

Université de Montréal

**Croisements de lignes de flot entre fonctions de Morse
et décomposition en cône itéré**

par

Paul Fontaine

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

26 Août 2020

Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

Ce mémoire intitulé

Croisements de lignes de flot entre fonctions de Morse et décomposition en cône itéré

présenté par

Paul Fontaine

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif Polterovich

(président-rapporteur)

Octav Cornea

(directeur de recherche)

Egor Shelukhin

(membre du jury)

Résumé

Ce mémoire présente une nouvelle méthode d'étudier des fonctions de Morse sur une variété compacte. Plus précisément, les croisements entre les lignes de flot de pseudo-gradients associés à des fonctions de Morse permettent de définir géométriquement des morphismes entre les complexes de Morse, morphismes qui ne peuvent généralement pas être obtenus par une homotopie. Cette nouvelle classe de morphismes mène à la définition d'une catégorie triangulée. La question centrale est de savoir si tout objet de cette catégorie est décomposable en cône itéré de fonctions de Morse parfaites. En effet, une telle décomposition simplifierait l'étude de la dynamique d'une fonction de Morse en l'interprétant plutôt comme plusieurs fonctions parfaites. Une seconde question d'importance porte sur une condition de généricité globale à laquelle est soumise cette catégorie triangulée. Nous étudions la possibilité de s'en soustraire en proposant une méthode de déformations des fonctions de Morse.

Mots clés : théorie de Morse, homologie de Morse, catégorie triangulée, décomposition en cône itéré, fonctions de Morse en position générique

Abstract

This master's thesis introduces a new way to study Morse functions on a compact manifold. More specifically, crossings between flows of pseudo-gradients associated to Morse functions allow one to define geometric realisations of morphisms between the Morse complexes. This new class of morphisms leads to the definition of a triangulated category. The main question is to determine if every object of this category admits an iterated cone decomposition. Such a decomposition would greatly simplify the study of the dynamic of a Morse function by interpreting it as many perfect Morse functions. A second topic concerns the global genericity condition to which this category is subject. We study a way, through deformation of Morse functions, to avoid such a constraint.

Key words : Morse theory, Morse homology, triangulated category, iterated cone decomposition, generic pair of Morse functions

Table des matières

| | |
|--|------|
| Résumé | v |
| Abstract | vii |
| Liste des figures | xi |
| Remerciements | xiii |
| Introduction | 1 |
| Chapitre 1. Préliminaires | 5 |
| 1.1. Éléments d’algèbre homologique | 5 |
| 1.1.1. Théorie d’homologie | 5 |
| 1.1.2. Triangles exacts et leurs propriétés | 12 |
| 1.1.3. Catégorie triangulée | 16 |
| 1.2. Éléments de théorie de Morse | 18 |
| 1.2.1. Théorie de Morse | 19 |
| 1.2.2. Homologie de Morse | 22 |
| 1.3. Éléments de modules de persistance | 30 |
| 1.3.1. Modules de persistance | 31 |
| 1.3.2. Homologie de Morse comme module de persistance | 35 |
| 1.4. Catégories de fonctions de Morse et leur homotopies | 39 |
| 1.5. Marquages entre fonctions de Morse | 40 |
| 1.5.1. L’application φ est un morphisme de chaînes | 41 |
| 1.5.2. Morphismes issus d’un marquage | 46 |
| Chapitre 2. Catégories des tuples de Morse et leurs marquages | 47 |
| 2.1. Tuples de Morse : marquages et morphismes | 47 |
| 2.1.1. Suspension de fonctions de Morse | 47 |
| 2.1.2. Tuple de Morse | 48 |

| | | |
|--|--|-----------|
| 2.1.3. | Marquages entre tuples de Morse en position générique..... | 49 |
| 2.1.4. | Morphisme issu d'un marquage | 50 |
| 2.1.5. | Composition de marquages..... | 50 |
| 2.2. | Catégorie hTdM | 52 |
| 2.3. | hTdM est une catégorie triangulée | 56 |
| 2.4. | Catégorie hTdMf | 63 |
| 2.4.1. | Tuples de Morse filtrés..... | 63 |
| 2.4.2. | Version filtrée des précédents résultats | 65 |
| 2.4.3. | Pseudométrie sur hTdMf | 69 |
| Chapitre 3. | Décompositions en cône itéré | 71 |
| 3.1. | Exemples | 71 |
| 3.2. | Conjecture et discussion | 77 |
| Chapitre 4. | Déformations de fonctions de Morse | 81 |
| 4.1. | Méthode des déformations | 81 |
| 4.2. | Le cas des surfaces Σ_n avec $n \neq 0$ | 82 |
| 4.3. | Discussion | 84 |
| Références bibliographiques | 87 | |

Liste des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Fonction de Morse sur le tore T^2 . Les points critiques sont ordonnés selon leur valeur : $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$ | 21 |
| 1.2 | Flot du gradient négatif de la fonction de Morse de la figure 1.1. | 21 |
| 1.3 | Sous-niveau $[\alpha + \varepsilon, \alpha + 2\varepsilon]$ de la fonction de Morse présentée à la figure 1.1. | 22 |
| 1.4 | Flot du pseudo-gradient issu d'une perturbation du gradient négatif de la fonction de Morse de la figure 1.1. | 22 |
| 1.5 | Interpolation K entre les différentes homotopies $F + h$, $G + h'$ et $H + h''$. On précise que les vagues n'ont pas été inscrites sur la figure afin d'en garantir la lisibilité. | 29 |
| 1.6 | Exemples de code-barres : celui de gauche est $R(0,1]$ et celui de droite est $R(a_1, a_4] \oplus R(a_2, \infty) \oplus R(a_3, \infty)$ | 32 |
| 2.1 | Configurations apparaissant dans $\bar{\mathcal{E}}(x, y; \gamma_1, \gamma_2)$: celle de gauche appartient à $\mathcal{E}(x, y; \gamma_1, \gamma_2)$, celles du centre représentent ξ et $\xi_2 \xi_1$ et celles de droite sont $d^g \vartheta$ et ϑd^f | 52 |
| 3.1 | La fonction de Morse f et les lignes de flot du gradient négatif reliant ses points critiques. | 71 |
| 3.2 | Les points a_1, a_2, b_0, c_0, c_1 et c_2 tels que décrits. | 72 |
| 3.3 | En bleu, la différentielle du cône $C(\varphi)$. En rouge, le marquage ψ | 73 |
| 3.4 | En bleu, la différentielle du cône $C(\varphi)$. En rouge, le marquage Ψ | 75 |
| 4.1 | La fonction de Morse parfaite f et les lignes de flot de X_f reliant ses points critiques. Les lignes pleines sont sur la face visible du tore et les lignes pointillées sur la face arrière. | 83 |
| 4.2 | Les fonctions de Morse parfaites f (bleu) et g (rouge) ainsi que les lignes de flot de leur pseudo-gradient. On remarque que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$ | 83 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.3 | Détail de $W^u(c_1)$ et $W^s(b_2)$ ainsi que des déformations de X_g . En rouge, la paire (g, X_g) en position non générique avec (f, X_f) . En jaune, une première déformation de X_g telle que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) \neq \emptyset$. En orange, une seconde déformation de X_g telle que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$ | 84 |
| 4.4 | Une fonction de Morse parfaite sur Σ_n et les lignes de flot reliant ses points critiques. Les trois petits points rouges signifient que le patron se répète pour chacun des $n - 2$ autres trous de Σ_n | 84 |

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier profondément mon directeur de recherche, Octav Cornea, qui a reçu, il y a plus de deux ans, un mathématicien novice et amateur en ma personne. Son support indéfectible, sa présence continuelle et ses enseignements inestimables ont permis bien plus que le simple achèvement de ce mémoire.

À mes chers amis Théo et Alexis, je réserve une place particulière dans ces remerciements. Vous avez été des potes de première et dernière heure, des frères sur qui j'ai toujours pu compter. Théo, modèle d'acharnement et de dévouement, camarade éternel. Alexis, oreille intime et source de dépassement. Les années passées avec vous sont parmi les plus belles et je contemple déjà celles à venir.

À maman et papa, qui ont suivi et encouragé mes entreprises, qui ont permis la réalisation de ma personne, je dédie un amour profond et sincère. Je ne crois pas qu'une reconnaissance plus entière n'est possible, si ce n'est la franche expression de celle-ci. Enfin, à mes soeurs, Marie et Jeanne, complices du berceau, je souhaite les plus grands bonheurs.

J'offre la dédicace de ce travail à vous toutes et tous.

Je souligne le soutien financier du CRSNG, de l'ISM, de l'Université de Montréal et d'Octav Cornea.

Introduction

Entamée dans les années 1920, l'étude des points critiques d'une fonction non dégénérée, et incidemment les calculs variationnels de fonctions, fut pour Marston Morse l'oeuvre d'une vie, à savoir qu'il y reviendrait sans cesse au cours de sa carrière. Héritière du patronyme de son daron, la théorie de Morse est un ensemble de techniques permettant d'analyser la topologie d'une variété différentielle et de ses sous-niveaux. Son évolution fulgurante, notamment sous l'influence de René Thom, Stephen Smale, Edward Witten et John Milnor, pour ne nommer que ces ténors, rend la tâche presque impossible à celui qui désire en cerner l'entier cortège de résultats et d'influences sur d'autres domaines mathématiques.

Parallèlement, les théories d'homologie, dont on peut retracer les origines aussi loin qu'au sein des travaux d'Euler, mais qu'on attribue généralement à Poincaré et à son *Analysis Situs*, ont pour principal objectif la comparaison de variétés via l'étude de leurs « n -trous ». Le développement constant de ces théories tout au long du XX^e siècle et leur forte axiomatisation due à Samuel Eilenberg et Norman Steenrod ont fait de l'homologie une pierre angulaire des mathématiques modernes. Depuis, la conceptualisation des théories d'homologie dans le langage des catégories triangulées a offert aux mathématiciens un cadre riche et formel afin de développer de nouveaux résultats. Entre temps, la définition d'une homologie de Morse par Thom, Smale et Milnor, puis redécouverte par Witten, a permis de comprendre les fameuses inégalités de Morse : les nombres de Betti sont des bornes inférieures à la quantité de points critiques qu'une fonction de Morse admet.

Ce mémoire reprend à sa manière différents outils de l'homologie de Morse et des catégories triangulées dans le but de formuler une toute nouvelle classe de morphismes entre des complexes de Morse, classe plus riche que les traditionnelles homotopies entre fonctions de Morse. Ces morphismes, nommés *marquages*, sont le point de départ d'une méthode permettant de comparer différentes fonctions de Morse les unes aux autres. L'originalité de cette approche réside en la capacité de ces outils homologiques à tirer parti de l'information contenue dans les sous-niveaux d'une variété et de la traduire en information à propos des fonctions de Morse.

Plus précisément, les marquages sont obtenus en considérant des intersections entre les lignes de flot de pseudo-gradients associés à des fonctions de Morse en position générique.

L'obtention de ces nouveaux morphismes permet la formulation d'une pré-catégorie dont les objets sont des tuples de fonctions de Morse, pré-catégorie qui devient une catégorie lorsque soumise à une condition de généricité globale.

Définition 0.0.1 (Condition de généricité globale 2.2.1). *Deux tuples de fonctions de Morse $f = (f_1, \dots, f_k)$ et $g = (g_1, \dots, g_l)$ sont dits en position générique si pour tous i et j admissibles, f_i et g_j sont en position générique, c'est-à-dire que les sous-variétés stables (resp. instables) de f_i sont transverses aux sous-variétés instables (resp. stables) de g_j .*

Un ensemble de tuples de fonctions de Morse \mathcal{O} est dit globalement générique si tous les tuples sont en position générique deux-à-deux.

Cette condition est cruciale, car la composition de marquages n'est pas toujours un marquage; c'est d'ailleurs ce que nous entendons par pré-catégorie, une catégorie pour laquelle la composition de morphismes n'est pas toujours bien définie. Il s'avère que la catégorie que nous définissons ainsi admet une structure canonique de catégorie triangulée dans laquelle la décomposition d'un objet en un cône itéré offre une méthode rigoureuse pour comparer les fonctions de Morse entre elles.

Théorème 0.0.2 (Théorème 2.3.2). *Pour une variété \mathcal{M} et une métrique α fixées, et étant donné \mathcal{O} un ensemble de tuples de fonctions de Morse globalement générique, la catégorie $\text{hTdM}(\mathcal{O})$ (voir section 2.2 pour une définition complète) est une catégorie triangulée.*

Parallèlement, nous nous intéressons à la notion de tuples de fonctions de Morse filtrés qui est directement inspirée du fait que l'homologie de Morse est un module de persistance. Nous obtenons alors une seconde pré-catégorie qui satisfait, à plusieurs égards, les axiomes d'une catégorie triangulée et qui permet, elle aussi, des décompositions en cône itéré. De même, lorsque contrainte à respecter une condition de généricité globale, cette pré-catégorie est alors une catégorie.

