paradigms (Gauthier, 2015; Tanguay et Geeraerts, 2012) when teaching geometry. Furthermore, we propose a possible referential to be used in a demonstration aid tutor in accordance with Quebec's curriculum.

Keywords :

Geometry, proof, mathematical working space, referential, discursive genesis, geometric paradigms, highschool, QED-Tutrix, schoolbook, inferential shortcut

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des sigles

CST	Culture, société et technique
ETM	Espace de travail mathématique
GI	Géométrie naturelle
GII	Géométrie axiomatique naturelle
GIII	Géométrie axiomatique formelle
MEES	Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur
MELS	Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports
QEDX	QED-Tutrix
TS	Technico-science
SN	Science de la nature

Remerciements

Bien que mon projet se soit rapidement tourné vers les manuels scolaires, il était initialement prévu de travailler avec des enseignants au secondaire. À cette fin, je remercie l'équipe du collège Jean-Eudes, particulièrement Mme Marie-Josée Veilleux et Mme Viviane Côté, à la fois pour leur ouverture et leur aide, mais aussi pour toutes les opportunités professionnelles offertes.

Je remercie également l'aide inestimable des professeurs du département de didactique de l'Université de Montréal. D'abord les professeurs Rachel Berthiaume et Marcel Thouin que j'ai rencontrés durant ma formation et dont le travail et l'aide donnée dépassent nettement une simple prestation de cours. Aussi, les professeurs Annette Braconne-Michoux et France Caron, qui m'ont non seulement soutenu lorsque j'étais perdu, mais aussi accompagné dans ma méthodologie et tout au long du processus d'écriture. Merci.

Je tiens à mentionner le travail exceptionnel de Mme Nicole Gaboury, qui, par son organisation impeccable, m'a dégagé du stress lié aux tâches administratives qu'une telle recherche engendre.

Je prends également le temps de remercier la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal et le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada pour les bourses qui m'ont permis de faire ma recherche de maîtrise à temps plein tout en enlevant le poids d'une situation financière précaire de mes épaules.

Je tiens aussi à remercier l'équipe du laboratoire Turing de l'Université de Montréal. D'abord les professeurs Michel Gagnon et Fabienne Venant pour leur rétroaction continue, les encouragements et toutes les discussions riches qui m'ont permis d'avancer plus loin que je n'aurais imaginé. Ensuite, mon confrère de recherche, mon ami, Ludovic Font, avec qui j'ai longuement réfléchi et attaqué toute sorte de problèmes, souvent dépassant le cadre de cette recherche. Nos nombreuses discussions ont ainsi été d'une richesse unique et nous ont même amenés à utiliser son expertise informatique dans l'analyse de mes données.

Merci à mon directeur de recherche, Philippe R. Richard, sans qui cette recherche n'aurait jamais eu lieu et qui m'a appuyé depuis le début. Il a su se faire compréhensif lorsqu'il y a eu des conflits entre mon étude et mon enseignement au collège Jean-Eudes. Je souligne également les nombreuses opportunités éducatives offertes qui m'ont ouvert au monde de la recherche et qui m'ont permis de rencontrer tout plein de personnes formidables.

Je garde le dernier mot pour remercier ma conjointe, Kirsten Crandall, qui m'a toujours encouragé et qui a su être patiente face à la palette d'humeurs vécues durant ces deux dernières années. Merci aussi pour ton aide dans l'écriture des articles et de mon mémoire, particulièrement pour la correction des traductions en anglais.

Introduction

Nous apprenons à faire des mathématiques dès notre plus jeune âge. À l'école, nous sommes amenés à utiliser des connaissances de référence pour faire notre travail mathématique, que ce soit des définitions, des propriétés, des formules, des algorithmes, des modes de représentation, etc. Ce qui est typique de ce travail c'est qu'au cours d'une démonstration, la production de connaissances non contradictoires enrichit le système de référence. Autrement dit, dès qu'une conjecture est démontrée, elle devient une nouvelle propriété qui s'ajoute à l'arsenal des propriétés disponibles, le système de référence étant ainsi un système évolutif aussi bien dans le travail mathématique expert que dans celui de l'élève.

Notre intérêt pour cette question s'inscrit dans l'élaboration d'un système tuteur d'aide à la démonstration en géométrie. Pour un tel logiciel, il est nécessaire de bien établir le système de référence que l'élève peut utiliser. Une première approche est de transformer les objets géométriques en polynômes calculables et de vérifier chaque étape de la démonstration par un calcul. En revanche, les démonstrations générées ainsi se trouvent à être artificielles, voire incompréhensibles pour l'humain (Balacheff et Boy de la Tour, 2019). Notre avis est qu'un système tuteur doit être une extension de la classe de mathématiques en étant adapté aux réalités scolaires. Pour ce faire, le système de référence doit être a priori incorporé au logiciel et inclure les différentes variations que l'on retrouve d'un milieu scolaire à l'autre et d'un enseignant à l'autre. Le programme de formation de l'école québécoise offre une première avenue pour dégager ces systèmes de référence, mais on se rend rapidement compte que son contenu est condensé et ne reflète pas tout ce que les enseignants font en classe.

Le premier chapitre présentera la problématique de notre étude. D'abord, une étude épistémologique portant sur l'évolution de la démonstration et des systèmes de référence sera présentée. L'étude épistémologique débouchera sur l'exposition de l'enseignement et l'apprentissage de la preuve en géométrie dans les écoles du Québec, notamment au travers du programme de formation et des ouvrages pédagogiques. Finalement, le chapitre terminera avec l'écriture d'une démonstration et de l'implicite qu'on y retrouve.

Le deuxième chapitre portera sur le cadre théorique utilisé pour notre étude. Les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak seront d'abord présentés. Par la suite, la théorie des espaces de travail mathématique sera détaillée en mettant l'accent sur le processus de démonstration en géométrie. Ce chapitre se terminera avec les différents types de raccourcis que l'on retrouve dans une démonstration et leur prise en compte pour l'élaboration d'un système tuteur.

Le troisième chapitre détaillera notre méthodologie. Il sera d'abord question de la provenance de nos données, puis de la manière dont nous les analyserons et, enfin, des détails des étapes que nous suivrons au cours de notre investigation.

Finalement, le quatrième chapitre sera consacré aux résultats et à leur analyse. Dans un premier temps, une brève présentation des résultats sera présentée. Ensuite, nous présenterons une analyse discursive des référentiels et aussi une analyse paradigmatique des référentiels. Enfin, nous présenterons différents types de référentiels et, finalement, nous présenterons un référentiel à être utilisé par une intelligence artificielle.

1 La problématique

Notre problématique vise à explorer comment les systèmes de référence se sont formés dans l'Histoire, comment ils apparaissent à l'école et comment ils s'y développent. Porter un regard didactique sur l'émergence et l'évolution de la démonstration et de ses constituantes permet de faire des liens avec son apprentissage et son enseignement actuel. Ainsi, dans ce chapitre, nous détaillons les sections portant sur le travail du mathématicien, le travail mathématique dans les écoles du Québec, l'enseignement des référentiels[1], l'implicite dans la démonstration, les systèmes tuteurs d'aide à la démonstration et nous clôturons avec notre objectif général de recherche.

1.1 Le travail du mathématicien

L'épistémologie des systèmes de référence met en lumière son évolution depuis son existence pragmatique jusqu'au formalisme bourbakiste. En effet, la démonstration n'a pas débuté avec les premières mathématiques. Ces dernières étaient d'abord concrètes et d'ordre pratique avant d'être théorisées. Bien que l'Histoire ne permette pas de remonter jusqu'à la naissance des mathématiques, les archéologues ont trouvé divers objets portant des traces de sa genèse. Deux os, aujourd'hui appelés les deux os d'Ishango en raison du nom de la région d'où ils proviennent, porteraient les plus anciennes traces de comptage (Pletser et Huylebrouck, 1999). Vieux de 20 000 ans, ces os portent des entailles qui sembleraient avoir servi pour compter, mais le manque de preuves tangibles empêche de réellement l'affirmer. D'autre part, des vases datant du 8e millénaire avant notre ère ont été trouvés dans la région du Croissant fertile (Launay, 2016). Les frises géométriques ornant ces vases sont construites suivant certaines régularités : on y retrouve le résultat de ce que l'on peut interpréter aujourd'hui comme des translations, des rotations et même des symétries. En considérant ces interprétations, nous pouvons supposer qu'il y avait certains systèmes de référence, même s'ils étaient possiblement basés sur l'évidence visuelle comme celle de l'ordre de grandeur des premiers nombres naturels. C'est avec les premières traces écrites qu'il nous est réellement possible de considérer les premiers systèmes de référence.

[1] Dans certains ouvrages théoriques, un système de référence est appelé un référentiel. Un glossaire de plusieurs termes techniques utilisés dans ce mémoire se retrouve à l'annexe 1.

1.1.1 L'écriture et le travail mathématique

La capacité de mettre par écrit ses pensées a permis l'essor de la science mathématique. C'est ainsi que les Mésopotamiens ont « mis au point bon nombre de formules ingénieuses, de petites astuces de calcul et d'ingénierie, mais […] il leur arrivait d'accomplir des exploits étonnants en n'ayant qu'une très vague idée de ce qu'ils faisaient » (Mlodinow, 2002, p. 17). Les Mésopotamiens, et les Égyptiens aussi d'ailleurs, faisaient des mathématiques pragmatiques. Si bien que

> la notion d'espace a commencé […] comme une notion de lieu : notre lieu, la Terre. Elle a pris corps avec une invention à laquelle [ces civilisations] donnèrent le nom de « mesure de la Terre ». C'est ce que les Grecs traduisirent par géométrie, mais il s'agissait de deux disciplines tout à fait différentes[2] (Mlodinow, 2002, p. 15).

D'ailleurs, les énoncés des problèmes mésopotamiens de l'époque et leurs solutions étaient formulés de manière rhétorique et l'on utilisait plusieurs exemples pour montrer un processus de résolution (Lefebvre, 1991). Par exemple, un problème touchant la relation de Pythagore allait comme suit : « quatre est la longueur et cinq est la diagonale. Quelle est la largeur? Sa mesure est inconnue. Quatre fois quatre font seize. Cinq fois cinq font vingt-cinq. On ôte seize de vingt-cinq, et il reste neuf. Comment obtenir neuf? Trois fois trois font neuf. Trois est la largeur » (Mlodinow, 2002, p. 21). Pour s'assurer que le processus soit reproductible, on prenait d'autres exemples, avec des nombres différents (comme 8 et 10; 5 et 13; etc.).

À l'évidence, ces deux civilisations ont fait des avancées importantes en mathématiques. Pourtant, les besoins de l'époque ont fait en sorte que la généralité a été laissée de côté : les textes comportaient plusieurs exemples numériques et les lecteurs devaient comprendre qu'il suffisait de répéter le processus décrit. Même si les mathématiciens de cette époque ne faisaient pas de démonstration au sens d'aujourd'hui, ces textes constituaient les références mathématiques. Les référentiels étaient alors composés d'exemples illustrés. C'est ainsi, soit à partir de plusieurs exemples, que les mathématiciens s'assuraient de la validité de leur travail mathématique et qu'ils évitaient de recommencer à chaque fois depuis le début. Comment ces référentiels mathématiques sont-ils alors passés d'une accumulation d'exemples singuliers à un référentiel théorique de

[2] Ces différences seront explicitées à la section suivante.

propriétés et de définitions comme nous le connaissons aujourd'hui? Ce changement important se fera au cours de la civilisation grecque.

1.1.2 Le discours grec

Avant la civilisation de la Grèce antique, les mathématiques étaient pragmatiques et le besoin de généralisation était absent. C'est à Thalès de Milet (environ 600 av. J.-C.) qu'on doit les premières structures logiques du raisonnement déductif tout en amenant la généralité des concepts mathématiques (Lefebvre, 1991; Mlodinow, 2002). Plusieurs théorèmes mathématiques lui sont d'ailleurs attribués, comme « le cercle est divisé en deux par tout diamètre » (Launay, 2016). Bien que le contenu du théorème semble trivial aujourd'hui, sa formulation ne l'est pas pour l'époque. Il n'est pas question pour Thalès de prendre un premier exemple, puis un deuxième et un troisième comme l'auraient fait les Égyptiens ou les Mésopotamiens afin d'illustrer son propos. Il considère ainsi, pour la première fois, le cercle et le diamètre comme objets mathématiques abstraits, un idéal théorique (Launay, 2016). D'ailleurs, Arsac (1987) souligne l'apparition simultanée chez les Grecs de trois principes :

> - la définition des objets de la mathématique [*sic*] à l'aide d'axiomes, de définitions, comme objets idéaux, indépendants de l'expérience sensible;
> - les énoncés généraux (théorèmes, propositions,...) explicitant sous des hypothèses précises les assertions vraies pour les êtres mathématiques;
> - les démonstrations prouvant les assertions précédentes en s'appuyant uniquement sur les axiomes, les définitions et les règles de la logique, en particulier le tiers exclu.

Ces principes sont apparus avec l'émergence de la démocratie où « toutes les affaires de la cité [devaient] faire l'objet d'un libre débat, d'une discussion publique, au grand jour de l'agora, sous forme de discours argumentés » (Barbin, 1988). Il s'agit donc de convaincre autrui par un discours raisonné et objectif. Or, à l'époque, le raisonnement est davantage d'ordre mythique, permettant aux sophistes d'à peu près tout dire ou contredire par différentes interprétations mythiques (Richard, 2004b). Le besoin d'un nouveau référentiel commun et objectif, différent de celui de la mythologie et contrôlable par les deux parties se fait ainsi sentir. La démonstration apparaît alors par le besoin social de convaincre l'autre en s'appuyant sur ce référentiel théorique, particulièrement lorsqu'il s'agit d'un problème délicat. Entre autres, l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté ont vraisemblablement fait partie des problèmes engendrant le changement radical du raisonnement particulier et empirique vers un raisonnement théorique et général (Arsac, 1987). En effet, les Pythagoriciens du 5e siècle av. J.-C. ne concevaient que des nombres entiers : ils prenaient une unité de mesure plus petite lorsqu'ils rencontraient des fractions afin d'exprimer la mesure par un entier. Or, il leur a été impossible de résoudre ces problèmes dans le domaine du sensible; ils ont donc dû passer à un système mathématique théorique. Ainsi, selon Arsac :

> à partir du moment où […] l'on renonce à l'expérience physique, aux données fournies par les sens, pour définir les objets de la mathématique [*sic*] et valider les assertions à leur sujet, on ne peut les définir que d'une manière axiomatique, c'est-à-dire en précisant les règles de manipulation auxquelles ils sont soumis. La seule méthode de validation disponible est alors celle qui consiste à s'appuyer sur ces règles et à opérer par déduction, c'est-à-dire la démonstration (Arsac, 1987).

S'ensuivent les premières démonstrations basées sur les premières définitions d'objets mathématiques et de leurs propriétés. Il ne s'agit plus de se référer aux mythes pour expliquer, mais bien de se référer à des définitions théoriques en prenant soin d'appuyer son discours sur leurs règles sous-jacentes et sur les principes déductifs.

Le passage vers un référentiel universel de définitions et de propriétés s'exprime chez les Grecs avec le travail attribué à Euclide : les Éléments d'Euclide. Le premier tome se termine avec une démonstration du théorème de Pythagore et de sa réciproque. La force de cet ouvrage tient à son niveau de rigueur et à la structure logique adoptée, assurant ainsi le critère de vérité des théorèmes qui s'enchaînent les uns après les autres (Lefebvre, 1991). Le texte euclidien commence ainsi par un référentiel : vingt-trois objets géométriques y sont définis, dont le point, la ligne, l'angle, le cercle, le plan, la surface, etc. Suivent des postulats, appelés axiomes en mathématiques modernes. Les axiomes sont des propriétés de base qui n'ont pas besoin d'être démontrées en raison de leur évidence. Euclide sépare la liste d'axiomes en deux : les « notions communes » et les postulats (voir annexe 2). Dans les Éléments, les théorèmes s'enchaînent les uns aux autres, chacun étant démontré de façon irréfutable, s'appuyant sur le référentiel de définitions, d'axiomes et de résultats déjà démontrés. Pour ce faire, le texte euclidien est rédigé selon une structure logico-déductive ternaire où une conclusion est déduite à partir des hypothèses dégagées de l'énoncé initial à l'aide d'une règle d'inférence puisée dans le référentiel. Ce processus ternaire, fait à partir des hypothèses pour arriver à une conclusion en passant par une propriété, est appelé un pas de déduction ou une inférence (Duval, 1991). Une démonstration est composée d'un enchainement d'inférences. La figure 1 illustre l'agencement de la structure ternaire d'une inférence sous forme de graphe (Duval, 1991) à l'aide d'un exemple tiré et adapté de l'article de Tanguay (2006). Plusieurs auteurs utilisent des termes différents pour « hypothèse » et « conclusion », notamment (Richard, 2004b) qui utilise respectivement « antécédent » et « conséquent » ou Tanguay (2006) qui recourt respectivement à « prémisse » et « proposition inférée » se rapprochant ainsi de Duval (1991) qui utilise prémisse ou proposition d'entrée et conclusion. Dans ce mémoire, nous utiliserons les termes « antécédents » et « conséquents ». Ainsi, l'utilisation d'une règle d'inférence (propriété ou définition) nécessite un ou plusieurs antécédents et amène un conséquent.

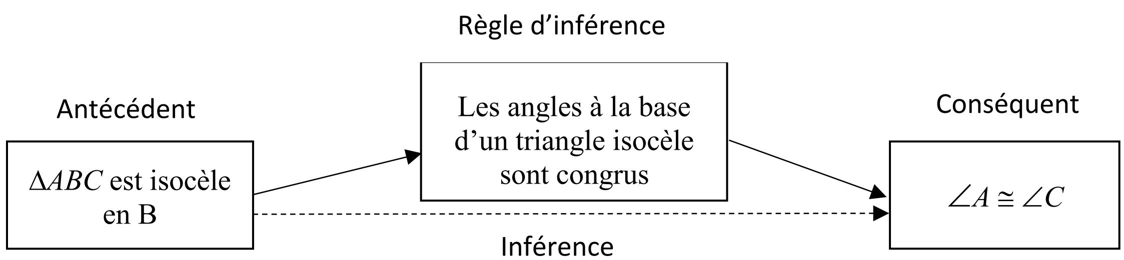


Figure 1 : La structure ternaire d'une inférence

En plus des définitions, des propriétés et de la structure de la démonstration établie, on retrouve également dans l'ouvrage d'Euclide certains principes logiques nécessaires à la démonstration (Arsac, 1987; Lefebvre, 1991), dont le principe du tiers exclu, le syllogisme $[(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, et le raisonnement par l'absurde.

Le principe du tiers exclu postule qu'une proposition est soit vraie, soit sa négation est vraie, sans possibilité intermédiaire[3]. Par exemple, si un nombre entier n'est pas pair, alors il doit être impair, il n'y a pas de troisième possibilité. Le syllogisme énoncé permet d'utiliser un intermédiaire afin de démontrer qu'une première proposition amène le conséquent. C'est notamment ce principe qui permet de conserver la validité des enchainements d'inférence dans une démonstration. Enfin, le raisonnement par l'absurde consiste à considérer la négation d'une proposition et d'en faire découler une contradiction. Ainsi, si la négation est impossible, il en résulte, par le principe du tiers exclu, que la proposition est forcément vraie.

[3] Notons qu'il est possible de raisonner sans le principe du tiers exclu, notamment avec la logique floue. (Godjevac, 1999; Sangalli, 2001)

Les mathématiciens de la Grèce antique ont ainsi transformé le référentiel composé d'exemples des Mésopotamiens et des Égyptiens en un référentiel de définitions et de propriétés théoriques et universelles. Ils ont également établi la structure de la démonstration, qui, rappelons-le, servait à convaincre les autres. Depuis les Grecs, quels autres changements y a-t-il eu au niveau de la démonstration et du référentiel?

1.1.3 Vers le système de validité contemporaine

Durant des siècles, les mathématiciens ont étudié la géométrie à partir de l'ouvrage grec sans ressentir le besoin de modifier sa structure démonstrative. À la Renaissance, les mathématiciens européens cherchaient des moyens de résoudre les équations du troisième ou quatrième degré; ils étudiaient aussi les perspectives et les mouvements astraux. Il y avait à l'époque, dans la communauté mathématique, le besoin d'une méthode afin d'assurer la validité des nouveaux résultats obtenus (Lefebvre, 1992b). Ce besoin aboutit au fameux *Discours de la méthode* de René Descartes, publié en 1637, dans lequel il introduit en annexe son livre *La géométrie*. Il y introduit les principes de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie analytique : il s'agit d'une combinaison de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie (Bos, 1998, p. 292). Du point de vue du référentiel dans le domaine de la géométrie, les mathématiciens se dotent d'une série de nouvelles propriétés. Ces nouvelles propriétés découvertes par Descartes permettent l'exploration de nouvelles solutions aux problèmes de l'époque et produisent donc de nouveaux résultats. Selon Lefebvre (1992b, p. 16), le travail de Descartes amène une « modification importante aux démonstrations : le besoin de clarté et la confiance en l'évidence conceptuelle ». L'auteur continue en spécifiant que « la confiance de Descartes est telle qu'il laisse souvent des trous dans l'exposé, énonce parfois sans démonstration, bref emporte son lecteur et se laisse peut-être lui-même emporter à l'occasion ». Les enjeux de l'époque étant liés à la découverte et à la clarté du discours, le souci de la rigueur dans les démonstrations se fera attendre jusqu'au début du 20e siècle.

Parallèlement, du côté de l'enseignement, peu après Descartes, il ne s'agit plus de tout démontrer de manière rigoureuse comme on le retrouve dans les Éléments d'Euclide, mais d'éclairer le lecteur (Barbin, 1988). D'ailleurs, vraisemblablement inspiré de Descartes, nous retrouvons dans la préface des *Éléments de Géométrie* de Clairaut (1741, p. I-II) :

> « les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Éléments ordinaires. […] Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les Commençants ».

Les esprits devenant rivés sur les méthodes mathématiques, le cinquième postulat d'Euclide (voir annexe 1) est également critiqué par la communauté des mathématiciens : il était plus compliqué, plus long et différent des autres. D'ailleurs, au tournant du 19^e siècle, Playfair en fait une traduction plus simple : « deux droites qui se croisent ne peuvent pas être toutes deux parallèles à la même droite » (Playfair, 1826, p. 23). Il y a eu plusieurs tentatives infructueuses pour tenter de démontrer ce postulat à partir des quatre premiers, jusqu'à ce Gauss, Bolyai et Lobatchevski, autour de 1830, publient le résultat de la négation du 5^e postulat, stipulant ainsi qu'il existe une infinité de parallèles à une droite passant par un point donné (Mlodinow, 2002). Des tentatives similaires avaient déjà été faites, notamment par Sacchieri (1667-1733) qui avait rejeté ces résultats, car la géométrie découverte était « trop contraire à ce que l'on obtient en géométrie usuelle » (Lefebvre, 1992a). Cherchant d'abord une contradiction, le trio Gauss, Bolyai et Lobatchevski furent surpris de voir que leur système était tout à fait cohérent : ils avaient découvert la géométrie hyperbolique s'appuyant sur un référentiel différent de celui d'Euclide (Lefebvre, 1992a). Parallèlement, Riemann, dans les années 1850, adapta le 5e postulat d'une troisième façon : aucune parallèle à une droite ne passe par un point donné. Il développa de cette façon la géométrie sphérique. Le changement d'un seul axiome dans le référentiel a ainsi amené ces deux nouvelles géométries.

S'ensuivit, vers la fin du 19e siècle, une révolution importante en mathématiques : comment distinguer le vrai du faux? Quelle géométrie (euclidienne, hyperbolique ou sphérique) est valide? Autrement dit, quel référentiel doit-on utiliser? Il semble tout à fait évident, a priori, que le 5^e postulat d'Euclide soit valide; il est le résultat de notre intuition, amené par notre vécu dans le monde factuel. Or ces deux nouvelles géométries sont aussi mathématiquement cohérentes. Nous sommes alors en pleine crise des fondements mathématiques (Lefebvre, 1992a).

Au début du 20^e siècle, Hilbert repasse au peigne fin les ouvrages d'Euclide : il conclut que ce dernier n'avait pas été suffisamment rigoureux; il lui manquait des axiomes pour être cohérent, ses objets mathématiques ne sont pas tous bien définis et plusieurs étapes dans ses démonstrations sont implicites. Selon Hilbert, pour s'assurer de la validité mathématique de son raisonnement, le mathématicien doit être rigoureux et ne rien laisser « d'évident ». Hilbert a d'ailleurs été un acteur important dans le courant formaliste qui cherchait à établir davantage la cohérence mathématique plutôt que la vérité mathématique (Lefebvre, 1992a) en priorisant la forme plutôt que le fond. Il était à la recherche d'un référentiel commun et complet à toutes les mathématiques. En 1930, le théorème d'incomplétude de Gödel met fin à cette tentative en démontrant que tout système cohérent contient des propositions indécidables. Par conséquent, il était devenu évident qu'il ne pouvait y avoir une mathématique fondatrice de toutes les autres branches et donc, qu'il ne pouvait y avoir un seul référentiel pour toute la mathématique. Malgré le soutien des Bourbaki pour l'unicité de la discipline (Guilbaud, 2015), il fallait considérer les mathématiques, au pluriel, et donc les démonstrations pouvaient être valides à partir de référentiels bien définis et distincts (Lefebvre, 1992a).

En conclusion, l'épistémologie de l'évolution du référentiel montre comment on passe d'un référentiel d'exemples illustrés à un référentiel théorique plus ou moins rigoureux selon les besoins des époques. Comment la richesse historique du référentiel et de la démonstration se reflète-t-elle dans leur enseignement et leur apprentissage à l'école d'aujourd'hui? Les sections suivantes feront état du curriculum scolaire québécois et de certaines particularités de l'enseignement de la démonstration en classe.

1.2 Le travail mathématique dans les écoles du Québec

Comme il a été vu, la démonstration a émergé d'un besoin de passer de mathématiques pragmatiques à des mathématiques théoriques, particulièrement dans les domaines de la géométrie (incommensurabilité de la diagonale du carré) et de l'arithmétique (irrationalité de $\sqrt{2}$). Aujourd'hui, la démonstration est loin d'être réservée à la géométrie et à l'arithmétique : les mathématiciens l'utilisent dans toutes les branches des mathématiques. En effet, pour s'assurer de la validité des théorèmes, il est nécessaire de conserver le caractère véridique d'une proposition à l'autre, tous domaines inclus. Ainsi, la démonstration joue un rôle suffisamment important dans la société des mathématiciens pour être encore enseignée un peu partout dans le monde. Au Québec, les élèves y sont souvent initiés en cours de géométrie puisqu'il s'agit là d'un domaine naturel pour son apprentissage comme en témoigne son émergence chez les Grecs et son épistémologie. De quelle manière l'enseignement de la démonstration est-il fait au Québec?

1.2.1 Le programme de formation et la démonstration

Avec le renouveau pédagogique des années 2000, le ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports (MELS), maintenant le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur (MEES) pour la partie relative à l'éducation, a proposé l'approche par compétences dans tous les domaines d'enseignement, du primaire au secondaire. Caron (2007), dans son analyse de la notion de compétence, conclut « qu'utiliser la compétence comme élément organisateur d'un curriculum conduit […] à viser chez l'élève l'élargissement progressif du champ de problèmes dont il peut assumer la résolution ». Ainsi, dans la logique de la théorie des situations didactiques en mathématique de Brousseau (1998), un curriculum par compétences permettrait un apprentissage plus en profondeur que l'ancien curriculum par objectifs. De cette façon, le travail mathématique des élèves, selon le MELS (2006a, 2006b), est évalué selon trois compétences distinctes :

- résoudre une situation problème;
- déployer un raisonnement mathématique;
- communiquer à l'aide d'un langage mathématique.

Chacune de ces compétences se décline en plusieurs composantes. De façon plus particulière, la deuxième compétence, *déployer un raisonnement mathématique,* sous-tend les composantes « former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques »; « établir des conjectures » et « réaliser des démonstrations ou des preuves » (MELS, 2006a, p. 245; 2006b, p. 31).

L'établissement des conjectures demande à l'élève de trouver un invariant mathématique dans certains problèmes et c'est par la démonstration ou la preuve qu'il établira le caractère de vérité de sa conjecture, qu'elle soit vraie ou fausse (MELS, 2006b). La rédaction de démonstrations est un critère d'évaluation de cette compétence (MELS, 2006b, p. 32) et se doit donc d'être enseignée. Nous comprenons qu'avec cette compétence, le MELS promeut l'importance de la démonstration. Cela n'a pas toujours été le cas : Caron et de Cotret (2007) notent une « valse-hésitation » de la mise en évidence du raisonnement déductif dans le programme de formation québécois depuis les quarante dernières années. Bien que cette hésitation ministérielle eût un impact sur l'enseignement de la démonstration selon les années, l'enseignement de définitions et de propriétés devait quand même se faire lorsque la démonstration était mise de côté dans le curriculum. En effet, même si les éléments du référentiel ne sont pas explicités au sein d'inférences, ils justifient et valident le raisonnement sous-jacent à la résolution d'un problème. Les éléments du référentiel jouent donc un rôle dans la résolution d'un problème mathématique même s'ils ne sont pas explicités par l'élève lors de son travail mathématique.

Aujourd'hui, selon le programme de formation du premier cycle du secondaire en mathématiques, « l'élève passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation problème » (MELS, 2006a, p. 240). Ce passage est déjà prévu depuis le primaire, où l'on cherche à ce que l'élève acquière « le vocabulaire propre à la géométrie et apprenne à se repérer dans l'espace, à nommer des figures planes et des solides, à décrire des classes de figures et à observer des propriétés de ces classes » (MELS, 2009, p. 14) qui sont des apprentissages préalables « à la capacité d'énoncer de nouvelles propriétés et d'utiliser des propriétés connues ou nouvelles dans la résolution de problèmes » (MELS, 2009, p. 14). Au début du secondaire, les élèves doivent ainsi changer leur mode de pensée pour utiliser utiliser autrement le référentiel théorique. Ils sont en effet maintenant amenés à se référer explicitement à des propriétés et des définitions pour justifier leur raisonnement. Dans le programme de formation de l'école québécoise, au premier cycle, le critère d'évaluation « justification congruente des étapes d'une démarche pertinente » (MELS, 2006a, p. 245) et, au deuxième cycle, le critère d'évaluation « structuration adéquate [et justification congruente] des étapes d'une preuve ou d'une démonstration adaptée à la situation » (MELS, 2006b, p. 32) témoignent de la place de la justification et, ultimement, de la démonstration dans le curriculum : elles deviennent plus importantes. Il est clair que cette dernière devient encore plus importante au deuxième cycle : en recherchant le mot « démonstration » dans le programme de formation du premier cycle, nous en trouvons seulement 5 occurrences au 1er cycle et 33 dans le programme de deuxième cycle (MELS, 2006a, 2006b). Puisque l'inférence est le processus où les propriétés et les définitions du référentiel doivent être explicitées et qu'une démonstration est composée d'un enchainement de plusieurs inférences, pouvons-nous conclure que les élèves du 2^{e} cycle doivent apprendre à utiliser de façon explicite un référentiel? Et si oui, lequel?

1.2.2 La Progression des apprentissages

Dans une volonté de communication avec les parents et les enseignants, le MEES (2016) a produit un document intitulé la Progression des apprentissages. Il s'agit de plusieurs tableaux dans toutes les matières indiquant les années où l'apprentissage des notions doit avoir lieu. Notamment, pour la géométrie, le tableau 1 de la page suivante présente les rubriques en lien avec les justifications. Notons qu'en 4e secondaire et en 5e secondaire, il existe trois séquences mathématiques : culture, société et technique (CST), technico-sciences (TS) et sciences naturelles (SN). Les différences entre les séquences sont au niveau du contenu, des approches didactique et pédagogique. De plus, certaines séquences sont des prérequis pour des programmes d'études collégiales.

L'observation de ce tableau permet de constater que le Ministère de l'Éducation demande que les élèves puissent « justifier des affirmations… ». Ces exigent la connaissance d'un référentiel et des compétences discursives particulières en lien avec les preuves et les démonstrations. Or, la Progression des apprentissages n'explicite pas de propriétés et de définitions « à enseigner » et se tient à des mentions générales, comme « rechercher, à partir des propriétés des figures et des relations, les mesures manquantes […] » (MEES, 2016, p. 31). Les manuels scolaires interprètent alors le tableau comme suit : les propriétés des figures planes, typiquement celles des triangles, des quadrilatères convexes, des polygones réguliers et du cercle relèvent du 1er cycle du secondaire (première et deuxième années); il en est de même pour les propriétés des transformations, c'est-à-dire les translations, les symétries, les homothéties et les rotations, de la construction des segments remarquables (médiane, médiatrice, bissectrice et hauteur), de la mesure de longueurs et d'aires et pour les propriétés associées aux angles, comme la somme des angles intérieurs des polygones, les angles alternes-internes, alternes-externes, correspondants et opposés par le sommet. En 3e secondaire, on aborde, en outre, l'aire latérale des solides, leurs volumes et la relation de Pythagore. En 4e secondaire, les élèves étudient les relations métriques dans un triangle rectangle, les conditions minimales de similitude et d'isométrie des triangles, la trigonométrie et les bases de la géométrie analytique (distance entre deux points, point de partage, point milieu et position relative des droites, selon la séquence). Finalement, en 5e secondaire, dans la séquence SN, les élèves sont amenés à utiliser les propriétés des vecteurs et à étudier les coniques en géométrie analytique et en TS, ils utilisent de nouvelles propriétés du cercle.

Tableau 1 : Éléments clés de la progression des apprentissages en géométrie

→ L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant. * L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire. L'élève réutilise cette connaissance.		Secondaire					
		1^er^ cycle		2^e^ cycle			
	6e	1re	2e	3e	4e	5e	
Justifier des affirmations à partir de définitions ou de propriétés de figures planes		→	*				
Justifier des affirmations à partir de définitions ou de propriétés de figures isométriques, semblables ou équivalentes, selon le cycle et l'année en cours		→	*				
Justifier des affirmations à partir de définitions ou de propriétés associées aux angles et à leurs mesures		→	*				
Justifier des affirmations relatives à des mesures de longueur		→	*				
Justifier des affirmations relatives à des mesures d'aire		→	*				
Justifier des affirmations relatives à des mesures de volumes ou de capacité				*			
Justifier des affirmations relatives							
a. à la relation de Pythagore				*			
b. aux relations métriques ou trigonométriques					*		
Démontrer l'isométrie ou la similitude de triangles ou rechercher des mesures manquantes en utilisant les conditions minimales					*		
Justifier des affirmations à partir de propriétés associées aux vecteurs							CST
							TS
						*	SN

En annexe au programme de formation, nous trouvons une deuxième liste de propriétés, appelée « Énoncés de géométrie », différente de celle trouvée dans la Progression des apprentissages. La figure 2, directement tirée de la Progression des apprentissages (MEES, 2016, p. 28), montre la seule occurrence où l'on y fasse référence. Cette deuxième liste, placée en annexe de ce mémoire (annexe 3), est constituée de définitions, d'axiomes et de propriétés (sans distinctions de nature entre les différentes propositions) et sert de référence aux enseignants dans le choix des propriétés à explorer avec les élèves. Autrement dit, cette liste peut servir d'exemples pour les enseignants et rien ne dit qu'elle doit être institutionnalisée dans son intégrité ou même utilisée pour « justifier les affirmations » présentées dans le tableau 1. Nous pouvons alors nous demander si cet ensemble de définitions, d'axiomes et de propriétés est réellement vu et utilisé en classe. Quels sont les éléments de cette liste utilisés dans les manuels et par les enseignants? Utilisent-ils aussi d'autres propriétés? Après une brève lecture des manuels scolaires utilisés dans les écoles, nous nous rendons compte que les propriétés institutionnalisées ne correspondent pas exactement avec la liste proposée dans le programme. Il en sera question dans la sous-section suivante.

9. Dégager des propriétés des figures planes à partir de transformations et de constructions géométriques

   Note : Se référer au programme de mathématique du 1er cycle du secondaire, p. 261.

Figure 2 : La Progression des apprentissages fait référence à une deuxième liste de propriétés pour le premier cycle

1.2.3 La classe et les ressources documentaires

Les manuels sont des outils très commodes pour les enseignants de mathématiques, d'autant plus qu'il en existe une variété assez importante. Ils assurent aussi une certaine homogénéité sur tout le territoire. En effet, pour l'année 2019-2020, le Ministère a approuvé les manuels de trois maisons d'édition différentes : *Chenelière Éducation*, *Les éditions CEC* et *Grand Duc* (MEES, 2019). En plus des manuels, nous retrouvons plusieurs collections de cahiers d'apprentissage utilisés en classe de mathématiques où l'on voit la maison d'édition *Guérin* s'ajouter. À la différence des manuels, ces cahiers d'apprentissage sont conçus pour une utilisation unique : les élèves écrivent directement dans les cahiers[4]. Le tableau 2 montre les différents manuels et cahiers d'apprentissage selon la maison d'édition.

Tableau 2 : Les ouvrages des différentes maisons d'édition

	Chenelière Éducation	Les éditions CEC	Grand Duc	Guérin
1er cycle	À vos maths!	Panoram@th	Perspective mathématique	
2e cycle	Intersection	Visions	Point de Vue mathématique	
Cahier d'apprentissage	Sommets	Point de Mire	Puissance	Mathématiques 3000

Chaque équipe d'auteurs des différentes collections structure ses ouvrages selon une approche pédagogique particulière et cela a un effet sur les référentiels et les démonstrations : certains consacrent un chapitre complet à la démonstration, comme *Point de Vue mathématique* (Guay et al., 2009, p. 138 à 156), alors que d'autres l'utilisent comme outil de résolution de problème sans plus d'explication, comme dans *Intersection*, où un tableau de démonstration apparaît pour la première fois dans une activité d'exploration (Boucher et al., 2009c, p. 12). Par conséquent, on suppose que l'enseignant doit donner des explications, à défaut, l'élève doit se débrouiller par lui-même. De plus, en comparant la liste de propriétés proposées au 1er cycle par le MEES avec celles des ouvrages scolaires du 1er cycle, nous nous rendons compte qu'il n'y a pas concordance entre les deux. Les manuels et les cahiers d'apprentissage n'exploitent pas toutes les propriétés proposées : bien que l'on en trouve plusieurs utilisées explicitement, d'autres sont parfois amenées de manière indirecte ou implicite sous forme d'exercices et d'autres sont même absentes.

Inversement, nous retrouvons, dans les manuels et les cahiers d'apprentissages, des propriétés qui ne figurent pas dans les listes du ministère : ainsi, dans *Perspective mathématique*, on utilise la propriété « *si l'on relie trois sommets non consécutifs d'un hexagone régulier, on obtient un triangle équilatéral* » (Guay et al., 2006a, p. 462). Par ailleurs, les ouvrages pédagogiques du 2e

[4] Se référer au glossaire à l'annexe 1 pour la distinction entre les termes liés aux ouvrages pédagogiques dans ce mémoire.

cycle font rarement un rappel des propriétés vues au 1er cycle, en laissant ainsi la responsabilité à l'enseignant ou à l'élève. Caron et Pelczer remarquent même « qu'il n'est pas étonnant de revenir régulièrement sur les mêmes concepts et d'en changer la définition selon le degré scolaire » (Caron et Pelczer, 2016, p. 78). Ces auteurs notent aussi qu'il arrive d'avoir deux définitions différentes pour les mêmes objets dans le même ouvrage. Puisque les manuels scolaires et le programme ne présentent pas les mêmes propriétés, comment savoir si les enseignants utilisent une liste ou l'autre, ou, même, une troisième liste établie par eux-mêmes?

En ce moment, à notre connaissance, il n'existe aucune étude portant sur les référentiels utilisés par les enseignants au secondaire. Nous pensons qu'en pratique, les enseignants introduisent d'autres propriétés, que ce soit pour compléter le référentiel déjà en place et qui pourrait être jugé incomplet, pour s'assurer de la cohérence des apprentissages ou même pour faciliter le travail mathématique des élèves.

1.3 L'enseignement des référentiels

À la section précédente, nous avons montré que le référentiel dépend de la source documentaire choisie par l'équipe d'enseignants : les définitions et les propriétés du programme et des ouvrages pédagogiques ne sont pas exactement les mêmes. Puisque les documents ministériels précisent le « quoi » enseigner et que « dans tous les énoncés faisant appel à la justification, les propriétés utilisées ont été dégagées par des explorations ou ont été démontrées » (MEES, 2016, p. 29), nous sommes en mesure de nous demander quelles sont les modalités d'institutionnalisation des référentiels. Comme il n'existe pas d'étude sur le sujet, nous allons présenter différentes modalités que nous retrouvons dans les manuels scolaires, et que nous transposerons à ce qui peut se faire en classe. Tout d'abord, la structure des chapitres des manuels de mathématiques utilisés au secondaire est assez semblable d'une maison d'édition à l'autre : activités de découvertes, notes de cours puis exercices. En conséquence, le référentiel de chaque chapitre devrait se retrouver dans les notes de cours et donc précéder les exercices. Ainsi, l'apprenant utilise les propriétés vues précédemment pour résoudre les problèmes demandés. La plupart du temps, ces propriétés sont directement données dans les notes de cours sans être démontrées. Or, il arrive parfois qu'un problème demande l'utilisation d'une nouvelle propriété ou d'une définition alors inconnue de l'élève. Dans ce cas, les auteurs des manuels vont alors l'introduire dans un encadré à côté de l'énoncé du problème. Au fur et à mesure de la résolution des problèmes, le référentiel de l'élève va s'accroître grâce à ces nouvelles propriétés. C'est notamment le cas du problème de la figure 3 tiré du manuel *Perspective mathématique* (Guay et al., 2005a, p. 323) où le but est de dégager une propriété du point de rencontre des médiatrices, à savoir s'il est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.

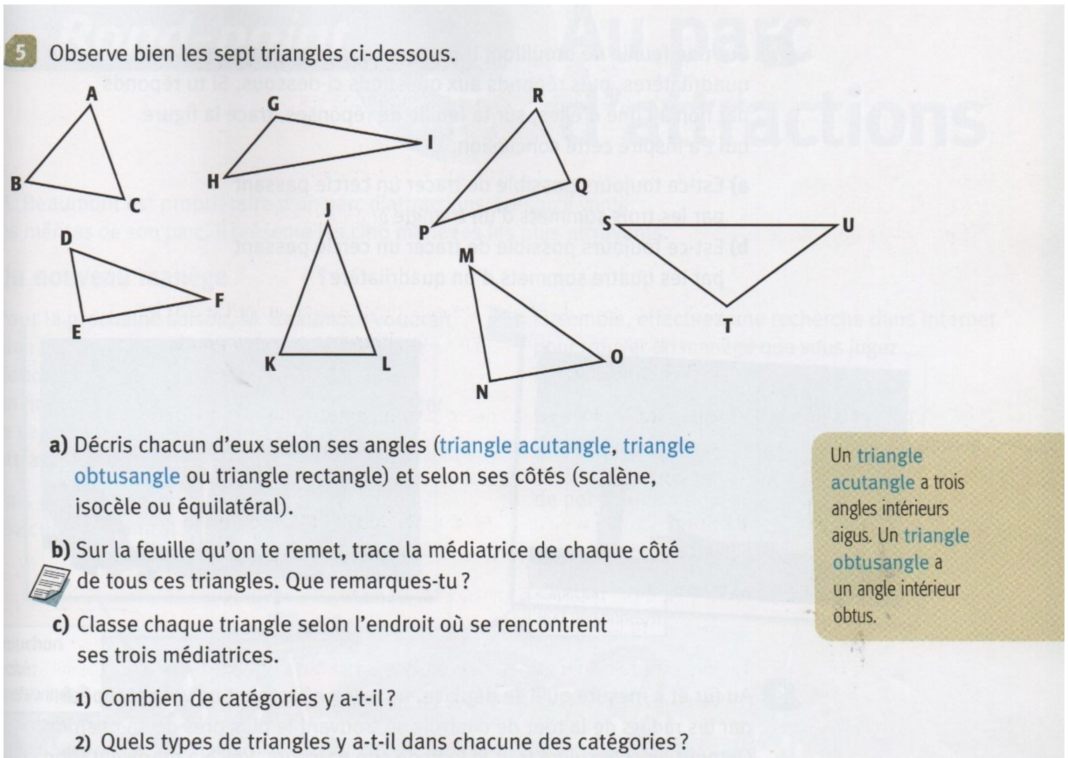


Figure 3 : Un problème de géométrie en 1re secondaire dans Point de Vue.

Pour ce faire, le problème amène d'abord l'élève à classer les triangles selon leurs côtés et leurs angles pour ensuite induire une relation avec l'emplacement du point de rencontre. Or, jusqu'à maintenant, l'élève n'a pas encore vu les définitions d'un triangle acutangle ou obtusangle. Les raisons qui amènent les auteurs de ce manuel à introduire ces deux définitions au cours des exercices nous sont inconnues, mais il est possible de croire que leur intention était de ne pas surcharger l'élève au moment des notes de cours ou, au contraire, de créer le besoin épistémique de ces définitions.

Ces nouvelles définitions sont immédiatement utiles, voire nécessaires, pour répondre aux questions posées. De façon semblable, dans certains manuels, les élèves sont amenés à démontrer une nouvelle propriété qui sera utile à la résolution d'un problème ultérieur, ou encore, comme dans l'exemple précédent, les élèves sont amenés à formuler une conjecture qui ne sera, en revanche, pas démontrée. Le besoin de ces nouvelles propriétés démontrées peut aussi être immédiat lorsqu'elles sont réutilisées, ou au moins, elles auront un sens plus riche pour l'élève que les propriétés données et non démontrées dans le manuel au début d'un chapitre. Nous pouvons résumer la provenance des éléments du référentiel de cette manière : propriétés et définitions présentées au début du chapitre; propriétés et définitions données pendant les exercices et celles démontrées par l'élève pendant les problèmes. Nous utiliserons le concept d'îlot déductif de Choquet (1964) pour décrire ces réseaux déductifs : de premières propriétés sont acceptées en raison de leur caractère intuitif et d'autres sont ensuite démontrés, formant ainsi un système déductif local. Un îlot déductif est ainsi constitué d'un référentiel et de problèmes que le référentiel permet de résoudre. Notons que dans un cadre scolaire, un enseignant peut soit choisir d'abord des problèmes et ensuite dégager le référentiel nécessaire à la résolution de ces problèmes, soit choisir en premier les éléments du référentiel et par la suite sélectionner des problèmes correspondant au référentiel choisi, soit utiliser une démarche à mi-chemin entre ces deux extrêmes.

À la lumière des îlots déductifs, nous décomposerons le référentiel en deux composantes : 1) le « référentiel initial », composé des définitions et des propriétés acceptées d'emblée comme prémisses de l'îlot et celles démontrées, mais qui précèdent les problèmes et 2) le « référentiel construit » où les propriétés et définitions sont « construites » pendant la résolution d'un problème de preuve, les rendant immédiatement utiles à la résolution d'exercices subséquents. Le référentiel initial est typique du travail mathématique de l'expert : ce dernier se sert d'axiomes et de théorèmes bien établis a priori pour démontrer un nouveau résultat. Comme nous l'avons constaté dans certains manuels, l'enseignement du référentiel amène une autre réalité que celle de l'expert : celle du référentiel construit. Quelles en sont les conséquences? D'abord, la construction des propriétés au fil d'un même chapitre donne un volet dynamique au référentiel. Ce dernier peut continuer d'évoluer après sa première institutionnalisation, permettant à l'élève d'acquérir de nouvelles manières de résoudre les problèmes. Ensuite, le référentiel construit peut amener une propriété qui était sujette dans un premier temps à une démonstration. Il ne s'agit plus de demander aux élèves de tout démontrer : ils peuvent utiliser cette nouvelle propriété qui englobe toute une démonstration. Au début de l'apprentissage de la démonstration, nous pouvons imaginer que l'enseignant demande à ses élèves chaque étape d'une démonstration en utilisant le référentiel initial. Après un certain temps, les élèves deviennent plus à l'aise et l'enseignant peut alors introduire de nouvelles propriétés, qui permettent de faire des raccourcis dans les démonstrations : la résolution est plus rapide et plus efficace, ce qui permet aux élèves de consacrer plus d'énergie à réfléchir sur un problème plus difficile. Par exemple, l'élève peut dans un premier temps démontrer qu'un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle et dans un deuxième temps, utiliser cette propriété, sans en refaire la démonstration, afin de résoudre un autre problème. Du moment que de telles propriétés sont acceptées, comment peut-on s'assurer de la légitimité du référentiel?

D'un point de vue mathématiques, la légitimité du référentiel au sein d'un îlot déductif est assurée, bien que son domaine de validité en soit restreint. En effet, puisque l'on y accepte de premières propriétés et que les autres en découlent en suivant les règles de déductions, le tout est valide. En revanche, dès que l'on sort d'un îlot déductif, il faut porter une attention particulière pour s'assurer que les propriétés puissent être transférées, notamment en s'assurant que les premières propriétés acceptées de l'îlot font partie d'un domaine plus large, comme celui de la géométrie plane (ce qui est majoritairement le cas des propriétés vues au secondaire). D'un point de vue didactique, la légitimité d'un référentiel peut être, comme le mentionnent Caron et Pelczer (2016), au niveau de son institutionnalisation, des liens faits entre ses composantes et de leurs démonstrations. Or, l'apprentissage des mathématiques étant différent de la construction des mathématiques (Brousseau, 2004), nous considérons la légitimité d'un référentiel selon sa capacité à permettre la résolution des problèmes de l'îlot déductif. Si un référentiel ne permet pas de résoudre un ou plusieurs problèmes donnés par l'enseignant, alors ou bien le référentiel est incomplet, ou bien le ou les problèmes devraient faire partie d'un autre îlot déductif. Notons que le référentiel construit pendant la résolution d'un problème permet de compléter au fur et à mesure les éléments manquants du référentiel.

Finalement, il a été montré précédemment que le référentiel est dynamique selon l'année scolaire et la source documentaire utilisée. En distinguant le référentiel initial d'un îlot déductif et le référentiel construit au fur et à mesure de la résolution des problèmes, nous lui ajoutons un troisième aspect dynamique : celui de sa construction. Cette construction du référentiel peut amener l'élève à utiliser des propriétés qui englobent une démonstration. À la section 1.1, nous avons également vu que la rigueur mathématique était importante pour Euclide qui définissait tout d'avance, alors que Descartes laissait volontairement tomber des étapes « évidentes » dans ses démonstrations et que finalement Hilbert était encore plus rigoureux que ne l'était Euclide. Il existait, et existe encore, tout un enjeu sur les implicites utilisés dans l'écriture d'une démonstration. Quels sont ces implicites? Pourquoi existent-ils? La prochaine section tentera de donner de premiers éléments de réponses à ces questions.

