

**Université de Montréal**

**La famille exceptionnelle des algèbres à couture**

par

**Alexis Leroux-Lapierre**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

24 août 2020



# Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

## **La famille exceptionnelle des algèbres à couture**

présenté par

**Alexis Leroux-Lapierre**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Dimitris Koukoulopoulos*

---

(président-rapporteur)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(directeur de recherche)

*Ibrahim Assem*

---

(membre du jury)



## Résumé

---

Ce mémoire étudie la théorie de la représentation des algèbres de Temperley-Lieb à couture  $\mathfrak{b}_{n,k}(\beta)$  et plus particulièrement la famille exceptionnelle des algèbres à couture  $\mathfrak{b}_{n,\ell}(\beta)$ . Les algèbres à couture sont paramétrées par deux entiers positifs et un paramètre complexe  $q \in \mathbb{C}^\times$  tel que  $\beta = q + q^{-1}$ . La famille  $\mathfrak{b}_{n,\ell}(\beta)$  fait intervenir un entier positif  $\ell$  satisfaisant  $q^{2\ell} = 1$ . Les algèbres à couture ont été introduites par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15] et elles ont été étudiées par Langlois-Rémillard et Saint-Aubin [LRSA20] lorsqu'elles ne font pas partie d'une certaine famille dite exceptionnelle. Il a été souligné par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout que la famille manquante nécessiterait probablement une analyse particulière. Ce mémoire a comme objectif d'introduire des outils servant au traitement de la famille manquante. Plus particulièrement, en réinterprétant les relations définissant les algèbres à couture, l'algèbre  $\mathfrak{b}_{n,\ell}(\beta)$  est identifiée à un quotient de l'algèbre à une frontière par un idéal nilpotent engendré par un élément généralisant les projecteurs de Wenzl-Jones.

Le premier chapitre introduit les algèbres de Temperley-Lieb classiques ainsi que certaines de leurs variantes, c'est-à-dire l'analogue affine et l'analogue à une frontière. Les propriétés élémentaires de ces algèbres sont présentées de manière concise pour offrir au lecteur une revue des éléments utiles aux prochains chapitres. Le second chapitre définit et étudie des éléments centraux, idempotents et nilpotents des algèbres de Temperley-Lieb et des algèbres à une frontière. Plusieurs théorèmes donnant la structure des modules cellulaires sont aussi présentés. Finalement, une dernière section passe en revue les caractéristiques du quotient d'une algèbre par un idéal d'un point de vue catégorique. Le troisième chapitre fait la théorie de la représentation des algèbres à une frontière lorsqu'elles ne sont pas semisimples. Le calcul de la matrice de Cartan est fait et la structure des modules projectifs est explicitée pour les blocs de l'algèbre ayant un nombre suffisamment petit de classes d'isomorphisme de modules simples. Le quatrième chapitre présente finalement les algèbres à couture et la famille exceptionnelle des algèbres à couture. La théorie de la représentation de deux familles infinies membres du cas exceptionnel est faite et le cas général est discuté. Plusieurs

techniques servant à construire les modules projectifs indécomposables du cas exceptionnel sont données.

Mots clés : Théorie de la représentation, algèbres cellulaires, idéaux nilpotents, algèbres de Temperley-Lieb à une frontière, algèbres à coutures, projecteurs de Wenzl-Jones.

## Abstract

---

This thesis studies the representation theory of the Temperley-Lieb seam algebras  $\mathfrak{b}_{n,k}(\beta)$ , more specifically the exceptional family of seam algebras  $\mathfrak{b}_{n,\ell}(\beta)$ . The seam algebras are parametrized by two positive integers and one complex parameter  $q \in \mathbb{C}^\times$  such that  $\beta = q + q^{-1}$ . The family  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$  involves a positive integer  $\ell$  satisfying  $q^{2\ell} = 1$ . The seam algebras were introduced by Morin-Duchesne, Rasmussen and Ridout [MDRR15] and they were studied by Langlois-Rémillard and Saint-Aubin [LRS20] when they are not part of a particular case which is called exceptional. It was highlighted by Morin-Duchesne, Rasmussen and Ridout that the missing cases would probably need a separate analysis. This thesis has the objective of introducing tools which render the study of those missing cases possible. More specifically, by reinterpreting the defining relations of the seam algebras, the algebras  $\mathfrak{b}_{n,\ell}(\beta)$  are redefined as a quotient of the one boundary algebras by a nilpotent ideal generated by an element which generalises the Wenzl-Jones projectors.

The first chapter introduces the Temperley-Lieb algebras and some of its generalized counterparts, including the affine analog and the one boundary analog. The elementary properties of those algebras are exposed in a concise manner as to offer the reader a review of the useful tools needed in the upcoming chapters. The second chapter defines and studies central, idempotent and nilpotent elements of the Temperley-Lieb algebras and the one boundary algebras. Many theorems giving the structure of the cell modules are also stated. A last section reviews key points concerning the category of an algebra quotiented by a two sided ideal. The third chapter does the representation theory of the one boundary algebras when they are not semisimple. The computation of the Cartan matrix is made and the structure of projective modules is uncovered for the blocks of the algebra having a small enough collection of simple modules. The fourth and last chapter presents the seam algebras and the exceptional family. The representation theory of two infinite cases part of the exceptional family is done and the general case is discussed. Many techniques useful for computing the projective modules of the exceptional case are given.

Keywords : Representation theory, cellular algebras, nilpotent ideals, one boundary Temperley-Lieb algebras, seam algebras, Wenzl-Jones projectors.



# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>Remerciements</b> .....	13
<b>Introduction</b> .....	15
<b>Chapitre 1. Les algèbres de Temperley-Lieb et leurs généralisations</b> .....	19
1.1. Les algèbres cellulaires .....	20
1.1.1. Définition .....	20
1.1.2. Propriétés élémentaires .....	22
1.2. Algèbres de Temperley-Lieb .....	23
1.2.1. Définition .....	23
1.2.2. Propriétés élémentaires .....	26
1.2.3. Les modules standards .....	27
1.3. Algèbres de Temperley-Lieb affines .....	28
1.3.1. Définition .....	28
1.3.2. Les modules standards .....	29
1.4. Algèbres de Temperley-Lieb à une frontière .....	30
1.4.1. Définition .....	30
1.4.2. Propriétés élémentaires .....	32

1.4.3.	Les modules standards .....	34
<b>Chapitre 2.</b>	<b>Éléments centraux, projecteurs et modules standards .....</b>	<b>35</b>
2.1.	Propriétés des $q$ -nombres .....	36
2.2.	Éléments centraux .....	37
2.2.1.	Un élément central de $TL_n$ .....	37
2.2.2.	Un élément central des algèbres à une frontière .....	40
2.3.	Projecteurs de Wenzl-Jones et leur généralisation .....	42
2.3.1.	Les projecteurs de Wenzl-Jones pour $TL_n$ .....	42
2.3.2.	Les projecteurs de Wenzl-Jones pour $TLb_n$ .....	46
2.4.	Morphismes de Graham-Lehrer .....	51
2.4.1.	Structure des modules standards de $TL_n$ .....	52
2.4.2.	Structure des modules standards de $aTL_n$ .....	52
2.4.3.	Structure des modules standards de $TLb_n$ .....	54
2.5.	La catégorie $\text{mod}(A/I)$ .....	55
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Représentations des algèbres de Temperley-Lieb à une frontière .....</b>	<b>57</b>
3.1.	Notions algébriques .....	58
3.1.1.	Diagrammes de Loewy .....	59
3.1.2.	Changement des scalaires .....	60
3.1.3.	Décomposition en blocs .....	60
3.2.	Les morphismes entre modules standards .....	61
3.2.1.	Un morphisme d'algèbres .....	61
3.2.2.	Application aux modules standards .....	65

3.3. Les patrons de morphismes .....	70
3.3.1. Définitions .....	70
3.3.2. Le cas critique .....	71
3.3.3. Le cas non critique .....	74
3.3.4. Algèbres quasi-héréditaires et catégories de plus haut poids .....	77
3.4. Modules projectifs .....	78
3.4.1. Remarques sur la catégorie $\text{mod TLb}_n$ .....	78
3.4.2. Les projectifs indécomposables des blocs non critiques .....	80
<b>Chapitre 4. Les algèbres à couture .....</b>	<b>87</b>
4.1. Définitions .....	87
4.2. $\mathbf{b}_{n,k}$ comme un quotient de $\text{TLb}_n$ .....	90
4.2.1. Les patrons de morphismes de $\text{TLb}_{n,k}$ .....	90
4.2.2. Modules projectifs des patrons stationnaires .....	94
4.3. L'idéal engendré par $\widehat{\mathbf{p}}_k^-$ .....	95
4.4. Structure de l'idéal $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$ .....	104
4.4.1. L'algèbre $\mathbf{b}_{n,\ell=n-1}$ .....	105
4.4.2. L'algèbre $\mathbf{b}_{n,\ell=n-2}$ .....	106
4.5. Conclusion : Le cas général $\mathbf{b}_{n,\ell}$ .....	110
<b>Bibliographie .....</b>	<b>113</b>

*À Vincent*

## Remerciements

---

Mon expérience personnelle me force à conclure que de mener à terme un projet de recherche ainsi qu'un projet d'écriture est une tâche qui ne peut être accomplie sans un soutien de la part des gens m'entourant de près ou de loin. Il m'est impossible de faire une liste complète de toutes ces personnes qui m'ont encouragé. Or, il m'est nécessaire de souligner plusieurs interactions significatives.

Je pense que je devrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Yvan Saint-Aubin pour sa sagesse. Notre collaboration m'a permis de m'orienter autant du point de vue de la recherche, du point de vue de la poursuite de mes études, mais surtout du point de vue humain. Tes conseils m'ont profondément marqué et ils me seront toujours très chers.

À mon ami Théo, nos discussions et nos balades m'ont appris beaucoup de choses qu'aujourd'hui je ne peux me passer. Ici, je ne parle ni de la culture française, ni de la zythologie, mais bien de la force de caractère ainsi que du dévouement. Un océan ne saura certainement pas diluer le plaisir que j'ai à t'avoir comme collègue, et surtout, comme ami.

Simon et Jérémie, merci d'avoir partagé avec moi autant d'années d'études et d'énigmes mathématiques. Votre présence m'a motivé et je suis certain que beaucoup de ma compréhension des mathématiques a ses racines dans nos multiples collaborations. Maintenant que vos carrières mathématiques prennent leur envol, j'espère que nous aurons la chance de travailler sur un projet commun éventuellement.

Aux anciens de l'équipe Yvannesque, je vous remercie pour votre soutien qui s'est senti même en votre absence. Un merci particulier à Alexis L-R qui a relu l'entièreté de ce manuscrit avant sa soumission. Je me dois de souligner aussi les précieux conseils de Jonathan, sans qui un chapitre complet n'aurait possiblement pas vu le jour. Aussi, j'aimerais exprimer ma gratitude envers Alexi M-D qui s'est offert comme cobaye à plusieurs de mes preuves lors de son passage à l'Université de Montréal. Aux nouveaux et aux vétérans de l'équipe Yvannesque, Philippe, Charles, Julia, Philip, Florence (et Théo), merci pour votre énergie et vos ateliers.

À mes parents, ma famille et mes amis, vos encouragements et votre soutien m'a permis de compléter ce chapitre important dans mon parcours mathématique. Je me rends bien compte que le cheminement académique est une voie particulière et que de pouvoir y consacrer tout son temps peut paraître absurde. Malgré cela, la richesse de l'expérience en vaut le coup et vous avez su y croire avec moi. Sans votre résilience, ce manuscrit serait probablement inexistant ou incomplet. Je vous en serai éternellement reconnaissant.

# Introduction

---

Certains problèmes importants de la théorie des nœuds et d'autres de la physique mathématique ont su trouver leurs solutions surprenamment au même endroit. Ce sont les algèbres de Temperley-Lieb, introduites en 1971 par Lieb et Temperley [TL71], qui ont permis d'attaquer ces énigmes en apparence distinctes. Elles sont aujourd'hui bien connues de la communauté mathématique ainsi que de la communauté physique. Sans en faire une liste exhaustive, ces algèbres ont joué un rôle important dans un contexte de mécanique statistique, par exemple dans l'étude de la théorie conforme des champs. Les modèle d'Ising et de Potts [Mar91] sont en effet souvent formulés en terme des algèbres de Temperley-Lieb et de leurs représentations. Du côté mathématique, elles ont servi à Graham et Lehrer [GL96] lors de l'élaboration d'un ensemble d'axiomes définissant une certaine classe d'algèbres, nommées les algèbres cellulaires. De là, plusieurs problèmes physiques intéressants ont été énoncés à l'aide des généralisations des algèbres de Temperley-Lieb, à savoir : les algèbres de Temperley-Lieb affines [GL97], à une frontière [MS94], à deux frontières [DGN09], diluées [BRSA17] et à couture [MDRR15]. Chacune de ces généralisations s'est avérée utile dans un contexte de mécanique statistique et il est naturel d'étudier la théorie de la représentation de ces algèbres.

Ce mémoire s'intéresse plus précisément aux algèbres à couture. Celles-ci ont été introduites par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15] avec pour objectif d'offrir un contexte algébrique à certains modèles physiques bidimensionnels avec des conditions limites. Elles ont ensuite été étudiées par Langlois-Rémillard et Saint-Aubin [LRSA20] de manière systématique, à l'exception d'un cas bien particulier qui avait d'ailleurs été mentionné comme manquant à l'analyse par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout.

L'objectif de ce mémoire est de comprendre tout d'abord ce qui distingue le cas manquant et ensuite d'identifier avec quels outils l'analyser. L'idée guidant ce mémoire consiste en une généralisation des projecteurs de Wenzl-Jones pour l'algèbre à une frontière servant à définir les algèbres à couture comme un quotient des algèbres à une frontière par l'idéal engendré par ce nouveau pseudo-projecteur. Ainsi, il est démontré qu'en faisant la théorie de la représentation des algèbres à une frontière, il est possible grâce à plusieurs détours de

nature catégorique de déduire la théorie de la représentation du cas manquant des algèbres à couture.

Le premier chapitre offre une revue concise des variantes des algèbres de Temperley-Lieb utiles au cours du texte. Toutes les propriétés présentées sont connues depuis plusieurs années. Une revue de la théorie des algèbres cellulaires est aussi faite pour permettre au texte d'être autoportant. *Le chapitre 1 ne contient aucun élément mathématique original.*

Le deuxième chapitre est quant à lui conçu comme une « boîte à outils des algèbres de Temperley-Lieb ». Dans celui-ci, des éléments centraux, idempotents et nilpotents sont définis. Une formule par récurrence permettant de générer des éléments centraux de l'algèbre de Temperley-Lieb est donnée. Cette formule permet entre autres de construire un élément central analogue pour les algèbres à une frontière. De plus, les projecteurs de Wenzl-Jones classiques y sont définis à l'aide d'une présentation permettant à la section suivante de définir un analogue de ces projecteurs pour les algèbres à une frontière. Il est démontré que ces nouveaux éléments, appelés projecteurs de Wenzl-Jones généralisés, sont idempotents ou nilpotents tout dépendant de la valeur des paramètres définissant l'algèbre. L'avant-dernière section rappelle certains théorèmes concernant les modules cellulaires des trois familles d'algèbres introduites au chapitre 1 et la dernière section présente un interlude catégorique s'avérant utile au chapitre 4. *Le chapitre 2 contient des éléments mathématiques qui sont, à ma connaissance, nouveaux. Ceci comprend :*

- la formule par récurrence de l'élément  $\mathbf{f}_n$ ,
- la construction de l'élément  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  à l'aide de  $\mathbf{f}_n$ ,
- tous les théorèmes et définitions relatifs aux nouvelles familles de pseudo-projecteurs  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  et  $\widehat{\mathbf{p}}_m^+$ .

Le chapitre 3 débute en introduisant quelques notions algébriques bien connues. Les deux sections suivantes attaquent le problème de la théorie de la représentation des algèbres à une frontière lorsqu'elles ne sont pas semisimples. La structure des modules standards de l'algèbre à une frontière est déduite grâce aux théorèmes déjà connus de Graham et Lehrer donnant la structure des modules standards de l'algèbre de Temperley-Lieb affine. La construction des diagrammes de Loewy ainsi que le calcul des matrices de Cartan des blocs de l'algèbre à une frontière sont faits. La dernière section calcule les diagrammes de Loewy des modules projectifs indécomposables des blocs non critiques de l'algèbre à une frontière ayant un nombre suffisamment petit de classes d'isomorphismes de modules simples. *Le chapitre 3 contient des éléments mathématiques qui sont, à ma connaissance, nouveaux. Ceci comprend :*

- le critère arithmétique permettant de déterminer la présence d'un morphisme entre deux modules standards de l'algèbre à une frontière,

- l'interprétation géométrique des morphismes entre les modules standards,
- le calcul de la matrice de Cartan de l'algèbre à une frontière,
- le calcul des modules projectifs indécomposables pour les blocs non critiques de l'algèbre à une frontière ayant un nombre suffisamment petit de classes d'isomorphismes de modules simples.

En ce qui concerne le dernier point de cette liste, j'ai eu l'occasion de discuter à plusieurs reprises avec Jonathan Belletête qui publiera avec ses collaborateurs dans un futur rapproché des résultats généralisant ceux présents dans ce mémoire.

Le chapitre 4 est le point culminant de ce mémoire étant donné qu'il attaque au moyen des premiers chapitres le problème de la famille exceptionnelle des algèbres à couture. La première section présente la définition originale des algèbres à couture et il est démontré que tous les cas n'étant pas exceptionnels sont des algèbres cellulaires. Cette preuve est due à Langlois-Rémillard et Saint-Aubin [LRS20]. La deuxième section calcule les patrons de morphismes et les modules projectifs indécomposables de certaines familles infinies d'algèbres à une frontière qui serviront ensuite à étudier le cas exceptionnel des algèbres à couture. La troisième section réinterprète le cas exceptionnel comme un quotient des algèbres à une frontière par l'idéal engendré par la généralisation des projecteurs de Wenzl-Jones donnée au chapitre 2. Une base de l'idéal est donnée et sa dimension est calculée. Il est démontré que dans le cas exceptionnel, et seulement dans celui-ci, cet idéal est nilpotent. La dernière section fait la théorie de la représentation de deux familles infinies et discute le cas général. *Le chapitre 4 contient des éléments mathématiques qui sont, à ma connaissance, nouveaux. Ceci comprend :*

- l'interprétation de  $\mathbf{b}_{n,\ell}$  comme un quotient de  $\mathrm{TLb}_{n,\ell}$  par un idéal nilpotent,
- tous les calculs relatifs aux familles infinies  $\mathbf{b}_{n,n-\epsilon}$ ,
- le calcul d'une base et de la dimension de l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$ ,
- la théorie de la représentation de  $\mathbf{b}_{n,\ell}$ .

## Notation

— *Les produits* : La définition suivante sera sous-entendue à plusieurs reprises dans le texte.

**Définition 0.1.** Pour  $A$  une algèbre n'étant pas nécessairement commutative, si  $a_1, \dots, a_n \in A$ , la convention

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n$$

est utilisée. Ainsi, les produits sont définis de gauche à droite.

Le produit vide d'éléments de  $A$  est défini comme valant **id**, où **id** est l'identité de  $A$ . Lorsque l'ensemble indexant un produit, par exemple  $\prod_{i=m}^n$  est tel que  $m > n$ , alors le produit est défini comme étant vide.

—  $K$  et  $\mathbb{K}$  : La notation  $K$  désigne un anneau commutatif tandis que  $\mathbb{K}$  est utilisée pour un corps (peut-être gauche).

— *Catégories de modules* : La notation  $\text{mod } A$  est utilisée pour dénoter la catégorie des  $A$ -modules gauches de dimension finie.

— *Les coefficients binomiaux* : Si  $k > n$ , le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  est défini comme valant 0.

— *Relations de congruence* : Lorsque deux entiers  $m_1, m_2$  sont congruents modulo  $n$ , cette relation est dénotée par  $m_1 \equiv_n m_2$ .

— *Paramètres génériques* : Plusieurs définitions font intervenir un paramètre complexe  $q \in \mathbb{C}^\times$ . Celui-ci est dit générique lorsqu'il n'est pas une racine de l'unité. Formellement, un paramètre générique correspond à une variable formelle  $q$  et les expressions comprenant des puissances de  $q$  et  $q^{-1}$  sont définies comme des éléments de  $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ .

— *Racines de l'unité* : La lettre  $\ell$  est utilisée pour dénoter, s'il existe, l'entier positif minimal tel que  $q^{2\ell} = 1$ .

# Chapitre 1

---

## Les algèbres de Temperley-Lieb et leurs généralisations

Ce chapitre introduit les algèbres de Temperley-Lieb et leurs généralisations. Ce sont des familles d'algèbres associatives unitaires jouant un rôle important tant en mathématiques qu'en physique. Les familles introduites dans ce chapitre sont

- les algèbres de Temperley-Lieb classiques  $TL_n(\beta)$ ,
- les algèbres de Temperley-Lieb affines  $aTL_n(\beta)$  et
- les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière  $TLb_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

La définition ainsi que quelques propriétés élémentaires de chacune sont données. Elles seront utilisées ultérieurement dans ce mémoire.

L'objectif est d'étudier au chapitre suivant les représentations de  $TLb_n$  pour certains paramètres exceptionnels. Les familles citées ci-dessus jouent un rôle crucial dans l'établissement de ces résultats. Les différentes sections présentent de manière analogue chacune de ces familles d'algèbres.

Tout d'abord, une courte revue des algèbres cellulaires est donnée. Cette introduction permet de souligner les similitudes entre les différentes familles d'algèbres de Temperley-Lieb. La synthèse de la théorie des algèbres cellulaires présentée n'est pas complète, mais les propriétés essentielles à ce mémoire sont données sans preuve. L'article de Graham et Lehrer [GL96], qui a défini et établi les fondements des algèbres cellulaires, sert de canevas pour cette présentation. Le texte de Mathas [Mat99] est aussi une référence utile.

La seconde section explore les algèbres de Temperley-Lieb classiques en s'inspirant du travail de Ridout et Saint-Aubin [RSA14]. Le contexte plus général des  $(m, n)$ -diagrammes est utilisé ici pour faciliter l'introduction des modules standards par la suite.

Le troisième section couvre les algèbres de Temperley-Lieb affines. La publication présentant originalement les différents résultats exposés ici est celle de Graham et Lehrer [GL97]. L'article de Belletête et Saint-Aubin [BSA18] présente ces mêmes résultats de manière concise et surtout adaptée au formalisme utilisé dans ce mémoire. Les théorèmes nécessaires aux prochains chapitres s'y trouvent.

La quatrième section introduit les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière. Cette famille a été introduite par Martin et Saleur [MS94]. Plusieurs des théorèmes concernant les algèbres à une frontière ont été reformulés par Houde Therrien [HT18]. C'est cette présentation qui sera suivie.

## 1.1. Les algèbres cellulaires

### 1.1.1. Définition

Les sections suivantes montreront l'importance de la prochaine définition. En effet, les algèbres de Temperley-Lieb seront un exemple d'algèbres cellulaires.

**Définition 1.1** (Algèbre cellulaire). Soit une  $K$ -algèbre  $A$ . Elle est dite cellulaire s'il existe un tuple  $(\Lambda, M, c, *)$  où

- $(\Lambda, \prec)$  est un ensemble fini<sup>1.1</sup> partiellement ordonné,
- pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $M(\lambda)$  est un ensemble fini,
- $c$  est une application  $c : \coprod_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow A$ ,
- $*$  est une application  $*$  :  $A \rightarrow A^{\text{op}}$ ,

respectant les trois propriétés suivantes :

- (1) l'application  $c$  est injective et  $\text{Im } c$  est une base de  $A$ ,
- (2) l'application  $*$  est une anti-involution et pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $s, t \in M(\lambda)$ ,  $c(s, t)^* = c(t, s)$ ,
- (3) pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $s, t \in M(\lambda)$ , tout élément de  $a \in A$  respecte

$$a \cdot c(s, t) \equiv \sum_{s' \in M(\lambda)} r_a(s', s) c(s', t) \pmod{A^{\prec \lambda}},$$

où  $r_a(s', s) \in K$  est une constante indépendante de  $t$  et  $A^{\prec \lambda}$  est le sous- $K$ -module engendré par  $\{c(\tilde{s}, \tilde{t}); \tilde{s}, \tilde{t} \in M(\mu) \text{ et } \mu \prec \lambda\}$ .

---

1.1. Cette condition n'est pas spécifiée dans [GL96], mais elle l'est dans [Mat99]. Elle est spécifiée ici pour simplifier certains résultats.

Intuitivement, la propriété (1) demande qu'il soit possible de diviser (possiblement de manière non canonique) en deux copies un élément de  $A$  de manière unique. La propriété (2) demande à ce que cette division soit symétrique par rapport à l'anti-involution. La propriété (3) est plus restrictive. Elle stipule que l'action de  $A$  ne peut que faire diminuer l'ordre cellulaire. Ceci sert à fabriquer des modules sur  $A$ . C'est cette propriété qui est soulignée dans la prochaine définition.

**Définition 1.2** (Modules cellulaires<sup>1.2</sup>). Pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , le module à gauche  $W_\lambda$  est le  $K$ -module libre ayant pour base l'ensemble formel  $\{d(s); s \in M(\lambda)\}$  de même cardinalité que  $M(\lambda)$ . L'action de  $A$  sur  $W_\lambda$  est définie sur cette base par

$$a \cdot d(s) = \sum_{s' \in M(\lambda)} r_a(s', s) d(s')$$

où  $r_a(s', s)$  provient de la propriété (3) de la définition 1.1.

Les modules standards ont la propriété de posséder une forme bilinéaire symétrique. La construction de cette application est la suivante. Pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $s_1, t_1, s_2, t_2 \in M(\lambda)$ , en appliquant directement la propriété (3) de la définition 1.1, un calcul direct montre que

$$c(s_1, t_1)c(s_2, t_2) \equiv \sum_{s' \in M(\lambda)} r_{c(s_1, t_1)}(s', s_2)c(s', t_2) \pmod{A^{\prec \lambda}}$$

et

$$c(t_2, s_2)c(t_1, s_1) \equiv \sum_{s' \in M(\lambda)} r_{c(t_2, s_2)}(s', t_1)c(s', s_1) \pmod{A^{\prec \lambda}}.$$

La compatibilité avec l'anti-involution issue de la propriété (2) de la définition 1.1 donne

$$(c(s_1, t_1)c(s_2, t_2))^* = c(s_2, t_2)^*c(s_1, t_1)^* = c(t_2, s_2)c(t_1, s_1).$$

Puisque  $\text{Im } c$  est une base de  $A$ , il s'ensuit que

$$\sum_{s' \in M(\lambda)} r_{c(s_1, t_1)}(s', s_2)c(s', t_2) = \sum_{s' \in M(\lambda)} r_{c(t_2, s_2)}(s', t_1)c(s_1, s')$$

et l'indépendance linéaire garantit que les sommes ci-dessus ne fassent intervenir qu'un seul terme :

$$r_{c(s_1, t_1)}(s_1, s_2) = r_{c(t_2, s_2)}(t_2, t_1), \\ \forall s' \neq s_1 \quad r_{c(s_1, t_1)}(s', s_2) = 0 \quad \text{et} \quad \forall s' \neq t_2 \quad r_{c(t_2, s_2)}(s', t_1) = 0.$$

---

1.2. Les modules cellulaires sont parfois appelés modules standards. L'appellation standard sera utilisée pour les algèbres de Temperley-Lieb et le terme cellulaire sera réservé pour la théorie des algèbres cellulaires.

Ainsi, le seul coefficient intervenant dans cette somme ne peut dépendre que de  $t_1$  et  $s_2$ , car il est uniquement dépendant de  $s_1, t_1, s_2$  du côté gauche de l'égalité et de  $s_2, t_1, t_2$  du côté droit. Il faut donc

$$r_{c(s_1, t_1)}(s_1, s_2) = r_{c(t_2, s_2)}(t_2, t_1)$$

pour tout  $s_1, t_2$ . Cette remarque permet de définir la fonction  $\phi_\lambda : M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow K$  par  $\phi_\lambda(t_1, s_1) = r_{c(s_1, t_1)}(s_1, s_2)$  pour un  $s_2 \in M(\lambda)$  quelconque.

**Proposition 1.3.** *L'application  $\phi_\lambda$  s'étend (bi)linéairement sur les modules  $W_\lambda$  et elle est symétrique. De plus,  $\phi_\lambda(ax, y) = \phi_\lambda(x, a^*y)$ .*

L'étude de la forme bilinéaire  $\phi_\lambda$  se ramène donc dans plusieurs cas à l'étude de la matrice suivante.

**Définition 1.4** (Matrice de Gram). Pour  $\lambda \in \Lambda$ , la matrice de Gram associée à  $\lambda$  est définie par

$$\mathfrak{G}_\lambda = (\phi_\lambda(s, t))_{(s, t) \in M(\lambda) \times M(\lambda)}$$

et cette matrice est symétrique.

## 1.1.2. Propriétés élémentaires

Au cours de cette section,  $\mathbb{K}$  est un corps et  $A$  une algèbre cellulaire. La notation suivante sera utilisée :

- $\text{rad } \lambda = \{x \in W_\lambda; \phi_\lambda(x, y) = 0, \forall y \in W_\lambda\} \subset W_\lambda$ ,
- $\Lambda_0 = \{\lambda; \text{rad } \lambda \neq W_\lambda\} \subset \Lambda$  et
- pour  $\lambda \in \Lambda_0$ ,  $L_\lambda = W_\lambda / \text{rad } \lambda$ .

Les propositions suivantes sont démontrées dans [GL96] et [Mat99].

**Proposition 1.5** (Radical). *L'ensemble  $\text{rad } \lambda$  est un sous-module de  $W_\lambda$ . De plus, si  $\lambda \in \Lambda_0$ ,  $\text{rad } \lambda$  est le radical de Jacobson de  $W_\lambda$ .*

**Proposition 1.6** (Coiffe). *Pour  $\lambda \in \Lambda_0$ , la coiffe du module  $W_\lambda$  est simple. Conséquemment,  $W_\lambda$  est indécomposable.*

**Proposition 1.7** (Modules simples). *L'ensemble des modules  $L_\lambda$  pour  $\lambda \in \Lambda_0$  forme un ensemble complet de  $A$ -modules simples à isomorphisme près. De plus, pour  $\lambda, \mu \in \Lambda_0$  distincts,  $L_\lambda \not\cong L_\mu$ .*

**Proposition 1.8** (Semisimpliçité). *L'algèbre  $A$  est semisimple si et seulement si  $\det \mathfrak{G}_\lambda \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .*

Pour  $\lambda \in \Lambda$  et  $\mu \in \Lambda_0$ , soit  $d_{\lambda,\mu}$  l'entier défini comme le nombre de facteurs de composition isomorphes à  $L_\mu$  dans  $W_\lambda$ . Ce nombre est bien défini puisque  $L_\mu$  est un module simple.

**Proposition 1.9** (Filtration des projectifs). *Soit  $P$  un  $A$ -module projectif. Alors,  $P$  admet une filtration  $(P_i)_{1 \leq i \leq m}$  telle que chaque quotient  $P_i/P_{i-1}$  est isomorphe à un module cellulaire. De plus, si  $P$  est un projectif indécomposable, alors la filtration respecte l'ordre cellulaire, c'est-à-dire si  $i < j$ ,  $P_i/P_{i-1} \simeq W_\lambda$  et  $P_j/P_{j-1} \simeq W_\mu$ , alors si  $\lambda$  et  $\mu$  sont comparables,  $\lambda \prec \mu$ .*

**Proposition 1.10** (Matrice de Cartan). *La matrice  $D = (d_{\lambda,\mu})_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times \Lambda_0}$  est telle que si  $\mu \prec \lambda$ ,  $d_{\lambda,\mu} = 0$ , et  $d_{\mu,\mu} = 1$ . De plus,  $C_A = D^T D$ . où  $C_A$  est la matrice de Cartan de  $A$ .*

## 1.2. Algèbres de Temperley-Lieb

Les algèbres de Temperley-Lieb sont une famille de  $\mathbb{C}$ -algèbres dépendant de deux paramètres. L'un est un paramètre de taille, noté  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , et l'autre un nombre complexe non nul, noté  $q \in \mathbb{C}^\times$ . Il est commode de définir  $\beta = q + q^{-1}$ . Dans la majeure partie de la littérature, la notation utilisée pour ces algèbres est  $TL_n(\beta)$ . Cette section sera consacrée à définir et à établir des propriétés élémentaires de ces algèbres.

### 1.2.1. Définition

Il est possible de définir les algèbres de Temperley-Lieb de deux manières différentes qui s'avéreront équivalentes. Ces deux définitions sont présentées ici et l'article de Ridout et Saint-Aubin [RSA14] donne une preuve de l'équivalence.

**Définition 1.11** (Algèbres de Temperley-Lieb définies par générateurs et relations). Pour  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $TL_n(\beta)$  est engendrée par les générateurs  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  et **id** assujettis aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \beta e_i && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i && \text{pour } i, i\pm 1 \in \{1, \dots, n-1\}, \\ e_i e_j &= e_j e_i && \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| > 1, \end{aligned}$$

et où **id** est l'identité de l'algèbre.

Cette définition souligne le fait que les générateurs agissent localement, au sens où les relations de commutation ne sont non triviales que si deux générateurs sont adjacents dans la liste. De plus, la définition montre que la famille  $\{\mathrm{TL}_n(\beta)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}}$  possède une structure de tour, c'est-à-dire que pour  $m < n$ , il existe une inclusion d'algèbres  $\iota_{n,m} : \mathrm{TL}_m(\beta) \rightarrow \mathrm{TL}_n(\beta)$  définie par  $\iota_{n,m}(e_i) = e_i$  pour  $1 \leq i \leq m - 1$ .

La seconde manière de définir les algèbres de Temperley-Lieb est à partir de diagrammes. Cette définition permet de visualiser la multiplication entre les éléments, de produire le tuple  $(\Lambda, M, c, *)$  de la définition 1.1 et donc de montrer que  $\mathrm{TL}_n$  est une algèbre cellulaire.

**Définition 1.12** ( $(m, n)$ -diagramme). Étant donné deux entiers  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  de même parité, un  $(m, n)$ -diagramme est obtenu par la construction géométrique suivante : Soient deux segments verticaux face à face, le gauche portant  $m$  points équidistribués<sup>1.3</sup> et le droit en portant  $n$ . Tous ces points sont liés deux à deux par des courbes tracées à l'intérieur de la région formée par les deux segments verticaux et ne s'intersectant pas. Deux diagrammes sont considérés équivalents s'ils le sont à isotopie près. Le résultat est appelé un  $(m, n)$ -diagramme.

D'après la définition 1.12, la condition que  $m$  et  $n$  soient de même parité est redondante étant donné que chaque lien possède deux extrémités. La construction force ainsi cette condition.

Lorsqu'un  $(m, n)$ -diagramme sera illustré, la terminologie suivante sera utilisée :

- un lien est un segment présent dans le diagramme,
- un site est un point étant sur l'une des deux droites verticales,
- une boucle est un lien passant d'une droite verticale vers elle-même,
- un lien transversal est un lien passant d'un site de gauche à un site de droite,
- si un  $(n, j)$ -diagramme, pour  $n \geq j$ , possède exactement  $j$  liens transversaux, ceux-ci sont appelés des défauts et
- un  $(n, n)$ -diagramme est appelé un  $n$ -diagramme.

Pour clarifier la construction de la définition 1.12, voici un exemple de  $(6, 2)$ -diagramme et un de  $(3, 5)$ -diagramme :

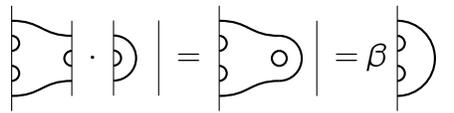


Dans la figure précédente, le  $(6, 2)$ -diagramme a 2 boucles et 2 liens transversaux tandis que le  $(3, 5)$ -diagramme a 3 boucles et 1 lien transversal. Le  $(6, 2)$ -diagramme possède 2 défauts.

1.3. La disposition des points est purement esthétique.

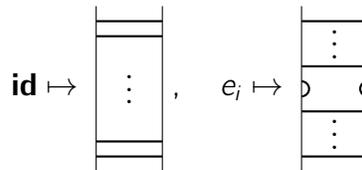
Soit le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par l'ensemble des  $(m, n)$ -diagrammes. Sur cet espace, la multiplication de deux diagrammes est définie comme suit. Étant donné un  $(m_1, n_1)$ -diagramme et un  $(m_2, n_2)$ -diagramme, le résultat de la multiplication est défini comme étant nul si  $n_1 \neq m_2$ . Si  $n_1 = m_2$ , alors le résultat de la multiplication est le  $(m_1, n_2)$ -diagramme résultant de la concaténation des deux diagrammes et du retrait du segment central. La concaténation est faite en disposant le  $(m_1, n_1)$ -diagramme à gauche et le  $(m_2, n_2)$ -diagramme à droite. Dans l'éventualité où des bulles sont formées lors de la concaténation, chacune de ces bulles est retirée et est remplacée par un facteur multiplicatif  $\beta = q + q^{-1}$ . Cette définition s'étend linéairement aux sommes de diagrammes.