Théorème 0.0.3 (Théorème 2.4.8). *Étant donné \mathcal{O} un ensemble de tuples filtrés de fonctions de Morse globalement générique, alors la catégorie $\text{hTdMf}(\mathcal{O})$ (voir section 2.4 pour une définition complète) est une catégorie triangulée.*

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier établit les bases nécessaires à la compréhension des chapitres subséquents. Y sont présentées plusieurs notions fondamentales reliées à l'algèbre homologique, aux catégories triangulées, à la théorie de Morse, à l'homologie de Morse ainsi qu'aux modules de persistance. Nous présentons une catégorie de fonctions de Morse déjà bien connue et discutons de certains problèmes qui méritent d'être corrigés. Enfin, motivés par la précédente discussion, nous définissons ce qu'est un marquage et démontrons un résultat permettant de relier les homotopies entre fonctions de Morse aux marquages entre fonctions de Morse.

Le second chapitre contient l'entièreté du cadre formel dont nous aurons besoin par la suite. Nous traitons en détail des tuples de fonctions de Morse et des marquages entre deux tuples en position générique sur une variété compacte. Puis, nous définissons une catégorie

triangulée dont les objets, des tuples de Morse, sont soumis à une condition de généricité globale. Nous considérons également la structure de module de persistance innée aux tuples afin de définir une version filtrée de cette catégorie triangulée. Enfin, nous introduisons une pseudo-métrique sur l'espace des tuples de Morse filtrés.

Le troisième chapitre consiste en l'application des outils précédemment développés. En particulier, nous présentons des exemples de fonctions de Morse sur S^2 décomposées en cône itéré de fonctions de Morse parfaites. Une discussion de résultats plus généraux conclut cette partie. Quant à lui, le dernier chapitre traite d'une méthode permettant de soustraire les catégories du second chapitre à la condition de généricité globale. Pour pouvoir être appliquée, cette méthode, dite des déformations, nécessite l'étude approfondie des marquages. En particulier, pour le cas des surfaces fermées orientées, sauf la sphère, nous nous intéressons à la capacité des marquages à reproduire n'importe quel morphisme algébrique ainsi qu'à leur dépendance vis-à-vis de la géométrie des fonctions de Morse considérées. Nous concluons ce mémoire en discutant à la fois de l'importance et de la futilité de la condition de généricité globale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base pour la lecture du présent mémoire. Nous discutons en particulier d'algèbre homologique, de catégories triangulées, d'homologie de Morse et de modules de persistance. Nous introduisons ensuite une catégorie bien connue, que nous nommons FdM et qui est formée de fonctions de Morse et d'homotopies entre fonctions de Morse, ainsi qu'une version « filtrée », que nous notons FdMf. Nous soulevons quelques lacunes associées à ces catégories et nous proposons, pour terminer, une alternative aux homotopies : les marquages.

1.1. Éléments d'algèbre homologique

Nous exposons ici quelques fondements de l'algèbre homologique et de théorie des catégories. En particulier, nous nous concentrons sur la notion de triangles exacts et sur la manière qu'ils axiomatisent le passage d'une suite exacte courte de complexes en une suite exacte longue d'homologie.

1.1.1. Théorie d'homologie

Définition 1.1.1. *Un complexe de chaînes est une paire (C_\bullet, d_\bullet) formée d'une famille de groupes abéliens C_k , pour $k \in \mathbb{Z}$, et d'une famille d'applications linéaires $d_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$, nommée la différentielle, satisfaisant $d_k d_{k+1} = 0$. Pour la suite, nous noterons les complexes de chaînes par C_\bullet , en gardant implicite la famille d'applications linéaires d_\bullet .*

Définition 1.1.2. *Étant donné un complexe de chaînes C_\bullet , on notera les groupes de cycles $Z_k = \text{Ker}(d_k)$ et les groupes de bords $B_k = \text{Im}(d_{k+1})$. Puisque $d_k d_{k+1} = 0$, on a $B_k \subset Z_k$.*

Définition 1.1.3. *L'homologie d'un complexe de chaînes C_\bullet est la famille de groupes abéliens $H_k(C) = Z_k/B_k$. Lorsque le complexe de chaînes est sous-entendu, on notera plus simplement H_\bullet pour désigner son homologie.*

Soulignons que « groupes abéliens » dans les deux précédentes définitions peut être remplacé par « R -modules (droits ou gauches exclusivement) », avec R un anneau. Dans

le présent mémoire, nous n'avons pas besoin d'une telle généralisation. En effet, nous ne rencontrerons que les notions de complexes de chaînes sur \mathbb{Z}_2 et \mathbb{Z} . Néanmoins, tous les résultats qui suivent sont valides dans le cas général.

Conceptuellement, l'homologie d'un complexe de chaînes calcule le « défaut d'exactitude » de la famille d'applications linéaires. Par exemple, étant donné des F -espaces vectoriels finis U , V et W ainsi que des applications linéaires $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ satisfaisant $gf = 0$, un vecteur $v \in V$ tel que $g(v) = 0$ ne s'écrit pas nécessairement sous la forme $f(u)$, pour $u \in U$. Par le théorème du rang, cette obstruction est mesurée par le défaut $d = \dim(V) - \text{rg}(f) - \text{rg}(g) = \dim(\text{Ker}(g)) - \dim(\text{Im}(f))$. On comprend alors que v s'écrira assurément de la forme $f(u)$ uniquement si le défaut est nul, c'est-à-dire $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$. On dit alors que la suite $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ est *exacte en V* . De plus, l'homologie du complexe $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ en V est $H = \text{Ker}(g)/\text{Im}(f) = F^d$. Or, pour que l'homologie soit nulle, il faut et il suffit que la suite soit exacte en V , c'est-à-dire que v s'écrive assurément de la forme $f(u)$. En d'autres termes, l'homologie en V tue la partie exacte de $\text{Ker}(g)$ pour n'en garder que la partie inexacte. C'est précisément ce que nous entendons lorsque nous affirmons que l'homologie d'un complexe mesure son défaut d'exactitude.

Définition 1.1.4. *Étant donné un complexe de chaînes C_\bullet , on dira qu'il est exact, ou qu'il est une suite exacte longue, si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1}$ est exacte en C_k . On dira qu'il est acyclique si $H_\bullet = 0$.*

Proposition 1.1.5. *Un complexe de chaînes C_\bullet est exact si et seulement si il est acyclique.*

DÉMONSTRATION. Clairement, $\text{Im}(d_{k+1}) = \text{Ker}(d_k)$ si et seulement si $H_k(C) = 0$. On en déduit aisément que C_\bullet est exact si et seulement s'il est acyclique. \square

Définition 1.1.6. *Étant donné deux complexes de chaînes C_\bullet et C'_\bullet et une famille d'applications linéaires $\varphi_k : C_k \rightarrow C'_k$, on dira que φ est un morphisme de complexes de chaînes si pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\varphi_{k-1}d_k = d'_k\varphi_k$.*

Proposition 1.1.7. *Soit $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morphisme de complexes de chaînes. Alors φ induit une famille d'applications linéaires en homologie $\tilde{\varphi}_k : H_k(C) \rightarrow H_k(C')$ donnée par $\tilde{\varphi}_k([x]) = [\varphi_k(x)]$, avec $[x] \in H_k(C)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\varphi_{k-1}d_k = d'_k\varphi_k$, on en déduit que φ conserve les cycles et les bords, c'est-à-dire $\varphi_k : Z_k \rightarrow Z'_k$ et $\varphi_k : B_k \rightarrow B'_k$. Pour $x \in Z_k$, on a $d'_k\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}d_k(x) = \varphi(0) = 0$, d'où on déduit $\varphi_k(x) \in Z'_k$. De même, pour $x \in B_k$, alors $x = d_{k+1}(y)$ pour un certain $y \in C_{k+1}$, d'où on déduit $\varphi_k(x) = \varphi_k d_{k+1}(y) = d_{k+1}\varphi_{k+1}(y) \in B'_k$.

Ce faisant, φ passe au quotient, c'est-à-dire que pour $[x] \in H_k(C)$, la classe d'homologie $[\varphi_k(x)]$ est bien définie. Ceci est vérifié en remarquant que pour $x' \in [x]$, on a $x - x' = d_{k+1}(y)$ pour un certain $y \in C_{k+1}$, d'où on tire la série d'égalités suivante :

$$\tilde{\varphi}_k([x]) - \tilde{\varphi}_k([x']) = [\varphi_k(x)] - [\varphi_k(x')] = [\varphi_k(x - x')] = [d_{k+1}(y)] = [0].$$

En d'autres termes, $\tilde{\varphi}_k([0]) = [0]$. Bref, $\tilde{\varphi}_k$ est bien définie. \square

Définition 1.1.8. *Étant donné deux morphismes de complexes de chaînes $\varphi, \psi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, on dira qu'ils sont homotopes, noté $\varphi \sim \psi$, s'il existe une famille d'applications linéaires $\vartheta_k : C_{k-1} \rightarrow C'_k$ tel que $\varphi_k - \psi_k = \vartheta_k d_k + d'_{k+1} \vartheta_{k+1}$.*

Remarquons au passage que $\vartheta_k d_k + d'_{k+1} \vartheta_{k+1}$ est bien un morphisme de complexes de chaînes. En effet, on a $d'_k (\vartheta_k d_k + d'_{k+1} \vartheta_{k+1}) = d'_k \vartheta_k d_k = (\vartheta_{k-1} d_{k-1} + d'_k \vartheta_k) d_k$, où les identités $d'_k d'_{k+1} = 0$ et $d_{k-1} d_k = 0$ ont été utilisées. Bref, la notion de morphismes homotopes est bien définie.

Proposition 1.1.9. *Soient deux morphismes de complexes de chaînes $\varphi, \psi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$. Alors ils coïncident en homologie : $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$.*

DÉMONSTRATION. Pour $[x] \in H_k(C)$, on a la série d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k([x]) &= [\varphi_k(x)] = [\psi_k(x) + \vartheta_k d_k(x) + d'_{k+1} \vartheta_{k+1}(x)] \\ &= [\psi_k(x) + d'_{k+1} \vartheta(x)] = [\psi_k(x)] = \tilde{\psi}_k([x]) \end{aligned}$$

où les identités $d_k(x) = 0$ et $d'_{k+1} \vartheta(x) \in B'_{k+1}$ ont été utilisées. \square

Définition 1.1.10. *Étant donné un morphisme de complexes de chaînes $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, on dira que φ est :*

- (i) *un isomorphisme s'il existe un morphisme de complexes de chaînes $\psi : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ tel que $\psi\varphi = 1_C$ et $\varphi\psi = 1_{C'}$;*
- (ii) *une équivalence s'il existe un morphisme de complexes de chaînes $\psi : C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ tel que $\psi\varphi \sim 1_C$ et $\varphi\psi \sim 1_{C'}$;*
- (iii) *un quasi-isomorphisme si $\tilde{\varphi}_k$ est un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

En particulier, un isomorphisme est une équivalence et une équivalence est un quasi-isomorphisme. Similairement, on dira que C_\bullet et C'_\bullet sont isomorphes, équivalents ou quasi-isomorphes s'il existe entre eux un isomorphisme, une équivalence ou un quasi-isomorphisme.

Proposition 1.1.11. *Soit C_\bullet un complexe de chaînes. Alors le morphisme nul entre C_\bullet et le complexe nul ($C_k = 0$ et $d_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$) est un quasi-isomorphisme si et seulement si C_\bullet est acyclique.*

DÉMONSTRATION. Clairement, C_\bullet est acyclique, c'est-à-dire $H_\bullet = 0$, si et seulement si le morphisme induit de 1_C en homologie est le morphisme nul. Donc il faut et il suffit que le morphisme nul soit un quasi-isomorphisme. \square

Nous donnons maintenant des exemples permettant de clarifier les différences entre ces notions. D'abord le complexe de chaînes C_\bullet donné par $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ est équivalent au complexe nul sans lui être isomorphe. En effet, le morphisme identité sur C_\bullet est homotope au morphisme nul. Le diagramme commutatif suivant permet de vérifier cette affirmation.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
& & \searrow 0 & & \searrow 0 & & \searrow 1 & & \searrow 0 & & \searrow 0 \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

En nommant les flèches obliques ϑ_k , on en déduit que $1_{C_k} = \vartheta_k d_k + d_{k+1} \vartheta_{k+1}$. Ainsi, les morphismes nuls entre C_\bullet et le complexe nul sont des équivalences. Cependant, il est clair que C_\bullet n'est pas isomorphe au complexe nul.

Ensuite, le complexe de chaînes C_\bullet donné par $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ est exact, où π est la projection modulo 2. En particulier, son homologie est nulle, donc le morphisme nul entre C_\bullet et le complexe nul est un quasi-isomorphisme. Or, C_\bullet n'est pas équivalent au complexe nul. Le diagramme commutatif suivant permet de vérifier cette affirmation.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
& & \searrow 0 & & \searrow 0 & & \searrow \alpha & & \searrow \beta & & \searrow 0 & & \searrow 0 \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Pour que 1_C soit homotope au morphisme nul, il faut que $\alpha \circ (2\cdot) = 1$, ce qui est impossible. Ce faisant, C_\bullet n'est pas équivalent au complexe nul.