1.4 L'implicite dans la démonstration

Lorsque deux personnes argumentent, elles utilisent d'abord un discours en langue naturelle pour exprimer leurs arguments (Duval, 1995). Pour que cette démarche discursive soit signifiante, les phrases doivent être liées entre elles par une idée commune sous-jacente. Cette liaison n'est pas toujours explicitée (Duval, 1995). Prenons par exemple les phrases « Le courant était fort. Je me suis presque noyé ». La liaison de cause à effet est ici implicite, il n'y a pas de connecteur entre les deux, mais l'auditeur peut en comprendre le sens en associant les phrases avec le mot « eau » qui n'est pas prononcé. Dans un discours spontané, des implicites se font constamment et sont même nécessaires, en particulier pour éviter une lourdeur excessive. Lorsque la démarche discursive a lieu dans le domaine des mathématiques, toutes sortes de symboles (comme « $+$ », « $\sum$ », « $\equiv$ », etc.) et de représentations (comme une équation, un graphique, une figure, etc.) s'ajoutent à la langue naturelle pour composer le discours. Dans cette section, il sera question des implicites dans la forme et le contenu de la démonstration.

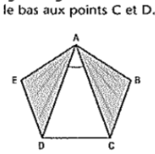
1.4.1 La démonstration en tableau à deux colonnes

Weiss et al. (2009), dans un article de 2009, soulignent l'habitude aux États-Unis d'utiliser des tableaux en deux colonnes comme présentation imposée à l'apprentissage de la démonstration. Au Québec, Tanguay (2004) mentionne également cette coutume dans ses travaux où il analyse un problème de démonstration d'un manuel de mathématiques. D'ailleurs, la lecture des manuels scolaires d'aujourd'hui amène effectivement à ce même constat. Tanguay, en analysant un exercice, ajoute que « l'identification des [antécédents] et des [conséquents] reste partout implicite. C'est le cas des [antécédents] de la première inférence, dont il n'est pas dit que l'élève les identifiera » (Tanguay, 2004, p. 6). L'écriture d'une démonstration en deux colonnes amène une part importante de sous-entendus et peut causer des difficultés aux élèves lorsqu'utilisée de façon rigide (Tanguay, 2005; Weiss et al., 2009). En effet, nous avons consulté les corrigés de plusieurs manuels scolaires pour vérifier comment ils géraient cette structure binaire alors que la démonstration a une structure ternaire. La figure 4 est un exemple de solutions proposées pour deux problèmes du manuel *Visions* (Boivin et al., 2009). Dans celui-ci, on voit l'utilisation d'une première propriété, sans spécifier l'antécédent utilisé (à gauche) alors qu'à droite, à un autre exercice, l'antécédent est spécifié dans la première ligne. Autrement dit, les antécédents des premières inférences dans le problème de gauche sont absents, tandis qu'à un autre exercice à droite, les antécédents des premières inférences sont explicités dans la colonne « justification ».

4 La porte d'entrée d'un chapiteau de cirque a la forme du pentagone régulier ci-dessous. Les rideaux s'ouvrent à partir du point A et sont attachés dans le bas aux points C et D.

a) Démontrez que les triangles ADE et ABC sont isométriques.

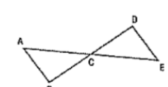
b) Démontrez que l'angle CAD mesure 36°.



4. a)

AFFIRMATION	JUSTIFICATION
$\overline{AE} \cong \overline{AB}$	Dans un polygone régulier, tous les côtés sont isométriques.
$\overline{ED} \cong \overline{BC}$	Dans un polygone régulier, tous les côtés sont isométriques.
$\angle AED \cong \angle ABC$	Dans un polygone régulier, tous les angles intérieurs sont isométriques.
$\Delta ADE \cong \Delta ACB$	Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques (CAC).

7 Dans une forêt, on a aménagé deux sentiers de ski de fond. Sachant que le point C est situé au milieu des segments AE et BD, démontrez que les segments AB et DE sont parallèles.



7.

Hypothèse :	Le point C est le point milieu des segments AE et BD.
Conclusion :	$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

AFFIRMATION	JUSTIFICATION
$\overline{AC} \cong \overline{CE}$	Le point C est le point milieu du segment AE, par hypothèse.
$\angle ACB \cong \angle DCE$	Ces angles sont opposés par leur sommet, donc isométriques.
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$	Le point C est le point milieu du segment BD, par hypothèse.
$\Delta ABC \cong \Delta CDE$	Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques (CAC).
$\angle BAC \cong \angle CED$	Dans des triangles isométriques, les angles homologues sont isométriques.
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$	Si des angles alternes-internes sont isométriques, les droites coupées par la sécante sont parallèles.

Figure 4 : Deux corrigés d'exercices de démonstration en deux colonnes

Notons que pour les deux problèmes, à partir de la quatrième inférence, l'antécédent est recyclé de l'affirmation précédente. Il n'y a pas plus d'effort d'éclaircissement dans ce manuel (ni dans les autres d'ailleurs) pour expliciter les moments où les antécédents ne sont pas nécessaires ou quand ils le sont. L'élève doit donc, d'une façon ou d'une autre, deviner ce qu'il doit produire. Il est concevable que les enseignants aient également recours à ce genre de raccourci dans leur classe, que ce soit de façon consciente ou non. De plus, pour poursuivre l'analyse du corrigé d'un problème semblable, Tanguay indique que « les sous-entendus, omissions, regroupements et autres raccourcis de rédaction sont inévitables en pareils cas, pour peu qu'on veuille éviter à l'élève un texte étourdissant, indigeste par ses redondances et sa surenchère de précisions » (Tanguay, 2004, p. 79). Cet auteur mentionne un élément important pour bien comprendre la raison de ces sous-entendus : ils sont nécessaires pour arriver à lire et à écrire un texte démonstratif. Même si la présentation en deux colonnes peut causer des difficultés aux élèves pour comprendre ce qui doit être explicité, elle peut aussi aider les élèves à lire et comprendre les démonstrations.

La présentation en deux colonnes est un premier élément ayant une conséquence sur les implicites d'une démonstration. Pour mieux comprendre cet enjeu, attardons-nous sur des raisons possibles poussant les enseignants à les utiliser.

1.4.2 Les raccourcis inférentiels

Tout comme les mathématiciens, les enseignants ne possèdent pas tous la même idéologie des mathématiques et de l'enseignement. Ceci se reflète dans leur classe : les méthodes et les objets d'enseignement varient malgré le curriculum défini par le ministère, comme vu dans les sections précédentes. Il s'agit d'un phénomène bien connu dans l'enseignement de la démonstration, comme en témoigne l'article de Lebaud (2017) à propos du contexte scolaire français :

> Les conceptions des enseignants de mathématiques sur la démonstration sont très diverses : les uns font un texte de français sans aucun symbole, les autres un schéma de texte avec flèches ou accolades; certains écrivent tous les détails, d'autres ne mettent que l'essentiel à leurs yeux; les propositions ne sont pas toujours citées dans l'ordre; des commentaires heuristiques sont parfois ajoutés. Ce qui semble certain c'est que les élèves préfèrent les démonstrations qui ressemblent à celles que leur enseignant leur propose. (Lebaud, 2017, p. 2)

Dans cet extrait, Lebaud soulève aussi le point de la variation des détails d'un enseignant à l'autre. Lorsque Tanguay discute des sous-entendus (voir sous-section précédente), il s'agirait alors d'un phénomène qui dépend de l'enseignant. Bien qu'il soit possible de croire que ces différences sont liées au niveau de rigueur mathématique visée par les enseignants, d'autres phénomènes ont vraisemblablement un rôle à jouer. En effet, les raisons de n'écrire que l'essentiel d'une démonstration peuvent être d'ordre pédagogique : expliciter absolument tous les détails rend une démonstration lourde, difficile à lire et à comprendre. Balacheff et Boy de la Tour (2019) avancent même que certains raccourcis sont inévitables dans l'écriture d'une démonstration :

> when students propose a proof, as well as teachers in front of their class, they are supposed to find the right balance between what must be made explicit and what is tacitly accepted. This does not mean a lack of rigor or a tolerance towards vague approximation it is just a property of human communication which applies to mathematics as it does to other domains: a mathematical proof is a discourse which should be both convincing and meaningful. Indeed, along its history mathematics has framed its discourse and established a standard centered on formalization as a means to ensure rigor and sustainable validity of its outcomes. But as Bourbaki, the paragon of formalism, acknowledged it, this mathematical discourse remains "naïve" insofar as it includes natural language and necessarily admits some shortcuts in proofs. (Balacheff et Boy de la Tour, 2019, p. 357)

Il y a donc assurément des raccourcis dans une démonstration, que ce soit en raison de la structure adoptée, de sa lisibilité ou de la langue naturelle qui les engendre obligatoirement. Comme ces étapes implicites ou ces sous-entendus touchent directement les inférences d'une démonstration, nous les appellerons des *raccourcis inférentiels*. À titre d'exemple, le manuel *Clicmaths* pour la 5^{e} année du primaire et *Perspective mathématique* mathématique de la 1re secondaire ont les mêmes auteurs, proposent le même problème, présenté à la figure 5, mais proposent des solutions différentes dans leur guide de l'enseignant (Guay et al., 2003, 2005b).

Comme solution, dans Clicmaths, les auteurs spécifient d'abord que les quatre segments sont des rayons de cercles, puis en déduisent les isométries en utilisant la propriété que tous les rayons d'un cercle sont isométriques. En revanche, dans *Perspective mathématique*, ces mêmes auteurs

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé deux cercles, l'un de centre A, l'autre de centre B. Les deux cercles se croisent en C et D. Détermine de quel type de quadrilatère est le polygone ADBC. Justifie ta réponse.

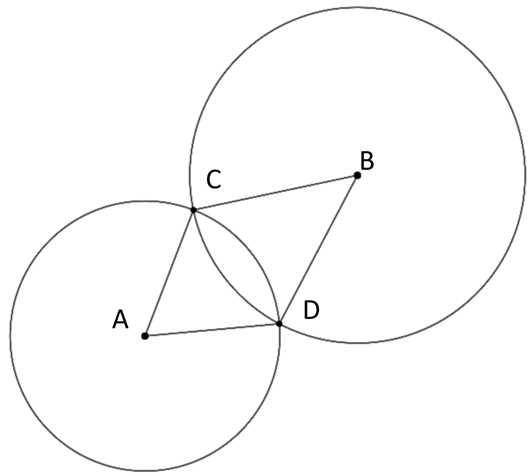


Figure 5 : Problème de type « déterminer la nature d'un quadrilatère ». Tiré de (Guay et al., 2005b)

ne spécifient pas la propriété des rayons et passent directement du fait que les segments sont des rayons aux isométries. Nous dirons que la première solution a un haut niveau de granularité : on y explicite chaque étape en prenant soin de ne laisser aucun sous-entendu. La deuxième solution a un niveau de granularité plus bas : on tolère et encourage même certains raccourcis dans la résolution du problème. Le niveau de granularité se retrouve donc sur un spectre, car même cette deuxième solution n'est pas à l'extrémité inférieure : une troisième pourrait donner directement la réponse sans aucune étape intermédiaire, elle aurait un niveau de granularité plus bas que les deux premières. De la même manière, chaque enseignant utilise un certain niveau de granularité qui est influencé par son idéologie mathématique, mais il peut aussi être influencé par les forces et les difficultés des élèves de la classe. Un enseignant peut décider d'axer la rédaction des démonstrations en classe sur l'efficacité (donc certains implicites) pour en faciliter la compréhension par des élèves « moyens » ou « faibles », alors que dans une classe « forte », le même enseignant peut exiger plus de détails pour atteindre un niveau de rigueur plus élevé. Le niveau de granularité peut également être influencé par le savoir en jeu : un enseignant peut demander des détails à ses élèves de 1re secondaire, détails qu'il sautera rendu en 4e secondaire, car il considèrera alors que le savoir est acquis.

Les élèves devront donc, à chaque niveau, voire au sein de la même année scolaire, deviner en quelque sorte le niveau de granularité attendu par l'enseignant. Ce jeu est orchestré par l'équilibre entre les responsabilités réciproques de l'enseignant et de l'élève. En didactique des mathématiques, ces responsabilités sont à la base du concept de contrat didactique (Brousseau, 1998). Ce contrat est principalement implicite et n'est pas signé par les parties : ce sont plutôt les habitudes de l'enseignant et des élèves qui le dictent. Ainsi, les raccourcis inférentiels utilisés ou acceptés par un enseignant font partie de ce contrat didactique. Mais quel est le rôle du référentiel dans ces raccourcis inférentiels? Puisque le référentiel contient les propriétés et les définitions servant de règle d'inférence, elles ont un rôle important dans ces raccourcis. Les propriétés et les définitions construites sont parfois des propriétés qui visent à être efficaces lors de l'écriture de la démonstration : elles permettent de faire plusieurs étapes en une seule. Même les propriétés les plus communes sont dans les faits des raccourcis. Pensons à la relation de Pythagore qui a été démontrée après un tome complet par Euclide. Utiliser la relation de Pythagore au lieu d'en faire la démonstration à chaque fois relève donc d'un raccourci inférentiel.

1.5 L'objectif général de recherche

La réalisation de preuves ou de démonstrations en géométrie exige la connaissance d'un référentiel qui permet à celui qui démontre, enseignant ou élève, de justifier et de légitimer ses inférences. Or, dès que l'on s'interroge sur les référentiels qui sont effectivement élaborés dans les classes, on se rend compte que les modes d'élaboration sont assez variés. L'épistémologie de la démonstration nous montre l'évolution du référentiel des mathématiciens qui était d'abord composé d'exemples illustrés puis composés de définitions et de propriétés théoriques amenant à chaque fois de plus en plus de propriétés. Ce survol nous montre aussi la variabilité du niveau de la rigueur mathématique selon l'idéologie et les problèmes de chaque époque. Aujourd'hui, le programme de formation et les manuels scolaires présentent plusieurs listes de propriétés à enseigner. Nous croyons que, dans le milieu scolaire, les enseignants y ajoutent des propriétés et des définitions. De façon plus précise, nous retrouvons dans les manuels et les autres ouvrages pédagogiques des îlots déductifs où les propriétés et définitions du référentiel sont soit introduites d'emblée (référentiel initial), soit construites en même temps que l'élève résout les problèmes (référentiel construit). Ces différentes modalités ont des conséquences directes sur l'apprentissage et sur les implicites dans la présentation de la démonstration. De plus, l'idéologie des enseignants a aussi un impact direct sur les sous-entendus d'une démonstration et les raccourcis inférentiels tolérés, voire privilégiés. Il peut aussi y avoir des sous-entendus en raison du choix de l'enseignant dans la forme du texte démonstratif et du souci de s'assurer de l'efficacité de lecture et d'écriture selon le niveau des élèves. Nous avons donc des référentiels dynamiques où l'on retrouve toutes sortes de raccourcis. Conséquemment, notre recherche aura pour but de dégager les référentiels et l'usage des raccourcis inférentiels dans le système scolaire québécois.

Une telle étude sur les référentiels pourra autant servir à la communauté des didacticiens comme base à d'autres recherches qu'aux enseignants pour la création de séquences didactiques en géométrie. De façon plus précise, l'étude sera directement utile à l'implémentation d'un référentiel au sein de logiciels tuteurs en démonstration, comme QEDX (Font et al., 2019; Font et al., 2020; Leduc, 2016; Tessier-Baillargeon, 2016) développé par l'équipe Turing de l'Université de Montréal.

2 Le cadre théorique

Ce chapitre précisera les considérations théoriques utiles qui vont nous permettre de dégager les référentiels et les raccourcis inférentiels utilisés par des enseignants de mathématiques du secondaire. Dans un premier temps, nous rappellerons la définition des paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak. Ensuite, nous identifierons les concepts utiles de la théorie des Espaces de Travail Mathématique en axant davantage nos propos autour de la démonstration. Enfin, nous donnerons des précisions sur les raccourcis inférentiels et les besoins des agents tuteurs. Finalement, nous terminerons ce chapitre par une synthèse et nos questions spécifiques de recherche.

2.1 Les paradigmes géométriques

Houdement et Kuzniak (1999a, 1999b, 2006) font la constatation d'une rupture paradigmatique en géométrie entre les cycles scolaires et du fait que les élèves et les enseignants se retrouvent souvent implicitement dans des paradigmes différents. La notion de paradigmes est ici utilisée dans le sens donné par Kuhn (1972), pour qui un paradigme « désigne, dans son aspect global, l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème » (Houdement et Kuzniak, 2006). De plus, le terme paradigme est aussi utilisé, dans un sens plus local, pour « les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global » (Houdement et Kuzniak, 2006). L'épistémologie du système de référence de la géométrie présenté à la section *1.1 Le travail du mathématicien* met de l'avant les trois différents paradigmes de la géométrie découlant des travaux de Houdement et Kuzniak.

Le premier paradigme, la géométrie I (GI), dite « géométrie naturelle », se fonde sur le sensible comme le faisaient les Égyptiens et Mésopotamiens. En s'appuyant sur Gonseth (1945), la qualification de « naturelle » a été choisie pour refléter sa relation avec le réel. Cette géométrie « correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas » (Houdement et Kuzniak, 2006). Par exemple, un arbre sur un plan peut devenir un point ou un cercle. C'est ensuite la perception et l'expérience concrète, comme le pliage, le traçage ou la mesure à l'aide d'une règle qui prime. Dans ce sens, l'utilisation d'artefacts[5] comme moyens de justification ou de validation relève de ce paradigme. En GI, le raisonnement s'appuie justement sur une expérience concrète.

Le deuxième paradigme, la géométrie II (GII), dite « géométrie axiomatique naturelle », se fonde sur les lois hypothético-déductives comme établies par les Grecs de l'Antiquité. Cette géométrie se fonde sur un système axiomatique aussi précis que possible, mais partiel. La syntaxe des axiomes est ici liée à la sémantique qui renvoie encore à la réalité. C'est pour cette raison que l'adjectif « naturelle », tel qu'utilisé par Gonseth (1945), est conservé pour cette géométrie. Les schémas accompagnant les problèmes de ce paradigme viennent aider au raisonnement, mais, contrairement à ce qui était accepté en géométrie I, ils ne servent pas de justification ou de validation. Autrement dit, une justification telle que « ça se voit sur le dessin » relèverait davantage de la géométrie I, alors que la justification « un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle » relève de la géométrie II. Dans le contexte scolaire, si la plupart des problèmes de constructions résolus à l'aide d'une règle graduée, d'une équerre ou d'un rapport d'angle relèvent de la géométrie I, ceux-ci sont souvent résolus en géométrie II en n'utilisant que la règle non graduée et le compas. Les constructions à l'aide de ces deux seuls instruments demandent un plus grand raisonnement basé sur un référentiel de propriétés et définitions. La plupart des îlots déductifs relèvent donc de cette géométrie.

Le troisième paradigme, la géométrie III (GIII), dite « géométrie axiomatique formaliste », a commencé par la géométrie analytique de Descartes et a pris de l'ampleur à la suite de la découverte des géométries non euclidiennes. Le système axiomatique est complet et n'est plus fondé sur le sensible. C'est notamment le cas pour l'algèbre linéaire où les figures ne sont plus nécessaires : l'arsenal algébrique est suffisant à la fois pour la compréhension et pour la résolution dudit problème. Cette géométrie, privilégiée par les mathématiciens professionnels, rend notamment accessibles des problèmes de dimensions supérieures.

Les travaux de Gauthier (2015) sont un exemple d'application de ces paradigmes à l'étude du travail des enseignants dans le contexte scolaire du secondaire au Québec. Ceux-ci montrent que

[5] La notion d'artefact est expliquée à la section 2.2.2 La genèse instrumentale.

non seulement que les problèmes proposés par des manuels scolaires de première secondaire sont constamment en oscillation entre les paradigmes de la géométrie I et la géométrie II, mais aussi que cette oscillation est présente dans les discours des enseignants : ils ne sont pas clairs avec les paradigmes dans lesquels ils travaillent ou ceux avec lesquels ils demandent à leurs élèves de travailler. Les travaux de Tanguay (2000), bien qu'antérieurs à la dernière réforme du système scolaire, allaient déjà dans le même sens. Tanguay n'utilisait pas la notion de paradigmes, mais l'auteur a noté que la majorité des problèmes relevaient plutôt du domaine du sensible, particulièrement au début du secondaire, alors que la proportion de ces problèmes tentait de s'équilibrer avec les problèmes hypothético-déductifs vers la fin du secondaire. À la suite de cette recherche, Tanguay et Geeraerts (2012) proposent le paradigme du « physicien-géomètre » pour pallier la rupture entre GI et GII qui avait déjà été notée par plusieurs auteurs (Houdement et Kuzniak, 2003; Parzysz, 2006; Tanguay, 2002). À la manière de la science expérimentale en physique, pour leur paradigme, Tanguay et Geeraerts proposent de construire les définitions avec les élèves (au lieu de les donner) et de travailler d'abord les propriétés de façon inductive, notamment à l'aide de la mesure, pour ensuite passer au mode hypothético-déductif. Cette géométrie aurait ainsi pour but d'harmoniser la transition entre la géométrie de la perception (GI) de celle de la géométrie naturelle (GII). Le côté expérimental de cette géométrie concorde d'ailleurs avec les résultats de recherches d'Ouvrier-Buffet (2013) qui s'est intéressée à la construction de nouvelles définitions par les mathématiciens experts. Dans son état de l'art sur le sujet, cette auteure met en évidence la double implication sous-jacente à la définition : un objet est défini par ses caractéristiques (objet $\Longrightarrow$ caractéristiques) et l'ensemble de ces caractéristiques définit un seul objet (caractéristiques $\Longrightarrow$ objet) (Ouvrier-Buffet, 2003).

Le matériel documentaire sur lequel nous baserons notre recherche devrait ainsi se situer entre GI et GII, rejoignant possiblement le paradigme proposé par Tanguay et Geeraerts. En lien avec la notion de paradigme, le modèle détaillé à la section suivante permet de mettre en lumière le travail mathématique fait par un individu, plus particulièrement, dans notre cas, par un élève ou par un enseignant.

2.2 Les espaces de travail mathématique

Suivant leurs travaux sur les paradigmes, Houdement et Kuzniak ont élaboré le cadre des Espaces de Travail Géométrique (Houdement et Kuzniak, 2006) qui donnera naissance au modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011; Kuzniak et Richard, 2014). Ce modèle a l'avantage d'être adaptable, c'est-à-dire que ses composantes sont présentées comme un squelette où certaines théories en apportent la chair et qu'il est possible d'habiller selon la question de recherche et la tâche demandée (Richard et al., 2019). Au départ, Kuzniak définit un espace de travail comme « un environnement organisé pour permettre le travail des personnes résolvant des problèmes […]. Les problèmes ne font pas partie de l'espace de travail, mais ils en sont la raison d'être et aussi l'activateur » (Kuzniak, 2011). Par la suite, le sens « d'environnement organisé » a été prolongé en tant que système d'activités (Kuzniak et Richard, 2014). Nous parlons donc d'espace de travail lorsqu'un individu résout un problème, l'espace étant à la fois l'espace réel immédiat, comme le pupitre d'un élève et les objets qui s'y trouvent, « l'espace mental » de l'individu et les systèmes d'activités résultant de la résolution du problème. Néanmoins, l'espace de travail mathématique en tant que système d'interactions est un modèle qui permet de rendre compte du travail mathématique réalisé au cours de tâches, de situations et de problèmes. Un problème sous-tend donc un espace de travail, qui existera lorsqu'un individu se mettra à le résoudre. Kuzniak différencie trois types d'ETM : l'ETM de référence, l'ETM idoine et l'ETM personnel. Le premier, l'ETM de référence, est l'espace de travail qui serait engendré par un mathématicien professionnel (Kuzniak et Richard, 2014). Le deuxième, l'ETM idoine, est organisé par l'enseignant en fonction du projet éducatif et de la réalité des élèves. Kuzniak le réfère « à cet état intermédiaire de transmission et de médiation du savoir où une tension existe entre les attentes du professeur et la redéfinition de la tâche pour avancer dans la constitution du travail personnel des élèves » (Kuzniak, 2019, p. 31). Le troisième, l'ETM personnel, réfère à l'ETM réellement engendré par la personne (l'enseignant ou l'élève) qui résout le problème (Houdement et Kuzniak, 2006; Kuzniak et Richard, 2014). L'idée de l'interaction entre le problème et l'apprenant rappelle l'interaction indissociable sujet $\leftrightarrow$ milieu de Brousseau (1998), où le déséquilibre dans l'interaction est producteur de connaissance nouvelle. Un ETM repose de ce fait sur deux plans : le plan épistémologique et le plan cognitif. Le premier est de nature purement mathématique et « va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique » (Kuzniak, 2011,

p. 14) alors que le deuxième est axé sur le sujet et son appropriation des connaissances mathématiques dans sa pratique de la discipline (Kuzniak et Richard, 2014). La genèse globale de l'ETM, en lien avec un problème donné, implique trois différentes genèses (la genèse sémiotique, la genèse instrumentale et la genèse discursive) illustrées par la figure 6, qui relient ses deux plans et qui ne sont pas forcément indépendantes les unes des autres (Kuzniak, 2011). D'ailleurs, le processus de résolution d'un problème peut se faire suivant une ou plusieurs genèses et un même problème peut activer des genèses différentes selon l'individu, comme en témoigne l'étude récente de Michot auprès d'élèves du primaire (Michot, 2018).

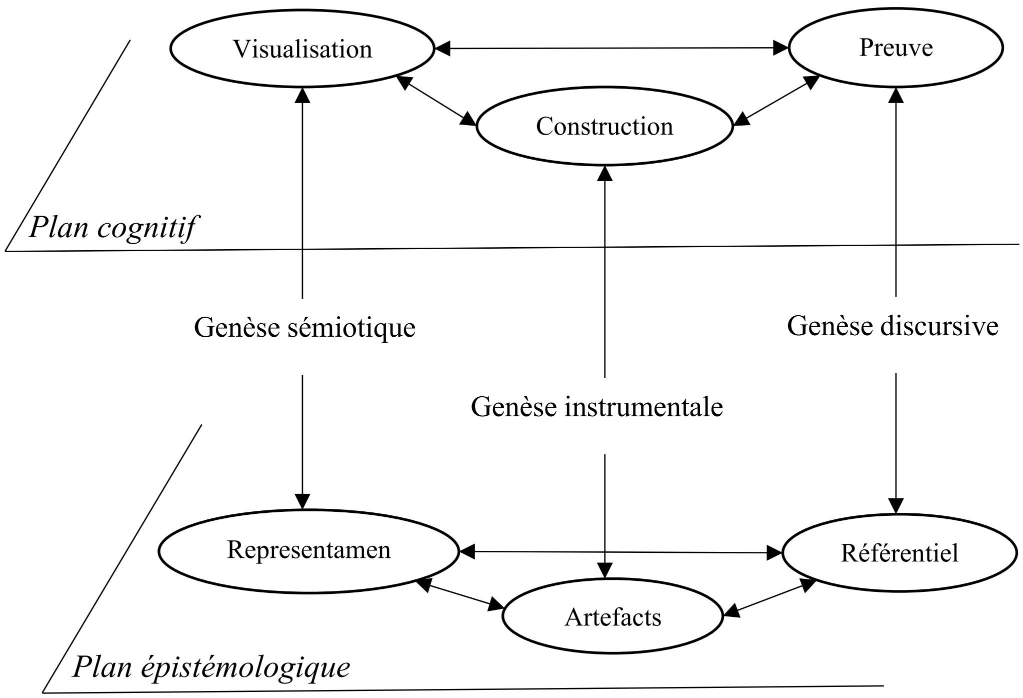


Figure 6 : Le modèle des ETM, reproduit de l'article de Kuzniak et Richard (2014)

Les genèses du modèle cherchent à couvrir les différents aspects du travail mathématique. Elles en constituent une première structure d'analyse, mais le travail mathématique peut se faire selon plusieurs genèses en même temps, ce qui apporte un nombre d'organisations du modèle digne d'un travail de combinatoire. Il peut donc être nécessaire d'adapter le modèle original des ETM selon la tâche étudiée et le but de son l'analyse. Nous commencerons par décrire les genèses individuellement et nous apporterons ensuite des précisions concernant le raisonnement et les preuves.

2.2.1 La genèse sémiotique et les figures géométriques

Au sein des premiers modèles de Kuzniak, la **genèse sémiotique** était restreinte au domaine géométrique, mettant en lien un espace réel et local issu du plan épistémologique au processus de visualisation de cet espace dans le plan cognitif. Afin d'étendre le modèle aux autres branches de la mathématique, l'espace local et réel a été changé pour inclure toutes les représentations sémiotiques des mathématiques (Houdement et Kuzniak, 2006; Kuzniak, 2011; Kuzniak et Richard, 2014). D'une part, nous retrouvons des représentations dyadiques, c'est-à-dire des représentations mettant en relation quelque chose de visible et l'évocation d'autre chose absente ou dont la réalité est « mentale ». Celles-ci sont principalement issues du registre linguistique. D'une autre part, en mathématiques, nous retrouvons des représentations triadiques, où une signification devient subordonnée à la représentation. Par exemple, les nombres $0{,}25$ et $\frac{1}{4}$ sont des représentations triadiques : bien que ce soient deux représentations du même nombre, elles subordonnent des opérations différentes (Duval, 1995). La notion de *representamen* de Peirce est ainsi utilisée comme composante du plan épistémologique de la genèse sémiotique pour rendre compte des différentes représentations sémiotiques possibles. Le representamen est ainsi « une chose qui en représente une autre que ce soit son objet ou peut-être aussi lui-même » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 32). Par exemple, il peut être un nombre, représenté de différentes façons, un graphique, un symbole algébrique, un jeton ou une figure géométrique. Dans le cadre de notre recherche en géométrie, il importe d'apporter des précisions sur la genèse sémiotique en lien avec les objets géométriques. En termes de paradigmes, selon Houdement et Kuzniak (2006),

> dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. Dans la géométrie axiomatique naturelle (Géométrie II), certaines sous-parties de l'espace sont en fait les objets de l'étude et l'on parlera de figures ou de configurations. En géométrie I, il s'agit de dessins ou de maquettes. (Houdement et Kuzniak, 2006, p. 185-186)

De façon plus particulière, la genèse sémiotique peut être vue selon l'approche de Duval. Pour reprendre ses propos (Duval, 1995, p. 175-184), plus détaillés dix ans plus tard (Duval, 2005), une figure géométrique est composée d'unités figurales élémentaires, de dimension 0, le point, de dimension 1, dont les droites, les segments et les arcs, et de dimension 2, dont les angles, les triangles, les quadrilatères et les cercles. Le processus de reconnaissance de différentes unités figurales au sein d'une même figure participe de la genèse sémiotique. Prenons l'exemple du problème de la figure 7 ci-dessous.

Prouve que les diagonales d'un parallélogramme déterminent deux paires de triangles congrus.

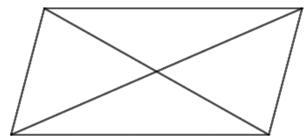


Figure 7 : Exemple de reconnaissance des unités figurales

Ici, certains objets de dimension 2 sont textuellement explicités (triangles, parallélogramme), ce qui facilite une partie de la visualisation de la figure géométrique. Il en est de même pour les diagonales qui sont des unités de dimension 1. Cependant, pour résoudre ce problème, il est nécessaire de reconnaître les côtés du parallélogramme et des triangles, et en ce faisant, de changer la perception de ces objets de dimension 2 comme unité figurale à une union de segments, qui sont, eux, des unités figurales de dimension 1. Ensuite, plusieurs visualisations des points sont possibles : les points peuvent être les extrémités des côtés, les sommets du parallélogramme, les sommets du triangle ou le point de rencontre des diagonales. Finalement, à partir de ces décompositions en unités figurales de plus petite dimension, il est possible de se construire mentalement différents aspects de la figure. La déconstruction dimensionnelle est ce processus de changement de dimension que Duval (2005) note comme étant important dans le processus de visualisation des objets géométriques.

Ensuite, le processus de reconfiguration participe également à la genèse sémiotique. Ce processus « est l'opération qui consiste à réorganiser une ou plusieurs sous-figures différentes d'une figure donnée en une autre figure » (Duval, 1995, p. 184).

Lorsqu'il est donné dans un environnement statique, le problème de la figure 8 est un exemple où la genèse sémiotique se fait en partie par la modification mentale de la figure initiale. En effet, sa résolution demande la considération des figures engendrées par les segments, dont les paraléllogrammes AFEH et EICG. Aussi, dans le processus de résolution de problème, on peut

ABCD est un parallélogramme. Soit E un point quelconque de la diagonale BD. HI est parallèle à AD passant par E et FG est parallèle à CD passant par E. Montre l'égalité des aires des quadrilatères AFEH et EICG

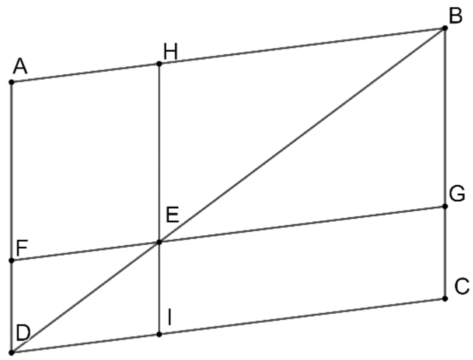


Figure 8 : Problème permettant l'étude de l'opération de reconfiguration. Adapté de Duval (1995, p.185)

s'attendre à ce qu'un individu visualise le déplacement du point E sur la diagonale BD. Le processus de visualisation du déplacement du point E entraîne également un changement dans la forme des quadrilatères AFEH et EICG, bien qu'il ne soit pas sûr que l'élève le visualise de la même manière qu'il le visualiserait si le problème était donné à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique. En effet, un logiciel de géométrie dynamique peut devenir un instrument qui participe au milieu. Dans le cas du problème précédent, notons que le déplacement du point E à l'interface d'un tel logiciel n'est pas la solution au problème : l'élève doit encore comprendre la relation entre les parallélogrammes pour produire la preuve attendue. Il sera justement question de la genèse instrumentale à la prochaine sous-section.

2.2.2 La genèse instrumentale

Bien que la « lecture » des formes à l'écran d'un logiciel de géométrie dynamique relève de la genèse sémiotique, l'utilisation de ses fonctionnalités relève plutôt de la **genèse instrumentale**. Dans les ETM, elle « permet de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif qui contribue à l'accomplissement du travail mathématique » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 35). En particulier, selon Rabardel (1995), un artefact désigne « toute chose ayant subi une transformation, même minime, d'origine humaine […] élaborée pour s'inscrire dans des activités finalisées » (Rabardel, 1995, p. 49) et un instrument est un artefact utilisé par un individu selon des schèmes d'action. Rabardel (1995) présente entre autres une double orientation de l'utilisation des instruments au travers de la genèse instrumentale : l'*instrumentation*, orientée vers le sujet, et l'*instrumentalisation*, orientée vers l'artefact. L'instrumentation est l'exploration, la découverte et l'appropriation d'un artefact par un sujet. Autrement dit, il s'agit de l'apprentissage de l'utilisation prévue d'un artefact. À l'opposé, l'instrumentalisation correspond à l'adaptation d'un artefact afin d'en faire une utilisation non privilégiée ou non prévue (Rabardel, 1995). En particulier, une catachrèse représente l'usage d'un instrument à des fins non prévues dans sa conception et constitue le fondement du processus d'instrumentalisation. La figure 9 en est un exemple, où, à défaut d'avoir sous la main un compas, un sujet décide de mettre à profit le trou de sa règle (prévu pour un classeur à anneau) pour tracer un cercle.

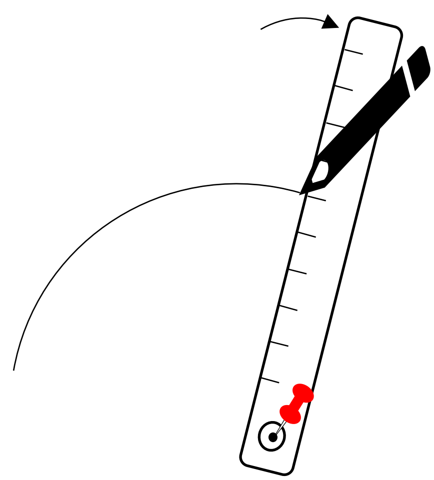


Figure 9 : Exemple de catachrèse

Bref, dans les ETM, la genèse instrumentale met en scène, dans le plan épistémologique, un ensemble d'artefacts, dont les logiciels de géométrie dynamique, et, dans le plan cognitif, le processus de construction déterminé par les instruments utilisés et par les configurations géométriques (Kuzniak, 2011; Kuzniak et Richard, 2014).

En ce qui a trait au travail mathématique, pour les constructions, les paradigmes géométriques sont déterminés par le choix des instruments de géométrie utilisés. Par exemple, en géométrie axiomatique naturelle (GII), le compas et la règle non graduée sont privilégiés : l'importance n'est pas à l'exactitude métrique ou angulaire, mais à la justification théorique des techniques de construction (Houdement et Kuzniak, 2006). En géométrie I, la précision des tracés et donc de l'utilisation des artefacts gradués est importante puisque la figure est souvent la finalité du problème. Notons que l'apparition des outils informatiques a bouleversé les artefacts traditionnellement utilisés en mathématiques : les logiciels de géométrie dynamique permettent une manipulation accrue et plus aisée des objets géométriques, notamment avec les fonctions de construction et de déplacements (« dragging ») des objets. De la même manière qu'avec les artefacts traditionnels, les logiciels de géométrie dynamique permettent autant un travail en GI qu'en GII. Par exemple, un travail où l'usager crée des figures de mesures précises avec des fonctionnalités comme « segment de grandeur x » et « angle de grandeur x » pour trouver une autre mesure relèverait de GI, alors qu'un travail d'étude de cas de figure pour inférer des propriétés concernant les cercles inscrits et circonscrits aux triangles relèverait plutôt de GII.

2.2.3 La genèse discursive et le processus de preuve

Enfin, la **genèse discursive**, en lien avec le discours, relie un système de référence de définitions et de propriétés dans le plan épistémologique, appelé le référentiel, au processus discursif produisant des preuves et des démonstrations dans le plan cognitif. Le discours est d'abord vu comme étant l'expression verbale de la pensée. En reprenant les travaux de Benveniste (1966, 1974), Duval précise que « le discours est l'emploi d'une langue pour "dire quelque chose", c'est-à-dire pour parler d'objets physiques, idéaux, ou imaginaires » (Duval, 1995, p. 88). Or, en mathématiques, le langage naturel ne suffit pas toujours pour exprimer ses pensées : comme expliqué précédemment, le travail mathématique se fait selon des registres sémiotiques qui ne se limitent pas à la langue. De ce fait, en plus d'être le moyen de représentation par excellence, le discours doit être vu comme l'articulation des significations entre ce qu'elles permettent de dire, d'expliquer, de raisonner, d'argumenter, de prouver, etc. Bien que le discours ne soit pas nécessairement une marque d'un travail mathématique, une bonne partie de ce dernier se réalise par le discours. Dans le cas plus particulier de l'enchainement de propositions, Duval utilise l'expression d'expansion discursive comme étant le fait de « relier la proposition énoncée à d'autres en un tout cohérent » (Duval, 1995, p. 91). La genèse discursive est ainsi liée au développement du raisonnement qui est, pour le même auteur, « tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur le "bien-fondé »" de son affirmation, ou de son rejet » (Duval, 1995, p. 217). Notons que, dans la définition de Duval, l'interlocuteur peut être soi-même. Le raisonnement privilégié en mathématiques est le raisonnement déductif, sous la forme de démonstrations, avec sa structure ternaire et ses règles d'inférences telles qu'expliquées à la sous-section 1.1.2. Pour un élève, le processus de démonstration n'est pas qu'une simple activité d'écriture : il y a toute une activité mentale sous-jacente d'exploration du problème par genèse sémiotique et/ou instrumentale (Richard, 2004b; Richard et al., 2019), de raisonnement (Duval, 1995) et d'expansion discursive (bien relier les propositions les unes aux autres en suivant les règles de la déduction) (Duval et Egret, 1989; Tanguay, 2004). Il n'est pas garanti qu'un individu procède à la résolution d'un problème de démonstration de façon linéaire en partant des hypothèses données dans le problème pour arriver à la conclusion souhaitée. Bien au contraire, certains préféreront partir de la conclusion et « reculer » jusqu'aux hypothèses du problème et d'autres, comme le fait remarquer Tanguay (2005), vont plutôt suivre un chemin complexe de va-et-vient :

> La compréhension de la structure d'une démonstration tant soit peu complexe nécessite de la part de l'élève un travail – de lecture ou d'écriture – ponctué de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de réaménagement et simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation), de contrôle, de réflexion. Toutes choses que ne permet pas cette [...] pratique orale du texte, faite de fluence, de séquentialité, d'irréversibilité. (Tanguay, 2005, p. 64)

Même si la démonstration prime chez les mathématiciens professionnels, les échanges en situation d'enseignement-apprentissage en classe de mathématiques relèvent davantage de l'argumentation que de la démonstration (Richard, 2004b). Alors que la démonstration assure la valeur logique d'une proposition (vrai ou faux), l'argumentation cherche plutôt à changer la valeur épistémique d'une proposition. Cette dernière correspond au degré de fiabilité d'un énoncé (probable, invraisemblable, impossible, évident, etc.). Selon Tanguay, au sein d'une argumentation, « les propositions n'ont ni statut théorique, ni statut opératoire préalablement fixés, si bien que le raisonnement s'organisera autour des interactions entre contenus et valeurs épistémiques sémantiques, elles-mêmes fonctions des contenus » (Tanguay, 2004, p. 75). De plus, une argumentation fonctionne par un cumul de propositions : un plus grand nombre d'arguments pourrait réussir à convaincre une personne alors qu'un seul argument ne réussirait pas forcément. En démonstration, c'est le contraire : plusieurs inférences ayant le même conséquent seront perçues comme superflues et inutiles.

Entre la rigueur de la démonstration et la souplesse de l'argumentation, nous retrouvons plusieurs types de preuves utilisés à la fois par les mathématiciens et en classe de mathématiques. Les plus fréquentes sont les preuves discursivo-graphiques situées dans le plan vertical entre la genèse sémiotique et la genèse discursive des ETM (Richard et al., 2019). Ces preuves sont typiques d'un travail mathématique faisant appel à une ou plusieurs inférences figurales. Le sujet est alors dans une dynamique de va-et-vient, voire de symbiose, entre la figure, le référentiel théorique et l'expansion discursive (Richard, 2004b). Parmi les preuves discursivo-graphique, nous retrouvons les preuves « schématiques » de Bundy et Jamnik (2019) où la preuve est basée à la fois sur un raisonnement figural et discursif, et, à l'extrême du côté sémiotique, les preuves sans mots d'Alsina et Nelsen (2009) où le discursif devient subordonné au raisonnement figural. D'autre part, les preuves instrumentales coordonnent les genèses sémiotiques et instrumentales dans le plan vertical entre ces deux genèses. Par exemple, la méthode de pesée utilisée par Archimède ou les preuves faites à l'interface de logiciel de géométrie dynamique nécessitent un raisonnement, dont celui de la recherche de configurations satisfaisantes à la conclusion d'un problème (Richard et al., 2019). Finalement, dans le plan vertical entre la genèse instrumentale et la genèse discursive, nous retrouvons les preuves algorithmiques où l'utilisation d'un instrument se fait conjointement avec un référentiel bien établi. La preuve du théorème des quatre couleurs où chaque cas de configuration possible est vérifié par un ordinateur en est un exemple (Richard et al., 2019). Finalement, peu importe le type de preuves, celles-ci doivent se baser sur un référentiel (implicite ou explicite). Les considérations sur le référentiel seront présentées à la sous-section suivante.

2.2.4 La genèse discursive et le référentiel

Selon le type d'activité mathématique (argumentation, preuve ou démonstration), le référentiel peut prendre des allures très différentes. Houdement et Kuzniak définissent le référentiel dans un modèle théorique qui résulte soit d'une modélisation du monde réel, comme celui de la géométrie axiomatique naturelle (GII), soit d'une définition *a priori* où le modèle est une interprétation des objets et des propriétés définis par les axiomes, comme l'axiomatique de Hilbert (GIII) (Houdement et Kuzniak, 2006). Peu d'études ont porté sur des questions liées au référentiel; nous étendons cette définition en précisant qu'il est constitué d'un réseau de définitions, d'axiomes et de propriétés. Dans le cas des manuels scolaires et des ouvrages pédagogiques, ce réseau est possiblement structuré au sein d'îlots déductifs. Bien que ce référentiel puisse avoir des aspects discursifs, sémiotiques ou instrumentaux, notre recherche se concentre sur son aspect discursif en incluant certains aspects sémiotiques, dont les éléments d'un calcul (arithmétique ou algébrique), en lien ou non avec une figure. Par exemple, qu'il soit accompagné d'une figure ou non, nous retenons l'équation de l'énoncé de la relation de Pythagore « *dans un triangle rectangle, la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse* ($a^2 + b^2 = c^2$) » comme un élément du référentiel. Notons que les éléments d'un référentiel géométrique au secondaire ne sont pas tous exploitables dans une preuve : il y a des énoncés relevant du lexique mathématique, c'est-à-dire des énoncés qui sont des descriptions (définition mathématique) qui ont pour but de faire comprendre ou de donner du sens. Un exemple d'un énoncé du lexique mathématique serait « la superficie, ou l'aire, est la mesure d'une surface délimitée par une figure. ».

De façon analogue aux types d'ETM présentés précédemment, nous considérons également l'existence de plusieurs niveaux de référentiels : nous considérons le « référentiel de référence », le « référentiel idoine » et le « référentiel personnel ». Le « référentiel de référence » est en lien avec les propriétés et définitions utilisées et privilégiées dans une communauté ou une institution. Dans le cadre scolaire québécois, cette communauté inclut les concepteurs du programme, l'ensemble des enseignants dans la mesure où chacun s'inspire de ce que les autres font, et les auteurs des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissages. Le « référentiel idoine », lui, est en lien avec toutes les définitions et propriétés institutionnalisées dans une classe, qui, année après année, se modifie, s'adapte et s'affine. Tout comme l'ETM idoine, le référentiel idoine est constamment ajusté selon le niveau des élèves et le contrat didactique en place. De plus, les concepts de référentiel initial et de référentiel construit présentés à la section 1.3 (p. 17) relèvent du référentiel idoine : le choix qu'une propriété est initialement donnée ou amenée en même temps que les exercices relève de l'expérience de l'enseignant, de l'adaptation de son enseignement à ses élèves et du contrat didactique avec la classe. Nous voyons aussi une certaine idonéité aux référentiels issus des manuels scolaires : les auteurs choisissent, organisent et adaptent les différentes propriétés et définitions en chapitres tout en modifiant leurs ouvrages édition après édition. En comparaison, les propriétés et définitions qui seront institutionnalisées plus tard dans le parcours scolaire d'un élève relèvent plutôt du référentiel de référence (ce dernier étant plus vaste que le référentiel vu par un élève). Finalement, dans l'optique des ETM, le « référentiel personnel » est en lien avec les propriétés et définitions qu'un individu utilise et connaît. Notons que le « référentiel personnel » est plus vaste que les propriétés et les définitions qu'une personne utilise lors de résolution d'un problème donné : elle connait certainement des propriétés et des définitions qui ne se prêtent pas au problème.

Dans nos travaux, faute de référentiel présenté explicitement dans les programmes officiels, nous cherchons à dégager un « référentiel de référence » pour le secondaire. Pour ce faire, nous procéderons par l'union de plusieurs « référentiels idoines » issue de sources différentes. Cette approche nous permettra, au minimum, de relever les propriétés et définitions utilisées dans le système scolaire québécois. Nous retrouverons en conséquence toutes sortes de propriétés construites sur mesure pour un problème particulier, dont plusieurs, nous pensons, constitueront des raccourcis inférentiels. La prochaine section porte ainsi sur les considérations prises en compte relativement aux raccourcis inférentiels et la composition d'un référentiel utilisé par un agent tuteur comme QED-Tutrix.

2.3 Les différents types de raccourcis inférentiels et les agents tuteurs

Comme il en a été question dans la problématique, les élèves et les enseignants font couramment des raccourcis inférentiels. C'est ainsi que Tanguay (2005), à la suite des travaux de Duval auprès d'élèves (Duval, 1991, 1992, 1995; Egret et Duval, 1989) mentionne que la

« structure locale qui est celle, ternaire, de l'inférence, n'est que rarement explicitée en démonstration écrite » (Tanguay, 2005). Ce dernier relève quatre cas où elle n'est pas explicite :

> • soit que la règle d'inférence soit immédiate au point qu'on ne juge pas bon de la mentionner ;
> • soit que pour alléger la rédaction, l'on évite de répéter la proposition « recyclée », ou l'on regroupe deux inférences en une seule, ou deux conditions de la règle d'inférence en une seule, etc. ;
> • soit que le texte, pour des raisons d'organisation, de formulation, de mise en page, n'explicite pas, ou rende équivoque le statut opératoire[6] des propositions invoquées;
> • soit que le statut théorique[7] de certaines propositions n'ait pas été clairement préétabli (c'est par exemple souvent le cas des preuves qui mobilisent la géométrie des transformations).

À notre avis, les propriétés contenues dans les référentiels sont directement en lien avec le deuxième cas soulevé par Tanguay. En fait, pour ce raccourci, il s'agit de l'utilisation d'une propriété qui en englobe plusieurs. Par exemple, la propriété « la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut 180° » est typiquement le fruit d'une démonstration. Elle « **encapsule** » ainsi toutes les propriétés utilisées dans cette démonstration, un peu à la manière des procepts de Gray et Tall (1994). Or, selon notre expérience, les élèves et les enseignants l'utilisent sans en refaire la démonstration chaque fois. Nous pensons même qu'une première démonstration de cette propriété n'est pas toujours faite en classe. Dans un tel cas, nous dirons que le raccourci inférentiel devient « **court-circuité** », le court-circuit étant le fait que la propriété soit donnée aux élèves qui doivent l'accepter sans plus d'explication. Dans notre recherche, nous tenterons de relever ces propriétés qui sont des raccourcis inférentiels et d'identifier lesquels sont d'abord démontrés. Un autre exemple de raccourci, plus local, serait la combinaison de plusieurs propriétés en une seule, comme dans ce cas repéré dans un manuel scolaire : « les trois médiatrices des côtés d'un triangle se rencontrent en un point situé à égales distances des sommets du triangle. Ce point est le centre du cercle passant par les sommets du triangle. On dit que ce cercle est circonscrit au triangle et que le triangle est inscrit dans le cercle » (Guay et al., 2006a). Il est possible d'argumenter que nous sommes en présence de plusieurs propriétés distinctes : l'énoncé est constitué de plusieurs phrases et renvoie à plusieurs objets. Même si les phrases sont liées les unes aux autres par l'utilisation de

[6] Au sein d'une démonstration, un énoncé peut avoir un des trois statuts opératoires : antécédent, règle d'inférence ou conséquent (Duval et Egret, 1993).
[7] Avant le processus d'écriture d'une démonstration, un énoncé a d'abord un statut théorique : hypothèse tiré du problème, définition, propriété, conjecture, etc. (Duval et Egret, 1993)

« ce point » ou « ce cercle », considérons, pour l'exercice, seulement la première phrase : « les trois médiatrices des côtés d'un triangle se rencontrent en un point situé à égales distances des sommets du triangle ». L'élève qui utilisera une telle propriété fera, sans doute à son insu, un raccourci inférentiel où l'on oublie que les médiatrices sont concourantes. En effet, pour qu'un point soit équidistant des sommets du triangle, il faut déjà qu'il existe.

