

**Université de Montréal**

**La structure des représentations des algèbres  
de Temperley-Lieb affines sur la chaîne de spins XXZ**

par

**Théo Pinet**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

Orientation Mathématiques fondamentales

10 août 2020



**Université de Montréal**

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

**La structure des représentations des algèbres  
de Temperley-Lieb affines sur la chaîne de spins XXZ**

présenté par

**Théo Pinet**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Abraham Broer*

---

(président-rapporteur)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(directeur de recherche)

*Michael Lau*

---

(membre du jury)



# Résumé

---

Ce mémoire révèle la structure des représentations des algèbres de Temperley-Lieb affines  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (du spin total  $S^z$ ) des chaînes de spins XXZ périodiques. En particulier, on y démontre que ces représentations, introduites dans [35] et [40], admettent toujours une structure similaire à celle des représentations de Feigin-Fuchs de l'algèbre de Virasoro  $\mathfrak{Vir}$  et que les différentes possibilités, pour la structure d'un  $\mathfrak{Vir}$ -module de Feigin-Fuchs, sont toutes réalisées par un espace propre donné. On introduit aussi une pléthore d'applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires entre différents espaces propres en considérant une action naturelle de l'extension de Lusztig  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  sur les chaînes XXZ périodiques et on caractérise entièrement le noyau ainsi que l'image de ces applications à l'aide de longues suites exactes et d'une décomposition de Clebsch-Gordan généralisée. Finalement, on identifie l'image du morphisme  $i_N^d(q, v)$  défini dans [39] et on donne également une nouvelle réalisation explicite pour les couvertures projectives de la catégorie  $\mathrm{mod} \mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$ .

Le chapitre 1 introduit les algèbres de Temperley-Lieb affines  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  et leur théorie de la représentation à la manière de [22]. Dans le chapitre 2, on présente les représentations de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur les chaînes de spins XXZ périodiques (définies d'abord dans [41] et [40]) et on caractérise partiellement la structure de ces représentations en débutant l'étude de l'image du morphisme  $i_N^d(q, v)$  de [39]. Ensuite, dans le chapitre 3, on introduit l'extension de Lusztig  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  et on utilise sa théorie de la représentation pour définir et étudier des applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires reliant différents espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Finalement, dans le chapitre 4, on combine les différents résultats de ce mémoire afin d'obtenir une caractérisation explicite de la structure des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . On détermine aussi dans ce chapitre l'image du morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v)$ .

**Mots clés :** Théorie de la représentation, algèbres de Temperley-Lieb affines, modules cellulaires, chaînes XXZ périodiques, groupe quantique, extension de Lusztig  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$ , dualité de Schur-Weyl, couvertures projectives, décomposition de Clebsch-Gordan généralisée.



# Abstract

---

This master's thesis reveals the structure of the representations of the affine Temperley-Lieb algebras  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  on the eigenspaces  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (of the total spin  $S^z$ ) of the periodic XXZ spin chains. In particular, we show that these representations, introduced in [35] and [40], always admit a structure akin that of the Feigin-Fuchs representations of the Virasoro  $\mathfrak{Vir}$  algebra and that the different possibilities, for the structure of a Feigin-Fuchs  $\mathfrak{Vir}$ -module, are all realized by a given eigenspace. We also give a plethora of  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linear maps between different eigenspaces by considering a natural action of the Lusztig extension  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  on the periodic XXZ chains and we then fully characterize the kernel and image of these morphisms by means of long exact sequences and a generalized Clebsch-Gordan decomposition. Finally, we explicitly give the image of the intertwiner  $i_N^d(q, v)$  defined in [39] and we also introduce a new explicit realization for the projective covers in the category  $\mathrm{mod} \mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$ .

Chapter 1 follows the pioneering work of [22] and introduces the affine Temperley-Lieb algebras  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  with their representation theory. In chapter 2, we present the representations of  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  on the periodic XXZ spin chains (defined originally in [41] and [40]) and we partially characterize the structure of these representations by studying the image of the morphism  $i_N^d(q, v)$  of [39]. Then, in chapter 3, we introduce the Lusztig extension  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  and use its representation theory to define and study  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linear maps relating different eigenspaces  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . At last, in chapter 4, we combine the various results of this thesis to obtain an explicit characterization of the structure of the eigenspaces  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . We also determine the image of the intertwiner  $i_N^d(q, v)$  in this chapter.

**Keywords** : Representation theory, affine Temperley-Lieb algebras, cellular modules, periodic XXZ chains, quantum groups, Lusztig's extension  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$ , quantum Schur-Weyl duality, projective covers, generalized Clebsch-Gordan decomposition.





# Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| Résumé .....   | 5         |
| Abstract .....   | 7         |
| Liste des figures .....  | 13        |
| Table de notation .....  | 19        |
| Remerciements .....  | 23        |
| Introduction .....   | 25        |
| <b>Chapitre 1. Les algèbres de Temperley-Lieb affines .....</b>    | <b>29</b> |
| 1.1. Généraliser les algèbres de Temperley-Lieb .....              | 29        |
| 1.2. Théorie de la représentation et modules cellulaires.....      | 33        |
| 1.2.1. Première version : les modules $W_{N,d;z}(q)$ .....         | 33        |
| 1.2.2. Seconde version : Les modules $V_N^d(q,v)$ .....            | 36        |
| 1.2.3. Équivalence entre les deux versions.....                    | 38        |
| 1.3. Structure des modules cellulaires.....                        | 41        |
| 1.3.1. Diagrammes de Loewy .....                                   | 41        |
| 1.3.2. Monomorphismes de Graham-Lehrer .....                       | 42        |
| <b>Chapitre 2. La chaîne de spin XXZ.....</b>                      | <b>53</b> |
| 2.1. Une représentation de $TL_N^a(\beta)$ sur la chaîne XXZ ..... | 53        |
| 2.2. Retournement des spins.....                                   | 56        |
| 2.3. Dualité .....   | 57        |

|                    |   |            |
|--------------------|---|------------|
| 2.3.1.             | Cas général . . . . .   | 58         |
| 2.3.2.             | La dualité pour $TL_N^a(\beta)$ . . . . .   | 62         |
| 2.4.               | Le morphisme d'entrelacement $i_N^d(q, v)$ . . . . .  | 65         |
| 2.4.1.             | Définition du morphisme et ensemble critique . . . . .  | 65         |
| 2.4.2.             | Caractérisation partielle du noyau de $i_N^d(q, v)$ . . . . .                                     | 67         |
| <b>Chapitre 3.</b> | <b>Groupes quantiques et dualité de Schur-Weyl . . . . .</b>                                      | <b>79</b>  |
| 3.1.               | L'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . . . . .                                  | 79         |
| 3.1.1.             | Une sous-algèbre remarquable . . . . .  | 82         |
| 3.1.2.             | Structure d'algèbre de Hopf . . . . .   | 86         |
| 3.2.               | Théorie de la représentation . . . . .  | 88         |
| 3.2.1.             | Irréductibles . . . . .   | 89         |
| 3.2.2.             | Couvertures projectives . . . . .   | 93         |
| 3.2.3.             | Produits tensoriels . . . . .   | 101        |
| 3.3.               | Une représentation de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sur la chaîne XXZ . . . . .                 | 106        |
| 3.3.1.             | Définition de la représentation . . . . .   | 107        |
| 3.3.2.             | Morphismes entre espaces propres . . . . .  | 111        |
| 3.3.3.             | Noyaux et longues suites exactes . . . . .  | 116        |
| <b>Chapitre 4.</b> | <b>Structure des modules <math>\mathbb{C}_N(q, v, d)</math> sur l'ensemble critique . . . . .</b> | <b>121</b> |
| 4.1.               | Cas spéciaux . . . . .  | 121        |
| 4.1.1.             | Cas semisimple . . . . .  | 121        |
| 4.1.2.             | Premier cas linéaire . . . . .  | 123        |
| 4.1.3.             | Second cas linéaire . . . . .   | 126        |
| 4.2.               | Cas tressé . . . . .  | 127        |
| 4.2.1.             | Démonstration du résultat . . . . .   | 127        |
| 4.2.2.             | Corollaires directs . . . . .   | 133        |
| <b>Conclusion</b>  | . . . . .   | <b>135</b> |

|  |     |
|--|-----|
| Références bibliographiques .....  | 137 |
| Annexe A. Le cas $q^2 = 1$ .....   | 139 |
| Annexe B. Algèbres de Hopf. ....   | 143 |
| Annexe C. Le groupe quantique restreint $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ ..... | 147 |
| Annexe D. Exemple de décomposition de Clebsch-Gordan généralisée ....          | 149 |
| Annexe E. Algèbres de blob $\text{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .....       | 151 |



# Liste des figures

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Des exemples de $(5, 5)$ -diagrammes sans lacet.....  | 30 |
| 1.2  | Des exemples de $(6, 2)$ -diagrammes. Le diagramme (d) possède un lacet. ....   | 30 |
| 1.3  | (a) Produit de deux $(6, 6)$ -diagrammes; (b) Produit d'un $(6, 8)$ -diagramme avec un $(8, 4)$ -diagramme. Les boucles centrales contractiles sont indiquées avec un trait foncé.....  | 31 |
| 1.4  | Description explicite de l'isomorphisme entre $\text{TL}_N^a(\beta)$ et $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$ .....   | 31 |
| 1.5  | Image d'un $(6, 6)$ -diagramme sous l'anti-involution $\dagger$ .....   | 32 |
| 1.6  | Forme diagrammatique des générateurs de $\text{TL}_0^a(\beta)$ et $\text{TL}_1^a(\beta)$ .....  | 32 |
| 1.7  | Forme diagrammatique des générateurs de $\text{TL}_2^a(\beta)$ .....  | 32 |
| 1.8  | Exemples de l'action de $\text{TL}_6^a(\beta)$ sur $B_{6,2}^W(q,z)$ .....   | 34 |
| 1.9  | La base $B_{5,1}^W(q,z)$ . Sur la première ligne, on a, de gauche à droite, les diagrammes $w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}$ et $w_{23}$ tandis que, sur la seconde, on a plutôt $w_{24}, w_{25}, w_{34}, w_{35}$ et $w_{45}$ .....  | 35 |
| 1.10 | Exemple de l'action de $\Omega^6$ sur $B_{6,2}^W(q,z)$ .....  | 35 |
| 1.11 | Exemple de calcul relatif à la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle_{d;z}$ pour $(N, d) = (6, 0)$ .....   | 35 |
| 1.12 | Les ensembles $B_4^2(q,v)$ (haut) et $B_{4,2}^W(q,z)$ (bas).....  | 37 |
| 1.13 | Exemple de l'action de $\text{TL}_8^a(\beta)$ sur $V_8^0(q,v)$ et $V_8^2(q,v)$ . Les boucles non contractiles associées au paramètre $\alpha = v^8 + v^{-8}$ sont indiquées à l'aide d'un trait foncé.....  | 38 |
| 1.14 | Les diagrammes de Loewy possibles pour un $\mathfrak{Wit}$ -module de Feigin-Fuchs (voir l'introduction) avec les facteurs de composition représentés par des cercles pleins (cf. [38]). Les différents cas présentés sont appelés : semisimple (a), linéaires (b,c) et tressé (d). Chacun des diagrammes de cette figure peut tronquer à droite à partir d'un facteur donné..... | 41 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.15 | Le diagramme de Loewy d'un $\mathfrak{Vir}$ -module de Feigin-Fuchs tressé avec les facteurs de composition à nouveau représentés par des cercles pleins. Dans cette figure, le diagramme de Loewy d'un sous-module est identifié à l'aide d'un trait rouge et celui du quotient associé avec un trait bleu. Ceux de la coiffe et du socle peuvent aussi être retrouvés respectivement comme les étages supérieur et inférieur du graphe présenté (qui correspond d'ailleurs à une version tronquée (à droite) d'un des diagrammes de la figure 1.14). . . . . | 42 |
| 1.16 | Organisation des successeurs de la paire $(d, z)$ sous $\preceq_q$ pour $q$ une racine de l'unité. Dans cette figure, certaines paires peuvent coïncider et une flèche verticale (ou diagonale) signifie que la succession est faite via la condition A (ou B, respectivement). . . . .  | 43 |
| 1.17 | Organisation des successeurs de $(d, z)$ sous $\preceq_q$ lorsque $q^2 = 1$ . . . . .  | 44 |
| 1.18 | Diagramme de Loewy de $W_{N,0;q}(q)$ avec $N \in 2\mathbb{N}$ et $q^2 = -1$ . Une flèche verticale (diagonale) indique que les paires reliées se succèdent sous $\preceq_q$ via la condition A (via la condition B, respectivement). Le diagramme présenté est équivalent à celui de la figure 1.16 après retrait des paires n'appartenant pas à $\Lambda^a(N)$ . . . . .  | 46 |
| 1.19 | Diagrammes de Loewy de : $W_{N,2;1}(q)$ (a) et $W_{N,2;-1}(q)$ (b). . . . .  | 46 |
| 1.20 | Diagramme de Loewy du sous-module de $W_{N,2;-1}(q)$ engendré par le facteur $L_{N,t;y}$ avec $t = N - 2m$ et $y = \lambda z_m$ . On retrouve la figure 1.19 si $\lambda$ est négatif avec $m = n - 1$ . . . . .   | 47 |
| 1.21 | La forme de l'élément $w_{1\dots r} \in W_{N,d;z}(q)$ . . . . .  | 48 |
| 1.22 | Produits effectués dans la démonstration de la proposition 1.20. Les sous-figures (a), (b) et (c) sont respectivement utilisées dans les cas 2, 3 et 4 de cette démonstration. . . . .   | 49 |
| 1.23 | Produit représenté dans la partie (b) de la figure 1.22 pour $(r, d) = (3, 4)$ . . . . .   | 49 |
| 2.1  | L'état $\nu_{1\dots r_t} \in B_N^t(q, y)$ et l'élément $ x_1\dots x_N\rangle \in B_{N,d}^C(q, v)$ considérés (si $r_t \neq 0$ ). . .   | 67 |
| 2.2  | L'état $\dot{w}_x \in B_N^d(q, v)$ . . . . .   | 68 |
| 2.3  | Le diagramme standard $\hat{w}_x$ . . . . .  | 70 |
| 2.4  | Organisation des successeurs de $(d, v^{-N})$ sous $\preceq_q$ dans les conditions considérées. Le sous-graphe associé au diagramme de Loewy du sous-module $\theta_{s,d;w,v}(N)$ , pour $(s, w^{-N})$ le successeur direct de $(d, v^{-N})$ via la condition A, est représenté avec des flèches rouges. . . . .   | 73 |
| 2.5  | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ sous les hypothèses de la proposition 2.13. . .  | 73 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 2.6  | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ dans le cas 1. ....   | 73  |
| 2.7  | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$ dans le cas 2. ....  | 74  |
| 2.8  | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ dans le cas 2. ....   | 74  |
| 2.9  | Diagramme de Loewy de $V_N^d(q, v)$ (gauche) et de $\text{PG}_N^d(q, v)$ (droite) dans le cas 3. ....   | 75  |
| 2.10 | Structure de $V_N^d(q, v^{-1})$ (gauche) et de $\text{PG}_N^d(q, v^{-1})$ (droite) dans le cas 3. ....  | 75  |
| 2.11 | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$ avec $q^2 = -1$ et $q = v^{-2}$ . ....  | 77  |
| 2.12 | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_2(q, v^{-1}, 0)$ avec $q^2 = -1$ et $q = v^{-2}$ . ....   | 77  |
| 3.1  | Foncteurs définis dans la section 3.1 et dans l'annexe C (avec l'algèbre $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ ). Ces foncteurs sont exacts. Par ailleurs, tous les objets de $\text{mod } \mathcal{U}$ sont semisimples et $\downarrow^{\mathcal{L}}$ ainsi que $\uparrow^{\mathcal{L}}$ préservent respectivement l'injectivité et la projectivité des modules. .... | 85  |
| 3.2  | Diagramme de Loewy de $P_q(i)$ pour $s \neq p$ avec $i_2 = i - 2s$ . Dans cette figure, on doit retirer le facteur $L_q(i_2)$ lorsque $i_2 < 0$ et les filtrations $0 \subseteq \Delta_q(j) \subseteq P_q(i)$ ainsi que $0 \subseteq \nabla_q(i) \subseteq P_q(i)$ sont respectivement représentées à l'aide de flèches bleues et rouges. ....                    | 94  |
| 4.1  | Structure de $V_N^d(q, v)$ lorsque $q^d = v^{2N}$ et $v^{4N} = 1$ . ....  | 122 |
| 4.2  | Structure de $V_N^d(q, v)$ si $q^d = v^{-2N}$ et $v^{4N} \neq 1$ . Dans cette figure, $(t, y) = (i_0, x_0)$ et le sous-module de $V_N^d(q, v)$ isomorphe à $V_N^{d+2p}(q, w)$ (avec $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^{-N} = zq^p$ ) ainsi que $\text{PG}_N^d(q, v)$ peuvent respectivement être identifiés à l'aide des flèches rouges et bleues. ....               | 123 |
| 4.3  | Diagramme de Loewy du module $V_N^t(q^{-1}, x^{-1})$ dans les conditions considérées. ...   | 123 |
| 4.4  | Structure de l'espace propre $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ lorsque $q^d = v^{-2N}$ et $v^{4N} \neq 1$ . ....  | 124 |
| 4.5  | Structure de $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$ dans les conditions considérées. ....   | 124 |
| 4.6  | Structure de $\mathbb{C}_N(q^{-1}, x^{-1}, t)$ dans les conditions considérées. ....  | 125 |
| 4.7  | Structure de $M \simeq \mathbb{C}_N^*(q^{-1}, x^{-1}, t)$ dans les conditions considérées. ....   | 125 |
| 4.8  | Structure de $\text{PG}_N^d(q, v)$ dans les conditions considérées. ....  | 125 |
| 4.9  | Diagramme de Loewy partiel pour $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ dans les conditions considérées. ...  | 125 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.10 | Structure de $V_N^d(q, v)$ si $q^d = v^{2N}$ et $v^{4N} \neq 1$ avec $(s, w) = (j_0, y_0)$ .....   | 126 |
| 4.11 | Structure de l'espace propre $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ lorsque $q^d = v^{2N}$ et $v^{4N} \neq 1$ .....   | 126 |
| 4.12 | Structure de $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$ dans les conditions considérées.....   | 126 |
| 4.13 | (a) Diagramme de Loewy de $V_N^d(q, v_z)$ ; (b) Diagramme de Loewy de $V_N^d(q, v_z^{-1})$ . Dans cette figure, il n'y a aucune coïncidence de paires et on doit retirer les facteurs hors de $\Lambda^a(N)$ . On identifie aussi les quotients $\text{PG}_N^d(q, v_z)$ et $\text{PG}_N^d(q, v_z^{-1})$ à l'aide de flèches rouges. ....         | 128 |
| 4.14 | (a) Diagramme de Loewy de $V_N^t(q, v_y)$ ; (b) Diagramme de Loewy de $V_N^t(q^{-1}, v_y)$ . Il n'y a aucune coïncidence de paires et on doit retirer les facteurs hors de $\Lambda^a(N)$ .....  | 128 |
| 4.15 | Diagramme de Loewy impossible dans $\text{mod TL}_N^a(\beta)$ .....  | 129 |
| 4.16 | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ pour $v_z^{-2N} \neq q^d \neq v_z^{2N}$ et avec la notation du début de la sous-section. Dans cette figure, les paires hors de $\Lambda^a(N)$ doivent être ôtées et $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z)$ ainsi que $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z)$ sont respectivement identifiés en bleu et en rouge..... | 129 |
| 4.17 | Diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v_y, t)$ avec $\text{Im } f_{d+2p,t}(q, v_y) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$ identifié en rouge et où on doit retirer les paires hors de $\Lambda^a(N)$ .....  | 130 |
| 4.18 | Structure de $\mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$ avec $\text{Im } [\eta_N(q^{-1}, v_y) \circ f_{h,t}(q^{-1}, v_y)] \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$ identifié en bleu et où on doit retirer les paires hors de $\Lambda^a(N)$ .....  | 130 |
| 4.19 | Diagramme de Loewy (complet) pour l'image $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ dans lequel on retire les paires n'appartenant pas à l'ensemble $\Lambda^a(N)$ .....  | 130 |
| 4.20 | Diagramme de Loewy (complet) pour l'image $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ dans lequel on retire les paires n'appartenant pas à l'ensemble $\Lambda^a(N)$ .....   | 130 |
| 4.21 | Structure de la partie générique $\text{PG}_N^d(q, v_z)$ dans les conditions considérées. ....   | 131 |
| 4.22 | Diagramme de Loewy (complet) d'un premier sous-module du module dual $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$ dans lequel on doit retirer les paires hors de $\Lambda^a(N)$ ..  | 131 |
| 4.23 | Diagramme de Loewy (complet) d'un second sous-module du module dual $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$ dans lequel on doit retirer les paires hors de $\Lambda^a(N)$ ..   | 131 |
| 4.24 | Structure de la partie générique $\text{PG}_N^d(q, v_z^{-1})$ dans les conditions considérées. ....  | 131 |
| 4.25 | Diagramme de Loewy (complet) d'un premier quotient de $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . Dans cette figure, on doit retirer les paires n'appartenant pas à $\Lambda^a(N)$ .....   | 132 |



|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.26 | Diagramme de Loewy (complet) d'un second quotient de $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . Dans cette figure, on doit retirer les paires n'appartenant pas à $\Lambda^a(N)$ .....   | 132 |
| 4.27 | Une flèche du diagramme de Loewy de $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ .....   | 132 |
| 4.28 | Diagramme de Loewy de l'espace propre $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ avec possiblement des flèches manquantes et où on doit retirer les paires hors de $\Lambda^a(N)$ . Les traits rouges et bleus servent respectivement à identifier un sous-module et un quotient de cet espace propre. ....  | 132 |
| 4.29 | Comparaison entre les diagrammes de Loewy du module $V_N^d(q, v_z)$ et de l'espace $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ lorsque $v_z^{2N} \neq q^d \neq v_z^{-2N}$ . Dans cette figure, on utilise la notation de la section 4.2.1 et il est nécessaire de retirer des diagrammes les paires hors de l'ensemble $\Lambda^a(N)$ . Les flèches changeant d'orientation d'un diagramme à l'autre sont identifiées en rouge.....   | 133 |
| D.1  | Décomposition de $(L_q(1))^{\otimes cN}$ pour $0 \leq N \leq 19$ avec $p = 5$ . Dans cette figure, la multiplicité d'un facteur au sein de $(L_q(1))^{\otimes cN}$ (pour un $N$ fixé) peut être lue sur les flèches ayant pour origine ce facteur sur la ligne associée à $N$ . Ce nombre correspondra toujours à la somme des entiers apparaissant sur les flèches aboutissant au facteur en question (sur la ligne associée à $N$ ) avec un poids double pour les flèches rouges. Par exemple, la ligne 19 indique que la multiplicité de $L_q(4)$ dans $(L_q(1))^{\otimes c18}$ est de $13260 = 2(6085) + 987 + 103$ ..... | 149 |
| E.1  | L'opérateur d'arceau $Y$ de $\text{TL}_N^a(\beta)$ .....  | 151 |
| E.2  | La signification des tresses dans $\text{TL}_N^a(\beta)$ .....  | 151 |



# Table de notation

---

On consigne en ces pages quelques notations utilisées abondamment dans le corps du mémoire qui ne sont pas tout à fait standards dans la littérature mathématique. Ces notations sont en général définies adéquatement au fil du mémoire et leur signification peut varier selon le contexte dans lequel elles sont utilisées.

- $\mathbb{N}$  et  $\text{id}$  : ensemble des entiers strictement positifs et opérateur ou application identité;
- $\equiv_n$  : relation d'équivalence modulo  $n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $\text{TL}_N^a(\beta)$  : algèbres de Temperley-Lieb affines avec  $\beta = -(q + q^{-1})$  (voir section 1.1);
- $\text{TL}_N(\beta)$  : algèbres de Temperley-Lieb régulières (voir section 1.1);
- $\mathfrak{Vir}$  : algèbre de Virasoro (voir introduction);
- $\text{Mod } A$  ou  $\text{mod } A$  : catégories des  $A$ -modules à gauche de dimension arbitraire ou finie;
- $\text{rad } M$ ,  $\text{top } M$  et  $\text{soc } M$  : radical de Jacobson, coiffe et socle d'un  $A$ -module  $M$ ;
- $[x]_q$ ,  $[x]_q!$  et  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q$  :  $q$ -nombre,  $q$ -factoriel et coefficient  $q$ -binomial;
- $\text{Ext}_A^1(M, N)$  : Groupe d'extension de  $N$  par  $M$  contenant (à équivalence près) l'ensemble des suites exactes courtes de  $\text{Mod } A$  de la forme

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0;$$

- $|\mu|$  ou  $|A|$  : rang du  $(m, n)$ -diagramme ou de l'état à  $(N, d)$ -liens  $\mu$  (voir section 1.2) ou encore cardinalité de l'ensemble  $A$ ;
- $\dagger$  : anti-involution de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  (voir section 1.1);
- $\Lambda^a$  et  $\Lambda^a(N)$  : ensembles définis dans la section 1.2;
- $W_{N,d;z}(q)$  et  $V_N^d(q, v)$  :  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires (voir section 1.2);
- $B_{N,d}^W(q, z)$  et  $B_N^d(q, v)$  :  $\mathbb{C}$ -bases de  $W_{N,d;z}(q)$  et  $V_N^d(q, v)$  (voir section 1.2);
- $w_{i_1 \dots i_r}$  et  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  : vecteurs de  $B_{N,d}^W(q, z)$  et  $B_N^d(q, v)$  où  $r = \frac{1}{2}(N - d)$  (voir section 1.2);
- $\text{beg}$  et  $\psi$  : applications définies dans la section 1.2;
- $\zeta_\nu$  : somme des positions des défauts de l'état  $\nu$  (voir section 1.2);
- $\varphi_{N,d}(v)$  : isomorphisme de  $V_N^d(q, v)$  sur  $W_{N,d;z}(q)$  pour  $z = v^{-N}$  (voir section 1.2);
- $\chi_{d,z}$  et  $\langle -, - \rangle_{d,z}$  : morphisme d'algèbres et forme bilinéaire de la section 1.2;
- $\mathcal{R}_{N,d;z}$  : radical de la forme  $\langle -, - \rangle_{d,z}$  (voir section 1.2);

- $L_{N,d;z}$  : quotient de  $W_{N,d;z}(q)$  par  $\mathcal{R}_{N,d;z}$  (voir section 1.2);
- $\preceq_q$  : ordre partiel défini dans la section 1.3;
- $\theta_{t,d;y,z}(N)$  et  $\widehat{\theta}_{t,d;v_2,v_1}(N)$  : monomorphismes de la section 1.3;
- $h_{P(\mu)}(q)$  : fonction rationnelle sous-jacente à l'inclusion  $\theta_{t,d;y,z}(N)$  (voir section 1.3);
- $t^{\pm 1}$  et  $S^z$  : opérateurs de translation et de spin (voir section 2.1)
- $\mathbb{C}_N(q, v)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  : chaîne XXZ périodique (vue comme  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module) et espace propre de  $S^z$  de valeur propre  $d$  dans  $\mathbb{C}_N(q, v)$  (voir section 2.1);
- $B_N^C(q, v)$  et  $B_{N,d}^C(q, v)$  : bases de  $\mathbb{C}_N(q, v)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (voir section 2.1);
- $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  : élément de  $B_N^C(q, v)$  (voir section 2.1);
- $\eta_N(q, v)$  et  $\eta_N(q, v, d)$  : retournement de spin et restriction du retournement  $\eta_N(q, v)$  à l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (voir section 2.2);
- $M^*$  : dual du  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module par rapport à l'involution  $\dagger$  (voir section 2.3);
- $i_N^d(q, v)$  et  $\mathfrak{A}_{q,v}$  : morphisme d'entrelacement et ensemble critique de la section 2.4;
- $\mathrm{PG}_N^d(q, v)$  : partie générique du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$  (voir section 2.4);
- $\mathcal{A}$  : anneau  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  (voir section 3.1);
- $U_q \mathfrak{sl}_2$  et  $U_t \mathfrak{sl}_2$  : groupe quantique associé à  $\mathfrak{sl}_2$  et forme rationnelle (voir section 3.1);
- $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$  et  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  : forme intégrale de  $U_t \mathfrak{sl}_2$  et extension de Lusztig (voir section 3.1);
- $U \mathfrak{sl}_2$  et  $\mathcal{U}$  : algèbre universelle enveloppante de  $\mathfrak{sl}_2$  et sous-algèbre de la section 3.1;
- $\mathcal{B}_{\mathrm{PBW}}$  : base à la Poincaré Birkhoff-Witt pour  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  (voir section 3.1);
- $\Phi_n(t)$  :  $n$ -ième polynôme cyclotomique;
- $\Delta$  et  $\Delta_n$  : coproduit et coproduit généralisé de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  (voir section 3.1);
- $M \otimes^c N$  : produit tensoriel des  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules  $M$  et  $N$  sur lequel l'action est définie via le coproduit  $\Delta$  (voir section 3.1);
- $H$  : générateur déroulé de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  (voir section 3.1);
- $L_q(i)$  et  $\mathcal{X}_{s,r}$  :  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules simples (voir section 3.2);
- $\Delta_q(i)$  et  $P_q(i)$  :  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules de Weyl et  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules projectifs-injectifs indécomposables (voir section 3.2);
- $\tau_{q^{-1}}(v)$  et  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  : bijections  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -linéaires (voir section 3.3 et annexe A);
- $(S^{\pm})_{v, q^{-1}}^{(n)}$  : opérateurs représentant l'action des puissances divisées  $E^{(n)}$  et  $F^{(n)}$  sur l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  via l'isomorphisme  $\tau_{q^{-1}}(v)$  (voir section 3.3 et annexe A);
- $f_{t,d}(q^{-1}, v_z)$  et  $g_{-t,d}(q^{-1}, v_z)$  : applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires définis au cours de la section 3.3 et de l'annexe A (pour  $q^2 = 1$ );
- $\mathrm{Tlb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  : algèbre de blob (voir conclusion);
- $Y$  : élément central de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  définissant  $\mathrm{Tlb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  (voir conclusion);
- $L(n)$  : représentation simple de  $U \mathfrak{sl}_2$  de dimension  $n$  (voir annexe A).

À Tommy,

*Tout en lui était vieux, sauf les yeux -  
et ils étaient de la même couleur que  
la mer, joyeux et invincibles.*



## Remerciements

---

J'aimerais profiter de cet emplacement pour faire part de ma reconnaissance à quelques personnes directement reliées à la complétion de ce mémoire et à ma volonté de poursuivre une carrière académique en mathématiques. Naturellement, j'aimerais remercier en premier lieu mon superviseur, Yvan Saint-Aubin, pour son soutien indéfectible, son intuition hors-pair et notre complicité qui ont su rendre mon parcours à la maîtrise aussi stimulant qu'agréable. Je suis infiniment heureux d'avoir pu croiser ta route physico-mathématique et je te suis très reconnaissant de m'avoir appris tant de choses sur l'algèbre, la musique et la vie. Dans ce même ordre d'idée, j'aimerais aussi remercier Patrick Desrosiers, le chef d'orchestre de ma rencontre avec Yvan et probablement le principal instigateur de ma passion pour les mathématiques, qui a toujours su m'éloigner assez du chemin de moindre action pour que se dessine devant moi la route de la connaissance. Merci également à Paul Fontaine, Alexis Leroux-Lapierre et Alexis Langlois-Rémillard pour votre écoute et vos commentaires précieux qui ont certainement contribué à ce que ce mémoire puisse un jour satisfaire à mes attentes. J'espère que nous demeurerons amis et que nous continuerons à collaborer sur nos projets scientifiques respectifs dans les années qui viennent.

Merci à mon comité évaluateur, Abraham Broer et Michael Lau, pour votre relecture attentive et vos commentaires constructifs. J'espère que vous avez apprécié lire ce mémoire autant que j'ai aimé l'écrire. Merci à Jonathan Belletête et Alexis Morin-Duchesne de m'avoir aidé à porter ce projet à terme au travers de discussions mathématiques intéressantes et de commentaires éclairants. Je suis particulièrement redevable à Jonathan de m'avoir transmis une copie de son article [7] (conjoint avec Gainutdinov, Jacobsen, Saleur et Tavares) à paraître. Merci aussi au Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FRQNT) et au Conseil de recherches en sciences naturelles et génie (CRSNG) pour leur financement généreux. Merci enfin à Anne-Sophie; pour ton soutien, ta tendresse et ton sourire. Merci d'être ma copine.





# Introduction

---

La théorie de la représentation est largement considérée comme l'une des branches les plus prolifiques des mathématiques fondamentales. Ce domaine a pour objectif la caractérisation concrète d'entités mathématiques abstraites via leur action sur certains espaces et admet ainsi naturellement, en raison de cet objectif, des applications physiques et mathématiques variées. En particulier, la théorie de la représentation des algèbres de Lie semisimples de dimension finie est aujourd'hui présentée comme étant un outil essentiel en mécanique quantique (cf. [11]), en physique des particules (cf. [34]) et en géométrie différentielle, algébrique et riemannienne (cf. [29], [44]). La recherche actuelle transcende cependant ces applications en étudiant notamment les représentations issues de certaines familles d'algèbres (associatives) non semisimples de dimension infinie. Ce mémoire s'inscrit dans ce contexte.

Un premier exemple important d'algèbre non semisimple de dimension infinie est donné par l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie de Virasoro  $\mathfrak{Vir}$ . Cette algèbre de Lie est engendrée par un élément central  $c$  (appelé *charge centrale*) et des éléments  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  avec

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m}{12}\delta_{m,-n}(m^2 - 1)c$$

pour chaque choix de  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Elle correspond à l'algèbre de symétrie des théories bi-dimensionnelles en théorie des champs conformes (cf. [16]) de sorte que sa théorie de la représentation admet un vaste éventail d'applications physiques. En particulier, certaines représentations remarquables de  $\mathfrak{Vir}$ , appelées modules de Verma, permettent de construire un grand nombre de modèles fondamentaux en mécanique statistique : les *modèles minimaux de Virasoro* (cf. [16], [38]). Les célèbres modèles d'Ising et de Potts (à trois états) en deux dimensions au point critique sont des exemples de modèles de Virasoro minimaux (cf. [16]).

Une seconde famille d'algèbres (généralement) non semisimples de dimension infinie possédant une grande importance physico-mathématique est celle des groupes quantiques. Ces objets sont apparus lors de l'étude par Drinfeld (cf. [13]) et Jimbo (cf. [25]) de certains systèmes intégrables quantiques afin de produire systématiquement des solutions aux équations de Yang-Baxter. Ils ont depuis gagné une importance énorme en théorie de la représentation

(cf. [10]), en géométrie non-commutative (cf. [33]) et en théorie des noeuds (cf. [26]) tout en favorisant l'émergence du concept de catégorie monoïdale tressée (cf. [3]). Une des raisons principales justifiant ce gain de notoriété est certainement donnée par le lien entre les groupes quantiques  $U_q\mathfrak{sl}_n$  et les algèbres de Hecke  $\mathcal{H}_q(A_N)$  (et donc le groupe de tresse) au travers de la *dualité de Schur-Weyl quantique* (cf. [25]) qui généralise la dualité de Schur-Weyl usuelle entre le groupe général linéaire  $GL_n(\mathbb{C})$  et l'algèbre du groupe symétrique  $S_N$ .

Dans ce mémoire, on s'intéressera surtout aux algèbres de Temperley-Lieb affines  $TL_N^a(\beta)$ . Ces algèbres, également non semisimples (en général) et de dimension infinie, sont grandement utilisées dans l'étude de modèles statistiques sur réseaux (comme le modèle de percolation, voir [37]) et possèdent une riche théorie de la représentation intrinsèquement liée à la théorie correspondante pour l'algèbre  $\mathfrak{Vir}$ . En particulier, dans une certaine limite, appelée *limite conforme* (ou *thermodynamique*), un élément des algèbres  $TL_N^a(\beta)$ , appelé *matrice de transfert à boucles*, décrirait conjecturalement (cf. [39]) une théorie des champs bidimensionnelle pour laquelle la charge centrale serait identifiée à l'opérateur  $\left(1 - \frac{6\lambda^2}{\pi(\lambda-\pi)}\right) \text{id}$  (avec  $\lambda \in [-\pi, \pi)$  tel que  $\beta = 2 \cos(\lambda)$ ). De même, dans [18], les auteurs étudient un quotient de dimension finie de  $TL_N^a(0)$  (pour  $N$  pair), appelé *algèbre de Jones-Temperley-Lieb*  $JTL_N$ , et trouvent une famille dénombrable de  $JTL_N$ -modules admettant une structure similaire à celle de certaines représentations remarquables de  $\mathfrak{Vir}$  : les  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs<sup>1</sup>. L'objectif de ce mémoire est semblable à ce dernier résultat, quoique plus audacieux.

En effet, ce mémoire étudie de manière détaillée les représentations  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  des algèbres  $TL_N^a(\beta)$  définies dans [35] et [40] sur les espaces propres des chaînes XXZ périodiques pour l'opérateur de spin total  $S^z$ . Le résultat principal obtenu au sein du mémoire est une caractérisation complète de la structure de ces représentations dans laquelle on obtient que les espaces  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  admettent toujours une structure similaire à celle des  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs et que toutes les possibilités pour la structure d'un tel  $\mathfrak{Vir}$ -module sont réalisées par un de ces espaces. On effectue aussi une analyse systématique des morphismes reliant entre eux les modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  en introduisant un grand nombre d'applications  $TL_N^a(\beta)$ -linéaires provenant naturellement d'une représentation de l'extension de Lusztig  $\mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  du groupe quantique  $U_q\mathfrak{sl}_2$  sur les chaînes XXZ. On obtient ainsi, d'une certaine façon, ces applications via une extension de la dualité de Schur-Weyl quantique mentionnée ci-dessus. Leur noyau et leur image sont contraints par de longues suites exactes de  $\text{mod } TL_N^a(\beta)$  et par une décomposition de Clebsch-Gordan généralisée. D'autres résultats importants présentés dans ce texte sont une réalisation explicite nouvelle pour les couvertures projectives dans  $\text{mod } \mathcal{LU}_q\mathfrak{sl}_2$  et la caractérisation de l'image du morphisme  $i_N^d(q, v)$  défini dans [40].

<sup>1</sup>De façon précise, les  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs ne sont pas des  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Verma, mais sont des modules de Verma pour la copie de l'algèbre d'Heisenberg contenue dans  $\mathfrak{Vir}$  (cf. [38]). Ils apparaissent naturellement dans la réalisation de  $\mathfrak{Vir}$  donnée par le modèle du gaz de Coulomb en champ libre.

Le corps du mémoire est organisé comme suit :

- Le chapitre 1 présente les algèbres de Temperley-Lieb affines  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  avec un aperçu de leur théorie de la représentation (étudiée en détail dans [22] par Graham et Lehrer). On y définit notamment les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires et on exhibe leur structure à l'aide de diagrammes de Loewy.
- Le chapitre 2 amorce l'étude des représentations des algèbres  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  des chaînes XXZ périodiques. En particulier, on rappelle dans ce chapitre la définition du morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v)$  de [39] et on caractérise partiellement l'image de cette application via le concept de partie générique.
- Le chapitre 3 introduit l'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  et étudie en profondeur sa théorie de la représentation en obtenant notamment une nouvelle réalisation explicite pour les  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -projectifs indécomposables. On définit également à cet endroit une représentation naturelle de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  sur les chaînes XXZ périodiques et on utilise cette représentation pour obtenir et caractériser un grand nombre d'applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires reliant différents espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ .
- Le chapitre 4 combine les résultats des chapitres précédents afin d'obtenir la caractérisation complète de la structure des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  comme  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules. On y obtient aussi l'image du morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v)$  et des applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires du chapitre 3.
- L'annexe A présente certaines propositions analogues à celles présentées dans le chapitre 3, mais pour les cas spécifiques exclus de l'analyse effectuée dans ce chapitre (c'est-à-dire  $q^2 = 1$  avec  $\beta = -(q + q^{-1})$  dans  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ ).
- L'annexe B rappelle quelques résultats standards relatifs aux algèbres de Hopf et utilisent ces résultats pour démontrer une adjonction fonctorielle très utile.
- L'annexe C permet de consigner certains résultats relatifs à une sous-algèbre remarquable de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . Ces résultats sont totalement indépendants du reste du mémoire.
- L'annexe D présente un exemple de décomposition de Clebsch-Gordan généralisée;
- L'annexe E présente rapidement les algèbres de blob  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  avec la démonstration d'un lemme énoncé dans le chapitre 4 quant aux groupes d'extension dans  $\mathrm{mod} \mathrm{TL}_N^a(\beta)$ . La preuve présentée est presque identique à celle donnée dans [7].

Les résultats originaux dignes de mention dans ce mémoire sont les propositions, corollaires et théorèmes : 1.19, 2.1, 2.5, 2.6, 2.12, 2.13, 3.19, 3.27, 3.28, 3.31, 3.32, 3.41, 3.43, 3.44, 3.45, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, 4.8 et A.1. Plusieurs résultats (possiblement) déjà publiés sont aussi présentés avec de nouvelles démonstrations. Notons enfin qu'une table de notation est fournie avant la dédicace du mémoire afin de faciliter la lecture des différents chapitres.



# Chapitre 1

---

## Les algèbres de Temperley-Lieb affines

Ce chapitre est consacré à l'introduction des algèbres de Temperley-Lieb affines  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ . Celles-ci correspondent à une généralisation de dimension infinie des algèbres de Temperley-Lieb régulières  $\mathrm{TL}_N(\beta)$  et possèdent une riche théorie de la représentation telle qu'étudiée dans [15], [22] et [28]. En particulier, la généralisation naturelle au cas de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  de certains  $\mathrm{TL}_N(\beta)$ -modules (dits *cellulaires*) produit des représentations de dimension finie permettant de caractériser, via une forme bilinéaire remarquable, tous les objets irréductibles de  $\mathrm{mod} \mathrm{TL}_N^a(\beta)$ . Les résultats obtenus dans [22] sur la structure de ces  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires correspondent à des outils fondamentaux du point de vue de ce projet.

Dans la section 1.1, on définit les algèbres  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  à l'aide de générateurs et relations ainsi qu'à partir d'une présentation diagrammatique inspirée de celle de  $\mathrm{TL}_N(\beta)$ . On introduit ensuite, dans la section suivante, deux définitions équivalentes pour les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires. Finalement, dans la section 1.3, on utilise la notion de diagramme de Loewy pour expliciter les résultats présentés dans [22] par rapport à la structure de ces modules cellulaires et quant à la théorie de la représentation de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  en général.

### 1.1. Généraliser les algèbres de Temperley-Lieb

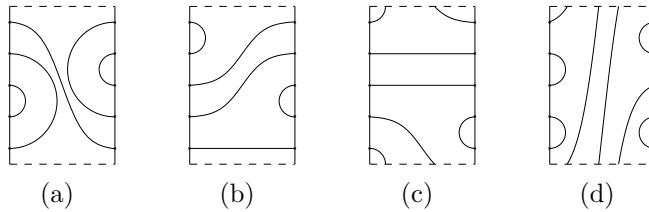
Soient  $N \geq 3$  un entier et  $\beta \in \mathbb{C}$ . L'algèbre de Temperley-Lieb affine  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  est la  $\mathbb{C}$ -algèbre de générateurs  $\{e_i\}_{i=1}^N \cup \{\Omega, \Omega^{-1}, \mathrm{id}\}$  satisfaisant, avec les indices pris modulo  $N$ , les relations

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \beta e_i, & e_i e_j &= e_j e_i \text{ si } |i - j| > 1, & e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i, \\ \Omega e_i \Omega^{-1} &= e_{i-1}, & \Omega \Omega^{-1} &= \Omega^{-1} \Omega = \mathrm{id}, & (\Omega^{\pm 1} e_N)^{N-1} &= \Omega^{\pm N} (\Omega^{\pm 1} e_N). \end{aligned}$$

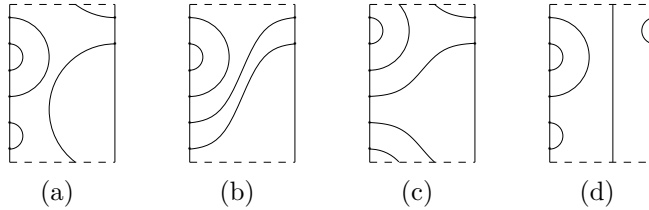
Elle a été introduite dans [22] par Graham et Lehrer via la notion de catégories de Temperley-Lieb, puis a été étudiée abondamment par Martin et Saleur (cf. [35]) ainsi que Green, Fan et Erdmann (cf. [14], [15], [23]). Il s'agit d'une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension infinie puisqu'elle

contient la sous-algèbre  $\langle \Omega, \Omega^{-1} \rangle \simeq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ . Elle contient aussi l'algèbre de Temperley-Lieb régulière  $\text{TL}_N(\beta) = \langle \text{id}, e_1, \dots, e_{N-1} \rangle$  et la sous-algèbre  $\widehat{\text{TL}}_N(\beta) = \langle \text{id}, e_1, \dots, e_N \rangle$  qui est isomorphe à un quotient de l'algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}^a(\widehat{A}_{N-1})$ . Il est intéressant de noter que, jusqu'à l'ajout des générateurs  $\Omega^{\pm 1}$  (dits de *torsion*) par Graham et Lehrer, on appelait en fait *algèbre de Temperley-Lieb affine* cette sous-algèbre  $\widehat{\text{TL}}_N(\beta)$  (cf. [14], [35]). Cependant, depuis cet ajout, on considère davantage l'algèbre  $\text{TL}_N^a(\beta)$  dans la littérature étant donné qu'elle admet une présentation diagrammatique simple permettant de retrouver celle apparaissant dans [43] pour  $\text{TL}_N(\beta)$ .

**Définition 1.1** ( $(m, n)$ -diagramme). Soient  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $m \equiv_2 n$ . Un  $(m, n)$ -diagramme est un diagramme rectangulaire admettant respectivement  $m$  et  $n$  points équidistribués sur ses côtés verticaux gauche et droit avec ces points reliés deux à deux par des segments demeurant au sein du diagramme et ne s'intersectant pas. Le rectangle correspondant est identifié à une section de cylindre de sorte qu'il est possible pour un des segments de traverser un côté horizontal afin de réapparaître au niveau du côté opposé. On appelle frontières imaginaires les côtés horizontaux d'un  $(m, n)$ -diagramme et on identifie visuellement ces frontières à l'aide de lignes pointillées. Un nombre arbitraire de lacets (c.à.d. de segments reliant les deux frontières imaginaires et aucun point des côtés verticaux) peut aussi être ajouté à un  $(m, n)$ -diagramme tant que cet ajout se fait sans la création d'intersection de segments. On ne distingue enfin pas les diagrammes équivalents à isotopie de segments près.



**Fig. 1.1.** Des exemples de  $(5, 5)$ -diagrammes sans lacet.

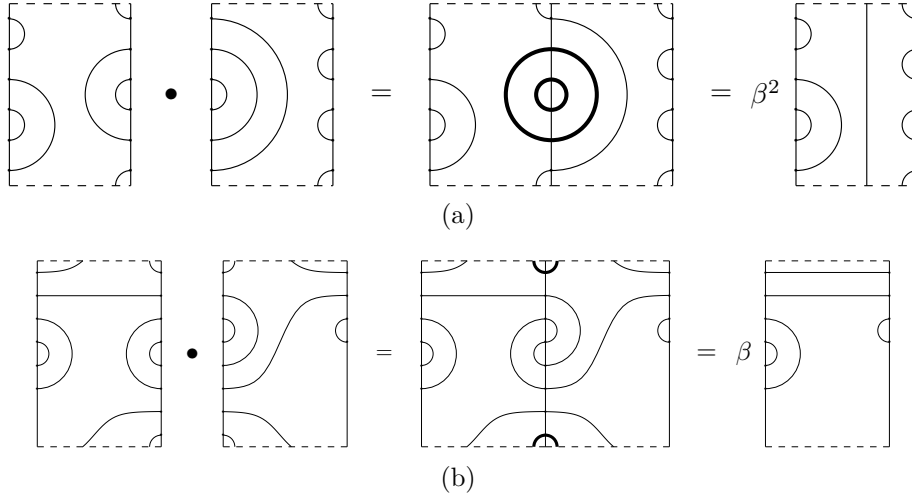


**Fig. 1.2.** Des exemples de  $(6, 2)$ -diagrammes. Le diagramme (d) possède un lacet.

Un segment joignant les côtés verticaux d'un diagramme est appelé ligne passante. On note d'ailleurs  $D_{m,n}$  l'ensemble des  $(m, n)$ -diagrammes et on définit le rang d'un élément  $\mu$  de  $D_{m,n}$  comme le nombre minimal de fois (parmi tous les diagrammes équivalents à  $\mu$  à isotopie de segments près) que sa frontière imaginaire supérieure (ou inférieure) est traversée.

Par exemple, les  $(5, 5)$ -diagrammes présentés dans la figure 1.1 ont respectivement un rang de 0, 0, 2 et 3. La possibilité d'avoir un nombre arbitraire de lacets dans un  $(m, n)$ -diagramme ou de faire passer un nombre quelconque de fois une des lignes passantes d'un tel diagramme par sa frontière imaginaire sans créer d'intersection force  $|D_{m,n}| = \infty$ .

Soient  $\ell, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  de même parité avec  $\mu_1 \in D_{\ell,m}$  et  $\mu_2 \in D_{m,n}$ . On définit le produit  $\mu_1 \bullet \mu_2$  comme le diagramme obtenu en concaténant  $\mu_1$  à gauche de  $\mu_2$  et en oubliant le côté vertical commun aux deux rectangles dans la concaténation. Pour que  $\mu_1 \bullet \mu_2$  soit un élément de  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{\ell,n})$ , on remplace aussi toutes les boucles centrales contractiles créées lors de cette concaténation par un facteur multiplicatif  $\beta$ .

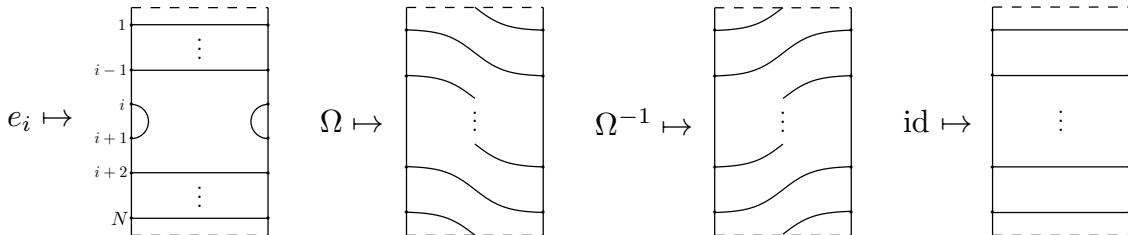


**Fig. 1.3.** (a) Produit de deux  $(6, 6)$ -diagrammes; (b) Produit d'un  $(6, 8)$ -diagramme avec un  $(8, 4)$ -diagramme. Les boucles centrales contractiles sont indiquées avec un trait foncé.

Ce produit de diagrammes  $\bullet$  est étendu  $\mathbb{C}$ -linéairement et permet en particulier de donner une structure d'algèbre à l'espace vectoriel  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$  pour  $N \geq 0$ .

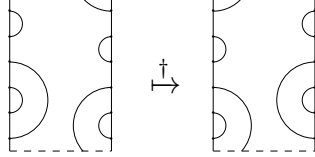
**Proposition 1.2** ([23]). Soit  $N \geq 3$ . Les algèbres  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$  et  $\text{TL}_N^a(\beta)$  sont isomorphes.

La forme explicite de cet isomorphisme sur l'ensemble générateur  $\{e_i\}_{i=1}^N \cup \{\Omega, \Omega^{-1}, \text{id}\}$  de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  est donnée dans la figure 1.4 ci-dessous.



**Fig. 1.4.** Description explicite de l'isomorphisme entre  $\text{TL}_N^a(\beta)$  et  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$ .

Cette correspondance permet de redéfinir l'algèbre de Temperley-Lieb régulière  $\text{TL}_N(\beta)$  comme la sous-algèbre de  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$  ne contenant que des diagrammes de rang nul (cf. [6], [22]) et généralise donc la réalisation diagrammatique de  $\text{TL}_N(\beta)$  considérée dans [43]. Elle permet aussi d'introduire naturellement une anti-involution  $\dagger : \text{TL}_N^a(\beta) \rightarrow (\text{TL}_N^a(\beta))^{\text{op}}$  définie sur  $D_{N,N}$  en envoyant un diagramme  $\mu$  à l'élément  $\mu^\dagger \in D_{N,N}$  obtenu en faisant subir à  $\mu$  une réflexion par rapport à un axe vertical central. La généralisation naturelle de cette anti-involution produit une application linéaire  $\dagger : \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{m,n}) \rightarrow \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{n,m})$ .

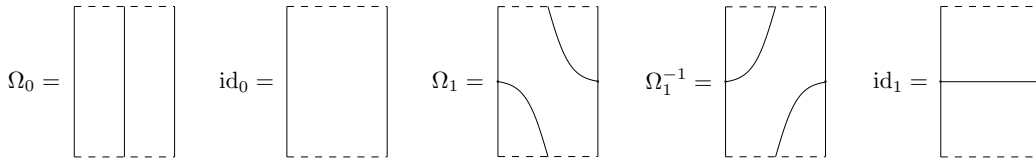


**Fig. 1.5.** Image d'un (6, 6)-diagramme sous l'anti-involution  $\dagger$ .

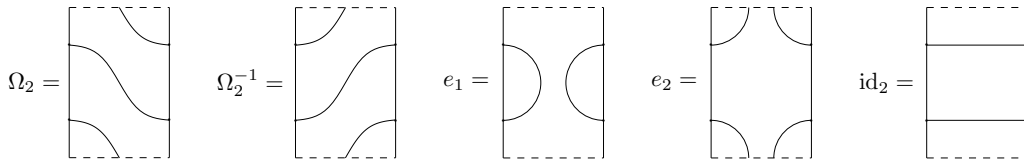
On étudiera plus en détail l'effet de l'existence de l'application  $\dagger$  sur la théorie de la représentation de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  lors de la section 2.3.2. Pour l'instant, on passe à la section suivante dans laquelle on définit certains  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules remarquables, appelés *modules cellulaires* (ou standards). Pour cette section et la suite du mémoire, on évitera d'écrire le symbole  $\bullet$  pour désigner le produit défini à la page précédente et on notera plutôt  $\mu_1\mu_2$  la multiplication de  $\mu_1 \in \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{\ell,m})$  et  $\mu_2 \in \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{m,n})$  pour certains  $\ell, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  de même parité. On notera aussi  $\text{TL}_0^a(\beta)$ ,  $\text{TL}_1^a(\beta)$  et  $\text{TL}_2^a(\beta)$  les  $\mathbb{C}$ -algèbres engendrées respectivement par  $\{\Omega_0, \text{id}_0\}$ ,  $\{\Omega_1, \Omega_1^{-1}, \text{id}_1\}$  et  $\{e_1, e_2, \Omega_2^{\pm 1}, \text{id}_2\}$  avec les relations  $\Omega_1^{\pm 1}\Omega_1^{\mp 1} = \text{id}_1$  et

$$\Omega_2^{\pm 1}\Omega_2^{\mp 1} = \text{id}_2, \quad e_1^2 = \beta e_1, \quad \Omega_2^{\pm 1}e_2\Omega_2^{\mp 1} = e_1 = e_1\Omega_2^{\pm 2} = \Omega_2^{\pm 2}e_1.$$

Avec cette définition, l'isomorphisme de la proposition 1.2 peut être étendu à tous les entiers non négatifs via la correspondance donnée dans les figures suivantes pour  $N \leq 2$  (cf. [6]).



**Fig. 1.6.** Forme diagrammatique des générateurs de  $\text{TL}_0^a(\beta)$  et  $\text{TL}_1^a(\beta)$ .



**Fig. 1.7.** Forme diagrammatique des générateurs de  $\text{TL}_2^a(\beta)$ .



## 1.2. Théorie de la représentation et modules cellulaires

Après sa description dans [21] par Graham et Lehrer, le concept d'algèbre cellulaire s'est rapidement imposé comme une notion fondamentale en théorie de la représentation (cf. [19], [24], [46]). Par définition, une telle algèbre  $A$  est de dimension finie et vient avec la donnée d'une base particulière qui permet l'introduction d'une famille de modules, appelés modules cellulaires. Ces modules sont munis d'une forme bilinéaire et permettent notamment de caractériser, à l'aide de cette forme, toutes les représentations simples de  $A$ . Un exemple d'algèbre cellulaire est donné par les algèbres de Temperley-Lieb régulières  $\text{TL}_N(\beta)$ .

Contrairement à leurs analogues de dimension finie, les algèbres de Temperley-Lieb affines  $\text{TL}_N^a(\beta)$  ne sont pas cellulaires, mais correspondent à une instance spécifique d'*algèbres cellulaires affines* telles que définies par Koenig et Xi dans [28]. Leur théorie de la représentation ressemble à celle des algèbres  $\text{TL}_N(\beta)$  et il est en particulier encore possible de définir des  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires permettant de construire tous les irréductibles de  $\text{mod } \text{TL}_N^a(\beta)$ . Dans cette section, on introduit ces modules dans le cas d'une algèbre  $\text{TL}_N^a(\beta)$  fixée (identifiée à  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,N})$  via la correspondance décrite dans les figures 1.4, 1.6 et 1.7) avec  $\beta = -(q + q^{-1})$  pour un certain  $q \in \mathbb{C}$  non nul.

### 1.2.1. Première version : les modules $W_{N,d;z}(q)$

Définissons  $\Lambda^a$  comme le quotient de l'ensemble  $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{C}^\times$  par la relation d'équivalence la plus faible telle que  $(0, z) \sim (0, z^{-1})$  pour  $z \in \mathbb{C}^\times$ . Choisissons aussi une paire  $(d, z) \in \Lambda^a$  et remarquons que le produit  $\bullet$  de la section précédente permet à l'espace vectoriel  $\text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,d})$  d'hériter d'une structure de  $(\text{TL}_N^a(\beta), \text{TL}_d^a(\beta))$ -bimodule. Pour cette structure, l'espace vectoriel  $M_{N,d} \subseteq \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,d})$  engendré par les  $(N, d)$ -diagrammes possédant strictement moins de  $d$  lignes passantes est un sous-bimodule (cf. [6]) et on définit

$$W_{N,d} = \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,d})/M_{N,d}.$$

Notons  $\Omega_d$  et  $\text{id}_d$  le générateur de torsion et l'identité de  $\text{TL}_d^a(\beta)$  lors de leur action à droite sur  $W_{N,d}$  et posons  $\Omega_d^0 = \text{id}_d$ . Dans [22], les auteurs introduisent un morphisme d'algèbres  $\chi_{d,z} : \text{TL}_d^a(\beta) \rightarrow \mathbb{C}$  défini sur  $D_{d,d}$  par

$$\chi_{d,z}(\mu) = \begin{cases} z^{-j} & \text{si } \mu = \Omega_d^j \text{ avec } d > 0 \text{ et } j \in \mathbb{Z}, \\ (z + z^{-1})^j & \text{si } \mu = \Omega_0^j \text{ avec } d = 0 \text{ et } j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons le sous-module  $V_z \subseteq W_{N,d}$  engendré par l'ensemble

$$\{\mu(\Omega_d - \chi_{d,z}(\Omega_d)\text{id}_d) \mid \mu \in W_{N,d}\}.$$

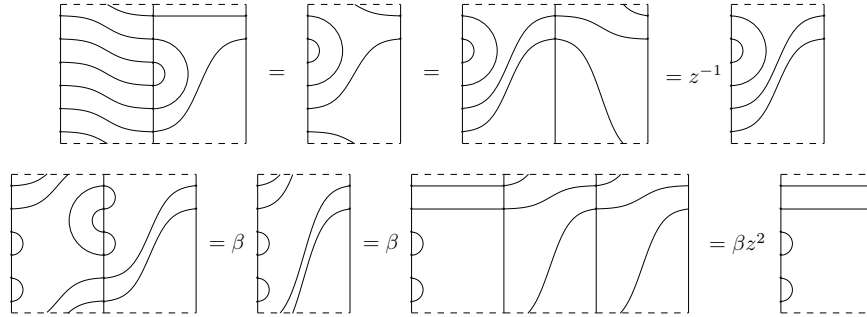
Alors, on définit le  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module cellulaire<sup>1</sup>  $W_{N,d;z}(q)$  comme le quotient

$$W_{N,d;z}(q) = W_{N,d}/V_z.$$

Une  $\mathbb{C}$ -base de  $W_{N,d;z}(q)$  est l'ensemble  $B_{N,d}^W(q,z)$  des  $(N,d)$ -diagrammes standards (cf. [22])<sup>2</sup>.

**Définition 1.3** (Diagramme standard). Un  $(N,d)$ -diagramme standard est un diagramme sans lacet avec  $d$  lignes passantes qui ne traversent pas sa frontière imaginaire.

En particulier, parmi les  $(6,2)$ -diagrammes donnés dans la figure 1.2, seul le second est standard. De plus,  $W_{N,d;z}(q) = 0$  si  $N < d$  ou  $d \not\equiv_2 N$  puisqu'il est alors impossible pour un  $(N,d)$ -diagramme d'admettre  $d$  lignes passantes. Des exemples de l'action de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur  $B_{N,d}^W(q,z)$  sont donnés dans la figure 1.8.



**Fig. 1.8.** Exemples de l'action de  $\mathrm{TL}_6^a(\beta)$  sur  $B_{6,2}^W(q,z)$ .

Les points disposés sur le côté vertical gauche d'un  $(N,d)$ -diagramme standard sont ordonnés de 1 à  $N$  à partir du haut. Si deux de ces points sont reliés par une boucle et sont situés aux positions  $1 \leq i_1 < i_2 \leq N$ , la position d'ouverture de cette boucle est définie comme

$$\begin{cases} i_1 & \text{si la boucle ne passe pas par la frontière imaginaire,} \\ i_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons  $r = \frac{1}{2}(N-d)$ . Alors, il existe une bijection naturelle

$$\mathrm{beg} : B_{N,d}^W(q,z) \rightarrow \{(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N\}$$

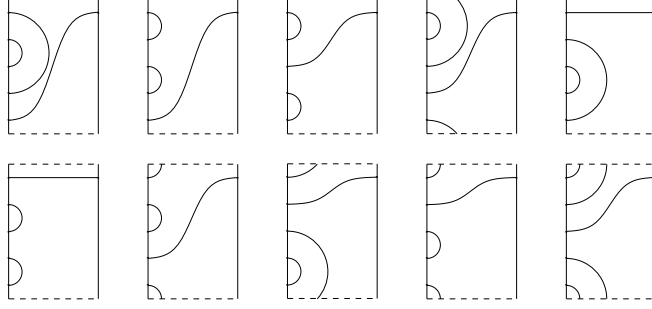
qui associe à un diagramme  $\mu$  le sous-ensemble  $\mathrm{beg}(\mu)$  de ses positions d'ouverture, ordonné de manière croissante. En particulier,

$$\dim W_{N,d;z}(q) = |B_{N,d}^W(q,z)| = \binom{N}{r}.$$

On note  $w_{i_1 \dots i_r}$  l'image, sous la bijection réciproque  $\mathrm{beg}^{-1}$ , d'une suite  $(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r$  satisfaisant  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N$ . Il s'agit de l'unique  $(N,d)$ -diagramme standard admettant une boucle débutant en  $i_j$  quelque soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

<sup>1</sup>Cette définition ne dépend pas du choix de paramètre  $q$  tel que  $\beta = -(q+q^{-1})$  d'où  $W_{N,d;z}(q) = W_{N,d;z}(q^{-1})$ .

<sup>2</sup>On associe ici un diagramme standard à sa projection sur  $W_{N,d;z}(q)$ .



**Fig. 1.9.** La base  $B_{5,1}^W(q,z)$ . Sur la première ligne, on a, de gauche à droite, les diagrammes  $w_{12}$ ,  $w_{13}$ ,  $w_{14}$ ,  $w_{15}$  et  $w_{23}$  tandis que, sur la seconde, on a plutôt  $w_{24}$ ,  $w_{25}$ ,  $w_{34}$ ,  $w_{35}$  et  $w_{45}$ .

