

Université de Montréal

Polylogarithmes et mesure de Mahler

par

Jarry GU

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

8 septembre 2020

© Jarry GU, 2020

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Polylogarithmes et mesure de Mahler

présenté par

Jarry GU

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Dimitris Koukoulopoulos

(président-rapporteur)

Matilde Lalín

(directrice de recherche)

Abraham Broer

(membre du jury)

Résumé

Le but principal de ce mémoire est de calculer la mesure de Mahler logarithmique d'une famille de polynômes à trois variables $x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$. Pour réaliser cet objectif, on intègre des régulateurs définis sur des complexes motiviques polylogarithmiques. Pour comprendre ces régulateurs, on explore les propriétés des polylogarithmes et démontre quelques identités polylogarithmiques. Ensuite, on utilise les régulateurs afin de simplifier l'intégrante. Notre résultat est une formule qui relie la mesure de Mahler de la famille de polynômes susmentionnée au dilogarithme de Bloch–Wigner et à la fonction zêta de Riemann.

Mots-clés : mesure de Mahler, polylogarithme, dilogarithme, régulateur, complexe motivique polylogarithmique

Abstract

The main purpose of this thesis is to compute the logarithmic Mahler measure of the three variable polynomial family $x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$. In order to accomplish this, we integrate regulators defined on polylogarithmic motivic complexes. To understand these regulators, we explore the properties of polylogarithms and show some polylogarithmic identities. The regulators are then applied to simplify the integrand. Our result is a formula relating the Mahler measure of the family of polynomials to the Bloch–Wigner Dilogarithm and the Riemann zeta function.

Keywords. Mahler measure, polylogarithm, dilogarithm, regulator, polylogarithmic motivic complex

Table des matières

Résumé	5
Abstract	7
Liste des tableaux	11
Table des figures	13
Remerciements	15
Introduction	17
Chapitre 1. Le polylogarithme et ses propriétés de base	21
1.1. Introduction au polylogarithme	21
1.2. Équations fonctionnelles pour $D_n(z)$ et $\mathcal{L}_n(z)$	26
1.3. Quelques identités du dilogarithme et du trilogarithme	31
1.4. La démonstration du théorème 1.1.10	36
1.5. La relation des cinq termes	39
1.6. Une égalité des dilogarithmes associée à un triangle du plan	45
Chapitre 2. Complexes motiviques polylogarithmiques et régulateurs	53
2.1. Complexes motiviques polylogarithmiques	53
2.2. Régulateur de Goncharov	58
Chapitre 3. La mesure de Mahler	65
3.1. La mesure de Mahler des polynômes à une variable	65
3.2. La mesure de Mahler des polynômes à plusieurs variables	70
Chapitre 4. La computation de la mesure de Mahler à l'aide de régulateur	79
4.1. Le cas à deux variables	79

4.2. Un exemple au cas à deux variables	81
4.3. Le cas à trois variables	85
4.4. L'exemple de $x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$	86
4.4.1. L'exactitude de f	87
4.4.2. La frontière $\partial\Gamma$	88
4.4.3. L'analyse de Δ sur $\partial\Gamma$	92
4.4.3.1. Sur $T_1 : y = -1$	93
4.4.3.2. Sur $T_2 : x^n + 1 = 0$	93
4.4.3.3. Sur $T_3 : x^{n-1} + 1 = 0$	96
4.4.3.4. Sur $T_4 : x + y = 0$	96
4.4.3.5. La combinaison des ensembles T_1 et T_4	97
4.4.4. L'intégration sur $\partial\Gamma$	99
4.4.4.1. Sur T_1 et T_4	100
4.4.4.2. Sur T_2	102
4.4.4.3. Sur T_3	103
4.4.5. Le résultat de l'intégration	104
Conclusion	107
Références bibliographiques	109

Liste des tableaux

1.1	Les premiers nombres de Bernoulli.....	25
4.1	Les arguments de x et de y sur les portions de $\partial\Gamma$	90
4.2	L'orientation d'intégration sur $\partial\Gamma$	90

Table des figures

1.1	Le parcours d'intégration γ_z	22
1.2	Une illustration du triangle $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$ donné dans le théorème 1.6.1.....	45
3.1	Une illustration du triangle $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$	73
3.2	Le parcours d'intégration γ	75
4.1	$x \in \mathbb{C}$ avec $(x, -b_1 - b_2x) \in \gamma$	82
4.2	Le triangle avec des sommets $x, 0$ et $-\frac{b_1}{b_2}$	84
4.3	Le parcours d'intégration où $n = 3$	91
4.4	Le parcours d'intégration où $n = 4$	92

Remerciements

Je remercie par la présente D^r Weiye WANG, mon enseignant des mathématiques au lycée, qui m'a mené dans le monde de mathématiques et m'a donné beaucoup de conseils sur le cheminement de la recherche en mathématiques pures. J'apprécie aussi tous les efforts déployés par P^{re} Matilde LALÍN, ma directrice de recherche, sans l'aide de qui je n'aurais pas pu finir ce mémoire de recherche et m'avancer dans ce domaine de la théorie de nombres. Il y a d'autres personnes à qui je dois reconnaissance pendant ma rédaction. À M. Michael GAO pour avoir aidé avec la vérification grammaticale, à D^r Ruizhang JIN et à M. Runkai TAO pour avoir donné leur soutien moral.

J'aurais aimé ajouter quelques phrases dans d'autres langues ici, mais je ne pense pas que MIFI apprécierait le geste.

Introduction

La mesure de Mahler des polynômes à variable unique est une fonction de hauteur qui est reliée aux racines du polynôme donné. Elle fut étudiée pour la première fois par Lehmer dans [Leh33] sous le contexte de la recherche de grands nombres premiers. On trouve avec la formule de Jensen dans l'analyse complexe que la mesure de Mahler peut être exprimée par une intégration. Il semble très naturel de se demander si l'on peut étendre la mesure de Mahler aux polynômes à plusieurs variables ou aux fonctions rationnelles non nulles. Mahler a défini dans [Mah62] que

Définition. Soit $f \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ une fonction rationnelle non nulle à n variables. Alors la mesure de Mahler logarithmique de f est

$$m(f) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \log |f(t_1, \dots, t_n)| \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n},$$

où $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ est le n -tore.

Dans [Smy81b] et dans [Boy81], Smyth et Boyd ont respectivement constaté que les formules explicites de la mesure de Mahler à plusieurs variables peuvent être liées à la fonction zêta de Riemann et à la fonction L de Dirichlet. Deninger a découvert dans [Den97] que l'on peut évaluer la mesure de Mahler avec des régulateurs. Il a prédit l'apparition de valeurs spéciales des fonctions L après avoir appliqué des conjectures de Beilinson sur les régulateurs. Boyd a ensuite trouvé numériquement dans [Boy98] que l'on peut exprimer des valeurs explicites de la mesure de Mahler avec la fonction L associée aux objets algébriques-géométriques comme les courbes elliptiques. Goncharov, dans [Gon02], a construit les régulateurs qui coïncident avec ceux utilisés par Deninger et a étudié leur propriétés. Dans ce mémoire nous allons trouver une famille en trois variables de formules explicites de la mesure de Mahler. Notre but principal est d'utiliser les régulateurs pour montrer

Théorème 1.

$$\begin{aligned} & m(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z) \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) - \frac{1}{(n - 1)\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \left(12 - \frac{3}{n(n-1)} \right) \zeta(3),$$

où $\zeta(\cdot)$ dénote la fonction zêta de Riemann.

Pour comprendre cette formule, il faut savoir ce qu'est le dilogarithme de Bloch–Wigner, dénoté par $D(\cdot)$. Cette fonction vient du polylogarithme, qui est une famille de fonctions définies par

$$\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$$

et

$$\text{Li}_{n+1}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{\text{Li}_n(t)}{t} dt,$$

pour $n \in \mathbb{N}$, où γ_z est un parcours de 0 à z qui ne traverse pas la coupure du logarithme. En raison du fait que le logarithme n'est pas une fonction continue, on trouve qu'une modification par Zagier des polylogarithmes

$$\mathcal{L}_n(z) = \text{Re}_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| \text{Li}_{n-k}(z) \right),$$

où B_k est le k -ième nombre de Bernoulli et Re_n dénote Re si n est impair et Im si n est pair, est très utile. Le dilogarithme de Bloch–Wigner est la fonction

$$D(z) = \mathcal{L}_2(z).$$

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on va explorer les propriétés du polylogarithme. Ce chapitre peut être divisé en trois parties. La première partie se compose des sections 1.1 à 1.4, où on démontre

Théorème 2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$ ni 1. Alors

$$\mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3(1-z^{-1}) = \mathcal{L}_3(1) = \zeta(3),$$

par une méthode élémentaire. Cette égalité a été proposée par Goncharov dans [Gon95], et démontrée avec la configuration de géométrie. On vérifie ici ses travaux par la computation fondamentale.

La section 1.5 est la deuxième partie du chapitre 1, où on démontre la relation de cinq termes avec le dilogarithme de Bloch–Wigner.

La troisième partie, composée de la section 1.6, comprend la démonstration d'une égalité sur le dilogarithme de Bloch–Wigner dans les triangles du plan. Pour un triangle du plan $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $|A_2A_3| = a_1$, $|A_3A_1| = a_2$ et $|A_1A_2| = a_3$ et que $\widehat{A_3A_1A_2} = \varphi_1$,

$\widehat{A_1 A_2 A_3} = \varphi_2$ et $\widehat{A_2 A_3 A_1} = \varphi_3$, cette section vise à prouver que

$$D\left(\frac{a_r}{a_s} e^{i\varphi t}\right) = \frac{1}{2}\left(D\left(e^{2i\varphi_1}\right) + D\left(e^{2i\varphi_2}\right) + D\left(e^{2i\varphi_3}\right)\right).$$

On va introduire les régulateurs qui seront utilisés dans le chapitre 2. On suit ce que Goncharov a fait dans [Gon94], [Gon95] et [Gon02], et fournit les propriétés utiles de ces régulateurs susmentionnées.

On définira la mesure de Mahler pour les polynômes à variable unique, pour les polynômes à plusieurs variables et pour les fonctions rationnelles dans le troisième chapitre. On va aussi donner quelques valeurs explicites de la mesure de Mahler des polynômes à plusieurs variables, et calculer

$$m(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

d'une manière élémentaire.

Le dernier chapitre s'agit de l'intégration à l'aide du régulateur pour la computation de la mesure de Mahler. On s'occupe de la théorie et de l'application de cette méthode sur deux variables à la section 4.1. Dans la section 4.2 on va calculer encore une fois la mesure $m(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$ en montrant la simplicité de l'intégration avec les régulateurs. La théorie de l'intégration sur trois variables sera présentée dans la section 4.3, et on va enfin faire la computation de

$$m\left(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z\right)$$

dans la section 4.4.

Chapitre 1

Le polylogarithme et ses propriétés de base

Dans ce chapitre, on introduit le polylogarithme et démontre ses propriétés principales. On se concentrera sur les équations fonctionnelles que le polylogarithme satisfait. Ces équations fonctionnelles seront très utiles en calculant des valeurs explicites de la mesure de Mahler.

1.1. Introduction au polylogarithme

Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, considérons les séries

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}. \quad (1.1.1)$$

Notamment, si $n = 1$, on sait de la théorie des séries de Taylor que

$$f_1(z) = -\log(1 - z). \quad (1.1.2)$$

On a aussi la relation d'intégration pour tout $n \geq 1$:

$$f_{n+1}(z) = \int_0^z \frac{f_n(t)}{t} dt. \quad (1.1.3)$$

Les fonctions $\{f_n\}$ sont définies dans la région $|z| < 1$, mais (1.1.2) nous suggère que l'on peut prendre $-\log(1 - z)$ comme une extension analytique de f_1 . Rappelons-nous que le logarithme est une fonction multivaluée dans \mathbb{C} , alors, pour que $-\log(1 - z)$ soit bien définie, il faut en choisir une branche. On prend ici la branche principale, c'est-à-dire

$$\log(re^{i\varphi}) = \log(r) + i\varphi \text{ pour } r > 0 \text{ et } -\pi < \varphi \leq \pi.$$

De plus, pour tout $n > 1$, on peut garder les relations d'intégration, à condition que l'on fixe un parcours d'intégration pour chaque $z \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, définissons

$$\text{Li}_1(z) = -\log(1 - z),$$

où le logarithme prend la branche principale, et pour $z \in \mathbb{C}$, soit

$$\text{Li}_{n+1}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{\text{Li}_n(t)}{t} dt,$$

où γ_z représente le parcours de 0 à z suivant

- le cercle $1 - e^{i\theta}$ de $\theta = 0$ à $\theta = \varphi$, puis
- la ligne $1 - te^{i\varphi}$ de $t = 1$ à $t = r$,

si l'on écrit $z = 1 - re^{i\varphi}$ avec $r \geq 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Au cas où $z = 1$, on prend directement le segment de 0 à 1 comme le parcours d'intégration.

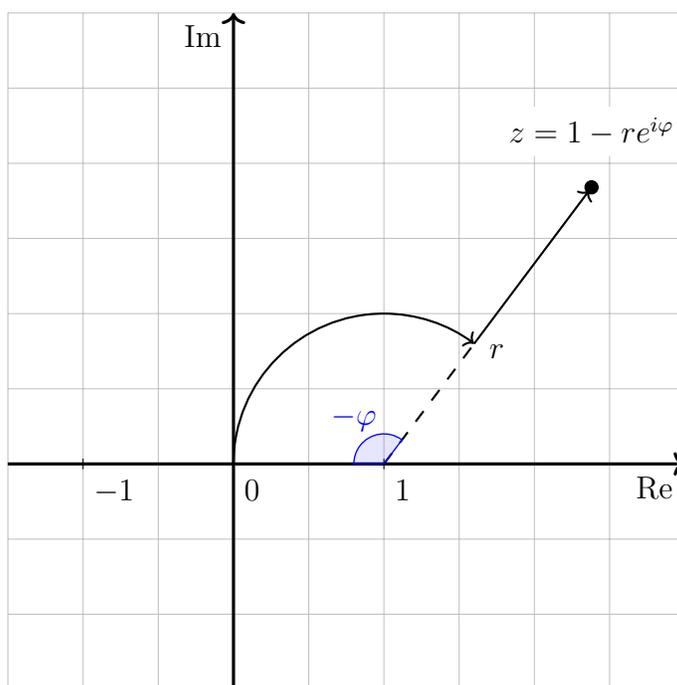


Figure 1.1. Le parcours d'intégration γ_z .

La fonction $\text{Li}_n(z)$ est appelée le polylogarithme d'ordre n . Quand $n = 2$ et $n = 3$ la fonction est aussi appelée le dilogarithme et le trilogarithme, respectivement.

Remarque 1.1.2. À cause de la coupure du logarithme, on voit que $\text{Li}_1(z)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_{>1}$, puis $\text{Li}_n(z)$ n'y est pas continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Néanmoins, on peut toujours prendre un autre parcours d'intégration tant que le parcours ne traverse pas $\mathbb{R}_{>1}$.

On voit que $\text{Li}_n(z)$ préserve les égalités (1.1.2) et (1.1.3), donc on a

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \tag{1.1.4}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Alors pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \text{Li}_n(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_n(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \zeta(n), \end{aligned}$$

où $\zeta(\cdot)$ dénote la fonction zêta de Riemann.

De plus, l'égalité (1.1.4) nous garantit aussi l'identité suivante des polylogarithmes.

Théorème 1.1.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$. Alors

$$\text{Li}_n(z) = m^{n-1} \sum_{x^m=z} \text{Li}_n(x).$$

DÉMONSTRATION. Soit $|z| < 1$, et soit y une m -ième racine de z . Alors

$$\sum_{x^m=z} \text{Li}_n(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \text{Li}_n(y\xi_m^l).$$

Ici ξ_m dénote la n -ième racine primitive d'unité. Puisque $|x| < 1$, on a $|y| < 1$. Ainsi on peut prendre ici

$$\text{Li}_n(y\xi_m^l) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y\xi_m^l)^k}{k^n}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{x^m=z} \text{Li}_n(x) &= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y\xi_m^l)^k}{k^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{y^k \xi_m^{kl}}{k^n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k^n} \left(\sum_{l=0}^{m-1} \xi_m^{kl} \right). \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{l=0}^{m-1} \xi_m^{kl} = \begin{cases} m & \text{si } m \mid k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en écrivant $k = ms$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{x^m=z} \text{Li}_n(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y^{ms}}{(ms)^n} \cdot m \\ &= \frac{m}{m^n} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{s^n} \\ &= m^{1-n} \text{Li}_n(z).\end{aligned}$$

Pour le cas où $|z| = 1$, on prend la limite de la norme de z :

$$\begin{aligned}\text{Li}_n(z) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \text{Li}_n(rz) \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} m^{n-1} \sum_{x^m=r} \text{Li}_n(x) \\ &= m^{n-1} \sum_{x^m=z} \text{Li}_n(x).\end{aligned}$$

□

Puisque $\text{Li}_n(z)$ n'est pas une fonction continue, Don Zagier, un des fondateurs du polylogarithme, a créé deux modifications de cette fonction. Pour définir ces modifications, on a besoin de quelques concepts.

Définition 1.1.4. Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite. La série génératrice ordinaire de $\{a_n\}$ est

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

et sa série génératrice exponentielle est

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Définition 1.1.5. Les nombres de Bernoulli $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ font une suite dont la série génératrice exponentielle est

$$b(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Remarque 1.1.6. Il y a beaucoup d'autres constructions équivalentes des nombres de Bernoulli, soit par la fonction zêta de Riemann, soit par les coefficients de la somme $\sum_{k=1}^n k^c$. Nous ne les expliquons pas ici parce que nous n'utiliserons que sa série génératrice.

Notamment, les premiers nombres de Bernoulli sont comme suit :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Tableau 1.1. Les premiers nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli portent la propriété suivante :

Théorème 1.1.7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Alors $B_{2n+1} = 0$.

DÉMONSTRATION. Notons que $B_1 = -\frac{1}{2}$, et

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}$$

est une fonction paire, parce que $\frac{x}{2}$ et $\coth \frac{x}{2}$ les deux sont des fonctions impaires. Il suit que le coefficient du terme x^{2n+1} de $\frac{x}{e^x - 1}$ est 0 pour tout $n \geq 1$. Alors $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$. \square

On définit maintenant les fonctions liées au polylogarithme.

Définition 1.1.8. Pour $z \in \mathbb{C}$ on écrit

$$D_n(z) = \operatorname{Re}_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \log^k |z| \operatorname{Li}_{n-k}(z) \right),$$

et on prend

$$\mathcal{L}_n(z) = \operatorname{Re}_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| \operatorname{Li}_{n-k}(z) \right),$$

où B_k est le k -ième nombre de Bernoulli et Re_n dénote Re si n est impair et Im si n est pair. Ici on fixe $\operatorname{Li}_0(z) \equiv -\frac{1}{2}$ par convention.

Remarque 1.1.9. Bien que $\operatorname{Li}_1(z)$ ne soit pas définie à $z = 1$, on peut encore calculer $D_n(1)$ et $\mathcal{L}_n(1)$ en prenant les limites. On a

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \log |z| \operatorname{Li}_1(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} -\log z \log(1-z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{\log z}{\frac{1}{\log(1-z)}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{(1-z)\log^2(1-z)}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{\log^2(1-z)}{\frac{z}{1-z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{2 \log(1-z)}{1-z}}{\frac{1}{(1-z)^2}} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2 \log(1-z)}{\frac{1}{1-z}} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{-2}{1-z}}{\frac{1}{(1-z)^2}} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} 2(z-1) = 0.
\end{aligned}$$

Alors $D_1(1) = 0 = \mathcal{L}_1(1)$. Il y a aussi un argument analogue qui prouve que $D_1(0) = 0 = \mathcal{L}_1(0)$.

On va explorer les propriétés du dilogarithme et du trilogarithme afin de montrer le théorème qui suit :

Théorème 1.1.10. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$ ni 1. Alors

$$\mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3(1-z^{-1}) = \mathcal{L}_3(1) = \zeta(3).$$

On note que quand $n = 3$, on a

$$\mathcal{L}_3(z) = \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(z) - \log|z| \operatorname{Li}_2(z) + \frac{1}{3} \log^2|z| \operatorname{Li}_1(z) \right).$$

1.2. Équations fonctionnelles pour $D_n(z)$ et $\mathcal{L}_n(z)$

Dans [Zag90] Zagier a démontré que $D_n(z)$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, et satisfait l'équation fonctionnelle

$$D_n\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{n-1} D_n(z) \tag{1.2.1}$$

dans cette région pour toute $n \in \mathbb{N}$. On part d'ici et montrera que la même équation fonctionnelle est aussi satisfaite par $\mathcal{L}_n(z)$, c'est-à-dire

Théorème 1.2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$,

$$\mathcal{L}_n\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(z).$$

DÉMONSTRATION. D'abord, construisons l'ansatz

$$\mathcal{L}_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k \log^k|z| D_{n-k}(z) \tag{1.2.2}$$

pour une suite $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$. Nous essayons de trouver une série $\{c_k\}$ qui fait (1.2.2) une égalité.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n c_k \log^k |z| D_{n-k}(z) &= \sum_{k=0}^n c_k \log^k |z| \left(\operatorname{Re}_{n-k} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} (\log^j |z| \operatorname{Li}_{n-k-j}(z)) \right) \right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \operatorname{Re}_n \left(\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j c_k}{j!} \log^{j+k} |z| \operatorname{Li}_{n-(j+k)}(z) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \operatorname{Re}_{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j c_k}{j!} \log^{j+k} |z| \operatorname{Li}_{n-(j+k)}(z) \right) \\
&= \operatorname{Re}_n \left(\sum_{0 \leq j+k \leq n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq j+k \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^j c_k}{j!} \log^{j+k} |z| \operatorname{Li}_{n-(j+k)}(z) \right) \\
&\quad + \operatorname{Re}_{n-1} \left(\sum_{0 \leq j+k \leq n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq j+k \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^j c_k}{j!} \log^{j+k} |z| \operatorname{Li}_{n-(j+k)}(z) \right) \\
&= \operatorname{Re}_n \left(\sum_{l=0}^n \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq l \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{l-k} c_k}{(l-k)!} \right) \log^l |z| \operatorname{Li}_{n-l}(z) \right) \\
&\quad + \operatorname{Re}_{n-1} \left(\sum_{l=0}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq l \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^{l-k} c_k}{(l-k)!} \right) \log^l |z| \operatorname{Li}_{n-l}(z) \right).
\end{aligned}$$

Pour que (1.2.2) soit satisfaite, on voit que $c_k = 0$ pour tout k impair et

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq l \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{l-k} c_k}{(l-k)!} = \frac{2^l B_l}{l!}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Rappelons-nous que la fonction génératrice des nombres de Bernoulli est

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l x^l}{l!} = \frac{x}{e^x - 1},$$

alors

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l B_l x^l}{l!} = \frac{2x}{e^{2x} - 1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{e^{2x} - 1} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq l \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{l-k} c_k}{(l-k)!} \right) x^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq k \leq l \\ k \text{ pair}}} \left(\frac{(-1)^{l-k} x^{l-k}}{(l-k)!} \cdot c_k x^k \right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \\ k \text{ pair}}} \sum_{l-k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{l-k} x^{l-k}}{(l-k)!} \cdot c_k x^k \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{0 \leq k \\ k \text{ pair}}} c_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^j}{j!} \right) = e^{-x} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \\ k \text{ pair}}} c_k x^k \right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{\substack{0 \leq k \\ k \text{ pair}}} c_k x^k = \frac{2x e^x}{e^{2x} - 1} = 2x \operatorname{csch}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2 - 2^{2l}) B_{2l}}{(2l)!} x^{2l}.$$

Il suit que $\{c_k\}$ avec

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \frac{(2-2^k)B_k}{k!} & \text{si } k \text{ est pair,} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

fait (1.2.2) une égalité, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_n(z) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \frac{(2 - 2^k) B_k}{k!} \log^k |z| D_{n-k}(z).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \frac{(2 - 2^k) B_k}{k!} \log^k \left| \frac{1}{z} \right| D_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \frac{(2 - 2^k) B_k}{k!} \log^k |z| (-1)^{n-k-1} D_{n-k}(z) && \text{comme } k \text{ est toujours pair} \\
&= (-1)^{n-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \frac{(2 - 2^k) B_k}{k!} \log^k |z| D_{n-k}(z) \right) && \text{idem}
\end{aligned}$$

$$=(-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(z).$$

□

Remarque 1.2.2. On peut toujours fusionner les deux cas de c_k dans (1.2.3) en suivant le théorème 1.1.7 et que $2 - 2^k = 0$ si $k = 1$. C'est-à-dire en fait on a que

$$c_k = \frac{(2 - 2^k)B_k}{k!}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, et

$$\mathcal{L}_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(2 - 2^k)B_k}{k!} \log^k |z| D_{n-k}(z).$$

Remarque 1.2.3. On peut étendre $D_n(z)$ et $\mathcal{L}_n(z)$ à l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en utilisant (1.2.1) et le théorème 1.2.1, où on a

$$D_n(\infty) = (-1)^{n-1} D_n(0)$$

et

$$\mathcal{L}_n(\infty) = (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(0).$$

On va démontrer aussi une équation fonctionnelle que $D_n(z)$ et $\mathcal{L}_n(z)$ satisfont, à savoir

Théorème 1.2.4. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\mathcal{L}_n(\bar{z}) = (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(z),$$

et

$$D_n(\bar{z}) = (-1)^{n-1} D_n(z).$$

Ici, \bar{z} dénote le conjugué complexe de z .