Voici un exemple de multiplication d'un  $(6, 4)$ -diagramme et d'un  $(4, 0)$ -diagramme :



**Définition 1.13** (Algèbres de Temperley-Lieb définies par diagrammes). La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $TL_n(\beta)$  est définie comme le sous-espace vectoriel des  $n$ -diagrammes muni du produit par concaténation décrit précédemment.

L'isomorphisme entre les algèbres de la définition 1.11 et 1.13 est donné par



où, comme l'indique la figure ci-dessus, **id** est envoyée au diagramme ayant  $n$  liens transversaux tandis que  $e_i$  est envoyé au diagramme ayant une boucle aux sites  $i$  et  $i + 1$ . Une preuve que cette application est un isomorphisme est donnée dans [RSA14] (théorème 2.4). La preuve originale provient de [Kau90].

Les données cellulaires  $(\Lambda, M, c, *)$  pour  $TL_n$  sont les suivantes. Tout d'abord, l'ensemble partiellement ordonné  $\Lambda$  est donné par

$$\Lambda = \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; 0 \leq m \leq n \text{ et } m \equiv_2 n\}$$

muni de l'ordre total induit par  $\mathbb{Z}$ . Pour  $j \in \Lambda$ , l'ensemble  $M(j)$  est l'ensemble des  $(n, j)$ -diagrammes ayant exactement  $j$  liens transversaux (tous les sites de droite sont donc occupés par un lien transversal). L'application  $c$  prend deux  $(n, j)$ -diagrammes ayant  $j$  liens transversaux, les combine en laissant le premier à la gauche, en effectuant une réflexion par un miroir vertical du second et finalement en les concaténant. L'anti-involution  $*$  consiste en la

réflexion selon un axe vertical d'un diagramme et elle est étendue linéairement aux sommes de diagrammes.

Voici un exemple montrant le recollement des  $(n, j)$ -diagrammes à l'aide de l'application  $c$  pour  $\text{TL}_3$ . Les ensembles  $M(j)$  sont

$$M(1) = \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad M(3) = \left\{ \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array} \right\}$$

et la fonction  $c$  est la donnée suivante :

$$\begin{aligned} c\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array}, & c\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array}, & c\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array}, \\ c\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array}, & c\left(\begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}, \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}\right) &= \begin{array}{c} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{array}. \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes, il est possible d'observer la compatibilité entre la fonction  $c$  et l'anti-involution, c'est-à-dire que  $c(s, t)^* = c(t, s)$  pour tout  $s, t$ . La seule équation à vérifier est

$$c\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}\right)^* = c\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \hline \end{array}, \begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \end{array}\right),$$

ce qui est vrai. De plus,  $\text{Im } c$  forme une base de  $\text{TL}_3$  puisque cette algèbre est de dimension 5 (la formule générale de la dimension des algèbres de Temperley-Lieb sera donnée dans la prochaine section).

**Proposition 1.14.** *L'algèbre  $\text{TL}_n$  munie du tuple  $(\Lambda, M, c, *)$  décrit ci-dessus est cellulaire.*

La vérification des propriétés de la définition 1.1 repose sur le fait que l'action par  $\text{TL}_n$  à gauche ne peut que diminuer le nombre de liens transversaux d'un diagramme. La preuve de la proposition précédente est donnée dans [GL96].

## 1.2.2. Propriétés élémentaires

Les résultats au sujet de  $\text{TL}_n(\beta)$  donnés ci-dessous ne sont pas liés à son caractère cellulaire.

**Définition 1.15** (Mot). Un mot de  $\text{TL}_n$  est défini comme étant une concaténation des générateurs  $e_i$  où  $1 \leq i \leq n - 1$ .

**Proposition 1.16** (Forme normale de Jones, [Jon83]). *Un mot  $m \in \text{TL}_n$  peut s'écrire uniquement sous la forme*

$$m = (e_{j_1} e_{j_1-1} \dots e_{k_1})(e_{j_2} e_{j_2-1} \dots e_{k_2}) \dots (e_{j_r} e_{j_r-1} \dots e_{k_r})$$

où  $0 < j_1 < \dots < j_r < n$ ,  $0 < k_1 < \dots < k_r < n$  et  $j_i \leq k_i$ . De plus, la taille de ce mot est minimale.

**Proposition 1.17** (Dimension de  $\text{TL}_n$ , [Jon83]). *Les algèbres de Temperley-Lieb ont dimension*

$$\dim \text{TL}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

soit le  $n$ -ième nombre de Catalan.

Les éléments de  $\text{TL}_n$  qui jouissent de la propriété d'être invariants sous l'anti-involution  $*$  sont dits auto-adjoints. Plusieurs exemples de tels éléments seront présentés au chapitre suivant.

### 1.2.3. Les modules standards

La construction des modules standards de la définition 1.2 dans le cas de  $\text{TL}_n$  est clarifiée ici. Le module  $S_{n,j}$  est le sous-espace vectoriel engendré par les  $(n,j)$ -diagrammes ayant  $j$  liens transversaux muni de la  $\text{TL}_n$ -action à gauche de concaténation diagrammatique, le tout modulo les diagrammes ayant moins de  $j$  défauts. Comme souligné plus tôt, l'action d'un diagramme de  $\text{TL}_n$  fait diminuer ou garde constant le nombre de liens transversaux. La dimension de ce module est

$$\dim S_{n,j} = \binom{n}{\frac{n-j}{2}} - \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}$$

pour  $j \leq n$ . Le prochain chapitre décrira leur structure en fonction du paramètre  $q \in \mathbb{C}^\times$ . La notation  $B_{n,j}$  sera utilisée pour dénoter la base des  $(n,j)$ -diagrammes du module  $S_{n,j}$ .

Voici une description des modules standards de  $\text{TL}_5$ . Les bases de ceux-ci sont

$$\begin{aligned} B_{5,5} &= \left\{ \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array} \right\}, \\ B_{5,3} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \end{array} \right\}, \\ B_{5,1} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \circ \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

et un exemple de l'action de  $TL_5$  sur ceux-ci est

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = 0, \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} &= \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \beta^2 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}. \end{aligned}$$

### 1.3. Algèbres de Temperley-Lieb affines

Le seconde famille de  $\mathbb{C}$ -algèbres étudiée est celle des algèbres de Temperley-Lieb affines  $aTL_n(\beta)$ . Elles sont une généralisation de dimension infinie des algèbres de Temperley-Lieb.

#### 1.3.1. Définition

Tout comme pour  $TL_n(\beta)$ , il est possible de les définir de deux manières, soit à l'aide de générateurs et relations, soit à l'aide de diagrammes.

**Définition 1.18** (Algèbres de Temperley-Lieb affines définies par générateurs et relations). Pour  $n > 2$ , la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $aTL_n(\beta)$  est engendrée par les générateurs  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n, u, u^{-1}$  et **id** assujettis aux relations suivantes<sup>1.4</sup> :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \beta e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| > 1, \\ e_n e_j &= e_j e_n \quad \text{pour } j \neq 1, n-1, \\ u e_i &= e_{i+1} u \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ u^2 e_{n-1} &= e_1 \dots e_{n-1}, \\ u u^{-1} &= u^{-1} u = \mathbf{id}, \end{aligned}$$

et où **id** est l'identité de l'algèbre. Pour  $n = 2$ , l'algèbre est engendrée par  $e_1, u, u^{-1}$  et **id** et les relations sont

$$e_1^2 = \beta e_1, \quad u^2 e_1 = e_1 u^2 = e_1, \quad u u^{-1} = u^{-1} u = \mathbf{id}$$

avec encore une fois **id** l'identité de l'algèbre. Pour  $n = 1$ , l'algèbre est engendrée par  $u, u^{-1}$  et **id** et est isomorphe à  $\mathbb{C}[u^{\pm 1}]$ .

1.4. Ici  $e_i = e_{i+n}$ , c'est-à-dire les indices des générateurs sont définis modulo  $n$ .

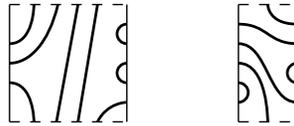
Il existe un monomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$\iota : \text{TL}_n(\beta) \rightarrow \text{aTL}_n(\beta)$$

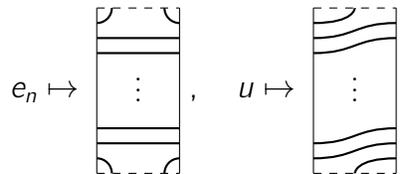
défini par  $\iota(e_i) = e_i$  et  $\iota(\mathbf{id}) = \mathbf{id}$ . Ainsi,  $\text{aTL}_n$  généralise en un certain sens  $\text{TL}_n$  puisque  $\text{TL}_n$  est une sous-algèbre de  $\text{aTL}_n$ . Cette généralisation transparait au niveau des diagrammes comme l'indique la construction suivante.

Tout comme pour  $\text{TL}_n$ ,  $\text{aTL}_n$  est liée à une notion étendue de  $(m, n)$ -diagrammes, appelés les  $(m, n)$ -diagrammes affines. La construction de ces diagrammes est la suivante et est analogue au cas de  $\text{TL}_n$ . Les diagrammes considérés sont des  $(m, n)$ -diagrammes avec l'omission d'une contrainte. Précédemment, les liens étaient contenus à l'intérieur de la région créée par les deux droites horizontales. Dans le cas affine, les diagrammes sont dessinés sur un cylindre. Conséquemment, le haut et le bas des  $(m, n)$ -diagrammes sont identifiés. Ceci permet de visuellement représenter le cylindre par un diagramme planaire. Cette frontière est appelée frontière imaginaire. Il est important de noter qu'un  $(m, n)$ -diagramme affine ne possède pas nécessairement de liens traversant la frontière imaginaire.

Pour clarifier la construction précédente, la figure suivante présente des exemples de  $(3, 5)$ -diagramme affine et de 5-diagramme affine :



L'isomorphisme d'algèbres entre la version diagrammatique et la version avec générateurs et relations de  $\text{aTL}_n$  est défini sur sa sous-algèbre isomorphe à  $\text{TL}_n$  de la même manière que pour  $\text{TL}_n$ , soit en envoyant  $e_i$  sur le diagramme ayant une boucle aux sites  $i$  et  $i + 1$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  et  $\mathbf{id}$  sur le diagramme ayant  $n$  liens transversaux droits. Les éléments  $e_n$  et  $u$  sont envoyés aux diagrammes suivants :



Le diagramme correspondant à  $u^{-1}$  est le diagramme de  $u$  ayant été réfléchi selon un miroir vertical. Cette construction diagrammatique est due à Green [Gre98].

### 1.3.2. Les modules standards

L'algèbre  $\text{aTL}_n$  n'est pas cellulaire, car elle est de dimension infinie. Conséquemment, celle-ci n'admet pas de modules cellulaires au sens de la définition 1.2. Par contre, il est possible

de produire une famille de modules (appelés aussi modules standards par abus de langage) similaires aux modules définis précédemment sur  $\text{TL}_n$ . La construction est plus complexe, mais la structure de ces modules est bien comprise. Cette construction a été introduite par Graham et Lehrer [GL97] et elle est décrite ci-dessous en suivant l'article de Belletête et Saint-Aubin [BSA18].

Pour  $j$  de même parité que  $n$ , l'espace vectoriel engendré par les  $(n, j)$ -diagrammes affines ayant exactement  $j$  liens transversaux possède canoniquement une structure de  $\text{aTL}_n$ -module à gauche en identifiant le résultat d'une multiplication ayant moins de  $j$  liens transversaux avec 0. Ce module est noté  $W_{n,j}$  et il est de dimension infinie. Le quotient suivant permet de définir un module de dimension finie.

Pour  $j > 0$  et  $z \in \mathbb{C}^\times$ , l'application  $f_z : W_{n,j} \rightarrow W_{n,j}$  définie par  $f_z(x) = x \cdot (u - z \mathbf{id})$  est un endomorphisme de  $\text{aTL}_n$ -modules gauches. Pour  $j = 0$  et  $z \in \mathbb{C}^\times$ , l'application  $f_z(x) = x \cdot (g - (z + z^{-1}) \mathbf{id})$  où  $g$  est l'application définie par l'ajout d'une boucle non contractile autour du cylindre est aussi un endomorphisme de module. Dans ces deux cas, le module  $W_{n,j;z} = \text{Coker } f_z$  est le module recherché, appelé module standard. Ces modules sont bel et bien de dimension finie et leur dimension est

$$\dim W_{n,j;z} = \binom{n}{\frac{n-j}{2}}.$$

Au chapitre 2, il sera démontré que cette construction donne le résultat souhaité, à savoir que les modules standards de  $\text{aTL}_n$  se comportent d'une manière analogue aux standards de  $\text{TL}_n$ .

## 1.4. Algèbres de Temperley-Lieb à une frontière

La troisième famille de  $\mathbb{C}$ -algèbres présentée est celle des algèbres de Temperley-Lieb à une frontière (parfois appelées les algèbres *blob*). Elle est aussi indexée par un paramètre de taille  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  comme les familles précédentes. Contrairement à celles-ci, les algèbres à une frontière ont trois paramètres complexes  $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  avec  $\beta = q + q^{-1}$ . Elles sont notées  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ .

### 1.4.1. Définition

**Définition 1.19** (Algèbres de Temperley-Lieb à une frontière définies par générateurs et relations<sup>1.5</sup>). La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est engendrée par les générateurs  $e_1, \dots, e_n$  et  $\mathbf{id}$

1.5. Certains auteurs utilisent la convention identifiant le dernier générateur comme  $e_0$ .

assujettis aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 e_i^2 &= \beta e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\
 e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i \quad \text{pour } i, i \pm 1 \in \{1, \dots, n-1\}, \\
 e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \text{ et } |i-j| > 1, \\
 e_{n-1} e_n e_{n-1} &= \beta_1 e_{n-1}, \\
 e_n^2 &= \beta_2 e_n,
 \end{aligned}$$

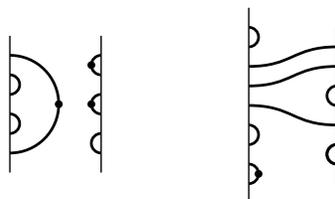
et où **id** est l'identité de l'algèbre.

Comme pour  $\text{aTL}_n$ , il existe une inclusion de  $\text{TL}_n$  vers  $\text{TLb}_n$ . De plus,  $\text{TLb}_n$  possède le même genre de structure de tour que  $\text{TL}_n$ . En effet, pour  $m < n$ , l'inclusion d'algèbres  $\iota_{n,m} : \text{TLb}_m \rightarrow \text{TLb}_n$  est définie par  $\iota_{n,m}(e_i) = e_{n-m+i}$ . Les paramètres  $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  doivent demeurer fixés.

La présentation diagrammatique de ces algèbres est encore une fois calquée sur celle de  $\text{TL}_n$ . Cette fois, la variation est faite en apposant des décorations aux diagrammes. Un  $(m, n)$ -diagramme décoré est défini comme étant un  $(m, n)$ -diagramme ayant la propriété que tout lien exposé à l'ouverture au bas du diagramme peut être décoré d'un  $\bullet$ . L'exemple suivant indique plus précisément quels liens peuvent être décorés en les identifiant en bleu :

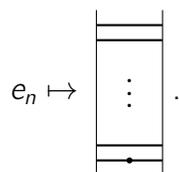


De plus, les diagrammes ne portent pas obligatoirement de décorations sur les liens exposés. Les  $(m, n)$ -diagrammes de  $\text{TL}_n$  sont donc aussi des  $(m, n)$ -diagrammes de  $\text{TLb}_n$ . Voici deux exemples de 6 et de  $(9, 7)$ -diagrammes décorés :

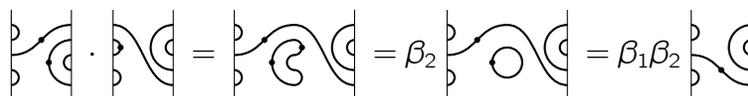


L'isomorphisme entre la version diagrammatique de  $\text{TLb}_n$  et la version avec générateurs et relations est le même que celui de  $\text{TL}_n$  pour les générateurs  $e_i, i = 1, \dots, n-1$ . Le générateur  $e_n$  est envoyé sur le  $n$ -diagramme décoré ayant  $n$  liens transversaux mais dont le dernier lien

est décoré, soit



Quelques règles diagrammatiques doivent être ajoutées pour que l'application décrite ci-dessus soit un isomorphisme. Lors de la concaténation de deux diagrammes, les liens (respectivement bulles) doublement décorés sont remplacés par des liens (respectivement bulles) simplement décorés et un facteur multiplicatif  $\beta_2$  est ajouté. Les bulles portant une décoration sont retirées et un facteur multiplicatif  $\beta_1$  est ajouté. L'exemple de calcul suivant illustre les nouvelles règles diagrammatiques :



Les données cellulaires  $(\Lambda, M, c, *)$  pour  $\text{TLb}_n$  sont les suivantes. L'ensemble partiellement ordonné  $\Lambda$  est

$$\Lambda = \{m \in \mathbb{Z}; |m| \leq n, m \equiv_2 n\}$$

muni de l'ordre total

$$j_1 \prec j_2 \quad \text{si} \quad |j_1| < |j_2| \quad \text{ou} \quad (|j_1| = |j_2| \quad \text{et} \quad j_1 < j_2).$$

L'ensemble  $M(j)$  est défini comme l'ensemble des  $(n, j)$ -diagrammes ayant  $j$  liens transversaux avec ou sans décoration sur les liens n'étant pas transversaux et tel que le lien transversal inférieur n'est décoré que si  $j < 0$ . L'application  $*$  est définie comme pour  $\text{TL}_n$ . L'application  $c$  recolle les diagrammes tout comme pour  $\text{TL}$ , mais en ne dédoublant pas la décoration  $\bullet$  lors du recollement si elle est présente sur les liens transversaux.

L'exemple suivant illustre le recollement de deux diagrammes possédant une décoration :

$$c\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

**Proposition 1.20** (L. Houde Therrien, [HT18]). *L'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  munie du tuplet décrit ci-dessus est cellulaire.*

### 1.4.2. Propriétés élémentaires

Voici quelques résultats au sujet de  $\text{TLb}_n$  qui ne sont pas liés à son caractère cellulaire.

**Proposition 1.21.** *Les isomorphismes d'algèbres suivants sont vérifiés :*

- pour  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ,  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n(\beta, \lambda\beta_1, \lambda\beta_2)$  et plus particulièrement, si  $\beta_2 \neq 0$ ,  
 $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n(\beta, \beta_1/\beta_2, 1)$ ,
- $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n(\beta, \beta\beta_2 - \beta_1, \beta_2)$ .

Démonstration. Le premier isomorphisme est donné par l'application définie sur les générateurs par  $\mathbf{id} \mapsto \mathbf{id}$ ,  $e_i \mapsto e_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $\lambda e_n \mapsto e_n$ .

Le second isomorphisme est donné par l'application définie sur les générateurs par  $\mathbf{id} \mapsto \mathbf{id}$ ,  $e_i \mapsto e_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $\beta_2 \mathbf{id} - e_n \mapsto e_n$ .

La vérification que ces applications s'étendent linéairement et qu'elles sont bel et bien des morphismes d'algèbres est directe.  $\square$

La proposition 1.21 montre entre autres que lorsque  $\beta_1 = 0$  et  $\beta_2 \neq 0$ , il est possible de fixer  $\beta_2$  à n'importe quelle valeur non nulle.

Tout comme pour  $\text{TL}_n$ , les mots de  $\text{TLb}_n$  (c'est-à-dire la concaténation des générateurs) admettent une expression minimale (à comparer avec la proposition 1.16).

**Proposition 1.22** (Forme normale de Jones généralisée [HT18]). *Un mot  $m \in \text{TLb}_n$  peut s'écrire uniquement sous la forme*

$$m = m'(e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_1})(e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_2}) \dots (e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_s}),$$

où  $m'$  est un mot de la sous-algèbre  $\text{TL}_n$  sous forme de Jones

$$m' = (e_{j_1} e_{j_1-1} \dots e_{k_1})(e_{j_2} e_{j_2-1} \dots e_{k_2}) \dots (e_{j_r} e_{j_r-1} \dots e_{k_r})$$

avec

$$\begin{aligned} j_1 &< j_2 < \dots < j_r < n, \\ k_1 &< k_2 < \dots < k_r < \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_s \leq n, \\ \text{et } k_i &\leq j_i \quad \forall i. \end{aligned}$$

De plus, la taille de ce mot est minimale.

**Proposition 1.23** (Dimension de  $\text{TLb}_n$ , [MS94]). *Les algèbres à une frontière ont dimension*

$$\dim \text{TLb}_n = \binom{2n}{n}.$$

### 1.4.3. Les modules standards

Étant donné que l'algèbre  $\text{TLb}_n$  est cellulaire, elle possède des modules standards permettant de produire une famille complète (à isomorphisme près) de modules simples. La construction des modules standards de  $\text{TLb}_n$  est quasiment identique à  $\text{TL}_n$ , à l'exception des décorations. Ces modules sont notés  $\widehat{S}_{n,j}$ , où  $|j|$  compte le nombre de défauts et où le signe de  $j$  détermine si le dernier défaut est décoré ou non. Leurs bases en termes de  $(n, j)$ -diagrammes sont notées  $\widehat{B}_{n,j}$ . Dans le cas où le dernier défaut n'est pas décoré, l'action de le décorer est comprise comme valant zéro, c'est-à-dire si  $v \in \widehat{B}_{n,j}$  avec  $j > 0$  est un diagramme ayant un défaut au  $n$ -ième site, alors  $e_n v = 0$ . La dimension de  $\widehat{S}_{n,j}$  est

$$\dim \widehat{S}_{n,j} = \binom{n}{\frac{n-|j|}{2}}.$$

Voici un exemple pour clarifier cette construction. Les bases des modules standards de  $\text{TLb}_5$  sont

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{5,5} &= \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \right\} \\ \widehat{B}_{5,-5} &= \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\} \\ \widehat{B}_{5,3} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} \right\} \\ \widehat{B}_{5,-3} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\} \\ \widehat{B}_{5,1} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \right\} \\ \widehat{B}_{5,-1} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} | \\ \hline \\ \rightarrow \end{array} \right\} \end{aligned}$$

et les calculs suivants illustrent l'action de  $\text{TLb}_5$  sur ces modules :

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \hline \hline \hline \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \hline \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \hline \hline \hline \end{array} = 0.$$

## Chapitre 2

---

# Éléments centraux, projecteurs et modules standards

Ce chapitre développe plusieurs outils qui seront utiles pour les prochains chapitres.

La première section définit rapidement les  $q$ -nombres et leurs propriétés. Ces constantes apparaîtront tout au long de ce mémoire.

La seconde section explore le centre des algèbres de Temperley-Lieb et des algèbres à une frontière. Un élément central est défini pour ces deux familles. La plupart des résultats présentés proviennent de Morin-Duchesne, Saint-Aubin [MDSA11], Ridout, Saint-Aubin [RSA14] et de Houde Therrien [HT18].

La troisième section discute des projecteurs de Wenzl-Jones et de leurs généralisations pour les algèbres à une frontière. Ces projecteurs ont été d'abord définis dans le cas de  $TL_n$  par Wenzl [Wen90] et Jones [Jon83]. L'objectif est de montrer qu'il est possible de définir ces éléments pour tout  $q$ , mais que dans certains cas, la spécialisation pour une valeur de  $q$  bien précise rend cette généralisation nilpotente. Un critère permettant de savoir si le projecteur peut être renormalisé pour être idempotent est donné. Deux familles de projecteurs analogues aux projecteurs de Wenzl-Jones de  $TL_n$  sont introduites. La présentation tente de montrer que ces nouveaux projecteurs sont naturels et que leur construction est très similaire aux projecteurs de  $TL_n$ . Il est à noter que le terme projecteur sera utilisé malgré le fait que ces familles d'éléments ne seront pas idempotents pour tout  $q$ .

La quatrième section expose des résultats connus au sujet des morphismes entre les modules standards des algèbres  $aTL_n$  ainsi que le calcul des déterminants de Gram pour les algèbres  $TL_n$  et  $TLb_n$ . Les résultats exposés sont dûs à Graham et Lehrer [GL97], Ridout et Saint-Aubin [RSA14] ainsi qu'à Belletête et Saint-Aubin [BSA18]. Cette section sera particulièrement utile pour le chapitre 3.

La dernière section s'intéresse à la relation entre la catégorie  $\text{mod } A$  et la catégorie  $\text{mod } A/I$ . Le chapitre 4 utilisera ces résultats pour donner la structure des projectifs indécomposables d'un quotient des algèbres à une frontière. Les résultats de cette section sont bien connus des algébristes, voir par exemple I. Assem [Ass97] où plusieurs de ces résultats se retrouvent en exercice. Ils sont exposés étant donné leur rôle central dans ce mémoire.

## 2.1. Propriétés des $q$ -nombres

La théorie développée dans les prochaines sections et chapitres fera intervenir des constantes appelées  $q$ -nombres. Comme noté dans le chapitre précédent, les différentes familles d'algèbres de Temperley-Lieb font intervenir un paramètre  $\beta = q + q^{-1}$  pour  $q \in \mathbb{C}^\times$ . Ce paramètre est un exemple particulier de  $q$ -nombre.

**Définition 2.1** ( $q$ -nombre). Soient  $q \in \mathbb{C}^\times$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . Si  $q \neq 1, -1$  le  $q$ -nombre  $m$  est défini comme

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}.$$

De plus, si  $q = 1$ ,  $[m]_q = m$  et si  $q = -1$ ,  $[m]_q = (-1)^m m$ .

Le facteur  $\beta$  correspond ainsi à  $[2]_q$ . Ces constantes respectent plusieurs propriétés et la prochaine proposition présente une liste de celles qui s'avéreront utiles dans ce mémoire.

**Proposition 2.2.** *Les  $q$ -nombres respectent les propriétés suivantes :*

- (1)  $[-m]_q = -[m]_q$ ,
- (2)  $[m]_q = q^{m-1} + q^{m-3} + \dots + q^{-m+3} + q^{-m+1}$ ,
- (3)  $[m+1]_q = [2]_q [m]_q - [m-1]_q$  et  $[m+k+1]_q [k]_q = [m+k]_q [k+1]_q - [m]_q$ ,
- (4)  $[m]_q = 0$  si et seulement si  $q^{2m} = 1$ ,
- (5) si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive de l'unité, alors  $[m_1 \ell \pm m_2]_q = \pm q^{m_1 \ell} [m_2]_q$  ; ainsi, l'application  $m \mapsto [m]_q$  a période  $2\ell$ .

Démonstration. Les propriétés (1), (2), (3) et (4) découlent d'un calcul direct. Pour démontrer (5), il suffit de remarquer que si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive, alors

$$[m_1 \ell \pm m_2]_q = \frac{q^{m_1 \ell \pm m_2} - q^{-m_1 \ell \mp m_2}}{q - q^{-1}} = q^{\pm m_1 \ell} \frac{q^{m_2} - q^{-m_2}}{q - q^{-1}} = q^{\pm m_1 \ell} [m_2]_q.$$

Ainsi, la période de l'application  $m \mapsto [m]_q$  est égale à  $2\ell$ .

□

## 2.2. Éléments centraux

Étant donné une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$ , le calcul d'éléments centraux  $z \in A$  permet de simplifier l'étude de la catégorie  $\text{mod } A$ . En effet, pour un  $A$ -module  $M$ , chaque élément central  $z$  donne lieu à un endomorphisme  $f_z : M \rightarrow M$  défini par  $f_z(x) = zx$ . Cet endomorphisme permet de décomposer  $M$  en une somme directe. Cette décomposition simplifie d'ailleurs le calcul des blocs de l'algèbre  $A$ , puisque deux sous-modules à gauche indécomposables de  ${}_A A$  ne possédant pas la même valeur propre sous  $f_z$  ne peuvent pas être dans le même bloc. Plus particulièrement,  $f_z$  facilite la décomposition du module à gauche  ${}_A A$  en projectifs indécomposables.

Cette section présente le calculs d'éléments centraux pour  $\text{TL}_n$  et pour  $\text{TLb}_n$ .

### 2.2.1. Un élément central de $\text{TL}_n$

L'élément central  $\mathbf{f}_n \in \text{TL}_n$  a été défini<sup>2.1</sup> et étudié par Morin-Duchesne et Saint-Aubin [MDSA11]. Dans cet article, les valeurs propres prises par cet élément sur les modules standards ont été calculées. La description de celui-ci est faite à l'aide de diagrammes. Ces résultats sont rappelés dans cette section et une formule récursive de  $\mathbf{f}_n$  est donnée.

**Définition 2.3** (Tuiles tressées). Les tuiles tressées sont définies par

$$\text{HH} = q^{1/2} \text{P} \text{A} - q^{-1/2} \text{B} \text{Y}, \quad \text{HH} = q^{1/2} \text{B} \text{Y} - q^{-1/2} \text{P} \text{A}.$$

Lorsque les tuiles tressées sont présentes dans un dessin, celui-ci s'exprime comme une combinaison linéaire de  $n$ -diagrammes. Ces tuiles permettent ainsi d'étendre la définition originale de  $n$ -diagramme pour inclure les diagrammes possédant des croisements. Ces nouveaux diagrammes seront tout de même appelés  $n$ -diagrammes comme précédemment.

**Définition 2.4.** L'élément  $\mathbf{f}_n$  est défini par le  $n$ -diagramme

$$\mathbf{f}_n = \begin{array}{c} \text{Diagram with } n \text{ strands, a crossing at the top, and a crossing at the bottom.} \end{array}.$$

**Proposition 2.5** ([MDSA11], [RSA14]).  $\mathbf{f}_n$  est un élément central, auto-adjoint et invariant sous l'automorphisme d'algèbres induit par  $q \mapsto q^{-1}$ . De plus,  $\mathbf{f}_n$  agit sur  $S_{n,j}$  comme le

2.1. Cet élément était connu dans la littérature physique, mais l'identification de ses propriétés dans le contexte des algèbres de Temperley-Lieb est due à Morin-Duchesne et Saint-Aubin.

scalaire

$$\lambda_j = q^{j+1} + q^{-(j+1)} = [j+2]_q - [j]_q.$$

Cette proposition sera en partie démontrée grâce à la formule récursive présentée ci-dessous. Une analyse *a posteriori* permet de montrer que  $\mathbf{f}_n$  distingue les blocs de l'algèbre  $\mathbf{TL}_n$ . C'est cette caractéristique qui justifie en partie son introduction. Sa définition diagrammatique rend son calcul plutôt long étant donné que  $\mathbf{f}_n$  est la combinaison linéaire de  $2^{2n}$   $n$ -diagrammes. L'introduction d'une formule récursive permet de raccourcir ce calcul.

Soient les éléments  $\mathbf{f}_n^d, \mathbf{f}_n^g, \mathbf{f}_n^c \in \mathbf{TL}_n$  définis par les  $n$ -diagrammes

$$\mathbf{f}_n^d = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \mathbf{f}_n^g = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}, \quad \mathbf{f}_n^c = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

Soient  $m < n$  et  $\iota_{n,m} : \mathbf{TL}_m \rightarrow \mathbf{TL}_n$  l'inclusion canonique. Jusqu'à la fin de cette section, les éléments  $v \in \mathbf{TL}_m$  sont identifiés avec leurs images  $\iota_{n,m}(v) \in \mathbf{TL}_n$ .

**Lemme 2.6.** *Les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$(q^2 - 1) \mathbf{f}_n^c = \mathbf{f}_n - q^{-1} \mathbf{f}_{n-1}, \quad (2.1)$$

$$(q^2 - 1) \mathbf{f}_n^d = e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}, \quad (2.2)$$

$$(q^2 - 1) \mathbf{f}_n^g = \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} - q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}. \quad (2.3)$$

Démonstration. Premièrement, en remarquant que les tuiles tressées respectent

$$\text{---} \text{---} \text{---} = q \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} + q^{-1} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (2.4)$$

le développement diagrammatique de la dernière rangée de l'élément  $\mathbf{f}_n$  donne

$$\mathbf{f}_n = (\beta q - 2) \mathbf{f}_n^c + q^{-1} \mathbf{f}_{n-1} = q^{-1} \mathbf{f}_{n-1} + (q^2 - 1) \mathbf{f}_n^c$$

ce qui démontre l'équation (2.1). En multipliant cette équation à gauche par  $e_{n-1}$  et en effectuant le changement d'indice  $n \mapsto n - 1$ , il s'ensuit que

$$e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} = q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} + (q^2 - 1) e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}^c$$

mais,

$$e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}^c = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \mathbf{f}_n^d$$

et donc,

$$e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} = q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} + (q^2 - 1) \mathbf{f}_n^d.$$

Ceci démontre l'équation (2.2). Cette même manipulation à l'aide de la multiplication à droite par  $e_{n-1}$  démontre l'équation (2.3).  $\square$

**Proposition 2.7.** *L'élément central  $\mathbf{f}_n$  vérifie la relation de récurrence*

$$\mathbf{f}_n = \beta \mathbf{f}_{n-1} - e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - \mathbf{f}_{n-2}$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{f}_1 = (q^2 + q^{-2}) \mathbf{id} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_2 = (q^3 + q^{-3}) \mathbf{id} - (q - q^{-1})^2 e_1.$$

Démonstration. Soit  $n \geq 3$ . À l'aide de l'équation (2.4), le développement de l'avant-dernière ligne de l'élément  $\mathbf{f}_n^c$  donne

$$\mathbf{f}_n^c = q \mathbf{f}_{n-1}^c - \mathbf{f}_n^d - \mathbf{f}_n^g + q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}$$

Selon les équations données dans le lemme,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n &= q^{-1} \mathbf{f}_{n-1} + (q^2 - 1) \mathbf{f}_n^c \\ &= q^{-1} \mathbf{f}_{n-1} + (q^2 - 1) (q \mathbf{f}_{n-1}^c - \mathbf{f}_n^d - \mathbf{f}_n^g + q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}) \\ &= q^{-1} \mathbf{f}_{n-1} + q(\mathbf{f}_{n-1} - q^{-1} \mathbf{f}_{n-2}) - (e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}) \\ &\quad - (\mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} - q^{-1} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2}) + (q - q^{-1}) e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} \\ &= \beta \mathbf{f}_{n-1} - e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - \mathbf{f}_{n-2} \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation de récurrence. Un développement diagrammatique montre que les conditions initiales à cette récurrence sont celles énoncées dans la proposition 2.7. Ceci termine la preuve.  $\square$

L'élément  $\mathbf{f}_n$  est donc maintenant défini sans l'usage de diagrammes. Par induction, il est possible de remarquer que  $\mathbf{f}_n$  est auto-adjoint et invariant sous l'automorphisme induit par  $q \mapsto q^{-1}$ . De plus, la formule par récurrence permet de fournir une preuve du fait que  $\mathbf{f}_n$  est central. Cette preuve est très similaire à la preuve présentée à la prochaine section au sujet d'un élément central de  $\text{TLb}_n$ . Elle est donc omise.

## 2.2.2. Un élément central des algèbres à une frontière

Cette section s'intéresse à l'introduction d'un élément central pour les algèbres à une frontière ne provenant pas d'une définition diagrammatique. Encore une fois dans cette section, les éléments provenant de sous-algèbres sont identifiées à leur image par l'inclusion.

**Proposition 2.8.** *L'élément  $\widehat{\mathbf{f}}_n \in \text{TLb}_n$  défini par*

$$\widehat{\mathbf{f}}_n = \beta_2 \mathbf{f}_n - e_n \mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n e_n + \beta e_n \mathbf{f}_{n-1} - \beta_1 \mathbf{f}_{n-1}$$

*est central.*

Démonstration. Puisque l'élément  $\mathbf{f}_n$  est central dans  $\text{TL}_n$ , les générateurs  $e_i$  commutent avec  $\mathbf{f}_n$ ,  $\mathbf{f}_{n-1}$  et  $e_n$  présents dans l'expression de  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  pour  $i \leq n-2$ . Il reste donc à montrer que  $e_{n-1}$  et  $e_n$  commutent avec  $\widehat{\mathbf{f}}_n$ .

Étant donné que l'expression de  $\mathbf{f}_{n-1}$  ne fait intervenir que des générateurs  $e_i$  pour  $i \leq n-2$ , un calcul direct montre que

$$e_n \widehat{\mathbf{f}}_n = -e_n \mathbf{f}_n e_n + \beta \beta_2 e_n \mathbf{f}_{n-1} - \beta_1 e_n \mathbf{f}_{n-1}$$

et

$$\widehat{\mathbf{f}}_n e_n = -e_n \mathbf{f}_n e_n + \beta \beta_2 e_n \mathbf{f}_{n-1} - \beta_1 e_n \mathbf{f}_{n-1}.$$

Donc,  $e_n$  commute avec  $\widehat{\mathbf{f}}_n$ .