Bref, nous dirons qu'un raccourci inférentiel est soit encapsulé lorsqu'il est proprement établi, soit court-circuité lorsque sa preuve est manquante. L'encapsulation d'une propriété est alors le fait de bien établir une propriété, ce qui peut être fait par sa démonstration. Inversement, le court-circuitage d'une propriété est le fait de sauter sa démonstration.

La prise en compte de ces raccourcis est doublement importante lorsque l'on veut construire un référentiel au service d'un logiciel. D'une part, ces raccourcis reflètent bien la réalité dans les classes et permettent à l'agent tuteur d'être une extension au contrat didactique déjà en place au lieu d'en établir un deuxième complètement différent (Font et al., 2019). D'autre part, l'encodage des propriétés constituant un raccourci amène de nouvelles difficultés, dont la nécessité de l'encoder plusieurs fois, avec des antécédents ou conséquents différents. En effet, l'ordinateur ne peut pas fonctionner sémantiquement, c'est-à-dire qu'il lui est impossible de dégager lui-même les antécédents et les conséquents d'une règle d'inférence. Autrement dit, le référentiel utilisé dans les classes de mathématiques relève de GI ou de GII alors que le référentiel utilisé par l'ordinateur relève de GIII (Font et al., 2020), causant ainsi des difficultés liées à la perte de l'information sémantique.

2.4 Synthèse du cadre théorique et questions spécifiques

En résumé, le travail mathématique que fait un élève lors de la résolution d'un problème peut se décomposer selon la genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Si le problème est dans le domaine de la géométrie, il se situe dans un des trois paradigmes, ou même en oscillation entre deux paradigmes, comme le démontre l'étude de Gauthier (2015). L'ETM engendré lors de la résolution du problème est alors modelé en fonction du paradigme dans lequel un élève ou une classe travaille. De plus, le référentiel prend sa place dans le modèle des ETM où il est la composante épistémologique de la genèse discursive qui, elle, est liée au raisonnement. C'est effectivement en utilisant une règle d'inférence issue du référentiel qu'un élève peut produire de nouvelles connaissances mathématiques tout en assurant la validité de celles-ci. Certaines de ces propriétés constituent des raccourcis inférentiels englobant plusieurs propriétés, ce qui joue un rôle important lors de l'implémentation d'un référentiel dans un logiciel.

À titre de rappel, notre objectif général de recherche est de dégager les référentiels et l'usage des raccourcis inférentiels dans le système scolaire québécois. À la lumière de notre cadre théorique, nous précisons cet objectif général par trois questions spécifiques :

- Quels sont les référentiels géométriques utilisés dans les manuels scolaires et cahiers d'apprentissages du secondaire?
- Quelles sont les caractéristiques, discursives et paradigmatiques, des référentiels des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissages du secondaire et en quoi diffèrent-ils les uns des autres?
- Comment peut-on adapter les référentiels des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissages du secondaire à un référentiel utilisé par un ordinateur?

3 La méthodologie

Dans ce chapitre, nous présenterons nos choix méthodologiques pour cette étude en didactique des mathématiques. Comme en témoigne l'ouvrage *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (Bilkner-Ashbahs et al., 2015), une recherche en didactique des mathématiques peut parfaitement se prêter aux différentes approches utilisées en recherche qualitative. Paillé et Mucchielli (2016) décrivent ce type de recherche comme étant « d'abord une faculté de l'esprit cherchant à se relier au monde et à autrui par les divers moyens que lui offrent ses sens, son intelligence et sa conscience » (Paillé et Mucchielli, 2016, p. 35). C'est dans cette optique que notre recherche est un processus de découverte inductive par analyse. Dans les prochaines sections, nous préciserons d'abord la provenance des données recueillies, les lignes directrices de l'investigation et les étapes de l'investigation.

3.1 <u>Les données</u>

Notre collecte de données s'est faite à partir de manuels scolaires en usage au Québec. Nous avons choisi d'utiliser ces ressources documentaires comme base de notre recherche puisque nous pensons qu'elles représentent assez bien ce qui est utilisé dans les classes. Elles sont constituées d'énoncés de propriétés et de définitions en géométrie. Chaque propriété et chaque définition est composée d'une à quelques phrases. A priori, nous considérons chaque propriété et chaque définition comme une donnée distincte. En revanche, dans certains cas, comme celui utilisé à la section 3.4 sur les médiatrices, les auteurs écrivent plusieurs propriétés scindées les unes aux autres : nous considèrerons alors que le tout forme une seule donnée. Nous garderons cependant à l'esprit que ces données sont composées de plusieurs propriétés ou définitions.

Nous avons ainsi relevé tous les énoncés de propriétés et de définitions en géométrie des manuels sélectionnés, et ce, peu importe où l'énoncé est situé dans l'ouvrage. De façon plus précise, nous relèverons les propriétés et définitions de la géométrie plane, de la géométrie en trois dimensions, de la géométrie analytique et des vecteurs. En revanche, les énoncés concernant le traçage d'objets en trois dimensions selon les différentes perspectives ne seront pas recueillis, car nous pensons qu'ils ne participent pas au raisonnement hypothético-déductif en classe de mathématiques. De plus, les énoncés concernant les demi-plans[8], les coniques (5e secondaire), les identités trigonométriques issues des chapitres sur les fonctions trigonométriques et les matrices n'ont également pas été recueillis, car nous pensons qu'en classe de mathématiques, ils relèvent davantage des domaines de l'algèbre et de l'analyse que celui de la géométrie.

Puisqu'il existe plusieurs maisons d'édition, nous avons choisi au moins deux ouvrages par niveau scolaire pour pouvoir comparer les données. De plus, comme un ETM est engendré par la résolution d'un problème (dans notre cas, un problème de preuve), nous utilisons un premier critère de sélection des manuels qui est la richesse des problèmes de preuve proposés. Notre objectif étant de découvrir les référentiels utilisés, nous pensons que les éditions proposant davantage de problèmes de démonstration auront un référentiel plus riche et engloberont les référentiels utilisés dans les autres manuels où ces problèmes sont plus rares. Aussi, pour recueillir des données différentes, nous utilisons un deuxième critère qui est la disparité de la section « notes de cours » par rapport aux autres manuels. En effet, nous pensons que les référentiels des manuels se retrouvent principalement au sein de cette partie, même s'il ne s'y limite pas. Ce critère a alors un double rôle :

1. éviter une répétition des mêmes données, comme ce serait le cas pour les séquences de 4e secondaire où le programme de géométrie de la séquence TS est complètement couvert par l'union des séquences CST et SN;
2. recueillir des données le plus variées possible, même si cela signifie utiliser un plus grand nombre d'ouvrages pour un niveau en particulier.

Nous irons ainsi chercher des données dans le but d'atteindre une saturation, qui, dans notre cas, signifie de ne plus avoir de propriétés ou de définitions différentes des précédentes. Le tableau 3 présente les manuels sélectionnés. Notons que nous avons sélectionné des cahiers d'apprentissage qui ne figurent pas dans la liste du matériel approuvé du Ministère (MEES, 2019). Comme ils sont utilisés dans les écoles, nous les avons quand même considérés et soumis à nos deux critères de sélection.

---

[8] Typiquement, dans les manuels, la notion de demi-plan est uniquement utilisée pour représenter la réponse d'une inéquation linéaire.

Tableau 3 : Provenance des données documentaires[9]

	Chenelière Éducation		Les éditions CEC		Grand Duc			Guérin
	Intersection	Sommets	Panoram@th	Visions	Point de Mire	Perspective mathématique	Point de Vue mathématique	Mathématiques 3000
1re secondaire		x	x					x
2e secondaire			x			x		
3e secondaire	x				x		x	
4e secondaire CST	x							x
4e secondaire SN	x						x	x
5e secondaire CST	x						x	
5e secondaire TS				x				x
5e secondaire SN				x				x

3.2 Les lignes directrices de l'investigation

À partir des sources documentaires choisies, nous commencerons par relever toutes les propriétés et définitions de géométrie. Nous utiliserons le logiciel *Microsoft Excel* pour classer ces données. Ensuite, nous créerons un enregistrement pour chaque propriété ou définition rencontrée. Les composantes de ces enregistrements, qui seront détaillées dans les prochaines sous-section, sont :

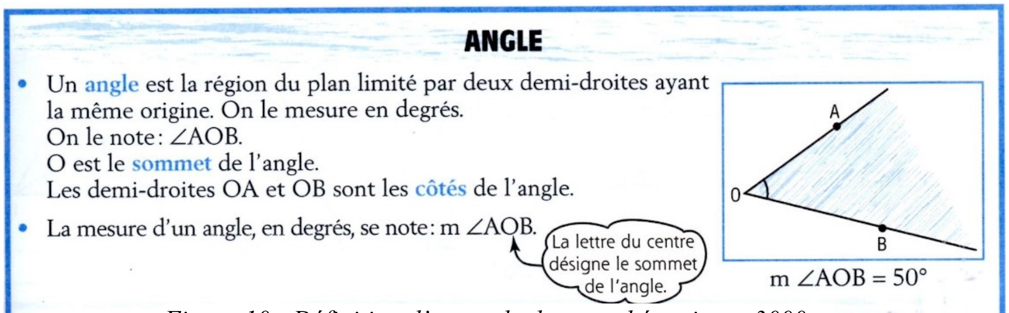
- le titre de l'ouvrage;
- l'année scolaire

[9] Pour les références des ouvrages : Intersection (Boucher et al., 2009a, 2009b, 2009c; Boucher et Coupal, 2007a, 2007b), Sommets (Bernier et al., 2016), Panoram@th (Cadieux et al., 2005a, 2005b; Gendron et al., 2005a; Gendron et al., 2005b), Visions (Boivin et al., 2010a, 2010b, 2010c, 2010d), Point de Mire (Dupré et al., 2013), Perspective mathématique (Guay et al., 2006a, 2006b), Point de Vue mathématique (Guay et al., 2007a; Guay et al., 2007b; Guay et al., 2009; Guay et al., 2008) et Mathématiques 3000 (Buzaglo et Buzaglo, 2004, 2008, 2009a, 2009b, 2015).

- la séquence, s'il y a lieu
- l'énoncé de la propriété ou de la définition;
- les concepts primaires;
- les concepts secondaires;
- la modalité temporelle;
- l'inconsistance de l'énoncé;
- la dépendance sémiotique;
- la valeur épistémique
- les besoins pour un système tuteur.

3.2.1 Les informations d'identification

Les trois premières composantes de l'enregistrement (titre de l'ouvrage, année scolaire et l'énoncé de la propriété ou de la définition) jouent le rôle d'identification des propriétés et des définitions. Bien qu'à première vue anodines, ces composantes sont importantes pour comparer les mêmes propriétés ou les mêmes définitions issues d'ouvrages différents, ou même de niveaux scolaires différents. Par exemple, rien n'assure que la définition du même objet soit identique d'un manuel à l'autre et encore moins d'une année à l'autre où le changement de paradigme géométrique peut devenir un enjeu majeur. L'énoncé jouera ainsi un rôle important dans l'analyse paradigmatique des référentiels. Elle permettra aussi une analyse des référentiels en lien avec la genèse discursive des ETM, c'est-à-dire d'analyser si les référentiels favorisent le travail engendré par un problème de preuve. À titre d'exemple, pour la définition de l'angle de la figure 10 de la page suivante, nous pouvons avoir les composantes (***Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine. On le mesure en degrés****; …)*. Notons que la phrase « on le note : $\angle AOB$ » ne se retrouvera pas dans les données, puisqu'elle concerne la nomenclature de l'angle. En revanche, la phrase « O est le sommet de l’angle » sera conservée, car il s’agit de la définition du sommet d’un angle donnée dans cet ouvrage.


ANGLE

- Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine. On le mesure en degrés.
  On le note : ∠AOB.
  O est le sommet de l’angle.
  Les demi-droites OA et OB sont les côtés de l’angle.
- La mesure d’un angle, en degrés, se note : m ∠AOB.

Figure 10 : Définition d’un angle dans mathématiques 3000

3.2.2 Résumé de l’énoncé

Cette composante aura comme première fonction de faciliter le travail de reconnaissance des propriétés et des définitions. Elle sera notée comme étant soit la définition d’un objet, une propriété sur un objet, un processus lié à un objet, une formule ou une note sémiotique. Nous avons noté comme étant une note sémiotique les énoncés qui touchent la représentation d’un objet ou d’une propriété, comme ceux portant sur les traits d’isométries dans une figure. À la différence de l’énoncé de nomenclature mentionné dans la sous-section précédente, ces énoncés peuvent avoir un rôle de justification dans une inférence. Cette composante permettra de voir une première structure entre les composantes des référentiels au sein du réseau sémantique que nous créerons (voir section 3.3). Puisque les énoncés sont issus du registre de la linguistique et que l’argumentation prime souvent sur la démonstration en classe de mathématiques dans les moments d’enseignement-apprentissage (Richard, 2004b), nous pensons que les propriétés, les définitions et les référentiels dans leurs ensembles, auront certaines inconsistances : objets implicites; objet utilisé, mais défini plus tard; objets flous ou mal définis; objets intuitifs ou définitions circulaires. Ainsi, en comparant les objets définis au sein d’un ouvrage et les concepts utilisés (voir section 3.2.3), il sera possible de déterminer les objets géométriques non définis. Notre enregistrement devient alors (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine. On le mesure en degrés;* ***définition angle****…).*

3.2.3 Les concepts primaires et secondaires

Puisque les propriétés et les définitions d'un référentiel non axiomatique, comme ceux qu'on retrouve dans les écoles secondaires, sont toutes interreliées, les composantes de l'enregistrement en lien avec les concepts de la propriété ou de la définition jouent un rôle majeur dans l'investigation des référentiels. Les concepts compris dans l'énoncé de chaque propriété ou définition permettront de comparer ces mêmes propriétés ou définitions issues des référentiels de provenances différentes. Par mêmes propriétés ou définitions, nous entendons la même règle d'inférence, c'est-à-dire qui a les mêmes antécédents et la même conclusion. Les concepts utilisés pour cette composante de l'enregistrement seront dégagés au fur et à mesure de la recherche. En revanche, nous ne coderons que les concepts explicites dans l'énoncé afin d'éviter de nous égarer dans des concepts implicites qui amèneraient d'autres concepts implicites. Les concepts primaires sont ceux sur lesquels la propriété ou la définition porte explicitement alors que les concepts secondaires sont ceux utilisés en relation avec le concept primaire. Nous avons fait cette distinction en raison de notre travail en parallèle avec l'élaboration de QEDX : les deux « niveaux » de concepts pourraient être utilisés pour classer les règles d'inférence lors de la recherche par l'usager. Ainsi, lorsqu'il recherche un concept dans QEDX, les règles dont ce concept est « primaire » s'afficheraient en premier et ceux dont ce concept est « secondaire » s'afficheraient en dernier. Pour placer les concepts dans la bonne case (primaire ou secondaire) de façon cohérente, nous nous demanderons *sur quoi la propriété (ou définition) porte* et nous ferons des va-et-vient entre les ouvrages pour garder une codification cohérente. À titre d'exemple, reprenons l'enregistrement de la sous-section précédente. Comme nous utilisons le symbole « & » comme séparation lorsqu'il y a plusieurs concepts, celui-ci deviendrait (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine. On le mesure en degré.; définition angle*; ***angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite & mesure & mesure d'un angle;*** ...). Puisque l'énoncé est la définition de l'angle, nous attribuons le concept « angle » comme concept primaire et chaque autre concept trouvé dans l'énoncé est mis dans les concepts secondaires. Notons que le concept de point, qui est implicite au concept d'origine d'une demi-droite, n'est pas indiqué pour éviter l'interprétation de l'énoncé. Afin de souligner l'enjeu majeur des concepts, nous proposons de faire la comparaison avec ce deuxième exemple : (*Panoramath; 1re secondaire, Un angle est une figure géométrique formée de deux demi-*

droites ayant la même origine; définition angle; angle; demi-droite & origine d'une demi-droite; ...). Nous avons là une deuxième définition de l'angle qui utilise aussi le concept de demi-droite et de son origine, sans évocation d'une région du plan. En revanche, la première définition explicitait le caractère bidimensionnel de l'angle : c'est une région du plan. Les auteurs de cette première définition ajoutaient aussi un caractère pratique à leur définition : celui de sa mesure. La comparaison de chaque propriété ou définition entre ces ouvrages participera à l'analyse paradigmatique des référentiels et au travail de dégagement des concepts non définis au sein des référentiels. Finalement, pour un travail mathématique instrumenté par ordinateur, comme c'est le cas avec le logiciel QEDX, ces concepts pourront servir de mots-clés pour la recherche des énoncés à l'aide d'une barre de recherche.

3.2.4 La modalité temporelle

Comme nous l'avons évoqué dans la problématique, les propriétés et les définitions arrivent à plusieurs moments au sein d'une séquence didactique. Nous distinguerons ainsi les propriétés et définitions issues du référentiel initial, soit lors des activités d'exploration ou des notes de cours, et du référentiel construit, soit lors des exercices. À défaut de recherche portant sur les utilisations et les enjeux du référentiel situé à la fin des manuels scolaires, souvent présentés comme synthèse ou glossaire, nous ajouterons une troisième possibilité pour le référentiel, soit le référentiel synthèse. Les valeurs que cette composante peut prendre sont donc : activité d'exploration, note de cours, exercices et synthèse. Notre exemple devient ainsi (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine; définition angle*; *angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite;* ***référentiel initial****;* ...). Cette variable permettra de dégager différents ETM potentiels liées aux référentiels. Elle aura aussi un rôle dans la détection des raccourcis inférentiels.

3.2.5 La dépendance sémiotique

La dépendance sémiotique, ou l'autonomie du discours, est en lien avec l'importance des preuves discursivo-graphiques (plan entre la genèse sémiotique et la genèse discursive dans le modèle des ETM) en GII. Cette composante a pour but de refléter la place des figures dans un référentiel discursif. Celle-ci peut avoir les valeurs suivantes : aucune figure, figure et énoncé indépendants, figure et énoncé dépendants. L'enregistrement de notre exemple devient (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine; définition angle*; *angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite; référentiel initial;* ***figure et énoncé indépendants****; …*)

3.2.6 La valeur épistémique

La valeur épistémique d'un énoncé est variable selon plusieurs critères. En effet, Duval précise :

> la valeur épistémique d'un énoncé est le degré de certitude ou de conviction attaché à une composition. Toute proposition a ainsi une valeur épistémique par le simple fait que son contenu est considéré comme relevant d'une opinion, d'une croyance, ou d'une supposition, ou d'une évidence commune, ou d'un fait établi, ou d'une conversion, etc. (Duval, 1991, p. 254-255)

Comme elle est le « degré de certitude ou de conviction », nous allons utiliser cette composante de l'enregistrement pour documenter si la propriété a été démontrée ou non. Nous vérifierons ainsi le mode d'établissement des propriétés, c'est-à-dire le type d'activités qui les accompagne. La composante sera ainsi déclinée en trois parties, chacune ayant plusieurs possibilités. Premièrement, la propriété pourra être : démontrée, justifiée, vérifiée numériquement, vérifiée par cas de figure, expliquée ou non démontrée. Pour être démontrée, la propriété devra découler d'une démonstration. La mention « justifiée » sera utilisée lorsqu'il y aura une justification mathématique à la propriété sans avoir la structure d'une démonstration formelle. À titre d'exemple, une activité demandant à l'élève de justifier l'isométrie des côtés d'un parallélogramme en considérant la construction du parallélogramme par rotation d'un triangle isocèle amènerait une propriété « justifiée », parce que la réponse attendue est une propriété déjà institutionalisée et non une démonstration complète avec sa structure ternaire. Les deux cas de « vérification » seront utilisés pour les approches plutôt inductives. Une propriété sera notée comme « expliquée » lorsqu'il y aura une brève explication non fondée sur des propriétés connues. Deuxièmement, nous spécifierons par qui (enseignant[10], élève ou guidage enseignant/élève) la propriété aura été travaillée et, troisièmement, à quel moment dans le chapitre elle aura été travaillée (activité, note de cours, exercices ou fin du manuel). Les définitions et les axiomes auront ici volontairement une composante vide, car ils sont à la base du modèle et qu'« il est impossible de tout définir, car une première définition suppose nécessairement des objets déjà connus qui

[10] Dans notre scénario auprès des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissage, l'enseignant se retrouve à être l'équipe d'auteurs de l'ouvrage.

n'auront pas été définis » (Frères de l'instruction chrétienne, 1961, p. 47). Nous différencierons ainsi la case vide, réservée pour les axiomes et les définitions, de la valeur « non démontrée » pour les propriétés non démontrées. Ainsi, puisque notre exemple est la définition d'un angle, le nouvel enregistrement est : (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine; définition angle*; *angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite; référentiel initial; figure et énoncé indépendant;* ***vide*;** *...*). Cette composante permettra notamment de distinguer les raccourcis inférentiels encapsulés de ceux court-circuités.

3.2.7 Les besoins pour un système tuteur

Dans la logique d'un travail multidisciplinaire sur le système tuteur QEDX avec une équipe de didacticiens et d'ingénieurs informatiques, nous voulons approvisionner l'intelligence artificielle d'un référentiel utilisé en classe, qui est à la fois complet et prend en compte les différents contrats didactiques établis à cet égard. Cette composante de l'enregistrement a pour but d'établir un référentiel aussi fidèle que possible au référentiel de référence des enseignants. Même si nous n'implémenterons qu'un énoncé par propriété et par définition dans la première itération de l'intelligence artificielle, nous conserverons la codification de l'ensemble en vue d'une deuxième itération où l'enseignant pourrait choisir l'énoncé qu'il préfère pour chaque propriété et définition. Ensuite, certaines propriétés et définitions ne peuvent pas être implémentées dans le logiciel pour des raisons de programmation informatique ou encore parce qu'elles ne sont tout simplement jamais utilisées dans une inférence. Ces définitions et propriétés restent néanmoins intéressantes pour se rappeler ou comprendre la terminologie utilisée. C'est pourquoi nous leur accorderons la mention « glossaire », où un travail ultérieur à cette recherche pourrait être de créer un glossaire de définitions pour le logiciel. Nous relevons donc quatre valeurs que la composante peut prendre : à implémenter, à implémenter avec changement, glossaire, ne pas implémenter. Ainsi, l'enregistrement pour notre définition d'angle devient (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine; définition angle*; *angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite; référentiel initial; figure et énoncé indépendant; *vide*;* ***glossaire****; ...).*

3.2.8 Les commentaires

La dernière composante est réservée pour conserver les traces de réflexion occurrente durant la cueillette de donnée. Notamment, elle sera utilisée pour identifier des raccourcis inférentiels au fur et à mesure du processus de l'investigation et pour noter des cas particuliers nécessitant une attention particulière lors de l'analyse. Dans notre exemple, cette composante reste vide, alors l'enregistrement final est (*Mathématiques 3000; 1re secondaire; Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine; définition angle*; *angle; plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite; référentiel initial; figure et énoncé indépendant; *vide*; glossaire;* ***vide****).*

3.2.9 Résumé des critères d'investigation

Finalement, le tableau 4 de la page suivante résume les différents critères mentionnés dans cette section. Pour ce faire, on y retrouve la définition du critère, son lien avec l'analyse et le même exemple utilisé précédemment.

Tableau 4 : résumé des critères d'investigation

Critère	Définition	But	Exemple
Ouvrage	Titre du cahier d'apprentissage ou du manuel scolaire.	Identification et comparaison des données	Mathématiques 3000
Niveau scolaire	Niveau scolaire de l'ouvrage pédagogique.	Identification et comparaison des données	1re secondaire
Énoncé	L'énoncé de la donnée.	Identification, repérage des concepts sous-jacents et analyse discursives et paradigmatiques.	Un angle est la région du plan limité par deux demi-droites ayant la même origine. On le mesure en degrés.
Résumé de l'énoncé	Résumé de la nature de l'énoncé (propriété, définition, processus, formule, note sémiotique) et l'objet géométrique en question.	Reconnaissance des règles d'inférences et analyse des objets définis ou non définis.	Définition angle
Concept primaire	Concepts sur lesquels porte l'énoncé.	Analyse discursive et paradigmatique des référentiels, classification dans QEDX.	Angle
Concept secondaire	Concepts sous-jacents à l'énoncé.	Analyse discursive et paradigmatique des référentiels, classification dans QEDX	Plan & région du plan & demi-droite & origine d'une demi-droite & mesure & mesure d'un angle
Modalité temporelle	Moment où l'énoncé apparait dans la séquence didactique.	Analyse discursive des référentiels, des ETM potentiels et détection de raccourcis inférentiels.	Référentiel initial
Dépendance sémiotique	Lien de dépendance entre l'énoncé et l'image qui l'accompagne.	Analyse discursive et paradigmatique des référentiels.	Figure et énoncé indépendants
Valeur épistémique	Type de l'activité proposée pour découvrir, justifier ou démontrer l'énoncé.	Analyse discursive et paradigmatique des référentiels.	*vide*
Besoin pour QEDX	Premier filtrage des énoncés pour l'implémentation d'un référentiel dans QEDX.	Adaptation des référentiels à un référentiel pour un ordinateur.	Glossaire
Commentaires	Commentaire et réflexion personnelle lors du codage des données.	Garder les traces de nos réflexions.	*vide*

3.3 Les étapes de l'investigation

Cette section présente les différentes étapes de notre recherche. Elles seront présentées en ordre chronologique, mais, en réalité, en raison de la nature exploratoire de notre recherche, il y a eu plusieurs va-et-vient entre les étapes d'investigation.

La première étape (étape 1) de notre recherche consistait à la retranscription des données. Chaque propriété et chaque définition du domaine de la géométrie de chaque manuel scolaire ont été retranscrites dans un document *Excel*.

Dans un deuxième temps (étape 2), chaque propriété et chaque définition relevée à l'étape 1 ont été codées scrupuleusement avec l'enregistrement détaillé à la section précédente. Pour les composantes « concepts primaires » et « concepts secondaires », nous avons pris soin d'utiliser la même terminologie d'un énoncé à l'autre.

Troisièmement (étape 3), nous avons compilé l'ensemble des propriétés et définitions dans une seule feuille Excel en prenant soin de regrouper manuellement les mêmes propriétés et définitions, formant ainsi des blocs de plusieurs énoncés de provenances différentes, mais qui ont la même signification, comme cela est montré à la figure 12[11] de la page suivante sur laquelle nous voyons des énoncés groupés entre des lignes grises. Nous avons ensuite transféré les enregistrements dans un graphe de connaissance, présenté à la figure 11, au sein du logiciel *Protégé*[12] (Stanford University, 2020).

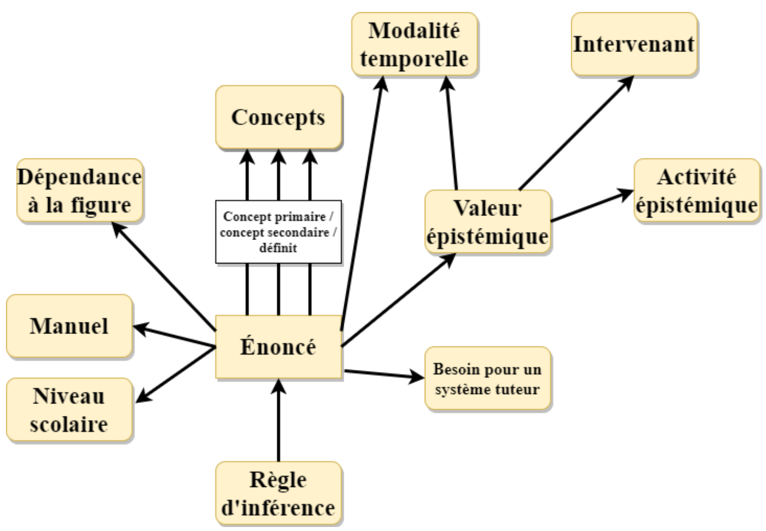


Figure 11 : Graphe de connaissance pour les enregistrements.

[11] Les codes pour les concepts primaires et secondaires sont détaillés à la section 4.2.1.
[12] Pour plus d'information concernant le type de fichier généré par *Protégé* : https://www.w3.org/TR/rdf-primer/

Manuel	Niveau	Propriété ou définition	Résumé	Concepts primaires	Concepts secondaires	Moment de l'apparition	Dépendance figurale	Valeur épistémique	Besoin pour QEDX
Panoramath	1re secondaire	Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés	Définition quadrilatère	& quadrilatère &	& polygone & segment > côté &	Note de cours	Énoncé et figure indépendants		Glossaire
Math 3000	1re secondaire	Un quadrilatère est un polygone ayant 4 côtés et 4 sommets.	Définition quadrilatère	& quadrilatère &	& point > sommet & polygone & segment > côté &	Note de cours	Énoncé et figure indépendants		Glossaire
Sommets	1re secondaire	Un quadrilatère est un polygone è quatre côtés.	Définition quadrilatère	& quadrilatère &	& polygone & segment > côté &	Note de cours	Énoncé et figure indépendants		Glossaire
Perspective	2e secondaire	Quadrilatère : Polygone ayant quatre côtés.	Définition quadrilatère	& quadrilatère &	& polygone & segment > côté &	Synthèse	Aucune figure		Glossaire
Math 3000	4e secondaire-CST	Si, dans un quadrilatère, une diagonale est bissectrice de deux angles opposés, alors elle détermine deux triangles congrus.	Propriété de quadrilatère	& quadrilatère &	& angle > angles opposés & congruence > congruence de triangles & demi-droite > droite > bissectrice & triangle &	Exercice	Énoncé et figure indépendants	Démontrée et guidée durant les exercices	Implémenter
Math 3000	4e secondaire-SN	Si, dans un quadrilatère, une diagonale est bissectrice de deux angles opposés, alors elle détermine deux triangles congrus.	Propriété de quadrilatère	& quadrilatère &	& angle > angles opposés & congruence > congruence de triangles & demi-droite > droite > bissectrice & triangle &	Exercice	Énoncé et figure indépendants	Démontrée et guidée durant les exercices	Implémenter
Math 3000	5e secondaire-SN	Si un quadrilatère a deux côtés congrus et parallèles alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	Propriété de quadrilatère	& quadrilatère &	& congruence > congruence de segments & quadrilatère > parallélogramme & segment > côté & segment > segments parallèles &	Exercice	Énoncé et figure indépendants	Démontrée et guidée durant les exercices	Implémenter
Math 3000	5e secondaire-TS	Si un quadrilatère a deux côtés congrus et parallèles alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	Propriété de quadrilatère	& quadrilatère &	& congruence > congruence de segments & quadrilatère > parallélogramme & segment > côté & segment > segments parallèles &	Exercice	Énoncé et figure indépendants	Démontrée et guidée durant les exercices	Implémenter
Panoramath	1re secondaire	Quadrilatère sans particularité : aucun côté parallèle	Définition quadrilatère	& quadrilatère &	& segment > côté & segment > segments parallèles &	Note de cours	Énoncé et figure indépendants		Implémenter

Figure 12 : Capture d'écran du fichier Excel après la compilation des référentiels

La quatrième étape (étape 4) a été de comparer les enregistrements entre eux selon les différentes composantes. Le fichier créé à partir du logiciel *protégé* nous a permis d'utiliser des requêtes SPARQL[13] à l'aide d'un autre logiciel appelé *graphDB* (Onototext, 2020). Des captures d'écran de chacun de ces deux logiciels sont présentées à l'annexe 4. Les requêtes SPARQL ont l'avantage d'utiliser des variables à plusieurs valeurs (tableau) qui satisfont les restrictions données par l'usager. De plus, nous avons choisi d'utiliser le graphe de connaissance et les requêtes de type SPARQL pour remédier au problème du nombre de codes variable pour chaque catégorie. Il est en effet possible, par exemple, qu'un énoncé renferme plusieurs concepts secondaires. Dans le tableau *Excel*, tous les concepts secondaires sont placés dans la même cellule et séparés par le caractère « & », ne permettant ainsi pas d'utiliser la fonction « filtre ». À l'opposé, dans le graphe de connaissance, chaque concept secondaire correspond à un nœud unique qui est relié à chaque énoncé possédant ce concept secondaire. Comme les requêtes de type SPARQL interrogent ce graphe, il devient alors possible de filtrer les données en fonction des concepts secondaires. Par exemple, nous pouvions faire une requête où tous les énoncés de 1re secondaire qui ont été démontrés et qui travaillent le concept de triangle ou de quadrilatère sont affichés à l'écran. Nous avons ainsi utilisé ce type de requêtes pour toute notre analyse afin de ressortir les éléments auxquels nous nous intéressions.

[13] Pour plus d'information concernant les requêtes SPARQL : https://www.w3.org/TR/rdf-sparql-query/

4 Présentation et analyse des résultats

Ce chapitre présentera à la fois les résultats et notre analyse subséquente. Étant donné la nature et le nombre important de données, 2855 énoncés répartis en 707 règles d'inférence, nous les présenterons par bloc au travers des prochaines sections. Il est possible de télécharger l'ensemble des données à l'adresse :

https://drive.google.com/file/d/1cJztVXQ_MT1Bu-p7tfInAaYExGVOeNRZ/view?usp=sharing

Nous rappelons que notre objectif est de dégager les référentiels et l'usage des raccourcis inférentiels dans le système scolaire québécois. De plus, nos trois questions spécifiques sont :

- Quels sont les référentiels géométriques utilisés dans les manuels scolaires et cahiers d'apprentissages du secondaire?
- Quelles sont les caractéristiques, discursives et paradigmatiques, des référentiels des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissages du secondaire et en quoi diffèrent-ils les uns des autres?
- Comment peut-on adapter les référentiels des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissages du secondaire à un référentiel utilisé par un ordinateur?

Bien que l'ensemble des données réponde en soi à notre première question spécifique, des détails seront donnés dans les prochaines sections, notamment dans une brève description des données dans la section 4.1. Les caractéristiques discursives des référentiels seront mises au premier plan dans la section 4.2, alors qu'une analyse en termes de paradigme sera de vigueur à la section 4.3. Ensuite, nous présenterons à la section 4.4 différents types de référentiels que nous avons dégagés lors de notre travail de recherche. Finalement, l'adaptation des référentiels pour l'ordinateur sera discutée à la section 4.5.

4.1 Description des données

Cette brève section a pour but de présenter les données que nous avons constituées. Le tableau 5 présente le nombre de définitions, de propriétés, de formules, de processus et de notes sémiotiques relevé par ouvrage. Notamment, la délimitation entre une ou plusieurs propriétés n'est pas toujours claire lorsque le texte est organisé en long paragraphe. Lorsque c'était le cas, nous avons opté pour conserver le paragraphe en un énoncé, mais qui est composé de plusieurs propriétés ou définitions (d'où l'inégalité entre le nombre d'énoncés et le nombre total d'éléments dans le tableau 5). Aussi, la distinction entre une définition et une propriété caractéristique n'est pas toujours claire, nous avons alors décidé d'être cohérent selon la forme de l'énoncé, même si cela signifiait d'avoir plusieurs définitions d'un même objet. De façon similaire, il n'est pas toujours évident de distinguer une formule d'une propriété puisqu'il est possible de considérer une formule comme étant une propriété d'un objet (ex. la formule d'aire d'un triangle étant une propriété du triangle). Nous avons choisi d'identifier l'énoncé comme une formule lorsque la finalité de l'énoncé était un calcul.

Tableau 5 : Occurrence des éléments du référentiel

		Définition	Propriété	Formule	Processus	Note sémiotique	total
Mathématiques 3000	1re	90	43	10	0	0	143
	4e CST	28	54	9	6	0	97
	4e SN	32	59	10	11	1	113
	5e TS	62	108	21	4	8	203
	5e SN	41	50	8	4	7	110
Sommets	1re	105	59	3	1	0	168
Point de Mire	3e	31	24	35	0	0	90
Panoramath	1re	142	68	0	1	0	211
	2e	150	97	33	3	0	283
Perspective[14]	2e	142	43	13	3	2	203
Intersection	3e	26	14	10	5	0	55
	4e CST	60	61	18	3	5	147
	4e SN	44	33	9	1	2	89
	5e CST	19	7	1	1	0	28
Point de Vue	3e	138	70	37	4	4	253
	4e SN	79	44	32	4	0	159
	5e CST	68	30	42	4	0	144
Visions	5e TS	215	175	41	0	0	431
	5e SN	188	119	49	0	0	356
Total		1660	1158	381	55	29	3283

[14] Pour une raison de forme, les manuels *Perspective mathématique* et *Point de Vue mathématique* seront abrégés respectivement à *Perspective* et *Point de Vue* dans les tableaux de ce chapitre.

Le tableau 5 montre ainsi une plus grande occurrence d'énoncés de définition, suivi des propriétés, et ce dans presque tous les ouvrages à l'étude. Nous remarquons aussi un nombre étonnement élevé d'éléments du référentiel dans certains ouvrages, notamment dans Panoramath, Visions et Point de Vue mathématique. Ceci est principalement dû à l'importance accordée au référentiel synthèse dans ces ouvrages : on y retrouve parfois un retour sur le référentiel en plus d'un glossaire de définitions. Nous y retrouvons également une quantité importante de formules (principalement d'aire), ce qui explique le nombre plus élevé de cette catégorie dans ces manuels.

De plus, les règles d'inférence les plus fréquentes, tous ouvrages confondus, sont :

- « si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques » (23 occurrences);
- « lorsqu'une figure est un agrandissement, une réduction ou une reproduction d'une autre, ces figures sont dites semblables » (19 occurrences);
- « la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180° » (19 occurrences);
- « tout triangle rectangle vérifie la relation de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$ » (19 occurrences).

En continuant cette liste, il est possible de se rendre compte que les équipes d'auteurs interprètent la Progression des apprentissages relativement de la même façon. De façon générale, les référentiels sont constitués d'un noyau de propriétés et définitions qui est toujours présent dans les différents ouvrages de la même année. Ce noyau de propriétés sera d'ailleurs utilisé à la section 4.5. De plus, ceux-ci contiennent davantage de définitions et de propriétés que des autres types d'éléments repérés (formules, processus et note sémiotique).

Finalement, différentes parties des résultats seront présentées dans les prochaines sections. Notons que, de la même manière que pour le tableau précédent, il aurait été possible d'identifier d'une manière ou d'une autre les données pour chaque enregistrement.

4.2 Analyse discursive des référentiels

Pour une étude sur les référentiels, il nous semble important de mettre au premier plan l'aspect discursif des référentiels. Nous rappelons que dans la théorie des espaces de travail mathématique, liée au référentiel et à la preuve, la genèse discursive constitue un élément important et peut être au premier plan d'un travail mathématique. Dans un ETM engendré par un problème, cette genèse prend notamment en compte le discours, autant sous forme de raisonnement que de communication. De plus, en mathématiques, la preuve menant aux éléments du référentiel devrait en assurer la valeur logique (validité interne) et, d'une autre part, les éléments du référentiel devraient permettre et assister la résolution de problèmes de preuve (validité externe). Dans les deux prochaines sous-sections, nous analyserons les référentiels en fonction de leur validité interne et, dans une troisième sous-section, nous analyserons leur validité externe.

4.2.1 La validité des référentiels : des concepts implicites

Pour qu'un référentiel de géométrie soit valide, il faut que ses éléments soient vrais. Dans l'optique de l'îlot déductif, cela signifie qu'à partir de certaines propriétés acceptées comme vraies, d'autres propriétés sont démontrées. De manière similaire, plusieurs concepts utilisés dans les référentiels géométriques sont intuitifs et permettent de définir les autres. L'annexe 5 présente l'ensemble de tous les concepts utilisés lors des enregistrements. Ces 433 concepts ont été relevés au fur et à mesure du codage des enregistrements. Notons qu'il existe des concepts équivalents à ceux utilisés lors du codage, ce qui sera discuté à la sous-section 4.2.3. De plus, certains concepts en englobent d'autres, comme le concept de côté qui englobe le concept de segment (un côté est un segment, mais un segment n'est pas forcément un côté). C'est pour cette raison que la liste de concepts utilisés a été organisée hiérarchiquement (voir annexe 5). De plus, le tableau 6 montre les 20 concepts les plus fréquents au sein des énoncés extraits.

Nous voyons que les concepts simples sont les plus fréquents et, plus particulièrement, nous voyons que les plus fréquents en ordre décroissant sont : angle, segment[15], triangle, polygone,

[15] Le concept de « mesure d'un segment » revient plus souvent que le concept « segment » parce que le concept de « mesure d'un côté » a été codé à partir des concepts de « mesure d'un segment » et de « côté ».

quadrilatère. Cet ordre semble refléter le curriculum québécois. Nous remarquons toutefois que les concepts d'aires et de volumes ne sont pas présents, ce qui peut s'expliquer par le fait que pour chaque formule d'aire ou de volume, nous retrouvons également les concepts de mesure d'un segment, de côté, de base d'un solide, etc.

Tableau 6 : Les concepts les plus utilisés

Concept	Nombre d'occurences	Concept	Nombre d'occurence
Angle	638	Hauteur	191
Côté	609	Quadrilatère	184
Mesure d'un segment	473	Congruence de segments	182
Triangle	415	Cercle	168
Mesure d'un angle	312	Triangle rectangle	163
Congruence d'angles	239	Base d'un solide	145
Droite	239	Mesure	144
Point	220	Hypoténuse	132
Polygone	205	Parallélogramme	125
Segment	200	Solide	120

À partir du codage des concepts, nous avons extrait ceux qui ne sont pas explicitement définis dans les référentiels. Pour ce faire, nous avons pris l'ensemble complément des concepts qui ont été notés comme définis. Le tableau 7 de la page suivante montre ainsi la liste des concepts implicites à travers l'ensemble des ouvrages étudiés. La colonne de gauche représente les concepts clés (ou communs) aux concepts implicites qui se trouvent dans la colonne de droite. Autrement dit, il est possible que les concepts de la colonne de gauche soient définis et, si ce n'est pas le cas, ils seront répétés dans la colonne de droite. Finalement, pour faciliter la lecture, nous avons ajouté des spécifications entre crochets ([ ]) à certains concepts utilisés lors de la codification.

Tableau 7 : Concepts non définis dans l'ensemble des ouvrages

Concepts clés	Concepts implicites
mesure	mesure [en général]; mesure d'un segment; mesure d'un angle
surface	plan [(espace à deux dimensions)]; région du plan; région intérieure [d'une figure]; surface; surface plane; surface fermée; surface courbe; plans parallèles
ligne	ligne; ligne fermée; ligne courbe; ligne brisée; ligne d'intersection
point	point commun; intersection; point de rencontre; points alignés
segment	prolongement d'un segment; segment perpendiculaire à un plan
droite	droite support; inclinaison [d'une droite]
transformation géométrique	flèche de rotation; flèche de translation; forme [d'une figure]; [figure] superposable; orientation d'une figure; réduction; reproduction; agrandissement; faces homologues; solide image; point image; sommets homologues; centre d'homothétie
solide	faces parallèles; base d'un solide; face courbe; sommet opposé à une base [d'un solide]; rayon d'une sphère
triangle	sommet opposé à un côté; angle à la base; angle opposé à un côté
quadrilatère	grande diagonale; petite diagonale; grande base; petite base
polygone	centre d'un polygone [régulier]; sommets consécutifs

Une première lecture du tableau 7 nous fait remarquer un plus grand nombre de concepts non définis concernant les transformations géométriques, ce que Tanguay (2004, 2005, 2006) semble d'ailleurs avoir aussi remarqué. En revanche, plusieurs de ces concepts sont des instances de concepts plus généraux qui ont été définis. C'est notamment le cas pour les concepts de sommets homologues ou de point image où les concepts plus généraux d'éléments homologues et de figures images sont définis. Aussi, pour les concepts de mesures, nous croyons tout à fait naturel qu'ils restent implicites, puisqu'ils sont travaillés amplement au primaire. Nous pensons d'ailleurs inévitable que plusieurs concepts restent implicites : pour les définir, il faudrait d'autres concepts qui, eux, resteraient alors implicites. Le tableau 7 présente donc des concepts jugés plus intuitifs par les équipes d'auteurs des ouvrages. Il est ainsi possible de croire que ces concepts font partie du lexique mathématique choisi par les auteurs afin de former leur référentiel. Par exemple, le concept de la mesure d'un segment (ou longueur) est intuitif pour l'élève, mais la notion de distance, elle, est définie (lorsqu'elle est définie) à partir du concept de la mesure d'un segment :

- « on appelle distance entre deux points la longueur du segment qui joint ces deux points »;
- « distance : nombre exprimant la longueur du plus court segment joignant un objet à un autre »;

- « on appelle distance d’un point A à une droite d, la longueur du segment AH issu du point A et perpendiculaire à la droite d ».

On peut voir dans ces définitions un passage de la géométrie naturelle (GI), où la définition de la longueur reste intuitive et fait partie du lexique mathématique, vers la géométrie axiomatique naturelle (GII), où la distance devient un concept défini et fait partie du référentiel. Une analyse plus approfondie des référentiels en ce qui concerne les paradigmes sera faite à la section *Analyse paradigmatique des référentiels*.

Comme pour le concept de mesure d’un segment, celui de la mesure d’un angle semble être difficile à définir mathématiquement. Nous retrouvons dans les référentiels la mention générale qu’un « angle se mesure habituellement en degrés » et un seul ouvrage tenter d’aller plus loin : « lorsque deux lignes droites sont issues d’un même point, l’écartement entre ces deux lignes détermine un angle. Plus les lignes sont écartées, plus l’angle est grand ». Notons quand même l’ambigüité possible avec le terme « écartement » s’il est compris dans le sens « distance qui sépare deux objets écartés l’un de l’autre » : à partir d’où doit-on vérifier cet écartement? Faut-il comprendre que plus un angle est mesuré loin de son sommet, plus sa mesure est grande ou, à l’inverse, doit-on se fier à la définition mathématique du concept de distance mentionnée précédemment (« distance : nombre exprimant la longueur du plus court segment joignant un objet à un autre ») et comprendre que l’écartement est toujours nul puisque les demi-droites ont un point commun? Nous voyons ainsi des tentatives dans les ouvrages d’expliquer des concepts, mais sans vraiment les définir. Ces tentatives laissent parfois une ambigüité qui pourrait même causer un obstacle à des élèves.

Nous croyons aussi important de mentionner le flou entourant le concept de « forme [d’une figure] ». En effet, dans les référentiels étudiés, ce terme fait partie du lexique utilisé dans les propriétés touchant la similitude et l’isométrie, comme « deux figures sont semblables si elles ont la même forme » ou « deux figures sont dites isométriques ou congrues lorsqu’elles ont la même forme et les mêmes dimensions ». Or, il est possible de définir l’isométrie à partir de réflexions sans mentionner le concept de forme, comme le fait Cimasoni (2014, p. 31). Pour la similitude, il serait suffisant d’ajouter l’homothétie. Dans les manuels québécois, il semblerait que le concept de forme relève plutôt du representamen des figures et de la visualisation qu’en fait un individu : si deux figures ont la même allure, alors elles sont semblables et si en plus elles ont les mêmes dimensions, alors elles sont isométriques. Il s'agirait là d'une inférence figurale (Richard, 2004a). Notre étude se faisant en parallèle avec l'implémentation d'un référentiel informatique, et comme les ordinateurs ne sont pas en mesure de produire ces inférences figurales, nous avons cherché à étendre le concept de forme, ou plutôt les propriétés utilisant ce concept, pour l'utiliser dans des inférences discursives. Or, il existe déjà, dans les référentiels des propriétés portant sur l'isométrie, des angles homologues des figures semblables et isométriques, et, par extension, du nombre de côtés de la figure. Si les propriétés sur la forme des figures devaient être utilisées dans un raisonnement discursif, nous y voyons un raccourci possible[16], bien que direct, qui permet de transférer des relations entre les côtés et les angles de deux figures semblables ou isométriques. Par exemple, si le triangle ABC isocèle est semblable au triangle DEF, alors le triangle DEF est aussi isocèle! Il s'agirait ici d'un raccourci, puisque cette déduction se ferait normalement en deux inférences à partir de la proportionnalité des côtés homologues. À l'opposé, il est aussi possible que le concept de forme ne soit exploité que pour expliquer et donner du sens aux concepts de similitude et d'isométrie, c'est-à-dire qu'il ne serait pas prévu que les propriétés incluant la forme des figures soient même utilisées pour un raisonnement. En fait, plusieurs indices nous laissent croire que c'est le cas : 11 des 17 propriétés ou définitions utilisant ce concept sont de la forme « isométrie : figures ayant la même forme et les mêmes dimensions » que nous retrouvons majoritairement dans la partie synthèse ou glossaire des ouvrages. Bref, il n'est pas clair comment les propriétés incluant le concept de forme sont utilisées dans les ouvrages.

D'un autre côté, nous retrouvons aussi des concepts dont l'implicité peut, selon nous, causer un problème de rigueur au sein du référentiel ou, du moins, limiter l'expansion discursive possible à partir de celui-ci. C'est notamment le cas pour le concept de centre d'un polygone [régulier]. Celui-ci est utilisé pour définir l'apothème d'un polygone (qui est, à son tour, utilisée pour des calculs d'aires) et l'angle en son centre. Bien que, dans les ouvrages étudiés, le centre d'un polygone [régulier] reste un concept intuitif, il est tout à fait possible de le définir mathématiquement, d'autant plus que c'est un objet ayant plusieurs particularités : c'est à la fois le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit au polygone régulier, c'est le point

[16] Nous discutons plus amplement des raccourcis inférentiels à la section 4.5.2 Des raccourcis inférentiels pour une adaptation humaine d'un référentiel informatique.

équidistant des sommets et aussi le point équidistant des côtés. Il nous semble ainsi avantageux de le définir pour étendre l'ensemble de problèmes pouvant être résolus par le référentiel.