Définition 1.1.12. *Étant donné une suite de complexes de chaînes $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} C'_\bullet \xrightarrow{\psi} C''_\bullet$, on dira qu'elle est une suite exacte courte de complexes de chaînes si $0 \rightarrow C_k \xrightarrow{\varphi_k} C'_k \xrightarrow{\psi_k} C''_k \rightarrow 0$ est une suite exacte courte pour tout $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire exacte en C_k , C'_k et C''_k . On la notera $0 \rightarrow C_\bullet \xrightarrow{\varphi} C'_\bullet \xrightarrow{\psi} C''_\bullet \rightarrow 0$*

Remarque 1.1.13. *Notons que l'exactitude en C_k et C''_k d'une suite exacte courte $0 \rightarrow C_k \xrightarrow{\varphi_k} C'_k \xrightarrow{\psi_k} C''_k \rightarrow 0$ implique que φ_k est monique ($\text{Ker}(f) = 0$) et que ψ_k est épique ($\text{Im}(g) = C''_k$). Il en va de même pour les suites exactes courtes de complexes de chaînes.*

Théorème 1.1.14. *Soit $0 \rightarrow C_\bullet \xrightarrow{\varphi} C'_\bullet \xrightarrow{\psi} C''_\bullet \rightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaînes. Alors il existe des applications linéaires $\partial_k : H_k(C'') \rightarrow H_{k-1}(C)$ de telle sorte qu'on ait une suite exacte longue en homologie :*

$$\cdots \longrightarrow H_k(C) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} H_k(C') \xrightarrow{\tilde{\psi}_k} H_k(C'') \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

On nomme ces ∂_k les morphismes connectants.

Pour pouvoir démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.15 (Lemme du serpent). *Soit le diagramme commutatif à ligne exacte de R -modules suivant.*

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C'
\end{array}$$

Alors il existe une suite exacte longue

$$\text{Ker}(f) \xrightarrow{u_1} \text{Ker}(g) \xrightarrow{v_1} \text{Ker}(h) \xrightarrow{\partial} \text{Coker}(f) \xrightarrow{u_2} \text{Coker}(g) \xrightarrow{v_2} \text{Coker}(h)$$

où u_1 et v_2 sont obtenus par passage aux noyaux, u_2 et v_2 sont obtenus par passage aux conoyaux et ∂ est un morphisme connectant.

DÉMONSTRATION. On construit d'abord le morphisme connectant ∂ . Soit $c \in \text{Ker}(h)$, alors il existe $b \in B$ tel que $v(b) = c$, car v est un épimorphisme. Par commutativité du diagramme, on a $v'g(b) = hv(b) = h(c) = 0$, d'où on tire $g(b) \in \text{Ker}(v')$. Puisque la suite du bas est exacte, il existe $a' \in A'$ tel que $u'(a') = g(b)$. On définit $\partial(c) = [a'] \in \text{Coker}(f)$.

On vérifie maintenant que ∂ est bien définie. En effet, il faut s'assurer que les choix de $b \in B$ et $a' \in A'$ dans la précédente définition sont sans importance.

Considérons $b_1, b_2 \in B$ tel que $v(b_1) = v(b_2) = c$ ainsi que $a'_1, a'_2 \in A'$ tel que $u'(a'_1) = g(b_1)$ et $u'(a'_2) = g(b_2)$. Montrons que $[a'_1] = [a'_2] \in \text{Coker}(f)$. Puisque $v(b_1) = v(b_2)$, on a $b_1 - b_2 \in \text{Ker}(v)$. Par exactitude de la suite du haut, il existe $a \in A$ tel que $u(a) = b_1 - b_2$. Par commutativité du diagramme, on a $u'f(a) = gu(a) = g(b_1 - b_2) = u'(a'_1 - a'_2)$. Puisque u' est un monomorphisme, on en déduit que $f(a) = a'_1 - a'_2$. En particulier, $[a'_1 - a'_2] = [f(a)] = [0] \in \text{Coker}(f)$, d'où on conclut que $[a'_1] = [a'_2]$. Bref, ∂ est bien définie.

On montre maintenant que la suite dans l'énoncé du lemme est exacte. Clairement, la suite est exacte en $\text{Ker}(g)$ et $\text{Coker}(g)$, car les lignes du diagramme sont exactes en B et B' . Pour l'exactitude en $\text{Ker}(h)$, on remarque d'abord que, pour $b \in \text{Ker}(g)$, on a $\partial v_1(b) = [a']$, avec $u'(a') = g(b) = 0$. Puisque u' est un monomorphisme, on en déduit que $a' = 0$, d'où on tire $\partial v_1 = 0$. Ensuite, étant donné $c \in \text{Ker}(h)$ tel que $\partial(c) = [0]$, on en déduit que si $b \in B$ est tel que $v(b) = c$, alors il existe $a \in A$ tel que $g(b) = u'f(a) = gu(a)$. En particulier, $b - u(a) \in \text{Ker}(g)$ et $v(b - u(a)) = v(b) - vu(a) = v(b) = c$. Bref, $c \in \text{Im}(v_1)$, d'où on conclut que la suite est exacte en $\text{Ker}(g)$. De manière similaire, la suite est exacte en $\text{Coker}(f)$. \square

Remarque 1.1.16. Notons que si u est un monomorphisme ou si v' est un épimorphisme, il en sera de même pour u_1 ou v_2 .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.14. Pour démontrer ce théorème, on considère d'abord le diagramme commutatif à lignes exactes suivants.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\varphi_k} & C'_k & \xrightarrow{\psi_k} & C''_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_k & & \downarrow d'_k & & \downarrow d''_k & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{k-1} & \xrightarrow{\varphi_{k-1}} & C'_{k-1} & \xrightarrow{\psi_{k-1}} & C''_{k-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le lemme du serpent permet d'obtenir la suite exacte longue suivante

$$0 \longrightarrow Z_k \xrightarrow{\varphi_k} Z'_k \xrightarrow{\psi_k} Z''_k \xrightarrow{\delta_k} C_{k-1}/B_{k-1} \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{k-1}} C'_{k-1}/B'_{k-1} \xrightarrow{\widehat{\psi}_{k-1}} C''_{k-1}/B''_{k-1} \longrightarrow 0$$

où φ_k et ψ_k sont obtenus par passage aux noyaux, $\widehat{\varphi}_{k-1}$ et $\widehat{\psi}_{k-1}$ sont obtenus par passage aux conoyaux et δ_k est le morphisme connectant. Il est alors possible de construire le diagramme commutatif aux lignes exactes suivant, où les applications \widehat{d}_{k+1} , \widehat{d}'_{k+1} , \widehat{d}''_{k+1} sont obtenues par passage au quotient par un sous-groupe de leur noyau.

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{k+1}/B_{k+1} & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{k+1}} & C'_{k+1}/B'_{k+1} & \xrightarrow{\widehat{\psi}_{k+1}} & C''_{k+1}/B''_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \widehat{d}_{k+1} & & \downarrow \widehat{d}'_{k+1} & & \downarrow \widehat{d}''_{k+1} & & \\
0 & \longrightarrow & Z_k & \xrightarrow{\varphi_k} & Z'_k & \xrightarrow{\psi_k} & Z''_k
\end{array}$$

Une seconde application du lemme du serpent mène à la suite exacte longue suivante.

$$H_{k+1}(C) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{k+1}} H_{k+1}(C') \xrightarrow{\widetilde{\psi}_{k+1}} H_{k+1}(C'') \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(C) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_k} H_k(C') \xrightarrow{\widetilde{\psi}_k} H_k(C'')$$

En effet, le noyau de \widehat{d}_{k+1} est $\text{Ker}(d_{k+1})/B_{k+1} = Z_{k+1}/B_{k+1} = H_{k+1}(C)$ et le conoyau de \widehat{d}_{k+1} est $Z_k/\text{Im}(\widehat{d}_{k+1}) = Z_k/B_k = H_k(C)$. \square

Il est fréquent de noter cette longue suite exacte comme le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
H_\bullet(C) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & H_\bullet(C') \\
& \swarrow \partial & \searrow \widetilde{\psi} \\
& & H_\bullet(C'')
\end{array}$$

Sa forme est sans rappeler celle d'un triangle. Nous verrons au théorème 1.1.23, qu'un tel triangle peut être construit pour tout morphisme de complexes de chaînes. C'est d'ailleurs le résultat motivant l'étude des catégories triangulées, catégories qui seront présentées à la section 1.1.3.

Nous définissons maintenant une série de constructions sur les complexes de chaînes.

Définition 1.1.17. *Étant donné une famille de complexes de chaînes $\{C_{\alpha,\bullet}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, on peut définir le produit et le coproduit de cette famille de la manière suivante.*

$$\begin{aligned}
\left(\prod C_\alpha\right)_k &= \prod C_{\alpha,k} & \left(\prod d_\alpha\right)_k &= \prod d_{\alpha,k} \\
\left(\bigoplus C_\alpha\right)_k &= \bigoplus C_{\alpha,k} & \left(\bigoplus d_\alpha\right)_k &= \bigoplus d_{\alpha,k}
\end{aligned}$$

Ces produits et coproduits sont bien définis, car les groupes abéliens, et plus généralement les R -modules, admettent des produits et coproduits. De plus, $(\prod C_\alpha)_\bullet$ et $(\bigoplus C_\alpha)_\bullet$ sont des complexes de chaînes.

Proposition 1.1.18. *Étant donné une famille de complexes de chaînes $\{C_{\alpha,\bullet}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, on a les identités suivantes : $H_\bullet(\prod C_\alpha) = \prod H_\bullet(C_\alpha)$ et $H_\bullet(\bigoplus C_\alpha) = \bigoplus H_\bullet(C_\alpha)$.*

DÉMONSTRATION. Cela découle du fait que les groupes de cycles et de bords de $(\prod C_\alpha)_k$ sont $\prod Z_{\alpha,k}$ et $\prod B_{\alpha,k}$. De même, ceux de $(\bigoplus C_\alpha)_k$ sont $\bigoplus Z_{\alpha,k}$ et $\bigoplus B_{\alpha,k}$. \square

Définition 1.1.19. *Étant donné un complexe de chaînes C_\bullet , on définit sa p -suspension, pour $p \in \mathbb{Z}$, comme étant le complexe de chaînes $C[p]_k = C_{k+p}$ muni de la différentielle $d[p]_k = (-1)^p d_{k+p}$. De même, pour un morphisme $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, sa p -suspension est le morphisme $\varphi[p] : C[p]_\bullet \rightarrow C'[p]_\bullet$ défini par $\varphi[p]_k = \varphi_{k+p}$.*

Proposition 1.1.20. *Soit un complexe de chaînes C_\bullet . Alors $H_k(C[p]) = H_{k+p}(C)$.*

DÉMONSTRATION. Les groupes de cycles et de bords de $C[p]_k$ sont B_{k+p} et Z_{k+p} . \square

Définition 1.1.21. *Étant donné un morphisme de complexes de chaînes $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, on définit son cône, noté $C(\varphi)_\bullet$, comme étant le complexe de chaînes $C(\varphi)_k = C_{k-1} \oplus C'_k$ muni de la différentielle $d_k^\varphi = \begin{pmatrix} -d_{k-1} & 0 \\ -\varphi_{k-1} & d'_k \end{pmatrix}$. Puisque φ_\bullet commute avec les différentielles, on a bien $d_k^\varphi d_{k+1}^\varphi = 0$, d'où on conclut que $C(\varphi)_\bullet$ est effectivement un complexe de chaînes.*

L'appellation cône pour ce complexe de chaînes est due au fait que, étant donné une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques, le complexe de chaînes singulières du cône géométrique de f , c'est-à-dire $C(X) \sqcup_{(x,0) \sim f(x)} Y$, est exactement de la forme décrite plus haut. Les prochains résultats démontrent l'importance du cône d'un morphisme dans l'étude des complexes et du morphisme associés.

Proposition 1.1.22. *Soit $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morphisme de complexes de chaînes. Alors il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \rightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C(\varphi)_\bullet \xrightarrow{\pi} C[-1]_\bullet \rightarrow 0$, où $i = (0, 1_{C'})$ est l'inclusion et $\pi = (-1_{C[-1]}, 0)$ est la projection.*

DÉMONSTRATION. Il ne fait aucun doute que i et π sont des morphismes de complexes de chaînes. De plus, la suite est exacte en C'_\bullet et en $C[-1]_\bullet$ car i et π sont respectivement monique et épique. Pour ce qui est de l'exactitude en $C(\varphi)_\bullet$, on remarque que $\pi i = 0$ et que pour $(x, x') \in \text{Ker}(\pi_k)$, on a $-x = \pi_k(x, x') = 0$, donc $(x, x') = (0, x') = i_k(x') \in \text{Im}(i_k)$. \square

Théorème 1.1.23. *Soit $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morphisme de complexes de chaînes. Alors la suite suivante en homologie est une suite exacte longue.*

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(C(\varphi)) \xrightarrow{\tilde{\pi}_{k+1}} H_k(C) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} H_k(C') \xrightarrow{\tilde{i}_k} H_k(C(\varphi)) \longrightarrow \cdots$$

DÉMONSTRATION. Puisqu'il existe une suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \rightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C(\varphi)_\bullet \xrightarrow{\pi} C[-1]_\bullet \rightarrow 0$, du théorème 1.1.14 on obtient la suite exacte longue suivante.

$$\cdots \longrightarrow H_{k+1}(C(\varphi)) \xrightarrow{\tilde{\pi}_{k+1}} H_{k+1}(C[-1]) \xrightarrow{\partial_k} H_k(C') \xrightarrow{\tilde{i}_k} H_k(C(\varphi)) \longrightarrow \cdots$$

Par une précédente proposition, on a $H_{k+1}(C[-1]) = H_k(C)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\partial_k = \tilde{\varphi}_k$. Par définition, pour $[x] \in H_k(C)$, on a $\partial_k([x]) = [x']$ avec $i_k(x') = d_{k+1}^\varphi(-x, 0)$. Puisque $d_{k+1}^\varphi(-x, 0) = (d_k(x), \varphi_k(x)) = (0, \varphi_k(x))$, on en déduit que $x' = \varphi_k(x)$. Ainsi, on a bien $\partial_k([x]) = [x'] = [\varphi_k(x)] = \tilde{\varphi}_k([x])$. \square

Corollaire 1.1.24. *Soit $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ un morphisme de complexes de chaînes. Alors $C(\varphi)_\bullet$ est acyclique si et seulement si φ est un quasi-isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Cela découle directement de l'exactitude de la suite exacte longue en homologie du précédent théorème. \square

Finalement, nous montrons un résultat auxiliaire, à savoir que les cônes sont associatifs.