En agissant sur un  $(N, d)$ -diagramme standard  $\mu$ , l'élément  $\Omega^N \in \text{TL}_N^a(\beta)$  produit un diagramme  $\mu' \in D_{N,d}$  tel que  $\text{beg}(\mu') = \text{beg}(\mu)$ , mais pour lequel tous les défauts traversent exactement une fois la frontière imaginaire inférieure pour réapparaître au niveau du côté opposé. Cependant, ce même diagramme  $\mu'$  peut également être obtenu en multipliant  $\Omega_d^d$  à la droite de  $\mu$ . En d'autres mots, la relation

$$\Omega^N \mu = \mu' = \mu \Omega_d^d = (\chi_{d,z}(\Omega_d))^d \mu = \begin{cases} z^{-d} \mu & \text{si } d > 0, \\ \mu & \text{si } d = 0 \end{cases}$$

est respectée sur  $W_{N,d;z}(q)$  et on peut ainsi y associer l'action de  $\Omega^N$  à celle de  $z^{-d}\text{id}$ .

$$\Omega^6 w_{12} = \text{diagram} = \text{diagram} = \text{diagram} = w_{12} \Omega_2^2 = z^{-2} w_{12}$$

**Fig. 1.10.** Exemple de l'action de  $\Omega^6$  sur  $B_{6,2}^W(q,z)$ .

Les  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires sont aussi équipés d'une forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire remarquable  $\langle -, - \rangle_{d;z} : W_{N,d;z}(q) \times W_{N,d;z^{-1}}(q) \rightarrow \mathbb{C}$  définie, pour  $\mu \in B_{N,d}^W(q,z)$  et  $\nu \in B_{N,d}^W(q,z^{-1})$ , par

$$\langle \mu, \nu \rangle_{d;z} = \chi_{d,z}(\nu^\dagger \mu)$$

avec  $\dagger : \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{N,d}) \rightarrow \text{span}_{\mathbb{C}}(D_{d,N})$  la généralisation de l'anti-involution de la section 1.1.

$$w_{125}^\dagger w_{246} = \text{diagram} = \beta \Omega_0 \xrightarrow{\chi_{0,z}} \beta(z + z^{-1}) = \langle w_{246}, w_{125} \rangle_{0;z}$$

**Fig. 1.11.** Exemple de calcul relatif à la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle_{d;z}$  pour  $(N, d) = (6, 0)$ .

**Proposition 1.4** ([22]). La forme  $\langle -, - \rangle_{d;z}$  est  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -invariante dans le sens que

$$\langle a\mu, \nu \rangle_{d;z} = \langle \mu, a^\dagger \nu \rangle_{d;z}$$

si  $a \in \mathrm{TL}_N^a(\beta)$ ,  $\mu \in B_{N,d}^W(q, z)$  et  $\nu \in B_{N,d}^W(q, z^{-1})$ .

En particulier, le radical  $\mathcal{R}_{N,d;z} = \{\mu \in W_{N,d;z}(q) \mid \langle \mu, - \rangle_{d;z} = 0\}$  de cette forme bilinéaire est un sous-module de  $W_{N,d;z}(q)$  et on peut définir le quotient associé  $L_{N,d;z} = W_{N,d;z}(q)/\mathcal{R}_{N,d;z}$ . Posons

$$\Lambda^a(N) = \{(d, z) \in \Lambda^a \mid d \leq N \text{ et } d \equiv_2 N\}$$

avec la paire  $(0, q)$  retirée si  $q^2 = -1$  et  $N \in 2\mathbb{N}$ . Il s'agit de l'ensemble des paires  $(d, z) \in \Lambda^a$  pour lesquelles le module  $L_{N,d;z}$  est non nul (cf. [22]).

**Théorème 1.5** ([22]). Avec les notations précédentes,

- (1) Soient  $(d, z) \in \Lambda^a$  et  $(t, y) \in \Lambda^a(N)$ . Soient aussi  $M \subseteq W_{N,d;z}(q)$  un sous-module et  $f : W_{N,t;y}(q) \rightarrow W_{N,d;z}(q)/M$  un morphisme  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire non nul. Alors,  $t \geq d$ . Par ailleurs, si  $t = d$ , on doit avoir  $(t, y) = (d, z)$  et il doit exister un scalaire  $\gamma \in \mathbb{C}$  tel que  $f(x) = \gamma x + M$  pour chaque  $x \in W_{N,t;y}(q)$ .
- (2) Soit  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$ . Alors,  $\mathrm{rad} W_{N,d;z}(q) = \mathcal{R}_{N,d;z}$  avec  $\mathrm{rad} W_{N,d;z}(q)$  le radical de Jacobson de  $W_{N,d;z}(q)$ . En particulier,  $L_{N,d;z} = \mathrm{top} W_{N,d;z}(q)$ .
- (3) La famille  $\{L_{N,d;z}\}_{(d,z) \in \Lambda^a(N)}$  est un ensemble complet de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules simples distincts de dimension finie.

Le fait que les coiffes simples  $L_{N,d;z} = \mathrm{top} W_{N,d;z}(q)$  soient uniquement déterminées par le choix de la paire  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  admet un corollaire intéressant.

**Corollaire 1.6.** Soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a(N)$ . Alors, on a  $W_{N,d;z}(q) \simeq W_{N,t;y}(q)$  si et seulement si les paires  $(d, z)$  et  $(t, y)$  sont équivalentes dans  $\Lambda^a$ .

Nous tenons maintenant à présenter une autre définition pour les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires. Celle-ci, provenant de [40], permet en quelque sorte d'uniformiser l'action de  $\Omega^{\pm 1}$  et rend ainsi les calculs sous-jacents à la démonstration de certains résultats plus faciles à effectuer.

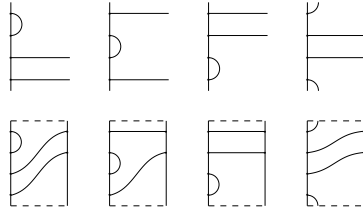
### 1.2.2. Seconde version : Les modules $V_N^d(q, v)$

Soient  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $v \in \mathbb{C}$  non nul. Les modules cellulaires  $V_N^d(q, v)$  sont construits dans [40] à partir du concept d'état à  $(N, d)$ -liens.

**Définition 1.7** (État à  $(N, d)$ -liens). Un état à  $(N, d)$ -liens correspond à un patron particulier de liaison de  $N$  points équidistribués sur une ligne verticale et ordonnés de 1 à  $N$  à partir du haut. Dans ce patron, les différents points sont reliés en paires à l'aide de boucles sauf  $d$  points desquels est dessinée une ligne horizontale, appelée défaut. Les défauts et boucles

d'un état à  $(N, d)$ -liens doivent être tracés à droite de sa ligne verticale et sans intersection. Certaines de ces boucles peuvent aussi passer au dessus du point 1 pour réapparaître sous le point  $N$  de sorte que ces états peuvent être vus comme étant représentés sur un cylindre. On ne distingue pas deux états si leur patrons de liens sont équivalents à isotopie près.

On note  $B_N^d(q, v)$  l'ensemble des états à  $(N, d)$ -liens. Cet ensemble est en bijection naturelle avec l'ensemble  $B_{N,d}^W(q, z)$  des  $(N, d)$ -diagrammes standards (pour  $z \in \mathbb{C}^\times$  tel que  $(d, z) \in \Lambda^a$ ). La bijection en question envoie un état  $\nu$  à l'unique diagramme standard  $w$  possédant le même patron de boucles que  $\nu$  sur son côté gauche (voir la figure 1.12 pour un exemple avec  $(N, d) = (4, 2)$ ). Elle permet de définir la notion de rang sur  $B_N^d(q, v)$  et justifie l'utilisation de la notation  $\text{beg } \nu$  pour désigner l'ensemble (ordonné de manière croissante) des positions d'ouverture de boucles d'un état à  $(N, d)$ -liens  $\nu$ .



**Fig. 1.12.** Les ensembles  $B_4^2(q, v)$  (haut) et  $B_{4,2}^W(q, z)$  (bas).

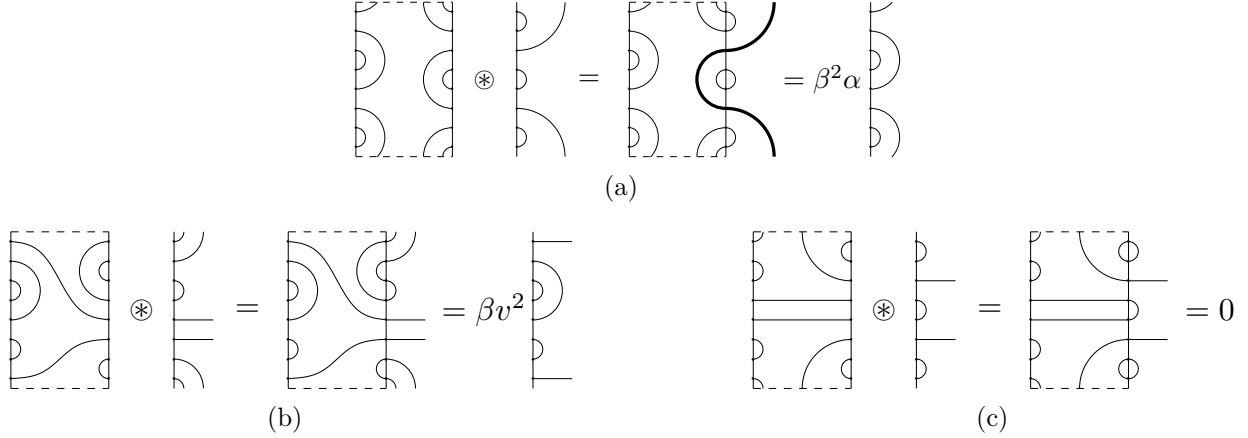
Soient  $r = \frac{1}{2}(N - d)$  et  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N$  des entiers. Alors, comme dans la sous-section précédente, on note  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  l'unique état à  $(N, d)$ -liens tel que  $\text{beg } \nu_{i_1 \dots i_r} = (i_1, \dots, i_r)$ . Pour  $\nu \in B_N^d(q, v)$ , on définit aussi  $\zeta_\nu$  comme la somme des positions des défauts de  $\nu$  ainsi que  $\psi(\nu)$  comme l'ensemble des paires  $(i, j)$  avec  $i \in \text{beg } \nu$  et  $j \in \{i + 1, \dots, N + i - 1\}$  l'unique entier correspondant, modulo  $N$ , à la position où se referme la boucle de  $\nu$  ouverte en  $i$ . On pose enfin  $V_N^d(q, v) = \text{span}_{\mathbb{C}}(B_N^d(q, v))$ . Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension  $\binom{N}{r}$ .

**Proposition 1.8** ([40]). Soient  $\nu \in B_N^d(q, v)$  et  $\mu \in D_{N,N}$ . Dénotons par  $\Upsilon_{\mu, \nu}$  l'état obtenu à partir du patron de connexion de la frontière gauche de la concaténation de  $\nu$  à droite de  $\mu$ . Définissons également  $\Delta$  comme le déplacement global des défauts de  $\nu$  vers le haut lors de cette concaténation. Posons  $\alpha = v^N + v^{-N}$  ainsi que

$$\varpi = \begin{cases} 0 & \text{si des défauts de } \nu \text{ ont été reliés lors de la concaténation} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, dénotons respectivement par  $n_c$  et  $n_\ell$  le nombre de boucles contractiles et de lacets créés durant la concaténation au niveau de la ligne verticale de  $\nu$ . Alors, l'opération définie par  $\mu \otimes \nu = \beta^{n_c} \alpha^{n_\ell} v^\Delta \varpi \Upsilon_{\mu, \nu}$  et étendue  $\mathbb{C}$ -linéairement dans les deux arguments à  $\text{TL}_N^a(\beta) \times V_N^d(q, v)$  permet de conférer à  $V_N^d(q, v)$  une structure de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module à gauche<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>À nouveau, la définition du  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module  $V_N^d(q, v)$  ne dépend pas du choix de paramètre complexe  $q$  tel que  $\beta = -(q + q^{-1})$  de sorte que l'on a  $V_N^d(q, v) = V_N^d(q^{-1}, v)$ .



**Fig. 1.13.** Exemple de l'action de  $\text{TL}_8^a(\beta)$  sur  $V_8^0(q,v)$  et  $V_8^2(q,v)$ . Les boucles non contractiles associées au paramètre  $\alpha = v^8 + v^{-8}$  sont indiquées à l'aide d'un trait foncé.

Dans la sous-section suivante, on montre que les deux versions de modules cellulaires présentées dans les pages précédentes sont en fait équivalentes. Pour ce faire, on utilisera le fait que les éléments  $\Omega^N$  et  $v^{Nd}\text{id}$  agissent de la même manière sur un module  $V_N^d(q,v)$  (cf. [39]). On omettra aussi désormais d'écrire explicitement le symbole  $\otimes$  et on écrira plutôt  $\mu\nu$  pour désigner l'action de  $\mu \in \text{TL}_N^a(\beta)$  sur  $\nu \in V_N^d(q,v)$  via la proposition 1.8.

### 1.2.3. Équivalence entre les deux versions

Soient  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  et  $r = \frac{1}{2}(N - d)$ . La bijection mentionnée dans la sous-section précédente entre  $B_N^d(q,v)$  et  $B_{N,d}^W(q,z)$  peut servir à définir un isomorphisme de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules lorsque les paramètres  $z$  et  $v$  sont choisis adéquatement.

**Proposition 1.9.** Soient  $v, z \in \mathbb{C}$  non nuls satisfaisant  $v^{-N} = z$ . Alors, l'application  $\varphi_{N,d}(v) : V_N^d(q,v) \rightarrow W_{N,d;z}(q)$  définie sur  $B_N^d(q,v)$  par  $[\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}) = v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{i_1 \dots i_r}$  est un isomorphisme  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire.

**DÉMONSTRATION.** Cette application  $\varphi_{N,d}(v)$  correspond (à un facteur multiplicatif non nul près) à la bijection susmentionnée entre  $B_N^d(q,v)$  et  $B_{N,d}^W(q,z)$ . Il s'agit donc également d'une bijection. Soient  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N$  et posons  $\psi(\nu_{i_1 \dots i_r}) = \{(i_k, j_k)\}_{k=1}^r$ . Par souci de concision, dans cette démonstration, on appellera aussi défauts les lignes passantes d'un diagramme standard. On notera d'ailleurs  $tw_{i_1 \dots i_r}$  le seul élément de  $B_{N,d}^W(q,z)$  tel que

$$\text{beg}(tw_{i_1 \dots i_r}) = \begin{cases} (i_2 - 1, \dots, i_r - 1, N) & \text{si } i_1 = 1, \\ (i_1 - 1, \dots, i_r - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

ainsi que par  $t\nu_{i_1 \dots i_r}$  l'unique état satisfaisant  $\text{beg}(t\nu_{i_1 \dots i_r}) = \text{beg}(tw_{i_1 \dots i_r})$ . En particulier, avec cette notation,  $\Omega\nu_{i_1 \dots i_r} = v^d t\nu_{i_1 \dots i_r}$ . Montrons que  $[\varphi_{N,d}(v)](\Omega\nu_{i_1 \dots i_r}) = \Omega[\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r})$ . Il y a deux cas à considérer.

(Cas 1) Supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) n'admette pas de défaut en position 1. Alors, en appliquant  $\Omega$  sur  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et sur  $w_{i_1 \dots i_r}$ ), tous les défauts se déplacent d'une position vers le haut sans passer par la frontière imaginaire supérieure. Ainsi,  $\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} = \zeta_{t\nu_{i_1 \dots i_r}} + d$  et  $\Omega w_{i_1 \dots i_r} = t w_{i_1 \dots i_r}$  d'où

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](\Omega \nu_{i_1 \dots i_r}) &= v^d [\varphi_{N,d}(v)](t\nu_{i_1 \dots i_r}) = v^{\zeta_{t\nu_{i_1 \dots i_r}} + d} t w_{i_1 \dots i_r} \\ &= v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} \Omega w_{i_1 \dots i_r} = \Omega [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}). \end{aligned}$$

(Cas 2) Supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) admette un défaut en position 1. Dans ce cas, en appliquant  $\Omega$  sur  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et sur  $w_{i_1 \dots i_r}$ ), les défauts situés en  $j \geq 2$  se déplacent d'une position vers le haut sans passer par la frontière imaginaire supérieure. Le défaut en position 1 traverse cependant cette frontière et est transporté à la position  $N$ . Par conséquent, on obtient  $\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} = \zeta_{t\nu_{i_1 \dots i_r}} + d - N$  et, en vertu du déplacement du défaut originellement en position 1, on a également  $\Omega w_{i_1 \dots i_r} = (t w_{i_1 \dots i_r}) \Omega = z^{-1} t w_{i_1 \dots i_r}$ . Dans ces circonstances,

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](\Omega \nu_{i_1 \dots i_r}) &= v^d [\varphi_{N,d}(v)](t\nu_{i_1 \dots i_r}) = v^{\zeta_{t\nu_{i_1 \dots i_r}} + d} t w_{i_1 \dots i_r} \\ &= v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} + N} z \Omega w_{i_1 \dots i_r} = v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} \Omega w_{i_1 \dots i_r} = \Omega [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $v^N = z^{-1}$ .

Comme mentionné dans les sous-sections 1.2.1 et 1.2.2,  $\Omega^N$  agit respectivement comme  $v^{Nd} \text{id}$  et  $z^{-d} \text{id}$  sur  $V_N^d(q, v)$  et  $W_{N,d;z}(q)$ . Ainsi, selon les résultats précédents,

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](\Omega^{-1} \nu_{i_1 \dots i_r}) &= v^{-Nd} [\varphi_{N,d}(v)](\Omega^{N-1} \nu_{i_1 \dots i_r}) = z^d \Omega^{N-1} [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}) \\ &= z^d \Omega^{N-1} v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{i_1 \dots i_r} = \Omega^{-1} v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{i_1 \dots i_r} = \Omega^{-1} [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}). \end{aligned}$$

On considère désormais plusieurs cas pour démontrer que  $[e_1, \varphi_{N,d}(v)] = 0$ . On pourra ensuite conclure de ce fait que  $\varphi_{N,d}(v)$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire étant donné que  $e_j = \Omega^{-(j-1)} e_1 \Omega^{j-1}$  pour  $1 \leq j \leq N$  selon les relations de définition de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ .

(Cas 1) Supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) n'admette aucun défaut aux positions 1 et 2. Notons  $\nu_{k_1 \dots k_r} \in B_N^d(q, v)$  l'état tel que  $e_1 \nu_{i_1 \dots i_r} = \beta^{n_c} \alpha^{n_\ell} v^\Delta \nu_{k_1 \dots k_r}$  avec  $\Delta$ ,  $n_c$  et  $n_\ell$  définies comme dans la proposition 1.8. Par hypothèse, aucun défaut n'est déplacé lors de la concaténation de  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  à droite de  $e_1$  (voir la figure 1.4). Ainsi,  $\Delta = 0$  et  $\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} = \zeta_{\nu_{k_1 \dots k_r}}$ . Par ailleurs, étant donné que l'action de  $e_1$  sur  $w_{i_1 \dots i_r}$  est aussi définie par concaténation, on doit également avoir  $e_1 w_{i_1 \dots i_r} = \beta^{n_c} (z + z^{-1})^{n_\ell} w_{k_1 \dots k_r}$ . Par conséquent, puisque  $\alpha = v^N + v^{-N} = z + z^{-1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](e_1 \nu_{i_1 \dots i_r}) &= \beta^{n_c} \alpha^{n_\ell} [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{k_1 \dots k_r}) = \beta^{n_c} (z + z^{-1})^{n_\ell} v^{\zeta_{\nu_{k_1 \dots k_r}}} w_{k_1 \dots k_r} \\ &= v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} e_1 w_{i_1 \dots i_r} = e_1 [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}). \end{aligned}$$

(Cas 2) Supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) admette des défauts en position 1 et 2. Alors, l'action de  $e_1$  sur  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  et sur  $w_{i_1 \dots i_r}$  relie deux défauts. Ainsi,  $e_1 \nu_{i_1 \dots i_r} = 0$  par définition et, puisque le diagramme obtenu via la concaténation de  $w_{i_1 \dots i_r}$  à droite de  $e_1$  admet dans ce cas strictement moins de  $d$  lignes passantes, on doit également avoir  $e_1 w_{i_1 \dots i_r} = 0$ . Par conséquent,

$$[\varphi_{N,d}(v)](e_1 \nu_{i_1 \dots i_r}) = 0 = e_1 v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{i_1 \dots i_r} = e_1 [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}).$$

(Cas 3) Supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) admette un défaut en position 1, mais aucun en position 2. Alors,  $i_1 = 2 < j_1 \leq N$  et, lors de l'action de  $e_1$  sur  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et sur  $w_{i_1 \dots i_r}$ ), ce défaut en position 1 se déplace vers le bas, en ne traversant aucune frontière imaginaire, jusqu'à la position  $j_1$ . Dès lors, on obtient  $e_1 w_{i_1 \dots i_r} = w_{1i_2 \dots i_r}$  et  $e_1 \nu_{i_1 \dots i_r} = v^{1-j_1} \nu_{1i_2 \dots i_r}$  d'où, puisque  $\zeta_{\nu_{1i_2 \dots i_r}} = \zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} - 1 + j_1$ ,

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](e_1 \nu_{i_1 \dots i_r}) &= v^{1-j_1} [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{1i_2 \dots i_r}) = v^{1-j_1} v^{\zeta_{\nu_{1i_2 \dots i_r}}} w_{1i_2 \dots i_r} \\ &= v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} e_1 w_{i_1 \dots i_r} = e_1 [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}). \end{aligned}$$

(Cas 4) Finalement, supposons que  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et donc  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) admette un défaut en position 2, mais aucun en position 1. Dans cette situation, la position 1 doit correspondre (pour  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  et  $w_{i_1 \dots i_r}$ ) à la fermeture d'une boucle de sorte que  $j_k = N + 1 \equiv_N 1$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Ainsi, lors de l'action de  $e_1$  sur  $\nu_{i_1 \dots i_r}$  (et sur  $w_{i_1 \dots i_r}$ ), le défaut en position 2 traverse la frontière imaginaire supérieure pour aboutir en position  $i_k > 2$ . Par conséquent, ce défaut effectue un déplacement global de  $N+2-i_k$  positions vers le haut et on a  $e_1 w_{i_1 \dots i_r} = z^{-1} w_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}$  ainsi que  $e_1 \nu_{i_1 \dots i_r} = v^{N+2-i_k} \nu_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}$ . En outre, dans ce cas,  $\zeta_{\nu_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}} = \zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}} - 2 + i_k$  et

$$\begin{aligned} [\varphi_{N,d}(v)](e_1 \nu_{i_1 \dots i_r}) &= v^{N+2-i_k} [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}) \\ &= v^{N+2-i_k} v^{\zeta_{\nu_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r}}} w_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r} \\ &= z^{-1} v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{1i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_r} \\ &= e_1 v^{\zeta_{\nu_{i_1 \dots i_r}}} w_{i_1 \dots i_r} = e_1 [\varphi_{N,d}(v)](\nu_{i_1 \dots i_r}) \end{aligned}$$

où on a encore utilisé la relation  $v^N = z^{-1}$ .

L'application  $\varphi_{N,d}(v)$  correspond donc effectivement à une bijection  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire.  $\square$

Ce résultat et le corollaire 1.6 admettent deux conséquences évidentes.

**Corollaire 1.10.** Soient  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$ ,  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ainsi que  $v \in \mathbb{C}$  non nul. Alors, on a  $V_N^t(q, v) \simeq W_{N,d;z}(q)$  si et seulement si les paires  $(d, z)$  et  $(t, v^{-N})$  sont équivalentes dans  $\Lambda^a$ .

**Corollaire 1.11.** Soient  $v, w \in \mathbb{C}$  non nuls et  $d, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $(d, v^{-N}) \in \Lambda^a(N)$ . Alors,  $V_N^d(q, v) \simeq V_N^t(q, w)$  si et seulement si  $(d, v^{-N})$  et  $(t, w^{-N})$  sont équivalentes dans  $\Lambda^a$ .



### 1.3. Structure des modules cellulaires

Dans cette section, on utilisera les résultats de [22] pour décrire entièrement la structure des  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules cellulaires ainsi que les morphismes les reliant entre eux. Pour ce faire, on introduit d'abord la notion de diagrammes de Loewy pour une  $\mathbb{C}$ -algèbre  $A$  quelconque étant donné que ces objets seront utilisés tout au long du présent mémoire.

#### 1.3.1. Diagrammes de Loewy

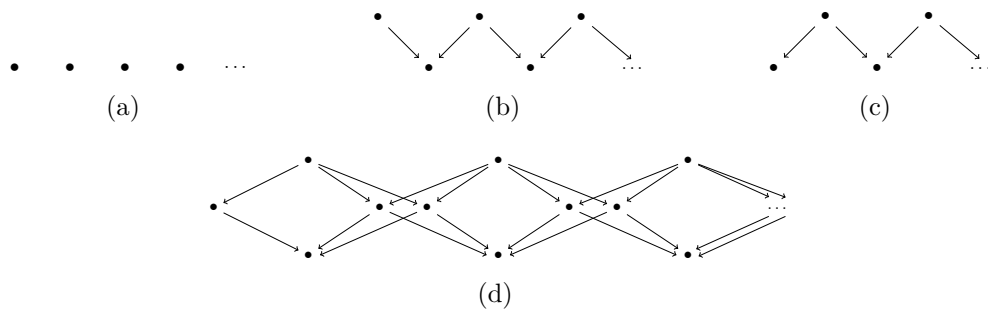
Soient  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre,  $M \in \mathrm{mod} A$  et  $\mathcal{I} = \{I_j\}_{j=1}^n$  l'ensemble des facteurs de composition de  $M$  (avec redondance selon la multiplicité). On définit un ordre  $\prec_L$  sur  $\mathcal{I}$  en écrivant  $I_j \prec_L I_k$  si et seulement s'il existe dans  $\mathrm{mod} A$  une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow M_j \rightarrow M_k \rightarrow M_k/M_j \rightarrow 0$$

avec  $M_j$  et  $M_k$  désignant respectivement les sous-modules de  $M$  engendrés par un ensemble de représentants des classes d'équivalence<sup>4</sup> appartenant aux facteurs  $I_j$  et  $I_k$ .

**Définition 1.12** (Diagramme de Loewy; [5] et [12]). Le diagramme de Loewy de  $M$  est le graphe orienté représentant l'organisation de l'ensemble de noeuds  $\mathcal{I}$  sous l'ordre  $\prec_L$ . En d'autres termes, dans le diagramme de Loewy de  $M$ , on dessine une flèche de  $I_j$  vers  $I_k$  si et seulement si  $I_k$  est un successeur direct de  $I_j$  via l'ordre  $\prec_L$ . Les facteurs de composition isomorphes d'un diagramme de Loewy sont généralement notés de la même façon.

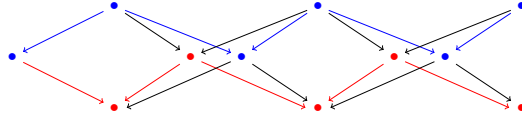
Le diagramme de Loewy d'un module  $M$  permet de représenter visuellement sa structure ainsi que celle de tous ses sous-modules et de ses quotients. Des exemples sont donnés dans la figure suivante pour l'algèbre  $\mathfrak{Vir}$  présentée dans l'introduction de ce mémoire.



**Fig. 1.14.** Les diagrammes de Loewy possibles pour un  $\mathfrak{Vir}$ -module de Feigin-Fuchs (voir l'introduction) avec les facteurs de composition représentés par des cercles pleins (cf. [38]). Les différents cas présentés sont appelés : semisimple (a), linéaires (b,c) et tressé (d). Chacun des diagrammes de cette figure peut tronquer à droite à partir d'un facteur donné.

<sup>4</sup>On rappelle qu'un facteur de composition de  $M$  en est un sous-quotient (c-à-d. un quotient d'un sous-module) d'où la notion de classes d'équivalence mentionnée ici est non ambiguë. Par ailleurs, un ensemble de représentants des classes d'équivalence contient par définition un unique représentant de chaque classe.

Supposons que le diagramme de Loewy d'un module  $M$  et que la coiffe d'un sous-module  $N \subseteq M$  soient connus. Alors, le sous-graphe obtenu de ce diagramme en suivant les chemins partant des facteurs contenus dans  $\text{top } N$  donne le diagramme de  $N$  (cf. [12]). On obtient aussi le diagramme du quotient  $M/N$  en retirant les facteurs de composition de  $N$  du diagramme de  $M$ . En particulier, les diagrammes de  $\text{top } M$  et de  $\text{soc } M$  correspondent aux graphes orientés sans flèche pour lesquels les noeuds sont respectivement les sources et les puits du diagramme de Loewy de  $M$ . Par ailleurs, dans le diagramme de  $M$ , il ne peut exister de flèche ayant pour origine (ou point d'arrivée) un facteur de  $N$  (ou de  $M/N$ , respectivement) qui ne se trouve pas dans le diagramme de  $N$  (ou de  $M/N$ , respectivement).



**Fig. 1.15.** Le diagramme de Loewy d'un  $\mathfrak{Vir}$ -module de Feigin-Fuchs tressé avec les facteurs de composition à nouveau représentés par des cercles pleins. Dans cette figure, le diagramme de Loewy d'un sous-module est identifié à l'aide d'un trait rouge et celui du quotient associé avec un trait bleu. Ceux de la coiffe et du socle peuvent aussi être retrouvés respectivement comme les étages supérieur et inférieur du graphe présenté (qui correspond d'ailleurs à une version tronquée (à droite) d'un des diagrammes de la figure 1.14).

### 1.3.2. Monomorphismes de Graham-Lehrer

Les résultats structurels présentés dans [22] par rapport aux modules  $W_{N,d,z}(q)$  s'expriment de manière particulièrement simple à l'aide d'un ordre partiel  $\preceq_q$  sur l'ensemble  $\Lambda^a$ .

**Définition 1.13** (Ordre  $\preceq_q$ ). Soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a$ . On dit que  $(t, y)$  succède à  $(d, z)$  si  $t = d + 2k$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et si l'une des conditions suivantes est remplie :

- (A)  $z^2 = q^t$  et  $y = zq^{-k}$ ;
- (B)  $z^2 = q^{-t}$  et  $y = zq^k$ .

On définit  $\preceq_q$  comme l'ordre partiel le plus faible sur  $\Lambda^a$  tel que  $(d, z) \preceq_q (t, y)$  lorsque la paire  $(t, y)$  succède à la paire  $(d, z)$ . On note aussi  $\prec_q$  l'ordre strict induit de  $\preceq_q$ . On dit que  $(t, y)$  succède directement à  $(d, z)$  si  $(d, z) \prec_q (t, y)$  et s'il n'existe pas d'élément  $(s, w) \in \Lambda^a$  tel que  $(d, z) \prec_q (s, w) \prec_q (t, y)$ .

Le corollaire suivant découle directement de la définition de l'ordre  $\preceq_q$ .

**Corollaire 1.14.** Soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a$ . Alors, les énoncés suivants sont équivalents.

- (1)  $(d, z) \preceq_q (t, y)$  directement via la condition A (ou B);
- (2)  $(d, z^{-1}) \preceq_q (t, y^{-1})$  directement via la condition B (ou A, respectivement);
- (3)  $(d, z) \preceq_{q^{-1}} (t, y)$  directement via la condition B (ou A, respectivement).

Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, un élément de  $\Lambda^a$  admet au maximum un successeur non trivial sous l'ordre  $\preceq_q$  (cf. [6]). Cependant, tels que le démontrent les deux résultats présentés ci-dessous, l'organisation des successeurs d'une paire  $(d, z)$  devient bien plus intriquée lorsqu'il existe un entier positif  $x$  satisfaisant  $q^{2x} = 1$ .

**Proposition 1.15** ([6]). Soit  $q$  une racine de l'unité et soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a$  tels que  $(d, z) \prec_q (t, y)$ . Alors,  $(d, z)$  admet une infinité de successeurs distincts sous  $\preceq_q$ .

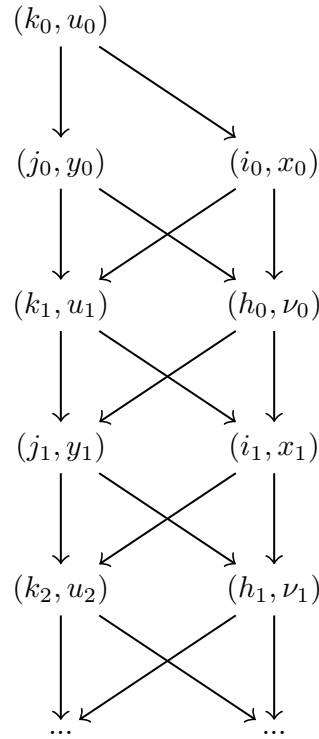
**Théorème 1.16** ([6]). Soient  $q$  une racine de l'unité et  $p$  l'entier positif minimal tel que  $q^{2p} = 1$ . Soit aussi  $(d, z) \in \Lambda^a$  admettant un successeur non trivial sous  $\preceq_q$ . Notons

$$s = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid r > d, r \equiv_2 d \text{ et } q^r = z^2\}$$

Soient finalement  $k = \frac{1}{2}(s - d)$  ainsi que  $\delta_i, \delta_h \in 2p\mathbb{Z}$  les éléments minimaux satisfaisant les inégalités  $-s + \delta_i > d$  et  $-d + \delta_h > \max(s, -s + \delta_i)$ . Alors, les successeurs de la paire  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  sont, pour  $a \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} (k_a, u_a) &= (d + 2ap, zq^{ap}) & (i_a, x_a) &= (-s + \delta_i + 2ap, z^{-1}q^{ap+k+\delta_i/2}) \\ (j_a, y_a) &= (s + 2ap, zq^{ap-k}) & (h_a, \nu_a) &= (-d + \delta_h + 2ap, z^{-1}q^{ap+\delta_h/2}) \end{aligned}$$

et sont organisés de la manière présentée dans la figure 1.16.



**Fig. 1.16.** Organisation des successeurs de la paire  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  pour  $q$  une racine de l'unité. Dans cette figure, certaines paires peuvent coïncider et une flèche verticale (ou diagonale) signifie que la succession est faite via la condition A (ou B, respectivement).

Dans [6], les auteurs excluent du théorème précédent la possibilité que  $q^2 = 1$ , mais leur résultat demeure vrai même lorsque cette relation est vérifiée. Supposons en effet que  $q = \pm 1$  et que  $(d, z)$  admette un successeur non trivial sous  $\preceq_q$ . Alors, les conditions A et B de la définition 1.13 sont équivalentes et un calcul rapide montre que les successeurs de  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  sont les paires  $(d + 2k, zq^k)$  avec  $k \geq 1$ . Dans ce cas, le diagramme d'organisation de ces successeurs correspond à celui donné dans la figure 1.17. On note que ce diagramme est équivalent à celui obtenu de la figure 1.16 en associant entre elles les paires qui coïncident.

$$(d, z) \longrightarrow (d + 2, zq) \longrightarrow (d + 4, z) \longrightarrow (d + 6, zq) \longrightarrow \cdots$$

**Fig. 1.17.** Organisation des successeurs de  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  lorsque  $q^2 = 1$ .

Si  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a$  satisfont  $(d, z) \preceq_q (t, y)$ , la définition 1.13 impose  $d \leq t$ . Ainsi, la première composante des paires apparaissant dans le diagramme de la figure 1.16 augmente à chaque étage à partir du haut. En particulier, en dessous d'un certain étage, cette composante dépasse  $N$ . Donc, si  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  et si  $q$  est une racine de l'unité, le diagramme représentant l'organisation des successeurs de  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$ , mais restreint à  $\Lambda^a(N)$ , peut être retrouvé dans le diagramme de la figure 1.16 tronqué à cet étage. Il s'agit notamment d'un diagramme fini et il s'avère qu'il permet de caractériser les morphismes entre modules cellulaires.

**Théorème 1.17** ([22]). Soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a(N)$ . Alors,

(1) Comme  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TL}_N^a(\beta)}(W_{N,t;y}(q), W_{N,d;z}(q)) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } (d, z) \preceq_q (t, y), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) La multiplicité de l'irréductible  $L_{N,t;y}$  dans  $W_{N,d;z}(q)$  vaut

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (d, z) \preceq_q (t, y), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème précédent stipule en particulier que, si  $(d, z)$  et  $(t, y)$  sont deux paires dans  $\Lambda^a(N)$  telles que  $(d, z) \preceq_q (t, y)$ , alors il existe (à un facteur multiplicatif global près) un unique morphisme de  $W_{N,t;y}(q)$  dans  $W_{N,d;z}(q)$ . Ainsi, pour spécifier entièrement les morphismes entre modules cellulaires, il suffit certainement d'explicitier une inclusion  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire de  $W_{N,t;y}(q)$  dans  $W_{N,d;z}(q)$  pour chaque successeur direct  $(t, y)$  de  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$ . Pour ce faire, on désignera respectivement par

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad \text{et} \quad [x]_q! = \begin{cases} [x]_q[x-1]_q \cdots [1]_q & \text{si } x \geq 1, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

le  $q$ -nombre et le  $q$ -factoriel associés à  $x \in \mathbb{Z}$  (une limite est sous-entendue si  $q = \pm 1$ ).

On se servira également du coefficient  $q$ -binomial défini, pour  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , par

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{[x_1]_q!}{[x_2]_q! [x_1 - x_2]_q!} & \text{si } x_1 \geq x_2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 1.18** ([22]). Soient  $(d, z), (t, y) \in \Lambda^a$  avec  $(d, z) \preceq_q (t, y)$  directement. Posons

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si cette succession directe est faite via la condition A,} \\ -1 & \text{si elle est plutôt faite via la condition B} \end{cases}$$

et  $k = \frac{1}{2}(t - d)$ . Alors, une inclusion de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $\theta_{t,d;y,z}(N) : W_{N,t;y}(q) \rightarrow W_{N,d;z}(q)$  est définie sur  $x \in W_{N,t;y}(q)$  par

$$[\theta_{t,d;y,z}(N)](x) = \sum_{\mu \in B_{t,d}^W(q,z)} q^{a i_\mu} z^{k - |\mu|} h_{P(\mu)}(q) x \mu.$$

Dans cette expression<sup>5</sup>,

$$2i_\mu = t(|\mu| - k) + \frac{d}{2}(t + 1) - \zeta_\mu \quad \text{et} \quad h_{P(\mu)}(q) = \frac{[k]_{q^a}!}{\prod_{s \in \text{beg}(\mu)} [\mathfrak{h}_s]_{q^a}}$$

avec  $\zeta_\mu$  la somme des positions des lignes passantes de  $\mu$  ainsi que, pour  $s \in \text{beg}(\mu)$ ,  $\mathfrak{h}_s$  le nombre de boucles de  $\mu$  comprises dans l'enveloppe convexe de sa boucle commençant en  $s$ .

Sous les conditions du théorème 1.18, notons  $\theta = \theta_{t,d;y,z}(N)$ . On a une suite exacte courte

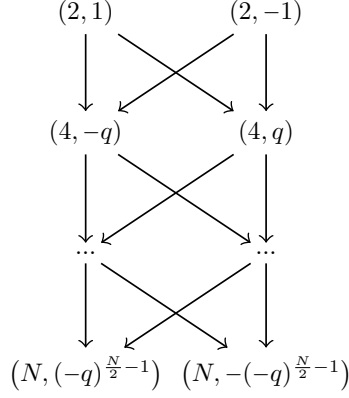
$$0 \rightarrow W_{N,t;y}(q) \xrightarrow{\theta} W_{N,d;z}(q) \rightarrow \text{Coker } \theta \rightarrow 0$$

qui est non scindée puisque  $\text{top } W_{N,d;z}(q) = L_{N,d;z}$  est simple. Si les paires  $(d, z)$  et  $(t, y)$  sont choisies dans  $\Lambda^a(N)$ , cette suite est uniquement déterminée (à un facteur multiplicatif global près pour les morphismes) en vertu de la partie (1) du théorème 1.17. En outre, ce même théorème permet de conclure que le diagramme d'organisation dans  $\Lambda^a(N)$  des successeurs sous  $\preceq_q$  de la paire  $(d, z)$  (qui est une version tronquée du diagramme présenté dans la figure 1.14 lorsque  $q$  est une racine de l'unité) correspond au diagramme de Loewy du module cellulaire  $W_{N,d;z}(q)$  (où on interprète<sup>6</sup> une paire  $(t, y)$  de  $\Lambda^a(N)$  comme l'irréductible  $L_{N,t;y}$ ). Or, puisque le théorème 1.18 ne se limite pas aux paires de l'ensemble  $\Lambda^a(N)$ , on peut également l'utiliser pour obtenir le diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$  même lorsque la paire  $(0, q)$  a été retirée de cet ensemble (voir la discussion suivant la proposition 1.4).

**Proposition 1.19.** Soient  $N \in 2\mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q^2 = -1$ . Alors, le diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$  correspond au diagramme donné dans la figure 1.18.

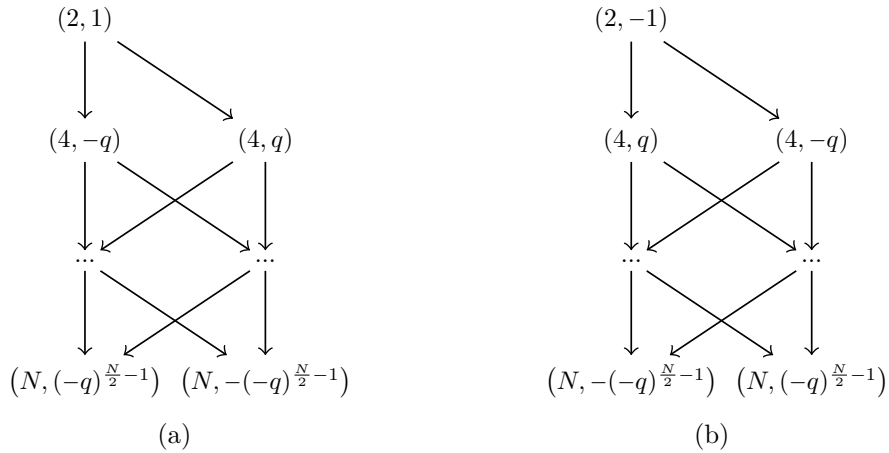
<sup>5</sup>Puisque  $i_\mu \in \mathbb{Z}/2$ , il existe deux choix de signes pour la racine carrée de  $q$  utilisée dans l'expression du morphisme  $\theta_{t,d;y,z}(N)$ . Or, choisir un signe ou l'autre multiplie globalement ce morphisme par un signe et n'a donc pas d'importance du point de vue de l'étude effectuée ici.

<sup>6</sup>On effectuera toujours cette association en présentant le diagramme de Loewy d'un  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module.



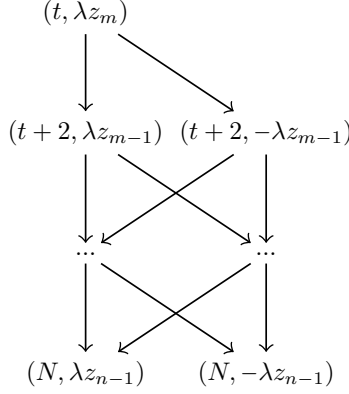
**Fig. 1.18.** Diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$  avec  $N \in 2\mathbb{N}$  et  $q^2 = -1$ . Une flèche verticale (diagonale) indique que les paires reliées se succèdent sous  $\preceq_q$  via la condition A (via la condition B, respectivement). Le diagramme présenté est équivalent à celui de la figure 1.16 après retrait des paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ .

DÉMONSTRATION. Dans les conditions considérées, les paires  $(2, 1)$  et  $(2, -1)$  succèdent directement à  $(0, q)$  sous  $\preceq_q$  (via les conditions A et B, respectivement). Ainsi, le théorème 1.18 produit des inclusions  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $\theta_{\pm} : W_{N,2;\pm 1}(q) \rightarrow W_{N,0;q}(q)$  et permet de conclure que les facteurs de composition de  $W_{N,2;\pm 1}(q)$  sont aussi présents dans le diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$ . On veut montrer qu'il s'agit de tous les facteurs apparaissant dans ce diagramme et que les facteurs communs à  $W_{N,2;1}(q)$  et  $W_{N,2;-1}(q)$  n'y apparaissent qu'une fois<sup>7</sup>. Par hypothèse, on a  $(2, \pm 1) \in \Lambda^a(N)$  d'où la figure 1.16 peut être utilisée pour trouver le diagramme de Loewy des modules  $W_{N,2;\pm 1}(q)$ . Un calcul rapide produit les diagrammes présentés dans la figure 1.19. En particulier, le seul facteur de composition de  $W_{N,2;-1}(q)$  n'étant pas déjà présent dans le diagramme de  $W_{N,2;1}(q)$  est sa coiffe  $L_{N,2;-1}$ .



**Fig. 1.19.** Diagrammes de Loewy de :  $W_{N,2;1}(q)$  (a) et  $W_{N,2;-1}(q)$  (b).

<sup>7</sup>Il était inutile de faire ce genre d'analyse pour trouver le diagramme de Loewy d'un module  $W_{N,d;z}(q)$  avec  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  en raison de la seconde partie du théorème 1.17.



**Fig. 1.20.** Diagramme de Loewy du sous-module de  $W_{N,2;-1}(q)$  engendré par le facteur  $L_{N,t;y}$  avec  $t = N - 2m$  et  $y = \lambda z_m$ . On retrouve la figure 1.19 si  $\lambda$  est négatif avec  $m = n - 1$ .

**Affirmation 1:** On a  $\dim_{\mathbb{C}} W_{N,0;q}(q) = \dim_{\mathbb{C}} W_{N,2;1}(q) + \dim_{\mathbb{C}} L_{N,2;-1}$ .

**Dém.** (Affirmation 1). Posons  $n = \frac{N}{2} \in \mathbb{N}$  et notons, pour  $0 \leq m \leq n - 1$ ,  $z_m = (-q)^{n-m-1}$  et  $A_m^{\pm} = \dim_{\mathbb{C}} L_{N,N-2m;\pm z_m}$ . Fixons un certain  $0 \leq m \leq n - 1$  avec  $\lambda \in \{+, -\}$  tel que  $\lambda$  est négatif si  $m = n - 1$ . Alors, le facteur de composition de  $W_{N,2;-1}(q)$  associé à la paire  $(t, y) = (N - 2m, \lambda z_m)$  permet d'obtenir<sup>8</sup> une copie de  $W_{N,t;y}(q)$  au sein de  $W_{N,2;-1}(q)$ . Le diagramme de Loewy de ce sous-module est obtenu en suivant les chemins partant de la paire  $(t, y)$  dans le diagramme de  $W_{N,2;-1}(q)$  et correspond donc, selon la figure 1.19 (b), au diagramme présenté dans la figure 1.20. Puisque la dimension d'un module est la somme des dimensions de ses facteurs de composition, on a

$$\dim L_{N,t;y} = A_m^{\lambda} = \dim_{\mathbb{C}} W_{N,t;y}(q) - \sum_{k=0}^{m-1} (A_k^+ + A_k^-) = \binom{N}{m} - \sum_{k=0}^{m-1} (A_k^+ + A_k^-) \quad (1.1)$$

L'expression finale obtenue ne dépend pas du choix du  $\lambda$ . Ainsi, on a l'expression simplifiée

$$A_m^- = \binom{N}{m} - 2 \sum_{k=0}^{m-1} A_k^-$$

avec  $A_m^- = A_m^+$  (si  $m \neq n - 1$ ) et on obtient

$$A_m^- = \binom{N}{m} - 2A_{m-1}^- - 2 \sum_{k=0}^{m-2} A_k^- = \binom{N}{m} - \binom{N}{m-1} - A_{m-1}^-$$

valide pour  $1 \leq m \leq n - 1$ . Pour la condition initiale  $A_0^- = 1$  (provenant de (1.1)), cette relation de récurrence admet comme unique solution

$$A_m^- = \binom{N}{m} + 2 \sum_{k=2}^{m+1} (-1)^{k+1} \binom{N}{m-k+1} \quad (\text{pour } 0 \leq m \leq n-1).$$

<sup>8</sup>En effet, puisque cette paire apparaît dans le diagramme de la figure 1.19 (b), on a  $(2, -1) \preceq_q (t, y)$  et le sous-module voulu peut être obtenu en composant un certain nombre d'inclusions issues du théorème 1.18.

En particulier,

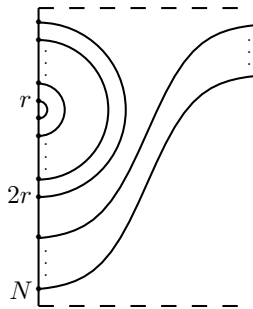
$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} W_{N,2;1}(q) + \dim_{\mathbb{C}} L_{N,2;-1} &= \binom{N}{n-1} + A_{n-1}^- = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{N}{n-k} \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} - 4 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2n}{n-2k} \\
&\stackrel{1}{=} 2 \left[ 2^{2n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] - 4 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{2n}{n-2k} + 4 \binom{2n}{n} \\
&\stackrel{2}{=} 2^{2n} + 3 \binom{2n}{n} - 4 \left[ 2^{2n-2} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right] = \binom{2n}{n} = \binom{N}{n} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} W_{N,0;q}(q)
\end{aligned}$$

où on a respectivement utilisé les identités (2.44) et (2.51) de [20] aux égalités 1 et 2.  $\triangle$

En vertu de l'affirmation précédente et puisque les facteurs de composition de  $W_{N,2;\pm 1}(q)$  doivent être transportés dans le diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$  par les inclusions  $\theta_{\pm}$ , on conclut que les seuls facteurs de composition de  $W_{N,0;q}(q)$  sont ceux présentés dans la figure 1.18 (avec multiplicité 1). Dans cette situation, le fait que  $W_{N,2;\pm 1}(q)$  est un sous-module de  $W_{N,0;q}(q)$  permet de déduire que le diagramme de  $W_{N,0;q}(q)$  doit correspondre exactement à celui présenté dans cette même figure<sup>9</sup> d'où la fin de cette démonstration.  $\square$

Pour la suite de ce mémoire, on appellera *paire problématique* la paire  $(0, q)$  de  $\Lambda^a$  avec  $q^2 = -1$  et  $N \in 2\mathbb{N}$ . L'étude des modules reliés à cette paire doit toujours être effectuée avec davantage de prudence que celle relative aux modules associés à des paires dans  $\Lambda^a(N)$ . Par exemple, la proposition suivante n'aurait pas de sens pour cette paire problématique puisque le quotient  $L_{N,0;q} = W_{N,0;q}(q)/\mathcal{R}_{N,0;q}$  associé est alors nul ([22]).

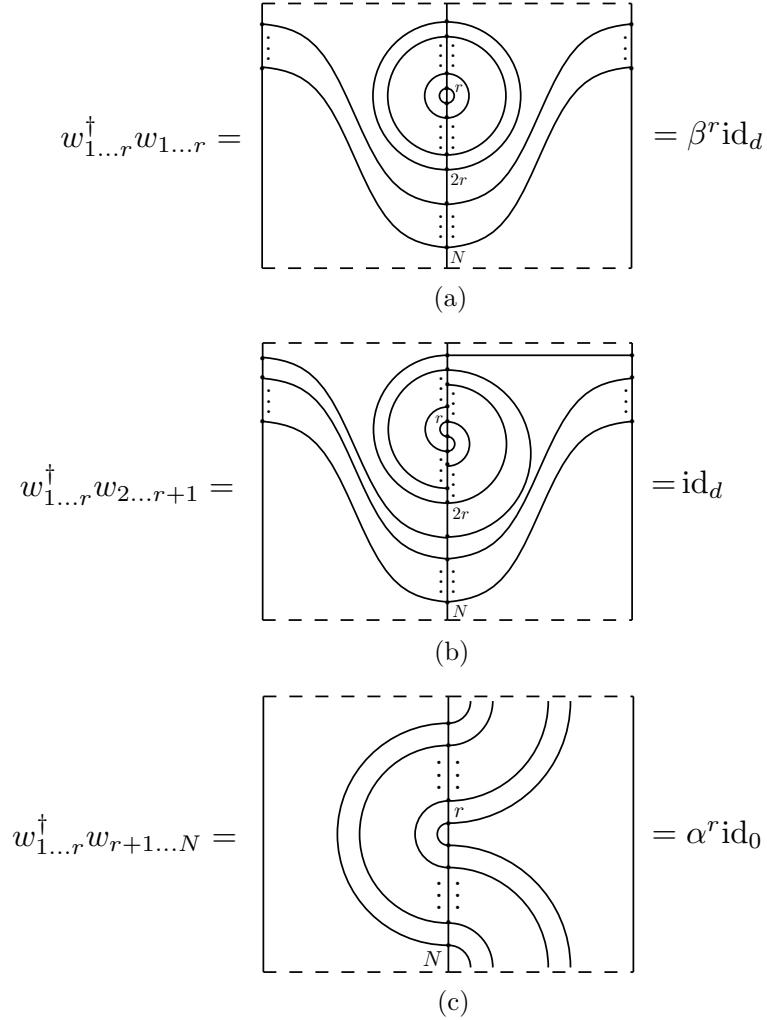
**Proposition 1.20.** Soient  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  et  $r = \frac{1}{2}(N-d)$ . Alors,  $w_{1\dots r} \notin \text{rad } W_{N,d;z}(q)$  d'où la classe d'équivalence  $w_{1\dots r} + \text{rad } W_{N,d;z}(q)$  engendre le simple  $L_{N,d;z} = \text{top } W_{N,d;z}(q)$ .



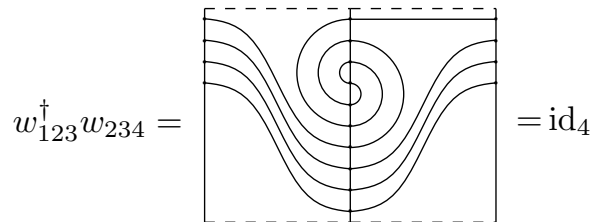
**Fig. 1.21.** La forme de l'élément  $w_{1\dots r} \in W_{N,d;z}(q)$

<sup>9</sup>Cela implique en effet qu'aucune flèche ayant pour origine un facteur de composition de  $W_{N,2;1}(q)$  ne peut être présente dans le diagramme de Loewy de  $W_{N,0;q}(q)$  sans avoir été déjà présente dans la figure 1.19.





**Fig. 1.22.** Produits effectués dans la démonstration de la proposition 1.20. Les sous-figures (a), (b) et (c) sont respectivement utilisées dans les cas 2, 3 et 4 de cette démonstration.



**Fig. 1.23.** Produit représenté dans la partie (b) de la figure 1.22 pour  $(r, d) = (3, 4)$ .

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$ , on a  $(d, z) \neq (0, q)$  si  $q^2 = -1$  et  $N \in 2\mathbb{N}$ . En particulier, on a  $N = 0$  ou  $(\beta, \alpha, d) \neq (0, 0, 0)$  avec  $\alpha = z + z^{-1}$ . On procède par cas.

(Cas 1) Supposons que  $N = 0$  d'où  $d = 0$  et  $\dim_{\mathbb{C}} W_{N,d;z}(q) = 1$ . Dans ces circonstances,  $W_{N,d;z}(q)$  est irréductible et le résultat voulu suit ainsi du fait que  $\text{rad } W_{N,d;z}(q) = 0$ . Notons que l'on interprète dans ce cas  $w_{1...r}$  comme le diagramme  $\text{id}_0$  de la figure 1.6.

(Cas 2) Supposons que  $\beta$  et  $N$  soient non nuls. Alors, comme le montre la figure 1.22, on a

$$\langle w_{1\dots r}, w_{1\dots r} \rangle_{d;z} = \chi_{d,z}(w_{1\dots r}^\dagger w_{1\dots r}) = \beta^r \chi_{d,z}(\text{id}_d) = \beta^r \neq 0$$

et  $w_{1\dots r} \notin \mathcal{R}_{N,d;z} = \text{rad } W_{N,d;z}(q)$  selon le théorème 1.5.

(Cas 3) Supposons que  $d$  et  $N$  soient non nuls. Dans cette situation, on obtient, encore une fois en vertu de la figure 1.22,

$$\langle w_{1\dots r}, w_{2\dots r+1} \rangle_{d;z} = \chi_{d,z}(w_{1\dots r}^\dagger w_{2\dots r+1}) = \chi_{d,z}(\text{id}_d) = 1 \neq 0$$

d'où la même contradiction qu'au cas précédent.

(Cas 4) Supposons que  $\alpha = z + z^{-1} \neq 0$ . En vertu des cas 2 et 3, on peut aussi supposer que  $\beta = d = 0$  et que  $r = \frac{1}{2}(N - d) = \frac{N}{2} > 0$ . Ainsi, on peut conclure de la même manière qu'au cas 2 puisque, à l'aide de la figure 1.22, on obtient

$$\langle w_{1\dots r}, w_{r+1\dots N} \rangle_{0;z} = \chi_{0;z}(w_{1\dots r}^\dagger w_{r+1\dots N}) = \alpha^r \chi_{0;z}(\text{id}_0) = \alpha^r \neq 0.$$

Ceci achève cette démonstration. □

Les résultats présentés dans cette section sont aussi valides (après modifications évidentes) pour les modules cellulaires  $V_N^d(q, v)$  en vertu de l'isomorphisme  $\varphi_{N,d}(v)$  présenté dans la section 1.2.3. En particulier, pour  $(d, v_1^{-N}), (t, v_2^{-N}) \in \Lambda^a$  avec  $(d, v_1^{-N}) \preceq_q (t, v_2^{-N})$  directement, le théorème 1.18 permet d'obtenir une inclusion  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire

$$\hat{\theta}_{t,d;v_2,v_1}(N) = \varphi_{N,d}(v_1)^{-1} \circ \theta_{t,d;z_2,z_1}(N) \circ \varphi_{N,t}(v_2) : V_N^t(q, v_2) \rightarrow V_N^d(q, v_1)$$

où on a posé  $z_1 = v_1^{-N}$  et  $z_2 = v_2^{-N}$ . De même, lorsque  $d \equiv_2 N$  et  $d \leq N$  avec  $q$  une racine de l'unité, le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v_1)$  est encore donné par une version tronquée de la figure 1.16 ou par la figure 1.18 s'il s'agit de la paire problématique.

On conclut enfin ce chapitre en présentant quelques résultats importants relatifs aux  $q$ -nombres,  $q$ -factoriels et coefficients  $q$ -binomiaux. Dans ces résultats, on utilise implicitement les relations évidentes  $[-x]_q = -[x]_q$  et  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} x \\ x-y \end{bmatrix}_q$  pour chaque  $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Proposition 1.21.** Soient  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq 2$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Alors,  $[x]_q = 0$  si et seulement si  $p$  divise  $x$ .

DÉMONSTRATION. Cela découle directement de la définition du  $q$ -nombre  $[x]_q$  et du fait que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. □

**Proposition 1.22** ( $q$ -identité de Pascal). Soient  $q \in \mathbb{C}^\times$  et  $k, x \in \mathbb{N}$  avec  $x \leq k - 1$ . Alors, on a la relation remarquable

$$\begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q = q^{\mp x} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + q^{\pm(k-x)} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$q^{\mp x}[k-x]_q + q^{\pm(k-x)}[x]_q = \frac{\pm 1}{q - q^{-1}}(q^{\pm(k-2x)} - q^{\mp k} + q^{\pm k} - q^{\pm(k-2x)}) = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} = [k]_q.$$

Ainsi, si  $x = 1$ , on obtient

$$q^{\mp x} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + q^{\pm(k-x)} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q = q^{\mp 1}[k-1]_q + q^{\pm(k-1)} = [k]_q = \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q$$

et, si  $x > 1$ , on a plutôt

$$\begin{aligned} q^{\mp x} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + q^{\pm(k-x)} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q &= q^{\mp x} \frac{[k-1]_q!}{[x]_q![k-x-1]_q!} + q^{\pm(k-x)} \frac{[k-1]_q!}{[x-1]_q![k-x]_q!} \\ &= \frac{[k-1]_q!}{[x]_q![k-x]_q!} (q^{\mp x}[k-x]_q + q^{\pm(k-x)}[x]_q) = \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Théorème 1.23** ( $q$ -théorème binomial). Soient  $k \geq 0$  et  $q \in \mathbb{C}$  non nul. Alors,

$$\sum_{x=0}^k (-1)^x q^{x(k+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q = \prod_{x=1}^k (1 - q^{2x}).$$

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur  $k$ . Si  $k = 0$ , le résultat est trivialement vrai. Si  $k \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^k (-1)^x q^{x(k+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q &= 1 + \sum_{x=1}^{k-1} (-1)^x q^{x(k+1)} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q + (-1)^k q^{k(k+1)} \\ &\stackrel{1}{=} 1 + \sum_{x=1}^{k-1} (-1)^x q^{x(k+1)} \left( q^{-x} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + q^{k-x} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q \right) + (-1)^k q^{k(k+1)} \\ &= 1 + \sum_{x=1}^{k-1} (-1)^x q^{xk} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + \sum_{x=1}^{k-1} (-1)^x q^{(x+1)k} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q + (-1)^k q^{k(k+1)} \\ &= \sum_{x=0}^{k-1} (-1)^x q^{xk} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + \sum_{x=1}^k (-1)^x q^{(x+1)k} \begin{bmatrix} k-1 \\ x-1 \end{bmatrix}_q \\ &= \sum_{x=0}^{k-1} (-1)^x q^{xk} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q + \sum_{x=0}^{k-1} (-1)^{x+1} q^{(x+2)k} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q \\ &= (1 - q^{2k}) \sum_{x=0}^{k-1} (-1)^x q^{xk} \begin{bmatrix} k-1 \\ x \end{bmatrix}_q \\ &\stackrel{2}{=} (1 - q^{2k}) \prod_{x=1}^{k-1} (1 - q^{2x}) = \prod_{x=1}^k (1 - q^{2x}) \end{aligned}$$

où la proposition 1.22 et l'hypothèse d'induction ont été utilisées aux égalités 1 et 2.  $\square$

**Proposition 1.24.** Soient  $p \geq 2$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Alors, la relation  $q^{p^2} = (-1)^{p+1}q^p$  est vérifiée.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $p \equiv_2 1$ . Alors,  $p = 2m + 1$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$  et  $p^2 = (2m + 1)p$  d'où  $q^{p^2} = q^{2mp}q^p = q^p = (-1)^{p+1}q^p$ . De la même façon, si  $p \equiv_2 0$ , on doit avoir  $p = 2m$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ . Remarquons que la relation  $q^p = q^{2m} = 1$  ne peut être satisfaite étant donné que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Ainsi,  $q^p = -1$  et  $q^{p^2} = q^{2mp} = 1 = -q^p = (-1)^{p+1}q^p$  comme voulu.  $\square$

**Théorème 1.25** (de  $q$ -Lucas<sup>10</sup>, [45]). Soient  $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $p \geq 2$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Soient aussi  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $x_2, y_2 < p$  tels que  $x = x_1p + x_2$  et  $y = y_1p + y_2$ . Alors, en posant  $\binom{x_1}{y_1} = 0$  si  $x_1 < y_1$ , on a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q = q^{p(y_1p(y_1-x_1)-x_2y_1-x_1y_2)} \binom{x_1}{y_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}_q$$

En particulier,  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q = 0$  si et seulement si  $x_1 < y_1$  ou  $x_2 < y_2$ .