Cette fois, on démontre les égalités avec la définition de $\mathcal{L}_n(z)$ et $D_n(z)$. Ainsi, on commence en démontrant une relation que $\text{Li}_n(z)$ satisfait.

Lemme 1.2.5. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{Li}_n(\bar{z}) = \overline{\text{Li}_n(z)}.$$

DÉMONSTRATION. Écrivons $z = 1 - re^{i\varphi}$ où $r \geq 0$ et $-\pi < \varphi < \pi$. Alors

$$\bar{z} = \overline{1 - re^{i\varphi}} = 1 - \overline{re^{i\varphi}} = 1 - re^{-i\varphi}.$$

Nous procédons par récurrence sur n . Pour $n = 1$,

$$\text{Li}_1(\bar{z}) = -\log\left(1 - (1 - re^{-i\varphi})\right) = -\log re^{-i\varphi} = -\log(r) + i\varphi = \overline{\text{Li}_1(z)}.$$

Supposons maintenant que l'égalité est vraie pour quelque $n \in \mathbb{N}$. Alors pour $n + 1$, on a

$$\text{Li}_{n+1}(\bar{z}) = \int_{\theta=0}^{\theta=-\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \cdot (-ie^{i\theta})d\theta + \int_{t=1}^r \frac{\text{Li}_n(1 - te^{-i\varphi})}{1 - te^{-i\varphi}} \cdot (-e^{-i\varphi})dt.$$

Dans la première partie de l'intégration, il suit que

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\theta=-\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \cdot (-ie^{i\theta})d\theta &= \int_{-\theta=0}^{-\theta=-\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \cdot (ie^{i\theta})d(-\theta) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{-i\theta})}{1 - e^{-i\theta}} \cdot (ie^{-i\theta})d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}}{1 - e^{i\theta}} \cdot (\overline{-ie^{i\theta}})d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\varphi} \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}}{1 - e^{i\theta}} \cdot (-ie^{i\theta})d\theta \\ &= \overline{\int_{\theta=0}^{\theta=-\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \cdot (-ie^{i\theta})d\theta}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie,

$$\begin{aligned} \int_{t=1}^r \frac{\text{Li}_n(1 - te^{-i\varphi})}{1 - te^{-i\varphi}} \cdot (-e^{-i\varphi})dt &= \int_{t=1}^r \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - te^{i\varphi})}}{1 - te^{i\varphi}} \cdot (\overline{-e^{i\varphi}})dt \\ &= \int_{t=1}^r \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - te^{i\varphi})}}{1 - te^{i\varphi}} \cdot (-e^{i\varphi})dt \\ &= \overline{\int_{t=1}^r \frac{\text{Li}_n(1 - te^{i\varphi})}{1 - te^{i\varphi}} \cdot (-e^{i\varphi})dt}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{Li}_{n+1}(\bar{z}) &= \overline{\int_{\theta=0}^{\theta=-\varphi} \frac{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} \cdot (-ie^{i\theta})d\theta} + \overline{\int_{t=1}^r \frac{\text{Li}_n(1 - te^{i\varphi})}{1 - te^{i\varphi}} \cdot (-e^{i\varphi})dt} \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=-\varphi} \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - e^{i\theta})}}{1 - e^{i\theta}} \cdot (\overline{-ie^{i\theta}})d\theta + \int_{t=1}^r \frac{\overline{\text{Li}_n(1 - te^{i\varphi})}}{1 - te^{i\varphi}} \cdot (\overline{-e^{i\varphi}})dt \\ &= \overline{\text{Li}_{n+1}(z)}. \end{aligned}$$

Ainsi le lemme tient. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(z) &= \operatorname{Re}_n \left(\sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| \operatorname{Li}_{n-k}(z) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \cdot \log^k |z| \cdot \operatorname{Re}_n (\operatorname{Li}_{n-k}(z)),\end{aligned}$$

parce que $\log^k |z| \in \mathbb{R}$. Selon le lemme 1.2.5 et la définition de $\operatorname{Re}_n(\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(\bar{z}) &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \cdot \log^k |\bar{z}| \cdot \operatorname{Re}_n (\operatorname{Li}_{n-k}(\bar{z})) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \cdot \log^k |z| \cdot \operatorname{Re}_n (\overline{\operatorname{Li}_{n-k}(z)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k B_k}{k!} \cdot \log^k |z| \cdot (-1)^{n-1} \operatorname{Re}_n (\operatorname{Li}_{n-k}(z)) \\ &= (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(z).\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Alors

$$\mathcal{L}_n(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}_n(\overline{x + \varepsilon i}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(x + \varepsilon i) = (-1)^{n-1} \mathcal{L}_n(x),$$

comme $\mathcal{L}_n(z)$ est une fonction continue.

La démonstration pour $D_n(\bar{z}) = (-1)^{n-1} D_n(z)$ est similaire. \square

Remarque 1.2.6. Puisque $\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{L}_n(\bar{x}) = -\mathcal{L}_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et n pair, on voit que $\mathcal{L}_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et n est pair.

1.3. Quelques identités du dilogarithme et du trilogarithme

Dans cette partie, on démontrera quelques lemmes essentiels pour le théorème 1.1.10. On suppose dans cette section que $z = 1 - re^{i\varphi}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$, et on vise à démontrer que

Théorème 1.3.1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Li}_3(z) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{-z}{1-z}\right) + \operatorname{Li}_3(1-z) \\ = \operatorname{Li}_3(1) + \operatorname{Li}_2(1) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{6} \log^3(1-z).\end{aligned}$$

On démontre maintenant quelques lemmes dont on a besoin pour le théorème 1.3.1.

Lemme 1.3.2.

$$\int_0^\varphi i \log(1 - e^{i\theta}) d\theta = \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(e^{i\varphi})$$

pourvu que $z \notin \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. D'abord on vérifie la relation de différentiation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(-\text{Li}_2(e^{i\theta})) &= \frac{\log(1 - e^{i\theta})}{e^{i\theta}} \cdot e^{i\theta} \cdot i \\ &= i \log(1 - e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Pour que l'on puisse appliquer le théorème fondamental de l'analyse, il reste à démontrer que $i \log(1 - e^{i\theta})$ est continue. Puisque $z \notin \mathbb{R}$, soit $0 < \varphi < \pi$, soit $-\pi < \varphi < 0$. À partir de la trigonométrie :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= (1 - \cos \theta) - i \sin \theta \\ &= \left(1 - \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right) - i \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \left(\tan \frac{\theta}{2} - i\right) \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Ainsi $\log(1 - e^{i\theta})$ est continue dans les intervalles $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ respectivement. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\log(1 - e^{i\theta})$ est continue dans l'intervalle fermé entre $\pm\varepsilon$ et φ , où le signe de $\pm\varepsilon$ est pris tel que $\pm\varepsilon$ et φ sont les deux positifs ou négatifs. Alors on voit du théorème fondamental de l'analyse

$$\int_{\pm\varepsilon}^\varphi i \log(1 - e^{i\theta}) d\theta = \text{Li}_2(e^{\pm i\varepsilon}) - \text{Li}_2(e^{i\varphi}).$$

En prenant $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient

$$\int_0^\varphi i \log(1 - e^{i\theta}) d\theta = \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(e^{i\varphi}). \quad (1.3.1)$$

□

Remarque 1.3.3. Comme le signe de $\tan \frac{\theta}{2}$ change à $\theta = 0$, $\log(1 - e^{i\theta})$ n'y est pas continue. Ainsi, il faut prendre les limites afin d'obtenir l'égalité (1.3.1).

Lemme 1.3.4. Si $z \notin \mathbb{R}$, on a

$$\int_1^r \frac{\log(1 - te^{i\varphi})}{t} dt = \text{Li}_2(e^{i\varphi}) - \text{Li}_2(re^{i\varphi}).$$

DÉMONSTRATION. On voit que

$$\frac{d}{dt}(-\text{Li}_2(t \cdot e^{i\varphi})) = \frac{\log(1 - te^{i\varphi})}{t \cdot e^{i\varphi}} \cdot e^{i\varphi} = \frac{\log(1 - te^{i\varphi})}{t}.$$

De plus, $\frac{\log(1 - te^{i\varphi})}{t}$ est continue sur $]0, \infty[$ si l'on fixe φ avec $\varphi \neq 0$ ni $\varphi \neq \pm\pi$. Donc, pour tout $r > 0$, on a

$$\int_1^r \frac{\log(1 - te^{i\varphi})}{t} dt = \text{Li}_2(e^{i\varphi}) - \text{Li}_2(re^{i\varphi}).$$

Pour le cas où $r = 0$, on peut prendre la limite. □

Lemme 1.3.5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1 - z) = \text{Li}_2(1) - \log(z) \log(1 - z).$$

DÉMONSTRATION. On voit de la définition du polylogarithme, du lemme 1.3.2 et du lemme 1.3.4 que

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(z) &= - \int_{\gamma_z} \frac{\log(1 - t)}{t} dt \\ &= - \int_{\theta=0}^{\varphi} \frac{\log(e^{i\theta})}{1 - e^{i\theta}} d(1 - e^{i\theta}) - \int_{t=1}^r \frac{\log(te^{i\varphi})}{1 - te^{i\varphi}} d(1 - te^{i\varphi}) \\ &= - \int_{\theta=0}^{\varphi} \log(e^{i\theta}) d \log(1 - e^{i\theta}) - \int_{t=1}^r \log(te^{i\varphi}) d \log(1 - te^{i\varphi}) \\ &= - \log(e^{i\theta}) \log(1 - e^{i\theta}) \Big|_{\theta=0}^{\varphi} - \log(te^{i\varphi}) \log(1 - te^{i\varphi}) \Big|_{t=1}^r \\ &\quad + \int_{\theta=0}^{\varphi} \log(1 - e^{i\theta}) d \log(e^{i\theta}) + \int_{t=1}^r \log(1 - te^{i\varphi}) d \log(te^{i\varphi}) \\ &= - \log(e^{i\varphi}) \log(1 - e^{i\varphi}) + \log(e^{i\varphi}) \log(1 - e^{i\varphi}) - \log(re^{i\varphi}) \log(1 - re^{i\varphi}) \\ &\quad + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(e^{i\varphi}) + \text{Li}_2(e^{i\varphi}) - \text{Li}_2(re^{i\varphi}) \\ &= - \log(1 - z) \log(z) + \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2(1 - z). \end{aligned}$$

□

On utilise encore une fois le théorème fondamental de l'analyse pour démontrer

Théorème 1.3.6. Pour $n \geq 2$ et $z \notin \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\gamma_z} d\text{Li}_n\left(\frac{-t}{1-t}\right) = \text{Li}_n\left(\frac{-z}{1-z}\right).$$

DÉMONSTRATION. Pourvu que $z \notin \mathbb{R}$, soit $0 < \varphi < \pi$, soit $-\pi < \varphi < 0$, et $r \neq 0$.

Selon la définition de γ_z , le parcours d'intégration de 0 à z pour $\text{Li}_n(z)$ (voir la figure 1.1), on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} d\text{Li}_n\left(\frac{-z}{1-z}\right) &= \int_{\theta=0}^{\varphi} d\text{Li}_n\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}}\right) + \int_{t=1}^r d\text{Li}_n\left(\frac{te^{i\varphi}-1}{te^{i\varphi}}\right) \\ &= \int_{\theta=0}^{\varphi} d\text{Li}_n(1-e^{-i\theta}) + \int_{t=1}^r d\text{Li}_n(1-t^{-1}e^{-i\varphi}). \end{aligned}$$

Dans la partie de

$$\int_{\theta=0}^{\varphi} d\text{Li}_n(1-e^{-i\theta}),$$

on a

$$d\text{Li}_n(1-e^{-i\theta}) = \frac{\text{Li}_{n-1}(1-e^{-i\theta})}{1-e^{-i\theta}} \cdot ie^{-i\theta} d\theta.$$

Rappelons-nous que $\frac{\text{Li}_{n-1}(1-e^{-i\theta})}{1-e^{-i\theta}} \cdot ie^{-i\theta}$ est continue dans $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ respectivement, et la singularité à $\theta = 0$ est en fait amovible. Donc, on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_{\theta=0}^{\varphi} d\text{Li}_n(1-e^{-i\theta}) = \text{Li}_n(1-e^{-i\varphi}) - \text{Li}_n(0). \quad (1.3.2)$$

D'autre part, pour

$$\int_{t=1}^r d\text{Li}_n(1-t^{-1}e^{-i\varphi}),$$

on a

$$\frac{d}{dt} \text{Li}_n(1-t^{-1}e^{-i\varphi}) = \frac{\text{Li}_{n-1}(1-t^{-1}e^{-i\varphi})}{1-t^{-1}e^{-i\varphi}} \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{t^2} = \frac{e^{-i\varphi} \text{Li}_{n-1}(1-t^{-1}e^{-i\varphi})}{t^2 - te^{-i\varphi}},$$

qui est continue à $]0, \infty[$. Ainsi

$$\int_{t=1}^r d\text{Li}_n(1-t^{-1}e^{-i\varphi}) = \text{Li}_n(1-r^{-1}e^{-i\varphi}) - \text{Li}_n(1-e^{-i\varphi}). \quad (1.3.3)$$

En prenant la somme de (1.3.2) et (1.3.3) on obtient

$$\int_{\gamma_z} d\text{Li}_n\left(\frac{-z}{1-z}\right) = \text{Li}_n(1-e^{-i\varphi}) - \text{Li}_n(0) + \text{Li}_n(1-r^{-1}e^{-i\varphi}) - \text{Li}_n(1-e^{-i\varphi})$$

$$= \text{Li}_n \left(1 - r^{-1} e^{-i\varphi} \right) - \text{Li}_n(0) = \text{Li}_n \left(\frac{-z}{1-z} \right).$$

□

D'une manière analogue, on peut aussi démontrer

Théorème 1.3.7. Soient $n \geq 3$ et $z \notin \mathbb{R}$. Alors

$$\int_{\gamma_z} d \text{Li}_n(1-t) = \text{Li}_n(1-z) - \text{Li}_n(1).$$

Pour $z \notin \mathbb{R}$, on a

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_2(z) = \frac{-\log(1-z)}{z}, \quad (1.3.4)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_2 \left(\frac{-z}{1-z} \right) &= \log \left(1 + \frac{z}{1-z} \right) \frac{1-z}{z} \cdot \left(\frac{-1}{(1-z)^2} \right) \\ &= -\log \left(\frac{1}{1-z} \right) \frac{1}{z(1-z)} \\ &= \log(1-z) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right). \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

En ajoutant les lignes (1.3.4) et (1.3.5), on voit que

$$\frac{d}{dz} \left(\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2 \left(\frac{-z}{1-z} \right) \right) = \frac{\log(1-z)}{1-z}. \quad (1.3.6)$$

Donc, il découle du théorème 1.3.6 que

Lemme 1.3.8.

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2 \left(\frac{-z}{1-z} \right) = -\frac{1}{2} \log^2(1-z)$$

pour tout $z \notin \mathbb{R}$.

On répète le processus sur le trilogarithme. Soit $z \notin \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) &= \text{Li}_2 \left(\frac{-z}{1-z} \right) \frac{1-z}{z} \cdot \left(\frac{-1}{(1-z)^2} \right) \\ &= - \left(\text{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \log^2(1-z) \right) \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right), \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_3(1-z) &= -\frac{\text{Li}_2(1-z)}{1-z} \\ &= \frac{\log(z) \log(1-z) + \text{Li}_2(z) - \text{Li}_2(1)}{1-z}, \quad \text{selon le lemme 1.3.5.} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Prenons la somme de (1.3.7) et (1.3.8), et nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left(\operatorname{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) + \operatorname{Li}_3(1-z) \right) \\ &= -\frac{1}{z} \left(\operatorname{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \log^2(1-z) \right) + \frac{1}{1-z} \left(\log(z) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) - \operatorname{Li}_2(1) \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left(\operatorname{Li}_3(z) + \operatorname{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) + \operatorname{Li}_3(1-z) \right) \\ &= -\frac{\log^2(1-z)}{2z} + \frac{1}{1-z} \left(\log(z) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) - \operatorname{Li}_2(1) \right). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Il découle du théorème 1.3.6 et du théorème 1.3.7 que l'on peut intégrer les deux côtés de (1.3.9) sur le parcours γ_z . Notons que quand $z = 0$, on a

$$\operatorname{Li}_3(z) + \operatorname{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) + \operatorname{Li}_3(1-z) = \operatorname{Li}_3(0) + \operatorname{Li}_3(0) + \operatorname{Li}_3(1) = \operatorname{Li}_3(1).$$

Ainsi, on voit que le théorème 1.3.1 est vrai.

Théorème 1.3.1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} & \operatorname{Li}_3(z) + \operatorname{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) + \operatorname{Li}_3(1-z) \\ &= \operatorname{Li}_3(1) + \operatorname{Li}_2(1) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{6} \log^3(1-z). \end{aligned}$$

1.4. La démonstration du théorème 1.1.10

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On essaye de calculer directement la somme

$$\mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right)$$

selon sa définition.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(z) - \log|z| \operatorname{Li}_2(z) - \frac{1}{3} \log^2|z| \log(1-z) \right) \\ & \quad + \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(1-z) - \log|1-z| \operatorname{Li}_2(1-z) - \frac{1}{3} \log^2|1-z| \log(z) \right) \\ & \quad + \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3 \left(\frac{-z}{1-z} \right) - \log \left| \frac{z}{1-z} \right| \operatorname{Li}_2 \left(\frac{-z}{1-z} \right) - \frac{1}{3} \log^2 \left| \frac{-z}{1-z} \right| \log \left(\frac{1}{1-z} \right) \right). \end{aligned}$$

Vu que $\operatorname{Re}(\cdot)$ est préservée sous l'addition, on peut d'abord calculer la somme, puis prendre la partie réelle. Il suit du théorème 1.3.1 que

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3\left(\frac{-z}{1-z}\right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(1) + \operatorname{Li}_2(1) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{6} \log^3(1-z) \right) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$- \log|z| \left(\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{-z}{1-z}\right) \right) - \log|1-z| \left(\operatorname{Li}_2(1-z) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{-z}{1-z}\right) \right) \quad (1.4.2)$$

$$- \frac{1}{3} (\log^2|z| \log(1-z) + \log^2|1-z| \log(z)) \quad (1.4.3)$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\log^2|z| \log(1-z) - 2 \log|z| \log|1-z| \log(1-z) + \log^2|1-z| \log(1-z) \right), \quad (1.4.4)$$

si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Pour la simplification des lignes (1.4.3) et (1.4.4), on note que $\log|z|$ et $\log|1-z|$ sont déjà réels, alors on a

$$\operatorname{Re} \left(\log^2|z| \log(1-z) \right) = \log^2|z| \operatorname{Re}(\log(1-z)) = \log^2|z| \log|1-z|,$$

etc. Ainsi, on peut remplacer les deux lignes avec

$$- \frac{1}{3} \left(\log^2|z| \log|1-z| + \log^2|1-z| \log|z| \right)$$

et

$$+ \frac{1}{3} \left(\log^2|z| \log|1-z| - 2 \log|z| \log^2|1-z| + \log^3|1-z| \right)$$

respectivement. Leur somme est

$$- \log^2|1-z| \log|z| + \frac{1}{3} \log^3|1-z|. \quad (1.4.5)$$

On simplifie la ligne (1.4.2) avec le lemme 1.3.5 et le lemme 1.3.8 :

$$\begin{aligned} & - \log|z| \left(\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{-z}{1-z}\right) \right) - \log|1-z| \left(\operatorname{Li}_2(1-z) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{-z}{1-z}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \log|z| \log^2(1-z) - \log|1-z| \left(\operatorname{Li}_2(1) - \log(z) \log(1-z) + \frac{1}{2} \log^2(1-z) \right). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Puisque

$$\operatorname{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \in \mathbb{R},$$

on voit que

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(1) \log(1-z) - \operatorname{Li}_2(1) \log|1-z|) = \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(1) \cdot i \operatorname{Im}(\log(1-z))) = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3\left(\frac{-z}{1-z}\right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(1) + \operatorname{Li}_2(1) \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{6} \log^3(1-z) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \log|z| \log^2(1-z) - \log|1-z| \left(\operatorname{Li}_2(1) - \log(z) \log(1-z) + \frac{1}{2} \log^2(1-z) \right) \right. \\
&\quad \left. - \log^2|1-z| \log|z| + \frac{1}{3} \log^3|1-z| \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(1) + \frac{1}{6} \log^3(1-z) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) \log|1-z| + \frac{1}{3} \log^3|1-z| \right) \tag{1.4.7}
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{2} \log|z| \log^2(1-z) \tag{1.4.8}$$

$$+ \log|1-z| \log(z) \log(1-z) - \log^2|1-z| \log|z| \tag{1.4.9}$$

On factorise la partie de ligne (1.4.7) sauf $\operatorname{Li}_3(1)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \log^3(1-z) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) \log|1-z| + \frac{1}{3} \log^3|1-z| \\
&= \frac{1}{6} (\log(1-z) - \log|1-z|) (\log^2(1-z) - 2 \log(1-z) \log|1-z| - 2 \log^2|1-z|) \\
&= \frac{1}{6} (\log(1-z) - \log|1-z|)^3 - \frac{1}{2} (\log(1-z) - \log|1-z|) \log^2|1-z| \\
&= -\frac{1}{6} i (\operatorname{Im}(\log(1-z)))^3 - \frac{1}{2} i \operatorname{Im}(\log(1-z)) \log^2|1-z|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{6} \log^3(1-z) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) \log|1-z| + \frac{1}{3} \log^3|1-z| \right) = 0. \tag{1.4.10}$$

De la même manière, pour les lignes (1.4.8) et (1.4.9), on a

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \log(z) \log^2(1-z) + \frac{1}{2} \log|z| \log^2(1-z) \\
&+ \log|1-z| \log(z) \log(1-z) - \log^2|1-z| \log|z| \\
&= -\frac{1}{2} (\log(z) - \log|z|) (\log^2(1-z) - 2 \log(1-z) \log|1-z|) \\
&\quad + \log|z| \log|1-z| (\log(1-z) - \log|1-z|) \\
&= -\frac{1}{2} (\log(z) - \log|z|) (\log(1-z) - \log|1-z|)^2 + \frac{1}{2} (\log(z) - \log|z|) \log^2|1-z| \\
&\quad + \log|z| \log|1-z| (\log(1-z) - \log|1-z|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}i \operatorname{Im}(\log(z))(\operatorname{Im}(\log(1-z)))^2 + \frac{1}{2}i \operatorname{Im}(\log(z)) \log^2|1-z| \\
&\quad + i \operatorname{Im}(\log(1-z)) \log|z| \log|1-z|.
\end{aligned}$$

Donc, la somme des lignes (1.4.8) et (1.4.9) est aussi 0. Il découle que

Théorème 1.4.1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3(1-z^{-1}) = \zeta(3),$$

étant donné que

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Li}_3(1)) = \operatorname{Re}(\zeta(3)) = \zeta(3),$$

et que

$$\mathcal{L}_3\left(\frac{-z}{1-z}\right) = \mathcal{L}_3\left(\frac{1-z}{-z}\right) = \mathcal{L}_3(1-z^{-1}).$$

Corollaire 1.4.2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Alors

$$\mathcal{L}_3(z) + \mathcal{L}_3(1-z) + \mathcal{L}_3(1-z^{-1}) = \zeta(3).$$

DÉMONSTRATION. On a déjà vu que l'égalité est vraie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Notons que $\mathcal{L}_3(z)$ est une fonction continue. Ainsi pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_3(1-x) + \mathcal{L}_3(1-x^{-1}) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathcal{L}_3((x + \varepsilon i)) + \mathcal{L}_3(1 - (x + \varepsilon i)) + \mathcal{L}_3(1 - (x + \varepsilon i)^{-1}) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta(3) \\
&= \zeta(3).
\end{aligned}$$

□

1.5. La relation des cinq termes

Considérons

$$\begin{aligned}
D_2(z) &= \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2(z) - \log|z| \operatorname{Li}_1(z) + \frac{1}{2} \log^2|z| \operatorname{Li}_0(z) \right) \\
&= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z) + \log|z| \log(1-z)) \\
&= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z)) + \log|z| \arg(1-z),
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

où $\arg(\cdot)$ dénote l'argument d'un nombre complexe qui tombe dans $] -\pi, \pi]$. Cette fonction est aussi appelée le dilogarithme de Bloch–Wigner, et est dénotée $D(z)$. On remarque que

$$D(z) = \mathcal{L}_2(z),$$

selon la définition de $\mathcal{L}_n(z)$.