Proposition 1.1.25. *Soient $\varphi : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ et $\psi : C'_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ des morphismes satisfaisant $\psi\varphi \sim 0$. Soit $\vartheta : C[-1]_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ l'application linéaire telle que $\psi_k\varphi_k = d_{k+1}^h\vartheta_{k+1} + \vartheta_k d_k^f$. On a donc les morphismes $(-\vartheta, \psi) : C(\varphi)_\bullet \rightarrow C''_\bullet$ et $(\varphi[-1], \vartheta) : C[-1]_\bullet \rightarrow C(\psi)_\bullet$. Alors, les cônes de ces morphismes sont isomorphes : $C(-\vartheta, \psi) \simeq C(\varphi[-1], \vartheta)$.*

DÉMONSTRATION. En effet, soit l'application linéaire $\alpha : C(-\vartheta, \psi) \rightarrow C(\varphi[-1], \vartheta)$ décrite par la matrice $\begin{pmatrix} 1_{C[-2]} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C'[-1]} & 0 \\ 0 & 0 & -1_C \end{pmatrix}$. Il est évident que α commute avec les différentielles; on en déduit qu'il s'agit d'un morphisme de complexes. Ces mêmes remarques s'appliquent à l'application linéaire $\beta : C(\varphi[-1], \vartheta) \rightarrow C(-\vartheta, \psi)$ décrite par la même matrice. Puisque $\beta\alpha = 1_{C(-\vartheta, \psi)}$ et $\alpha\beta = 1_{C(\varphi[-1], \vartheta)}$, on conclut que les cônes sont isomorphes. \square

1.1.2. Triangles exacts et leurs propriétés

Dans cette section, on s'intéresse à une classe de triplets de morphismes aux propriétés particulièrement intéressantes. D'ailleurs, leur étude est la motivation principale de ce qui suivra : les catégories triangulées. On dira qu'un triplet de morphismes de complexes de chaîne $C_\bullet \xrightarrow{\varphi} C'_\bullet \xrightarrow{i} C(\varphi)_\bullet \xrightarrow{\pi} C[-1]_\bullet$ est le *triangle exact strict sur φ* , où i et π sont les morphismes spécifiés à la proposition 1.1.22. Plus largement, on dira qu'un triplet de morphismes $C_\bullet \xrightarrow{u} C'_\bullet \xrightarrow{v} C''_\bullet \xrightarrow{w} C[-1]_\bullet$ est un *triangle exact* s'il existe un morphisme $u' : D_\bullet \rightarrow D'_\bullet$ tel que (u, v, w) soit équivalent à (u', i, π) , le triangle exact sur u' . Une équivalence de triangles exacts est un triplet d'équivalences (f, g, h) pour lequel le diagramme suivant est commutatif à homotopie près : $gu \sim u'f$, $hv \sim i'g$ et $f[-1]w \sim \pi'h$.

$$\begin{array}{ccccccc} C_\bullet & \xrightarrow{u} & C'_\bullet & \xrightarrow{v} & C''_\bullet & \xrightarrow{w} & C[-1]_\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[-1] \\ D_\bullet & \xrightarrow{u'} & D'_\bullet & \xrightarrow{i} & C(u')_\bullet & \xrightarrow{\pi} & D[-1]_\bullet \end{array}$$

Si (f, g, h) ne sont pas (tous) des équivalence, on dit qu'ils forment un morphisme de triangles exacts.

On passe maintenant en revue plusieurs propriétés des triangles exacts. Clairement, tout morphisme appartient à au moins un triangle exact, soit son triangle exact strict. En particulier, le triplet $(1_C, 0, 0)$ est équivalent au triangle exacte strict sur 1_C . En effet, par le corollaire 1.1.24, le cône de 1_C de est acyclique, donc équivalent au complexe nul. On vérifie aisément que le diagramme correspondant commute.

$$\begin{array}{ccccccc} C_\bullet & \xrightarrow{1_C} & C_\bullet & \xrightarrow{0} & 0_\bullet & \xrightarrow{0} & C[-1]_\bullet \\ \downarrow 1_C & & \downarrow 1_C & & \downarrow 0 & & \downarrow 1_{C[-1]}=1_{C[-1]} \\ C_\bullet & \xrightarrow{1_C} & C_\bullet & \xrightarrow{i} & C(1_C)_\bullet & \xrightarrow{\pi} & C[-1]_\bullet \end{array}$$

Clairement, les deux boîtes extrémales commutent. Pour ce qui en est de celle du milieu, on utilise le fait que $0 : 0_\bullet \rightarrow C(1_C)_\bullet$ est une équivalence dont l'inverse est $0 : C(1_C)_\bullet \rightarrow 0_\bullet$. Puisque $0i1_C = 0$, on a nécessairement $i1_C \sim 00$.

Une deuxième propriété d'importance est que, étant donné un triangle exact (u, v, w) , les triplets $(v, w, u[-1])$ et $(w[1], u, v)$ sont aussi des triangles exacts. Pour démontrer cette affirmation, il suffit de supposer que (u, v, w) est un triangle exact strict. Ainsi, considérons

le triplet $(i, \pi, \varphi[-1])$ issu du triangle exact strict sur $\varphi : C_{\bullet} \rightarrow C'_{\bullet}$ ainsi que le diagramme suivant, où la ligne du bas est le triangle exact sur i et le morphisme α est $(-\varphi[-1], 1_{C[-1]}, 0)$.

$$\begin{array}{ccccccc} C'_{\bullet} & \xrightarrow{i} & C(\varphi)_{\bullet} & \xrightarrow{\pi} & C[-1]_{\bullet} & \xrightarrow{\varphi[-1]} & C'[-1]_{\bullet} \\ \downarrow 1_{C'} & & \downarrow 1_{C(\varphi)} & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1_{C'[-1]} = 1_{C'[-1]} \\ C'_{\bullet} & \xrightarrow{i} & C(\varphi)_{\bullet} & \xrightarrow{i'} & C(i)_{\bullet} & \xrightarrow{\pi'} & C'[-1]_{\bullet} \end{array}$$

Montrons que α est une équivalence et introduisons le morphisme $\beta : C(i)_{\bullet} \rightarrow C'[-1]_{\bullet}$ donné par $(0, 1_{C[-1]}, 0)$. Clairement, $\beta\alpha = 1_{C[-1]}$. Considérons l'application linéaire de degré 1 $\vartheta : C(i)[-1] \rightarrow C(i)$ décrite par la matrice suivante

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C'} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \alpha_k \beta_k &= \begin{pmatrix} -\varphi_{k-1} \\ 1_{C_{k-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{C_{k-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_{k-1} & 0 \\ 0 & 1_{C_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \vartheta_k d_k^i &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C'_k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d'_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & -d_{k-1} & 0 \\ -1_{C_{k-1}} & -\varphi_{k-1} & d'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{C'_{k-1}} & -\varphi_{k-1} & d'_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ d_{k+1}^i \vartheta_{k+1} &= \begin{pmatrix} -d'_k & 0 & 0 \\ 0 & -d_k & 0 \\ -1_{C_k} & -\varphi_k & d'_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C'_{k+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d'_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{C'_k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_k \beta_k - 1_{C(i)_k} = \vartheta_k d_k^i + d_{k+1}^i \vartheta_{k+1}$. Bref, α est une équivalence. En ce qui a trait à la commutativité du diagramme, il est clair que les boîtes extrémales commutent. Pour ce qui en est de celle du milieu, on a $\pi = \beta i' 1_{C(\varphi)}$. Puisque α est une équivalence d'inverse β , on en déduit $\alpha \pi \sim i' 1_{C(\varphi)}$. En somme, $(i, \pi, \varphi[-1])$ est un triangle exact. De même, le triplet $(\pi[1], \varphi, i)$ est équivalent au triangle exact strict sur $\pi[1]$. En effet, il suffit de considérer l'équivalence $\alpha : C'_{\bullet} \rightarrow C(\pi[1])_{\bullet}$ donnée par $(0, 1_{C'}, 0)$ d'inverse $\beta = (0, 1_{C'}, \varphi)$. Les calculs étant très similaires aux précédents, on ne les détaille pas.

Cette seconde propriété est tout à fait naturelle. On s'attend effectivement à ce résultat : si deux triplets mènent à la même suite exacte longue en homologie et que l'un d'eux est un triangle exact, alors le second est également un triangle exact. En d'autres mots, on peut « rotater » les triangles en faisant agir la suspension $[1]$ ou $[-1]$ au besoin.

La troisième propriété d'intérêt concerne tout particulièrement les morphismes de triangles exacts. Elle stipule qu'étant donné le diagramme suivant

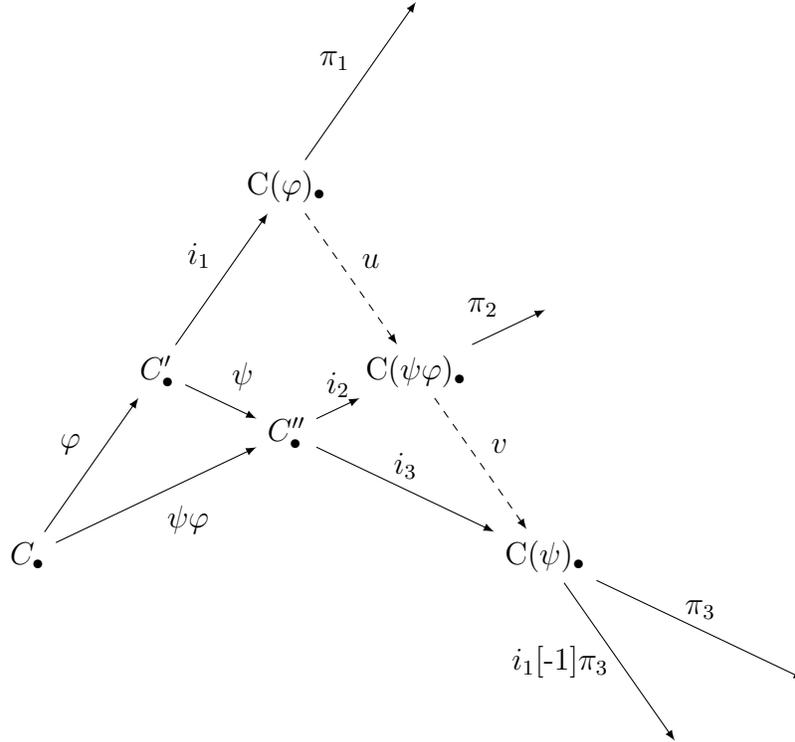
$$\begin{array}{ccccccc}
C_{\bullet} & \xrightarrow{u} & C'_{\bullet} & \xrightarrow{v} & C''_{\bullet} & \xrightarrow{w} & C[-1]_{\bullet} \\
\downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[-1] \\
D_{\bullet} & \xrightarrow{u'} & D'_{\bullet} & \xrightarrow{v'} & D''_{\bullet} & \xrightarrow{w'} & D[-1]_{\bullet}
\end{array}$$

où (u,v,w) et (u',v',w') sont des triangles exacts et où $gu \sim u'f$, alors il existe $h : C''_{\bullet} \rightarrow D''_{\bullet}$ tel que (f,g,h) est un morphisme de triangles exacts. Pour démontrer cette propriété, on suppose que les triangles exacts sont en fait des triangles exacts stricts, c'est-à-dire qu'on considère le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{\bullet} & \xrightarrow{u} & C'_{\bullet} & \xrightarrow{i} & C(u)_{\bullet} & \xrightarrow{\pi} & C[-1]_{\bullet} \\
\downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[-1] \\
D_{\bullet} & \xrightarrow{u'} & D'_{\bullet} & \xrightarrow{i'} & D(u')_{\bullet} & \xrightarrow{\pi'} & D[-1]_{\bullet}
\end{array}$$

Le morphisme $h : C(u)_{\bullet} \rightarrow D(u')_{\bullet}$ qu'on propose est $f[-1] \oplus g = \begin{pmatrix} f[-1] & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Puisque f et g sont des morphismes et que $u'f \sim gu$, h est lui aussi un morphisme. De plus, on a les égalités $hi = (0, g) = i'g$ et $f[-1]\pi = (-f[-1], 0) = \pi'h$. Bref, on peut compléter la paire (f,g) pour en faire un morphisme de triangles exacts. Soulignons que si f et g sont des équivalences, alors, par construction, h est une équivalence, faisant du morphisme de triangles exacts (f,g,h) une équivalence de triangles exacts.