Si le tableau 7 montre les concepts implicites dans l'ensemble des ouvrages étudiés, nous retrouvons à l'annexe 6 les concepts implicites pour chaque série de manuels[17]. En considérant les concepts de la sorte, nous nous rendons compte que les relations entre des objets, notamment la perpendicularité et le parallélisme, ne sont, dans la majorité des cas, définies que pour les droites. Le passage de ces relations à des segments ou des plans est ainsi laissé à l'enseignant ou à l'élève. Or, à notre avis, il y a là un problème de cohérence, car des droites parallèles sont souvent définies comme étant des « droites n'ayant aucun point commun ». L'élève devrait-il comprendre que des segments n'ayant aucun point commun sont aussi parallèles et donc des côtés non consécutifs d'un pentagone régulier sont aussi parallèles? Évidemment que non, des segments ne sont parallèles que si leurs droites supports sont parallèles. À notre avis, cette incohérence est d'autant plus marquée que le concept de droite support n'est pas défini. Cette incohérence revient de manière similaire pour les plans – et, conséquemment, les faces des solides – où l'on définit des prismes à partir de faces isométriques et de faces parallèles. Bien que l'élève puisse intuitivement connaître la manière de transposer certaines relations entre objets à un espace à 3 dimensions, le passage est moins évident lorsqu'il s'agit de la perpendicularité entre deux objets, en particulier dans le cas d'une droite et d'un plan. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut qu'au moins deux droites du plan soient chacune perpendiculaire à la droite qui coupe le plan, comme c'est le cas de n'importe quelle arête d'un cube par exemple. Or, pour chaque droite sécante à un plan, il existe une droite perpendiculaire à la droite sécante qui appartient au plan. Il nous semble que le manque de définitions, particulièrement en géométrie en 3 dimensions, restreigne le raisonnement discursif et limite l'apprenant à une géométrie s'éloignant du raisonnement hypothético-déductif. D'ailleurs, de notre expérience personnelle, nous savons que les élèves de 3e secondaire sont parfois amenés à utiliser la relation de Pythagore à l'intérieur de divers prismes et ce passage de la perpendicularité dans la troisième dimension devient problématique : non seulement la visualisation en 3 dimensions est difficile pour ces élèves, mais aussi la représentation d'un solide sur une feuille en 2 dimensions trompe l'œil sur les grandeurs des angles et des arêtes. Les élèves,

[17] Pour recueillir l'ensemble des concepts implicites dans une série de manuels, nous avons utilisé la formule suivante: $\{concepts\ implicites\} = \{concepts\ utilisés\ dans\ la\ série\} \setminus (\{concepts\ définis\ dans\ la\ série\} \cup \{concepts\ définis\ dans\ les\ niveaux\ antérieurs, toute\ série\ confondue\} \cup \{concepts\ du\ tableau\ 4\})$

après un certain temps, s'accoutument avec cette représentation et une forme de contrat didactique émerge : bien que les angles n'aient pas l'allure d'angles droits, ils le sont. Ce contrat est nourri par la récurrence des prismes droits et des pyramides droites dans les problèmes touchant la 3e dimension. Or, cette habitude fait justement obstacle lorsque deux segments ne sont pas perpendiculaires puisque la perpendicularité dans l'espace n'est pas bien définie!

Pour conclure, les équipes d'auteurs utilisent implicitement plusieurs concepts dans leurs ouvrages. Bien que dans plusieurs cas cela soit tout à fait naturel et attendu, comme pour les concepts de mesure, il arrive que des concepts mériteraient d'être définis afin d'alimenter la genèse discursive, comme celui de centre d'un polygone [régulier] et que d'autres concepts sont définis de façon ambigüe. D'ailleurs, dans une démarche ultérieure, il serait possible d'utiliser QEDX pour vérifier la validité externe de chacun des référentiels (Font, 2021), c'est-à-dire de vérifier si les référentiels permettent bel et bien la résolution de problèmes de preuve. Finalement, certains concepts de relations entre des objets sont définis dans un domaine de validité restreint, pouvant ainsi créer toute sorte de difficultés lors de la résolution de problèmes de géométrie, comme c'est le cas pour les concepts de segments parallèles ou de segments perpendiculaires à un plan. Si cette sous-section analysait les concepts utilisés, la prochaine sous-section touchera l'encapsulation et le court-circuitage des propriétés.

4.2.2 La validité des référentiels : des propriétés encapsulées et d'autres court-circuitées

Nous présenterons d'abord une vue d'ensemble à l'aide de données quantitatives pour ensuite enchaîner vers une analyse qualitative de cas particuliers. Ainsi, pour faire suite à l'analyse des concepts implicites, nous analyserons les propriétés des référentiels selon leur mode d'établissement. Nous entendons par mode d'établissement d'une propriété l'activité proposée qui met en place cette propriété et qui, par le fait même, est liée à la valeur épistémique de la propriété. À titre de rappel, nous avons codé chaque propriété comme étant non démontrée, expliquée (argumentation), vérifiée numériquement, vérifiée par cas de figure, justifiée (à l'aide de propriétés mathématiques) ou démontrée. De plus, nous appelons une « propriété court-circuitée » un raccourci inférentiel non démontré et une « propriété encapsulée » un raccourci inférentiel démontré (voir section 2.3). Le tableau 8 de la page suivante présente le nombre d'instances de chaque catégorie selon l'ouvrage.

Tableau 8 : mode d'établissement des propriétés

		Non démontrée	Expliquée	Vérifiée par cas numériques	Vérifiée par cas de figures	Justifiée	Démontrée	total
Mathématiques 3000	1re	14	15	3	13	6	3	54
	4e CST	40	8	0	1	0	18	67
	4e SN	32	20	0	7	4	13	76
	5e TS	51	15	8	17	3	30	124
	5e SN	24	9	3	8	2	12	58
Sommets	1re	50	2	0	2	2	0	56
Point de Mire	3e	55	0	2	0	0	0	57
Panoramath	1re	58	2	0	1	2	0	63
	2e	101	4	4	17	0	0	126
Perspective	2e	30	8	0	13	0	2	53
Intersection	3e	6	5	1	4	0	3	19
	4e CST	39	8	0	20	4	4	75
	4e SN	57	5	0	6	3	4	75
	5e CST	4	1	0	4	0	0	9
Point de Vue	3e	93	2	0	2	0	0	97
	4e SN	49	12	0	4	0	12	77
	5e CST	64	3	0	6	0	0	73
Visions	5e TS	184	2	1	4	7	0	198
	5e SN	159	1	0	0	0	1	161
Total		1110	122	22	129	33	102	1520

Nous remarquons d'emblée le nombre plus important de propriétés non démontrées, et ce, pour toutes les séries d'ouvrages à l'étude. Nous retrouvons ainsi un total de 1110 propriétés non démontrées, 122 expliquées, 22 vérifiées par des cas numériques, 129 par des cas de figures, 33 justifiées et 102 démontrées. On remarque que seulement trois ouvrages se démarquent par un équilibre entre la catégorie non démontrée et les autres : Mathématiques 3000 en 1re secondaire, Intersection en 3e secondaire et en 5e secondaire CST. Ce sont également trois des ouvrages où le nombre total de propriétés est plus petit. Nous ne sommes toutefois pas en mesure de déterminer un lien de cause à effet entre la proportion de propriétés non démontrées et le nombre total de propriétés dans un ouvrage, d'autant plus que plusieurs des propriétés relevées se retrouvent à la fin des manuels, comme faisant partie d'une synthèse ou d'un glossaire. Étant donné que celles-ci ont été codées de façon indépendante aux autres sections des ouvrages (activité, notes de cours et exercice), presque la totalité d'entre elles ont été notée comme « non démontrée ». Le tableau 9 reprend ainsi le tableau précédent, mais sans les propriétés du référentiel synthèse.

Tableau 9 : mode d'établissement des propriétés en excluant celles du référentiel synthèse

		Non démontrée	Expliquée	Vérifiée par cas numériques	Vérifiée par cas de figure	Justifiée	Démontrée	total
Mathématiques 3000	1re	14	15	3	13	6	3	54
	4e CST	40	8	0	1	0	18	67
	4e SN	32	20	0	7	4	13	76
	5e TS	51	15	8	17	3	30	124
	5e SN	24	9	3	8	2	12	58
Sommets	1re	31	2	0	2	2	0	37
Point de Mire	3e	30	0	2	0	0	0	32
Panoramath	1re	21	2	0	1	2	0	26
	2e	31	4	4	13	0	0	52
Perspective	2e	8	8	0	13	0	2	31
Intersection	3e	4	5	1	4	0	3	17
	4e CST	26	5	0	10	4	3	48
	4e SN	24	5	0	6	3	4	42
	5e CST	4	1	0	4	0	0	9
Point de Vue	3e	16	2	0	2	0	0	20
	4e SN	20	12	0	4	0	12	48
	5e CST	17	0	0	6	0	0	23
Visions	5e TS	41	2	1	4	7	0	55
	5e SN	25	1	0	0	0	1	27
Total		459	116	22	115	33	101	846

Le nombre de propriétés non démontrées diminue de façon importante, mais reste quand même, de façon générale, plus important que les autres activités. Nous expliquons la différence entre les deux tableaux par le fait que les propriétés issues du référentiel synthèse se retrouvent souvent à être une répétition du référentiel de l'ouvrage ou des référentiels des niveaux antécédents. Il s'agit ainsi d'une section des ouvrages que l'apprenant peut consulter et rapidement retrouver une définition ou une propriété qu'il cherchait. Nous croyons que c'est pour cette raison que les équipes d'auteurs gardent ces sections épurées d'activités liées à la valeur épistémique. Nous remarquons également la similitude entre le nombre d'activités d'explication et d'activités de vérification de cas de figure, alors que les activités de vérification de cas numérique sont plus rares, ce qui n'est pas une contradiction pour des référentiels de géométrie. De plus, mise à part la série Mathématiques 3000, le nombre de propriétés qui sont soit justifiées soit démontrées est moins grand. Pourtant, nous pensons que les propriétés encapsulées se retrouvent dans l'une de ces deux catégories alors que les propriétés court-circuitées se retrouvent plutôt dans la catégorie « non démontrée ». Les autres catégories, « expliquée », « vérifiée par cas numériques » et « vérifiée par cas de figures », se retrouvant alors dans un entre-deux. Toutefois, pour mieux faire la distinction entre les propriétés encapsulées et court-circuitées, nous pensons qu'il est important de vérifier l'acteur responsable de l'activité. Nous avons ainsi différencié le mode d'établissement de chaque propriété. Celle-ci peut avoir été travaillée par l'élève (É), par l'élève de façon guidée (G) ou directement donnée (D). Dans ce dernier cas, l'activité d'établissement est complétée en avance par les auteurs et l'élève n'a qu'à lire le texte. Le tableau 10 présente le nombre d'instances des activités liées à la valeur épistémique pour chaque manuel selon l'acteur de l'activité sans le référentiel synthèse. Le tableau incluant le référentiel synthèse se retrouve à l'annexe 7.

Tableau 10 : mode d'établissement des propriétés en excluant celles du référentiel synthèse selon les acteurs

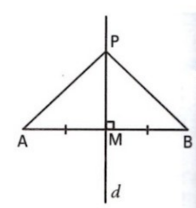
		Non démontrée	Expliquée			Vérifiée par cas numériques			Vérifiée par cas de figure			Justifiée			Démontrée			Total		
			D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É
Maths 3000	1re	14	0	6	9	0	3	0	0	13	0	0	6	0	0	2	1	0	30	10
	4e CST	40	0	7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	18	0	0	26	1
	4e SN	32	2	7	11	0	0	0	0	7	0	2	0	2	0	12	1	4	26	14
	5e TS	51	2	10	3	0	8	0	0	17	0	1	2	0	0	30	0	3	67	3
	5e SN	24	1	4	4	0	3	0	0	8	0	1	1	0	0	11	1	2	27	5
Sommets	1re	31	2	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	5	1	0
Point de Mire	3e	30	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
Panoramath	1re	21	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	4	1
	2e	31	0	4	0	0	4	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	19	0
Perspective	2e	8	0	1	7	0	0	0	0	3	10	0	0	0	1	0	1	1	4	18
Intersection	3e	4	4	1	0	0	1	0	0	4	0	0	0	0	2	0	1	6	6	1
	4e CST	26	5	0	0	0	0	0	0	10	0	4	0	0	1	2	0	10	12	0
	4e SN	24	2	2	1	0	0	0	0	6	0	2	0	1	0	0	4	4	8	6
	5e CST	4	1	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0
Point de Vue	3e	16	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
	4e SN	20	4	6	2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	3	9	4	13	11
	5e CST	17	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0
Visions	5e TS	41	1	1	0	0	1	0	0	4	0	0	7	0	0	0	0	1	13	0
	5e SN	25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Total		459	25	53	38	2	20	0	1	104	10	12	17	4	4	79	18	46	269	70

Sans prendre en compte le référentiel synthèse, il y a un total de 46 propriétés dont l'activité du mode d'établissement est complètement donnée, 269 pour lesquelles l'activité se fait de façon guidée et 70 pour lesquelles l'activité est gérée par l'élève. Selon la théorie des situations didactiques en mathématique (Brousseau, 1998), les mathématiques s'apprennent par la résolution de problèmes. Nous pensons que de façon similaire, il est préférable pour l'apprentissage que l'activité du mode d'établissement soit prise en charge par l'élève (en interaction avec le milieu) plutôt que par l'enseignant. Du moins, nous croyons que l'apprentissage de la géométrie serait alors plus significatif pour l'élève. Mis à part les propriétés non démontrées, le tableau 10 montre une prédominance des activités guidées qui sont quelque part à mi-chemin entre la prise en charge par l'élève ou par l'enseignant (dans notre cas, par l'équipe d'auteurs). Le guidage dans ces activités peut aider l'élève dans ses apprentissages si l'activité se retrouve dans sa zone de développement proximal (Vygotsky, 1997). Ainsi, dans un manuel, l'information donnée par le milieu peut contribuer à élargir les connaissances d'un élève. Toutefois, le guidage peut aussi avoir l'effet opposé lorsqu'il efface une partie des connaissances visées, et, à la limite, peut même constituer un effet Topaze (Brousseau, 1998) si les connaissances visées sont complètement effacées. Notre étude n'a pas comme objectif de déterminer de façon précise les nuances entre les différents milieux des activités liées à la valeur épistémique des propriétés. Nous y voyons d'ailleurs une possibilité d'étude en continuation avec celle-ci. Nous avons néanmoins remarqué que la plupart des activités de démonstrations guidées sont semblables à celle de la figure 13 où les conséquents sont donnés dans un tableau à deux colonnes que l'élève doit remplir en énonçant la règle d'inférence associée aux conséquents.

4. a) Donne la définition de la médiatrice d'un segment?

____

____



b) Justifie les étapes prouvant la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment: **Tout point sur la médiatrice d'un segment est situé à égale distance des extrémités de ce segment.**

Hypothèse: *d* est médiatrice du segment AB.

Considérons les triangles PMA et PMB.

Étapes	Justifications
1. $\overline{MA} \cong \overline{MB}$	
2. $\angle PMA \cong \angle PMB$	
3. $\overline{PM} \cong \overline{PM}$	
4. $\Delta PMA \cong \Delta PMB$	
5. $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	

Figure 13 : Démonstration guidée d'une propriété dans mathématiques 3000

Pour les activités de justification guidées, nous avons remarqué qu'elles sont aussi similaires : l'élève justifie à l'aide d'une règle d'inférence un énoncé donné. À la différence des démonstrations, les activités de justification n'ont pas d'enchainements d'inférences : il s'agit de nommer la propriété d'une seule règle d'inférence dont l'antécédent et le conséquent sont déjà donnés. En ce qui a trait aux activités inductives où l'élève vérifie des cas de figures ou des cas numériques, la majorité des cas (figures ou numériques) sont donnés et l'élève doit faire le travail d'émettre une conjecture à partir de ces cas. Comme Tanguay et Geeraerts (2012), nous pensons que les activités inductives peuvent être un bon départ pour l'édification d'un référentiel en classe. Toutefois, nous pensons que toujours donner tous les cas à l'étude à l'élève fabrique un milieu artificiel. En effet, non seulement on empêche l'élève de faire une partie de son travail de mathématicien, c'est-à-dire de fabriquer des cas suffisamment différents pour se convaincre et aussi de trouver les cas limites, mais on produit aussi un contrat didactique où l'élève est sûr que les cas qui lui sont remis vont être suffisants pour établir une conjecture qui sera fort probablement vraie. Nous pensons aussi que le niveau de conviction de la véracité de la propriété travaillée sera ainsi aussi artificiel : un élève pourra conclure qu'une propriété est vraie, non parce que l'activité en elle-même l'a convaincu, mais plutôt parce que tous les cas qu'on lui a donnés vérifient la propriété et puisque ce sont les cas de l'enseignant, alors la propriété est forcément vraie. Finalement, les activités d'explication guidées prennent généralement la forme « explique pourquoi … ». On demande ainsi à l'élève d'expliquer une partie d'un raisonnement donné sans spécifier la nature de l'explication attendue : comme les élèves sont habitués d'avoir des tableaux pour faire des démonstrations, il n'est pas certain par la question « explique pourquoi » que l'élève utilise des justifications mathématiques déjà vues. Notons qu'à la différence d'une activité d'explication, une activité de justification demande à l'élève d'utiliser une propriété mathématique ou, encore, l'antécédent et le conséquent sont identifiés dans la question comme début de réponse.

D'un autre côté, sans compter le référentiel synthèse, il y en a environ une propriété sur deux (459/844) qui n'est pas démontrée. Dans l'optique des îlots déductifs, il y aurait une portion de ces 459 propriétés qui serait acceptée d'emblée en raison de leur caractère intuitif (prémisse à l'îlot) et une autre portion qui serait des propriétés court-circuitées. Nous avons ainsi relevé des propriétés, qui, selon nous, font partie de ce deuxième type. Notons déjà que la distinction entre une propriété constituant une prémisse d'un îlot et une propriété court-circuitée n'est pas évidente et, sans connaître les intentions des équipes d'auteurs, relève en partie du domaine de la subjectivité. Par exemple, nous pensons que la propriété « deux angles opposés par le sommet sont isométriques », qui est vérifiée inductivement dans deux ouvrages et non démontrée dans les autres, relève plutôt d'une prémisse à un îlot déductif. À l'opposée, la propriété « si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques » est court-circuitée dans *Sommets* et la réciproque « dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes, ou encore alternes-externes) sont isométriques, alors ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante » l'est dans tous les ouvrages où elle apparait. Nous retrouvons également des propriétés placées en tant que prémisses à des îlots déductifs, mais qui, dans le contexte, arrivent de nulle part et constituent aussi des propriétés court-circuitées. L'énoncé « vérifie tes constructions: la médiatrice du segment qui joint un point et son image doit passer par le centre de rotation » de la figure 14 survenant dans une bulle à la suite d'une activité de

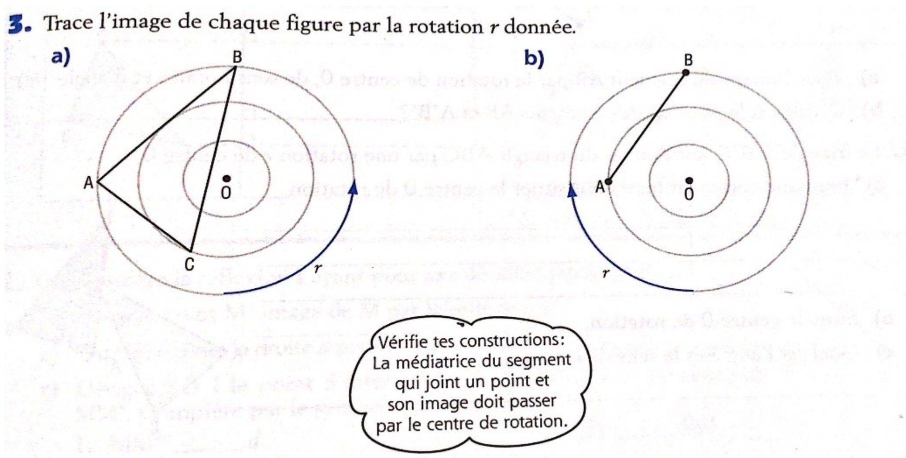


Figure 14 : Une propriété court-circuitée dans mathématiques 3000

construction en est un exemple. Les deux tableaux suivants montrent plusieurs propriétés que nous jugeons importantes pour résoudre des problèmes de preuve et dont la preuve est parfois manquante. La lettre « c » y est utilisée pour identifier les propriétés court-circuitées, la lettre « i » est utilisée lorsque la propriété est inexistante dans l'ouvrage et la lettre « e » identifie les propriétés encapsulées, ou, du moins, les propriétés qui sont établies par une quelconque activité. Finalement, nous utilisons la lettre « s » lorsqu'elle fait partie seulement du référentiel synthèse. La colonne de gauche des tableaux est réservée pour une numérotation des propriétés. Le tableau 11 met ainsi en évidence des propriétés issues des ouvrages du 1er cycle du secondaire et le tableau 12 celles des ouvrages du 2^{e} cycle.

Tableau 11 : Des propriétés court-circuitées au 1er cycle

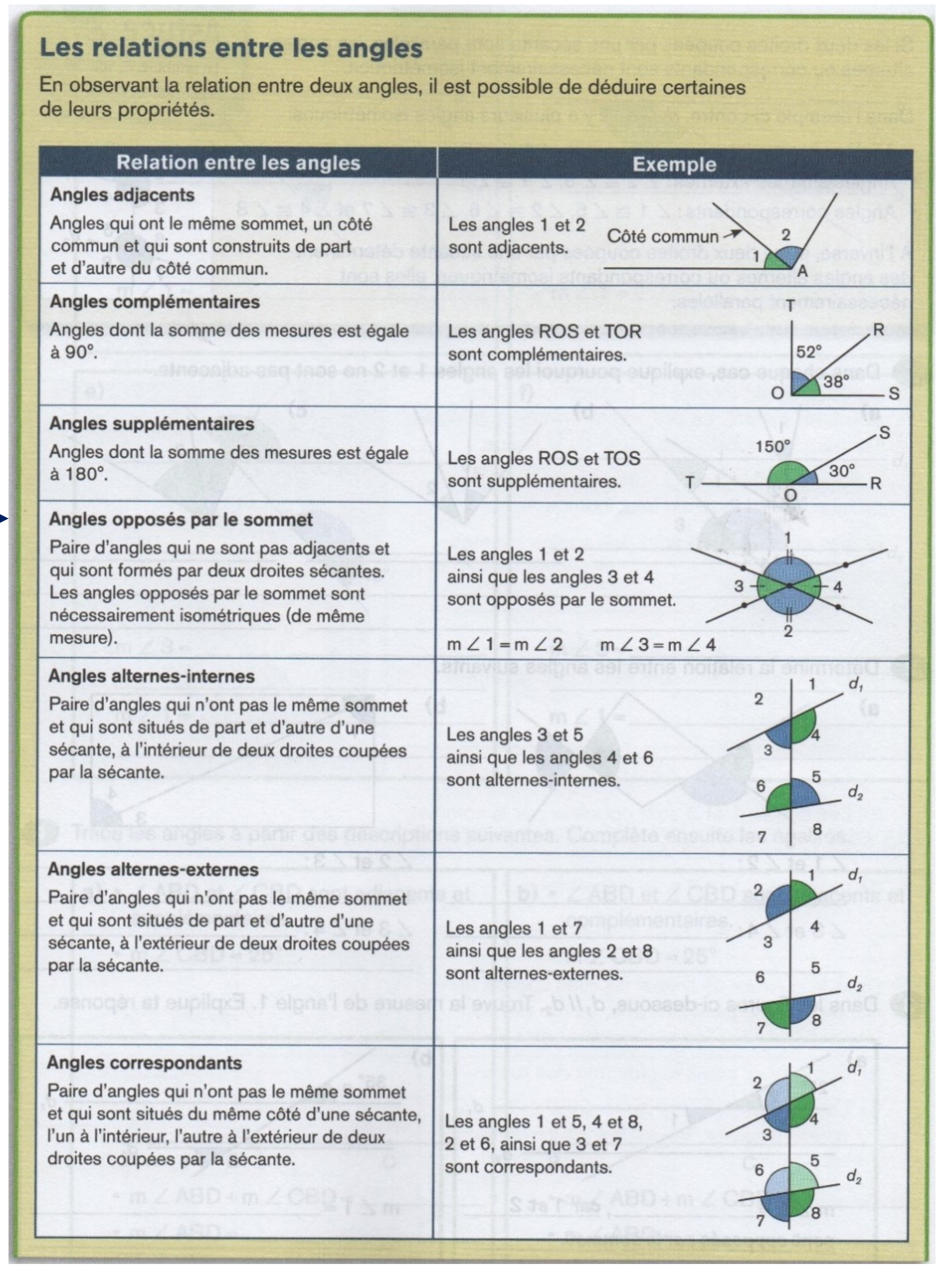
	Ouvrage Niveau scolaire	Mathématiques 3000 1re	Sommets 1re	Panoramath 1re et 2e	Perspective 2e
A1	Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires.	i	s	s	i
A2	Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont aussi parallèles entre elles.	i	s	s	e
A3	Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre.	i	s	s	i
A4	La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan situés à égale distance des extrémités du segment.	e	i	i	c
A5	La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180°	e	c	e	e
A6	La somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°.	e	e	e	i
A7	La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est $n \times 180 - 360$ ou $(n - 2) \times 180$	i	e	c	i
A8	Dans tous les triangles isocèles, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques	e	c	c	i
A9	L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.	e	i	c	e
A10	Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.	e	c	c	i
A11	Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.	e	c	c	i
A12	Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.	e	c	c	i
A13	Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques.	e	c	c	i
A14	Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.	e	c	c	i
A15	Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.	e	c	c	i

Tableau 12 : Des propriétés court-circuitées au 2e cycle

	Ouvrage	Point de Mire	Intersection	Point de Vue	Maths 3000	Visions
	Niveau scolaire	3e	3e 4e CST et SN 5e SN	3e 4e SN 5e CST	4e CST et SN 5e TS et SN	5e TS et SN
B1	La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan situés à égale distance des extrémités du segment.	i	i	s	e	i
B2	Thalès : des sécantes coupées par des droites parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.	i	c	i	e	s
B3	La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180°	s	i	s	e	s
B4	La somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°.	i	i	i	e	s
B5	La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est $n \times 180 - 360$ ou $(n - 2) \times 180$	i	i	i	i	s
B6	L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.	s	c	i	e	s
B7	Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des cathètes égale le carré de l'hypoténuse ($a^2 + b^2 = c^2$).	c	e	c	c	s
B8	Si un triangle est tel que le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.	c	c	c	i	i
B9	Loi des sinus. Les mesures des côtés d'un triangle quelconque ABC sont proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	i	e	e	e	e
B10	Loi des cosinus. Pour un triangle ABC quelconque, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$	i	c	e	e	e
B11	Formule de Héron : $A_{triangle} = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a+b+c}{2}$	i	c	c	e	i
B12	Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles, semblables au premier.	i	e	i	i	c
B13	La distance entre deux points A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B), notée d(A,B), est donnée par la formule: $d(A,B) = \sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2}$.	i	e	c	e	i

Au premier cycle, nous remarquons que les propriétés relatives aux droites parallèles et perpendiculaires (A2 et A3) sont plus souvent insérées en synthèse. Pourtant, ces ouvrages sont utilisés en début de parcours du secondaire, donc la section synthèse n'est pas un rappel des années précédentes. Dans ce cas précis, nous croyons que ces deux propriétés auraient avantage à être introduites comme prémisses à un îlot déductif en raison de leur caractère intuitif, ce qui n'est pas le cas de la propriété *si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires* (A1). Bref, puisqu'elles sont introduites en synthèse dans les ouvrages du 1^er^ cycle, nous considérons ces trois propriétés comme étant court-circuitées. Pour les autres propriétés du premier cycle (A4 à A15), nous remarquons une tendance à l'encapsulation dans un ouvrage alors qu'elles sont plutôt court-circuitées dans les autres ou simplement inexistantes dans les référentiels de 2^e^ secondaire. Toutefois, il est intéressant de mentionner le statut les propriétés portant sur les angles intérieurs des polygones (A5 à A7). En effet, dans un des ouvrages, celle qui porte sur les triangles est court-circuitée, alors que celles sur les quadrilatères et les polygones (A6 et A7) sont encapsulées. Nous sommes retournés dans cet ouvrage pour constater que la propriété des angles intérieurs d'un triangle (A5) est utilisée pour expliquer les deux autres (A6 et A7), la rendant ainsi une prémisse à l'îlot déductif. Toutefois, nous ne pensons pas qu'il est évident que la somme des angles intérieurs d'un triangle soit de 180°, d'autant plus que cette propriété peut être démontrée à partir de la propriété de l'isométrie des angles alternes-internes qui est déjà utilisée comme prémisse dans l'ouvrage. La séquence des deux pages suivantes (figure 15) montre l'évolution de ces propriétés au sein de l'îlot déductif dans mathématiques 3000. Au 2^e^ cycle, ces trois propriétés (B3 à B5) sont souvent insérées en synthèse à titre de rappel. Nous remarquons toutefois que l'équipe d'auteurs de la série Mathématiques 3000 propose un travail sur les propriétés du triangle et du quadrilatère au lieu de les donner. Ces mêmes auteurs amènent un travail similaire pour les propriétés des quadrilatères au premier cycle (A10 à A15), alors que ceux des autres séries vont plutôt avoir tendance à court-circuiter avec un tableau. Cette même tendance se poursuit avec les autres propriétés du 2^e^ cycle (B6 à B13), à l'exception des lois des sinus et des cosinus qui sont généralement encapsulées. Finalement, la propriété « dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles, semblables au premier » (B12) étant inexistante dans deux ouvrages alors qu'elle devrait être une prémisse aux relations métriques dans le triangle fait en sorte que celles-ci sont court-circuitées dans une certaine mesure, même si elles sont individuellement encapsulées.

1. Définition (p. 139)



Les relations entre les angles

En observant la relation entre deux angles, il est possible de déduire certaines de leurs propriétés.

Relation entre les angles	Exemple
Angles adjacents Angles qui ont le même sommet, un côté commun et qui sont construits de part et d'autre du côté commun.	Les angles 1 et 2 sont adjacents. Côté commun
Angles complémentaires Angles dont la somme des mesures est égale à 90°.	Les angles ROS et TOR sont complémentaires.
Angles supplémentaires Angles dont la somme des mesures est égale à 180°.	Les angles ROS et TOS sont supplémentaires.
Angles opposés par le sommet Paire d'angles qui ne sont pas adjacents et qui sont formés par deux droites sécantes. Les angles opposés par le sommet sont nécessairement isométriques (de même mesure).	Les angles 1 et 2 ainsi que les angles 3 et 4 sont opposés par le sommet. $m\angle 1 = m\angle 2$ $m\angle 3 = m\angle 4$
Angles alternes-internes Paire d'angles qui n'ont pas le même sommet et qui sont situés de part et d'autre d'une sécante, à l'intérieur de deux droites coupées par la sécante.	Les angles 3 et 5 ainsi que les angles 4 et 6 sont alternes-internes.
Angles alternes-externes Paire d'angles qui n'ont pas le même sommet et qui sont situés de part et d'autre d'une sécante, à l'extérieur de deux droites coupées par la sécante.	Les angles 1 et 7 ainsi que les angles 2 et 8 sont alternes-externes.
Angles correspondants Paire d'angles qui n'ont pas le même sommet et qui sont situés du même côté d'une sécante, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de deux droites coupées par la sécante.	Les angles 1 et 5, 4 et 8, 2 et 6, ainsi que 3 et 7 sont correspondants.

2. Propriété comme prémisse (p. 140)

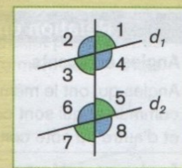
Si les deux droites coupées par une sécante sont parallèles, les angles alternes ou correspondants sont nécessairement isométriques.

Dans l'exemple ci-contre, $d_1 // d_2$. Il y a plusieurs angles isométriques.

- Angles alternes-internes : $\angle 3 \cong \angle 5$, $\angle 4 \cong \angle 6$
- Angles alternes-externes : $\angle 2 \cong \angle 8$, $\angle 1 \cong \angle 7$
- Angles correspondants : $\angle 1 \cong \angle 5$, $\angle 2 \cong \angle 6$, $\angle 3 \cong \angle 7$ et $\angle 4 \cong \angle 8$

À l'inverse, si les deux droites coupées par une sécante déterminent des angles alternes ou correspondants isométriques, elles sont nécessairement parallèles.

Astuce
Le symbole $\cong$ signifie « est isométrique à ».



Les propriétés des triangles

3. Propriété court-circuitée (p. 146)

Il est intéressant de souligner les **propriétés** suivantes des triangles :

1. La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.
2. L'angle opposé au côté le plus long d'un triangle est l'angle le plus grand.
3. Dans un triangle isocèle ou équilatéral, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques et vice versa. On en déduit qu'un triangle isocèle est nécessairement isoangle et qu'un triangle équilatéral est nécessairement équiangle.

Comment appelle-t-on un triangle qui a un angle de 45° et un de 90° ?

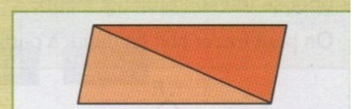
- Ce triangle est rectangle, car il a un angle de 90°.
- La somme des mesures des angles d'un triangle est de 180°. Donc, l'angle inconnu mesure $180 - (90 + 45) = 45°$.
- Puisqu'il comprend deux angles isométriques, ce triangle est nécessairement isocèle. Il s'agit donc d'un triangle rectangle, isocèle (et isoangle).

Astuce
Puisqu'un triangle isocèle est nécessairement isoangl
il arrive souvent qu'on laiss
tomber l'un des qualificatif

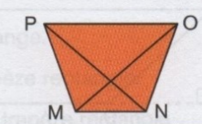
Les quadrilatères

4. Propriété encapsulée par une explication donnée (p. 151)

- Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés.
- Un quadrilatère est formé de deux triangles. Ainsi, la somme des mesures de ses angles intérieurs est de $2 \times 180° = 360°$.
- Une **diagonale** est un segment qui relie des sommets non consécutifs d'un polygone.
- Un quadrilatère possède deux diagonales.

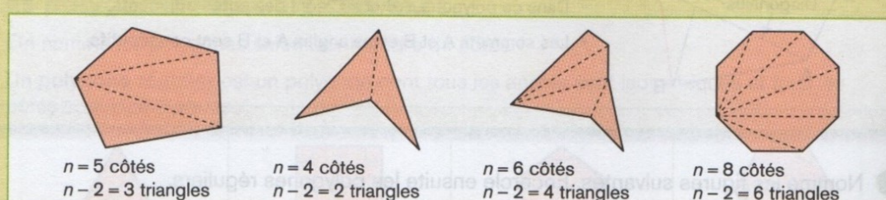


$\overline{MO}$ et $\overline{NP}$ sont les diagonales du quadrilatère MNOP.



La mesure des angles des polygones réguliers

- Il est possible de décomposer un polygone en triangles à l'aide de ses diagonales. Pour un polygone à n côtés, on obtient alors $(n - 2)$ triangles.



5. Propriété encapsulée par cas de figure donnée (p. 164)

- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°. Ainsi, pour un polygone à n côtés, la **somme des mesures de tous les angles intérieurs** est donnée par $\mathbf{S = (n - 2) \times 180°}$.

Figure 15 : Évolution des propriétés A5 à A7 au sein d'un îlot déductif dans mathématiques 3000.

Nous concluons qu'il y a peu de propriétés systématiquement encapsulées ou court-circuitées dans tous les ouvrages. Nous remarquons plutôt une tendance inverse : les différentes équipes d'auteurs vont avoir tendance à soit court-circuiter la majorité des propriétés, comme les équipes d'auteurs de Sommets, Panoramath, Intersection ou Point de Mire, soit à en encapsuler la majorité, comme l'équipe d'auteurs de mathématiques 3000. Bien que les tableau 11 et tableau 12 ne montrent pas de propriétés propres à la 5^{e} année du secondaire, le manuel Visions se retrouve dans un entre-deux, comme Point de Vue mathématique et Perspective mathématique.

En plus de vérifier le type et l'acteur des activités liées à la valeur épistémique des propriétés, nous avons aussi vérifié le moment où l'activité a lieu : durant les activités d'exploration (AE), durant les notes de cours (NC) ou durant les exercices (EX). Étant donné qu'il y a seulement trois activités qui ont lieu en synthèse, et ce, dans le même manuel (Point de Vue mathématique, 5^{e} secondaire CST), nous avons choisi de ne par l'inclure dans le tableau suivant pour en faciliter la lecture. Ainsi, le tableau 13 expose le moment où les activités ont lieu. De plus, la catégorie « non démontrée » a été exclue puisque ces propriétés n'ont pas d'activités pour leur valeur épistémique, donc elles n'ont pas non plus de moment[18]. Notons que certaines propriétés ont plusieurs activités différentes liées à leur valeur épistémique. C'est notamment le cas pour la propriété « lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles correspondants sont congrus » du cahier d'exercice Mathématiques 3000 où une première activité se fait par cas de figure en activité d'exploration et une deuxième activité de justification se fait en exercice.

[18] Nous distinguons le moment de l'activité établissant une propriété (tableau 13) du moment d'apparition de la propriété (tableau 16).

Tableau 13 : Disposition des activités liées à la valeur épistémique des propriétés

		Expliquée			Vérifiée par cas numériques			Vérifiée par cas de figure			Justifiée			Démontrée			Total		
		AE	NC	EX	AE	NC	EX	AE	NC	EX	AE	NC	EX	AE	NC	EX	AE	NC	EX
Mathématiques 3000	1re	13	0	0	3	0	0	13	0	0	1	0	5	3	0	0	33	0	5
	4e CST	8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	9	0	9	18	0	9
	4e SN	18	2	0	0	0	0	7	0	0	1	2	1	9	0	4	35	4	5
	5e TS	14	1	0	8	0	0	16	0	1	2	1	0	22	0	8	62	2	9
	5e SN	9	0	0	3	0	0	8	0	0	1	1	0	3	0	9	24	1	9
Sommets	1re	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1	5	0
Point de Mire	3e	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
Panoramath	1re	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	4	0	1
	2e	3	0	1	4	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	1
Perspective	2e	4	0	4	0	0	0	9	0	4	0	0	0	0	1	1	13	1	9
Intersection	3e	1	3	1	1	0	0	4	0	0	0	0	0	0	2	1	6	5	2
	4e CST	0	5	0	0	0	0	10	0	0	0	4	0	2	1	0	12	10	0
	4e SN	3	1	1	0	0	0	6	0	0	1	1	1	0	0	4	10	2	6
	5e CST	0	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	1
Point de Vue	3e	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0
	4e SN	10	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	2	0	10	16	1	10
	5e CST	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
Visions	5e TS	1	1	0	1	0	0	4	0	0	7	0	0	0	0	0	13	1	0
	5e SN	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
Total		88	17	8	31	2	0	102	1	5	14	11	8	50	4	47	285	35	68

Nous remarquons ainsi que 285 activités se font durant les activités d’exploration, ce qui représente 73,4 % des activités. La majorité des propriétés ne sont donc travaillées que dans les activités d’exploration. Bien que les propriétés ne soient pas toujours formellement démontrées, nous pouvons croire qu’il y a une forme d’encapsulation de la propriété du moment qu’il y a une activité qui l’établit. Or, dans le cas des ouvrages scolaires, nous émettons l’hypothèse importante que toutes les activités seront faites par l’apprenant. Cette hypothèse est loin d’être garantie. Nous nous demandons en effet dans quelle mesure les activités liées à la valeur épistémique sont réellement réalisées en classe, notamment celles provenant des sections d’activités d’exploration. Il nous semble tout à fait envisageable qu’elles soient sautées pour passer directement à la section note de cours et, ce faisant, court-circuitant un plus grand nombre de propriétés. De la même façon, un enseignant choisit les exercices que les élèves doivent faire et il peut très bien choisir de ne pas donner les problèmes de preuve. Même en supposant que les élèves font toutes ces activités, plus de la moitié restent non démontrées (459 propriétés non démontrées sur 844) et seulement 16 % sont justifiées ou démontrées à partir du référentiel déjà établi.

En conclusion, la majorité des propriétés issues des ouvrages scolaires sont non démontrées, ce qui laisse croire que la majorité des propriétés sont court-circuitées. Malgré qu'elle ne soit pas approuvée par le ministère, la collection Mathématiques 3000 se démarque des autres en offrant davantage d'activités de preuve pour les propriétés du référentiel. Sinon, dans les autres collections, lorsqu'il existe une activité associée à la valeur épistémique d'une propriété, celle-ci se fait généralement de façon guidée, ce qui peut être tout aussi bénéfique (zone de développement proximal) pour un élève que nuisible (effet Topaze). Nous y voyons d'ailleurs une possibilité d'étude pour prolonger celle-ci. De plus, nous avons remarqué une tendance des équipes d'auteurs soit d'encapsuler, soit de court-circuiter la majorité des propriétés de leur référentiel. Finalement, la plupart des activités liées à la valeur épistémique se font durant une section qui précède l'institutionnalisation du référentiel, ne garantissant pas le travail mathématique qui en est subséquent.

4.2.3 Les référentiels pour résoudre des problèmes de preuves

Dans cette sous-section, nous distinguerons les éléments des référentiels qui favorisent la résolution de problèmes de preuve de ceux qui vont plutôt définir ou enrichir la compréhension d'un concept. Nous allons d'abord aborder la structure de certains énoncés, la nature de certaines définitions et, finalement, l'absence de propriétés que nous jugeons importantes pour résoudre des problèmes de preuves.

Tout d'abord, nous voyons dans la série de manuels de mathématiques français *Triangle (Chapiron et al., 2002, 2003)* et dans un ouvrage dédié à des enseignants de Braconne-Michoux (2018) une tendance à écrire les énoncés des propriétés sous la forme de « si… alors… ». Bien que Tanguay et Geeraerts (2012) aient observé que les élèves ont tendance à y voir une possibilité (« si… il est possible que… »), nous pensons que ce format favorise l'expansion discursive par le fait que la règle d'inférence met en évidence les antécédents nécessaires et le conséquent. D'ailleurs, ces deux derniers auteurs proposent de simplement ajouter le mot « forcément » après le « alors » pour éliminer la possibilité mentionnée. Toutefois, il arrive que ce format alourdisse inutilement l'énoncé ou que l'énoncé ne s'y prête pas, comme c'est le cas pour la propriété : *la somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°*. De la même manière, nous sommes d'avis qu'utiliser un format standard, comme « un… est… » pour les énoncés des définitions favorise à la fois la compréhension de l'objet géométrique et le processus de preuve. Nous pouvons donc nous attendre à ce que ces deux formats (un pour la propriété, un pour les définitions) soient utilisés. C'est dans cette optique que nous avons analysé des énoncés de propriétés et de définitions. Nous avons ainsi relevé quelques énoncés satisfaisant le format pour chaque série de manuels :

- Sommets (1^{re}) : ***Si*** *deux droites coupées par une sécante déterminent des angles correspondants ou alternes isométriques,* ***alors*** *ces droites sont nécessairement parallèles.*
- Mathématiques 3000 (1^{re}) : ***Si*** *M est un point de la droite d distinct de H* ***alors*** *: mesure AM > m AH*
- Panoramath (1^{re}) : ***Si*** *une droite coupe deux droites parallèles,* ***alors*** *les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.*
- Panoramath (2^{e}) : ***Un*** *cercle* ***est*** *une ligne fermée dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre*
- Perspective mathématique (2^{e}) : ***Si*** *deux droites sont perpendiculaires à une troisième,* ***alors*** *elles sont parallèles.*
- Intersection (3^{e}) : Aucun énoncé
- Point de Mire (3^{e}) *:* ***Si*** *les mesures des côtés d'un triangle vérifient la relation de Pythagore,* ***alors*** *il est rectangle.*
- Point de Vue mathématique (3^{e}) : ***Un*** *tétraèdre régulier* ***est*** *une pyramide à base triangulaire dont chaque face est un triangle équilatéral.*

- Mathématiques 3000 (4^e CST) : ***Si**, dans un quadrilatère, une diagonale est bissectrice de deux angles opposés, **alors** elle détermine deux triangles congrus.*

- Intersection (4^e CST) : Aucun énoncé

- Mathématiques 3000 (4^e SN) : *Soit deux droites d:y=ax+b et d':y=a'x+b', **si** a=a » et b n'égale pas b', **alors** les droites sont parallèles distinctes*.

- Point de Vue mathématique (4^e SN) : ***Si** la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté sur lequel elle est abaissée, **alors** ce triangle est rectangle.*

- Point de Vue mathématique (5^e CST) : ***Des** solides équivalents **sont** des solides ayant le même volume.*

- Intersection (5^e CST) : Aucun énoncé

- Mathématiques 3000 (5^e TS) : ***Si** G est le centre de gravité d'un triangle ABC **alors*** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- Visions (5^e TS) : ***Une** corde **est** un segment qui relie deux points quelconques d'un cercle.*

- Mathématiques 3000 (5^e SN) : ***Si*** $\vec{u} = (a, b)$, ***alors*** $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Visions (5^e SN) : **La** norme du vecteur v, notée $\|\vec{v}\|$, **est** un nombre réel qui caractérise la grandeur de ce vecteur.

Mise à part l'équipe d'auteurs de la série Intersection, nous constatons que tous les autres utilisent à un certain moment un des deux formats. Toutefois, ils sont utilisés en petite proportion par rapport au nombre de propriétés et de définitions. À titre d'exemple, dans deux séries où ces formats sont plus utilisés, soit pour Panoramath 1^{re} secondaire, nous comptons environ 19 % des propriétés et 18 % des définitions qui suivent ce format et, pour Mathématiques 3000 1^{re} secondaire, environ 4 % des propriétés et 27 % des définitions qui les suivent. À priori, ces petites proportions à travers tous les manuels ne veulent pas forcément dire que les référentiels ne sont pas construits pour résoudre des problèmes de preuve. Les élèves arrivent quand même à résoudre les problèmes de preuve qu'on leur propose, particulièrement en 4^e secondaire : ce n'est néanmoins pas sans difficulté que ce travail mathématique est fait. Nous pensons qu'une des difficultés possibles réside justement dans la manière dont les éléments du référentiel sont écrits. En plus du format attendu des énoncés peu fréquents, d'autres raisons de ces difficultés sont présentées dans les pages suivantes.

1. Plusieurs énoncés de définition ne permettent pas facilement la compréhension de la double implication de la définition. Un exemple facilitant la double implication serait la définition de la médiane dans Mathématiques 3000 1re secondaire : « une médiane est un segment ayant pour extrémité un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé ». Cette définition permet l'inférence *médiane ⇒ segment ayant pour extrémité un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé* et l'inférence réciproque *segment ayant pour extrémité un sommet d'un triangle et le milieu du côté opposé ⇒ médiane*. D'un autre côté, dans le même manuel, on retrouve la définition du triangle équilatéral suivante : « le triangle équilatéral a 3 côtés congrus ». L'emploi du verbe avoir dans l'énoncé ne suggère qu'une implication, *triangle équilatéral ⇒ 3 côtés congrus*, même si l'implication réciproque est tout aussi valide. Nous retrouvons constamment ce genre d'énoncé pour des définitions qui suggère l'implication dans un seul sens, comme dans Panoramath 1re secondaire où nous retrouvons l'énoncé « un triangle est dit rectangle lorsqu'il a un angle droit » qui suggère que l'implication *angle droit ⇒ triangle rectangle* ou encore dans Point de Vue mathématique 3e secondaire où nous retrouvons l'énoncé « des solides semblables ont des mesures de longueur homologues (arêtes, diagonales, apothèmes, périmètres, etc.) proportionnelles et des angles homologues isométriques » qui suggère que l'implication *solides semblables ⇒ mesures de longueurs homologues proportionnelles et angles homologues isométriques*.

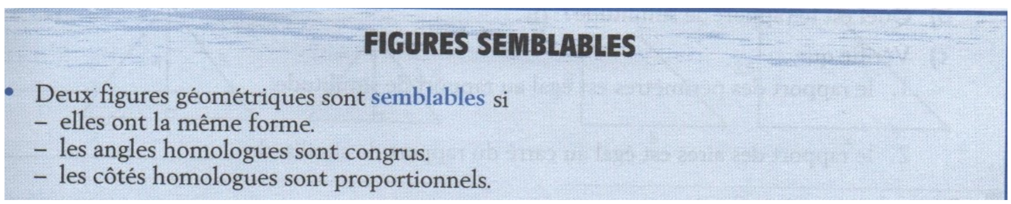
2. Plusieurs propriétés sont écrites de façon similaire à des définitions, comme dans Mathématiques 3000 où nous retrouvons « les complémentaires de deux angles congrus sont congrus ». Il est difficile de juger si l'énoncé est volontairement écrit de la sorte pour suggérer un double sens de la règle comme dans les définitions (*deux angles congrus ⇒ complémentaires congrus* et *deux complémentaires congrus ⇒ deux angles congrus)* ou si l'énoncé a été écrit de la sorte pour en faciliter la lecture et la compréhension (Richard et Sierpinska, 2004). Nous retrouvons cette syntaxe dans

plusieurs séries de manuels. Notamment, dans Intersection 4e secondaire CST, nous retrouvons « dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté » et dans Visions 5e secondaire TS, nous retrouvons « toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente au cercle et réciproquement » qui spécifie, toutefois, que la réciproque est vraie. L'écriture d'une propriété sous forme de définition survient également lorsqu'un objet a une propriété caractéristique à l'étude dans le référentiel, comme c'est le cas dans Mathématiques 3000 1re secondaire pour la médiatrice où il semble y avoir deux définitions pour le même objet plutôt qu'une définition et une propriété : « la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment et qui passe par le milieu du segment » et « la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan situés à égale distance des extrémités du segment ».

3. Certains énoncés ne sont pas clairs, notamment la propriété « dans un même cercle ou dans deux cercles isométriques, deux cordes isométriques sont situées à la même distance du centre, et réciproquement » où l'expression réciproquement invite à utiliser la réciproque de la propriété, mais laquelle? Faut-il comprendre que « dans un même cercle ou dans deux cercles isométriques, si deux cordes sont situées à la même distance du centre alors elles sont isométriques » ou « si des cordes de deux cercles différents sont isométriques et sont situées à la même distance du centre, alors les deux cercles sont isométriques » ? La notion de réciproque devenant plus complexe lorsque la propriété requiert plusieurs antécédents, nous pensons important de formuler la propriété dans son entièreté pour éviter des ambiguïtés ou des sous-entendus. Heureusement, dans cet exemple, les deux possibilités de propriétés réciproques sont vraies, mais quel énoncé l'élève devra-t-il écrire comme règle d'inférence?