Pour montrer que  $e_{n-1}$  commute avec  $\widehat{\mathbf{f}}_n$ , il suffit de développer l'expression de  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  à l'aide de la relation de récurrence de la proposition 2.7. Le calcul est routinier malgré sa longueur. La multiplication à gauche par  $e_{n-1}$  donne

$$e_{n-1} \widehat{\mathbf{f}}_n = \beta_2 e_{n-1} \mathbf{f}_n - e_{n-1} e_n \mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n e_{n-1} e_n + \beta e_{n-1} e_n \mathbf{f}_{n-1} - \beta_1 e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}$$

et à droite, celui-ci donne

$$\widehat{\mathbf{f}}_n e_{n-1} = \beta_2 e_{n-1} \mathbf{f}_n - e_n e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_n e_n e_{n-1} + \beta \mathbf{f}_{n-1} e_n e_{n-1} - \beta_1 \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1}.$$

Le commutateur s'écrit donc comme

$$\begin{aligned} e_{n-1} \widehat{\mathbf{f}}_n - \widehat{\mathbf{f}}_n e_{n-1} &= \underbrace{(e_n e_{n-1} - e_{n-1} e_n) \mathbf{f}_n}_{(a)} - \underbrace{\mathbf{f}_n (e_{n-1} e_n - e_n e_{n-1})}_{(b)} \\ &\quad + \underbrace{(\beta e_{n-1} e_n - \beta_1 e_{n-1}) \mathbf{f}_{n-1}}_{(a')} - \mathbf{f}_{n-1} (\beta e_n e_{n-1} - \beta_1 e_{n-1}). \end{aligned}$$

En substituant la relation de récurrence de  $\mathbf{f}_n$ , l'expression (a) se réduit à

$$\begin{aligned}
(a) &= (e_n e_{n-1} - e_{n-1} e_n)(\beta \mathbf{f}_{n-1} - e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} - \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - \mathbf{f}_{n-2}) \\
&= e_n e_{n-1} (-\mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - \mathbf{f}_{n-2}) + \mathbf{f}_{n-2} e_{n-1} e_n \\
&\quad - \underbrace{(\beta e_{n-1} e_n - \beta_1 e_{n-1}) \mathbf{f}_{n-1}}_{(a')} + \underbrace{(e_{n-1} e_n \mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} - \beta \beta_1 e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2})}_{\text{auto-adjoint}}
\end{aligned}$$

et pour calculer (b), il suffit de remarquer que

$$(a)^* = ((e_n e_{n-1} - e_{n-1} e_n) \mathbf{f}_n)^* = \mathbf{f}_n (e_{n-1} e_n - e_n e_{n-1}) = (b)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
e_{n-1} \widehat{\mathbf{f}}_n - \widehat{\mathbf{f}}_n e_{n-1} &= e_n e_{n-1} \underbrace{(-\mathbf{f}_{n-1} e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - 2 \mathbf{f}_{n-2})}_{(c)} \\
&\quad - \underbrace{(-e_{n-1} \mathbf{f}_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - 2 \mathbf{f}_{n-2})}_{(d)} e_{n-1} e_n.
\end{aligned}$$

Un dernier développement à l'aide de la relation de récurrence (avec un peu de courage) permet de remarquer que

$$\begin{aligned}
(c) &= -(\beta \mathbf{f}_{n-2} - e_{n-2} \mathbf{f}_{n-2} - \mathbf{f}_{n-2} e_{n-2} + \beta e_{n-2} \mathbf{f}_{n-3} - \mathbf{f}_{n-3}) e_{n-1} + \beta e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} - 2 \mathbf{f}_{n-2} \\
&= e_{n-2} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-2} + \mathbf{f}_{n-2} e_{n-2} e_{n-1} - \beta e_{n-2} e_{n-1} \mathbf{f}_{n-3} + e_{n-1} \mathbf{f}_{n-3} - 2 \mathbf{f}_{n-2}
\end{aligned}$$

et donc,  $e_{n-1} \cdot (c) = 0$ . Encore une fois, l'expression (d) est l'adjointe de l'expression (c) et ceci démontre que  $e_{n-1} \widehat{\mathbf{f}}_n - \widehat{\mathbf{f}}_n e_{n-1} = 0$ .

Conséquemment,  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  est un élément central puisqu'il commute avec tous les générateurs.  $\square$

Voici le résultat du calculs des éléments  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  pour  $n = 2$  :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{f}}_2 &= -(q^2 + q^{-2})\beta_1 + (q^3 + q^{-3})\beta_2 \mathbf{id} + ((2 - q^2 - q^{-2})\beta_2) e_1 \\
&\quad + (-q^3 + q + q^{-1} - q^{-3}) e_2 + (q^2 - 2 + q^{-2}) e_1 e_2 + (q^2 - 2 + q^{-2}) e_2 e_1
\end{aligned}$$

et pour  $n = 3$  :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{f}}_3 = & \left( -(q^3 + q^{-3})\beta_1 + (q^4 + q^{-4})\beta_2 \right) \mathbf{id} \\
& + \left( (-q^{-3} + q^{-1} + q - q^3)\beta_1 + (q^{-2} - 2 + q^2)\beta_2 \right) e_1 \\
& + (-q^{-3} + q^{-1} + q - q^3)\beta_1 e_2 \\
& + (-q^{-4} + q^{-2} + q^2 - q^4)e_3 \\
& + (q^{-2} - 2 + q^2)\beta_2 e_1 e_2 + (q^{-2} - 2 + q^2)\beta_2 e_2 e_1 \\
& + (q^{-3} - q^{-1} - q + q^3)e_2 e_3 + (q^{-3} - q^{-1} - q + q^3)e_3 e_2 + (q^{-3} - q^{-1} - q + q^3)e_3 e_1 \\
& + (-q^{-2} + 1 - q^2)e_1 e_2 e_3 + (-q^{-2} + 1 - q^2)e_2 e_3 e_1 \\
& + (-q^{-2} + 1 - q^2)e_3 e_1 e_2 + (-q^{-2} + 1 - q^2)e_3 e_2 e_1
\end{aligned}$$

Houde Therrien [HT18] a construit un élément central  $F_n \in \text{TLb}_n$  défini à l'aide de diagrammes.

**Conjecture 2.9.** À une constante multiplicative non nulle  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  près,  $F_n = \lambda \widehat{\mathbf{f}}_n$ .

Il est démontré dans [HT18] que l'élément central  $F_n$  distingue les blocs de l'algèbre  $\text{TLb}_n$  lorsque celle-ci est semisimple. Le résultat n'a pas été démontré pour le cas général, mais les expériences numériques semblent indiquer que ceci est vrai.

De plus, l'élément  $\widehat{\mathbf{f}}_n$  ne génère pas le centre de l'algèbre pour tout  $n$  et tous paramètres  $\beta, \beta_1, \beta_2$ . En effet, il est possible de vérifier que pour  $n = 5$ ,  $q = e^{i\pi/5}$ ,  $\beta_1 = 0$  et  $\beta_2 = -1$ , le centre a dimension 5 tandis que le polynôme minimal de  $\widehat{\mathbf{f}}_5$  est de degré 3.

## 2.3. Projecteurs de Wenzl-Jones et leur généralisation

Les projecteurs de Wenzl-Jones sont des éléments de  $\text{TL}_n$  ayant été introduits par Wenzl [Wen90] et Jones [Jon83]. Lorsqu'ils existent, ceux-ci sont idempotents. L'objectif de cette section est d'introduire les projecteurs de Wenzl-Jones ainsi que leurs généralisations aux algèbres  $\text{TLb}_n$ .

### 2.3.1. Les projecteurs de Wenzl-Jones pour $\text{TL}_n$

La définition usuelle des projecteurs de Wenzl-Jones demande certaines conditions sur  $q$ , soit qu'il ne soit pas une racine  $2\ell$ -ième de l'unité pour  $\ell \leq n$ . Cette restriction permet d'éviter que certains  $q$ -nombres présents au dénominateur ne s'annulent. La définition de la renormalisation des projecteurs de Wenzl-Jones présentée ici n'impose aucune condition

sur  $q$ . Elle est présentée puisque cette technique est au cœur de la section suivante sur la généralisation de ces projecteurs pour l'algèbre  $\text{TL}_n$ .

**Définition 2.10** (Projecteurs de Wenzl-Jones). Si  $q$  n'est pas une racine  $2\ell$ -ième de l'unité pour un certain  $\ell \leq n$ , les projecteurs de Wenzl-Jones sont définis par la relation de récurrence

$$P_1 = \text{id} \quad \text{et} \quad P_m = P_{m-1} - \frac{[m-1]_q}{[m]_q} P_{m-1} e_{n-m+1} P_{m-1}$$

pour  $m \leq n$ .

Les premiers projecteurs de Wenzl-Jones sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{id}, \\ P_2 &= \text{id} - \frac{1}{[2]_q} e_{n-1}, \\ P_3 &= \text{id} - \frac{[2]_q}{[3]_q} e_{n-1} - \frac{[2]_q}{[3]_q} e_{n-2} + \frac{1}{[3]_q} e_{n-1} e_{n-2} + \frac{1}{[3]_q} e_{n-2} e_{n-1}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.11** ([KLL94]). *Lorsqu'il est défini, le projecteur de Wenzl-Jones  $P_n$  est l'unique élément de  $\text{TL}_n$  respectant les relations*

$$(P_n)^2 = P_n \quad \text{et} \quad P_n e_j = e_j P_n = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq j < n.$$

De plus, pour  $m \leq n$ ,  $P_m P_n = P_n P_m = P_n$ .

Les projecteurs de Wenzl-Jones sont des éléments remarquables entre autres puisque, si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, le module à gauche engendré par  $P_n$  au sein de  ${}_{\text{TL}_n} \text{TL}_n$  est isomorphe à  $S_{n,n}$ .

Puisque les  $q$ -nombres sont des polynômes en  $q$  et  $q^{-1}$ , la définition 2.10 introduit des singularités au niveau des coefficients des différents mots présents dans l'expression des  $P_m$ . L'objectif du reste de cette section est de calculer une fonction non identiquement nulle  $\lambda_n(q) \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$  telle que  $\lambda_n P_n$  soit défini pour tout  $q$ . Ce calcul permet entre autres de définir un analogue de  $P_n$  même lorsque ces singularités apparaissent.

**Définition 2.12** (Projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers). Les projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers sont les éléments de  $\text{TL}_n$  définis par

$$\mathbf{p}_m = \left( \prod_{i=1}^m (-1)^{i+1} [i]_q \right) P_m$$

pour  $1 \leq m \leq n$ .

Les premiers projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers sont donnés par

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{id},$$

$$\mathbf{p}_2 = (-[1]_q [2]_q) (\mathbf{id} - \frac{1}{[2]_q} e_{n-1}) = e_{n-1} - [2]_q \mathbf{id},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= (-[1]_q [2]_q [3]_q) (\mathbf{id} - \frac{[2]_q}{[3]_q} e_{n-1} - \frac{[2]_q}{[3]_q} e_{n-2} + \frac{1}{[3]_q} e_{n-1} e_{n-2} + \frac{1}{[3]_q} e_{n-2} e_{n-1}) \\ &= -[2]_q [3]_q \mathbf{id} + [2]_q^2 e_{n-1} + [2]_q^2 e_{n-2} - [2]_q e_{n-1} e_{n-2} - [2]_q e_{n-2} e_{n-1}. \end{aligned}$$

Ceux-ci respectent des propriétés analogues aux propriétés de la proposition 2.11 étant donné qu'ils ne sont qu'un multiple des projecteurs classiques. Il est aussi possible de les définir à l'aide d'une formule par récurrence.

**Proposition 2.13.** *Pour  $m \geq 2$ , les projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers respectent les relations de récurrence*

$$\mathbf{p}_m = (-1)^{m+1} [m]_q \mathbf{p}_{m-1} + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) \mathbf{p}_{m-1} e_{n-m+1} \mathbf{p}_{m-1}.$$

Démonstration. Cette proposition découle de la définition des projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers. En effet,

$$P_m = P_{m-1} - \frac{[m-1]_q}{[m]_q} P_{m-1} e_{n-m+1} P_{m-1}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \left( \prod_{i=1}^m (-1)^{i+1} [i]_q \right) P_m \\ &= \left( \prod_{i=1}^m (-1)^{i+1} [i]_q \right) P_{m-1} - \left( \prod_{i=1}^m (-1)^{i+1} [i]_q \right) \frac{[m-1]_q}{[m]_q} P_{m-1} e_{n-m+1} P_{m-1} \\ &= (-1)^{m+1} [m]_q \mathbf{p}_{m-1} - (-1)^{m+1} [m-1]_q \mathbf{p}_{m-1} e_{n-m+1} \mathbf{p}_{m-1} \\ &= (-1)^{m+1} [m]_q \mathbf{p}_{m-1} + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) \mathbf{p}_{m-1} e_{n-m+1} \mathbf{p}_{m-1} \end{aligned}$$

ce qui est la relation attendue. □

Il ne reste maintenant qu'à montrer que la formule par récurrence de la proposition 2.13 n'introduit en réalité aucune singularité même s'il y a des divisions par des  $q$ -nombres.

**Définition 2.14** (Facteurs de Wenzl-Jones). Les facteurs de Wenzl-Jones sont les éléments de  $TL_n$  définis par

$$u_t = \prod_{i=1}^{t-1} e_{n-i} + \sum_{i=2}^t (-1)^{i+1} [i]_q \left( \prod_{j=i}^{t-1} e_{n-j} \right).$$

pour  $1 \leq t \leq n-1$  où l'ordre dans les produits est le même qu'à la définition 0.1.

Ces éléments respectent trivialement la relation de récurrence

$$u_{t+1} = u_t e_{n-t} + (-1)^t [t+1]_q \mathbf{id}$$

et les premiers facteurs de Wenzl-Jones sont donnés par

$$u_1 = \mathbf{id},$$

$$u_2 = e_{n-1} - [2]_q \mathbf{id},$$

$$u_3 = e_{n-1} e_{n-2} - [2]_q e_{n-2} + [3]_q \mathbf{id}.$$

Les facteurs de Wenzl-Jones offrent, comme le vocabulaire l'indique, une factorisation des  $\mathbf{p}_m$ .

**Proposition 2.15.** *Les projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers vérifient*

$$\mathbf{p}_m = \prod_{i=0}^{m-1} u_{m-i}.$$

Démonstration. Cette proposition est vraie pour  $m=1$  car  $u_1 = \mathbf{id}$  et  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{id}$ . En procédant par induction, grâce à la proposition 2.13, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= (-1)^{m+1} [m]_q \mathbf{p}_{m-1} + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) \mathbf{p}_{m-1} e_{n-m+1} \mathbf{p}_{m-1} \\ &= \left( (-1)^{m+1} [m]_q + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) \mathbf{p}_{m-1} e_{n-m+1} \right) \mathbf{p}_{m-1} \\ &= \left( (-1)^{m+1} [m]_q + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) \left( \prod_{i=1}^{m-1} u_{m-i} \right) e_{n-m+1} \right) \mathbf{p}_{m-1} \\ &= \left( (-1)^{m+1} [m]_q + \left( \prod_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(-1)^{i+1} [i]_q} \right) u_{m-1} e_{n-m+1} \left( \prod_{i=2}^{m-1} u_{m-i} \right) \right) \mathbf{p}_{m-1} \end{aligned}$$

mais, pour  $t \leq m$ ,  $u_t \mathbf{p}_m = (-1)^{t+1} [t]_q \mathbf{p}_m$  car seul le terme en  $\mathbf{id}$  de  $u_t$  n'est pas annulé par  $\mathbf{p}_m$ . Ainsi,

$$\left( \prod_{i=2}^{m-1} u_{m-i} \right) \mathbf{p}_{m-1} = \left( \prod_{i=2}^{m-1} (-1)^{m-i+1} [m-i]_q \right) \mathbf{p}_{m-1} = \left( \prod_{i=1}^{m-2} (-1)^{i+1} [i]_q \right) \mathbf{p}_{m-1}$$

et donc, l'équation précédente devient

$$\mathbf{p}_m = ((-1)^{m+1}[m]_q + u_{m-1}e_{n-t+1}) \mathbf{p}_{m-1} = \prod_{i=0}^{m-1} u_{m-i}$$

ce qui est le résultat attendu.  $\square$

**Corollaire 2.16.** *Les projecteurs de Wenzl-Jones non singuliers peuvent être évalués pour tout  $q \in \mathbb{C}^\times$ .*

Démonstration. L'expression de  $\mathbf{p}_m$  en terme des  $u_t$  de la proposition 2.15 n'a aucune division par un  $q$ -nombre.  $\square$

### 2.3.2. Les projecteurs de Wenzl-Jones pour $\text{TLb}_n$

Cette section présente deux familles d'éléments analogues aux projecteurs de Wenzl-Jones. Ceux-ci font intervenir plusieurs constantes :

$$\begin{aligned} \delta_j &= [j]_q \beta_1 - [j-1]_q \beta_2, & p_j &= \prod_{i=0}^{j-1} (-1)^i \delta_i, \\ c_1^j &= (-1)^{j-1} \delta_{j-1}, & c_2^j &= \prod_{i=0}^{j-3} \frac{1}{(-1)^i \delta_i}. \end{aligned}$$

Elles respectent plusieurs identités remarquables qui seront utiles pour les démonstrations de cette section. De plus, les paramètres  $\beta, \beta_1, \beta_2$  et  $q$  sont considérés comme étant génériques jusqu'à ce que leur spécialisation soit étudiée plus loin dans cette section. L'utilisation du terme projecteur sera justifiée plus loin dans cette section.

**Lemme 2.17.** *Les coefficients respectent les relations suivantes :*

- (1)  $c_1^j p_{j-1} = p_j$ ,
- (2)  $c_2^j p_{j-1} = c_1^{j-1}$ ,
- (3)  $c_2^j p_{j-2} = 1$ ,
- (4)  $\beta c_1^j + c_1^{j-1} = -c_1^{j+1}$ .

Démonstration. Les identités (1), (2) et (3) sont faciles à vérifier. L'identité (4) découle de la propriété (3) de la proposition 2.2. En effet,

$$\begin{aligned}
\beta c_1^j + c_1^{j-1} &= (-1)^{j-1} \beta \delta_{j-1} + (-1)^{j-2} \delta_{j-2} \\
&= (-1)^{j-1} (([2]_q [j-1]_q - [j-2]_q) \beta_1 - ([2]_q [j-2]_q - [j-3]_q) \beta_2) \\
&= (-1)^{j-1} ([j]_q \beta_1 - [j-1] \beta_2) \\
&= -(-1)^j \delta_j = -c_1^{j+1}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.  $\square$

**Définition 2.18** (Projecteurs de Wenzl-Jones généralisés). Pour  $\text{TLb}_n$ , les projecteurs de Wenzl-Jones généralisés de type  $\widehat{S}_{n,-n}$  sont les éléments  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  avec  $1 \leq m \leq n$  définis par la relation de récurrence

$$\widehat{\mathbf{p}}_1^- = e_n, \quad \widehat{\mathbf{p}}_m^- = c_1^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + c_2^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^-.$$

Les projecteurs de Wenzl-Jones généralisés de type  $\widehat{S}_{n,n}$  sont les éléments  $\widehat{\mathbf{p}}_m^+$  définis par la même relation de récurrence, mais avec la condition initiale  $\widehat{\mathbf{p}}_1^+ = \beta_2 \mathbf{id} - e_n$ .

Il suffit d'étudier les projecteurs de type  $\widehat{S}_{n,-n}$  puisque les projecteurs  $\widehat{\mathbf{p}}_m^+$  correspondent aux projecteurs de type  $\widehat{S}_{n,-n}$  pour l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta\beta_2 - \beta_1, \beta_2)$  par l'isomorphisme de la proposition 1.21. En effet, l'élément  $e'_n = \beta_2 \mathbf{id} - e_n$  est tel que  $e'_n = \beta_2 e'_n$  et  $e_{n-1} e'_n e_{n-1} = (\beta\beta_2 - \beta_1) e_{n-1}$ . Lorsque ce n'est pas spécifié et que le contexte est clair, les éléments  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  sont nommés projecteurs.

**Proposition 2.19.** *Les projecteurs respectent les propriétés suivantes :*

- (1)  $e_i \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \widehat{\mathbf{p}}_m^- e_i = 0$  pour  $n - m + 1 \leq i \leq n - 1$ ,
- (2)  $e_n \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \widehat{\mathbf{p}}_m^- e_n = \beta_2 \widehat{\mathbf{p}}_m^-$ ,
- (3)  $(\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^* = \widehat{\mathbf{p}}_m^-$ ,
- (4) pour  $k \leq m$ ,  $\widehat{\mathbf{p}}_k^- \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \widehat{\mathbf{p}}_m^- \widehat{\mathbf{p}}_k^- = \rho_k \widehat{\mathbf{p}}_m^-$  et
- (5)  $\widehat{\mathbf{p}}_m^- \in \text{Im } \iota_{n,m}$  où  $\iota_{n,m} : \text{TLb}_m \rightarrow \text{TLb}_n$  est l'inclusion décrite au chapitre 1.

La propriété (5) montre que  $e_i \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \widehat{\mathbf{p}}_m^- e_i$  pour  $1 \leq i \leq n - m - 1$ . La seule propriété étant modifiée pour  $\widehat{\mathbf{p}}_m^+$  est la seconde propriété. Celle-ci devient

$$(2') \quad e_n \widehat{\mathbf{p}}_m^+ = \widehat{\mathbf{p}}_m^+ e_n = 0$$

puisque l'élément  $e'_n$  décrit précédemment est tel que  $e_n e'_n = e'_n e_n = 0$ .

Pour démontrer cette proposition, il suffit de procéder par induction générale sur l'ensemble des propriétés. Pour  $m \leq 2$ , la proposition précédente est vraie. En effet,

$$\widehat{\mathbf{p}}_1^- = e_n \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{p}}_2^- = -\beta_1 e_n + e_n e_{n-1} e_n$$

et ces deux éléments respectent les propriétés annoncées. Soit  $m \geq 2$  fixé et soit  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$ . Par induction, les propriétés (2), (3) et (5) de  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  découlent immédiatement de la définition et la propriété (4) est vraie lorsque  $k < m$ . Il suffit de montrer que

$$e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_m^- = 0 \quad \text{et} \quad (\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 = \rho_m \widehat{\mathbf{p}}_m^-.$$

**Lemme 2.20.** *Pour  $2 \leq k \leq m$ ,*

$$e_{n-k} \widehat{\mathbf{p}}_k^- e_{n-k} = -c_1^{k+1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{n-k}.$$

Démonstration. Il suffit de développer l'expression de  $\widehat{\mathbf{p}}_k^-$  en remarquant que  $e_{n-k}$  et  $\widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^-$  commutent :

$$\begin{aligned} e_{n-k} \widehat{\mathbf{p}}_k^- e_{n-k} &= e_{n-k} (c_1^k \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- + c_2^k \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{n-k+1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^-) e_{n-k} \\ &= (\beta c_1^k + c_2^k \rho_{k-1}) \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{n-k} \\ &= -c_1^{k+1} \widehat{\mathbf{p}}_{k-1}^- e_{n-k}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.21.** *Les projecteurs respectent  $(\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 = \rho_m \widehat{\mathbf{p}}_m^-$ .*

Démonstration. Tout d'abord, par calcul direct à l'aide de la définition, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 &= (c_1^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + c_2^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^-)^2 \\ &= (c_1^m)^2 \rho_{m-1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + 2c_1^m c_2^m \rho_{m-1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\ &\quad + (c_2^m)^2 \rho_{m-1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^-. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, le troisième terme de cette somme vaut

$$\widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- = -c_1^m \rho_{m-2} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^-$$

ce qui donne

$$(\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 = \underbrace{(c_1^m)^2 \rho_{m-1}}_{(1)} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + \underbrace{(2c_1^m c_2^m \rho_{m-1} - c_1^m (c_2^m)^2 \rho_{m-2} \rho_{m-1})}_{(2)} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^-.$$

Il ne reste qu'à calculer les coefficients (1) et (2) pour conclure. En utilisant le lemme 2.17, il s'en suit que

$$(1) = (c_1^m)^2 \rho_{m-1} = \rho_m c_1^m$$

et

$$\begin{aligned}
(2) &= 2c_1^m c_2^m p_{m-1} - c_1^m (c_2^m)^2 p_{m-2} p_{m-1} \\
&= 2c_2^m p_m - c_1^m (c_2^m)^2 p_{m-2} p_{m-1} \\
&= 2c_2^m p_m - (c_2^m)^2 p_{m-2} p_m \\
&= 2c_2^m p_m - c_2^m p_m = c_2^m p_m
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. □

**Lemme 2.22.** *Les projecteurs respectent  $e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_m^- = 0$ .*

Démonstration. Par calcul direct et à l'aide du lemme 2.17,

$$\begin{aligned}
e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_m^- &= e_{n-m+1} \left( c_1^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + c_2^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \right) \\
&= c_1^m e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- + c_2^m (e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1}) \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= c_1^m e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- - c_1^m c_2^m e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-2}^- \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= c_1^m (1 - c_2^m p_{m-2}) e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

La proposition 2.19 est ainsi établie.

Les coefficients apparaissant dans la définition des projecteurs font intervenir des divisions par les constantes  $\delta_j$ . Il est donc naturel d'étudier le comportement des projecteurs lorsque ces constantes s'annulent. La prochaine définition s'intéresse à factoriser les projecteurs.

**Définition 2.23** (Facteurs de Wenzl-Jones généralisés). Les facteurs de Wenzl-Jones généralisés sont les éléments de  $\text{TLb}_n$  donnés par

$$\hat{u}_m = \left( \prod_{i=0}^{m-1} e_{n-i} \right) + \sum_{i=2}^m c_1^i \left( \prod_{j=i}^{m-1} e_{n-j} \right)$$

pour  $1 \leq m \leq n$  où l'ordre dans les produits est le même qu'à la définition 0.1.

Ceux-ci peuvent aussi être bâtis à l'aide de la relation de récurrence

$$\hat{u}_m = \hat{u}_{m-1} e_{n-m+1} + c_1^m.$$

De plus, il est utile de remarquer que les  $\hat{u}_m$  ne contiennent dans leur expression que les générateurs  $e_i$  pour  $n-m+1 \leq i \leq n$ . Conséquemment,  $\hat{u}_m e_i = e_i \hat{u}_m$  pour  $1 \leq i \leq n-m-1$ .

**Proposition 2.24.** *Les projecteurs admettent la factorisation  $\widehat{\mathbf{p}}_m^- = \prod_{i=1}^m \widehat{u}_{m-i+1}$ .*

Démonstration. La démonstration est faite par induction. Pour  $m = 1$ , elle est vraie. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{p}}_m^- &= (c_1^m + c_2^m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m+1}) \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= (c_1^m + c_2^m \widehat{u}_{m-1} e_{n-m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-2}^-) \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= (c_1^m + \underbrace{c_2^m p_{m-2}}_{=1} \widehat{u}_{m-1} e_{n-m+1}) \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= (\widehat{u}_{m-1} e_{n-m+1} + c_1^m) \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- \\
&= \widehat{u}_m \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- = \prod_{i=1}^m \widehat{u}_{m-i+1}
\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée. □

**Corollaire 2.25.** *Les projecteurs sont non singuliers, c'est-à-dire qu'ils peuvent être évalués pour  $\beta, \beta_1, \beta_2$  et  $q$  quelconques.*

Démonstration. La factorisation des projecteurs de la proposition 2.24 ne fait intervenir aucune division. □

S'il existe  $0 \leq j \leq n-1$  tel que  $\delta_j = 0$  et que cet entier est minimal, alors, pour  $m < j$ , les éléments  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  peuvent être renormalisés pour être des idempotents, c'est-à-dire de véritables projecteurs. Dans le cas où  $m \geq j$ , ils sont nilpotents d'ordre 2. L'étude du cas nilpotent sera faite au chapitre 4.

Il est aussi naturel de s'intéresser à l'unicité de des projecteurs.

**Proposition 2.26.** *Lorsque les paramètres  $\beta, \beta_1, \beta_2$  sont génériques, les propriétés (1), (2) et (5) de la proposition 2.19 ainsi que la condition  $(\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 \neq 0$  déterminent complètement les projecteurs  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  à une constante multiplicative près.*

Démonstration. Pour  $m = 1$ , la proposition est claire. Soit  $m \geq 2$  et soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\text{TLb}_n$  non nuls, au carré non nul et respectant les propriétés (1), (2) et (5). Tous les produits de  $e_i$  étant présents dans l'expression de  $P$  et  $Q$  possèdent au moins un générateur  $e_n$ . En effet, puisque  $e_n P = \beta_2 P$ , il faut que  $P \in \langle e_n \rangle$  car si un mot  $m$  présent dans l'expression de  $P$  ne possède pas de  $e_n$  dans son expression,  $e_n m$  est  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendant de  $m$ . Aussi, puisque le carré de  $P$  et  $Q$  est non nul, ces éléments doivent

posséder une composante non nulle en  $e_n$  car tout mot apparaissant dans l'expression de  $P$  et  $Q$  possédant aussi un générateur  $e_i$  pour  $i \neq n$  est annulé par  $P$  et  $Q$ .

Il est donc possible d'écrire  $P = \lambda_P e_n + \tilde{P}$  et  $Q = \lambda_Q e_n + \tilde{Q}$ , où  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  sont des sommes de produits de générateurs contenant au moins un  $e_i$  pour  $n - m + 1 \leq i \leq n - 1$ , où  $\lambda_P, \lambda_Q \neq 0$ . De plus,  $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q = 0$  puisque  $e_i P = e_i Q = 0$  pour  $n - m + 1 \leq i \leq n - 1$ . Donc,

$$\begin{aligned} P &= P + \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} \underbrace{P\tilde{Q}}_{=0} = \frac{1}{\beta_2} P e_n + \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} P\tilde{Q} = \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} P (\lambda_Q e_n + \tilde{Q}) \\ &= \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} P Q = \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} (\lambda_P e_n + \tilde{P}) Q = \frac{\lambda_P}{\lambda_Q} Q + \frac{1}{\beta_2 \lambda_Q} \tilde{P} Q = \frac{\lambda_P}{\lambda_Q} Q \end{aligned}$$

ce qui montre que les deux éléments  $P$  et  $Q$  sont proportionnels.  $\square$

Intuitivement, la proposition 2.24 montre que le projecteur  $\hat{\mathbf{p}}_m^-$  est défini sous la forme renormalisée la plus naturelle. En effet, il est possible de remarquer que les mots présents dans le facteur de Wenzl-Jones  $\hat{u}_m$  ont toujours une taille inférieure ou égale à  $m$ . Le seul mot de taille  $m$  provient du développement du produit  $\prod_{i=0}^{m-1} e_{n-i}$ . Il s'en suit que dans l'expression du projecteur  $\hat{\mathbf{p}}_m^-$ , le mot

$$(e_n e_{n-1} \dots e_{n-m+1})(e_n e_{n-1} \dots e_{n-m+2}) \dots (e_n e_{n-1}) e_n$$

apparaît avec coefficient 1. Ce mot est sous la forme de Jones généralisée 1.22 et il est le mot le plus long (strictement) présent dans l'expression du projecteur. Ainsi, aucun zéro n'est commun à tous les coefficients des mots présents dans l'expression de  $\hat{\mathbf{p}}_m^-$ . Donc, toute tentative de diviser par une fonction complexe introduira nécessairement une singularité. Il est donc impossible de trouver une fonction complexe non constante  $\lambda(q, \beta_1, \beta_2)$  ayant au moins un zéro telle que  $\frac{1}{\lambda} \hat{\mathbf{p}}_m^-$  puisse être évalué pour toute valeur des paramètres.

## 2.4. Morphismes de Graham-Lehrer

Les familles d'algèbres présentées au chapitre précédent possèdent des modules standards. Comme l'ont démontré les propositions de la section 1.1.2, la structure de ces modules donne de l'information non triviale au sujet de l'algèbre dont ils proviennent. Il est donc naturel d'étudier les morphismes entre les modules standards.

Graham et Lehrer ont présenté dans [GL97] une construction des morphismes entre les standards de  $\mathbf{aTL}_n$ . C'est ce procédé qui est utilisé par Belletête et Saint-Aubin [BSA18] pour déterminer plus explicitement la structure des modules standards de  $\mathbf{aTL}_n$ .

Cette section présente quelques résultats au sujet des morphismes entre les modules standards de  $\mathrm{TL}_n$ ,  $\mathrm{aTL}_n$  et  $\mathrm{TLb}_n$ . Les preuves ne sont pas données. Ces résultats seront utilisés au chapitre suivant.

### 2.4.1. Structure des modules standards de $\mathrm{TL}_n$

Par souci d'exhaustivité, quelques résultats au sujet de l'algèbre  $\mathrm{TL}_n$  sont présentés.

Voici un exemple de morphisme entre deux modules standards de  $\mathrm{TL}_n$ . Soit  $q = e^{\frac{i\pi}{5}}$ , et donc  $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Le morphisme entre  $S_{5,5}$  et  $S_{5,3}$  est donné sur la base  $B_{5,5}$  par l'application

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} &\mapsto \beta \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} - \beta \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (\beta^2 - 1) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + (2\beta - \beta^3) \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \\ &= \beta \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} - [2]_q \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + [3]_q \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} - [4]_q \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

et celui-ci s'étend linéairement. Comme cet exemple l'illustre bien, la valeur de  $\beta$  contrôle l'existence de morphisme entre les modules standards.

**Théorème 2.27.** *Lorsque  $q$  n'est pas une  $2\ell$ -ième racine de l'unité pour un certain  $\ell < n$ , l'algèbre  $\mathrm{TL}_n(\beta)$  est semisimple.*

Ridout et Saint-Aubin [RSA14] démontrent ce théorème à l'aide d'un calcul des matrices de Gram et de leur déterminant. Belletête, Ridout et Saint-Aubin [BRSA17] déterminent explicitement la structure des modules standards, simples, projectifs et injectifs de  $\mathrm{TL}_n$  lorsque  $q$  est une racine de l'unité.

### 2.4.2. Structure des modules standards de $\mathrm{aTL}_n$

Cette section suit le traitement de [BSA18]. Les résultats originaux proviennent de [GL97].

Comme cela a été souligné précédemment, l'algèbre  $\mathrm{aTL}_n$  n'est pas cellulaire. Ainsi, il est impossible de définir de modules cellulaires au sens de la définition 1.2. Par contre, les morphismes entre les modules  $W_{n,j;z}$  définis à la section 1.3.2 sont bien compris. Les prochains résultats donnant la structure des modules standards peuvent être comparés avec les propositions 1.6 et 1.7.

Soient  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  et  $z \in \mathbb{C}^\times$ . Soit  $\Lambda^a$  l'ensemble des paires  $(j, z)$  où les paires  $(0, z)$  et  $(0, z^{-1})$  sont identifiées (étant donné qu'elles donnent lieu au même module  $W_{n,j;z}$ ). De plus, si  $q + q^{-1} = 0$  et  $n \equiv_2 0$ , la paire  $(0, q)$  est retirée de  $\Lambda^a$ .

**Théorème 2.28** (Résultat de [GL97], théorème 3.1 [BSA18]). Les  $a\text{TL}_n$ -modules  $W_{n,j;z}$  ont coiffe simple et l'ensemble des  $L_{n,j;z} := W_{n,j;z} / \text{rad } W_{n,j;z}$  pour  $(j, z) \in \Lambda^a$  forme un ensemble complet de représentants non isomorphes des  $a\text{TL}_n$ -modules simples de dimension finie.

Ce dernier théorème montre qu'en effet, les modules standards  $W_{n,j;z}$  sont une généralisation naturelle des modules cellulaires. Le prochain théorème s'intéresse à leur structure.

Soit  $q \in \mathbb{C}^\times$  et soit l'ordre partiel  $\preceq$  sur  $\Lambda^a$  (dépendant de la valeur de  $q$ ) défini comme suit. Pour  $(j, y), (k, z) \in \Lambda^a$ , la paire  $(j, y)$  succède  $(k, z)$  s'il existe  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $j = k + 2m$  et l'une des deux conditions suivantes est respectée :

$$(GL1) \quad z^2 = (-q)^j \text{ et } y = z(-q)^{-m},$$

$$(GL2) \quad z^2 = (-q)^{-j} \text{ et } y = z(-q)^m.$$

Ainsi,  $\preceq$  est défini comme l'ordre partiel le plus faible sur  $\Lambda^a$  tel que  $(k, z) \preceq (j, y)$  dès que  $(j, y)$  succède  $(k, z)$ .

Pour qu'une paire  $(k, z)$  possède des solutions aux conditions de (GL1) ou (GL2), il faut que  $z$  s'écrive comme  $(-q)^{m/2}$  où  $m$  est un entier. L'entier  $m$  sera appelé un entier critique lorsque  $m+1 \equiv_\ell 0$ . La paire  $(k, z)$  est appelée critique lorsque  $z = (-q)^{m/2}$  avec  $m$  un entier critique.

**Théorème 2.29** (Résultat de [GL97], théorème 3.2 [BSA18]). Soient  $k, j, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tels que  $0 \leq k \leq j \leq n$  et  $q \in \mathbb{C}^\times$ .

(1)  $\text{Hom}(W_{n,j;y}, W_{n,k;z}) \simeq \mathbb{C}$  si  $(k, z) \preceq (j, y)$  et  $\simeq 0$  sinon.