La dernière propriété qui nous intéresse concerne la compatibilité des cônes vis-à-vis de la composition de morphismes. Étant donné deux morphismes $\varphi : C_{\bullet} \rightarrow C'_{\bullet}$ et $\psi : C'_{\bullet} \rightarrow C''_{\bullet}$, on peut construire trois triangles exacts stricts, soient ceux sur φ , ψ et $\psi\varphi$. Ces triangles s'inscrivent dans le diagramme suivant.



La quatrième propriété stipule qu'il existe des morphisme u et v tel que $(u, v, i_1[-1]\pi_3)$ est un triangle exact rendant le diagramme commutatif à homotopie près : $ui_1 \sim i_2\psi$, $\pi_2u \sim \pi_1$, $vi_2 \sim i_3$ et $\pi_3v \sim \varphi\pi_2$. Conceptuellement, cette propriété suggère que les trois triangles exacts stricts se relèvent en un triangle exact entre les cônes.

Pour démontrer cette propriété, on introduit les morphismes $u = 1_{C[-1]} \oplus \psi = \begin{pmatrix} 1_{C[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$ et $v = \varphi[-1] \oplus 1_{C''} = \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1_{C''} \end{pmatrix}$. On se passera de vérifier que u et v sont des morphismes pour montrer directement qu'ils forment avec $i_1[-1]\pi_3$ un triangle exact et qu'ils rendent le diagramme commutatif à homotopie près. D'abord, considérons le triangle strict sur u et le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} C(\varphi)_\bullet & \xrightarrow{u} & C(\psi\varphi)_\bullet & \xrightarrow{v} & C(\psi)_\bullet & \xrightarrow{i_1[-1]\pi_3} & C(\varphi)[-1]_\bullet \\ \downarrow 1_{C(\varphi)} & & \downarrow 1_{C(\psi\varphi)} & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1_{C(\varphi)[-1]} = 1_{C(\varphi)[-1]} \\ C(\varphi)_\bullet & \xrightarrow{u} & C(\psi\varphi)_\bullet & \xrightarrow{i} & C(u)_\bullet & \xrightarrow{\pi} & C(\varphi)[-1]_\bullet \end{array}$$

où α est le morphisme donnée par la matrice suivante

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{C'[-1]} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{C''} \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que α est une équivalence, on introduit le morphisme $\beta : C(u)_\bullet \rightarrow C(\psi)_\bullet$ donnée par la matrice suivante

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1_{C'[-1]} & \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{C''} \end{pmatrix}.$$

Clairement, on a $\beta\alpha = 1_{C(\psi)}$. Pour montrer que $\alpha\beta \sim 1_{C(u)}$, on définit l'application linéaire de degré 1 $\vartheta : C(u)[-1] \rightarrow C(u)$ donnée par la matrice suivante

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C[-1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors les les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\alpha_k \beta_k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{C'_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{C''_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{C'_{k-1}} & \varphi_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{C''_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C'_{k-1}} & \varphi_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{C''_k} \end{pmatrix} \\
\vartheta_k d_k^u &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C_{k-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{k-2} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{k-2} & -d'_{k-1} & 0 & 0 \\ -1_{C_{k-2}} & 0 & -d_{k-1} & 0 \\ 0 & -\psi_{k-1} & -\psi_{k-1}\varphi_{k-1} & d''_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{C_{k-2}} & 0 & -d_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
d^u k + 1\vartheta_{k+1} &= \begin{pmatrix} d_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{k-1} & -d'_k & 0 & 0 \\ -1_{C_{k-1}} & 0 & -d_k & 0 \\ 0 & -\psi_k & -\psi_k\varphi_k & d''_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{C_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1_{C_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_k \beta_k - 1_{C(u)_k} = \vartheta_k d_k^u + d_{k+1}^u \vartheta_{k+1}$. Bref, α est une équivalence. Il ne reste qu'à montrer que le diagramme est commutatif pour conclure que $(u, v, i_1[-1]\pi_3)$ est un triangle exact. Clairement, les boîtes extrémales commutent. Pour montrer que celle de centre commute, il suffit de remarquer que $\beta 1_{C(\psi\varphi)} = v$, d'où on déduit que $1_{C(\psi\varphi)} \sim \alpha v$.

Enfin, on vérifie que le premier diagramme commute. On a les suites d'égalités suivantes qui concluent la démarche.

$$\begin{aligned}
u i_1 &= \begin{pmatrix} 1_{C[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = i_2 \psi \\
\pi_2 u &= \begin{pmatrix} -1_{C[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{C[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{C[-1]} & 0 \end{pmatrix} = \pi_1 \\
v i_2 &= \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1_{C''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{C''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{C''} \end{pmatrix} = i_3 \\
\pi_3 v &= \begin{pmatrix} -1_{C'[-1]} & 0 \\ 0 & 1_{C''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1_{C''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi[-1] & 0 \end{pmatrix} = \varphi[-1]\pi_2
\end{aligned}$$

Cette dernière propriété a été énoncée pour des triangles exacts stricts, mais il est clair qu'elle est toujours valide si on considère des triangles exacts quelconques s'inscrivant dans un tel diagramme.

1.1.3. Catégorie triangulée

On généralise maintenant les propriétés des cônes et des triangles exacts dans le cadre de la théorie des catégories. On rappelle rapidement qu'une catégorie \mathcal{C} est une classe d'objets

$\text{Ob}_{\mathcal{C}}$, une classe de morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour chaque paire d'objets $X,Y \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ ainsi qu'une application $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ satisfaisant les axiomes suivants :

- (i) pour chaque objet $X \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, il existe un morphisme $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ tel que pour tout morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, avec $Y \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, on a $f \circ 1_X = f$ et $1_X \circ g = g$;
- (ii) pour tout quadruplet d'objets $W, X, Y, Z \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$ ainsi que tout triplet de morphismes $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, on a $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Pour la suite, on notera les objets $X \in \mathcal{C}$, les morphismes $f : X \rightarrow Y$, et la composition $f \circ g = fg$ (lorsque définie). Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que $gf = 1_X$ et $fg = 1_Y$.

Une catégorie est dite enrichie sur $R\text{-Mod}$, où R est un anneau associatif unifié, si chaque classe de morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est munie d'une structure de R -module gauche tel que pour tout $r \in R$, $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, on a $r \cdot (gf) = (r \cdot g)f = g(r \cdot f)$.

On dira qu'un objet $I \in \mathcal{C}$ est un objet initial (resp. final) si pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $f : I \rightarrow X$ (resp. $f : X \rightarrow I$). On dira qu'un objet $0 \in \mathcal{C}$ est un objet nul s'il est à la fois un objet initial et final. Clairement, les objets initiaux, finaux et nuls, s'ils existent, sont uniques à unique isomorphisme près.

Étant donné une famille d'objets $X_{\alpha} \subset \mathcal{C}$, son produit $\prod X_{\alpha}$ est un objet de \mathcal{C} muni d'une famille de morphismes $\pi_{\alpha} : \prod X_{\alpha} \rightarrow X_{\alpha}$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$ muni d'une famille de morphismes $f_{\alpha} : Y \rightarrow X_{\alpha}$, il existe un unique morphisme $f : Y \rightarrow \prod X_{\alpha}$ tel que $\pi_{\alpha}f = f_{\alpha}$. Le coproduit de cette famille, notée $\coprod X_{\alpha}$, est un objet de \mathcal{C} muni d'une famille de morphismes $i_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow \coprod X_{\alpha}$ satisfaisant la propriété universelle duale : pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$ muni d'une famille de morphismes $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y$, il existe un unique morphisme $f : \coprod X_{\alpha} \rightarrow Y$ tel que $fi_{\alpha} = f_{\alpha}$. S'ils existent, le produit et le coproduit sont uniques à unique isomorphisme près.

Pour une famille finie d'objets $X_k \subset \mathcal{C}$ dans une catégorie enrichie sur $R\text{-Mod}$, son biproduit $\bigoplus X_k$ est un objet de \mathcal{C} muni de familles de morphismes $\pi_k : \bigoplus X_k \rightarrow X_k$ et $i_k : X_k \rightarrow \bigoplus X_k$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $(\bigoplus X_k, \pi_k)$ est le produit de X_k ;
- (ii) $(\bigoplus X_k, i_k)$ est le coproduit de X_k ;
- (iii) $\pi_k i_l = \delta_{kl}$ et $\sum_k i_k \pi_k = 1_{\bigoplus X_k}$, où $\delta_{kl} = 1_{X_k}$ si $k = l$ et $\delta_{kl} = 0$ autrement.

Une catégorie \mathcal{C} est dite additive si elle est enrichie sur $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ (les classes de morphismes sont des groupes abéliens) possédant un objet nul telle que tout paire d'objets $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ admet un biproduit $X_1 \oplus X_2$.

Étant donné deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$ d'un objet $F(X) \in \mathcal{D}$ et pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} d'un morphisme $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ dans \mathcal{D} tel que les axiomes suivants sont satisfaits :

- (i) pour tous morphismes $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ de \mathcal{C} , on a $F(gf) = F(g)F(f)$;
- (ii) pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, on a $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

On dira d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ qu'il est un autofoncteur s'il existe un foncteur $F^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $FF^{-1} = F^{-1}F = 1_{\mathcal{C}}$, avec $1_{\mathcal{C}}$ le foncteur identité sur \mathcal{C} .

Enfin, une catégorie additive \mathcal{C} munie d'un autofoncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et d'une famille \mathcal{F} de triangles $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ est dite triangulée si elle satisfait les axiomes suivants:

- (TR1) Tout morphisme u appartient à un triangle (u, v, w) . Tout triplet $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ isomorphe¹ à un triangle appartient à \mathcal{F} . Si $A = B$ et $C = 0$, alors $(1_C, 0, 0) \in \mathcal{F}$.
- (TR2) Si $(u, v, w) \in \mathcal{F}$, alors $(v, w, Tu), (T^{-1}w, u, v) \in \mathcal{F}$.
- (TR3) Étant donné deux triangles (u, v, w) et (u', v', w') sur (A, B, C) et (A', B', C') ainsi que deux morphismes $f : A \rightarrow A'$ et $g : B \rightarrow B'$ tels que $u'f = gu$, alors il existe un morphisme $h : C \rightarrow C'$ faisant du triplet (f, g, h) un morphisme de triangle.
- (TR4) Étant donné des triangles (u, i_1, π_1) , (v, i_3, π_3) et (vu, i_2, π_2) sur (A, B, C') , (B, C, A') et (A, C, B') , alors il existe des morphismes $f : C' \rightarrow B'$ et $g : C' \rightarrow A'$ tel que $(f, g, Ti_1\pi_3)$ est un triangle sur (C', B', A') rendant le diagramme correspondant commutatif.

Pour terminer cette section, on effectue un retour en arrière qui permet d'expliquer la définition d'une catégorie triangulée en offrant un exemple. Considérons Ch la catégorie des complexes de chaînes², dont les morphismes sont les morphismes de complexes de chaînes. On a montré à la précédente section que, munie la suspension $[-1]$ et de $\mathcal{F} = \{(u, v, w) \text{ triangles exacts}\}$, celle-ci satisfait presque les axiomes TR1 à TR4. En effet, la commutativité des différents diagrammes n'est assurée qu'à homotopie près. Pour pallier à ce problème, on considère la catégorie K dont les objets sont les complexes de chaînes et les morphismes sont $\text{Hom}_K(C_\bullet, C'_\bullet) = \text{Hom}_{\text{Ch}}(C_\bullet, C'_\bullet) / \sim$, avec \sim la relation d'équivalence d'homotopie de morphismes. Dans K , les diagrammes deviennent totalement commutatifs. En effet, la précédente notion d'équivalence de complexes de chaînes devient une notion d'isomorphisme de complexes de chaînes. De plus, on vérifie aisément que K est une catégorie additive : l'action de \mathbb{Z} sur K est bien définie, le complexe nul est l'objet nul et le biproduct de deux complexes de chaînes est leur somme directe. Bref, K est une catégorie triangulée.

1.2. Éléments de théorie de Morse

Nous présentons les concepts centraux de la théorie de Morse et de l'homologie de Morse. Ces concepts seront utilisés tout au long de ce mémoire, d'où la nécessité de les introduire dès le début. Puisque la plupart des démonstrations des résultats qui suivent sont longues,

¹Un morphisme de triangles est la notion analogue à celle de morphisme de triangles exacts, où la commutativité à homotopie près est remplacée par commutativité. Un isomorphisme de triangles est donc un morphisme de triangles formé d'isomorphismes.

²De même, on peut définir $\text{Ch}(R)$ la catégorie des complexes de chaînes sur un anneau associatif unifié R . Ce qui suit est aussi valide dans ce cas plus général.

nous considérons important de nommer dès le début la principale référence de cette section, c'est-à-dire [1].

1.2.1. Théorie de Morse

Soit \mathcal{M} une variété différentielle lisse. Par le théorème de plongement de Whitney, nous considérerons que $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ pour n suffisamment grand.

Définition 1.2.1 (Fonction de Morse). *Une fonction de Morse f est une fonction à valeur réelle $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que ses points critiques sont non dégénérés, c'est-à-dire que si pour $x \in \mathcal{M}$ on a $(df)_x = \mathbf{0}$, alors la matrice hessienne $(d^2f)_x$ est non dégénérée en tant que forme bilinéaire (inversible).*

Par exemple, la fonction hauteur sur une sphère S^2 est une fonction de Morse, celle-ci présentant un maximum et un minimum, tous deux non dégénérés. Par ailleurs, les fonctions de Morse sont très communes, au sens des propositions suivantes.