**Proposition 1.26.** Considérons  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq 2$  et  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Alors,

$$[x_1p \pm x_2]_q = \pm q^{x_1p}[x_2]_q \quad \text{et} \quad [x_1p]_q = x_1q^{(1-x_1)p}[p]_q.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$[x_1p \pm x_2]_q = \frac{q^{x_1p \pm x_2} - q^{-(x_1p \pm x_2)}}{q - q^{-1}} = q^{x_1p} \left( \frac{q^{\pm x_2} - q^{-2x_1p}q^{\mp x_2}}{q - q^{-1}} \right) = q^{x_1p}[\pm x_2]_q = \pm q^{x_1p}[x_2]_q.$$

À partir de ce résultat et du théorème 1.25, on obtient aussi

$$x_1q^{p^2(1-x_1)} = \begin{bmatrix} x_1p \\ p \end{bmatrix}_q = \frac{[x_1p]_q}{[p]_q} \left( \prod_{\ell=1}^{p-1} \frac{[(x_1-1)p + \ell]_q}{[\ell]_q} \right) = q^{(x_1-1)p(p-1)} \frac{[x_1p]_q}{[p]_q}$$

d'où  $[x_1p]_q = x_1q^{p(x_1-1)}[p]_q = x_1q^{p(1-x_1)}[p]_q$  comme voulu.  $\square$

<sup>10</sup>Pour obtenir le résultat présenté ici à partir de la proposition 2.13 de [45], il suffit de remarquer que la  $q^2$ -caractéristique (telle qu'introduite dans la définition 1.4 de cette même référence) de  $\mathbb{C}$  est  $p$  en vertu de notre proposition 1.21. Par ailleurs, la définition de  $q$ -nombre considérée par les auteurs de cet article est différente de la nôtre et leur coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q^{\text{alt}}$  est relié à celui utilisé dans ce mémoire via

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{q^2}^{\text{alt}} = q^{y(x-y)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_q$$

pour  $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

# Chapitre 2

---

## La chaîne de spin XXZ

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une autre famille de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules. Ceux-ci, dénotés  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$ , sont intrinsèquement reliés au modèle XXZ périodique en mécanique statistique sur réseau et sont équivalents, dans la plupart des cas, aux modules cellulaires  $V_N^d(q,v)$  présentés dans la section 1.2. Toutefois, lorsque  $N$  et  $d$  sont choisis dans un ensemble discret, appelé *ensemble critique*, l'équivalence entre  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  et  $V_N^d(q,v)$  ne tient plus et la structure des représentations  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  demeure inconnue. La caractérisation explicite de cette structure est l'objectif principal de ce mémoire et sera effectuée dans le chapitre 4.

La section 2.1 a pour but d'introduire les représentations  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur la chaîne de spin XXZ périodique. Dans les deux sections subséquentes, certaines propriétés de ces représentations sont obtenues et des outils fondamentaux pour l'étude de leur structure sont développés. Dans la dernière section, le lien précis entre les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  et  $V_N^d(q,v)$  est donné avec la définition explicite de l'ensemble critique. Les résultats obtenus au cours du chapitre sont aussi combinés au sein de cette section afin d'obtenir certaines conclusions partielles quant à la structure des représentations  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  sur cet ensemble.

### 2.1. Une représentation de $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ sur la chaîne XXZ

En physique statistique, le modèle XXZ périodique permet de prédire l'évolution d'une chaîne circulaire de particules à interaction entre plus proches voisins. À un instant donné, chacune des particules considérées est associée à un état au sens quantique, c'est-à-dire à un élément de  $\mathbb{C}^2$ . S'il y a  $N$  particules, l'hamiltonien correspondant au modèle XXZ agit ainsi sur l'espace vectoriel  $\otimes^N \mathbb{C}^2$ . Afin d'écrire explicitement cet opérateur, il faut utiliser les matrices de Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec leur généralisation

$$\sigma_j^a = \underbrace{\text{id}_2 \otimes \cdots \otimes \text{id}_2}_{j-1 \text{ fois}} \otimes \sigma^a \otimes \underbrace{\text{id}_2 \otimes \cdots \otimes \text{id}_2}_{N-j \text{ fois}}$$

pour  $1 \leq j \leq N$ ,  $a \in \{x, y, z\}$  et  $\text{id}_2$  la matrice identité sur  $\mathbb{C}^2$ . Alors, l'hamiltonien XXZ est défini comme

$$\mathcal{H}_{\text{XXZ}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( \alpha_1 (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y) + \alpha_2 (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) + \alpha_3 (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \text{id}) \right) \quad (2.1)$$

où les indices sont considérés modulo  $N$  et où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$  sont des paramètres d'évolution à fixer (cf. [40]). Notons qu'une autre forme est donnée pour cet opérateur dans [41], mais qu'un changement de base adéquatement choisi permet de montrer que celle-ci est équivalente à celle donnée dans l'équation (2.1) (cf. [39]).

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la paramétrisation

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(v^2 + v^{-2}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2i}(v^2 - v^{-2}) \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(q + q^{-1})$$

avec  $q, v \in \mathbb{C}$  non-nuls et on dénote  $\mathbb{C}_N(q, v)$  la chaîne XXZ associée. On dénote d'ailleurs  $|+\rangle, |-\rangle$  les vecteurs de la base usuelle de  $\mathbb{C}^2$  et, pour  $x_1, \dots, x_N \in \{+, -\}$ , on écrit  $|x_1 \dots x_N\rangle_v = |x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_N\rangle$  afin de désigner l'élément de la base  $B_N^{\mathbb{C}}(q, v)$  de  $\mathbb{C}_N(q, v)$  induite de  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Avec cette convention, il est naturel de définir la translation gauche  $t \in \text{End } \mathbb{C}_N(q, v)$  par

$$t |x_1 \dots x_N\rangle_v = |x_2 \dots x_N x_1\rangle_v$$

lorsque  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_N^{\mathbb{C}}(q, v)$ . Puisque  $t^N = \text{id}$ , cet opérateur est inversible. Son inverse, la translation droite  $t^{-1} = t^{N-1}$ , est donné explicitement sur  $B_N^{\mathbb{C}}(q, v)$  via

$$t^{-1} |x_1 \dots x_N\rangle_v = |x_N x_1 \dots x_{N-1}\rangle_v.$$

Un autre opérateur sur la chaîne de spin XXZ est le *spin total*  $S^z \in \text{End } \mathbb{C}_N(q, v)$ . Celui-ci est défini comme

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sigma_j^z.$$

En décidant d'associer un élément de  $\{+, -\}$  à l'élément de même signe dans  $\{1, -1\}$ , on obtient que  $S^z$  agit diagonalement sur  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_N^{\mathbb{C}}(q, v)$  avec la valeur propre  $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N x_j$ . Le spectre de cet opérateur sur  $\mathbb{C}_N(q, v)$  est donc donné par

$$\begin{aligned} \text{spec } 2S^z &= \{-N, -N + 2, \dots, N\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_2 N \text{ et } |x| \leq N\}. \end{aligned}$$

Lorsque  $\beta = -(q + q^{-1})$ , le spin total, avec les translations présentées ci-haut, permet de définir une représentation  $\rho_{\text{XXZ}} : \text{TL}_N^a(\beta) \rightarrow \text{End } \mathbb{C}_N(q, v)$  donnée implicitement sur l'ensemble générateur  $\{e_1, \dots, e_N, \Omega, \Omega^{-1}\} \subseteq \text{TL}_N^a(\beta)$  par

$$\rho_{\text{XXZ}}(\Omega^{\pm 1}) = v^{\pm 2S^z} t^{\pm 1} \text{ et}$$

$$\rho_{\text{XXZ}}(e_j) = \frac{1}{2} \left( \alpha_1(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y) + \alpha_2(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) + \alpha_3(\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \text{id}) - \frac{q - q^{-1}}{2}(\sigma_j^z - \sigma_{j+1}^z) \right)$$

pour  $1 \leq j \leq N$  et où les indices sont pris modulo  $N$  (cf. [39], [41]). Cette représentation satisfait la relation

$$\sum_{j=1}^N \rho_{\text{XXZ}}(e_j) = \mathcal{H}_{\text{XXZ}}$$

Considérons désormais les matrices d'annihilation et de création généralisées

$$\sigma_j^{\pm} = \underbrace{\text{id}_2 \otimes \dots \otimes \text{id}_2}_{j-1 \text{ fois}} \otimes \sigma^{\pm} \otimes \underbrace{\text{id}_2 \otimes \dots \otimes \text{id}_2}_{N-j \text{ fois}} \quad \text{où} \quad \sigma^{\pm} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \pm 1 \\ 1 \mp 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } 1 \leq j \leq N$$

ainsi que la matrice

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & v^2 & 0 \\ 0 & v^{-2} & -q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned} \rho_{\text{XXZ}}(e_j) &= v^{-2} \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + v^2 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + (q + q^{-1}) \sigma_j^+ \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- - q \sigma_j^+ \sigma_j^- - q^{-1} \sigma_{j+1}^+ \sigma_{j+1}^- \\ &= \underbrace{\text{id}_2 \otimes \dots \otimes \text{id}_2}_{j-1 \text{ fois}} \otimes e \otimes \underbrace{\text{id}_2 \otimes \dots \otimes \text{id}_2}_{N-j-1 \text{ fois}} \end{aligned}$$

où les deux expressions sont respectivement valides pour  $1 \leq j \leq N$  et  $1 \leq j \leq N - 1$  (avec les indices pris modulo  $N$  dans la première expression). Choisissons  $d \in \text{spec } 2S^z$  et dénotons  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v)|_{2S^z=d}$ . En vertu de la définition de  $S^z$ , une base pour cet espace propre est

$$B_{N,d}^{\mathbb{C}}(q, v) = \left\{ |x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_N^{\mathbb{C}}(q, v) \mid \sum_{j=1}^N x_j = d \right\}$$

d'où, en particulier,  $\dim \mathbb{C}_N(q, v, d) = \binom{N}{\frac{N-d}{2}}$ . Remarquons d'ailleurs que, si  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  est un élément de  $B_{N,d}^{\mathbb{C}}(q, v)$ , on a

$$\begin{aligned} S^z \rho_{\text{XXZ}}(\Omega) |x_1 \dots x_N\rangle_v &= S^z v^{2S^z} t |x_1 \dots x_N\rangle_v = \frac{1}{2} (x_2 + \dots + x_N + x_1) v^{2S^z} |x_2 \dots x_N x_1\rangle \\ &= \frac{d}{2} v^{2S^z} t |x_1 \dots x_N\rangle_v = \frac{d}{2} \rho_{\text{XXZ}}(\Omega) |x_1 \dots x_N\rangle_v = \rho_{\text{XXZ}}(\Omega) S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

et on obtient de même  $S^z \rho_{\text{XXZ}}(\Omega^{-1}) |x_1 \dots x_N\rangle_v = \rho_{\text{XXZ}}(\Omega^{-1}) S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v$ .

En outre, on a aussi

$$\rho_{\text{XXZ}}(e_1) |x_1 \dots x_N\rangle_v = (e \otimes \underbrace{\text{id}_2 \otimes \dots \otimes \text{id}_2}_{N-j-2 \text{ fois}}) |x_1 \dots x_N\rangle_v = \left( e(|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle) \right) \otimes |x_3\rangle \otimes \dots \otimes |x_N\rangle$$

avec, selon la définition de la matrice  $e$ ,

$$e(|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle) = \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{-2x_1} (|x_2\rangle \otimes |x_1\rangle) - q^{x_1} (|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle) \right)$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S^z \rho_{\text{XXZ}}(e_1) |x_1 \dots x_N\rangle_v &= \delta_{x_1, -x_2} S^z \left( v^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_v - q^{x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_v \right) \\ &= \frac{d}{2} \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_v - q^{x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_v \right) = \rho_{\text{XXZ}}(e_1) S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

et on obtient alors, selon les relations de définition de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ ,

$$\begin{aligned} S^z \rho_{\text{XXZ}}(e_j) |x_1 \dots x_N\rangle_v &= S^z \rho_{\text{XXZ}}(\Omega)^{-(j-1)} \rho_{\text{XXZ}}(e_1) \rho_{\text{XXZ}}(\Omega)^{j-1} |x_1 \dots x_N\rangle_v \\ &= \rho_{\text{XXZ}}(e_j) S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j \leq N$ . Par conséquent, la représentation  $\rho_{\text{XXZ}}$  laisse  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  invariant et permet d'obtenir une sous-représentation  $\rho_d : \text{TL}_N^a(\beta) \rightarrow \text{End } \mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Au sein de cette sous-représentation, la relation  $\rho_d(\Omega)^N = v^{Nd} \text{id}$  est vérifiée étant donné que

$$\rho_d(\Omega)^N |x_1 \dots x_N\rangle_v = v^{2NS^z} t^N |x_1 \dots x_N\rangle_v = v^{Nd} |x_1 \dots x_N\rangle_v$$

lorsque  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$ . Dans les sections suivantes, on omettra de désigner explicitement la représentation  $\rho_d$  (ou  $\rho_{\text{XXZ}}$ ) devant les éléments de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  lors de leur action sur  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (ou  $\mathbb{C}_N(q, v)$ ). Il sera ainsi toujours sous-entendu que  $\text{TL}_N^a(\beta)$  agit sur les espaces propres de la chaîne XXZ via cette représentation.

## 2.2. Retournement des spins

On introduit maintenant un isomorphisme  $\eta_N(q, v)$  de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules reliant les espaces propres de  $S^z$  provenant de deux chaînes de spin XXZ. Rappelons que les résultats de la section précédente permettent d'exprimer l'action de  $e_1$  sur  $\mathbb{C}_N(q, v)$  par

$$e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_v = \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_v - q^{x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_v \right) \quad (2.2)$$

**Proposition 2.1.** Soit  $v \in \mathbb{C}$  non nul. L'application  $\eta_N(q, v) : \mathbb{C}_N(q, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1})$  définie  $\mathbb{C}$ -linéairement par

$$[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) = |(-x_1) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}}$$

est un isomorphisme de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules tel que  $[\eta_N(q, v)](\mathbb{C}_N(q, v, d)) = \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$ .



DÉMONSTRATION. Soit  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_N^C(q, v)$ . Alors,  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$  avec la valeur propre  $d = \sum_{j=1}^N x_j$ . De plus, on a

$$2S^z[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) = 2S^z|(-x_1) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}} = -d[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v)$$

de sorte que  $[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$ . En outre,  $\eta_N(q, v)$  est clairement inversible et, puisque  $\dim \mathbb{C}_N(q, v, d) = \binom{N}{\frac{N-d}{2}} = \binom{N}{\frac{N+d}{2}} = \dim \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$ , on a effectivement

$$[\eta_N(q, v)](\mathbb{C}_N(q, v, d)) = \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d).$$

Il suffit donc de vérifier la  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéarité de  $\eta_N(q, v)$ . Pour ce faire, remarquons que

$$\begin{aligned} e_1[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) &= e_1|(-x_1) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}} \\ &= \delta_{x_1, -x_2} \left( (v^{-1})^{2x_1} |(-x_2)(-x_1)(-x_3) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}} - (q^{-1})^{-x_1} |(-x_1) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}} \right) \\ &= [\eta_N(q, v)] \left[ \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_v - q^{x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_v \right) \right] \\ &= [\eta_N(q, v)](e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_v). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Omega[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) &= (v^{-1})^{2S^z} t |(-x_1) \dots (-x_N)\rangle_{v^{-1}} = v^d |(-x_2) \dots (-x_N)(-x_1)\rangle_{v^{-1}} \\ &= [\eta_N(q, v)](v^{2S^z} |x_2 \dots x_N x_1\rangle_v) = [\eta_N(q, v)]\Omega |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

Alors, puisque  $\Omega^N = v^{Nd} \text{id}$  sur  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et sur  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$ , on a

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) &= v^{-Nd} \Omega^{N-1}[\eta_N(q, v)](|x_1 \dots x_N\rangle_v) \\ &= [\eta_N(q, v)](v^{-Nd} \Omega^{N-1} |x_1 \dots x_N\rangle_v) = [\eta_N(q, v)](\Omega^{-1} |x_1 \dots x_N\rangle_v) \end{aligned}$$

et le résultat voulu découle du fait que  $e_j = \Omega^{-(j-1)} e_1 \Omega^{j-1}$  pour  $1 \leq j \leq N$ .  $\square$

Pour la suite de ce mémoire, on notera  $\eta_N(q, v, d) : \mathbb{C}_N(q, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$  l'isomorphisme induit de  $\eta_N(q, v)$  via la restriction à l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ .

## 2.3. Dualité

On effectue maintenant un bref interlude à l'étude de la représentation de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  sur la chaîne de spin XXZ dans le but d'étudier les conséquences de l'existence d'une anti-involution  $\dagger : A \rightarrow A^{\text{op}}$  pour une algèbre unitaire et associative  $A$  arbitraire. De manière plus détaillée, il est démontré dans cette section qu'une telle anti-involution permet de définir une dualité  $\mathbb{C}$ -linéaire  $*$  de  $\text{mod } A$  préservant les suites exactes courtes non scindées. D'autres résultats sont ensuite obtenus dans le cas où  $A = \text{TL}_N^a(\beta)$  avec  $\dagger : \text{TL}_N^a(\beta) \rightarrow \text{TL}_N^a(\beta)^{\text{op}}$  l'anti-involution

définie dans la section 1.1. En particulier, l'image des  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules irréductibles  $L_{N,d;z}$  et des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q,v,d)$  sous la dualité induite de cette anti-involution est calculée.

### 2.3.1. Cas général

Soit  $A$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre unitaire et associative munie d'une anti-involution  $\dagger : A \rightarrow A^{\mathrm{op}}$ . Alors, pour un  $A$ -module à gauche  $M$ , on équipe aussi l'espace vectoriel dual  $M^T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, \mathbb{C})$  de la structure d'un  $A$ -module à gauche via l'action définie intrinsèquement par

$$(a \star f)(m) = (fa^\dagger)(m) = f(a^\dagger m)$$

si  $a \in A$ ,  $f \in M^T$  et  $m \in M$ . Il s'agit effectivement d'une  $A$ -action à gauche puisque, pour tout choix de  $a, b \in A$ ,  $f \in M^T$ ,  $m \in M$ , on a<sup>1</sup>

$$(a \star (b \star f))(m) = (b \star f)(a^\dagger m) = f(b^\dagger a^\dagger m) = f((ab)^\dagger m) = ((ab) \star f)(m)$$

et

$$(\mathrm{id} \star f)(m) = f(\mathrm{id}^\dagger m) = f(m)$$

On note  $M^*$  le  $A$ -module à gauche  $M^T$  associé à cette action et on l'appelle le  $A$ -module dual à  $M$ . Pour  $g : M \rightarrow N$  un morphisme de  $A$ -modules, on note également

$$g^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(g, \mathbb{C}) : N^T \rightarrow M^T$$

la précomposition par  $g$ . Remarquons que, par  $A$ -linéarité de  $g$ ,

$$\begin{aligned} [g^*(a \star f)](m) &= [(a \star f) \circ g](m) = f(a^\dagger g(m)) \\ &= f \circ g(a^\dagger m) = [a \star (f \circ g)](m) \\ &= [a \star g^*(f)](m) \end{aligned}$$

si  $a \in A$ ,  $f \in N^T$  et  $m \in M$ . Ainsi,  $g^*(a \star f) = a \star g^*(f)$  et  $g^* \in \mathrm{Hom}_A(N^*, M^*)$ . Par conséquent, on peut conclure de la functorialité et de la  $\mathbb{C}$ -linéarité de  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \mathbb{C})$  que la correspondance donnée par  $M \mapsto M^*$  et  $g \mapsto g^*$  définit un endofoncteur contravariant  $\mathbb{C}$ -linéaire  $*$  :  $\mathrm{mod} A \rightarrow \mathrm{mod} A$ .

**Proposition 2.2.** L'endofoncteur  $*$  :  $\mathrm{mod} A \rightarrow \mathrm{mod} A$  est une dualité, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme fonctoriel  $\Phi : \mathrm{id}_{\mathrm{mod} A} \xrightarrow{\sim} *^2$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $M$  un  $A$ -module. Soit aussi  $\{m_i\}_{i=1}^\ell$  une  $\mathbb{C}$ -base de  $M$ . Alors,  $\{m_i^*\}_{i=1}^\ell \subseteq M^*$  avec  $m_j^*(m_i) = \delta_{ij}$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $M$ , dite duale à  $\{m_i\}_{i=1}^\ell$ . De la même façon, l'ensemble  $\{(m_i^*)^*\}_{i=1}^\ell$  avec  $(m_j^*)^*(m_i^*) = \delta_{ij}$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $(M^*)^*$ , dite doublement duale à  $\{m_i\}_{i=1}^\ell$ . Soit  $\Phi(M) : M \rightarrow (M^*)^*$  l'application définie  $\mathbb{C}$ -linéairement par  $\Phi(M)(m_i) = (m_i^*)^*$ . Alors,  $\Phi(M)$  est clairement un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

<sup>1</sup>Rappelons qu'une anti-involution est en particulier un morphisme d'algèbres de sorte que  $\mathrm{id}^\dagger = \mathrm{id}$ .

Il s'agit aussi d'un morphisme de  $A$ -modules. En effet, soient  $a \in A$  et  $\{\gamma_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq \ell} \subseteq \mathbb{C}$  tels que  $am_i = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij} m_j$  lorsque  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ . Alors, pour  $1 \leq i, k \leq \ell$ ,

$$\begin{aligned} (a^\dagger \star m_i^*)(m_k) &= m_i^*(am_k) = m_i^* \left( \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{kj} m_j \right) \\ &= \gamma_{ki} = \left( \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ji} m_j^* \right) (m_k) \end{aligned}$$

de sorte que  $a^\dagger \star m_i^* = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ji} m_j^*$ . Notons pour la suite  $\diamond$  l'action de  $A$  sur  $(M^*)^*$  induite par le foncteur  $*$ . Celle-ci est donnée par la relation intrinsèque  $[b \diamond (m_i^*)^*](m_j^*) = (m_i^*)^*(b^\dagger \star m_j^*)$  lorsque  $b \in A$  et  $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ . Remarquons que, pour  $1 \leq i, k \leq \ell$ ,

$$\begin{aligned} (a \diamond (m_i^*)^*)(m_k^*) &= (m_i^*)^*(a^\dagger \star m_k^*) = (m_i^*)^* \left( \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{jk} m_j^* \right) \\ &= \gamma_{ik} = \left( \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij} (m_j^*)^* \right) (m_k^*) \end{aligned}$$

et il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned} a \diamond \Phi(M)(m_i) &= a \diamond (m_i^*)^* = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij} (m_j^*)^* \\ &= \Phi(M) \left( \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij} m_j \right) = \Phi(M)(am_i) \end{aligned}$$

de sorte que  $\Phi(M)$  est  $A$ -linéaire comme annoncé ci-haut et correspond ainsi à un isomorphisme de  $A$ -modules. Il suffit alors de démontrer que la correspondance  $M \mapsto \Phi(M)$  est fonctorielle. Soient donc  $g : M \rightarrow N$  un morphisme de  $A$ -modules ainsi que  $\{m_i\}_{i=1}^{\ell}$  et  $\{n_j\}_{j=1}^s$  des  $\mathbb{C}$ -bases pour  $M$  et  $N$  respectivement. Soient aussi  $\{m_i^*\}_{i=1}^{\ell}$ ,  $\{n_j^*\}_{j=1}^s$ ,  $\{(m_i^*)^*\}_{i=1}^{\ell}$  et  $\{(n_j^*)^*\}_{j=1}^s$  les bases duales et doublement duales à  $\{m_i\}_{i=1}^{\ell}$  et  $\{n_j\}_{j=1}^s$ . On veut montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi(M)} & (M^*)^* \\ g \downarrow & & \downarrow (g^*)^* \\ N & \xrightarrow{\Phi(N)} & (N^*)^* \end{array}$$

Soit  $\{\alpha_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq \ell} \subseteq \mathbb{C}$  satisfaisant  $g(m_i) = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} n_j$  lorsque  $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ . Considérons également  $1 \leq k \leq \ell$  et  $1 \leq i \leq s$ . Remarquons que, si  $r \in \{1, \dots, \ell\}$ ,

$$(n_i^* \circ g)(m_r) = n_i^* \left( \sum_{j=1}^s \alpha_{rj} n_j \right) = \alpha_{ri} = \left( \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{ji} m_j^* \right) (m_r).$$

Ainsi,  $n_i^* \circ g = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{ji} m_j^*$  et

$$\begin{aligned} [\Phi(N) \circ g(m_k)](n_i^*) &= \left[ \Phi(N) \left( \sum_{j=1}^s \alpha_{kj} n_j \right) \right] (n_i^*) = \left( \sum_{j=1}^s \alpha_{kj} (n_j^*)^* \right) (n_i^*) = \alpha_{ki} \\ &= (m_k^*)^* \left( \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_{ji} m_j^* \right) = (m_k^*)^* (n_i^* \circ g) = [(m_k^*)^* \circ g^*](n_i^*) \\ &= \left[ (g^*)^* \left( (m_k^*)^* \right) \right] (n_i^*) = [(g^*)^* \circ \Phi(M)(m_k)](n_i^*) \end{aligned}$$

de sorte que  $\Phi(N) \circ g = (g^*)^* \circ \Phi(M)$ . Ceci achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire 2.3.** L'endofoncteur  $*$  :  $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$  est tel que  $(*, *)$  forme une paire adjointe. En particulier, il s'agit d'un foncteur exact.

DÉMONSTRATION. Fixons  $M, N$  des  $A$ -modules à gauche. Commençons par définir une application  $\phi_{M,N} : \text{Hom}_A(M^*, N) \rightarrow \text{Hom}_A(N^*, M)$  par  $\phi_{M,N}(g) = \Phi^{-1}(M) \circ g^*$  avec  $\Phi^{-1}(M)$  l'inverse de l'isomorphisme  $\Phi(M) : M \xrightarrow{\sim} (M^*)^*$  de la démonstration précédente. Notons que, puisque  $*$  est une dualité, il s'agit d'un foncteur plein, dense et fidèle selon le théorème 6.2 du chapitre III de [2]. Par conséquent, l'association  $g \mapsto g^*$  est bijective et il en est de même pour  $\phi_{M,N}$  étant donné que  $\Phi^{-1}(M)$  est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que la correspondance  $(M, N) \mapsto \phi_{M,N}$  est fonctorielle dans les deux variables. Soient ainsi  $M, N, L$  des  $A$ -modules avec  $g : M \rightarrow L$  une application  $A$ -linéaire. Alors, puisque  $\Phi : \text{id}_{\text{mod } A} \xrightarrow{\sim} *^2$  est un isomorphisme fonctoriel, si  $h \in \text{Hom}_A(M^*, N)$ , on a

$$\begin{aligned} [\phi_{L,N} \circ \text{Hom}_A(g^*, N)](h) &= \phi_{L,N}(h \circ g^*) = \Phi^{-1}(L) \circ (h \circ g^*)^* = \Phi^{-1}(L) \circ (g^*)^* \circ h^* \\ &= g \circ \Phi^{-1}(M) \circ h^* = [\text{Hom}_A(N^*, g) \circ \phi_{M,N}](h) \end{aligned}$$

d'où  $\phi_{L,N} \circ \text{Hom}_A(g^*, N) = \text{Hom}_A(N^*, g) \circ \phi_{M,N}$ . De même, si  $f \in \text{Hom}_A(N, L)$ , alors

$$\begin{aligned} [\phi_{L,M} \circ \text{Hom}_A(M^*, f)](h) &= \phi_{L,M}(f \circ h) = \Phi^{-1}(M) \circ (f \circ h)^* = \Phi^{-1}(M) \circ h^* \circ f^* \\ &= \text{Hom}_A(f^*, M) \left( \Phi^{-1}(M) \circ h^* \right) = [\text{Hom}_A(f^*, M) \circ \phi_{M,N}](h) \end{aligned}$$

lorsque  $h \in \text{Hom}_A(M^*, N)$ . Par conséquent,  $\phi_{L,M} \circ \text{Hom}_A(M^*, f) = \text{Hom}_A(f^*, M) \circ \phi_{M,N}$  et les résultats précédents permettent de conclure que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M^*, N) & \xrightarrow{\phi_{M,N}} & \text{Hom}_A(N^*, M) & & \text{Hom}_A(M^*, N) & \xrightarrow{\phi_{M,N}} & \text{Hom}_A(N^*, M) \\ \text{Hom}_A(g^*, N) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(N^*, g) & & \text{Hom}_A(M^*, f) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_A(f^*, M) \\ \text{Hom}_A(L^*, N) & \xrightarrow{\phi_{L,N}} & \text{Hom}_A(N^*, L) & & \text{Hom}_A(M^*, L) & \xrightarrow{\phi_{L,N}} & \text{Hom}_A(L^*, M) \end{array}$$

d'où  $(*, *)$  est une paire adjointe. La seconde affirmation énoncée dans ce corollaire découle dans ces circonstances du théorème 1.6 du chapitre IV de [2].  $\square$

Un autre corollaire de la proposition 2.2 est donné ci-dessous. Il stipule que, pour un  $A$ -module à gauche  $M$ , la structure du  $A$ -module (à gauche) dual  $M^*$  correspond à la structure réciproque de celle de  $M$ . Autrement dit, on obtient le diagramme de Loewy de  $M^*$  en renversant toutes les flèches du diagramme correspondant pour  $M$  et en appliquant le foncteur  $*$  sur chacun des facteurs irréductibles présents dans ce dernier diagramme. Supposons par exemple que le  $A$ -module  $M$  admette la structure donnée par

$$\begin{array}{ccccc} & I_2 & & I_4 & & I_6 \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ I_1 & & I_3 & & I_5 & \end{array}$$

avec  $I_1, \dots, I_6$  des  $A$ -modules irréductibles. Alors, le diagramme de Loewy de  $M^*$  est, en vertu du corollaire 2.4,

$$\begin{array}{ccccc} I_1^* & & I_3^* & & I_5^* \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ & I_2^* & & I_4^* & & I_6^* \end{array}$$

Donc, pour comprendre entièrement l'action du foncteur  $*$  sur  $\text{mod } A$ , il est suffisant d'étudier le dual des  $A$ -modules irréductibles (qui seront aussi irréductibles selon le corollaire 2.4). On effectuera cette étude lors de la section suivante dans le cas de l'algèbre  $\text{TL}_N^a(\beta)$  (où l'anti-involution  $\dagger$  a été définie dans la section 1.1 et est donnée via une réflexion des diagrammes par rapport à un axe vertical central).

**Corollaire 2.4.** Une suite exacte courte  $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$  dans  $\text{mod } A$  est scindée si et seulement si la suite exacte courte  $0 \rightarrow Q^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} N^* \rightarrow 0$ , induite par exactitude de l'endofoncteur  $*$ , est aussi scindée.

**DÉMONSTRATION.** On démontre la nécessité et la suffisance séparément.

( $\Rightarrow$ ) Si la suite exacte courte  $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$  de  $\text{mod } A$  scinde, alors  $f$  est une section. Ainsi, il existe un morphisme  $f' : M \rightarrow N$  tel que  $f' \circ f = 1_N$ . Par conséquent,  $f^* \circ (f')^* = (f' \circ f)^* = 1_{N^*}$  de sorte que  $f^*$  est une rétraction et la suite exacte courte  $0 \rightarrow Q^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} N^* \rightarrow 0$  scinde.

( $\Leftarrow$ ) Si la suite exacte courte  $0 \rightarrow Q^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} N^* \rightarrow 0$  scinde, alors  $g^*$  est une section et il existe un morphisme  $g' : M^* \rightarrow Q^*$  tel que  $g' \circ g^* = 1_{Q^*}$ . Posons  $h = \Phi^{-1}(M) \circ (g')^* \circ \Phi(Q)$ . Par functorialité de l'isomorphisme  $\Phi : \text{id}_{\text{mod } A} \xrightarrow{\sim} *^2$ , on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & Q & \longrightarrow & 0 \\ & & \Phi(N) \downarrow & & \downarrow \Phi(M) & & \downarrow \Phi(Q) & & \\ 0 & \longrightarrow & (N^*)^* & \xrightarrow{(f^*)^*} & (M^*)^* & \xrightarrow{(g^*)^*} & (Q^*)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g \circ h &= g \circ \Phi^{-1}(M) \circ (g')^* \circ \Phi(Q) = \Phi^{-1}(Q) \circ (g^*)^* \circ (g')^* \circ \Phi(Q) \\ &= \Phi^{-1}(Q) \circ (g' \circ g^*)^* \circ \Phi(Q) = \Phi^{-1}(Q) \circ 1_{(Q^*)^*} \circ \Phi(Q) = 1_Q \end{aligned}$$

d'où  $g$  est une rétraction et la suite exacte courte  $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \rightarrow 0$  scinde.

Ceci conclut cette démonstration.  $\square$

### 2.3.2. La dualité pour $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$

On se limite désormais au cas de l'endofoncteur  $*$  de  $\mathrm{mod} \mathrm{TL}_N^a(\beta)$  défini à l'aide de l'anti-involution  $\dagger : \mathrm{TL}_N^a(\beta) \rightarrow \mathrm{TL}_N^a(\beta)^{\mathrm{op}}$  de la section 1.1. On démontre en particulier l'existence d'un isomorphisme  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire reliant, pour une paire  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  arbitraire, les irréductibles  $L_{N,d;z}^*$  et  $L_{N,d;z^{-1}}$ . À l'aide de ce résultat et du corollaire 2.4, il devient alors possible de déterminer, à partir de la structure d'un module  $M$  quelconque, la structure du module dual  $M^*$ . Considérons cependant d'abord l'effet du foncteur  $*$  sur les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  introduits à la section 2.1.

Soient donc  $v \in \mathbb{C}$  non nul,  $d \in \mathrm{spec} 2S^z = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_2 N \text{ et } |x| \leq N\}$  et  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  un élément de  $B_{N,d}^C(q, v)$ . Dénotons par  $B_{N,d}^*(q, v)$  la base duale à  $B_{N,d}^C(q, v)$  ainsi que par  $\langle x_1 \dots x_N | _v = |x_1 \dots x_N\rangle_v^T$  l'unique élément de cette base duale respectant la relation  $\langle x_1 \dots x_N | _v |y_1 \dots y_N\rangle_v = \prod_{j=1}^N \delta_{x_j, y_j}$  pour  $|y_1 \dots y_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$ . Alors, si  $|y_1 \dots y_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$ ,

$$\begin{aligned} \left( \Omega \star \langle x_1 \dots x_N | _v \right) |y_1 \dots y_N\rangle_v &= \langle x_1 \dots x_N | _v \left( \Omega^\dagger |y_1 \dots y_N\rangle_v \right) = \langle x_1 \dots x_N | _v \left( \Omega^{-1} |y_1 \dots y_N\rangle_v \right) \\ &= v^{-d} \langle x_1 \dots x_N | _v |y_N y_1 \dots y_{N-1}\rangle_v = \left( v^{-d} \langle x_2 \dots x_N x_1 | _v \right) |y_1 \dots y_N\rangle_v \end{aligned}$$

d'où

$$\Omega \star \langle x_1 \dots x_N | _v = v^{-d} \langle x_2 \dots x_N x_1 | _v. \quad (2.3)$$

De la même façon, selon (2.2),

$$\begin{aligned} \left( e_1 \star \langle x_1 \dots x_N | _v \right) |y_1 \dots y_N\rangle_v &= \langle x_1 \dots x_N | _v \left( e_1^\dagger |y_1 \dots y_N\rangle_v \right) = \langle x_1 \dots x_N | _v \left( e_1 |y_1 \dots y_N\rangle_v \right) \\ &= \langle x_1 \dots x_N | _v \left[ \delta_{y_1, -y_2} \left( v^{-2y_1} |y_2 y_1 y_3 \dots y_N\rangle_v - q^{y_1} |y_1 \dots y_N\rangle_v \right) \right] \\ &= \delta_{y_1, -y_2} \left( v^{-2y_1} \delta_{x_1, y_2} \delta_{x_2, y_1} - q^{y_1} \delta_{x_1, y_1} \delta_{x_2, y_2} \right) \prod_{i=3}^N \delta_{x_i, y_i} \\ &= \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{2x_1} \delta_{x_2, y_1} \delta_{x_1, y_2} - q^{x_1} \delta_{x_1, y_1} \delta_{x_2, y_2} \right) \prod_{i=3}^N \delta_{x_i, y_i} \\ &= \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{2x_1} \langle x_2 x_1 x_3 \dots x_N | _v - q^{x_1} \langle x_1 \dots x_N | _v \right) |y_1 \dots y_N\rangle_v \end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$e_1 \star \langle x_1 \dots x_N |_v = \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{2x_1} \langle x_2 x_1 x_3 \dots x_N |_v - q^{x_1} \langle x_1 \dots x_N |_v \right). \quad (2.4)$$

Les équations (2.3) et (2.4) permettent de conclure que les matrices représentant l'action à gauche de  $\Omega$  et de  $e_1$  (via  $\star$ ) sur  $B_{N,d}^*(q,v)$  correspondent respectivement aux transposées des matrices représentant l'action de  $\Omega^{-1}$  et de  $e_1$  sur  $B_{N,d}^C(q,v)$ . Ces observations pourraient servir à prouver une seconde fois le corollaire 2.4 dans le cas particulier où  $A = \text{TL}_N^a(\beta)$  et où  $M = \mathbb{C}_N(q,v,d)$ . Elles simplifient aussi grandement la démonstration suivante.

**Proposition 2.5.** L'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\psi_N(q,v,d) : \mathbb{C}_N^*(q,v,d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q,v^{-1},d)$  définie sur la base duale  $B_{N,d}^*(q,v)$  par

$$[\psi_N(q,v,d)](\langle x_1 \dots x_N |_v) = |x_1 \dots x_N \rangle_{v^{-1}}$$

est un isomorphisme de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules.

DÉMONSTRATION. Clairement,  $\psi_N(q,v,d)$  est bijective. De plus, selon les équations (2.3) et (2.4), si  $\langle x_1 \dots x_N |_v \in B_{N,d}^*(q,v)$ ,

$$\begin{aligned} [\psi_N(q,v,d)](\Omega \star \langle x_1 \dots x_N |_v) &= v^{-d} [\psi_N(q,v,d)](\langle x_2 \dots x_N x_1 |_v) = v^{-d} |x_2 \dots x_N x_1 \rangle_{v^{-1}} \\ &= \Omega |x_1 \dots x_N \rangle_{v^{-1}} = \Omega [\psi_N(q,v,d)](\langle x_1 \dots x_N |_v) \end{aligned}$$

et, selon l'équation (2.2),

$$\begin{aligned} [\psi_N(q,v,d)](e_1 \star \langle x_1 \dots x_N |_v) &= \delta_{x_1, -x_2} [\psi_N(q,v,d)](v^{2x_1} \langle x_2 x_1 x_3 \dots x_N |_v - q^{x_1} \langle x_1 \dots x_N |_v) \\ &= \delta_{x_1, -x_2} \left( v^{2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N \rangle_{v^{-1}} - q^{x_1} |x_1 \dots x_N \rangle_{v^{-1}} \right) \\ &= e_1 |x_1 \dots x_N \rangle_{v^{-1}} = e_1 [\psi_N(q,v,d)](\langle x_1 \dots x_N |_v). \end{aligned}$$

En outre, utilisant à nouveau l'équation (2.3), on obtient,

$$\begin{aligned} [\psi_N(q,v,d)](\Omega^{-1} \star \langle x_1 \dots x_N |_v) &= v^d [\psi_N(q,v,d)](\Omega^{-1} \star \Omega \star \langle x_N x_1 \dots x_{N-1} |_v) \\ &= v^d |x_N x_1 \dots x_{N-1} \rangle_{v^{-1}} = \Omega^{-1} |x_1 \dots x_N \rangle_{v^{-1}} \\ &= \Omega^{-1} [\psi_N(q,v,d)](\langle x_1 \dots x_N |_v) \end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité étant donné que  $e_j = \Omega^{-(j-1)} e_1 \Omega^{j-1}$  pour  $1 \leq j \leq N$  selon les relations de définition de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ .  $\square$

**Proposition 2.6.** Soit  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$ . Alors,  $L_{N,d,z}^* \simeq L_{N,d,z^{-1}}$  comme  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules.

DÉMONSTRATION. Posons  $B = B_{N,d}^W(q,z)$  et dénotons par  $B^*$  la base de  $W_{N,d;z}^*(q)$  duale à  $B$ . Pour  $\mu \in B$ , dénotons d'ailleurs par  $\mu^*$  l'élément de  $B^*$  défini via  $\mu^* \nu = \delta_{\mu,\nu}$  si  $\nu \in B$ . Puisque  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$ , on doit aussi avoir  $(d, z^{-1}) \in \Lambda^a(N)$ . Ainsi, selon les résultats de la section 1.2, il existe une forme bilinéaire  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -invariante  $\langle -, - \rangle_{d,z^{-1}} : W_{N,d;z^{-1}}(q) \times W_{N,d;z}(q) \rightarrow \mathbb{C}$

de radical  $\mathcal{R}_{N,d;z^{-1}} = \text{rad } W_{N,d;z^{-1}}(q)$ . On peut donc définir  $\Psi : W_{N,d;z^{-1}}(q) \rightarrow W_{N,d;z}^*(q)$  comme

$$\Psi(x) = \sum_{\mu \in B} \langle x, \mu \rangle_{d;z^{-1}} \mu^*.$$

Remarquons que la bilinéarité de  $\langle -, - \rangle_{d;z^{-1}}$  force la  $\mathbb{C}$ -linéarité de  $\Psi$  et que

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } \Psi &\iff \Psi(x) = \sum_{\mu \in B} \langle x, \mu \rangle_{d;z^{-1}} \mu^* = 0 \iff \langle x, \mu \rangle_{d;z^{-1}} = 0 \text{ pour chaque } \mu \in B \\ &\iff \langle x, - \rangle_{d;z^{-1}} = 0 \iff x \in \mathcal{R}_{N,d;z^{-1}} = \text{rad } W_{N,d;z^{-1}}(q) \end{aligned}$$

de sorte que  $\text{Ker } \Psi = \text{rad } W_{N,d;z^{-1}}(q)$ . Considérons maintenant  $a \in \text{TL}_N^a(\beta)$ ,  $x \in W_{N,d;z^{-1}}(q)$  et  $\sigma \in B$ . Soit aussi  $\{\gamma_\nu\}_{\nu \in B} \subseteq \mathbb{C}$  tel que  $a^\dagger \sigma = \sum_{\nu \in B} \gamma_\nu \nu$ . Alors, en vertu de la  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -invariance de  $\langle -, - \rangle_{d;z^{-1}}$ , on a

$$\begin{aligned} [\Psi(ax)](\sigma) &= \left[ \sum_{\mu \in B} \langle ax, \mu \rangle_{d;z^{-1}} \mu^* \right] (\sigma) = \langle ax, \sigma \rangle_{d;z^{-1}} = \langle x, a^\dagger \sigma \rangle_{d;z^{-1}} = \left\langle x, \sum_{\nu \in B} \gamma_\nu \nu \right\rangle_{d;z^{-1}} \\ &= \sum_{\nu \in B} \gamma_\nu \langle x, \nu \rangle_{d;z^{-1}} = \sum_{\nu \in B} \langle x, \nu \rangle_{d;z^{-1}} \left[ \nu^* \left( \sum_{\mu \in B} \gamma_\mu \mu \right) \right] = \sum_{\nu \in B} \langle x, \nu \rangle_{d;z^{-1}} \nu^* (a^\dagger \sigma) \\ &= \left[ \left( \sum_{\nu \in B} \langle x, \nu \rangle_{d;z^{-1}} \nu^* \right) a^\dagger \right] (\sigma) = [\Psi(x) a^\dagger](\sigma) = [a \star \Psi(x)](\sigma) \end{aligned}$$

de sorte que  $\Psi(ax) = a \star \Psi(x)$  et  $\Psi$  est ainsi  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire. Dans ce cas, étant donné que  $\text{Ker } \Psi = \text{rad } W_{N,d;z^{-1}}(q)$  et que  $L_{N,d;z^{-1}} = \text{top } W_{N,d;z^{-1}}(q)$ , il existe une unique application  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire  $\bar{\Psi} : L_{N,d;z^{-1}} \rightarrow W_{N,d;z}^*(q)$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{N,d;z^{-1}}(q) & \xrightarrow{\Psi} & W_{N,d;z}^*(q) \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\Psi} & \\ L_{N,d;z^{-1}} & & \end{array}$$

avec  $\pi : W_{N,d;z^{-1}}(q) \rightarrow L_{N,d;z^{-1}}$  la projection. Or<sup>2</sup>,  $\text{Ker } \Psi = \text{rad } W_{N,d;z^{-1}}(q) \neq W_{N,d;z^{-1}}(q)$  d'où  $\bar{\Psi} \neq 0$ . Ainsi, puisque  $L_{N,d;z}$  est irréductible, on a, selon le lemme de Schur et le corollaire 2.4,

$$L_{N,d;z^{-1}} \simeq \bar{\Psi}(L_{N,d;z^{-1}}) \subseteq \text{soc } W_{N,d;z}^*(q) = (\text{top } W_{N,d;z}(q))^* = L_{N,d;z}^*.$$

Le résultat désiré découle alors de l'irréductibilité de  $L_{N,d;z}^*$ .  $\square$

<sup>2</sup>La proposition 1.20 permet même d'obtenir explicitement un élément du module  $W_{N,d;z^{-1}}(q)$  n'étant pas contenu dans son radical.



## 2.4. Le morphisme d'entrelacement $i_N^d(q, v)$

Dans cette section, on explicite le lien entre les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $V_N^d(q, v)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Ce lien, discuté d'abord dans [39], est donné via un morphisme  $i_N^d(q, v) : V_N^d(q, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  qui est bijectif sauf si les entiers  $N$  et  $d$  sont choisis dans un ensemble discret (appelé ensemble critique). On montre que ce morphisme  $i_N^d(q, v)$  admet toujours la *partie générique* de  $V_N^d(q, v)$  comme quotient de son image.

### 2.4.1. Définition du morphisme et ensemble critique

Dans [39], Morin-Duchesne et Saint-Aubin démontrent le résultat suivant qui sert aussi de définition au morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v)$ . On rappelle que, sur  $\mathbb{C}_N(q, v)$ ,

$$\mathrm{spec} 2S^z = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv_2 N \text{ et } |x| \leq N\}.$$

**Théorème 2.7** ([39]). Soient<sup>3</sup>  $v \in \mathbb{C}$  non nul,  $u = (-q)^{1/2}$  et  $d \in \mathrm{spec} 2S^z$  avec  $d \geq 0$ . Soit aussi  $i_N^d(q, v) : V_N^d(q, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  l'application définie sur  $B_N^d(q, v)$  par

$$[i_N^d(q, v)](x) = \left( \prod_{(i, j) \in \psi(x)} T_{i, j} \right) |0\rangle_v$$

où  $|0\rangle_v$  est l'unique élément de  $B_{N, N}^C(q, v)$  et où, pour une paire  $(i, j)$  de l'ensemble  $\psi(x)$  introduit dans la section 1.2,  $T_{i, j}$  désigne l'opérateur  $v^{j-i} u \sigma_j^- + v^{i-j} u^{-1} \sigma_i^-$ . Dénotons également par  $I_N^d(q, v)$  la matrice représentant  $i_N^d(q, v)$  sur les bases  $B_N^d(q, v)$  et  $B_{N, d}^C(q, v)$ . Alors,  $i_N^d(q, v)$  est  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire et, avec  $r = \frac{1}{2}(N - d)$ ,

$$\det I_N^d(q, v) = \prod_{k=1}^r \left( \left\langle k + \frac{d}{2} \right\rangle \right)^{\binom{N}{r-k}}$$

où  $\langle y \rangle = q^y v^N - q^{-y} v^{-N}$ . En particulier,  $i_N^d(q, v)$  est un isomorphisme de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules si et seulement s'il n'existe pas d'élément  $k \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $q^{2k+d} v^{2N} = 1$ .

Ainsi, pour  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls fixés, l'ensemble

$$\mathfrak{A}_{q, v} = \{(N, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid d \equiv_2 N, 0 \leq d < N \text{ et } \exists k \in \{1, \dots, \frac{N-d}{2}\} \text{ tel que } q^{2k+d} v^{2N} = 1\},$$

appelé *ensemble critique associé à  $(q, v)$* , paramétrise le défaut de bijectivité des morphismes  $i_N^d(q, v)$ . En d'autres termes, si la paire  $(N, d)$  est choisie à l'extérieur de cet ensemble, la structure de la représentation  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  correspond à celle de  $V_N^d(q, v)$ . Il suffit donc, pour comprendre entièrement la théorie de la représentation des modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ , de caractériser leur structure sur les différents ensembles critiques. On réalisera cet objectif au chapitre 4. D'ici là, on considère le lemme 2.8 qui donne une seconde caractérisation de ces ensembles.

<sup>3</sup>Comme dans le cas du théorème 1.18, il existe deux possibilités de signe pour la racine carrée  $u = (-q)^{1/2}$  qui influencent l'expression du morphisme  $i_N^d(q, v)$  en la multipliant par un signe global. Ce signe n'a aucune importance et on choisit donc une valeur de  $u$  cohérente avec le choix effectué pour le théorème 1.18.

**Lemme 2.8.** Soient  $N, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $0 \leq d < N$  et  $d \equiv_2 N$ . Soient aussi  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls et  $z = v^{-N}$ . Alors<sup>4</sup>,

$$(N, d) \in \mathfrak{V}_{q,v} \iff s = \min\{x \in \mathbb{Z} \mid x > d, x \equiv_2 d \text{ et } q^x = z^2\} \leq N.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $(N, d) \in \mathfrak{V}_{q,v}$  et posons  $r = \frac{1}{2}(N - d)$ . Alors, il existe un élément  $k \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $q^{2k+d}v^{2N} = 1$  d'où  $q^{2k+d} = v^{-2N} = z^2$ . Ainsi, par minimalité de  $s$  et puisque  $2k + d > d$ , on doit avoir  $s \leq d + 2k \leq d + 2r = N$  comme voulu. Réciproquement, supposons  $s \leq N$ . Alors, puisque  $s > d$  et que  $s \equiv_2 d$ , on a  $s \geq d + 2$  avec  $k = \frac{1}{2}(s - d) \in \mathbb{N}$ . De plus,  $k = \frac{1}{2}(s - d) \leq \frac{1}{2}(N - d) = r$  et  $q^{d+2k}v^{2N} = q^s z^{-2} = 1$  d'où le résultat souhaité.  $\square$

**Corollaire 2.9.** Soient  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . Soient aussi  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls tels que  $(N, d) \notin \mathfrak{V}_{q,v}$ . Alors,  $V_N^d(q, v)$  admet au maximum deux facteurs de composition.

DÉMONSTRATION. Posons  $z = v^{-N}$  et supposons que  $V_N^d(q, v)$  possède plus de deux facteurs de composition. Alors,  $q$  doit être une racine de l'unité (voir la section 1.3.2) et il découle du théorème 1.16 (ou de la proposition 1.19 si  $(d, z)$  correspond à la paire problématique) que  $(j_0, y_0) \in \Lambda^a(N)$  avec  $(j_0, y_0)$  le successeur direct de la paire  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  via la condition A de la définition 1.13. Or, selon ces mêmes résultats, on doit avoir  $(j_0, y_0) = (s, zq^{\frac{1}{2}(d-s)})$  où  $s = \min\{x \in \mathbb{Z} \mid x > d, x \equiv_2 d \text{ et } q^x = z^2\}$  (qui vaut 2 dans le cas problématique). Ainsi, puisque  $(j_0, y_0) \in \Lambda^a(N)$ , on a  $j_0 = s \leq N$  et  $(N, d) \in \mathfrak{V}_{q,v}$  selon le lemme 2.8.  $\square$

Pour  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $v \in \mathbb{C}^\times$  avec  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ , on définit la *partie générique* de  $V_N^d(q, v)$  comme le quotient

$$\text{PG}_N^d(q, v) = \begin{cases} V_N^d(q, v) / \text{Im } \hat{\theta}_{s,d;w,v}(N) & \text{si } (d, v^{-N}) \preceq_q (s, w^{-N}) \text{ dans } \Lambda^a \\ & \text{directement via la condition A;} \\ V_N^d(q, v) & \text{si } (d, v^{-N}) \text{ n'admet pas de successeur} \\ & \text{dans } \Lambda^a \text{ via la condition A} \end{cases}$$

où  $\hat{\theta}_{s,d;w,v}(N) : V_N^s(q, w) \rightarrow V_N^d(q, v)$  est l'inclusion de la section 1.3.2. En utilisant le théorème 1.16, la proposition 1.19 et le fait qu'une paire de  $\Lambda^a$  admet au plus un successeur non trivial sous  $\preceq_q$  si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, on peut conclure que  $\text{PG}_N^d(q, v)$  admet toujours au maximum deux facteurs de composition (c-à-d. l'irréductible  $L_{N,d;v^{-n}}$  et possiblement l'irréductible  $L_{N,t;y^{-N}}$  associé au successeur direct  $(t, y^{-N})$  de  $(d, v^{-N})$  via la condition B s'il existe). Par ailleurs, on montre aisément à l'aide de la définition 1.13 et du lemme 2.8 que les modules  $V_N^d(q, v)$  avec  $(N, d) \notin \mathfrak{V}_{q,v}$  correspondent exactement<sup>5</sup> à leur partie générique.

<sup>4</sup>Dans ce mémoire, pour  $E \subseteq \mathbb{R}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on se permettra de comparer à  $\gamma$  (à l'aide de la relation usuelle  $\leq$ ) les extremums de  $E$  sans montrer préalablement leur existence. En particulier, en écrivant  $\min E \leq \gamma$  ou  $\min E > \gamma$ , on sous-entendra toujours que  $\min E$  existe.

<sup>5</sup>En effet, supposons que  $V_N^d(q, v) \not\cong \text{PG}_N^d(q, v)$  avec  $(N, d) \notin \mathfrak{V}_{q,v}$ . Alors,  $(d, v^{-N})$  doit admettre un successeur direct  $(s, w^{-N})$  sous la condition A. Or, la définition 1.13 (ou le théorème 1.16 et la proposition 1.19 si  $q$  est une racine de l'unité) avec le lemme 2.8 forcent  $s = \min\{x \in \mathbb{Z} \mid x > d, x \equiv_2 d \text{ et } q^x = z^2\} > N$  d'où on obtient de  $V_N^s(q, w) = 0$  la contradiction  $\text{PG}_N^d(q, v) = V_N^d(q, v) / \text{Im } \hat{\theta}_{s,d;w,v}(N) \simeq V_N^d(q, v)$ .

## 2.4.2. Caractérisation partielle du noyau de $i_N^d(q,v)$

Soient  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$  avec  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls. On aimerait démontrer que la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  est un quotient de l'image du morphisme  $i_N^d(q, v)$ . Pour ce faire, on montre d'abord que ce morphisme ne correspond jamais à l'application nulle.

**Lemme 2.10.** Le morphisme  $i_N^d(q, v)$  est non nul.

DÉMONSTRATION. Supposons  $d = N$ . Alors, en vertu de la définition de  $i_N^N(q, v)$ , on a  $[i_N^N(q, v)](\text{id}_N) = |0\rangle_v \neq 0$  et le résultat voulu est donc vérifié. Si  $d < N$ , on considère plutôt l'élément  $x = \nu_{1\dots r} \in B_N^d(q, v)$  avec  $r = \frac{1}{2}(N - d) \geq 1$ . Alors,  $\psi(x) = \{(j, 2r - j + 1)\}_{j=1}^r$  et

$$[i_N^d(q, v)](x) = \left( \prod_{j=1}^r \left( v^{2(r-j)+1} u \sigma_{2r-j-1}^- + v^{-1-2(r-j)} u^{-1} \sigma_j^- \right) \right) |0\rangle_v.$$

Soit maintenant  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  l'unique élément de  $B_{N,d}^C(q, v)$  défini par

$$x_j = \begin{cases} - & \text{si } 1 \leq j \leq r, \\ + & \text{si } r + 1 \leq j \leq N \end{cases} ; \quad \text{c-à-d. } |x_1 \dots x_N\rangle_v = \underbrace{|-\dots-}_{r} + \underbrace{+\dots+}_{N-r}.$$

Un calcul rapide montre que le coefficient devant ce vecteur dans  $[i_N^d(q, v)](x)$  est

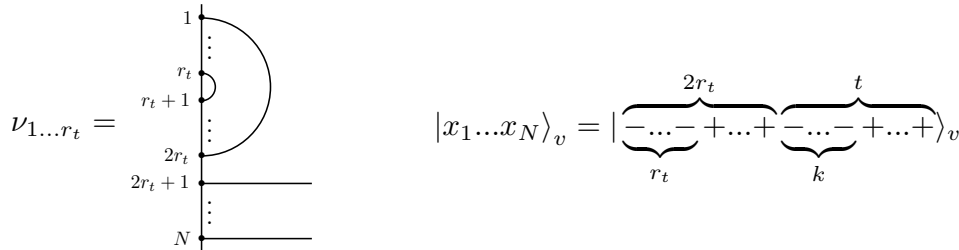
$$\langle x_1 \dots x_N | [i_N^d(q, v)](x) \rangle = \prod_{j=1}^r \left( v^{-1-2(r-j)} u^{-1} \right) = v^{-r^2} u^{-r}$$

d'où le résultat par indépendance linéaire des éléments de  $B_{N,d}^C(q, v)$  et puisque  $v \neq 0 \neq u$ .  $\square$

**Proposition 2.11.** Supposons que  $q$  soit une racine de l'unité. Soit  $(d, v^{-N}) \in \Lambda^a$  avec  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . Soient aussi  $p = \min\{x \in \mathbb{N} \mid q^{2x} = 1\}$  et  $(t, y^{-N})$  le successeur direct de  $(d, v^{-N})$  via la condition B. Alors, le morphisme  $i_N^d(q, v) \circ \hat{\theta}_{t,d,y,v}^t(N) : V_N^t(q, y) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  est non nul si  $t < d + 2p$  et  $t \leq N$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $r_t = \frac{1}{2}(N - t)$ ,  $r_d = \frac{1}{2}(N - d)$  et  $k = \frac{1}{2}(t - d) < p$ . Considérons  $\nu_{1\dots r_t} \in B_N^t(q, y)$  (interprété comme  $\text{id}_t$  si  $r_t = 0$ ) avec  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$  où

$$x_j = \begin{cases} - & \text{si } 1 \leq j \leq r_t \text{ ou } 2r_t + 1 \leq j \leq r_t + r_d, \\ + & \text{si } r_t + 1 \leq j \leq 2r_t \text{ ou } r_t + r_d + 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$



**Fig. 2.1.** L'état  $\nu_{1\dots r_t} \in B_N^t(q, y)$  et l'élément  $|x_1 \dots x_N\rangle_v \in B_{N,d}^C(q, v)$  considérés (si  $r_t \neq 0$ ).

On s'intéresse au coefficient  $c$  devant  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  dans  $[i_N^d(q, v) \circ \hat{\theta}_{t, d; y, v}(N)](\nu_{1 \dots r_t})$ . Par indépendance linéaire des éléments de  $B_{N, d}^C(q, v)$ , il suffit, pour achever cette démonstration, de prouver que ce coefficient est non nul. Pour ce faire, on pose  $z = v^{-N}$  et on rappelle que

$$\hat{\theta}_{t, d; y, v}(N) = \varphi_{N, d}^{-1}(v) \circ \theta_{t, d; y, z}(N) \circ \varphi_{N, t}(y)$$

où  $\varphi_{N, d}(v)$ ,  $\varphi_{N, t}(y)$  sont les isomorphismes de la section 1.2.3 et où  $\theta_{t, d; y, z}(N)$  est le monomorphisme défini dans l'énoncé du théorème 1.18 (avec  $a = -1$ ). On a

$$[\varphi_{N, t}(y)](\nu_{1 \dots r_t}) = y^{\zeta_{\nu_{1 \dots r_t}}} w_{1 \dots r_t} = y^{\sum_{j=2r_t+1}^N j} w_{1 \dots r_t} = y^{\frac{t}{2}(2N-t+1)} w_{1 \dots r_t}$$

d'où

$$[\theta_{t, d; y, z}(N) \circ \varphi_{N, t}(y)](\nu_{1 \dots r_t}) = y^{\frac{t}{2}(2N-t+1)} \sum_{\mu \in B_{t, d}^W(q, z)} q^{-i_\mu} v^{N(|\mu|-k)} h_{P(\mu)}(q) w_{1 \dots r_t} \mu.$$

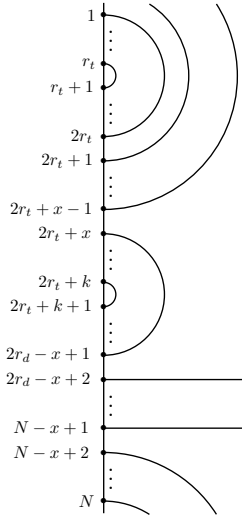
Soit  $\mu \in B_{t, d}^W(q, z)$ . En multipliant  $\mu$  à droite de  $w_{1 \dots r_t}$ , on obtient un élément de  $B_{N, d}^W(q, z)$  où les défauts de  $\mu$  ont été déplacés de  $2r$  positions vers le bas (les  $2r$  premières positions étant déjà occupées par les boucles provenant de  $w_{1 \dots r_t}$ ). Soit  $\bar{\mu}$  l'élément de  $B_N^d(q, v)$  tel que  $\text{beg } \bar{\mu} = \text{beg}(w_{1 \dots r_t} \mu)$ . Alors,  $\zeta_{\bar{\mu}} = \zeta_{w_{1 \dots r_t} \mu} = \zeta_\mu + 2r_t d$  et, en vertu de la définition de l'isomorphisme  $\varphi_{N, d}(v)$ , on obtient  $[\varphi_{N, d}(v)](\bar{\mu}) = v^{\zeta_\mu} v^{2r_t d} w_{1 \dots r_t} \mu$ . Ainsi,

$$[i_N^d(q, v) \circ \hat{\theta}_{t, d; y, v}(N)](\nu_{1 \dots r_t}) = y^{\frac{t}{2}(2N-t+1)} v^{-2r_t d} \sum_{\mu \in B_{t, d}^W(q, z)} q^{-i_\mu} v^{N(|\mu|-k)-\zeta_\mu} h_{P(\mu)}(q) [i_N^d(q, v)](\bar{\mu}).$$

Pour  $1 \leq x \leq k+1 = \frac{1}{2}(t-d) + 1 = r_d - r_t + 1$ , on définit

$$\mathcal{A}_x = \{j_1\}_{j_1=1}^{r_t} \cup \{2r_t + j_2\}_{j_2=x}^k \cup \{N - j_3 + 1\}_{j_3=1}^{x-1}$$

et on note  $\dot{w}_x$  l'élément de  $B_N^d(q, v)$  pour lequel  $\text{beg } \dot{w}_x = \mathcal{A}_x$ .



**Fig. 2.2.** L'état  $\dot{w}_x \in B_N^d(q, v)$ .

**Affirmation 1** Soit  $\mu \in B_{t,d}^W(q,z)$  tel que le coefficient  $c_\mu$  devant  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  dans  $[i_N^d(q,v)](\bar{\mu})$  est non nul. Alors,  $\bar{\mu}$  correspond à l'état  $\dot{w}_x$  pour un certain  $x$  entre 1 et  $k+1$ .

**Dém.** (Affirmation 1). On a

$$[i_N^d(q,v)](\bar{\mu}) = \left( \prod_{(i,j) \in \psi(\bar{\mu})} T_{i,j} \right) |0\rangle_v = \left( \prod_{(i,j) \in \psi(\bar{\mu})} (v^{j-i} u \sigma_j^- + v^{i-j} u^{-1} \sigma_i^-) \right) |0\rangle_v.$$

Puisque  $c_\mu \neq 0$ , pour chaque  $(i,j) \in \psi(\bar{\mu})$ , on doit avoir que  $i$  ou  $j$  correspond à un signe négatif de  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  modulo  $N$ . En d'autres termes, il doit exister une bijection

$$f_\mu : \psi(\bar{\mu}) \rightarrow \{1, \dots, r_t, 2r_t + 1, \dots, r_t + r_d\}$$

associant à chaque boucle sa position d'ouverture ou de fermeture. On considère deux cas.

(Cas 1) Supposons que, via  $f_\mu$ , tous les éléments de  $\{2r_t + 1, \dots, r_t + r_d\}$  correspondent à une position de fermeture de boucle. Puisque  $\text{beg } \bar{\mu} = \text{beg}(w_{1 \dots r_t} \mu)$ , les  $2r$  premières positions de  $\bar{\mu}$  sont occupées par les boucles provenant de  $w_{1 \dots r_t}$ . Ainsi, puisqu'elle ne peut pas croiser de défaut, la boucle aboutissant en  $2r_t + j$  dans cet état (avec  $1 \leq j \leq k = r_d - r_t$ ) doit avoir été ouverte en  $N - j + 1$ . Par conséquent, on a

$$\text{beg } \bar{\mu} = \{1, \dots, r_t, N - k + 1, \dots, N\} = \text{beg } \dot{w}_{k+1}$$

et il s'ensuit que  $\bar{\mu} = \dot{w}_{k+1}$ .