(2) La multiplicité du simple  $L_{n,j;z}$  dans  $W_{n,k;z}$  est 1 si  $(k, z) \preceq (j, y)$  et zéro sinon.

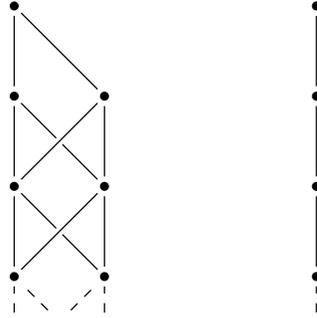
(3) Pour  $n, k, z$  fixés,  $\sum_{\vartheta \in \text{Hom}(W_{n,j;y}, W_{n,k;z})} \text{Im } \vartheta \simeq \text{rad } W_{n,k;z}$ .

L'exemple suivant donne explicitement le morphisme entre deux modules standards de  $a\text{TL}_n$ . Soit  $q$  une 6-ième racine de l'unité primitive. Alors, les modules  $W_{4,2;q^{-3}}$  et  $W_{4,0;-q^2}$  sont liés par un morphisme (la paire  $(2, q^{-3})$  et  $(0, -q^2)$  vérifie la condition (GL2)). Celui-ci est donné sur les bases de ces modules par

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} - \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} - \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array}, \\ \\ \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} - \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array} - \begin{array}{c} \text{⌈} \\ \text{⌈} \\ \text{⌈} \end{array}. \end{array}$$

En plus de donner la structure des modules cellulaires, Graham et Lehrer [GL97] décrivent une technique explicite permettant de calculer les morphismes entre les modules standards.

**Théorème 2.30** (Proposition 3.3 [BSA18]). *Les diagrammes de Loewy des modules  $W_{n,j,z}$  sont donnés par une troncature des patrons*



où le diagramme de gauche représente le cas où la paire  $(j, z)$  est non critique tandis que le diagramme de droite représente le cas où  $(j, z)$  est critique. De plus, pour le diagramme de droite, les lignes verticales sont des morphismes issus de la condition (GL1) tandis que les lignes diagonales sont des morphismes issus de la condition (GL2) données précédemment.

Le théorème précédent sera grandement utile au chapitre 3. Les diagrammes de Loewy seront définis à la section 3.1.1.

### 2.4.3. Structure des modules standards de $TLb_n$

Le prochain chapitre étudiera en détails la théorie de la représentation de l'algèbre  $TLb_n$ , plus particulièrement lorsqu'elle n'est pas semisimple. Cette section présente le résultat du calcul des déterminants de Gram.

La structure de  $TLb_n$  est liée au comportement des constantes

$$a_k = \beta_2[k + 1]_q - \beta_1[k]_q$$

pour  $k \in \mathbb{Z}$  ainsi qu'au paramètre  $q$ . La prochaine proposition illustre partiellement ce fait.

**Proposition 2.31** (Déterminant de Gram, [MD17] et [HT18]). *Le déterminant de Gram des modules standards de  $TLb_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  est donné par*

$$\det \mathfrak{G}_{n,k} = \beta_2^{c_{n,k}} \prod_{j=1}^{\frac{n-|k|}{2}} a_{(k+j \operatorname{sgn}(k))}^{\dim \widehat{S}_{n,|k|+2j}} \prod_{j=1}^{\frac{n-|k|}{2}} a_{(-j \operatorname{sgn}(k))}^{\dim \widehat{S}_{n,|k|+2j}}$$

où  $c_{n,k}$  correspond au nombre de décorations présentes dans la base  $\widehat{B}_{n,-|k|}$ .

**Corollaire 2.32.** *Si  $TLb_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  n'est pas semisimple, alors  $\beta_2 = 0$  ou il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$ .*

Démonstration. Ce corollaire est une application directe de la proposition 1.8 □

## 2.5. La catégorie $\text{mod}(A/I)$

Dans les prochains chapitres, il sera question de la catégorie  $\text{mod}(A/I)$  des modules à gauches de type fini sur l'algèbre  $A/I$  pour  $I$  un idéal bilatère. Cette section étudie cette catégorie, ses projectifs indécomposables et ses modules simples. Étant donné un  $A$ -module à gauche  $M$ , celui-ci est associé au  $A/I$ -module à gauche  $M/IM$ .

Tout d'abord, il est utile de remarquer que la catégorie  $\text{mod}(A/I)$  est équivalente à l'anneau  $\text{ann}_A(I)$ , la sous-catégorie pleine de  $\text{mod}(A)$  ayant comme objets les  $A$ -modules à gauches  $M$  tels que  $IM = 0$ .

L'équivalence de catégories est définie sur les objets comme suit : Un  $A$ -module  $M$  tel que  $IM = 0$  possède canoniquement une structure de  $A/I$ -module. Inversement, tout  $A/I$ -module possède une structure de  $A$ -module en définissant  $im = 0$  pour tout  $i \in I$  et  $m \in M$  (et donc  $IM = 0$ ) et où l'action de  $a \in A$  est donnée par  $a \cdot m = (a + I)m$ .

Sur les morphismes, le foncteur est donné par l'application suivante. Pour  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de  $A$ -modules avec  $M, N$  deux  $A$ -modules tels que  $IM = IN = 0$ ,  $f$  est un morphisme de  $A/I$ -modules car  $f(im) = 0$  et  $if(m) = 0$  pour tout  $m \in M$  et  $i \in I$  par définition. Inversement, un morphisme de  $A/I$ -modules  $f : M \rightarrow N$  s'étend à un morphisme de  $A$ -modules pour les mêmes raisons.

La vérification que les foncteurs décrits ci-dessus sont des quasi-inverses est directe. Cette équivalence de catégories a plusieurs conséquences.

**Lemme 2.33.** *Soient  $A$  une algèbre artinienne et  $M$  un  $A$ -module indécomposable de type fini. Si  $IM = 0$ , alors  $M$  est indécomposable en tant que  $A/I$ -module.*

Démonstration. Puisque la catégorie  $\text{ann}_A(I)$  est une sous-catégorie pleine de  $\text{mod}(A)$ ,

$$\text{End}_{A/I}(M) \simeq \text{End}_A(M)$$

et  $\text{End}_A(M)$  est un  $K$ -module local si et seulement si  $M$  est indécomposable puisque  $M$  est de type fini et  $A$  est artinienne. □

**Lemme 2.34.** *Si  $P$  est un  $A$ -module projectif, alors le module  $P/IP$  est un  $A/I$ -module projectif.*

Démonstration. Il est bien connu que pour tout  $A$ -module à gauche,  $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$ , où l'isomorphisme est donné par  $(a + I) \otimes m \mapsto am + IM$  pour  $m \in M$  et  $a \in A$ . Puisque le

foncteur  $A/I \otimes_A \_$  et le foncteur  $\text{Hom}_{A/I}(A/I, \_)$  sont adjoints, il suit que

$$\text{Hom}_{A/I}(P/IP, \_) \simeq \text{Hom}_{A/I}(A/I \otimes_A P, \_) \simeq \text{Hom}_A(P, \text{Hom}_{A/I}(A/I, \_)).$$

Or, étant donné que  $A/I$  est un  $A/I$ -module projectif, ceci est la composition de deux foncteurs exacts, ce qui est un foncteur exact. □

Une partie de l'étude de la catégorie  $\text{mod}(A/I)$  sera faite dans le cas où  $I$  est un idéal nilpotent. Les prochains résultats s'intéressent à ce cas particulier.

**Lemme 2.35.** *Soit  $I$  un idéal bilatère nilpotent de  $A$ . Pour un  $A$ -module  $M \neq 0$ , le  $A/I$ -module  $M/IM$  est non nul.*

Démonstration. Soit  $n$  tel que  $I^n \simeq 0$ . Si  $M/IM \simeq 0$ , alors  $M \simeq IM$ . Ainsi,

$$M \simeq I(M) \simeq I(IM) \simeq \dots \simeq I^n M \simeq 0$$

ce qui est une contradiction. □

**Lemme 2.36.** *Soit  $I$  un idéal bilatère nilpotent de  $A$ . Si  $M$  a coiffe simple, alors  $M/IM$  a coiffe simple et conséquemment, est indécomposable.*

Démonstration. Soit  $n$  tel que  $I^n \simeq 0$ . Alors,  $I \subset \text{rad } A$  et donc,  $IM \subset \text{rad } M$ . La projection  $f : M \rightarrow M/IM$  induit un isomorphisme top  $f : M/\text{rad } M \rightarrow (M/IM)/\text{rad}(M/IM)$  et ainsi, la coiffe de  $M/IM$  est simple. □

Les lemmes précédents amènent donc à conclure le résultat suivant que si  $\{Ae_i\}$  est un ensemble complet de représentants non isomorphes des  $A$ -modules projectifs indécomposables, alors  $\{Ae_i/IAe_i\}$  est un ensemble complet de représentants non isomorphes des  $A/I$ -modules projectifs indécomposables. De plus, les  $A/I$ -modules simples sont isomorphes en tant que  $A$ -modules aux  $A$ -modules simples.

L'objectif de l'étude du chapitre 4 sera d'étudier les  $A$ -modules à gauches  $IP$  pour  $P$  un  $A$ -module projectif indécomposable dans le cas de  $A = \text{TLb}_n$ .

## Chapitre 3

---

# Représentations des algèbres de Temperley-Lieb à une frontière

Les algèbres de Temperley-Lieb à une frontière ont été introduites au chapitre 1. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la théorie de la représentation de ces algèbres en fonction des paramètres complexes  $\beta$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Au chapitre 2, le résultat du calcul des déterminants de Gram de  $\text{TLb}_n$  a été donné à la proposition 2.31. Or, ce calcul permet seulement de déterminer si l'algèbre est semisimple ou non. Dans le cas où l'algèbre n'est pas semisimple, beaucoup de travail reste à faire.

La première section présente d'abord quelques résultats élémentaires de la théorie de la représentation des algèbres. Ils proviennent tous de [Ass97]. Celle-ci se termine en donnant un morphisme d'algèbres surjectif de  $\text{aTL}_n$  vers  $\text{TLb}_n$  provenant de [GL04].

La seconde section présente un test numérique permettant de déterminer si deux modules standards de  $\text{TLb}_n$  sont liés par un morphisme. Ce travail s'inspire des résultats de Graham et Lehrer [GL04].

La dernière section définit une construction géométrique, appelée patron de morphismes, qui permet de visualiser les différents morphismes de la section 2. Les matrices de Cartan des blocs de l'algèbre  $\text{TLb}_n$  sont données.

Il faut rappeler la définition des constantes  $a_k$  définies plus tôt dans ce mémoire puisqu'elles jouent un rôle crucial ici. Lors du calcul du déterminant de Gram des modules standards  $\widehat{S}_{n,j}$ , les constantes  $a_k \in \mathbb{C}$  ont été définies comme

$$a_k = a_k(q, \beta_1, \beta_2) := \beta_2[k+1]_q - \beta_1[k]_q \quad (3.1)$$

et le corollaire 2.32 montre que si  $a_k \neq 0$  pour tout  $k$ , (le cas  $\beta_2 = 0$  étant compris comme  $a_0 = 0$ ), alors l'algèbre  $\text{TLb}_n$  est semisimple.

Puisque l'objectif de ce chapitre est de comprendre l'algèbre  $\text{TLb}_n$  lorsqu'elle n'est pas semisimple, il sera nécessaire d'imposer l'existence d'un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$  lors de l'étude des morphismes entre les modules cellulaires. Le lemme suivant sera utile lors de ce chapitre et il n'implique que la manipulation de  $q$ -nombres.

**Lemme 3.1.** *Soit  $\beta_1, \beta_2$  tels que  $\beta_1 \neq 0$  ou  $\beta_2 \neq 0$ . Si  $a_k = 0$ , alors  $a_{k+m} = 0$  si et seulement si  $[m]_q = 0$ . Conséquemment, si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive et que  $\beta_1$  ou  $\beta_2$  est non nul, alors une constante  $a_k$  s'annule si et seulement les seules constantes  $a_{k'}$  s'annulant sont de la forme  $a_{k+m\ell}$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ .*

Démonstration. Si  $a_k = a_{k+m} = 0$ , alors

$$\beta_2[m+k+1]_q[k]_q = \beta_1[m+k]_q[k]_q = \beta_2[k+1]_q[m+k]_q$$

et

$$\beta_1[m+k]_q[k+1]_q = \beta_2[m+k+1]_q[k+1]_q = \beta_1[m+k+1]_q[k]_q.$$

Ainsi, grâce à la propriété (3) de la proposition 2.2, les deux équations précédentes sont équivalentes aux deux suivantes :

$$\beta_2[m]_q = 0 \quad \text{et} \quad \beta_1[m]_q = 0.$$

Puisque  $\beta_1$  ou  $\beta_2$  est non nul, il faut que  $[m]_q = 0$ .

Inversement, si  $a_k = 0$  et  $[m]_q = 0$ , alors les propriétés (4) et (5) de la proposition 2.2 garantissent que  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive où  $m = p\ell$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ . Donc, la fonction  $j \mapsto [j]_q$  est telle que  $[p\ell + j]_q = q^{p\ell}[j]_q$  et

$$a_{m+k} = \beta_2[m + (k+1)]_q - \beta_1[m+k]_q = q^{p\ell}a_k = 0.$$

Enfin, le dernier énoncé découle du fait que si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive, alors  $[m]_q = 0$  implique que  $\ell \mid m$  par la propriété (4) de la proposition 2.2.  $\square$

**Corollaire 3.2.** *Si  $\beta_1$  ou  $\beta_2$  est non nul et  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors s'il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$ , ce  $k$  est unique.*

### 3.1. Notions algébriques

Cette section présente les diagrammes de Loewy, le foncteur changement des scalaires et la décomposition en blocs d'une algèbre.

### 3.1.1. Diagrammes de Loewy

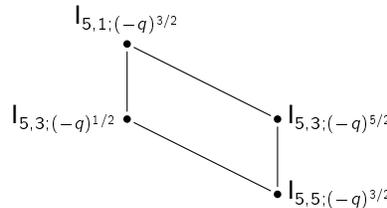
Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $M$  un  $A$ -module à gauche de dimension finie. Un diagramme de Loewy de  $M$  est un graphe dont les sommets sont les facteurs de composition de  $M$ . Puisque  $M$  est de dimension finie, il existe  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $\text{rad}^n M = 0$ . De plus, les quotients successifs  $\text{rad}^i M / \text{rad}^{i+1} M$  sont des modules semisimples. Les sommets du diagrammes de Loewy positionnés à la rangée  $i$  sont définis comme étant les modules simples présents dans  $\text{rad}^i M / \text{rad}^{i+1} M$ . Si les modules simples  $I_1, I_2$  apparaissent comme sommets dans le diagramme de Loewy de  $M$ , ceux-ci sont liés par une arête s'il existe trois  $A$ -modules à gauches  $M_1, M_2$  et  $N$  tels que :

- (1)  $N$  est un sous-module de  $M_2$ ,
- (2)  $N$  est indécomposable et
- (3) les suites courtes suivantes sont exactes :

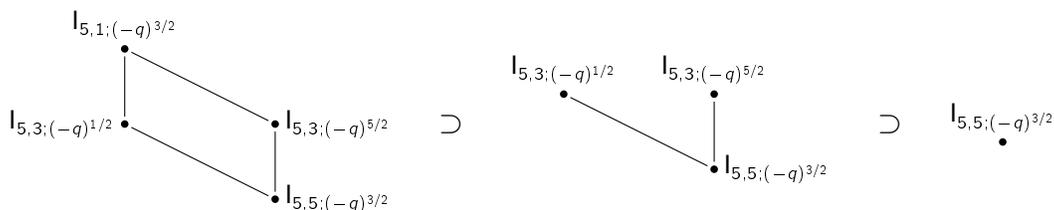
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0, \\ & & & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & I_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

À l'aide d'un diagramme de Loewy, il est facile de déterminer la coiffe et le socle d'un module. La coiffe apparaît comme la collection de simples au sommet du diagramme puisque ceux-ci correspondent à  $M / \text{rad} M$  selon la construction décrite précédemment. Si  $I$  est un sous-module simple de  $M$ , alors aucune arête ne lie le sommet correspondant à  $I$  à un autre sommet se trouvant plus bas dans le diagramme. Donc, le socle de  $M$  est l'ensemble des sommets du diagramme de Loewy n'ayant aucune arête descendante.

Voici un exemple de construction du diagramme de Loewy du standard  $W_{5,1;(-q)^{3/2}}$  pour  $q$  une racine sixième de l'unité. Selon le théorème 2.30, le diagramme de Loewy du standard est



où  $I_{n,j;z}$  est la coiffe de  $W_{n,j;z}$ . Et donc, la suite des radicaux est



et l'information contenue dans le diagramme de Loewy implique que

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}^1(\mathbb{I}_{5,1;(-q)^{3/2}}, \mathbb{I}_{5,3;(-q)^{1/2}}) &\geq 1, & \dim \text{Ext}^1(\mathbb{I}_{5,1;(-q)^{3/2}}, \mathbb{I}_{5,3;(-q)^{5/2}}) &\geq 1, \\ \dim \text{Ext}^1(\mathbb{I}_{5,3;(-q)^{5/2}}, \mathbb{I}_{5,5;(-q)^{3/2}}) &\geq 1, & \dim \text{Ext}^1(\mathbb{I}_{5,3;(-q)^{1/2}}, \mathbb{I}_{5,5;(-q)^{3/2}}) &\geq 1, \end{aligned}$$

et il est possible de remarquer que  $\text{top } \mathbb{W}_{5,1;(-q)^{3/2}} \simeq \mathbb{I}_{5,1;(-q)^{3/2}}$  et  $\text{soc } \mathbb{W}_{5,1;(-q)^{3/2}} \simeq \mathbb{I}_{5,5;(-q)^{3/2}}$ .

### 3.1.2. Changement des scalaires

Cette section traite d'une construction élémentaire, mais centrale à ce chapitre. Ces résultats proviennent de Assem [Ass97].

Soient deux  $K$ -algèbres  $A, B$  et  $\phi : A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres. Le foncteur changement des scalaires est le foncteur covariant

$$F_\phi : \text{Mod } B \rightarrow \text{Mod } A$$

construit comme suit. Pour un  $B$ -module  $M$ , le  $A$ -module  $F_\phi(M)$  est le  $K$ -module  $M$  muni de l'action  $a \cdot m = \phi(a)m$  pour  $a \in A$  et  $m \in M$ . Si  $f : M \rightarrow N$  est un morphisme de  $B$ -modules, alors  $f$  est un morphisme de  $K$ -modules. Ainsi,  $F_\phi(f) : F_\phi(M) \rightarrow F_\phi(N)$  est donné par la même application que  $f$  et  $F_\phi(f)$  commute avec l'action de  $A$  définie précédemment puisque que  $f$  commute avec l'action des  $b \in B$ .

**Lemme 3.3** ([Ass97]). *Si  $\phi$  est surjectif, alors le foncteur  $F_\phi$  induit une bijection  $\text{Hom}_B(M, N) \simeq \text{Hom}_A(F_\phi(M), F_\phi(N))$ . Dans un tel cas, le foncteur changement des scalaires est plein et fidèle.*

Démonstration. Soit  $f : F_\phi(M) \rightarrow F_\phi(N)$  un morphisme de  $A$ -modules. Alors,  $f : M \rightarrow N$  est un morphisme de  $K$ -modules. De plus, si  $b \in B$ , alors il existe  $a \in A$  tel que  $\phi(a) = b$ . Donc, pour  $m \in M$ ,

$$bf(m) = \phi(a)f(m) = f(\phi(a)m) = f(bm).$$

Ainsi,  $f$  est aussi un morphisme de  $B$ -modules. Ceci montre qu'il existe une surjection de  $\text{Hom}_A(F_\phi(M), F_\phi(N))$  sur  $\text{Hom}_B(M, N)$ . La définition de  $\text{Hom}_A(F_\phi(M), F_\phi(N))$  implique que cette surjection est aussi injective.  $\square$

### 3.1.3. Décomposition en blocs

La notion de blocs d'une algèbre sera utilisée dans ce chapitre à plusieurs reprises. Cette section cite quelques résultats élémentaires de la théorie de la représentation des algèbres à ce sujet. Ceux-ci proviennent de [Ass97].

**Définition 3.4.** Une  $K$ -algèbre  $A$  non-nulle est connexe si, pour  $A_1, A_2$  des  $K$ -algèbres,  $A = A_1 \times A_2$  implique  $A_1 = 0$  ou  $A_2 = 0$ .

**Théorème 3.5.** Soit  $A$  une  $K$ -algèbre noethérienne ou artinienne. Alors,  $A$  est isomorphe à un produit fini d'algèbres connexes uniquement déterminées.

Un bloc d'une algèbre  $A$  est une de ces algèbres connexes donnée dans le théorème précédent. De plus, pour une  $K$ -algèbre  $A$  de dimension finie, il suit directement que les blocs de  $A$  sont en correspondance biunivoque avec les blocs de la matrice de Cartan  $C_A$ . Ainsi, si  $A$  est une algèbre cellulaire, les blocs de la matrice  $D = (d_{\lambda\mu})$  sont eux aussi en correspondance biunivoque avec les blocs de  $A$  puisque  $D^T D = C_A$ .

## 3.2. Les morphismes entre modules standards

### 3.2.1. Un morphisme d'algèbres

Pour  $W$  un groupe de Coxeter, l'algèbre de Hecke<sup>3.1</sup> associée à  $W$  est notée  $\mathcal{H}_q(W)$ .

Originellement, les algèbres de Temperley-Lieb ont été définies comme des quotients des l'algèbres de Hecke  $\mathcal{H}_q(A_n)$ . L'algèbre à une frontière  $\text{TLb}_n$  a d'abord été présentée comme une généralisation de l'algèbre de Temperley-Lieb [MS94]. Or, il est aussi possible de définir  $\text{TLb}_n$  comme un quotient de  $\mathcal{H}_q(B_n)$ , tel que présenté dans l'article de Graham et Lehrer [GL04].

Surprenamment, cette perspective permet d'exprimer  $\text{TLb}_n$  comme un quotient de l'algèbre de Temperley-Lieb affine. Voici une courte description de la démarche de Graham et Lehrer. Tout d'abord, ceux-ci montrent que l'algèbre  $\text{aTL}_n$  se réalise comme un quotient de l'algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}_q(\tilde{A}_n)$ . Ensuite, il est démontré que l'algèbre de Hecke de type  $B_n$  s'exprime comme un quotient de l'algèbre de Hecke de type  $\tilde{A}_n$ . Finalement, ils arrivent à factoriser un morphisme surjectif (unique par rapport à certaines conditions) entre l'algèbre  $\text{aTL}_n$  et  $\text{TLb}_n$ . Tous les détails et les définitions sont donnés dans [GL04]. Cette section donne explicitement le morphisme d'algèbres entre  $\text{aTL}_n$  et  $\text{TLb}_n$  sans introduire toute la machinerie des algèbres de Hecke.

Dans [GL04], Graham et Lehrer introduisent une version de  $\text{TLb}_n$  ayant des paramètres différents de ceux présentés au chapitre 1. Hélas, il est très facile de confondre les deux

---

3.1. Cette section présente des résultats provenant des algèbres de Hecke et ils peuvent être énoncés sans ce contexte. Ces notions n'apparaissent que dans cette section et elles ne sont pas centrales à la compréhension des résultats.

versions de ces algèbres. La notation suivante est introduite pour clarifier le contexte. Pour  $q, Q \in \mathbb{C}^\times$ , l'algèbre à une frontière de Graham et Lehrer est définie comme

$$\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(q, Q) = \mathrm{TLb}_n \left( \underbrace{-(q + q^{-1})}_{=\beta}, \underbrace{\frac{q}{Q} + \frac{Q}{q}}_{=\beta_1}, \underbrace{-(Q + Q^{-1})}_{=\beta_2} \right).$$

Malgré que ces paramètres aient une apparence très peu naturelle par rapport au formalisme introduit ici, ils apparaissent canoniquement dans le contexte des algèbres de Hecke  $\mathcal{H}_q(\mathbf{B}_n)$  et du quotient permettant d'obtenir  $\mathrm{TLb}_n$ .

Puisque la famille d'algèbres  $\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}$  ne dépend que de trois paramètres, il est naturel de penser que certaines algèbres  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  ne correspondent à aucune algèbre  $\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}$ .

**Théorème 3.6** ([GL04]). *Soient  $q, Q \in \mathbb{C}^\times$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda^2 = -q^{n-2}$ . L'application*

$$g_\lambda : \mathfrak{a}\mathrm{TL}_n(-q - q^{-1}) \rightarrow \mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(q, Q)$$

définie sur les générateurs par  $g_\lambda(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et

$$g_\lambda(u^{-1}) = \lambda(-e_n - Q^{-1})(-e_{n-1} - q^{-1}) \dots (-e_1 - q^{-1})$$

est un morphisme d'algèbre surjectif.

Le calcul du noyau de ce morphisme surjectif a été fait dans [BGJ+18] en termes de diagrammes. Il est démontré que le noyau est généré par un élément central et ses valeurs propres sur les modules standards sont calculées.

Il suffit maintenant de traduire ces résultats en termes des paramètres  $\beta, \beta_1, \beta_2$  introduits au chapitre 1. Le lemme 3.3 permet de connaître explicitement les morphismes entre les modules cellulaires de l'algèbre à une frontière.

**Lemme 3.7.** *Soit  $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$  quelconques et  $q \in \mathbb{C}^\times$  tel que  $\beta = q + q^{-1}$ .*

— Si  $\beta_2 \neq 0$ ,  $q\beta_1 - \beta_2 \neq 0$  et  $q\beta_2 - \beta_1 \neq 0$ , alors

$$\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}} \left( -q, \left( q \frac{q\beta_2 - \beta_1}{q\beta_1 - \beta_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

— Si  $\beta_2 \neq 0$  et  $q\beta_2 - \beta_1 = q\beta_1 - \beta_2 = 0$  alors  $q^2 = 1$  et

$$\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(-q, 1) \simeq \mathrm{TLb}_n(2q, q, 1) \left( \simeq \mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \right).$$

— Si  $\beta_2 = 0$ , alors

$$\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(-q, \pm i) \simeq \mathrm{TLb}_n(\beta, \pm i(q^{-1} - q), 0)$$

et si  $q \neq \pm 1$ , alors

$$\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, 0) \simeq \mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(-q, \pm i).$$

Démonstration. Soit l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  aux paramètres quelconques avec  $\beta = q + q^{-1}$ .

Dans le cas  $\beta_2 \neq 0$ , cette algèbre est isomorphe à  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1/\beta_2, 1)$  par la proposition 1.21.

De plus, si  $Q \neq \pm i$ , le même isomorphisme donne

$$\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(-q, Q) \simeq \mathrm{TLb}_n\left(q + q^{-1}, \frac{q^2 + Q^2}{q + qQ^2}, 1\right).$$

Pour retrouver l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  à partir de la version de Graham et Lehrer, il faut choisir  $Q^2$  tel que

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{q^2 + Q^2}{q + qQ^2}.$$

Cette équation se réécrit

$$Q^2(q\beta_1 - \beta_2) = q(q\beta_2 - \beta_1). \quad (3.2)$$

Ainsi, puisque  $Q \neq 0$ , il y a deux cas de figure admettant une solution. Dans le premier cas, il faut que les deux quantités  $q\beta_1 - \beta_2$  et  $q\beta_2 - \beta_1$  soient non nulles. Dans le second cas, il faut que ces deux quantités soient nulles simultanément.

Si les deux quantités sont non nulles, le résultat est tel qu'annoncé. Si les deux quantités sont nulles, alors, puisque  $\beta_2 \neq 0$ ,

$$q\beta_1 - \beta_2 = q\beta_2 - \beta_1 = 0$$

implique que  $q^2 = 1$ . Donc,  $\beta_1/\beta_2 = 1/q = q$  et  $(q^2 + Q^2)/(q + qQ^2) = q$  ce qui montre le résultat annoncé.

Le cas où  $\beta_2 = 0$  est direct puisqu'il suffit de poser  $Q = \pm i$ . Dans un tel cas,

$$\mathrm{TLb}_n(\beta, i(q^{-1} - q), 0) \simeq \mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(-q, i)$$

et si  $q^2 \neq 1$ , la proposition 1.21 donne lieu à l'isomorphisme

$$\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, 0) \simeq \mathrm{TLb}_n(\beta, i(q^{-1} - q), 0)$$

ce qui achève la démonstration. □

Il y a plusieurs remarques nécessaires à faire sur le lemme précédent concernant la liste des algèbres  $\mathrm{TLb}_n$  pouvant être réalisées comme la version paramétrée de Graham et Lehrer.

- Seule la valeur de  $Q^2$  importe puisque les deux algèbres  $\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(q, Q)$  et  $\mathrm{TLb}_n^{\mathrm{GL}}(q, -Q)$  sont isomorphes via la proposition 1.21.

— À l'aide de la proposition 1.21, l'isomorphisme

$$\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \mathrm{TLb}_n(\beta, \beta\beta_2 - \beta_1, \beta_2)$$

transforme les paramètres de telle sorte que

$$q\beta_1 - \beta_2 \mapsto q(\beta\beta_2 - \beta_1) - \beta_2 = q(q\beta_2 - \beta_1),$$

$$q\beta_2 - \beta_1 \mapsto q\beta_2 - \beta\beta_2 + \beta_1 = q^{-1}(q\beta_1 - \beta_2).$$

Donc, l'équation (3.2) devient, sous ce changement paramétrique,

$$Q^2(q\beta_2 - \beta_1) = q^{-1}(q\beta_1 - \beta_2)$$

et elle admet des solutions sous les mêmes conditions.

— Si  $q\beta_2 - \beta_1 = 0$ , alors les constantes  $a_k$  de l'équation (3.1) deviennent

$$a_k(q, q\beta_2, \beta_2) = ([k+1]_q - q[k]_q)\beta_2 = \left( \frac{q^{-k+1} - q^{-k-1}}{q - q^{-1}} \right) \beta_2 = q^{-k}\beta_2.$$

Et, si  $q\beta_1 - \beta_2 = 0$ , alors

$$a_k(q, \beta_1, q\beta_1) = (q[k+1]_q - [k]_q)\beta_1 = \left( \frac{q^{k+2} - q^k}{q - q^{-1}} \right) \beta_1 = q^{k+1}\beta_1.$$

Ainsi, si  $\beta_2 \neq 0$ , et que  $q\beta_2 - \beta_1 = 0$  ou  $q\beta_1 - \beta_2 = 0$ , alors l'algèbre est semisimple car les  $a_k$  sont différents de zéro.

— Si  $\beta_2 = 0$ , les  $a_k$  deviennent

$$a_k(q, \beta_1, 0) = -\beta_1[k]_q$$

et cette quantité s'annule si  $\beta_1 = 0$  ou si  $[k]_q = 0$ .

**Corollaire 3.8** (Liste des cas traités). *Si l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  n'est pas semisimple, alors elle est isomorphe à la version paramétrée de Graham et Lehrer si  $\beta_2 \neq 0$  ou  $\beta_1 \neq 0$ . Les seuls cas non traités sont  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  et  $q \in \mathbb{C}^\times \setminus \{-1, 1\}$ .*

Démonstration. Soit l'algèbre  $\mathrm{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$ . Si elle n'est pas semisimple, alors il y a les quatre cas suivants à considérer :

Si  $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1 \neq 0$ , il faut étudier les constantes  $q\beta_2 - \beta_1$  et  $q\beta_1 - \beta_2$ . Comme l'a montré la démarche précédente, si l'une d'elles s'annule, alors l'algèbre est semisimple. Donc, ces deux constantes sont non nulles et le lemme 3.7 détermine la version de Graham et Lehrer à considérer.

Si  $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1 = 0$ , alors les deux constantes  $q\beta_2 - \beta_1$  et  $q\beta_1 - \beta_2$  sont non nulles et ce cas correspond encore au premier cas du lemme 3.7.

Si  $\beta_2 = 0$  et  $\beta_1 \neq 0$ , pour que l'algèbre ne soit pas semisimple, il faut que  $q^2 \neq 1$ . Donc, le troisième cas du lemme 3.7 permet de conclure que cette algèbre est isomorphe à  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}(-q, i)$ .

Dans le cas  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , les paramètres  $q$  et  $Q$  doivent être respectivement  $\pm 1$  et  $\pm i$ , ce qui n'est possible que pour  $\beta = \pm 2$ . Ainsi,  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}(\pm 1, \pm i)$  est isomorphe à  $\text{TLb}_n(\mp 2, 0, 0)$  (qui n'est pas semisimple). Cependant, si  $\beta \neq \pm 2$ , alors  $\text{TLb}_n(\beta, 0, 0)$  n'est isomorphe à aucune algèbre de la forme  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}(q, Q)$ .  $\square$

### 3.2.2. Application aux modules standards

Cette section travaille uniquement avec les algèbres  $\text{TLb}_n$  respectant les premières conditions du corollaire 3.8.

L'objectif est maintenant d'identifier à quels modules de  $\mathfrak{a}\text{TL}_n$  correspondent les modules  $F_{g_\lambda}(\widehat{S}_{n,j})$  issus du changement des scalaires. Soit l'algèbre  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}(q, Q)$  et soit  $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $-n \leq j \leq n$ . Les paramètres  $\lambda, z_j \in \mathbb{C}$  et  $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$  sont définis par

$$\lambda^2 = -q^{n-2}, \quad z_j = (-1)^j \lambda Q^{-1} q^{-\frac{1}{2}(n+j-2)} \quad \text{et} \quad \epsilon_j = \begin{cases} 1 & j \geq 0, \\ -1 & j < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

**Proposition 3.9** ([GL04]). *Avec les paramètres de l'équation (3.3), le module  $F_{g_\lambda}(\widehat{S}_{n,j})$  est isomorphe au module cellulaire  $\mathcal{W}_{n,|j|;z_j^{\epsilon_j}}$  de l'algèbre  $\mathfrak{a}\text{TL}_n(-q - q^{-1})$ .*

La proposition précédente permet aussi de déterminer explicitement le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}$  pour deux modules standards de  $\text{TLb}_n$  puisque ceux-ci sont connus pour l'algèbre de Temperley-Lieb affine. Comme l'indique le théorème 2.29, s'il existe un morphisme non nul entre deux modules standards de  $\mathfrak{a}\text{TL}_n$ , alors celui-ci est injectif et unique à constante multiplicative près. Le prochain théorème donne un critère arithmétique pour déterminer l'existence d'un tel morphisme.

**Théorème 3.10.** *Soit l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2)$  dans un cas non semisimple traité par le corollaire 3.8. et soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a_k = 0$ <sup>3.2</sup>. Si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive de l'unité, alors il existe un morphisme (injectif) non nul  $\theta : \widehat{S}_{n,j} \rightarrow \widehat{S}_{n,i}$  si et seulement s'il existe une suite*

$$j = j_1 \succ j_2 \succ \cdots \succ j_m = i$$

où  $\prec$  est l'ordre cellulaire de  $\text{TLb}_n$  telle que, pour chaque paire  $j_t, j_{t+1}$ ,

$$\frac{j_t + j_{t+1}}{2} \equiv_{\ell} k.$$

<sup>3.2.</sup> Selon le lemme 3.1 et le corollaire 3.2, ce  $k$  est unique si  $q$  n'est pas une racine de l'unité. Si  $q$  est une racine de l'unité, alors  $a_{k'} = 0$  implique que  $k \equiv_{\ell} k'$ .

Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors il existe un morphisme (injectif) non nul si et seulement si  $\frac{i+j}{2} = k$ .

Démonstration. Ce théorème correspond au calcul des groupes Hom pour les modules standards de  $\text{TLb}_n$  à l'aide du foncteur changement des scalaires. Il est à remarquer que les modules standards de  $\text{aTL}_n$  sont indécomposables et que l'existence d'un morphisme non nul entre deux de ces modules implique que l'algèbre  $\text{aTL}_n$  est non semisimple. Ainsi, puisque pour  $\text{aTL}_n$ ,  $\text{Hom}(W_{n,j;y}, W_{n,k;z}) \neq 0$  si et seulement si  $(k, z) \preceq (j, y)$  (voir le théorème 2.29), il suffit de calculer dans le cas de  $\text{TLb}_n$  l'ordre partiel induit sur les modules  $\widehat{S}_{n,j}$  par le foncteur changement des scalaires. En effet, il est possible de définir un ordre partiel sur les entiers  $j \equiv_2 n$  avec  $-n \leq j \leq n$  grâce à l'ordre partiel sur les paires de  $\Lambda^a$  en posant  $k \preceq j$  si  $(|k|, z) \preceq (|j|, y)$  où  $F_{g_\lambda}(\widehat{S}_{n,k}) \simeq W_{n,|k|;z}$  et  $F_{g_\lambda}(\widehat{S}_{n,j}) \simeq W_{n,|j|;y}$ . Selon le lemme 3.3, ceci permet de décrire tous les morphismes entre les modules standards de  $\text{TLb}_n$ . Il suffit donc de caractériser ce nouvel ordre partiel seulement pour les conditions (GL1) et (GL2) pour conclure car celles-ci engendrent l'ordre partiel sur  $\Lambda^a$ .