Le dilogarithme de Bloch–Wigner est une fonction analytique réelle sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Il peut être étendu comme une fonction continue à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'espace projectif, en utilisant le théorème 1.2.1, où $D(\infty) = (-1)D(0) = 0$. Dans cette section, on veut démontrer la relation des cinq termes de $D(z)$:

Théorème 1.5.1. Soient $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors

$$D(x) + D(y) + D(1 - xy) + D\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + D\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0.$$

La relation entre les cinq termes $x, y, 1 - xy, \frac{1-x}{1-xy}$ et $\frac{1-y}{1-xy}$ provient du birapport des cinq points. Elle est utile dans la K -théorie algébrique.

On commence la démonstration par une identité du dilogarithme de Bloch–Wigner :

Lemme 1.5.2. Soit $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors $D(z) = -D(1 - z)$.

DÉMONSTRATION. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On sait du lemme 1.3.5 que

$$\begin{aligned} D(z) + D(1 - z) &= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z)) + \log|z| \arg(1 - z) \\ &\quad + \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(1 - z)) + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(1 - z)) + \log|z| \arg(1 - z) + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(1) - \log(z) \log(1 - z)) \\ &\quad + \operatorname{Im}(\log|z| \log(1 - z)) + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= \operatorname{Im}(\log|z| \log(1 - z) - \log(z) \log(1 - z)) + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= \operatorname{Im}(-i \arg(z) \log(1 - z)) + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= -\arg(z) \log|1 - z| + \log|1 - z| \arg(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $D(z) = -D(1 - z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Puisque $D(z)$ est une fonction continue, on voit que $D(z) = -D(1 - z)$ pour tout $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. \square

Proposition 1.5.3. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ avec $|u| < \frac{1}{2}$, $|v| < \frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2\left(\frac{uv}{(1-u)(1-v)}\right) &= \operatorname{Li}_2\left(\frac{u}{1-v}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{v}{1-u}\right) - \operatorname{Li}_2(u) - \operatorname{Li}_2(v) \\ &\quad - \log(1-u) \log(1-v). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Observons que si A est une variable indépendant de u , on aura

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \operatorname{Li}_2\left(\frac{Au}{1-u}\right) &= -\frac{\log\left(1 - \frac{Au}{1-u}\right)}{\frac{Au}{1-u}} \cdot \frac{A}{(1-u)^2} \\
&= -\log\left(\frac{1-u-Au}{1-u}\right) \cdot \frac{1}{u(1-u)} \\
&= -\log\left(\frac{1-u-Au}{1-u}\right) \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) \\
&= -\frac{\log(1-u(1+A))}{u} + \frac{\log(1-u)}{u} - \frac{\log(1-u(1+A))}{1-u} + \frac{\log(1-u)}{1-u} \\
&= -\frac{\log(1-u(1+A))}{u} + \frac{\log(1-u)}{u} + \frac{\log(1-u)}{1-u} \\
&\quad - \frac{\log\left(1 - \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right)}{1-u} - \frac{\log((1-u) \cdot (1+A))}{1-u} \\
&= -\frac{\log(1-u(1+A))}{u} + \frac{\log(1-u)}{u} - \frac{\log\left(1 - \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right)}{1-u} - \frac{\log(1+A)}{1-u},
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \operatorname{Li}_2(u(1+A)) &= -\frac{\log(1-u(1+A))}{u(1+A)} \cdot (1+A) \\
&= -\frac{\log(1-u(1+A))}{u},
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{Li}_2(u) = -\frac{\log(1-u)}{u},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \operatorname{Li}_2\left(\frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right) &= -\frac{\log\left(1 - \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right)}{\frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}} \cdot \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{(1-u)^2} \\
&= -\frac{\log\left(1 - \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right)}{1-u}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \operatorname{Li}_2\left(\frac{Au}{1-u}\right) &= \frac{d}{du} \left(\operatorname{Li}_2(u(1+A)) - \operatorname{Li}_2(u) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{A}{1+A} \cdot \frac{1}{1-u}\right) \right) \\
&\quad + \frac{d}{du} (\log(1+A) \cdot \log(1-u)).
\end{aligned}$$

Prenons $A = \frac{v}{1-v}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{uv}{(1-u)(1-v)} \right) &= \frac{d}{du} \left(\operatorname{Li}_2 \left(\frac{u}{1-v} \right) - \operatorname{Li}_2(u) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{v}{1-u} \right) \right) \\ &\quad - \frac{d}{du} (\log(1-v) \cdot \log(1-u)). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Posons $|u| < \frac{1}{2}$, $|v| < \frac{1}{2}$. Il suit que

$$\left| \frac{u}{1-v} \right| = \frac{|u|}{|1-v|} < 1,$$

et d'une manière similaire,

$$\left| \frac{v}{1-u} \right| < 1.$$

Ainsi

$$\left| \frac{uv}{(1-u)(1-v)} \right| < 1.$$

Puisque $\log(1-z)$ est une fonction analytique sur $|z| < 1$, on ne se soucie plus du parcours d'intégration, et prend l'intégration sur les deux côtés de (1.5.2) :

$$\operatorname{Li}_2 \left(\frac{uv}{(1-u)(1-v)} \right) = \operatorname{Li}_2 \left(\frac{u}{1-v} \right) - \operatorname{Li}_2(u) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{v}{1-u} \right) - \log(1-v) \cdot \log(1-u) + C.$$

Ici C est une constante qui ne dépend pas sur u .

En prenant $u = 0$, on voit que

$$\operatorname{Li}_2(0) = \operatorname{Li}_2(0) - \operatorname{Li}_2(0) + \operatorname{Li}_2(v) - 0 + C.$$

Donc, $C = -\operatorname{Li}_2(v)$. Ainsi pour $u, v \in \mathbb{C}$, $|u| < \frac{1}{2}$, et $|v| < \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{uv}{(1-u)(1-v)} \right) &= \operatorname{Li}_2 \left(\frac{u}{1-v} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{v}{1-u} \right) - \operatorname{Li}_2(u) - \operatorname{Li}_2(v) \\ &\quad - \log(1-u) \log(1-v). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.5.4. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(xy) &= \operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(y) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{x-xy}{1-xy} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{y-xy}{1-xy} \right) \\ &\quad - \log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \cdot \log \left(\frac{1-y}{1-xy} \right). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Puisque $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$, on a

$$\left| \frac{x - xy}{1 - xy} \right| = \frac{|x||1 - y|}{|1 - xy|} \leq \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2},$$

et $\left| \frac{y - xy}{1 - xy} \right| < \frac{1}{2}$. Prenons $u = \frac{x - xy}{1 - xy}$, $v = \frac{y - xy}{1 - xy}$. Alors $x = \frac{u}{1 - v}$, $y = \frac{v}{1 - u}$. L'égalité suit de la proposition 1.5.3. \square

Théorème 1.5.5. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$. Alors

$$D(xy) = D(x) + D(y) - D\left(\frac{x - xy}{1 - xy}\right) - D\left(\frac{y - xy}{1 - xy}\right).$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$D(xy) = \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(xy)) + \log |xy| \arg(1 - xy),$$

$$D(x) = \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(x)) + \log |x| \arg(1 - x),$$

$$D(y) = \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(y)) + \log |y| \arg(1 - y),$$

$$D\left(\frac{x - xy}{1 - xy}\right) = \operatorname{Im}\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{x - xy}{1 - xy}\right)\right) + \log \left| \frac{x - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(1 - \frac{x - xy}{1 - xy}\right),$$

$$D\left(\frac{y - xy}{1 - xy}\right) = \operatorname{Im}\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{y - xy}{1 - xy}\right)\right) + \log \left| \frac{y - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(1 - \frac{y - xy}{1 - xy}\right),$$

et que $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$, il suffit de montrer que

$$\log |xy| \arg(1 - xy) = \operatorname{Im}\left(\log\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right) \cdot \log\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right)\right) \quad (1.5.3)$$

$$+ \log |x| \arg(1 - x) + \log |y| \arg(1 - y) \quad (1.5.4)$$

$$- \log \left| \frac{x - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right) - \log \left| \frac{y - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right), \quad (1.5.5)$$

suivant le corollaire 1.5.4. On calcule le côté droit. On décompose d'abord la ligne (1.5.5).

$$\begin{aligned} & - \log \left| \frac{x - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right) - \log \left| \frac{y - xy}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right) \\ &= - \log |x| \arg(1 - x) + \log |x| \arg(1 - xy) - \log \left| \frac{1 - y}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right) \\ & \quad - \log |y| \arg(1 - y) + \log |y| \arg(1 - xy) - \log \left| \frac{1 - x}{1 - xy} \right| \arg\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la somme des lignes (1.5.4) et (1.5.5) est égale à

$$\log |xy| \arg(1 - xy) - \log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) - \log \left| \frac{1-x}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right). \quad (1.5.6)$$

Comme

$$\log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) = \operatorname{Im} \left(\log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \cdot \log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \right),$$

on a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left(\log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \cdot \log \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) \right) - \log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \cdot \log \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) - \log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \cdot \log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(i \cdot \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) \cdot \log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \right) \\ &= \log \left| \frac{1-x}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right). \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant les lignes (1.5.3) et (1.5.6), on obtient

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left(\log \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) \cdot \log \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) \right) + \log |xy| \arg(1 - xy) \\ & - \log \left| \frac{1-y}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-x}{1-xy} \right) - \log \left| \frac{1-x}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) \\ &= \log |xy| \arg(1 - xy) + \log \left| \frac{1-x}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) - \log \left| \frac{1-x}{1-xy} \right| \arg \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) \\ &= \log |xy| \arg(1 - xy), \end{aligned}$$

qui est égal au côté gauche. Ainsi

$$D(xy) = D(x) + D(y) - D\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) - D\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ où $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5.1. Vu que $D(z)$ est une fonction analytique réelle sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, et que

$$D(xy) = D(x) + D(y) - D\left(\frac{x-xy}{1-xy}\right) - D\left(\frac{y-xy}{1-xy}\right)$$

pour tout $|x| < \frac{1}{3}$, $|y| < \frac{1}{3}$, on déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, l'égalité tient aussi. La continuité de $D(z)$ étend l'égalité à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On voit du lemme 1.5.2 que

$$\begin{aligned} D(xy) &= -D(1 - xy), \\ -D\left(\frac{x - xy}{1 - xy}\right) &= D\left(1 - \frac{x - xy}{1 - xy}\right) = D\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right), \\ -D\left(\frac{y - xy}{1 - xy}\right) &= D\left(1 - \frac{y - xy}{1 - xy}\right) = D\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$D(x) + D(y) + D(1 - xy) + D\left(\frac{1 - x}{1 - xy}\right) + D\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right) = 0$$

pour tout $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. □

1.6. Une égalité des dilogarithmes associée à un triangle du plan

Dans cette section, on va démontrer une relation du dilogarithme de Bloch–Wigner associée à un triangle du plan :

Théorème 1.6.1. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ avec $a_r + a_s \geq a_t$ pour tout $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$. Soient φ_1, φ_2 et φ_3 les mesures principales non orientées des angles aux sommets A_1, A_2 et A_3 d'un triangle du plan $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $|A_2A_3| = a_1$, $|A_3A_1| = a_2$ et $|A_1A_2| = a_3$. Alors

$$D\left(\frac{a_r}{a_s} e^{i\varphi_t}\right) = \frac{1}{2} \left(D(e^{2i\varphi_1}) + D(e^{2i\varphi_2}) + D(e^{2i\varphi_3}) \right)$$

pour tout $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$, où $D(\cdot)$ dénote le dilogarithme de Bloch–Wigner.

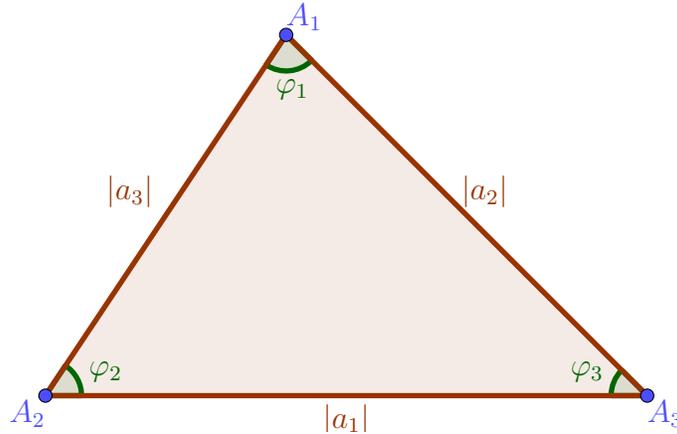


Figure 1.2. Une illustration du triangle $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$ donné dans le théorème 1.6.1.

On commence en démontrant quelques égalités sur le dilogarithme de Bloch–Wigner.

Lemme 1.6.2.

$$D(e^{i\theta}) = - \int_0^\theta \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi. \quad (1.6.1)$$

DÉMONSTRATION. On a

$$D(e^{i\theta}) = \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) \right) + \log |e^{i\theta}| \arg(1 - e^{i\theta}) = \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) \right).$$

Supposons que $\theta \in]-\pi, \pi[$. Il provient du lemme 1.3.2 que si $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$,

$$\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) = \operatorname{Li}_2(1) - i \int_0^\theta \log(1 - e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Mais la démonstration du même lemme nous dit que

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\varphi} &= \frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) &= \operatorname{Li}_2(1) - i \int_0^\theta \log(1 - e^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \operatorname{Li}_2(1) - i \int_0^\theta \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right) d\varphi \\ &= \operatorname{Li}_2(1) - i \int_0^\theta \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_0^\theta \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Donc, pour $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, on a

$$\begin{aligned} D(e^{i\theta}) &= \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2(1) - i \int_0^\theta \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + \int_0^\theta \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) d\varphi \right) \\ &= - \int_0^\theta \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Le cas où $\theta = 0$ est trivial. Ainsi l'égalité (1.6.1) est vraie pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$. On prend les limites sur θ en obtenant

$$D(-1) = - \int_0^\pi \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = - \int_0^{-\pi} \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi.$$

Alors

$$\int_{-\pi}^\pi \log \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = 0.$$

On voit de la périodicité des sinus que (1.6.1) est vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. \square

Lemme 1.6.3. Soit $0 \leq r < 1$, alors,

$$\operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(r e^{i\theta} \right) \right) = \omega \log r + \frac{1}{2} D \left(e^{2i\theta} \right) + \frac{1}{2} D \left(e^{2i\omega} \right) - \frac{1}{2} D \left(e^{2i(\theta+\omega)} \right),$$

où

$$\omega = \arctan \left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right).$$

DÉMONSTRATION. Puisque $0 \leq r < 1$, on peut prendre le segment de 0 à $r e^{i\theta}$ comme le parcours d'intégration pour $\operatorname{Li}_2 \left(r e^{i\theta} \right)$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2 \left(r e^{i\theta} \right) &= \int_0^r - \frac{\log \left(1 - t e^{i\theta} \right)}{t e^{i\theta}} d(t e^{i\theta}) \\ &= \int_0^r - \frac{\log \left(1 - t e^{i\theta} \right)}{t} dt \end{aligned}$$

Pour $0 \leq t < 1$, on a

$$1 - t e^{i\theta} = (1 - t \cos \theta) - i t \sin \theta.$$

Alors $\operatorname{Re} \left(1 - t e^{i\theta} \right) > 0$, et $\arg \left(1 - t e^{i\theta} \right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Notons que

$$\left| 1 - t e^{i\theta} \right|^2 = 1 + t^2 - 2t \cos \theta,$$

et que

$$\tan \arg \left(1 - t e^{i\theta} \right) = \frac{-t \sin \theta}{1 - t \cos \theta},$$

alors

$$\arg \left(1 - t e^{i\theta} \right) = \arctan \left(\frac{-t \sin \theta}{1 - t \cos \theta} \right).$$

Donc,

$$\operatorname{Li}_2 \left(r e^{i\theta} \right) = \int_0^r - \frac{\log \left(1 - t e^{i\theta} \right)}{t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^r \log(1 - 2t \cos \theta + t^2) \frac{dt}{t} + i \int_0^r \arctan\left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta}\right) \frac{dt}{t}.$$

Ainsi

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(re^{i\theta})) = \int_0^r \arctan\left(\frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta}\right) \frac{dt}{t}. \quad (1.6.2)$$

On prend la substitution

$$u = \frac{t \sin \theta}{1 - t \cos \theta}.$$

Alors

$$t = \frac{u}{\sin \theta + u \cos \theta},$$

et

$$dt = \frac{\sin \theta}{(\sin \theta + u \cos \theta)^2} du.$$

Il suit de l'égalité (1.6.2) que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(re^{i\theta})) &= \int_0^{\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}} \arctan u \cdot \frac{\sin \theta + u \cos \theta}{u} \cdot \frac{\sin \theta}{(\sin \theta + u \cos \theta)^2} du \\ &= \int_0^{\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}} \arctan u \cdot \frac{\sin \theta}{u(\sin \theta + u \cos \theta)} du \\ &= \int_0^{\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}} \arctan u \cdot \frac{\tan \theta}{u(\tan \theta + u)} du \\ &= \int_0^{\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}} \arctan u \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u + \tan \theta}\right) du. \end{aligned}$$

Prenons $v = \arctan u$ et soit $\omega = \arctan\left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(re^{i\theta})) &= \int_0^\omega v \cdot \left(\frac{1}{\tan v} - \frac{1}{\tan v + \tan \theta}\right) \cdot (1 + \tan^2 v) dv \\ &= \int_0^\omega v \cdot \left(\cot v + \tan v - \frac{1 + \tan^2 v}{\tan v + \tan \theta}\right) dv \\ &= \int_0^\omega v \cdot \left(\cot v + \frac{\tan v \tan \theta - 1}{\tan v + \tan \theta}\right) dv \\ &= \int_0^\omega v \cdot \left(\cot v - \frac{1}{\tan(v + \theta)}\right) dv \\ &= \int_0^\omega v \cdot (\cot v - \cot(v + \theta)) dv \\ &= \int_{v=0}^\omega v d(\log \sin v - \log \sin(v + \theta)) \\ &= v \cdot (\log \sin v - \log \sin(v + \theta)) \Big|_{v=0}^\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\omega (\log \sin v - \log \sin (v + \theta)) dv \\
& = \omega \cdot \log \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + \theta)} \\
& \quad - \int_0^\omega (\log (2 \sin v) - \log (2 \sin (v + \theta))) dv \\
& = \omega \cdot \log \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + \theta)} + \frac{1}{2} (D(e^{2i\omega}) - D(e^{2i(\omega+\theta)}) + D(e^{2i\theta})),
\end{aligned}$$

selon le lemme 1.6.2. Puisque $\omega = \arctan \left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right)$, on voit que

$$\sin \omega = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}},$$

et que

$$\cos \omega = \frac{1 - r \cos \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sin (\theta + \omega) & = \sin \theta \cos \omega + \cos \theta \sin \omega \\
& = \frac{\sin \theta - r \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} + \frac{r \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} \\
& = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} \\
& = \frac{\sin \omega}{r}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$r = \frac{\sin \omega}{\sin (\theta + \omega)}.$$

Il suit que

$$\operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 (r e^{i\theta}) \right) = \omega \log r + \frac{1}{2} (D(e^{2i\omega}) - D(e^{2i(\omega+\theta)}) + D(e^{2i\theta})),$$

où

$$\omega = \arctan \left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right).$$

□

Proposition 1.6.4. Soit $0 \leq r < 1$. Alors

$$D(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2} D(e^{2i\theta}) + \frac{1}{2} D(e^{2i\omega}) - \frac{1}{2} D(e^{2i(\theta+\omega)}), \quad (1.6.3)$$

où

$$\omega = \arctan \left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right).$$

DÉMONSTRATION. Puisque $0 \leq r < 1$, on a

$$\arg(1 - re^{i\theta}) = -\arctan \left(\frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \right) = -\omega.$$

Alors, il suit du lemme 1.6.3 que

$$\begin{aligned} D(re^{i\theta}) &= \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(re^{i\theta})) + \log|re^{i\theta}| \arg(1 - re^{i\theta}) \\ &= \omega \log r + \frac{1}{2}D(e^{2i\theta}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\omega}) - \frac{1}{2}D(e^{2i(\theta+\omega)}) - \omega \log r \\ &= \frac{1}{2}D(e^{2i\theta}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\omega}) - \frac{1}{2}D(e^{2i(\theta+\omega)}). \end{aligned}$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.6.1. Il suffit de démontrer que

$$D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) = \frac{1}{2}\left(D(e^{2i\varphi_1}) + D(e^{2i\varphi_2}) + D(e^{2i\varphi_3})\right).$$

Supposons que $a_1 < a_2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a_1 \sin \varphi_3}{a_2 - a_1 \cos \varphi_3} &= \frac{a_1 \sin \varphi_3}{a_2 - a_1 \cdot \frac{a_2^2 + a_1^2 - a_3^2}{2a_2 \cdot a_1}} && \text{selon la loi des cosinus} \\ &= \frac{a_1 \sin \varphi_3}{\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2a_2}} \\ &= \frac{a_1 \cdot \frac{\sin \varphi_3}{a_3}}{\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2a_2 \cdot a_3}} \\ &= \frac{b_1 \cdot \frac{\sin \varphi_1}{a_1}}{\cos \varphi_1} && \text{selon les lois des sinus et des cosinus} \\ &= \tan \varphi_1. \end{aligned}$$

Ainsi la proposition 1.6.4 nous suggère que

$$\begin{aligned} D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) &= \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_3}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_1}) - \frac{1}{2}D(e^{2i(\varphi_3+\varphi_1)}) \\ &= \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_3}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_1}) - \frac{1}{2}D(e^{i(2\pi-2\varphi_2)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_3}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_1}) + \frac{1}{2}D(e^{2i\varphi_2}).$$

Si $a_1 > a_2$, on répète le processus pour $\frac{a_2}{a_1}e^{i\varphi_3}$, et on obtient

$$D\left(\frac{a_2}{a_1}e^{i\varphi_3}\right) = \frac{1}{2}\left(D(e^{2i\varphi_1}) + D(e^{2i\varphi_2}) + D(e^{2i\varphi_3})\right).$$

Mais selon les théorèmes 1.2.1 et 1.2.4, on a

$$D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) = -D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{-i\varphi_3}\right) = D\left(\frac{a_2}{a_1}e^{i\varphi_3}\right).$$

Donc,

$$D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) = \frac{1}{2}\left(D(e^{2i\varphi_1}) + D(e^{2i\varphi_2}) + D(e^{2i\varphi_3})\right).$$

Au cas où $a_1 = a_2$,

$$D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) = D(e^{i\varphi_3}).$$

Puisque $a_1 = a_2$, on a $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi - \varphi_3}{2}$. Considérons la relation des cinq termes

$$D(e^{i\varphi_3}) + D(e^{i\varphi_3}) + D(1 - e^{2i\varphi_3}) + D\left(\frac{1 - e^{i\varphi_3}}{1 - e^{2i\varphi_3}}\right) + D\left(\frac{1 - e^{i\varphi_3}}{1 - e^{2i\varphi_3}}\right) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1 - e^{i\varphi_3}}{1 - e^{2i\varphi_3}}\right) &= D\left(\frac{1 - e^{i\varphi_3}}{(1 - e^{i\varphi_3})(1 + e^{i\varphi_3})}\right) \\ &= D\left(\frac{1}{1 + e^{i\varphi_3}}\right) \\ &= -D(1 + e^{i\varphi_3}) && \text{selon le théorème 1.2.1} \\ &= D(-e^{i\varphi_3}) && \text{selon le lemme 1.5.2} \\ &= -D(-e^{-i\varphi_3}) && \text{selon le théorème 1.2.1} \\ &= -D(e^{i(\pi - \varphi_3)}), \end{aligned}$$

et

$$D(1 - e^{2i\varphi_3}) = -D(e^{2i\varphi_3}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2D\left(\frac{a_1}{a_2}e^{i\varphi_3}\right) &= D(e^{2i\varphi_3}) + D(e^{i(\pi - \varphi_3)}) + D(e^{i(\pi - \varphi_3)}) \\ &= D(e^{2i\varphi_3}) + D(e^{2i\varphi_1}) + D(e^{2i\varphi_2}). \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Complexes motiviques polylogarithmiques et régulateurs

Dans ce chapitre, on décrira ce que c'est le régulateur, qui peut être vu comme une forme différentielle définie dans une complexe. Le régulateur fournit une façon de calculer les mesures de Mahler qui est très efficace.