Proposition 1.2.2 (Existence des fonctions de Morse). *Pour presque tout point $p \in \mathbb{R}^n$, la fonction hauteur $f_p : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_p(x) = \|x - p\|^2$ est une fonction de Morse.*

Par « presque tout point », on entend que l'ensemble des points ne satisfaisant pas l'énoncé est de mesure nulle dans \mathbb{R}^n .

Proposition 1.2.3 (Abondance des fonctions de Morse). *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ . Soit k un entier positif. Alors f et toutes ses dérivatives d'ordre au plus k peuvent être approximées uniformément par des fonctions de Morse sur des sous-ensembles compacts.*

En particulier, si $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est compacte, alors l'ensemble des fonctions de Morse sur \mathcal{M} est un ouvert dense de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ muni de la topologie de convergence uniforme \mathcal{C}^∞ . Puisque les fonctions de Morse présentent des points critiques non dégénérés, tous leurs points critiques satisfont le lemme suivant.

Lemme 1.2.4 (Lemme de Morse). *Soit x un point critique non dégénéré d'une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une carte (U, φ) centrée en x telle que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(x) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2$$

avec $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Im}(\varphi)$.

En particulier, le lemme de Morse implique que les points critiques non dégénérés sont isolés. On appelle une telle carte (U, φ) une carte de Morse. Elle permet de définir l'indice d'un point critique, nommé $\mu(x) = i$. On remarque que $(n-i, i)$ est la signature de la matrice hessienne de f en x , donc l'indice d'un point critique ne dépend que du point critique. Pour la suite, on note $C(f) = \{x \in \mathcal{M} : (df)_x = \mathbf{0}\}$ et $C_k(f) = \{x \in \mathcal{M} : (df)_x = \mathbf{0} \text{ et } \mu(x) = k\}$ les ensembles des points critiques de f , avec indice fixé ou non.

On introduit maintenant la notion de pseudo-gradient, notion essentielle pour la suite et généralisant celle de gradient. Rappelons que le gradient d'une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, noté

∇f , est le champ vectoriel satisfaisant la propriété $\langle \nabla_x f, Y \rangle = (df)_x(Y)$ pour tout Y champ vectoriel, avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire obtenue de la métrique α .

Définition 1.2.5 (Pseudo-gradient). *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Un pseudo-gradient adapté à f est un champ vectoriel X satisfaisant les propriétés suivantes.*

- (i) $(df)_x(X_x) \leq 0$, avec égalité si et seulement si x est un point critique de f .
- (ii) Pour tout point critique, il existe une carte de Morse de f , X coïncide avec $-\nabla f$.

En particulier, $-\nabla f$ est un pseudo-gradient de f . En effet, la fonction f décroît le long des lignes de flot de $-\nabla f : \frac{d}{dt}f(\phi^t(x)) = (df)_{\phi^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(x)\right) = -\|\nabla_{\phi^t(x)}f\|^2 < 0$. Soulignons que les pseudo-gradients forment une classe particulière de champ vectoriel. Malgré leur particularité, pour toute fonction de Morse f sur une variété compacte \mathcal{M} munie d'une métrique α , il existe un pseudo-gradient adapté à f . La proposition suivante stipule que les lignes de flot d'un pseudo-gradient relie toujours deux points critiques lorsque la variété considérée est compacte.

Proposition 1.2.6. *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur \mathcal{M} compacte, X un pseudo-gradient adapté à f et ϕ son flot. Alors pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe $y, z \in C(f)$ tels que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(x) = y$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = z$.*

L'introduction de la notion de pseudo-gradient mène à considérer des sous-variétés particulières de \mathcal{M} associées aux points critiques de f .

Définition 1.2.7 (Sous-variétés stables et instables). *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et X un pseudo-gradient adapté à f . Soit ϕ le flot de X et $x \in C(f)$. On note $W^s(x) = \{y \in \mathcal{M} : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(y) = x\}$ la sous-variété stable de x et $W^u(x) = \{y \in \mathcal{M} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(y) = x\}$ la sous-variété instable de x .*

Ces sous-ensembles sont bel et bien des sous-variétés, d'où leur nom. Intuitivement, la sous-variété stable $W^s(x)$ est composée des points qui tendent vers x sous l'action de ϕ^t , alors que $W^u(x)$ est composée de ceux qui tendent vers x sous l'action de ϕ^{-t} . De plus, $W^s(x)$ est diffeomorphe à un disque de dimension $n - \mu(x)$ et $W^u(x)$ est diffeomorphe à un disque de dimension $\mu(x)$. En particulier, si x est un maximum (resp. minimum) de f , alors $W^s(x) = \{x\}$ (resp. $W^u(x) = \{x\}$). Dans le cas où \mathcal{M} est compacte, on déduit de la précédente proposition que ses points appartiennent à une seule sous-variété stable et une seule sous-variété instable.

L'étude de ces sous-variétés et de leurs intersections permet d'obtenir plusieurs informations sur la variété ambiante. Nous verrons à la prochaine section comment construire une théorie d'homologie à partir des sous-variétés stables et instables d'une fonction de Morse. Pour que les intersections $W^u(x) \cap W^s(y)$, avec $x, y \in C(f)$, soient des sous-variétés de \mathcal{M} , il suffit que $W^u(x)$ et $W^s(y)$ soient transverses l'une par rapport à l'autre. Pour certains cas spécifiques, par exemple $f(x) < f(y)$ ou $x = y$, la transversalité des sous-variétés est trivialement vérifiée. Mais pour de nombreux autres cas, il n'est pas garanti que cette transversalité soit satisfaite.

À titre d'exemple, on considère la fonction hauteur sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ tel qu'illustré à la figure 1.1. Lorsque α est la métrique standard de \mathbb{R}^3 , le gradient négatif de cette fonction admet pour flot celui présenté à la figure 1.2. Remarquons que $W^s(b) = W^u(c)$ et que $\dim W^s(b) = 1 = \dim W^u(c)$. On en déduit que $T_x W^s(b) + T_x W^u(c) \neq T_x T^2$, avec $x \in W^s(b) = W^u(c)$, donc que $W^s(b)$ n'est pas transverse à $W^u(c)$.

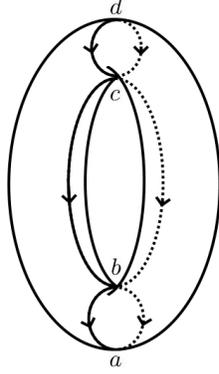


Fig. 1.1. Fonction de Morse sur le tore T^2 . Les points critiques sont ordonnés selon leur valeur : $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$.

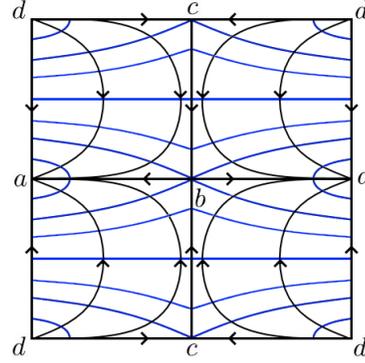


Fig. 1.2. Flot du gradient négatif de la fonction de Morse de la figure 1.1.

On peut régler tautologiquement ce problème en imposant une condition supplémentaire au pseudo-gradient considéré : la condition de Smale.

Définition 1.2.8 (Condition de Smale). *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Un pseudo-gradient X adapté à f satisfait la condition de Smale si pour tous points critiques x et y , on a $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$. On dira que (f, X) forme une paire Morse-Smale.*

Le prochain théorème assure que tout pseudo-gradient qui ne satisfait pas la condition de Smale peut être légèrement perturbé de telle sorte qu'il soit encore un pseudo-gradient et qu'il respecte la condition de Smale.

Théorème 1.2.9. *Soient \mathcal{M} une variété à bord et f une fonction de Morse aux valeurs critiques distinctes. Pour chaque point critique de f , fixons une carte de Morse et nous dénotons par Ω l'ensemble de ces cartes. Soit X un pseudo-gradient de f transverse à la frontière de \mathcal{M} . Alors f admet un pseudo-gradient \tilde{X} qui est C^1 -près de X , qui coïncide avec X sur Ω et tel que (f, \tilde{X}) est une paire Morse-Smale.*

Les figures 1.3 et 1.4 illustrent une déformation du gradient négatif de la figure 1.2. Dans le sous-niveau $f^{-1}([\alpha + \varepsilon, \alpha + 2\varepsilon])$, de petites perturbations du champ vectoriel sont effectuées de telle sorte que les lignes de flot ne joignent plus les points critiques b et c .

Ce sont d'ailleurs de telles perturbations qui sont l'argument principal de la démonstration du théorème de Smale. L'ajout de composantes transverses au pseudo-gradient dans de petits voisinages des points critiques assure que la variété stable de chaque point critique soit transverse à la variété instable de tous les autres points critiques.

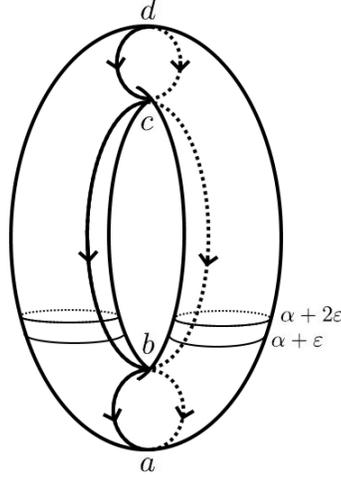


Fig. 1.3. Sous-niveau $[\alpha + \varepsilon, \alpha + 2\varepsilon]$ de la fonction de Morse présentée à la figure 1.1.

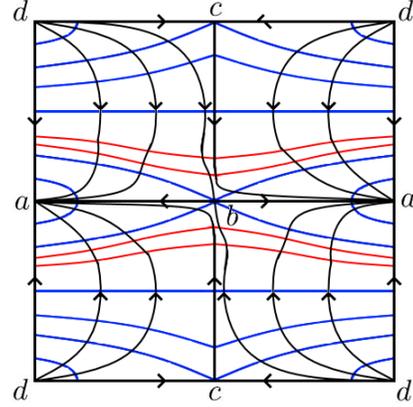


Fig. 1.4. Flot du pseudo-gradient issu d'une perturbation du gradient négatif de la fonction de Morse de la figure 1.1.

1.2.2. Homologie de Morse

Il est maintenant venu le temps d'aborder l'homologie de Morse. Nous verrons comment construire une théorie d'homologie à partir d'une fonction de Morse, de ses points critiques et de leur sous-variétés stables et instables. Nous montrerons également que la théorie obtenue est invariante du choix de la fonction de Morse. Enfin, nous comparerons cette théorie à l'homologie cellulaire et constaterons qu'elles coïncident entre elles de manière tout à fait naturelle. Pour ce qui suit, nous considérons que \mathcal{M} est une variété compacte de dimension n équipée d'une métrique α fixée. Les définitions et résultats qui suivent sont également valide dans le cas où \mathcal{M} est une variété à bord ou si elle est orientée. De plus amples commentaires seront offerts au moment opportun.

Considérons $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse ainsi que X un pseudo-gradient de f satisfaisant la condition de Smale. Rappelons que nous avons noté $C_k(f)$ l'ensemble des points critiques de f d'indice k . Nous équipons les $C_k(f)$ d'une structure de \mathbb{Z}_2 -module libre. Nous introduisons l'application différentielle $d_k : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$ définie linéairement par $d_k(x) = \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \eta_X(x,y)y$, où $\eta_X(x,y)$ est le nombre modulo 2 de lignes de flot de X reliant x à y . Si $C_{k-1}(f) = \emptyset$, on définit par défaut $\eta_X(x,y) = 0$.

Nous désirons montrer que $(C_\bullet(f), d_\bullet)$ est un complexe de chaîne. Pour ce faire, il suffit de montrer que $d_{k-1}d_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_{>1}$ (l'énoncé étant trivial pour $k \in \{0,1\}$). Pour $x \in C_k(f)$, un calcul direct donne $d_{k-1}d_k(x) = \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \eta_X(x,y)d_{k-1}(y) = \sum_{z \in C_{k-2}(f)} \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \eta_X(x,y)\eta_X(y,z)z = 0$. Puisque les $z \in C_{k-2}(f)$ sont linéairement indépendants (les $C_\bullet(f)$ étant des modules libres), il faut montrer que $\eta_X(x,y)\eta_X(y,z) \in 2\mathbb{Z}$. Géométriquement, il faut montrer que les lignes de flot reliant $x \in C_k(f)$ à $z \in C_{k-2}(f)$ et passant par des points critiques $y \in C_{k-1}(f)$ viennent en paire.

Pour $x, y \in C(f)$, notons $\mathcal{M}(x, y) = \{z \in \mathcal{M} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(z) = x \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(z) = y\}$, où ϕ^t est le flot de X . En d'autres termes, $\mathcal{M}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$. Puisque (f, X) est une paire Morse-Smale, $\mathcal{M}(x, y)$ est une sous-variété de \mathcal{M} . Sa dimension se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(x, y) &= n - \text{codim} \mathcal{L}(x, y) = n - \text{codim} W^u(x) - \text{codim} W^s(y) \\ &= n - (n - \mu(x)) - \mu(y) = \mu(x) - \mu(y). \end{aligned}$$

Résultat intéressant, la transversalité entre $W^u(x)$ et $W^s(y)$ implique que si $\mu(x) < \mu(y)$, alors $\mathcal{M}(x, y) = \emptyset$. De plus, si $\mu(x) = \mu(y)$, alors $\mathcal{M}(x, y)$ doit être de dimension 0, c'est-à-dire des points isolés. On en déduit très rapidement que $\mathcal{M}(x, y) = \emptyset$ si $x \neq y$ et $\mathcal{M}(x, y) = \{x\}$ si $x = y$. Le constat : l'indice des points critiques diminue le long des lignes de flot.