La première partie de cette preuve calcule le paramètre  $z_j^{\epsilon_j}$  de la proposition 3.9 pour l'algèbre  $\text{TLb}_n$  lorsqu'elle n'est pas semisimple. Il faut donc déterminer les paramètres  $\lambda$  et  $Q$  définis précédemment.

Le cas  $\beta_2 \neq 0$  : Directement,

$$0 = a_k = \beta_2[k+1]_q - \beta_1[k]_q \quad \text{donc} \quad [k]_q \frac{\beta_1}{\beta_2} = [k+1]_q.$$

Mais, si  $[k]_q = 0$ , alors  $[k+1]_q = 0$ , ce qui implique par la proposition 2.2 que  $q^{2k} = 1$  et  $q^{2k+2} = 1$ . Dans un tel cas,  $q^2 = 1$  ce qui, par définition, donne  $[k]_q = \pm k$  et  $[k+1]_q = \pm(k+1)$ . Or, ces deux entiers ne peuvent être nuls simultanément. Donc,  $[k]_q \neq 0$ . Puisque  $\beta_2 \neq 0$ , le corollaire 3.8 montre qu'il existe une algèbre  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}$  isomorphe à l'algèbre non semisimple  $\text{TLb}_n$  considérée ici. Soit l'algèbre  $\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, \beta_2) \simeq \text{TLb}_n^{\text{GL}}(-q, Q)$  et soit le module  $\widehat{S}_{n,j}$ . Les commentaires suivant le lemme 3.7 rappellent que puisque l'algèbre n'est pas semisimple,  $q\beta_1 - \beta_2 \neq 0$  et  $q\beta_2 - \beta_1 \neq 0$ . La proposition 3.9 montre que  $F_{g_\lambda}(\widehat{S}_{n,j}) \simeq W_{n,|j|;z_j^{\epsilon_j}}$ . Le paramètre  $z_j$  se calcule de la manière suivante :

— Le paramètre  $Q$  à choisir pour le changement de variable du lemme 3.7 doit respecter

$$Q^2 = q \cdot \frac{q - \beta_1/\beta_2}{q\beta_1/\beta_2 - 1} = q \cdot \frac{q[k]_q - [k+1]_q}{q[k+1]_q - [k]_q} = q \cdot \frac{q^{-k-1} - q^{-k+1}}{q^{k+2} - q^k} = -q^{-2k}.$$

Il suffit ainsi de prendre  $Q = i(-q)^{-k}$ .

— Le paramètre  $\lambda$  du théorème 3.6 doit respecter  $\lambda^2 = -(-q)^{n-2}$  et il peut être choisi comme  $\lambda = i(-q)^{\frac{1}{2}(n-2)}$ .

Les paramètres de l'équation (3.3) deviennent alors

$$z_j = (-1)^j \cdot \underbrace{i(-q)^{\frac{1}{2}(n-2)}}_{=\lambda} \cdot \underbrace{-i(-q)^k}_{=Q^{-1}} \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(n+j-2)} = (-1)^j \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(j-2k)}.$$

Conséquemment,

$$z_j^{\epsilon_j} = (-1)^j \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(|j|-2k\epsilon_j)}. \quad (3.4)$$

Le cas  $\beta_2 = 0$  : Comme le lemme 3.7 l'indique,

$$\text{TLb}_n(\beta, \beta_1, 0) \simeq \text{TLb}_n^{\text{GL}}(-q, i).$$

Il est donc possible de poser le même  $\lambda$  que dans la démarche précédente et le choix  $Q = i$  correspond au  $Q$  de la démarche précédente où  $k = 0$ . Le cas  $\beta_2 = 0$  se réalise ainsi comme le cas  $k = 0$  dans l'équation (3.4).

Il suffit maintenant d'appliquer les conditions de Graham et Lehrer (GL1) et (GL2) de la section 2.4.2 pour les paires  $(|j_1|, y)$  et  $(|j_2|, z)$  avec les paramètres  $y = y_{j_1}^{\epsilon_{j_1}}$  et  $z = z_{j_2}^{\epsilon_{j_2}}$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $|j_1| = |j_2| + 2m$ . L'existence d'un morphisme de Graham et Lehrer

$$\vartheta : W_{n, |j_1|; y_{j_1}^{\epsilon_{j_1}}} \rightarrow W_{n, |j_2|; z_{j_2}^{\epsilon_{j_2}}}$$

est régie par les deux conditions suivantes.

— La condition (GL1) demande

$$z^2 = (-q)^{|j_1|} \quad \text{et} \quad y = z(-q)^{-m}$$

ce qui devient

$$z^2 = z_{j_2}^{2\epsilon_{j_2}} = (-q)^{-(|j_2|-2k\epsilon_{j_2})} \stackrel{(\text{GL1})}{=} (-q)^{|j_1|}$$

et

$$y = y_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} = (-1)^{j_1} \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(|j_1|-2k\epsilon_{j_1})} \stackrel{(\text{GL1})}{=} (-1)^{j_2} \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(|j_2|-2k\epsilon_{j_2}+2m)}.$$

Puisque  $|j_1| = |j_2| + 2m$  et  $j_1 \equiv_2 j_2$ , ces deux équations se réécrivent comme

$$1 = (-q)^{|j_1|+|j_2|-2k\epsilon_{j_2}} \quad \text{et} \quad 1 = (-q)^{k(\epsilon_{j_2}-\epsilon_{j_1})}. \quad (3.5)$$

— La condition (GL2) demande

$$z^2 = (-q)^{-|j_1|} \quad \text{et} \quad y = z(-q)^m$$

ce qui devient

$$(-q)^{-(|j_2|-2k\epsilon_{j_2})} = (-q)^{-|j_1|}$$

et

$$(-1)^{j_1} \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(|j_1|-2k\epsilon_{j_1})} = (-1)^{j_2} \cdot (-q)^{-\frac{1}{2}(|j_2|-2k\epsilon_{j_2}-2m)}.$$

Ces deux équations se réécrivent comme

$$1 = (-q)^{-|j_1|+|j_2|-2k\epsilon_{j_2}} \quad \text{et} \quad 1 = (-q)^{\frac{1}{2}(|j_1|-|j_2|+2m)+k(\epsilon_{j_2}-\epsilon_{j_1})}$$

ce qui est équivalent à

$$1 = (-q)^{-|j_1|+|j_2|-2k\epsilon_{j_2}} \quad \text{et} \quad 1 = (-q)^{k(\epsilon_{j_2}+\epsilon_{j_1})}. \quad (3.6)$$

Quelques manipulations montrent que ces conditions se simplifient grandement. Les cas où  $k \neq 0$  et  $k = 0$  sont traités séparément.

*Le cas  $k \neq 0$*  : Comme cela a été remarqué au début de la preuve, il est nécessaire que  $[k]_q \neq 0$ . Ceci est équivalent à demander  $q^{2k} \neq 1$  par la proposition 2.2. Donc, si  $j_1$  et  $j_2$  sont de signes contraires, l'équation (3.5) implique que  $q^{2k} = 1$ , ce qui est une contradiction. De même, si  $j_1$  et  $j_2$  sont du même signe, la condition (3.6) implique aussi que  $q^{2k} = 1$ . Donc, la condition (GL1) n'admet une solution que si  $j_1$  et  $j_2$  sont du même signe et (GL2) n'admet une solution que si les signes sont distincts. Sachant que  $j_1 + j_2$  est pair, les conditions (GL1) et (GL2) se simplifient et donnent toutes les deux l'unique condition

$$1 = q^{j_1+j_2-2k}. \quad (3.7)$$

*Le cas  $k = 0$*  : Les équation (3.5) et (3.6) se simplifient respectivement à

$$1 = (-q)^{|j_1|+|j_2|} \quad \text{et} \quad 1 = (-q)^{-|j_1|+|j_2|}.$$

Ces deux équations seront dans tous les cas équivalentes à

$$1 = q^{j_1+j_2} \quad \text{ou} \quad 1 = q^{j_1-j_2}.$$

Ces deux conditions peuvent être reformulées comme

$$\frac{j_1 + j_2}{2} \equiv_{\ell} 0 \quad \text{ou} \quad \frac{j_1 - j_2}{2} \equiv_{\ell} 0.$$

La seconde équation indique que pour tout  $j$ ,  $\widehat{S}_{n,j} \simeq \widehat{S}_{n,-j}$ . Ce morphisme est un isomorphisme puisqu'il est injectif et que les dimensions de ces deux modules sont les mêmes. Ainsi, si deux entiers  $j_1, j_2$  respectent la seconde condition, alors celle-ci peut simplement se réécrire

$$\frac{j_1 + (-j_2)}{2} \equiv_{\ell} 0.$$

Or, puisque  $\widehat{S}_{n,j_2} \simeq \widehat{S}_{n,-j_2}$ , au niveau des modules,  $j_2$  et  $-j_2$  sont indistinguables. Donc, la vérification de la première condition pour tous les  $j_1$  et  $j_2$  suffit pour déterminer l'ensemble des solutions.

Si  $q$  est une  $2\ell$ -ième racine primitive, l'équation (3.7) est vérifiée si et seulement si  $j_1 + j_2 - 2k \equiv_{2\ell} 0$ . Ceci se réécrit de manière équivalente comme

$$\frac{j_1 + j_2}{2} \equiv_{\ell} k.$$

Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, alors l'équation(3.7) est équivalente à

$$\frac{j_1 + j_2}{2} = k.$$

Comme le souligne la note en bas de page 3.2, si  $a_k = 0$  et  $a_{k'} = 0$ , alors  $k \equiv_{\ell} k'$ . Donc, le résultat annoncé ne dépend pas du choix du représentant de la classe de  $k$  modulo  $\ell$ . Dans le cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité, l'entier  $k$  est unique et l'équation donnant l'existence d'un morphisme est la seule condition à vérifier.

L'injectivité du morphisme découle du fait que tous les morphismes entre modules standards de  $\mathfrak{aTL}_n$  sont des injections. Ces morphismes sont d'ailleurs uniques à scalaire près puisque la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}(W_{n,j;y}, W_{n,k;z})$  est au plus 1.  $\square$

Avec la notation du théorème précédent, il est utile de formuler la définition suivante.

**Définition 3.11** (Morphisme de Graham-Lehrer (pour  $\text{TLb}_n$ )). Un morphisme non nul  $\theta : \widehat{S}_{n,j} \rightarrow \widehat{S}_{n,i}$  est appelé un morphisme de Graham-Lehrer si  $\frac{i+j}{2} \equiv_{\ell} k$  (ou  $\frac{i+j}{2} = k$  lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité).

Ainsi, le théorème précédent peut être reformulé comme suit : tout morphisme non nul entre modules cellulaires s'écrit comme la composition de morphismes de Graham-Lehrer.

Il est à noter que la preuve du théorème précédent n'indique pas comment calculer explicitement les morphismes entre les modules standards de  $\text{TLb}_n$ . Par exemple, si  $q$  est une 6-ième racine de l'unité primitive ( $\ell = 3$ ) et  $\beta_1, \beta_2 \neq 0$  sont des paramètres tels que  $a_1 = 0$ , il existe un morphisme  $\theta : \widehat{S}_{4,2} \rightarrow \widehat{S}_{4,0}$  car  $(2+0)/2 \equiv_3 1$ . Selon le théorème précédent, celui-ci provient du morphisme  $\vartheta : W_{4,2;1} \rightarrow W_{4,0;-q}$ . Sur la base usuelle, le morphisme  $\vartheta$  est donné par

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \mapsto \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}.$$

Les bases usuelles des modules  $\widehat{S}_{4,2}$  et  $\widehat{S}_{4,0}$  sont

$$\widehat{B}_{4,2} = \left\{ \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array} \right\}$$

$$\widehat{B}_{4,0} = \left\{ \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{---} \end{array}, \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right\}$$

Il est naturel de penser que le foncteur changement des scalaire  $F_{g_\lambda}$  fait correspondre les bases  $\widehat{B}_{4,2}$  et  $\widehat{B}_{4,0}$  avec les bases des modules standards de l'algèbre  $\mathfrak{aTL}_4$  à l'aide d'une certaine loi diagrammatique. Ce n'est pas le cas. L'isomorphisme explicite requiert habituellement un calcul utilisant entre autres l'expression de  $g_\lambda(u)$ . Heureusement, il n'est pas nécessaire pour le travail fait ici de décrire explicitement les morphismes.

### 3.3. Les patrons de morphismes

#### 3.3.1. Définitions

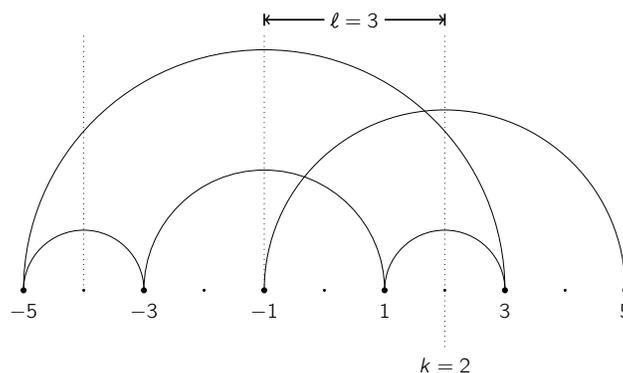
Encore une fois dans cette section, il est nécessaire d'exclure le cas  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  pour se placer dans un des cas traités par l'isomorphisme d'algèbres entre  $\text{TLb}_n$  et  $\text{TLb}_n^{\text{GL}}$  (voir le corollaire 3.8).

Le théorème 3.10 a une interprétation géométrique semblable à celle de  $\text{TL}_n$  [BRSA17] où les paires jointes par les morphismes sont liées par des réflexions le long de lignes critiques.

**Définition 3.12** (Patron de morphismes). Pour  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , un patron de morphismes (de taille  $n$ ) est un graphe dont les sommets sont les entiers  $j$  tels que  $-n \leq j \leq n$  et  $j \equiv_2 n$ , équidistribués sur une droite horizontale dans l'ordre croissant.

À chaque algèbre  $\text{TLb}_n$ , il est possible d'associer un patron de morphismes de taille  $n$ . Deux entiers  $i, j$  sont liés par une arête<sup>3.3</sup> s'il existe un morphisme de Graham et Lehrer entre  $\widehat{S}_{n,j}$  et  $\widehat{S}_{n,i}$ . Le théorème 3.10 montre comment construire explicitement ce patron lorsque  $\text{TLb}_n$  n'est pas semisimple.

Une ligne critique est une droite verticale en  $k \in \mathbb{Z}$  et telle que  $a_k = 0$ . La construction du patron de morphismes de  $\text{TLb}_n$  se fait donc en effectuant la réflexion des entiers par rapport aux lignes critiques. L'ensemble des points atteints à partir d'un entier  $j$  fixé par des réflexions successives est appelé l'orbite de  $j$ . Par exemple, pour l'algèbre  $\text{TLb}_5$  avec  $\ell = 3$  et  $a_{k=2} = 0$ , le patron de morphismes est :



L'entier  $k = 2$  correspond au positionnement de la ligne critique positive la plus près de 0 et l'entier  $\ell = 3$  correspond à la distance entre les lignes critiques. Il est possible de voir que cette algèbre possède deux blocs représentés par les orbites  $\{-5, -3, 1, 3\}$  et  $\{-1, 5\}$ .

3.3. Le terme arête est utilisé puisqu'un patron de morphismes est un graphe.

**Théorème 3.13.** *Le patron de morphismes de taille  $n$  associé à  $\text{TLb}_n$  se construit en reliant deux entiers  $i$  et  $j$  si  $i$  et  $j$  sont obtenus l'un de l'autre par réflexion le long d'une ligne critique.*

Démonstration. Dans le cas où  $q$  est une racine de l'unité, la signification géométrique de la condition  $\frac{i+j}{2} \equiv_{\ell} k$  du théorème 3.10 est que le point médian entre  $i$  et  $h$  repose sur une droite critique en  $k + \ell m$  pour un certain  $m \in \mathbb{Z}$ . Ainsi  $i$  est la réflexion de  $j$  par rapport à la droite en  $m\ell + k$ . Les lignes critiques sont positionnées sur les éléments ayant la même classe de congruence modulo  $\ell$  que  $k$ . Dans le cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité, l'interprétation est analogue.  $\square$

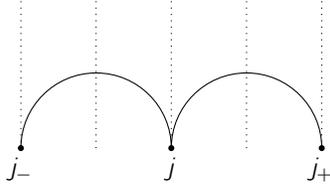
Le théorème 3.13 permet d'identifier les composantes connexes du patron de morphismes et donc les blocs de l'algèbre. De plus, si un entier  $j$  est tel que  $j \equiv_{\ell} k$ , alors cet entier est appelé un entier critique (au sens de  $\text{TLb}_n$ ). Un entier est donc critique s'il est situé sur une ligne critique. Il s'ensuit que si  $i$  est lié par une arête à  $j$  et que  $j$  est critique, alors  $i + j \equiv_{\ell} 2k$  ce qui implique que  $i \equiv_{\ell} k$ . Donc,  $i$  aussi est critique. Il est ainsi possible de partitionner l'algèbre en deux types de blocs : les blocs critiques et les blocs non critiques. Il sera démontré dans les prochaines sections qu'ils correspondent aux deux types de patrons des modules standards de  $\text{aTL}_n$  donnés dans le théorème 2.30.

Dans la section 2.4.2, pour  $n \equiv_2 0$  et  $q + q^{-1} = 0$ , les paires  $(0, q)$  et  $(0, q^{-1})$  sont exclues de  $\Lambda^a$ . Un calcul direct montre que  $z_0^{\epsilon_0} = (-q)^k$  mais,  $(-i)^k = i$  si et seulement si  $k \equiv_4 3$  et  $(-i)^k = -i$  si et seulement si  $k \equiv_4 1$ . Ce cas est à éviter pour les prochaines sections. Cette omission ne cause aucune conséquence pour les cas traités au chapitre 4.

L'analyse des deux prochaines sections se base sur la structure des modules standards de  $\text{aTL}_n$  appliquée à celle des modules standards de  $\text{TLb}_n$  par l'isomorphisme de  $K$ -espaces vectoriels issu du foncteur changement des scalaires du théorème 3.6.

### 3.3.2. Le cas critique

La construction du patron d'un bloc critique est décrite à l'aide d'un procédé récursif. Soit un patron bâti à partir des paramètres  $n$ ,  $\ell$  et  $k$ . Pour une composante connexe correspondant à un bloc critique de ce patron, soit  $j$  un entier de cette composante connexe tel que  $j$  est le plus petit entier dans l'ordre cellulaire de  $\text{TLb}_n$ . Puisque  $j$  est membre d'un bloc critique, il est situé sur une ligne critique. S'il existe, le voisin par réflexion à droite (respectivement à gauche) le long de la ligne critique la plus proche à droite (à gauche) de  $j$  est noté  $j_+$  ( $j_-$ ) :



Le dessin précédent montre que  $j_-$  et  $j_+$  sont liés puisqu'ils sont obtenus par la réflexion le long de la ligne critique en  $j$ . Ce procédé peut être répété pour construire l'ensemble des entiers membres de ce bloc. Ils sont notés  $j_{(+)^N}$  et  $j_{(-)^N}$  pour  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  où  $(+)^N$  et  $(-)^N$  représentent respectivement le symbole  $+$  ou  $-$  répété  $N$  fois. Donc,  $j_{(+)^N}$  correspond à l'entier  $j$  auquel  $N$  réflexions vers la droite ont été effectuées. Cette notation est aussi utilisée pour dénoter le voisin immédiat d'un entier quelconque du patron.

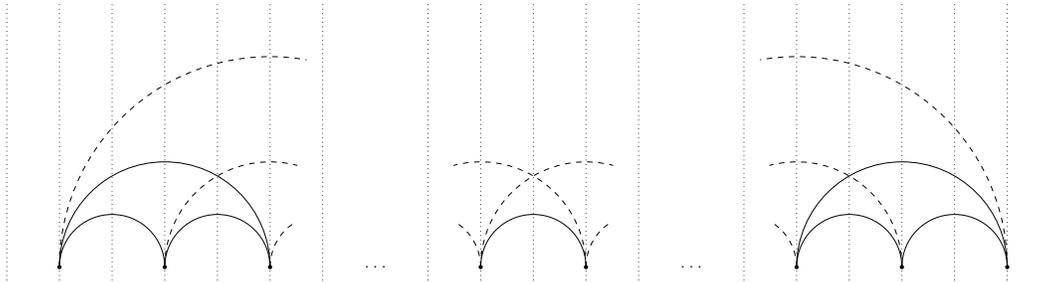
Dans un bloc critique, tous les entiers sont liés par une arête. En effet, si  $j_1$  et  $j_2$  sont liés et que  $j_2$  et  $j_3$  sont liés, alors

$$\underbrace{\frac{j_1 + j_2}{2}}_{\equiv_\ell k} + \underbrace{\frac{j_2 + j_3}{2}}_{\equiv_\ell k} = \frac{j_1 + j_3}{2} + \underbrace{j_2}_{\equiv_\ell k}$$

et donc,  $\frac{j_1 + j_3}{2} \equiv_\ell k$ .

Lorsque  $k \equiv_\ell 0$  ou  $k = 0$ , il est possible que certains entiers du bloc soient égaux en valeur absolue. Dans un tel cas, leurs modules standards associés sont isomorphes, car l'action du générateur  $e_n$  (ainsi que celle de tous les autres générateurs) est identique sur ceux-ci. L'étude du patron de morphismes peut alors être faite de la même manière pour ensuite remplacer tous les entiers  $j$  par  $|j|$ .

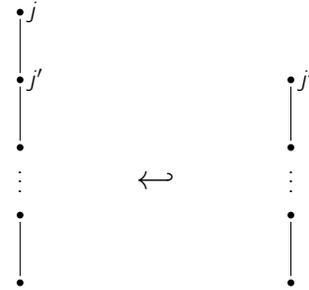
Grâce à la discussion précédente, dans le cas critique<sup>3.4</sup>, le patron de morphismes sera de la forme :



Soit  $j$  un entier membre du bloc critique et  $j'$  le voisin immédiat de  $j$  par réflexion tel que  $j \prec j'$  dans l'ordre cellulaire. Par les théorèmes 2.29 et 3.10, puisque toutes les paires d'entiers sont liées par une arête, le morphisme  $\theta : \widehat{S}_{n,j'} \rightarrow \widehat{S}_{n,j}$  correspond à l'injection telle

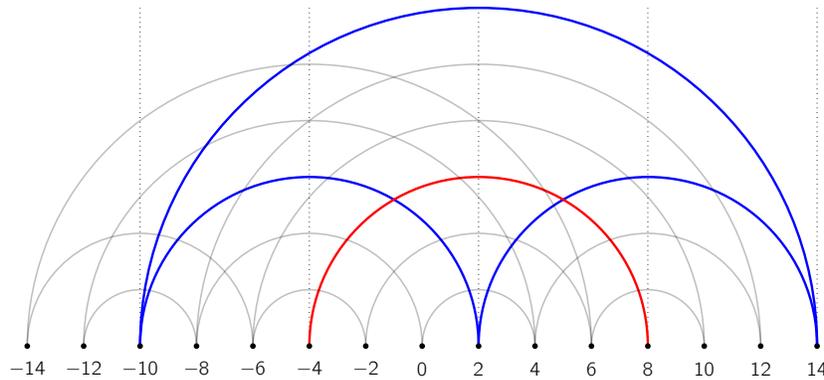
3.4. Les cas exclus de cette analyse sont  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  et  $n \equiv_2 0$ ,  $q = \pm i$ ,  $k \equiv_2 1$ .

que  $\text{Im } \theta = \text{rad } \widehat{S}_{n,j}$ . Donc, en termes de diagrammes de Loewy, cette injection correspond à l'inclusion des diagrammes suivante :



Les indices  $j$  et  $j'$  correspondent au module simple associé à leur module standard respectif. Les autres facteurs de composition de ces deux diagrammes de Loewy coïncident deux-à-deux (le bas du diagramme est donc identique). Comme noté précédemment, lorsque  $|j| = |j'|$  et  $\beta_2 = 0$ , l'inclusion des diagrammes de Loewy est une identification bijective.

Voici un exemple du calcul d'un tel bloc. Pour  $\ell = 6, k = 2$  et  $n = 14$ , le patron de morphismes est de la forme



où les blocs critiques sont les blocs  $\{-4, 8\}$  de couleur rouge et  $\{10, 2, 14\}$  de couleur bleu. Les diagrammes de Loewy des modules standards (placés dans l'ordre cellulaire) sont donc



ce qui donne grâce à la proposition 1.10 les matrices  $D$  et les matrices de Cartan  $C = D^T D$  suivantes :

$$D_{\text{bleu}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\text{bleu}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_{\text{rouge}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{\text{rouge}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

où l'indice notant couleur fait référence au bloc correspondant.

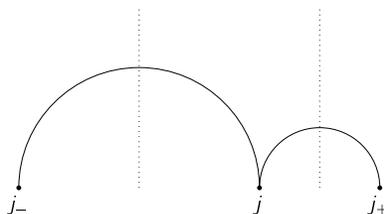
Comme l'a indiqué l'exemple précédent, à l'aide de la proposition 1.10, il est possible de calculer inductivement la matrice de Cartan d'un bloc critique. Celle-ci s'écrit  $C_{\text{bloc}} = D^T D$ . La matrice  $D$  encodant l'ordre cellulaire est donnée par la matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 aux positions  $d_{ij}$  où  $i \leq j$ . Donc, la matrice de Cartan d'un bloc critique s'écrit comme

$$C_{\text{bloc}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

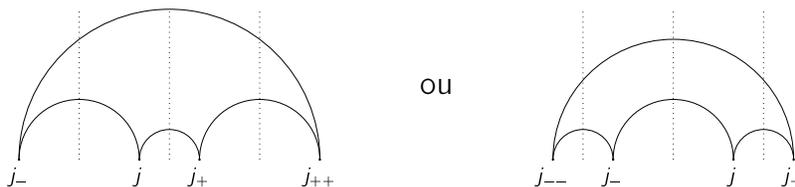
ce qui correspond au produit des matrices  $D$  décrites ci-haut. Lorsque  $\beta_2 = 0$ , comme cela a été indiqué plus haut, il suffit de prendre un seul représentant de la classe d'isomorphisme des différents simples. Le calcul de la matrice  $D$  se fait alors de la même manière.

### 3.3.3. Le cas non critique

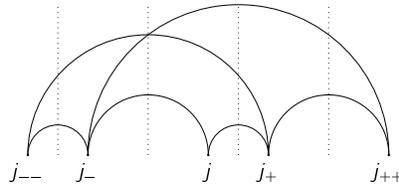
Le cas non critique est un peu plus complexe. Encore une fois, la construction d'un tel patron se fait récursivement. Pour  $n$ ,  $k$  et  $\ell$  fixés, soit un bloc non critique quelconque et soit  $j$  l'entier minimal selon l'ordre cellulaire étant membre de ce bloc. Les deux entiers voisins de  $j$  par réflexion sont notés  $j_-$  et  $j_+$  comme précédemment. L'allure du patron de morphismes est donc



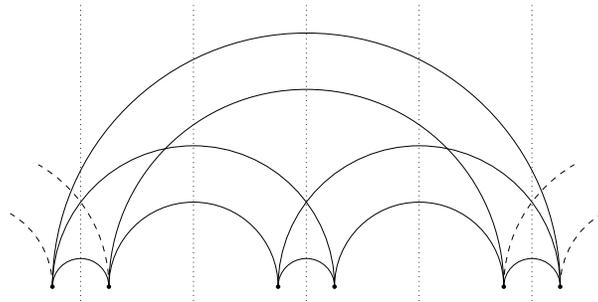
où, par définition, les deux lignes critiques indiquées dans le dessin sont les lignes critiques les plus proches de  $j$ . Si  $j_{++}$  ou  $j_{--}$  sont toujours contenus dans le patron de morphismes (c'est-à-dire compris entre  $-n$  et  $n$ ), alors le patron prend la forme



ce qui donne le patron suivant lorsque ces deux entiers sont présents :

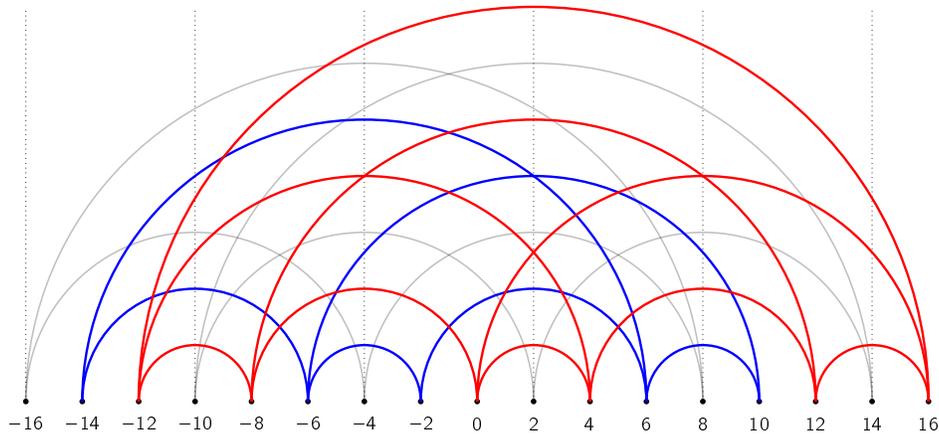


Soient deux entiers distincts  $j_1 < j_2$  membres d'un même bloc non critique. Soit  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  le nombre de réflexions nécessaires pour obtenir  $j_2$  de  $j_1$  en ne passant que par des voisins immédiats par réflexion, c'est-à-dire  $(j_1)_{(+)^N}$ . Alors  $j_1$  est lié à  $j_2$  par une réflexion si et seulement si  $N$  est impair. En effet, la ligne critique entre  $(j_1)_{(+)^{(N-1)/2}$  et  $(j_1)_{(+)^{(N+1)/2}$  est la droite recherchée. Lorsque  $N$  est pair, si  $j_1$  et  $j_2$  sont liés, alors  $(j_1)_{(+)^{N/2}}$  est critique ou possède un voisin par réflexion qui n'est pas  $(j_1)_{(+)^{N/2+1}}$  ou  $(j_1)_{(+)^{N/2-1}}$ . Ainsi, dans le cas non critique<sup>3.5</sup>, il est possible de remarquer que le patron de morphismes sera de la forme :



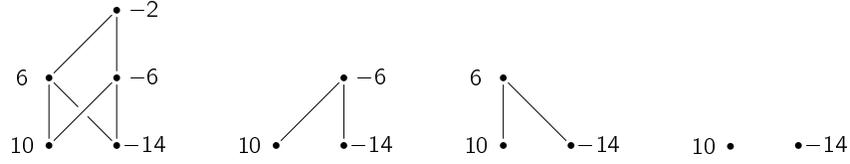
Celui-ci peut se terminer à droite ou à gauche soit par une paire ou par un seul point.

En reprenant l'exemple de la section précédente ( $n = 14$ ,  $\ell = 6$  et  $k = 2$ ), mais cette fois-ci avec  $n = 16$ , le patron de morphismes des blocs non critiques est de la forme

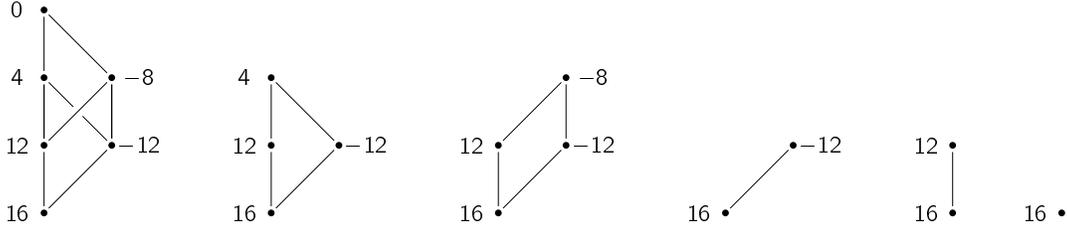


où les blocs non critiques sont dessinés en rouge en bleu. Les diagrammes de Loewy des modules standards (placés dans l'ordre cellulaire) sont donc

3.5. Les cas exclus de cette analyse sont  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  et  $n \equiv_2 0$ ,  $q = \pm i$ ,  $k \equiv_2 1$ .



et



ce qui donne les matrices de Cartan et les matrices  $D$  suivantes :

$$D_{\text{bleu}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{\text{bleu}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D_{\text{rouge}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{\text{rouge}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Comme le suggère l'exemple précédent, la matrice  $D$  d'un bloc non critique est telle que  $d_{ij} = 0$  si  $[i < j$  ou  $[i \equiv_2 0$  et  $j = i + 1]$ ] et  $d_{ij} = 1$  sinon. Tout d'abord, il est possible de remarquer par la construction des modules standards de l'algèbre  $\text{aTL}_n$  que chaque module simple apparaît avec multiplicité inférieure ou égale à 1 dans tous les modules cellulaires. Soit  $m$  la taille du bloc non critique considéré. Lorsque  $m = 1$ , la matrice  $D$  a bel et bien la forme annoncée. Si la matrice  $D$  a la forme annoncée pour un bloc non critique de taille  $m$ , alors deux situations sont possibles selon la parité de  $m$ .

Si  $m$  est pair, le bloc non critique ne possède qu'un seul module simple car le module standard associé au plus petit entier selon l'ordre cellulaire possède exactement  $m$  facteurs (et donc un socle simple car  $m$  est pair). Le patron de taille  $m + 1$  ajoute à chaque module cellulaire du patron précédent un facteur de composition dans le socle, excepté pour le nouveau module cellulaire qui, lui, est un module simple. Donc, la matrice  $D$  du bloc de taille  $m + 1$  correspond à la matrice  $D$  du bloc de taille  $m$  à laquelle a été ajoutée une colonne et une ligne telle que  $d_{i,m+1} = 1$  si  $i \neq m$  et  $d_{m+1,i} = 0$  si  $i < m + 1$ .

Si  $m$  est impair, le bloc non critique possède deux modules simples par le même argument que ci-dessus. Le patron de taille  $m+1$  ajoute à chaque module cellulaire du patron précédent un facteur de composition dans le socle. Donc, la matrice  $D$  du bloc de taille  $m+1$  correspond à la matrice  $D$  du bloc de taille  $m$  à laquelle a été ajoutée une colonne et une ligne telle que  $d_{i,m+1} = 1$  et  $d_{m+1,i} = 0$  si  $i < m+1$ .

Ainsi, la matrice de Cartan et la matrice  $D$  de ce bloc de l'algèbre ont la forme :

$$D_{\text{bloc}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{\text{bloc}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \mathbf{4} & \mathbf{3} & 4 & 4 & 4 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{4} & 4 & 4 & 4 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & \mathbf{6} & \mathbf{5} & 6 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 6 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & \mathbf{8} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

### 3.3.4. Algèbres quasi-héréditaires et catégories de plus haut poids

Les prochains résultats sont inclus dans ce mémoire pour fournir un aperçu historique de plusieurs travaux ayant guidé la théorie de la représentation des algèbres cellulaires. Ils ne seront pas utilisés par la suite.

L'étude des algèbres cellulaires dans un contexte algébrique a été menée par plusieurs groupes de recherche distincts. Le travail de Cline, Parshall et Scott (voir par exemple [CPS88]) a permis de définir les catégories de plus haut poids ainsi que les algèbres quasi-héréditaires (définies dans [Sco87]). Ces notions ont été étudiées par Dlab et Ringel (voir [DR89] et [DR92]). Graham et Lehrer [GL96] ont défini les algèbres cellulaires et en ont établi les bases. König et Xi [KX96] se sont intéressés à l'élaboration d'une définition d'algèbre cellulaire basée sur certains type d'idéaux invariant sous l'anti-involution  $(\_)*$ . Leurs travaux ont abouti à l'article [KX99] où le théorème suivant est démontré.

**Théorème 3.14** ([KX99]). *Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre cellulaire. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1) *l'algèbre  $A$  est quasi-héréditaire<sup>3.6</sup> ;*
- (2)  *$A$  a dimension globale<sup>3.7</sup> finie ;*

3.6. Voir Scott [Sco87] pour la définition.

3.7. La dimension globale à gauche de  $A$ , notée  $\dim.\text{gl.g. } A$ , peut être définie comme le suprémum des dimensions projectives des  $A$ -modules à gauche. La dimension projective d'un  $A$ -module à gauche est définie comme

(3) le déterminant de la matrice de Cartan de  $A$  est égal à 1.

Dans les deux sections précédentes, les blocs critiques et non critiques partageaient toujours la propriété que tous les modules cellulaires aient coiffe simple. Ainsi, pour chacun de ces blocs, la diagonale de la matrice  $D$  est telle que  $d_{ii} = 1$ . Donc, comme  $D^T D = C$ , le déterminant de la matrice de Cartan de chacun de ces blocs est 1 et il s'ensuit que  $\det C_{\text{TLb}_n} = 1$ . Il est nécessaire de rappeler que ceci n'inclut pas deux cas bien précis, c'est-à-dire le cas  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  et le cas  $n \equiv_2 0$ ,  $q = \pm i$  et  $k \equiv_2 1$ .