2.1. Complexes motiviques polylogarithmiques

Soit F un corps. Considérons $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\mathbb{P}^1(F)$. On voudrait explorer les propriétés de ce groupe modulo les équations fonctionnelles du polylogarithme de l'ordre n . Mais malheureusement, on ne sait pas explicitement les équations fonctionnelles du polylogarithme de hauts ordres.

Dans [Gon94], [Gon95] et [Gon02] Goncharov a construit des groupes qui correspondent aux groupes du paragraphe dernier. On suit les idées de Goncharov. On définira récursivement des sous-groupes $\mathcal{R}_n(F)$ et prendra

$$\mathcal{B}_n(F) := \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)] / \mathcal{R}_n(F).$$

Les classes d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]$ et dans $\mathcal{B}_n(F)$ sont dénotées par $\{x\}$ et $\{x\}_n$, respectivement. On laisse d'abord

$$\mathcal{B}_1(F) = F^*,$$

et procède à construire une famille des morphismes :

$$\delta_n : \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)] \rightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^* & \text{si } n \geq 3, \\ F^* \wedge F^* & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

où

$$\delta_n(\{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{x\} = \{0\}, \{1\} \text{ ou } \{\infty\}, \\ \{x\}_{n-1} \otimes x & \text{si } n \geq 3, \\ (1-x) \wedge x & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

D'après, définissons

$$\mathcal{A}_n(F) = \ker \delta_n.$$

Chaque élément

$$\alpha(t) = \sum_j n_j \{f_j(t)\} \in \mathbb{Z} [\mathbb{P}^1(F(t))]$$

a une spécialisation

$$\alpha(t_0) = \sum_j n_j \{f_j(t_0)\} \in \mathbb{Z} [\mathbb{P}^1(F)]$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{P}^1(F)$. Ainsi, on peut faire la définition qui suit :

Définition 2.1.1. Soit F un corps. On définit que

$$\mathcal{R}_n(F) = \langle \{0\}; \{\infty\}; \alpha(0) - \alpha(1) : \alpha(t) \in \mathcal{A}_n(F(t)) \rangle.$$

Proposition 2.1.2. $\delta_n(\mathcal{R}_n(F)) = 0$.

DÉMONSTRATION. La proposition suit du lemme 1.16 de [Gon95]. □

Lemme 2.1.3. Soit $x \in F$. Alors $1 \wedge x = 0$, et $(-1) \wedge x = 0$.

DÉMONSTRATION. Rappelons-nous que

$$1 \wedge x = (1 \cdot 1) \wedge x = 1 \wedge x + 1 \wedge x,$$

ainsi

$$1 \wedge x = 0.$$

De même,

$$0 = 1 \wedge x = ((-1) \cdot (-1)) \wedge x = (-1) \wedge x + (-1) \wedge x.$$

Donc,

$$(-1) \wedge x = 0.$$

□

Proposition 2.1.4. Soit $x \in \mathbb{P}^1(F)$. Alors

$$\{x\} + \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_2(F),$$

et

$$\{x\} + \{1 - x\} \in \mathcal{R}_2(F).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in F$. Considérons $\alpha(t) = \{xt\} + \{(xt)^{-1}\} \in \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F(t))]$. Nous remarquons que

$$\alpha(1) - \alpha(0) = \{x\} + \{x^{-1}\} - \{0\} - \{\infty\}.$$

Ainsi il suffit de démontrer que $\alpha(t) \in \ker \delta_n$. On a

$$\begin{aligned} \delta_2(\{xt\} + \{(xt)^{-1}\}) &= (1 - xt) \wedge (xt) + (1 - (xt)^{-1}) \wedge (xt)^{-1} \\ &= (1 - xt) \wedge (xt) - (1 - (xt)^{-1}) \wedge (xt) \\ &= (1 - xt) \wedge x - (1 - (xt)^{-1}) \wedge (xt) + (xt) \wedge (xt) \\ &= (1 - xt) \wedge (xt) - (xt - 1) \wedge (xt) \\ &= (1 - xt) \wedge (xt) - (xt - 1) \wedge (xt) - (-1) \wedge (xt) \\ &= (1 - xt) \wedge (xt) - (1 - xt) \wedge (xt) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'une manière similaire, prenons

$$\beta(t) = \{xt^{-1}\} + \{1 - xt^{-1}\} \in \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F(t))].$$

Comme

$$\beta(1) - \beta(0) = \{x\} + \{1 - x\} - 2\{\infty\},$$

il reste à démontrer que $\beta(t) \in \ker \delta_2$. On voit que

$$\delta_2(\{xt^{-1}\} + \{1 - xt^{-1}\}) = (1 - xt^{-1}) \wedge (xt^{-1}) + (xt^{-1}) \wedge (1 - xt^{-1}) = 0.$$

Au cas où $\{x\} = \{\infty\}$, on a

$$\{x\} + \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_2(F)$$

et

$$\{x\} + \{1 - x\} \in \mathcal{R}_2(F)$$

selon la définition de $\mathcal{R}_2(F)$. □

Proposition 2.1.5. Soit $x \in \mathbb{P}^1(F)$ et soit $n \geq 2$. Alors

$$\{x\} + (-1)^n \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_n(F).$$

DÉMONSTRATION. Si $\{x\} = \{\infty\}$,

$$\{x\} + (-1)^n \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_n(F)$$

selon la définition de $\mathcal{R}_n(F)$.

Soit $x \in F$. On procède par récurrence sur n . Le cas où $n = 2$ suit de la proposition 2.1.4. Supposons que

$$\{x\} + (-1)^n \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_n(F)$$

pour quelque $n \geq 2$. Considérons

$$\alpha(t) = \{xt\} + (-1)^{n+1} \{(xt)^{-1}\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}(\alpha(t)) &= \delta_{n+1}(\{xt\} + (-1)^{n+1} \{(xt)^{-1}\}) \\ &= \{xt\}_n \otimes (xt) + (-1)^{n+1} \{(xt)^{-1}\}_n \otimes (xt)^{-1} \\ &= \{xt\}_n \otimes (xt) + (-1)^n \{(xt)^{-1}\}_n \otimes (xt) \\ &= (\{xt\}_n + (-1)^n \{(xt)^{-1}\}_n) \otimes x. \end{aligned}$$

Puisque

$$\{xt\} + (-1)^n \{(xt)^{-1}\} \in \mathcal{R}_n(F(t)),$$

on voit que

$$\{xt\}_n + (-1)^n \{(xt)^{-1}\}_n = 0.$$

Donc,

$$\delta_{n+1}(\{xt\} + (-1)^{n+1} \{(xt)^{-1}\}) = 0,$$

et $\alpha(t) \in \ker \delta_{n+1}$. On a

$$\alpha(1) - \alpha(0) = \{x\} + (-1)^{n+1} \{x^{-1}\} - \{0\} - \{\infty\},$$

ainsi

$$\{x\} + (-1)^{n+1} \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_{n+1}(F).$$

Il suit que

$$\{x\} + (-1)^n \{x^{-1}\} \in \mathcal{R}_n(F)$$

pour tout $n \geq 2$.

□

La proposition 2.1.2 nous permet d'introduire des morphismes

$$\delta_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F),$$

où $n \geq 3$, et

$$\delta_2 : \mathcal{B}_2(F) \rightarrow F^* \wedge F^*.$$

Alors on obtient la complexe

$$\begin{aligned} \Gamma(F; n) : \mathcal{B}_n(F) &\xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^* \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes (F^* \wedge F^*) \\ &\xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_2(F) \otimes \bigwedge^{n-2} F^* \xrightarrow{\delta} \bigwedge^n F^*, \end{aligned}$$

où

$$\delta : \{x\}_p \otimes \bigwedge_{j=1}^{n-p} y_j \mapsto \delta_p(\{x\}_p) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-p} y_j.$$

Goncharov a proposé dans [Gon95] que

$$\mathcal{B}_2(F) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)] / \langle \{0\}; \{\infty\}; R_2(x,y) \rangle,$$

où

$$R_2(x,y) = \{x\} + \{y\} + \{1 - xy\} + \left\{ \frac{1-x}{1-xy} \right\} + \left\{ \frac{1-y}{1-xy} \right\},$$

qui est la relation de cinq termes du dilogarithme. Ainsi on a

Proposition 2.1.6. Soit $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$. Alors

$$\{x\}_2 + \{y\}_2 + \{1 - xy\}_2 + \left\{ \frac{1-x}{1-xy} \right\}_2 + \left\{ \frac{1-y}{1-xy} \right\}_2 = 0.$$

On peut définir un homomorphisme basé sur la fonction réelle $\mathcal{L}_n(z)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_n : \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \{z\} &\mapsto \mathcal{L}_n(z). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.7. $\widetilde{\mathcal{L}}_n(\mathcal{B}_n(\mathbb{C})) = 0$.

DÉMONSTRATION. On peut se référer au théorème 1.15 de [Gon94] pour une démonstration. \square

2.2. Régulateur de Goncharov

Goncharov a construit un régulateur qui se lève à un homomorphisme des complexes dans [Gon02]. Deninger a trouvé dans [Den97] que l'on peut évaluer la mesure de Mahler de certains polynômes en utilisant le régulateur qui coïncide avec celui de Goncharov. Dans cette section, on expliquera la construction du régulateur sur la complexe motivique polylogarithmique que l'on appliquera à la mesure de Mahler. On commence par la construction d'une série $\beta_{k,l}$, qui sera utilisée dans la définition du régulateur.

Soit $l \geq 1$ et soit $k \geq 0$. Définissons

$$\beta_{k,l} = (-1)^l \frac{(l-1)!}{(k+l+1)!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \binom{k+l+1}{2j+1} 2^{k+l-2j} B_{k+l-2j}.$$

Ici B_n dénote les numéros de Bernoulli. Alors on a

$$\begin{aligned} \beta_{k,1} &= \frac{-2^{k+1}}{(k+1)!} B_{k+1}, \\ \beta_{k,2} &= \frac{2^{k+2}}{(k+2)!} B_{k+2}, \\ \beta_{k,3} &= \frac{-2^{k+4}}{(k+3)!} B_{k+3} - \frac{-2^{k+2}}{3!(k+1)!} B_{k+1}, \\ \beta_{k,4} &= \frac{3!2^{k+4}}{(k+4)!} B_{k+4} + \frac{2^{k+2}}{(k+2)!} B_{k+2}. \end{aligned}$$

Plus généralement, on voit les relations de récurrence

$$2l \cdot \beta_{k+1,2l} = -\beta_{k,2l+1} - \frac{2^{k+1}}{(2l+1)(k+1)!} B_{k+1}, \quad (2.2.1)$$

et

$$(2l-1) \cdot \beta_{k+1,2l-1} = -\beta_{k,2l}. \quad (2.2.2)$$

Proposition 2.2.1. Soit $m \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \beta_{0,2m} &= \beta_{0,2m+1} = \frac{1}{2m+1}, \\ \beta_{1,2m-1} &= -\frac{1}{(2m-1)(2m+1)}, \end{aligned}$$

et

$$\beta_{1,2m} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la suite c_n , où

$$c_{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)!} \sum_{l=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{l} 2^{2m+1-l} B_{2m+1-l},$$

et

$$c_{2m} = 0$$

pour tout $m \geq 0$. On calcule sa série génératrice :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \left(\sum_{l=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{l} 2^{2m+1-l} B_{2m+1-l} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2m+1} \frac{2^{2m+1-l} B_{2m+1-l} x^{2m+1}}{l!(2m+1-l)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{2^j B_j x^{2m+1}}{j!(2m+1-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{2^j B_j x^j}{j!} \cdot \frac{x^{2m+1-j}}{(2m+1-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j B_j x^j}{j!} \cdot \left(\sum_{m=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^{\infty} \frac{x^{2m+1-j}}{(2m+1-j)!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j B_j x^j}{j!} \cdot \frac{e^x - (-1)^j e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j (2x)^j}{j!} - \frac{e^{-x}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j (-2x)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j x^j}{j!} = \frac{x}{e^x - 1},$$

on voit que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j (2x)^j}{j!} = \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

et que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j (-2x)^j}{j!} = \frac{-2x}{e^{-2x} - 1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \frac{2xe^x}{2(e^{2x} - 1)} + \frac{2xe^{-x}}{2(e^{-2x} - 1)} \\
&= \frac{xe^x}{e^{2x} - 1} + \frac{xe^x}{1 - e^{2x}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors $c_{2m+1} = 0$ pour tout $m \geq 0$. Rappelons-nous que $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$, ainsi, selon la définition de $\beta_{k,l}$, on voit que

$$\begin{aligned}
\beta_{0,2m} &= (-1)^{2m} \frac{(2m-1)!}{(2m+1)!} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m+1}{2j+1} 2^{2m-2j} B_{2m-2j} \\
&= \frac{(2m-1)!}{(2m+1)!} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m+1}{(2m+1)-(2j+1)} 2^{(2m+1)-(2j+1)} B_{(2m+1)-(2j+1)} \\
&= \frac{(2m-1)!}{(2m+1)!} \sum_{l=0}^{2m-1} \binom{2m+1}{l} 2^{2m+1-l} B_{2m+1-l} \\
&= \frac{(2m-1)!}{(2m+1)!} \left(\sum_{l=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{l} 2^{2m+1-l} B_{2m+1-l} - (2m+1) \cdot 2B_1 - B_0 \right) \\
&= \frac{1}{2m} - \frac{1}{(2m)(2m+1)} \\
&= \frac{1}{2m+1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\beta_{0,2m+1} &= (-1)^{2m+1} \frac{(2m)!}{(2m+2)!} \sum_{j=0}^m \binom{2m+2}{2j+1} 2^{2m+1-2j} B_{2m+1-2j} \\
&= - \frac{(2m)!}{(2m+2)!} \cdot \binom{2m+2}{2m+1} \cdot 2B_1 \\
&= \frac{1}{2m+1},
\end{aligned}$$

parce que tous les termes sauf B_1 sont égaux à 0.

Pour la computation de $\beta_{1,2m}$ et de $\beta_{1,2m-1}$, on se réfère aux égalités (2.2.1) et (2.2.2) : on a

$$\begin{aligned}
(2m) \cdot \beta_{1,2m} &= -\beta_{0,2m+1} - \frac{2}{(2m+1) \cdot 1!} B_1 \\
&= -\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+1}
\end{aligned}$$

$$=0,$$

et

$$(2m-1) \cdot \beta_{1,2m-1} = -\beta_{0,2m} = -\frac{1}{2m+1}.$$

□

Définition 2.2.2. Soit $n \geq 1$ et soit $z \in \mathbb{C}$. On prend

$$\widehat{\mathcal{L}}_n(z) = \begin{cases} \mathcal{L}_n(z) & \text{si } n \text{ est impair,} \\ i\mathcal{L}_n(z) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

De plus, on définit les formes différentielles de degré un sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$ pour $p, q \geq 1$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{k,l}(z) &= \widehat{\mathcal{L}}_k(z) \log^{l-1} |z| \cdot d \log |z| && \text{si } k \geq 2, \text{ et} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{1,l}(z) &= (\log |z| d \log |1-z| - \log |1-z| d \log |z|) \cdot \log^{l-1} |z|. \end{aligned}$$

Rappelons-nous que

$$\text{Alt } F(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{|\sigma|} F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}),$$

où S_m est le groupe symétrique de degré m . On peut désormais définir les régulateurs.

Définition 2.2.3. Soit X une variété complexe et soient x, x_j des fonctions rationnelles.

Définissons les formes différentielles pour $m, n \in \mathbb{N}$

$$\eta_{n+m}(m+1) : \{x\}_n \otimes x_1 \wedge \dots \wedge x_m$$

$$\begin{aligned} \mapsto & \widehat{\mathcal{L}}_n(x) \text{Alt}_m \left(\sum_{l \geq 0} \frac{1}{(2l+1)!(m-2l)!} \bigwedge_{j=1}^{2l} d \log |x_j| \wedge \bigwedge_{j=2l+1}^m di \arg x_j \right) \\ & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \beta_{k,l} \widehat{\mathcal{L}}_{n-k,k}(x) \wedge \text{Alt}_m \left(\frac{\log |x_1|}{(l-1)!(m-l)!} \bigwedge_{j=2}^l d \log |x_j| \wedge \bigwedge_{j=l+1}^m di \arg x_j \right) \right), \end{aligned}$$

et

$$\eta_m(m) : x_1 \wedge \dots \wedge x_m \mapsto \text{Alt}_m \left(\sum_{l \geq 0} \frac{\log |x_1|}{(2l+1)!(m-2l-1)!} \bigwedge_{j=2}^{2l+1} d \log |x_j| \wedge \bigwedge_{j=2l+2}^m di \arg x_j \right).$$

Exemple 2.2.4. Si $m = 1$, on a pour tout $n \geq 2$,

$$\eta_{n+1}(2) : \{x\}_n \otimes x_1 \mapsto \widehat{\mathcal{L}}_n(x) di \arg x_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1} B_{k+1}}{(k+1)!} \widehat{\mathcal{L}}_{n-k,k}(x) \log |x_1|,$$

et

$$\eta_2(2) : x_1 \wedge x_2 \mapsto \log |x_1| \mathrm{d}i \arg x_2 - \log |x_2| \mathrm{d}i \arg x_1.$$

Exemple 2.2.5. Au cas où $m = 2$, $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \eta_{n+2}(3) : \{x\}_n \otimes x_1 \wedge x_2 \mapsto & \widehat{\mathcal{L}}_n(x) \left(\mathrm{d}i \arg x_1 \wedge \mathrm{d}i \arg x_2 + \frac{1}{3} \mathrm{d} \log |x_1| \wedge \mathrm{d} \log |x_2| \right) \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1} B_{k+1}}{(k+1)!} \widehat{\mathcal{L}}_{n-k,k}(x) \wedge (\log |x_1| \mathrm{d}i \arg x_2 - \log |x_2| \mathrm{d}i \arg x_1) \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+2} B_{k+2}}{(k+2)!} \widehat{\mathcal{L}}_{n-k,k}(x) \wedge (\log |x_1| \mathrm{d} \log |x_2| - \log |x_2| \mathrm{d} \log |x_1|), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \eta_3(3) : x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \\ \mapsto & \log |x_1| \mathrm{d}i \arg x_2 \wedge \mathrm{d}i \arg x_3 + \log |x_2| \mathrm{d}i \arg x_3 \wedge \mathrm{d}i \arg x_1 + \log |x_3| \mathrm{d}i \arg x_1 \wedge \mathrm{d}i \arg x_2 \\ & + \frac{1}{3} (\log |x_1| \mathrm{d} \log |x_2| \wedge \log |x_3| + \log |x_2| \mathrm{d} \log |x_3| \wedge \log |x_1| + \log |x_3| \mathrm{d} \log |x_1| \wedge \log |x_2|). \end{aligned}$$

Pour expliquer le théorème qui démontre les propriétés des régulateurs définis par Goncharov, on fournit ici une définition de plus.

Définition 2.2.6. Soit Y un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C}^n . Une distribution sur Y est une forme linéaire u sur C_0^∞ qui est aussi continue dans le sens que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u(\varphi_j) = u(\varphi) \text{ si } \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = \varphi \text{ dans } C_0^\infty(Y).$$

Soit X une variété complexe et dénotons l'ensemble des sous-variétés irréductibles fermées de codimension un par $X^{(1)}$. Soit $\mathcal{A}^j(X)(k)$ l'espace des j -formes lisses avec valeurs dans $(2\pi i)^k \mathbb{R}$. Dénotons aussi par d le différentiel de de Rham sur $\mathcal{A}^j(X)$, et \mathcal{D} le différentiel de de Rham sur les distributions. Alors on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{d} \arg x) = 0,$$

et

$$\mathcal{D}(\mathrm{d} \arg x) = 2\pi \delta(x).$$

$\mathcal{D} - \mathrm{d}$, la différence entre \mathcal{D} et d , est appelée la homomorphisme de résidu de de Rham.

Théorème 2.2.7 ([Gon02], théorèmes 2.2 et 2.5). Soit X une variété complexe. Les $\eta_n(m)$ définis dans la définition 2.2.3 induisent un homomorphisme des complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}_n(\mathbb{C}(X)) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{B}_{n-1}(\mathbb{C}(X)) \otimes \mathbb{C}(X)^* & \xrightarrow{\delta} & \dots & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge^n \mathbb{C}(X)^* \\
\downarrow \eta_n(1) & & \downarrow \eta_n(2) & & & & \downarrow \eta_n(n) \\
\mathcal{A}^0(X)(n-1) & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^1(X)(n-1) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}^{n-1}(X)(n-1)
\end{array}$$

qui satisfait que

(a) $\eta_n(1)(\{x\}_n) = \widehat{\mathcal{L}}_n(x),$

(b) $d\eta_n(n)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \pi_n\left(\frac{dx_1}{x_1} \wedge \dots \wedge \frac{dx_n}{x_n}\right).$ Ici

$$\pi_n(a + bi) = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est impair,} \\ bi & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

(c) $\eta_n(m)(\star)$ définit une distribution sur $X(\mathbb{C}).$

Chapitre 3

La mesure de Mahler

Dans ce chapitre, on définira la mesure de Mahler et discutera de ses propriétés fondamentales.