Remarquons également que $\mathcal{M}(x, y)$ admet une action du groupe additif \mathbb{R} donnée par $r \cdot z = \phi^r(z)$, pour $r \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{M}(x, y)$. De plus, cette action est libre si $x \neq y$. En effet, si $x \neq y$, la proposition 1.2.6 implique qu'il n'y a aucun point critique contenu dans $\mathcal{M}(x, y)$. De plus, puisque f est strictement décroissante le long de ϕ^t , si $\phi^r(z) = \phi^s(z)$, on doit avoir $f(\phi^r(z)) = f(\phi^s(z))$, d'où on déduit que $r = s$.

Étant donné qu'on s'intéresse aux lignes de flot reliant x à y , il serait pertinent de considérer la variété quotient $\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{M}(x, y)/\mathbb{R}$ pour cette action. Celle-ci représente l'ensemble des lignes de flot reliant x à y . Puisque \mathbb{R} est de dimension 1, on a $\dim \mathcal{L}(x, y) = \dim \mathcal{M}(x, y) - 1 = \mu(x) - \mu(y) - 1$. En particulier, pour $\mu(x) = \mu(y) + 1$, $\mathcal{L}(x, y)$ est composée de lignes de flot isolées. On a donc $\eta_X(x, y) = \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{L}(x, y)$, où $\#_{\mathbb{Z}_2}$ désigne la cardinalité modulo 2.

On peut donc réécrire l'expression de d_k comme suit : $d_k(x) = \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{L}(x, y) y$. Pour montrer que $d_{k-1} d_k$, il suffit de prouver que pour $x \in C_k(f)$ et $z \in C_{k-2}(f)$, on a $0 = \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{L}(x, y) \#_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{L}(y, z) = \#_{\mathbb{Z}_2} \bigsqcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$. L'astuce est de montrer que $\bigsqcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$ est le bord d'une variété compacte de dimension 1. Puisque les seules variétés compactes de dimension 1 sont $[0, 1]$ et S^1 , nous en déduisons qu'il y a un nombre pair de trajectoires brisées reliant x à z .

À ce titre, nous considérons $\bar{\mathcal{L}}(x, z) = \mathcal{L}(x, z) \cup \left[\bigsqcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z) \right]$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(x, z)$ à laquelle on ajoute l'ensemble des trajectoires brisées entre x et z passant par un point critique intermédiaire. Nous désirons montrer que $\bar{\mathcal{L}}(x, z)$ est la compactification de $\mathcal{L}(x, z)$ et que son bord est $\bigsqcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$.

La première étape est de définir une topologie sur $\bar{\mathcal{L}}(x, z)$. Soit $\lambda \in \bar{\mathcal{L}}(x, z)$. Alors soit $\lambda \in \mathcal{L}(x, z)$, soit $\lambda \in \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$ pour un certain $y \in C_{k-1}(f)$. Dans le premier cas, on fixe $U(x)$ et $U(z)$ des cartes de Morse de x et z . Notons x^- le point de sortie de λ de la carte $U(x)$ et z^+ son point d'entrée dans la carte $U(z)$. Soit U^- (resp. U^+) un voisinage de x^- (resp. z^+) dans $\partial U(x)$ (resp. $\partial U(z)$) sur lequel f est constante. On dira que $\lambda' \in \bar{\mathcal{L}}(x, z)$ appartient au voisinage $\mathcal{W}(\lambda, U^-, U^+)$ si λ' croise U^- et U^+ .

Pour le second cas, on fixe $U(x)$, $U(y)$ et $U(z)$ des cartes de Morse de x , y et z . On note x^- et y^- les points de sortie de λ des cartes $U(x)$ et $U(y)$, et y^+ et z^+ ses points d'entrée dans les cartes $U(y)$ et $U(z)$. On fixe $U^-(x)$ et $U^-(y)$ (resp. $U^+(y)$ et $U^+(z)$) des voisinages de x^- et y^- (resp. y^+ et z^+) dans $\partial U(x)$ et $\partial U(y)$ (resp. $\partial U(y)$ et $\partial U(z)$) sur lesquels f est constante. Notons U^- et U^+ pour désigner les collections de ces voisinages d'entrée et de sortie. On dira que $\lambda' \in \overline{\mathcal{L}}(x,z)$ appartient au voisinage $\mathcal{W}(\lambda, U^-, U^+)$ si λ' croise $U^-(x)$, $U^-(y)$, $U^+(y)$ et $U^+(z)$.

Enfin, la topologie de $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$ qu'on considère est celle engendrée par les voisinages $\mathcal{W}(\lambda, U^-, U^+)$. Conceptuellement, λ' appartient à $\mathcal{W}(\lambda, U^-, U^+)$ si elle passe près de λ , où la proximité entre λ' et λ est donné par les collections de voisinages U^- et U^+ . Fait important à souligner, les topologies induites de $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$ par restriction coïncident avec les topologies quotient de $\mathcal{L}(x,z)$, $\mathcal{L}(x,y)$ et $\mathcal{L}(y,z)$ induites de $\mathcal{M}(x,z)$, $\mathcal{M}(x,y)$ et $\mathcal{M}(y,z)$. Ceci nous permettra donc de conclure que si $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$ est compacte, alors elle est la compactification de $\mathcal{L}(x,z)$. Ainsi, il faut montrer que $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$ est compacte et que $\bigcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x,y) \times \mathcal{L}(y,z)$ en est le bord.

Pour ce qui est de la compacité de $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$, on souligne que puisque sa topologie est définie à partir de celle de \mathcal{M} , il est évident qu'elle admet une base dénombrable. Ainsi, pour que $\overline{\mathcal{L}}(x,z)$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit séquentiellement compacte. On désire donc montrer que toute suite $\lambda_n \subset \overline{\mathcal{L}}(x,z)$ admet une sous-suite convergente.

Considérons d'abord une suite $\lambda_n \subset \mathcal{L}(x,z)$ et des cartes de Morse $U(x)$ et $U(z)$. Notons λ_n^- et λ_n^+ les points de sortie et d'entrée de λ_n dans ces cartes. En restreignant les cartes de Morse $U(x)$ et $U(z)$ au besoin, on peut assumer que f est constante sur les λ_n^- et les λ_n^+ (séparément). De plus, les λ_n^- appartiennent à l'intersection entre $W^u(x)$ (un disque) et $\partial U(x)$ (une sphère), intersection qui est compacte. De même, les λ_n^+ appartiennent à un compact de \mathcal{M} . En considérant une sous-suite au besoin, on en déduit que $\lim \lambda_n^- = x^-$ et $\lim \lambda_n^+ = z^+$, où x^- et z^+ appartiennent aux précédentes intersections.

Soit λ la trajectoire $\phi^t(x^-)$. Notons $c = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x^-)$ le point critique d'arrivée de λ . Si $c = z$, alors il suffit de montrer que $\lim \lambda_n = \lambda$, c'est-à-dire que λ passe par z^+ . Ceci se déduit aisément du lemme suivant.

Lemme 1.2.10. *Soient $x \in \mathcal{M} \setminus C(f)$ ainsi que $x_n \subset \mathcal{M} \setminus C(f)$ une suite qui tend vers x . Soient y et y_n des points sur les trajectoires du flot de X de x et x_n tels que $f(y) = f(y_n)$. Alors $\lim y_n = y$.*

DÉMONSTRATION. Soit U un voisinage de $C(f)$ qui ne contient pas x , y , x_n et y_n (pour n suffisamment grand). Soit le champ vectoriel $Y = \frac{-1}{df(X)}X$ défini sur $\mathcal{M} \setminus U$, c'est-à-dire X normalisé selon df . Notons φ_t son flot. Alors nous avons les égalités suivantes.

$$\frac{d}{dt} [f(\varphi_t(z))] = (df)_{\varphi_t(z)} \left(\frac{d}{dt} \varphi_t(z) \right) = (df)_{\varphi_t(z)} (Y_{\varphi_t(z)}) = -1$$

Donc Y correspond bien à X normalisé selon df . En particulier, on en déduit que $f(\varphi_t(z)) = f(z) - t$. En d'autres termes, le temps séparant deux points z et z' de $\mathcal{M} \setminus U$ appartenant à une même trajectoire de φ est exactement $f(z) - f(z')$. On a donc les identités $y_n = \varphi_{f(x_n) - f(y_n)}(x_n) = \varphi_{f(x_n) - f(y)}(x_n)$ et $y = \varphi_{f(x) - f(y)}(x)$, d'où on tire $\lim y_n = y$. \square

En restreignant au besoin la carte de Morse $U(z)$, on a $f(z^+) = f(\lambda_n^+) = f(\lambda^+)$, avec λ^+ le point d'entrée de λ dans $U(z)$. Il est alors clair que λ^+ et z^+ coïncident, car $\lambda^+ = \lim \lambda_n^+ = z^+$. Bref, puisque les cartes de Morse $U(x)$ et $U(z)$ peuvent être arbitrairement petites, on en déduit que, dans la topologie de $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ engendrée par les $\mathcal{W}(\lambda', U^-, U^+)$, on a bien $\lim \lambda_n = \lambda \in \overline{\mathcal{L}}(x, z)$.

Dans le cas où c est un point critique distinct de z , un argument similaire au précédent permet de conclure de manière inductive sur c que $\lim \lambda_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q+1}) \in \mathcal{L}(x, c_1) \times \dots \times \mathcal{L}(c_q, z)$. En effet, en considérant une carte de Morse $U(c)$ pour laquelle f est constante sur $\partial U(c)$, les trajectoires λ_n , ou du moins une sous-suite, y admettent des points d'entrée et de sortie c_n^+ et c_n^- . Pour les mêmes raisons que précédemment, ces points admettent des limites nommément c^+ et c^- . Par le précédent lemme, on a $c^+ \in W^s(c)$. De plus, $c^- \in W^u(c)$, car autrement c^- serait sur la trajectoire d'un $c^* \notin W^s(c)$ (autrement $c^- \in W^s(c)$ ne pourrait pas être la limite de points quittant $U(c)$) tel que $f(c_n^+) = f(c^*)$. Une autre application du précédent lemme permettrait de déduire que $c^* = \lim c_n^+ = c^+ \in W^s(c)$, ce qui est absurde. On comprend donc que λ_n approche une ligne de flot brisée passant par c . Par raisonnement inductif, on en vient à conclure que $\lim \lambda_n$ est composée d'une succession de lignes de flot reliant x à z et passant par divers points critiques.

Tel discuté précédemment, l'indice des points critiques diminue le long des lignes de flot. Il faut donc que $\lim \lambda_n = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$, avec $y \in C_k(f)$. Par épuisement des cas, on en déduit que toute suite dans $\mathcal{L}(x, z)$ admet une sous-suite dont le point de convergence appartient à $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$. Pour le cas plus général où $\lambda_n \subset \overline{\mathcal{L}}(x, z)$, l'ajout des points limites (les lignes de flot brisées) à $\mathcal{L}(x, y)$ ne permet pas d'obtenir des suites n'admettant aucune sous-suite convergente. Bref, $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ est la compactification de $\mathcal{L}(x, z)$.

Finalement, on montre que $\partial \overline{\mathcal{L}}(x, z) = \bigcup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z)$.

Proposition 1.2.11. *Soit $\lambda_1 \in \mathcal{L}(x, y)$ et $\lambda_2 \in \mathcal{L}(y, z)$, avec $y \in C_{k-1}(f)$. Alors il existe un plongement ψ de $[0, \delta)$ dans un voisinage de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathcal{L}}(x, z)$ différentiable sur $(0, \delta)$ tel que $\psi(0) = (\lambda_1, \lambda_2)$ et $\psi(s) \in \mathcal{L}(x, z)$ pour $s \in (0, \delta)$. De plus, si $l_n \subset \mathcal{L}(x, y)$ est une suite convergent en (λ_1, λ_2) , alors $\lambda_n \in \text{Im}(\psi)$ pour n suffisamment grand.*

DÉMONSTRATION. La preuve est plutôt longue et n'est pas très pertinente pour le reste du mémoire. Nous n'en esquisserons donc que les grandes lignes. On considère des cartes de Morse $U(x)$, $U(y)$ et $U(z)$ ainsi que λ_1^+ le point d'entrée de λ_1 dans $U(y)$. En notant $\alpha = f(y)$, on peut supposer sans perte de généralité que $\partial U(y)$ rencontre $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$ et $f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$. Ces intersection sont notées $\partial_+ U(y)$ et $\partial_- U(y)$. Le point d'entrée de λ_1 dans $U(y)$, c'est-à-dire le point d'intersection entre λ_1 et $\partial_+ U(y)$, est noté λ_1^+ . On note $S_+(y) =$

$W^s(y) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \simeq S^{n-k}$ et $P = W^u(x) \cap f^{-1}(\alpha + \varepsilon) \simeq D^{k-1}$. Puisque (f, X) est une paire Morse-Smale, on a $S_+(y) \pitchfork P$. De plus, les dimensions de $S_+(y)$ et P étant $n - k$ et $k - 1$, l'intersection $S_+(y) \cap P$ est composée de points isolés. En restreignant au besoin les cartes de Morse, on a $S_+(y) \cap P = \{\lambda_1^+\}$.