**Corollaire 3.15.** *L'algèbre  $\text{TLb}_n$  est quasi-héréditaire et, de manière équivalente, a dimension globale finie.*

De plus, ce corollaire inscrit l'algèbre à une frontière dans un contexte catégorique plus général. En effet, Cline, Parshall et Scott [**CPS88**] ont montré le théorème suivant.

**Théorème 3.16.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie. L'algèbre  $A$  est quasi-héréditaire si et seulement la catégorie  $\text{mod } A$  est une catégorie de plus haut poids<sup>3.8</sup>.*

**Corollaire 3.17.** *La catégorie  $\text{mod TLb}_n$  est une catégorie de plus haut poids.*

## 3.4. Modules projectifs

À l'aide des propriétés présentées précédemment, il est possible de calculer les modules projectifs des blocs de l'algèbre  $\text{TLb}_n$  dans les cas où la taille de ces blocs est relativement petite. Étant donné un entier  $j$  de même parité que  $n$  avec  $-n \leq j \leq n$ , le module simple  $\text{top } \widehat{S}_{n,j}$  est noté  $\widehat{I}_{n,j}$  et la couverture projective de  $\widehat{I}_{n,j}$  est notée  $\widehat{P}_{n,j}$ . Lorsque les calculs se concentrent sur un bloc de l'algèbre, pour simplifier la notation, les modules standards de ce bloc sont notés  $\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_m$  où ceux-ci sont placés dans l'ordre cellulaire croissant. De même, les modules simples et projectifs associés à  $\widehat{S}_j$  sont notés respectivement  $\widehat{I}_j$  et  $\widehat{P}_j$ .

### 3.4.1. Remarques sur la catégorie $\text{mod TLb}_n$

La proposition suivante, due à Xi [**Xi06**], permet de déterminer plus facilement la structure des modules d'une algèbre cellulaire. Elle repose sur le fait que l'anti-involution  $(\_)*$  donne lieu à une auto-dualité sur  $\text{mod TLb}_n$ . En effet, en définissant le  $A$ -module à gauche  $M^\vee = D(M^*)$

$\text{dp } M = \inf\{n ; \text{Ext}^{n+1}(M, \_) = 0\}$ . Donc,  $\dim.\text{gl.g } A = \sup_M \text{dp } M$ . Un fait remarquable est que lorsque  $A$  est de dimension finie sur  $K$ , la dimension globale à droite et à gauche de  $A$  coïncident (voir [**ASS06**] pour plus de détails). Cela justifie l'utilisation de la phrase «la dimension globale de  $A$ ».

3.8. Voir Cline, Parshall et Scott [**CPS88**] pour la définition.

où  $M^*$  est le  $A$ -module à droite pour l'action  $m \cdot a = a^*m$  et  $D = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\_, \mathbb{C})$  est la dualité standard, les propriétés suivantes sont vérifiées.

**Proposition 3.18** ([Xi06]). *Soit  $A$  une  $K$ -algèbre cellulaire et soient  $I_1, I_2$  des  $A$ -modules simples. Alors,*

- (1)  $I_1^\vee \simeq I_1$ ,
- (2)  $\text{Ext}^p(I_1, I_2) \simeq \text{Ext}^p(I_2, I_1)$ .

La dualité standard  $D$  est très bien étudiée (voir par exemple Assem [ASS06]) et elle renverse les suites exactes, car elle est contravariante. De plus, le foncteur covariant  $(\_)^*$  est lui aussi une dualité, au sens où l'isomorphisme fonctoriel  $((\_)^*)^* \simeq \text{id}_{\text{mod } A}$  est trivialement vérifié. Donc,  $(\_)^*$  est exact. Le foncteur  $(\_)^\vee$  est ainsi une auto-dualité et il est contravariant. Conséquemment, si  $P$  est un  $A$ -module projectif,  $P^\vee$  est un  $A$  module injectif par les propriétés de  $D$ .

La proposition 3.18 montre que le diagramme de Loewy de  $M^\vee$  correspond au diagramme de Loewy de  $M$  renversé (de haut en bas). En effet, si  $N$  est un  $A$ -module indécomposable tel que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow I_1 \rightarrow N \rightarrow I_2 \rightarrow 0 \quad \text{est vérifiée alors} \quad 0 \rightarrow I_2 \rightarrow N^\vee \rightarrow I_1 \rightarrow 0$$

en appliquant le foncteur  $(\_)^\vee$ . Le renversement des diagrammes de Loewy suit de ce fait par induction sur le nombre de facteurs de composition et sachant que pour tout  $A$ -module  $M$ ,  $\text{top}(M^\vee) \simeq \text{soc } M$ .

Des développements récents en théorie de la représentation ont mis en évidence les liens unissant les algèbres de Hecke cyclotomiques, les algèbres de Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) et les algèbres de Temperley-Lieb (dans [BK09], les liens entre les algèbres de Hecke cyclotomiques et les algèbres KLR sont exposés tandis que dans [PRH14], la théorie des algèbres KLR est utilisée pour construire une structure d'algèbre  $\mathbb{Z}$ -graduée sur  $\text{TLb}_n$ ). Ceci a permis à Hazi, Martin et Parker [HMP18] de construire une famille de modules appelés modules inclinants<sup>3.9</sup> pour l'algèbre  $\text{TLb}_n$ . Cette construction, ainsi que l'application de plusieurs résultats de la théorie des recollements [CMPX06] ont permis à Hazi, Martin et Parker de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 3.19** ([HMP18], théorème 5.2). *Soit  $\widehat{P}_{n,j}$  un  $\text{TLb}_n$ -module projectif indécomposable et  $i \in \mathbb{Z}$  l'entier minimal selon l'ordre cellulaire tel que  $i$  et  $j$  soient dans la même*

---

3.9. Les modules inclinants sont connus sous le nom de *tilting modules* en anglais. Voir [ASS06] pour une définition générale et [KK99] pour une définition de modules inclinants pour les algèbres cellulaires (plus généralement pour les catégories de plus haut poids).

composante connexe du patron de morphismes. Alors,

$$\text{soc } \widehat{P}_{n,j} \simeq \text{soc } \widehat{S}_{n,i}.$$

Cette proposition est nécessaire pour déterminer uniquement la structure des modules projectifs dans l'une des cas considérés.

Tout au long de la prochaine section, le lemme de Schur et les suites exactes longues du foncteur d'extension sont utilisés.

### 3.4.2. Les projectifs indécomposables des blocs non critiques

L'objectif de cette section est de dessiner pour certains cas les diagrammes de Loewy des modules projectifs pour les blocs de  $\text{TLb}_n$  étant non critiques. Les quatre pictogrammes

$$\cdot, \cup, \cup\cup \text{ et } \cup\cup\cup$$

seront utilisés pour illustrer un bloc de l'algèbre  $\text{TLb}_n$  ayant respectivement 1, 2, 3 ou 4 modules standards et dont les liens illustrés dans le pictogramme correspondent à l'ensemble de tous les liens présents dans le patron de morphismes liant les points de ces blocs. Ainsi,  $\cup\cup$  et  $\cup\cup\cup$  sont des blocs non critiques tandis que  $\cdot$  et  $\cup$  peuvent être critique ou non.

Les cas traités dans cette section sont ceux où les blocs sont de la forme  $\cup$ ,  $\cup\cup$  ou  $\cup\cup\cup$ . Les deux premiers cas sont particulièrement simples tandis que le troisième nécessite une analyse plus délicate. Les propriétés de filtration des modules projectifs s'appuient dans chacun des trois cas sur la proposition 1.9.

Cas 1 : Pour un bloc du type  $\cup$ , la matrice de Cartan est

$$C_{\cup} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc, le module standard  $\widehat{S}_1$  est projectif et  $\widehat{P}_2$  admet un filtration,

$$0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{P}_2 \rightarrow \widehat{S}_2 = \widehat{I}_2 \rightarrow 0.$$

et de plus, le module projectif  $\widehat{S}_1 = \widehat{P}_1$  est caractérisé par

$$0 \rightarrow \widehat{S}_2 = \widehat{I}_2 \rightarrow \widehat{S}_1 = \widehat{P}_1 \rightarrow \widehat{I}_1 \rightarrow 0.$$

Puisque  $\widehat{P}_2$  a coiffe simple par définition, les diagrammes de Loewy de ces deux projectifs sont :

$$\widehat{P}_1 = \widehat{S}_1 = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \quad \widehat{P}_2 = \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 2 \end{array}$$

La suite exacte courte définissant  $\widehat{P}_2$  et la structure de  $\widehat{S}_1 = \widehat{P}_1$  induisent les suites exactes longues

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_2, \_) = 0$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_1, \_) = 0$$

et il s'ensuit que

$$\text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_1) \simeq \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_2) \simeq 0.$$

Cas 2 : Pour un bloc non critique du type  $\curvearrowright$ , la matrice de Cartan est

$$C_{\curvearrowright} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de remarquer que les modules  $\widehat{S}_2$  et  $\widehat{S}_3$  sont des modules simples. Les suites exactes courtes suivantes sont vérifiées

$$0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{P}_2 \rightarrow \widehat{S}_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{P}_3 \rightarrow \widehat{S}_3 \rightarrow 0$$

et les diagrammes de Loewy des projectifs sont uniquement déterminés car ceux-ci ont coiffe simple. Ils sont donnés par :

$$\widehat{P}_1 = \widehat{S}_1 = \begin{array}{c} & 1 & \\ & / \quad \backslash & \\ 2 & & 3 \end{array} \quad \widehat{P}_2 = \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 & & 3 \end{array} \quad \widehat{P}_3 = \begin{array}{c} 3 \\ | \\ 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 & & 3 \end{array}$$

Les suites exactes courtes définissant  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$  et la structure de  $\widehat{S}_1 = \widehat{P}_1$  induisent les suites exactes longues

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_2, \_) = 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_3, \_) = 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_2 \oplus \widehat{I}_3, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_1, \_) = 0,$$

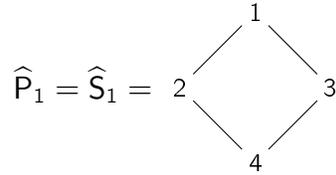
et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_3) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_1) \simeq \mathbb{C}, \\ \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_1) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_2) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_3) \simeq 0. \end{aligned}$$

Cas 3 : Pour un bloc non critique du type , la matrice de Cartan est

$$C_{\widehat{\text{arc}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le module projectif  $\widehat{P}_1$  est isomorphe au module standard  $\widehat{S}_1$  et son diagramme de Loewy est le suivant :



Celui-ci est la couverture projective du simple  $\widehat{I}_1$ , ce qui donne lieu à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow L \rightarrow \widehat{S}_1 = \widehat{P}_1 \rightarrow \widehat{I}_1 \rightarrow 0,$$

où le module  $L$  est caractérisé par

$$\text{top } L \simeq \widehat{I}_2 \oplus \widehat{I}_3 \quad \text{et} \quad \text{rad } L \simeq \text{soc } L \simeq \widehat{I}_4.$$

Celle-ci donne lieu à la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_1, \_) \rightarrow \text{Hom}(L, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_1, \_) = 0. \quad (3.8)$$

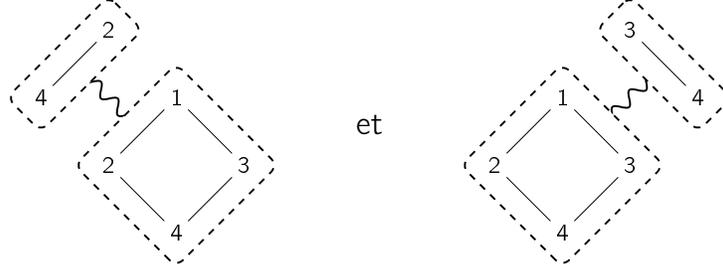
En appliquant celle-ci aux modules  $\widehat{I}_1$ ,  $\widehat{I}_2$ ,  $\widehat{I}_3$  et  $\widehat{I}_4$ , il s'ensuit que

$$\text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_3) \simeq \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_4) \simeq 0.$$

Les modules projectifs  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$  sont caractérisés par les suites exactes

$$0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{P}_2 \rightarrow \widehat{S}_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow \widehat{P}_3 \rightarrow \widehat{S}_3 \rightarrow 0.$$

où  $\widehat{S}_2$  et  $\widehat{S}_3$  ne sont pas simples. Les diagrammes de Loewy ont donc sommairement la forme



où les secteurs pointillés représentent les standards. Plusieurs liens restent à tracer pour compléter ceux-ci (ce qui est indiqué par la courbe reliant les deux secteurs pointillés).

Les deux suites exactes courtes caractérisant les projectifs induisent les suites exactes longues suivantes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{S}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_2, \_) = 0, \quad (3.9)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_1, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{S}_3, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_3, \_) = 0. \quad (3.10)$$

Puisque  $\widehat{P}_2, \widehat{P}_3$  ont socle simple par la proposition 3.19, il suit que

$$\text{soc } \widehat{P}_2 \simeq \text{soc } \widehat{P}_3 \simeq \text{soc } \widehat{S}_1 \simeq \widehat{I}_4.$$

De plus, puisque  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$  sont respectivement les couvertures projectives de  $\widehat{I}_2$  et  $\widehat{I}_3$ , les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \text{rad } \widehat{P}_2 \rightarrow \widehat{P}_2 \rightarrow \widehat{I}_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \text{rad } \widehat{P}_3 \rightarrow \widehat{P}_3 \rightarrow \widehat{I}_3 \rightarrow 0$$

sont vérifiées. Donc, celles-ci impliquent les suites exactes longues suivantes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_2, \_) \rightarrow \text{Hom}(\text{rad } \widehat{P}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_2, \_) = 0, \quad (3.11)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{I}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_3, \_) \rightarrow \text{Hom}(\text{rad } \widehat{P}_3, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_3, \_) = 0. \quad (3.12)$$

En appliquant ces deux suites pour le module  $\widehat{I}_1$ , par la proposition 3.18, il s'ensuit que

$$\text{Hom}(\text{rad } \widehat{P}_2, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_2) \simeq \mathbb{C}$$

$$\text{Hom}(\text{rad } \widehat{P}_3, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_3) \simeq \mathbb{C}$$

et ainsi,  $\widehat{I}_1$  est un facteur direct de  $\text{top rad } \widehat{P}_2$  et  $\text{top rad } \widehat{P}_3$ . De plus, puisque  $\widehat{S}_2$  et  $\widehat{S}_3$  sont des quotients de  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$  respectivement,  $\widehat{I}_4$  se doit d'être un facteur direct de  $\text{top rad } \widehat{P}_2$  et  $\text{top rad } \widehat{P}_3$ . Il en découle que

$$\text{top rad } \widehat{P}_2 \simeq \text{top rad } \widehat{P}_3 \simeq \widehat{I}_1 \oplus \widehat{I}_4.$$

En appliquant les suites (3.11) et (3.12) aux modules  $\widehat{I}_2, \widehat{I}_3$  et  $\widehat{I}_4$ , il suit que

$$\text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_4) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_4) \simeq \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_2) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_3) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_3) \simeq 0.$$

Pour ce qui en est du projectif  $\widehat{P}_4$ , les propriétés de filtration des modules projectifs impliquent qu'il est caractérisé par les suites exactes courtes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow M \rightarrow \widehat{P}_4 \rightarrow \widehat{S}_4 \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow N_3 \rightarrow M \rightarrow \widehat{S}_2 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow N_2 \rightarrow M \rightarrow \widehat{S}_3 \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \widehat{S}_2 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \widehat{S}_1 \rightarrow N_3 \rightarrow \widehat{S}_3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La forme du patron de morphismes implique que le standard  $\widehat{S}_4$  est un module simple et donc,  $M \simeq \text{rad } \widehat{P}_4$ . Puisque  $\widehat{P}_4$  a socle simple, les modules  $N_2, N_3 \hookrightarrow \widehat{P}_4$  doivent avoir socle simple. Donc,  $N_2$  et  $N_3$  sont indécomposables.

En appliquant la suite exacte longue (3.9) au module  $\widehat{S}_1$ , puisque  $\text{End}(\widehat{S}_1) \simeq \mathbb{C}$  et  $\text{Hom}(\widehat{S}_2, \widehat{S}_1) \simeq \mathbb{C}$ , il s'ensuit que  $\dim \text{Hom}(\widehat{P}_2, \widehat{S}_1)$  est égale à 1 ou 2. Mais,  $\text{top } \widehat{P}_2 \simeq \widehat{I}_2$  et donc,  $\dim \text{Hom}(\widehat{P}_2, \widehat{S}_1) \leq 1$ . Conséquemment,  $\dim \text{Ext}^1(\widehat{S}_2, \widehat{S}_1) = 1$  et  $\widehat{P}_2$  est l'unique extension non triviale de  $\widehat{S}_2$  par  $\widehat{S}_1$ . La même démarche mais avec la suite (3.10) montre que  $\widehat{P}_3$  est l'unique extension non triviale de  $\widehat{S}_3$  par  $\widehat{S}_1$ . Donc,  $N_2 \simeq \widehat{P}_2$  et  $N_3 \simeq \widehat{P}_3$  ce qui montre que  $\widehat{P}_2, \widehat{P}_3$  sont des sous-modules de  $\widehat{P}_4$ .

La suite exacte courte ayant  $\widehat{P}_4$  comme terme central donne lieu à la suite exacte longue suivante :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\widehat{S}_4, \_) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{P}_4, \_) \rightarrow \text{Hom}(M, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{S}_4, \_) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{P}_4, \_) = 0. \quad (3.13)$$

En appliquant celle-ci aux modules  $\widehat{I}_1, \widehat{I}_2$  et  $\widehat{I}_3$ , par la proposition 3.18, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, \widehat{I}_1) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{I}_1) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_1, \widehat{I}_4) \simeq 0, \\ \text{Hom}(M, \widehat{I}_2) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{I}_2) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_2, \widehat{I}_4) \simeq \mathbb{C}, \\ \text{Hom}(M, \widehat{I}_3) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{I}_3) \simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_3, \widehat{I}_4) \simeq \mathbb{C}, \\ \text{Hom}(M, \widehat{I}_4) &\simeq \text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{I}_4). \end{aligned}$$

Mais, les suites exactes courtes ayant  $M$  comme terme central permettent de conclure que  $\text{Hom}(M, \widehat{I}_4) \simeq 0$ . Donc, il est possible de déduire que

$$\text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{I}_4) \simeq 0 \quad \text{et} \quad \text{top } M \simeq \widehat{I}_2 \oplus \widehat{I}_3.$$

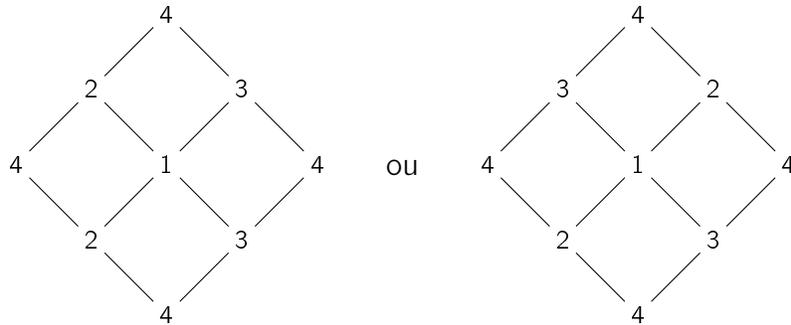
En somme, les extensions  $\text{Ext}^1(\widehat{I}_i, \widehat{I}_j)$  sont donnés par le tableau suivant :

$j \backslash i$	1	2	3	4
1	0	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	0
2	$\mathbb{C}$	0	0	$\mathbb{C}$
3	$\mathbb{C}$	0	0	$\mathbb{C}$
4	0	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	0

Il ne manque maintenant que quelques calculs pour déterminer les diagrammes de Loewy des projectifs indécomposables. Pour déterminer le diagramme de Loewy de  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$ , il est nécessaire de comprendre comment le module simple  $\widehat{I}_4$  qui n'est pas dans le socle se relie aux facteurs de composition.

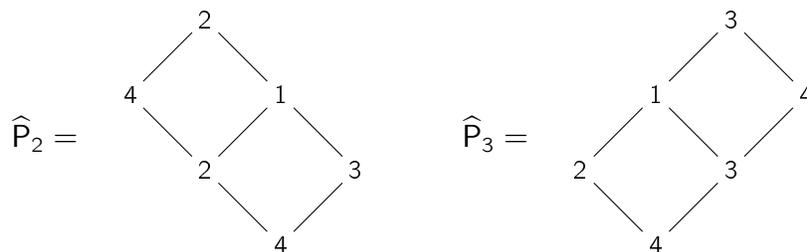
Soit  $\widehat{J}_4$  l'enveloppe injective de  $\widehat{I}_4$ . Puisque  $\widehat{I}_4$  est le socle de  $\widehat{P}_4$ , il existe une injection  $\widehat{I}_4 \hookrightarrow \widehat{P}_4$ . Puisque  $\widehat{J}_4$  est injectif, il existe un morphisme  $u : \widehat{P}_4 \rightarrow \widehat{J}_4$ . Celui-ci est injectif car sa restriction au socle est un isomorphisme. Mais, puisque  $\dim \widehat{P}_4 = \dim \widehat{J}_4$ , ce morphisme est un isomorphisme. Ainsi,  $\widehat{P}_4^\vee \simeq \widehat{J}_4 \simeq \widehat{P}_4$ . Donc, le diagramme de Loewy de  $\widehat{P}_4$  demeure inchangé s'il est renversé de bas en haut.

Ainsi, puisque  $\widehat{P}_2$  et  $\widehat{P}_3$  sont des sous-modules de  $\widehat{P}_4$ , il n'existe que deux diagrammes de Loewy possibles pour  $\widehat{P}_4$  :

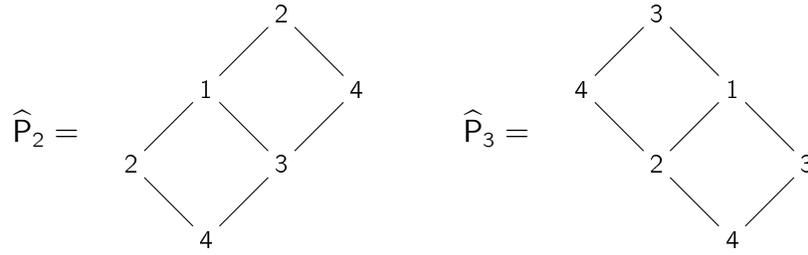


Les deux diagrammes possibles pour  $\widehat{P}_4$  respectent l'ensemble des conditions demandées par rapport au socle et par rapport aux filtrations. Cette indétermination n'a aucun impact sur la théorie développée au chapitre suivant.

Dans le premier cas, les diagrammes de Loewy des projectifs  $\widehat{P}_2$ ,  $\widehat{P}_3$  sont :



Dans le deuxième cas, les diagrammes de Loewy des projectifs  $\widehat{P}_2, \widehat{P}_3$  sont :



Pour  $j = 2, 3$ , en appliquant la suite exacte (3.13) au module  $\widehat{S}_j$ , il est possible de déduire que  $\dim \text{Ext}^1(\widehat{I}_4, \widehat{S}_j) = 1$ . Soit l'unique extension indécomposable de  $\widehat{S}_j$  par  $\widehat{I}_4$ . En observant les diagrammes de Loewy ci-dessus, il est possible de remarquer que le calcul de la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Hom}(E_j, \widehat{P}_j)$  permet de déterminer uniquement la structure des projectifs de ce bloc. Malgré cette indétermination, la suite des quotients de radicaux  $\text{rad}^i \widehat{P}_j / \text{rad}^{i+1} \widehat{P}_j$  est uniquement déterminée pour tout  $j$ .

**Conjecture 3.20.** Soient l'algèbre  $\text{TLb}_n$  et  $j$  un entier tel que  $-n \leq j \leq n$  et  $j \equiv_2 n$  où  $j$  est membre d'un bloc non critique ayant exactement 4 points. Si  $j$  est le plus grand entier de son bloc selon l'ordre cellulaire, alors le diagramme de Loewy du module  $\widehat{P}_{n,j}$  est déterminé par la structure des modules projectifs  $\widehat{P}_{n-1,j-1}$  et  $\widehat{P}_{n-1,j+1}$  (en considérant seulement les modules étant définis, c'est-à-dire  $-n + 1 \leq j \pm 1 \leq n - 1$ ).

# Chapitre 4

---

## Les algèbres à couture

Ce chapitre définit et étudie les algèbres à couture. Celles-ci ont été introduites dans un article de Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15] pour aborder de manière rigoureuse certains modèles bidimensionnels en physique statistique avec des conditions aux bords. Elles ont été étudiées par Langlois-Rémillard et Saint-Aubin [LRSA20] dans les cas où elles peuvent être définies comme un sous-ensemble des algèbres de Temperley-Lieb.

Le travail des derniers chapitres permet d'attaquer le problème de la famille exceptionnelle des algèbres à couture en la redéfinissant comme un quotient de  $TL_n$  par l'idéal engendré par un projecteur de Wenzl-Jones généralisé. Plusieurs techniques permettant de déterminer la structure du cas exceptionnel sont données.

### 4.1. Définitions

La famille des algèbres à couture est indexée par deux paramètres de taille  $n, k \in \mathbb{Z}_{>0}$  et un paramètre complexe  $\beta = q + q^{-1}$  avec  $q \in \mathbb{C}^\times$ . Ceux-ci sont soumis à certaines restrictions. Ces algèbres sont notées  $\mathfrak{b}_{n,k}(\beta)$ .

**Définition 4.1** (Algèbres à couture définies par un sous-ensemble de  $TL_n$ ). Soit  $q \in \mathbb{C}^\times$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tels que  $q$  n'est pas une racine  $2\ell$ -ième de l'unité pour  $\ell \leq k$ . Dans un tel cas<sup>4.1</sup>, le projecteur de Wenzl-Jones  $P_k \in TL_{n+k}$  existe (et est idempotent). L'algèbre à couture est définie par

$$\mathfrak{b}_{n,k}(\beta) = P_k TL_{n+k}(\beta) P_k.$$

---

4.1. Voir la définition 2.10 et la proposition 2.11.

Il est naturel de s'intéresser au caractère cellulaire de cette algèbre ainsi qu'à l'existence d'un ensemble générateur analogue aux ensembles générateurs des algèbres de Temperley-Lieb. D'abord, puisque la relation de récurrence pour  $P_m$  (voir la définition 2.10) est invariante sous l'anti-involution  $(\_)^*$  et que  $P_1^* = P_1$ , il s'en suit que  $P_m^* = P_m$ . L'application de la proposition suivante dans le cas des algèbres à couture a été faite dans [LRSA20].

**Proposition 4.2** ([KX96]). *Soit  $A$  une algèbre cellulaire et  $e \in A$  un idempotent. Si  $e^* = e$ , alors  $eAe$  est cellulaire.*

Conséquemment,  $\mathbf{b}_{n,k}$  est cellulaire. Dans leur article, Langlois-Rémillard et Saint-Aubin ont entre autres calculé les bases naturelles pour les modules cellulaires et les déterminants de Gram dans ces bases.

Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [MDRR15] ont démontré que la définition suivante des algèbres à couture est équivalente à la définition 4.1.

**Définition 4.3** (Algèbres à couture définies par générateurs et relations). Soit  $q \in \mathbb{C}^\times$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tels que  $q$  n'est pas une racine  $2\ell$ -ième de l'unité pour  $\ell \leq k$ . La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbf{b}_{n,k}(\beta)$  engendrée par les générateurs  $e_1, \dots, e_n$  et **id** assujettis aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \beta e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= e_i \quad \text{pour } i, i \pm 1 \in \{1, \dots, n-1\}, \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| > 1, \\ e_{n-1} e_n e_{n-1} &= [k]_q e_{n-1} \\ e_n^2 &= [k+1]_q e_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

où **id** est l'identité. Si  $n > k$ , la relation supplémentaire

$$\prod_{t=0}^k \left( \left( \prod_{i=0}^{k-t} e_{n-i} \right) + \sum_{i=0}^{k-t-1} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left( \prod_{j=i+2}^{k-t} e_{n-j} \right) \right) = 0 \tag{4.2}$$

est ajoutée, où l'ordre des termes dans les produits est le même qu'à la définition 0.1.

Les générateurs  $e_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $e_n$  de la définition précédente correspondent respectivement aux éléments  $P_k e_i P_k$  et  $[k]_q P_k e_n P_k$  de la définition 4.1. Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout ont aussi construit une interprétation diagrammatique des éléments de  $\mathbf{b}_{n,k}$  permettant de plus facilement calculer la dimension de l'algèbre.

**Proposition 4.4** ([MDRR15]). *Lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité, la dimension de  $\mathbf{b}_{n,k}$  est  $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k-1}$ .*

En comparant les deux définitions des algèbres à couture, il est possible de remarquer que la définition 4.3 est plus générale que la définition 4.1. En effet, lorsque que  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive de l'unité, les différentes relations définissant l'algèbre n'imposent aucune restriction entre  $k$  et  $\ell$ , tandis que 4.1 nécessite que  $\ell > k$  pour permettre de définir  $P_k$ . Ceci a été remarqué par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout. Or, ceux-ci soutiennent que la famille permise par la définition 4.3 mais interdite par 4.1 possède tout de même une interprétation physique pertinente et qu'il est nécessaire d'investiguer cette famille. L'objectif de ce chapitre est de construire sur les résultats des chapitres précédents pour permettre de faire la théorie de la représentation de cette famille manquante qui sera nommée dans ce mémoire la *famille exceptionnelle des algèbres à couture*.

Il faut tout d'abord modifier partiellement la définition 4.3 pour permettre  $\ell < k$ .

**Définition 4.5** (Algèbres à couture définies par générateurs et relations, version ajustée). Soit  $q \in \mathbb{C}^\times$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive de l'unité, soit  $\bar{k}$  le plus petit entier tel que  $1 \leq \bar{k} \leq \ell$  avec  $\bar{k} \equiv_\ell k$ . Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, soit  $\bar{k} = k$ . La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathbf{b}_{n,k}(\beta)$  engendrée par les générateurs  $e_1, \dots, e_n$  et  $\mathbf{id}$  assujettis aux relations (4.1) où  $\mathbf{id}$  est l'identité. Si  $n > \bar{k}$ , la relation supplémentaire

$$\prod_{t=0}^{\bar{k}} \left( \left( \prod_{i=0}^{\bar{k}-t} e_{n-i} \right) + \sum_{i=0}^{k-t-1} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left( \prod_{j=i+2}^{\bar{k}-t} e_{n-j} \right) \right) = 0 \quad (4.3)$$

est ajoutée, où l'ordre des termes dans les produits est le même qu'à la définition 0.1.

Avec cette modification (et en conservant la même notation), la dimension de  $\mathbf{b}_{n,k}$  est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 4.6** ([MDRR15]). Lorsque  $\bar{k} \neq \ell$ , la dimension de  $\mathbf{b}_{n,k}$  est  $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-\bar{k}-1}$ .

La prochaine proposition réduit considérablement l'étude à effectuer.

**Proposition 4.7** ([MDRR15]). Soient les différentes constantes suivantes :

- $q$  une racine  $2\ell$ -ième primitive de l'unité telle que  $q = e^{ai\pi/\ell}$  où  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{pgcd}(a, \ell) = 1$ ,
- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,
- $\bar{k}$  le plus petit entier positif tel que  $\bar{k} \equiv_\ell k$  et  $k = m\ell + \bar{k}$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ .

Si  $\bar{k} < n$ , alors, suivant la définition ajustée 4.5, l'application

$$\phi : \mathbf{b}_{n,k}(\beta) \rightarrow \mathbf{b}_{n,\bar{k}}(\beta)$$

définie par  $\phi(\mathbf{id}) = \mathbf{id}$  et  $\phi(e_i) = e_i$  pour  $i < n$  et  $\phi(e_n) = (-1)^{am} e_n$  est un isomorphisme d'algèbres.

Ainsi, si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième de l'unité et  $\ell \leq k$ , alors  $\bar{k} \leq \ell$ . Le seul cas n'étant pas traité par l'analyse est donc le cas où  $\bar{k} = \ell$  puisque sinon, les projecteurs de Wenzl-Jones  $P_{\bar{k}}$  sont définis et il est possible d'étudier  $\mathbf{b}_{n,k}$  à l'aide de  $\mathbf{b}_{n,\bar{k}}$ . Il est donc possible de se concentrer sur la famille exceptionnelle des algèbres à couture  $\mathbf{b}_{n,\ell}$ .

Tout au long de ce chapitre, plusieurs entiers serviront à définir et à étudier les algèbres à couture. La liste suivante s'avérera utile pour ne pas confondre les différents paramètres.

$$\begin{aligned}
q &: \text{le paramètre complexe inversible tel que } \beta = q + q^{-1}, \\
\ell &: \text{l'entier positif minimal tel que } q^{2\ell} = 1, \\
k &: \text{l'entier positif fixant le paramètre } \beta_1 = [k]_q, \\
\bar{k} &: \text{l'entier positif minimal tel que } \bar{k} \equiv_{\ell} k, \\
\epsilon &: \text{la valeur de } n - k, \\
n &: \text{le paramètre de taille de l'algèbre,} \\
m &: \text{un entier quelconque.}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité,  $\bar{k} = k$ .

## 4.2. $\mathbf{b}_{n,k}$ comme un quotient de $\text{TLb}_n$

Pour tous les paramètres  $q$ ,  $k$  et  $n$ , la définition 4.5 montre que  $\mathbf{b}_{n,k}(\beta)$  peut être définie comme un quotient de l'algèbre  $\text{TLb}_n$ . Plus précisément, si

$$\text{TLb}_{n,k}(\beta) = \text{TLb}_n(\beta, [k]_q, [k+1]_q),$$

alors  $\mathbf{b}_{n,k}$  est un quotient de  $\text{TLb}_{n,k}$  par la relation (4.3). La proposition 4.6 montre que lorsque  $\bar{k} < n$ , l'idéal engendré par la relation (4.3) est de dimension  $\binom{2n}{n-\bar{k}-1}$  puisque  $\dim \text{TLb}_n = \binom{2n}{n}$ . L'analyse de l'idéal par lequel il faut quotienter pour obtenir  $\mathbf{b}_{n,k}$  sera fait dans les prochaines sections. Cette section a comme objectif de calculer les patrons de morphisme de  $\text{TLb}_{n,k}$  (sans imposer de condition sur  $k$ ) et d'en déduire la structure des  $\text{TLb}_{n,k}$ -modules projectifs (lorsque  $n$  et  $k$  sont restreints à certaines conditions précises).

### 4.2.1. Les patrons de morphismes de $\text{TLb}_{n,k}$

Pour  $\text{TLb}_{n,k}$ , les coefficients  $a_m$  de l'équation (3.1) deviennent alors

$$a_m(q, \beta_1 = [k]_q, \beta_2 = [k+1]_q) = [k+1]_q [m+1]_q - [k]_q [m]_q$$

et la propriété (3) de la proposition 2.2 montre que

$$\begin{aligned} & [(m+k+1)+(-k-1)+1]_q [(-k-1)]_q \\ &= [(m+k+1)+(-k-1)]_q [(-k-1)+1]_q - [(m+k+1)]_q \end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$-[m+1]_q [k+1]_q = -[m]_q [k]_q - [m+k+1]_q$$

et conséquemment,

$$a_m(q, [k]_q, [k+1]_q) = [m+k+1]_q. \quad (4.5)$$

Donc, pour tout  $q \in \mathbb{C}^\times$ ,  $a_{-k-1} = 0$ . Si  $q$  n'est pas une racine de l'unité,  $a_m$  s'annule uniquement lorsque  $m = -k = 1$ . Si  $q$  est une racine  $2\ell$ -ième primitive, alors les coefficients  $a_m$  s'annulant sont de la forme  $a_{p\ell-k-1}$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ .

Le théorème 3.13 montre comment construire le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n,k}$ . Plus précisément, il faut étudier ici le nombre d'entiers  $m = p\ell - k - 1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  étant compris entre  $-n$  et  $n$ .

Soit  $\epsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Il sera très utile de poser  $k = n - \epsilon$  et d'observer le comportement des algèbres  $\text{TLb}_{n,n-\epsilon}$  pour  $\epsilon$  fixé. Dans un tel cas, il faut étudier les entiers de la forme  $m = p(n - \epsilon) - 1$  où  $-n \leq m \leq n$  et avec  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Lemme 4.8.** *Si  $n \geq 2\epsilon + 2$  et  $\ell = k = n - \epsilon$ , alors le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  possède exactement trois lignes critiques positionnées en  $m = -1$ ,  $m = n - \epsilon - 1$  et  $m = -n + \epsilon - 1$ .*

Démonstration. Si  $n > \epsilon$ ,  $p \mapsto m = p(n - \epsilon) - 1$  est croissante. Lorsque  $p = -1, 0, 1$ , il est clair que  $-n < m < n$ . Si  $n \geq 2\epsilon + 2$ , alors  $2(n - \epsilon) - 1 > n$  et  $-2(n - \epsilon) - 1 < -n$ .  $\square$

Les pictogrammes définis à la section 3.4.2 sont réutilisés dans les prochains résultats.