3.1. La mesure de Mahler des polynômes à une variable

En 1933, Lehmer essaya de trouver des grands nombres premiers en factorisant des polynômes cyclotomiques dans [Leh33]. Pour un polynôme unitaire à coefficients entiers

$$f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

dont les racines sont $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, et n un entier positif, on considère

$$\Delta_n(f) = \prod_{j=1}^r (\gamma_j^n - 1).$$

Puisque $\Delta_n(f)$ s'agit de facteurs conjugués galoisiens qui sont des entiers algébriques, on voit que $\Delta_n(f) \in \mathbb{Z}$. Dénotons par Φ_n le n -ième polynôme cyclotomique. Alors on a

$$x^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(x).$$

Donc,

$$\Delta_n(f) = \prod_{m|n} \prod_{j=1}^r \Phi_m(\gamma_j).$$

Il suit que

Proposition 3.1.1. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire, et soient m, n des entiers positifs avec $m \mid n$. Alors $\Delta_m(f) \mid \Delta_n(f)$.

Pour que $\Delta_n(f)$ soit un nombre premier, il faut que n soit un nombre premier lui-même. De plus, si l'une des racines de f est une k -ième racine d'unité pour quelque $k \in \mathbb{N}$, on voit que $\Delta_k(f) = 0$, et puis $\Delta_{nk}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, on aimerait étudier $\Delta_n(f)$ seulement pour les polynômes f dont aucune racine est l'une d'unité.

Lehmer a trouvé dans sa recherche que pour $g(x) = x^3 - x - 1$,

$$\Delta_{113}(g) = 63\,088\,004\,325\,217$$

et

$$\Delta_{127}(g) = 3\,233\,514\,251\,032\,733$$

sont des nombres premiers. Il était particulièrement intéressé par les polynômes f pour lesquels $\frac{\Delta_{n+1}(f)}{\Delta_n(f)}$ est petit, c'est-à-dire la croissance de $\Delta_n(f)$ est lente par rapport à n , parce qu'il est plus probable que ces polynômes produisent un $\Delta_n(f)$ premier. La proposition suivante provient directement de la définition de $\Delta_n(f)$.

Proposition 3.1.2. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire tel qu'aucune racine n'est de norme 1. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n+1}(f)}{\Delta_n(f)} = \prod_{j=1}^r \max\{1, |\gamma_j|\},$$

où $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ sont les racines de f .

On peut définir une propriété des polynômes selon la proposition 3.1.2.

Définition 3.1.3. Soit

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_r \prod_{j=1}^r (x - \gamma_j) \in \mathbb{C}[x]$$

un polynôme non-nul. La mesure de Mahler de f est

$$M(f) = |a_r| \prod_{j=1}^r \max\{1, |\gamma_j|\},$$

et la mesure de Mahler logarithmique de f est

$$m(f) = \log M(f) = \log |a_r| + \sum_{j=1}^r \max\{0, \log |\gamma_j|\}.$$

Ici, $\log 0$ est traité comme $-\infty$, alors $\max\{0, \log 0\} = 0$.

Remarque 3.1.4. Il suit directement de la définition de la mesure de Mahler que cette mesure préserve la multiplication. Pour $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ des polynômes non-nuls, on a

$$M(fg) = M(f) \cdot M(g),$$

et

$$m(fg) = m(f) + m(g).$$

La mesure de Mahler doit son nom à Kurt Mahler, qui l'a introduite dans ses études sur la transcendance dans [Mah60] et dans [Mah62]. Il appela $M(f)$ une « mesure » afin de la distinguer des fonctions d'hauteur des polynômes.

On revient ici aux études de Lehmer. On démontre d'abord un théorème de Kronecker.

Théorème 3.1.5. Soit

$$f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

un polynôme unitaire irréductible dont les racines sont $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Si l'on a $|\gamma_j| \leq 1$ pour tout $1 \leq j \leq r$, alors f est un polynôme cyclotomique.

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons

$$f_n(x) = \prod_{j=1}^r (x - \gamma_j^n).$$

Écrivons

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^r a_{n,j} x^j.$$

Alors selon le théorème de Viète on a

$$a_{n,j} = (-1)^{r-j} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-j} \leq r} \gamma_{k_1}^n \gamma_{k_2}^n \cdots \gamma_{k_{r-j}}^n.$$

Puisque $|\gamma_t| \leq 1$ pour tout $1 \leq t \leq r$, on voit que

$$|a_{n,j}| \leq \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-j} \leq r} 1^n = \binom{r}{j}$$

De plus, $f_n(x)$ fait de facteurs conjugués qui sont des entiers algébriques dont le polynôme minimal est f , alors $a_{n,j} \in \mathbb{Z}$. Ainsi il n'y a que des choix finis de $a_{n,j}$ pour tout $1 \leq j \leq r$.

Il suit que

$$\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^r b_j x^j \mid b_j \in \mathbb{Z}, |b_j| \leq \binom{r}{j} \right\}$$

est un ensemble fini. Donc, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 \neq n_2$, tels que $f_{n_1} = f_{n_2}$. Ainsi les ensembles de racines de f_{n_1} et de f_{n_2} coïncident, c'est-à-dire,

$$\{\gamma_1^{n_1}, \dots, \gamma_r^{n_1}\} = \{\gamma_1^{n_2}, \dots, \gamma_r^{n_2}\}.$$

Supposons que $\gamma_j^{n_1} = \gamma_{\sigma(j)}^{n_2}$ pour tout $1 \leq j \leq r$. Alors σ est une permutation sur $\{1, 2, \dots, r\}$, ainsi $\sigma^l(1) = 1$ pour quelque $l \in \mathbb{N}$. Il suit que

$$\gamma_1^{n_1^l} = \left(\gamma_{\sigma(1)}^{n_1^{l-1}} \right)^{n_2} = \cdots = \gamma_{\sigma^l(1)}^{n_2^l} = \gamma_1^{n_2^l}.$$

Donc, γ_1 est une racine d'unité. Puisque f est un polynôme unitaire irréductible, f est le polynôme minimal de γ_1 . Ainsi f est un polynôme cyclotomique. \square

Le théorème précédent accompagné de la remarque 3.1.4 démontrent que si un polynôme unitaire à coefficients entiers a 1 comme sa mesure de Mahler, toutes ses racines non-nulles seront des racines d'unité. Alors ce polynôme est un produit de x et des polynômes cyclotomiques. Il semble naturel de demander si

$$\inf \left\{ M(f) \mid f \in \mathbb{Z}[x] \text{ unitaire, } M(f) > 1 \right\} \stackrel{?}{=} 1.$$

En fait, Lehmer a trouvé dans [Leh33] qu'il n'a pas pu obtenir un polynôme unitaire à coefficients entiers dont la mesure de Mahler est plus grande que 1, mais plus petite que

$$M(x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1) = 1,176\,280\,818\dots$$

La question reste ouverte jusqu'aujourd'hui.

Conjecture 3.1.6. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire dont la mesure de Mahler est strictement plus grand que 1. Alors

$$M(f) \geq M(x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1).$$

Définition 3.1.7. Soit $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de degré n . $f(x)$ est réciproque si

$$f(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Breusch [Bre51] a démontré le théorème suivant. Dans [Smy71], Smyth a prouvé le même résultat indépendamment.

Théorème 3.1.8. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire irréductible non-réciproque. Alors

$$M(f) \geq M(x^3 - x - 1) = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} = 1,324\,717\,957\dots$$

Un autre cas où le problème de Lehmer est résolu est quand le polynôme n'a que des racines réelles.

Théorème 3.1.9 ([Sch73]). Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire dont toutes les racines sont réelles. Alors

$$M(f) \geq M(x^2 - x - 1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\,033\,988\dots$$

En 1979, Dobrowski a proposé dans [Dob79] un minorant pour la mesure de Mahler.

Théorème 3.1.10. Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire, irréductible et cyclotomique de degré d . Alors il existe un constant c tel que

$$M(f) > 1 + c \left(\frac{\log \log d}{\log d} \right)^3.$$

La mesure de Mahler porte une autre forme. Pour la introduire, on rappelle d'abord un théorème de l'analyse complexe

Théorème 3.1.11 (Formule de Jensen). Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$\int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta} - \alpha| d\theta = \max \{0, \log |\alpha|\}.$$

DÉMONSTRATION. Le cas où $|\alpha| = 0$ est trivial.

Supposons que $|\alpha| = 1$. Alors écrivons $\alpha = e^{i\varphi}$ où $\varphi \in [0, 2\pi[$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta} - \alpha| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - e^{i\varphi}| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\varphi}| + \log |e^{i(\theta-\varphi)} - 1| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i(\theta-\varphi)} - 1| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \log |e^{i\theta} - 1| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\varphi}^0 + \int_0^{2\pi-\varphi} \right) \log |e^{i\theta} - 1| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{2\pi-\varphi}^{2\pi} + \int_0^{2\pi-\varphi} \right) \log |e^{i\theta} - 1| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta. \end{aligned}$$

Puisque $\log |z| = \operatorname{Re}(\log(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on voit que

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \log(1 - e^{i\theta}) d\theta \right). \quad (3.1.1)$$

Pour évaluer le côté droit, on rappelle que le dilogarithme est une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>1}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \log(1 - e^{i\theta}) d\theta \right) &= \operatorname{Re} \left(\lim_{\psi \rightarrow 0} \int_{\psi}^{2\pi-\psi} \log(1 - e^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\lim_{\psi \rightarrow 0} \left(\operatorname{Li}_2 \left(ie^{i\theta} \right) \Big|_{\theta=\psi}^{2\pi-\psi} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} (i(\operatorname{Li}_2(1) - \operatorname{Li}_2(1))) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta} - \alpha| d\theta = 0.$$

Si $|\alpha| > 1$, on voit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log |e^{2\pi i\theta} - \alpha| d\theta &= \int_0^1 \log |\alpha| + \log |\alpha^{-1} e^{2\pi i\theta} - 1| d\theta \\ &= \log |\alpha| + \int_0^1 \log |\alpha^{-1} e^{2\pi i\theta} - 1| d\theta, \end{aligned}$$

où $0 < |\alpha^{-1}| < 1$. Donc, il nous reste à démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $0 < |\alpha| < 1$, on a

$$\int_0^1 \log |\alpha e^{2\pi i\theta} - 1| d\theta = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log |\alpha e^{2\pi i\theta} - 1| d\theta &= \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \log (1 - \alpha e^{2\pi i\theta}) d\theta \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\pi} \operatorname{Li}_2 (\alpha e^{2\pi i\theta}) \Big|_{\theta=0}^1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration de la formule de Jensen. □

Corollaire 3.1.12. Soit

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_r \prod_{j=1}^r (x - \gamma_j) \in \mathbb{C}[x]$$

un polynôme non-nul. Alors

$$m(f) = \int_0^1 \log |f(e^{2\pi i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \log |f(t)| \frac{dt}{t},$$

où $\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| = 1\}$ est le 1-tore.

DÉMONSTRATION. Le corollaire suit directement de la remarque 3.1.4 et de la formule de Jensen. □

3.2. La mesure de Mahler des polynômes à plusieurs variables

Après que l'on a défini la mesure de Mahler sur les polynômes à une variable, il est naturel de trouver une façon pour étendre la mesure de Mahler aux polynômes à plusieurs variables. La définition 3.1.3 s'agit des zéros des polynômes à variable unique. Heureusement, la formule de Jensen nous a fourni une extension intuitive de la mesure de Mahler.

Définition 3.2.1. Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme non-nul à n variables. Alors la mesure de Mahler (logarithmique) de f est

$$\begin{aligned} m(f) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |f(e^{2\pi i\theta_1}, \dots, e^{2\pi i\theta_n})| d\theta_1 \cdots d\theta_n \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\mathbb{T}^n} \log |f(t_1, \dots, t_n)| \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ est la n -tore.

On peut toujours prendre la mesure de Mahler (régulière) de f avec

$$M(f) = e^{m(f)}.$$

La multiplication est encore préservée par la mesure de Mahler pour les polynômes à plusieurs variables selon sa définition. Nous avons les égalités

$$M(fg) = M(f)M(g)$$

et

$$m(fg) = m(f) + m(g)$$

pour tous les polynômes f et g .

Remarque 3.2.2. Cette intégration est toujours bien-définie au sens d'une intégration impropre. On peut trouver une démonstration dans [EW99]. De plus, pour tout $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, on a $m(f) \geq 0$

Remarque 3.2.3. On peut ensuite étendre cette définition de la mesure de Mahler aux fonctions rationnelles, c'est-à-dire pour une fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, on laisse

$$m(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |f(e^{2\pi i\theta_1}, \dots, e^{2\pi i\theta_n})| d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

etc.

Dans [Boy81], Boyd a posé un lien entre la mesure de Mahler des polynômes à une variable et celle des polynômes à plusieurs variables. Cette proposition a été démontrée par Lawton dans [Law83].

Théorème 3.2.4. Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ un polynôme à deux variables. Alors

$$m(f(x_1, x_2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(f(x, x^n)).$$

Avec le théorème pour 2 variables, il est naturel de se demander si l'on peut étendre ce théorème au cas général.

Corollaire 3.2.5. Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$. Alors

$$m(f(x_1, \dots, x_k)) = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \cdots \lim_{n_k \rightarrow \infty} m(f(x, x^{n_2}, \dots, x^{n_k})).$$

Remarque 3.2.6. Les limites dans le corollaire 3.2.5 doivent être prises indépendamment pour chaque variable.

On fournit ici quelques valeurs explicites de la mesure de Mahler des polynômes à plusieurs variables.

Exemple 3.2.7. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Alors

$$m(a_1x_1 + a_2x_2) = \log(\max\{|a_1|, |a_2|\}).$$

DÉMONSTRATION. Si $|a_2| = 0$ on a directement

$$m(a_1x_1 + a_2x_2) = m(a_1x_1) = \log |a_1| = \log(\max\{|a_1|, |a_2|\}).$$

Sinon,

$$\begin{aligned} m(a_1x_1 + a_2x_2) &= \int_0^1 \int_0^1 \log |a_1 e^{2\pi i \theta_1} + a_2 e^{2\pi i \theta_2}| \, d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\log |a_2| + \log \left| \frac{a_1}{a_2} e^{2\pi i \theta_1} + e^{2\pi i \theta_2} \right| \right) \, d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \log |a_2| + \int_0^1 \int_0^1 \log \left| \frac{a_1}{a_2} e^{2\pi i \theta_1} + e^{2\pi i \theta_2} \right| \, d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \log |a_2| + \int_0^1 \max \left\{ 0, \log \left| \frac{a_1}{a_2} e^{2\pi i \theta_1} \right| \right\} \, d\theta_1 && \text{selon la formule de Jensen} \\ &= \log |a_2| + \int_0^1 \max \left\{ 0, \log \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \right\} \, d\theta_1 \\ &= \log |a_2| + \max \{0, \log |a_1| - \log |a_2|\} \\ &= \max \{\log |a_1|, \log |a_2|\} \\ &= \log(\max\{|a_1|, |a_2|\}). \end{aligned}$$

□

Exemple 3.2.8 ([Mai00], proposition 7.3.1). Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ avec $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Alors

$$m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = \begin{cases} \frac{\varphi_1}{\pi} \log |a_1| + \frac{\varphi_2}{\pi} \log |a_2| + \frac{\varphi_3}{\pi} \log |a_3| + \frac{1}{\pi} D \left(\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) & \text{si } \Delta, \\ \log(\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, \triangle dénote que $|a_1|, |a_2|$ et $|a_3|$ peuvent former un triangle du plan, c'est-à-dire ils vérifient les égalités $|a_r| + |a_s| \geq |a_t|$ pour tous $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$. $D(\cdot)$ dénote le dilogarithme de Bloch–Wigner défini dans (1.5.1). φ_1, φ_2 et φ_3 sont les mesures principales non orientées des angles aux sommets A_1, A_2 et A_3 d'un triangle du plan $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $|A_2A_3| = |a_1|$, $|A_3A_1| = |a_2|$ et $|A_1A_2| = |a_3|$.

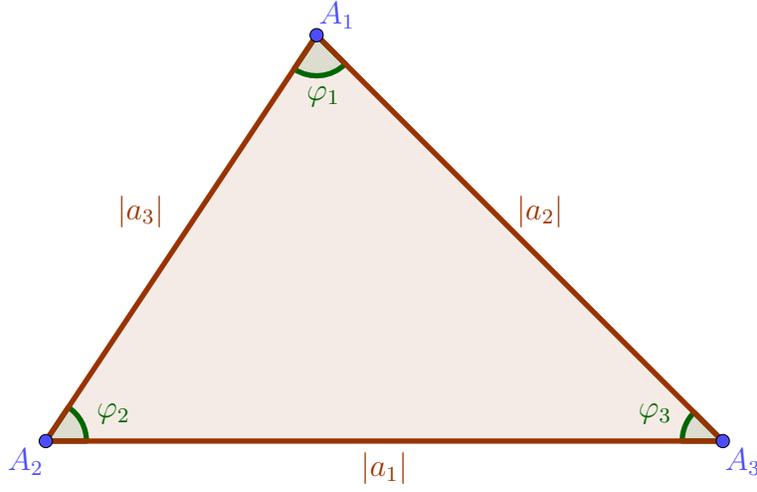


Figure 3.1. Une illustration du triangle $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$

DÉMONSTRATION. On voit de la définition de la mesure de Mahler que

$$\begin{aligned} m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \log |a_1e^{2\pi i\theta_1} + a_2e^{2\pi i\theta_2} + a_3e^{2\pi i\theta_3}| \, d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a_1e^{i\theta_1} + a_2e^{i\theta_2} + a_3e^{i\theta_3}| \, d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Écrivons $a_1 = |a_1|e^{i\tau_1}$, $a_2 = |a_2|e^{i\tau_2}$ et $a_3 = |a_3|e^{i\tau_3}$. Puisque $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ est une fonction homogène, on peut prendre un change de variable $\theta_2 \leftarrow \theta_2 - \theta_1 + \tau_2$ et $\theta_3 \leftarrow \theta_3 - \theta_1 + \tau_3$, en éliminant la variable θ_1 , et en prenant la partie réelle de a_2 et a_3 respectivement. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a_1e^{i\theta_1} + a_2e^{i\theta_2} + a_3e^{i\theta_3}| \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2\pi \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} + |a_3|e^{i\theta_3} \right| \, d\theta_3 d\theta_2. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Selon la formule de Jensen, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} + |a_3|e^{i\theta_3} \right| d\theta_3 d\theta_2 \\
&= 2\pi \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \max \left\{ \log |a_3|, \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| \right\} d\theta_2 \\
&= 2\pi \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \log \left(\max \left\{ |a_3|, \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| \right\} \right) d\theta_2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \log \left(\max \left\{ |a_3|, \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| \right\} \right) d\theta_2. \quad (3.2.3)$$

Supposons que $|a_1|$, $|a_2|$ et $|a_3|$ peuvent être les longueurs des trois côtés d'un triangle du plan $\mathcal{T} = (A_1, A_2, A_3)$, où $|A_2A_3| = |a_1|$, $|A_3A_1| = |a_2|$ et $|A_1A_2| = |a_3|$. Sans perte de généralité, on suppose que $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3|$. Soient φ_1 , φ_2 et φ_3 les mesures principales non orientées des angles aux sommets A_1 , A_2 et A_3 respectivement, et soit $\psi = \pi - \varphi_3$. Alors $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$. Puisque $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$, on voit que $\varphi_3 \leq \frac{\pi}{3}$, et que $\psi \geq \frac{2\pi}{3}$. Selon la loi des cosinus, on a

$$\begin{aligned}
\left| |a_1| + |a_2|e^{i\psi} \right|^2 &= |a_1|^2 + |a_2|^2 \cos^2 \psi + 2|a_1| \cdot |a_2| \cos \psi + |a_2|^2 \sin^2 \psi \\
&= |a_1|^2 + |a_2|^2 - 2|a_1| \cdot |a_2| \cos \varphi_3 \\
&= |a_3|^2.
\end{aligned}$$

Donc, $\left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| \geq |a_3|$ si et seulement si $\cos \theta_2 \geq \cos \psi$, c'est-à-dire

$$\theta_2 \in [0, \psi] \cup [2\pi - \psi, 2\pi].$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \log \left(\max \left\{ |a_3|, \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| \right\} \right) d\theta_2 \\
&= \left(\int_0^\psi + \int_{2\pi-\psi}^{2\pi} \right) \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 + \int_\psi^{2\pi-\psi} \log |a_3| d\theta_2 \\
&= \left(\int_0^\psi + \int_{-\psi}^0 \right) \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 + (2\pi - 2\psi) \log |a_3| \\
&= \int_{-\psi}^\psi \log \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 + 2\varphi_3 \log |a_3| \\
&= \int_{-\psi}^\psi \log \left| 1 + \frac{|a_2|}{|a_1|} e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 + 2\psi \log |a_1| + 2\varphi_3 \log |a_3|.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\psi}^{\psi} \log \left| 1 + \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 &= \int_{-\psi}^{\psi} \operatorname{Re} \left(\log \left(1 + \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta_2} \right) \right) d\theta_2 \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{-\psi}^{\psi} \log \left(1 + \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta_2} \right) d\theta_2 \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} i \frac{-\log(1-z)}{z} dz \right), \end{aligned}$$

où γ dénote le parcours de $z = -\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi}$ à $-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\psi}$ suivant le cercle $z = -\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta}$.