4. Plusieurs propriétés et définitions sont entremêlées dans un même paragraphe. Il devient alors plus difficile d'identifier et de choisir la bonne règle d'inférence. Par exemple, dans Perspective mathématique 2e secondaire, nous retrouvons « les trois médiatrices des côtés d'un triangle se rencontrent en un point situé à égale distance des sommets du triangle. Ce point est le centre du cercle passant par les sommets du triangle. On dit que ce cercle est circonscrit au triangle et que le triangle est inscrit dans le cercle ». Ce dernier énoncé renferme trois propriétés (les trois médiatrices se

rencontrent en un point, le point de rencontre des trois médiatrices est situé à égale distance des sommets, le point de rencontre des trois médiatrices est le centre du cercle passant par les sommets) et deux définitions (cercle circonscrit et triangle inscrit). Bien que cet exemple soit un extrême, il n'est pas rare de voir des énoncés contenant à la fois une définition et une propriété de l'objet défini : dans Point de Vue mathématique 3e secondaire, « une bissectrice est formée de l'ensemble de tous les points situés à égale distance des deux côtés d'un angle. Tous ces points forment une ligne droite qui partage cet angle en deux angles isométriques » ou dans Intersection 4e CST, « la distance entre deux points $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ dans un plan cartésien, notée $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, est la longueur du segment AB. À partir de l'accroissement des abscisses et de l'accroissement des ordonnées entre ces deux points, on utilise la relation de Pythagore pour calculer $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. L'expression qui permet de calculer la distance entre A et B est $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ». De façon parallèle, il arrive aussi que l'agencement des énoncés permette une certaine distinction des propriétés ou des



FIGURES SEMBLABLES

- Deux figures géométriques sont **semblables** si
  - elles ont la même forme.
  - les angles homologues sont congrus.
  - les côtés homologues sont proportionnels.

Figure 16 : Des conditions confondantes

définitions, ou comme à la figure 16, des conditions nécessaires à la règle d'inférence. Toutefois, comme dans cet exemple, il n'est pas du tout clair si toutes les conditions doivent être respectées ou si une seule suffit. Autrement dit, il n'est pas clair si les conditions sont séparées par un « ou » ou un « et ». La disposition ici a probablement été pensée pour être ergonomique, c'est-à-dire pour être facile à lire et à comprendre par un élève. Toutefois, cette même disposition peut causer des difficultés à un élève qui comprend que les trois conditions doivent être satisfait puisqu'il arrive souvent, dans un problème, de déterminer que deux figures soient semblables par une des conditions et ensuite utiliser une autre pour terminer sa résolution. Cette définition précède même la notion de conditions minimales de similitudes dans les triangles. Elle peut alors devenir un obstacle didactique à cet apprentissage pour l'élève qui voit des « et » entre les conditions.

5. Il existe plusieurs mots différents pour des concepts similaires ou identiques. Bien que dans un même ouvrage, les équipes d'auteurs fassent attention à toujours utiliser la même terminologie, nous retrouvons au travers des années ou entre les ouvrages d'une même année des différences de terminologie. C'est notamment le cas avec le concept d'isométrie et de congruence : l'équipe d'auteurs de Mathématiques 3000 privilégie la congruence alors que les autres privilégient l'isométrie. Ce cas à lui seul n'est probablement pas la source de difficultés, mais comme il existe d'autres cas, le passage de l'un à l'autre selon le contexte peut certainement causer de la confusion chez un apprenant. Notamment, nous retrouvons les termes suivants :

    a. **point commun**, souvent utilisé dans la définition des droites parallèles ou sécantes et dans la définition du sommet d'un solide; **point de rencontre**, souvent utilisé pour le point de rencontre des droites remarquables et aussi pour définir le sommet d'un solide; et **point d'intersection**, utilisée en géométrie analytique;

    b. **côté opposé/adjacent à un sommet**, souvent utilisé dans les propriétés des triangles et quadrilatères; et **côté opposé/adjacent à un angle**, souvent utilisé en trigonométrie;

    c. **module** et **norme,** tous deux utilisés en géométrie vectorielle.

Mis à part les difficultés liées à l'écriture des énoncés qui peuvent, nous croyons, causer des difficultés chez l'élève dans la résolution de problème de preuve, nous avons repéré cinq autres éléments qui peuvent jouer un rôle similaire.

6. Il y a des définitions qui relèvent d'un autre registre plutôt que du registre du discours. Il devient ainsi pratiquement impossible d'utiliser ces définitions dans une démonstration formelle. Les plus fréquentes sont celles provenant du registre graphique, comme la définition figurale dans la figure 17 de la projection orthogonale repérée dans Intersection 4e secondaire SN. Nous retrouvons aussi des définitions procédurales, où un processus est sous-jacent à la définition d'un objet ou d'une

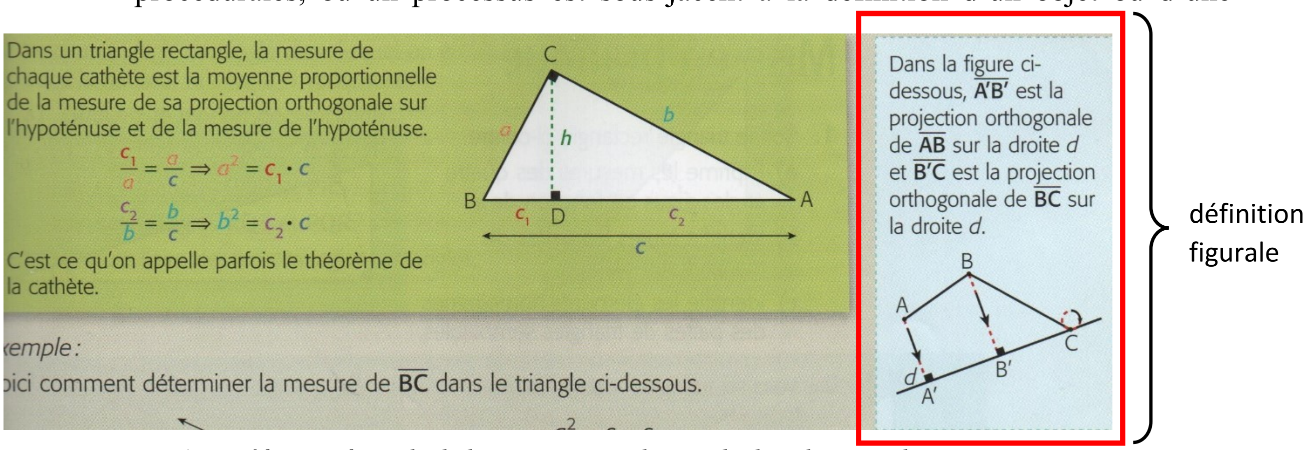


Figure 17 : Définition figurale de la projection orthogonale dans le manuel Intersection

relation entre objets, comme la définition « pour reconnaître deux figures semblables, il faut que les mesures des segments homologues sur chacune des figures soient proportionnelles et que les angles homologues sur chacune des figures soient isométriques. » repérée dans Point de Vue mathématique 3e secondaire où nous voyons une procédure de vérification des segments homologues proportionnels et des angles homologues isométriques. Nous avons aussi repéré dans Sommets 1re secondaire la définition « dans un triangle, la hauteur s'obtient en abaissant un segment perpendiculaire d'un sommet sur le côté opposé (ou son prolongement) » où les caractéristiques discursives (segment reliant perpendiculairement un sommet au côté opposé) deviennent subordonnées à la construction du segment.

7. Il y a des définitions implicites, bien que plus rares. Généralement, soit qu'un objet géométrique est défini, soit qu'il est complètement absent du référentiel. Il existe néanmoins quelques occurrences de définitions implicites, comme les définitions des solides de Platon repérés dans Point de Vue mathématique 5e secondaire CST et présentées à la figure 18. À la différence des définitions figurales, l'objet, ou la relation, n'est pas l'élément principal du texte associé. Dans cet exemple, la mise en

place des éléments fait en sorte qu'un lecteur associe le nom de l'objet avec l'image, mais contrairement à l'exemple de la figure 17, l'attention est d'abord portée ailleurs : l'objet d'étude est ici les formules de volume et non les particularités des solides représentées au-dessus du texte. Toutefois, il est quand même possible d'en tirer une certaine définition, aussi maladroite qu'elle puisse être.

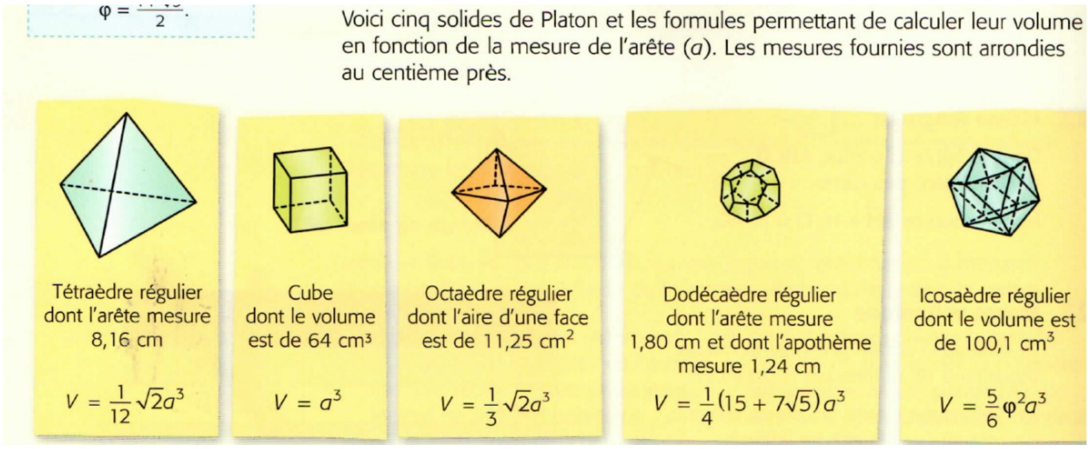


Figure 18 : Définitions implicites des solides de Platon

8. Des propriétés utiles à la résolution de problèmes de preuve se retrouvent en synthèse des manuels. C'est le cas pour les propriétés « si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires », « si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont aussi parallèles entre elles » (sauf dans la série Perspective mathématique où elle est dans le corps de l'ouvrage), « si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre » et « si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles » (à l'exception encore de Perspective mathématique) et « tous les diamètres d'un cercle sont isométriques ».

9. Plusieurs réciproques sont absentes. Nous retrouvons dans toutes les séries d'ouvrages concernées la réciproque du théorème de Pythagore et aussi la réciproque « dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes, ou encore alternes-externes) sont isométriques, alors ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante ». Toutefois, nous ne retrouvons jamais la réciproque de plusieurs propriétés, comme c'est le cas pour « si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires », « le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est

équidistant des trois sommets », « tout point de la bissectrice d'un angle est situé à égale distance des côtés de l'angle » et bien d'autres.

10. Finalement, nous remarquons qu'il y a plusieurs propriétés absentes des ouvrages québécois. D'abord, pour résoudre des problèmes de preuve, il arrive régulièrement que l'élève doive déterminer, par exemple, la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère. Or, à l'exception du référentiel de Mathématiques 3000 5^{e} secondaire, il n'y a pas de propriétés permettant de déduire la nature d'un quadrilatère selon des critères minimaux. Dans Mathématiques 3000 5^{e} secondaire, nous retrouvons en effet « si un quadrilatère a deux côtés congrus et parallèles alors ce quadrilatère est un parallélogramme » et c'est la seule instance où une propriété permet le passage à un quadrilatère spécifique. Nous ne retrouvons pas, par exemple, les propriétés « un quadrilatère dont les angles opposés sont congrus est un parallélogramme », « un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange » ou « un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle ». De plus, comme mentionné à la sous-section 4.2.1, nous retrouvons très peu de propriétés sur les objets en trois dimensions. Finalement, nous avons également remarqué un manque de propriétés au niveau des points colinéaires. D'abord, nous retrouvons la définition de points colinéaires que dans Point de Vue mathématique (4^{e} et 5^{e} secondaire) et cette définition ne fait qu'expliquer que des points colinéaires sont des points alignés, n'ajoutant ainsi aucune valeur à la résolution d'un problème de preuve. Ensuite, nous n'avons pas trouvé de propriétés permettant d'établir que des points sont colinéaires, pourtant il en existe : « soit les points distincts A, B et C. Si la pente de AB est égale à la pente de BC, alors A, B et C sont colinéaires » ou « soit les points distincts A, B et C. Si $m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC}$, alors A, B et C sont colinéaires ».

Il est clair que le référentiel joue un rôle primordial dans la résolution de problème de preuve. Si un référentiel est insuffisant, les problèmes qui pourront être résolus seront restreints. Nous croyons que c'est notamment le cas de plusieurs référentiels issus des manuels scolaires étant donné le manque de plusieurs propriétés. Nous pensons aussi que l'énoncé même des propriétés et des définitions peut causer des difficultés aux élèves lors d'un problème de preuve. Nous ne sommes toutefois pas en mesure de déterminer dans quelle mesure les formulations des énoncés y jouent un rôle important. Nous y voyons donc une possibilité de recherche à venir pour déterminer les enjeux liés au référentiel, particulièrement concernant le choix de l'énoncé dans la résolution d’un problème de preuve.

4.3 Analyse paradigmatique des référentiels

Comme nous l’avons exposé à la section 2.1, Houdement et Kuzniak (1999a, 2006) considèrent que la géométrie se divise en trois grands paradigmes, soit GI, la géométrie naturelle, soit GII, la géométrie axiomatique naturelle ou soit GIII, la géométrie axiomatique formaliste. De plus, selon les recherches de Tanguay (2002) et de Gauthier (2015), il existe une certaine oscillation entre les deux premiers paradigmes dans l’enseignement de la géométrie. D’ailleurs, selon Tanguay et Geeraerts (2012, p. 7), « [les] manuels et [les] enseignants ne savent pas situer clairement leurs attentes en géométrie [aux premières années du secondaire], quand ils n’introduisent pas d’importantes ruptures de contrat ». Ces auteurs introduisent ainsi le paradigme du « physicien-géomètre », à mi-chemin entre GI et GII, pour favoriser une transition harmonieuse entre ces deux géométries.

D’un point de vue théorique, les référentiels utilisés au secondaire relèvent a priori de GII. En effet, on y retrouve des définitions et des propriétés générales sur lesquelles reposent les règles d’inférences. Ces mêmes définitions et propriétés permettent aussi la justification des constructions que nous retrouvons en GII. Ces référentiels ne sont toutefois pas en GIII, puisqu’ils ne sont pas construits dans une optique formaliste comme l’axiomatique de Hilbert. D’ailleurs, la notion même d’îlot déductif ne se situe pas dans une telle géométrie. Toutefois, nous verrons qu’en pratique, l’enseignement des référentiels ne se fait pas que dans l’optique de GII. Ainsi, dans cette sous-section, il sera d’abord question des paradigmes selon les activités liées à la valeur épistémique et ensuite selon la place des figures dans les référentiels.

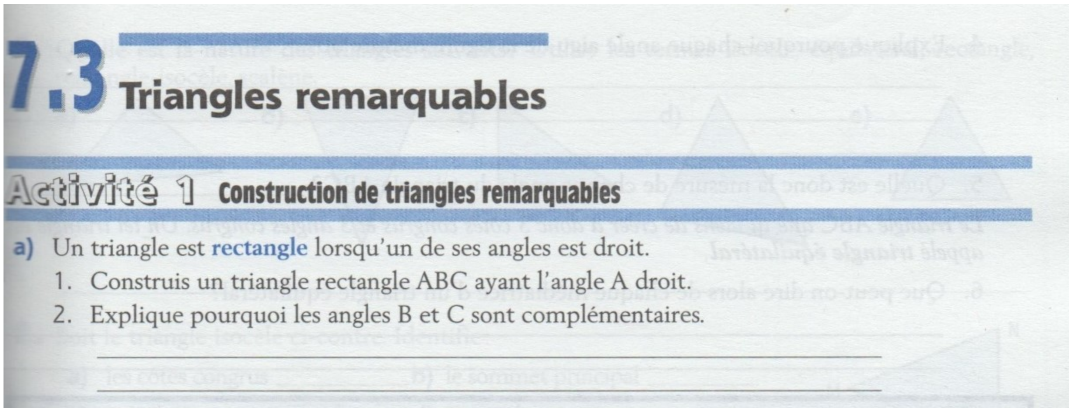
4.3.1 Une géométrie entre deux paradigmes

Nous avons vu dans la section d’analyse discursive que plusieurs propriétés sont vérifiées par cas de figure ou par cas numérique. Notamment, le tableau 10 (p. 71) montre qu’il existe plusieurs propriétés (environ 16% d’entres elles) qui sont vérifiées soit numériquement soit par cas de figure dans les ouvrages à l'étude. Même en ne considérant pas les propriétés non démontrées, nous remarquons que les vérifications (numérique ou par cas de figure) des propriétés sont majoritaires dans plusieurs ouvrages. Aussi, le tableau 13 (p.81) montre que la plupart de ces activités se font avant l'institutionnalisation de la propriété. Ces démarches attestent d'un fonctionnement dans une géométrie semblable à celle du « physicien-géomètre » décrite par Tanguay et Geeraerts. Celles-ci sont principalement issues de la géométrie des transformations notamment pour les similitudes et les isométries; des formules d'aires; des propriétés d'optimisation aire/périmètre des polygones et des solides; et des vecteurs. Des exemples typiques sont présentés à l'annexe 8.

Rappelons que, pour satisfaire aux critères du paradigme du « géomètre-physicien » qui se veut une transition entre GI et GII, il faut que les propriétés soient d'abord vérifiées puis justifiées ou démontrées. Nous avons repéré 8 propriétés (ci-dessous) satisfaisant ce critère.

- Mathématiques 3000 :
    - Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante : les angles alternes-internes sont congrus.
    - Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante : les angles alternes-externes sont congrus.
    - Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante : les angles correspondants sont congrus.
    - La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points du plan situés à égale distance des extrémités du segment.
    - La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points du plan situés à égale distance des côtés de l'angle.
- Intersection :
    - Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes.
    - Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles, semblables au premier.
- Perspective mathématique :
    - Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes.

Par le nombre réduit de propriétés vérifiées puis justifiées ou démontrées, nous nous rendons compte que la géométrie du « physicien-géomètre » est peu exploitée par les équipes d'auteurs. Toutefois, la présence de cette géométrie dans les ouvrages scolaires est intéressante quand on considère que la plupart des ouvrages ont été publiés avant l'étude de Tanguay et Geeraerts; ils révèlent ainsi une certaine sensibilité à la question des paradigmes, et ce, même si les équipes d'auteurs ne la connaissent pas. En vérifiant les activités liées à la valeur épistémique des propriétés, nous pouvons considérer qu'il existe une certaine partie des référentiels qui se situe quelque part entre GI et GII. Ce constat appuie celui de Gauthier (2015) selon lequel les enseignants – et par extension les équipes d'auteurs des ouvrages scolaires – ne connaissent pas nécessairement les paradigmes et peuvent avoir des exigences que nous jugeons incohérentes de ce point de vue. En effet, l'élève qui découvre une propriété à partir de quelques cas de figures, sans ensuite la démontrer, peut avoir des doutes sur la valeur de vérité de cette propriété, alors qu'il lui sera quand même demandé de l'utiliser dans une démonstration ou comme justification. Dans une telle situation, quel statut la propriété peut-elle avoir aux yeux de l'élève si on lui a demandé de l'accepter à partir de quelques cas pour ensuite exiger qu'il l'utilise dans une justification ou une démonstration? De plus, à partir des documents de référence fournis par le ministère, il est possible de croire que les intentions au secondaire sont de faire passer l'élève de GI à GII, notamment par la justification et la démonstration. Le flou dans l'enseignement est ainsi plus marqué puisque les activités de vérifications, typiques de GI, sont présentes à tous les niveaux du secondaire pour des propriétés qui seront ensuite utilisées pour la résolution de problèmes de preuve. Il n'y a donc pas de progression réelle de GI vers GII, mais bien une oscillation entre les deux. D'un autre côté, les autres types d'activités repérées dans cette étude ne relèvent pas tous de GI. Par exemple, une activité d'explication peut amener un travail autant en GI qu'en GII, comme c'est le cas de celle de la figure 19, où l'élève doit d'abord faire une construction, possiblement en GI ou en GII, et doit ensuite expliquer la propriété des angles complémentaires dans un triangle rectangle. Un premier élève pourrait fournir son explication par la mesure des angles du triangle qu'il a construit. Un deuxième élève pourrait expliquer avec la propriété présente quelques pages plus tôt sur la somme des angles d'un triangle. Ces deux élèves répondent ainsi à la même consigne, mais étant dans un paradigme différent, ils vont avoir un raisonnement différent et une



7.3 Triangles remarquables

Activité 1 Construction de triangles remarquables

a) Un triangle est **rectangle** lorsqu'un de ses angles est droit.

1. Construis un triangle rectangle ABC ayant l'angle A droit.
2. Explique pourquoi les angles B et C sont complémentaires.

Figure 19 : Une activité d'explication en GI ou en GII (Mathématiques 3000).

réponse différente. Finalement, les activités de justification et de démonstration, parce qu'elles demandent à l'élève de raisonner en se basant sur le référentiel théorique, font plutôt partie de GII.

Nous avons aussi mentionné au début de cette sous-section que l'on retrouve les formules d'aires et de volumes dans la géométrie du « physicien-géomètre ». A priori, la mesure en géométrie est aussi présente en GI qu'en GII. Tout dépend du travail mathématique dans lequel elle est utilisée : une mesure prise sur une figure à l'aide d'un instrument relèvera de GI, alors qu'une mesure déduite à l'aide d'une propriété relèvera de GII. Nous nous sommes donc intéressé à la place des formules au sein du référentiel. D'abord, plusieurs formules étudiées au secondaire relèvent de GII : elles encouragent une certaine utilisation de l'algèbre ou, du moins, un raisonnement algébrique. Elles amènent donc à un niveau d'abstraction qui nous éloigne de GI. Tel est le cas pour les relations métriques, la relation de Thalès, la relation de Pythagore, les rapports de proportionnalité dans le cercle, les propriétés de la géométrie analytique et de la géométrie vectorielle. Bien que la nature de ces propriétés encourage un mode de pensée typique de GII, nous remarquons que les activités proposées en amont ne sont pas toujours des activités de justification ou de démonstration. En effet, nous trouvons, par exemple, la formule du point milieu dans Mathématiques 3000 qui est vérifiée par des cas de figure. Ceci met encore en évidence le flou à l'égard des paradigmes dans l'enseignement des référentiels, particulièrement en considérant que plusieurs formules n'ont aucune activité pour les établir. Ce faisant, les auteurs des ouvrages n'explicitent pas le paradigme dans lequel l'élève est censé travailler les problèmes en lien avec ces formules.

D'un autre côté, nous trouvons dans les référentiels des formules qui peuvent encourager un travail en GI. C'est notamment le cas du calcul de l'aire des carrés et des rectangles ou le calcul de volume d'un prisme droit à base rectangulaire. En effet, il est possible de calculer l'aire ou le volume en comptant le nombre de carrés ou de cubes. Un travail de manipulation physique (découpage, pliage, collage, etc.) est aussi possible pour dégager les formules d'aire d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un losange et même d'un trapèze. Nous sommes donc d'avis que ces formules peuvent être utilisées dans un travail mathématique en GI, mais elles peuvent aussi être utilisées dans un travail en GII : tout dépend de l'activité en lien avec la propriété, du problème et des méthodes privilégiés par l'élève. Cependant, nous pensons que la formule d'aire pour les polygones réguliers nécessite un raisonnement plus complexe et se rapproche dans tous les cas d'un fonctionnement en GII. D'ailleurs, nous pensons que la formule d'aire d'un disque relève de GII, voire de GIII, étant donné l'abstraction liée à l'irrationalité de π. De manière similaire, nous pensons que les formules de volumes autres que celle du prisme droit à base rectangulaire sont difficilement atteignables par de la manipulation physique : même la construction de trois pyramides formant un prisme reste un cas particulier des pyramides et nécessite un certain raisonnement pour en déduire la généralité. Le niveau de raisonnement est encore plus élevé pour établir le volume d'une boule, ou même l'aire d'un cône ou d'une sphère et ne relève même pas de GII. Dans les manuels, ces niveaux d'abstraction se reflètent par l'absence d'activité pour établir les formules. Autrement dit, celles-ci sont presque toujours données à l'élève.

En conclusion, les activités liées aux propriétés peuvent relever de différents paradigmes géométriques (GI, GII, entre GI et GII, physicien-géomètre) selon leur mode d'établissement. Nous retrouvons justement des aller-retour entre les paradigmes entre les différentes activités proposées au travers du même ouvrage et au travers des années du secondaire. À la sous-section suivante, nous nous pencherons sur la place des figures dans le référentiel théorique.

4.3.2 Les énoncés et les figures

En géométrie naturelle (GI), la figure a un statut particulier : elle valide un pas de raisonnement. Le travail mathématique s'y fait directement : mesure, pliage, traçage, découpage, etc. En géométrie axiomatique naturelle (GII), le raisonnement déductif s'appuie sur la figure et en géométrie axiomatique formelle (GIII), elle devient une heuristique à la résolution de problème. Dans la même optique, nous avons vérifié la place des figures dans les référentiels des ouvrages scolaires. Nous avons encore repéré une grande disparité en prenant compte ou non le référentiel synthèse. Les tableaux 14 (avec référentiel synthèse) et 15 (sans référentiel synthèse) présentent ainsi la dépendance des énoncés aux figures qui les accompagnent.

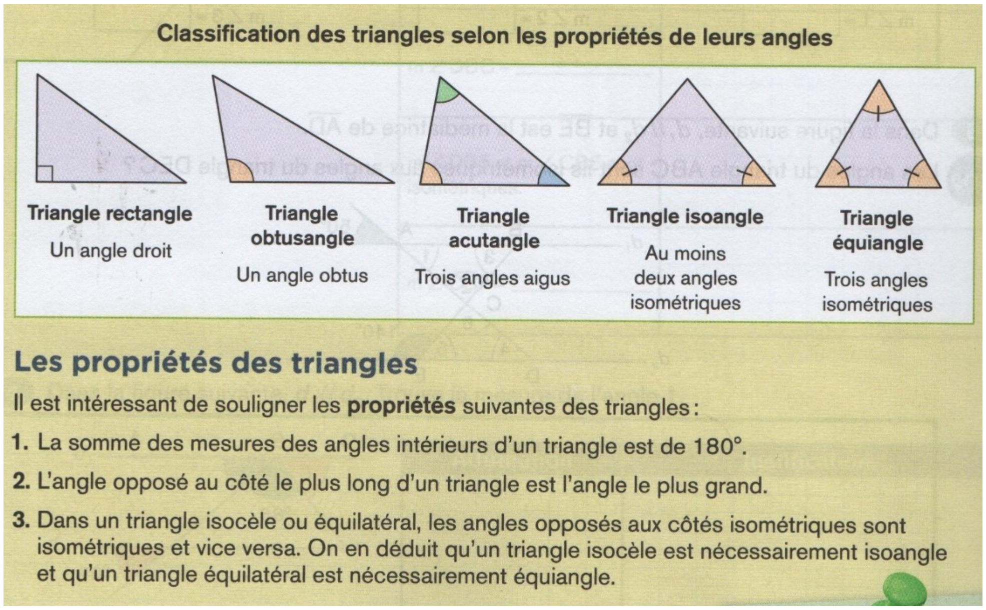
Tableau 14 : La dépendance des figures

		Aucune figure	Énoncé et figure dépendants	Énoncé et figure indépendants	Total
Mathématiques 3000	1re	13	38	80	131
	4^{e} CST	6	12	66	84
	4^{e} SN	12	1	84	97
	5^{e} TS	46	42	97	185
	5^{e} SN	38	12	53	103
Sommets	1re	21	6	131	158
Point de Mire	3^{e}	14	0	70	84
Panoramath	1re	25	0	167	192
	2^{e}	23	0	250	273
Perspective	2^{e}	91	1	77	169
Intersection	3^{e}	16	0	20	36
	4^{e} CST	68	14	46	128
	4^{e} SN	43	14	23	80
	5^{e} CST	11	0	16	27
Point de Vue	3^{e}	48	10	161	219
	4^{e} SN	61	0	69	130
	5^{e} CST	48	16	59	123
Visions	5^{e} TS	114	16	262	392
	5^{e} SN	108	24	195	327
Total		806	206	1926	2938

Tableau 15 : La dépendance des figures, sans le référentiel synthèse

		Aucune figure	Énoncé et figure dépendants	Énoncé et figure indépendants	Total
Mathématiques 3000	1re	13	38	80	131
	4e CST	6	12	66	84
	4e SN	12	1	84	97
	5e TS	46	42	97	185
	5e SN	38	12	53	103
Sommets	1re	19	0	98	117
Point de Mire	3e	14	0	45	59
Panoramath	1re	19	0	74	93
	2e	8	0	85	93
Perspective	2e	17	1	44	62
Intersection	3e	15	0	19	34
	4e CST	51	9	27	87
	4e SN	43	14	23	80
	5e CST	11	0	16	27
Point de Vue	3e	15	0	24	39
	4e SN	28	0	33	61
	5e CST	4	16	11	31
Visions	5e TS	37	7	73	117
	5e SN	26	8	23	57
Total		422	160	975	1557

Nous remarquons, dans les deux tableaux, que propriétés et définitions sont majoritairement accompagnées d'une figure de façon indépendante : la figure est alors un support à la compréhension de l'énoncé, ce qui concorde avec son rôle en GII. Bien qu'on puisse penser que la colonne « aucune figure » est le reflet d'énoncés de GIII, il n'en est rien : nous les retrouvons dans tous les manuels, à tous les niveaux scolaires et pour toutes sortes de propriétés ou d'énoncés. Il s'agit plutôt de propriétés et de définitions, probablement jugées « plus simples » par l'équipe d'auteurs au point qu'elles ne nécessitent pas de figures pour être comprises, comme les propriétés du triangle de la figure 20 où nous retrouvons seulement des figures pour les définitions précédentes ou, encore, d'énoncés plus difficiles à illustrer comme celle de la figure 21. Les propriétés et les définitions de cette colonne de notre tableau ne relèvent probablement pas non plus de GI, étant donné l'importance d'éléments tangibles dans cette géométrie. Nous croyons donc que la plupart des figures jointes aux propriétés et aux définitions sont en concordance avec GII.


Classification des triangles selon les propriétés de leurs angles

Triangle rectangle	Triangle obtusangle	Triangle acutangle	Triangle isoangle	Triangle équiangle
Un angle droit	Un angle obtus	Trois angles aigus	Au moins deux angles isométriques	Trois angles isométriques

Les propriétés des triangles

Il est intéressant de souligner les **propriétés** suivantes des triangles :

1. La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.
2. L'angle opposé au côté le plus long d'un triangle est l'angle le plus grand.
3. Dans un triangle isocèle ou équilatéral, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques et vice versa. On en déduit qu'un triangle isocèle est nécessairement isoangle et qu'un triangle équilatéral est nécessairement équiangle.

Figure 20 : Des propriétés simples sans figures dans Sommets

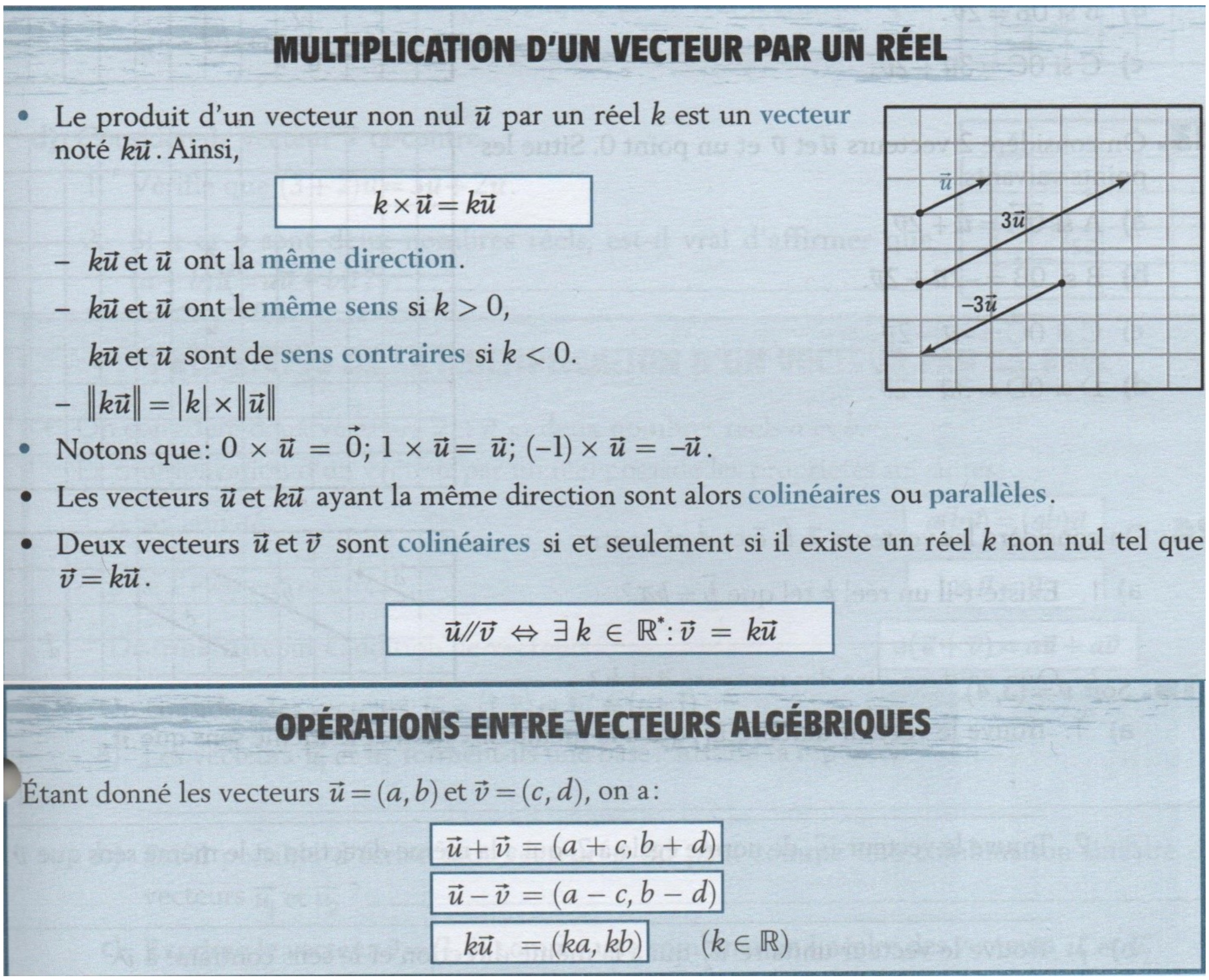
La multiplication d'un vecteur par un scalaire possède les propriétés suivantes.

Propriété	Énoncé
Associativité	$(k_1k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
Distributivité sur l'addition de vecteurs	$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
Distributivité sur l'addition de scalaires	$(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$

Figure 21 : Des énoncés plus difficiles à illustrer dans Visions

D'un autre côté, il y a plusieurs figures qui sont jointes à des énoncés dans un mode de pensée semblable à celui de GI : les énoncés et les figures dépendants l'un de l'autre amènent un travail sur la figure. Souvent, la dépendance de ces figures est due aux objets de la figure directement nommés dans l'énoncé, comme dans « angle plat : mesure angle AOB = 180° », « les angles 1 et 3, 2 et 4, 5 et 7, 6 et 8 sont opposés par le sommet. », « A est l'origine d'une demi-droite » et « dans la figure ci-dessous, $\overline{A'B'}$ est la projection orthogonale de $\overline{AB}$ sur la droite *d* et $\overline{B'C}$ est la projection orthogonale de $\overline{BC}$ sur la droite *d*. ». Dans certains cas, malgré la dépendance, il est possible de comprendre l'énoncé sans référence à la figure, comme c'est le cas pour celui de l'angle plat, mais il serait aussi possible que l'angle AOB soit le résultat d'une configuration particulière et dans un tel cas, la figure deviendrait nécessaire. De plus, en nommant des objets retrouvés sur une figure, les énoncés ont un caractère plus singulier, c'est-à-dire que la généralité de la propriété ou de la définition est implicite. Toutefois, le raisonnement figural derrière ces énoncés n'est pas forcément typique de GI : la notion de projection orthogonale, comme défini à la figure 17 (p. 89), est plus complexe et nécessite un raisonnement s'appuyant sur plusieurs concepts à la fois pour la comprendre. Pour ces raisons, nous voyons dans ces dépendances une géométrie qui est quelque part entre GI et GII, sans être parfaitement l'une ou l'autre.

Nous avons aussi remarqué que certains énoncés se rapprochent de GIII, en particulier lorsqu'il s'agit d'énoncés de géométrie vectorielle en 5e secondaire, comme ceux de la figure 22 où les premiers sont indépendants de la figure et les derniers ne sont pas accompagnés d'une figure. Dans



MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

- Le produit d'un vecteur non nul $\vec{u}$ par un réel k est un vecteur noté $k\vec{u}$. Ainsi,

$$\boxed{k \times \vec{u} = k\vec{u}}$$

  - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
  - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens si $k > 0$,
    $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires si $k < 0$.
  - $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- Notons que : $0 \times \vec{u} = \vec{0}$; $1 \times \vec{u} = \vec{u}$; $(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ayant la même direction sont alors colinéaires ou parallèles.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$$\boxed{\vec{u} /\!/ \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}^* : \vec{v} = k\vec{u}}$$

OPÉRATIONS ENTRE VECTEURS ALGÉBRIQUES

Étant donné les vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, on a :

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)}$$

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)}$$

$$\boxed{k\vec{u} = (ka, kb)} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Figure 22 : Des énoncés de GIII dans Mathématiques 3000, 5e secondaire SN

cet exemple, les énoncés ont parfois un caractère formel typique de GIII (« $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \epsilon \mathbb{R}^* : \vec{v} = k\vec{u}$ ») et d'autres fois ils ont une syntaxe liée à la sémantique typique de GII (« deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ »). L'intention de l'équipe d'auteurs n'est pas claire, mais il est possible de croire à tentative de formalisation de la propriété, ce qui serait un passage vers une géométrie de GIII.

En conclusion, nous sommes d'avis que la notion de paradigme géométrique n'a pas été prise en compte dans l'élaboration du référentiel. Il est possible que les équipes d'auteurs n'en aient pas été informées si l'on prend en compte les dates de publication des ouvrages et de diffusion de la théorie des paradigmes géométriques. Nous croyons que c'est pourtant là une explication à plusieurs flous dans l'enseignement des référentiels et que celui-ci se traduit par une oscillation entre les paradigmes sans passage clair de l'un à l'autre. Une façon d'encourager le travail mathématique des élèves en GII serait de donner une grande place au référentiel construit : les élèves commenceraient avec un petit ensemble de propriétés et de définitions et devraient démontrer eux-mêmes les autres. Dans cette optique, à la section suivante, nous dégagerons différents types de référentiels selon la place du référentiel construit.

4.4 Différents types de référentiel selon le référentiel construit

Alors qu'à la sous-section *4.2.1*, nous avons présenté le moment d'apparition des activités liées à la valeur épistémique des propriétés dans le tableau 13, il sera question dans cette section du moment d'institutionnalisation des propriétés et des définitions. Ce moment diffère de celui mentionné précédemment parce qu'il y a rarement une institutionnalisation dans les parties « activités d'exploration » et inversement, il y a rarement une activité pour établir une propriété dans les parties « notes de cours ». Le tableau 16 montre les moments d'institutionnalisation des éléments du référentiel selon l'ouvrage.

Tableau 16 : Moment d'institutionnalisation des propriétés et des définitions

		Activité d'exploration	Note de cours	Exercices	Synthèse	total
Mathématiques 3000	1re	21	107	3	0	131
	4e CST	4	71	9	0	84
	4e SN	4	89	4	0	97
	5e TS	6	169	10	0	185
	5e SN	6	87	10	0	103
Sommets	1re	0	117	0	40	157
Point de Mire	3e	0	59	0	25	84
Panoramath	1re	0	91	2	99	192
	2e	1	90	2	180	273
Perspective	2e	17	34	10	106	167
Intersection	3e	11	17	6	2	36
	4e CST	20	59	8	41	128
	4e SN	17	53	10	0	80
	5e CST	8	17	2	0	27
Point de Vue	3e	15	19	5	180	219
	4e SN	8	37	16	69	130
	5e CST	18	12	1	92	123
Visions	5e TS	1	116	0	275	392
	5e SN	0	57	0	270	327
Total		157	1301	97	1380	2935

Nous remarquons que la majorité des propriétés et des définitions sont présentées dans les notes de cours ou en synthèse. La proportion des propriétés construites en exercice est alors moindre dans les ouvrages québécois. Aussi, nous considérons les activités d'exploration, toujours situées avant l'institutionnalisation du référentiel dans les ouvrages québécois, comme faisant partie du référentiel initial. En effet, le travail mathématique porté sur le référentiel en activité d'exploration n'a pas le même statut pour un élève que celui d'un problème suivant l'institutionnalisation du référentiel : le premier a pour but de faire découvrir alors que le second a pour but de travailler le concept (dans le sens du modèle ck¢ de Balacheff et Margolinas (2003)). Il est alors possible de penser à des catégories de référentiels selon l'importance des types de référentiels (initial et construit[19]). Dans l'optique d'adapter un logiciel tuteur en démonstration à la réalité scolaire, notre

[19] Nous négligeons volontairement la place du référentiel synthèse pour la raison que nous ne savons pas en quelle mesure il prend une place importante dans l'apprentissage des référentiels.

travail nous a également amené à définir six types de référentiel susceptibles d'apparaître dans différentes classes de mathématiques selon leurs modalités d'enseignement.

- Le référentiel **frontal** : composé uniquement d'un référentiel initial. L'ouvrage n'amène pas de nouvelles propriétés dans la section de problèmes.
- Le référentiel **partiel** : composé d'un partage entre le référentiel initial et construit. L'ouvrage divise ainsi son référentiel entre les notes de cours et au travers des exercices.
- Le référentiel **minimaliste** : composé d'un petit référentiel initial, voire un référentiel « minimal » pour commencer une réflexion. L'ouvrage amène davantage de propriétés construites au travers des problèmes et contrairement au référentiel partiel, le but du référentiel minimaliste est de laisser l'apprenant construire son référentiel au travers des exercices. Il s'agit d'un référentiel « par excellence » pour le concept d'îlot déductif.
- Le référentiel **axiomatique** : le référentiel initial est composé uniquement d'axiomes et similairement au référentiel minimaliste, le but est de laisser l'apprenant construire son référentiel.
- Le référentiel **conjectural** : il n'y a pas de référentiel initial formel. L'apprenant émet des conjectures, validées par des outils comme un logiciel de géométrie dynamique, sur les propriétés. Le référentiel est ainsi complètement construit par l'apprenant, bien que celui-ci ne démontre pas forcément de manière classique les propriétés. Ce référentiel se rapproche du paradigme du « physicien-géomètre » décrit par Tanguay et Geeraerts (2012)
- Le référentiel **implicite** : il n'y a pas de référentiel dans l'ouvrage. Celui-ci est censé être connu à l'avance.

La figure 23 place les différents référentiels selon la proportion entre la partie construite et initiale. Le référentiel implicite ne peut être placé sur la même droite que les autres puisqu'il n'y a pas d'introduction de propriétés dans l'ouvrage.

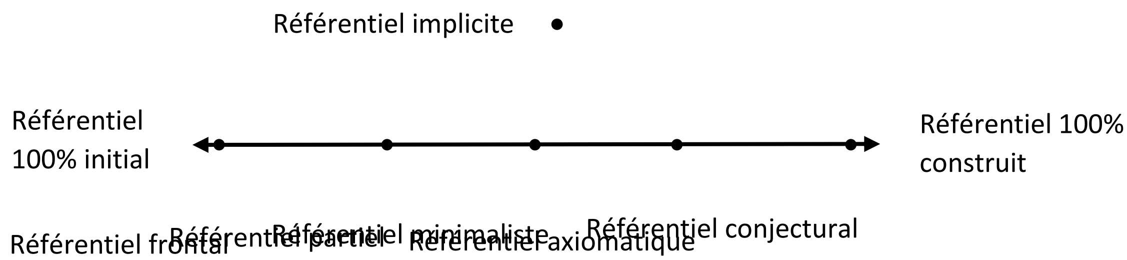


Figure 23 : Différents types de référentiels

Les manuels scolaires québécois ont essentiellement des référentiels soit frontaux, soit partiels. La proportion dite construite dans les référentiels partiels de ces ouvrages est réduite, ce qui les rapproche du référentiel frontal que nous retrouvons dans les autres manuels. D'ailleurs, la série de manuels français *Sésamath* (Sésamath, 2019) se retrouve aussi dans cette catégorie. Les référentiels axiomatiques sont plus utilisés en classe de mathématiques universitaire où le but est de construire une théorie, comme c'est le cas dans un cours d'analyse. D'ailleurs, Euclide s'est également servi d'un référentiel axiomatique pour écrire son ouvrage. Cependant, si l'ouvrage devait être utilisé aujourd'hui, il s'agirait d'un référentiel frontal puisque les propriétés sont toutes données d'emblée. Nous retrouvons des référentiels implicites notamment dans des cahiers d'exercices comme *150 énigmes géométriques de 13 à 113 ans* (Agrell, 2015). Finalement, le référentiel conjectural peut être retrouvé dans un ouvrage comme *Créer avec GéoGebra* (Deleuze et Padilla, 2016)

Parallèlement, il existe différentes manières de construction d'un référentiel pour un ouvrage pédagogique. On peut effectivement choisir le référentiel en premier, puis les problèmes selon ce référentiel; on peut choisir les problèmes en premier, puis le référentiel nécessaire à la résolution des problèmes; ou, dans une situation intermédiaire, choisir une partie des deux, puis compléter. Les ouvrages québécois étant partiels ou frontaux et interprétant la Progression des apprentissages relativement de la même façon, nous pensons qu'il y a une proportion importante du référentiel qui est d'abord choisie et que les problèmes sont ensuite proposés de manière à utiliser le référentiel. Nous retrouvons tout de même plusieurs propriétés qui apparaissent durant les exercices pour permettre la résolution d'un problème ou d'une série de problèmes. Selon nous, ces propriétés sont le reflet d'un choix a priori d'un ou plusieurs problèmes qui nécessite de nouvelles propriétés pas encore institutionnalisées. Aussi, nous retrouvons plusieurs propriétés ou définitions qui n'apparaissent que dans un ouvrage. À titre d'exemple, les propriétés « lorsqu'on relie consécutivement les extrémités de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle, on obtient un carré », « le sinus d'un angle obtus est égal au sinus de l'angle qui lui est supplémentaire » ou « tous les segments qui relient deux sommets homologues sont perpendiculaires à l'axe de réflexion » n'apparaissent qu'une fois dans le corpus d'ouvrage étudié. Il est donc possible de penser que certaines de ces propriétés ont été choisies par les auteurs pour permettre la résolution des problèmes.

En conclusion, les ouvrages pédagogiques québécois présentent d'emblée une grande partie du référentiel au lieu d'en encourager sa construction au travers de problèmes de preuve. C'est pour cette raison que nous disons qu'ils sont des référentiels frontaux ou partiels. En conséquence, nous pensons aussi que la majorité des propriétés et des définitions sont choisies en avance par l'équipe d'auteurs et que les problèmes sont construits en fonction de ce référentiel choisi. Bref, qu'un ouvrage fasse intervenir l'élève dans la construction du référentiel ou non, ce dernier devrait permettre la résolution des problèmes proposés dans l'ouvrage. Le travail mathématique engendré par la résolution de problèmes occupe ainsi une partie centrale de l'apprentissage de la géométrie. Conséquemment, la prochaine section portera sur l'adaptation des différents référentiels des manuels à un référentiel pour un logiciel tuteur en démonstration.

4.5 Un référentiel pour le 21e siècle

Dans les sections précédentes, il a été question d'analyses des référentiels et de différents types de référentiels. Dans cette dernière section, nous suggérons différents référentiels à partir de nos résultats. D'entrée de jeu à cette section, nous suggérons un référentiel « aide-mémoire » pour les enseignants du secondaire du Québec voulant monter leur propre référentiel. Il est possible de le consulter à l'annexe 9.[20] Dans cet aide-mémoire, nous retrouvons la plupart des propriétés et des

[20] Nous n'encourageons pas l'utilisation telle quelle de cet aide-mémoire comme objet d'étude dans une classe. Il doit être adapté en fonction du but visé. Notamment, un enseignant pourrait vouloir faire découvrir une propriété, construire

définitions que nous avons repérées dans les ouvrages scolaires, mais aussi des énoncés que nous avons ajoutés pour pallier certaines lacunes mentionnées dans les analyses précédentes. Ces dernières sont annotées par un astérisque (*). À titre d'exemple, nous avons utilisé la définition et les propriétés du polygone régulier repérées dans les ouvrages scolaires, mais nous avons ajouté la définition et les propriétés du centre d'un polygone régulier dont nous avons discuté à la section 4.2.1. Les deux sous-sections suivantes porteront aussi sur une suggestion de référentiel, mais, cette fois-ci, utilisable par un agent-tuteur en démonstration : nous discuterons d'abord d'un référentiel de base puis nous montrerons comment il est possible de l'adapter selon différentes pratiques enseignantes.

4.5.1 Un référentiel pour une intelligence artificielle

À la sous-section précédente, il a été question de l'activation de la genèse sémiotique par un travail portant sur les référentiels. Lorsque le travail mathématique se fait à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique et d'un agent tuteur, la résolution d'un problème de preuve active les trois genèses en même temps. Pour répondre à notre objectif d'adapter les référentiels issus des ouvrages scolaires à une intelligence artificielle qui résout des problèmes de preuves (troisième objectif), nous avons d'abord trié les énoncés en trois catégories : à implémenter dans un système tuteur (règles d'inférence), à mettre en glossaire (énoncés de signification) et ne pas implémenter dans un système tuteur. Parallèlement, nous avons aussi repéré des règles d'inférences qui seraient nécessaires à une machine, mais qui sont implicites à l'humain. Dans cette sous-section et la prochaine, nous nous sommes concentrés sur la géométrie plane euclidienne dont l'instrumentation au sein d'un logiciel de géométrie dynamique est plus naturelle.

De façon générale, nous avons classé les énoncés qui permettent la résolution de problème de preuve comme étant à implémenter et les autres à mettre en glossaire ou à ne pas implémenter. L'optique du glossaire dans un agent tuteur à la résolution de preuve est de permettre à l'élève d'avoir quand même accès aux énoncés qui expliquent un concept. Pour une explication plus précise, nous avons séparé les énoncés de définitions, de propriétés et les autres.