(Cas 2) Supposons qu'il existe un élément de  $\{2r_t + 1, \dots, r_t + r_d\}$  correspondant, via  $f_\mu$ , à une ouverture de boucle. Soit  $j_c \in \{2r_t + 1, \dots, r_t + r_d\}$  l'élément minimal respectant cette condition et soit  $j_f$  la position de fermeture de la boucle de  $\bar{\mu}$  débutant en  $j_c$ . Puisque  $f_\mu$  est bien définie,  $j_f$  n'est pas élément de  $\{2r_t + 1, \dots, r_t + r_d\}$ . Ainsi, dans  $\bar{\mu}$ , les positions  $j'$  telles que  $j_c \leq j' \leq r_t + r_d$  sont comprises dans l'enveloppe convexe de la boucle d'extrémités  $j_c$  et  $j_f$ . Cette observation et la bijectivité de  $f_\mu$  impliquent que ces positions doivent toutes correspondre à des ouvertures de boucles. De plus, par minimalité de  $j_c$ , les positions  $\{2r_t + 1, \dots, j_c - 1\}$  doivent quant à elles correspondre à des fermetures de boucles au sein de  $\bar{\mu}$ . Donc, puisque  $\text{beg } \bar{\mu} = \text{beg}(w_{1 \dots r_t} \mu)$ , la boucle aboutissant en  $2r_t + \ell$  dans  $\bar{\mu}$  (avec  $1 \leq \ell \leq j_c - 2r_t - 1$ ) doit, comme dans le cas 1, avoir été ouverte en  $N - \ell + 1$ . On a alors,

$$\begin{aligned} \text{beg } \bar{\mu} &= \{1, \dots, r_t, j_c, \dots, r_t + r_d, N - j_c + 2r_t + 2, \dots, N\} \\ &= \{1, \dots, r_t, 2r_t + x, \dots, r_t + r_d, N - x + 2, \dots, N\} \\ &= \text{beg } \dot{w}_x \end{aligned}$$

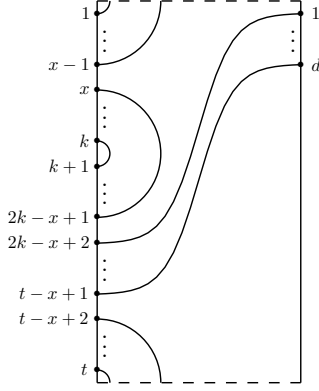
où  $x = j_c - 2r_t \in \{1, \dots, k\}$ . Ainsi,  $\bar{\mu} = \dot{w}_x$  et le résultat d'intérêt est encore vérifié.

Ceci achève cette démonstration. △

Soit  $1 \leq x \leq k + 1$ . Considérons l'élément  $\hat{w}_x \in B_{t,d}^W(q,z)$  tel que

$$\text{beg } \hat{w}_x = \{j_1\}_{j_1=x}^k \cup \{t - j_2 + 1\}_{j_2=1}^{x-1} = \{j \in \mathbb{N} \mid j + 2r_t \in \mathcal{A}_x\}$$

Cet élément est représenté dans la figure 2.3 ci-dessous.



**Fig. 2.3.** Le diagramme standard  $\hat{w}_x$ .

Il satisfait, comme le montre un calcul direct, la relation  $w_{1\dots r_t} \hat{w}_x = \dot{w}_x$ . Ainsi, puisque l'application  $\mu \mapsto w_{1\dots r_t} \mu$  est clairement injective sur  $B_{t,d}^W(q,z)$ , le coefficient recherché est, selon les résultats précédents et avec  $\gamma_0 = y^{\frac{t}{2}(2N-t+1)} v^{-2r_t d}$ ,

$$\begin{aligned} c &= \langle x_1 \dots x_N |_v \left( [i_N^d(q,v) \circ \hat{\theta}_{t,d;y,v}(N)](\nu_{1\dots r_t}) \right) \\ &= \gamma_0 \sum_{\mu \in B_{t,d}^W(q,z)} q^{-i_\mu} v^{N(|\mu|-k) - \zeta_\mu} h_{P(\mu)}(q) \langle x_1 \dots x_N |_v \left( [i_N^d(q,v)](\bar{\mu}) \right) \\ &= \gamma_0 \sum_{x=1}^{k+1} q^{-i_{\hat{w}_x}} v^{N(|\hat{w}_x|-k) - \zeta_{\hat{w}_x}} h_{P(\hat{w}_x)}(q) \langle x_1 \dots x_N |_v \left( [i_N^d(q,v)](\dot{w}_x) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $i_{\hat{w}_x}$  donnée dans le théorème 1.18, on obtient

$$\begin{aligned} c &= \gamma_0 v^{-Nk} q^{\frac{1}{2}(kt - \frac{d}{2}(t+1))} \sum_{x=1}^{k+1} q^{\frac{1}{2}(\zeta_{\hat{w}_x} - t|\hat{w}_x|)} v^{N|\hat{w}_x| - \zeta_{\hat{w}_x}} h_{P(\hat{w}_x)}(q) \langle x_1 \dots x_N |_v \left( [i_N^d(q,v)](\dot{w}_x) \right) \\ &= \gamma_0 v^{-Nk} q^{\frac{1}{2}(kt - \frac{d}{2}(t+1))} \sum_{x=1}^{k+1} c_x \end{aligned}$$

où, pour  $1 \leq x \leq k + 1$ , on a posé

$$c_x = q^{\frac{1}{2}(\zeta_{\hat{w}_x} - t|\hat{w}_x|)} v^{N|\hat{w}_x| - \zeta_{\hat{w}_x}} h_{P(\hat{w}_x)}(q) \langle x_1 \dots x_N |_v \left( [i_N^d(q,v)](\dot{w}_x) \right).$$

Puisque les paramètres  $y$ ,  $v$  et  $q$  sont tous non nuls, il suffit, pour conclure que  $c \neq 0$ , de prouver que la somme  $\sum_{x=1}^{k+1} c_x$  ne s'annule pas. Soit donc  $1 \leq x \leq k + 1$ . En regardant la forme de  $\hat{w}_x$  présentée ci-haut, on remarque que  $|\hat{w}_x| = x - 1$  et que

$$\zeta_{\hat{w}_x} = \sum_{\ell=2k-x+2}^{t-x+1} \ell = \frac{1}{2}(t-2k)(2k+t-2x+3) = \frac{d}{2}(2t-d+3) - dx.$$

Cette forme permet également de déduire que

$$h_{P(\dot{w}_x)}(q) = \frac{[k]_q!}{[k-x+1]_q![x-1]_q!} = \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q$$

et de conclure que  $\psi(\dot{w}_x)$  correspond à l'ensemble

$$\{(j_1, 2r_t - j_1 + 1)\}_{j_1=1}^{r_t} \cup \{(2r_t + j_2, 2r_d - j_2 + 1)\}_{j_2=x}^k \cup \{(N - j_3 + 1, N + 2r_t + j_3)\}_{j_3=1}^{x-1}.$$

Ainsi, au sein de  $\dot{w}_x$ , les signes négatifs aux positions  $\mathcal{A}_{\text{ouv}} = \{j_1\}_{j_1=1}^{r_t} \cup \{2r_t + j_2\}_{j_2=x}^k$  et  $\mathcal{A}_{\text{fer}} = \{2r_t + j_3\}_{j_3=1}^{x-1}$  dans  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  correspondent respectivement à des ouvertures et à des fermetures de boucles. Donc, le coefficient devant  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  dans  $[i_N^d(q, v)](\dot{w}_x)$  est

$$\begin{aligned} \langle x_1 \dots x_N | \left( [i_N^d(q, v)](\dot{w}_x) \right) &= \left( \prod_{j_1=1}^{r_t} v^{2(j_1 - r_t) - 1} u^{-1} \right) \left( \prod_{j_2=x}^k v^{2(r_t - r_d + j_2) - 1} u^{-1} \right) \left( \prod_{j_3=1}^{x-1} v^{2(r_t + j_3) - 1} u \right) \\ &= v^{-r_t^2} u^{-r_t} v^{(k+1-x)(k+2(r_t - r_d) + x - 1)} u^{x-k-1} v^{(x-1)(2r_t + x - 1)} u^{x-1} \\ &= v^{-(k^2 + r_t^2 + 2r_d)} u^{-(r_d + 2)} v^{2r_d x} u^{2x} \\ &= \gamma_1 v^{2r_d x} u^{2x} \end{aligned}$$

avec  $\gamma_1 = v^{-(k^2 + r_t^2 + 2r_d)} u^{-(r_d + 2)}$  ne dépendant pas de  $x$ . Or,  $(d, v^{-N}) \preceq_q (t, y^{-N})$  directement via la condition B de sorte que, selon le théorème 1.16 (ou la proposition 1.19 si  $(d, z)$  est la paire problématique), on a  $t = -s + \delta_i$  avec  $q^s = z^2 = v^{-2N}$  et  $q^{\delta_i} = 1$  (ou  $2t = 2s = \delta = 4$  pour la paire problématique). Par conséquent, puisque  $u^2 = -q$ ,

$$\begin{aligned} c_x &= q^{\frac{1}{2}(\zeta_{\dot{w}_x} - t|\dot{w}_x|)} v^{N|\dot{w}_x| - \zeta_{\dot{w}_x}} h_{P(\dot{w}_x)}(q) \langle x_1 \dots x_N | \left( [i_N^d(q, v)](\dot{w}_x) \right) \\ &= q^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}(2t-d+3) - dx - t(x-1))} v^{N(x-1) - (\frac{d}{2}(2t-d+3) - dx)} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q \gamma_1 v^{2r_d x} u^{2x} \\ &= \gamma_1 q^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}(2t-d+3) + t)} v^{-(N + \frac{d}{2}(2t-d+3))} (-1)^x q^{-\frac{1}{2}(t+d)x} q^x v^{2Nx} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q \\ &= \gamma (v^{2N} q^{-t})^x (-1)^x q^{(k+1)x} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q = \gamma (v^{2N} q^s)^x (-1)^x q^{(k+1)x} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q \\ &= \gamma (-1)^x q^{(k+1)x} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

où

$$\gamma = \gamma_1 q^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}(2t-d+3) + t)} v^{-(N + \frac{d}{2}(2t-d+3))} = v^{-(k^2 + r_t^2 + 2r_d)} u^{-(r_d + 2)} q^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}(2t-d+3) + t)} v^{-(N + \frac{d}{2}(2t-d+3))}$$

est non nul (car les paramètres  $u$ ,  $v$  et  $q$  le sont tous) et ne dépend pas du choix particulier de  $x$ . Alors, en vertu du théorème 1.23,

$$\sum_{x=1}^{k+1} c_x = \gamma \sum_{x=1}^{k+1} (-1)^x q^{(k+1)x} \begin{bmatrix} k \\ x-1 \end{bmatrix}_q = -\gamma q^{k+1} \sum_{x=0}^k (-1)^x q^{(k+1)x} \begin{bmatrix} k \\ x \end{bmatrix}_q = -\gamma q^{k+1} \prod_{x=1}^k (1 - q^{2x}).$$

Puisque  $\gamma q^{k+1} \neq 0$ , il suffit de démontrer que  $\prod_{x=1}^k (1 - q^{2x}) \neq 0$ . Supposons au contraire que ce produit soit nul de sorte qu'il existe un entier  $1 \leq k \leq x$  tel que  $q^{2x} = 1$ . Alors, puisque  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité,  $x$  doit être divisible par  $p$ . Cependant, par hypothèse, on a  $1 \leq x \leq k \leq p - 1$  et on aboutit ainsi à une contradiction. On conclut donc que le coefficient  $c$  devant  $|x_1 \dots x_N\rangle_v$  dans  $[i_N^d(q, v) \circ \hat{\theta}_{t, d; y, v}(N)](\nu_{1 \dots r_t})$  doit être non nul.  $\square$

Supposons que  $(d, v^{-N}) \preceq_q (s, w^{-N})$  directement via la condition A. Alors, à l'aide du théorème 1.16 et de la proposition 1.19, on peut reformuler la proposition précédente, lorsqu'elle s'applique, par  $\text{Ker } i_N^d(q, v) \subseteq \text{Im } \hat{\theta}_{s, d; w, v}(N)$ . Ainsi,

$$\text{PG}_N^d(q, v) = V_N^d(q, v) / \text{Im } \hat{\theta}_{s, d; w, v}(N) \simeq \left( V_N^d(q, v) / \text{Ker } i_N^d(q, v) \right) / \left( \text{Im } \hat{\theta}_{s, d; w, v}(N) / \text{Ker } i_N^d(q, v) \right)$$

d'où  $\text{PG}_N^d(q, v)$  correspond à un quotient de  $V_N^d(q, v) / \text{Ker } i_N^d(q, v) \simeq \text{Im } i_N^d(q, v) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v, d)$ . En d'autres termes, lorsque les hypothèses de la proposition 2.11 sont respectées, le morphisme  $i_N^d(q, v)$  permet de transporter  $\text{PG}_N^d(q, v)$  au sein de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ .

En fait, cette dernière conclusion demeure vraie même lorsque la proposition 2.11 ne s'applique pas, c'est-à-dire lorsque

- (1) Le paramètre  $q$  n'est pas une racine de l'unité ou
- (2) Le successeur direct  $(t, y^{-N})$  de  $(d, v^{-N})$  via la condition B n'existe pas ou bien est tel que  $t > N$  ou  $t \geq d + 2p$ .

En effet, dans le cas 1, la paire  $(d, z)$  admet au maximum un successeur non-trivial sous  $\preceq_q$  (voir la section 1.3.2). Si ce successeur est obtenu via la condition A, le quotient  $\text{PG}_N^d(q, v)$  doit être irréductible d'où le résultat découle du lemme 2.10 et du lemme de Schur. Si ce successeur est plutôt obtenu via la condition B, alors la paire  $(d, z)$  n'admet aucun successeur sous la condition A et une analyse rapide de la définition 1.13 démontre que le minimum  $\min\{x \in \mathbb{Z} \mid x > d, x \equiv_2 d \text{ et } q^x = z^2\}$  n'est pas défini. Ainsi, le lemme 2.8 stipule que  $(N, d) \notin \mathfrak{A}_{q, v}$  et le résultat voulu suit dès lors du fait que  $i_N^d(q, v)$  est un isomorphisme.

Pour le cas 2, supposons que  $q$  soit une racine de l'unité et que  $t \geq \min(N + 1, d + 2p)$  ou que le successeur  $(t, y^{-N})$  n'existe pas. Alors, la paire  $(d, z)$  n'est pas la paire problématique<sup>6</sup>. De plus, si  $t \geq d + 2p$ , on doit avoir  $t = d + 2p$  puisque la première composante des paires apparaissant dans la figure 1.16 augmente de haut en bas. Dans ce cas, l'organisation des successeurs de  $(d, v^{-N})$  est représentée dans la figure 2.4 et on obtient en particulier  $\text{PG}_N^d(q, v) = L_{N, d; v^{-N}}$ . Le résultat voulu découle ainsi encore du lemme de Schur et du lemme 2.8. Ce raisonnement fonctionne d'ailleurs également si  $t > N$  ou si le successeur  $(t, y^{-N})$  n'existe pas puisque la relation  $\text{PG}_N^d(q, v) = L_{N, d; v^{-N}}$  est encore trivialement satisfaite dans ces situations (voir la figure 1.16 si  $t > N$ ). On a donc démontré le corollaire suivant.

<sup>6</sup>En effet, pour cette paire, ce successeur existe et la figure 1.18 donne  $t = 2 < d + 2p = 4$  d'où la relation  $t > N$  force  $N = 0$  (mais la paire problématique n'est définie que si  $N \in 2\mathbb{N}$ ).



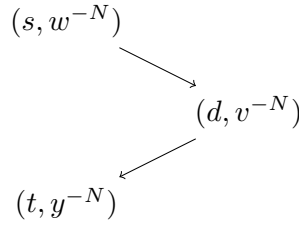
$$(d, v^{-N}) \rightarrow (s, w^{-N}) \rightarrow (d + 2p, v^{-N}q^p) \rightarrow (s + 2p, w^{-N}q^p) \rightarrow \dots$$

**Fig. 2.4.** Organisation des successeurs de  $(d, v^{-N})$  sous  $\preceq_q$  dans les conditions considérées. Le sous-graphe associé au diagramme de Loewy du sous-module  $\theta_{s,d;w,v}(N)$ , pour  $(s, w^{-N})$  le successeur direct de  $(d, v^{-N})$  via la condition A, est représenté avec des flèches rouges.

**Corollaire 2.12.** Soient  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . Soient aussi  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls. Alors, la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  est un quotient de  $\text{Im } i_N^d(q, v)$ .

Au chapitre 4, on montrera que l'on a en fait toujours  $\text{Im } i_N^d(q, v) \simeq \text{PG}_N^d(q, v)$ . On se contente pour l'instant de démontrer la proposition suivante qui donne, si  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité, la structure explicite de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  lorsque le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v)$  admet au maximum deux étages avec  $N < d + 2p$ . Même si ce résultat est bien plus faible que ceux qui seront obtenus dans le chapitre 4, sa démonstration indique déjà la puissance des principaux outils développés dans les sections précédentes : notamment les lemmes, propositions et corollaires 2.4, 2.5, 2.6, 2.8 et 2.12.

**Proposition 2.13.** Soient  $q, v \in \mathbb{C}$  non nuls avec  $q^2$  une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. Soient aussi  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $d \leq N < d + 2p$  et  $d \equiv_2 N$ . Supposons que  $(d, v^{-N})$  admette un successeur non trivial sous  $\preceq_q$  (c-à-d. une infinité selon la proposition 1.15) et notons  $(s, w^{-N})$  et  $(t, y^{-N})$  les successeurs directs de cette paire via les conditions A et B. Supposons également que  $(d, v^{-N})$  ne soit pas la paire problématique et que le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v)$  admette au plus deux étages. Alors, la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  est celle présentée dans la figure 2.5 après le retrait des paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ .



**Fig. 2.5.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  sous les hypothèses de la proposition 2.13.

DÉMONSTRATION. On divise cette preuve en l'étude de trois cas.

(Cas 1) Supposons  $(s, w^{-N}) \notin \Lambda^a(N)$ . Alors,  $s > N$  de sorte que  $(N, d) \notin \mathfrak{A}_{q,v}$  en vertu du lemme 2.8 et du théorème 1.16. Ainsi,  $i_N^d(q, v)$  est bijectif d'où, selon la figure 1.16, les modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et  $V_N^d(q, v)$  admettent la structure donnée dans la figure 2.6 avec la paire  $(t, y^{-N})$  présente si et seulement si  $(t, y^{-N}) \in \Lambda^a(N)$ .

$$(t, y^{-N}) \longleftarrow (d, v^{-N})$$

**Fig. 2.6.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  dans le cas 1.

(Cas 2) Supposons  $(t, y^{-N}) \notin \Lambda^a(N)$  et  $(s, w^{-N}) \in \Lambda^a(N)$ . Alors,  $s \leq N < t$  et, selon le corollaire 1.14, on a  $(d, v^N) \preceq_q (t, y^N)$  directement sous la condition A étant donné que  $(d, v^{-N}) \preceq_q (t, y^{-N})$  directement sous la condition B. Ainsi, selon la figure 1.16,

$$t = \min\{x \in \mathbb{Z} \mid x > d, x \equiv_2 d \text{ et } q^x = (v^{-1})^{-2N}\} > N$$

et le lemme 2.8 stipule que  $(N, d) \notin \mathfrak{A}_{q, v^{-1}}$ . Par conséquent,  $i_N^d(q, v^{-1})$  est un isomorphisme et le théorème 1.16 avec le corollaire 1.14 permettent de conclure que  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$  admet la structure donnée par le diagramme de Loewy de la figure 2.7.

$$\begin{array}{c} (d, v^N) \\ \downarrow \\ (s, w^N) \end{array}$$

**Fig. 2.7.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$  dans le cas 2.

Or,  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d) \simeq \mathbb{C}_N^*(q, v, d)$  en vertu de la proposition 2.5 d'où on déduit, à l'aide du corollaire 2.4 et de la proposition 2.6, que la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  correspond à celle donnée dans la figure 2.8.

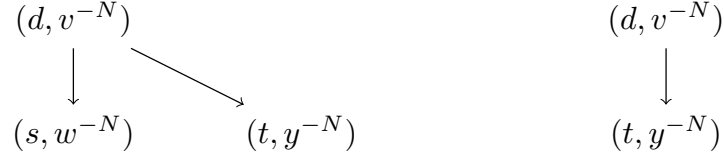
$$\begin{array}{c} (s, w^{-N}) \\ \downarrow \\ (d, v^{-N}) \end{array}$$

**Fig. 2.8.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  dans le cas 2.

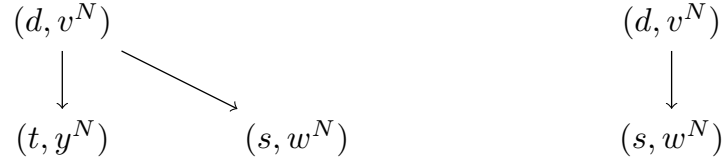
(Cas 3) Posons  $z = v^{-N}$  et supposons que  $(t, y^{-N}), (s, w^{-N}) \in \Lambda^a(N)$ . Dans ce cas,  $s, t \leq N$  et, selon la figure 1.16, on a

$$w^{-N} = zq^{\frac{1}{2}(d-s)} \quad \text{et} \quad (t, y^{-N}) = \left(-s + \delta_i, zq^{\frac{1}{2}(\delta_i - (d+s))}\right)$$

où  $\delta_i = \min\{\ell \in 2p\mathbb{Z} \mid -s + \ell > d\}$ . Supposons que  $(t, y^{-N}) = (s, w^{-N})$ . Alors, l'égalité  $t = s$  implique  $s = \frac{1}{2}\delta_i$  et la relation  $zq^{\frac{1}{2}(d-s)} = zq^{\frac{1}{2}(\delta_i - (d+s))}$  se simplifie en  $q^d = q^{\frac{1}{2}\delta_i} = q^s$ . Dans ce cas, on doit avoir  $s - d \in 2p\mathbb{Z}$  car  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité et que  $d \equiv_2 s$ . Or, on a aussi  $d < s \leq d + 2p$  d'où le résultat précédent implique  $s = d + 2p > N$  et contredit l'hypothèse  $(s, w^{-N}) \in \Lambda^a(N)$ . Il s'ensuit donc que les paires  $(t, y^{-N})$  et  $(s, w^{-N})$  sont distinctes de sorte que le module cellulaire  $V_N^d(q, v)$  et sa partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  admettent les diagrammes de Loewy présentés dans la figure 2.9 de la page suivante. À partir de cette figure, le corollaire 1.14 permet d'obtenir la structure de  $V_N^d(q, v^{-1})$  et de  $\text{PG}_N^d(q, v^{-1})$ . Les diagrammes de Loewy associés sont consignés dans la figure 2.10.



**Fig. 2.9.** Diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v)$  (gauche) et de  $\text{PG}_N^d(q, v)$  (droite) dans le cas 3.



**Fig. 2.10.** Structure de  $V_N^d(q, v^{-1})$  (gauche) et de  $\text{PG}_N^d(q, v^{-1})$  (droite) dans le cas 3.

À partir de la figure 2.9 et du corollaire 2.12, on peut conclure que les facteurs  $(d, v^{-N})$  et  $(t, y^{-N})$  doivent être présents dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et doivent être reliés par une flèche de  $(d, v^{-N})$  vers  $(t, y^{-N})$ . De la même façon, on déduit de la figure 2.10 l'existence d'une flèche allant de  $(d, v^N)$  vers  $(s, w^N)$  dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$ . Alors, selon le corollaire 2.4 et les propositions 2.5 et 2.6, on peut conclure que le diagramme de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  doit contenir une flèche allant de  $(s, w^{-N})$  vers  $(d, v^{-N})$ . Ainsi, puisque

$$\dim \mathbb{C}_N(q, v, d) = \dim V_N^d(q, v) = \dim L_{N, d; v^{-N}} + \dim L_{N, s; w^{-N}} + \dim L_{N, t; y^{-N}}.$$

l'unique diagramme de Loewy possible pour  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  correspond dans ces circonstances à celui donné dans la figure 2.5.

Ceci achève cette démonstration. □

En interprétant différemment le diagramme de la figure 2.5, on peut affaiblir les hypothèses de la proposition précédente pour lui permettre de donner la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  dans le cas de toute paire  $(d, v^{-N}) \in \Lambda^a(N)$  pour laquelle le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v)$  a au plus deux étages avec  $d + 2p > N$ . En effet, supposons par exemple qu'une telle paire  $(d, v^{-N}) \in \Lambda^a(N)$  n'admette pas de successeur non trivial sous  $\preceq_q$  (avec  $q$  une racine de l'unité ou non). Alors,  $V_N^d(q, v)$  est irréductible selon le théorème 1.17 et il suit directement du lemme de Schur et du lemme 2.8 que  $V_N^d(q, v) \simeq \mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Dans cette situation, la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  peut évidemment encore être vue comme étant donnée par la figure 2.5 avec les facteurs  $(t, y^{-N})$  et  $(s, w^{-N})$  interprétés comme ne faisant pas partie de  $\Lambda^a(N)$ . De la même manière, si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors la paire  $(d, v^{-N})$  admet au maximum un successeur non trivial sous  $\preceq_q$ . Si ce successeur existe et est obtenu via la condition B ou la condition A, alors on a respectivement  $(N, d) \notin \mathfrak{V}_{q, v}$  ou  $(N, d) \notin \mathfrak{V}_{q, v^{-1}}$  (voir le corollaire 1.14 et la démarche suivant la démonstration de la proposition 2.11) de sorte

qu'il est possible d'obtenir la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  à l'aide d'un raisonnement analogue à celui utilisé dans le cas 1 ou le cas 2 de la démonstration précédente. Le diagramme de Loewy associé à cette structure correspond alors, encore dans ce cas, à celui de la figure 2.5 où on interprète le successeur manquant comme n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ .

**Remarque 2.14.** Soit  $d \geq 0$ . Alors, le travail fait jusqu'ici permet en particulier de donner la structure des modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  quand  $q$  n'est pas une racine de l'unité ou lorsque  $(d, v^{-N})$  n'admet pas de successeur non trivial sous  $\preceq_q$ . Pour cette raison, le symbole  $q$  désignera dorénavant toujours une racine de l'unité et il sera désormais sous-entendu que la paire  $(d, v^{-N})$  admet des successeurs non triviaux sous  $\preceq_q$  (c'est-à-dire une infinité de tels successeurs selon la proposition 1.15). On réservera ainsi le symbole  $p$  pour désigner l'entier positif minimal satisfaisant  $q^{2p} = 1$  de sorte que  $q^2$  sera toujours une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. On note d'ailleurs qu'il est suffisant de se concentrer uniquement sur les modules  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  avec  $d \geq 0$  comme on l'a fait jusqu'à maintenant en raison de l'existence de l'isomorphisme  $\eta_N(q, v, d) : \mathbb{C}_N(q, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v^{-1}, -d)$  de la section 2.2.

On conclut maintenant ce chapitre en calculant explicitement dans l'exemple suivant la structure de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  lorsque  $(d, v^{-N})$  correspond à la paire problématique avec  $N = 2$ .

**Exemple 2.15.** On considère  $(N, d) = (2, 0)$  avec  $q, v \in \mathbb{C}$  tels que  $q^2 = -1$  et  $q = z = v^{-2}$ . Alors, les matrices représentant  $e_1$  et  $\Omega$  par rapport à la base  $B_{2,0}^C(q, v) = \{ |+-\rangle_v, |-+\rangle_v \}$  de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$  sont respectivement

$$[e_1] = \begin{pmatrix} -q & -q \\ q & q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\Omega] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En considérant plutôt la base  $B = \{ |-+\rangle_v, |+-\rangle_v - |-+\rangle_v \}$ , on obtient les matrices

$$[e_1]_B = -q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\Omega]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où l'espace  $V = \text{span}_{\mathbb{C}}(|+-\rangle_v - |-+\rangle_v)$  correspond à un sous-module de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$  isomorphe à  $L_{2,2,-1}$ . En outre, ces dernières matrices montrent aussi que  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)/V \simeq L_{2,2,1}$ . Si ce quotient correspondait à un sous-module de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$ , il existerait des coefficients  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $\Omega v = v \neq 0 = e_1 v$  avec  $v = \gamma_1 |+-\rangle_v + \gamma_2 |-+\rangle_v$ . Cependant, on a

$$\Omega v = \gamma_2 |+-\rangle_v + \gamma_1 |-+\rangle_v \quad \text{et} \quad e_1 v = q(\gamma_1 + \gamma_2)(|-+\rangle_v - |+-\rangle_v).$$

d'où la seule solution aux relations d'intérêt est donnée par  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . On peut donc conclure que le socle de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$  contient  $L_{2,2,-1}$ , mais ne contient pas  $L_{2,2,1}$ . On a ainsi une suite exacte courte non-scindée

$$0 \rightarrow L_{2,2,-1} \rightarrow \mathbb{C}_2(q, v, 0) \rightarrow L_{2,2,1} \rightarrow 0$$

Par conséquent, puisque  $\dim \mathbb{C}_2(q, v, 0) = 2 = \dim L_{2,2;1} + \dim L_{2,2;-1}$ , on peut conclure que le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$  correspond à celui donné dans la figure 2.11 ci-dessous.

$$\begin{array}{c} (2, 1) \\ \downarrow \\ (2, -1) \end{array}$$

**Fig. 2.11.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_2(q, v, 0)$  avec  $q^2 = -1$  et  $q = v^{-2}$ .

Remarquons qu'on obtient alors également le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_2(q, v^{-1}, 0)$  à l'aide du corollaire 2.4 et des propositions 2.5 et 2.6. Celui-ci est représenté dans la figure 2.12.

$$\begin{array}{c} (2, -1) \\ \downarrow \\ (2, 1) \end{array}$$

**Fig. 2.12.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_2(q, v^{-1}, 0)$  avec  $q^2 = -1$  et  $q = v^{-2}$ .

En particulier,  $\mathbb{C}_2(q, v, 0) \not\simeq \mathbb{C}_2(q, v^{-1}, 0)$  même si, selon le corollaire 1.11 et la définition de l'ensemble  $\Lambda^a$ , on a  $V_2^0(q, v) \simeq V_2^0(q, v^{-1})$ .



# Chapitre 3

---

## Groupes quantiques et dualité de Schur-Weyl

Lorsque  $q^2 \neq 1$ , la chaîne de spin  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  du chapitre 2 peut naturellement être considérée comme une représentation de l'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  du groupe quantique  $U_q\mathfrak{sl}_2$ . On utilisera ici cette représentation pour définir des morphismes  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $f_{t,d}(q^{-1}, v)$  entre les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d)$  de différentes chaînes XXZ.

Dans les premières sections de ce chapitre, on définit l'extension  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  et on étudie en détail sa théorie de la représentation. On introduit aussi, lors de la section 3.3, la  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -action considérée pour la chaîne  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  et on définit les applications  $f_{t,d}(q^{-1}, v)$ . On caractérise enfin dans cette même section le noyau de ces applications à l'aide de longues suites exactes de mod  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  et d'une décomposition de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  à la *Clebsch-Gordan*.

Dans les pages suivantes, le symbole  $q$  désignera toujours un paramètre complexe non nul avec  $q^2$  une  $p$ -ième racine primitive de l'unité. On supposera également en tout temps  $p \geq 2$  et on réfère à l'annexe A pour l'analyse des cas où  $q = \pm 1$ .

### 3.1. L'extension de Lusztig $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$

Soient  $t$  une indéterminée et  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . À la manière de [10], on définit la *forme rationnelle*  $U_t\mathfrak{sl}_2$  comme la  $\mathbb{Q}(t)$ -algèbre de générateurs  $\{E, F, K^{\pm 1}, \mathrm{id}\}$  satisfaisant les relations

$$KEK^{-1} = t^2E, \quad KFK^{-1} = t^{-2}F, \quad K^{\pm 1}K^{\mp 1} = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{t - t^{-1}}.$$

On définit aussi les *puissances divisées*  $\{E^{(n)}, F^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  par  $E^{(0)} = F^{(0)} = \mathrm{id}$  et

$$E^{(n)} = \frac{E^n}{[n]_t!} \quad \text{et} \quad F^{(n)} = \frac{F^n}{[n]_t!}$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $U_{\mathcal{A}}^{\mathrm{res}}$  la sous- $\mathcal{A}$ -algèbre de  $U_t\mathfrak{sl}_2$  ayant ces éléments et  $K^{\pm 1}$  comme générateurs. Cette algèbre est généralement appelée la *forme intégrale de Lusztig*.

**Théorème 3.1** ([10], [31]). La forme intégrale  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  est isomorphe à la  $\mathcal{A}$ -algèbre ayant comme ensemble générateur  $\{E^{(r)}, F^{(r)}, K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t \mid r, c \in \mathbb{Z} \text{ où } r \geq 0\}$  avec les relations

- (1) La sous-algèbre engendrée par  $\{K^{\pm 1}, \begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t \mid r, c \in \mathbb{Z} \text{ où } r \geq 0\}$  est centrale;
- (2)  $K^{\pm 1} K^{\mp 1} = \text{id}$ ,  $KE^{(r)} = t^{2r} E^{(r)} K$  et  $KF^{(r)} = t^{-2r} F^{(r)} K$  ( $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ );
- (3)  $(q - q^{-1}) \begin{bmatrix} K; 0 \\ 1 \end{bmatrix}_t = K - K^{-1}$  et  $\begin{bmatrix} K; c \\ 0 \end{bmatrix}_t = \text{id}$  ( $c \in \mathbb{Z}$ );
- (4)  $\begin{bmatrix} r+s \\ r \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} K; 0 \\ r+s \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} K; 0 \\ r \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} K; -r \\ s \end{bmatrix}_t$  ( $s, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ );
- (5)  $\begin{bmatrix} K; -c \\ r \end{bmatrix}_t = \sum_{s=0}^r (-1)^s t^{c(r-s)} \begin{bmatrix} c+s-1 \\ s \end{bmatrix}_t K^s \begin{bmatrix} K; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_t$  ( $r, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $c \neq 0$ );
- (6)  $\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t = \sum_{s=0}^{\min(r,c)} t^{c(r-s)} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_t K^{-s} \begin{bmatrix} K; 0 \\ r-s \end{bmatrix}_t$  ( $r, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ );
- (7)  $E^{(r)} F^{(n)} = \sum_{s=0}^{\min(r,n)} F^{(n-s)} \begin{bmatrix} K; 2s-r-n \\ s \end{bmatrix}_t E^{(r-s)}$  ( $r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ );
- (8)  $E^{(r)} E^{(n)} = \begin{bmatrix} r+n \\ r \end{bmatrix}_t E^{(r+n)}$  et  $F^{(r)} F^{(n)} = \begin{bmatrix} r+n \\ r \end{bmatrix}_t F^{(r+n)}$  ( $r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ );
- (9)  $\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t E^{(n)} = E^{(n)} \begin{bmatrix} K; c+2n \\ r \end{bmatrix}_t$  et  $\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t F^{(n)} = F^{(n)} \begin{bmatrix} K; c-2n \\ r \end{bmatrix}_t$  ( $r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c \in \mathbb{Z}$ ).

**Corollaire 3.2** ([10]). Soit  $r, c \in \mathbb{Z}$  avec  $r \geq 0$ . Alors,

$$\begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t = \prod_{s=1}^r \left( \frac{K t^{c+1-s} - K^{-1} t^{s-1-c}}{t^s - t^{-s}} \right)$$

En particulier, le coté droit de cette égalité appartient<sup>1</sup> à  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$ .

Fixons une racine de l'unité  $q$  avec  $p = \min\{x \in \mathbb{N} \mid q^{2x} = 1\} \geq 2$  et notons  $\text{ev}_q : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  le morphisme d'anneaux donné par  $\text{ev}_q(t^{\pm 1}) = q^{\pm 1}$ . On définit une  $\mathcal{A}$ -action à droite sur  $\mathbb{C}$  via

$$\gamma \bullet p(t, t^{-1}) = \gamma \text{ev}_q [p(t, t^{-1})] = \gamma p(q, q^{-1})$$

pour  $\gamma \in \mathbb{C}$  et  $p(t, t^{-1}) \in \mathcal{A}$ . Le foncteur induction  $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} - : \text{Mod } \mathcal{A} \rightarrow \text{Mod } \mathbb{C}$  correspondant à cette action permet alors de conférer à l'espace vectoriel  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre à l'aide de la multiplication naturelle

$$(\gamma_1 \otimes_{\mathcal{A}} x_1)(\gamma_2 \otimes_{\mathcal{A}} x_2) = \gamma_1 \gamma_2 \otimes_{\mathcal{A}} x_1 x_2$$

pour  $x_1, x_2 \in \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  et  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>Ce résultat hautement non trivial découle essentiellement de la relation 8 du théorème 3.1.



Cette algèbre, appelée *extension de Lusztig*, est engendrée par  $1 \otimes_{\mathcal{A}} E^{(r)}$ ,  $1 \otimes_{\mathcal{A}} F^{(r)}$ ,  $1 \otimes_{\mathcal{A}} K^{\pm 1}$  et  $1 \otimes_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t$  (pour  $r, c \in \mathbb{Z}$  avec  $r \geq 0$ ) et admet les relations obtenues en changeant<sup>2</sup> la variable  $t$  par la racine  $q$  (et les générateurs  $x$  de  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  pour  $1 \otimes_{\mathcal{A}} x$ ) dans le théorème 3.1.

**Proposition 3.3.** La relation  $1 \otimes_{\mathcal{A}} E^p = 1 \otimes_{\mathcal{A}} F^p = 0$  est satisfaite dans  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ . Par ailleurs, l'élément  $1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p$  y est central et  $1 \otimes_{\mathcal{A}} K^{2p} = 1 \otimes_{\mathcal{A}} \text{id}$ .

DÉMONSTRATION. Remarquons que  $[p]_t = t^{p-1} + t^{p-3} + \dots + t^{1-p} \in \mathcal{A}$  et que  $[p]_q = 0$ . Ainsi,

$$1 \otimes_{\mathcal{A}} F^p = 1 \otimes_{\mathcal{A}} [p]_t! F^{(p)} = (1 \bullet [p]_t) \otimes_{\mathcal{A}} [p-1]_t! F^{(p)} = [p]_q \otimes_{\mathcal{A}} [p-1]_t! F^{(p)} = 0$$

et on déduit que  $1 \otimes_{\mathcal{A}} E^p = 0$  de manière analogue. Par ailleurs,  $1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p$  commute trivialement avec les générateurs  $1 \otimes_{\mathcal{A}} K^{\pm 1}$  et  $1 \otimes_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} K; c \\ r \end{bmatrix}_t$  (pour  $r, c \in \mathbb{Z}$  avec  $r \geq 0$ ) en vertu de la première relation du théorème 3.1. Il s'agit donc bien d'un élément central de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  puisque, selon la seconde relation de ce même théorème, pour  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on a

$$\begin{aligned} (1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p)(1 \otimes_{\mathcal{A}} E^{(r)}) &= 1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p E^{(r)} = 1 \otimes_{\mathcal{A}} t^{2pr} E^{(r)} K^p \\ &= q^{2pr} \otimes_{\mathcal{A}} E^{(r)} K^p = (1 \otimes_{\mathcal{A}} E^{(r)})(1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p) \end{aligned}$$

et on obtient de même  $(1 \otimes_{\mathcal{A}} F^{(r)})(1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} K^p)(1 \otimes_{\mathcal{A}} F^{(r)})$ . Considérons finalement la relation suivante de  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  (voir le corollaire 3.2)

$$\left( \prod_{\ell=1}^p (t^\ell - t^{-\ell}) \right) \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t = \left( \prod_{\ell=1}^p (K t^{1-\ell} - K^{-1} t^{\ell-1}) \right) = t^{-\frac{1}{2}p(p-1)} K^{-p} \left( \prod_{\ell=0}^{p-1} (K^2 - t^{2\ell} \text{id}) \right).$$

Dans  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ , on a

$$1 \otimes_{\mathcal{A}} \left( \prod_{\ell=1}^p (t^\ell - t^{-\ell}) \right) \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t = (q^p - q^{-p}) \otimes_{\mathcal{A}} \left( \prod_{\ell=1}^{p-1} (t^\ell - t^{-\ell}) \right) \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t = 0$$

de sorte que

$$\left( 1 \otimes_{\mathcal{A}} t^{\frac{1}{2}p(p-1)} K^p \right) \left( 1 \otimes_{\mathcal{A}} t^{-\frac{1}{2}p(p-1)} K^{-p} \left( \prod_{\ell=0}^{p-1} (K^2 - t^{2\ell} \text{id}) \right) \right) = 1 \otimes_{\mathcal{A}} \left( \prod_{\ell=0}^{p-1} (K^2 - t^{2\ell} \text{id}) \right) = 0.$$

Notons  $\mathcal{R}_p$  l'ensemble des  $p$ -ièmes racines de l'unité. Alors, puisque la racine  $q^2 \in \mathcal{R}_p$  est primitive, on a  $\mathcal{R}_p = \{q^{2\ell} \mid 0 \leq \ell \leq p-1\}$  et la factorisation du polynôme  $x^p - 1$  donne

$$\begin{aligned} 1 \otimes_{\mathcal{A}} \left( \prod_{\ell=0}^{p-1} (K^2 - t^{2\ell} \text{id}) \right) &= \prod_{\ell=0}^{p-1} \left( (1 \otimes_{\mathcal{A}} K)^2 - q^{2\ell} (1 \otimes_{\mathcal{A}} \text{id}) \right) \\ &= \prod_{y \in \mathcal{R}_p} \left( (1 \otimes_{\mathcal{A}} K)^2 - y (1 \otimes_{\mathcal{A}} \text{id}) \right) = (1 \otimes_{\mathcal{A}} K)^{2p} - 1 \otimes_{\mathcal{A}} \text{id} = 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. □

<sup>2</sup>Les coefficients apparaissant dans les relations du théorème 3.1 appartiennent tous à  $\mathcal{A}$  (voir le corollaire 6.5.3 de [10]) de sorte que la substitution de  $q$  pour  $t$  peut être faite directement.

### 3.1.1. Une sous-algèbre remarquable

À partir de maintenant, on effectuera un léger abus de notation en omettant le symbole  $\otimes_{\mathcal{A}}$  lors de l'écriture des éléments de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . On écrira ainsi  $\gamma E^{(r)}$  afin de désigner l'élément  $\gamma \otimes_{\mathcal{A}} E^{(r)}$  où  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Avec cette notation, on peut donner une  $\mathbb{C}$ -base (à la *Poincaré-Birkhoff-Witt*) pour l'extension  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  via l'ensemble  $\mathcal{B}_{\text{PBW}}$  défini par (cf. [30])<sup>3</sup>

$$\left\{ \left( F^{(p)} \right)^{a_1} F^{a_2} K^{a_3} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_4} \left( E^{(p)} \right)^{a_5} E^{a_6} \mid a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ avec } a_2, a_6 < p \text{ et } a_3 < 2p \right\}.$$

Considérons les éléments  $e, f, h \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  donnés par

$$e = K^p E^{(p)}, \quad f = (-1)^{p+1} q^p F^{(p)} \quad \text{et} \quad h = [e, f].$$

On voudrait démontrer que la sous-algèbre de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  engendrée par ces éléments est isomorphe à l'algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$  (que l'on notera  $U\mathfrak{sl}_2$ ). Cela est fait très généralement dans [32] à l'aide d'une application appelée *morphisme de Frobenius quantique*, mais on propose ici une méthode de démonstration plus directe.

**Lemme 3.4.** Soient  $1 \leq r, m \leq p$  et  $1 \leq s \leq p - m$  avec  $m \neq p$ . Alors, les relations

$$F^{(p-m)} \begin{bmatrix} K; 2(m-p) \\ m \end{bmatrix}_t F^{(p-s)} = 0 = E^{(p-s)} \begin{bmatrix} K; 2(m-p) \\ m \end{bmatrix}_t E^{(p-m)}$$

et

$$\begin{bmatrix} K; 2(r-p) \\ p \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} K; 2(r-2p) \\ p \end{bmatrix}_t = \begin{cases} 2(-1)^{p+1} q^p K^p & \text{si } r = p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont satisfaites dans l'algèbre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ .

**DÉMONSTRATION.** À l'aide des relations 8 et 9 du théorème 3.1, on obtient

$$F^{(p-m)} \begin{bmatrix} K; 2(m-p) \\ m \end{bmatrix}_t F^{(p-s)} = \begin{bmatrix} K; 0 \\ m \end{bmatrix}_t F^{(p-m)} F^{(p-s)} = \begin{bmatrix} 2p - (m+s) \\ p-m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} K; 0 \\ m \end{bmatrix}_t F^{(2p-(m+s))} \quad \text{et}$$

$$E^{(p-s)} \begin{bmatrix} K; 2(m-p) \\ m \end{bmatrix}_t E^{(p-m)} = E^{(p-s)} E^{(p-m)} \begin{bmatrix} K; 0 \\ m \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 2p - (m+s) \\ p-m \end{bmatrix}_q E^{(2p-(m+s))} \begin{bmatrix} K; 0 \\ m \end{bmatrix}_t.$$

<sup>3</sup>Tel que mentionné dans cet article, pour  $q$  une  $\ell$ -ième racine primitive de l'unité, comme  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels,

$$\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathbb{C}[E]/\langle E^{(\ell_\alpha)} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[E^{(\ell_\alpha)}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[K]/\langle K^{2\ell_\alpha} - \text{id} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \left[ \begin{bmatrix} K; 0 \\ \ell_\alpha \end{bmatrix}_t \right] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F]/\langle F^{(\ell_\alpha)} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F^{(\ell_\alpha)}]$$

avec  $\ell_\alpha = \frac{\ell}{\text{pgcd}(\ell, 2)}$  et où, par exemple,  $\mathbb{C}[E]/\langle E^{(\ell_\alpha)} \rangle$  désigne le quotient de l'algèbre  $\mathbb{C}[E]$  par l'idéal engendré par  $E^{(\ell_\alpha)}$ . Selon notre convention,  $\ell \in \{p, 2p\}$  et  $p$  doit être impair lorsque  $\ell = p$ . Ainsi,  $\ell_\alpha = p$  et, puisque le produit tensoriel sur  $\mathbb{C}$  est commutatif, on obtient l'isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathbb{C}[F^{(p)}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F]/\langle F^{(p)} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[K]/\langle K^{2p} - \text{id} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \left[ \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t \right] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[E^{(p)}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[E]/\langle E^{(p)} \rangle$$

qui permet en particulier de conclure que  $\mathcal{B}_{\text{PBW}}$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ .

Cependant,  $0 \leq p - (m + s) \leq p - (m + 1) < p - m \leq p - 1$  d'où le théorème 1.25 montre que le coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} 2p - (m + s) \\ p - m \end{bmatrix}_q$  est nul et achève la démonstration du premier résultat d'intérêt. Pour le second, remarquons que, si  $r = p$ , les relations 3 et 5 du théorème 3.1 ainsi que le théorème 1.25 permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K; 2(r - p) \\ p \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} K; 2(r - 2p) \\ p \end{bmatrix}_t &= \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} K; -2p \\ p \end{bmatrix}_t \\ &= \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t - \sum_{\ell=0}^p (-1)^\ell q^{2p(p-\ell)} \begin{bmatrix} 2p + \ell - 1 \\ \ell \end{bmatrix}_q K^\ell \begin{bmatrix} K; 0 \\ p - \ell \end{bmatrix}_t \\ &= (-1)^{p+1} \begin{bmatrix} 3p - 1 \\ p \end{bmatrix}_q K^p + \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^{\ell+1} \begin{bmatrix} 2p + \ell - 1 \\ \ell \end{bmatrix}_q K^\ell \begin{bmatrix} K; 0 \\ p - \ell \end{bmatrix}_t \\ &= (-1)^{p+1} q^{p(1-2p)} \binom{2}{1} \begin{bmatrix} p - 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q K^p = 2(-1)^{p+1} q^p K^p. \end{aligned}$$

Enfin, si  $1 \leq r \leq p - 1$ , on peut réutiliser la relation 5 du théorème 3.1 pour déduire que

$$\begin{bmatrix} K; 2(r - p) \\ p \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} K; 2(r - 2p) \\ p \end{bmatrix}_t = \sum_{\ell=0}^p (-1)^\ell \gamma_\ell K^\ell \begin{bmatrix} K; 0 \\ p - \ell \end{bmatrix}_t$$

avec, pour  $0 \leq \ell \leq p$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_\ell &= q^{2(p-r)(p-\ell)} \begin{bmatrix} 2(p-r) + \ell - 1 \\ \ell \end{bmatrix}_q - q^{2(2p-r)(p-\ell)} \begin{bmatrix} 2(2p-r) + \ell - 1 \\ \ell \end{bmatrix}_q \\ &= \frac{q^{2r\ell}}{[\ell]_q!} \left( \prod_{j_1=0}^{\ell-1} [2(p-r) + j_1]_q - \prod_{j_2=0}^{\ell-1} [2(2p-r) + j_2]_q \right) \\ &\stackrel{1}{=} \frac{q^{2r\ell}}{[\ell]_q!} (1 - q^{2p\ell}) \left( \prod_{j=0}^{\ell-1} [2(p-r) + j]_q \right) = q^{2r\ell} (1 - q^{2p\ell}) \begin{bmatrix} 2(p-r) + \ell - 1 \\ \ell \end{bmatrix}_q = 0 \end{aligned}$$

où l'égalité 1 suit de la proposition 1.26. □

**Proposition 3.5.** Avec  $e = K^p E^{(p)}$ ,  $f = (-1)^{p+1} q^p F^{(p)}$  et  $h = [e, f]$ , on a

$$[h, e] = 2e \text{ et } [h, f] = -2f.$$

Autrement dit, la sous-algèbre de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  engendrée par  $\{e, f, h\}$  est isomorphe à  $U \mathfrak{sl}_2$ .

DÉMONSTRATION. Puisque  $K^p$  est central et que  $K^{2p} = 1$ , on a

$$[h, e] = (-1)^{p+1} q^p \left[ [K^p E^{(p)}, F^{(p)}], K^p E^{(p)} \right] = (-1)^{p+1} q^p \left[ [E^{(p)}, F^{(p)}], E^{(p)} \right]$$

où, en vertu des relations 3 et 7 du théorème 3.1,

$$[E^{(p)}, F^{(p)}] = \sum_{r=0}^p F^{(p-r)} \begin{bmatrix} K; 2(r-p) \\ r \end{bmatrix}_t E^{(p-r)} - F^{(p)} E^{(p)} = \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \begin{bmatrix} K; 2(r-p) \\ r \end{bmatrix}_t E^{(p-r)}.$$

Alors, selon les relations 3, 7, 8 et 9 de ce même théorème et selon le lemme 3.4,

$$\begin{aligned}
E^{(p)}[E^{(p)}, F^{(p)}] &= \sum_{r=1}^p \left( E^{(p)} F^{(p-r)} \right) \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)} \\
&= \sum_{r=1}^p \left( \sum_{s=0}^{p-r} F^{(p-(r+s))} \left[ \begin{matrix} K; 2(s-p) + r \\ s \end{matrix} \right]_t E^{(p-s)} \right) \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)} \\
&= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} E^{(p)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{p-m} F^{(p-(m+s))} \left[ \begin{matrix} K; 2(s-p) + m \\ s \end{matrix} \right]_t \left( E^{(p-s)} \left[ \begin{matrix} K; 2(m-p) \\ m \end{matrix} \right]_t E^{(p-m)} \right) \\
&= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p)} E^{(p-r)} = \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)} E^{(p)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en réutilisant le lemme 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}
[h, e] &= (-1)^{p+1} q^p \left( [E^{(p)}, F^{(p)}] E^{(p)} - E^{(p)} [E^{(p)}, F^{(p)}] \right) \\
&= (-1)^{p+1} q^p \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left( \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ p \end{matrix} \right]_t - \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ p \end{matrix} \right]_t \right) E^{(p-r)} E^{(p)} = 2K^p E^{(p)} = 2e
\end{aligned}$$

comme voulu. On a aussi

$$[h, f] = \left[ [K^p E^{(p)}, F^{(p)}], F^{(p)} \right] = K^p \left[ [E^{(p)}, F^{(p)}], F^{(p)} \right]$$

avec, de la même façon que précédemment,

$$\begin{aligned}
[E^{(p)}, F^{(p)}] F^{(p)} &= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t \left( E^{(p-r)} F^{(p)} \right) \\
&= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t \left( \sum_{s=0}^{p-r} F^{(p-s)} \left[ \begin{matrix} K; 2(s-p) + r \\ s \end{matrix} \right]_t E^{(p-(r+s))} \right) \\
&= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t F^{(p)} E^{(p-r)} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{p-m} \left( F^{(p-m)} \left[ \begin{matrix} K; 2(m-p) \\ m \end{matrix} \right]_t F^{(p-s)} \right) \left[ \begin{matrix} K; 2(s-p) + m \\ s \end{matrix} \right]_t E^{(p-(m+s))} \\
&= \sum_{r=1}^p F^{(p-r)} F^{(p)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)} = \sum_{r=1}^p F^{(p)} F^{(p-r)} \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ r \end{matrix} \right]_t E^{(p-r)}.
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant une dernière fois le lemme 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}
[h, f] &= -K^p \sum_{r=1}^p F^{(p)} F^{(p-r)} \left( \left[ \begin{matrix} K; 2(r-p) \\ r \end{matrix} \right]_t - \left[ \begin{matrix} K; 2(r-2p) \\ r \end{matrix} \right]_t \right) E^{(p-r)} \\
&= -2 \left( (-1)^{p+1} q^p K^{2p} F^{(p)} \right) = -2f
\end{aligned}$$

car  $K^{2p} = \text{id}$ . L'énoncé est donc démontré.  $\square$

Conformément à la proposition précédente, on se permettra désormais de dénoter par  $U\mathfrak{sl}_2$  la sous-algèbre de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  engendrée par  $e, f$  et  $h$ . On notera aussi  $\mathcal{U}$  l'algèbre engendrée par  $\{e, f, h, K\}$  et on désignera par  $\downarrow_{\mathcal{U}}: \text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \mathcal{U}$  le foncteur restriction associé (envoyant un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module au  $\mathcal{U}$ -module obtenu par restriction de l'action). Il s'agit d'un foncteur exact<sup>4</sup>. La vraie utilité de ce foncteur par rapport à l'étude effectuée dans ce mémoire provient cependant de la propriété suivante de la catégorie  $\text{mod } \mathcal{U}$ .

**Proposition 3.6.** Tout objet de  $\text{mod } \mathcal{U}$  est semisimple.

DÉMONSTRATION. Soit  $M$  un  $\mathcal{U}$ -module non nul<sup>5</sup> de dimension finie. Alors, l'action de  $K$  est diagonalisable<sup>6</sup> sur  $M$  étant donné que  $K^{2p} = \text{id}$ . Par ailleurs, cette action commute avec celle des éléments de  $U\mathfrak{sl}_2$  puisque, par exemple, selon la relation 2 du théorème 3.1,

$$Ke = K^p K E^{(p)} = q^{2p} K^p E^{(p)} K = eK.$$

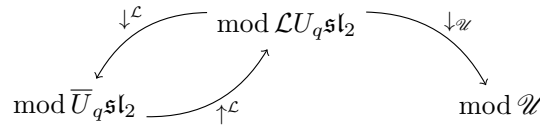
Par conséquent, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $K$  sur  $M$ , l'espace propre associé  $M_\lambda$  est un  $U\mathfrak{sl}_2$ -module non nul (de dimension finie) étant donné que

$$K(xm) = x(Km) = \lambda xm$$

pour tout  $x \in U\mathfrak{sl}_2$  et  $m \in M_\lambda$ . Ainsi, le corollaire 1.70 de [27] stipule qu'il doit exister des isomorphismes de  $U\mathfrak{sl}_2$ -modules

$$M \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{S}} M_\lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{S}} \bigoplus_{j=1}^{n_\lambda} M_{j\lambda}$$

avec  $\mathcal{S}$  le spectre de  $K$  sur  $M$ ,  $\{n_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{S}} \subseteq \mathbb{N}$  et  $\{M_{j\lambda} \mid \lambda \in \mathcal{S} \text{ et } 1 \leq j \leq n_\lambda\}$  des représentations irréductibles de  $U\mathfrak{sl}_2$ . Le résultat voulu découle alors du fait que les représentations irréductibles  $M_{j\lambda} \subseteq M_\lambda$  sont aussi trivialement des  $\mathcal{U}$ -modules simples puisque  $K$  agit comme un multiple de l'identité sur l'espace propre  $M_\lambda$ .  $\square$



**Fig. 3.1.** Foncteurs définis dans la section 3.1 et dans l'annexe C (avec l'algèbre  $\overline{U}_q\mathfrak{sl}_2$ ). Ces foncteurs sont exacts. Par ailleurs, tous les objets de  $\text{mod } \mathcal{U}$  sont semisimples et  $\downarrow^{\mathcal{L}}$  ainsi que  $\uparrow^{\mathcal{L}}$  préservent respectivement l'injectivité et la projectivité des modules.

<sup>4</sup>On peut en effet utiliser le théorème 5.3 du chapitre II de [2] pour obtenir un isomorphisme fonctoriel  $\downarrow_{\mathcal{U}} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2, -)$  et conclure l'exactitude de  $\downarrow_{\mathcal{U}}$  du fait que  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  est un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module libre.

<sup>5</sup>Le  $\mathcal{U}$ -module nul est ici considéré comme étant trivialement semisimple.

<sup>6</sup>En effet, notons  $\rho: \mathcal{U} \rightarrow \text{End } M$  la représentation de  $\mathcal{U}$  considérée sur le module  $M$  et  $\mathcal{R}_{2p}$  l'ensemble des  $2p$ -ièmes racines de l'unité. Alors, puisque  $\rho$  est une représentation,  $[\rho(K)]^{2p}$  doit être la matrice identité et le polynôme  $p(x) = x^{2p} - 1 = \prod_{j \in \mathcal{R}_{2p}} (x - j)$  doit annuler la matrice  $\rho(K)$ . Ainsi, puisque ce polynôme scinde en facteurs linéaires, le théorème de Cayley-Hamilton stipule qu'il doit en être de même pour le polynôme minimal de la matrice  $\rho(K)$  de sorte que cette matrice est certainement diagonalisable.

### 3.1.2. Structure d'algèbre de Hopf

Par définition<sup>7</sup>, la  $\mathcal{A}$ -algèbre  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  est engendrée par  $\{E^{(n)}, F^{(n)}, K^{\pm 1}\}_{n \geq 0}$ . Ainsi, un ensemble générateur naturel<sup>8</sup> pour la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  est donné par  $\{E^{(n)}, F^{(n)}, K\}_{n \geq 0}$  (avec l'abus de notation discuté au début de la sous-section précédente). Néanmoins, on considérera aussi dans ce mémoire l'ensemble générateur donné dans la proposition ci-dessous puisque celui-ci permet de mettre en évidence la sous-algèbre  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  introduite dans les pages précédentes.

**Proposition 3.7.** L'algèbre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  est engendré par  $\{E, F, K, e, f\}$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $n = n_1 p + n_2$  avec  $n_2 < p$ . En utilisant le fait que  $K^p$  est central avec plusieurs fois la relation 8 du théorème 3.1, on obtient

$$K^{-n_1 p} e^{n_1} E^{n_2} = (E^{(p)})^{n_1} E^{n_2} = [n_2]_q! (E^{(p)})^{n_1} E^{(n_2)} = [n_2]_q! \begin{bmatrix} n \\ n_2 \end{bmatrix}_q \left( \prod_{j=1}^{n_1} \begin{bmatrix} jp \\ p \end{bmatrix}_q \right) E^{(n)} = \gamma_n E^{(n)}$$

avec, selon la proposition 1.21 et le théorème 1.25,

$$\begin{aligned} \gamma_n &= [n_2]_q! \begin{bmatrix} n_1 p + n_2 \\ n_2 \end{bmatrix}_q \left( \prod_{j=1}^{n_1} \begin{bmatrix} jp \\ p \end{bmatrix}_q \right) \\ &= [n_2]_q! q^{-p n_1 n_2} \left( \prod_{j=1}^{n_1} q^{p^2(1-j)} j \right) = n_1! [n_2]_q! q^{-p n_1 n_2} q^{\frac{1}{2} p^2 n_1 (n_1 - 1)} \end{aligned}$$

qui est un nombre complexe non nul. Ainsi,  $E^{(n)} \in \text{span}_{\mathbb{C}}(K^{-n_1 p} e^{n_1} E^{n_2})$  et on montre de la même façon que  $F^{(n)} \in \text{span}_{\mathbb{C}}(f^{n_1} F^{n_2})$ . L'énoncé voulu découle alors du fait que  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  est engendrée, comme mentionné ci-haut, par l'ensemble  $\{E^{(n)}, F^{(n)}, K\}_{n \geq 0}$ .  $\square$

Dans [31], une structure d'algèbre de Hopf<sup>9</sup> est définie sur la  $\mathbb{Q}(t)$ -algèbre  $U_t\mathfrak{sl}_2$  et sur la forme intégrale  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$ . Cette structure permet de considérer également l'extension de Lusztig comme une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Hopf<sup>10</sup> avec le coproduit  $\Delta : \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  (qui est un morphisme d'algèbres coassociatif) défini sur l'ensemble générateur  $\{E^{(n)}, F^{(n)}, K\}_{n \geq 0}$  par

$$\Delta(E^{(n)}) = \sum_{\ell=0}^n q^{\ell(n-\ell)} E^{(n-\ell)} K^{\ell} \otimes E^{(\ell)}; \quad \Delta(F^{(n)}) = \sum_{\ell=0}^n q^{-\ell(n-\ell)} F^{(\ell)} \otimes K^{-\ell} F^{(n-\ell)}$$

et  $\Delta(K) = K \otimes K$ . En particulier,

$$\Delta(E) = E \otimes \text{id} + K \otimes E \quad \text{et} \quad \Delta(F) = \text{id} \otimes F + F \otimes K^{-1}.$$

<sup>7</sup>À partir de maintenant, on désigne par  $\otimes$  le produit tensoriel  $\otimes_{\mathbb{C}}$ .

<sup>8</sup>On utilise ici le fait que  $K^{2p} = \text{id}$  au sein de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  en vertu de la proposition 3.3.

<sup>9</sup>Dans ce mémoire, on utilisera très peu les notions reliées aux algèbres de Hopf et il n'est donc pas nécessaire de connaître la définition de ce concept pour comprendre les pages suivantes. On réfère tout de même à [10] pour une introduction de ces notions adaptées à l'étude des groupes quantiques (voir aussi l'annexe B).

<sup>10</sup>Voir la note 8.11 de [31].

L'image des éléments  $e$  et  $f$  sous le coproduit  $\Delta$  est donnée dans la proposition suivante. L'expression obtenue généralise<sup>11</sup> celle présentée dans [9] pour le paramètre  $q = e^{i\pi/p}$ .