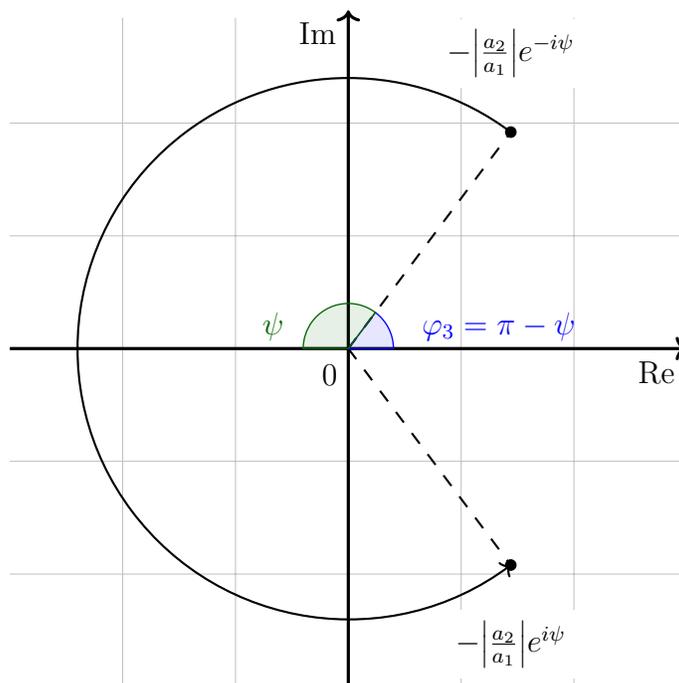


Figure 3.2. Le parcours d'intégration γ

Puisque le parcours γ ne traverse pas la coupure du logarithme, on peut prendre ici le dilogarithme.

$$\begin{aligned} &\int_{-\psi}^{\psi} \log \left| 1 + \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} i \frac{-\log(1-z)}{z} dz \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\int_{\gamma} \frac{-\log(1-z)}{z} dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\psi} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi} \right) \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi} \right) \right) - \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\psi} \right) \right) \\
&= 2 \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi} \right) \right) \qquad \text{selon le lemme 1.2.5.}
\end{aligned}$$

Notons que

$$-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i(\pi-\psi)} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3},$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{-\psi}^{\psi} \log \left| 1 + \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\theta_2} \right| d\theta_2 &= 2 \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(-\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{-i\psi} \right) \right) \\
&= 2 \operatorname{Im} \left(\operatorname{Li}_2 \left(\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) \right) \\
&= 2D \left(\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) - 2 \log \left| \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right| \arg \left(1 - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) \\
&= 2D \left(\left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) - 2 \log \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \arg \left(1 - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right).
\end{aligned}$$

Comme

$$1 - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} = \left(1 - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \cos \varphi_3 \right) - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| i \sin \varphi_3,$$

on a

$$\begin{aligned}
\tan \left(\arg \left(1 - \left| \frac{a_2}{a_1} \right| e^{i\varphi_3} \right) \right) &= \frac{-|a_2| \sin \varphi_3}{|a_1| - |a_2| \cos \varphi_3} \\
&= \frac{-|a_2| \sin \varphi_3}{|a_1| - |a_2| \cdot \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 - |a_3|^2}{2|a_1| \cdot |a_2|}} \qquad \text{selon la loi des cosinus} \\
&= \frac{-|a_2| \sin \varphi_3}{\frac{|a_1|^2 + |a_3|^2 - |a_2|^2}{2|a_1|}} \\
&= \frac{-|a_2| \cdot \frac{\sin \varphi_3}{|a_3|}}{\frac{|a_1|^2 + |a_3|^2 - |a_2|^2}{2|a_1| \cdot |a_3|}} \\
&= \frac{-|a_2| \cdot \frac{\sin \varphi_2}{|a_2|}}{\cos \varphi_2} \qquad \text{selon les lois des sinus et des cosinus} \\
&= -\tan \varphi_2.
\end{aligned}$$

Puisque $\text{Im}\left(1 - \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) < 0$, on voit que $\sin\left(\arg\left(1 - \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right)\right) < 0$. Étant donné que $\sin(-\varphi_2) < 0$, on conclut que

$$\arg\left(1 - \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) = -\varphi_2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{-\psi}^{\psi} \log\left|1 + \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\theta_2}\right|d\theta_2 &= 2D\left(\left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) - 2\log\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\arg\left(1 - \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) \\ &= 2D\left(\left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) + 2\varphi_2\log\left|\frac{a_2}{a_1}\right|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \log\left(\max\left\{|a_3|, \left| |a_1| + |a_2|e^{i\theta_2} \right|\right\}\right) d\theta_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \left(\int_{-\psi}^{\psi} \log\left|1 + \left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\theta_2}\right|d\theta_2 + 2\psi\log|a_1| + 2\varphi_3\log|a_3| \right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \left(2D\left(\left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) + 2\varphi_2\log\left|\frac{a_2}{a_1}\right| + 2\psi\log|a_1| + 2\varphi_3\log|a_3| \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(D\left(\left|\frac{a_2}{a_1}\right|e^{i\varphi_3}\right) + \varphi_1\log|a_1| + \varphi_2\log|a_2| + \varphi_3\log|a_3| \right), \end{aligned}$$

comme $\psi = \pi - \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$.

Au cas où $|a_1|$, $|a_2|$ et $|a_3|$ ne peuvent pas former un triangle du plan, on peut réécrire (3.2.3) sous la forme

$$m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \log\left(\max\left\{|a_r|, \left| |a_s| + |a_t|e^{i\theta_t} \right|\right\}\right) d\theta_t,$$

où $|a_r| = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}$, et $\{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}$, parce que le choix de a_1 , a_2 et de a_3 dans (3.2.3) est arbitraire. Alors

$$|a_r| > |a_s| + |a_t| \geq \left| |a_s| + |a_t|e^{i\theta_t} \right|,$$

et on a

$$\begin{aligned} m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \log\left(\max\left\{|a_r|, \left| |a_s| + |a_t|e^{i\theta_t} \right|\right\}\right) d\theta_t \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \log|a_r|d\theta_t \\ &= \log|a_r| \\ &= \log(\max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|\}). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.9. L'égalité (3.2.2) indique que

$$m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = m(|a_1| + |a_2|x_2 + |a_3|x_3).$$

Une opération analogue nous donne aussi que

$$m(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = m(a_1 + a_2x_2 + a_3x_3).$$

Remarque 3.2.10. Selon le théorème 1.6.1, la valeur $D\left(\left|\frac{a_r}{a_s}\right|e^{i\varphi_t}\right)$ est en fait une constante pour tout $\{r,s,t\} = \{1,2,3\}$.

Le prochain exemple a été calculé par Smyth et publié par Boyd dans [Boy81].

Exemple 3.2.11.

$$m(1 + x + y + z) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3),$$

où ζ dénote la fonction zêta de Riemann.

On donne ici un autre exemple calculé par Lalín dans [Lal03], qui est relié à $\zeta(5)$.

Exemple 3.2.12.

$$m((1+v)(1+w)(1+x) + (1-v)(1-w)(y+z)) = \frac{93}{\pi^4}\zeta(5).$$

On voudrait aussi classifier les polynômes à coefficients entiers à plusieurs variables dont la mesure de Mahler logarithmique est 0, comme ce que l'on a fait pour les polynômes à variable unique. En fait, Smyth a démontré le théorème suivant dans [Smy81a].

Théorème 3.2.13. Soit $f \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ un polynôme primitif. Alors $m(f) = 0$ si et seulement si f est un produit de monômes et de polynômes cyclotomiques évalués en des monômes.

Chapitre 4

La computation de la mesure de Mahler à l'aide de régulateur

Nous expliquerons dans ce chapitre comment nous pouvons calculer la mesure de Mahler en utilisant le régulateur, et démontrerons le théorème principal de ce mémoire en appliquant cette méthode.

4.1. Le cas à deux variables

Soit $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme à deux variables. On peut le considérer comme un polynôme d'une variable y dont les coefficients sont des polynômes de x , c'est-à-dire

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^d p_j(x)y^j,$$

où d est le degré de f par rapport à y . Alors on peut écrire davantage $f(x,y)$ sous la forme

$$f(x,y) = p_d(x) \prod_{j=1}^d (y - y_j(x)), \quad (4.1.1)$$

où $y_j(x)$ sont des fonctions algébriques de x . On calcule la mesure de Mahler de f en utilisant (4.1.1).

$$\begin{aligned} m(f) &= m\left(p_d(y) \prod_{j=1}^d (y - y_j(x))\right) \\ &= m(p_d) + \sum_{j=1}^d m(y - y_j(x)) \\ &= m(p_d) + \sum_{j=1}^d \int_0^1 \int_0^1 \log |e^{2\pi iv} - y_j(e^{2\pi iu})| dv du \\ &= m(p_d) + \sum_{j=1}^d \int_0^1 \log^+ |y_j(e^{2\pi iu})| du \end{aligned}$$

$$=m(p_d) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{T}^1} \log^+ |y_j(x)| \frac{dx}{x}.$$

Ici $\log^+ |z| = \log(\max\{|z|, 1\})$. Prenons la région

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0, |x| = 1, |y| \geq 1\},$$

et définissons le régulateur dans la région $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ moins l'ensemble Z des zéros et des pôles de x et de y :

$$\eta(x, y) = -i\eta_2(2)(x \wedge y) = \log |x| d \arg y - \log |y| d \arg x, \quad (4.1.2)$$

où $\eta_2(2)$ est la forme différentielle définie dans la définition 2.2.3.

Remarque 4.1.1. Le coefficient $-i$ est pris dans (4.1.2) pour que l'on puisse éliminer le coefficient i dans $\eta_2(2)(x \wedge y)$.

On note que la frontière de γ est

$$\partial\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0, |x| = 1, |y| = 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} m(f) &= m(p_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}^1} \sum_{j=1}^d \log^+ |y_j(x)| \frac{dx}{x} \\ &= m(p_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log |y| \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Puisque $|x| = 1$ sur γ , on a

$$\operatorname{Re} \left(\frac{dx}{x} \right) = d \log |x| = 0.$$

Donc,

$$\frac{dx}{x} = i \operatorname{Im} \left(\frac{dx}{x} \right) = i d \arg x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(f) &= m(p_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \log |y| \frac{dx}{x} \\ &= m(p_d) + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \log |y| d \arg x \\ &= m(p_d) - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \eta(x, y), \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

comme $\log |x| = 0$ sur γ .

Le théorème 2.2.7 nous dit que

$$d\eta(x,y) = \text{Im} \left(\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y} \right),$$

alors $\eta(x,y)$ est habituellement fermé dans la région $C \setminus Z$. Donc, si l'on sait que η est exact, on peut faire l'intégration en utilisant le théorème de Stokes. Le même théorème nous dit que

$$\eta(x,1-x) = dD(x),$$

où $D(\cdot)$ est le dilogarithme de Bloch–Wigner. Ainsi η est exact si

$$x \wedge y = \sum_j r_j x_j \wedge (1 - x_j)$$

dans $\Lambda^2(\mathbb{C}(C)^*) \otimes \mathbb{Q}$. Dans cette situation, on voit que

$$\eta(x,y) = \sum_j r_j dD(x_j) = dD \left(\sum_j r_j \{x_j\}_2 \right).$$

4.2. Un exemple au cas à deux variables

L'intégration avec le régulateur peut parfois simplifier la computation de la mesure de Mahler. On va le montrer en évaluant encore une fois le cas de l'exemple 3.2.8 où $|a_1|, |a_2|$ et $|a_3|$ peuvent former un triangle du plan.

Soit

$$f(x,y) = |a_1| + |a_2|x + |a_3|y$$

le polynôme simplifié d'après (3.2.2), où $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Soit $b_1 = \left| \frac{a_1}{a_3} \right|$, et soit $b_2 = \left| \frac{a_2}{a_3} \right|$. Alors

$$f(x,y) = |a_3|(b_1 + b_2x + y),$$

et selon la ligne (4.1.3),

$$m(f) = m(|a_3|) - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \eta(x,y),$$

où

$$\gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid b_1 + b_2x + y = 0, |x| = 1, |b_1 + b_2x| \geq 1 \right\}.$$

Dans ce cas, on a sur γ

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \wedge (-b_1 - b_2x) \\ &= x \wedge (-1) + x \wedge (b_1 + b_2x) \\ &= x \wedge b_1 + x \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x \right) \end{aligned}$$

selon le lemme 2.1.3

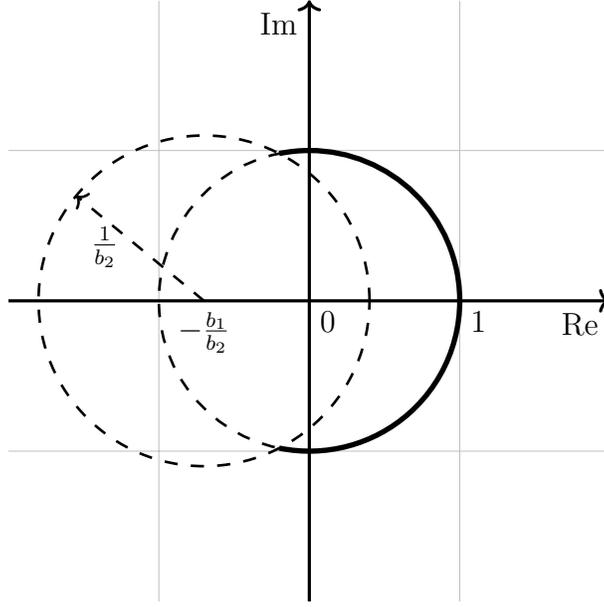


Figure 4.1. $x \in \mathbb{C}$ avec $(x, -b_1 - b_2x) \in \gamma$

$$\begin{aligned}
&= x \wedge b_1 + \left(\frac{b_2}{b_1}x\right) \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) + \frac{b_1}{b_2} \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) \\
&= x \wedge b_1 + \frac{b_1}{b_2} \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) \\
&\quad + \left(-\frac{b_2}{b_1}x\right) \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) + (-1) \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) \\
&= x \wedge b_1 + \frac{b_1}{b_2} \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) + \left(-\frac{b_2}{b_1}x\right) \wedge \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\eta(x,y) &= -i\eta_2(2)(x \wedge y) \\
&= \log|x|d\arg b_1 - \log|b_1|d\arg x + dD\left(-\frac{b_2}{b_1}x\right) \\
&\quad + \log\left|\frac{b_1}{b_2}\right|d\arg\left(1 + \frac{b_2}{b_1}x\right) - \log\left|1 + \frac{b_2}{b_1}x\right|d\arg\frac{b_1}{b_2}.
\end{aligned}$$

Puisque b_1 et $\frac{b_2}{b_1}$ sont des constantes, on voit que

$$d \arg b_1 = 0,$$

et que

$$d \arg \frac{b_2}{b_1} = 0.$$

Ainsi

$$\eta(x, y) = \log \left| \frac{b_1}{b_2} \right| d \arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) - \log |b_1| d \arg x + dD \left(-\frac{b_2}{b_1} x \right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} 2\pi m(f) &= 2\pi m(|a_3|) - \int_{\gamma} \eta(x, y) \\ &= 2\pi \log |a_3| - \int_{\gamma} \log \left| \frac{b_1}{b_2} \right| d \arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) + \int_{\gamma} \log |b_1| d \arg x - \int_{\gamma} dD \left(-\frac{b_2}{b_1} x \right) \\ &= 2\pi \log |a_3| - \log \left| \frac{b_1}{b_2} \right| \left(\arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) \right) \Big|_{\partial\gamma} + \log |b_1| \arg x \Big|_{\partial\gamma} - D \left(-\frac{b_2}{b_1} x \right) \Big|_{\partial\gamma}, \end{aligned}$$

selon le théorème de Stokes. On voudrais alors étudier

$$\partial\gamma = \left\{ (x, -b_1 - b_2x) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| = 1 = |b_1 + b_2x| \right\}.$$

On voit que si $(x, -b_1 - b_2x) \in \partial\gamma$ pour quelque $x \in \mathbb{C}$, on a $|x| = 1$ et $\left| x + \frac{b_1}{b_2} \right| = \frac{1}{b_2}$. Donc, x , 0 et $-\frac{b_1}{b_2}$ forment un triangle du plan dont les côtés ont les longueurs $\frac{b_1}{b_2} = \frac{|a_1|}{|a_2|}$, $\frac{1}{b_2} = \frac{|a_3|}{|a_2|}$, et $1 = \frac{|a_2|}{|a_2|}$ respectivement. Ce triangle est similaire au triangle avec longueurs des côtés $|a_1|$, $|a_2|$ et $|a_3|$. Ainsi

$$\partial\gamma = \left\{ \left(e^{i(\pi-\varphi_3)}, -b_1 - b_2 e^{i(\pi-\varphi_3)} \right), \left(e^{i(-\pi+\varphi_3)}, -b_1 - b_2 e^{i(-\pi+\varphi_3)} \right) \right\}.$$

Puisque $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) &= \arg \left(\frac{b_1}{b_2} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) \right) \\ &= \arg \left(x - \left(-\frac{b_1}{b_2} \right) \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\left(\arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1} x \right) \right) \Big|_{\partial\gamma} = \varphi_2 - (-\varphi_2) = 2\varphi_2.$$

De plus, on a

$$\arg x \Big|_{\partial\gamma} = (\pi - \varphi_3) - (-\pi + \varphi_3) = 2(\pi - \varphi_3) = 2\varphi_1 + 2\varphi_2,$$

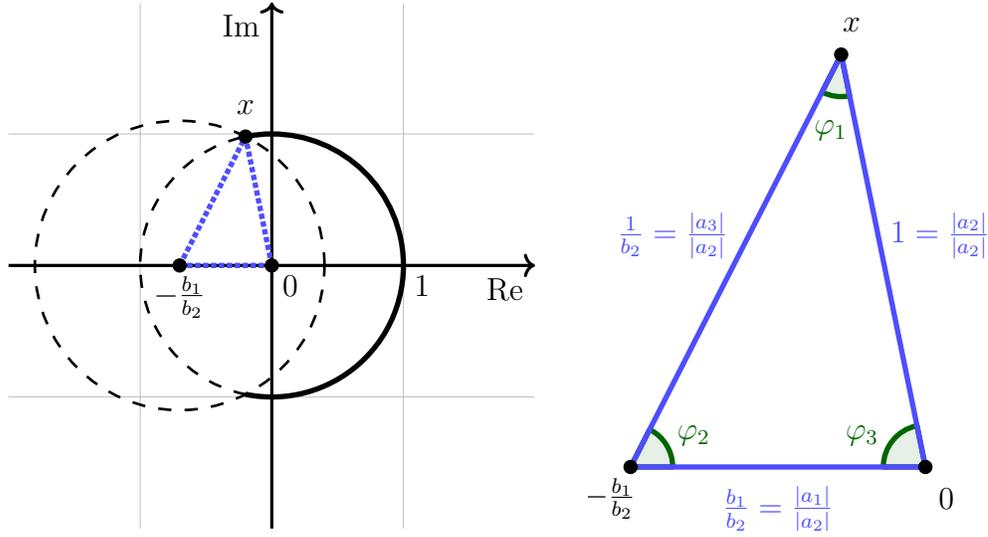


Figure 4.2. Le triangle avec des sommets x , 0 et $-\frac{b_1}{b_2}$

et

$$\begin{aligned}
 D\left(-\frac{b_2}{b_1}x\right)\Big|_{\partial\gamma} &= D\left(-\frac{b_2}{b_1}e^{i(\pi-\varphi_3)}\right) - D\left(-\frac{b_2}{b_1}e^{i(-\pi+\varphi_3)}\right) \\
 &= D\left(-\frac{|a_2|}{|a_1|} \cdot (-e^{-i\varphi_3})\right) - D\left(-\frac{|a_2|}{|a_1|} \cdot (-e^{i\varphi_3})\right) \\
 &= -D\left(\frac{|a_2|}{|a_1|}e^{i\varphi_3}\right) - D\left(\frac{|a_2|}{|a_1|}e^{i\varphi_3}\right) \\
 &= -2D\left(\frac{|a_2|}{|a_1|}e^{i\varphi_3}\right),
 \end{aligned}$$

selon le théorème 1.2.4. Ainsi

$$\begin{aligned}
 2\pi m(f) &= 2\pi \log |a_3| - \log \left| \frac{b_1}{b_2} \right| \left(\arg \left(1 + \frac{b_2}{b_1}x \right) \right) \Big|_{\partial\gamma} + \log |b_1| \arg x \Big|_{\partial\gamma} - D\left(-\frac{b_2}{b_1}x\right)\Big|_{\partial\gamma} \\
 &= 2\pi \log |a_3| - \log \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \cdot (2\varphi_2) + \log \left| \frac{a_1}{a_3} \right| \cdot (2\varphi_1 + 2\varphi_2) + 2D\left(\frac{|a_2|}{|a_1|}e^{i\varphi_3}\right) \\
 &= 2\varphi_3 \log |a_3| + 2\varphi_1 \log |a_1| + 2\varphi_2 \log |a_2| + 2D\left(\frac{|a_2|}{|a_1|}e^{i\varphi_3}\right).
 \end{aligned}$$

Le résultat se conforme avec la computation dans le chapitre dernier.

4.3. Le cas à trois variables

On voudrait alors étendre cette computation au cas à trois variables. On va suivre dans cette section ce que Lalín a fait dans [Lal07]. Soit $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ un polynôme à trois variables. Prenons le régulateur défini sur $S \setminus Z$ où

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$$

et Z est l'ensemble des zéros et des pôles de x , de y et de z

$$\begin{aligned} \eta(x,y,z) &:= \eta_3(3)(x \wedge y \wedge z) \\ &= \log |x| \left(\frac{1}{3} d \log |y| \wedge d \log |z| - d \arg y \wedge d \arg z \right) \\ &\quad + \log |y| \left(\frac{1}{3} d \log |z| \wedge d \log |x| - d \arg z \wedge d \arg x \right) \\ &\quad + \log |z| \left(\frac{1}{3} d \log |x| \wedge d \log |y| - d \arg x \wedge d \arg y \right). \end{aligned}$$

Alors avec un processus qui est similaire à ce que l'on a fait au cas à deux variables, on peut écrire

$$m(f) = m(f^*) - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\Gamma} \eta(x,y,z). \quad (4.3.1)$$

Ici f^* est le coefficient principal du polynôme $f \in \mathbb{C}[x,y][z]$ vu comme un polynôme à variable unique de z , et Γ dénote la région

$$\Gamma = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid |x| = |y| = 1, |z| \geq 1\}.$$

Le théorème 2.2.7 indique que $d\eta(x,y,z) = \operatorname{Re} \left(\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y} \wedge \frac{dz}{z} \right)$, alors η est fermé dans $S \setminus Z$. Ainsi si η est exact, on peut accomplir l'intégration avec le théorème de Stokes. Selon le théorème 2.2.7, on voit que

$$\eta(x,1-x,y) = d\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes y).$$

Rappelons-nous de la définition 2.2.3 que

$$\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes y) = -D(x) d \arg y + \frac{1}{3} \log |y| (\log |1-x| d \log |x| - \log |x| d \log |1-x|).$$

Donc, si l'on a

$$x \wedge y \wedge z = \sum_j r_j x_j \wedge (1-x_j) \wedge y_j$$

dans $\wedge^3(\mathbb{C}(S)^*) \otimes \mathbb{Q}$, η est exact et on peut utiliser le théorème de Stokes. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \eta(x,y,z) &= \int_{\Gamma} \sum_j r_j \eta(x_j, 1-x_j, y_j) \\
&= \sum_j \int_{\Gamma} \eta(x_j, 1-x_j, y_j) \\
&= \sum_j \int_{\Gamma} d\eta_3(2)(\{x_j\}_2 \otimes y_j) \\
&= \int_{\partial\Gamma} \sum_j \eta_3(2)(\{x_j\}_2 \otimes y_j) \\
&= \int_{\partial\Gamma} \eta_3(2) \left(\sum_j \{x_j\}_2 \otimes y_j \right).
\end{aligned}$$

Selon la définition de Γ , on a

$$\partial\Gamma = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid |x| = |y| = |z| = 1\}.$$

On voit aussi du théorème 2.2.7 que

$$\eta_3(2)(\{x\} \otimes x) = d\mathcal{L}_3(x).$$

4.4. L'exemple de $x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$

Dans cette section, on va démontrer

Théorème 4.4.1.

$$\begin{aligned}
&m(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z) \\
&= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) - \frac{1}{(n-1)\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \left(12 - \frac{3}{n(n-1)}\right) \zeta(3),
\end{aligned}$$

par la méthode susmentionnée. Dénotons $f(x,y,z) = x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$.