**Lemme 4.9.** *Si  $n = 2\epsilon + 2$  et  $\ell = k = n - \epsilon$ , alors les composantes connexes du patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  sont les suivantes :*

- Si  $\epsilon \equiv_2 0$ , il y a  $\epsilon/2$  composantes connexes de la forme  et 1 composante connexe de la forme .
- Si  $\epsilon \equiv_2 1$ , il y a  $(\epsilon - 1)/2$  composantes connexes de la forme , 1 composante connexe de la forme  et 1 composante connexe de la forme .

Démonstration. Lorsque  $n = 2\epsilon + 2$ , les lignes critiques du patron de morphismes sont positionnées en  $m = -\epsilon - 3$ ,  $m = -1$  et  $m = \epsilon + 1$ .

Si  $\epsilon$  est pair, aucun entier du patron de morphismes n'est critique. De plus, il y a exactement  $\epsilon/2 + 1$  entiers pairs entre  $\epsilon + 1$  et  $2\epsilon + 2$ . Si un entier pair  $j \in \mathbb{Z}$  est tel que  $\epsilon + 2 \leq j \leq 2\epsilon$ , il est possible d'appliquer successivement les réflexions par rapport aux trois lignes critiques de cet entier  $j$ . Un calcul direct montre que l'orbite de  $j$  est  $j, 2\epsilon + 2 - j, j - 2\epsilon - 4, -j - 2$ . Étant donné que  $\epsilon + 2 \leq j \leq 2\epsilon$ , il s'en suit que

$$2 \leq 2\epsilon + 2 - j \leq \epsilon, \quad -\epsilon - 2 \leq j - 2\epsilon - 4 \leq -4, \quad -2\epsilon - 2 \leq -j - 2 \leq -\epsilon - 4.$$

Donc, chacun des entiers pairs entre  $\epsilon + 2$  et  $2\epsilon$  correspond à une composante connexe de type . Les seuls entiers n'ayant pas été atteints par ces réflexions sont  $0, -2$  et  $2\epsilon + 2$ . Or,  $(0 - 2)/2 = -1$  et  $(0 + 2\epsilon + 2)/2 = \epsilon + 1$ . Ceux-ci forment donc une composante connexe de type .

Si  $\epsilon$  est impair,  $-\epsilon - 3$  est pair et  $\epsilon + 1$  aussi. De plus,  $((-\epsilon - 3) + (\epsilon + 1))/2 = -1$  et ces deux entiers sont liés par un morphisme. Donc, ils correspondent à une composante connexe de type . Le même traitement que précédemment permet de montrer que les  $(\epsilon - 1)/2$  entiers pairs compris entre  $\epsilon + 3$  et  $2\epsilon$  correspondent à des composantes connexes de type  tandis que  $-2, 0, 2\epsilon + 2$  forme une composante connexe de type .  $\square$

**Lemme 4.10.** *Si  $n \geq 2\epsilon + 2$  et  $\ell = n - \epsilon$ , le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  correspond au patron de morphismes de  $\text{TLb}_{2\epsilon+2,\ell=\epsilon+2}$  dans lequel ont été imbriquées des composantes connexes de type  ou . Plus précisément, si  $n = 2\epsilon + 2 + \epsilon'$  avec  $\epsilon' \geq 0$ , alors :*

- Si  $\epsilon'$  est pair, il y a un ajout de  $\epsilon'/2$  composantes connexes de type  empilées autour du point  $-1$  dans le patron de morphisme.
- Si  $\epsilon'$  est impair, il y a un ajout de  $(\epsilon' - 1)/2$  composantes connexes de type  empilées autour du point  $-1$  et 1 composante connexe de type  au point  $-1$ .

Démonstration. Lorsque  $n = 2\epsilon + 2 + \epsilon'$ , le lemme 4.8 montre que les lignes critiques du patron de morphismes sont situées en  $m = -1, m = \epsilon + \epsilon' + 1$  et  $m = -\epsilon - \epsilon' - 3$ . La même analyse qu'au lemme 4.9 permet que les entiers  $j$  tels que  $\epsilon + \epsilon' + 1 \leq j \leq 2\epsilon + 2 + \epsilon'$  donnent lieu aux composantes connexes identiques à celles du patron de morphismes de  $n = 2\epsilon + 2$ . Les seuls entiers n'étant pas touchés par ces orbites sont les  $j$  tels que  $-\epsilon' \leq j < \epsilon'$ .

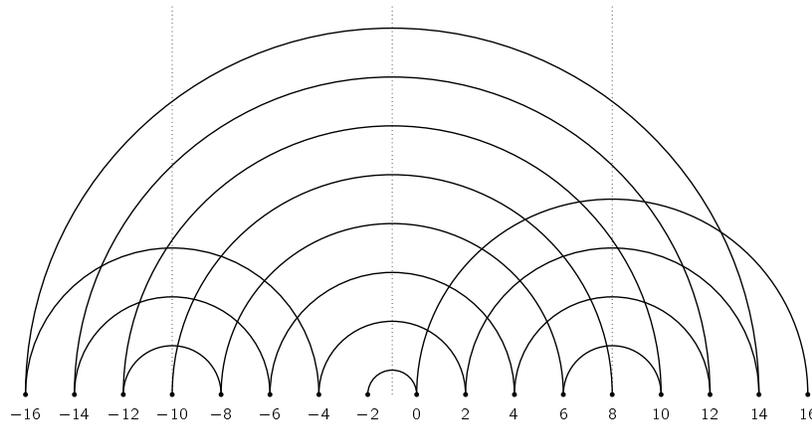
Si  $\epsilon'$  est pair, alors  $n$  est pair et il y a exactement  $\epsilon'/2$  entiers pairs  $j$  tels que  $-\epsilon' \leq j < \epsilon'$ . Si  $0 \leq j \leq \epsilon' - 2$ , l'orbite de  $j$  est  $j, -j - 2$  et  $\epsilon' \leq -j - 2 \leq -2$ . Donc, il y a  $\epsilon'/2$  composantes connexes du type  ayant comme point central  $-1$  à imbriquer pour former le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{2\epsilon+2,\ell=\epsilon+2}$ .

Si  $\epsilon'$  est impair, alors  $n$  est impair et il y a exactement  $\epsilon'$  entiers impairs  $j$  tels que  $-\epsilon' \leq j < \epsilon'$ . L'entier  $j = -1$  correspond à un bloc critique et il n'est lié à aucun autre entier. Les  $\epsilon' - 1$  entiers restants sont traités exactement comme dans le cas précédent.  $\square$

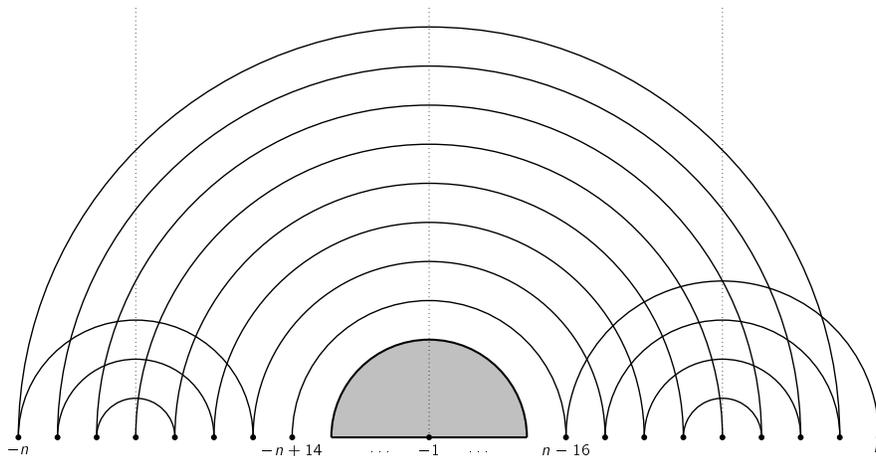
**Définition 4.11** (Patron stationnaire). Le patron de morphismes associé à  $\text{TLb}_{2\epsilon+2, \ell=\epsilon+2}$  est appelé un patron de morphismes stationnaire.

Les lemmes précédents montrent que, lorsque  $n$  est suffisamment grand par rapport à  $\epsilon$ , le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n, \ell=n-\epsilon}$  est facile à construire. Il suffit de construire le patron stationnaire et d'y ajouter les composantes connexes du type  $\frown$  ou  $\smile$  nécessaires.

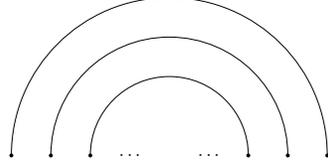
Voici un exemple de la construction du patron de morphismes pour  $\text{TLb}_{n, \ell=n-\epsilon}$ . Si  $\epsilon = 7$  est fixé, le patron stationnaire apparaît pour  $n = 2 \cdot 7 + 2 = 16$ . Celui est donné par



et donc, les patrons de morphismes pour les cas suivants sont de la forme



où la région ombragée est de la forme



celle-ci se terminant en un point ou en un couple, dépendant de la parité de  $n$ .

#### 4.2.2. Modules projectifs des patrons stationnaires

Plusieurs calculs concernant l'algèbre quotient  $\mathbf{b}_{n,\ell}$  seront réalisés grâce à un argument dimensionnel. Le théorème suivant sera crucial à cette approche.

**Théorème 4.12** (Décomposition de Peirce). *Soit  $A$  une  $K$ -algèbre de dimension finie. Alors, la décomposition du  $A$ -module à gauche  ${}_A A$  en sous-modules indécomposables est donnée par*

$${}_A A \simeq \bigoplus P_i^{\dim \text{top } P_i}.$$

où les  $P_i$  forment un ensemble complet de  $A$ -modules projectifs indécomposables non isomorphes.

La section 3.4.2 a déterminé explicitement la structure des  $\text{TLb}_n$  modules projectifs dans le cas où les blocs non critiques étaient de taille suffisamment petite. Dans le cas des patrons stationnaires, ceux-ci possèdent des blocs ayant au maximum 4 sommets. Donc, lorsque  $n$  est suffisamment grand et  $\epsilon$  est fixé, la théorie de la représentation de l'algèbre  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  est déterminée par les patrons stationnaires (dont les modules projectifs ont été décrits à la section 3.4.2).

De plus, lorsque  $n = 2\epsilon + 2 + \epsilon'$  avec  $\epsilon' \in \mathbb{Z}_{>0}$ , chaque entier  $j$  de la même parité que  $n$  tel que  $-\epsilon' \leq j < \epsilon'$  donne lieu à un bloc de taille au plus 2. Si  $j \geq -1$ , alors le bloc est formé des deux entiers  $j$  et  $-j - 2$  (et ils coïncident seulement lorsque  $j = -1$ ). Donc, pour  $j \geq 0$  et puisque  $|j| < |-j - 2|$ , les modules standards, simples et projectifs de ce bloc respectent les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dim \widehat{\mathbf{S}}_{n,j} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2}}, & \dim \widehat{\mathbf{S}}_{n,-j-2} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}, \\ \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2}} - \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}, & \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,-j-2} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}, \\ \dim \widehat{\mathbf{P}}_{n,j} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2}}, & \dim \widehat{\mathbf{P}}_{n,-j-2} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2}} + \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Il est possible d'écrire

$$\binom{n}{\frac{n-j}{2}} - \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1} = \frac{n+j+2}{n-j} \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}$$

et conséquemment, puisque  $\widehat{\Gamma}_{n,-j-2}$  est le socle de ces deux projectifs,

$$\begin{aligned} \dim \widehat{\Gamma}_{n,j} \cdot \dim \text{soc } \widehat{\mathbb{P}}_{n,j} &= \frac{n+j+2}{n-j} \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}^2 \\ \dim \widehat{\Gamma}_{n,-j-2} \cdot \dim \text{soc } \widehat{\mathbb{P}}_{n,-j-2} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1}^2. \end{aligned}$$

### 4.3. L'idéal engendré par $\widehat{\mathbf{p}}_k^-$

La présentation qui suit vaut pour  $q$  quelconque et, quand une condition faisant intervenir  $\ell$  est invoquée, le traitement est fait pour  $q$  racine de l'unité.

L'objectif de cette section est d'analyser la relation (4.3) présente dans la définition ajustée des algèbres à couture. Au chapitre 2, une famille d'éléments de  $\text{TLb}_n$  appelés les projecteurs de Wenzl-Jones généralisés (de type  $\widehat{S}_{n,-n}$ ) ont été définis. Ceux-ci sont notés  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  (voir définition 2.18) et ils sont construits à partir des facteurs de Wenzl-Jones généralisés  $\widehat{u}_m$  (voir la définition 2.23). Les projecteurs  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  sont définis à partir des constantes  $c_1^j$ ,  $c_2^j$  et  $\delta_j$  données par

$$\delta_j = [j]_q \beta_1 - [j-1]_q \beta_2, \quad c_1^j = (-1)^{j-1} \delta_{j-1} \quad \text{et} \quad c_2^j = \prod_{i=0}^{j-3} \frac{1}{(-1)^i \delta_i}.$$

Les constantes  $\delta_j$  sont liées aux constantes  $a_j$  apparaissant dans le déterminant de Gram des algèbres  $\text{TLb}_n$  (voir l'équation (3.1)) par la relation  $\delta_j = a_{-j}$ . Donc, par (4.5), il suit que dans  $\text{TLb}_{n,k}$ ,

$$\delta_j = [k-j+1]_q \text{ implique que } c_1^{j+1} = (-1)^j [k-j+1]_q$$

et conséquemment, les facteurs de Wenzl-Jones généralisés deviennent

$$\begin{aligned} \widehat{u}_m &= \left( \prod_{i=0}^{m-1} e_{n-i} \right) + \sum_{i=2}^m (-1)^{i-1} [k-i+2]_q \left( \prod_{j=i}^{m-1} e_{n-j} \right) \\ &= \left( \prod_{i=0}^{m-1} e_{n-i} \right) + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left( \prod_{j=i+2}^{m-1} e_{n-j} \right) \end{aligned}$$

et les projecteurs  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  s'écrivent grâce à la proposition 2.24 comme

$$\widehat{\mathbf{p}}_m^- = \prod_{i=1}^m \widehat{u}_{m-i+1} = \prod_{t=0}^{m-1} \left( \left( \prod_{i=0}^{m-t-1} e_{n-i} \right) + \sum_{i=0}^{m-t-2} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left( \prod_{j=i+2}^{m-t-1} e_{n-j} \right) \right).$$

Ainsi, lorsque  $m = \bar{k} + 1$ , la relation (4.3) prend la forme très simple

$$\widehat{\mathbf{p}}_{\bar{k}+1}^- = 0.$$

La prochaine étape détermine quand l'élément  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$  est réellement (à une constante près) un projecteur. La proposition 2.19, permet de calculer le coefficient reliant  $\widehat{\mathbf{p}}_m^- \in \text{TLb}_{n,k}$  et son carré :

$$(\widehat{\mathbf{p}}_m^-)^2 = p_m \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \left( \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^i [k - i + 1]_q \right) \widehat{\mathbf{p}}_m^-$$

ce qui s'annule si  $m \geq k + 2$  ou s'il existe  $j$  avec  $0 \leq j \leq m - 1$  et  $j \equiv_\ell k + 1$ . Les algèbres à couture sont définies comme un quotient de  $\text{TLb}_{n,k}$  par l'idéal engendré par  $\widehat{\mathbf{p}}_{\bar{k}+1}^-$ . Donc, dans le cas où  $m = \bar{k} + 1$ , puisque  $0 < \bar{k} \leq \ell$ , le calcul ci-dessus montre que le coefficient  $p_{\bar{k}+1}$  s'annule seulement si  $\bar{k} = \ell$ . En effet, si  $m \leq \bar{k} + 1$ , les  $q$ -nombres présents dans l'expression du carré s'annulent seulement s'il existe  $i$  avec  $1 \leq i \leq \bar{k} + 1$  tel que  $[i]_q = 0$ . Donc, dans le cas  $m = \bar{k} + 1$ , le projecteur peut-être renormalisé pour être idempotent si et seulement  $\bar{k} \neq \ell$ .

De plus, le lemme 2.20 montre que

$$e_{n-m} \widehat{\mathbf{p}}_m^- e_{n-m} = -c_1^{m+1} \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m} = (-1)^m [k - m + 1]_q \widehat{\mathbf{p}}_{m-1}^- e_{n-m}$$

et cette expression s'annule si  $m = k + 1$  ou si  $m \equiv_\ell k + 1$ . Donc, dans le cas  $m = \bar{k} + 1$ , le coefficient  $c^{\bar{k}+2}$  s'annule.

Comme cela a été indiqué dans la définition 4.5, la relation (4.3) n'est ajoutée que dans le cas où  $\bar{k} < n$ . De plus, la définition 4.1 requiert que  $\ell \neq \bar{k}$ . Le zéro apparaissant au coefficient du carré du projecteur généralisé témoigne en un certain sens du fait que la définition 4.1 n'est pas valide lorsque  $\bar{k} = \ell$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ , l'idéal bilatère de  $\text{TLb}_{n,k}$  engendré par  $\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-$  est noté

$$\langle \widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^- \rangle = \widehat{\mathbf{J}}_m \subset \text{TLb}_{n,k}.$$

L'étude de l'algèbre  $\mathbf{b}_{n,k}$  peut donc être ramenée à l'étude de l'algèbre quotient  $\text{TLb}_{n,k} / \widehat{\mathbf{J}}_{\bar{k}}$ . De plus, puisque  $\widehat{u}_{m+1} \widehat{\mathbf{p}}_m^- = \widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-$ , il existe une chaîne d'idéaux

$$\widehat{\mathbf{J}}_{n-1} \subset \widehat{\mathbf{J}}_{n-2} \subset \cdots \subset \widehat{\mathbf{J}}_1 \subset \widehat{\mathbf{J}}_0 = \langle e_n \rangle \subset \text{TLb}_{n,k}$$

La proposition 4.4 montre que  $\dim \widehat{\mathbf{J}}_k = \binom{2n}{n-k-1}$  lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité. Cette formule vaut aussi lorsque  $q$  est une racine de l'unité.

**Lemme 4.13** (Argument adapté de [MDRR15]). *Pour tout  $q \in \mathbb{C}^\times$  et pour tout  $0 \leq m \leq n - 1$ , une base de l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_m \subset \text{TLb}_n$  est donnée par*

$$w_2 \cdot \widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^- \cdot w_1$$

où  $w_1, w_2 \in \text{TLb}_n$  ont comme expression

$$\begin{aligned} w_1 &= (e_{n-m-1}e_{n-m-2} \dots e_{\ell_1})(e_{n-m}e_{n-m-1} \dots e_{\ell_2}) \dots (e_{n-m+s-2}e_{n-m+s-3} \dots e_{\ell_s}) \\ w_2 &= (e_{j_1}e_{j_1-1} \dots e_{m_1}) \dots (e_{j_r}e_{j_r-1} \dots e_{m_r}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &< m_2 < \dots < m_r < \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_s \leq n, \\ j_1 &< j_2 < \dots < j_r, \\ s &\leq m + 1 \quad \text{et} \quad m_i \leq j_i. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Comme il se doit, cette base est de taille  $\binom{2n}{n-m-1}$ . Elle peut être dualisée en appliquant  $(\_)^*$  à chaque élément de la base.

Démonstration. À la suite de la proposition 2.26, une remarque démontre que le mot le plus long présent dans l'expression de  $\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-$  est

$$\omega = (e_n e_{n-1} \dots e_{n-m})(e_n e_{n-1} \dots e_{n-m+1}) \dots (e_n e_{n-1}) e_n$$

et son coefficient est 1. La multiplication par l'élément  $w_1$  transforme celui-ci en le mot

$$\omega w_1 = (e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_1})(e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_2}) \dots (e_n e_{n-1} \dots e_{\ell_s})$$

Si  $w_2$  respecte les conditions des équations (4.6), alors  $w_2 \omega w_1$  est écrit sous la forme de Jones généralisée de la proposition 1.22. Donc, les éléments s'écrivant  $w_2 \omega w_1$  donnés sont tous linéairement indépendants car leur mot le plus long possède un coefficient égal à 1, sont sous la forme de Jones généralisée et sont distincts. Ainsi, les éléments de la forme  $w_2 \widehat{\mathbf{p}}_m^- w_1$  proposés dans l'énoncé sont linéairement indépendants. Dans [MDRR15], il est démontré à la proposition B.3 qu'un tel ensemble a taille  $\binom{2n}{n-m-1}$ . Donc, il s'en suit que pour tout  $q$ ,

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_m \geq \binom{2n}{n-m-1}.$$

Lorsque  $q$  n'est pas une racine de l'unité, en posant  $k = m$  et en spécialisant  $\beta_1$  et  $\beta_2$  aux valeurs  $[k]_q$  et  $[k+1]_q$  respectivement, l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_{k=m} \subset \text{TLb}_{n,k=m}$  donne lieu à l'algèbre  $\mathbf{b}_{n,k} = \text{TLb}_{n,k} / \widehat{\mathbf{J}}_k$ . Dans un tel cas la formule

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_{k=m} = \binom{2n}{n-k-1}$$

est valide. Puisque les relations de dépendances linéaires sont polynomiales en  $q$ ,  $q^{-1}$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , il s'en suit que la spécialisation en  $\beta_1 = [k]_q$ ,  $\beta_2 = [k+1]_q$  ne peut que faire diminuer la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces éléments. Ceci est aussi vrai pour la spécialisation en  $q$  racine de l'unité. Donc,

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_m \leq \binom{2n}{n-m-1}$$

et ceci démontre la formule annoncée. □

Soit l'algèbre  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  avec  $n = 2\epsilon + 2 + \epsilon'$  et  $\epsilon' > 0$ . La dimension de l'idéal est donnée par

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_{\ell=n-\epsilon} = \binom{2n}{\epsilon-1}.$$

La décomposition de Peirce donne

$$\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon} \simeq \bigoplus \widehat{\mathbf{P}}_{n,j}^{\oplus \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j}}$$

comme  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$ -modules à gauche. Il s'en suit que, comme modules à gauche,

$$\widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \simeq \bigoplus (\widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \widehat{\mathbf{P}}_{n,j})^{\oplus \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j}}$$

et alors

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \geq \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j} \cdot \dim \widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \widehat{\mathbf{P}}_{n,j}.$$

Si le projectif  $\widehat{\mathbf{P}}_{n,j}$  a socle simple, l'inégalité précédente devient

$$\dim \widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \geq \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j} \cdot \dim \text{soc } \widehat{\mathbf{P}}_{n,j}.$$

**Corollaire 4.14.** *Soit l'algèbre  $\text{TLb}_{n,\ell=n-\epsilon}$  où  $n = 2\epsilon + 2 + \epsilon'$  et  $\epsilon' > 0$ . Si  $j$  est un élément du patron de morphismes qui ne fait pas partie du patron stationnaire (c'est-à-dire  $-\epsilon' \leq j < \epsilon'$ , alors  $\widehat{\mathbf{J}}_{n-\epsilon} \widehat{\mathbf{P}}_{n,j} = 0$ ).*

Démonstration. Ce corollaire découle du calcul fait à la section 4.2.2 qui montre que si  $j \geq 0$  et  $j$  fait partie d'un bloc du type  $\curvearrowright$  ou  $\bullet$ , alors

$$\begin{aligned} \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,j} \cdot \dim \text{soc } \widehat{\mathbf{P}}_{n,j} &= \frac{n+j+2}{n-j} \binom{n}{\frac{n-j}{2}-1}^2 \\ \dim \widehat{\mathbf{I}}_{n,-j-2} \cdot \dim \text{soc } \widehat{\mathbf{P}}_{n,-j-2} &= \binom{n}{\frac{n-j}{2}-1}^2. \end{aligned}$$

Mais, étant donné que  $0 \leq j < n-2$ , l'expression  $\frac{n+j+2}{n-j}$  est supérieure à 1. Conséquemment, il suffit de montrer

$$\binom{n}{\frac{n-j}{2}-1}^2 > \binom{2n}{\epsilon-1} = \dim \widehat{\mathbf{J}}_{\ell}$$

pour conclure le résultat souhaité. Soit  $i, i'$  deux entiers de même parité que  $n$  tels que  $0 \leq i, i' \leq n$ . Si  $i < i'$ , alors

$$\binom{n}{\frac{n-i}{2}} > \binom{n}{\frac{n-i'}{2}}$$

et donc, puisque  $j + 2 \leq \epsilon'$ ,

$$\binom{n}{\frac{n-j}{2} - 1} \geq \binom{n}{\frac{n-\epsilon'}{2}} = \binom{n}{\epsilon + 1}.$$

De plus,

$$\binom{n}{\epsilon + 1} > \binom{n}{\epsilon - 1}$$

car

$$\binom{n}{\epsilon + 1} = \frac{(\epsilon' + \epsilon + 3)(\epsilon' + \epsilon + 2)}{\epsilon(\epsilon + 1)} \binom{n}{\epsilon - 1} > \binom{n}{\epsilon - 1}.$$

Le résultat sera démontré si, pour  $m, t \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $m \geq 2$  et  $t > 0$ , l'inégalité

$$\binom{2m+t}{m-2}^2 > \binom{2(2m+t)}{m-2}$$

est vérifiée car il suffit de poser  $m = \epsilon + 2$  et  $t = \epsilon'$  pour retrouver l'expression souhaitée.

L'approximation de Stirling donne les bornes

$$\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-n} \cdot n^n < n! < e \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-n} n^n$$

valides pour tout  $n$ . En appliquant celles-ci au coefficient binomial  $\binom{n}{k}$ , il est possible de trouver les bornes

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{(n-k)}} < \binom{n}{k} < \frac{e}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{(n-k)}}$$

valides pour tout  $n$  et  $k$ . Conséquemment,

$$\begin{aligned} \binom{2m+t}{m-2} &> \frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} \cdot \sqrt{\frac{2m+t}{(m-2)(m+t+2)}} \cdot \frac{(2m+t)^{(2m+t)}}{(m-2)^{(m-2)}(m+t+2)^{(m+t+2)}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} \cdot \sqrt{\frac{2m+t}{(m-2)(m+t+2)}} \cdot \left( \frac{(2m+t)^2}{(m-2)(m+t+2)} \right)^m \cdot \left( \frac{2m+t}{m+t+2} \right)^t \cdot \left( \frac{m-2}{m+t+2} \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\binom{2(2m+t)}{m-2} &< \frac{e}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(2m+t)}{(m-2)(3m+2t+2)}} \cdot \frac{(2(2m+t))^{2(2m+t)}}{(m-2)^{(m-2)}(3m+2t+2)^{(3m+2t+2)}} \\
&= \frac{e}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(2m+t)}{(m-2)(3m+2t+2)}} \cdot \left(\frac{(2(2m+t))^4}{(m-2)(3m+2t+2)^3}\right)^m \cdot \left(\frac{(2(2m+t))^2}{(3m+2t+2)^2}\right)^t \cdot \left(\frac{m-2}{3m+2t+2}\right)^2 \\
&= \frac{e}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(2m+t)}{(m-2)(3m+2t+2)}} \cdot 2^{4m+2t} \left(\frac{(m-2)}{(3m+2t+2)}\right)^m \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^{2t} \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2m+t)^2}{(m-2)(m+t+2)}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{2m+t}{m+t+2}\right)^{2t} \cdot \left(\frac{m-2}{m+t+2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour montrer l'inégalité souhaitée, il suffit de démontrer que

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{e^4} \frac{2m+t}{(m-2)(m+t+2)} &\geq \frac{e}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(2m+t)}{(m-2)(3m+2t+2)}} \cdot 2^{4m+2t} \left(\frac{(m-2)}{(3m+2t+2)}\right)^m \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^{2t} \cdot \left(\frac{m+t+2}{3m+2t+2}\right)^2
\end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, il suffit de démontrer que

$$\frac{4\pi^2}{\sqrt{2}e^5} \geq \frac{(m+t+2)^3(m-2)^{1/2}}{(2m+t)^{1/2}(3m+2t+2)^{5/2}} \left(\frac{16(m-2)(m+t+2)^2}{(3m+2t+2)^3}\right)^m \left(\frac{2(m+t+2)}{3m+2t+2}\right)^{2t}.$$

Étant donné que  $t \geq 1$ , l'expression ci-dessus est décroissante en fonction de  $t$ . Ainsi, par calcul numérique, la fonction réelle

$$f(m) = \frac{(m+3)^3(m-2)^{1/2}}{(2m+1)^{1/2}(3m+4)^{5/2}} \left(\frac{16(m-2)(m+3)^2}{(3m+4)^3}\right)^m \left(\frac{2(m+3)}{3m+4}\right)^2$$

admet un maximum global compris entre 3 et 4 puisqu'elle est décroissante à partir de celui-ci. Ce maximum vérifie l'inégalité demandée, c'est-à-dire  $f(m) \leq \max f(m) \approx 0.0026 < \frac{4\pi^2}{\sqrt{2}e^5} \approx 0.188$ .  $\square$

Puisque l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_m$  est engendré par  $\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-$ , chaque élément de celui-ci s'écrit toujours sous la forme  $a\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-b$  pour  $a, b \in \text{TLb}_n$ . L'idéal  $(\widehat{\mathbf{J}}_m)^2$  est formé des éléments

$$a_1\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-b_1a_2\widehat{\mathbf{p}}_{m+1}^-b_2$$

où chaque mot présent dans l'expression de  $b_1a_2$  peut être mis sous la forme normale de Jones généralisée 1.22.

**Lemme 4.15.** *L'idéal  $\langle \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- \rangle = \widehat{\mathbf{J}}_\ell \subset \text{TLb}_{n,\ell}$  est nilpotent.*

Démonstration. La proposition 2.19 rappelle comment manipuler les générateurs  $e_i$  ainsi que les projecteurs généralisés  $\widehat{\mathbf{p}}_m^-$ . Dans le cas  $m = \ell + 1$ ,  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$  est annulé par  $e_i$  pour  $n - (\ell + 1) + 1 \leq i \leq n - 1$  et il commute avec  $e_i$  pour  $1 \leq i \leq n - (\ell + 1) - 1$ . De plus, les constantes  $p_j$  dans  $\text{TLb}_{n,\ell}$  sont données par

$$p_j = \prod_{i=0}^{j-1} (-1)^i [\ell - j + 1]_q$$

et ainsi,  $p_1 = [\ell + 1]_q$  et  $p_j = 0$  pour  $j \geq 2$ . Ces propriétés ainsi que la factorisation des projecteurs à l'aide des facteurs de Wenzl-Jones (voir la proposition 2.24) seront utilisés dans cette preuve.

Il est possible de factoriser  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$  comme

$$\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- = \left( \prod_{i=1}^{\ell-1} \widehat{u}_{(\ell+1)-i+1} \right) \widehat{\mathbf{p}}_2^-.$$

Ainsi, si  $a \in \text{TLb}_n$  ne contient pas les générateurs  $e_{n-2}$ ,  $e_{n-1}$  et  $e_n$ , alors  $a$  commute avec  $\widehat{\mathbf{p}}_2^-$  et

$$\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- a \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- = \left( \prod_{i=1}^{\ell-1} \widehat{u}_{(\ell+1)-i+1} \right) a \widehat{\mathbf{p}}_2^- \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-.$$

Mais,  $\widehat{\mathbf{p}}_2^- \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- = p_2 \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- = 0$ . Conséquemment,  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- a \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$  s'annule.

Pour  $j_1 \geq j_2$ , la notation

$$E_{j_2}^{j_1} = e_{j_1} e_{j_1-1} \dots e_{j_2+1} e_{j_2}$$

est utilisée pour simplifier la manipulation des générateurs.

Soit  $N \geq 2$ . Une base de l'idéal  $(\widehat{\mathbf{J}}_\ell)^N$  est donnée par

$$a \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_{N-1} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_{N-2} \dots \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_1 \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- b \quad (4.7)$$

où  $a, b \in \text{TLb}_n$  et les  $w_i \in \text{TLb}_n$  sont des mots sous la forme normale de Jones généralisée 1.22, c'est-à-dire

$$w_i = E_{k_1^{(i)}}^{j_1^{(i)}} \dots E_{k_{r_i}^{(i)}}^{j_{r_i}^{(i)}} E_{\ell_1^{(i)}}^n \dots E_{\ell_{s_i}^{(i)}}^n$$

avec

$$\begin{aligned} j_1^{(i)} &< j_2^{(i)} < \dots < j_{r_i}^{(i)} \\ k_1^{(i)} &< k_2^{(i)} < \dots < k_{r_i}^{(i)} < \ell_1^{(i)} < \ell_2^{(i)} < \dots < \ell_{s_i}^{(i)} \\ \text{et } k_t^{(i)} &\leq j_t^{(i)} \quad \forall t. \end{aligned}$$

Pour que l'expression (4.7) ne s'annule pas, il est nécessaire de supposer que chaque mot  $w_i$  contienne au moins un générateur  $e_i$  avec  $i = n-2, n-1, n$ . Le dernier générateur du mot  $w_i$  est défini comme étant  $e_{d_i}$ . Ainsi,  $d_i = k_{r_i}^{(i)}$  ou  $d_i = \ell_{s_i}^{(i)}$  tout dépendant si  $s_i = 0$  ou non. Pour que l'expression soit non nulle, il faut supposer que pour tout  $i$ ,  $j_1^{(i)} \leq n - (\ell + 1)$  et que  $d_i \leq n - (\ell + 1)$ .

Sachant que les générateurs  $e_i$  à droite de  $w_1$  avec  $i < n - (\ell + 1)$  peuvent être commutés à droite de  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$  et concaténés à  $b$ , sans perte de généralité,  $d_1 = n - (\ell + 1)$ . Dans l'expression de  $w_1$ , le premier générateur  $e_i$  à gauche de  $e_{d_1}$  tel que  $i < d_1$  peut être supposé comme étant  $i = d_1 - 1$  puisque sinon, il est possible de le commuter à droite et de le concaténer avec  $b$ . De plus, si  $j_2^{(1)} > j_1^{(1)} + 1 = n - (\ell + 1) + 1$ , il est possible de commuter  $e_{j_2^{(1)}}$  avec les générateurs à sa gauche pour annuler  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$ . Cet argument peut être répété et il montre que  $j_i^{(1)} = n - (\ell + 1) + i - 1$ . Donc, le mot  $w_1$  a la forme

$$w_1 = E_{n-(\ell+1)+1-(r_1+s_1)}^{n-(\ell+1)} \cdots E_{n-(\ell+1)-s_1}^{n-(\ell+1)+r_1-1} E_{n-(\ell+1)+1-s_1}^n \cdots E_{n-(\ell+1)}^n.$$

Ainsi, le dernier générateur de  $w_2$  respecte  $d_2 \leq n - (\ell + 1) - 1$ , car selon le lemme 2.20,

$$e_{n-(\ell+1)} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- e_{n-(\ell+1)} = -c_1^{(\ell+1)+1} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell}^- e_{n-(\ell+1)}$$

mais,

$$c_1^{\ell+2} = (-1)^{\ell+1} \delta_{\ell+1} = [\ell - (\ell + 1) + 1]_q = 0.$$

Il est possible de supposer sans perte de généralité que  $d_2 \geq k_1^{(1)} - 1$ , puisque sinon,  $e_{d_2}$  peut être commuté complètement à droite. Donc, sachant que  $d_2 < j_1^{(1)}$ , si  $d_2 \geq k_1^{(1)}$ , alors

$$\begin{aligned} e_{d_2} E_{k_1^{(1)}}^{j_1^{(1)}} E_{k_2^{(1)}}^{j_2^{(1)}} E_{k_3^{(1)}}^{j_3^{(1)}} \cdots E_{k_{r_1}^{(1)}}^{j_{r_1}^{(1)}} &= (E_{k_1^{(1)}}^{d_2} E_{d_2+3}^{j_1^{(1)}}) e_{d_2+2} E_{k_2^{(1)}}^{j_2^{(1)}} E_{k_3^{(1)}}^{j_3^{(1)}} \cdots E_{k_{r_1}^{(1)}}^{j_{r_1}^{(1)}} \\ &= (E_{k_1^{(1)}}^{d_2} E_{d_2+3}^{j_1^{(1)}}) (E_{k_2^{(1)}}^{d_2+2} E_{d_2+5}^{j_2^{(1)}}) e_{d_2+4} E_{k_3^{(1)}}^{j_3^{(1)}} \cdots E_{k_{r_1}^{(1)}}^{j_{r_1}^{(1)}} \\ &= (E_{k_1^{(1)}}^{d_2} E_{d_2+3}^{j_1^{(1)}}) (E_{k_2^{(1)}}^{d_2+2} E_{d_2+5}^{j_2^{(1)}}) \cdots (E_{k_{r_1}^{(1)}}^{d_2+2r_1-2} E_{d_2+2r_1+1}^{j_{r_1}^{(1)}}) e_{d_2+2r_1}. \end{aligned}$$

Puisque  $k_1 = n - (\ell + 1) + 1 - (r_1 + s_1)$ , alors  $d_2 + 2r_1 \geq n - (\ell + 1) + 1 + r_1 - s_1$ . Donc, si  $s_1 = 0$ , alors  $e_{d_2+2r_1}$  annule  $\widehat{\mathbf{p}}_{(\ell+1)}^-$ . Si  $s_1 \neq 0$ , alors  $d_2 + 2r_1 \geq \ell_1$ . En effectuant les mêmes manipulations que ci-dessus mais avec les termes restants dans l'expression de  $w_1$ , il est possible de montrer qu'il n'y a que deux cas possibles :

- Si  $n - (\ell + 1) + 1 + r_1 + s_1 \leq n - 1$ , alors  $e_{d_2+2r_1+2s_1}$  sera le terme résultant à droite lorsque les manipulations analogues à ci-dessus seront terminés. Ce générateur annule  $\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$ .
- Si  $n - (\ell + 1) + 1 + r_1 + s_1 > n - 1$ , alors les manipulations comme ci-dessus feront apparaître une expression de la forme  $e_{n-1}e_n e_{n-1} = \beta_1 e_{n-1} = [\ell]_q e_{n-1} = 0$  (ce qui annule l'expression) ou une expression de la forme  $e_n e_n = \beta_2 e_n$  (ce qui permet de recommencer le procédé avec le prochain générateur).