**Proposition 3.8.** On a

$$\Delta(e) = \text{id} \otimes e + e \otimes K^p + \frac{1}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^{\ell-1} E^\ell K^{-\ell} \otimes K^p E^{p-\ell}$$

$$\text{et } \Delta(f) = \text{id} \otimes f + f \otimes K^p + \frac{(-1)^p}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{-\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^\ell F^{p-\ell} \otimes K^{\ell+p} F^\ell$$

DÉMONSTRATION. Soit  $1 \leq s \leq p-1$ . Alors, puisque le coproduit  $\Delta$  est un morphisme d'algèbres et que  $K^p$  est central,

$$\begin{aligned} \Delta(e) &= \Delta(K)^p \Delta(E^{(p)}) = (K^p \otimes K^p) \left( \sum_{\ell=0}^p q^{\ell(p-\ell)} E^{(p-\ell)} K^\ell \otimes E^{(\ell)} \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^p q^{\ell(p-\ell)} E^{(p-\ell)} K^{p+\ell} \otimes K^p E^{(\ell)} = \sum_{\ell=0}^p q^{\ell(p-\ell)} E^{(\ell)} K^{2p-\ell} \otimes K^p E^{(p-\ell)} \\ &\stackrel{1}{=} \text{id} \otimes K^p E^{(p)} + E^{(p)} K^p \otimes K^p + \sum_{\ell=1}^{p-1} q^{\ell(p-\ell)} E^{(\ell)} K^{-\ell} \otimes K^p E^{(p-\ell)} \\ &= \text{id} \otimes e + e \otimes K^p + \frac{1}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} \left( \prod_{s=1}^{\ell-1} \frac{[p-s]_q}{[s]_q} \right) E^\ell K^{-\ell} \otimes K^p E^{p-\ell} \\ &\stackrel{2}{=} \text{id} \otimes e + e \otimes K^p + \frac{1}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^{\ell-1} E^\ell K^{-\ell} \otimes K^p E^{p-\ell} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $K^{2p} = \text{id}$  à l'égalité 1 et la proposition 1.26 à l'égalité 2. De même,

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= (-1)^{p+1} q^p \Delta(F^{(p)}) = (-1)^{p+1} q^p \sum_{\ell=0}^p q^{-\ell(p-\ell)} F^{(\ell)} \otimes K^{-\ell} F^{(p-\ell)} \\ &= (-1)^{p+1} q^p \sum_{\ell=0}^p q^{-\ell(p-\ell)} F^{(p-\ell)} \otimes K^{\ell-p} F^{(\ell)} = (-1)^{p+1} q^p \sum_{\ell=0}^p q^{-\ell(p-\ell)} F^{(p-\ell)} \otimes K^{\ell+p} F^{(\ell)} \\ &= f \otimes K^p + \text{id} \otimes K^{2p} f + (-1)^{p+1} q^p \sum_{\ell=1}^{p-1} q^{-\ell(p-\ell)} F^{(p-\ell)} \otimes K^{\ell+p} F^{(\ell)} \\ &= f \otimes K^p + \text{id} \otimes f + \frac{(-1)^{p+1} q^p}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{-\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} \left( \prod_{s=1}^{\ell-1} \frac{[p-s]_q}{[s]_q} \right) F^{p-\ell} \otimes K^{\ell+p} F^\ell \\ &= f \otimes K^p + \text{id} \otimes f + \frac{(-1)^{p+1} q^p}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{-\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^{\ell-1} F^{p-\ell} \otimes K^{\ell+p} F^\ell \\ &= \text{id} \otimes f + f \otimes K^p + \frac{(-1)^p}{[p-1]_q!} \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{q^{-\ell(p-\ell)}}{[\ell]_q} (-q^p)^\ell F^{p-\ell} \otimes K^{\ell+p} F^\ell \end{aligned}$$

Ceci achève cette démonstration. □

<sup>11</sup>Notons que les auteurs de [9] utilise le coproduit réciproque  $\Delta^{\text{op}} = \tau \circ \Delta$  avec  $\tau_\otimes$  l'automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  défini par  $\tau_\otimes(x \otimes y) = y \otimes x$  pour  $x, y \in \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ .

Soient  $M, N$  deux  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. Alors, l'espace vectoriel  $M \otimes N$  est naturellement une représentation de l'algèbre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  via l'action définie  $\mathbb{C}$ -linéairement comme

$$(a_1 \otimes a_2)(m \otimes n) = a_1 m \otimes a_2 n$$

où  $a_1, a_2 \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ . On peut ainsi utiliser le coproduit  $\Delta$  pour considérer plutôt  $M \otimes N$  comme un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module (noté  $M \otimes^c N$ ) avec l'action

$$a \bullet (m \otimes n) = \Delta(a)(m \otimes n)$$

où  $a \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ . On démontre la proposition suivante dans l'annexe B.

**Proposition 3.9.** Soient  $P, M$  des  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules avec  $P$  projectif. Alors,  $P \otimes^c M$  est également un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif.

Cette proposition sera utilisée dans la section 3.2 afin d'obtenir la décomposition de certains produits tensoriels dans  $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . On y utilisera aussi de façon intrinsèque l'élément

$$H_t = \frac{K^{2p} - \text{id}}{\Phi_p(t^2)} \in U_t\mathfrak{sl}_2$$

où  $\Phi_p(t)$  désigne le  $p$ -ième polynôme cyclotomique. Notons que, comme  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité,  $q^2 = e^{2i\pi \frac{\ell}{p}}$  pour un certain  $1 \leq \ell \leq p$  avec  $\text{pgcd}(\ell, p) = 1$ . Ainsi, on peut utiliser les factorisations des polynômes  $t^{2p} - 1$  et  $\Phi_p(t^2)$  pour conclure que le scalaire

$$\varepsilon_q = \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ \text{pgcd}(k, p) \neq 1}} (q^2 - e^{2i\pi \frac{k}{p}})$$

est un nombre complexe non nul bien défini.

**Proposition 3.10** ([30]). L'élément  $H_t$  appartient à la forme intégrale  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$ .

La proposition 3.10 permet de déduire que le *générateur déroulé*

$$H = \frac{1}{\varepsilon_q} \otimes_{\mathcal{A}} H_t$$

est un élément bien défini de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . Il satisfait la relation  $\Delta(H) = H \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H$  (cf. [30]).

## 3.2. Théorie de la représentation

L'objectif de cette section est de caractériser partiellement les représentations de dimension finie de l'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ . En particulier, on identifie, dans les sous-sections 3.2.1 et 3.2.2, tous les objets simples et projectifs indécomposables (de type 1) de la catégorie  $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  tout en donnant une réalisation explicite pour ces objets. On étudie également, dans la section 3.2.3, la structure de certains produits tensoriels de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules afin d'aboutir à des règles partielles de fusion pour  $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ .



### 3.2.1. Irréductibles

Puisque  $K^{2p} = \text{id}$ , l'opérateur représentant  $K$  sur un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module doit être diagonalisable avec un spectre contenu dans l'ensemble des  $2p$ -ièmes racines de l'unité. Il est ainsi naturel de dire qu'un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module  $M$  est de *type 1* si  $K$  agit sur  $M$  avec des valeurs propres s'écrivant comme des puissances entières du nombre complexe  $q$ . On exclut donc la possibilité qu'une puissance non entière de  $q$  (comme  $-q$  pour  $q = e^{2i\pi/3}$ ) corresponde à une valeur propre de  $K$  sur un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module de type 1. On démontre aisément la proposition suivante.

**Proposition 3.11.** Soient  $M$  et  $N$  des  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules de type 1. Alors, les quotients et sous-modules de  $M$  (ou  $N$ ) ainsi que les modules  $M \oplus N$  et  $M \otimes^c N$  sont aussi de type 1.

Soit  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et fixons  $s, r \in \mathbb{N}$  tels que  $i = (r-1)p + s - 1$  et  $s \leq p$ . On définit le *module de Weyl*  $\Delta_q(i)$  (cf. [1]) comme le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de base  $\{m_0, \dots, m_i\}$  avec la  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -action

$$K m_k = q^{i-2k} m_k, \quad E^{(n)} m_k = \begin{bmatrix} i - k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k-n} \quad \text{et} \quad F^{(n)} m_k = \begin{bmatrix} k + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{k+n}$$

pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $k \in \{0, \dots, i\}$  et où  $m_\ell$  est nul si  $\ell < 0$  ou  $\ell > i$ . Ce module est de type 1.

**Proposition 3.12** ([1]). La coiffe  $L_q(i) = \text{top } \Delta_q(i)$  est irréductible. Par ailleurs,

- (1) Supposons que  $i < p$  ou  $i + 1 \equiv_p 0$ . Alors,  $\Delta_q(i) = L_q(i)$ .
- (2) Supposons que  $i = (r-1)p + s - 1$  où  $s, r \in \mathbb{N}$  avec  $s < p$  et posons  $j = i + 2(p-s)$ . Alors,  $L_q(i) = \text{soc } \Delta_q(j)$  et il existe une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow L_q(i) \rightarrow \Delta_q(j) \rightarrow L_q(j) \rightarrow 0$$

- (3) L'ensemble  $\{L_q(i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  est un ensemble complet de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples de type 1 non isomorphes et de dimension finie.

Posons à nouveau  $j = i + 2(p-s) = (r+1)p - s - 1$  et notons  $V_j$  le sous-espace de  $\Delta_q(j)$  ayant pour base  $\mathcal{B}_j = \{m_{ap+b} \mid 0 \leq a \leq r-1 \text{ et } p-s \leq b \leq p-1\}$ . La proposition suivante (avec la proposition 3.12) montre que  $V_j \simeq L_q(i)$ .

**Proposition 3.13.** L'espace vectoriel  $V_j$  est stable sous l'action de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $m_{ap+b} \in \mathcal{B}_j$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Soient aussi  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $n_2 < p$  et  $n = n_1p + n_2$ . Alors, la définition de  $\Delta_q(j)$  permet de conclure que l'élément  $E^{(n)} m_{ap+b}$  de  $\Delta_q(j)$  appartient à  $V_j$  lorsque  $n_2 \leq b + s - p$ . Par ailleurs, pour  $n_2 \geq b + s - p + 1 \geq 1$ ,

$$j - (ap + b) + n = j - (ap + b) + n_1p + n_2 = (r - a + n_1)p + \gamma$$

avec  $0 \leq \gamma = p + n_2 - (s + b + 1) \leq n_2 - 1 < n_2 < p$  d'où, selon le théorème 1.25,

$$E^{(n)} m_{ap+b} = \begin{bmatrix} j - (ap + b) + n \\ n \end{bmatrix}_q m_{ap+b-n} = 0.$$

De la même façon, si  $n_2 \leq p - b - 1$ , on a trivialement  $F^{(n)}m_{ap+b} \in V_j$  et, si  $n_2 \geq p - b \geq 1$ , on peut déduire que  $F^{(n)}m_{ap+b} = 0$  du théorème 1.25 et du fait que

$$ap + b + n = ap + b + n_1p + n_2 = (a + n_1 + 1)p + \gamma$$

avec  $0 \leq \gamma = b + n_2 - p \leq n_2 - 1 < n_2 < p$ . Le résultat voulu suit alors de la relation  $Km_{ap+b} = q^{j-2(ap+b)}m_{ap+b} \in V_j$  et du fait que  $\{E^{(n)}, F^{(n)}, K\}_{n \geq 0}$  engendre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ .  $\square$

**Corollaire 3.14.** La dimension du simple  $L_q(i)$  est  $\dim L_q(i) = \dim V_j = sr$ .

**Remarque 3.15.** Dans [10], les auteurs dénotent par  $V_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(j)$  le  $U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$ -module défini sur le  $\mathcal{A}$ -module libre de base  $\{v_0, \dots, v_j\}$  à partir de l'action

$$Kv_k = t^{j-2k}v_k; \quad E^{(n)}v_k = \begin{bmatrix} j - k + n \\ n \end{bmatrix}_t v_{k-n} \quad \text{et} \quad F^{(n)}v_k = \begin{bmatrix} k + n \\ n \end{bmatrix}_t v_{k+n}$$

pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et où  $v_\ell = 0$  si  $\ell < 0$  ou  $\ell > j$ . L'espace  $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} V_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(j)$  est alors aussi muni d'une structure naturelle de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module via l'action définie par  $(\gamma_1 \otimes_{\mathcal{A}} x)(\gamma_2 \otimes_{\mathcal{A}} v) = \gamma_1\gamma_2 \otimes_{\mathcal{A}} xv$  où  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ ,  $x \in U_{\mathcal{A}}^{\text{res}}$  et  $v \in V_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(j)$ . Avec cette action, on a une bijection  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéaire  $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{A}} V_{\mathcal{A}}^{\text{res}}(j) \simeq \Delta_q(j)$  donnée par  $1 \otimes_{\mathcal{A}} v_k \mapsto m_k$ . Soit  $k \in \{0, \dots, j\}$ . Alors,

$$\begin{aligned} H(1 \otimes_{\mathcal{A}} v_k) &= \frac{1}{\varepsilon_q} \otimes_{\mathcal{A}} H_t v_k = \frac{1}{\varepsilon_q} \otimes_{\mathcal{A}} \left( \frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) v_k \stackrel{1}{=} \frac{1}{\varepsilon_q} \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(j-2k)-1}}{\Phi_p(t^2)} \right) \right] (1 \otimes_{\mathcal{A}} v_k) \\ &\stackrel{2}{=} \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{t^{2p} - 1} \right) \right] (1 \otimes_{\mathcal{A}} v_k) = (j - 2k)(1 \otimes_{\mathcal{A}} v_k) \end{aligned}$$

où l'égalité 2 provient de la définition de  $\varepsilon_q$  et où l'égalité 1 découle du fait que

$$\frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{\Phi_p(t^2)} = \left( \frac{t^{2p} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) \left( \frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{t^{2p} - 1} \right) = \left( \frac{t^{2p} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{j-2k-1} t^{2p\ell} \right) \in \mathcal{A}$$

puisque, selon les propriétés des polynômes cyclotomiques,

$$\frac{t^{2p} - 1}{\Phi_p(t^2)} = \prod_{d|p, d \neq p} \Phi_d(t^2) \in \mathbb{Z}[t^2] \subseteq \mathcal{A}.$$

En particulier, l'isomorphisme ci-haut donne  $Hm_k = (j - 2k)m_k$  et  $q^H m_k = q^{j-2k}m_k = Km_k$ .

**Définition 3.16** (Module de plus haut poids). Soit  $M$  un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module. On dit que  $x \in M$  est un *vecteur de plus haut poids*  $\lambda$  si  $x$  est un vecteur propre de  $H$  de valeur propre  $\lambda$  tel que  $E^{(n)}x = 0$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . On dit également que  $M$  est un *module de plus haut poids*  $\lambda$  si  $M$  est un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module cyclique engendré par un vecteur de plus haut poids  $\lambda$ .

Selon la remarque 3.15, le module  $\Delta_q(j)$  est un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module de plus haut poids  $j$  avec  $m_0$  comme vecteur de plus haut poids. Par ailleurs, cette même remarque et les propositions 3.12 et 3.13 permettent aisément de montrer que le module  $V_j \simeq L_q(i)$  est l'unique  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module simple de type 1 de plus haut poids  $i$ . Son vecteur de plus haut poids est  $m_{p-s} \in V_j \subseteq \Delta_q(j)$ .

**Lemme 3.17.** Soit  $M$  un  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module de dimension finie de plus haut poids  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et de type 1. Alors, la coiffe  $\text{top } M$  est la somme directe de  $n$  copies du simple  $L_q(i)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier,  $\text{top } M$  contient une copie du module irréductible  $L_q(i)$ .

DÉMONSTRATION. Notons  $x$  le vecteur de plus haut poids de  $M$  et fixons un sous-module simple  $L \subseteq \text{top } M$ . Puisque  $\text{top } M$  est semisimple,  $L$  est aussi un quotient de  $\text{top } M$  d'où on peut supposer que  $L = M/N$  pour un certain sous-module  $N \subseteq M$  contenant  $\text{rad } M$ . Notons  $\pi : M \rightarrow L$  la projection canonique associée et considérons  $\ell \in L$ . Remarquons que, puisque  $\pi$  est surjective et que  $M$  est engendré par  $x$ , on doit avoir  $\ell = \pi(ax) = a\pi(x)$  pour un certain  $a \in \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  de sorte que  $L$  est engendré par  $\pi(x)$ . De plus, puisque  $x$  est un vecteur de plus haut poids  $i$ , on doit avoir  $Hx = ix$  et  $E^{(n)}x = 0$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) d'où  $H\pi(x) = i\pi(x)$  et  $E^{(n)}\pi(x) = 0$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ). Ainsi,  $\pi(x)$  est un vecteur de plus haut poids  $i$  pour le module simple  $L \subseteq \text{top } M$  (qui est de type 1 selon la proposition 3.11) et les commentaires émis ci-dessus permettent de conclure que  $L \simeq L_q(i)$ . Ceci achève cette démonstration.  $\square$

On introduit maintenant une autre réalisation pour les modules simples  $L_q(i)$ . La raison principale justifiant l'utilisation de cette seconde réalisation est que celle-ci généralise la définition présentée dans [9] pour les représentations irréductibles de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  lorsque  $q = e^{i\pi/p}$ .

**Proposition 3.18.** Soient  $\varrho = q^{(r-1)p}$  et  $\mathcal{J} = \{(c, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq c < s \text{ et } 0 \leq b < r\}$ . Notons  $\mathcal{X}_{s,r} = \text{span}_{\mathbb{C}}(\{a_{c,b}\}_{(c,b) \in \mathcal{J}})$ . Alors, les relations

$$\begin{aligned} Ea_{c,b} &= \varrho[c]_q[s-c]_q a_{c-1,b}; & Fa_{c,b} &= a_{c+1,b}; & Ka_{c,b} &= \varrho q^{s-1-2c} a_{c,b}; \\ ea_{c,b} &= b(r-b)a_{c,b-1}; & fa_{c,b} &= a_{c,b+1} & \text{et} & \quad ha_{c,b} = (r-1-2b)a_{c,b} \end{aligned}$$

(où  $a_{n,m} = 0$  si  $(n, m) \notin \mathcal{J}$ ) permettent de définir une action de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  sur  $\mathcal{X}_{s,r}$ . Avec cette action, on a  $\mathcal{X}_{s,r} \simeq L_q(i)$  comme  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules.

DÉMONSTRATION. Soit la bijection  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\varphi : \mathcal{X}_{s,r} \rightarrow L_q(i)$  définie sur  $\{a_{c,b}\}_{(c,b) \in \mathcal{J}}$  par  $\varphi(a_{c,b}) = \gamma_{b,c} m_{bp+c+p-s}$  avec  $\gamma_{b,c} = q^{b(c+p-s)p} q^{\frac{1}{2}b(b+1)p^2} (b![c+p-s]_q!)$  (pour chaque  $(b, c) \in \mathcal{J}$ ). Il suffit de prouver que  $\varphi$  commute avec les générateurs  $\{E, F, K, e, f\}$  de la proposition 3.7. Soit donc  $(c, b) \in \mathcal{J}$ . Alors, étant donné que  $j = i + 2(p-s) = (r+1)p - s - 1$ , on a

$$K\varphi(a_{c,b}) = \gamma_{b,c} q^{j-2(bp+c+p-s)} m_{bp+c+p-s} = q^{-2pb} \varrho q^{s-1-2c} \varphi(a_{c,b}) = \varphi(Ka_{c,b}).$$

Un calcul direct montre aussi que les éléments

$$E\varphi(a_{0,b}), \varphi(Ea_{0,b}), F\varphi(a_{s-1,b}), \varphi(Fa_{s-1,b}), e\varphi(a_{c,0}), \varphi(ea_{c,0}), f\varphi(a_{c,r-1}) \text{ et } \varphi(fa_{c,r-1})$$

sont tous nuls. De plus, selon la proposition 1.26, si  $c \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} E\varphi(a_{c,b}) &= \gamma_{b,c} [j - (bp+c+p-s) + 1]_q m_{bp+c+p-s-1} = \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b,c-1}} [(r-b)p - c]_q \varphi(a_{c-1,b}) \\ &= q^{bp} [c+p-s]_q [(r-b)p - c]_q \varphi(a_{c-1,b}) = q^{2p} \varrho [s-c]_q [c]_q \varphi(a_{c-1,b}) = \varphi(Ea_{c,b}) \end{aligned}$$

et, pour  $c < s - 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} F\varphi(a_{c,b}) &= \gamma_{b,c}[bp + c + p - s + 1]_q m_{bp+c+p-s+1} = \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b,c+1}}[bp + c + p - s + 1]_q \varphi(a_{c+1,b}) \\ &= q^{-bp} \frac{[bp + c + p - s + 1]_q}{[c + p - s + 1]_q} \varphi(a_{c+1,b}) = \varphi(a_{c+1,b}) = \varphi(Fa_{c,b}). \end{aligned}$$

En outre, lorsque  $b \geq 1$ , le théorème 1.25 permet facilement d'obtenir

$$\begin{aligned} e\varphi(a_{c,b}) &= K^p E^{(p)}\varphi(a_{c,b}) = \gamma_{b,c} q^{p(j-2((b-1)p+c-s))} \begin{bmatrix} (r-b)p + p - (c+1) \\ p \end{bmatrix}_q m_{(b-1)p+c+p-s} \\ &= \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b-1,c}} q^{pj} \begin{bmatrix} (r-b)p + p - (c+1) \\ p \end{bmatrix}_q \varphi(a_{c,b-1}) = \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b-1,c}} q^{pj} q^{p(p(1-r+b)-p+c+1)} (r-b) \varphi(a_{c,b-1}) \\ &= \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b-1,c}} q^{(bp+c-p-s)} (r-b) \varphi(a_{c,b-1}) = b(r-b) \varphi(a_{c,b-1}) = \varphi(ea_{c,b}) \end{aligned}$$

car  $0 \leq p - s \leq p - (c + 1) \leq p - 1$ . Enfin, si  $b < r - 1$ , on conclut de même que

$$\begin{aligned} f\varphi(a_{c,b}) &= (-1)^{p+1} q^p F^{(p)}\varphi(a_{c,b}) = \gamma_{b,c} (-1)^{p+1} q^p \begin{bmatrix} (b+1)p + c + p - s \\ p \end{bmatrix}_q m_{(b+1)p+c+p-s} \\ &= \frac{\gamma_{b,c}}{\gamma_{b+1,c}} (-1)^{p+1} q^{p(s-(b+1)p-c+1)} (b+1) \varphi(a_{c,b+1}) = (-1)^{p+1} q^p q^{-p^2} \varphi(a_{c,b+1}) = \varphi(fa_{c,b}) \end{aligned}$$

puisque  $0 \leq p - s \leq p + c - s \leq p - 1$  et  $q^{p^2} = (-1)^{p+1} q^p$  (voir la proposition 1.24).  $\square$

Un dernier fait motivant la proposition 3.18 est que la forme de l'action de la sous-algèbre  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  sur les modules  $\mathcal{X}_{s,r}$  permet de démontrer assez rapidement le résultat suivant.

**Proposition 3.19.** Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $\mathcal{X}_{s,r}$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Alors, la multiplication à gauche par  $e^n f^n$  (ou par  $f^n e^n$ ) définit un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de l'espace propre  $\mathcal{X}_{s,r}|_{H=\lambda}$  lorsque  $|\lambda - 2np| \leq |\lambda|$  (ou lorsque  $|\lambda + 2np| \leq |\lambda|$ , respectivement).

DÉMONSTRATION. Désignons par  $\varphi : \mathcal{X}_{s,r} \rightarrow L_q(i)$  l'isomorphisme introduit dans la preuve de la proposition 3.18. Alors, pour chaque choix de  $c, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $c < s$  et  $b < r$ , on a  $\varphi(a_{c,b}) = \gamma_{b,c} m_{bp+c+p-s}$  pour un certain  $\gamma_{b,c} \in \mathbb{C}$  non nul. De plus, selon la remarque 3.15,

$$Ha_{c,b} = \gamma_{b,c} \varphi^{-1}(Hm_{bp+c+p-s}) = (j - 2(bp + c + p - s))a_{c,b} = (i - 2(bp + c))a_{c,b}.$$

En particulier, l'espace propre  $\mathcal{X}_{s,r}|_{H=\lambda}$  est engendré par  $a_{c,b}$  avec  $bp + c = \frac{1}{2}(i - \lambda)$  et on doit notamment avoir  $\lambda \in \{-i, -i + 2, \dots, i\}$ . Supposons  $|\lambda - 2np| \leq |\lambda|$ . Dans cette situation,  $i - 2((b+n)p + c) = \lambda - 2np \geq -|\lambda| \geq -i$  d'où  $i = (r-1)p + s - 1 \geq (b+n)p + c$ . Ainsi, on obtient  $r - 1 \geq b + n$  et on déduit que

$$e^n f^n a_{c,b} = e^n a_{c,b+n} = \left( \prod_{\ell=0}^{n-1} (b+n-\ell)(r-(b+n)+\ell) \right) a_{c,b} \neq 0$$

car, dans notre cas,  $b+n-\ell \geq b+1 \geq 1$  et  $r-(b+n)+\ell \geq r-(b+n) \geq 1$  si  $0 \leq \ell \leq n-1$ .

Par conséquent, lorsque  $|\lambda - 2np| \leq |\lambda|$ , l'endomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathcal{X}_{s,r}|_{H=\lambda}$  donné via la multiplication à gauche par  $e^n f^n$  est une application injective et il doit donc s'agir d'un automorphisme puisque son domaine est de dimension finie. De même, si  $|\lambda + 2np| \leq |\lambda|$ , on a  $i - 2((b - n)p + c) = \lambda + 2np \leq |\lambda| \leq i$  de sorte que  $b - n \geq 0$ . On peut alors conclure le résultat voulu du fait que, dans cette situation,

$$f^n e^n a_{c,b} = \left( \prod_{\ell=0}^{n-1} (b - \ell)(r - b + \ell) \right) f^n a_{c,b-n} = \left( \prod_{\ell=0}^{n-1} (b - \ell)(r - b + \ell) \right) a_{c,b} \neq 0$$

car  $b - \ell \geq b - n + 1 \geq 1$  et  $r - b + \ell \geq r - b \geq 1$  lorsque  $0 \leq \ell \leq n - 1$ .  $\square$

### 3.2.2. Couvertures projectives

On s'intéresse maintenant à la structure des couvertures projectives des modules simples  $L_q(i)$  introduit dans la sous-section précédente. La structure en question est en général donnée implicitement au travers d'une suite exacte courte non scindée (voir la proposition 3.20) faisant intervenir deux modules de Weyl. Dans cette sous-section, ces facteurs de Weyl sont clairement mis en évidence via une réalisation explicite nouvelle (à notre connaissance) pour laquelle la non trivialité de la  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -action est concentrée en la seule action des puissances divisées  $E^{(n)}$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ). Comme précédemment, on fixe  $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  s'écrivant comme  $j = i + 2(p - s)$  et  $i = (r - 1)p + s - 1$  pour certains  $r, s \in \mathbb{N}$  avec  $s \leq p$ .

**Proposition 3.20** ([1]). Désignons par  $P_q(i)$  la couverture projective du simple  $L_q(i)$ . Alors,  $P_q(i)$  est un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module indécomposable de type 1 et correspond également à l'enveloppe injective de  $L_q(i)$ . Par ailleurs,

- (1) Supposons  $i + 1 \equiv_p 0$ . Alors,  $P_q(i) \simeq \Delta_q(i) \simeq L_q(i)$ .
- (2) Supposons  $s \neq p$ . Alors,  $\dim P_q(i) = 2pr$  et on a une suite exacte courte non scindée

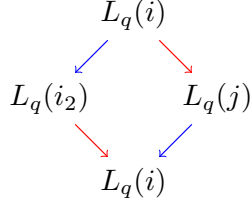
$$0 \rightarrow \Delta_q(j) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0$$

- (3) Supposons que  $M$  soit un objet projectif ou injectif de type 1 de  $\text{mod } \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ . Alors, pour chaque sommand direct  $M_\ell$  de  $M$ , il existe un unique  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $M_\ell \simeq P_q(i)$ .

L'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  admet une anti-involution  $S$  appelée *antipode* provenant de sa structure d'algèbre de Hopf (cf. [1], [10]). Les résultats de la section 2.3.1 peuvent ainsi être utilisés pour définir une dualité  $*$  de  $\text{mod } \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ . Dans [1], les auteurs utilisent cette dualité afin d'étudier les comodules de Weyl  $\nabla_q(\ell) = \Delta_q^*(\ell)$  (pour  $\ell \geq 0$ ) et stipulent notamment l'existence d'une suite exacte courte non scindée de la forme

$$0 \rightarrow \nabla_q(i) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \nabla_q(j) \rightarrow 0$$

lorsque  $s \neq p$ . Ce résultat et les propositions 3.12 et 3.20 permettent alors de conclure que, pour  $1 \leq s \leq p - 1$ , la structure de  $P_q(i)$  peut être représentée à l'aide de la figure 3.2.



**Fig. 3.2.** Diagramme de Loewy de  $P_q(i)$  pour  $s \neq p$  avec  $i_2 = i - 2s$ . Dans cette figure, on doit retirer le facteur  $L_q(i_2)$  lorsque  $i_2 < 0$  et les filtrations  $0 \subseteq \Delta_q(j) \subseteq P_q(i)$  ainsi que  $0 \subseteq \nabla_q(i) \subseteq P_q(i)$  sont respectivement représentées à l'aide de flèches bleues et rouges.

Dans cette sous-section, on supposera toujours  $s \neq p$ . On veut montrer que, sous cette hypothèse, le  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif  $P_q(i)$  est, à équivalence près, l'unique extension indécomposable de  $\Delta_q(j)$  par  $\Delta_q(i)$ . Pour ce faire, on caractérise d'abord les endomorphismes du module de Weyl  $\Delta_q(i)$  au travers du lemme suivant.

**Lemme 3.21.** Comme  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels,  $\text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i)) \simeq \mathbb{C}$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $i < p$ . Dans ce cas,  $\Delta_q(i) = L_q(i)$  est simple selon la proposition 3.12 d'où le résultat voulu découle du lemme de Schur. Si  $i \geq p$ , cette même proposition donne plutôt une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow L_q(i_2) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow L_q(i) \rightarrow 0$$

où  $i_2 = i - 2s = (r - 2)p + p - s - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Alors, puisque le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), -)$  est covariant et exact à gauche, la suite d'espaces vectoriels

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), L_q(i_2)) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), L_q(i)) \quad (3.1)$$

est exacte. Or, tout morphisme  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéaire non nul ayant pour origine  $\Delta_q(i)$  doit transporter la coiffe  $L_q(i) = \text{top } \Delta_q(i)$ . Ainsi, puisque  $i \neq i_2$ , le lemme de Schur donne

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), L_q(i_2)) = 0.$$

De la même façon, tout morphisme de  $\Delta_q(i)$  dans  $L_q(i)$  annule le socle  $L_q(i_2) = \text{soc } \Delta_q(i)$  et, encore selon le lemme de Schur,

$$\text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), L_q(i)) \simeq \text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(L_q(i)) \simeq \mathbb{C}.$$

En particulier, la suite exacte de l'équation (3.1) donne

$$\dim \text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i)) \leq \dim \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), L_q(i)) = 1$$

et on peut alors conclure le résultat voulu du fait que l'application identité de  $\Delta_q(i)$  engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1 au sein de  $\text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i))$ .  $\square$

**Proposition 3.22.** Comme  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels,  $\text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(j)) \simeq \mathbb{C}$ . Le projectif  $P_q(i)$  est ainsi, à équivalence près, la seule extension non triviale de  $\Delta_q(j)$  par  $\Delta_q(i)$ .

DÉMONSTRATION. La proposition 3.20 donne une suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow \Delta_q(j) \rightarrow P_q(i) \rightarrow \Delta_q(i) \rightarrow 0$$

d'où  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(j)) \geq 1$ . Cette suite et le théorème 3.5 du chapitre IX de [2] permettent d'ailleurs d'obtenir la suite exacte longue d'espaces vectoriels (en cohomologie)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(i), \Delta_q(j)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(P_q(i), \Delta_q(j)) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(j)) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(\Delta_q(i), \Delta_q(j)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(P_q(i), \Delta_q(j)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

avec  $\text{Ext}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}^1(P_q(i), \Delta_q(j)) = 0$  par projectivité de  $P_q(i)$  (voir le théorème 3.6 du chapitre IX de [2]). Le groupe d'extension recherché est donc un quotient de  $\text{End}_{\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2}(\Delta_q(j))$  de sorte que le résultat voulu est une conséquence directe du lemme 3.21.  $\square$

La proposition précédente permet de conclure que, afin de construire une réalisation explicite de la couverture projective  $P_q(i)$  quand  $s \neq p$ , il suffit d'introduire une extension non triviale de  $\Delta_q(j)$  par  $\Delta_q(i)$ . Cette extension sera définie dans cette section à partir de la spécialisation de la représentation de la forme rationnelle  $U_t\mathfrak{sl}_2$  décrite dans la proposition suivante.

**Proposition 3.23.** Pour des entiers  $0 \leq \ell \leq i$  et  $v \geq 2$ , définissons les éléments  $\gamma_{\ell,1}(t)$  et  $\gamma_{\ell,v}(t)$  de  $\mathbb{Q}(t)$  par  $\gamma_{\ell,1}(t) = \left[ \begin{smallmatrix} p+\ell-s-1 \\ \ell \end{smallmatrix} \right]_t$  et

$$\gamma_{\ell,v}(t) = \frac{1}{[v]_t!} \sum_{u=0}^{v-1} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left( \prod_{a=1}^u [i-\ell+a]_t \right) \left( \prod_{b=u+1}^{v-1} [i+p-s-\ell+b+1]_t \right).$$

Posons aussi  $\gamma_{\ell,v} = 0$  lorsque  $\ell < 0$ . Alors, le  $\mathbb{Q}(t)$ -espace vectoriel  $T_t(i)$  ayant pour base  $\mathcal{B}_{T_t(i)} = \{m_0, \dots, m_j, n_0, \dots, n_i\}$  est muni d'une structure de  $U_t\mathfrak{sl}_2$ -module via l'action

$$\begin{aligned} Km_k &= t^{j-2k}m_k; & Em_k &= [j-k+1]_tm_{k-1}; & Fm_k &= [k+1]_tm_{k+1}; \\ Kn_\ell &= t^{i-2\ell}n_\ell; & En_\ell &= [i-\ell+1]_tn_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t)m_{p-s+\ell-1} & \text{et} & Fn_\ell = [\ell+1]_tn_{\ell+1} \end{aligned}$$

où  $m_k = 0$  (ou  $n_\ell = 0$ ) si  $m_k$  (ou  $n_\ell$ , resp.) n'est pas dans  $\mathcal{B}_{T_t(i)}$ . De plus, pour  $v \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} F^{(v)}m_k &= \begin{bmatrix} k+v \\ v \end{bmatrix}_t m_{k+v}; & E^{(v)}m_k &= \begin{bmatrix} j-k+v \\ v \end{bmatrix}_t m_{k-v}; \\ F^{(v)}n_\ell &= \begin{bmatrix} \ell+v \\ v \end{bmatrix}_t n_{\ell-v} & \text{et} & E^{(v)}n_\ell = \begin{bmatrix} i-\ell+v \\ v \end{bmatrix}_t n_{\ell-v} + \gamma_{\ell,v}(t)m_{p-s+\ell-v}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On montre aisément que l'action donnée ci-dessus respecte les relations  $KFK^{-1} = t^{-2}F$  et  $F^{(v)} = \frac{1}{[v]_t!}F^v$ . Par ailleurs, on vérifie aussi facilement les relations  $KEK^{-1} = t^2E$ ,  $(t-t^{-1})[E, F] = K - K^{-1}$  et  $E^{(v)} = \frac{1}{[v]_t!}E^v$  (pour  $v \in \mathbb{N}$ ) sur le sous-espace  $\text{span}_{\mathbb{Q}(t)}(\{m_0, \dots, m_j\})$  d'où il est suffisant d'étudier l'action de  $U_t\mathfrak{sl}_2$  sur  $\text{span}_{\mathbb{Q}(t)}(\{n_0, \dots, n_i\})$ . Pour ce faire, fixons  $\ell \in \{0, \dots, i\}$  et remarquons que

$$KEK^{-1}n_\ell = t^{2\ell-i} \left( t^{i-2(\ell-1)} [i-\ell+1]_t n_{\ell-1} + t^{j-2(p-s+\ell-1)} \gamma_{\ell,1}(t) m_{p-s+\ell-1} \right) = t^2 En_\ell.$$

Notons également que  $[\ell + 1]_t \gamma_{\ell+1,1}(t) - [p - s + \ell]_t \gamma_{\ell,1}(t) = 0$  de sorte que

$$\begin{aligned} [E, F]n_\ell &= E[\ell + 1]_t n_{\ell+1} - F\left([i - \ell + 1]_t n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1}(t) m_{p-s+\ell-1}\right) \\ &= \left([\ell + 1]_t [i - \ell]_t - [i - \ell + 1]_t [\ell]_t\right) n_\ell + \left([\ell + 1]_t \gamma_{\ell+1,1}(t) - [p - s + \ell]_t \gamma_{\ell,1}(t)\right) m_{p-s+\ell-1} \\ &= \frac{1}{(t - t^{-1})^2} \left(t^{i-2\ell+1} - t^{i-2\ell-1} - t^{2\ell-i+1} + t^{2\ell-i-1}\right) n_\ell = \frac{t^{i-2\ell} - t^{2\ell-i}}{t - t^{-1}} = \left(\frac{K - K^{-1}}{t - t^{-1}}\right) n_\ell \end{aligned}$$

tel que désiré. Enfin, notons que la relation  $[v]_t! E^{(v)} n_\ell = E^v n_\ell$  est trivialement satisfaite si  $v = 1$ . Pour  $v \geq 2$ , une démarche inductive permet d'obtenir

$$\begin{aligned} E^v n_\ell &= [v - 1]_t! \begin{bmatrix} i - \ell + v - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix}_t E n_{\ell-v+1} + [v - 1]_t! \gamma_{\ell, v-1}(t) E m_{p-s+\ell-v+1} \\ &= \frac{[i - \ell + v]_t!}{[i - \ell]_t!} n_{\ell-v} + \sigma m_{p-s+\ell-v} = [v]_t! \begin{bmatrix} i - \ell + v \\ v \end{bmatrix}_t n_{\ell-v} + \sigma m_{p-s+\ell-v} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma &= [v - 1]_t! \left( \begin{bmatrix} i - \ell + v - 1 \\ v - 1 \end{bmatrix}_t \gamma_{\ell-v+1,1}(t) + [j - (p - s) - \ell + v]_t \gamma_{\ell, v-1}(t) \right) \\ &= \gamma_{\ell-(v-1),1}(t) \left( \prod_{a=1}^{v-1} [i - \ell + a]_t \right) + \gamma_{\ell, v-1}(t) [i + p - s - \ell + v]_t [v - 1]_t! \\ &= \sum_{u=0}^{v-1} \gamma_{\ell-u,1}(t) \left( \prod_{a=1}^u [i - \ell + a]_t \right) \left( \prod_{b=u+1}^{v-1} [i + p - s - \ell + b + 1]_t \right) = [v]_t! \gamma_{\ell, v}(t) \end{aligned}$$

comme voulu. Ceci achève cette démonstration.  $\square$

Parmi les relations décrivant la structure de  $U_t \mathfrak{sl}_2$ -module de  $T_t(i)$  dans la proposition 3.23, seule celle donnant l'action de  $E^{(v)}$  sur  $n_\ell$  (pour  $v \geq p$  et  $0 \leq \ell \leq i$ ) ne se spécialise pas trivialement en la racine de l'unité  $q$ . En effet, les coefficients apparaissant dans les autres relations présentées au sein de cette proposition sont tous contenus dans  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  (voir le corollaire 6.5.3 de [10]) d'où la substitution de  $t$  par  $q$  dans ces relations peut être faite sans ambiguïté. Il suffit ainsi de considérer le lemme suivant afin de démontrer qu'il est possible de spécialiser les  $U_t \mathfrak{sl}_2$ -modules  $T_t(i)$  en des représentations de l'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ .

**Lemme 3.24.** Pour  $0 \leq n \leq i$ , posons  $\gamma_{n,1} = \begin{bmatrix} p+n-s-1 \\ n \end{bmatrix}_q$ . Soit  $1 \leq s \leq \ell \leq i$ . Alors,

$$\gamma_{\ell,p} = \frac{1}{[p]_q!} \sum_{n=0}^{p-1} \gamma_{\ell-n,1} \left( \prod_{a=1}^n [i - \ell + a]_q \right) \left( \prod_{b=n+1}^{p-1} [i + p - s - \ell + b + 1]_q \right)$$

est un coefficient bien défini.

**DÉMONSTRATION.** Écrivons  $i - \ell = \ell_1 p + \ell_2$  pour certains  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $\ell_2 < p$  et posons

$$\lambda_n = \gamma_{\ell-n,1} \left( \prod_{a=1}^n [i - \ell + a]_q \right) \left( \prod_{b=n+1}^{p-1} [i + p - s - \ell + b + 1]_q \right) \quad (\text{pour } 0 \leq n \leq p - 1)$$



Fixons  $n$  dans  $\{0, \dots, p-1\}$  et tentons de montrer que  $\frac{1}{[p]_q!} \lambda_n$  est un coefficient bien défini lorsque  $n \neq s - (\ell_2 + 1)$  et  $n \neq p - (\ell_2 + 1)$ . On divise cette étude en trois cas.

- (Cas 1) Supposons  $n \geq p - \ell_2$ . Alors, avec  $a = p - \ell_2$ , on obtient  $1 \leq a \leq n$  et la proposition 1.26 donne  $[i - \ell + a]_q = [(\ell_1 + 1)p]_q = (\ell_1 + 1)q^{-\ell_1 p} [p]_q$  d'où  $\frac{1}{[p]_q!} \lambda_n$  correspond à un coefficient bien défini.
- (Cas 2) Supposons  $n \leq s - (\ell_2 + 2)$ . Alors,  $b = s - (\ell_2 + 1)$  satisfait  $n + 1 \leq b \leq s - 1 \leq p - 1$  et  $[i + p - s - \ell + b + 1]_q = [(\ell_1 + 1)p]_q = (\ell_1 + 1)q^{-\ell_1 p} [p]_q$  (selon la proposition 1.26) d'où le coefficient  $\frac{1}{[p]_q!} \lambda_n$  est encore bien défini.
- (Cas 3) Supposons désormais  $s - (\ell_2 + 1) < n < p - (\ell_2 + 1)$ . Dans cette situation, puisque  $\ell = i - (i - \ell) = (r - \ell_1 - 1)p + s - (\ell_2 + 1)$ , on a

$$\gamma_{\ell-n,1} = \begin{bmatrix} p + \ell - n - s - 1 \\ \ell - n \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (r - \ell_1 - 1)p + p - (\ell_2 + n + 2) \\ (r - \ell_1 - 2)p + p + s - (\ell_2 + n + 1) \end{bmatrix}_q$$

avec  $0 \leq p - (\ell_2 + n + 2) < p + s - (\ell_2 + n + 1) \leq p - 1$ . Ainsi, le théorème 1.25 donne  $\gamma_{\ell-n,1} = 0$  et on doit avoir que  $\frac{1}{[p]_q!} \lambda_n$  est bien défini puisque le zéro de la fonction  $[p]_t = \frac{t^p - t^{-p}}{t - t^{-1}}$  en  $t = q$  est d'ordre 1.

Selon l'analyse précédente, il suffit de montrer que  $\frac{1}{[p]_q!} (\lambda_{p-\ell_2-1} + \lambda_{s-\ell_2-1})$  est aussi bien défini en prouvant que  $\lambda_{p-\ell_2-1} + \lambda_{s-\ell_2-1} = 0$ . Pour cela, remarquons que, selon le théorème 1.25,

$$\gamma_{\ell-s+\ell_2+1,1} = \begin{bmatrix} p + \ell + \ell_2 - 2s \\ \ell - s + \ell_2 + 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (r - \ell_1 - 1)p + p - (s + 1) \\ (r - \ell_1 - 1)p \end{bmatrix}_q = q^{-p(p-(s+1))(r-\ell_1-1)}$$

et

$$\gamma_{\ell-p+\ell_2+1,1} = \begin{bmatrix} \ell + \ell_2 - s \\ \ell - p + \ell_2 + 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (r - \ell_1 - 2)p + p - 1 \\ (r - \ell_1 - 2)p + s \end{bmatrix}_q = q^{-p(r-\ell_1-2)(p-1+s)} \begin{bmatrix} p-1 \\ s \end{bmatrix}_q.$$

Or, selon la proposition 1.26,

$$\begin{bmatrix} p-1 \\ s \end{bmatrix}_q = \frac{1}{[s]_q!} \left( \prod_{x=1}^s [p-x]_q \right) = (-1)^s q^{sp}$$

et  $\gamma_{\ell-p+\ell_2+1,1} = (-1)^{p-s+1} \gamma_{\ell-s+\ell_2+1,1}$  car  $q^{p^2} = (-1)^{p+1} q^p$  (voir la proposition 1.24). Posons

$$\sigma = \gamma_{\ell-s+\ell_2+1,1} \left( \prod_{a=1}^{s-(\ell_2+1)} [i - \ell + a]_q \right) \left( \prod_{b=p-\ell_2}^{p-1} [i + p - \ell - s + b + 1]_q \right).$$

Dans ces circonstances, en vertu des calculs précédents,

$$\begin{aligned} \lambda_{p-\ell_2-1} + \lambda_{s-\ell_2-1} &= \sigma \left[ (-1)^{p-s+1} \left( \prod_{a=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [i - \ell + a]_q \right) + \left( \prod_{b=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [i + p - \ell - s + b + 1]_q \right) \right] \\ &= \sigma \left[ (-1)^{p-s+1} \left( \prod_{a=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [\ell_1 p + \ell_2 + a]_q \right) + \left( \prod_{b=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [(\ell_1 + 1)p + \ell_2 - s + b + 1]_q \right) \right]. \end{aligned}$$

Alors, en effectuant la substitution  $b \mapsto p + s - 2\ell_2 - b - 1$  dans le second produit, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_{p-\ell_2-1} + \lambda_{s-\ell_2-1} &= \sigma \left[ (-1)^{p-s+1} \left( \prod_{a=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [\ell_1 p + \ell_2 + a]_q \right) + \left( \prod_{b=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [(\ell_1 + 2)p - \ell_2 - b]_q \right) \right] \\ &= \sigma \left[ (-1)^{p-s+1} \left( \prod_{a=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [\ell_1 p + \ell_2 + a]_q \right) + \left( \prod_{b=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [2(\ell_1 + 1)p - (\ell_1 p + \ell_2 + b)]_q \right) \right] \\ &\stackrel{1}{=} \sigma \left( (-1)^{p-s+1} + (-1)^{p-s} q^{2(\ell_1+1)p(p-s)} \right) \left( \prod_{a=s-\ell_2}^{p-(\ell_2+1)} [\ell_1 p + \ell_2 + a]_q \right) = 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé à nouveau la proposition 1.26 à l'égalité 1.  $\square$

**Théorème 3.25.** Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $T_q(i)$  de base  $\mathcal{B}_{T_q(i)} = \{m_0, \dots, m_j, n_0, \dots, n_i\}$  est un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module avec l'action donnée sur l'ensemble générateur<sup>12</sup>  $\{E, F, K, E^{(p)}, F^{(p)}\}$  par

$$\begin{aligned} Km_k &= q^{j-2k} m_k; & Em_k &= [j - k + 1]_q m_{k-1}; & Fm_k &= [k + 1]_q m_{k+1}; \\ Kn_\ell &= q^{i-2\ell} n_\ell; & En_\ell &= [i - \ell + 1]_q n_{\ell-1} + \gamma_{\ell,1} m_{p-s+\ell-1}; & Fn_\ell &= [\ell + 1]_q n_{\ell+1}; \\ F^{(p)}m_k &= \begin{bmatrix} k+p \\ p \end{bmatrix}_q m_{k+p}; & E^{(p)}m_k &= \begin{bmatrix} j-k+p \\ p \end{bmatrix}_q m_{k-p}; \\ F^{(p)}n_\ell &= \begin{bmatrix} \ell+p \\ p \end{bmatrix}_q n_{\ell-p} & \text{et} & E^{(p)}n_\ell = \begin{bmatrix} i-\ell+p \\ p \end{bmatrix}_q n_{\ell-p} + \gamma_{\ell,p} m_{\ell-s}. \end{aligned}$$

où on pose  $m_k = 0$  (ou  $n_\ell = 0$ ) si  $m_k$  (ou  $n_\ell$ , respectivement) n'est pas élément de  $\mathcal{B}_{T_q(i)}$ . Par ailleurs, le sous-espace  $\text{span}_{\mathbb{C}}(\{m_0, \dots, m_j\}) \subseteq T_q(i)$  est un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module isomorphe au module de Weyl  $\Delta_q(j)$  et le quotient correspondant est tel que  $T_q(i)/\Delta_q(j) \simeq \Delta_q(i)$ .

DÉMONSTRATION. Cela suit de la définition des modules de Weyl et du fait que  $T_q(i)$  est la spécialisation en  $q$  (bien définie selon le lemme 3.24) des modules de la proposition 3.23.  $\square$

Le théorème 3.25 montre que  $T_q(i)$  est une extension de  $\Delta_q(j)$  par  $\Delta_q(i)$  et il suffit ainsi, en vertu de la proposition 3.22, de démontrer que cette extension est non triviale pour pouvoir conclure que  $T_q(i) \simeq P_q(i)$ . À cette fin, notons que, puisque l'action de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  sur  $T_q(i)$  est obtenue par spécialisation de l'action de  $U_t \mathfrak{sl}_2$  sur  $T_t(i)$ , on a (voir la remarque 3.15)

$$\begin{aligned} Hm_k &= \frac{1}{\varepsilon_q} \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) \right] m_k = \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(j-2k)} - 1}{t^{2p} - 1} \right) \right] m_k = (j - 2k)m_k \text{ et} \\ Hn_\ell &= \frac{1}{\varepsilon_q} \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(i-2\ell)} - 1}{\Phi_p(t^2)} \right) \right] n_\ell = \left[ \lim_{t \rightarrow q} \left( \frac{t^{2p(i-2\ell)-1}}{t^{2p} - 1} \right) \right] n_\ell = (i - 2\ell)n_\ell \end{aligned}$$

pour chaque entier  $0 \leq k \leq j$  et  $0 \leq \ell \leq i$ . En particulier, les générateurs  $K, F, F^{(p)}$  et  $H$  agissent dans la base  $\mathcal{B}_{T_q(i)}$  de  $T_q(i)$  comme sur la base naturelle de  $\Delta_q(j) \oplus \Delta_q(i)$ .

<sup>12</sup>Le fait que cet ensemble engendre  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  suit de la proposition 3.7 et des définitions des éléments  $e$  et  $f$ .

**Proposition 3.26.** Le module  $T_q(i)$  est une extension non triviale de  $\Delta_q(i)$  par  $\Delta_q(j)$ .

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'un isomorphisme  $\phi : \Delta_q(j) \oplus \Delta_q(i) \rightarrow T_q(i)$  et désignons par  $\{m_0^\oplus, \dots, m_j^\oplus\}$  ainsi que par  $\{n_0^\oplus, \dots, n_i^\oplus\}$  les bases respectives de  $\Delta_q(j)$  et  $\Delta_q(i)$  par rapport auxquelles l'action de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  est donnée de la manière décrite au début de la section 3.2.1. Remarquons que la restriction  $\phi|_{\Delta_q(j)}$  doit induire un automorphisme de  $\Delta_q(j)$ . En vertu du lemme 3.21, on peut supposer (à une renormalisation des éléments de  $\Delta_q(j) \oplus \Delta_q(i)$  près) que  $\phi(m_k^\oplus) = m_k$  pour chaque  $k \in \{0, \dots, j\}$ . En outre, en décomposant  $\phi(n_0^\oplus)$  sur la base  $\mathcal{B}_{T_q(i)}$  de  $T_q(i)$ , on obtient

$$\phi(n_0^\oplus) = \sum_{\ell_1=0}^j \gamma_{\ell_1}^{(m)} m_{\ell_1} + \sum_{\ell_2=0}^i \gamma_{\ell_2}^{(n)} n_{\ell_2}$$

pour certains  $\gamma_0^{(m)}, \dots, \gamma_j^{(m)}, \gamma_0^{(n)}, \dots, \gamma_i^{(n)} \in \mathbb{C}$ . Or, par  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéarité de  $\phi$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(Hn_0^\oplus) - H\varphi(n_0^\oplus) = i\varphi(n_0^\oplus) - \left( \sum_{\ell_1=0}^j \gamma_{\ell_1}^{(m)} Hm_{\ell_1} + \sum_{\ell_2=0}^i \gamma_{\ell_2}^{(n)} Hn_{\ell_2} \right) \\ &= 2 \left( \sum_{\ell_1=0}^j \gamma_{\ell_1}^{(m)} (\ell_1 - (p-s)) m_{\ell_1} + \sum_{\ell_2=0}^i \gamma_{\ell_2}^{(n)} \ell_2 n_{\ell_2} \right) \end{aligned}$$

d'où  $\phi(n_0^\oplus) = \gamma_{p-s}^{(m)} m_{p-s} + \gamma_0^{(n)} n_0$  par indépendance linéaire de  $\mathcal{B}_{T_q(i)}$ . Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} E\phi(n_0^\oplus) &= \gamma_{p-s}^{(m)} Em_{p-s} + \gamma_0^{(n)} En_0 = \left( \gamma_{p-s}^{(m)} [j - (p-s) + 1]_q + \gamma_0^{(n)} \gamma_{0,1}^{(n)} \right) m_{p-s-1} \\ &= \left( \gamma_{p-s}^{(m)} [rp]_q + \gamma_0^{(n)} \right) m_{p-s-1} = \gamma_0^{(n)} m_{p-s-1} = \phi(En_0^\oplus) = 0 \end{aligned}$$

de sorte que  $\gamma_0^{(n)} = 0$  et  $\phi(n_0^\oplus) = \gamma_{p-s}^{(m)} m_{p-s} = \phi(\gamma_{p-s}^{(m)} m_{p-s}^\oplus)$ . Par conséquent, on obtient une contradiction avec l'injectivité de  $\phi$  et le résultat d'intérêt est démontré.  $\square$

**Corollaire 3.27.** Les  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules  $T_q(i)$  et  $P_q(i)$  sont isomorphes.

Le fait d'avoir une réalisation explicite de la couverture projective  $P_q(i)$  des  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples  $L_q(i)$  a plusieurs conséquences concrètes. En particulier, le fait que les éléments  $F^{(n)}$  (pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) agissent sur les modules  $T_q(i)$  comme sur la décomposition  $\Delta_q(j) \oplus \Delta_q(i)$  permet de démontrer rapidement la proposition suivante.

**Proposition 3.28.** Soient  $n, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $1 \leq a \leq p-1$ . Soient aussi  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $\Delta_q(i)$  et  $x \in \Delta_q(i)$  tel que  $Hx = \lambda x$ . Supposons que  $\lambda \geq np + a$ . Alors,  $F^{(np+a)}x = 0$  si et seulement s'il existe un élément  $y \in \Delta_q(i)$  tel que  $Hy = (\lambda + 2(p-a))y$  et  $x = F^{(p-a)}y$ .

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que  $x = F^{(p-a)}y$  pour un certain  $y \in \Delta_q(i)$  tel que  $Hy = (\lambda + 2(p-a))y$ . Alors, selon le théorème 1.25 et la relation 8 du théorème 3.1,

$$F^{(np+a)}x = F^{(np+a)}F^{(p-a)}y = \begin{bmatrix} (n+1)p \\ p-a \end{bmatrix}_q F^{((n+1)p)}y = 0.$$

Réciproquement, supposons  $F^{(np+a)}x = 0$  avec  $x \neq 0$  et notons  $\ell = \frac{1}{2}(i - \lambda)$ . Alors, puisque  $\lambda$  est une valeur propre de  $H$  sur  $\Delta_q(i)$ , la remarque 3.15 donne  $\lambda \in \{-i, -i + 2, \dots, i\}$  d'où  $\ell \in \{0, \dots, i\}$ . Par ailleurs, l'espace propre de  $H$  correspondant à  $\lambda$  dans  $\Delta_q(i)$  est engendré par  $m_\ell$  et on peut donc trouver  $\mu \in \mathbb{C}$  non nul pour lequel  $x = \mu m_\ell$ . Dans ce cas, on obtient

$$F^{(np+a)}x = \mu \begin{bmatrix} \ell + np + a \\ np + a \end{bmatrix}_q m_{np+a+\ell} = 0. \quad (3.2)$$

Considérons  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $\ell_2 < p$  et  $\ell = \ell_1 p + \ell_2$ . Supposons  $\ell_2 \leq p - (a + 1)$ . Alors,  $1 \leq a \leq \ell_2 + a \leq p - 1$  et selon le théorème 1.25,

$$\mu \begin{bmatrix} \ell + np + a \\ np + a \end{bmatrix}_q = \mu \begin{bmatrix} (\ell_1 + n)p + \ell_2 + a \\ np + a \end{bmatrix}_q \neq 0$$

d'où on contredit ainsi l'équation (3.2) puisque  $0 \leq \ell \leq np + a + \ell \leq \ell + \lambda = \frac{1}{2}(i + \lambda) \leq i$ . Par conséquent, on doit avoir  $\ell_2 \geq p - a$  et on peut ainsi conclure que le coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} \ell \\ p-a \end{bmatrix}_q$  est non nul. En outre, l'inégalité  $\ell_2 \geq p - a$  implique aussi  $0 \leq \ell_1 p \leq \ell - p + a \leq \ell \leq i$  d'où l'élément  $m_{\ell-p+a} \in \Delta_q(i)$  est également non nul. Posons  $y = \omega m_{\ell-p+a} \in \Delta_q(i)$  avec

$$\omega = \mu \left( \begin{bmatrix} \ell \\ p-a \end{bmatrix}_q \right)^{-1}$$

et remarquons qu'on a clairement  $Hy = (\lambda + 2(p - a))y$  ainsi que

$$F^{(p-a)}y = \omega \begin{bmatrix} \ell \\ p-a \end{bmatrix}_q m_\ell = \mu m_\ell = x.$$

Ceci achève cette démonstration.  $\square$

**Corollaire 3.29.** Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $T_q(i)$ ,  $1 \leq a \leq p - 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $x \in T_q(i)$  tel que  $Hx = \lambda x$ . Supposons que  $\lambda \geq np + a$ . Alors,  $F^{(np+a)}x = 0$  si et seulement s'il existe un élément  $y \in T_q(i)$  tel que  $Hy = (\lambda + 2(p - a))y$  et  $x = F^{(p-a)}y$ .

**DÉMONSTRATION.** Cela suit directement de la proposition 3.28 et du fait que les éléments  $F^{(np+a)}$  et  $F^{(p-a)}$  agissent sur  $T_q(i)$  comme sur la décomposition  $\Delta_q(j) \oplus \Delta_q(i)$ .  $\square$

**Proposition 3.30.** L'image de  $T_q(i)$  sous le foncteur restriction  $\downarrow_{\mathcal{U}}$  de la section 3.1.1 est

$$\downarrow_{\mathcal{U}} T_q(i) \simeq 2 \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{s,r} \oplus \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{p-s,r+1} \oplus \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{p-s,r-1}$$

(avec  $\mathcal{X}_{p-s,r-1} = 0$  si  $r = 1$ ). De plus, soient  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $T_q(i)$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Alors, la multiplication à gauche par  $e^n f^n$  (ou par  $f^n e^n$ ) définit un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $T_q(i)|_{H=\lambda}$  quand  $|\lambda - 2np| \leq |\lambda|$  (ou  $|\lambda + 2np| \leq |\lambda|$ , resp.).

**DÉMONSTRATION.** Le premier énoncé suit de la proposition 3.5, de l'exactitude du foncteur  $\downarrow_{\mathcal{U}}: \text{mod } \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \mathcal{U}$  et de la figure 3.2. On obtient l'autre énoncé en appliquant la proposition 3.19 aux sommands de  $2 \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{s,r} \oplus \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{p-s,r+1} \oplus \downarrow_{\mathcal{U}} \mathcal{X}_{p-s,r-1}$ .  $\square$

### 3.2.3. Produits tensoriels

Cette section est consacrée à l'étude du  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module

$$(L_q(1))^{\otimes c N} = \underbrace{L_q(1) \otimes^c L_q(1) \otimes^c \dots \otimes^c L_q(1)}_{N \text{ fois}}.$$

Fixons  $i = (r-1)p + s - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $r, s \in \mathbb{N}$  tels que  $s \leq p$ . Rappelons que  $\dim L_q(i) = sr$  (voir le corollaire 3.14) et que  $\dim P_q(i) = 2pr$  si  $s \neq p$  (voir la proposition 3.20).

**Proposition 3.31.** On a  $L_q(i) \otimes^c L_q(1) \simeq (1 - \delta_{s,1})M_q(i-1) \oplus (1 - \delta_{s,p})L_q(i+1)$  avec

$$M_q(i-1) = \begin{cases} P_q(i-1) & \text{si } s = p; \\ L_q(i-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Identifions le simple  $L_q(i)$  au sous-module  $V_j \subseteq \Delta_q(j)$  ayant pour base  $\mathcal{B}_j = \{m_{ap+b} \mid 0 \leq a < r \text{ et } p-s \leq b < p\}$ . Associons aussi  $L_q(1)$  à  $\Delta_q(1)$  (voir la proposition 3.12) et désignons par  $\{m_0^{(1)}, m_1^{(1)}\}$  la base de  $\Delta_q(1)$  présentée au début de la section 3.2.1. Notons  $M = L_q(i) \otimes^c L_q(1)$  et  $y = m_{p-s} \otimes m_0^{(1)} \in M$ . Alors, puisque les vecteurs  $m_{p-s}$  et  $m_0^{(1)}$  sont respectivement de plus haut poids  $i$  et 1 dans  $L_q(i)$  et  $L_q(1)$ , on a

$$\Delta(E^{(n)})y = \sum_{\ell=0}^n q^{\ell(n-\ell)} E^{(n-\ell)} K^\ell m_{p-s} \otimes E^{(\ell)} m_0^{(1)} = E^{(n)} m_{p-s} \otimes m_0^{(1)} = 0$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\Delta(H) = H \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H$  (cf. [30]) d'où  $\Delta(H)y = (i+1)m_{p-s} \otimes m_0^{(1)}$  et  $y$  est donc un vecteur de plus haut poids  $i+1$  dans  $M$ . Dans ce cas, selon le lemme 3.17, la coiffe du sous-module (de type 1)  $\langle y \rangle \subseteq M$  engendré par  $y$  contient une copie de  $L_q(i+1)$  de sorte que  $L_q(i+1)$  est en particulier un facteur de composition de  $M$ . Or, si  $s = 1$ ,

$$\dim M = (\dim L_q(i))(\dim L_q(1)) = 2sr = 2r = (s+1)r = \dim(L_q(i+1))$$

et  $M \simeq L_q(i+1)$ . Supposons ainsi  $s \geq 2$ . Soit  $x = m_{p-s} \otimes m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} m_{p-s+1} \otimes m_0^{(1)} \in M$ . On vérifie alors comme ci-haut que  $\Delta(H)x = (i-1)x$ . Remarquons également que, si  $n \geq p$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(E^{(n)})x &= \sum_{\ell=0}^n q^{\ell(n-\ell)} \left( E^{(n-\ell)} K^\ell m_{p-s} \otimes E^{(\ell)} m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} E^{(n-\ell)} K^\ell m_{p-s+1} \otimes E^{(\ell)} m_0^{(1)} \right) \\ &= E^{(n)} m_{p-s} \otimes m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} E^{(n)} m_{p-s+1} \otimes m_0^{(1)} + q^{n-1} E^{(n-1)} K m_{p-s} \otimes E m_1^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

car les éléments  $E^{(n-1)} m_{p-s}$ ,  $E^{(n)} m_{p-s}$  et  $E^{(n)} m_{p-s+1}$  sont proportionnels aux vecteurs (nuls)  $m_{p-s+n}$  et  $m_{p-s+n-1}$  avec  $p-s-n+1 \leq 1-s \leq -1$ . En outre,  $\Delta(E^{(n)})x = \frac{1}{[n]_q!} \Delta(E)^n x = 0$  pour  $1 \leq n < p$  étant donné que, selon la proposition 1.26,

$$\begin{aligned} \Delta(E)x &= (E \otimes \text{id} + K \otimes E)x = K m_{p-s} \otimes E m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} E m_{p-s+1} \otimes m_0^{(1)} \\ &= (q^i + q^{s-(p+1)} [rp-1]_q) m_{p-s} \otimes m_0^{(1)} = (q^i - q^{rp+s-(p+1)}) m_{p-s} \otimes m_0^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

d'où  $x$  est de plus haut poids  $i-1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  dans  $M$  et  $L_q(i-1) \subseteq \text{top}\langle x \rangle$  selon le lemme 3.17.