4.4.1. L'exactitude de f

On commence en transformant $x \wedge y \wedge z$ en une forme exacte. Puisque l'on fait l'opération sur $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$, on a

$$z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge z &= x \wedge y \wedge \left(-\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \right) \\ &= x \wedge y \wedge (-1) + x \wedge y \wedge \frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \\ &= x \wedge y \wedge \frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \\ &= x \wedge y \wedge \frac{x^n + 1}{x - 1} + x \wedge y \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right). \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Pour le premier terme dans (4.4.1), on a

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge \frac{x^n + 1}{x - 1} &= -\frac{1}{n} x^n \wedge (x^n + 1) \wedge y + x \wedge (x - 1) \wedge y \\ &= x \wedge (1 - x) \wedge y - \frac{1}{n} (-x^n) \wedge (1 + x^n) \wedge y \\ &= x \wedge (1 - x) \wedge y - \frac{1}{n} (-x^n) \wedge (1 - (-x^n)) \wedge y. \end{aligned}$$

Pour le deuxième, on voit que

$$\begin{aligned} x \wedge y \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) &= x \wedge \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &\quad - x \wedge \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &= \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \wedge x \\ &\quad - x \wedge (x^{n-1} + 1) \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &\quad + x \wedge (1 + x^n) \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &= \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \wedge \left(1 - \left(-\left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \right) \wedge x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{n-1}(-x^{n-1}) \wedge (1 - (-x^{n-1})) \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1}\right)y\right) \\
& + \frac{1}{n}(-x^n) \wedge (1 - (-x^n)) \wedge \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1}\right)y\right).
\end{aligned}$$

Ainsi on veut faire l'intégration

$$\int_{\partial\Gamma} \eta_3(2)(\Delta), \quad (4.4.2)$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta = & \{x\}_2 \otimes y - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x \\
& + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right).
\end{aligned}$$

4.4.2. La frontière $\partial\Gamma$

Avant de calculer l'intégration (4.4.2), il faut savoir ce qu'est $\partial\Gamma$. Notons que $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ est un polynôme non-réciproque, et on voit que

$$f(x,y,z) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$. Puisque

$$\partial\Gamma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x,y,z) = 0, |x| = |y| = |z| = 1 \right\},$$

on a pour tout $(x,y,z) \in \partial\Gamma$ que

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right).$$

Donc, pour tout $(x,y,z) \in \partial\Gamma$,

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = f(x,y,z) = 0.$$

Soit $(x,y,z) \in \partial\Gamma$. Alors $f(x,y,z) = 0$, qui implique que

$$z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1}.$$

De plus, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = 0$, qui nous dit que

$$z = -\frac{x^{-1} - 1}{x^{-n} + 1 + (x^{1-n} + 1)y^{-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{x^{-1} - 1}{x^{-n} + 1 + (x^{1-n} + 1)y^{-1}} = \frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1}.$$

Il suit que

$$(x - 1)(x^{-1} - 1) = (x^{-n} + 1 + (x^{1-n} + 1)y^{-1})(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y).$$

On fait la multiplication et obtient

$$\begin{aligned} -x + 2 - x^{-1} &= 1 + x^{-n} + x^{-1}y + x^{-n}y + x^n + 1 + x^{n-1}y + y \\ &\quad + xy^{-1} + x^{1-n}y^{-1} + 1 + x^{1-n} + x^ny^{-1} + y^{-1} + x^{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} 0 &= x + x^{-1} + x^{-n} + x^{-1}y + x^{-n}y + x^n + x^{n-1}y + y \\ &\quad + xy^{-1} + x^{1-n}y^{-1} + 1 + x^{1-n} + x^ny^{-1} + y^{-1} + x^{n-1} + 1 \\ &= y(x^{-1} + x^{-n} + x^{n-1} + 1) + y^{-1}(x + x^{1-n} + x^n + 1) \\ &\quad + (x^{-1} + x^{-n} + x^{n-1} + 1) + (x + x^{1-n} + x^n + 1) \\ &= (y + 1)(x^{-1} + x^{-n} + x^{n-1} + 1) + (y^{-1} + 1)(x + x^{1-n} + x^n + 1) \\ &= (1 + y^{-1})y(x^{-1} + x^{-n} + x^{n-1} + 1) + (y^{-1} + 1)x(1 + x^{-n} + x^{n-1} + x^{-1}) \\ &= (y^{-1} + 1)(y + x)(x^{-1} + x^{-n} + x^{n-1} + 1) \\ &= (y^{-1} + 1)(y + x)(x^{-n} + 1)(x^{n-1} + 1). \end{aligned}$$

Ainsi $\partial\Gamma$ est un union des 4 ensembles, nommément

$$\partial\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 T_j$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid |x| = 1, y = -1, z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \right\}, \\ T_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^n = -1, |y| = 1, z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \right\}, \\ T_3 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^{n-1} = -1, |y| = 1, z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \right\}, \\ T_4 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid |x| = |y| = 1, x = -y, z = -\frac{x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y}{x - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $(x,y,z) \in \partial\Gamma$ on a $z = -\frac{x^{n+1}+(x^{n-1}+1)y}{x-1}$ ey $|x| = |y| = 1$, on peut se concentrer sur les arguments de x et de y . On a

Ensemble	$\arg x$	$\arg y$
T_1	$] -\pi, \pi]$	π
T_2	$\frac{(2k-1)\pi}{n}, -\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$	$] -\pi, \pi]$
T_3	$\frac{(2k-1)\pi}{n-1}, -\frac{n-2}{2} < k \leq \frac{n}{2}$	$] -\pi, \pi]$
T_4	$] -\pi, \pi]$	$(\arg x + \pi) \bmod 2\pi$

Tableau 4.1. Les arguments de x et de y sur les portions de $\partial\Gamma$

Le théorème de Stokes nous suggère l'orientation d'intégration comme ce qui suit :

Ensemble	$\arg x$	$\arg y$
T_1	$\begin{aligned} &\frac{\pi}{n} \rightarrow 0, -\frac{\pi}{n} \rightarrow 0 \\ &\frac{(2k-1)\pi}{n} \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &-\frac{(2k-1)\pi}{n} \rightarrow -\frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &\frac{(2k+1)\pi}{n} \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ &-\frac{(2k+1)\pi}{n} \rightarrow -\frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$	π
T_2	$\begin{aligned} &\frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \\ &-\frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k < \frac{n+1}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\frac{(2k-n-1)\pi}{n} \rightarrow \pi, \frac{(2k-n-1)\pi}{n} \rightarrow -\pi \\ &-\frac{(2k-n-1)\pi}{n} \rightarrow \pi, -\frac{(2k-n-1)\pi}{n} \rightarrow -\pi \end{aligned}$
T_3	$\begin{aligned} &\frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ &-\frac{(2k-1)\pi}{n-1}, \quad 1 \leq k < \frac{n}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\pi \rightarrow \frac{(2k-n)\pi}{n-1}, -\pi \rightarrow \frac{(2k-n)\pi}{n-1} \\ &\pi \rightarrow -\frac{(2k-n)\pi}{n-1}, -\pi \rightarrow -\frac{(2k-n)\pi}{n-1} \end{aligned}$
T_4	$\begin{aligned} &0 \rightarrow \frac{\pi}{n} \\ &\frac{(2k-1)\pi}{n-1} \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &\frac{(2k-1)\pi}{n-1} \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \\ &0 \rightarrow -\frac{\pi}{n} \\ &-\frac{(2k-1)\pi}{n-1} \rightarrow -\frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &-\frac{(2k-1)\pi}{n-1} \rightarrow -\frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\arg x - \pi \\ &\arg x + \pi \end{aligned}$

Tableau 4.2. L'orientation d'intégration sur $\partial\Gamma$

On peut se référer aux figures des cas où $n = 3$ et où $n = 4$ pour visualiser l'orientation des parcours d'intégration. On remarque que l'on peut toujours échanger les arguments de π et de $-\pi$ librement.

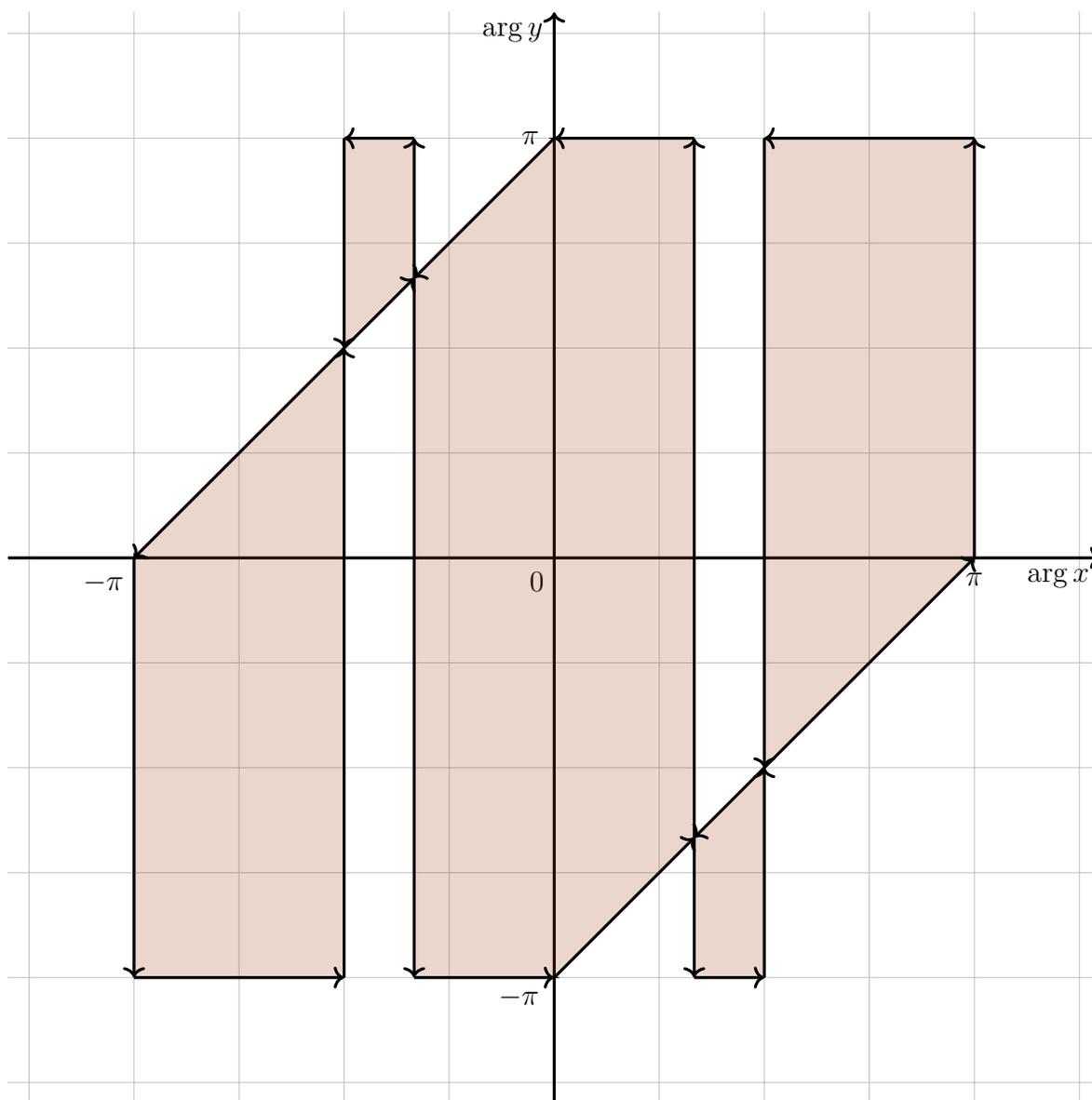


Figure 4.3. Le parcours d'intégration où $n = 3$

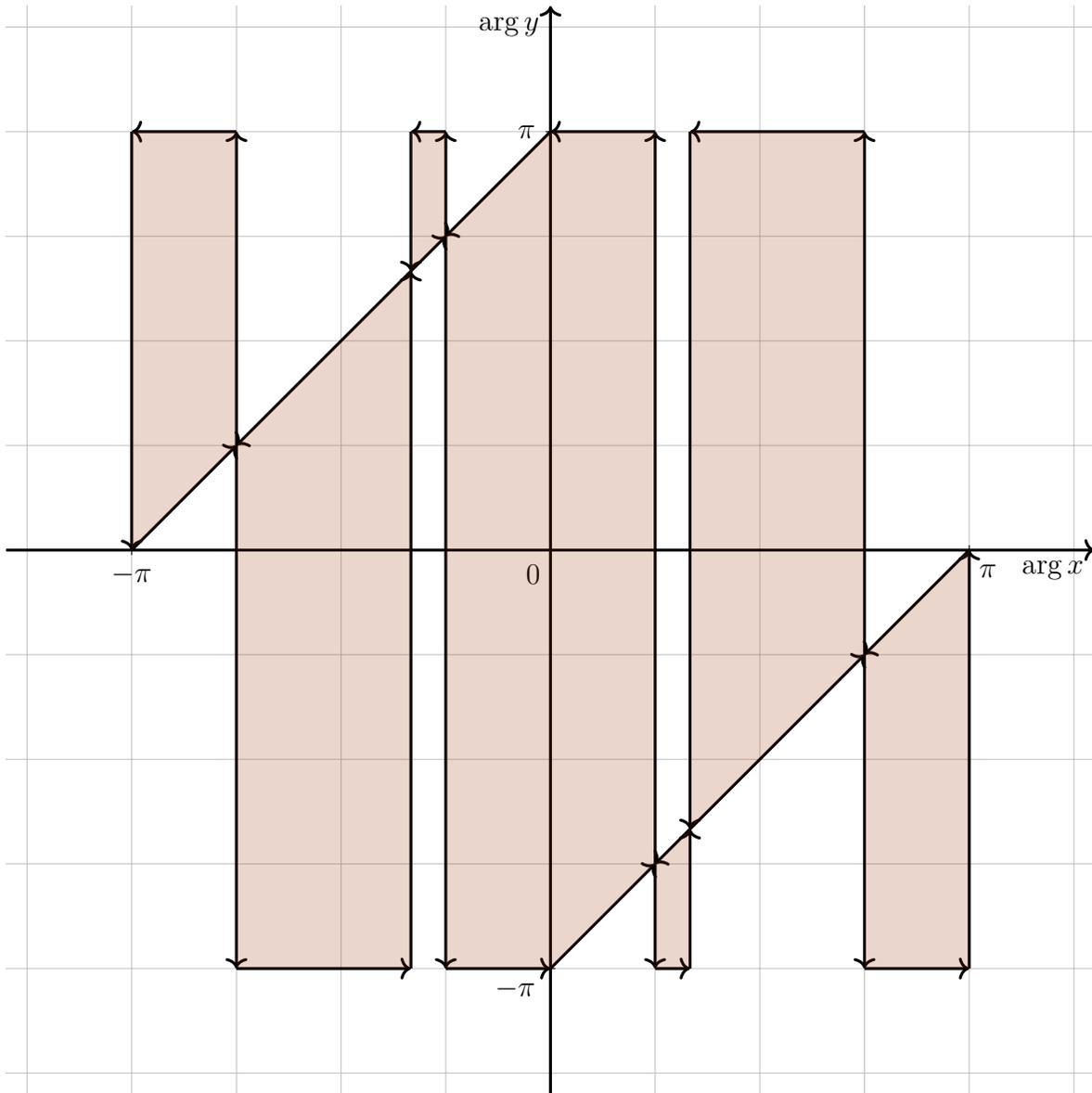


Figure 4.4. Le parcours d'intégration où $n = 4$

4.4.3. L'analyse de Δ sur $\partial\Gamma$

Dans cette sous-section, on va simplifier $\eta_3(2)(\Delta)$ sur les quatre sous-ensembles T_1 , T_2 , T_3 , et T_4 de $\partial\Gamma$. Écrivons

$$\Delta = \sum_{j=1}^4 \Delta_j,$$

où

$$\Delta_j = \Delta|_{T_j}$$

pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$.

4.4.3.1. Sur $T_1 : y = -1$. Dans cette partie on a

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{x\}_2 \otimes (-1) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (-1) + \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x \\ &\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(1 - \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(1 - \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) \right) \\ &= \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{x^n - x^{n-1}}{x^n + 1} \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{x^n - x^{n-1}}{x^n + 1} \right). \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

4.4.3.2. Sur $T_2 : x^n + 1 = 0$. Cet ensemble comprend n segments, nommément $\arg x = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ où $-\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$. On voit que

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \{x\}_2 \otimes y - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x \\ &\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &= \{x\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left((x^n + 1) + (x^{n-1} + 1)y \right) \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

$$+ \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left((x^n + 1) + (x^{n-1} + 1)y \right) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes y \tag{4.4.5}$$

$$- \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (x^n + 1) + \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^n + 1). \tag{4.4.6}$$

On calcule maintenant la ligne (4.4.6). La définition 2.2.3 nous suggère que

$$\eta_3(2)(\{u\}_2 \otimes v) = -D(u) d \arg v - \frac{1}{3} \log |v| (\log |u| d \log |1-u| - \log |1-u| d \log |u|),$$

donc,

$$\begin{aligned} \eta_3(2)(\{1-u\}_2 \otimes v) &= -D(1-u) d \arg v - \frac{1}{3} \log |v| (\log |1-u| d \log |u| - \log |u| d \log |1-u|) \\ &= -\eta_3(2)(\{u\}_2 \otimes v). \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Ainsi pour chaque $-\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$ et chaque $\arg x = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, on a

$$\begin{aligned} -\eta_3(2) \left(\frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (x^n + 1) \right) &= \frac{1}{n} \eta_3(2) (\{1 + x^n\}_2 \otimes (1 + x^n)) \\ &= \frac{1}{n} d\mathcal{L}_3(1 + x^n) \\ &= \frac{1}{n} d\mathcal{L}_3(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On voit aussi

$$\begin{aligned} &\eta_3(2) \left(\frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^n + 1) \right) \\ &= -\frac{1}{n-1} D(-x^{n-1}) d \arg(1 + x^n) \\ &\quad + \frac{1}{3(n-1)} \log |1 + x^n| \log |1 + x^{n-1}| d \log |-x^{n-1}| \\ &\quad - \frac{1}{3(n-1)} \log |1 + x^n| \log |-x^{n-1}| d \log |1 + x^{n-1}|. \end{aligned}$$

Même si $\log |1 + x^n|$ n'est pas bien définie où $x^n = -1$, on peut prendre les limites

$$\lim_{u \rightarrow \exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n}\right)} \log |1 + u^n| \log |1 + u^{n-1}| d \log |-u^{n-1}| = 0,$$

et

$$\lim_{u \rightarrow \exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n}\right)} \log |1 + u^n| \log |-u^{n-1}| d \log |1 + u^{n-1}| = 0,$$

et obtient que

$$\begin{aligned} \eta_3(2) \left(\frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^n + 1) \right) &= -\frac{1}{n-1} D(-x^{n-1}) d \arg(1 + x^n) - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, sur la ligne (4.4.6), on a

$$\eta_3(2) \left(-\frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (x^n + 1) + \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^n + 1) \right) = 0.$$

Similairement, pour (4.4.5) on a

$$\begin{aligned} &\eta_3(2) \left(\frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes ((x^n + 1) + (x^{n-1} + 1)y) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes y \right) \\ &= \frac{1}{n} \eta_3(2) \left(\{-x^n\}_2 \otimes ((x^{n-1} + 1)y) - \{-x^n\}_2 \otimes y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \eta_3(2) \left(\{-x^n\}_2 \otimes (x^{n-1} + 1) \right) \\
&= -\frac{1}{n} D(-x^n) d \arg (x^{n-1} + 1) \\
&\quad + \frac{1}{3n} \log |x^{n-1} + 1| (\log |1 + x^n| d \log |-x^n| - \log |-x^n| d \log |1 + x^n|) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque x est une constante qui est une racine d'unit e pour chaque $-\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$ et chaque $\arg x = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, on a

$$\left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x = 0$$

dans cette section. Alors il nous reste seulement la ligne (4.4.4)

$$\eta_3(2)(\Delta_2) = \eta_3(2) \left(\{x\}_2 \otimes y - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes ((x^n + 1) + (x^{n-1} + 1)y) \right). \quad (4.4.8)$$

On a pour tout u, v

$$\begin{aligned}
\eta_3(2) \left(\left\{ \frac{1}{u} \right\}_2 \otimes v \right) &= -D\left(\frac{1}{u}\right) \arg v + \frac{1}{3} \log |v| \left(\log \left| 1 - \frac{1}{u} \right| d \log \left| \frac{1}{u} \right| - \log \left| \frac{1}{u} \right| d \log \left| 1 - \frac{1}{u} \right| \right) \\
&= D(u) \arg v + \frac{1}{3} \log |v| (-\log |u-1| d \log |u| + \log |u| d \log |u|) \\
&\quad - \frac{1}{3} \log |v| (-\log |u| d \log |u-1| + \log |u| d \log |u|) \\
&= D(u) \arg v - \frac{1}{3} \log |v| (\log |1-u| d \log |u| - \log |1-u| d \log |u|) \\
&= -\eta_3(2)(\{u\}_2 \otimes v), \tag{4.4.9}
\end{aligned}$$

et on voit que $-x^{n-1} = \frac{1}{x}$ comme $x^n = -1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\eta_3(2) \left(\frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes ((x^n + 1) + (x^{n-1} + 1)y) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \eta_3(2) \left(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes ((1 + x^{n-1})y) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\eta_3(2) \left(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes (1 + x^{n-1}) \right) + \eta_3(2) \left\{ \frac{1}{x} \right\} \otimes y \right) \\
&= -\frac{1}{n-1} \left(\eta_3(2) \left(\{1 + x^{n-1}\}_2 \otimes (1 + x^{n-1}) \right) + \eta_3(2) (\{x\}_2 \otimes y) \right). \tag{4.4.10}
\end{aligned}$$

Mais

$$\eta_3(2) \left(\{1 + x^{n-1}\}_2 \otimes (1 + x^{n-1}) \right) = d\mathcal{L}_3(1 + x^{n-1}), \tag{4.4.11}$$

où $\mathcal{L}_3(1 + x^{n-1})$ est une constante pour chaque $-\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}$ et chaque $\arg x = \frac{(2k-1)\pi}{n}$.
Donc,

$$d\mathcal{L}_3(1 + x^{n-1}) = 0$$

dans l'ensemble T_2 . On conclut selon les lignes (4.4.8), (4.4.10) et (4.4.11) que

$$\begin{aligned} \eta_3(2)(\Delta_2) &= \eta_3(2) \left(\{x\}_2 \otimes y + \frac{1}{n-1} \{x\}_2 \otimes y \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \eta_3(2) (\{x\}_2 \otimes y), \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

4.4.3.3. Sur $T_3 : x^{n-1} + 1 = 0$. Dans cette section de $\partial\Gamma$, on a $x^{n-1} = -1$, alors $x^n = -x$.
Il suit que

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \{x\}_2 \otimes y - \frac{1}{n} \{x\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x \\ &\quad + \frac{1}{n} \{x\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{0}{x^n + 1} \right) y \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(1 + \left(\frac{0}{x^n + 1} \right) y \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \{x\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x \\ &\quad + \frac{1}{n} \{x\}_2 \otimes 1 + -\frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes 1 \\ &= \frac{n-1}{n} \{x\}_2 \otimes y + \left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Puisque pour tout $-\frac{n-2}{2} < k \leq \frac{n}{2}$ et tout $\arg x = \frac{(2k-1)\pi}{n-1}$, x est une constante qui est une racine d'unité, on a

$$\eta_3(2) \left(\left\{ \left(-\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) y \right\}_2 \otimes x \right) = 0.$$

Donc,

$$\eta_3(2)(\Delta_3) = \eta_3(2) \left(\frac{n-1}{n} \{x\}_2 \otimes y \right). \quad (4.4.14)$$

4.4.3.4. Sur $T_4 : x + y = 0$. Dans cette partie on a

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \{x\}_2 \otimes (-x) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (-x) + \left\{ \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) x \right\}_2 \otimes x \\ &\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(-\left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) x \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(1 - \left(\frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right) x \right) \\ &= \{x\}_2 \otimes (-1) + \{x\}_2 \otimes x - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (-1) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x + \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) \\
= & \{x\}_2 \otimes x - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x + \left\{ \frac{x^n+x}{x^n+1} \right\}_2 \otimes x
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

$$+ \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right). \tag{4.4.16}$$

4.4.3.5. La combinaison des ensembles T_1 et T_4 . Le tableau 4.2 nous suggère que les parcours d'intégration (par rapport à x) ne diffèrent que par la direction sur T_1 et sur T_4 . Ainsi on peut combiner les deux ensembles de parcours en prenant

$$\Delta_{14} = \Delta_1 - \Delta_4,$$

avec laquelle on aura

$$\begin{aligned}
\int_{T_1 \cup T_4} \eta_3(2)(\Delta) &= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta) + \int_{T_4} \eta_3(2)(\Delta) \\
&= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_1) + \int_{T_4} \eta_3(2)(\Delta_4) \\
&= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_1) - \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_4) \\
&= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_1 - \Delta_4) \\
&= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_{14}).
\end{aligned}$$