Définitions à implémenter : les définitions à implémenter dans un système tuteur peuvent être celles d'objets géométriques qui sont sujets à des problèmes de preuves au secondaire. Ce sont généralement des objets relativement plus complexes comme des droites remarquables, des polygones particuliers, etc. Les définitions à implémenter peuvent aussi être celles de relations entre deux objets. À l'opposé, nous n'avons pas considéré si une définition était unique à un ouvrage ou, au contraire, revenait à chaque ouvrage. Nous pensons en effet que le fait qu'une définition soit « rare » n'est pas un enjeu au niveau de l'expansion discursive, même si au contraire, elle permet d'étendre le domaine de validité du référentiel et de proposer des problèmes plus riches et variés. À titre d'exemple, nous suggérons d'implémenter la définition de la médiatrice, de la médiane, de la bissectrice, de la hauteur, de l'hypoténuse, du triangle isocèle, du triangle équilatéral, du carré, du trapèze, du parallélogramme, du rectangle, du losange, du cerf-volant, du deltoïde, du cercle, du diamètre, du polygone régulier, des droites parallèles, des droites perpendiculaires et des figures équivalentes.

Définitions à mettre en glossaire : les définitions à mettre en glossaire dans un système tuteur peuvent être celles d'objets géométriques simples qui ne sont généralement pas utilisés dans des problèmes de preuves au secondaire comme inférence, mais dont l'objet est mentionné ou manipulé avec un logiciel de géométrie dynamique. Elles peuvent également être celles de relations entre deux objets qui sont généralement attribuées de façon purement visuelle, comme c'est le cas des angles alternes-internes : l'identification des angles alternes-internes est nécessaire pour utiliser la propriété sur leur congruence dans le cas des droites parallèles, mais l'élève doit rarement spécifier que deux angles sont alternes-internes « parce qu'ils n'ont pas le même sommet et sont situés de part et d'autre de la sécante et à l'intérieur des deux autres droites ». Il est important de noter que même si nous ne proposons pas l'implémentation de la définition d'un objet ou d'une relation entre des objets, le logiciel peut quand même avoir une définition à l'interne qui permette l'utilisation de ces objets ou de ses relations dans les problèmes. Nous proposons simplement d'exclure ces définitions comme règle d'inférence possible pour l'usager. De plus, dans le cas de QEDX, ces mêmes objets ou relations doivent être définis à même le code du logiciel de génération automatique de preuves de Font (2021) pour qu'il fonctionne. Autrement dit, ces objets géométriques existent déjà et ne peuvent pas être inférés. C'est par exemple le cas pour le quadrilatère. En effet, pour une raison qui est intrinsèque au logiciel de cet auteur, l'utilisateur de QEDX n'aura jamais à utiliser explicitement la définition du quadrilatère pour inférer que « ABCD est un quadrilatère » à partir des segments AB, BC, CD et AD. Toutefois, l'usager pourrait avoir besoin de l'antécédent « ABCD est un quadrilatère », pour inférer la somme des angles intérieurs.

En définitive, nous suggérons de mettre en glossaire les définitions du point, de la droite, du segment, de la demi-droite, de l'angle, de l'angle plat à l'angle plein[21], des angles alternes-internes, des angles alternes-externes, des angles correspondants, d'une figure image, d'une figure initiale, de la translation, de la rotation, de la réflexion, de l'homothétie, de la cathète, d'un côté adjacent à un angle, d'un côté opposé à un angle, du périmètre, de l'aire, du quadrilatère, du triangle, du rayon, de l'apothème d'un polygone, du pentagone (et des autres polygones réguliers).

Définitions à ne pas implémenter : les définitions à ne pas implémenter sont celles de concepts généraux ou des relations générales entre deux concepts, celles qui sont des accumulations de plusieurs énoncés de définitions ou de propriétés, celles qui sont des définitions sémiotiques ou procédurales et celles d'objets ou de relations entre deux objets qui ne sont généralement pas mentionnées dans les problèmes proposés aux élèves. À titre d'exemple, nous suggérons de ne pas implémenter la définition de dimension, de condition minimale d'isométrie, de lignes équivalentes, d'un rapport trigonométrique et de superficie (la définition de l'aire étant implémentée en glossaire).

Propriétés à implémenter : les propriétés à implémenter sont celles qui sont utilisées à la résolution de problèmes de preuves. De la même manière que les définitions, nous considérons une propriété unique à un ouvrage tout aussi intéressante qu'une propriété qui revient dans tous les ouvrages. Nous suggérons ainsi d'implémenter des propriétés comme « Les angles opposés par le sommet sont isométriques », « des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires », « si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles correspondants sont congrus », « si deux droites coupées par une sécante déterminent des angles correspondants ou alternes isométriques, alors ces droites sont nécessairement parallèles », « les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure », « l'image obtenue par une homothétie est semblable à la figure initiale », « si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles », « la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180° », « Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse », etc.

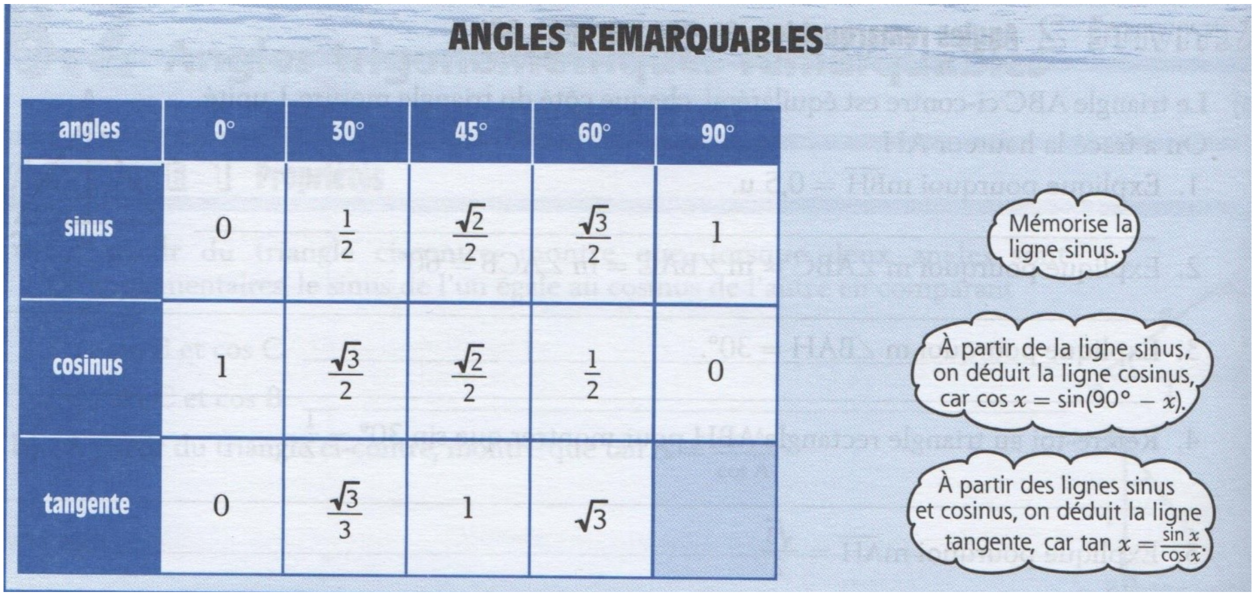
[21] Nous considérons que le passage d'un angle particulier à sa mesure se fait de manière spontanée et ne nécessite pas d'inférence à proprement parler.

Propriétés à mettre en glossaire : les propriétés à mettre en glossaire sont des énoncés apportant des précisions; des énoncés qui pourraient être vus comme des définitions; des énoncés comportant plusieurs propriétés à implémenter (dans tel cas, nous suggérons d'implémenter individuellement les propriétés); ou lorsque la propriété est équivalente à une propriété à implémenter, mais dont l'énoncé est inhabituel. Dans ce dernier cas, nous croyons bon de garder la propriété à la portée de l'élève puisqu'il s'agit d'une façon différente de comprendre une même propriété. À titre d'exemple, nous suggérons de mettre en glossaire les propriétés « le rapport d'homothétie indique le nombre de fois que la distance entre le point O et chaque sommet de la figure image est plus grand ou plus petite que la distance entre le point O et la figure initiale », « si $0<k<1$, alors il s'agit d'une réduction de la figure initiale », « pour reconnaître deux figures semblables, il faut que : les mesures des segments homologues sur chacune des figures soient proportionnelles et les angles homologues sur chacune des figures soient isométriques », « le losange et le triangle isocèle sont des figures symétriques » et « la mesure d'un arc de cercle peut être exprimée de deux façons, soit en degrés, soit en unités de longueur. Un arc de cercle a pour mesure en degrés celle de l'angle au centre qui l'intercepte. »

Propriétés à ne pas implémenter : les propriétés à ne pas implémenter sont des propriétés qui ne servent généralement pas à la résolution de problèmes de preuve ou des propriétés qui ne sont pas à proprement parler des propriétés de la géométrie. Les énoncés contenant plusieurs propriétés peuvent aussi ne pas être à implémenter lorsque les propriétés sont individuellement à implémenter. Finalement, étant donnée une difficulté liée à la programmation, nous avons noté les propriétés d'inéquations comme étant à ne pas implémenter[22]. À titre d'exemple, nous suggérons de ne pas implémenter les propriétés « la lumière parcourt toujours le chemin le plus court pour se rendre d'un endroit à un autre. C'est ce qui explique que les angles d'incidence et de réflexion sont isométriques », « pour décrire une rotation de 180°, il suffit de donner son centre de rotation, le point O, et son angle de rotation, 180° », « contrairement à la translation et à la rotation, la réflexion inverse l'orientation du plan », « dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires et le côté opposé à un angle aigu est nécessairement le côté adjacent à l'autre angle aigu », « la somme des mesures de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure à la mesure du troisième côté », « le produit des distances d'un point P à chacun des points d'intersection avec le cercle

[22] Pour plus d'information, consulter la thèse de Ludovic Font (2021) *Création d'un générateur de preuves pertinentes pour un logiciel tuteur en géométrie du secondaire, utilisant la programmation logique.*

d’une sécante passant par P est constant. Ce produit est appelé puissance du point P par rapport au cercle. » ou les égalités dans le tableau de la figure 24.



ANGLES REMARQUABLES

angles	0°	30°	45°	60°	90°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Figure 24 : Des propriétés à ne pas implémenter dans Mathématiques 3000

Autres : les énoncés décrivant un processus ont été classés comme étant à ne pas implémenter puisqu’ils ne sont pas en lien avec les logiciels de géométrie dynamique. Deux notes sémiotiques ont été classées comme allant dans un glossaire en raison de leur utilité dans la résolution de problèmes de preuves : « le même nombre de traits sur des côtés et des angles signifie que les côtés ou les angles sont isométriques » et « selon les besoins, les approximations de π les plus fréquemment utilisées sont 3,14 ou 3,1416 ou 3 1/7 ». À l’opposé, les autres notes sémiotiques comme « le symbole d’égalité concerne des nombres alors que le symbole d’isométrie concerne des objets géométriques. On a donc $m\overline{AB} = m\overline{DE}$, mais $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ », « on nomme des triangles isométriques selon leurs sommets homologues. Donc, si triangle ABC est isométrique au triangle DEF, on peut affirmer que l’angle A est homologue à l’ange D, que l’angle B est homologue à l’angle E et que l’angle C est homologue à l’angle F » ou « rayon et diamètre : deux termes désignant aussi la longueur des segments auxquels ils sont associés » ont été classées comme à ne pas implémenter puisqu’elles ne participent pas directement à la résolution d’un problème de preuve. Finalement, les formules ont le même traitement que les énoncés. Nous suggérons ainsi d’implémenter la relation de Pythagore, la loi des sinus, la loi des cosinus, les formules d’aires, les relations métriques, etc. Les rares énoncés de formules que nous suggérons de mettre en glossaire ou de ne pas implémenter sont celles qui en incluent plusieurs, comme « loi des cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ».

Notre travail conjoint à l'élaboration d'une intelligence artificielle pour résoudre des problèmes de preuve nous a aussi amené à découvrir des propriétés implicites qui n'apparaissent jamais dans les ouvrages étudiés. Entre autres, la composition d'angles à partir d'autres angles ou de segments à partir d'autres segments se fait de manière tout à fait implicite et naturelle par l'humain, mais ce n'est pas le cas pour une machine. Par exemple, dans l'exemple de la figure 25

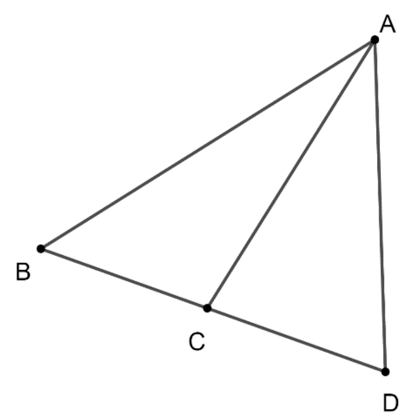


Figure 25 : Exemple d'addition d'angles et de segments

il est évident que $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$ et que $m\overline{BC} + m\overline{CD} = m\overline{BD}$, alors que l'ordinateur, lui, a besoin d'une règle d'inférence pour y arriver. En plus d'une règle d'inférence, l'ordinateur a besoin de propriétés sur l'ordre des points pour s'assurer de la validité des égalités (par exemple, en inversant les points C et D de l'exemple, $m\overline{BC} + m\overline{CD} \neq m\overline{BD}$). L'humain, quant à lui, arrive rapidement à ces résultats en traitant l'image. Pour plus d'information sur les propriétés implicites à l'humain, mais dont l'explicitation à l'ordinateur est nécessaire à l'ordinateur, il est possible de consulter Font (2021).

Finalement, il est possible de consulter notre suggestion de référentiel à implémenter à l'annexe 10. Les propriétés et définitions qu'on y retrouve sont celles que nous avons annotées comme étant « à implémenter » dans cette section. Nous y suggérons également quelques définitions et propriétés, annotées d'un astérisque (*) qui ne se retrouvent pas dans les ouvrages et qui, nous pensons, permettent la résolution d'un plus grand éventail de problèmes de preuve et de compléter le référentiel selon notre analyse discursive (section 4.2 Analyse discursive des référentiels). Ces autres propriétés que nous suggérons sont le fruit de notre travail d'équipe avec l'équipe du laboratoire Turing, plus particulièrement avec Font (2021) et Tessier-Baillargeon (2016). Nous rappelons qu'étant donné ce travail en parallèle au sein du laboratoire Turing, nous nous sommes concentrés sur la géométrie plane. Ainsi, malgré le fait que nous y avons relevé les énoncés des autres géométries (en 3 dimensions, analytique et vectorielle), nous ne les incluons pas dans notre suggestion. Finalement, se rajoutent à ce référentiel suggéré les raccourcis inférentiels que nous avons détectés et qui sont discutés à la sous-section suivante.

4.5.2 Des raccourcis inférentiels pour une adaptation humaine d'un référentiel informatique

À la sous-section précédente, nous avons proposé un référentiel pour un ordinateur qui est issu des ouvrages et complété par nous-mêmes. Pour adapter le référentiel aux différentes pratiques enseignantes, nous croyons qu'il faut également implémenter des raccourcis que les enseignants font en classe. Cette section portera sur la détection des raccourcis dans les référentiels étudiés. Contrairement à la sous-section *4.2.1* (p. 62) où l'enjeu était l'enseignement du référentiel, il ne sera pas question ici de différencier les propriétés encapsulées de celles court-circuitées, mais plutôt de relever les propriétés qui sont à la fois équivalentes à d'autres et que nous ne considérerons pas comme étant des propriétés « classiques ».

Tout d'abord, nous trouvons important de rappeler que les raccourcis inférentiels ne sont pas nécessairement une mauvaise pratique : tout dépend du travail mathématique fait en amont de la propriété. Cela étant dit, nous voyons dans les raccourcis inférentiels le reflet des habitudes de l'enseignement des référentiels et du raisonnement hypothético-déductif. Ces mêmes habitudes se retrouvent, en partie, selon nous, dans les différents ouvrages étudiés.

La mise en évidence des raccourcis inférentiels est un travail ardu : tout dépend des prémisses de l'îlot déductif et des propriétés considérées comme étant celles de « base ». Par exemple, s'il est convenu de la propriété « les angles à la base d'un triangle isocèle sont isométriques », la propriété « un triangle isocèle est aussi un triangle isoangle » devient un raccourci inférentiel puisqu'une inférence est sautée : triangle isocèle ⇒ **angle à la base isométrique** ⇒ triangle isoangle. À l'opposé, si la propriété convenue est plutôt « un triangle isocèle est aussi un triangle isoangle », alors c'est la propriété « les angles à la base d'un triangle isocèle sont isométriques » qui devient un raccourci : triangle isocèle ⇒ **triangle isoangle** ⇒ angle à la base isométrique! Ainsi, les raccourcis inférentiels dépendent des îlots et donc, diffèrent d'un enseignement à l'autre. La liste présentée à l'annexe 11 a été créée en détectant quelques raccourcis qui ne figurent pas dans l'enseignement « conventionnel » de la géométrie du secondaire. Autrement dit, nous nous sommes basés sur l'absence de ces propriétés dans les autres référentiels pour les détecter. Nous avons également détecté quelques cas de raccourci à partir de prémisses d'îlots déductifs, mais comme le dégagement de ces prémisses ne faisait pas partie de notre étude, nous n'en n'avons que détecté quelques-uns que nous énumérons à l'annexe 11.

Dans l'optique d'adapter la résolution de problèmes au sein d'un agent tuteur selon l'enseignant, nous suggérons d'implémenter ces raccourcis, mais d'en faire d'abord un problème de preuve. En effet, que ce soit une propriété simple, comme « un triangle isocèle est aussi isoangle et un triangle équilatéral est aussi équiangle » ou une propriété plus complexe, comme « dans tout triangle, la somme des carrés des mesures des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des mesures des côtés », nous croyons important d'en faire d'abord une démonstration à partir du référentiel déjà établi.

Pour résumer nos suggestions, nous proposons le référentiel de l'annexe 10 comme un noyau de propriétés et de définitions et les propriétés de l'annexe 11 comme étant des propriétés qui pourraient être disponibles ou non selon l'enseignant. S'ajoute aussi à ces propriétés toutes sortes de propriétés implicites (comme la composition d'angles et de segments), d'autres propriétés constituant des raccourcis ou des propriétés ad hoc qui permettraient la résolution d'une série de problèmes, mais que nous n'avons pas relevées dans les ouvrages. Dans le contexte de l'élaboration d'une intelligence artificielle pour résoudre des problèmes de preuve, une propriété ad hoc est une propriété inventée pour pallier la difficulté de l'ordinateur liée au registre sémiotique ou au sens commun. Par exemple, le logiciel tuteur QED-Tutrix comprend d'autres propriétés que celles trouvées dans les manuels ou celles que nous suggérons. Ainsi, le référentiel du logiciel comprend des propriétés comme « tout triangle dont deux angles intérieurs sont congrus est isocèle » (raccourci inférentiel) ou « un triangle isocèle-rectangle est un triangle rectangle dont les deux cathètes sont de même mesure. On peut aussi dire, un triangle isocèle avec un angle droit » (définition ad hoc) (Tessier-Baillargeon, 2016). Ce dernier exemple reflète bien les limites d'un ordinateur utilisant un référentiel rigide : sans cette définition, il ne pourra pas lui-même trouver une inférence permettant de décrire un triangle comme étant isocèle rectangle.

Conclusion

Cette étude sur les référentiels s'enracine dans la volonté des membres du laboratoire Turing de créer un agent tuteur d'aide à la démonstration. De façon plus précise, cette étude a débuté par le besoin d'un référentiel pour alimenter un logiciel tuteur en démonstration créée par l'équipe d'ingénierie du laboratoire.

Du point de vue épistémologique, le référentiel théorique apparaît dans la société grecque comme référence commune dans les débats oratoires (Richard, 2004b). Celui-ci culmine dans cette société par l'ouvrage attribué Euclide dans lequel la structure démonstrative est prédominante (Lefebvre, 1991). Cet ouvrage sera adapté plusieurs fois au fil des siècles tout en restant la référence principale en géométrie. Toutefois, au 20^{e} siècle, les mathématiciens découvrent d'autres géométries que celles d'Euclide et il devient alors encore plus important de préciser le système axiomatique de départ (Lefebvre, 1992a) : le référentiel théorique devient ainsi dynamique, dans le sens où ce n'est pas un ensemble fixe de définitions et de propriétés pour toute la géométrie. Au Québec, le ministère donne des pistes d'enseignement à suivre. Parmi ces pistes, nous retrouvons un référentiel « à explorer » (MELS, 2006a). En feuilletant des manuels scolaires, nous nous rendons rapidement compte que les éléments de ce référentiel n'ont pas toujours un statut théorique bien défini. Nous nous rendons aussi compte que les référentiels entre les manuels scolaires de même niveau diffèrent les uns des autres : l'enseignement du référentiel a lui aussi un aspect dynamique. L'enseignement du référentiel a d'ailleurs un deuxième aspect dynamique : les propriétés peuvent précéder les problèmes ou elles peuvent arriver à même les problèmes. De plus, du point de vue de l'usage, les éléments du référentiel servent de règle d'inférence. Dans une démonstration, en particulier lorsqu'il s'agit d'un problème de démonstration dans un contexte scolaire, il existe toute sorte de raccourcis selon l'auteur et les destinataires de la démonstration (Balacheff et Boy de la Tour, 2019; Lebaud, 2017; Tanguay, 2004). Nous voulions ainsi capturer toutes ces réalités, dont plusieurs sont à caractères humains, d'où notre objectif initial de dégager les référentiels et l'usage des raccourcis inférentiels dans le système scolaire québécois.

Le référentiel théorique a sa place dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique où elle est une composante dans le plan cognitif de la genèse discursive (Kuzniak et Richard, 2014). Ce référentiel peut prendre des allures différentes selon le paradigme géométrique dans lequel il se situe (Houdement et Kuzniak, 2006). Dans le paradigme de la géométrie naturelle, le référentiel est plutôt implicite : c'est le sens commun et l'évidence visuelle qui prédominent. Dans le paradigme de la géométrie axiomatique naturelle, le référentiel théorique est explicite et tente de représenter la réalité : il s'appuie ainsi sur le perceptif. En géométrie axiomatique formelle, toute perception est mise de côté pour établir le référentiel : les figures sont alors une représentation possible du référentiel théorique. Alors quels sont les référentiels géométriques utilisés dans les manuels scolaires et cahiers d'apprentissages du secondaire? Quelles en sont les caractéristiques discursives et paradigmatiques et en quoi diffèrent-ils les uns des autres? Comment peut-on adapter ces référentiels à un référentiel utilisé par un ordinateur?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons relevé les propriétés et les définitions en géométrie de 19 ouvrages scolaires. Pour chaque énoncé nous avons noté sa provenance, son résumé, les concepts auxquels elles se réfèrent, le moment où elle arrive dans l'ouvrage, sa dépendance à une figure, sa valeur épistémique (refléter par son mode d'établissement), son besoin d'être implémenté dans un système tuteur. Nous avons ensuite compilé ces données dans un graphe de connaissance à l'aide du logiciel *Protégé*. Nous avons ensuite interrogé notre graphe à l'aide du logiciel *GraphDB* qui permet des requêtes de type SPARQL.

Les résultats montrent que, pour une même année, les référentiels utilisés dans les manuels scolaires et les cahiers d'apprentissages comprennent un important noyau de même propriétés et définitions. De plus, comme la majorité des éléments du référentiels de ces ouvrages arrivent avant les problèmes de preuves, nous qualifions ces référentiels comme étant frontal ou partiel, ce qui laisse croire que la majorité des problèmes sont choisis en fonction du référentiel et non l'inverse.

En ce qui a trait aux caractéristiques discursives des référentiels, les résultats montrent qu'il y a des concepts mathématiques qui sont rarement bien définis et que peu de propriétés sont formellement démontrées. De plus, nous pensons que la constitution des référentiels peut poser des difficultés aux élèves sur plusieurs plans lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de preuve : il y a des propriétés absentes, plusieurs énoncés sont flous, il y a des définitions sémiotiques et d'autres implicites et l'on passe d'une terminologie à une autre sans explication. En ce qui concerne les paradigmes, les résultats montrent une oscillation entre GI et GII, en particulier en ce qui a trait aux activités d'établissement de la propriété. En ce qui a trait aux figures, les résultats montrent néanmoins que les figures jouent la plupart du temps le rôle attendu en GII, mais que certaines encouragent un raisonnement typique de GI et même que certaines encouragent un raisonnement figural typique de GI tout en nécessitant un référentiel théorique typique de GII.

Enfin, à la lumière de nos résultats, nous proposons un référentiel « aide-mémoire » basé essentiellement sur les ouvrages que nous avons étudiés et susceptible de faire connaître aux enseignants la variété des approches possibles pour construire et valider de nouvelles connaissances en classe. Le type de référentiel que nous proposons est non seulement susceptible d'aider l'enseignant à soutenir l'élève, mais il peut aussi l'enrichir de nouvelles définitions ou propriétés plus près des habitudes de son propre contrat didactique. Nous proposons aussi un référentiel pour un agent tuteur, destiné aux programmeurs, que nous proposons d'adapter avec les raccourcis inférentiels détectés. D'ailleurs, n'étant pas des référentiels universels, ni l'un ni l'autre de ces référentiels n'a été construit dans le but d'être utilisé tel quel, mais plutôt dans le but d'être une première référence qui doit être adaptée et enrichie selon les besoins.

Subséquemment, en raison de son caractère exploratoire, notre étude a un domaine de validité qu'il est important de rappeler :

- elle s'applique au contexte scolaire du Québec et les résultats pourraient varier selon le pays et la place de la démonstration dans son curriculum;
- nous n'avons pas étudié tous les manuels d'une même maison d'édition. Il est ainsi possible que cela ait eu une incidence sur les résultats de notre analyse discursive, notamment au niveau des concepts implicites;
- nos enregistrements ont un caractère subjectif et, par conséquent, il serait peu probable qu'une autre personne produise exactement les mêmes enregistrements.

Enfin, étant donné la nature de notre recherche et nos nombreuses interrogations au travers de ce processus, nous pensons qu'il serait pertinent de poursuivre avec d'autres études :

- réaliser une étude portant sur la place et l'utilité du référentiel synthèse (synthèse et glossaire) dans la résolution de problèmes de preuve par des élèves, juste après l'institutionnalisation du référentiel et en fin d'année;
- étant donné la capacité des élèves à résoudre des problèmes de preuve malgré les concepts implicites, réaliser une étude portant sur la référence des conceptions des

objets géométriques des élèves, à savoir si ces conceptions se basent sur le référentiel théorique, sur une image ou sur des explications simplifiées;

- réaliser une étude afin de découvrir la forme la mieux comprise et la plus facile à utiliser par les élèves des énoncés du référentiel;
- mener une étude similaire en se concentrant sur la détection des séquences déductives au sein des îlots déductifs des ouvrages afin de mieux dégager leurs prémisses;
- réaliser un projet d'ingénierie didactique permettant une transition harmonieuse de GI vers GII tout en laissant à l'élève la charge de construire lui-même une grande partie du référentiel théorique (référentiel minimaliste);
- réaliser une étude similaire en utilisant les solutions des problèmes donnés par des enseignants et leurs notes de cours personnelles dans le but de découvrir l'usage fait des référentiels des manuels scolaires;
- réaliser une étude plus approfondie sur les raccourcis inférentiels tolérés par les enseignants en étudiant des examens corrigés.

Finalement, notre recherche et nos réflexions sur les référentiels dépassent le cadre de notre maîtrise dont fait état ce mémoire, particulièrement en ce qui a trait à l'implémentation des référentiels dans un logiciel et toutes les difficultés que cette implémentation amène. Ce mémoire apporte néanmoins une ouverture à des projets ultérieurs de QED-Tutrix, dont celui de concevoir des problèmes pour laisser le travail de la construction du référentiel à l'élève, ou encore, l'idée d'inférence figurale qui pourrait être exploitée avantageusement dans le logiciel.

Références

Agrell, M. (2015). *150 énigmes géométriques de 13 à 113 ans*. France Ellipse.

Alsina, C. et Nelsen, R. B. (2009). *When Less is More. Visualizing Basic Inequalities*. États-Unis: The Mathematical Association of America.

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*(5), 1-45.

Balacheff, N. et Boy de la Tour, T. (2019). Proof Technology and Learning in Mathematics: Common Issues and Perspectives (*Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Suisse: Springer.

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2003). *cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques*.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*(5), 1-34.

Benveniste, E. (1966). *Problèmes de lingistique générale, 1*. Paris: Gallimard.

Benveniste, E. (1974). *Problèmes de lingistique générale, 2*. Paris: Gallimard.

Bernier, J.-F., Cléroux, J., Mercier, P., Pascu, E. et Rodrigue, V. (2016). *Sommets. Cahier d'apprentissage, savoirs et activités. 1er cycle 1re secondaire*. Montréal, Québec, Canada: Chenelière Éducation.

Bilkner-Ashbahs, A., Knipping, C. et Presmeg, N. (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*. Dordrecht Heidelberg New-York London: Springer.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, É., Pomerleau, F. et Roy, V. (2010a). *Visions. Sciences naturelles. Manueld de l'élève volume 1. Mathématique 3e année du 2e cycle du secondaire.* Anjou, Québec: Les Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, É., Pomerleau, F. et Roy, V. (2010b). *Visions. Sciences naturelles. Manueld de l'élève volume 2. Mathématique 3e année du 2e cycle du secondaire.* Anjou, Québec: Les Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, É., Pomerleau, F. et Roy, V. (2010c). *Visions. Technico-sciences. Manuel de l'élève volume 1. Mathématique 3e année du 2e cycle du secondaire.* Anjou, Québec: Editions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, É., Pomerleau, F. et Roy, V. (2010d). *Visions. Technico-sciences. Manuel de l'élève volume 2. Mathématique 3e année du 2e cycle du secondaire.* Anjou, Québec: Editions CEC.

Boivin, D., Boivin, C., Roy, V., Ledoux, A., Meyer, É. et Ricard, N. (2009). *Visions. Technico-sciences. Guide en un coup d'oeil. [2e année du 2e cycle du secondaire]*. Anjou, Québec: Éditions CEC.

Bos, H. (1998). La structure de la Géométrie de Descartes. *Revue d'histoire des sciences*, 291-318.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009a). *Intersection. Culture, société et technique. Manuel de l'élève A. 2e cycle du secondaire*. Montréal: Montréal : Graficor Chenelière Éducation.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009b). *Intersection. Culture, société et technique. Manuel de l'élève B. 2e cycle du secondaire*. Montréal: Montréal : Graficor Chenelière Éducation.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009c). *Intersection. Sciences naturelles. Manuel de l'élève A. 2e cycle du secondaire*. Montréal: Montréal : Graficor Chenelière éducation.

Boucher, C. M., Lynn et Coupal, M. (2007a). *Intersection. Manuel de l'élève A. 2e cycle du secondaire 1re année*. Montréal: Montréal : Graficor Chenelière Éducation.

Boucher, C. M., Lynn et Coupal, M. (2007b). *Intersection. Manuel de l'élève B. 2e cycle du secondaire 1re année*. Montréal: Montréal : Graficor Chenelière Éducation.

Braconne-Michoux, A. (2018). *Enseigner la géométrie en contexte d'adaptation scolaire*. Montréal: Éditions JFD inc.
Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble La Pensée sauvage.
Brousseau, G. (2004). Introduction à l'étude de l'enseignement du raisonnement et de la preuve : les paradoxes. Repéré à http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/04Ete/04EteThemeFR.html
Bundy, A. et Jamnik, M. (2019). A Common Type of Rigorous Proof that Resists Hilbert's Programme (*Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Suisse: Springer.
Buzaglo, C. et Buzaglo, G. (2004). *Mathématiques 3000. 1er cycle du secondaire. Tome 1*. Montréal: Guérin.
Buzaglo, C. et Buzaglo, G. (2008). *Mathématiques 3000. Séquence sciences naturelles. 4e secondaire*. Montréal, Québec: Guérin.
Buzaglo, C. et Buzaglo, G. (2009a). *Mathématiques 3000. Séquence sciences naturelles. 5e secondaire*. Montréal, Québec: Guérin.
Buzaglo, C. et Buzaglo, G. (2009b). *Mathématiques 3000. Séquence technico-sciences. 5e secondaire*. Montréal, Québec: Guérin.
Buzaglo, C. et Buzaglo, G. (2015). *Mathématiques 3000. Séquence culture, société et technique. 4e secondaire*. (Programme ajusté.[e] éd.). Montréal, Québec: Guérin.
Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005a). *Panoram@th. Manuel A volume 1. [1er cycle du secondaire]*. Anjou, Québec: Éditions CEC.
Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005b). *Panoram@th. Manuel A volume 2. [1er cycle du secondaire]*. Anjou, Québec: Éditions CEC.
Caron, F. (2007). Mise à contribution de la notion de compétence pour guider le développement d'une pratique mathématique instrumentée. *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, 185-200.
Caron, F. et de Cotret, S. R. (2007). *Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective.* Communication présentée Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec.
Caron, F. et Pelczer, I. (2016). *Les mathématiques scolaires au Québec : une « culture distincte »?* Communication présentée Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2016. Repéré à https://www.gdm.quebec/colloque/actes
Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. et Pérotin, C. (2002). *Triangle 4e*. Paris, France Hatier.
Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. et Pérotin, C. (2003). *Triangle 3e*. Paris, France Hatier.
Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris: Hermann.
Cimasoni, D. (2014). Cours de Géométrie I, semestre de printemps. Repéré à http://www.unige.ch/math/folks/cimasoni/GeometrieI.pdf
Clairaut, A. C. (1741). *Elemens de Geometrie*. Paris: Lambert & Durand, Libraires.
Deleuze, R. et Padilla, P. (2016). *Créer avec GeoGebra: exemples de réalisations & fiches techniques pour des mathématiques dynamiques*. Cassini.
Dupré, A., Ledoux, A. et Meyer, É. (2013). *Point de Mire. Mathématique 1re année du 2e cycle du secondaire. Cahier d'apprentissage 3.* Anjou, Québec: Les éditions CEC.
Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in mathematics, 22*(3), 233-261.
Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x, 31*, 37-61.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang Berne.

Duval, R. (2005). *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.* Communication présentée Annales de didactique et de sciences cognitives.

Duval, R. et Egret, M.-A. (1989). *L'organisation déductive du discours.* Communication présentée Annales de didactique et de sciences cognitives.

Duval, R. et Egret, M.-A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères IREM, 12*, 114-140.

Egret, M. et Duval, R. (1989). Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 2*, 41-64.

Font, L. (2021). *Création d'un générateur de preuves pertinentes pour un logiciel tuteur en géométrie du secondaire, utilisant la programmation logique.* (Polytechnique de Montréal, Montréal).

Font, L., Cyr, S., Gagnon, M., Leduc, N., Richard, P. et Tessier-Baillargeon, M. (2019). Creation of a mathematical model for QED-TUTRIX automated proof generator. Dans L. Vivier, E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & D. Tanguay (dir.), *Actes du sixième symposium sur le travail mathématique (ETM6, 13-18 décembre 2018)*. Valparaiso, Chile: Pontificia Universidad Catolica de Valparaiso.

Font, L., Richard, P., Gagnon, M. et Cyr, S. (2020). Automating the Generation of High School Geometry Proofs using Prolog in an Educational Context. *ThEDU 19*.

Frères de l'instruction chrétienne (1961). *Géométrie plane - cours secondaire*. Laprairie: Frères de l'instruction chrétienne.

Gauthier, J. (2015). *Enseignement de la géométrie en première secondaire et conceptions d'élèves: une oscillation entre la perception, la mesure et la théorie.* (Université de Montréal, Montréal). Repéré à https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/13047

Gendron, I., Ledoux, A. et Boivin, D. (2005a). *Panoram@th. Manuel B volume 2. [1er cycle du secondaire]*. Anjou, Québec: Éditions CEC.

Gendron, I., Ledoux, A., Boivin, D. et St-Cyr, P. (2005b). *Panoram@th. Manuel B volume 2. [1er cycle du secondaire]*. Anjou, Québec: Éditions CEC.

Gesellschaft für Klassifikation. Jahrestagung (34e : 2010 : Karlsruhe Allemagne), Gaul, W. A. et SpringerLink (Service en ligne) (2012). *Challenges at the interface of data analysis, computer science, and optimization proceedings of the 34th Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V., Karlsruhe, July 21-23, 2010*. Berlin ; New York: Springer.

Godjevac, J. (1999). *Idées nettes sur la logique floue*. PPUR presses polytechniques.

Gonseth, F. (1945). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon Lausanne.

Gray, E. et Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2).

Guay, S., Ducharme, M., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Frève, A., Gagnon, D., Le Nabec, M. et Martin, N. (2007a). *Point de vue mathématique. Manuel de l'élève volume 2. 2e cycle du secondaire 1re année*. Laval, Québec: Éditions Grand Duc.

Guay, S., Ducharme, M., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Frève, A., Gagnon, D., Le Nabec, M., Martin, N. et Pichette, J. (2007b). *Point de vue mathématique. Manuel de l'élève volume 1. 2e cycle du secondaire 1re année*. Laval, Québec: Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2005a). *Perspective mathématique. Manuel de l'élève A : 1er cycle du secondaire, mathématique*. Laval: Éditions Grand Duc HRW.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006a). *Perspective mathématique. Manuel de l'élève B volume 1 : 1er cycle du secondaire, mathématique*. Laval: Éditions Grand Duc HRW.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2006b). *Perspective mathématique. Manuel de l'élève B volume 2 : 1er cycle du secondaire, mathématique*. Laval: Éditions Grand Duc HRW.

Guay, S., Laplante, S., Van Moorhem, A., Dionne, F., Dussault, J., Gagnon, D., Hould, P., Latulipe, P., Le Nabec, M. et Ouellet, A. (2009). *Point de vue mathématique. Séquence culture, société et technique. Manuel de l'élève. 2e cycle du secondaire 3e année*. Laval, Québec: Éditions Grand Duc.

Guay, S., Lemay, S. et Hamel, J.-C. (2003). *Clicmaths : mathématiques au primaire. Manuel de l'enseignant et de l'enseignante. 3e cycle du primaire*. Laval, Québec : Éditions HRW.

Guay, S., Lemay, S. et Hamel, J.-C. (2005b). *Perspective mathématique. Guide d'enseignement : 1er cycle du secondaire, mathématique*. Laval: Laval : Éditions Grand Duc HRW.

Guay, S., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Ducharme, M., Gagnon, D., Huot, M., Laplante, S. et Le Nabec, M. (2008). *Point de vue mathématique. Séquence sciences naturelles. Manuel de l'élève. 2e cycle du secondaire 2e année*. Laval, Québec: Éditions Grand Duc.

Guilbaud, S. (2015). Bourbaki et la fondation des maths modernes. *CNRS le journal*. Repéré à https://lejournal.cnrs.fr/articles/bourbaki-et-la-fondation-des-maths-modernes

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999a). Géométrie et paradigmes géométriques. petit x n051. 5-21. *IREM de Grenoble*.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999b). Un exemple de cadre conceptuel pour létude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in mathematics, 40*(3), 283-312.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2003). Quand deux droites sont «à peu près» parallèles ou le versant géométrique du «presque» égal. *Petit x, 61*, 61-74.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie.* Communication présentée Annales de didactique et de sciences cognitives.

Kuhn, T. S. (1972). La structure des révolutions scientifiques.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2019). La théorie des espaces de travail mathématique développment et perspectives. Dans L. Vivier, E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & D. Tanguay (dir.), *Actes du sixième symposium sur le travail mathématique (ETM6, 13-18 décembre 2018)*. Valparaiso, Chile: Pontificia Universidad Catolica de Valparaiso.

Kuzniak, A. et Richard, P. R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17, 4(I)*, 1-37.

Launay, M. (2016). *Le grand roman des maths. De la préhistoire à nos jours*. Flammarion.

Lebaud, M.-P. (2017). *La démonstration est un texte* [PDF]. Repéré à https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/IREM/ens-demo/texte/Questessentext.pdf

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix: système tutoriel intelligent pour l'accompagnement des élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane.* (École Polytechnique de Montréal).

Lefebvre, J. (1991). La démonstration mathématique dans l'histoire Première partie: Tout ou rien. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 31*(3), 38-43.

Lefebvre, J. (1992a). Histoire des mathématiques. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 32*(4), 23-30.

Lefebvre, J. (1992b). Histoire des mathématiques. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 32*(3), 15-18.

MEES (2016). *Progression des apprentissages mathématique au secondaire*. Repéré à http://www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/secondaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

MEES (2019). *Matériel didactique approuvé pour l'enseignement secondaire*. Repéré à http://www1.education.gouv.qc.ca/bamd/doc/Liste_secondaire_fr_new.pdf

MELS (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise 1er cycle*. Repéré à http://www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/secondaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

MELS (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise 2e cycle*. Repéré à http://www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/secondaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

MELS (2009). *Progression des apprentissages mathématique au primaire*. Repéré à http://www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/secondaire/domaine-de-la-mathematique-de-la-science-et-de-la-technologie/mathematique/

Merriam-Webster. (2019). Theorem. Repéré à https://www.merriam-webster.com/dictionary/theorem

Michot, S. (2018). *Étude exploratoire de la description et de la reproduction de figures géométriques chez des élèves du 2e cycle du primaire.* (Mémoire, Université de Montréal, Montréal).

Mlodinow, L. (2002). *Dans l'oeil du compas*. Paris: Saint-Simon.

Onototext. (2020). GraphDB by ontotext. Repéré à http://graphdb.ontotext.com/

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions/construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* (Université Joseph-Fourier-Grenoble I).

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques.*

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2016). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. (Quatrième édition.[e] éd.). Malakoff: Armand Colin.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s' agit-il. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 17*, 121-144.

Playfair, J. (1826). *Elements of geometry; containing the first six books of Euclid, with ta supplement of the quadrature of the circle and the geometry of solids; to which are added, elements of plane and spherical trigonometry.* Édimbourg, Royaume-Uni.

Pletser, V. et Huylebrouck, D. (1999). The Ishango artefact: The missing base 12 link. *FORMA-TOKYO-, 14*(4), 339-346.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rey-Debove, J. R., Alain. (dir.) (2014). *Le Petit Robert*. Paris: Dictionnaires Le Robert.

Richard, P. R. (2004a). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in mathematics, 57*(2), 229-263.

Richard, P. R. (2004b). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne: Peter Lang.

Richard, P. R. et Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique, 30*(2), 379-409. doi: 10.7202/012674ar

Richard, P. R., Venant, F. et Gagnon, M. (2019). Issues and challenges about instrumental proof. Dans G. Hanna, D. Reid & M. de Villiers (dir.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (p. 139-172). Suisse: Springer International Publisher.

Sangalli, A. (2001). *Éloge du flou: aux frontières des mathématiques et de l'intelligence artificielle*. PUM.

Sésamath. (2019). *Le manuel Sésamath*. Repéré à https://manuel.sesamath.net/

Stanford University. (2020). A free, open-source ontology editor and framework for building intelligent systems. Repéré à https://protege.stanford.edu/

Tanguay, D. (2000). *ANALYSE DU DÉVELOPPEMENT DE LA NOTION DE PREUVE DANS UNE COLLECTION DU SECONDAIRE.* (Université du Québec à Montréal, Montréal). Repéré à http://www.archipel.uqam.ca/2144/1/M%C3%A9moire_DenisT.pdf

Tanguay, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie, 2*(3), 371-396.

Tanguay, D. (2004). La complexité du raisonnement déductif en géométrie. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*.

Tanguay, D. (2005). *Apprentissage de la démonstration et graphes orientés.* Communication présentée Annales de didactique et de sciences cognitives.

Tanguay, D. (2006). Comprendre la structure déductive en démonstration. *Revue Envol, 134*, 9-17.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive: à la recherche du paradigme manquant. *Petit x, 88*, 5-24.

Tessier-Baillargeon, M. (2016). *GeoGebraTUTOR: Modélisation d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine.* (Thèse de doctorat, Université de Montréal, Montréal, Canada).

Vault, M. (2019). The Definitive Glossary of Higher Mathematical Jargon. Repéré à https://mathvault.ca/math-glossary/

Villemin, G. (2017). Dictionnaire de base du vocabulaire des mathématiques. Repéré le 2019à http://villemin.gerard.free.fr/Referenc/Encyclop/P.htm

Vygotsky, L. S. (1997). *Pensée et langage*. Paris La dispute.

Weiss, M., Herbst, P. et Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in mathematics, 70*(3), 275-293.

Annexes

Annexe 1 : glossaire métamathématique et didactique

Lorsque nous abordons la question des démonstrations et du référentiel, nous constatons que plusieurs termes métamathématiques et didactiques apparaissent dans les ouvrages scolaires et scientifiques. Cette annexe est consacrée à définir plusieurs de ces termes dans le domaine de la mathématique et de la didactique des mathématiques.

- Une **proposition** est un énoncé ayant une valeur de vérité (vrai ou faux). Elle peut être en amont d'une démonstration comme énoncé dont on cherche à établir la valeur de vérité, être à l'intérieur d'une démonstration comme conséquent d'une inférence ou être la conclusion d'une démonstration (Vault, 2019).
- Un **axiome** est une proposition non démontrée, jugée comme évidente, servant de fondement à une théorie mathématique. Euclide utilise aussi le terme **postulat** pour certains axiomes. (Mlodinow, 2002; Vault, 2019)
- Une **définition** est une condition qualifiant de façon précise un terme mathématique et ce qu'il n'est pas. Une définition se rapporte à un objet mathématique ou à ses propriétés (Vault, 2019).
- Une **propriété** est une « qualité particulière de quelque chose » (Villemin, 2017). Elle est une proposition vraie découlant des axiomes, des autres propriétés et des définitions des objets concernés.
- Une **réciproque** est une propriété où l'antécédent et le conséquent sont inversés par rapport à une autre propriété. Par exemple, si une propriété stipule que « A implique B », alors sa réciproque sera « B implique A ». Notons que la réciproque d'une propriété n'est pas toujours vraie (Villemin, 2017).
- Une **propriété caractéristique** est une propriété qui pourrait aussi servir de définition : elle est une propriété propre à un objet mathématique, ce qui rend sa réciproque toujours vraie.
- Un **théorème** est une proposition démontrée à partir d'axiomes ou d'autres théorèmes préalablement démontrés. Une propriété est considérée comme un théorème lorsqu'elle est jugée importante dans son domaine (Merriam-Webster, 2019; Vault, 2019).
- Un **corollaire** est une proposition qui découle directement d'un théorème préalablement établi. De manière générale, un corollaire est moins important, mais plus pratique (Vault, 2019).

- Un **processus** est une « suite ordonnée d'opérations aboutissant à un résultat » (Rey-Debove, 2014, p. 2030).
- Une **conjecture** est une proposition mathématique suspectée vraie, mais pas encore démontrée (Vault, 2019).
- Une **inférence** est « le passage de propositions données comme prémisse ou comme hypothèses (les propositions d'entrée) à une autre proposition (la conclusion) en vertu d'une règle explicite ou implicite » (Duval, 1991, p. 235). Dans ce mémoire, nous utilisons les termes *antécédents* et *conséquents* pour *les propositions d'entrée* et la *conclusion* respectivement.
- Un **raccourci inférentiel** est un raccourci au sein d'une inférence ou d'une démonstration. À titre d'exemple, omettre les antécédents d'une inférence constitue un raccourci inférentiel.
- Un **référentiel** est considéré dans la théorie des espaces de travail mathématique comme étant « un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 31). Dans le cadre de notre étude, nous étendons cette définition à un réseau théorique qui est structuré au sein d'un îlot déductif.
- Un **îlot déductif** se base sur des propriétés acceptées comme axiomes en raison de leur caractère intuitif. Ces prémisses sont ensuite utilisées pour démontrer d'autres propriétés. L'îlot déductif permet de refléter l'enseignement de la géométrie par chapitre : au sein de chacun, l'attention est portée sur un nombre restreint de propriétés d'un sous-domaine particulier. Par exemple, des chapitres peuvent porter sur les transformations géométriques, les triangles, les quadrilatères, la trigonométrie, etc. (Choquet, 1964)
- Nous considérons le **référentiel initial** comme étant les propriétés et les définitions acceptées comme axiomes au sein d'un îlot déductif.
- Nous considérons le **référentiel construit** comme étant les propriétés découlant du référentiel initial. Ils sont généralement soit démontrés par l'élève en exercice ou soit donnée au moment opportun dans la résolution de problèmes.
- Nous considérons le **référentiel synthèse** comme étant les propriétés et définitions se retrouvant en synthèse à la fin d'un manuel scolaire ou d'un cahier d'apprentissage.
- Un **manuel scolaire** est un ouvrage pédagogique destiné à des élèves et conçu dans le but d'être réutilisé.
- Un **cahier d'apprentissage** est un ouvrage pédagogique destiné à des élèves et conçu à usage unique (l'élève écrit directement dans un cahier d'apprentissage).

- Dans ce mémoire, nous appelons **ouvrage** la combinaison des manuels scolaires et des cahiers d'apprentissage.
- Nous appelons une **collection** l'ensemble de manuels ayant le même nom, mais étant destinés à plusieurs niveaux scolaires différents.
- Dans ce mémoire, nous appelons **maison d'édition** une entreprise dont l'activité est la production et la diffusion d'ouvrages pédagogiques. Une maison d'édition peut produire plusieurs séries d'ouvrages pédagogiques, chacun ayant des noms différents.

Annexe 2 : les axiomes et les postulats d'Euclide (Mlodinow, 2002)

On retrouve dans les premières pages des Éléments d'Euclide une liste de notions communes et de postulats géométriques (ci-dessous) qui seront utilisés comme règles d'inférence acceptées tout au long de l'ouvrage.

Notions communes

- Deux choses égales à une même troisième sont aussi égales entre elles.
- Si, à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
- Si, à des grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
- Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles.
- Le tout est plus grand que la partie

Postulats géométriques

- Étant donné deux points quelconques, on peut tracer un segment de droite avec ces points comme extrémités.
- Tout segment de droite peut être prolongé indéfiniment dans les deux directions.
- Étant donné un point quelconque, un cercle de rayon quelconque peut être dessiné avec comme centre ce point.
- Tous les angles droits sont égaux
- Étant donné un segment de droite qui croise deux droites de telle sorte que la somme des angles intérieurs d'un même côté soit inférieure à deux angles droits, alors ces deux droites finiront par se rencontrer de ce côté-là du segment de droite.