**Affirmation 1** : On a  $\dim\langle x \rangle \leq (s-1)r$ .

**Dém.** (Affirmation 1). Le théorème 1.25 et le corollaire 3.2 donnent (puisque  $s \geq 2$ )

$$\begin{aligned} \Delta\left(\begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t\right) x &= \left(\prod_{\ell=1}^p \frac{\Delta(K)q^{1-\ell} - \Delta(K)^{-1}q^{\ell-1}}{q^\ell - q^{-\ell}}\right) x = \left(\prod_{\ell=1}^p \frac{q^{i-\ell} - q^{\ell-i}}{q^\ell - q^{-\ell}}\right) x \\ &= \left(\prod_{\ell=1}^p \frac{[i-\ell]_q}{[\ell]_q}\right) x = \begin{bmatrix} i-1 \\ p \end{bmatrix}_q x = \begin{bmatrix} (r-1)p + s - 2 \\ p \end{bmatrix}_q x \\ &= q^{p(p(2-r)-s+2)} \begin{bmatrix} r-1 \\ 1 \end{bmatrix} x = q^{-p(pr+s)}(r-1)x \end{aligned}$$

de sorte que les éléments  $E^{(n)}$ ,  $K$  et  $\begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t$  (avec  $n \geq 1$ ) agissent diagonalement sur le vecteur de plus haut poids  $x$ . Par conséquent, on peut utiliser la base  $\mathcal{B}_{\text{PBW}}$  de la section 3.1 pour conclure que le module  $\langle x \rangle$  est  $\mathbb{C}$ -engendré par  $\{x_{n_1p+n_2} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n_2 < p\}$  où

$$x_{n_1p+n_2} = \Delta(F^{(p)})^{n_1} \Delta(F)^{n_2} x.$$

Soient  $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $n_2 < p$  et  $n = n_1p + n_2$ . Selon la proposition 1.22 et la relation 8 du théorème 3.1 (voir aussi la preuve de la proposition 3.7),

$$\begin{aligned} \gamma_n x_n &= \gamma_n \Delta(F^{(p)})^{n_1} \Delta(F)^{n_2} x = \gamma_n \begin{bmatrix} n \\ n_1p \end{bmatrix}_q \left(\prod_{\ell=1}^{n_1} \begin{bmatrix} \ell p \\ p \end{bmatrix}_q\right) \Delta(F^{(n)}) x = \Delta(F^{(n)}) x \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^n q^{-\ell(n-\ell)} F^{(\ell)} \otimes K^{-\ell} F^{(n-\ell)}\right) (m_{p-s} \otimes m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} m_{p-s+1} \otimes m_0^{(1)}) \\ &= F^{(n)} m_{p-s} \otimes K^{-n} m_1^{(1)} + q^{s-(p+1)} (F^{(n)} \otimes K^{-n} + q^{1-n} F^{(n-1)} \otimes K^{1-n} F) (m_{p-s+1} \otimes m_0^{(1)}) \\ &= \left(q^n \begin{bmatrix} p-s+n \\ n \end{bmatrix}_q + q^{s-(p+1)} \begin{bmatrix} p-s+n \\ n-1 \end{bmatrix}_q\right) m_{p-s+n} \otimes m_1^{(1)} \\ &\quad + q^{s-(p+1)} q^{-n} \begin{bmatrix} p-s+n+1 \\ n \end{bmatrix}_q m_{p-s+n+1} \otimes m_0^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} p-s+n+1 \\ n \end{bmatrix}_q (m_{p-s+n} \otimes m_1^{(1)} + q^{s-(p+n+1)} m_{p-s+n+1} \otimes m_0^{(1)}) \end{aligned}$$

avec  $\gamma_n = \frac{1}{n_1!} q^{pn_1n_2} q^{\frac{1}{2}p^2n_1(1-n_1)}$ . Cependant, lorsque  $n_1 \geq r$ ,

$$p-s+n = (n_1+1)p + n_2 - s \geq (r+1)p - s + n_2 > (r+1)p - s - 1 = j$$

de sorte que  $x_n = 0$  puisque  $m_{p-s+n} = m_{p-s+n+1} = 0$  dans  $L_q(i) \subseteq \Delta_q(j)$ . De la même façon, lorsque  $n_2 \geq s-1$ , le théorème 1.25 permet d'obtenir

$$\begin{bmatrix} p-s+n+1 \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (n_1+1)p + n_2 - s + 1 \\ n_1p + n_2 \end{bmatrix}_q = 0$$

car  $0 \leq n_2 - s + 1 \leq n_2 - 1 < n_2 \leq p - 1$ . Ainsi,  $\{x_{n_1p+n_2} \mid 0 \leq n_1 < r, 0 \leq n_2 < s-1\}$  est un ensemble  $\mathbb{C}$ -générateur pour  $\langle x \rangle$  d'où  $\dim\langle x \rangle \leq (s-1)r$  comme désiré.  $\triangle$

Puisque  $s \geq 2$ , on a  $\dim L_q(i-1) = (s-1)r$  et l'affirmation 1 permet d'obtenir

$$\dim L_q(i-1) = (s-1)r \geq \dim \langle x \rangle \geq \dim \text{top} \langle x \rangle \geq \dim L_q(i-1)$$

d'où  $L_q(i-1) \simeq \langle x \rangle \subseteq M$ . Supposons  $s = p$ . Alors,  $i+1 \equiv_p 0$  et  $L_q(i) \simeq \Delta_q(i) \simeq P_q(i)$  est un module projectif de sorte que  $M$  est également projectif selon la proposition 3.9. Dans ce cas, le sommand indécomposable de ce module contenant le simple  $\langle x \rangle \simeq L_q(i-1)$  dans son socle doit correspondre à  $P_q(i-1)$  selon la proposition 3.20 et la figure 3.2. Ainsi,  $P_q(i-1) \subseteq M$  et, puisque  $i-1 = (r-1)p + s - 2 = rp - 2 \geq (r-1)p$ ,

$$\dim P_q(i-1) = 2rp = 2(i+1) = (\dim \Delta_q(i))(\dim \Delta_q(1)) = (\dim L_q(i))(\dim L_q(1)) = \dim M$$

d'où  $M \simeq P_q(i-1)$ . Supposons enfin  $1 < s < p$  et rappelons que la coiffe du sous-module de  $M$  engendré par le vecteur de plus haut poids  $y = m_{p-s} \otimes m_0^{(1)}$  contient  $L_q(i+1)$ .

**Affirmation 2:**  $\dim \langle y \rangle \leq (s+1)r$ .

**Dém.** (Affirmation 2). Puisque  $s < p$ , le théorème 1.25 implique

$$\begin{aligned} \Delta \left( \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t \right) y &= \left( \prod_{\ell=1}^p \frac{\Delta(K)q^{1-\ell} - \Delta(K)^{-1}q^{\ell-1}}{q^\ell - q^{-\ell}} \right) y = \left( \prod_{\ell=1}^p \frac{q^{i-\ell+2} - q^{\ell-i-2}}{q^\ell - q^{-\ell}} \right) y \\ &= \left( \prod_{\ell=1}^p \frac{[i-\ell+2]_q}{[\ell]_q} \right) y = \begin{bmatrix} i+1 \\ p \end{bmatrix}_q y = \begin{bmatrix} (r-1)p+s \\ p \end{bmatrix}_q y \\ &= q^{p(r-2)-s} \begin{bmatrix} r-1 \\ 1 \end{bmatrix} y = q^{p(r+s)}(r-1)y \end{aligned}$$

de sorte que le sous-module  $\langle y \rangle$  est  $\mathbb{C}$ -engendré par  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  où  $y_n = \Delta(F^{(p)})^{n_1} \Delta(F)^{n_2} y$  si  $n = n_1p + n_2$  avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $n_2 < p$ . Fixons  $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  satisfaisant  $n = n_1p + n_2$  et  $n_2 < p$ . Remarquons que, selon la relation 8 du théorème 3.1,

$$\begin{aligned} \gamma_n y_n &= \gamma_n \begin{bmatrix} n \\ n_1p \end{bmatrix}_q \left( \prod_{\ell=1}^{n_1} \begin{bmatrix} \ell p \\ p \end{bmatrix}_q \right) \Delta(F^{(n)}) y = \sum_{\ell=0}^n q^{-\ell(n-\ell)} F^{(\ell)} m_{p-s} \otimes K^{-\ell} F^{(n-\ell)} m_0^{(1)} \\ &= F^{(n)} m_{p-s} \otimes K^{-n} m_0^{(1)} + q^{1-n} F^{(n-1)} m_{p-s} \otimes K^{1-n} F m_0^{(1)} \\ &= q^{-n} \begin{bmatrix} p-s+n \\ n \end{bmatrix}_q m_{p-s+n} \otimes m_0^{(1)} + \begin{bmatrix} p-s+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q m_{p-s+n-1} \otimes m_1^{(1)}. \end{aligned}$$

où  $\gamma_n = \frac{1}{n_1!} q^{pn_1n_2} q^{\frac{1}{2}p^2n_1(1-n_1)}$ . Supposons  $n_1 \geq r$ . Alors, la méthode utilisée dans l'affirmation 1 donne  $p-s+n > j$  et  $y_n = 0$ . De même, lorsque  $n_2 \geq s+1$ , le théorème 1.25 implique

$$\begin{bmatrix} p-s+n \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} (n_1+1)p+n_2-s \\ n_1p+n_2 \end{bmatrix}_q = 0 = \begin{bmatrix} (n_1+1)p+n_2-s-1 \\ n_1p+n_2-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} p-s+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q$$

car  $0 \leq n_2 - s - 1 < n_2 - 1 \leq p - 2$ . Ainsi,  $\{y_{n_1p+n_2} \mid 0 \leq n_1 < r \text{ et } 0 \leq n_2 < s+1\}$  est un ensemble  $\mathbb{C}$ -générateur pour  $\langle y \rangle$  et  $\dim \langle y \rangle \leq (s+1)r$  tel qu'annoncé.  $\triangle$

Puisque  $s < p$ , on a  $\dim L_q(i+1) = (s+1)r$  et l'affirmation précédente implique

$$\dim L_q(i+1) = (s+1)r \geq \dim \langle y \rangle \geq \dim \text{top} \langle y \rangle \geq \dim L_q(i+1)$$

d'où  $L_q(i+1) \simeq \langle y \rangle \subseteq M$ . Or, on a aussi  $L_q(i-1) \simeq \langle x \rangle \subseteq M$  et

$$\dim M = 2sr = (s-1)r + (s+1)r = \dim L_q(i-1) + \dim L_q(i+1)$$

d'où on peut conclure que  $M \simeq L_q(i-1) \oplus L_q(i+1)$  comme voulu.  $\square$

**Corollaire 3.32.** Supposons  $s \neq p$ . Alors,

$$P_q(i) \otimes^c L_q(1) \simeq (1 + \delta_{s,p-1})P_q(i+1) \oplus (1 - \delta_{r,1}\delta_{s,1})P_q(i-1) \oplus \delta_{s,1}P_q(i+2p-1)$$

DÉMONSTRATION. Posons  $M = P_q(i) \otimes^c L_q(1)$  et considérons l'endofoncteur  $- \otimes^c L_q(1)$  de  $\text{mod } \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  envoyant un module  $V$  à  $V \otimes^c L_q(1)$ . Ce foncteur agit sur les morphismes de la même façon que l'endofoncteur usuel  $- \otimes L_q(1) : \text{mod } \mathbb{C} \rightarrow \text{mod } \mathbb{C}$  qui est exact puisque  $L_q(1)$  est un  $\mathbb{C}$ -module plat. Il s'agit donc aussi d'un foncteur exact. En particulier, en l'appliquant sur le socle  $\text{soc } P_q(i) = L_q(i)$ , on peut conclure de la proposition 3.31 que, puisque  $s \neq p$ ,

$$(1 - \delta_{s,1})L_q(i-1) \oplus L_q(i+1) \simeq L_q(i) \otimes^c L_q(1) \subseteq M.$$

En outre, selon la proposition 3.9, la projectivité de  $P_q(i)$  implique celle de  $M$  et la démarche utilisée dans la démonstration précédente (pour le cas  $s = p$ ) donne (à isomorphisme près)

$$(1 - \delta_{s,1})P_q(i-1) \oplus P_q(i+1) \subseteq M.$$

Par conséquent, lorsque  $1 \neq s \neq p-1$ , la suite d'égalités

$$\dim M = 2(2pr) = 2pr + 2pr = \dim(P_q(i-1)) + \dim(P_q(i+1))$$

implique  $M \simeq P_q(i-1) \oplus P_q(i+1)$ . Supposons désormais  $s = p-1$ . Alors, l'application du foncteur  $- \otimes^c L_q(1)$  sur  $\text{top } P_q(i) \simeq L_q(i)$  permet d'obtenir une copie supplémentaire<sup>13</sup> du projectif irréductible  $L_q(i+1) \simeq P_q(i+1)$  dans la coiffe de  $M$ . Ainsi, puisque cet irréductible n'est contenu dans aucun autre  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module projectif indécomposable (voir la proposition 3.20 et la figure 3.2), on doit avoir  $2P_q(i+1) \oplus P_q(i-1) \subseteq M$  d'où la suite d'égalités

$$\dim M = 2(2pr) = 2(pr) + 2pr = 2 \dim(L_q(i+1)) + \dim(P_q(i-1))$$

implique  $M \simeq 2L_q(i+1) \oplus P_q(i-1) \simeq 2P_q(i+1) \oplus P_q(i-1)$  tel qu'annoncé. Supposons maintenant  $s = 1$  et posons  $i_2 = i - 2s = i - 2$ . Dans ce cas, en appliquant  $- \otimes^c L_q(1)$  sur les facteurs  $L_q(j)$  et  $L_q(i_2)$  de  $P_q(i)$  (avec, comme dans la figure 3.2,  $L_q(i_2) = 0$  si  $i_2 < 0$ ), on conclut que les simples  $L_q(j+1)$  et  $L_q(i_2+1)$  sont aussi des facteurs de  $M$ . Par ailleurs,  $i_2 + 2 = i \equiv_p 0 \equiv_p i + 2p = j + 2$  d'où la proposition 3.20 et le raisonnement ci-haut montrent que  $L_q(j+1) \simeq P_q(j+1)$  et  $L_q(i_2+1) \simeq P_q(i_2+1)$  sont des sous-modules projectifs de  $M$ .

<sup>13</sup>En effet, le foncteur  $- \otimes^c L_q(1)$  distingue cette copie de celle obtenue de  $L_q(i) = \text{soc } P_q(i)$  en raison de sa définition et du fait que ces deux copies sont distinguées par l'endofoncteur  $- \otimes L_q(1)$  de  $\text{mod } \mathbb{C}$ .



Supposons  $r = 1$ . Alors,  $i = 0$  et  $i_2 < 0$ . De plus,  $j + 1 = 2p - 1$  et

$$\dim M = 2(2pr) = 2(2p) = \dim(P_q(i + 1)) + \dim(L_q(j + 1))$$

d'où  $M \simeq P_q(i + 1) \oplus L_q(j + 1) \simeq P_q(i + 1) \oplus P_q(i + 2p - 1)$ . Enfin, lorsque  $r > 1$ , on a  $j + 1 = rp + p - 1 = i_2 + 2p + 1 \geq 3p - 1$  de sorte que

$$\begin{aligned} \dim M &= 2(2pr) = 2pr + p(r + 1) + p(r - 1) \\ &= \dim(P_q(i + 1)) + \dim(L_q(j + 1)) + \dim(L_q(i_2 + 1)) \end{aligned}$$

et  $M \simeq P_q(i + 1) \oplus L_q(j + 1) \oplus L_q(i_2 + 1) \simeq P_q(i + 1) \oplus P_q(i + 2p - 1) \oplus P_q(i - 1)$ .  $\square$

**Remarque 3.33.** Les règles de fusion (c-à-d. les décompositions de produits tensoriels) obtenues dans la proposition 3.31 et dans le corollaire 3.32 généralisent (via l'isomorphisme de la proposition 3.18) les règles correspondantes présentées dans [9] pour  $q = e^{i\pi/p}$ . Notons cependant que les preuves présentées dans cet article sont très différentes des démonstrations originales données dans les pages précédentes et procèdent de façon bien moins directe.

**Corollaire 3.34.** Soient  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ainsi que  $\mathcal{N}_N = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n \equiv_2 N \text{ et } n \leq N\}$ . Pour  $n = n_1p + n_2$  avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $n_2 < p$ , on pose  $n' = n - 2(n_2 + 1) = n_1p - n_2 - 2$  et

$$M_q(n) = \begin{cases} L_q(n) & \text{si } n < p \text{ ou } n_2 = p - 1; \\ P_q(n') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les sommands directs de  $M = (L_q(1))^{\otimes^c N}$  (où  $M = L_q(0)$  si  $N = 0$ ) sont tous contenus<sup>14</sup> dans l'ensemble  $\{M_q(n)\}_{n \in \mathcal{N}_N}$ . Il s'agit donc exclusivement de modules simples et projectifs indécomposables de type 1.

**DÉMONSTRATION.** L'énoncé est trivialement vrai si  $N = 0$  ou  $N = 1$ . Procédons donc par induction sur  $N$  et considérons un sommand direct  $Q_N$  de  $M = (L_q(1))^{\otimes^c N}$  pour  $N \geq 2$ . Alors,  $Q_N$  est contenu dans un produit  $Q_{N-1} \otimes^c L_q(1)$  pour un sommand direct  $Q_{N-1}$  de  $(L_q(1))^{\otimes^c (N-1)}$ . Par l'hypothèse d'induction, il existe un  $m \in \mathcal{N}_{N-1}$  tel que  $Q_{N-1} = M_q(m)$ . Posons  $m = m_1p + m_2$  avec  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ainsi que  $m_2 < p$  et tentons de montrer que  $Q_N \in \{M_q(n)\}_{n \in \mathcal{N}_N}$ . On considère trois cas.

- (Cas 1) Supposons  $m < p - 1$ . Alors,  $Q_{N-1} = M_q(m) = L_q(m)$  et  $Q_N \in \{M_q(n)\}_{n \in \mathcal{N}_N}$  étant donné que, dans ce cas, la proposition 3.31 implique  $Q_N = L_q(m - 1) = M_q(m - 1)$  (si  $m \neq 0$ ) ou  $Q_N = L_q(m + 1) = M_q(m + 1)$ .
- (Cas 2) Supposons  $m_2 = p - 1$ . Alors,  $Q_{N-1} = M_q(m) = L_q(m)$  et la proposition 3.31 donne à nouveau le résultat voulu puisqu'elle force  $Q_N = P_q(m - 1) = M_q(m + 1)$ .
- (Cas 3) Supposons  $m \geq p$  avec  $m_2 \neq p - 1$ . Dans cette situation,  $Q_{N-1} = M_q(m) = P_q(m')$  avec  $m' = m - 2(m_2 + 1) = (m_1 - 1)p + p - m_2 - 2$  et, selon le corollaire 3.32,

<sup>14</sup>On peut en fait montrer que  $\{M_q(n)\}_{n \in \mathcal{N}_N}$  correspond exactement à l'ensemble des sommands directs de  $M = (L_q(1))^{\otimes^c N}$  lorsque  $p \neq 2$ , mais cela ne sera pas fait ici (voir l'annexe D pour un exemple).

les trois possibilités pour la forme de  $Q_N$  sont  $P_q(m' + 1)$ ,  $P_q(m' - 1)$  (si  $m' \neq 0$ ) et  $P_q(m' + 2p - 1)$  (si  $m_2 = p - 2$ ). Si  $0 \neq m_2 \neq p - 2$ , alors  $m' \neq 0$  et on montre aisément que  $P_q(m' + 1) = M_q(m - 1)$  avec  $P_q(m' - 1) = M_q(m + 1)$ . De la même façon, si  $m_2 = 0$  et  $p > 2$ , alors  $m' = m - 2 > 0$  et on obtient à nouveau  $P_q(m' - 1) = M_q(m + 1)$  avec, selon la proposition 3.20,  $P_q(m' + 1) \simeq L_q(m' + 1) = M_q(m' + 1) = M_q(m - 1)$ . Finalement, si  $m_2 = p - 2$ , on remarque comme ci-haut que  $P_q(m' + 1) = M_q(m - 1)$ , que  $P_q(m' + 2p - 1) = P_q(m + 1) \simeq L_q(m + 1) = M_q(m + 1)$  et que, comme voulu,  $P_q(m' - 1) \simeq L_q(m' - 1) = M_q(m' - 1) = M_q(m - 2p + 1)$  si  $m' \neq 0$  (car alors  $m_1 \geq 2$ ).

Ceci achève cette démonstration puisque tous les cas de figure ont été considérés.  $\square$

Le corollaire 3.34 stipule que la décomposition de  $(L_q(1))^{\otimes cN}$  en  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules indécomposables (qu'on appellera désormais *décomposition de Clebsch-Gordan généralisée*<sup>15</sup>) ne contient que des facteurs simples ou projectifs de type 1. Ce corollaire ne donne pas les multiplicités relatives de chaque facteur, mais un exemple complet de décomposition avec multiplicités est fourni dans l'annexe D. La détermination d'une formule explicite pour ces multiplicités (qu'on pourrait appeler *coefficients de Clebsch-Gordan généralisés*) correspond à un problème combinatoire complexe et il pourrait être intéressant de s'y attarder. En attendant, on conclut cette section avec les résultats suivants qui découlent directement des corollaires 3.29, 3.30 et 3.34 ainsi que des propositions 3.19 et 3.28.

**Corollaire 3.35.** Soient  $N, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $M = (L_q(1))^{\otimes cN}$ . Alors, la multiplication à gauche par  $e^n f^n$  (ou par  $f^n e^n$ ) définit un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de l'espace propre  $M|_{H=\lambda}$  lorsque  $|\lambda - 2np| \leq |\lambda|$  (ou lorsque  $|\lambda + 2np| \leq |\lambda|$ , respectivement).

**Corollaire 3.36.** Soient  $N, n, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $1 \leq a \leq p - 1$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $H$  sur  $M = (L_q(1))^{\otimes cN}$  et  $x \in M$  tel que  $Hx = \lambda x$ . Supposons  $\lambda \geq np + a$ . Alors,  $F^{(np+a)}x = 0$  si et seulement s'il existe un élément  $y \in M$  tel que  $Hy = (\lambda + 2(p - a))y$  et  $x = F^{(p-a)}y$ .

### 3.3. Une représentation de $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ sur la chaîne XXZ

Dans cette section, on poursuit l'étude des chaînes XXZ périodiques  $\mathbb{C}_N(q, v)$  introduites dans le chapitre 2 pour un  $N \geq 2$  fixé. Plus précisément, on introduit d'abord une représentation de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  sur la chaîne  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  de manière à ce qu'il existe un isomorphisme  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéaire naturel  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v) \simeq (L_q(1))^{\otimes cN}$ . On utilise ensuite cet isomorphisme pour définir une famille d'applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires entre les espaces propres (de  $2S^z$ ) provenant de différentes chaînes XXZ. On utilise enfin la décomposition de Clebsch-Gordan généralisée présentée à la section précédente pour étudier les noyaux de ces applications et les caractériser implicitement à l'aide de longues suites exactes dans  $\mathrm{mod} \mathrm{TL}_N^a(\beta)$ .

<sup>15</sup>On choisit cette terminologie étant donné que les règles de fusion données dans la proposition 3.31 et dans le corollaire 3.32 ressemblent énormément aux règles correspondantes dans  $U\mathfrak{sl}_2$ .

### 3.3.1. Définition de la représentation

Pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ , on définit  $\Delta_n : \mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2 \rightarrow (\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2)^{\otimes n}$  via  $\Delta_2 = \Delta$  et  $\Delta_n = (\text{id}_{n-2} \otimes \Delta_2) \circ \Delta_{n-1}$  (pour  $n \geq 3$ ) avec  $\Delta$  désignant le coproduit de la section 3.1.2 et  $\text{id}_{n-2}$  dénotant l'application identité de  $(\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2)^{\otimes(n-2)}$ . Par la coassociativité de  $\Delta$ , on peut supposer que  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  agit sur  $(L_q(1))^{\otimes cN}$  au travers de  $\Delta_N$ . Notons respectivement  $m_+$  et  $m_-$  les vecteurs  $m_0$  et  $m_1$  de la base de  $L_q(1) \simeq \Delta_q(1)$  donnée dans la section 3.2.1. Désignons également par  $m_{x_1 \dots x_N} = m_{x_1} \otimes \dots \otimes m_{x_N}$  (pour  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$ ) les éléments de la base de  $(L_q(1))^{\otimes cN}$  induite de  $\{m_+, m_-\}$ . Remarquons que  $Km_x = q^x m_x$  pour chaque  $x \in \{\pm 1\}$ .

**Proposition 3.37.** Soient  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq \{\pm 1\}$ . Alors, avec  $j_0 = 0$  et  $j_{n+1} = N + 1$ ,

$$\Delta_N(F^{(n)})m_{x_1 \dots x_N} = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = 1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{-(k-1)x_j} \right) \right\} m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (-) x_{j_1+1} \dots x_N}$$

et

$$\Delta_N(E^{(n)})m_{x_1 \dots x_N} = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1)x_j} \right) \right\} m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N}$$

DÉMONSTRATION. On peut aisément montrer par induction (sur  $N$ ) que

$$\Delta_N(E^{(n)}) = \sum_{\substack{0 \leq \ell_{N-1} \leq \dots \leq \ell_1 \leq n \\ \ell_0 = n, \ell_N = 0}} q^{\sum_{j=1}^{N-1} \ell_j (\ell_{j-1} - \ell_j)} \left( \bigotimes_{j=1}^N E^{(\ell_{j-1} - \ell_j)} K^{\ell_j} \right)$$

où le produit tensoriel est développé de sorte que l'indice  $j \in \{1, \dots, N\}$  augmente de la gauche vers la droite. Par conséquent, pour  $\{x_i\}_{i=1}^N \subseteq \{\pm 1\}$ , on a

$$\Delta_N(E^{(n)})m_{x_1 \dots x_N} = \sum_{\substack{0 \leq \ell_{N-1} \leq \dots \leq \ell_1 \leq n \\ \ell_0 = n, \ell_N = 0}} \Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}}$$

avec, pour chaque choix de suite décroissante  $(\ell_i)_{i=1}^{N-1}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$\Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} = q^{\sum_{j=1}^{N-1} \ell_j (\ell_{j-1} - \ell_j)} \left( \bigotimes_{j=1}^N E^{(\ell_{j-1} - \ell_j)} K^{\ell_j} m_{x_j} \right).$$

Soit  $(\ell_i)_{i=1}^{N-1} \subseteq \{1, \dots, n\}$  une telle suite décroissante. Remarquons que, si  $\ell_{j-1} - \ell_j \geq 2$  pour un  $j \in \{1, \dots, N\}$  (avec  $\ell_0 = n$  et  $\ell_N = 0$ ), alors  $E^{(\ell_{j-1} - \ell_j)}$  agit comme zéro sur  $L_q(1)$  et  $\Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}}$  doit être nul. On peut ainsi supposer que  $\ell_{j-1} - \ell_j \leq 1$  pour  $1 \leq j \leq N$ . Ordonnons  $\{j_k\}_{k=1}^n = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid \ell_{j-1} - \ell_j = 1\}$  tel que  $j_1 < j_2 < \dots < j_n$  et posons  $j_0 = 0$  ainsi que  $j_{n+1} = N + 1$ . Alors, pour  $0 \leq k \leq N$ , il existe un indice  $i \in \{0, \dots, N\}$  avec  $j_i \leq k < j_{i+1}$  et

$$\ell_k = \ell_N + \sum_{j=k+1}^N (\ell_{j-1} - \ell_j) = \sum_{a=i+1}^n (\ell_{j_a-1} - \ell_{j_a}) = n - i = \ell_{j_i}.$$

En particulier, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} &= q^{\sum_{j=1}^{N-1} \ell_j (\ell_{j-1} - \ell_j)} \left( \bigotimes_{j=1}^N E^{(\ell_{j-1} - \ell_j)} K^{\ell_j} m_{x_j} \right) = q^{\sum_{k=1}^n \ell_{j_k}} \left( \bigotimes_{j=1}^N q^{\ell_j x_j} E^{(\ell_{j-1} - \ell_j)} m_{x_j} \right) \\
&= q^{\sum_{k=1}^n (n-k)} \left( \prod_{j=1}^N q^{\ell_j x_j} \right) \left( \prod_{k=1}^n \delta_{x_{j_k}, -} \right) m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N} \\
&= q^{\frac{1}{2} n(n-1)} \widehat{\Gamma}_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} \left( \prod_{k=1}^n \delta_{x_{j_k}, -} \right) m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} &= \left( \prod_{j=1}^N q^{\ell_j x_j} \right) = \left( \prod_{j=1}^{j_1-1} q^{\ell_j x_j} \right) \left\{ \prod_{k=2}^n \left( \prod_{j=j_{k-1}}^{j_k-1} q^{\ell_j x_j} \right) \right\} \left( \prod_{j=j_n}^N q^{\ell_j x_j} \right) \\
&= \left( \prod_{j=1}^{j_1-1} q^{n x_j} \right) \left\{ \prod_{k=2}^n \left( \prod_{j=j_{k-1}}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\} \\
&= q^{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) x_{j_k}} \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\} \\
&= q^{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) x_{j_k}} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} &= q^{\frac{1}{2} n(n-1)} q^{-\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\} \left( \prod_{k=1}^n \delta_{x_{j_k}, -} \right) m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N} \\
&= \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\} \left( \prod_{k=1}^n \delta_{x_{j_k}, -} \right) m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N}
\end{aligned}$$

et il est possible de conclure que

$$\begin{aligned}
\Delta_N \left( E^{(n)} \right) m_{x_1 \dots x_N} &= \sum_{\substack{0 \leq \ell_{N-1} \leq \dots \leq \ell_1 \leq n \\ \ell_0 = n, \ell_N = 0}} \Gamma_{\ell_1 \dots \ell_{N-1}} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1 \\ j_0 = 0, j_{n+1} = N+1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1) x_j} \right) \right\} m_{x_1 \dots x_{j_1-1} (+) x_{j_1+1} \dots x_N}
\end{aligned}$$

comme voulu. On peut alors raisonner de manière similaire afin d'obtenir l'expression correspondante pour l'action de  $F^{(n)}$  sur l'élément  $m_{x_1 \dots x_N}$  via le coproduit généralisé  $\Delta_N$ .  $\square$

Fixons  $v \in \mathbb{C}^\times$  et considérons l'isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\tau_{q^{-1}}(v) : (L_q(1))^{\otimes N} \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  défini par  $\tau_{q^{-1}}(v) m_{x_1 \dots x_N} = \tau_{x_1 \dots x_N}(q^{-1}, v) |x_1 \dots x_N\rangle_v$  où

$$\tau_{x_1 \dots x_N}(q^{-1}, v) = v^2 \sum_{j=1}^r i_j v^{-r(N+1)} q^{\frac{r}{2}(N-r)} \quad \text{avec} \quad \{i_j\}_{j=1}^r = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}.$$

Alors, la chaîne  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  peut être munie d'une structure de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -module au travers de l'isomorphisme  $\tau_{q^{-1}}(v)$ ; c'est-à-dire avec l'action pour laquelle  $E^{(n)}$ ,  $F^{(n)}$  et  $K$  agissent respectivement (pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) via les opérateurs  $(S^+)_{v, q^{-1}}^{(n)} = \tau_{q^{-1}}(v) \circ \Delta_N(E^{(n)}) \circ \tau_{q^{-1}}(v)^{-1}$ ,  $(S^-)_{v, q^{-1}}^{(n)} = \tau_{q^{-1}}(v) \circ \Delta_N(F^{(n)}) \circ \tau_{q^{-1}}(v)^{-1}$  et  $K_{v, q^{-1}} = \tau_{q^{-1}}(v) \circ \Delta_N(K) \circ \tau_{q^{-1}}(v)^{-1}$ . Avec cette action,  $\tau_{q^{-1}}(v)$  devient trivialement un isomorphisme de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules. La structure ainsi définie fait aussi équivaloir les actions sur  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  de l'opérateur  $2S^z$  du chapitre 2 et du générateur  $H$  de la section 3.1.2 puisque, pour chaque  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$ , on a

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{q^{-1}}(v) \circ \Delta_N(H) \circ \tau_{q^{-1}}^{-1}(v) \right) |x_1 \dots x_N\rangle_v = \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1}(q^{-1}, v) \left[ \tau_{q^{-1}}(v) (\Delta_N(H) m_{x_1 \dots x_N}) \right] \\ & = \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1}(q^{-1}, v) \left[ \tau_{q^{-1}}(v) \left( \sum_{j=1}^N (\text{id}_{j-1} \otimes H \otimes \text{id}_{N-j}) (m_{x_1} \otimes \dots \otimes m_{x_N}) \right) \right] \\ & = \left( \sum_{j=1}^N x_j \right) \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1}(q^{-1}, v) (\tau_{q^{-1}}(v) m_{x_1 \dots x_N}) = \left( \sum_{j=1}^N x_j \right) |x_1 \dots x_N\rangle_v = 2S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

car  $\Delta(H) = H \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H$  (d'où on obtient l'expression de  $\Delta_N(H)$  par induction). On peut donc dorénavant identifier les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d)$  et  $(L_q(1))^{\otimes cN} \Big|_{H=d}$  (pour chaque  $d \in \text{spec } 2S^z$ ) et utiliser la décomposition de Clebsch-Gordan généralisée de la section 3.2.3 pour décomposer les espaces  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d)$  en espaces propres (de  $H$ ) de  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -modules simples et projectifs indécomposables. En particulier, les corollaires 3.35 et 3.36 peuvent être appliqués aux espaces  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d)$  lorsque les substitutions adéquates sont effectuées.

**Proposition 3.38.** Soient  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$ . Alors, l'élément  $x_{\pm} \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  défini par  $x_{\pm} = (S^{\pm})_{v, q^{-1}}^{(n)} |x_1 \dots x_N\rangle_v$  correspond à

$$x_{\pm} = v^{\pm n(N+1)} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = \mp 1}} v^{\mp 2 \sum_{k=1}^n j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\binom{n-k+1}{2} x_j} \right) \right\} |x_1 \dots x_{j_1-1}(\pm) x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_v.$$

DÉMONSTRATION. Notons  $\tau = \tau_{q^{-1}}(v)$  et  $\tau_{y_1 \dots y_N} = \tau_{y_1 \dots y_N}(q^{-1}, v)$  pour  $y_1, \dots, y_N \in \{\pm 1\}$ . Notons aussi  $\{i_j\}_{j=1}^r = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}$  pour avoir  $\sum_{j=1}^N x_j = N - 2r$ . Alors, selon la proposition 3.37, on a, avec  $j_0 = 0$  et  $j_{n+1} = N + 1$ ,

$$\begin{aligned} x_+ & = \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1)x_j} \right) \right\} \tau m_{x_1 \dots x_{j_1-1}(+) x_{j_1+1} \dots x_N} \\ & = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1}} \Gamma_{j_1 \dots j_n} |x_1 \dots x_{j_1-1}(+) x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

où, pour une suite strictement croissante  $(j_k)_{k=1}^n \subseteq \{1, \dots, N\}$  telle que  $x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1$ ,

$$\Gamma_{j_1 \dots j_n} = \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1} \tau_{x_1 \dots x_{j_1-1}(+) x_{j_1+1} \dots x_N} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1)x_j} \right) \right\}.$$

Remarquons que,

$$\begin{aligned}\tau_{x_1 \dots x_{j_1-1}(+)x_{j_1+1} \dots x_N} &= v^{2\left(\sum_{j=1}^r i_j - \sum_{k=1}^n j_k\right)} v^{-(r-n)(N+1)} q^{\frac{r-n}{2}(N-(r-n))} \\ &= v^{n(N+1)} v^{-2\sum_{k=1}^n j_k} q^{-\frac{n}{2}(N-2r+n)} \tau_{x_1 \dots x_N}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\Gamma_{j_1 \dots j_n} &= \tau_{x_1 \dots x_N}^{-1} \tau_{x_1 \dots x_{j_1-1}(+)x_{j_1+1} \dots x_N} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(n-k+1)x_j} \right) \right\} \\ &= v^{n(N+1)} v^{-2\sum_{k=1}^n j_k} q^{-\frac{n}{2}(N-2r+n)} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\frac{n}{2}x_j} q^{(\frac{n}{2}-k+1)x_j} \right) \right\} \\ &= v^{n(N+1)} v^{-2\sum_{k=1}^n j_k} q^{-\frac{n}{2}(N-2r+n)} q^{\frac{n}{2}(\sum_{\ell=1}^N x_\ell - \sum_{k=1}^n x_{j_k})} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(\frac{n}{2}-k+1)x_j} \right) \right\} \\ &= v^{n(N+1)} v^{-2\sum_{k=1}^n j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(\frac{n}{2}-k+1)x_j} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient comme voulu

$$x_+ = v^{n(N+1)} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = -1}} v^{-2\sum_{k=1}^n j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(\frac{n}{2}-k+1)x_j} \right) \right\} |x_1 \dots x_{j_1-1}(+)x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_v$$

et on peut montrer de manière analogue que  $x_-$  s'exprime de la façon indiquée dans l'énoncé de la proposition. Ceci achève cette démonstration.  $\square$

La proposition 3.38 stipule que les opérateurs  $(S^\pm)_{v,q^{-1}}^{(n)}$  représentant l'action des puissances divisées  $E^{(n)}$  et  $F^{(n)}$  de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  sur la chaîne  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  correspondent exactement aux opérateurs  $(S^\pm)^{(n)}$  introduits dans [40]. Ainsi, puisque la définition de la  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -action considérée dans ce mémoire pour la chaîne  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  (voir le chapitre 2) provient de cet article, on peut utiliser les résultats y étant présentés quant à la compatibilité des structures de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  sous  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  et  $\text{TL}_N^a(\beta)$ . Cela permet en particulier d'obtenir sans effort le résultat suivant.

**Lemme 3.39** ([40]). Soient  $v \in \mathbb{C}$  non nul,  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ . Alors, les actions de  $(S^\pm)_{v,q^{-1}}^{(n)}$  et de  $e_i$  sur  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  commutent l'une avec l'autre.

Cependant, tel que mentionné dans [40] et avec la notation du lemme 3.39, les actions de  $(S^\pm)_{v,q^{-1}}^{(n)}$  et de  $e_N$  (ou de  $\Omega^{\pm 1}$ ) ne commutent généralement pas sur  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$ . Par exemple, pour  $n = 1$  et  $N = 2$ , on calcule aisément que<sup>16</sup>, si  $q^2 \neq v^4$ ,

$$\begin{aligned}S_{v,q^{-1}}^+ e_2 |+-\rangle_v &= S_{v,q^{-1}}^+ (v^2 | -+\rangle_v - q |+-\rangle_v) = (v^3 q^{-\frac{1}{2}} - v^{-1} q^{\frac{3}{2}}) |++\rangle_v \\ &\neq 0 = v^{-1} q^{\frac{1}{2}} e_2 |++\rangle_v = e_2 S_{v,q^{-1}}^+ |+-\rangle\end{aligned}$$

<sup>16</sup>On note ici  $S^\pm = (S^\pm)^{(1)}$  et on utilise l'action de  $e_2$  sur  $\mathbb{C}_2(q^{-1}, v)$  décrite à la section 2.1.

On termine maintenant cette sous-section en étudiant l'interaction entre les opérateurs  $(S^\pm)^{(n)}$  et l'isomorphisme  $\eta_N(q^{-1}, v) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v^{-1})$  de la section 2.2.

**Proposition 3.40.** Soit  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Alors,  $\eta_N(q^{-1}, v) \circ (S^\pm)^{(n)}_{v, q^{-1}} = (S^\mp)^{(n)}_{v^{-1}, q} \circ \eta_N(q^{-1}, v)$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $a_\pm = v^{\mp n(N+1)} \left[ \eta_N(q^{-1}, v) \circ (S^\pm)^{(n)}_{v, q^{-1}} \circ \eta_N(q, v^{-1}) \right] |x_1 \dots x_N\rangle_{v^{-1}}$  pour  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$  fixés. Alors, un calcul direct à l'aide de la proposition 3.38 permet d'obtenir

$$\begin{aligned} a_\pm &= v^{\mp n(N+1)} \left[ \eta_N(q^{-1}, v) \circ (S^\pm)^{(n)}_{v, q^{-1}} \right] |-x_1 \dots -x_N\rangle_v \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ -x_{j_1} = \dots = -x_{j_n} = \mp 1}} v^{\mp 2 \sum_{k=1}^n j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(k-\frac{n}{2}-1)x_j} \right) \right\} |x_1 \dots x_{j_1-1} (\mp) x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_{v^{-1}} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_n} = \pm 1}} v^{\mp 2 \sum_{k=1}^n j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{(k-\frac{n}{2}-1)x_j} \right) \right\} |x_1 \dots x_{j_1-1} (\mp) x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_{v^{-1}} \\ &= v^{\mp n(N+1)} (S^\mp)^{(n)}_{v^{-1}, q} |x_1 \dots x_N\rangle_{v^{-1}} \end{aligned}$$

de sorte qu'il est possible de conclure que  $\eta_N(q^{-1}, v) \circ (S^\pm)^{(n)}_{v, q^{-1}} = (S^\mp)^{(n)}_{v^{-1}, q} \circ \eta_N(q^{-1}, v)$  étant donné que l'inverse de l'isomorphisme  $\eta_N(q, v^{-1})$  correspond à  $\eta_N(q^{-1}, v)$ .  $\square$

### 3.3.2. Morphismes entre espaces propres

Soient  $v_y, v_z \in \mathbb{C}$  non nuls. Dans la section précédente, on a défini une structure de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module sur les chaînes  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y)$  et  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z)$  en utilisant des isomorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires diagonaux notés  $\tau_{q^{-1}}(v_z) : (L_q(1))^{\otimes cN} \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z)$  et  $\tau_{q^{-1}}(v_y) : (L_q(1))^{\otimes cN} \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y)$ . Par construction, ces applications  $\tau_{q^{-1}}(v_y)$  et  $\tau_{q^{-1}}(v_z)$  sont  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -linéaires de sorte que l'application composée

$$\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z) = \tau_{q^{-1}}(v_z) \circ (\tau_{q^{-1}}(v_y))^{-1} : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z)$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -modules. Cet isomorphisme est défini sur un élément de base  $|x_1 \dots x_N\rangle_{v_y}$  de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y)$  par  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z) |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} = \vartheta_{x_1 \dots x_N}(v_y, v_z) |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z}$  où, selon la définition des isomorphismes  $\tau_{q^{-1}}(v_y)$  et  $\tau_{q^{-1}}(v_z)$ ,

$$\vartheta_{x_1 \dots x_N}(v_y, v_z) = \frac{\tau_{x_1 \dots x_N}(q^{-1}, v_z)}{\tau_{x_1 \dots x_N}(q^{-1}, v_y)} = \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{2 \sum_{j=1}^r i_j} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{-r(N+1)}$$

avec  $(i_j)_{j=1}^N = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}$  pour  $r = \frac{1}{2}(N - d)$  et  $d = \sum_{j=1}^N x_j$ . Le théorème suivant utilise l'isomorphisme  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -linéaire  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  et les opérateurs  $(S^-)^{(n)}_{v_z, q^{-1}}$  afin d'obtenir des applications  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires entre les espaces propres de  $2S^z$  des chaînes  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y)$  et  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z)$ . Dans ce théorème, on utilise implicitement le fait que l'action de  $(S^-)^{(n)}$  sur un vecteur  $|x_1 \dots x_N\rangle_{v_z}$  abaisse de  $2n$  la valeur propre de  $2S^z$  (comme il est possible de vérifier facilement à partir de la proposition 3.38).

**Théorème 3.41.** Soient  $t, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $t \equiv_2 d$  et  $t \geq d$ . Considérons aussi  $v_y, v_z \in \mathbb{C}$  non nuls et  $a = \frac{1}{2}(t - d)$ . Supposons que  $q^t = v_z^{-2N}$  et  $v_z^N q^a = v_y^N$ . Alors, l'application linéaire  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$  définie par la composition

$$\begin{aligned} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} &= [(S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} \circ \vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)] |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} \\ &= [\vartheta_{x_1 \dots x_N}(v_y, v_z)] (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} \end{aligned}$$

est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire.

DÉMONSTRATION. Fixons  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$  et notons  $\{i_\ell\}_{\ell=1}^r = \{j \in \{1, \dots, N\} \mid x_j = -1\}$  pour  $t = \sum_{n=1}^N x_n$  et  $r = \frac{1}{2}(N - t)$ . Notons également  $\vartheta_{y_1 \dots y_N} = \vartheta_{y_1 \dots y_N}(v_y, v_z)$  pour chaque  $\{y_j\}_{j=1}^N \subseteq \{\pm 1\}$  et remarquons que, selon l'équation (2.2) et le lemme 3.39, on a

$$\begin{aligned} e_1 [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} &= \vartheta_{x_1 \dots x_N} e_1 (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} = \vartheta_{x_1 \dots x_N} (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} \\ &= \delta_{x_1, -x_2} \vartheta_{x_1 \dots x_N} (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} \left( v_z^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_{v_z} - q^{-x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} \right) \\ &\stackrel{1}{=} \delta_{x_1, -x_2} (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} \left( v_y^{-2x_1} \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_{v_z} - q^{-x_1} \vartheta_{x_1 \dots x_N} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} \right) \\ &= \delta_{x_1, -x_2} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \left( v_y^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_{v_y} - q^{-x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} \right) \\ &= [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} \end{aligned}$$

avec l'égalité 1 vérifiée puisque, lorsque  $x_1 = -x_2$ ,

$$\vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} = \begin{cases} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{2(\sum_{\ell=1}^r i_\ell - 1)} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{-r(N+1)} & \text{si } x_1 = 1; \\ \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{2(\sum_{\ell=1}^r i_\ell + 1)} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{-r(N+1)} & \text{si } x_1 = -1 \end{cases}$$

d'où  $\vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} = \vartheta_{x_1 \dots x_N} \left( \frac{v_y}{v_z} \right)^{2x_1}$ . L'application  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z)$  commute ainsi avec  $e_1$ . On veut montrer qu'elle respecte aussi l'action de  $\Omega$ . Pour ce faire, remarquons que, d'un côté,

$$\begin{aligned} \Omega [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y} &= \vartheta_{x_1 \dots x_N} \Omega (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} |x_1 \dots x_N\rangle_{v_z} \\ &= \vartheta_{x_1 \dots x_N} v_z^{-a(N+1)} \left( \Gamma_{j_1=1}^{\Omega f} \delta_{x_1, 1} + \Gamma_{j_1 \neq 1}^{\Omega f} \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{j_1=1}^{\Omega f} &= \sum_{\substack{1=j_1 < j_2 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_2} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} \Omega |(-)x_2 \dots x_{j_2-1} (-)x_{j_2+1} \dots x_N\rangle_{v_z}; \\ \Gamma_{j_1 \neq 1}^{\Omega f} &= \sum_{\substack{2 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} \Omega |x_1 \dots x_{j_1-1} (-)x_{j_1+1} \dots x_N\rangle_{v_z}. \end{aligned}$$



De l'autre côté, l'élément  $[f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega |x_1 \dots x_N\rangle_{v_y}$  s'écrit comme

$$v_y^t \vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} |x_2 \dots x_N x_1\rangle_{v_z} = \vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} v_y^t v_z^{-a(N+1)} \left( \Gamma_{j_a=N}^{f\Omega} \delta_{x_1,1} + \Gamma_{j_a \neq N}^{f\Omega} \right)$$

avec

$$\Gamma_{j_a=N}^{f\Omega} = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{a-1} < j_a=N \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_{a-1}+1} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_{j+1}} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N(-)\rangle_{v_z}$$

et où  $\Gamma_{j_a \neq N}^{f\Omega}$  correspond à l'expression

$$\sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_a+1} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_{j+1}} \right) \right\} q^{-\frac{a}{2}x_1} |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N x_1\rangle_{v_z}.$$

Remarquons que, si  $x_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{j_1=1}^{\Omega f} &= \sum_{\substack{1=j_1 < j_2 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_2} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} \Omega |(-) x_2 \dots x_{j_2-1}(-) x_{j_2+1} \dots x_N\rangle_{v_z} \\ &= v_z^d \sum_{\substack{2 \leq j_2 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_2} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_1=1, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=2}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_2-1}(-) x_{j_2+1} \dots x_N(-)\rangle_{v_z} \\ &= v_z^{d+2a} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{a-1} \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_{a-1}+1} = 1 \\ j_0=0, j_a=N}} v_z^{2 \sum_{k=0}^{a-1} j_k} \left\{ \prod_{k=1}^a \left( \prod_{j=j_{k-1}+2}^{j_k} q^{\left(\frac{a}{2}-k\right)x_j} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N(-)\rangle_{v_z} \\ &= v_z^t \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{a-1} \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_{a-1}+1} = 1 \\ j_0=0, j_a=N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^{a-1} j_k} \left\{ \prod_{k=1}^a \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k\right)x_{j+1}} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N(-)\rangle_{v_z} \\ &= v_z^t \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{a-1} \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_{a-1}+1} = 1 \\ j_0=0, j_a=N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^{a-1} j_k} q^{x_1 + \sum_{k=1}^{a-1} x_{j_k+1} - \sum_{\ell=1}^N x_\ell} \left\{ \prod_{k=1}^a \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_{j+1}} \right) \right\} \\ &\quad * |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N(-)\rangle_{v_z} \\ &= v_z^{t-2N} q^{a-t} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{a-1} < j_a=N \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_{a-1}+1} = 1 \\ j_0=0, j_{a+1}=N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_{j+1}} \right) \right\} \\ &\quad * |x_2 \dots x_{j_1}(-) x_{j_1+2} \dots x_N(-)\rangle_{v_z} \\ &= v_z^{t-2N} q^{a-t} \Gamma_{j_a=N}^{f\Omega}. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j_1 \neq 1}^{\Omega f} &= \sum_{\substack{2 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_0 = 0, j_{a+1} = N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} \Omega |x_1 \dots x_{j_1-1} (-) x_{j_1+1} \dots x_N \rangle_{v_z} \\
&= v_z^d \sum_{\substack{2 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_a} = 1 \\ j_0 = 0, j_{a+1} = N+1}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1-1} (-) x_{j_1+1} \dots x_N x_1 \rangle_{v_z} \\
&= v_z^{d+2a} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_a+1} = 1 \\ j_0 = -1, j_{a+1} = N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+2}^{j_k} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1} (-) x_{j_1+2} \dots x_N x_1 \rangle_{v_z} \\
&= v_z^t q^{\frac{a}{2}x_1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_a+1} = 1 \\ j_0 = 0, j_{a+1} = N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+2}^{j_k} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_j} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1} (-) x_{j_1+2} \dots x_N x_1 \rangle_{v_z} \\
&= v_z^t q^{\frac{a}{2}x_1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_a \leq N-1 \\ x_{j_1+1} = \dots = x_{j_a+1} = 1 \\ j_0 = 0, j_{a+1} = N}} v_z^{2 \sum_{k=1}^a j_k} \left\{ \prod_{k=1}^{a+1} \left( \prod_{j=j_{k-1}+1}^{j_k-1} q^{\left(\frac{a}{2}-k+1\right)x_{j+1}} \right) \right\} |x_2 \dots x_{j_1} (-) x_{j_1+2} \dots x_N x_1 \rangle_{v_z} \\
&= v_z^t q^{ax_1} \Gamma_{j_a \neq N}^{f\Omega}
\end{aligned}$$

de sorte que, puisque  $q^t = v_z^{-2N}$  et  $v_z^N q^a = v_y^N$ ,

$$\begin{aligned}
\Omega [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] |x_1 \dots x_N \rangle_{v_y} &= \vartheta_{x_1 \dots x_N} v_z^{-a(N+1)} \left( \Gamma_{j_1=1}^{\Omega f} \delta_{x_1,1} + \Gamma_{j_1 \neq 1}^{\Omega f} \right) \\
&= \vartheta_{x_1 \dots x_N} v_z^{-a(N+1)} v_z^t \left( v_z^{-2N} q^{a-t} \Gamma_{j_a=N}^{f\Omega} \delta_{x_1,1} + q^{ax_1} \Gamma_{j_a \neq N}^{f\Omega} \right) \\
&= \vartheta_{x_1 \dots x_N} v_z^{-a(N+1)} v_z^t q^{ax_1} \left( \Gamma_{j_a=N}^{f\Omega} \delta_{x_1,1} + \Gamma_{j_a \neq N}^{f\Omega} \right) \\
&= \frac{\vartheta_{x_1 \dots x_N}}{\vartheta_{x_2 \dots x_N x_1}} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^t q^{ax_1} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega |x_1 \dots x_N \rangle_{v_y} \\
&= \frac{\vartheta_{x_1 \dots x_N}}{\vartheta_{x_2 \dots x_N x_1}} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{t-Nx_1} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega |x_1 \dots x_N \rangle_{v_y}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} = \begin{cases} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{2 \sum_{\ell=1}^r (i_\ell - 1)} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{-r(N+1)} = \vartheta_{x_1 \dots x_N} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{t-N} & \text{si } x_1 = 1; \\ \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{2(\sum_{\ell=1}^r (i_\ell - 1) + N)} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{-r(N+1)} = \vartheta_{x_1 \dots x_N} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{t+N} & \text{si } x_1 = -1 \end{cases}$$

d'où  $\vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} = \vartheta_{x_1 \dots x_N} \left( \frac{v_z}{v_y} \right)^{t-Nx_1}$  et on peut donc conclure que

$$\Omega [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] |x_1 \dots x_N \rangle_{v_y} = [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega |x_1 \dots x_N \rangle_{v_y}.$$

Enfin, on a également

$$\Omega^{-1} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] = \Omega^{-1} [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega \Omega^{-1} = \Omega^{-1} \Omega [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega^{-1} = [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] \Omega^{-1}$$

et le résultat voulu découle alors du fait que  $e_j = \Omega^{-(j-1)} e_1 \Omega^{j-1}$  pour  $1 \leq j \leq N$  en vertu des relations de définition de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ .  $\square$

Le théorème précédent correspond au résultat principal de ce chapitre. Il s'agit d'un résultat hautement non trivial puisque les morphismes  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z)$  produits par ce théorème sont définis comme la composition de deux applications qui ne sont généralement pas elles-mêmes  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires. En effet, on a  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z) = (S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} \circ \vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$ , mais la démonstration précédente et la discussion suivant le lemme 3.39 montrent que  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  et  $(S^-)^{(a)}$  ne commutent pas toujours avec  $\Omega$ . Le théorème 3.41 stipule donc que, lorsque certaines hypothèses sont respectées au niveau des paramètres  $d$ ,  $t$ ,  $v_z$  et  $v_y$ , le défaut de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéarité de l'isomorphisme  $\mathcal{L}U_{q^2} \mathfrak{sl}_2$ -linéaire  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  est contrebalancé par celui de l'opérateur  $(S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)}$  représentant la puissance divisée  $F^{(a)}$  sur  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z)$ . Notons qu'un cas particulier de ce théorème (avec des hypothèses plus restrictives) avait déjà été montré dans [40] et qu'il est également possible, comme le montre la proposition ci-dessous, d'utiliser des hypothèses moins strictes dans certaines circonstances particulières (comme  $a = 0$ ).

**Proposition 3.42.** Soient  $q, v, w \in \mathbb{C}$  non nuls satisfaisant  $v^N = w^N$ . Alors, l'isomorphisme  $\vartheta_{q^{-1}}(v, w) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, w)$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire et commute avec l'opérateur  $S^z$ .

DÉMONSTRATION. Notons  $\vartheta = \vartheta_q(v, w)$  et  $\vartheta_{y_1 \dots y_N} = \vartheta_{y_1 \dots y_N}(v, w)$  si  $\{y_i\}_{i=1}^N \subseteq \{\pm 1\}$ . Fixons  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$  avec  $d = \sum_{\ell=1}^N x_\ell$  et rappelons que (voir la preuve du théorème 3.41)

$$\vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} = \left(\frac{w}{v}\right)^{d-Nx_1} = \left(\frac{w}{v}\right)^d \vartheta_{x_1 \dots x_N} \quad \text{et} \quad \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} = \left(\frac{w}{v}\right)^{x_2 - x_1} \vartheta_{x_1 \dots x_N}.$$

Remarquons que, selon ces relations, on a  $[e_1, \vartheta] = [\Omega, \vartheta] = 0$  puisque

$$\Omega \vartheta(|x_1 \dots x_N\rangle_v) = w^d \vartheta_{x_1 \dots x_N} |x_2 \dots x_N x_1\rangle_w = v^d \vartheta_{x_2 \dots x_N x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_w = \vartheta(\Omega |x_1 \dots x_N\rangle_v)$$

et

$$\begin{aligned} e_1 \vartheta(|x_1 \dots x_N\rangle_v) &= \delta_{x_1, -x_2} \vartheta_{x_1 \dots x_N} (w^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_w - q^{x_1} |x_1 \dots x_N\rangle_w) \\ &= \delta_{x_1, -x_2} (v^{-2x_1} \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_w - q^{x_1} \vartheta_{x_1 \dots x_N} |x_1 \dots x_N\rangle_w) \\ &= \vartheta(e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_v) \end{aligned}$$

Ainsi, la démarche présentée à la fin de la preuve du théorème 3.41 montre que  $\vartheta$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire. La seconde partie de la proposition est aussi facilement vérifiée.  $\square$

Pour  $(t, y), (d, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^\times$ , on appelle  $(t, y)$  un *successeur* de  $(d, z)$  si  $q^t = z^2$  et  $q^a = \frac{z}{y}$  avec  $a = \frac{1}{2}(t - d)$ . On note aussi  $\preceq_{q^{-1}}$  la relation d'ordre la plus faible sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^\times$  telle que  $(d, z) \preceq_{q^{-1}} (t, y)$  lorsque  $(t, y)$  est un successeur de  $(d, z)$ .

Alors, le théorème 3.41 devient

$f_{t,d}(q^{-1}, v_z) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire si  $(d, v_z^{-N}) \preceq_{q^{-1}} (t, v_y^{-N})$

où  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z)$  est le morphisme nul lorsque  $t$  ou  $d$  n'appartient pas à  $\text{spec } 2S^z$ . En particulier, la définition de l'ordre  $\preceq_{q^{-1}}$  montre que, pour chaque succession<sup>17</sup>  $(d, v_z^{-N}) \preceq_{q^{-1}} (t, v_y^{-N})$  dans  $\Lambda^a$  via la condition B de la définition 1.13, on doit aussi avoir  $(d, v_z^{-N}) \preceq_{q^{-1}} (t, v_y^{-N})$  de sorte que l'application associée  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z)$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire.

### 3.3.3. Noyaux et longues suites exactes

Soient  $v_z \in \mathbb{C}^\times$  et  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . Supposons que la paire  $(d, v_z^{-N})$  admette une infinité de successeurs dans  $\Lambda^a$  sous l'ordre partiel  $\preceq_{q^{-1}}$ . Soit  $(t, v_y^{-N}) \in \Lambda^a$  le successeur direct de  $(d, v_z^{-N})$  via la condition B de la définition 1.13 et supposons que la relation  $t < d + 2p$  soit vérifiée. Alors, la figure 1.16 implique que la paire  $(d + 2p, w_z^{-N}) \in \Lambda^a$  (pour  $w_z \in \mathbb{C}^\times$  satisfaisant  $w_z^{-N} = q^p v_z^{-N}$ ) succède également directement à  $(t, v_y^{-N})$  via cette condition B de sorte que les applications  $f_{t,d}(q^{-1}, v_z) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$  et  $f_{d+2p,t}(q^{-1}, v_y) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, w_z, d + 2p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t)$  sont  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires. On peut ainsi notamment s'intéresser à l'exactitude de la suite

$$\mathbb{C}_N(q^{-1}, w_z, d + 2p) \xrightarrow{f_{d+2p,t}(q^{-1}, v_y)} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \xrightarrow{f_{t,d}(q^{-1}, v_z)} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d). \quad (3.3)$$

**Proposition 3.43.** Avec la notation explicitée ci-haut,  $\text{Ker } f_{t,d}(q^{-1}, v_z) = \text{Im } f_{d+2p,t}(q^{-1}, v_y)$ . En d'autres termes, la suite (3.3) est exacte.

DÉMONSTRATION. Posons  $a = \frac{1}{2}(t - d) < p$  et considérons  $x \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t)$ . Selon le corollaire 3.36 et la discussion précédant la proposition 3.38, on a  $(S^-)_{v_y, q^{-1}}^{(a)} x = 0$  si et seulement si  $x = (S^-)_{v_y, q^{-1}}^{(p-a)} x'$  pour un certain  $x' \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, d + 2p)$ . Par conséquent, étant donné que les applications  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  et  $\vartheta_{q^{-1}}(w_z, v_y)$  sont des isomorphismes de  $\mathcal{L}U_{q^{\pm 1}}\mathfrak{sl}_2$ -modules, on obtient la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f_{t,d}(q^{-1}, v_z) &\iff [f_{t,d}(q^{-1}, v_z)] x = [(S^-)_{v_z, q^{-1}}^{(a)} \circ \vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)] x = 0 \\ &\iff [\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z) \circ (S^-)_{v_y, q^{-1}}^{(a)}] x = 0 \\ &\iff (S^-)_{v_y, q^{-1}}^{(a)} x = 0 \\ &\iff x = (S^-)_{v_y, q^{-1}}^{(p-a)} x' \text{ pour un certain } x' \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, d + 2p) \\ &\iff x = [f_{d+2p,t}(q^{-1}, v_y)] x' \text{ pour un certain } x' \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, w_z, d + 2p) \\ &\iff x \in \text{Im } f_{d+2p,t}(q^{-1}, v_y) \end{aligned}$$

et le résultat voulu s'ensuit. □

<sup>17</sup>On associe ici, comme partout dans le mémoire, une paire  $(d, z) \in \Lambda^a(N)$  à un de ses représentants sous la relation d'équivalence  $\sim$  définie au début de la section 1.2.

En utilisant la proposition précédente pour chacune des successions relatives à la condition B dans la figure 1.16, on obtient une longue suite exacte de morphismes  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, w_z, d + 2p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$$

où chacun des morphismes sous-entendus correspond à une application issue du théorème 3.41 via une succession directe dans  $\Lambda^a$  par rapport à la condition B et où le module nul obtenu au début de la longue suite exacte est présent puisque les valeurs propres de  $2S^z$  associé aux espaces apparaissant dans cette suite augmente strictement de la droite vers la gauche (et dépasse donc  $N$  à partir d'un certain point).

On peut faire appel au théorème 3.41 pour produire une d'autres morphismes d'intérêt. En particulier, notons que, selon la figure 1.16 (après la substitution  $q \leftrightarrow q^{-1}$ ), puisque  $(t, v_y^{-N})$  succède directement à  $(d, v_z^{-N})$  sous  $\preceq_{q^{-1}}$  via la condition B, on a  $v_y^{2N} = z^2 q^{s-d+\delta_i}$ . Ainsi,

$$v_y^N = v_y^{-N} v_y^{2N} = v_y^{-N} z^2 q^{s-d+\delta_i} = v_y^{-N} z^2 q^{-d+s-\delta_i} = v_y^{-N} v_z^{-2N} q^{-(t+d)} = v_y^{-N} q^{-d} = v_z^{-N} q^{-(d+a)}.$$

où  $z = v_z^{-N}$  et où les paramètres  $s$  et  $\delta_i$  sont définis dans la figure 1.16. Par conséquent,  $(-d, v_z^N) \preceq_q (t, v_y^{-N})$  et l'application  $f_{t,-d}(q, v_z^{-1}) : \mathbb{C}_N(q, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, -d)$  donnée par  $[f_{t,-d}(q, v_z^{-1})] = (S^-)_{v_z^{-1}, q}^{(d+a)} \circ [\vartheta_q(v_y, v_z^{-1})]$  est  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire. Il doit donc en être de même de l'application composée  $g_{-t,d}(q^{-1}, v_z) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y^{-1}, -t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$  donnée par

$$g_{-t,d}(q^{-1}, v_z) = \eta_N(q, v_z^{-1}) \circ [f_{t,-d}(q, v_z^{-1})] \circ \eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})$$

avec  $\eta_N(q, v_z^{-1})$  et  $\eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})$  les isomorphismes de la section 2.2. Cependant, afin d'obtenir l'équivalent de la proposition 3.43 pour cette application  $g_{-t,d}(q^{-1}, v_z)$ , on doit considérer le successeur direct  $(h, v_x^{-N})$  de  $(t, v_y^{-N})$  sous  $\preceq_{q^{-1}}$  via la condition A de la définition 1.13. En effet, selon le corollaire 1.14, ce successeur satisfait  $(t, v_y^{-N}) \preceq_q (h, v_x^{-N})$  directement via la condition B d'où le raisonnement de la fin de la section précédente montre que l'application  $f_{h,t}(q, v_y) : \mathbb{C}_N(q, v_x, h) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  est  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire. On peut donc considérer la suite

$$\mathbb{C}_N(q, v_x, h) \xrightarrow{\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y)} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y^{-1}, -t) \xrightarrow{g_{-t,d}(q^{-1}, v_z)} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d) \quad (3.4)$$

**Proposition 3.44.** Posons  $a' = \frac{1}{2}(h - t)$  et supposons que la relation  $a' < p$  soit vérifiée. Alors, on a  $\mathrm{Ker} g_{-t,d}(q^{-1}, v_z) = \mathrm{Im}(\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y))$  d'où la suite (3.4) est exacte.