On simplifie maintenant $\eta_3(2)(\Delta_{14})$ selon les lignes (4.4.3), (4.4.15) et (4.4.16) :

$$\begin{aligned}
\Delta_{14} &= \Delta_1 - \Delta_4 \\
&= \left\{ \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1} \right\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{x^n-x^{n-1}}{x^n+1} \right) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{x^n-x^{n-1}}{x^n+1} \right) \\
&\quad - \{x\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n+x}{x^n+1} \right\}_2 \otimes x \\
&\quad - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) + \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) \\
&= \left\{ \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1} \right\}_2 \otimes x - \{x\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n+x}{x^n+1} \right\}_2 \otimes x \\
&\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{x^n-x^{n-1}}{x^n+1} \right) - \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{x^n-x^{n-1}}{x^n+1} \right) + \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes \left(\frac{1-x}{x^n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x - \{x\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x \\
&\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (-x^{n-1}) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (-x^{n-1}) \\
&= \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x - \{x\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x \\
&\quad + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes (x^{n-1}) - \frac{1}{n-1} \{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^{n-1}) \\
&= \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x - \{x\}_2 \otimes x + \frac{1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x \\
&\quad + \frac{n-1}{n} \{-x^n\}_2 \otimes x - \{-x^{n-1}\}_2 \otimes x \\
&= \left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x - \{x\}_2 \otimes x + \{-x^n\}_2 \otimes x - \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 \otimes x - \{-x^{n-1}\}_2 \otimes x.
\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

La proposition 2.1.6 nous dit que pour tout u, v , on a

$$\{u\}_2 + \{v\}_2 + \{1 - uv\}_2 + \left\{ \frac{1-u}{1-uv} \right\}_2 + \left\{ \frac{1-v}{1-uv} \right\}_2 = 0.$$

Prenons $u = \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1}$ et $v = \frac{x^n+1}{x^n+x}$. Alors

$$\left\{ \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1} \right\}_2 + \left\{ \frac{x^n + 1}{x^n + x} \right\}_2 + \left\{ 1 - \frac{1}{x} \right\}_2 + \left\{ \frac{x^n}{x^n + 1} \right\}_2 + \left\{ \frac{1}{x^{n-1} + 1} \right\}_2 = 0. \tag{4.4.18}$$

Donc, on voit des lignes (4.4.17) et (4.4.18) que

$$\Delta_{14} = - \left(\left\{ \frac{x^n + 1}{x^n + x} \right\}_2 + \left\{ 1 - \frac{1}{x} \right\}_2 + \left\{ \frac{x^n}{x^n + 1} \right\}_2 + \left\{ \frac{1}{x^{n-1} + 1} \right\}_2 \right) \otimes x \tag{4.4.19}$$

$$- \left(\{x\}_2 - \{-x^n\}_2 + \left\{ \frac{x^n + x}{x^n + 1} \right\}_2 + \{-x^{n-1}\}_2 \right) \otimes x. \tag{4.4.20}$$

On a déjà démontré dans (4.4.7) et dans (4.4.9) que pour tout u, v ,

$$\eta_3(2)(\{u\}_2 \otimes v) = -\eta_3(2)(\{1-u\}_2 \otimes v) = -\eta_3(2)\left(\left\{ \frac{1}{u} \right\}_2 \otimes v\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\eta_3(2)\left(\left\{ 1 - \frac{1}{x} \right\}_2 \otimes x\right) &= -\eta_3(2)\left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}_2 \otimes x\right) \\
&= \eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes x),
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

que

$$\eta_3(2)\left(\left\{\frac{x^n+1}{x^n+x}\right\}_2 \otimes x\right) = -\eta_3(2)\left(\left\{\frac{x^n+x}{x^n+1}\right\}_2 \otimes x\right), \quad (4.4.22)$$

que

$$\begin{aligned} \eta_3(2)\left(\left\{\frac{x^n}{x^n+1}\right\}_2 \otimes x\right) &= -\eta_3(2)\left(\left\{\frac{x^n+1}{x^n}\right\}_2 \otimes x\right) \\ &= -\eta_3(2)\left(\left\{1 - \left(-\frac{1}{x^n}\right)\right\}_2 \otimes x\right) \\ &= \eta_3(2)\left(\left\{-\frac{1}{x^n}\right\}_2 \otimes x\right) \\ &= -\eta_3(2)\left(\{-x^n\}_2 \otimes x\right), \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

et que

$$\begin{aligned} \eta_3(2)\left(\left\{\frac{1}{x^{n-1}+1}\right\}_2 \otimes x\right) &= -\eta_3(2)\left(\{x^{n-1}+1\}_2 \otimes x\right) \\ &= \eta_3(2)\left(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes x\right). \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

En substituant les égalités (4.4.21) à (4.4.24) dans la ligne (4.4.19), on obtient

$$\begin{aligned} \eta_3(2)(\Delta_{14}) &= -\eta_3(2)\left(\left(\left\{\frac{x^n+1}{x^n+x}\right\}_2 + \left\{1 - \frac{1}{x}\right\}_2 + \left\{\frac{x^n}{x^n+1}\right\}_2 + \left\{\frac{1}{x^{n-1}+1}\right\}_2\right) \otimes x\right) \\ &\quad - \eta_3(2)\left(\left(\{x\}_2 - \{-x^n\}_2 + \left\{\frac{x^n+x}{x^n+1}\right\}_2 + \{-x^{n-1}\}_2\right) \otimes x\right) \\ &= -\eta_3(2)\left(\left(-\left\{\frac{x^n+x}{x^n+1}\right\}_2 + \{x\}_2 - \{-x^n\}_2 + \{-x^{n-1}\}_2\right) \otimes x\right) \\ &\quad - \eta_3(2)\left(\left(\{x\}_2 - \{-x^n\}_2 + \left\{\frac{x^n+x}{x^n+1}\right\}_2 + \{-x^{n-1}\}_2\right) \otimes x\right) \\ &= 2\eta_3(2)(\{-x^n\}_2 \otimes x) - 2\eta_3(2)(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes x) - 2\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes x) \\ &= \frac{2}{n}\eta_3(2)(\{-x^n\}_2 \otimes (x^n)) - \frac{2}{n-1}\eta_3(2)(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes (x^{n-1})) - 2\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes x) \\ &= \frac{2}{n}\eta_3(2)(\{-x^n\}_2 \otimes (-x^n)) - \frac{2}{n-1}\eta_3(2)(\{-x^{n-1}\}_2 \otimes (-x^{n-1})) - 2\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes x) \\ &= \frac{2}{n}d\mathcal{L}_3(-x^n) - \frac{2}{n-1}d\mathcal{L}_3(-x^{n-1}) - 2d\mathcal{L}_3(x). \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

4.4.4. L'intégration sur $\partial\Gamma$

Après avoir simplifié la formule à intégrer, on peut enfin calculer l'intégration $\int_{\partial\Gamma} \eta_3(2)(\Delta)$. On va faire la computation partie à partie.

4.4.4.1. Sur T_1 et T_4 . On remarque que les provenances des parcours de l'intégration sur T_1 forment l'ensemble

$$S = \left\{ \exp \left(\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \middle| -\frac{n-1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2} \right\},$$

et les destinations de ces parcours sont

$$E = \left\{ \exp \left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1} \right) \middle| -\frac{n-2}{2} < k \leq \frac{n}{2} \right\} \cup \{1\}.$$

Il y a exactement 2 segments de parcours à intégrer de chaque provenance et à chaque destination. Dénotons

$$E' = E \setminus \{1\}.$$

On voit que

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = -1\},$$

et que

$$E' = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-1} = -1\}.$$

Alors, il suit de (4.4.25) que

$$\begin{aligned} & \int_{T_1 \cup T_4} \eta_3(2)(\Delta) \\ &= \int_{T_1} \eta_3(2)(\Delta_{14}) \\ &= \int_{T_1} \frac{2}{n} d\mathcal{L}_3(-x^n) - \frac{2}{n-1} d\mathcal{L}_3(-x^{n-1}) - 2d\mathcal{L}_3(x) \\ &= \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(-x^n) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(-x^{n-1}) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) \Big|_{T_1} \\ &= 2 \sum_{x \in E} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(-x^n) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(-x^{n-1}) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) \\ &\quad - 2 \sum_{x \in S} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(-x^n) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(-x^{n-1}) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) \\ &= 2 \sum_{x \in E'} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(x) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(1) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) + \frac{4}{n} \mathcal{L}_3(-1) - \frac{4}{n-1} \mathcal{L}_3(-1) - 4\mathcal{L}_3(1) \\ &\quad - 2 \sum_{x \in S} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(1) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3\left(\frac{1}{x}\right) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) \\ &= 2 \sum_{x \in E'} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(x) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(1) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) - 4\mathcal{L}_3(1) - \frac{4}{n(n-1)} \mathcal{L}_3(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{x \in S} \left(\frac{2}{n} \mathcal{L}_3(1) - \frac{2}{n-1} \mathcal{L}_3(x) - 2\mathcal{L}_3(x) \right) \\
&= -\frac{4(n-1)}{n} \sum_{x \in E'} \mathcal{L}_3(x) + \frac{4n}{n-1} \sum_{x \in S} \mathcal{L}_3(x) - 12\mathcal{L}_3(1) - \frac{4}{n(n-1)} \mathcal{L}_3(-1). \tag{4.4.26}
\end{aligned}$$

Puisque $|x| = 1$ sur T_1 , on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3(x) &= \operatorname{Re} \left(\operatorname{Li}_3(x) - \log|x| \operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{3} \log^2|x| \operatorname{Li}_1(x) \right) \\
&= \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_3(x)).
\end{aligned}$$

Le théorème 1.1.3 nous suggère que

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in E'} \mathcal{L}_3(x) &= \sum_{x \in E'} \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_3(x)) \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{x^{n-1}=-1} \operatorname{Li}_3(x) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{Li}_3(-1)}{(n-1)^2} \right), \tag{4.4.27}
\end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in S} \mathcal{L}_3(x) &= \sum_{x \in S} \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_3(x)) \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{x^n=-1} \operatorname{Li}_3(x) \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{Li}_3(-1)}{n^2} \right), \tag{4.4.28}
\end{aligned}$$

et que

$$\operatorname{Li}_3(1) = 4(\operatorname{Li}_3(1) + \operatorname{Li}_3(-1)). \tag{4.4.29}$$

L'égalité (4.4.29) nous dit que

$$\operatorname{Li}_3(-1) = -\frac{3}{4} \operatorname{Li}_3(1) = -\frac{3}{4} \zeta(3) \in \mathbb{R}. \tag{4.4.30}$$

En substituant les égalités (4.4.27), (4.4.28) et (4.4.30) dans (4.4.26), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{T_1 \cup T_4} \eta_3(2)(\Delta) &= -\frac{4(n-1)}{n} \sum_{x \in E'} \mathcal{L}_3(x) + \frac{4n}{n-1} \sum_{x \in S} \mathcal{L}_3(x) - 12\mathcal{L}_3(1) - \frac{4}{n(n-1)} \mathcal{L}_3(-1) \\
&= -\frac{4(n-1)}{n} \cdot \left(-\frac{3}{4(n-1)^2} \zeta(3) \right) + \frac{4n}{n-1} \cdot \left(-\frac{3}{4n^2} \zeta(3) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12\zeta(3) - \frac{4}{n(n-1)} \cdot \left(-\frac{3}{4}\zeta(3)\right) \\
& = \left(-12 + \frac{3}{n(n-1)}\right)\zeta(3).
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

4.4.4.2. Sur T_2 . On voit de (4.4.12) que

$$\begin{aligned}
\eta_3(2)(\Delta_2) &= \frac{n}{n-1}\eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes y) \\
&= \frac{n}{n-1} \left(-D(x)d \arg y - \frac{1}{3} \log |y| (\log |x| d \log |1-x| - \log |1-x| d \log |x|) \right) \\
&= -\frac{n}{n-1} D(x) d \arg y,
\end{aligned}$$

comme $|y| = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
& \int_{T_2} \eta_3(2)(\Delta) \\
&= \int_{T_2} \eta_3(2)(\Delta_2) \\
&= \int_{T_2} -\frac{n}{n-1} D(x) d \arg y \\
&= -\frac{n}{n-1} \sum_{1 \leq k < \frac{n+1}{2}} \left(\int_{\arg y = -\frac{(2k-n-1)\pi}{n}}^{\pi} + \int_{\arg y = -\frac{(2k-n-1)\pi}{n}}^{-\pi} \right) D \left(\exp \left(-\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right) d \arg y \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left(\int_{\arg y = \frac{(2k-n-1)\pi}{n}}^{\pi} + \int_{\arg y = \frac{(2k-n-1)\pi}{n}}^{-\pi} \right) D \left(\exp \left(\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right) d \arg y \\
&= -\frac{n}{n-1} \sum_{1 \leq k < \frac{n+1}{2}} \left(\pi + (-\pi) + 2 \cdot \frac{(2k-n-1)\pi}{n} \right) D \left(\exp \left(-\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right) \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left(\pi + (-\pi) - 2 \cdot \frac{(2k-n-1)\pi}{n} \right) D \left(\exp \left(\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right) \\
&= -\sum_{1 \leq k < \frac{n+1}{2}} \frac{2(2k-n-1)\pi}{n-1} D \left(\exp \left(-\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{2(2k-n-1)\pi}{n-1} D \left(\exp \left(\frac{(2k-1)\pi i}{n} \right) \right).
\end{aligned}$$

Mais on voit du théorème 1.2.1 que

$$D(e^{-it}) = D\left(\frac{1}{e^{it}}\right) = -D(e^{it}).$$

De plus, le terme $k = \frac{n+1}{2}$ n'existe que pour n qui est impair, et on a dans ce cas

$$\frac{2(2k - n - 1)\pi}{n - 1} = \frac{2(n + 1 - n - 1)\pi}{n - 1} = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{T_2} \eta_3(2)(\Delta) &= \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{2(2k - n - 1)\pi}{n - 1} D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{2(2k - n - 1)\pi}{n - 1} D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \\ &= \frac{4\pi}{n - 1} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

4.4.4.3. Sur T_3 . Dans cette section on a

$$\begin{aligned} \eta_3(2)(\Delta_3) &= \frac{n-1}{n} \eta_3(2)(\{x\}_2 \otimes y) \\ &= -\frac{n-1}{n} D(x) d \arg y, \end{aligned}$$

selon la ligne (4.4.14). Alors

$$\begin{aligned} \int_{T_3} \eta_3(2)(\Delta) &= \int_{T_3} \eta_3(2)(\Delta_3) \\ &= -\frac{n-1}{n} \int_{T_3} D(x) d \arg y \\ &= -\frac{n-1}{n} \sum_{1 \leq k < \frac{n}{2}} \left(\int_{\arg y = \pi}^{-\frac{(2k-n)\pi}{n-1}} + \int_{\arg y = -\pi}^{-\frac{(2k-n)\pi}{n-1}} \right) D\left(\exp\left(-\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) d \arg y \\ &\quad - \frac{n-1}{n} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(\int_{\arg y = \pi}^{\frac{(2k-n)\pi}{n-1}} + \int_{\arg y = -\pi}^{\frac{(2k-n)\pi}{n-1}} \right) D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) d \arg y \\ &= -\frac{n-1}{n} \sum_{1 \leq k < \frac{n}{2}} \left(2 \cdot \left(-\frac{(2k-n)\pi}{n-1}\right) - \pi + \pi \right) D\left(\exp\left(-\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) \\ &\quad - \frac{n-1}{n} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \left(2 \cdot \left(\frac{(2k-n)\pi}{n-1}\right) - \pi + \pi \right) D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) \\ &= -\sum_{1 \leq k < \frac{n}{2}} \frac{2(2k-n)\pi}{n} D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{2(2k-n)\pi}{n} D\left(\exp\left(\frac{(2k-1)\pi i}{n-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Néanmoins, quand $k = \frac{n}{2}$, on a

$$\frac{2(2k - n)\pi}{n} = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{T_3} \eta_3(2)(\Delta) &= - \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{2(2k - n)\pi}{n} D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) \\ &\quad - \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{2(2k - n)\pi}{n} D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) \\ &= - \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

4.4.5. Le résultat de l'intégration

On combine les résultats de l'intégration sur les différents sections de $\partial\Gamma$ dans les lignes (4.4.31), (4.4.32) et (4.4.33), et on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Gamma} \eta_3(2)(\Delta) \\ &= - \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) + \frac{4\pi}{n - 1} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \\ &\quad + \left(-12 + \frac{3}{n(n - 1)}\right) \zeta(3). \end{aligned}$$

On voit de l'égalité (4.3.1) que

$$m(f) = m(f^*) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma} \eta(x, y, z), \quad (4.4.34)$$

où f^* est le coefficient principal du polynôme $f \in \mathbb{C}[x, y][z]$. Dans ce cas de

$$f(x, y, z) = x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z,$$

on a

$$f^* = x - 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} m(f) &= m(x - 1) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\Gamma} \eta(x, y, z) \\ &= 0 - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\partial\Gamma} \eta_3(2)(\Delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{(n - 1)\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) + \frac{1}{4\pi^2} \left(12 - \frac{3}{n(n - 1)}\right) \zeta(3).
\end{aligned}$$

Conclusion

On trouve que la mesure de Mahler logarithmique de $x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$ est

$$\begin{aligned} & m\left(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z\right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) - \frac{1}{(n - 1)\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \left(12 - \frac{3}{n(n - 1)}\right) \zeta(3). \end{aligned}$$

D'autre part, une modification du corollaire 3.2.5 de Boyd et de Lawton dans [Law83] nous suggère que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z\right) = m(xw + 1 + (w + 1)y + (x - 1)z).$$

Mais on a

$$xw + 1 + (w + 1)y + (x - 1)z = (1 + w)(1 + y) - (1 - x)(w + z),$$

et il est trouvé dans [DL07] par D'Andrea et Lalín que

$$\begin{aligned} & m((1 + w)(1 + y) - (1 - x)(w + z)) \\ &= m((1 - x)(1 - y) - (1 - w)(1 - z)) \\ &= \frac{9}{2\pi^2} \zeta(3). \end{aligned}$$

Ainsi, nous attendons ici la formule du dilogarithme

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (2k - n) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n - 1}\right)\right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{(n - 1)\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (2k - n - 1) D\left(\exp\left(\frac{(2k - 1)\pi i}{n}\right)\right) \right) \\ &= \frac{3}{2\pi^2} \zeta(3). \end{aligned}$$

On est aussi curieux de penser au polynôme

$$x^n + 1 + (x^{n-1} + 1)y + (x - 1)z$$

comme un cas spécial du polynôme

$$x^n + 1 + (x^l + 1)y + (x - 1)z,$$

où $l = n - 1$. On se demande si l'on peut calculer la mesure de Mahler

$$m(x^n + 1 + (x^l + 1)y + (x - 1)z)$$

pour une paire générale des entiers positifs (n, l) , et au cas d'un oui, si le coefficient de $\zeta(3)$ dans l'expression sera

$$\frac{1}{4\pi^2} \left(12 + \frac{3}{l} - \frac{3}{n} \right).$$

Références bibliographiques

- [Boy81] D. W. BOYD : Speculations concerning the range of Mahler's measure. *Canad. Math. Bull.*, 24, 1981.
- [Boy98] D. W. BOYD : Mahler's measure and special values of L -functions. *Experimental Mathematics*, 3, 1998.
- [Bre51] R. BREUSCH : On the distribution of the roots of a polynomial with integral coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 1951.
- [Den97] C. DENINGER : Deligne periods of mixed motives, K -theory and the entropy of certain \mathbb{Z}_n -actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 10, 1997.
- [DL07] C. A. D'ANDREA et M. N. LALÍN : On the Mahler measure of resultants in small dimensions. *J. Pure Appl. Algebra*, 209, 2007.
- [Dob79] E. DOBROWOLSKI : On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial. *Acta Arith.*, 34, 1979.
- [EW99] G. EVEREST et D. WARD : *Heights of Polynomials and Entropy in Algebraic Dynamics*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [Gia19] A. GIARD : La mesure de Mahler d'une forme de Weierstrass. Mémoire de D.E.A., Université de Montréal, 2019.
- [Gon94] A. B. GONCHAROV : Polylogarithms and motivic Galois groups. *Symp. in Pure Math.*, 55, part 2, 1994.
- [Gon95] A. B. GONCHAROV : Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Adv. in Math.*, 114, 1995.
- [Gon02] A. B. GONCHAROV : Explicit regulator maps on polylogarithmic motivic complexes. *In Motives, Polylogarithms and Hodge Theory, Part I (Irvine, Calif., 1998)*. Int. Press, Somerville, MA, 2002.
- [Lal03] M. N. LALÍN : Some examples of Mahler measures as multiple polylogarithms. *J. Number Theory*, 103, 2003.
- [Lal07] M. N. LALÍN : An algebraic integration for Mahler measure. *Duke Math. J.*, 138, 2007.
- [Law83] W. M. LAWTON : A problem of Boyd concerning geometric means of polynomial. *J. Number Theory*, 16, 1983.
- [Leh33] D. H. LEHMER : Factorization of certain cyclotomic functions. *Annals of Mathematics*, 34, 1933.
- [Lew81] R. LEWIN : *Polylogarithms and Associated Functions*. North Holland, New York, 1981.
- [Mah60] K. MAHLER : An application of Jensen's formula to polynomials. *Matematika*, 7, 1960.

- [Mah62] K. MAHLER : On some inequalities for polynomials in several variables. *J. Lond. Math. Soc.*, 37, 1962.
- [Mai00] V. MAILLOT : Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. *Mémoires de la S. M. F.*, 80, 2000.
- [Sch73] A. SCHINZEL : On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Acta. Arith.*, 24, 1973.
- [Smy71] C. J. SMYTH : On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 3, 1971.
- [Smy81a] C. J. SMYTH : A Kronecker-type theorem for complex polynomials in several variables. *Canad. Math. Bull.*, 24, 1981.
- [Smy81b] C. J. SMYTH : On measures of polynomials in several variables. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 23, 1981.
- [Zag90] D. ZAGIER : The Bloch–Wigner–Ramakrishnan polylogarithm function. *Math. Annalen*, 286, 1990.
- [Zag91] D. ZAGIER : Polylogarithms, Dedekind Zeta functions and the algebraic K-theory of fields. *In Arithmetic Algebraic Geometry (Texel, Netherlands, 1989)*. Birkhauser, Boston, 1991.
- [Zag06] D. ZAGIER : The dilogarithm function. *In Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2006.

Ordre des éléments constitutifs du mémoire ou de la thèse		
1.	La page de titre	obligatoire
2.	La page d'identification des membres du jury	obligatoire
3.	Le résumé en français et les mots clés français	obligatoires
4.	Le résumé en anglais et les mots clés anglais	obligatoires
5.	Le résumé dans une autre langue que l'anglais ou le français (si le document est écrit dans une autre langue que l'anglais ou le français)	obligatoire
6.	Le résumé de vulgarisation	facultatif
7.	La table des matières, la liste des tableaux, la liste des figures ou autre	obligatoires
8.	La liste des sigles et des abréviations	obligatoire
9.	La dédicace	facultative
10.	Les remerciements	facultatifs
11.	L'avant-propos	facultatif
12.	Le corps de l'ouvrage	obligatoire
13.	Les index	facultatif
14.	Les références bibliographiques	obligatoires
15.	Les annexes	facultatifs
16.	Les documents spéciaux	facultatifs