Annexe 3 : la deuxième liste du ministère contenant des propriétés

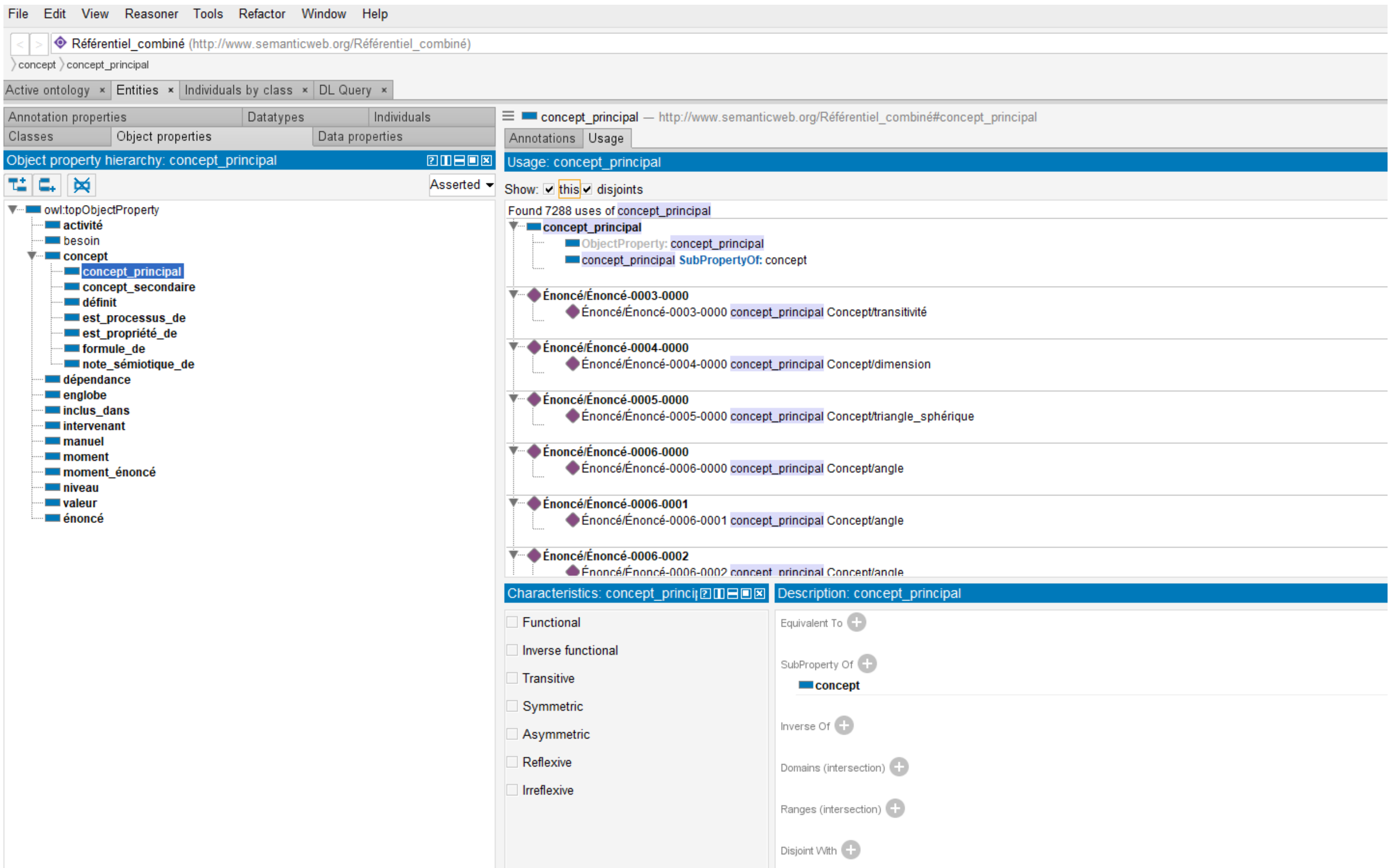
Dans la Progression des apprentissages (MEES, 2016, p. 28), on fait référence à une liste « d'énoncés de géométrie euclidienne » du Programme de formation du 1er cycle (MELS, 2006a). Cette liste, ci-dessous, comprend plusieurs propriétés concernant notamment des triangles, des quadrilatères, des droites parallèles et des cercles.

ÉNONCÉS DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

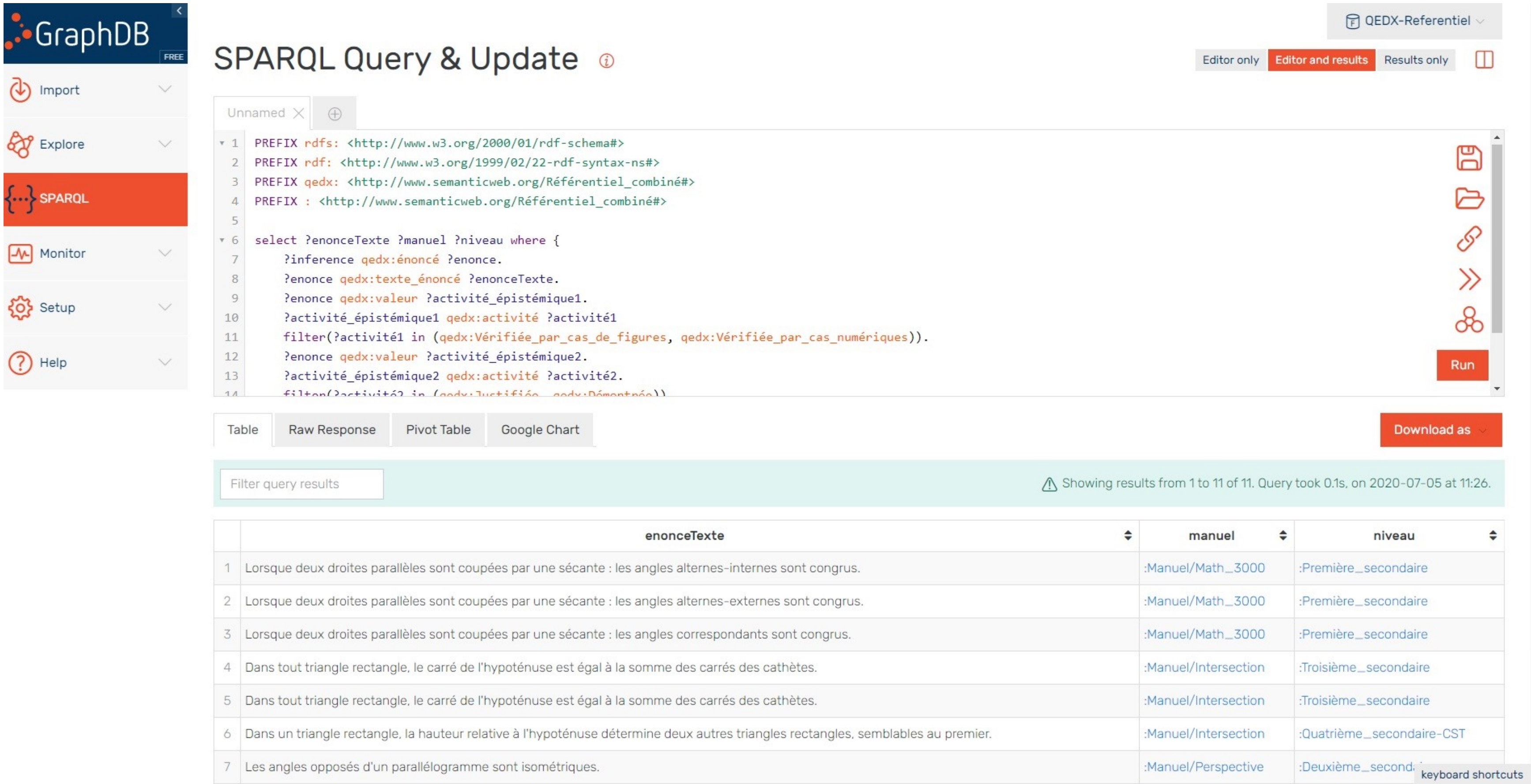
1. Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.
2. L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur de ce triangle.
3. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
4. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
5. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
6. Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
7. Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.
8. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires
9. Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles.
10. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre.
11. Trois points non alignés déterminent un et un seul cercle.
12. Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre de ce cercle.
13. Tous les diamètres d'un cercle sont isométriques.
14. Dans un cercle, la mesure d'un rayon est égale à la demi-mesure du diamètre.
15. Dans un cercle, le rapport de la circonférence au diamètre est une constante que l'on note π.
16. Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires.
17. Les angles opposés par le sommet sont isométriques.
18. Dans un cercle, l'angle au centre a la même mesure en degrés que celle de l'arc compris entre ses côtés.
19. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.
20. Dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes ou encore alternes-externes) sont isométriques, alors ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante.
21. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires.
22. Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.
23. Dans un disque, le rapport des aires de deux secteurs est égal au rapport des mesures des angles au centre.
24. La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.
25. La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.
26. Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure.
27. Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.
28. Dans des figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude.

Annexe 4 : captures d'écran des logiciels utilisés pour l'analyse des données

Le logiciel *Protégé* permet la création d'un réseau de connaissance et offre également une interface pour la navigation au sein du réseau créé. GraphDB permet plutôt l'interrogation du réseau de connaissance par requête de type SPARQL.



Capture d'écran du logiciel protégé



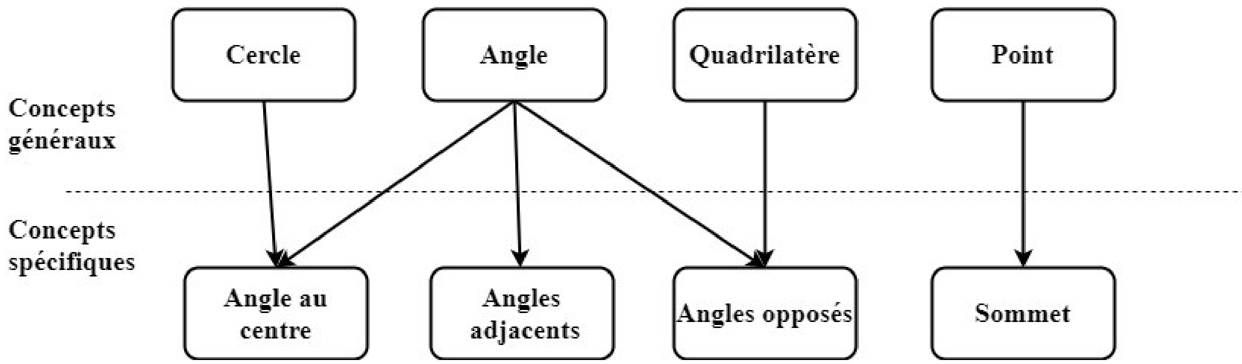
Capture d'écran du logiciel GraphDB

Annexe 5 : liste des concepts utilisés

Pour les enregistrements des propriétés et des définitions, nous avons utilisé plusieurs concepts présentés ci-dessous. La construction de cette liste de concepts s'est faite au fur et à mesure de la deuxième étape de l'investigation (étape de codification). Elle a été construite dans l'optique qu'une fois les propriétés et les définitions implémentées dans un système tuteur, l'usager pourrait faire une recherche de propriétés ou de définitions en utilisant les concepts dans une barre de recherche. Ainsi, en écrivant « aire d'un carré », le logiciel afficherait les propriétés concernant l'aire d'un carré. Toutefois, en écrivant seulement « aire », le logiciel afficherait toutes les propriétés de l'aire. Afin d'éviter de coder le concept plus général à chaque fois, nous avons opté pour une liste à plusieurs niveaux avec des concepts généraux et des concepts spécifiques. Nous avons ainsi utilisé le symbole « < » pour représenter ces différents niveaux.

De plus, nous avons dû conserver le concept général (premier niveau) dans notre codification, parce qu'il y a des concepts spécifiques (deuxième niveau) qui portent le même nom, mais qui sont des concepts différents selon le contexte. C'est notamment le cas du concept d'apothème où le concept de premier niveau (polygone ou solide) apporte la précision nécessaire. C'est pourquoi nous conservons toujours le concept de premier niveau.

Enfin, pour représenter un concept spécifique en lien avec deux concepts généraux, comme l'angle au centre (*cercle < angle < angle au centre*), nous utilisons un code à trois niveaux. Pour ces derniers, nous avons choisi de spécifier l'objet le plus complexe en premier. Ainsi, dans cet exemple, nous plaçons le concept de cercle en premier, parce que dans un cercle, il peut y avoir plusieurs angles (dont l'angle au centre), mais il n'y a pas a priori de cercle dans un angle. Dans la même logique, certains concepts spécifiques ne sont pas codés en lien avec plusieurs concepts généraux lorsque plusieurs de ceux-ci sont des objets complexes. C'est notamment le cas pour le concept de sommet qui peut être en lien avec le concept de triangle, de quadrilatère, de polygone ou même de solide. Autrement dit, nous avons évité les codes de type *triangle < quadrilatère < polygone < solide < sommet*. La figure de la page suivante illustre le lien entre les concepts des codes *cercle < angle < angle au centre*; *angle < angles adjacents*; *quadrilatère < angle < angles opposés* et *point < sommet*. Aussi, lorsqu'il y a des codes à trois concepts, nous avons ajouté le code intermédiaire à deux niveaux, comme *cercle < segment*. Ceux-ci n'ont jamais été utilisés dans la codification et ne servent qu'à des fins de lecture de la liste de codes.



Un usager d'un système tuteur qui ferait ainsi les recherches des concepts « angle » ou « cercle » ferait afficher à chaque fois les propriétés avec le concept « angle au centre ». Toutefois, comme nous n'avons jamais utilisé le code « cercle < angle », la recherche du concept « angle » ne ferait pas afficher les autres propriétés du cercle.

Nous spécifions finalement que le but des concepts de premier niveau est d'abord de classer les concepts de deuxième niveau et qu'ils reflètent l'organisation en chapitre dans les manuels scolaires. C'est pour cette raison que nous retrouvons « géométrie analytique », « transformation géométrique » ou encore « aire » en premier niveau. La liste des codes pour les concepts est ainsi présentée ci-dessous.

addition
aire
- aire < aire d'un carré
- aire < aire d'un parallélogramme
- aire < aire d'un polygone décomposable
- aire < aire d'un polygone régulier
- aire < aire d'un rectangle
- aire < aire d'un trapèze
- aire < aire d'un cerf-volant
- aire < aire d'un disque
- aire < aire d'un losange
- aire < aire d'un polygone
- aire < aire d'un secteur
- aire < aire d'un triangle
- aire < aire d'une base
- aire < aire d'une face
- aire < aire d'une sphère
- aire < aire latérale
- aire < aire totale
- aire < figures planes équivalentes
- aire < formule de Héron
- aire < mesure d'une surface
- aire < surface
- aire < surface courbe
- aire < surface fermée
- aire < surface plane

angle
- angle < angle aigu
- angle < angle au centre
- angle < angle de dépression
- angle < angle d'élévation
- angle < angle droit
- angle < angle extérieur
- angle < angle intérieur
- angle < angle nul
- angle < angle obtus
- angle < angle plat
- angle < angle plein
- angle < angle rentrant
- angle < angles à la base
- angle < angles adjacents
- angle < angles alternes
- angle < angles alternes-externes
- angle < angles alternes-internes
- angle < angles complémentaires
- angle < angles consécutifs

- angle < angles correspondants
- angle < angles externes
- angle < angles internes
- angle < angles opposés par le sommet
- angle < angles supplémentaires
- angle < côté commun de deux angles
- angle < côté d’un angle
- angle < côtés extérieurs d’angles adjacents
- angle < mesure d’un angle
- angle < sommet d'un angle

associativité

cercle

- cercle < angle
  - cercle < angle < angle au centre
  - cercle < angle < angle inscrit
- cercle < arc de cercle
- cercle < cercle circonscrit
- cercle < cercle inscrit
- cercle < cercles concentriques
- cercle < circonférence
- cercle < demi-cercle
- cercle < disque
- cercle < extérieur d'un cercle
- cercle < longueur d'un arc de cercle
- cercle < pi
- cercle < point
  - cercle < point < centre d'un cercle
  - cercle < point < point d'un cercle
- cercle < secteur
- cercle < segment
  - cercle < segment < corde
  - cercle < segment < diamètre
  - cercle < segment < rayon

commun

commutativité

congruence

- congruence < congruence d’angles
- congruence < congruence d'arcs de cercle
- congruence < congruence de cercles
- congruence < congruence de disques
- congruence < congruence de faces
- congruence < congruence de pyramides
- congruence < congruence de segments
- congruence < congruence de triangles
- congruence <congruence de polygones

demi-droite

- demi-droite < bissectrice
- demi-droite < origine d’une demi-droite

demi-périmètre

déplacement

dimension

direction

distance

distributivité

droite

- droite < bissectrice
- droite < droite perpendiculaire à un plan
- droite < droite support
- droite < droites parallèles
- droite < droites parallèles confondues
- droite < droites parallèles distinctes
- droite < droites perpendiculaires
- droite < droites sécantes
- droite < médiatrice
- droite < sécante
- droite < tangente
- droite < tangente à un cercle
- droite < Thalès

élément neutre

espace

figure fermée

géométrie analytique

- géométrie analytique < abscisse à l'origine
- géométrie analytique < abscisse d'un point
- géométrie analytique < accroissement
- géométrie analytique < axe
- géométrie analytique < axe des abscisses
- géométrie analytique < axe des ordonnées
- géométrie analytique < coordonnées à l'origine
- géométrie analytique < coordonnées d'un point
- géométrie analytique < distance entre deux points
- géométrie analytique < droite horizontale
- géométrie analytique < droite verticale
- géométrie analytique < droites parallèles
- géométrie analytique < droites parallèles confondues
- géométrie analytique < droites parallèles distinctes
- géométrie analytique < droites perpendiculaires
- géométrie analytique < droites sécantes
- géométrie analytique < équation
- géométrie analytique < fonction
- géométrie analytique < forme fonctionnelle d'une droite
- géométrie analytique < forme générale d'une droite
- géométrie analytique < forme symétrique d'une droite
- géométrie analytique < graphique
- géométrie analytique < inclinaison
- géométrie analytique < ordonnée à l'origine
- géométrie analytique < ordonnée d'un point
- géométrie analytique < pente d'une droite
- géométrie analytique < plan cartésien
- géométrie analytique < point de partage
- géométrie analytique < point milieu
- géométrie analytique < quadrillage
- géométrie analytique < repère
- géométrie analytique < repère orthogonal
- géométrie analytique < repère orthonormé
- géométrie analytique < unité

grandeur

infini

intersection

ligne

- ligne < ligne brisée
- ligne < ligne courbe
- ligne < ligne d'intersection
- ligne < ligne fermée

mesure

moyenne proportionnelle

nombre réel

origine du plan

partage

périmètre

plan

- plan < plans parallèles

point

- point < centre de gravité

- point < orthocentre
- point < point commun
- point < point de rencontre
- point < point milieu
- point < points alignés
- point < points colinéaires
- point < points non alignés
- point < projection orthogonale
- point < sommet

polygone

- polygone < concavité
- polygone < convexité
- polygone < décagone
- polygone < dodécagone
- polygone < ennéagone
- polygone < hendécagone
- polygone < heptagone
- polygone < hexagone
- polygone < octagone
- polygone < pentagone
- polygone < point
  - polygone < point < centre d’un polygone
  - polygone < point < sommets consécutifs
  - polygone < point < sommets non consécutifs
- polygone < polygone concave
- polygone < polygone convexe
- polygone < polygone décomposable
- polygone < polygone régulier
- polygone < segment
  - polygone < segment < apothème d'un polygone
  - polygone < segment < côtés adjacents
  - polygone < segment < côtés consécutifs

projection

proportionnalité

quadrilatère

- quadrilatère < angle
  - quadrilatère < angle < angles opposés
- quadrilatère < carré
- quadrilatère < cerf-volant
- quadrilatère < deltoïde
- quadrilatère < losange
- quadrilatère < parallélogramme
- quadrilatère < rectangle
- quadrilatère < segment
  - quadrilatère < segment < côtés opposés
  - quadrilatère < segment < côtés parallèles
  - quadrilatère < segment < grande base
  - quadrilatère < segment < grande diagonale
  - quadrilatère < segment < petite base
  - quadrilatère < segment < petite diagonale
- quadrilatère < trapèze
- quadrilatère < trapèze isocèle
- quadrilatère < trapèze rectangle

quantité

rapport

région du plan

région intérieur

segment

- segment < base
- segment < côté
- segment < côtés parallèles
- segment < côtés perpendiculaires
- segment < diagonale
- segment < extrémité de segment
- segment < hauteur
- segment < médiane
- segment < mesure d’un segment
- segment < prolongement d’un segment
- segment < segment perpendiculaire à un plan
- segment < segments parallèles
- segment < segments perpendiculaires

sens

solide

- solide < boule
- solide < cône
- solide < cône circulaire
- solide < cône circulaire droit
- solide < cône droit
- solide < corps rond
- solide < cube
- solide < cylindre
- solide < cylindre circulaire droit
- solide < demi-sphère
- solide < développement
- solide < figure plane
  - solide < figure plane < base d'un solide
  - solide < figure plane < face
  - solide < figure plane < face courbe
  - solide < figure plane < face latérale
  - solide < figure plane < faces parallèles
  - solide < figure plane < faces perpendiculaires
  - solide < figure plane < surface
- solide < hémisphère
- solide < point
  - solide < point < apex
  - solide < point < centre d'une sphère
  - solide < point < sommet commun
  - solide < point < sommet opposé à une base
- solide < polyèdre
- solide < polyèdre convexe
- solide < prisme
- solide < prisme droit
- solide < prisme oblique
- solide < prisme régulier
- solide < pyramide
- solide < pyramide droite
- solide < pyramide régulière
- solide < relation d'Euler
- solide < section d’un solide
- solide < segment
  - solide < segment < apothème d’une pyramide
  - solide < segment < apothème d'un cône
  - solide < segment < arête
  - solide < segment < rayon d'une sphère
- solide < solide décomposable
- solide < sphère
- solide < tétraède
- solide < tronc de cône
- solide < tronc de pyramide

somme

soustraction

  - transformation géométrioque < similitude < rapport de similitude

transformation géométrique

- transformation géométrique < angles homologues
- transformation géométrique < contraction
- transformation géométrique < contraction horizontale
- transformation géométrique < contraction verticale
- transformation géométrique < côtés homologues
- transformation géométrique < dilatation
- transformation géométrique < dilatation horizontale
- transformation géométrique < dilatation verticale
- transformation géométrique < faces homologues
- transformation géométrique < figure image
- transformation géométrique < figure initiale
- transformation géométrique < figure invariante
- transformation géométrique < figures semblables
- transformation géométrique < forme
- transformation géométrique < homologue
- transformation géométrique < homothétie
  - transformation géométrique < homothétie < agrandissement
  - transformation géométrique < homothétie < centre d'homothétie
  - transformation géométrique < homothétie < rapport d'homothétie
  - transformation géométrique < homothétie < réduction
  - transformation géométrique < homothétie < reproduction
- transformation géométrique < orientation d'une figure
- transformation géométrique < point image
- transformation géométrique < point invariante
- transformation géométrique < réflexion
  - transformation géométrique < réflexion < axe de réflexion
- transformation géométrique < règle de transformation géométrique
- transformation géométrique < rotation
  - transformation géométrique < rotation < angle de rotation
  - transformation géométrique < rotation < centre de rotation
  - transformation géométrique < rotation < flèche de rotation
  - transformation géométrique < rotation < sens de rotation
- transformation géométrique < similitude
- transformation géométrique < solide image
- transformation géométrique < solide initiale
- transformation géométrique < solides semblables
- transformation géométrique < sommets homologues
- transformation géométrique < superposable
- transformation géométrique < symétrie
  - transformation géométrique < symétrie < axe de symétrie
- transformation géométrique < translation
  - transformation géométrique < translation < flèche de translation

transitivité

triangle

- triangle < angle
  - triangle < angle < angle opposé à un côté
- triangle < point
  - triangle < point < centre de gravité
  - triangle < point < orthocentre
  - triangle < point < sommet opposé à un côté
  - triangle < point < sommet principal
- triangle < réciproque de la relation de pythagore
- triangle < relation de pythagore
- triangle < relation métrique
- triangle < segment
  - triangle < segment < cathète
  - triangle < segment < côté adjacent à un sommet
  - triangle < segment < côté opposé à un sommet
  - triangle < segment < hypoténuse
- triangle < triangle acutangle
- triangle < triangle équilatéral
- triangle < triangle inscrit
- triangle < triangle isocèle
- triangle < triangle obtusangle
- triangle < triangle rectangle
- triangle < triangle sphérique
- triangle < triangle unique

triangles isométriques

- triangles isométriques < condition minimale d'isométrie
- triangles isométriques < condition minimale d'isométrie ACA
- triangles isométriques < condition minimale d'isométrie CAC
- triangles isométriques < condition minimale d'isométrie CCC

triangles semblables

- triangles semblables < coefficient de proportionnalité
- triangles semblables < condition minimale de similitude
- triangles semblables < condition minimale de similitude AA
- triangles semblables < condition minimale de similitude CAC
- triangles semblables < condition minimale de similitude CCC

trigonométrie

- trigonométrie < arc cosinus
- trigonométrie < arc sinus
- trigonométrie < arc tangente
- trigonométrie < cercle trigonométrique
- trigonométrie < cosinus
- trigonométrie < identité fondamentale
- trigonométrie < identité trigonométrique
- trigonométrie < loi des cosinus
- trigonométrie < loi des sinus
- trigonométrie < point trigonométrique
- trigonométrie < rapport trigonométrique
- trigonométrie < sinus
- trigonométrie < tangente

vecteur

- vecteur < addition vectorielle
- vecteur < angle entre deux vecteurs
- vecteur < base vectorielle
- vecteur < base vectorielle orthogonale
- vecteur < base vectorielle orthonormée
- vecteur < combinaison linéaire
- vecteur < composantes d'un vecteur
- vecteur < direction
- vecteur < extrémité d'un vecteur
- vecteur < grandeur scalaire
- vecteur < grandeur vectorielle
- vecteur < multiplication d'un vecteur par un scalaire
- vecteur < norme
- vecteur < orientation
- vecteur < origine d'un vecteur
- vecteur < produit scalaire
- vecteur < projection d'un vecteur
- vecteur < projection orthogonale
- vecteur < projeté orthogonal
- vecteur < relation de Chasles
- vecteur < représentant
- vecteur < scalaire
- vecteur < segment orienté

vecteur < segment orienté < extrémité d'un segment
orienté
vecteur < segment orienté < origine d'un segment orienté
vecteur < sens
vecteur < soustraction vectorielle
vecteur < vecteur algébrique
vecteur < vecteur géométrique
vecteur < vecteur nul
vecteur < vecteur résultat
vecteur < vecteur unitaire
vecteur < vecteurs colinéaires
vecteur < vecteurs équipollents
vecteur < vecteurs opposés
vecteur < vecteurs orthogonaux

volume
volume < capacité
volume < mesure de l'espace
volume < principe de Cavalieri
volume < solides équivalents
volume < volume d'un cône
volume < volume d'un cône circulaire
volume < volume d'un cylindre
volume < volume d'un cylindre circulaire droit
volume < volume d'un prisme
volume < volume d'une boule
volume < volume d'une pyramide droite
volume < volume pyramide

Annexe 6 : concepts implicites par série de manuels

Pour chaque série d'ouvrage pédagogique étudié, nous avons relevé la liste des concepts utilisés et implicites. Ces concepts sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

Sommets (1re secondaire)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	distance
point	point; sommet; point milieu
segment	congruence de segments; segments perpendiculaires; segments parallèles
demi-droite	origine d'une demi-droite
droite	droites sécantes
angle	congruence d'angles; angle intérieur
transformation géométrique	figure image; figure initiale, rotation; centre de rotation; sens [d'une translation]; axe de réflexion
triangle	côté opposé à un sommet; triangle équiangle
quadrilatère	côtés opposés; angles opposés
polygone	côté; angle au centre
autre	dimension; convexité

Panoramath (1re et 2e secondaire)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	distance
surface	surface
point	point; point milieu
segment	segments perpendiculaires; congruence de segments; segments parallèles; base [d'un triangle ou d'un quadrilatère]
demi-droite	origine d'une demi-droite
droite	droites sécantes
angle	congruence d'angles
transformation géométrique	direction [d'une translation]; sens [d'une translation]; angles homologues; côtés homologues; figure invariante
quadrilatère	côtés consécutifs
cercle	longueur d'un arc de cercle
solide	cylindre; face latérale; apex
autre	dimensions; convexité

Mathématiques 3000 (1re, 2e, 4e CST, 4e SN, 5e TS et 5e SN)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	rapport trigonométrique; arc sinus; aire d'une base [d'un solide]; distance entre deux points; norme [d'un vecteur]
surface	surface
segment	segment
angle	côté commun de deux angles; sommet d'un angle; angle intérieur
transformation géométrique	transformation géométrique; centre de rotation; sens de rotation; direction [d'une translation]; sens [d'une translation]; axe de réflexion; figure image; angles homologues; côtés homologues; règle de transformation géométrique; angle de rotation; rapport d'homothétie
triangle	centre de gravité; triangles isométriques; triangles semblables
polygone	pentagone
solide	cône; cube
géométrie analytique	origine du plan; abscisse d'un point; ordonnée d'un point; coordonnées d'un point; pente d'une droite; axe des abscisses; axe des ordonnées; plan cartésien
autre	dimension

Perspective mathématique (2e secondaire)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	distance entre un point et une droite
surface	surface
transformation géométrique	sens [d'une translation]; rapport d'homothétie
solide	polyèdre

Intersection (3e, 4e CST, 4e SN et 5e CST)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	arc sinus; arc tangente
surface	surface
transformation géométrique	similitude; contraction horizontale; contraction verticale; coefficient de proportionnalité
triangle	rapport trigonométrique
solide	cône circulaire droit
géométrie analytique	Abscisse d'un point; abscisse à l'origine; axe des abscisses; axe des ordonnées; origine du plan

Point de Vue mathématique (3e, 4e SN et 5e CST)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	distance entre un point et une droite; distance entre deux points
surface	surface
transformation géométrique	sens [d'une translation]; projection orthogonale; contraction; dilatation
triangle	triangles isométriques; triangles semblables
solide	sphère; boule
géométrie analytique	origine du plan; coordonnées d'un point; abscisse à l'origine; forme fonctionnelle d'une droite; ordonnée à l'origine; forme générale d'une droite; forme symétrique d'une droite; axe des abscisses; axes des ordonnées

Point de Mire (3e secondaire)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
surface	surface
transformation géométrique	similitude
cercle	longueur d'un arc de cercle

Visions (5e TS et 5e SN)

Concepts clés	Concepts utilisés et implicites
mesure	distance entre un point et une droite
cercle	longueur d'un arc de cercle; extérieur d'un cercle
transformation géométrique	règle de transformation géométrique
géométrie analytique	pente d'une droite
géométrie vectorielle	scalaire

Annexe 7 : mode d'établissement des propriétés selon l'acteur incluant le référentiel synthèse

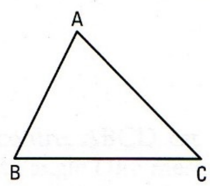
De façon similaire au tableau 10, nous retrouvons dans le tableau ci-dessous l'acteur principal du travail mathématique de l'activité établissant les propriétés, mais en incluant le référentiel synthèse. Ainsi, une propriété peut avoir été travaillée par l'élève (É), par l'élève de façon guidée (G) ou directement donnée (D).

		Non démontrée	Expliquée			Vérifiée par cas numériques			Vérifiée par cas de figure			Justifiée			Démontrée			Total		
			D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É	D	G	É
Mathématiques 3000	1re	14	0	6	9	0	3	0	0	13	0	0	6	0	0	2	1	0	30	10
	4e CST	40	0	7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	18	0	0	26	1
	4e SN	32	2	7	11	0	0	0	0	7	0	2	0	2	0	12	1	4	26	14
	5e TS	51	2	10	3	0	8	0	0	17	0	1	2	0	0	30	0	3	67	3
	5e SN	24	1	4	4	0	3	0	0	8	0	1	1	0	0	11	1	2	27	5
Sommets	1re	50	2	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	5	1	0
Point de Mire	3e	55	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
Panoramath	1re	58	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	4	1
	2e	101	0	4	0	0	4	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	25	0
Perspective	2e	30	0	1	7	0	0	0	0	3	10	0	0	0	1	0	1	1	4	18
Intersection	3e	6	4	1	0	0	1	0	0	4	0	0	0	0	2	0	1	6	6	1
	4e CST	39	8	0	0	0	0	0	0	20	0	4	0	0	2	2	0	14	22	0
	4e SN	57	2	2	1	0	0	0	0	6	0	2	0	1	0	0	4	4	8	6
	5e CST	4	1	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0
Point de Vue	3e	93	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
	4e SN	49	4	6	2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	3	9	4	13	11
	5e CST	64	3	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	3	6	0
Visions	5e TS	184	1	1	0	0	1	0	0	4	0	0	7	0	0	0	0	1	13	0
	5e SN	159	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Total		1110	38	53	31	2	20	0	1	118	10	12	17	4	5	79	18	53	285	70

Annexe 8 : exemples d'activités inductives

Les deux premiers extraits ci-dessous, tirés de Mathématiques 3000, montrent des activités où l'élève est amené à induire la propriété. Il en est de même pour l'extrait de la page suivante qui est cette fois-ci tiré de Perspective mathématique.

ACTIVITÉ 2 Cas de congruence *CAC*



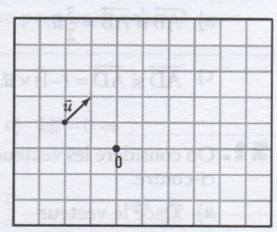
On considère un triangle ABC.

a) Construis un triangle DEF de façon que $\angle D \cong \angle A$; $\overline{DE} \cong \overline{AB}$ et $\overline{DF} \cong \overline{AC}$.

b) Le triangle DEF est-il congru au triangle ABC? ______________________
Vérifie ta réponse en comparant les éléments homologues.

c) Trouve une isométrie (ou une composée d'isométries) qui associe au triangle ABC le triangle DEF.
____

ACTIVITÉ 6 Multiplication d'un vecteur par un réel



On considère un vecteur $\vec{u}$ et un point 0.

a) 1. Trace le vecteur $\overrightarrow{0A}$ si $\overrightarrow{0A} = 3\vec{u}$. (Note: $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$).
2. Compare les vecteurs $\vec{u}$ et $3\vec{u}$ du point de vue
1) direction; ______________
2) sens; ______________
3) module. ______________

b) 1. Trace le vecteur $\overrightarrow{0B}$ si $\overrightarrow{0B} = -2\vec{u}$. (Note: $-2\vec{u} = -\vec{u} + -\vec{u}$).
2. Compare les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ du point de vue
1) direction; ______________
2) sens; ______________
3) module. ______________

c) Soit k un nombre réel. ($k \neq 0$).
1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont-ils la même direction? ______________
2. Indique le signe de k si $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont
1) de même sens. ______________ 2) de sens contraires. ______________
3. Compare $\|k\vec{u}\|$ et $\|\vec{u}\|$. ______________

d) Détermine la valeur du réel k si $k\vec{u} = \vec{0}$. ______________

Le calcul d'aire de figures planes

Activité 1 Un air de famille

1er temps

Fais équipe avec trois camarades. Ensemble, observez les huit triangles isocèles tracés sur les feuilles qu'on vous remet.

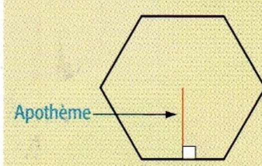
Pour chacun des triangles, déterminez le polygone régulier que l'on peut construire en effectuant des rotations successives. Expliquez vos réponses.

2e temps

Reproduisez la table de valeurs ci-dessous, puis remplissez-la pour chacun des polygones réguliers trouvés au 1er temps. Pour ce faire, prenez les mesures pertinentes sur les triangles et répartissez-vous la tâche à accomplir.

NOMBRE DE CÔTÉS DU POLYGONE RÉGULIER	MESURE DE CHAQUE CÔTÉ DU POLYGONE RÉGULIER	MESURE DE L'APOTHÈME	PÉRIMÈTRE	AIRE

L'apothème d'un polygone régulier est le segment abaissé perpendiculairement du centre du polygone sur l'un de ses côtés.



Le mot *apothème* désigne aussi bien le segment que sa grandeur.

3e temps

À l'aide d'une expression algébrique, représente le périmètre et l'aire d'un polygone régulier, sachant que

- n représente le nombre de côtés du polygone régulier ;
- c représente la mesure d'un côté du polygone régulier ;
- a représente la mesure de l'apothème du polygone régulier.

Annexe 9 : référentiel aide-mémoire pour les enseignants

Le référentiel de cette annexe présente les principales définitions et propriétés retrouvées à plusieurs reprises dans les ouvrages pédagogiques. Nous avons également ajouté des énoncés pour pallier certaines lacunes mentionnées dans les analyses de ce mémoire. Ces dernières sont annotées par un astérisque (*). Ce référentiel peut ainsi servir d'aide-mémoire pour les enseignants qui désirent créer leur propre référentiel. Comme ce référentiel n'inclut pas toutes les définitions et propriétés existantes, les enseignants sont plutôt invités à s'en inspirer pour bâtir la base du référentiel enseigné en classe. Il est également important de noter qu'aucune activité de preuve n'est présentée, ce référentiel n'est donc pas été conçu à être enseigné tel quel.

Point

Définition : Un point est une figure géométrique qui n'a pas de dimension

Point milieu

Définition : Un point milieu est le point qui partage un segment en deux segments isométriques.

Propriété : Si M est le point milieu du segment AB, alors on a : $m\,\overline{AM} = 2 \times m\,\overline{AM}$, $m\,\overline{AB} = 2 \times m\,\overline{AM}$ et $m\,\overline{AM} + m\,\overline{BM} = m\,\overline{AB}$.

Points colinéaires

Définition : Des points colinéaires sont des points appartenant à une même droite. *

Propriété : Si $m\,\overline{AB} + m\,\overline{BC} = m\,\overline{AC}$, alors les points A, B et C sont colinéaires. *

Propriété : Si AB est parallèle à BC, alors les points A, B et C sont colinéaires. *
Propriété alternative : Si AB est parallèle à AC, alors les points A, B et C sont colinéaires.

Propriété : Si AB et AC sont perpendiculaires à une même droite, alors A, B et C sont colinéaires. *

Propriété : Pour un même triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit au triangle sont colinéaires. *

Droite

Définition : Une droite est une ligne formée d'une infinité de points alignés dans un plan.

Définition : Deux droites sécantes sont des droites qui se coupent en un seul point.

Propriété : La distance entre un point P et une droite est égale à la longueur du segment ayant comme extrémité P et aboutissant perpendiculairement sur la droite.

Droites parallèles et perpendiculaires

Définition : Deux droites perpendiculaires sont des droites qui se coupent à angle droit.

Définition : Des droites parallèles sont des droites n'ayant aucun point commun ou si elles sont confondues.
Définition : Des droites parallèles confondues sont des droites ayant une infinité de points communs.

Propriété : Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre.
Propriété réciproque : Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles. *

Propriété : Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.
Propriété réciproque : Dans le cas d'une droite qui coupe deux autres droites, si deux angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants sont isométriques, alors les deux droites sont parallèles.

Propriété : Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles internes situés du même côté de la sécante sont supplémentaires.

Théorème de Thalès : Des droites parallèles déterminent sur deux droites sécantes des segments correspondants de longueurs proportionnelles.

Médiatrice

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son point milieu.

Propriété caractéristique : La médiatrice d'un segment est la droite formée par l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

Propriété caractéristique : La médiatrice d'un segment est l'axe de symétrie du segment. *

Propriété : Les médiatrices d'un triangle se rencontrent en un même point.

Propriété : Le point de rencontre des médiatrices d'un triangle est équidistant des trois sommets du triangle.

Propriété : Le point de rencontre des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Propriété : Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre du cercle.

Bissectrice

Définition : La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles isométriques.

Propriété caractéristique : La bissectrice d'un angle est formée de l'ensemble de tous les points situés à égale distance des deux côtés d'un angle.

Propriété caractéristique : La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de l'angle.

Propriété : Les bissectrices d'un triangle se rencontrent en un même point.

Propriété : Le point de rencontre des bissectrices d'un triangle est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

Propriété : Dans un triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé à cet angle en deux segments de longueurs proportionnelles à celles des côtés adjacents à l'angle.

Hauteur

Définition : Une hauteur est une droite perpendiculaire à la base d'une figure et passant par le sommet opposé. Une hauteur peut aussi désigner le segment porté par cette droite et compris entre la base et le sommet opposé.

Propriété : Les hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point appelé l'orthocentre du triangle.

Segment

Définition : Un segment est une portion de droite limitée par deux points appelés les extrémités du segment.

Définition : Le support d'un segment est la droite sur laquelle se trouve ce segment. *

Segments parallèles

Définition : Deux segments sont parallèles si leurs supports sont parallèles. *

Segments perpendiculaires

Définition : Deux segments sont perpendiculaires si leurs supports sont perpendiculaires. *

Médiane

Définition : Une médiane d'un triangle est un segment reliant un sommet et le milieu du côté opposé.

Propriété : La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

Propriété : Les trois médianes d'un triangle partagent la région intérieure du triangle en six triangles de même aire.

Propriété : Les médianes d'un triangle se rencontrent en un même point appelé le centre de gravité du triangle.

Propriété : Le centre de gravité d'un triangle partage chaque médiane selon le rapport 2 :1 à partir de chaque sommet.
Propriété alternative : Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane à partir du sommet.

Demi-droite

Définition : Une demi-droite est une portion de droite limitée par un de ses points appelés origine.

Définition : Le support d'une demi-droite est la droite sur laquelle se trouve ce segment. *

Demi-droites parallèles

Définition : Deux demi-droites sont parallèles si leurs supports sont parallèles. *

Demi-droites perpendiculaires

Définition : Deux demi-droites sont perpendiculaires si leurs supports sont perpendiculaires. *

Angle

Définition : Un angle est une figure géométrique formée de deux demi-droites ayant la même origine. L'origine des demi-droites est le sommet de l'angle et les demi-droites sont les côtés de l'angle.

Angle aigu

Définition : Angle dont la mesure est comprise entre 0°et 90°.

Angle droit

Définition : Angle dont la mesure vaut 90°.

Angle obtus

Définition : Angle dont la mesure est comprise entre 90° et 180°.

Angle plat

Définition : Angle dont la mesure vaut 180°. L'angle plat forme une ligne droite.

Angle rentrant

Définition : Angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360°.

Angle plein

Définition : Angle dont la mesure vaut 360°.

Angle nul

Définition : Angle dont la mesure vaut 0°.

Angles alternes-externes

Définition : Dans le cas de deux droites coupées par une sécante, des angles alternes-externes sont une paire d'angles qui n'ont pas le même sommet et qui sont situés de part et d'autre de la sécante, à l'extérieur des deux droites.

Angles alternes-internes

Définition : Dans le cas de deux droites coupées par une sécante, des angles alternes-internes sont une paire d'angles qui n'ont pas le même sommet et qui sont situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des deux droites.

Angles correspondants

Définition : Dans le cas de deux droites coupées par une sécante, des angles correspondants sont une paire d'angles situés du même côté de la droite sécante, l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur des deux droites.

<u>Angles adjacents</u>

Définition : Deux angles adjacents sont des angles ayant le même sommet, un côté commun et sont situés de part et d'autre du côté commun.

Propriété : Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires.

Propriété : Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont perpendiculaires sont complémentaires.

<u>Angles complémentaires</u>

Définition : Deux angles complémentaires sont des angles dont la somme de leurs mesures est 90°.

Propriété : Les complémentaires de deux angles isométriques sont isométriques.

<u>Angles supplémentaires</u>

Définition : Deux angles supplémentaires sont des angles dont la somme de leurs mesures est 180°.

Propriété : Les supplémentaires de deux angles isométriques sont isométriques.

<u>Angles opposés par le sommet</u>

Définition : Deux angles opposés par le sommet sont des angles formés par deux droites sécantes et qui ne sont pas adjacents.

Propriété : Les angles opposés par le sommet sont isométriques.

<u>Angle intérieur</u>

Définition : Un angle intérieur d'un polygone est formé par deux côtés consécutifs de ce polygone et se situe à l'intérieur de celui-ci.

<u>Angle extérieur</u>

Définition : Un angle extérieur d'un polygone convexe est formé par un côté du polygone et le prolongement d'un côté adjacent.

<u>Angle au centre</u>

Définition : Dans un cercle, l'angle au centre est formé par deux rayons de cercles.

Définition : Dans un polygone, l'angle au centre est formé par deux segments joignant le centre du polygone à deux sommets consécutifs.

Transformation géométrique

Figure initiale

Définition : Une figure initiale est une figure sur laquelle on applique une transformation géométrique.

Figure image

Définition : Une figure image est une figure obtenue par une transformation géométrique appliquée à une figure initiale.

Éléments homologues

Définition : Les côtés homologues et les angles homologues de deux figures isométriques sont les côtés et les angles qui se correspondent.

Translation

Définition : Une translation est une transformation géométrique qui correspond au glissement en ligne droite de tous les points du plan. La flèche de translation précise la direction, le sens et la grandeur du glissement.

Propriété : La translation est une transformation géométrique qui permet d'obtenir des figures isométriques.
Propriété alternative : La translation conserve la longueur des segments, la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété : Les côtés homologues d'une figure et de son image obtenue par translation sont parallèles.

Homothétie

Définition : L'homothétie est une transformation géométrique correspondant à un agrandissement ou à une réduction d'une figure. Plus précisément, une homothétie est caractérisée par un point invariant appelé centre d'homothétie et un réel appelé rapport d'homothétie.
Définition alternative : Par l'homothétie de centre O et de rapport k, le point M est transformé en un point M' tel que OM = k OM'

Propriété : L'image d'un point obtenue par homothétie est située sur la droite passant par ce point et le centre d'homothétie.

Propriété : Si le rapport d'homothétie est plus grand que 1, alors il s'agit d'un agrandissement; s'il est compris entre 0 et 1, alors il s'agit d'une réduction et s'il vaut 1, alors il s'agit d'une isométrie.

Propriété : Une figure et son image obtenue par homothétie ont des côtés homologues parallèles.

Propriété : Une figure et son image obtenue par homothétie sont semblables.

Propriété alternative : Une figure et son image obtenue par homothétie ont des côtés homologues proportionnels.
Propriété alternative : Une figure et son image obtenue par homothétie ont des angles homologues isométriques.

Réflexion

Définition : Une réflexion est une transformation géométrique qui permet de retourner une figure autour d'une droite. Elle est définie par une droite fixe appelée l'axe de réflexion.

Propriété : Une figure et son image obtenue par réflexion sont isométriques.
Propriété alternative : La réflexion conserve la longueur des segments, la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété : Les sommets homologues d'une figure et de son image obtenue par réflexion sont équidistants de l'axe de réflexion.

Propriété : Le segment dont les extrémités sont un point et son image obtenue par réflexion est perpendiculaire à l'axe de réflexion. L'axe de réflexion coupe ce segment en son milieu.

Figure symétrique

Définition : Une figure symétrique est une figure qui coïncide avec son image par réflexion. L'axe de réflexion est alors appelé axe de symétrie.

Rotation

Définition : La rotation est une transformation qui permet de tourner une figure autour d'un point. Une rotation est définie par un centre de rotation et par une flèche de rotation qui indique le sens de rotation (horaire ou antihoraire) et l'angle de rotation.

Propriété : Une figure et son image obtenue par rotation sont isométriques.
Propriété alternative : La rotation conserve la longueur des segments, la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété : La médiatrice du segment qui joint un point et son image passe par le centre de rotation.

Propriété : Un point et son image obtenue par rotation sont équidistants du centre de rotation.

Isométrie

Définition : L'isométrie est une transformation géométrique faisant correspondre des figures ayant la même forme et les mêmes dimensions. Toute transformation composée d'une ou plusieurs translations, réflexions ou rotations est une isométrie.
Note : « Isométrique » veut dire de même mesure, alors que « congru » veut dire superposable. Deux figures sont superposables si elles ont les mêmes mesures et deux figures ont les mêmes mesures si elles sont superposables, c'est pourquoi il est possible d'utiliser l'un ou l'autre des deux termes.

Propriété : L'isométrie conserve la longueur des segments, la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété : Si deux segments sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
Propriété réciproque : Si deux segments ont la même mesure, alors ils sont isométriques.

Propriété : Si deux angles sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
Propriété réciproque : Si deux angles ont la même mesure, alors ils sont isométriques.

Propriété : Si deux arcs de cercle sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
Propriété réciproque : Si deux arcs de cercle ont la même mesure, alors ils sont isométriques. *

Propriété : L'isométrie est transitive, c'est-à-dire si $X \cong Y\ et\ Y \cong Z, alors\ X \cong Z$ où X, Y et Z figures géométriques. *

Similitude

Définition : La similitude est une transformation géométrique faisant correspondre des figures ayant la même forme. Toute transformation composée d'une ou plusieurs translations, réflexions, rotations ou homothéties est une similitude.

Vocabulaire : La similitude fait correspondre deux figures dites semblables.

Propriété : La similitude conserve la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.

Propriété : Les côtés homologues de deux figures semblables sont proportionnels. Le rapport entre les mesures des côtés de figures semblables s'appelle le rapport de similitude et est noté k.

Propriété : Dans deux figures semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude (k^2).

Propriété : Dans deux solides semblables, le rapport entre les volumes est égal au cube du rapport de similitude (k^3).

Propriété : La similitude est transitive, c'est-à-dire si $X \sim Y\ et\ Y \sim Z, alors\ X \sim Z$ où X, Y et Z figures géométriques.

Polygone

Définition : Un polygone est une figure plane formée par une ligne brisée fermée.

Propriété : Un polygone à n côtés possède $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Propriété : Dans un polygone à n côtés, il y a n angles intérieurs.

Propriété : La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone est $(n-2) \times 180°$.

Propriété : Des figures planes équivalentes sont des figures ayant la même aire.
Note : Le terme figure plane inclu aussi les figures délimitées par une ligne courbe fermée, comme le cercle.

Côté

Définition : Un côté d'un polygone est un segment de la ligne brisée formant le polygone.

Côtés consécutifs (ou adjacents)

Définition : Deux côtés consécutifs (ou adjacents) sont des côtés ayant un sommet commun.

Sommet

Définition : Un sommet est le point de rencontre de deux côtés d'un polygone.

Sommets consécutifs

Définition : Deux sommets sont consécutifs s'ils sont les extrémités d'un même côté.

Angles consécutifs

Définition : Deux angles consécutifs dans un polygone sont des angles ayant un côté commun.

Diagonale

Définition : Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs d'un polygone.

Polygone régulier

Définition : Un polygone régulier est un polygone dont tous les angles sont isométriques et tous les côtés sont isométriques.

Propriété : Tous les polygones réguliers sont convexes.

Propriété : La mesure d'un angle intérieur d'un polygone régulier est $\frac{(n-2)\times 180}{n}$.

Propriété : La mesure d'un angle au centre d'un polygone régulier est $\frac{360}{n}$.