DÉMONSTRATION. Soient  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $d + a = n_1 p + n_2$  avec  $n_2 < p$  et remarquons que, en vertu de la figure 1.16,  $h = -d + \delta_h$  pour un certain  $\delta_h \in 2p\mathbb{Z}$ . Dans ce cas,

$$a' = \frac{1}{2}(h - t) = \frac{1}{2}(h - d + d - t) = -(d + a) + \frac{1}{2}\delta_h \equiv_p -(d + a)$$

et  $a' = p - n_2$  puisque  $1 \leq a' < p$  par hypothèse. Alors, selon le corollaire 3.36 et la discussion précédant la proposition 3.38, on a  $(S^-)_{v_y, q}^{(d+a)} y = 0$  pour  $y \in \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  si et seulement si  $y = (S^-)_{v_y, q}^{(a')} x'$  pour un certain  $x' \in \mathbb{C}_N(q, v_y, h)$ . Par ailleurs, les applications  $\eta_N(q, v_z^{-1})$ ,

$\eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})$ ,  $\vartheta_q(v_y, v_z^{-1})$  et  $\vartheta_q(v_x, v_y)$  sont toutes bijectives. Ainsi, pour  $x \in \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y^{-1}, -t)$ , on obtient, par  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéarité de  $\vartheta_q(v_y, v_z^{-1})$  et avec  $y = [\eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})]x$ ,

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker } g_{-t,d}(q^{-1}, v_z) &\iff [g_{-t,d}(q^{-1}, v_z)]x = 0 \\
&\iff [\eta_N(q, v_z^{-1}) \circ [f_{t,-d}(q, v_z^{-1})] \circ \eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})]x = 0 \\
&\iff [f_{t,-d}(q, v_z^{-1})]y = (S^-)_{v_z^{-1},q}^{(d+a)} [\vartheta_q(v_y, v_z^{-1})]y = 0 \\
&\iff [\vartheta_q(v_y, v_z^{-1})] (S^-)_{v_y,q}^{(d+a)} y = 0 \\
&\iff (S^-)_{v_y,q}^{(d+a)} y = 0 \\
&\iff y = (S^-)_{v_y,q}^{(a')} x' \text{ pour un certain } x' \in \mathbb{C}_N(q, v_y, h) \\
&\iff y = [f_{h,t}(q, v_y)] x' \text{ pour un certain } x' \in \mathbb{C}_N(q, v_x, h) \\
&\iff x = [\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y)] x' \text{ pour un certain } x' \in \mathbb{C}_N(q, v_x, h) \\
&\iff x \in \text{Im } [\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y)]
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $\eta_N(q, v_y) = [\eta_N(q^{-1}, v_y^{-1})]^{-1}$  à la dernière équivalence.  $\square$

On veut utiliser la proposition 3.44 afin d'obtenir une suite exacte similaire à celle découlant de la proposition 3.43. Pour ce faire, notons que, puisque  $\eta_N(q, v_y)$  est une bijection, on a

$$\text{Ker}(\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y)) = \text{Ker } f_{h,t}(q, v_y). \quad (3.5)$$

On peut ainsi utiliser plusieurs fois la proposition 3.43 afin d'obtenir la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_x, h) \xrightarrow{\eta f} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y^{-1}, -t) \xrightarrow{g} \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_z, d)$$

où les morphismes non identifiés correspondent (selon l'équation (3.5)) à des applications issues du théorème 3.41 via une succession directe relativement à la condition B de la définition 1.13 (comme dans la longue suite découlant de la proposition 3.43) et où les morphismes  $\eta f$  et  $g$  désignent respectivement les applications  $\eta_N(q, v_y) \circ f_{h,t}(q, v_y)$  et  $g_{-t,d}(q^{-1}, v_z)$ .

On termine finalement ce chapitre avec l'étude d'une famille particulière de morphismes issus du théorème 3.41. À cette fin, on fixe  $v \in \mathbb{C}$  non nul et  $d \in \mathbb{Z}$  tels que  $|d| \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . On fixe aussi  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $w_\ell \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $w_\ell^N = q^{\ell p} v^N$ . Considérons les deux cas suivants.

(Cas 1) Supposons que  $v^{-2N} = q^d$ . Alors, le théorème 3.41 permet de conclure que l'application  $f_{d+2\ell p,d}(q^{-1}, v) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, w_\ell, d+2\ell p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d)$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire.

(Cas 2) Supposons  $v^{2N} = q^d$ . Dans ce cas, on utilise encore le théorème 3.41 pour déduire que l'application  $f_{-d,-(d+2\ell p)}(q, w_\ell^{-1}) : \mathbb{C}_N(q, v^{-1}, -d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, w_\ell^{-1}, -(d+2\ell p))$  est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire. On peut alors considérer le morphisme de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $g_{d,d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, w_\ell, d+2\ell p)$  défini via la composition  $g_{d,d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell) = \eta_N(q, w_\ell^{-1}) \circ f_{-d,-(d+2\ell p)}(q, w_\ell^{-1}) \circ \eta_N(q^{-1}, v)$ .

**Proposition 3.45.** On conserve la notation utilisée ci-haut sans supposer  $v^{\pm 2N} = q^d$ . Alors, l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $f_{d+2\ell p, d}(q^{-1}, v)$  est injective (ou surjective) lorsque  $|d+2\ell p| \geq |d|$  (ou  $|d+2\ell p| \leq |d|$ , respectivement). De même, l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $g_{d, d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell)$  est injective (ou surjective) lorsque  $|d| \geq |d+2\ell p|$  (ou  $|d| \leq |d+2\ell p|$ , respectivement). Enfin, les applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $g_{d, d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell) \circ f_{d+2\ell p, d}(q^{-1}, v)$  et  $f_{d+2\ell p, d}(q^{-1}, v) \circ g_{d, d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell)$  sont bijectives lorsque  $|d| \leq |d+2\ell p|$  et  $|d+2\ell p| \leq |d|$  (respectivement).

DÉMONSTRATION. Par souci de concision, notons  $g = g_{d, d+2\ell p}(q^{-1}, w_\ell)$ ,  $f_1 = f_{d+2\ell p, d}(q^{-1}, v)$ ,  $f_2 = f_{-d, -(d+2\ell p)}(q, w_\ell^{-1})$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_{q^{-1}}(w_\ell, v)$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_q(v^{-1}, w_\ell^{-1})$ ,  $\eta_1 = \eta_N(q, w_\ell^{-1})$  ainsi que  $\eta_2 = \eta_N(q^{-1}, v)$ . Selon la proposition 3.40 et par  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$ -linéarité de  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ ,

$$\begin{aligned} g \circ f_1 &= \eta_1 \circ f_2 \circ \eta_2 \circ f_1 = \eta_1 \circ (S^-)_{w_\ell^{-1}, q}^{(\ell p)} \circ \vartheta_2 \circ \eta_2 \circ (S^-)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} \circ \vartheta_1 \\ &= \eta_1 \circ \vartheta_2 \circ (S^-)_{v^{-1}, q}^{(\ell p)} \circ \eta_2 \circ (S^-)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} \circ \vartheta_1 = \eta_1 \circ \vartheta_2 \circ \eta_2 \circ \left[ (S^+)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} (S^-)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} \right] \circ \vartheta_1 \\ &= \eta_1 \circ \vartheta_2 \circ \eta_2 \circ \vartheta_1 \circ \left[ (S^+)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} (S^-)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} \right]. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$f_1 \circ g = \left[ (S^-)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} (S^+)_{v, q^{-1}}^{(\ell p)} \right] \circ \vartheta_1 \circ \eta_1 \circ \vartheta_2 \circ \eta_2.$$

Ainsi, en vertu du corollaire<sup>18</sup> 3.35 et de la discussion précédant la proposition 3.38, on peut conclure de la bijectivité de  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  que les applications  $\mathbb{C}$ -linéaires composées  $g \circ f_1$  et  $f_1 \circ g$  sont respectivement bijectives lorsque  $|d| \leq |d+2\ell p|$  et  $|d+2\ell p| \leq |d|$ . En particulier,  $f_1$  est injective lorsque  $|d| \leq |d+2\ell p|$  et surjective lorsque  $|d+2\ell p| \leq |d|$ . De la même manière,  $g$  est injective lorsque  $|d+2\ell p| \leq |d|$  et surjective lorsque  $|d| \leq |d+2\ell p|$ . Ceci achève cette démonstration.  $\square$

<sup>18</sup>On utilise ici implicitement le fait que  $K^p$  est central et inversible dans  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  de sorte que, puisque  $e = K^p E^{(p)}$  et que  $f = (-1)^{p+1} q^p F^{(p)}$ , la multiplication par  $e^n f^n$  (ou par  $f^n e^n$ ) définit un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire pour un espace propre de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, v)$  donné si et seulement s'il en de même pour la multiplication par  $E^{(np)} F^{(np)}$  (ou par  $F^{(np)} E^{(np)}$ , respectivement).





# Chapitre 4

---

## Structure des modules $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ sur l'ensemble critique

Dans ce chapitre, on utilise les résultats démontrés précédemment afin d'obtenir la structure explicite (par rapport à l'algèbre  $\text{TL}_N^a(\beta)$ ) des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  de la section 2.1. En résumé, les théorèmes principaux de ce chapitre forcent à constater qu'un espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  fixé admet toujours une structure à la *Feigin-Fuchs* (voir la figure 1.14) où les facteurs de composition sont les mêmes que ceux du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$ . Un corollaire immédiat est alors que l'image du morphisme  $i_N^d(q, v) : V_N^d(q, v) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  de la section 2.4 est toujours isomorphe à la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  de  $V_N^d(q, v)$ .

Fixons  $q, v \in \mathbb{C}^\times$  et  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  où  $d \leq N$  et  $d \equiv_2 N$ . Dans les pages suivantes, on supposera constamment que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité pour un certain  $p \in \mathbb{N}$  et que la paire  $(d, z) \in \Lambda^a$  admet une infinité de successeurs sous l'ordre  $\preceq$  de la section 1.3.2.

### 4.1. Cas spéciaux

Cette section est consacrée à l'étude des cas particuliers pour lesquels au moins une des deux conditions  $q^d = v^{2N}$  ou  $q^d = v^{-2N}$  est satisfaite. La structure obtenue dans ces cas pour les espaces  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  est analogue à celle des  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs semisimples ou linéaires (voir la figure 1.14) et les outils principaux utilisés pour révéler cette structure sont les propositions, théorèmes et corollaires 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.12, 2.13, 3.45 et A.3.

#### 4.1.1. Cas semisimple

Dans cette sous-section, on suppose  $q^d = v^{2N}$  avec  $v^{4N} = 1$  et on pose  $z = v^{-N}$ . Remarquons que, dans cette situation, si la paire  $(t, y) \in \Lambda^a$  satisfait  $(d, z) \preceq_q (t, y)$ , alors la définition 1.13 donne  $q^t = z^{\pm 2} = v^{\mp 2N} = q^d$  d'où  $k = \frac{1}{2}(t - d) \equiv_p 0$  étant donné que  $q^2$  est une  $p$ -ième

racine primitive de l'unité et que  $t \equiv_2 N \equiv_2 d$ . De plus, cette même définition force  $y = zq^{\pm k}$  de sorte que les successeurs de la paire  $(d, z)$  dans  $\Lambda^a$  sont tous de la forme  $(d + 2\ell p, zq^{\ell p})$  avec  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . En fait, il est facile de démontrer que la figure 1.16 donnant l'organisation de ces successeurs (et, de ce fait, la structure du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$ ) se simplifie, sous les hypothèses considérées, en la figure 4.1 présentée ci-dessous.

$$(d, z) \longrightarrow (d + 2p, zq^p) \longrightarrow (d + 4p, z) \longrightarrow (d + 6p, zq^p) \longrightarrow \dots$$

**Fig. 4.1.** Structure de  $V_N^d(q, v)$  lorsque  $q^d = v^{2N}$  et  $v^{4N} = 1$ .

**Théorème 4.1.** Notons  $m_d = \max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid d + 2\ell p \leq N\}$ . Supposons  $q^d = v^{2N}$  et  $v^{4N} = 1$ . Alors, comme  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules,

$$\mathbb{C}_N(q, v, d) \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{m_d} L_{N, d+2\ell p; zq^{\ell p}}.$$

DÉMONSTRATION. Procédons par induction sur  $m_d$  en remarquant que le cas  $m_d = 0$  est déjà traité dans la proposition 2.13. Supposons  $m_d > 0$  et considérons le module (non nul)  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  pour un certain  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $w^{-N} = zq^p$ . Puisque  $q^{d+2p} = q^d = v^{2N} = w^{2N}$  et que  $w^{4N} = v^{4N} = 1$ , l'hypothèse d'induction permet de conclure que

$$\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{m_d+2p} L_{N, d+2(\ell+1)p; zq^{(\ell+1)p}} = \bigoplus_{\ell=1}^{m_d} L_{N, d+2\ell p; zq^{\ell p}}$$

car  $m_{d+2p} = \max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid d + 2(\ell + 1)p \leq N\} = m_d - 1$ . Remarquons également que les discussions présentées à la fin du chapitre 3 (avec  $q \leftrightarrow q^{-1}$ ) et dans l'annexe A (si  $q^2 = 1$ ) donnent des applications  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $f_{d+2p, d}(q, v) : \mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  et  $g_{d, d+2p}(q, w) : \mathbb{C}_N(q, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  telles que  $g_{d, d+2p}(q, w) \circ f_{d+2p, d}(q, v)$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (voir les propositions 3.45 et A.3). En particulier, le morphisme  $f_{d+2p, d}(q, v)$  est une inclusion de  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  dans  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et l'application  $g_{d, d+2p}(q, w)$  est un épimorphisme de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  sur  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$ . En outre, le corollaire 2.12 indique que la coiffe  $L_{N, d; z} = \text{top } V_N^d(q, v)$  (qui est un quotient de  $\text{PG}_N^d(q, v)$ ) doit être un facteur de composition de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Dans ce cas, la suite d'égalités (provenant de la figure 4.1)

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}_N(q, v, d) &= \dim V_N^d(q, v) = \dim L_{N, d; z} + \dim \bigoplus_{\ell=1}^{m_d} L_{N, d+2\ell p; zq^{\ell p}} \\ &= \dim L_{N, d; z} + \dim \mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) \end{aligned}$$

donne  $\mathbb{C}_N(q, v, d) \simeq L_{N, d; z} \oplus \mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{m_d} L_{N, d+2\ell p; zq^{\ell p}}$  comme espaces vectoriels. Cependant, on a  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) \simeq \text{Im } f_{d+2p, d}(q, v) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v, d)$  et l'absence du facteur  $L_{N, d; z}$  dans  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p) = \text{Im } g_{d, d+2p}(q, w)$  force  $L_{N, d; z} \subseteq \text{Ker } g_{d, d+2p}(q, w) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Ainsi,  $L_{N, d; z}$  et  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  sont contenus dans  $\text{soc } \mathbb{C}_N(q, v, d)$  de sorte que la décomposition  $\mathbb{C}_N(q, v, d) \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{m_d} L_{N, d+2\ell p; zq^{\ell p}}$  est aussi valide en tant que  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules.  $\square$

### 4.1.2. Premier cas linéaire

Supposons  $q^d = v^{-2N}$  avec  $v^{4N} \neq 1$  et étudions  $s = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid r > d, r \equiv_2 d \text{ et } q^r = v^{-2N}\}$ . Remarquons que  $q^s = v^{-2N} = q^d$  d'où  $s - d \in 2p\mathbb{Z}$  étant donné que  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité et que  $s \equiv_2 d$ . Dans ce cas, la définition de  $s$  force  $s = d + 2p$  et, avec la notation de la figure 1.16,  $\delta_i = \delta_h = 2\ell p$  pour  $\ell = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid (r-1)p > d\}$ . Ainsi, utilisant à nouveau la notation de cette figure, on obtient, pour  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $z = v^{-N}$  et  $k = \frac{1}{2}(s-d)$ ,

$$(j_a, y_a) = (s + 2ap, zq^{ap-k}) = (d + 2(a+1)p, zq^{(a+1)p}) = (k_{a+1}, u_{a+1}) \text{ et}$$

$$(h_a, \nu_a) = (-d + \delta_h + 2ap, z^{-1}q^{ap+\delta_h/2}) = (-s + 2(\ell + a + 1)p, z^{-1}q^{ap+\delta_i/2}) = (i_{a+1}, x_{a+1})$$

avec  $\{(k_a, u_a)\}_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \cap \{(h_a, \nu_a)\}_{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} = \emptyset$  car  $q^{k_a} = q^d = v^{-2N} \neq v^{2N} = q^{-d} = q^{h_b}$  pour  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v)$  correspond donc à la version simplifiée du diagramme de la figure 1.16 présentée au sein de la figure 4.2. Dans cette figure, on écrit  $(t, y) = (i_0, x_0) = (-d + 2(\ell - 1)p, z^{-1}q^{(\ell+1)p})$  pour désigner le successeur direct de  $(d, z)$  via la condition B de la définition 1.13 et on identifie en rouge les flèches joignant les facteurs de composition de la copie de  $V_N^{d+2p}(q, w)$  (pour un certain  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $w^{-N} = zq^p$ ) réalisée comme un sous-module de  $V_N^d(q, v)$  via les inclusions de la section 1.3.2. Les facteurs de la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  (voir la section 2.4) sont aussi reliés à l'aide d'une flèche bleue.

$$(d, z) \longrightarrow (t, y) \longrightarrow (d + 2p, zq^p) \longrightarrow (t + 2p, yq^p) \longrightarrow \dots$$

**Fig. 4.2.** Structure de  $V_N^d(q, v)$  si  $q^d = v^{-2N}$  et  $v^{4N} \neq 1$ . Dans cette figure,  $(t, y) = (i_0, x_0)$  et le sous-module de  $V_N^d(q, v)$  isomorphe à  $V_N^{d+2p}(q, w)$  (avec  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $w^{-N} = zq^p$ ) ainsi que  $\text{PG}_N^d(q, v)$  peuvent respectivement être identifiés à l'aide des flèches rouges et bleues.

On voudrait aussi connaître la structure du module  $V_N^t(q^{-1}, x^{-1})$  pour  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $x^{-N} = y$ . Pour ce faire, remarquons que les inclusions de la section 1.3.2 permettent de conclure que le diagramme d'organisation des successeurs de  $(t, y)$  sous l'ordre  $\preceq_q$  (ou, de façon équivalente, le diagramme de Loewy du module  $V_N^t(q, x)$ ) correspond au diagramme obtenu de la figure 4.2 en y retirant la paire  $(d, z)$ . On déduit ainsi, à l'aide du corollaire 1.14, que le diagramme d'organisation des successeurs de  $(t, y^{-1})$  sous  $\preceq_{q^{-1}}$  (qui équivaut au diagramme de Loewy de  $V_N^t(q^{-1}, x^{-1})$ ) correspond au diagramme donné dans la figure 4.3.

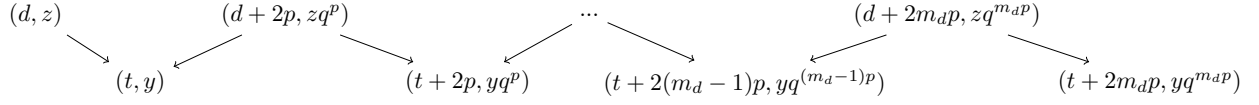
$$(t, y^{-1}) \longrightarrow (d + 2p, z^{-1}q^p) \longrightarrow (t + 2p, y^{-1}q^p) \longrightarrow \dots$$

**Fig. 4.3.** Diagramme de Loewy du module  $V_N^t(q^{-1}, x^{-1})$  dans les conditions considérées.

La démonstration du théorème suivant est faite par induction sur le nombre  $n_d(q, v)$  de facteurs de composition du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$ . Dans cette preuve, on se permet, à chaque étape de l'induction, de faire varier les paramètres  $d, q$  et  $v$  tant que ceux-ci satisfont aux conditions considérées dans l'énoncé du théorème et dans la sous-section<sup>1</sup>.

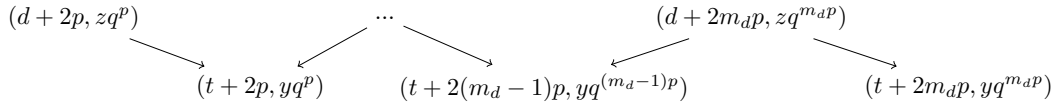
<sup>1</sup>Notons que  $\beta = -(q + q^{-1})$  est considéré comme fixé d'où il n'existe que deux choix pour le paramètre  $q$ .

**Théorème 4.2.** Notons  $m_d = \max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid d + 2\ell p \leq N\}$ . Alors, si  $q^d = v^{-2N}$  et  $v^{4N} \neq 1$ , la structure du  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  est donnée dans la figure 4.4 avec la notation des pages précédentes et où la paire  $(t + 2m_d p, yq^{m_d p})$  apparaît seulement si  $t + 2m_d p \leq N$ .



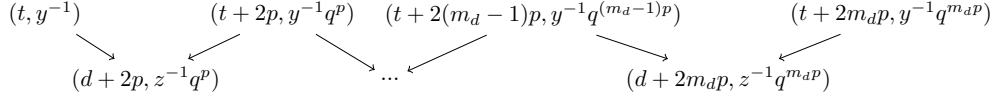
**Fig. 4.4.** Structure de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  lorsque  $q^d = v^{-2N}$  et  $v^{4N} \neq 1$ .

**DÉMONSTRATION.** Procédons par induction sur le nombre  $n_d(q, v)$  de facteurs de composition du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$ . Remarquons que les cas  $n_d(q, v) = 1$  et  $n_d(q, v) = 2$  sont déjà traités dans la proposition 2.13 (puisque alors  $m_d = 0$  selon la figure 4.2) d'où on peut supposer  $n_d(q, v) \geq 3$  (de sorte que  $m_d \geq 1$  selon cette même figure). Soit  $w \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $w^{-N} = zq^p$  et considérons l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$ . Notons que les relations  $q^{d+2p} = q^d = v^{-2N} = w^{-2N}$  ainsi que  $w^{4N} = v^{4N} \neq 1$  sont respectées et que, en vertu de la figure 4.2, le module cellulaire  $V_N^{d+2p}(q, w)$  a  $n_{d+2p}(q, w) = n_d(q, v) - 2$  facteurs de composition (avec  $m_{d+2p} = m_d - 1$ ). L'hypothèse d'induction permet par conséquent de conclure que la structure de  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  est donnée par le diagramme de Loewy de la figure 4.5 ci-dessous (avec la paire  $(t + 2m_d p, yq^{m_d p})$  présente seulement lorsque  $t + 2m_d p \leq N$ ). En outre, en vertu de la proposition 3.45 et de la discussion présentée à la fin du chapitre 3 (avec  $q \leftrightarrow q^{-1}$ ), il existe une projection  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire  $g_{d, d+2p}(q, w) : \mathbb{C}_N(q, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  d'où ce diagramme peut aussi être associé à un quotient  $Q$  de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ .

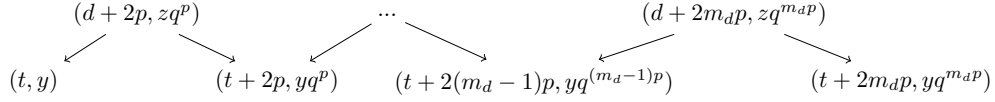


**Fig. 4.5.** Structure de  $\mathbb{C}_N(q, w, d + 2p)$  dans les conditions considérées.

Soit  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $x^{-N} = y$  et remarquons que l'analyse effectuée au début de cette sous-section donne  $t = -d + 2(\ell - 1)p$  et  $y = z^{-1}q^{(\ell+1)p}$  pour un certain  $\ell \in \mathbb{N}$ . De ce fait, on obtient  $q^{-t} = q^{d-2(\ell-1)p} = q^d = v^{-2N} = z^2 = x^{2N}$  d'où la proposition 3.45 et la discussion la précédant donnent une injection  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire  $g_{-t, d}(q, v) : \mathbb{C}_N(q, x^{-1}, -t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Ainsi, selon les propositions 2.1 et 2.5, le dual  $\mathbb{C}_N^*(q^{-1}, x^{-1}, t) \simeq \mathbb{C}_N(q^{-1}, x, t) \simeq \mathbb{C}_N(q, x^{-1}, -t)$  est isomorphe à un sous-module  $M$  de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Par ailleurs,  $(q^{-1})^t = q^{-t} = (x^{-1})^{-2N}$  avec  $(x^{-1})^{4N} = v^{4N} \neq 1$  de sorte que, puisque le module cellulaire  $V_N^t(q^{-1}, x^{-1})$  admet  $n_t(q^{-1}, x^{-1}) = n_d(q, v) - 1$  facteurs de composition (voir la figure 4.3), l'hypothèse d'induction indique que la structure de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, x^{-1}, t)$  correspond à celle donnée dans la figure 4.6 (avec la paire  $(t + 2m_d p, y^{-1}q^{m_d p})$  présente seulement lorsque  $t + 2m_d p \leq N$ ). Le corollaire 2.4 et la proposition 2.6 permettent alors de conclure que la structure du sous-module  $M \subseteq \mathbb{C}_N(q, v, d)$  avec  $M \simeq \mathbb{C}_N^*(q^{-1}, x^{-1}, t)$  correspond à celle présentée dans la figure 4.7 (avec à nouveau la paire  $(t + 2m_d p, yq^{m_d p})$  présente seulement lorsque  $t + 2m_d p \leq N$ ).



**Fig. 4.6.** Structure de  $\mathbb{C}_N(q^{-1}, x^{-1}, t)$  dans les conditions considérées.



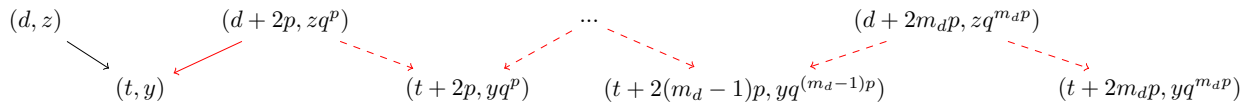
**Fig. 4.7.** Structure de  $M \simeq \mathbb{C}_N^*(q^{-1}, x^{-1}, t)$  dans les conditions considérées.

De plus, en vertu du corollaire 2.12, la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v)$  correspond à un sous-quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  de sorte que, selon la figure 4.2, la flèche représentée dans la figure 4.8 doit aussi être présente dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ .

$$(d, z) \longrightarrow (t, y)$$

**Fig. 4.8.** Structure de  $\text{PG}_N^d(q, v)$  dans les conditions considérées.

En particulier, le travail accompli jusqu'ici permet de déduire que les  $n_d(q, v)$  facteurs de composition du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$  (voir la figure 4.8) doivent tous être présents dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . Dans ce cas, puisque  $\dim V_N^d(q, v) = \dim \mathbb{C}_N(q, v, d)$ , ces facteurs doivent correspondre à l'ensemble des facteurs de composition de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et le diagramme de Loewy de cet espace propre doit correspondre à celui de la figure 4.4 avec possiblement des flèches manquantes. Ce diagramme est reproduit dans la figure 4.9 avec le sous-module  $M$  représenté à l'aide de flèches rouges et avec le quotient  $Q$  (isomorphe à  $\mathbb{C}_N(q, w, d+2p)$ ) identifié à l'aide de flèches pointillées. La paire  $(t+2m_dp, yq^{m_dp})$  doit être retirée du diagramme si  $t+2m_dp > N$ .



**Fig. 4.9.** Diagramme de Loewy partiel pour  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  dans les conditions considérées.

Supposons qu'une flèche du diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  ait été oubliée dans le diagramme de la figure 4.9. Remarquons que, puisque  $M$  est un sous-module de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ , cette flèche manquante ne peut avoir pour origine un facteur de composition présent dans la figure 4.7 (voir la fin de la section 1.3.1) et a donc pour point de départ le facteur  $L_{N,d;z}$ . Dans cette situation, pour que cette flèche soit effectivement absente de la figure 4.9, elle doit aboutir ailleurs que sur le facteur  $L_{N,t;y}$  et doit ainsi avoir pour point d'arrivée un facteur de composition du quotient  $Q \simeq \mathbb{C}_N(q, w, d+2p)$  (voir la figure 4.5). Cependant, ceci contredit le fait que le module  $Q$  est un quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et on doit donc se résoudre à conclure que le diagramme de la figure 4.9 correspond au diagramme de Loewy (complet) de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (avec la paire  $(t+2m_dp, yq^{m_dp})$  présente seulement lorsque  $t+2m_dp \leq N$ ).  $\square$

### 4.1.3. Second cas linéaire

Supposons désormais  $q^d = v^{2N}$  avec  $v^{4N} \neq 1$  et étudions à nouveau la structure du module cellulaire  $V_N^d(q, v)$ . Notons que, avec  $s = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid r > d, r \equiv_2 d \text{ et } q^r = v^{-2N}\}$ , on a  $q^{-d} = v^{-2N} = q^s$  de sorte que  $s+d \in 2p\mathbb{Z}$  puisque  $q^2$  est une  $p$ -ième racine primitive de l'unité et que  $s \equiv_2 -d$ . Ainsi, la définition de  $s$  force  $s = -d + 2\ell p$  avec  $\ell = \min\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid d < \ell p\}$ . De plus, encore avec la notation de la figure 1.16, on a  $\delta_i = 2(\ell + 1)p = \delta_h$  et, pour  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $z = v^{-N}$  et  $k = \frac{1}{2}(s - d) = -d + \ell p$ ,

$$(h_a, \nu_a) = (-d + \delta_h + 2ap, z^{-1}q^{ap+\delta_h/2}) = (s + 2(a+1)p, zq^{d+\ell p}q^{(a+1)p}) = (j_{a+1}, y_{a+1}) \text{ et}$$

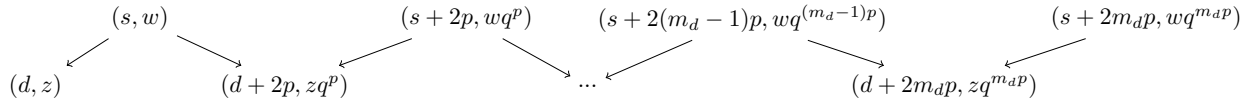
$$(i_a, x_a) = (-s + \delta_i + 2ap, z^{-1}q^{ap+k+\delta_i/2}) = (d + 2(a+1)p, z^{-1}q^{-d}q^{(a+2\ell+1)p}) = (k_{a+1}, u_{a+1}).$$

Le diagramme d'organisation des successeurs de  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  (ou, de façon équivalente, le Loewy de  $V_N^d(q, v)$ ) prend donc la forme donnée dans la figure 4.10 avec  $(s, w) = (j_0, y_0)$ .

$$(d, z) \longrightarrow (s, w) \longrightarrow (d + 2p, zq^p) \longrightarrow (s + 2p, wq^p) \longrightarrow \dots$$

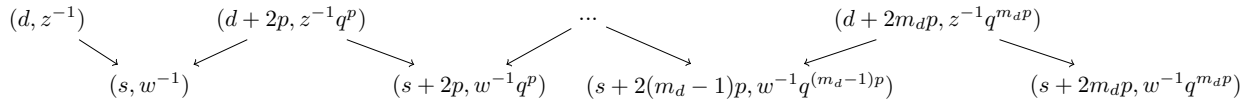
**Fig. 4.10.** Structure de  $V_N^d(q, v)$  si  $q^d = v^{2N}$  et  $v^{4N} \neq 1$  avec  $(s, w) = (j_0, y_0)$ .

**Théorème 4.3.** Notons  $m_d = \max\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid d + 2\ell p \leq N\}$  et supposons  $q^d = v^{2N}$  ainsi que  $v^{4N} \neq 1$ . Alors, la structure du  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  est donnée par le diagramme présenté dans la figure 4.11 avec  $(s + 2m_d p, wq^{m_d p})$  apparaissant seulement si  $s + 2m_d p \leq N$ .



**Fig. 4.11.** Structure de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  lorsque  $q^d = v^{2N}$  et  $v^{4N} \neq 1$ .

**DÉMONSTRATION.** Notons d'abord que, puisque  $(d, z) \preceq_q (s, w)$  directement via la condition A de la définition 1.13, le corollaire 1.14 donne  $(d, z^{-1}) \preceq_q (s, w^{-1})$  directement via la condition B de cette même définition. Ainsi, le théorème 4.2 stipule que la structure du  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$  correspond à celle présentée dans la figure 4.12 ci-dessous (avec la paire  $(s + 2m_d p, w^{-1}q^{m_d p})$  présente seulement lorsque  $s + 2m_d p \leq N$ ).



**Fig. 4.12.** Structure de  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d)$  dans les conditions considérées.

Alors, puisque  $\mathbb{C}_N(q, v^{-1}, d) \simeq \mathbb{C}_N^*(q, v, d)$  (voir la proposition 2.5), on peut utiliser le corollaire 2.4 et de la proposition 2.6 pour conclure que le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  correspond effectivement à celui donné dans la figure 4.11 (avec la paire  $(s + 2m_d p, w^{-1}q^{m_d p})$  présente seulement si  $s + 2m_d p \leq N$ ).  $\square$

## 4.2. Cas tressé

On finit enfin la caractérisation de la structure des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  en s'intéressant aux cas pour lesquels la relation  $v_z^{-2N} \neq q^d \neq v_z^{2N}$  est vérifiée. La structure obtenue dans ces circonstances est similaire à celle présentée dans la figure 1.14 pour les  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs tressés et les résultats principaux utilisés pour révéler cette structure sont les propositions, théorèmes et corollaires 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.12, 2.13, 3.43 et 3.44. On donne aussi dans cette section l'image du morphisme  $i_N^d(q, v_z)$  du chapitre 2 et celle des applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires de la section 3.3. Notons d'ailleurs que les résultats obtenus dans les pages suivantes sont également valides lorsque  $(d, z)$  correspond à la paire problématique  $(0, q)$  avec  $q^2 = -1$  et  $N \in 2\mathbb{N}$  (voir la discussion précédant la proposition 1.20).

### 4.2.1. Démonstration du résultat

Dans le lemme suivant, on s'intéresse aux conditions pour lesquelles il y a coïncidence de paires au sein de la figure 1.16 et on utilise donc de façon essentielle la notation introduite dans cette figure. Cette notation sera en fait utilisée tout au long de la section d'où on pose en particulier  $z = v_z^{-N}$ ,  $s = \min\{r \in \mathbb{Z} \mid r > d, r \equiv_2 d \text{ et } q^r = v_z^{-2N}\}$  ainsi que  $k = \frac{1}{2}(s - d)$ .

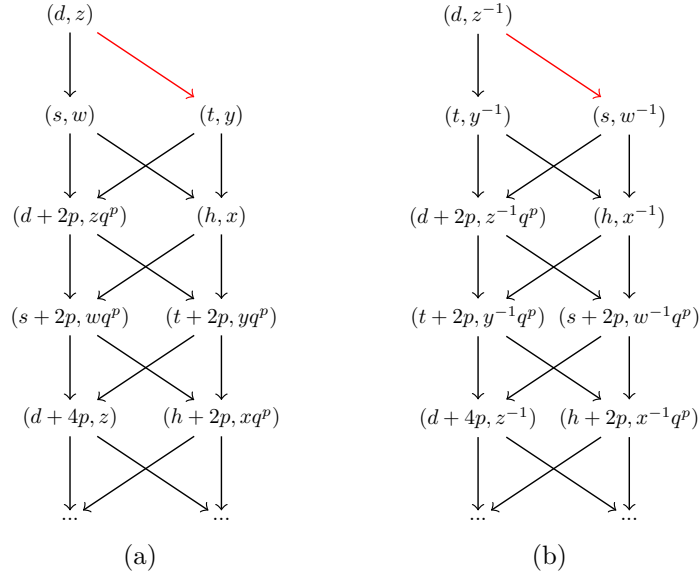
**Lemme 4.4.** Il y a coïncidence de paires dans la figure 1.16 si et seulement si  $q^d = v_z^{\pm 2N}$ .

DÉMONSTRATION. La suffisance suit de l'analyse effectuée au début des sections 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3. Pour la nécessité, notons que la forme des paires apparaissant dans la figure 1.16 permet de conclure que les seules coïncidences de paires possibles sont, pour  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

1.  $(j_a, y_a) = (i_a, x_a)$ ;
2.  $(h_a, \nu_a) = (k_{a+1}, u_{a+1})$ ;
3.  $(j_a, y_a) = (k_{a+1}, u_{a+1})$ ;
4.  $(h_a, \nu_a) = (i_{a+1}, x_{a+1})$ ;
5.  $(i_a, x_a) = (k_{a+1}, u_{a+1})$ ;
6.  $(h_a, \nu_a) = (j_{a+1}, y_{a+1})$ .

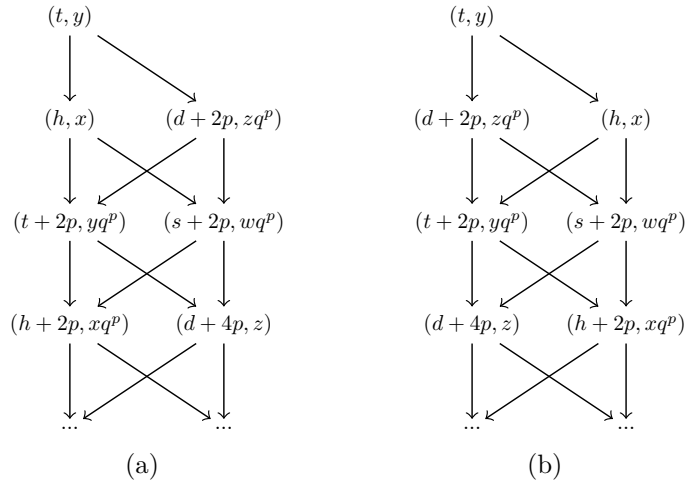
Dans les cas 3 et 4, la définition des paires apparaissant dans la figure 1.16 permet d'obtenir aisément  $s \equiv_{2p} d$  de sorte qu'on obtient  $q^d = q^s = v_z^{-2N}$ . De même, dans les cas 5 et 6, on a  $s \equiv_{2p} -d$  et  $q^d = q^{-s} = v_z^{2N}$  d'où seuls les cas 1 et 2 ne découlent pas directement de la forme de la figure 1.16. Pour le cas 1, remarquons que la coïncidence en question force  $2s = \delta_i$  et  $q^s = z^2 = q^{2k+\delta_i/2} = q^{2k+s}$ . Ainsi,  $q^{2k} = 1$  et  $q^d = q^{s-2k} = q^s = v_z^{-2N}$ . Enfin, pour le cas 2, notons que la définition des paires impliquées donne  $2d = \delta_h - 2p$  et  $v_z^{-2N} = z^2 = q^{\delta_h/2-p} = q^d$  comme voulu. Ceci achève cette démonstration.  $\square$

Supposons  $v_z^{-2N} \neq q^d \neq v_z^{2N}$  et posons, avec la notation de la figure 1.16,  $(s, w) = (j_0, y_0)$ ,  $(t, y) = (i_0, x_0)$  et  $(h_0, \nu_0) = (h, x)$ . Alors, le lemme 4.4 indique que le diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v_z)$  correspond au diagramme de la figure 4.13 (a) où il n'y a aucune coïncidence de paires et où on doit retirer les facteurs n'appartenant pas à l'ensemble  $\Lambda^a(N)$ . Dans cette figure, on utilise aussi le corollaire 1.14 pour donner la structure du module  $V_N^d(q, v_z^{-1})$  et on relie les facteurs des parties génériques  $\mathrm{PG}_N^d(q, v_z)$  et  $\mathrm{PG}_N^d(q, v_z^{-1})$  à l'aide de traits rouges.



**Fig. 4.13.** (a) Diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v_z)$ ; (b) Diagramme de Loewy de  $V_N^d(q, v_z^{-1})$ . Dans cette figure, il n'y a aucune coïncidence de paires et on doit retirer les facteurs hors de  $\Lambda^a(N)$ . On identifie aussi les quotients  $\text{PG}_N^d(q, v_z)$  et  $\text{PG}_N^d(q, v_z^{-1})$  à l'aide de flèches rouges.

Remarquons que, dans les circonstances considérées dans cette section, la discussion de la fin du chapitre 3 donne des applications  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $f_{t,d}(q, v_y) : \mathbb{C}_N(q, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ ,  $f_{d+2p,t}(q, v_y) : \mathbb{C}_N(q, v_z, d+2p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$ ,  $f_{h,t}(q^{-1}, v_y) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_x, h) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t)$  et  $g_{-t,d}(q, v_z) : \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  pour certains  $v_y, v_z, v_x \in \mathbb{C}$  tels que  $v_y^{-N} = y$ ,  $v_z^{-N} = zq^p$  et  $v_x^{-N} = x$ . Ces morphismes, avec les structures des modules  $V_N^t(q, v_y)$  et  $V_N^t(q^{-1}, v_y)$  obtenues de la figure 4.13 via les inclusions de la section 1.3.2 et le corollaire 1.14, seront utilisés dans la preuve du théorème principal de cette section (le théorème 4.6).



**Fig. 4.14.** (a) Diagramme de Loewy de  $V_N^t(q, v_y)$ ; (b) Diagramme de Loewy de  $V_N^t(q^{-1}, v_y)$ . Il n'y a aucune coïncidence de paires et on doit retirer les facteurs hors de  $\Lambda^a(N)$ .



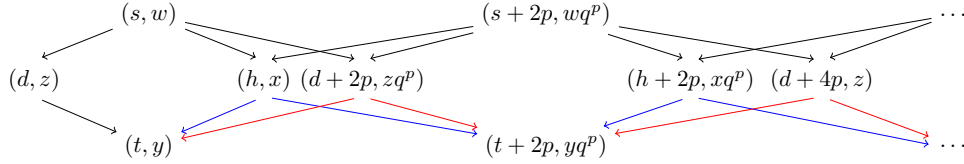
Dans cette preuve, on utilisera aussi le lemme suivant qui caractérise partiellement les groupes d'extension de  $\text{mod TL}_N^a(\beta)$ . Ce lemme découle de certains résultats de [7] et on traite sa démonstration dans l'annexe E. Notons cependant dès maintenant que le lemme 4.5 montre que la figure 4.15 ne peut servir à représenter un diagramme de Loewy dans  $\text{mod TL}_N^a(\beta)$ .

$$(d_1, z_1) \longrightarrow (d_2, z_2)$$

**Fig. 4.15.** Diagramme de Loewy impossible dans  $\text{mod TL}_N^a(\beta)$ .

**Lemme 4.5.** Considérons  $(d_1, z_1), (d_2, z_2) \in \Lambda^a(N)$  avec  $q^{d_1} \neq z_1^{\pm 2}$  et  $|d_1 - d_2| > 2p$ . Alors, le groupe d'extension  $\text{Ext}_{\text{TL}_N^a(\beta)}^1(L_{N,d_1;z_1}, L_{N,d_2;z_2})$  est nul.

**Théorème 4.6.** Lorsque  $v_z^{-2N} \neq q^d \neq v_z^{2N}$ , le  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  admet la structure donnée dans la figure 4.16 au sein de laquelle les paires hors de  $\Lambda^a(N)$  doivent être retirées et où les facteurs de composition des sous-modules  $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z)$  et  $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z)$  de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  sont respectivement reliés par des traits bleus et rouges.



**Fig. 4.16.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  pour  $v_z^{-2N} \neq q^d \neq v_z^{2N}$  et avec la notation du début de la sous-section. Dans cette figure, les paires hors de  $\Lambda^a(N)$  doivent être ôtées et  $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z)$  ainsi que  $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z)$  sont respectivement identifiés en bleu et en rouge.

**DÉMONSTRATION.** Procédons par induction sur le nombre  $n_d(q, v_z)$  de facteurs de composition de  $V_N^d(q, v_z)$  et supposons en premier lieu  $n_d(q, v_z) \leq 3$ . Dans ce cas, la partie (a) de la figure 4.13 donne  $\min(h, d+2p) > N$  d'où la proposition 2.13 montre que le diagramme obtenu à partir de la figure 4.16 en retirant les paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$  correspond effectivement au diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . De plus, les inégalités  $d+2p > N$  ainsi que  $h > N$  impliquent que les morphismes  $f_{d+2p,t}(q, v_y) : \mathbb{C}_N(q, v_z, d+2p) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  et  $f_{h,t}(q^{-1}, v_y) : \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_x, h) \rightarrow \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t)$  doivent être nuls. Alors, selon les propositions 3.43 et 3.44, les applications  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires  $f_{t,d}(q, v_z) : \mathbb{C}_N(q, v_y, t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  et  $g_{-t,d}(q, v_z) : \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  sont injectives<sup>2</sup>. En outre, lorsque  $t > N$ , on a  $\mathbb{C}_N(q, v_y, t) \simeq 0 \simeq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$  et, lorsque  $t \leq N$ , selon les propositions 2.1 et 2.13,

$$\mathbb{C}_N(q, v_y, t) \simeq L_{N,t;y} \simeq \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$$

de sorte que, tel qu'annoncé dans la figure 4.16,

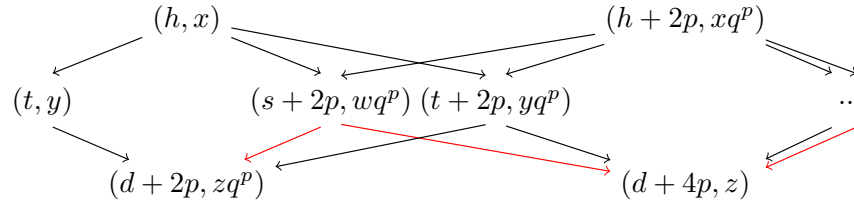
$$\text{Im } f_{t,d}(q, v_z) = \text{Im } g_{-t,d}(q, v_z) = \begin{cases} L_{N,t;y} & \text{si } t \leq N; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Dans cette preuve, on utilisera plusieurs fois la bijectivité du retournement  $\eta_N(q^{-1}, v_y)$  de la section 2.2. On utilise notamment ce fait pour conclure l'injectivité de  $g_{-t,d}(q, v_z)$  à partir de la proposition 3.44.

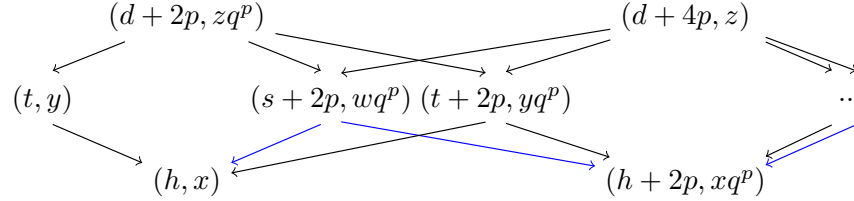
Supposons désormais  $n_d(q, v_z) \geq 4$ . Alors, l'hypothèse d'induction et la figure 4.14 montrent que les structures des espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t) \simeq \mathbb{C}_N(q^{-1}, v_y, t)$  avec les images  $\text{Im } f_{d+2p,t}(q, v_y) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  et  $\text{Im} [\eta_N(q^{-1}, v_y) \circ f_{h,t}(q^{-1}, v_y)] \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$  correspondent à celles données dans les figures 4.17 et 4.18 où on doit retirer les facteurs hors de  $\Lambda^a(N)$ . Or, selon les propositions 3.43 et 3.44,

$$\text{Im } f_{t,d}(q, v_z) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_y, t) / \text{Ker } f_{t,d}(q, v_z) = \mathbb{C}_N(q, v_y, t) / \text{Im } f_{d+2p,t}(q, v_y)$$

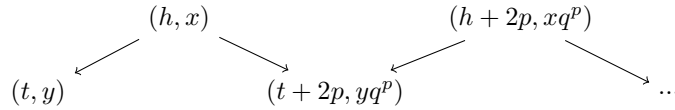
et, de la même façon,  $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t) / \text{Im} [\eta_N(q^{-1}, v_y) \circ f_{h,t}(q^{-1}, v_y)]$ . Les structures de ces sous-modules de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  sont ainsi entièrement déterminées par les diagrammes de Loewy donnés dans les figures 4.19 et 4.20.



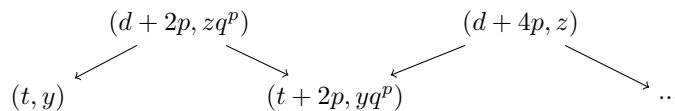
**Fig. 4.17.** Diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  avec  $\text{Im } f_{d+2p,t}(q, v_y) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y, t)$  identifié en rouge et où on doit retirer les paires hors de  $\Lambda^a(N)$ .



**Fig. 4.18.** Structure de  $\mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$  avec  $\text{Im} [\eta_N(q^{-1}, v_y) \circ f_{h,t}(q^{-1}, v_y)] \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_y^{-1}, -t)$  identifié en bleu et où on doit retirer les paires hors de  $\Lambda^a(N)$ .



**Fig. 4.19.** Diagramme de Loewy (complet) pour l'image  $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  dans lequel on retire les paires n'appartenant pas à l'ensemble  $\Lambda^a(N)$ .



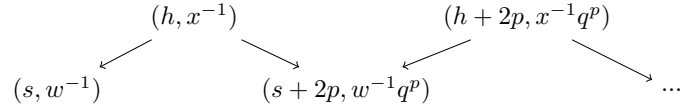
**Fig. 4.20.** Diagramme de Loewy (complet) pour l'image  $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z) \subseteq \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  dans lequel on retire les paires n'appartenant pas à l'ensemble  $\Lambda^a(N)$ .

Les structures obtenues pour les images  $\text{Im } f_{t,d}(q, v_z)$  et  $\text{Im } g_{-t,d}(q, v_z)$  de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  correspondent à celles données dans la figure 4.16. Par ailleurs, le corollaire 2.12 montre que la flèche de la figure 4.21 ci-dessous doit apparaître dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ .

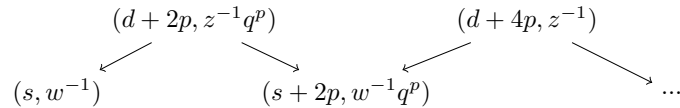
$$(d, z) \longrightarrow (t, y)$$

**Fig. 4.21.** Structure de la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v_z)$  dans les conditions considérées.

En répétant tout le travail effectué dans cette démonstration pour l'étude du module dual  $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$  (voir la proposition 2.5), on peut aisément démontrer à l'aide de la figure 4.13 que  $\mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$  doit admettre des sous-modules ayant comme diagrammes de Loewy les diagrammes donnés dans les figures 4.22 et 4.23. Remarquons également que le corollaire 2.12 permet de conclure que le diagramme de Loewy de ce module dual  $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d)$  doit contenir la flèche donnée dans la figure 4.24.



**Fig. 4.22.** Diagramme de Loewy (complet) d'un premier sous-module du module dual  $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$  dans lequel on doit retirer les paires hors de  $\Lambda^a(N)$ .

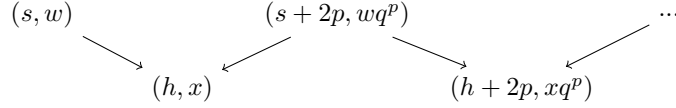


**Fig. 4.23.** Diagramme de Loewy (complet) d'un second sous-module du module dual  $\mathbb{C}_N^*(q, v_z, d) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d)$  dans lequel on doit retirer les paires hors de  $\Lambda^a(N)$ .

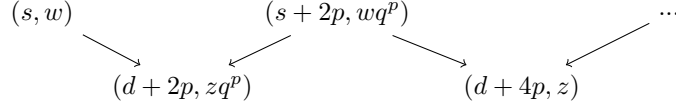
$$(d, z^{-1}) \longrightarrow (s, w^{-1})$$

**Fig. 4.24.** Structure de la partie générique  $\text{PG}_N^d(q, v_z^{-1})$  dans les conditions considérées.

Par conséquent, selon le corollaire 2.4 et la proposition 2.6, le module  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  doit admettre des quotients possédant la structure donnée dans les figures 4.25 et 4.26 en plus de contenir, dans son diagramme de Loewy, la flèche représentée dans la figure 4.27. En particulier, le travail effectué jusqu'ici permet de conclure que les  $n_d(q, v_z)$  facteurs de composition du module cellulaire  $V_N^d(q, v_z)$  sont aussi présents dans le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . Ainsi, puisque  $\dim \mathbb{C}_N(q, v_z, d) = \dim V_N^d(q, v_z)$ , tous les facteurs de composition de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  ont déjà été trouvés et il s'ensuit que le diagramme de la figure 4.16 doit correspondre au diagramme de Loewy de cet espace propre avec possiblement des flèches manquantes (et où on doit retirer les paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ ). Ce diagramme de Loewy possiblement incomplet est reproduit dans la figure 4.28.



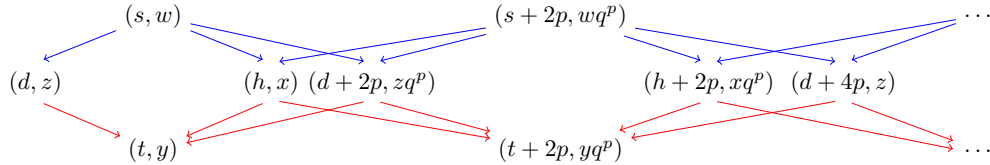
**Fig. 4.25.** Diagramme de Loewy (complet) d'un premier quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . Dans cette figure, on doit retirer les paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ .



**Fig. 4.26.** Diagramme de Loewy (complet) d'un second quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . Dans cette figure, on doit retirer les paires n'appartenant pas à  $\Lambda^a(N)$ .

$$(s, w) \longrightarrow (d, z)$$

**Fig. 4.27.** Une flèche du diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ .



**Fig. 4.28.** Diagramme de Loewy de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  avec possiblement des flèches manquantes et où on doit retirer les paires hors de  $\Lambda^a(N)$ . Les traits rouges et bleus servent respectivement à identifier un sous-module et un quotient de cet espace propre.

La figure 4.28 montre que  $\text{PG}_N^d(q, v_z)$  est isomorphe à l'image du morphisme  $i_N^d(q, v_z)$  de la section 2.4. En effet, dans le cas contraire, selon le corollaire 2.12 et la figure 4.13, le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  devrait contenir une flèche allant de  $(d, z)$  à  $(s, w)$  d'où on contredirait l'existence de la flèche allant dans le sens opposé au sein de la figure 4.28. En particulier, ce résultat sur  $\text{Im } i_N^d(q, v)$  et les remarques précédentes démontrent que les flèches rouges de la figure 4.28 correspondent au diagramme de Loewy (complet) d'un sous-module de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . De même, en considérant plutôt le dual  $\mathbb{C}_N(q, v_z^{-1}, d) \simeq \mathbb{C}_N^*(q, v_z, d)$  et le diagramme obtenu de la figure 4.28 via la dualité  $*$  (voir le corollaire 2.4 et la proposition 2.6), on conclut aisément que les traits bleus de cette figure doivent correspondre au diagramme de Loewy (complet) d'un quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ . On connaît donc déjà toutes les flèches du diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  ayant pour origine (ou point d'arrivée) un facteur touché par un trait rouge (ou bleu, respectivement) dans la figure 4.28.

Supposons qu'une flèche du diagramme de Loewy de l'espace  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  ait été oubliée dans la figure 4.28. Alors, cette flèche ne peut avoir pour origine (ou point d'arrivée) un facteur touché par un trait rouge (ou bleu, respectivement) dans cette figure. Ainsi, la flèche en

question doit partir d'un facteur de la forme  $(s + 2mp, wq^{mp})$  et aboutir en  $(t + 2np, yq^{np})$  pour certains  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Remarquons aussi qu'on doit avoir  $|m - n| \geq 2$  afin que le chemin décrit par cette flèche ne soit pas déjà présent dans la figure 4.28. Ainsi, si  $m \geq n$ , on a

$$s + 2mp - (t + 2np) = s - t + 2(m - n)p \geq s - t + 4p > 2p$$

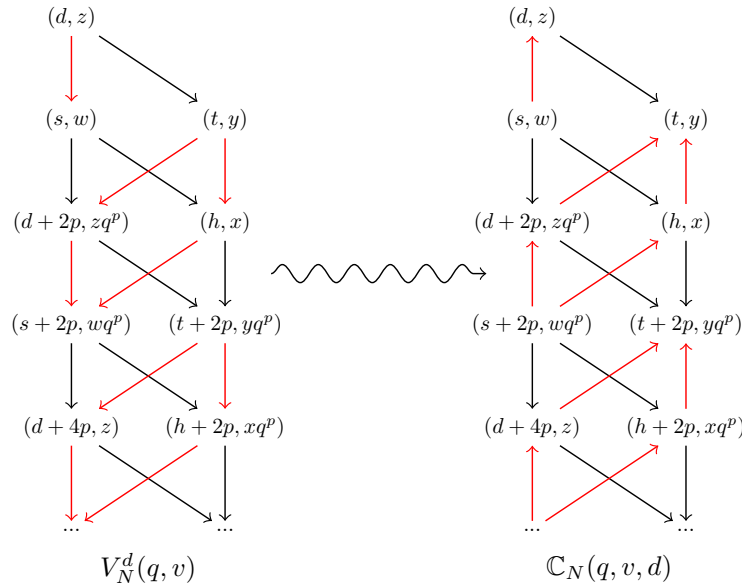
car  $m - n = |m - n| \geq 2$  et  $s + 2p > d + 2p \geq t$ . De la même manière, si  $n \geq m$ , on obtient

$$s + 2mp - (t + 2np) = s - t + 2(m - n)p \leq s - t - 4p < -2p$$

car  $n - m = |m - n| \geq 2$  et  $t + 2p > d + 2p \geq s$ . Par conséquent, on doit nécessairement avoir  $|s + 2mp - (t + 2np)| > 2p$  d'où l'existence d'une *flèche manquante* comme celle introduite ci-haut contredit<sup>3</sup> le lemme 4.5. Il s'ensuit que le diagramme de la figure 4.28 équivaut au diagramme de Loewy (complet) de l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$ .  $\square$

## 4.2.2. Corollaires directs

On donne désormais deux conséquences des théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.6. La première stipule que les diagrammes de Loewy des modules  $V_N^d(q, v_z)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  sont toujours identiques à un retournement de certaines flèches près. Cette procédure est illustrée dans la figure 4.29 ci-dessous dans les cas pour lesquels la relation  $v_z^{2N} \neq q^d \neq v_z^{-2N}$  est vérifiée.



**Fig. 4.29.** Comparaison entre les diagrammes de Loewy du module  $V_N^d(q, v_z)$  et de l'espace  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  lorsque  $v_z^{2N} \neq q^d \neq v_z^{-2N}$ . Dans cette figure, on utilise la notation de la section 4.2.1 et il est nécessaire de retirer des diagrammes les paires hors de l'ensemble  $\Lambda^a(N)$ . Les flèches changeant d'orientation d'un diagramme à l'autre sont identifiées en rouge.

<sup>3</sup>En effet, lorsque le diagramme de Loewy d'un module  $M$  contient une flèche partant d'un facteur de composition  $L_1$  et aboutissant en un facteur  $L_2$ , il doit exister un sous-quotient indécomposable  $Q$  de  $M$  pour lequel le diagramme de Loewy correspond exclusivement à cette flèche (voir la section 1.3.1).

**Corollaire 4.7.** Soient  $q, v_z \in \mathbb{C}$  non nuls et  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $d \leq N$  ainsi que  $d \equiv_2 N$ . Alors, les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  et  $V_N^d(q, v_z)$  ont les mêmes facteurs de composition.

DÉMONSTRATION. Cela découle directement des figures 4.1, 4.2, 4.4, 4.10, 4.11 4.13 et 4.16 ainsi que du théorème 4.1. En effet, les seuls cas n'ayant pas été étudié dans ce chapitre surviennent lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité ou lorsque la paire  $(d, v_z^{-N})$  n'admet pas de successeur sous  $\preceq_q$  (voir la proposition 1.15). Dans ces situations, le diagramme de Loewy des modules  $V_N^d(q, v_z)$  et  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  contiennent au plus deux facteurs de composition et sont décrits implicitement dans la discussion suivant la proposition 2.13. On vérifie aisément que les résultats obtenus dans cette discussion concordent avec l'énoncé du corollaire.  $\square$

Le dernier résultat de ce chapitre concerne l'image du morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v_z)$  de la section 2.4. Sa démonstration repose sur la même astuce que celle qui a été utilisée à la fin de la preuve du théorème 4.6.

**Corollaire 4.8.** Soient  $q, v_z \in \mathbb{C}$  non nuls et  $N, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $d \leq N$  ainsi que  $d \equiv_2 N$ . Alors, comme  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules, l'image  $\mathrm{Im} i_N^d(q, v_z)$  est isomorphe à la partie générique  $\mathrm{PG}_N^d(q, v_z)$ .

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire et désignons par  $(s, w)$  le successeur direct de la paire  $(d, z)$  sous  $\preceq_q$  via la condition A de la définition 1.13. Notons aussi que, lorsque  $(s, w) \notin \Lambda^a(N)$ , la définition de  $\mathrm{PG}_N^d(q, v_z)$ , le corollaire 2.12 et la figure 1.16 donnent  $\mathrm{Im} i_N^d(q, v_z) \simeq \mathrm{PG}_N^d(q, v_z) \simeq \mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  d'où on contredit notre hypothèse. Ainsi, on doit avoir  $(s, w) \in \Lambda^a(N)$  et, puisque  $\mathrm{Im} i_N^d(q, v_z) \not\simeq \mathrm{PG}_N^d(q, v_z)$ , on peut utiliser les mêmes résultats que précédemment pour conclure que le diagramme de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v_z, d)$  doit contenir une flèche allant de la paire  $(d, z)$  à la paire  $(s, w)$ . Or, ce dernier résultat contredit la proposition 2.13 et les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.6 (dépendamment des paramètres considérés) de sorte que l'on doit avoir  $\mathrm{Im} i_N^d(q, v_z) \simeq \mathrm{PG}_N^d(q, v_z)$  comme voulu.  $\square$

## Conclusion

---

Dans ce mémoire, on a étudié en détail les représentations des algèbres de Temperley-Lieb affines  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  des chaînes de spins XXZ périodiques. On a notamment démontré (voir les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.6 avec la proposition 2.13) que ces  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules possèdent toujours une structure similaire à celle des  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs (voir la figure 1.14) et que les différentes possibilités pour la structure d'un tel  $\mathfrak{Vir}$ -module (c-à-d. les cas semisimples, linéaires et tressés) sont toutes réalisées par un espace propre donné. Ce résultat s'inscrit donc dans l'étude des analogies entre les algèbres  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  et  $\mathfrak{Vir}$  dont il a été question dans l'introduction du mémoire. Pour le démontrer, il a fallu obtenir une nouvelle réalisation pour les couvertures projectives de  $\mathrm{mod} \mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$  (voir le corollaire 3.27) et caractériser l'image du morphisme d'entrelacement  $i_N^d(q, v)$  reliant les espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  aux modules cellulaires  $V_N^d(q, v)$ . Il a également été nécessaire d'utiliser une représentation naturelle de  $\mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$  sur les chaînes XXZ afin d'introduire et de caractériser une nouvelle famille d'applications  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires entre espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (voir le théorème 3.41 avec les propositions 3.43, 3.44 et 3.45). Ces applications sont définies à l'aide d'isomorphismes  $\mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$ -linéaires  $\vartheta_{q^{-1}}(v_y, v_z)$  et d'opérateurs  $(S^\pm)_{v_z, q^{-1}}^{(n)}$  reliés à la représentation de  $\mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$  considérée sur les chaînes XXZ.