Donc, sans perte de généralité,  $d_2 = k_1^{(1)} - 1$ . Ainsi,  $k_1^{(2)} < k_1^{(1)} - 1$ . De plus, les entiers  $k_i^{(2)}$  et  $\ell_i^{(2)}$  doivent respecter  $k_i^{(2)} + 1 = k_{i+1}^{(2)}$  et  $\ell_i^{(2)} + 1 = \ell_{i+1}^{(2)}$ .

La preuve suivante montre par induction que si l'expression est non nulle, alors  $d_{i+1} = k_1^{(i)} - 1$ . Le cas de base correspond au cas traité précédemment. Soit  $d_{i+1}$  l'entier correspondant au générateur le plus à droite du mot  $w_{i+1}$ . Sans perte de généralité,  $d_{i+1} \geq k_1^{(i)} - 1$ . Si  $d_{i+1} \geq k_1^{(i)}$ , alors, avec les mêmes manipulations que précédemment,

$$e_{d_{i+1}} E_{k_1^{(i)}}^{j_1^{(i)}} E_{k_2^{(i)}}^{j_2^{(i)}} \cdots E_{k_{r_i}^{(i)}}^{j_{r_i}^{(i)}} = (E_{k_1^{(i)}}^{d_{i+1}} E_{d_{i+1}+3}^{j_1^{(i)}}) (E_{k_2^{(i)}}^{d_{i+1}+2} E_{d_{i+1}+5}^{j_2^{(i)}}) \cdots (E_{k_{r_i}^{(i)}}^{d_{i+1}+2r_i-2} E_{d_{i+1}+2r_i+1}^{j_{r_i}^{(i)}}) e_{d_{i+1}+2r_i}.$$

Étant donné que  $k_1^{(i)} = k_1^{(i-1)} - 1$  et que  $k_1 = n - (\ell + 1) - 1 - (r_1 + s_1)$ , alors

$$k_1^{(i)} = n - (\ell + 1) - (r_1 + s_1) - i$$

ce qui montre que

$$d_{i+1} + 2r_i \geq k_1^{(i)} + 2r_i \geq k_1^{(i-1)} + 2.$$

Si  $s_i = 0$ , alors  $r_i > 0$  et par induction,

$$e_{d_{i+1}+2r_i} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_{i-1} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- \cdots \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_1 \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- = 0,$$

car  $d_{i+1}+2r_i \geq k_1^{(i-1)} - 1$ . Si  $s_i \neq 0$ , il y a deux cas possibles.

- Si  $n - (\ell + 1) + 1 + r_i + s_i \leq n - 1$ , alors  $e_{d_{i+1}+2r_i+2s_i}$  sera le terme résultant à droite lorsque les manipulations analogues à ci-dessus seront terminés. Ce générateur annule l'expression

$$\widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_{i-1} \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- \cdots \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^- w_1 \widehat{\mathbf{p}}_{\ell+1}^-$$

par induction, car  $d_{i+1}+2r_i+2s_i \geq k_1^{(i-1)} - 1$ .

- Si  $n - (\ell + 1) + 1 + r_i + s_i > n - 1$ , alors les manipulations comme ci-dessus feront apparaître une expression de la forme  $e_{n-1}e_n e_{n-1} = \beta_1 e_{n-1} = [\ell]_q e_{n-1} = 0$ , (ce qui annule l'expression) ou une expression de la forme  $e_n e_n = \beta_2 e_n$  (ce qui permet de recommencer le procédé avec le prochain générateur).

Donc, pour que l'expression soit non nulle, il faut supposer que  $d_{i+1} = k_1^{(i)} - 1$ .

Puisque  $k_1^{(i)} < d_i$ , pour que l'expression (4.7) soit non nulle, il est nécessaire que les entiers  $k_1^{(i)}$  forment une suite strictement décroissante. Si l'expression (4.7) est non nulle, il est nécessaire que

$$k_1^{(i)} \leq k_1^{(1)} - i + 1 = n - (\ell + 1) - i + 1$$

et donc, si  $N \geq n - \ell$ , alors  $k_1^{(N-1)} \leq k_1^{(1)} - (n - \ell) = 0$  ce qui est une contradiction puisque  $k_1^{(i)} \geq 1$  pour tout  $i$ . Il existe un  $N$  à partir duquel tous les mots de la forme 4.7 sont nuls. Donc, l'idéal est nilpotent. □

**Corollaire 4.16.** *L'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_{\bar{k}}$  est nilpotent si  $\bar{k} = \ell$  et il est idempotent sinon.*

Démonstration. Puisque  $\bar{k} \leq \ell$ , lorsque  $\bar{k} \neq \ell$ , le coefficient  $p_{\bar{k}+1}$  est non nul et le projecteur  $\frac{1}{p_{\bar{k}+1}} \widehat{\mathbf{p}}_{\bar{k}+1}^-$  est idempotent. Donc,  $(\widehat{\mathbf{J}}_{\bar{k}})^2 = \widehat{\mathbf{J}}_{\bar{k}}$ . □

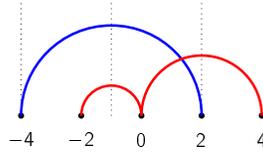
## 4.4. Structure de l'idéal $\widehat{\mathbf{J}}_{\ell}$

Puisque l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_{\ell}$  est nilpotent selon le lemme 4.15, la section 2.5 détermine exactement comment faire l'étude de l'algèbre  $\mathbf{b}_{n,\ell} = \text{TLb}_{n,\ell} / \widehat{\mathbf{J}}_{\ell}$  pour  $\ell < n$ . En effet, selon les résultats développés dans cette section, tous les  $\text{TLb}_{n,\ell}$ -modules simples sont aussi des  $\mathbf{b}_{n,\ell}$  modules simples et inversement. Plus généralement, pour déterminer les  $\mathbf{b}_{n,\ell}$ -modules projectifs indécomposables, il suffit de calculer  $\widehat{\mathbf{J}}_{\ell} \widehat{\mathbf{P}}_{n,j}$  et de calculer le quotient  $\widehat{\mathbf{P}}_{n,j} / \widehat{\mathbf{J}}_{\ell} \widehat{\mathbf{P}}_{n,j}$  pour chaque  $\text{TLb}_{n,\ell}$ -module projectif  $\widehat{\mathbf{P}}_{n,j}$ .

Bien que cette tâche soit suffisamment circonscrite, elle est arbitrairement difficile étant donné que la taille de la base de l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_{\ell}$  devient arbitrairement grande lorsque  $\ell$  est petit par rapport à  $n$ . Ceci est aussi dû au fait que les blocs de l'algèbre  $\text{TLb}_{n,\ell}$  ont une complexité relative au nombre de lignes critiques présentes dans le patron de morphismes. Pour beaucoup d'applications en physique, le comportement asymptotique d'une famille d'algèbres est suffisant pour pouvoir tirer des conclusions non triviales au sujet du modèle. Or, la valeur du paramètre  $q \in \mathbb{C}^{\times}$  doit être fixée pour permettre l'étude d'un modèle physique particulier. Ainsi, l'étude des algèbres de  $\mathbf{b}_{n,\ell=n-\epsilon}$  pour  $\epsilon$  fixé ne permet pas de tirer des conclusions physiques dans plusieurs contextes puisque la valeur de  $q$  change lorsque  $n$  grandit. Tout de même, les conclusions qu'il est possible de tirer de cette étude montrent que le cas général  $\mathbf{b}_{n,\ell}$  est non trivial.

#### 4.4.1. L'algèbre $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-1}$

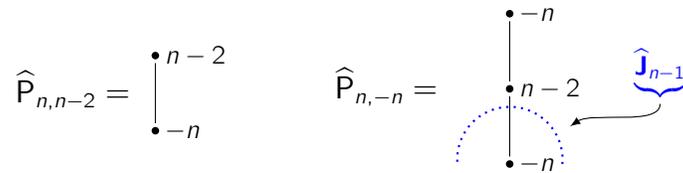
Selon le lemme 4.10, le patron stationnaire de cette algèbre apparaît pour  $\text{TLb}_{4,3}$ . Celui-ci a la forme



et ainsi, le patron de morphismes de  $\text{TLb}_{n,\ell=n-1}$  est toujours bâti à partir de celui-ci. La structure des projectifs  $\widehat{P}_{n,j}$  pour  $j = -n, -n+2, n-4, n-2, n$  est donc construite selon ce patron.

L'idéal  $\widehat{J}_{n-1}$  est de dimension  $\binom{2n}{0} = 1$ . Une base de celui-ci est  $\{\widehat{\mathbf{p}}_n^-\}$ . Puisque  $e_n \widehat{\mathbf{p}}_n^- = \beta_2 \widehat{\mathbf{p}}_n^- = [n]_q \widehat{\mathbf{p}}_n^-$  et que les deux seuls simples (non isomorphes) de dimension 1 sont  $\widehat{S}_{n,n}$  et  $\widehat{S}_{n,-n}$ , il s'en suit que  $\widehat{J}_{n-1} \simeq \widehat{S}_{n,-n}$ .

Par la décomposition de Peirce, il est nécessaire que  $\widehat{J}_{n-1} \widehat{P}_{n,j}$  soit nul excepté possiblement si  $\text{soc } \widehat{P}_{n,j} \simeq \widehat{S}_{n,-n}$  et  $\dim \text{top } \widehat{P}_{n,j} = 1$  étant donné que l'idéal  $\widehat{J}_{n-1}$  a dimension 1. Par les résultats de la section 3.4.2, le seul projectif respectant ces deux conditions est  $\widehat{P}_{n,-n}$ . Ceci donne donc, par le travail effectué à la section 2.5, une description complète des  $\mathfrak{b}_{n,n-1}$ -modules projectifs. En effet, les  $\mathfrak{b}_{n,n-1}$ -modules projectifs sont donnés par  $\widehat{P}_{n,j} / \widehat{J}_{n-1} \widehat{P}_{n,j}$  et le seul terme étant changé par le quotient est  $\widehat{P}_{n,-n}$ . Les diagrammes de Loewy des projectifs du bloc  $-n, n-2$  sont



La matrice de Cartan de cette algèbre correspond à la matrice de Cartan de l'algèbre  $\text{TLb}_{n,\ell=n-1}$  à l'exception du bloc  $2 \times 2$  associé aux projectifs  $\widehat{P}_{n,-n}$  et  $\widehat{P}_{n,n-2}$  qui devient

$$C_{\substack{\text{TLb}_{n,n-1} \\ \text{bloc affecté}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C_{\substack{\mathfrak{b}_{n,n-1} \\ \text{bloc affecté}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette algèbre ne peut pas être cellulaire car la matrice  $D$  de ce bloc  $2 \times 2$  aurait la forme

$$D^T D = \begin{pmatrix} 1 & d_{21} & d_{31} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & 1 & d_{32} & \dots & d_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \\ d_{21} & 1 \\ d_{31} & d_{32} \\ \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + d_{21}^2 + \sum_{i=3}^n d_{i1}^2 & d_{12} + d_{21} + \sum_{i=3}^n d_{i1} d_{i2} \\ d_{12} + d_{21} + \sum_{i=3}^n d_{i1} d_{i2} & 1 + d_{12}^2 + \sum_{i=3}^n d_{i2}^2 \end{pmatrix}$$

et pour qu'elle soit égale au bloc voulu, il est nécessaire d'imposer  $1 + d_{21}^2 + \sum_{i=3}^n d_{i1}^2 = 1$ , ce qui est vrai si et seulement si  $d_{i1} = 0$  pour tout  $i \neq 1$ . De même,  $1 + d_{12}^2 + \sum_{i=3}^n d_{i2}^2 = 1$  si et seulement si  $d_{i2} = 0$  pour tout  $i \neq 2$ . Donc,

$$D^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'algèbre n'est pas cellulaire.

Au chapitre 3, plusieurs théorèmes ont présentés des liens entre les différentes caractéristiques partagées par les familles d'algèbres venant de contextes physiques, c'est-à-dire les algèbres cellulaires, les algèbres quasi-héréditaires et les catégories de plus haut poids. L'une des caractéristiques reliées à ces différentes familles est celle de la dimension globale de l'algèbre. Il est facile de remarquer que la dimension globale de l'algèbre  $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-1}$  est infinie. En effet, le déterminant de la matrice de Cartan est nul (ce qui implique que la dimension globale est infinie, voir [Ass97]) et le simple  $\widehat{\mathcal{I}}_{n,-n}$  admet comme résolution projective minimale

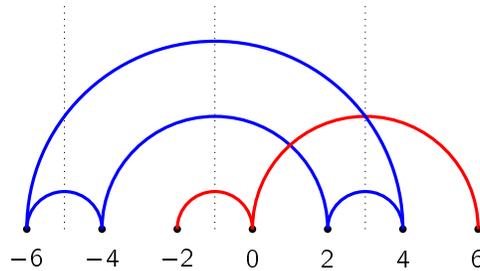
$$\dots \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_{n,n-2} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_{n,-n} / \text{soc } \widehat{\mathcal{P}}_{n,-n} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_{n,n-2} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}_{n,-n} / \text{soc } \widehat{\mathcal{P}}_{n,-n} \rightarrow \widehat{\mathcal{I}}_{n,-n} \rightarrow 0,$$

et celle-ci ne se stabilise jamais à 0. Il s'en suit que  $\text{dp } \widehat{\mathcal{I}}_{n,-n} = +\infty$  et conséquemment,  $\text{dim.gl. } \mathfrak{b}_{n,\ell=n-1} = +\infty$ .

**Corollaire 4.17.** *Pour  $n \geq 4$ , les algèbres  $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-1}$  ne sont pas cellulaires, ont dimension globale infinie et leurs projectifs indécomposables sont donnés par  $\widehat{\mathcal{P}}_{n,j}$  pour  $j \neq -n$  et  $\widehat{\mathcal{P}}_{n,-n} / \text{soc } \widehat{\mathcal{P}}_{n,-n}$ .*

#### 4.4.2. L'algèbre $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-2}$

Le patron de stationnaire de cette algèbre apparaît pour  $\text{TLb}_{6,4}$ . Celui-ci a la forme



et la dimension de l'idéal  $\widehat{\mathcal{J}}_{n-2}$  est  $\binom{2n}{1} = 2n$ . Selon le lemme 4.13, une base de l'idéal  $\widehat{\mathcal{J}}_{n-2}$  est

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_1)\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_2 e_1)\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_3 e_2 e_1)\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, \dots, (e_{n-1} \dots e_2 e_1)\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1)\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, \\ \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1), \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1 e_2), \dots, \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1 e_2 \dots e_{n-1}).$$

et par le lemme 2.20,

$$e_1 \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^- e_1 = -c_1^n \widehat{\mathfrak{p}}_{n-2}^- e_1 = 0$$

car, selon la définition des constantes  $c_1^j$ ,  $\delta_j$  et  $a_j$ ,

$$c_1^n = (-1)^{n-1} \delta_{n-1} = (-1) a_{-n+1} = 0$$

étant donné qu'il y a une ligne critique en  $-n + 1$ . Donc, sur l'ensemble des vecteurs

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1), \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1 e_2), \dots, \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-(e_1 e_2 \dots e_{n-1}),$$

tous les  $e_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  agissent par l'action à gauche comme 0 et  $e_n$  agit comme la multiplication par  $\beta_2$ . De plus, il est impossible d'agir à gauche sur  $\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$  avec les générateurs pour obtenir un élément de la forme  $\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^- e_1$ . Conséquemment, le  $\text{TLb}_{n,n-2}$ -module à gauche  $\widehat{\mathcal{S}}_{n,-n}^{\oplus n-1}$  est un facteur direct de  $\widehat{\mathcal{J}}_{n-2}$ .

Les vecteurs

$$\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_3 e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, \dots, (e_{n-1} \dots e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$$

forment donc un sous-module. De plus, lorsque  $e_1$  est multiplié à gauche de  $\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$ , il est impossible de concaténer des générateurs à gauche de  $e_1 \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$  pour éliminer  $e_1$ . Donc,

$$(e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_3 e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, \dots, (e_{n-1} \dots e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-, (e_n e_{n-1} \dots e_2 e_1) \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$$

forme aussi un sous-module. Celui-ci est isomorphe à  $\widehat{\mathcal{S}}_{n,-(n-2)}$  et l'isomorphisme est donné par

$$e_1 \widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^- \mapsto \begin{array}{c} \mathfrak{b} \\ \hline \hline \vdots \\ \hline \hline \end{array} .$$

Donc, en tant que module à gauche,  $\widehat{\mathcal{J}}_{n-2} \simeq \widehat{\mathcal{S}}_{n,-n}^{\oplus n-1} \oplus V$ , où  $V$  vérifie la suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}_{n,-(n-2)} \rightarrow V \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}_{n,-n} \rightarrow 0$$

puisque  $e_n$  agit comme la multiplication par  $\beta_2$  sur  $\widehat{\mathfrak{p}}_{n-1}^-$ .

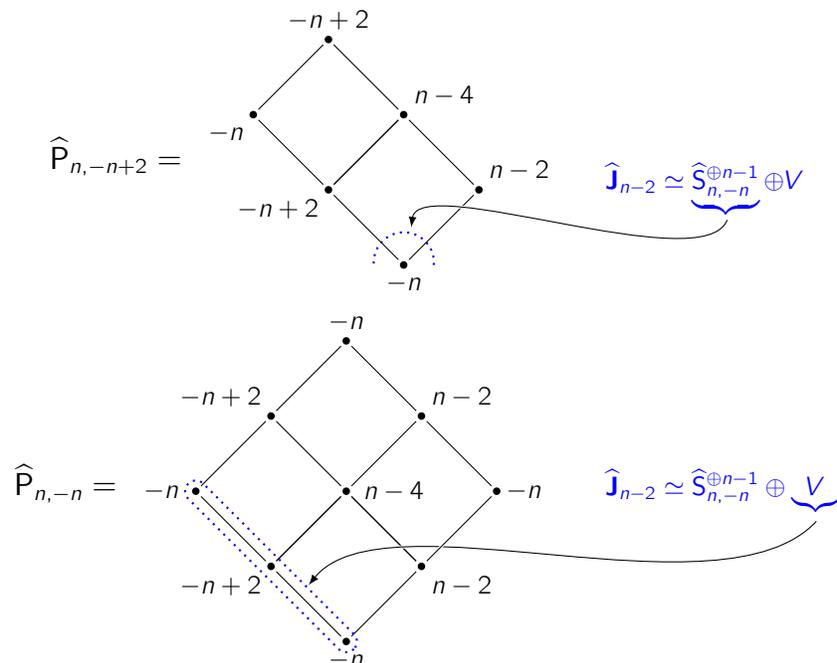
Pour identifier les  $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-2}$ -modules projectifs, il faut déterminer les  $\text{TLb}_{n,\ell=n-2}$ -modules projectifs ayant  $\widehat{\mathcal{S}}_{n,-(n-2)}$  ou  $\widehat{\mathcal{S}}_{n,-n}$  dans leur radical ainsi que la multiplicité avec laquelle ces modules projectifs apparaissent dans la représentation régulière. Le module  $\widehat{\mathcal{S}}_{n,-(n-2)}$  n'est pas simple et il possède deux facteurs de composition, à savoir  $\widehat{\mathcal{I}}_{n,-n}$  et  $\widehat{\mathcal{I}}_{n,-(n-2)}$ . Donc, il faut déterminer la dimension des modules simples  $\widehat{\mathcal{I}}_{n,-n}$  et  $\widehat{\mathcal{I}}_{n,-(n-2)}$ . Selon la structure du patron

stationnaire,

$$\begin{aligned} \dim \widehat{I}_{n,n-2} &= n - 1, \\ \dim \widehat{I}_{n,n-4} &= \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 2), \\ \dim \widehat{I}_{n,-n+2} &= n - 1, \\ \dim \widehat{I}_{n,-n} &= 1. \end{aligned}$$

Par la décomposition de Peirce de l'algèbre, les projectifs  $\widehat{P}_{n,-n}$ ,  $\widehat{P}_{n,-n+2}$ ,  $\widehat{P}_{n,n-4}$  et  $\widehat{P}_{n,n-2}$  apparaissent avec la multiplicité correspondant à la dimension de leur coiffe.

Puisque qu'il n'apparaît qu'une seul fois, qu'il soit indécomposable ou non, le module  $V$  doit être un sous-module de  $\widehat{P}_{n,-n}$ . Les  $n - 1$  copies du modules  $\widehat{S}_{n,-n}$  doivent être des sous-modules d'un des deux projectifs ayant multiplicité  $n - 1$ , c'est-à-dire qu'ils seront tous des sous-modules de  $\widehat{P}_{n,-n+2}$  ou de  $\widehat{P}_{n,n-2}$ . L'argument dimensionnel ne permet pas de conclure exactement dans lequel de ces deux modules se situe  $\widehat{S}_{n,-n}$ . D'un point de vue de la matrice de Cartan de l'algèbre, les deux simples  $\widehat{I}_{n,-n+2}$  et  $\widehat{I}_{n,n-2}$  sont interchangeables (tout comme leurs couvertures projectives). Donc, il est possible de supposer sans perte de généralité que l'idéal  $\widehat{J}_{n-2}$  se trouve dans le radical de  $\widehat{P}_{n,-n+2}$ . Par exemple, si la structure des projectifs d'un bloc non critique ayant 4 modules simples respecte le premier cas de la section 3.4.2, alors les deux projectifs affectés sont :



La matrice de Cartan du bloc affecté par le quotient est donc

$$C_{\substack{\text{TLb}_{n,n-2} \\ \text{bloc affecté}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et lors du passage au quotient, elle devient

$$C_{\substack{\text{b}_{n,n-2} \\ \text{bloc affecté}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si  $D$  s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 1 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 1 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 1 \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & d_{n4} \end{pmatrix}$$

alors, si pour le bloc problématique l'équation  $D^T D = C_{\text{b}_{n,n-2}}$  est respectée, le fait que l'élément  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{11} = 1$  force la condition  $d_{i1} = 0$  pour tout  $i \neq 1$ . Ainsi, puisque  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{1i} = 1$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ , il est nécessaire que  $d_{12} = d_{13} = d_{14} = 1$ . De plus, puisque  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{22} = 2$ , alors  $d_{i2} = 0$  pour tout  $i \neq 1, 2$ . Cette même condition, mais pour  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{33} = 2$ , force  $d_{i3} = 0$  pour  $i \neq 1, 3$ . Donc,  $d_{24} = 0$  et  $d_{34} = 1$  car  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{24} = 1$  et  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{34} = 2$ . Dans un tel cas,

$$(D^T D)_{44} = 3 + \sum_{i=5}^n d_{i4}^2 > 2$$

ce qui est impossible puisque  $(C_{\text{b}_{n,n-2}})_{44} = 2$ . Donc, l'algèbre  $\text{b}_{n,n-2}$  n'est pas cellulaire.

Le déterminant du bloc affecté de  $\text{b}_{n,n-2}$  est 0 et conséquemment,  $\det C_{\text{b}_{n,n-2}} = 0$ . Il s'en suit que  $\text{b}_{n,n-2}$  n'a pas dimension globale finie car sinon, le déterminant de sa matrice de Cartan serait  $\pm 1$  (voir [Ass97]).

**Corollaire 4.18.** *Pour  $n \geq 6$ , les algèbres  $\text{b}_{n,\ell=n-2}$  ne sont pas cellulaires et n'ont pas dimension globale finie.*

## 4.5. Conclusion : Le cas général $\mathfrak{b}_{n,\ell}$

Les sections précédentes ont utilisé la plupart des résultats ayant été démontrés dans ce mémoire. Le chapitre 2 a permis de définir les projecteurs de Wenzl-Jones généralisés (voir la définition 2.18) et d'étudier leurs propriétés. Ceux-ci ont ensuite servi à redéfinir les algèbres à couture et à mieux comprendre la relation de fermeture permettant d'obtenir les algèbres à couture comme un quotient des algèbres à une frontière. Le chapitre 2 a aussi étudié les éléments centraux des algèbres  $\mathrm{TLb}_n$ . Même s'ils n'ont pas eu de conséquences théoriques directes sur l'étude de  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$ , ceux-ci se sont avérés utiles lors de l'établissement de certaines conjectures (qui plus tard sont devenues des théorèmes) puisqu'ils ont facilité la décomposition de la représentation régulière de  $\mathrm{TLb}_n$  et de  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$  lors d'expériences numériques.

Comme les derniers résultats ont su l'illustrer, la théorie de la représentation des algèbres à couture exceptionnelles est intimement liée à la théorie de la représentation des algèbres à une frontière. Les résultats du chapitre 3 sont donc d'une importance capitale pour ce mémoire puisque qu'ils ont permis de déterminer plus en détails la théorie de la représentation des algèbres  $\mathrm{TLb}_{n,\ell}$ . Entre autres, le calcul des patrons de morphismes et de la structure des projectifs indécomposables (pour certains cas) s'est révélée comme étant une étape cruciale de la résolution du problème initial.

En somme, le quatrième chapitre consiste en une application directe des deux chapitres précédents, mais un contexte catégorique bien particulier. En effet, l'interprétation de la catégorie  $\mathrm{mod}(A/I)$  comme la sous-catégorie pleine des modules étant annulés par  $I$  a été la remarque ayant permis d'étudier les algèbres à couture exceptionnelles puisque l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  s'est révélé particulièrement facile à étudier. Le fait qu'il soit nilpotent a permis de distinguer le cas exceptionnel des autres cas et de faire l'étude des projectifs indécomposables et des simples aisément. Or, la structure de cet idéal s'avère toujours mal comprise dans le cas général.

Ce mémoire ne présente pas la résolution totale du problème de la théorie de la représentation de  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$ . Par contre, l'ensemble des résultats qui y ont été présentés peuvent servir à la résolution du problème général. Quelques commentaires sont tout de même nécessaires pour clore cet ouvrage.

Puisque qu'il a été démontré que l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  est nilpotent au lemme 4.15, il est possible de décrire tous les  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$ -modules simples étant donné le travail fait à la section 2.5.

**Théorème 4.19.** *Une collection complète des classes d'isomorphismes des  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$ -modules simples est donnée par les  $\mathrm{TLb}_{n,\ell}$ -modules  $\widehat{\mathbf{I}}_{n,j}$  pour  $-n \leq j \leq n$  et  $j \equiv_2 n$ .*

L'une des grandes obstructions au problème général est la description de la base de l'idéal  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$ . Le lemme 4.13 n'offre pas un étiquetage prenant en compte la structure de module de l'idéal. Des récents développements à ce sujet semblent indiquer qu'il est possible d'organiser la base de  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  de telle sorte que la décomposition de  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  en modules indécomposables soit directement visible par l'étiquetage. L'une des conséquences de cet étiquetage est qu'il apparaît évident que le module  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  possède une filtration telle que les quotients sont cellulaires.

**Conjecture 4.20.** *Soit  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell \subset \text{TLb}_{n,\ell}$ . Il existe une suite de  $\text{TLb}_{n,\ell}$ -modules à gauche*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = \widehat{\mathbf{J}}_\ell$$

telle que pour chaque quotient successif,  $M_i/M_{i-1} \simeq \widehat{\mathbf{S}}_{n,j_i}$  pour un certain  $j_i$ .

De plus, les expériences récentes semblent indiquer que les facteurs directs indécomposables de  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$  se comportent selon un certain produit de fusion (voir [RSA14] pour la définition de restriction et d'induction et [Bel15], [BSA18] pour des exemples de fusion). En effet, puisque si  $m < n$ ,  $\widehat{\mathfrak{p}}_m \subset \text{Im } \iota_{n,m}$  et

$$\text{TL}_{n-m} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{\mathbf{S}}_{m,-m}$$

possède une structure de  $\text{TLb}_{n,k}$ -module à gauche où  $e_i$  agit sur  $\text{TL}_{n-m}$  si  $1 \leq i \leq n-m-1$  et agit sur  $\widehat{\mathbf{S}}_{m,-m}$  si  $n-m+1 \leq i \leq n$ . L'action de  $e_{n-m}$  est définie comme agissant librement. Le  $\text{TLb}_{n,\ell}$ -module à gauche

$$\text{TLb}_{n,\ell} \otimes_{\text{TL}_{n-(\ell+1)}} \otimes_{\mathbb{C}} \text{TLb}_{\ell+1,\ell} \text{TL}_{n-(\ell+1)} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{\mathbf{S}}_{\ell+1,-(\ell+1)}$$

partage des propriétés analogues à l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$ .

L'analyse dimensionnelle utilisée pour les deux cas  $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-1}$  et  $\mathfrak{b}_{n,\ell=n-2}$  ne permet pas de conclure dans le second cas où se situe explicitement l'idéal  $\widehat{\mathbf{J}}_\ell$ . Ceci est dû au fait que  $\widehat{\mathbf{P}}_{n,-n+2}$  et  $\widehat{\mathbf{P}}_{n,n-2}$  possèdent une coiffe de même dimension et un radical similaire. Comme le permet de voir le patron de morphismes, cet obstacle apparaît dans tous les cas de la forme  $\mathfrak{b}_{n,n-2\varepsilon}$  pour  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ . Par contre, les autres cas sont plus propices à une analyse dimensionnelle.

Dans tous les cas ayant été analysés ici et dans toutes les expériences numériques qui ont été menées, la conjecture suivante a été vérifiée.

**Conjecture 4.21.** *La famille exceptionnelle des algèbres à couture  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$  n'est pas cellulaire et a dimension globale infinie.*

Cette conjecture explique partiellement les difficultés encourues par Morin-Duchesne, Rasmussen, Ridout [MDRR15] lors du traitement des algèbres  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$  puisque les techniques employées pour analyser celles-ci se fondaient majoritairement sur la théorie des algèbres cellulaires. Ainsi, ce mémoire démontre que, dans plusieurs cas (et possiblement tous si la conjecture précédente est vraie), la famille exceptionnelle  $\mathfrak{b}_{n,\ell}$  ne sera pas une famille d'algèbres cellulaires.

# Bibliographie

---

- [Ass97] Ibrahim Assem : Algèbres et Modules : Cours et Exercices. Masson, 1997.
- [ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski et Daniel Simson : Elements of the Representation Theory of Associative Algebras : Volume 1 : Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press, 65, 2006.
- [Bel15] Jonathan Belletête : The Fusion Rules for the Temperley-Lieb Algebra and its Dilute Generalization. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 48(39):395205, 2015.
- [BGJ<sup>+</sup>18] Jonathan Belletête, Azat M Gainutdinov, Jesper L Jacobsen, Hubert Saleur et TS Tavares : Topological Defects in Lattice Models and Affine Temperley-Lieb Algebra. arXiv preprint arXiv :1811.02551, 2018.
- [BK09] Jonathan Brundan et Alexander Kleshchev : Blocks of Cyclotomic Hecke Algebras and Khovanov-Lauda Algebras. Inventiones mathematicae, 178(3):451, 2009.
- [BRSA17] Jonathan Belletête, David Ridout et Yan Saint-Aubin : Restriction and Induction of Indecomposable Modules over the Temperley-Lieb Algebras. Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, 51(4):45–201, 2017.
- [BSA18] Jonathan Belletête et Yan Saint-Aubin : On the Computation of Fusion Over the Affine Temperley-Lieb Algebra. Nuclear Physics B, 937:333–370, 2018.
- [CMPX06] Anton Cox, Paul Martin, Alison Parker et Changchang Xi : Representation Theory of Towers of Recollement : Theory, Notes, and Examples. Journal of Algebra, 302(1):340–360, 2006.
- [CPS88] Edward Cline, Brian Parshall et Leonard Scott : Finite Dimensional Algebras and Highest Weight Categories. J. reine angew. Math, 391(2):85–99, 1988.
- [DGN09] Jan De Gier et Alexander Nichols : The Two-Boundary Temperley-Lieb Algebra. Journal of Algebra, 321(4):1132–1167, 2009.
- [DR89] Vlastimil Dlab et Claus Michael Ringel : Quasi-Hereditary Algebras. Illinois Journal of Mathematics, 33(2), 1989.
- [DR92] Vlastimil Dlab et Claus Michael Ringel : The Module Theoretical Approach to Quasi-Hereditary Algebras. Representations of algebras and related topics, 1992.
- [GL96] John J Graham et Gus I Lehrer : Cellular Algebras. Inventiones Mathematicae, 123:1–34, 1996.
- [GL97] John J Graham et Gus I Lehrer : The Representation Theory of Affine Temperley-Lieb Algebras. Research report : mathematics research report/Centre for mathematics and its applications (Canberra), 1997.

- [GL04] John J Graham et Gus I Lehrer : Cellular Algebras and Diagram Algebras in Representation Theory. Representation theory of algebraic groups and quantum groups, pages 141–173, 2004.
- [Gre98] Richard M Green : On Representations of Affine Temperley–Lieb Algebras. CMS Conf. Proc., 24: 245–261, 1998.
- [HMP18] Amit Hazi, Paul Martin et Alison Parker : Indecomposable Tilting Modules for the Blob Algebra. arXiv preprint arXiv :1809.10612, 2018.
- [HT18] Léonard Houde Therrien : Théorie de la Représentation de l’Algèbre de Temperley-Lieb à une Frontière. Mémoire de D.E.A., Université de Montréal, 2018.
- [Jon83] Vaughan F R Jones : Index for Subfactors. Inventiones mathematicae, 72:1–25, 1983.
- [Kau90] Louis H Kauffman : An Invariant of Regular Isotopy. Transactions of the American Mathematical Society, 318(2):417–471, 1990.
- [KK99] Michael Klucznik et Steffen König : Characteristic Tilting Modules over Quasi-Hereditary Algebras. Univ., 1999.
- [KLL94] Louis H Kauffman, Sóstenes L Lins et Sóstenes Lins : Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds. Princeton University Press, (134), 1994.
- [KX96] Steffen König et Changchang Xi : On the Structure of Cellular Algebras. Algebras and Modules II, CMS Conference Proceedings, 1996.
- [KX99] Steffen König et Changchang Xi : When is a Cellular Algebra Quasi-Hereditary? Mathematische Annalen, 315(2):281–293, 1999.
- [LRSA20] Alexis Langlois-Rémillard et Yvan Saint-Aubin : The Representation Theory of Seam Algebras. SciPost Physics, 8(2):19, 2020.
- [Mar91] Paul Purdon Martin : Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics. World Scientific, 5, 1991.
- [Mat99] Andrew Mathas : Iwahori-Hecke Algebras and Schur Algebras of the Symmetric Group. American Mathematical Soc., 15, 1999.
- [MD17] Alexi Morin-Duchesne : Communication privée, 2017.
- [MDRR15] Alexi Morin-Duchesne, Jørgen Rasmussen et David Ridout : Boundary Algebras and Kac Modules for Logarithmic Minimal Models. Nuclear Physics B, 899:677–769, 2015.
- [MDSA11] Alexi Morin-Duchesne et Yvan Saint-Aubin : The Jordan Structure of Two-Dimensional Loop Models. Journal of Statistical Mechanics : theory and experiment, 2011(04):P04007, 2011.
- [MS94] Paul Martin et Hubert Saleur : The Blob Algebra and the Periodic Temperley-Lieb Algebra. Letters in mathematical physics, 30(3):189–206, 1994.
- [PRH14] David Plaza et Steen Ryom-Hansen : Graded Cellular Bases for Temperley-Lieb Algebras of Type A and B. Journal of Algebraic Combinatorics, 40(1):137–177, 2014.
- [RSA14] David Ridout et Yvan Saint-Aubin : Standard Modules, Induction and the Structure of the Temperley-Lieb Algebra. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 18(5):957–1041, 2014.
- [Sco87] Leonard Scott : Simulating Algebraic Geometry with Algebra I : The Algebraic Theory of Derived Categories. The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, 1986), Proc. Symp. Pure Math, 47(2):271–281, 1987.

- [TL71] Harold NV Temperley et Elliott H Lieb : Relations Between the 'Percolation' and 'Colouring' Problem and Other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices : Some Exact Results for the 'Percolation' Problem. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 322(1549):251–280, 1971.
- [Wen90] Hans Wenzl : Hecke Algebras of Type  $A_n$  and Subfactors. New Developments In The Theory Of Knots, 11:420, 1990.
- [Xi06] Changchang Xi : Cellular Algebras. Advanced School and Conference on Representation Theory and Related Topics, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, 100875, 2006.