Propriété : La mesure d'un angle extérieur d'un polygone régulier est $\frac{360}{n}$

Propriété : De tous les polygones équivalents à n côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.

Propriété : $A_{\text{polygone régulier}} = \frac{p \cdot a}{2}$, où p est le périmètre du polygone et a la mesure de son apothème.
Propriété alternative : $A_{\text{polygone régulier}} = \frac{c \cdot a \cdot n}{2}$, où c est la mesure d'un côté, a la mesure d'un apothème et n le nombre de côtés.

Centre d'un polygone régulier

Définition : Le centre d'un polygone régulier est l'unique point équidistant à chaque sommet. *

Propriété : Le centre d'un polygone régulier est équidistant à chaque côté. *

Propriété : Le centre d'un polygone régulier est aussi le centre du cercle inscrit au polygone. *

Propriété : Le centre d'un polygone régulier est aussi le centre du cercle circonscrit au polygone. *

Apothème d'un polygone régulier

Définition : L'apothème d'un polygone régulier est le segment abaissé perpendiculairement du centre du polygone à un de ses côtés.

Polygone convexe

Définition : Un polygone convexe est un polygone dont le prolongement de ses côtés ne passe pas dans sa région intérieure.
Définition alternative : Un polygone convexe est un polygone n'ayant aucun angle intérieur rentrant.

Propriété : À chaque sommet d'un polygone convexe, les angles intérieur et extérieur sont supplémentaires.

Propriété : La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe est 360°.

Propriété : De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone ayant le plus de côtés qui a le plus petit périmètre.

Polygone concave

Définition : Un polygone concave est un polygone dont au moins un prolongement de ses côtés passe dans sa région intérieure.
Définition alternative : Un polygone concave est un polygone ayant au moins un angle intérieur rentrant.

Triangle

Définition : Un triangle est un polygone ayant trois côtés.

Propriété : $A_{\text{triangle}} = \frac{b \cdot h}{2}$, où b est la mesure de la base et h la mesure de la hauteur.

Propriété (formule de Héron) : $A_{\text{triangle}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p est le demi-périmètre et a, b et c sont les mesures des côtés.

Propriété :$A_{\text{triangle}} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(B)}{2}$, où a et c sont les mesures de deux côtés, et B la mesure de l'angle opposé au troisième côté.

Base

Définition : La base d'un triangle est n'importe lequel de ses côtés.

Triangle scalène

Définition : Un triangle scalène est un triangle n'ayant aucun côté isométrique.

Triangle isocèle

Définition : Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés isométriques.
Vocabulaire : Le sommet principal d'un triangle isocèle est celui compris entre les côtés isométriques. *

Propriété : Les angles opposés aux côtés isométriques d'un triangle isocèle sont isométriques.
Propriété réciproque : Un triangle ayant deux angles intérieurs isométriques est un triangle isocèle dont le troisième angle est le sommet principal. *

Propriété : Tous triangles isocèles ont un axe de symétrie passant par le sommet principal et coupant perpendiculairement le côté opposé. *

Propriété : L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.

Triangle équilatéral

Définition : Un triangle équilatéral est un triangle ayant trois côtés isométriques.

Propriété : Les trois angles intérieurs d'un triangle équilatéral sont isométriques et mesurent 60°.
Propriété réciproque : Un triangle ayant trois angles isométriques est équilatéral. *

Propriété : Tous triangles équilatéraux ont trois axes de symétrie passant chacun par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé.

Propriété : Les axes de symétrie d'un triangle équilatéral supportent une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.

Propriété : En reliant les points milieux des côtés d'un triangle équilatéral par des segments, on obtient un autre triangle équilatéral.

Triangle rectangle

Définition : Un triangle rectangle est triangle ayant un angle droit.
Vocabulaire : L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle.
Vocabulaire : Les cathètes sont les côtés formant l'angle droit d'un triangle rectangle.

Propriété : Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours le côté le plus long.

Propriété : Les angles aigus d'un triangle rectangle sont supplémentaires.

Propriété : Dans un triangle rectangle, si un des angles mesure 30°, alors la mesure du côté opposé à cet angle est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

Relation de Pythagore : Si un triangle est rectangle, alors le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes, c'est-à-dire (mesure d'une cathète)^2 + (mesure de l'autre cathète)^2 = (mesure de l'hypoténuse)^2.
Réciproque de la relation de Pythagore : Si un triangle est tel que le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des autres côtés, alors il est rectangle.

Propriété : Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
Réciproque : Si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté sur lequel elle est abaissée, alors ce triangle est rectangle.

Propriété : Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse détermine deux autres triangles rectangles semblables au premier.

Propriété : Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Propriété : Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

Propriété : Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

Propriété : Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.

Triangle acutangle

Définition : Un triangle acutangle est un triangle ayant trois angles aigus.

Triangle obtusangle

Définition : Un triangle obtusangle est un triangle ayant trois angles obtus.

Triangle isoangle

Définition : Un triangle isoangle est un triangle ayant deux angles isométriques.

Triangle équiangle

Définition : Un triangle équiangle est un triangle ayant trois angles isométriques.

Côté opposé à un sommet (ou à un angle)

Définition : Dans un triangle, le côté opposé à un sommet (ou angle) est celui qui ne sert pas à former le sommet (ou l'angle).

Propriété : Dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

Propriété : Dans un triangle, au plus petit angle est opposé le plus petit côté.

Côté adjacent à un sommet (ou à un angle)

Définition : Dans un triangle, les côtés adjacents à un sommet (ou angle) sont les côtés formant le sommet (ou l'angle).

Sommet (ou angle) opposé à un côté

Définition : Dans un triangle, le sommet (ou angle) opposé à un côté est celui qui n'est pas formé à partir de ce côté.

Condition minimale d'isométrie

Définition : Une condition minimale d'isométrie est l'ensemble de mesures suffisantes pour affirmer que deux triangles sont isométriques.

Propriété : Deux triangles ayant trois côtés isométriques sont isométriques (condition minimale d'isométrie CCC).

Propriété : Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques (condition minimale d'isométrie CAC).

Propriété : Deux triangles ayant un côté isométrique compris entre deux angles homologues isométriques sont nécessairement isométriques (condition minimale d'isométrie ACA).

Condition minimale de similitude

Définition : Une condition minimale de similitude est l'ensemble de mesures suffisantes pour affirmer que deux triangles sont semblables.

Propriété : Deux triangles dont les mesures des trois côtés homologues sont proportionnelles sont semblables (condition minimale de similitude CCC).

Propriété : Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues dont les mesures sont proportionnelles sont nécessairement semblables (condition minimale de similitude CAC).

Propriété : Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont nécessairement semblables (condition minimale de similitude AA).

Trigonométrie

Propriété : Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport de la mesure du côté opposé à cet angle sur la mesure de l'hypoténuse : $\sin(\mathrm{A}) = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$.

Propriété : L'arc sinus permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur du sinus : $\text{arc sinus}\left(\frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}\right) = \mathrm{A}$. *

Propriété : Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport de la mesure du côté adjacent à cet angle sur la mesure de l'hypoténuse : $\cos(\mathrm{A}) = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$.

Propriété : L'arc cosinus permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur du cosinus : $\text{arc cosinus}\left(\frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}\right) = \mathrm{A}$. *

Propriété : Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport de la mesure du côté opposé à cet angle sur la mesure du côté adjacent à cet angle : $\tan(\mathrm{A}) = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$.

Propriété : L'arc tangente permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur de la tangente : $\text{arc tangente}\left(\frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}\right) = \mathrm{A}$. *

Loi des sinus : Les côtés d'un triangle quelconque sont directement proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés : $\left(\frac{a}{\sin A}\right) = \left(\frac{b}{\sin B}\right) = \left(\frac{c}{\sin C}\right)$.

Loi des cosinus : Le carré d'un côté quelconque d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins le double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$

Propriété : Pour tout angle A, $tan\ A = \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)$, avec cos A ≠ 0.

Propriété : Si deux angles sont complémentaires, la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre : $\tan \mathrm{A} = \frac{1}{\tan \mathrm{B}} = \frac{1}{\tan(90 - \mathrm{A})}$.

Propriété : Deux angles supplémentaires ont le même sinus : sin A = sin (180° - A).

Propriété : Si deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre : Sin A = cos B.

Propriété : Pour tout angle A, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Propriété : Le cosinus d'un angle est égal à l'opposé du cosinus de l'angle supplémentaire : $\cos A = -\cos(180 - A)$.

Propriété : La sécante d'un angle est égale à l'inverse du cosinus de l'angle : $\sec A = \frac{1}{\cos A} A = \frac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure du côté adjacent}}$.

Propriété : La cosécante d'un angle est égale à l'inverse du sinus de l'angle : $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure du côté opposé}}$.

Propriété : La cotangente d'un angle est égale à l'inverse de la tangente de l'angle : $\text{cotan } A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure du côté opposé}}$.

Quadrilatère

Définition : Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

Vocabulaire : Dans un quadrilatère, deux côtés sont opposés s'ils n'ont aucun sommet commun.

Vocabulaire : Dans un quadrilatère, deux angles sont opposés s'ils n'ont aucun côté commun.

Propriété : La somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°.

Trapèze

Définition : Un trapèze est un quadrilatère ayant une paire de côtés parallèles.

Vocabulaire : Dans un trapèze, les côtés parallèles sont appelés la petite base (pour le côté le plus court) et la grande base (pour le côté le long).

Propriété : Dans un trapèze, deux angles consécutifs qui n'ont pas une base comme côté commun sont supplémentaires.

Propriété : $A_{trapèze} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, où B est la mesure de la grande base, b la mesure de la petite base et h la mesure de la hauteur.

Trapèze isocèle

Définition : Un trapèze isocèle est un trapèze ayant deux côtés isométriques.

Propriété : Les diagonales d'un trapèze isocèle sont isométriques.

Propriété : Les angles à la base d'un trapèze isocèle sont isométriques.

Trapèze rectangle

Définition : Un trapèze rectangle est un trapèze ayant un angle droit.

Parallélogramme

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux paires de côtés opposés parallèles.

Propriété : Si un quadrilatère a deux côtés isométriques et parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. *

Propriété : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Propriété réciproque : Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Propriété : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
Propriété réciproque : Si un quadrilatère a deux paires de côtés opposés isométriques, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. *

Propriété : Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
Propriété réciproque : Si un quadrilatère a deux paires d'angles opposés isométriques, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. *

Propriété : Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

Propriété : $A_{parallélogramme} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{h}$, où b est la mesure d'une base et h la mesure de la hauteur.

Losange

Définition : Un losange est un quadrilatère ayant tous ses côtés isométriques.

Propriété : Le losange est aussi un parallélogramme.
Propriété alternative : Le losange a deux paires de côtés opposés parallèles.

Propriété : Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs isométriques, alors ce parallélogramme est un losange. *

Propriété : Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.
Propriété réciproque : Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors ce parallélogramme est un losange. *

Propriété : Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu.

Propriété : Les angles opposés d'un losange sont isométriques.

Propriété : Deux angles consécutifs d'un losange sont supplémentaires.

Propriété : $A_{losange} = \frac{\text{D}\cdot\text{d}}{2}$, où D est la mesure de la grande diagonale et d la mesure de la petite diagonale.

Rectangle

Définition : Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.

Propriété : Le rectangle est aussi un parallélogramme.
Propriété alternative : Le rectangle a deux paires de côtés opposés parallèles.

Propriété : Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle. *

Propriété : Les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.

Propriété : Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.

Propriété : Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.

Propriété : Les angles opposés d'un rectangle sont isométriques.

Propriété : De tous les rectangles équivalents, le carré est celui qui a le plus petit périmètre.

Propriété : De tous les rectangles ayant le même périmètre, le carré est celui qui a la plus grande aire.

Propriété : $A_{rectangle} = \text{b} \cdot \text{h}$, où b est la mesure d'une base et h la mesure de la hauteur.

Carré

Définition : Un carré est un quadrilatère régulier.
Définition alternative : Un carré est quadrilatère dont tous ses côtés sont isométriques et tous ses angles sont isométriques.

Propriété : Le carré est aussi un parallélogramme, un losange et un rectangle.

Propriété : Les quatre angles d'un carré sont droits.

Propriété : Les côtés opposés d'un carré sont parallèles.

Propriété : Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.

Propriété : Les diagonales d'un carré sont isométriques.

Propriété : Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

Propriété : $A_{carré} = \text{c}^2$, où c est la mesure d'un côté.

Propriété : $A_{carré} = \frac{\text{d}^2}{2}$, où d est la mesure d'une diagonale. *

Cerf-volant

Définition : Un cerf-volant est un quadrilatère convexe ayant deux paires de côtés adjacents isométriques.

Propriété : Les diagonales d'un cerf-volant sont perpendiculaires.

Propriété : $A_{cerf-volant} = \frac{\mathrm{D} \cdot \mathrm{d}}{2}$, où D est la mesure de la grande diagonale et d la mesure de la petite diagonale.

Deltoïde

Définition : Un deltoïde est un quadrilatère concave ayant deux paires de côtés adjacents isométriques.

Propriété : $A_{deltoïde} = \frac{\mathrm{D} \cdot \mathrm{d}}{2}$, où D est la mesure de la grande diagonale et d la mesure de la petite diagonale. *

Cercle

Définition : Un cercle est une ligne courbe dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre du cercle.
Vocabulaire : La circonférence d'un cercle est sa longueur (son périmètre).

Propriété : Trois points alignés déterminent un et un seul cercle.

Propriété : $C_{cercle} = 2\pi \cdot \mathrm{r}$, où C est la circonférence et r la mesure du rayon.

Rayon

Définition : Un rayon est un segment reliant un point d'un cercle à son centre.

Propriété : Tous les rayons d'un cercle sont isométriques. *

Propriété : Tous les rayons de deux cercles isométriques sont isométriques. *
Propriété réciproque : Si deux cercles ont des rayons isométriques, alors ils sont isométriques. *

Propriété : Tout rayon perpendiculaire à une corde partage la corde en deux segments isométriques.

Propriété : Tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc sous-tendu en deux arcs isométriques.

Propriété : La mesure d'un rayon est égale à la moitié de celle du diamètre du même cercle.

Diamètre

Définition : Un diamètre est un segment reliant deux points du cercle et passant par son centre.

Propriété : Tous les diamètres d'un cercle sont isométriques.

Propriété : Tous les diamètres de deux cercles isométriques sont isométriques.
Propriété réciproque : Si deux cercles ont des diamètres isométriques, alors ils sont isométriques. *

Corde

Définition : Une corde est un segment reliant deux points quelconques d'un cercle.

Propriété : Dans un même cercle ou dans deux cercles isométriques, deux cordes isométriques sont situées à la même distance du centre
Propriété réciproque : Dans un même cercle ou dans deux cercles isométriques, deux cordes situées à la même distance du centre sont isométriques.

Propriété : Lorsque deux cordes se coupent dans un cercle, le produit des mesures des segments de l'une égale le produit des mesures des segments de l'autre.

Propriété : La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

Propriété : Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors ils sous-tendent deux arcs isométriques. *
Propriété réciproque : Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors ils sont sous-tendus par deux cordes isométriques. *

Arc de cercle

Définition : Un arc de cercle est une portion de ce cercle délimitée par deux points.

Propriété : Si des arcs sont compris entre deux cordes parallèles, alors elles sont isométriques.

Propriété : Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.

Propriété : L'angle dont le sommet est situé entre un cercle et son centre a pour mesure la demi-somme des mesures des arcs compris entre ses côtés prolongés.

Propriété : L'angle dont le sommet est situé à l'extérieur d'un cercle a pour mesure la demi-différence des mesures des arcs compris entre ses côtés.

Secteur

Définition : Un secteur est une portion de disque délimitée par deux rayons.

Propriété : Dans un disque, le rapport des aires de deux secteurs est égal au rapport des mesures des angles au centre de ces secteurs.

Angle au centre

Définition : Dans un cercle, un angle au centre est un angle formé de deux rayons et le sommet correspond au centre du cercle.

Propriété : Dans un cercle, l'angle au centre a la même mesure en degrés que celle de l'arc compris entre ses côtés.

Propriété : Dans un cercle, si deux angles au centre sont isométriques, alors ils déterminent deux cordes isométriques.
Propriété réciproque : Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors les deux angles au centre qui les déterminent sont isométriques.

Propriété : Dans un cercle, si deux angles au centre sont isométriques, alors ils déterminent deux arcs isométriques. *
Propriété réciproque : Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors les angles au centre les interceptant sont aussi isométriques. *

Propriété : Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.

Angle inscrit

Définition : Un angle inscrit est un angle dont le sommet est situé sur un cercle et dont les côtés coupent le cercle.

Propriété : Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.
Propriété alternative : Un angle inscrit a pour mesure la moitié de celle de l'arc compris entre ses côtés.

Propriété : Tout angle inscrit interceptant un demi-cercle est droit.

Propriété : Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors ils sont déterminés par deux angles inscrits isométriques. *
Propriété réciproque : Dans un cercle, si deux angles inscrits sont isométriques, alors les arcs qu'ils déterminent sont aussi isométriques. *

Propriété : Dans un cercle, si deux angles inscrits sont isométriques, alors ils déterminent deux cordes isométriques. *
Propriété réciproque : Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors les deux angles inscrits qui les déterminent sont isométriques. *

Cercle inscrit

Définition : Un cercle inscrit à un polygone est un cercle tangent à tous les côtés de ce polygone. *

Cercle circonscrit

Définition : Un cercle circonscrit à un polygone est un cercle qui passe par tous les sommets de ce polygone. *

Cercles concentriques

Définition : Des cercles concentriques sont des cercles ayant le même centre. *

Disque

Définition : Un disque est la région plane délimitée par un cercle.

Propriété : $A_{disque} = \pi \cdot r^2$, où r est la mesure du rayon.

Tangente et sécante à un cercle

Définition : Une tangente à un cercle est une droite qui rencontre un cercle en un seul point.

Propriété : Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon.
Propriété réciproque : Toute droite perpendiculaire à un rayon et passant par son extrémité est tangente au cercle.

Propriété : Si, d'un point P extérieur à un cercle de centre O, on même deux tangentes aux points A et B du cercle, alors OP est la bissectrice de l'angle APB et $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Propriété : Si, d'un point P extérieur à un cercle de centre O, on mène deux tangentes aux points A et B du cercle, alors OP est la bissectrice de l'angle APB et $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.

Propriété : Deux parallèles sécantes ou tangentes à un cercle interceptent sur le cercle deux arcs isométriques.

Propriété : Si d'un point P extérieur à un cercle, on mène une sécante coupant le cercle aux points A et B et une tangente au cercle au point C, alors $m\overline{PA} \times m\overline{PB} = (m\overline{PC})^2$.

Propriété : Si, d'un point P extérieur à un cercle de centre O, on même deux tangentes aux points A et B du cercle, alors OP est la bissectrice de l'angle APB et $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

Propriété : Si, d'un point P extérieur à un cercle, on mène deux sécantes PAB et PCD, alors $mPA \times mPB = mPC \times mPD$.

Solide

Définition : Un solide est une portion de l'espace limitée par une surface fermée.

Propriété : De tous les solides ayant la même aire totale, la sphère est le solide qui a le plus grand volume.

Propriété : De tous les solides de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.

Propriété : Des solides équivalents sont des solides ayant le même volume.

Arête

Définition : Une arête est la ligne d'intersection entre deux surfaces d'un solide.

Face d'un solide

Définition : Une face est une surface plane ou courbe délimitant un solide donné.

Sommet d'un solide

Définition : Un sommet est un point de rencontre.

Polyèdre

Définition : Un polyèdre est un solide dont les faces sont des polygones.

Prisme

Définition : Un prisme est un polyèdre ayant deux faces isométriques et parallèles, appelées bases. Les parallélogrammes qui relient ces deux bases sont appelés faces latérales.

Propriété : $A_{\text{totale d'un prisme}} = A_{\text{latérale}} + 2A_{\text{base}}$

Propriété : $V_{\text{prisme}} = A_{\text{base}} \cdot h$, où h est la mesure de la hauteur.

Propriété : De tous les prismes à base rectangulaire de même aire, c'est le cube qui a le plus grand volume.

Propriété : De tous les prismes à base rectangulaire de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.

Hauteur d'un prisme

Définition : La hauteur d'un prisme est un segment joignant perpendiculairement les bases ou leur prolongement.

Prisme droit

Définition : Un prisme droit est un prisme dont les faces latérales sont des rectangles.

Prisme régulier

Définition : Un prisme régulier est un prisme droit dont les bases des polygones réguliers.

Propriété : Dans un prisme régulier, les faces latérales sont des rectangles isométriques.

Pyramide

Définition : Une pyramide est polyèdre dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun appelé l'apex.

Propriété : $A_{\text{totale d'une pyramide}} = A_{\text{latérale}} + A_{\text{base}}$

Propriété : $V_{\text{pyramide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$, où h est la mesure de la hauteur.

Hauteur d'une pyramide

Définition : La hauteur d'une pyramide est un segment joignant perpendiculairement l'apex et la base ou son prolongement.

Apothème d'une pyramide

Définition : L'apothème d'une pyramide est le segment joignant perpendiculairement l'apex et l'un des côtés de la base. L'apothème correspond à la hauteur d'un triangle formant une face latérale.

Pyramide droite

Définition : Une pyramide droite est une pyramide dont l'une des extrémités de la hauteur correspond au centre de la base.

Pyramide régulière

Définition : Une pyramide régulière est une pyramide droite dont la base est un polygone régulier.

Propriété : Dans une pyramide régulière, les faces latérales sont des triangles isocèles isométriques.

Propriété : Dans une pyramide régulière, l'une des extrémités de l'apothème est le milieu d'un des côtés du polygone formant la base de la pyramide.

Corps rond

Définition : Un corps rond est un solide délimité par au moins une face courbe.

Cylindre

Définition : Un cylindre est un solide ayant deux bases isométriques et délimitées par une ligne courbe.

Propriété : $A_{\text{totale d'un cylindre}} = A_{\text{latérale}} + 2 \cdot A_{\text{base}}$

Propriété : $V_{\text{cylindre}} = A_{\text{base}} \cdot h$, où h est la mesure de la hauteur.

<u>Hauteur d'un cylindre</u>

Définition : La hauteur d'un cylindre est un segment joignant perpendiculairement les deux bases ou leur prolongement. *

<u>Cylindre droit</u>

Définition : Un cylindre droit est un cylindre dont il est possible de relier perpendiculairement un point d'une base au point homologue de l'autre base.

<u>Cylindre circulaire droit</u>

Définition : Un cylindre circulaire droit est un cylindre dont les bases sont des cercles et la face latérale est un rectangle.

<u>Cône</u>

Définition : Un cône est corps rond dont la base est délimitée par une ligne courbe et dont la face latérale est courbe. La face latérale du cône est comprise entre sa base et un sommet appelé apex.

Propriété : $A_{\text{totale d'un cône}} = A_{\text{latérale}} + A_{\text{base}}$

Propriété : $V_{\text{cône}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$, où h est la mesure de la hauteur.

<u>Hauteur d'un cône</u>

Définition : La hauteur d'un cône est un segment joignant perpendiculairement l'apex et la base ou son prolongement.

<u>Apothème d'un cône</u>

Définition : L'apothème d'un cône est le segment joignant l'apex à un point du contour de la base.

<u>Cône droit</u>

Définition : Un cône droit est un cône dont l'une des extrémités de la hauteur correspond au centre de la base.

<u>Cône circulaire droit</u>

Définition : Un cône circulaire droit est un cône droit dont la base est un cercle.

Propriété : $A_{\text{latérale cône circulaire droit}} = \pi \cdot r \cdot a$, où r est le rayon de la base et a l'apothème du cône.

Sphère

Définition : Une sphère est un corps rond dont la surface est constituée de tout les points situés à égale distance d'un point appelé centre de la sphère.

Propriété : $\mathrm{A}_{\text{totale d'une sphère}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Propriété : $\mathrm{V}_{\text{boule}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$, où r est la mesure du rayon.

Rayon d'une sphère

Définition : Le rayon d'une sphère est le segment joignant le centre de la sphère à n'importe quel point de la sphère.

Boule

Définition : Une boule est la portion de l'espace limitée par une sphère.

Géométrie analytique

Plan

Définition : Un plan est une surface plane illimitée qui contient en entier toute droite qui joint deux de ses points.

Repère orthonormé

Définition : Un repère orthonormé est un système d'axes perpendiculaires et gradués avec des unités de même longueur.

Vocabulaire : Le plan cartésien est muni d'un repère orthonormé.

Points

Vocabulaire : L'abscisse d'un point est la valeur de sa première coordonnée, souvent x.

Vocabulaire : L'ordonnée d'un point est la valeur de sa deuxième coordonnée, souvent y.

Propriété : La distance entre deux points $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2; \mathrm{y}_2)$, notée $\mathrm{d}(\mathrm{A}; \mathrm{B})$, est donnée par la formule : $\mathrm{d}(\mathrm{A}; \mathrm{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Propriété : La distance entre deux points est commutative, c'est-à-dire $\mathrm{d}(\mathrm{A}; \mathrm{B}) = \mathrm{d}(\mathrm{B}; \mathrm{A})$

Propriété : Soit M le point milieu d'un segment ayant comme extrémité $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2; \mathrm{y}_2)$, $\mathrm{M}(\mathrm{x}; \mathrm{y}) = \left(\frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2}; \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right)$.

Propriété : Soit le segment ayant comme extrémité $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2; \mathrm{y}_2)$. Les coordonnées du point P situé à la fraction $\frac{m}{n}$ du à partir de A sont $\mathrm{M}(\mathrm{x}; \mathrm{y}) = \left(x_1 + \frac{m}{n}(x_2 - x_1); y_1 + \frac{m}{n}(y_2 - y_1)\right)$.

Propriété : Un point partageant un segment selon le rapport m :n à partir de A est équivalent à la fraction $\frac{m}{n+m}$ à partir de A.

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. Si la pente de la droite passant par AB est égale à la pente de BC, alors A, B et C sont colinéaires. *

Propriété alternative : Soit A, B et C trois points du plan. Si la pente de la droite passant par AB est égale à la pente de AC, alors A, B et C sont colinéaires. *

<u>Droites</u>

Vocabulaire : L'abscisse à l'origine d'une droite est l'abscisse du point d'intersection entre la droite et l'axe des abscisses.

Vocabulaire : L'ordonnée à l'origine d'une droite est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

Définition : En géométrie analytique, une droite est définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient sont équation.

Propriété : Soit deux points $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2; \mathrm{y}_2)$, la pente de la droite passant par A et B, notée a, est donnée par : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Propriété : Si deux droites sont parallèles, alors elles ont la même pente $(a_1 = a_2)$.

Propriété réciproque : Si deux droites ont la même pente $(a_1 = a_2)$, alors elles sont parallèles.

Propriété : Si deux droites sont parallèles et ont un point en commun, alors elles sont confondues.

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires, alors leur pente est l'opposée de l'inverse de l'autre $\left(a_1 = -\frac{1}{a_2}\right)$.

Propriété alternative : Si deux droites sont perpendiculaires, alors le produit de leur pente vaut -1
$(a_1 \cdot a_2 = -1)$.

Propriété réciproque : Si les pentes de deux droites sont l'opposée de l'inverse de l'autre $\left(a_1 = -\frac{1}{a_2}\right)$, alors elles sont perpendiculaires.

Propriété réciproque alternative : Si le produit des pentes de droites vaut -1 $(a_1 \cdot a_2 = -1)$, alors elles sont perpendiculaires.

Propriété : L'équation fonctionnelle d'une droite est : $\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$, où a est la pente de la droite et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété : L'équation générale d'une droite est : $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$, où A et B ne sont pas simultanément nuls**.**

Propriété : L'équation symétrique d'une droite est : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1$, où a est l'abscisse à l'origine et b l'ordonnée à l'origine.

Transformation géométrique

Translation

Propriété : La règle d'une translation, notée $\mathrm{t(h;\ k)}$, est de la forme $\mathrm{t(h; k)} : \mathrm{(x;\ y) \rightarrow (x + h; y + k)}$

Réflexion

Propriété : La règle d'une réflexion par rapport à l'axe des abscisses, notée S_x, est de la forme : $S_x: (x; y) \rightarrow (x;\ -y)$

Propriété : La règle d'une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, notée S_y, est de la forme : $S_y: (x; y) \rightarrow (-x;\ y)$

Rotation

Propriété : La règle d'une rotation de 90° (ou -270°) autour de l'origine, notée $\mathrm{r(O; 90°)}$ est de la forme : $\mathrm{r(O; 90°)}: (x; y) \rightarrow (-y; x)$

Propriété : La règle d'une rotation de 180° (ou -180°) autour de l'origine, notée $\mathrm{r(O; 180°)}$ est de la forme : $\mathrm{r(O; 180°)}: (x; y) \rightarrow (-x;\ -y)$

Propriété : La règle d'une rotation de 270° (ou -90°) autour de l'origine, notée $\mathrm{r(O; 270°)}$ est de la forme : $\mathrm{r(O; 270°)}: (x; y) \rightarrow (y; -x)$

Homothétie

Propriété : La règle d'une homothétie de rapport k centrée à l'origine, notée $\mathrm{h(O; k)}$ est de la forme : $\mathrm{h(O; k)}: \mathrm{(x; y) \rightarrow (kx; ky)}$.

Vecteur

Définition : Un vecteur, noté $\vec{\mathrm{u}}$, est un objet mathématique ayant une grandeur, une direction et un sens.
Note : Un vecteur $\vec{\mathrm{u}}$ est déterminé par deux points. On représente géométriquement un vecteur par une flèche reliant les deux points. Aussi, pour des points A et B, on note le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$. *

Vocabulaire : Un scalaire est nombre décrivant à lui seule une quantité (sans orientation ou sens).

Vocabulaire : La norme d'un vecteur, représentée $\|\vec{u}\|$, est un scalaire lié à sa grandeur.
Propriété : Soit $\mathrm{A}(\mathrm{x}_a; \mathrm{y}_a)$ et $\mathrm{B}(\mathrm{x}_b; \mathrm{y}_b)$, la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est donnée par : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$
Propriété : Soit $\vec{\mathrm{u}} = (a; b)$, la norme du vecteur $\vec{\mathrm{u}}$ est donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vocabulaire : La direction d'un vecteur correspond l'inclinaison de la droite passant par les deux points déterminant le vecteur. *

Vocabulaire : Le sens d'un vecteur décrit, pour une direction donnée, le point de départ et le point d'arrivée du vecteur ($\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$). *
Note : Pour chaque direction, il y a toujours deux sens possibles. *

Vocabulaire : L'orientation d'un vecteur correspond à sa direction et son sens. Il correspond à un angle formé par le vecteur et une droite horizontale passant par son origine. Il est mesuré dans le sens antihoraire par rapport à la partie de cette droite située à droite de l'origine du vecteur.

Définition : Le vecteur nul, représenté $\vec{0}$, est un vecteur dont la norme vaut 0 ($\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)
Propriété : Les composantes du vecteur nul sont (Gesellschaft für Klassifikation. Jahrestagung (34e : 2010 : Karlsruhe Allemagne) et al.)
Propriété : Le vecteur nul a toutes les directions.

Définition : Le vecteur unitaire, est un vecteur dont la norme vaut 1.

Définition : Deux vecteurs colinéaires (ou parallèles) sont des vecteurs dont leurs directions sont parallèles.
Propriété : Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

Définition : Deux vecteurs orthogonaux sont des vecteurs dont leurs directions sont perpendiculaires.

Définition : Des vecteurs équipollents sont des vecteurs ayant la même norme, la même direction et le même sens.
Propriété : Si deux vecteurs $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$ sont équipollents, alors $a = c$ et $b = d$.
Propriété réciproque : Soit deux vecteurs $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$, si $a = c$ et $b = d$, alors ces vecteurs sont équipollents.

Définition : Des vecteurs opposés sont des vecteurs ayant la même direction, mais de sens opposé. Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Étant donnés deux points A et B, les vecteurs AB et BA sont opposés. On a: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Vecteur algébrique

Définition : Soit $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur algébrique $\overrightarrow{AB}$ est défini par le couple (a; b), où la composante horizontale $a = x_2 - x_1$ et la composante verticale $b = y_2 - y_1$.
Note : Si l'origine d'un vecteur est l'origine d'un plan cartésien, alors sa représentation (a; b) est directement définie par l'extrémité du vecteur.

Addition vectorielle

Propriété : Pour additionner deux vecteurs, il faut les mettre bout à bout et le vecteur résultant est défini par l'origine du premier vecteur et l'extrémité du dernier vecteur.

Méthode du triangle : À partir d'un point A quelconque du plan :
1. on trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représentant le vecteur $\vec{u}$.
2. on trace le vecteur $\overrightarrow{BC}$ représentant le vecteur $\vec{v}$.
3. on trace le vecteur $\overrightarrow{AC}$ représentant le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Méthode du parallélogramme : À partir d'un point A quelconque du plan :
1. On trace le vecteur$\overrightarrow{AB}$ représentant le vecteur $\vec{u}$.
2. On trace le vecteur $\overrightarrow{AC}$ représentant le vecteur $\vec{v}$.
3. On situe le point D tel que ABCD est un parallélogramme. 4. on trace le vecteur $\overrightarrow{AD}$.

Propriété : Soit $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$, alors $\vec{u} + \vec{v} = (a + c; b + d)$

Propriété : Soit $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$, alors $\vec{u} - \vec{v} = (a - c; b - d)$

Propriété : L'addition vectorielle est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Propriété : L'addition vectorielle est associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \overrightarrow{(u + \vec{w})}$

Propriété : $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition vectorielle.

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Propriété (relation de Chasles) : si A, B et C sont trois points du plan, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition : Le produit d'un vecteur non nul $\vec{u}$ par un réel k est un vecteur noté $k\vec{u}$. Ainsi, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction; ont le même sens si $k > 0$; sont de sens contraire du $k < 0$; $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$

Propriété : Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune des composantes de ce vecteur par ce scalaire. Si $\vec{u} = (a, b)$, alors $k\vec{u} = k(a, b) = (ka, kb)$.

Propriété : La multiplication d'un vecteur par un scalaire est associative : $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$.

Propriété : La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition vectorielle :
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Propriété : La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition de scalaires :
$(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$.

Propriété : 0 est un élément absorbant de la multiplication d'un vecteur par un scalaire : $0\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété : $\vec{0}$ est un élément absorbant de la multiplication d'un vecteur par un scalaire : $k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriété : 1 est l'élément neutre de la multiplication d'un vecteur par un scalaire : $1\vec{u} = \vec{u}$.

Propriété : La multiplication d'un vecteur par -1 donne le vecteur opposé : $-1\vec{u} = -\vec{u}$

Combinaison vectorielle

Définition : Une base vectorielle est un plan engendré par deux vecteurs n'ayant pas la même direction.

Définition : Étant donnée une suite de vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$, toute expression de la forme $c_1\overrightarrow{u_1}, c_2\overrightarrow{u_2} + \dots + c_n\overrightarrow{u_n}$ où $c_i \in \mathbb{R}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n}$.

Propriété : Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ d'une base vectorielle permettent d'engendrer tout vecteur $\vec{v}$ du plan, c'est-à-dire qu'étant donné un vecteur $\vec{v}$ quelconque du plan, il existe deux réels uniques c_1 et c_2 tels que $\vec{v} = c_1\overrightarrow{u_1} + c_2\overrightarrow{u_2}$. Les réels c_1 et c_2 sont appelés les composantes du vecteur $\vec{v}$ relatives à la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

Définition : Le plan cartésien est une base vectorielle des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ où $\vec{\imath} = (1; 0)$ et $\vec{\jmath} = (0; 1)$.

Propriété : Soit un vecteur $\vec{u} = (a, b)$, il peut être représenté dans le plan cartésien par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la façon suivante : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

Produit scalaire

Définition : Le produit scalaire est une opération qui fait intervenir deux vecteurs et dont le résultat est un scalaire. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Propriété : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$, où θ est la mesure de l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété : Soit $\vec{u} = (a; b)$ et $\vec{v} = (c; d)$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$

Propriété : Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
Propriété réciproque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : Soit θ la mesure de l'angle formée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

Propriété : Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Propriété : La multiplication d'un vecteur par un scalaire est associative dans le produit scalaire : $k_1\vec{u} \cdot k_2\vec{v} = k_1 \cdot k_2(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Propriété : Le produit scalaire est distributif sur l'addition vectorielle : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Projection orthogonale

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$, notée $\vec{u}_{\vec{v}}$, est le vecteur ayant la même origine que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont l'extrémité coïncide avec la perpendiculaire à $\vec{v}$ issue de l'extrémité de $\vec{u}$.

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété : Le vecteur $(\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}})$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété : La projection orthogonale $\vec{u}_{\vec{v}}$ est donnée par : $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v}$

Annexe 10 : suggestion d'un référentiel pour un agent tuteur

Nous suggérons le référentiel ci-dessous comme référentiel pour un agent-tuteur. Ce référentiel a été construit à partir des référentiels recueillis dans les ouvrages scolaires auxquels nous avons ajouté des propriétés et des définitions issues du travail d'équipe avec Font (2021) et Tessier-Baillargeon (2016) que nous avons annotées par un astérisque (*). À la différence du référentiel de l'annexe 9, ce référentiel est destiné à des programmeurs. C'est pour cette raison que nous avons organisé les énoncés par objet géométrique.

Point, segment et droite :

- Un point milieu est le point qui partage un segment en deux segments isométriques.
- Si I est le milieu de $\overline{\mathrm{AB}}$ alors $\mathrm{m}\overline{\mathrm{AI}} = \mathrm{m}\overline{\mathrm{IB}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}$.
- Si $\mathrm{m}\overline{\mathrm{AI}} = \mathrm{m}\overline{\mathrm{IB}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}$, alors I est le milieu de $\overline{\mathrm{AB}}$. *

- Des points colinéaires sont des points appartenant à une même droite. *
- Si $m\,\overline{AB} + m\,\overline{BC} = m\,\overline{AC}$, alors les points A, B et C sont colinéaires. *
- Si AB est parallèle à BC, alors les points A, B et C sont colinéaires. *
- Si AB et AC sont perpendiculaires à une même droite, alors A, B et C sont colinéaires. *

- Deux droites perpendiculaires sont des droites qui se coupent à angle droit.
- Des droites parallèles (distinctes) sont des droites n'ayant aucun point commun.
- Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles
- Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles
- Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

- Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.
- Si des angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants sont isométriques, alors les deux droites coupées par la sécante formant ces angles sont parallèles.

- Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.

- Une hauteur est une droite perpendiculaire à la base (ou son prolongement) d'une figure et passant par le sommet opposé. Une hauteur peut aussi désigner le segment porté par cette droite et compris entre la base et le sommet opposé.
- Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.

- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son point milieu.
- La médiatrice d'un segment est la droite formée par l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.
- La médiatrice d'un segment est l'axe de symétrie du segment.
- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit.
- Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre du cercle.

- La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles isométriques.
- La bissectrice d'un angle est formée de l'ensemble de tous les points situés à égale distance des deux côtés d'un angle.
- La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de l'angle.

- Une médiane d'un triangle est un segment reliant un sommet et le milieu du côté opposé.
- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.
- La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

Angle :

- Deux angles supplémentaires sont des angles dont la somme de leurs mesures est 180°.
- Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires.
- Les supplémentaires de deux angles isométriques sont isométriques.

- Deux angles complémentaires sont des angles dont la somme de leurs mesures est 90°.
- Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont perpendiculaires sont complémentaires.
- Les complémentaires de deux angles isométriques sont isométriques.

- Deux angles opposés par le sommet sont isométriques.

Triangle :

- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180°.

- Deux triangles ayant des bases et des hauteurs homologues isométriques ont la même aire. *

- Un triangle rectangle est un triangle ayant un angle droit.
- Dans un triangle rectangle, si un des angles mesure 30°, alors la mesure du côté opposé à cet angle est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.
- Si un triangle est rectangle, alors le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes, c'est-à-dire (mesure d'une cathète)^2 + (mesure de l'autre cathète)^2 = (mesure de l'hypoténuse)^2.

- Si un triangle est tel que le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des autres côtés, alors il est rectangle.
- Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue du sommet de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
- Si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté sur lequel elle est abaissée, alors ce triangle est rectangle.

- Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés isométriques.
- Les angles opposés aux côtés isométriques d'un triangle isocèle sont isométriques.
- Un triangle ayant deux angles intérieurs isométriques est un triangle isocèle dont le troisième angle est le sommet principal. *
- Un triangle isocèle a un axe de symétrie passant par le sommet principal et coupant perpendiculairement le côté opposé.
- L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.

- Un triangle équilatéral est un triangle ayant trois côtés isométriques.
- Les trois angles intérieurs d'un triangle équilatéral sont isométriques et mesurent 60°.
- Tous triangles équilatéraux ont trois axes de symétrie passant chacun par un sommet et coupant perpendiculairement le côté opposé
- Les axes de symétrie d'un triangle équilatéral supportent une médiane, une médiatrice et une bissectrice de ce triangle.

- Deux triangles ayant trois côtés isométriques sont isométriques (condition minimale d'isométrie CCC).
- Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques (condition minimale d'isométrie CAC).
- Deux triangles ayant un côté isométrique compris entre deux angles homologues isométriques sont nécessairement isométriques (condition minimale d'isométrie ACA).

- Deux triangles dont les mesures des trois côtés homologues sont proportionnelles sont semblables (condition minimale de similitude CCC).
- Deux triangles ayant un angle isométrique compris entre deux côtés homologues dont les mesures sont proportionnelles sont nécessairement semblables (condition minimale de similitude CAC).
- Deux triangles ayant deux angles homologues isométriques sont nécessairement semblables (condition minimale de similitude AA).

- Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au rapport de la mesure du côté opposé à cet angle sur la mesure de l'hypoténuse : $\sin{(A)} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$.
- L'arc sinus permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur du sinus : arc sinus $\text{arc sinus} \left(\frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}\right) = \text{ A}$. *
- Deux angles supplémentaires ont le même sinus : sin A = sin (180° - A).

- Les côtés d'un triangle quelconque sont directement proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés : $(\frac{a}{\sin A}) = (\frac{b}{\sin B}) = (\frac{c}{\sin C})$.

- Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport de la mesure du côté adjacent à cet angle sur la mesure de l'hypoténuse : $\cos(\mathrm{A}) = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$.
- L'arc cosinus permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur du cosinus : $\text{arc cosinus}\left(\frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}\right) = \mathrm{A}$. *
- Le carré d'un côté quelconque d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins le double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces côtés : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$.

- Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est égale au rapport de la mesure du côté opposé à cet angle sur la mesure du côté adjacent à cet angle : $\tan(\mathrm{A}) = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$.
- L'arc tangente permet de déterminer la valeur d'un angle à partir de la valeur de la tangente : $\text{arc tangente}\left(\frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}\right) = \mathrm{A}$. *

Quadrilatère :

- La somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°.

- Dans un quadrilatère, deux côtés sont opposés s'ils n'ont aucun sommet commun.
- Dans un quadrilatère, deux angles sont opposés s'ils n'ont aucun côté commun.

- Un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux paires de côtés opposés parallèles.
- Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.
- Si un quadrilatère a deux paires de côtés opposés isométriques, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. *
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. *
- Si un quadrilatère a deux côtés isométriques et parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
- Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.

- Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés sont isométriques.
- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs isométriques, alors ce parallélogramme est un losange. *
- Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, alors ce parallélogramme est un losange. *
- Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu
- Les angles opposés d'un losange sont isométriques

- Deux angles consécutifs d'un losange sont supplémentaires

- Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.
- Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle. *
- Les côtés opposés d'un rectangle sont isométriques.
- Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu.
- Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.
- Les angles opposés d'un rectangle sont isométriques.

- Un carré est un quadrilatère régulier (tous ses côtés sont isométriques et tous ses angles sont isométriques).
- Le carré est aussi un parallélogramme, un losange et un rectangle.
- Les quatre angles d'un carré sont droits.
- Les côtés opposés d'un carré sont parallèles.
- Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu.
- Les diagonales d'un carré sont isométriques.
- Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.

- Un cerf-volant est un quadrilatère convexe ayant deux paires de côtés adjacents isométriques.
- Les diagonales d'un cerf-volant sont perpendiculaires.

Polygone :

- La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone est $(n-2) \times 180°$.

- Un polygone régulier est un polygone dont tous les angles sont isométriques et tous les côtés sont isométriques.
- La mesure d'un angle intérieur d'un polygone régulier est $\frac{(n-2)\times 180}{n}$.
- La mesure d'un angle au centre d'un polygone régulier est $\frac{360}{n}$.
- La mesure d'un angle extérieur d'un polygone régulier est $\frac{360}{n}$.

- Le centre d'un polygone régulier est l'unique point équidistant à chaque sommet. *
- Le centre d'un polygone régulier est équidistant à chaque côté. *
- Le centre d'un polygone régulier est aussi le centre du cercle inscrit au polygone. *
- Le centre d'un polygone régulier est aussi le centre du cercle circonscrit au polygone. *

Transformation géométrique :

- Le segment dont les extrémités sont un point et son image obtenue par réflexion (ou symétrie) est perpendiculaire à l'axe de réflexion. L'axe de réflexion coupe ce segment en son milieu
- Les sommets homologues d'une figure et de son image obtenue par réflexion (ou symétrie) sont équidistants de l'axe de réflexion.

- L'isométrie conserve la longueur des segments, la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.
- Si deux segments sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
- Si deux segments ont la même mesure, alors ils sont isométriques.
- Si deux angles sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
- Si deux angles ont la même mesure, alors ils sont isométriques.
- Si deux arcs de cercle sont isométriques, alors ils ont la même mesure. *
- Si deux arcs de cercle ont la même mesure, alors ils sont isométriques. *

- La similitude conserve la mesure des angles, le parallélisme et la perpendicularité.
- Les côtés homologues de deux figures semblables sont proportionnels.

Cercle :

- Un cercle inscrit à un polygone est un cercle tangent à tous les côtés de ce polygone. *
- Un cercle circonscrit à un polygone est un cercle qui passe par tous les sommets de ce polygone. *
- Des cercles concentriques sont des cercles ayant le même centre. *

- Un diamètre est un segment reliant deux points du cercle et passant par son centre.
- Tous les diamètres d'un cercle sont isométriques.
- Tous les diamètres de deux cercles isométriques sont isométriques. *

- Un rayon est un segment reliant un point d'un cercle à son centre.
- Tous les rayons d'un cercle sont isométriques.
- Tous les rayons de deux cercles isométriques sont isométriques. *
- La mesure d'un rayon est égale à la moitié de celle du diamètre du même cercle.

- Tout angle inscrit interceptant un demi-cercle est droit.
- Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre.
- Dans un cercle, si deux angles inscrits sont isométriques, alors ils déterminent deux cordes isométriques. *
- Dans un cercle, si deux angles inscrits sont isométriques, alors les arcs qu'ils déterminent sont aussi isométriques. *

- Si des arcs sont compris entre deux cordes parallèles, alors elles sont isométriques.
- Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors ils sont déterminés par deux angles inscrits isométriques. *
- Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors ils sont sous-tendus par deux cordes isométriques. *
- Dans un cercle, si deux arcs sont isométriques, alors les angles au centre qui les déterminent sont aussi isométriques.

- Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors les deux angles au centre qui les déterminent sont isométriques.
- Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors les deux angles inscrits qui les déterminent sont isométriques. *
- Dans un cercle, si deux cordes sont isométriques, alors ils sous-tendent deux arcs isométriques.
  *
- Dans un cercle, si deux angles au centre sont isométriques, alors les deux cordes interceptées sont aussi isométriques.
- Dans un cercle, si deux angles au centre sont isométriques, alors ils déterminent deux arcs isométriques. *
- Dans un cercle, l'angle au centre a la même mesure en degrés que celle de l'arc compris entre ses côtés.

- Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.
- Dans un disque, le rapport des aires de deux secteurs est égal au rapport des mesures des angles au centre de ces secteurs.

Annexe 11 : des raccourcis inférentiels

Comme une propriété peut être un raccourci ou non dépendamment des prémisses de son îlot déductif, il est impossible de classifier la majorité des propriétés comme étant un raccourci ou non. Il nous a toutefois été possible d'en extraire quelques-uns, soit en raison de leur caractère unique au sein des ouvrages pédagogiques, soit parce qu'elles découlent toujours de propriétés antérieurement vues dans les ouvrages (par exemple, la propriété « les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires » arrivent toujours après la propriété de la somme des angles d'un triangle).

- Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires.
- Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point.
- Les bissectrices d'un triangle se coupent en un même point.
- Dans un triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé à cet angle en deux segments de longueurs proportionnelles à celles des côtés adjacents à l'angle. Dans la figure ci-contre, on a donc $\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$
- Dans tout triangle, les trois médianes se rencontrent en un même point, situé aux deux tiers de chacune des médianes à partir du sommet dont elles sont issues.
- Dans un triangle, une médiane partage la région intérieure du triangle en deux triangles de même aire.
- Les trois médianes d'un triangle partagent la région intérieure du triangle en six triangles de même aire.
- Dans tout triangle, la somme des carrés des mesures des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des mesures des côtés.
- Si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté sur lequel elle est abaissée, alors ce triangle est rectangle.

- Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
- Dans un triangle isocèle ou équilatéral, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques et vice versa. On en déduit qu'un triangle isocèle est nécessairement isoangle et qu'un triangle équilatéral est nécessairement équiangle.
- Tout segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et mesure la moitié du troisième côté.
- Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à la base, coupe l'autre côté en son milieu.
- Si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté sur lequel elle est abaissée, alors ce triangle est rectangle.
- En reliant les points milieux des côtés d'un triangle équilatéral par des segments, on obtient un autre triangle équilatéral.
- Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.
- [Dans un losange,] les diagonales sont les bissectrices des angles qu'elles traversent.
- Le quadrilatère obtenu en reliant successivement par des segments les points milieux des côtés d'un quadrilatère est un parallélogramme.
- Pour chaque losange, les points milieux sont les sommets d'un rectangle
- Si, dans un quadrilatère, une diagonale est bissectrice de deux angles opposés, alors elle détermine deux triangles congrus.
- Toute diagonale d'un parallélogramme sépare ce dernier en deux triangles isométriques.
- Un segment joignant un sommet d'un parallélogramme au milieu d'un des côtés non adjacents coupe la diagonale non issue de ce sommet en un point qui divise la diagonale et le segment tracé selon rapport 1: 2.
- Les points milieux des côtés de tout quadrilatère convexe sont les sommets d'un parallélogramme.

- À chaque sommet d'un polygone convexe, l'angle intérieur et l'angle extérieur sont supplémentaires.
- Si on relie trois sommets non consécutifs d'un hexagone régulier, on obtient un triangle équilatéral.
- Deux cordes congrues sous-tendent deux arcs congrus.
- Lorsqu'on relie consécutivement les extrémités de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle, on obtient un carré.