Les résultats de ce mémoire ont permis de prouver les corollaires 4.7, 4.8 et E.5. Ces résultats pourraient aussi servir à caractériser entièrement les morphismes  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires entre espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$ . En effet, l'image  $\mathrm{Im} f$  d'un morphisme de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $f : \mathbb{C}_N(q, v, d) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, w, t)$  doit être à la fois isomorphe à un sous-module de  $\mathbb{C}_N(q, w, t)$  et à un quotient de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  (selon le premier théorème d'isomorphisme). L'existence d'un tel morphisme implique ainsi une certaine *compatibilité* entre les diagrammes de Loewy de  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  et  $\mathbb{C}_N(q, w, t)$  d'où les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.6 avec la proposition 2.13 pourraient servir à montrer que  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{TL}_N^a(\beta)}(\mathbb{C}_N(q, v, d), \mathbb{C}_N(q, w, t)) = 0$  dans un grand nombre de cas. La question ci-dessous semble alors tout à fait naturelle.

**Question.** Les morphismes  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -linéaires non nuls entre espaces propres  $\mathbb{C}_N(q, v, d)$  peuvent-ils tous être obtenus de manière analogue à ceux de la section 3.3.2 à partir de la représentation de  $\mathcal{LU}_q \mathfrak{sl}_2$  sur les chaînes XXZ?

Une réponse positive à cette question correspondraient à un résultat mathématiquement très important puisqu'une telle découverte pourrait servir à étendre la dualité de Schur-Weyl quantique (entre le groupe quantique  $U_q\mathfrak{sl}_2$  et l'algèbre de Temperley-Lieb régulière  $TL_N(\beta)$ , voir [25] et [42]) à  $\mathcal{L}U_q\mathfrak{sl}_2$  et  $TL_N^a(\beta)$  sur certaines chaînes XXZ.



# Références bibliographiques

---

- [1] HH ANDERSEN et D TUBBENHAUER : Diagram categories for  $U_q$ -tilting modules at roots of unity. *Transformation Groups*, 22(1):29–89, 2017.
- [2] I ASSEM : *Algèbres et modules*. Masson, 1997.
- [3] B BAKALOV et AA KIRILLOV : *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21. American Mathematical Soc., 2001.
- [4] J BELLETÈTE, AM GAINUTDINOV, JL JACOBSEN, H SALEUR et TS TAVARES : Topological defects in lattice models and affine Temperley-Lieb algebra. *arXiv : 1310.8143*, 2018.
- [5] J BELLETÈTE, D RIDOUT et Y SAINT-AUBIN : Restriction and induction of indecomposable modules over the Temperley-Lieb algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51(4):045201, 2017.
- [6] J BELLETÈTE et Y SAINT-AUBIN : On the computation of fusion over the affine Temperley-Lieb algebra. *Nuclear Physics B*, 937:333–370, 2018.
- [7] J BELLETÈTE, AM GAINUTDINOV, JL JACOBSEN, H SALEUR et TS TAVARES : Topological defects in the affine Temperley-Lieb algebra: the critical cases. À paraître, 2020.
- [8] T BRZEZINSKI et R WISBAUER : *Corings and comodules*. Cambridge University Press, 2003.
- [9] PV BUSHLANOV, BL FEIGIN, AM GAINUTDINOV et IY TIPUNIN : Lusztig limit of quantum  $\mathfrak{sl}(2)$  at root of unity and fusion of  $(1, p)$ -Virasoro logarithmic minimal models. *Nuclear Physics B*, 818(3):179–195, 2009.
- [10] V CHARI et AN PRESSLEY : *A guide to quantum groups*. Cambridge university press, 1995.
- [11] C COHEN-TANNOUJJI, B DIU et F LALOË : *Mécanique quantique*. Hermann, EDP Sciences, 1998.
- [12] T CREUTZIG et D RIDOUT : Logarithmic conformal field theory: beyond an introduction. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(49):494006, 2013.
- [13] VG DRINFELD : Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Math. Dokl.*, 32, 1985.
- [14] K ERDMANN et RM GREEN : On representations of affine Temperley-Lieb algebras, II. *Pacific Journal of Mathematics*, 191(2):243–273, 1999.
- [15] CK FAN et RM GREEN : On the affine Temperley-Lieb algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(2):366–380, 1999.
- [16] P FRANCESCO, P MATHIEU et D SÉNÉCHAL : *Conformal field theory*. Springer, 2012.
- [17] AM GAINUTDINOV, JL JACOBSEN, H SALEUR et R VASSEUR : A physical approach to the classification of indecomposable Virasoro representations from the blob algebra. *Nuclear Physics B*, 873(3):614–681, 2013.
- [18] AM GAINUTDINOV, N READ et H SALEUR : Associative algebraic approach to logarithmic CFT in the bulk: The continuum limit of the  $\mathfrak{gl}(1|1)$  periodic spin chain, Howe duality and the interchiral algebra. *Communications in Mathematical Physics*, 341(1):35–103, 2016.

- [19] M GECK : Hecke algebras of finite type are cellular. *Inventiones mathematicae*, 169(3):501–517, 2007.
- [20] HW GOULD et J QUAINANCE : Tables of combinatorial identities i, 2010. [www.math.wvu.edu/~hgould](http://www.math.wvu.edu/~hgould).
- [21] JJ GRAHAM et GI LEHRER : Cellular algebras. *Invent. Math.*, 123:1–34, 1996.
- [22] JJ GRAHAM et GI LEHRER : The representation theory of affine Temperley-Lieb algebras. *L'Enseignement Mathématique*, 1997.
- [23] RM GREEN : On representations of affine Temperley-Lieb algebras. *CMS Conf. Proc.*, 24:245–261, 1998.
- [24] J GUILHOT et V MIEMIETZ : Affine cellularity of affine Hecke algebras of rank two. *arXiv:1011.2010*, 2010.
- [25] M JIMBO : A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation. *Yang-Baxter Equation In Integrable Systems*, 1990.
- [26] M KAKU : *Knot Theory and Quantum Groups*. Springer, 1991.
- [27] AW KNAPP : *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer, 2013.
- [28] S KOENIG et C XI : Affine cellular algebras. *Advances in Mathematics*, 229(1):139–182, 2012.
- [29] JM LEE : *Smooth manifolds*. Springer, 2013.
- [30] S LENTNER : The unrolled quantum group inside lusztig’s quantum group of divided powers. *Letters in Mathematical Physics*, 109(7):1665–1682, 2019.
- [31] G LUSZTIG : Quantum groups at roots of 1. *Geometriae Dedicata*, 35(1-3):89–113, 1990.
- [32] G LUSZTIG : *Introduction to quantum groups*. Springer, 2010.
- [33] JI MANIN : *Quantum groups and non-commutative geometry*. Springer, 1988.
- [34] BR MARTIN et G SHAW : *Particle physics*. John Wiley & Sons, 2017.
- [35] P MARTIN et H SALEUR : On an algebraic approach to higher dimensional statistical mechanics. *Communications in mathematical physics*, 158(1):155–190, 1993.
- [36] P MARTIN et H SALEUR : The blob algebra and the periodic Temperley-Lieb algebra. *Letters in mathematical physics*, 30(3):189–206, 1994.
- [37] A MORIN-DUCHESNE, A KLÜMPER et PA PEARCE : Conformal partition functions of critical percolation from  $D_3$  thermodynamic Bethe Ansatz equations. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(8):083101, 2017.
- [38] A MORIN-DUCHESNE, J RASMUSSEN et D RIDOUT : Boundary algebras and Kac modules for logarithmic minimal models. *Nuclear Physics B*, 899:677–769, 2015.
- [39] A MORIN-DUCHESNE et Y SAINT-AUBIN : A homomorphism between link and XXZ modules over the periodic Temperley-Lieb algebra. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(28), 2013.
- [40] A MORIN-DUCHESNE et Y SAINT-AUBIN : Jordan cells of periodic loop models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(49):494013, 2013.
- [41] V PASQUIER et H SALEUR : Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups. *Nuclear Physics B*, 330(2-3):523–556, 1990.
- [42] G PROVENCHER et Y SAINT-AUBIN : The idempotents of the  $TL_n$ -module  $\otimes^n \mathbb{C}^2$  in terms of elements of  $U_q \mathfrak{sl}_2$ . 15(11):2203–2240, 2014.
- [43] D RIDOUT et Y SAINT-AUBIN : Standard modules, induction and the structure of the Temperley-Lieb algebra. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 18(5):957–1041, 2014.
- [44] S SALAMON : *Riemannian geometry and holonomy groups*, volume 201. Longman Sc & Tech, 1989.
- [45] B STUM et A QUIRÓS : On quantum state of numbers. *arXiv : 1310.8143*, 2013.
- [46] C XI : Partition algebras are cellular. *Compositio Mathematica*, 119(1):99–109, 1999.

# Annexe A

---

## Le cas $q^2 = 1$

Dans cette annexe, pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , on désigne par  $L(n)$  l'unique représentation irréductible de dimension  $n$  de l'algèbre universelle enveloppante  $U\mathfrak{sl}_2$  (cf. [27]). Ce module admet une  $\mathbb{C}$ -base  $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  pour laquelle la  $U\mathfrak{sl}_2$ -action de l'ensemble générateur  $\{e, f, h\}$  est

$$ev_i = i(n - i + 1)v_{i-1}, \quad fv_i = v_{i+1}, \quad \text{et} \quad hv_i = (n - 2i)v_i$$

avec  $v_{-1} = v_n = 0$ . Fixons  $q = \pm 1$ . Écrivons aussi  $\Delta : U\mathfrak{sl}_2 \rightarrow U\mathfrak{sl}_2 \otimes U\mathfrak{sl}_2$  afin de désigner le morphisme d'algèbres défini sur  $\{e, f, h\}$  via (voir la remarque A.4)

$$\Delta(e) = e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e, \quad \Delta(f) = f \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes f \quad \text{et} \quad \Delta(h) = h \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h.$$

Notons respectivement  $v_+$  et  $v_-$  les vecteurs  $v_0$  et  $v_1$  de la base de  $L(1)$  donnée ci-haut et dénotons par  $v_{x_1 \dots x_N}$  le vecteur  $v_{x_1} \otimes \dots \otimes v_{x_N}$  (avec  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$ ) de la base de  $(L(1))^{\otimes N}$  induite de  $\{v_+, v_-\}$ . Sur le  $U\mathfrak{sl}_2$ -module  $(L(1))^{\otimes cN}$  (voir la section 3.1.2), le morphisme  $\Delta$  induit l'action donnée par

$$ev_{x_1 \dots x_N} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ x_j = -1}} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} v_{x_1 \dots x_{j-1}(+)x_{j+1} \dots x_N}, \quad fv_{x_1 \dots x_N} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ x_j = 1}} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} v_{x_1 \dots x_{j-1}(-)x_{j+1} \dots x_N}$$

et  $hv_{x_1 \dots x_N} = \left(\sum_{j=1}^N x_j\right) v_{x_1 \dots x_N}$ . Fixons  $v \in \mathbb{C}^\times$  et considérons  $\tau_q(v) : (L(1))^{\otimes cN} \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v)$  l'isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire défini via  $\tau_q(v)m_{x_1 \dots x_N} = \tau_{x_1 \dots x_N}(q, v) |x_1 \dots x_N\rangle_v$  où

$$\tau_{x_1 \dots x_N}(q, v) = v^{2\sum_{j=1}^r i_j} v^{-r(N+1)} q^{\frac{r}{2}(N-r)} \quad \text{avec} \quad \{i_j\}_{j=1}^r = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}.$$

On montre alors (voir la proposition 3.38) que l'action de  $U\mathfrak{sl}_2$  induite de  $\tau$  sur  $\mathbb{C}_N(q, v)$  est  $e|x_1 \dots x_N\rangle_v = S_{v,q}^+ |x_1 \dots x_N\rangle_v$ ,  $f|x_1 \dots x_N\rangle_v = S_{v,q}^- |x_1 \dots x_N\rangle_v$  et  $h|x_1 \dots x_N\rangle_v = 2S^z |x_1 \dots x_N\rangle_v$  où

$$S_{v,q}^\pm |x_1 \dots x_N\rangle_v = v^{\pm(N+1)} q^{\mp \frac{1}{2}(d \pm 1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ x_j = \mp 1}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_1 \dots x_{j-1}(\pm)x_{j+1} \dots x_N\rangle_v$$

avec  $d = \sum_{\ell=1}^N x_\ell$ . Sous cette action,  $\tau_q(v)$  devient un isomorphisme de  $U\mathfrak{sl}_2$ -modules.

Soient  $v, w \in \mathbb{C}$  non nuls et  $\vartheta_q(w, v) : \mathbb{C}_N(q, w) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v)$  l'isomorphisme  $U\mathfrak{sl}_2$ -linéaire défini via la composition  $\vartheta_q(w, v) = \tau_q(v) \circ \tau_q^{-1}(w)$ . Alors, comme lors de la section 3.3.2, on obtient aisément  $\vartheta_q(w, v) |x_1 \dots x_N\rangle_w = \vartheta_{x_1 \dots x_N}(w, v) |x_1 \dots x_N\rangle_v$  où

$$\vartheta_{x_1 \dots x_N}(w, v) = \left(\frac{v}{w}\right)^{2 \sum_{j=1}^r i_j} \left(\frac{v}{w}\right)^{-r(N+1)}$$

avec  $\{i_j\}_{j=1}^r = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}$ .

**Théorème A.1.** Supposons que  $v^{\pm 2N} = q^d$  et que  $v^N q = w^N$ . Alors, l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $f_{d \mp 2, d}(q, v) : \mathbb{C}_N(q, w, d \mp 2) \rightarrow \mathbb{C}_N(q, v, d)$  donnée par

$$\begin{aligned} [f_{d \mp 2, d}(q, v)] |x_1 \dots x_N\rangle_w &= [S_{v, q}^{\pm} \circ \vartheta_q(w, v)] |x_1 \dots x_N\rangle_w \\ &= [\vartheta_{x_1 \dots x_N}(w, v)] S_{v, q}^{\pm} |x_1 \dots x_N\rangle_v \end{aligned}$$

est un morphisme de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules.

**DÉMONSTRATION.** Soient  $x_1, \dots, x_N \in \{\pm 1\}$  et  $\{i_j\}_{j=1}^r = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid x_k = -1\}$ . Posons  $\vartheta_{y_1 \dots y_N} = \vartheta_{y_1 \dots y_N}(w, v)$  pour chaque  $y_1, \dots, y_N \in \{\pm 1\}$  et remarquons que, puisque  $q^2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} [f_{d \mp 2, d}(q, v)] e_1 |x_1 \dots x_N\rangle_w &= \delta_{x_1, -x_2} (w^{-2x_1} \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} S_{v, q}^{\pm} |x_2 x_1 x_3 \dots x_N\rangle_v - q \vartheta_{x_1 \dots x_N} S_{v, q}^{\pm} |x_1 \dots x_N\rangle_v) \\ &= \delta_{x_1, -x_2} v^{\pm(N+1)} q^{\mp \frac{1}{2}(d \mp 1)} \left[ w^{-2x_1} \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} \sum_{3 \leq j \leq N} \delta_{x_j, \mp 1} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_2 x_1 x_3 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v \right. \\ &\quad \left. + \left( w^{-2x_1} \vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} (v^{\mp 2} \delta_{x_2, \mp 1} + v^{\mp 4} q^{x_2} \delta_{x_1, \mp 1}) - q \vartheta_{x_1 \dots x_N} (v^{\mp 2} \delta_{x_1, \mp 1} + v^{\mp 4} q^{x_1} \delta_{x_2, \mp 1}) \right) |(\pm)(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v \right. \\ &\quad \left. - q \vartheta_{x_1 \dots x_N} \sum_{3 \leq j \leq N} \delta_{x_j, \mp 1} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_1 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v \right) \Big] \\ &\stackrel{1}{=} \delta_{x_1, -x_2} v^{\pm(N+1)} q^{\mp \frac{1}{2}(d \mp 1)} \vartheta_{x_1 \dots x_N} \left[ v^{\mp 2} (q - q^{\pm 1}) (q v^{\mp 2} \delta_{x_2, \mp 1} - \delta_{x_1, \mp 1}) |(\pm)(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v \right. \\ &\quad \left. + \sum_{3 \leq j \leq N} \delta_{x_j, \mp 1} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} \left( v^{-2x_1} |x_2 x_1 x_3 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v - q |x_1 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v \right) \right] \\ &= v^{\pm(N+1)} q^{\mp \frac{1}{2}(d \mp 1)} \vartheta_{x_1 \dots x_N} \sum_{3 \leq j \leq N} \delta_{x_j, \mp 1} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} e_1 |x_1 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v \\ &\stackrel{2}{=} \vartheta_{x_1 \dots x_N} e_1 \left[ v^{\pm(N+1)} q^{\mp \frac{1}{2}(d \mp 1)} \sum_{1 \leq j \leq N} \delta_{x_j, \mp 1} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_1 \dots x_{j-1}(\pm) x_{j+1} \dots x_N\rangle_v \right] \\ &= e_1 (\vartheta_{x_1 \dots x_N} S_{v, q}^{\pm} |x_1 \dots x_N\rangle_v) = e_1 [f_{d \mp 2, d}(q, v)] |x_1 \dots x_N\rangle_w \end{aligned}$$

où les égalités 1 et 2 suivent de  $\vartheta_{x_2 x_1 x_3 \dots x_N} = \left(\frac{w}{v}\right)^{2x_1} \vartheta_{x_1 \dots x_N}$  (voir le théorème 3.41) et de

$$\begin{aligned} &e_1 (\delta_{x_1, \mp 1} v^{\mp 2} |(\pm) x_2 \dots x_N\rangle_v + \delta_{x_2, \mp 1} v^{\mp 4} q^{x_1} |x_1(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v) \\ &= \delta_{x_2, \mp 1} \delta_{x_1, \mp 1} \left( v^{\mp 2} (v^{\mp 2} |(\mp)(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v - q |(\pm)(\mp) x_3 \dots x_N\rangle_v) \right. \\ &\quad \left. + v^{\mp 4} q^{\mp 1} (v^{\pm 2} |(\pm)(\mp) x_3 \dots x_N\rangle_v - q |(\mp)(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v) \right) \\ &= \delta_{x_2, \mp 1} \delta_{x_1, \mp 1} \left( v^{\mp 4} (1 - q^{1 \mp 1}) |(\mp)(\pm) x_3 \dots x_N\rangle_v + v^{\mp 2} (q^{\mp 1} - q) |(\pm)(\mp) x_3 \dots x_N\rangle_v \right) = 0. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que, en vertu des relations  $q^d = v^{\pm 2N}$ ,  $q = \left(\frac{v}{w}\right)^N$  et  $q^2 = 1$ , on a

$$\begin{aligned}
& [f_{d\mp 2,d}(q,v)]\Omega|x_1\dots x_N\rangle_w = w^{d\mp 2}\vartheta_{x_2\dots x_N x_1} S_{v,q}^\pm |x_2\dots x_N x_1\rangle_v \\
& = w^{d\mp 2}\vartheta_{x_2\dots x_N x_1} \left( \delta_{x_1,\mp 1} v^{\mp 2N} q^{\sum_{\ell=1}^{N-1} x_{\ell+1}} |x_2\dots x_N(\pm)\rangle_v + \sum_{\substack{1\leq j\leq N-1 \\ x_{j+1}=\mp}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_{\ell+1}} |x_2\dots x_j(\pm)x_{j+2}\dots x_N x_1\rangle_v \right) \\
& = w^{d\mp 2}\vartheta_{x_2\dots x_N x_1} \left( \delta_{x_1,\mp 1} q^{-d} q^{d\mp 1} |x_2\dots x_N(\pm)\rangle_v + v^{\pm 2} \sum_{\substack{2\leq j\leq N \\ x_j=\mp 1}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-2} x_{\ell+1}} |x_2\dots x_{j-1}(\pm)x_{j+1}\dots x_N x_1\rangle_v \right) \\
& \stackrel{1}{=} \left(\frac{v}{w}\right)^{-Nx_1} q v^{d\mp 2} \vartheta_{x_1\dots x_N} \left( \delta_{x_1,\mp 1} |x_2\dots x_N(\pm)\rangle_v + v^{\pm 2} \sum_{\substack{2\leq j\leq N \\ x_j=\mp 1}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_2\dots x_{j-1}(\pm)x_{j+1}\dots x_N x_1\rangle_v \right) \\
& = \left(\frac{v}{w}\right)^{-Nx_1} q v^d \vartheta_{x_1\dots x_N} \left( \delta_{x_1,\mp 1} v^{\mp 2} |x_2\dots x_N(\pm)\rangle_v + \sum_{\substack{2\leq j\leq N \\ x_j=\mp 1}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} |x_2\dots x_{j-1}(\pm)x_{j+1}\dots x_N x_1\rangle_v \right) \\
& = \left[ q \left(\frac{v}{w}\right)^N \right]^{-x_1} \vartheta_{x_1\dots x_N} \sum_{\substack{1\leq j\leq N \\ x_j=\mp 1}} v^{\mp 2j} q^{\sum_{\ell=1}^{j-1} x_\ell} \Omega |x_1\dots x_{j-1}(\pm)x_{j+1}\dots x_N\rangle_v = \vartheta_{x_1\dots x_N} \Omega S_{v,q}^\pm |x_1\dots x_N\rangle_w \\
& = \Omega [f_{d\mp 2,d}(q,v)] |x_1\dots x_N\rangle_w
\end{aligned}$$

où l'égalité 1 suit de la relation  $\vartheta_{x_2\dots x_N x_1} = \left(\frac{v}{w}\right)^{d\mp 2 - Nx_1} \vartheta_{x_1\dots x_N}$  (voir la démonstration du théorème 3.41). Il s'ensuit ainsi que l'application  $f_{d\mp 2,d}(q,v)$  commute avec  $e_1$  et  $\Omega$ . On peut alors montrer qu'elle est  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire en montrant qu'elle commute avec  $\Omega^{-1}$  de la même façon que dans la preuve du théorème 3.41. Ceci achève cette démonstration.  $\square$

Les applications  $f_{d\mp 2,d}(q,v)$  du théorème A.1 s'écrivent comme la composition d'un isomorphisme  $U\mathfrak{sl}_2$ -linéaire avec un opérateur représentant un élément de  $U\mathfrak{sl}_2$  sur  $\mathbb{C}_N(q,v)$ . On aimerait effectuer une analyse similaire à celle effectuée dans la section 3.3.2 afin de déterminer le noyau et l'image de ces applications. Pour ce faire, remarquons que la définition des  $U\mathfrak{sl}_2$ -modules irréductibles  $L(n)$  permet aisément de montrer le résultat ci-dessous.

**Lemme A.2.** Soient  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $h$  sur  $L(n)$ . Alors,  $e^m f^m$  (ou  $f^m e^m$ ) induit un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de l'espace propre  $L(n)|_{h=\lambda}$  lorsque  $|\lambda - 2m| \leq |\lambda|$  (ou  $|\lambda + 2m| \leq |\lambda|$ , respectivement).

Puisque les objets de  $\text{mod } U\mathfrak{sl}_2$  sont semisimples (voir le corollaire 1.70 de [27]), on peut obtenir un résultat analogue au lemme A.2 pour le  $U\mathfrak{sl}_2$ -module  $(L(1))^{\otimes cN}$ . Ainsi, étant donné que l'isomorphisme  $U\mathfrak{sl}_2$ -linéaire  $\tau_q(v) : (L(q))^{\otimes cN} \rightarrow \mathbb{C}_N(q,v)$  fait correspondre l'élément  $h$  avec l'opérateur  $2S^z$ , on peut aisément obtenir le lemme suivant à l'aide d'une démonstration similaire à celle utilisée pour la proposition 3.45 (sans même utiliser de retournement de spin  $\eta_N(q,v,d)$ ). Dans ce lemme, on note  $f_{d\mp 2m,d}(q,v) : \mathbb{C}_N(q,w_m,d\mp 2m) \rightarrow \mathbb{C}_N(q,v,d)$  l'application  $f_{d\mp 2m,d}(q,v) = f_{d\mp 2,d}(q,w_0) \circ \dots \circ f_{d\mp 2m,d\mp 2(m-1)}(q,w_{m-1})$  où  $m \in \mathbb{N}$  et où on choisit un nombre complexe non nul  $w_\ell$  pour chaque  $\ell \in \{0, \dots, m\}$  avec  $w_0 = v$ . On utilise aussi le

fait que, par définition des isomorphismes  $U\mathfrak{sl}_2$ -linéaires  $\vartheta_q(w_i, w_{i-1})$  (pour  $1 \leq i \leq m$ ), on a  $f_{d, \mp 2m, d}(q, v) = S_{v, q}^{\pm m} \circ \vartheta_q(w_1, w_0) \circ \dots \circ \vartheta_q(w_m, w_{m-1}) = S_{v, q}^{\pm m} \circ \vartheta_q(w_m, w_0)$ .

**Proposition A.3.** Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $v, w_m \in \mathbb{C}$  non nuls. Alors, les applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $f_{d, d+2m}(q, w_m) \circ f_{d+2m, d}(q, v)$  et  $f_{d+2m, d}(q, v) \circ f_{d, d+2m}(q, w_m)$  sont respectivement bijectives lorsque  $|d| \leq |d+2m|$  et  $|d+2m| \leq |d|$ . En particulier, l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $f_{d \pm 2m, d}(q, v)$  est injective (ou surjective) lorsque  $|d \pm 2m| \geq |d|$  (ou  $|d \pm 2m| \leq |d|$ , respectivement).

Dans le chapitre 4, on écrira  $g_{d, d+2m}(q, w_m) = f_{d, d+2m}(q, w_m)$  afin d'obtenir une notation plus cohérente avec celle utilisée dans le chapitre 3.

**Remarque A.4.** L'application  $\Delta : U\mathfrak{sl}_2 \rightarrow U\mathfrak{sl}_2 \otimes U\mathfrak{sl}_2$  utilisée dans cette annexe ne correspond pas au coproduit usuellement considéré pour l'algèbre universelle enveloppante  $U\mathfrak{sl}_2$  quand  $q = -1$ . On montre ci-dessous qu'il s'agit effectivement d'un morphisme d'algèbres<sup>1</sup> en vérifiant que  $\Delta$  (qui est défini multiplicativement et linéairement) préserve les relations de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2$ . Puisque  $q^2 = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta([e, f]) &= \Delta(e)\Delta(f) - \Delta(f)\Delta(e) \\ &= (e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e)(f \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes f) - (f \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes f)(e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e) \\ &= ef \otimes \text{id} + qe \otimes f + qf \otimes e + \text{id} \otimes ef - fe \otimes \text{id} - qe \otimes f - qf \otimes e - \text{id} \otimes fe \\ &= [e, f] \otimes \text{id} + \text{id} \otimes [e, f] = h \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h = \Delta(h). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Delta([h, e]) &= \Delta(h)\Delta(e) - \Delta(e)\Delta(h) \\ &= (h \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h)(e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e) - (e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e)(h \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h) \\ &= he \otimes \text{id} + e \otimes h + qh \otimes e + q \text{id} \otimes he - eh \otimes \text{id} - qh \otimes e - e \otimes h - q \text{id} \otimes eh \\ &= [h, e] \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes [h, e] = 2(e \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e) = 2\Delta(e) \end{aligned}$$

et, de la même façon,  $\Delta([h, f]) = -2\Delta(f)$ . Remarquons que, contrairement au coproduit introduit dans la section 3.1.2,  $\Delta$  n'est pas un morphisme coassociatif puisque

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta(e) &= \Delta(e) \otimes \text{id} + q \Delta(\text{id}) \otimes e = e \otimes \text{id} \otimes \text{id} + q \text{id} \otimes e \otimes \text{id} + q \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes e \\ &\neq e \otimes \Delta(\text{id}) + q \text{id} \otimes \Delta(e) = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(e) \end{aligned}$$

si  $q \neq 1$ . Il est donc nécessaire de spécifier que la structure de  $U\mathfrak{sl}_2$ -module considérée dans cette annexe pour  $(L(1))^{\otimes cN}$  est obtenue à partir du morphisme  $\Delta_N$  défini récursivement pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $\Delta_2 = \Delta$  et  $\Delta_n = (\text{id}_{n-2} \otimes \Delta_2) \circ \Delta_{n-1}$  avec  $\text{id}_{n-2}$  l'application identité de  $U\mathfrak{sl}_2^{\otimes(n-2)}$  (une autre structure, possiblement non équivalente, pourrait être obtenue du morphisme  $\Delta'_n$  donné inductivement par les relations  $\Delta'_2 = \Delta$  et  $\Delta'_n = (\Delta'_2 \otimes \text{id}_{n-2}) \circ \Delta'_{n-1}$ ).

<sup>1</sup>Il s'agit de la seule propriété utilisée dans la définition de la  $U\mathfrak{sl}_2$ -action considérée sur  $(L(1))^{\otimes cN}$ .

# Annexe B

---

## Algèbres de Hopf.

Cette annexe sert principalement à démontrer la proposition 3.9. La preuve présentée est inspirée de celle pouvant être trouvée dans [8] et utilise de façon essentielle la notation de Sweedler. Elle utilise aussi certaines notions et identités relatives aux algèbres de Hopf qui n'ont pas été introduites dans le corps du mémoire. Ces concepts sont introduits sommairement ci-dessous, mais on réfère à [8] et [10] pour plus de détails. Pour toute cette annexe, on fixe une algèbre de Hopf  $H$  sur un anneau  $R$ . On note aussi respectivement  $\Delta : H \rightarrow H \otimes_R H$ ,  $\nabla : H \otimes_R H \rightarrow H$ ,  $\epsilon : H \rightarrow R$ ,  $\eta : R \rightarrow H$  et  $S : H \rightarrow H$  son coproduit, sa multiplication, sa counité, son unité et son antipode. Rappelons les identités (cf. [10])

$$\nabla \circ (S \otimes_R \text{id}_H) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \nabla \circ (\text{id}_H \otimes_R S) \circ \Delta \quad \text{et} \quad (\text{id}_H \otimes_R \epsilon) \circ \Delta = \iota \quad (\text{B.1})$$

avec  $\iota : H \rightarrow H \otimes_R R$  l'isomorphisme canonique. La notation de Sweedler consiste à écrire

$$\Delta(h) = \sum_{(h)} h_1 \otimes_R h_2 \quad (\text{pour } h \in H)$$

où  $(h)$  est un ensemble indiquant qui dépend du choix de  $h$ . Par coassociativité du coproduit, si une expression utilisant cette notation contient des composantes  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ , on peut respectivement interpréter ces composantes comme

$$h_{1_1}, h_{1_2} \text{ et } h_2 \quad \text{d'où} \quad \Delta(h) = \sum_{(h), (h_1)} (h_{1_1} \otimes_R h_{1_2}) \otimes_R h_2 = \sum_{(h)} h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R h_3$$

ou, de façon équivalente, comme

$$h_1, h_{2_1} \text{ et } h_{2_2} \quad \text{d'où} \quad \Delta(h) = \sum_{(h), (h_2)} h_1 \otimes_R (h_{2_1} \otimes_R h_{2_2}) = \sum_{(h)} h_1 \otimes_R h_2 \otimes_R h_3.$$

Soient  $M, L$  des  $H$ -module à gauche. Alors, on peut utiliser la notation ci-haut et l'antipode  $S$  pour définir implicitement une  $H$ -action à gauche sur l'espace vectoriel  $\text{Hom}_R(M, L)$  via

$$(hf)(m) = \sum_{(h)} h_1 f(S(h_2)m) \quad (\text{pour } h \in H, f \in \text{Hom}_R(M, L) \text{ et } m \in M).$$

On note  $\text{Hom}_R^S(M, L)$  le  $H$ -module résultant et  $\text{Hom}_R^S(M, -)$  l'endofoncteur contravariant de  $\text{mod } H$  envoyant un  $H$ -module  $L$  sur  $\text{Hom}_R^S(M, L)$ . Ce foncteur envoie un morphisme de  $H$ -modules  $f : L_1 \rightarrow L_2$  vers la composition à gauche par  $f$ . Cette post-composition est bien  $H$ -linéaire puisque

$$\begin{aligned} [\text{Hom}_R^S(M, f)(hg)](m) &= [f \circ (hg)](m) = f \left( \sum_{(h)} h_1 g(S(h_2)m) \right) = \sum_{(h)} [h_1(f \circ g)(S(h_2)m)] \\ &= [h(f \circ g)](m) = [h(\text{Hom}_R^S(M, f)(g))](m) \end{aligned}$$

pour chaque  $h \in H$ ,  $g \in \text{Hom}_R^S(M, L_1)$  et  $m \in M$ .

**Proposition B.1.** Soient  $M, N$  des  $H$ -modules. Alors, il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\text{Hom}_H(M \otimes^c N, -) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, -))$$

avec  $M \otimes^c N$  le  $H$ -module défini sur le  $R$ -module  $M \otimes_R N$  via le coproduit  $\Delta : H \rightarrow H \otimes_R H$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $L$  un  $H$ -module. Définissons

$$\varphi_L : \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L) \rightarrow \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L))$$

via la relation implicite  $([\varphi_L(f)](m))(n) = f(m \otimes n)$  pour  $f \in \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L)$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ . Fixons une application  $H$ -linéaire  $f : M \otimes^c N \rightarrow L$ . On veut montrer que  $\varphi_L(f)$  est également  $H$ -linéaire. Fixons donc aussi  $h \in H$  et remarquons que

$$\begin{aligned} h \otimes_R \text{id}_H &= (\text{id}_H \otimes_R \eta)(h \otimes_R 1_R) = ((\text{id}_H \otimes_R \eta) \circ \iota)(h) = ((\text{id}_H \otimes_R \eta) \circ (\text{id}_H \otimes_R \epsilon) \circ \Delta)(h) \\ &= ([\text{id}_H \otimes_R (\eta \circ \epsilon)] \circ \Delta)(h) = ([\text{id}_H \otimes_R (\nabla \circ (\text{id}_H \otimes_R S) \circ \Delta)] \circ \Delta)(h) \\ &= \sum_{(h)} h_1 \otimes_R (\nabla \circ (\text{id}_H \otimes_R S) \circ \Delta)(h_2) = \sum_{(h)} h_1 \otimes_R \left( \sum_{(h_2)} h_{2_1} S(h_{2_2}) \right) \\ &= \sum_{(h), (h_2)} h_1 \otimes_R h_{2_1} S(h_{2_2}) = \sum_{(h), (h_1)} h_{1_1} \otimes_R h_{1_2} S(h_2) \end{aligned}$$

où on a notamment utilisé la coassociativité de  $\Delta$ , l'équation (B.1) et la relation  $\eta(1_R) = \text{id}_H$  provenant de la définition de l'unité  $\eta : R \rightarrow H$ . Alors, à partir de l'action naturelle de  $H \otimes_R H$  sur  $M \otimes^c N$  (voir la section 3.1.2) et de celle (que l'on notera  $\bullet$ ) de  $H$  sur ce même module via  $\Delta$ , on obtient, pour  $m \in M$  et  $n \in N$ ,

$$\begin{aligned} hm \otimes_R n &= (h \otimes_R \text{id}_H)(m \otimes_R n) = \left[ \sum_{(h), (h_1)} h_{1_1} \otimes_R h_{1_2} S(h_2) \right] (m \otimes_R n) \\ &= \sum_{(h), (h_1)} h_{1_1} m \otimes_R h_{1_2} S(h_2) n = \sum_{(h)} \left( \sum_{(h_1)} h_{1_1} \otimes_R h_{1_2} \right) (m \otimes_R S(h_2) n) \\ &= \sum_{(h)} \Delta(h_1)(m \otimes_R S(h_2) n) = \sum_{(h)} h_1 \bullet (m \otimes_R S(h_2) n) \end{aligned}$$



Ainsi, puisque  $f$  est  $H$ -linéaire par rapport à l'action  $\bullet$  et à celle sur  $L$ , on a

$$\left([\varphi_L(f)](hm)\right)(n) = f(hm \otimes_R n) = \sum_{(h)} h_1 f(m \otimes_R S(h_2)n) = \left(h[\varphi_L(f)](m)\right)(n)$$

de sorte que  $\varphi_L(f)$  est aussi  $H$ -linéaire. Considérons désormais l'application

$$\psi_L : \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L)) \rightarrow \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L)$$

définie par  $[\psi_L(g)](m \otimes_R n) = [g(m)](n)$  pour  $g \in \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L))$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ .

Remarquons que

$$\begin{aligned} [(\psi_L \circ \varphi_L)(f)](m \otimes_R n) &= \left([\varphi_L(f)](m)\right)(n) = f(m \otimes_R n) \text{ et} \\ \left([\varphi_L \circ \psi_L(g)](m)\right)(n) &= [\psi_L(g)](m \otimes_R n) = [g(m)](n) \end{aligned}$$

pour chaque  $f \in \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L)$ ,  $g \in \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L))$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ . Ainsi,  $\psi_L$  est l'inverse de  $\varphi_L$  d'où  $\varphi_L$  est un isomorphisme  $H$ -linéaire. Il suffit donc, pour achever cette démonstration, de démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L_1) & \xrightarrow{\varphi_{L_1}} & \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L_1)) \\ \text{Hom}_H(M \otimes^c N, \mu) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, \mu)) \\ \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L_2) & \xrightarrow{\varphi_{L_2}} & \text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, L_2)) \end{array}$$

où  $L_1, L_2$  sont des  $H$ -modules et où  $\mu : L_1 \rightarrow L_2$  est une application  $H$ -linéaire. Considérons donc  $f \in \text{Hom}_H(M \otimes^c N, L_1)$ ,  $m \in M$  et  $n \in N$ . Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \left([\text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, \mu)) \circ \varphi_{L_1}](f)\right)(m) = \left[\text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, \mu))(\varphi_{L_1}(f))\right](m) \\ &= \left[\text{Hom}_R^S(N, \mu) \circ (\varphi_{L_1}(f))\right](m) = \text{Hom}_R^S(N, \mu)\left([\varphi_{L_1}(f)](m)\right) = \mu \circ \left([\varphi_{L_1}(f)](m)\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \gamma_m(n) &= \mu\left([\varphi_{L_1}(f)](m)\right)(n) = (\mu \circ f)(m \otimes_R n) = \left([\varphi_{L_2}(\mu \circ f)](m)\right)(n) \\ &= \left([\varphi_{L_2} \circ \text{Hom}_H(M \otimes^c N, \mu)](f)\right)(m)(n) \end{aligned}$$

et  $\text{Hom}_H(M, \text{Hom}_R^S(N, \mu)) \circ \varphi_{L_1} = \varphi_{L_2} \circ \text{Hom}_H(M \otimes^c N, \mu)$ . □

**Corollaire B.2.** Soient  $P, M$  des  $H$ -modules avec  $P$  projectif. Alors, si  $R$  est un corps,  $P \otimes^c M$  est aussi un  $H$ -module projectif.

DÉMONSTRATION. Selon la proposition B.1, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\varphi : \text{Hom}_H(P \otimes^c M, -) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_H(P, \text{Hom}_R^S(N, -)) = \text{Hom}_H(P, -) \circ \text{Hom}_R^S(N, -).$$

Or, le foncteur  $\text{Hom}_R^S(N, -)$  agit comme le foncteur  $\text{Hom}_R(N, -)$  sur les morphismes et il s'agit donc d'un foncteur exact étant donné que  $N$  est trivialement un  $R$ -module libre (puisque tout  $R$ -espace vectoriel a une base). On conclut alors avec la projectivité de  $P$ . □



# Annexe C

---

## Le groupe quantique restreint $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$

Le groupe quantique restreint  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$  est défini comme la sous-algèbre de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  engendrée par  $K^{\pm 1}$ ,  $E$  et  $F$ . C'est une algèbre de dimension finie qui admet pour  $\mathbb{C}$ -base (cf. [30], [31])

$$\mathcal{B}_{\overline{U}} = \left\{ F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6} \mid a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{ avec } a_4, a_6 < p \text{ et } a_5 < 2p \right\}.$$

On peut retrouver  $\mathcal{B}_{\overline{U}}$  dans la base de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  donnée par l'ensemble  $\mathcal{B}_{\text{rest}}$  défini comme<sup>1</sup>

$$\left\{ (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6} \mid a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{ avec } a_4, a_6 < p \text{ et } a_5 < 2p \right\}.$$

**Proposition C.1.** Soient  $x_1, x_2, x_3$  des indéterminées. Comme  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -modules à droite,

$$\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \simeq \overline{U}_q \mathfrak{sl}_2[x_1, x_2, x_3]$$

avec l'action du groupe quantique restreint sur  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  donnée par multiplication. En particulier, l'extension de Lusztig  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  est un  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -module (à droite) libre.

DÉMONSTRATION. Soit  $\Psi : \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \overline{U}_q \mathfrak{sl}_2[x_1, x_2, x_3]$  l'application définie sur  $\mathcal{B}_{\text{rest}}$  par

$$(F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6} \xrightarrow{\Psi} F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$$

Il est clair que  $\Psi$  est bien définie et bijective puisque  $\mathcal{B}_{\text{rest}}$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  et que  $\{\Psi(x) \mid x \in \mathcal{B}_{\text{rest}}\}$  est trivialement une  $\mathbb{C}$ -base de  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2[x_1, x_2, x_3]$ . Il suffit ainsi de montrer qu'il s'agit également d'une application  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -linéaire à droite.

<sup>1</sup>Rappelons que, tel que mentionné dans [30] et au cours de la section 3.1, pour  $q$  une  $\ell$ -ième racine primitive de l'unité, on a un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathbb{C}[E]/\langle E^{(\ell_\alpha)} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[E^{(\ell_\alpha)}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[K]/\langle K^{2\ell_\alpha} - \text{id} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \left[ \begin{bmatrix} K; 0 \\ \ell_\alpha \end{bmatrix}_t \right] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F]/\langle F^{(\ell_\alpha)} \rangle \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[F^{(\ell_\alpha)}]$$

avec  $\ell_\alpha = p$  et où, par exemple,  $\mathbb{C}[E]/\langle E^{(\ell_\alpha)} \rangle$  désigne le quotient de l'algèbre  $\mathbb{C}[E]$  par l'idéal engendré par  $E^{(\ell_\alpha)}$ . Ainsi, puisque le produit tensoriel sur  $\mathbb{C}$  est commutatif, on conclut comme lors de la section 3.1 que  $\mathcal{B}_{\text{rest}}$  est bien une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ .

Soient donc  $x \in \overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$  et  $a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  avec  $a_4, a_6 < p$  et  $a_5 < 2p$ . Soient également un entier positif  $n$ ,  $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{C}$  et  $\{F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}}\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{B}_{\overline{U}}$  tels que

$$(F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6})x = \sum_{i=1}^n \gamma_i F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}}$$

Alors, pour  $y_{a_1 \dots a_6} = (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6}$ , on a

$$\begin{aligned} y_{a_1 \dots a_6} x &= \left[ \left( (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} \right) (F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6}) \right] x \\ &= \left( (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} \right) [(F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6})x] \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \left[ \left( (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} \right) (F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \left( (F^{(p)})^{a_1} \begin{bmatrix} K; 0 \\ p \end{bmatrix}_t^{a_2} (E^{(p)})^{a_3} F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(y_{a_1 \dots a_6} x) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i [F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}] = \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i F^{b_{4i}} K^{b_{5i}} E^{b_{6i}} \right) x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \\ &= [(F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6})x] x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} = [F^{a_4} K^{a_5} E^{a_6} x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}] x \\ &= \varphi(y_{a_1 \dots a_6}) x \end{aligned}$$

d'où le premier énoncé de la proposition. Le second découle alors directement du fait que  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2[x_1, x_2, x_3]$  admet pour  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -base l'ensemble  $\{x_1^a x_2^b x_3^c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ .  $\square$

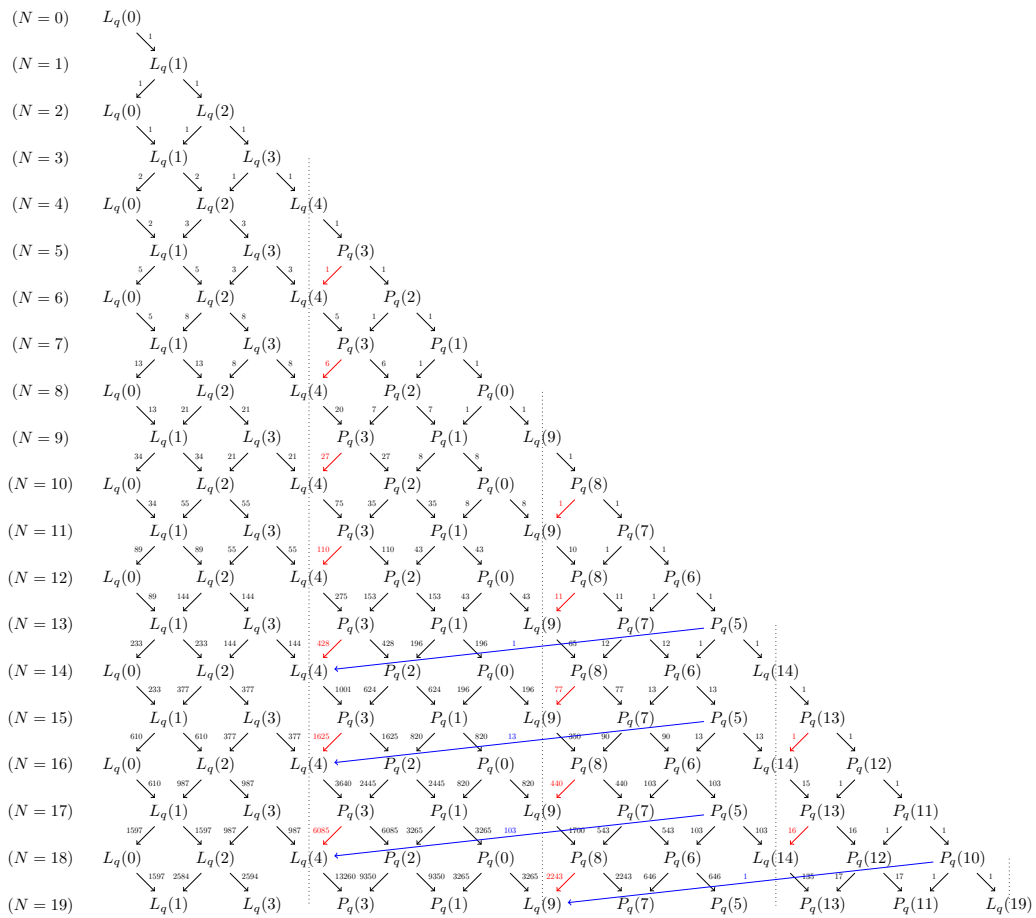
Une conséquence directe de la proposition C.1 est que  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  est un  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -module (à droite) plat de sorte que le foncteur d'induction  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \otimes_{\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2} - : \text{mod } \overline{U}_q \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  est exact. Notons ce foncteur  $\uparrow^{\mathcal{L}}$  et considérons également le foncteur de restriction associé  $\downarrow^{\mathcal{L}} : \text{mod } \mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{mod } \overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$  qui envoie un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module au  $\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2$ -module sous-jacent (via restriction de l'action). Le théorème 5.3 du chapitre II de [2] permet de déduire un isomorphisme fonctoriel  $\downarrow^{\mathcal{L}} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2}(\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2, -)$  d'où le foncteur de restriction est lui aussi exact puisque  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$  est trivialement un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module projectif. Par ailleurs, on peut également utiliser le théorème 2.1 du chapitre V de cette même référence pour conclure que  $(\uparrow^{\mathcal{L}}, \downarrow^{\mathcal{L}})$  est une paire adjointe et pour obtenir la propriété remarquable suivante.

**Lemme C.2.**  $\uparrow^{\mathcal{L}}$  et  $\downarrow^{\mathcal{L}}$  préservent respectivement la projectivité et l'injectivité des modules.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $I$  un  $\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2$ -module injectif. Alors, puisque  $(\uparrow^{\mathcal{L}}, \downarrow^{\mathcal{L}})$  est une paire adjointe, on a un isomorphisme fonctoriel  $\text{Hom}_{\overline{U}_q \mathfrak{sl}_2}(-, \downarrow^{\mathcal{L}} I) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{L}U_q \mathfrak{sl}_2}(-, I) \circ \uparrow^{\mathcal{L}}$ . Ainsi, l'exactitude de  $\uparrow^{\mathcal{L}}$  et l'injectivité de  $I$  permette de conclure l'injectivité de  $\downarrow^{\mathcal{L}} I$ . Le résultat correspondant pour le foncteur  $\downarrow^{\mathcal{L}}$  est obtenu par le raisonnement dual.  $\square$

# Annexe D

## Exemple de décomposition de Clebsch-Gordan généralisée



**Fig. D.1.** Décomposition de  $(L_q(1))^{\otimes cN}$  pour  $0 \leq N \leq 19$  avec  $p = 5$ . Dans cette figure, la multiplicité d'un facteur au sein de  $(L_q(1))^{\otimes cN}$  (pour un  $N$  fixé) peut être lue sur les flèches ayant pour origine ce facteur sur la ligne associée à  $N$ . Ce nombre correspondra toujours à la somme des entiers apparaissant sur les flèches aboutissant au facteur en question (sur la ligne associée à  $N$ ) avec un poids double pour les flèches rouges. Par exemple, la ligne 19 indique que la multiplicité de  $L_q(4)$  dans  $(L_q(1))^{\otimes 18}$  est de  $13260 = 2(6085) + 987 + 103$ .

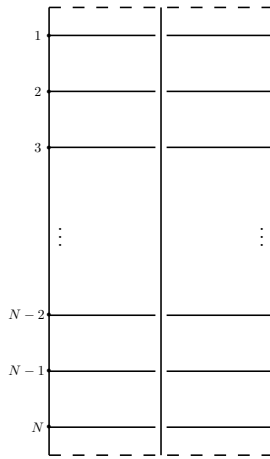


# Annexe E

---

## Algèbres de blob $\text{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$

Fixons  $(d_1, z_1) \in \Lambda^a(N)$  et considérons le  $N$ -diagramme  $Y$  (appelé *opérateur d'arceau*) présenté dans la figure E.1 où chaque croisement correspond à une combinaison linéaire de la forme donnée dans la figure E.2. Il s'agit d'un élément central de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  (cf. [4]) d'où la multiplication à gauche par cet élément définit un endomorphisme de tout  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module. En particulier, la proposition E.1 montre que l'opérateur d'arceau  $Y$  agit sur le module cellulaire  $W_{N,d_1;z_1}(q)$  comme  $y(d_1, z_1)\text{id}$  pour une certaine valeur propre  $y(d_1, z_1) \in \mathbb{C}$ .



**Fig. E.1.** L'opérateur d'arceau  $Y$  de  $\text{TL}_N^a(\beta)$ .

$$\left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) = q^{\frac{1}{2}} \left( \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \right) + q^{-\frac{1}{2}} \left( \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \right)$$

**Fig. E.2.** La signification des tresses dans  $\text{TL}_N^a(\beta)$ .

**Proposition E.1.** Soit  $M$  un  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -module indécomposable tel que, pour chaque sous-module simple  $L \subseteq \text{top } M$ , la multiplicité de  $L$  dans  $M$  est 1. Alors,  $\dim \text{End}_{\text{TL}_N^a(\beta)}(M) = 1$  d'où chaque endomorphisme  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -linéaire de  $M$  est un multiple de l'identité.

DÉMONSTRATION. Notons  $\text{top } M = \bigoplus_{i=1}^n L_i$  où les  $L_i$  sont des  $\text{TL}_N^a(\beta)$ -modules simples et posons  $\mathcal{A} = \{L_i\}_{i=1}^n$ . Alors, il existe un sous-module  $N \subseteq M$  et une suite exacte courte

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L_1 \rightarrow 0$$

Dans ce cas, l'application du foncteur  $\text{Hom}(M, -) = \text{Hom}_{\text{TL}_N^a(\beta)}(M, -)$  produit la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{End } M \rightarrow \text{Hom}(M, L_1) \quad (\text{E.1})$$

Une démarche analogue à celle de la preuve du lemme 3.21 donne  $\text{Hom}(M, L_1) \simeq \mathbb{C}$ . On veut montrer que  $\text{Hom}(M, N) = 0$ . Supposons le contraire et fixons  $f \in \text{Hom}(M, N)$  non nul. Pour chaque facteur simple  $L \subseteq \text{top } M$ , notons  $\langle L \rangle$  le sous-module de  $M$  engendré (voir la section 1.3.1) par un ensemble de représentants des classes d'équivalence de  $L$ . Remarquons que, puisque  $L_1$  n'est pas un facteur de composition de  $N$ , on doit avoir  $\langle L_1 \rangle \subseteq \text{Ker } f$ .

**Affirmation 1:** Il n'y a pas de sous-modules simples  $L, L' \subseteq \text{top } M$  satisfaisant  $\langle L \rangle \not\subseteq \text{Ker } f$ ,  $\langle L' \rangle \subseteq \text{Ker } f$  et tels que  $\langle L \rangle$  et  $\langle L' \rangle$  admettent un facteur de composition en commun<sup>1</sup>.

**Dém.** (Affirmation 1). Supposons le contraire et notons  $K$  un facteur de composition commun à  $\langle L \rangle$  et  $\langle L' \rangle$  avec  $L, L' \subseteq \text{top } M$  des sous-modules simples. Alors, puisque  $K$  est un facteur de  $\langle L' \rangle \subseteq \text{Ker } f$ ,  $K$  ne peut pas être un facteur de composition de l'image  $\text{Im } f \simeq M/\text{Ker } f$ . Or, puisque le module  $\langle L \rangle$  a coiffe simple  $L$  et satisfait  $\langle L \rangle \not\subseteq \text{Ker } f$ , on peut déduire que  $L$  n'est pas un facteur de  $\text{Ker } f$  d'où il s'agit d'un facteur de l'image  $\text{Im } f \simeq M/\text{Ker } f$ . Ainsi, puisque cette image est un sous-module de  $M$  (car  $\text{Im } f \subseteq N \subseteq M$ ), et que  $L$  a multiplicité 1 dans  $M$ , on doit avoir  $\langle L \rangle \subseteq \text{Im } f$  d'où  $K$  doit notamment être un facteur de composition de  $\text{Im } f$ . Cette contradiction évidente achève la preuve.  $\triangle$

L'affirmation précédente contredit l'indécomposabilité de  $M$ . En effet, dans le cas contraire, notons  $\mathcal{A}_1 = \{K \in \mathcal{A} \mid \langle K \rangle \subseteq \text{Ker } f\}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \{K \in \mathcal{A} \mid \langle K \rangle \not\subseteq \text{Ker } f\}$ ,  $M_1 = \sum_{K \in \mathcal{A}_1} \langle K \rangle$  et  $M_2 = \sum_{K \in \mathcal{A}_2} \langle K \rangle$ . Alors, on a  $L_1 \in \mathcal{A}_1 \neq \emptyset$  et  $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$  car  $f \neq 0$  de sorte que les sous-modules  $M_1$  et  $M_2$  sont non nuls. De plus,  $M = M_1 + M_2$  (puisque tous les facteurs de  $\text{top } M$  sont contenus dans  $M_1 + M_2$ ) et l'affirmation 1 montre que les facteurs de composition de  $M_1$  et  $M_2$  doivent être distincts<sup>2</sup>. En d'autres termes,  $M = M_1 \oplus M_2$  et on obtient effectivement une contradiction avec l'indécomposabilité de  $M$ . Il s'ensuit donc que le morphisme  $f$  doit être nul de sorte que  $\text{Hom}(M, N) = 0$  comme voulu. Par conséquent, la suite (E.1) identifie  $\text{End } M$  à un sous-espace de  $\text{Hom}(M, L_1) \simeq \mathbb{C}$  et on peut conclure la démonstration de cette proposition en notant que l'application identité de  $M$  est un élément non nul de  $\text{End } M$ .  $\square$

Notons  $I$  l'idéal bilatère de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  engendré par  $Y - y(d_1, z_1)\text{id}$ . Alors, l'algèbre quotient  $\text{TL}_N^a(\beta)/I$  est appelée *algèbre de blob* et est habituellement désignée par  $\text{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$

<sup>1</sup>On distingue ici les facteurs de composition isomorphes de  $M$ .

<sup>2</sup>En effet, si  $M_1$  et  $M_2$  partagent un facteur de composition  $K$ , leur définition montre qu'il doit exister  $L \in \mathcal{A}_1$  et  $L' \in \mathcal{A}_2$  tels que  $K$  est un facteur de composition commun à  $\langle L \rangle$  et  $\langle L' \rangle$ .



avec  $\beta_1$  et  $\beta_2$  des paramètres complexes dépendant du choix de la valeur propre  $y(d_1, z_1)$ . Cette algèbre a été étudiée abondamment (cf. [4], [7], [36]) et est très utilisée en physique mathématique (voir [17]). Notons  $\pi$  la projection canonique de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$  sur  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Notons aussi  $\mathrm{Ann}(I)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TL}_N^a(\beta)$  ayant pour objets la classe

$$\{M \in \mathrm{mod}\ \mathrm{TL}_N^a(\beta) \mid IM = 0\}$$

et appelons cette sous-catégorie *l'annihilateur* de l'idéal  $I$ . Sur un  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ -module  $M$ , on peut définir une  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -action  $\bullet$  à l'aide de la projection  $\pi$ , c'est-à-dire

$$a \bullet m = \pi(a)m$$

pour  $a \in \mathrm{TL}_N^a(\beta)$  et  $m \in M$ . Ce procédé donne lieu à un foncteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  à  $\mathrm{Ann}(I)$  qui agit sur les morphismes comme l'identité. De même, si  $M \in \mathrm{Ann}(I)$ , on peut utiliser la surjectivité de  $\pi$  afin de définir une  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ -action  $\diamond$  sur  $M$  via

$$b \diamond m = am$$

pour  $b \in \mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  et  $m \in M$  avec  $b = \pi(a)$ . Cette action est bien définie puisque  $\mathrm{Ker}\ \pi = I$  et  $M \in \mathrm{Ann}(I)$ . Elle permet ainsi de définir un foncteur  $\mathcal{G}$  de la catégorie  $\mathrm{Ann}(I)$  à  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  qui agit comme l'identité sur les morphismes. On montre aisément qu'il s'agit d'un foncteur quasi-inverse à  $\mathcal{F}$  d'où les catégories  $\mathrm{Ann}(I)$  et  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  sont équivalentes. En particulier, la sous-catégorie pleine  $\mathrm{Ann}(I)$  contient tous les quotients et les sous-modules de ses objets de sorte que les suites exactes courtes de  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$  sont exactement les suites exactes courtes de  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TL}_N^a(\beta)$  avec un objet de  $\mathrm{Ann}(I)$  au centre. La notion de  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ -module simple coïncide ainsi notamment avec celle de  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module simple contenu dans  $\mathrm{Ann}(I)$ .

Tentons maintenant de démontrer le lemme 4.5. Pour cela, supposons  $q^{d_1} \neq z_1^{\pm 2}$  et fixons  $(d_2, z_2) \in \Lambda^a(N)$  avec  $|d_1 - d_2| > 2p$ . Notons  $L_1 = L_{N, d_1; z_1}$ ,  $L_2 = L_{N, d_2; z_2}$  et  $W_1 = W_{N, d_1; z_1}(q)$ . Remarquons que, puisque  $W_1 \in \mathrm{Ann}(I)$  et que  $L_1$  est un quotient de  $W_1$ , on a  $L_1 \in \mathrm{Ann}(I)$  d'où les  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -modules  $L_1$  et  $W_1$  peuvent être vus comme des  $\mathrm{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ -modules.

**Lemme E.2.** Supposons  $\mathrm{Ext}_{\mathrm{TL}_N^a(\beta)}^1(L_1, L_2) \neq 0$ . Alors,  $L_2 \in \mathrm{Ann}(I)$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $M$  un  $\mathrm{TL}_N^a(\beta)$ -module pour lequel il existe une suite exacte courte non scindée dans  $\mathrm{mod}\ \mathrm{TL}_N^a(\beta)$

$$0 \rightarrow L_2 \rightarrow M \rightarrow L_1 \rightarrow 0$$

Alors,  $M$  admet deux facteurs de composition et doit être indécomposable. Ainsi, selon la proposition E.1, puisque  $\mathrm{top}\ M = L_1 \neq L_2$ , l'opérateur  $Y$  doit agir comme un multiple de l'identité sur  $M$ . Or,  $Y$  doit agir avec la même valeur propre sur le quotient  $L_1$  de  $M$  et sur le sous-module  $L_2 \subseteq M$  d'où on déduit le résultat voulu de la définition de  $\mathrm{Ann}(I)$ .  $\square$

Le lemme 4.5 est donc vérifié si  $L_2 \notin \text{Ann}(I)$ . Pour l'analyse des autres cas, on considère le lemme suivant qui est démontré dans [7] et pour lequel on note  $\text{TLb}_N = \text{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

**Lemme E.3** ([7]). Supposons  $L_2 \in \text{Ann}(I)$ . Alors,  $\text{Ext}_{\text{TLb}_N}^1(L_1, L_2) = 0$ .

La démonstration du lemme 4.5 est complétée via le lemme ci-dessous.

**Lemme E.4.** Supposons  $L_2 \in \text{Ann}(I)$ . Alors,  $\text{Ext}_{\text{TL}_N^a(\beta)}^1(L_1, L_2) = 0$ .

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire et soit  $M$  une extension non triviale de  $L_2$  par  $L_1$ . Alors,  $M$  est indécomposable et on a une suite exacte courte (non scindée) dans  $\text{mod TL}_N^a(\beta)$

$$0 \rightarrow L_2 \rightarrow M \rightarrow L_1 \rightarrow 0$$

Or,  $L_1$  et  $L_2$  sont des objets distincts de  $\text{Ann}(I)$  d'où  $M \in \text{Ann}(I)$  par une démarche analogue à celle considérée dans la preuve du lemme E.2. Ainsi,  $M$  équivaut à une extension non triviale<sup>3</sup> de  $L_2$  par  $L_1$  dans  $\text{mod TLb}_N$  d'où on contredit un de nos résultats précédents.  $\square$

Pour finir cette annexe, on montre le résultat suivant qui permet de conclure qu'il existe des  $\text{TLb}_N$ -modules possédant une structure analogue à celle des  $\mathfrak{Vir}$ -modules de Feigin-Fuchs.

**Corollaire E.5.** Soit  $d_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  satisfaisant  $d_1 \leq N$  et  $d_1 \equiv_2 N$ . Fixons aussi  $q, v_1, z_1 \in \mathbb{C}$  avec  $v_1^{-N} = z_1$  et notons  $y(d_1, z_1)$  la valeur propre de l'opérateur d'arceau  $Y$  sur le module cellulaire  $W_{N, d_1; z_1}(q)$  ainsi que  $I$  l'idéal bilatère de  $\text{TL}_N^a(\beta)$  engendré par  $Y - y(d_1, z_1)\text{id}$ . Alors,  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1) \in \text{Ann}(I)$  d'où cet espace propre peut être vu comme un  $\text{TLb}_N(\beta, \beta_1, \beta_2)$ -module pour certains paramètres  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1)$  soit indécomposable<sup>4</sup>. Dans cette situation, les propositions et théorèmes 2.13, 4.2, 4.3, 4.6 et E.1 montrent que l'opérateur d'arceau  $Y$  doit agir comme un multiple de l'identité sur l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1)$ . Le résultat voulu découle alors du fait que, selon le corollaire 4.7, cet espace propre admet les mêmes facteurs de composition que le module cellulaire  $W_{N, d_1; z_1}$ . Supposons maintenant  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1)$  décomposable. Alors, les résultats du chapitre 4 indiquent que l'espace propre  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1)$  est semisimple. Dans ce cas, le théorème 4.1 montre que cet espace propre correspond à la somme directe des facteurs de composition du module cellulaire  $W_{N, d_1; z_1}$ . Ainsi, puisque ces facteurs de composition appartiennent à  $\text{Ann}(I)$  (étant donné qu'il s'agit de sous-quotients de  $W_{N, d_1; z_1}$ ), on doit encore avoir  $\mathbb{C}_N(q, v_1, d_1) \in \text{Ann}(I)$ . Ceci achève cette démonstration.  $\square$

<sup>3</sup>Cette extension doit être non triviale puisque  $\text{Ann}(I)$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{mod TL}_N^a(\beta)$ .

<sup>4</sup>Rappelons qu'un module simple est indécomposable.