L'idée est de transporter $P \setminus \{\lambda_1^+\} \simeq D^{k-1} \setminus \{0\}$ par le flot de X pour obtenir une sous-variété $Q \subset W^u(x) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon) \simeq D^{k-1} \setminus \{0\}$ dont la frontière intérieure est la sphère $S_-(y) = W^u(c) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$. On note $\tilde{Q} = Q \cup S_-(y)$ la sous-variété de dimension $k - 1$ ayant pour frontière $S_-(y)$. Puisque (f, X) est une paire Morse-Smale, on a $Q \pitchfork W^s(z)$ et $S_-(y) \pitchfork W^s(z)$, d'où on tire $\tilde{Q} \pitchfork W^s(z)$. Cette intersection est difféomorphe à une union disjointe d'intervalles $[0, \delta)$ et sa frontière est $\mathcal{M}(y, z) \cap f^{-1}(\alpha - \varepsilon)$. On choisit la composante connexe associée à λ_2 , c'est-à-dire celle pour laquelle la frontière est le point de sortie de λ_2 de la carte $U(y)$, nommément λ_2^- . En reculant selon le flot de X cet intervalle $(0, \delta)$ jusqu'à $\partial_+ U(y)$, on obtient un intervalle de P ayant pour point limite en 0 le point d'entrée λ_1^+ . Bref, on a bel et bien un plongement $[0, \delta)$ dans un voisinage de (λ_1, λ_2) dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$.

Pour la seconde partie de la proposition, si $\lambda_n \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$, alors les points d'entrée et de sorties λ_n^+ et λ_n^- doivent tendre vers λ_1^+ et λ_2^- . Ainsi, pour n suffisamment grand, les λ_n^+ appartiennent au disque troué $P \setminus \{\lambda_1^+\}$, donc les λ_n^- appartiennent au disque troué Q . En particulier, les λ_n^- sont contenus dans l'intersection $Q \cap W^s(z)$, donc dans l'intervalle $(0, \delta)$ associé à λ_2 , car $\lambda_n^- \rightarrow \lambda_2^-$. Il en va donc de même des λ_n^+ , c'est-à-dire qu'ils appartiennent à l'intervalle correspondant du sous-niveau $f^{-1}(\alpha + \varepsilon)$. Bref, λ_n appartient à l'image de $(0, \delta)$ dans $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ pour n suffisamment grand. \square

De cette proposition, on déduit que les lignes de flot brisées de $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ sont exactement les points frontières de $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$. En somme, on a bien $d_{k-1}d_k = 0$.

On avait mentionné au début de la section les cas où \mathcal{M} est un variété à bord et où \mathcal{M} est orientée. Pour le premier cas, si les points critiques de f n'appartiennent pas à $\partial\mathcal{M}$ et si X est transverse à $\partial\mathcal{M}$, les résultats tiennent toujours. Si \mathcal{M} est orientée, on peut alors assigner une orientation à $\mathcal{M}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$. Donc les éléments de $\mathcal{L}(x, y)$ sont signés. On construit alors un complexe de chaînes sur \mathbb{Z} en considérant les \mathbb{Z} -modules libres $C_k(f)$ et les applications linéaires $d_k(x) = \sum_{y \in C_{k-1}(f)} \#_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}(x, y) y$, avec $\#_{\mathbb{Z}}$ la cardinalité signée. Encore une fois, on aura $d_{k-1}d_k = 0$, car les $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ héritent eux aussi d'une orientation telle que $\#_{\mathbb{Z}} \cup_{y \in C_{k-1}(f)} \mathcal{L}(x, y) \times \mathcal{L}(y, z) = 0$. En effet, les $\overline{\mathcal{L}}(x, z)$ sont composées de cercles dont la frontière est nulle et d'intervalles fermés dont l'une des extrémités est signée négativement et l'autre positivement.

Pour la suite, on notera $C_{\bullet}(f)$ le complexe de chaînes associé à une paire Morse-Smale (f, X) et le nommerons complexe de Morse. On désigne par $Z_k(f)$ et $B_k(f)$ les groupes de cycles et de bords de $C_k(f)$. Enfin, $H_{\bullet}(f) = Z_k(f)/B_k(f)$, est appelée l'homologie de Morse associée à (f, X) .

On montre maintenant que l'homologie de Morse est indépendante du choix de la paire Morse-Smale. Les calculs qui suivent concernent l'homologie de Morse à coefficients dans \mathbb{Z}_2 , mais les résultats sont également valides lorsque les coefficients sont dans \mathbb{Z} ; il suffit de faire attention au signe dans les différentielles. Ainsi, soit (f_0, X_0) et (f_1, X_1) deux paires Morse-Smale ainsi que $F_t : [0,1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une homotopie lisse entre f_0 et f_1 . Sans perte de généralité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_t = f_0$ pour $t \in [0, \varepsilon]$ et $F_t = f_1$ pour $t \in [1 - \varepsilon, 1]$. On peut alors étendre F_t à $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Soit $h : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction « vague », c'est-à-dire une fonction ayant un maximum en 0, un minimum en 1 et ayant une dérivée strictement positivement sur $(-\varepsilon, 0) \cup (1, 1 + \varepsilon)$ et strictement négative sur $(0, 1)$. De plus, on demande que $F_0(x) + h(0) > F_1(y) + h(1)$ pour tous $x, y \in \mathcal{M}$. Par le caractère générique des fonctions de Morse, on peut supposer que $F_t(x) + h(t)$ est une fonction de Morse sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Par ailleurs, les points critiques de $F + h$ se trouvent exactement en $t = 0$ et $t = 1$. Plus précisément, on a $C_k(F + h) = C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1)$. À l'aide d'une partition de l'unité, on peut construire un pseudo-gradient X pour $F + h$ coïncidant avec $X_0 - \nabla h$ sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et avec $X_1 - \nabla h$ sur $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. En modifiant légèrement X , le théorème 1.2.9 assure que ce nouveau pseudo-gradient, qu'on note encore X , satisfait la propriété de Smale. De plus, la prochaine proposition assure qu'un complexe de Morse n'est pas altéré par une telle perturbation.

Proposition 1.2.12. *Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et soit X un pseudo-gradient tel que (f, X) soit une paire Morse-Smale. Alors tout champ vectoriel \tilde{X} \mathcal{C}^1 -près de X est un pseudo-gradient pour f satisfaisant encore la propriété de Smale. De plus, les complexes de Morse $(C_\bullet(f), d_\bullet^X)$ et $(C_\bullet(f), d_\bullet^{\tilde{X}})$ coïncident.*

DÉMONSTRATION. Le premier énoncé découle du caractère générique de la notion de transversalité. Le second découle du fait que les lignes de flot de X et \tilde{X} reliant $x \in C_k(f)$ et $y \in C_{k-1}(f)$ sont \mathcal{C}^1 -près l'une de l'autre. Il existe donc une bijection entre ces lignes de flot. En particulier, aucune nouvelle ligne de flot en x et y n'est créée lors de la perturbation. Cette bijection tient même en compte, s'il y a lieu, le signe $+/-$ des trajectoires. Bref, on en déduit aisément que les différentielles d_\bullet^X et $d_\bullet^{\tilde{X}}$ sont égales en tant qu'applications linéaires. \square

En étudiant le complexe de Morse de la paire Morse-Smale $(F + h, X)$, nous serons en mesure de comparer ceux de (f_0, X_0) et de (f_1, X_1) . D'abord, la différentielle du complexe de Morse de $(F + h, X)$ est donnée par la matrice $d_k^F = \begin{pmatrix} d_{k-1}^{f_0} & 0 \\ \varphi_{k-1}^{F+h} & d_k^{f_1} \end{pmatrix}$, où φ_{k-1}^{F+h} représente les lignes de flot de X partant des points critiques en $t = 0$ et arrivant aux points critiques en $t = 1$. On remarque qu'aucune ligne de flot de X ne fait le chemin inverse, car $F_0 + h(0) > F_1 + h(1)$ et que $d(F + h)(X) < 0$ sur $(0, 1)$. La relation $d_k^F d_{k+1}^F = 0$ implique la relation $\varphi_{k-1}^{F+h} d_k^{f_0} = d_k^{f_1} \varphi_k^{F+h}$. Donc l'application linéaire φ^{F+h} est un morphisme de complexes $C_\bullet(f_0) \rightarrow C_\bullet(f_1)$.

Avant d'aller plus loin, nous montrons que le morphisme φ^F ne dépend pas du choix de la vague en ce sens que pour deux vagues différentes, les morphismes obtenus sont homotopes. Ceci permettra de faire fi du choix de la vague pour la suite. Ainsi, soit F_t une homotopie entre f_0 et f_1 ainsi que h et h' deux vagues satisfaisant les précédentes propriétés. On introduit $h'' : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ une interpolation entre h et h' , c'est-à-dire $H(t, s) = h(t) + c(s)$ pour $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $H(t, s) = h'(t) + c'(s)$ pour $s \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, où c admet un maximum en $s = 0$ et c' un minimum en $s = 1$. Sans perte de généralité, H admet un maximum en $(0, 0)$, des points de selle en $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ainsi qu'un minimum en $(1, 1)$. De plus, on demande que $\partial_s H(t, s) < 0$ pour $s \in (0, 1)$, $\partial_s H(t, s) > 0$ pour $s \in (-\varepsilon, 0) \cup (1, 1 + \varepsilon)$ et que $F_t(x) + H(t, 0) > F_{t'}(x') + H(t', 1)$ pour tous $x, x' \in \mathcal{M}$ et $t, t' \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

On considère Y un pseudo-gradient pour $F + H$ coïncidant avec $X - \nabla H$ sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times [(-\varepsilon, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)]$ et $\mathcal{M} \times [(-\varepsilon, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)] \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$, avec X le pseudo-gradient de F . En vertu de la proposition 1.2.12, on peut demander que $(F + H, Y)$ soit une paire Morse-Smale sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)^2$, quitte à ce que Y ne coïncide plus exactement avec $X - \nabla H$ aux endroits appropriés. On obtient alors un complexe de Morse sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)^2$ dont les points critiques sont $C_k(F + H) = C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_1) \oplus C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1)$ et dont la différentielle est donnée par la matrice suivante :

$$d_k^{F+H} = \begin{pmatrix} d_{k-2}^{f_0} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{k-2}^{F+h} & d_{k-1}^{f_1} & 0 & 0 \\ \text{id}_{C_{k-2}(f_0)} & 0 & d_{k-1}^{f_0} & 0 \\ \Phi_{k-2}^{F+H} & \text{id}_{C_{k-1}(f_1)} & \varphi_{k-1}^{F+h'} & d_k^{f_1} \end{pmatrix}$$

où φ_k^{F+h} et $\varphi_k^{F+h'}$ sont les morphismes induits de $F + h$ et $F + h'$, et où Φ_{k-2}^{F+H} représente les lignes de flots reliant les points critiques de f_0 en $(0, 0)$ à ceux de f_1 en $(1, 1)$. L'identité $d_{k+1}^{F+H} d_{k+2}^{F+H} = 0$ mène à l'égalité $\varphi_k^{F+h} + \varphi_k^{F+h'} + \Phi_{k-1}^{F+H} d_k^{f_0} + d_{k+1}^{f_1} \Phi_k^{F+H} = 0$, d'où on déduit que $\varphi_k^{F+h} \sim \varphi_k^{F+h'}$. Pour la suite, on ne prendra plus la peine de préciser la vague h et on parlera simplement du morphisme φ^F .

On désire maintenant montrer que φ^F est une équivalence. Pour ce faire, on procède en deux étapes. La première est de montrer que si $(f_0, X_0) = (f_1, X_1)$ et que F_t est constante, alors $\varphi^F = \text{id}_{C(f_0)}$. Clairement, $X = X_0 - \nabla h$ est un pseudo gradient pour F . En particulier, ses lignes de flot sont celles de X_0 en $t = 0$ et $t = 1$ ainsi que celles de $-\nabla h$, c'est-à-dire des trajectoires constantes sur \mathcal{M} reliant les points critiques $(x, 0)$ et $(x, 1)$. Ceci étant établie, il ne fait maintenant aucun doute que $\varphi^F = \text{id}_{C(f_0)}$.

La seconde étape permet de comparer le morphisme induit de la concaténation d'homotopies et la composition de morphismes induits d'homotopies. À ce titre, considérons (f_2, X_2) une troisième paire Morse-Smale, G une homotopie entre f_1 et f_2 ainsi que H une homotopie entre f_0 et f_2 . Enfin, on considère X' et X'' des pseudo-gradients pour G et H satisfaisant

des conditions similaires à celles précédemment discutées. En particulier, X' coïncide par X sur $\mathcal{M} \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ et X'' coïncide avec X sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

On introduit maintenant une interpolation entre F , G et H , c'est-à-dire une fonction de Morse K sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)^2$ coïncidant avec F sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, avec G sur $\mathcal{M} \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ et avec H sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$. De plus, on demande que K vaut f_2 sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. La figure suivante 1.5 permet de mieux visualiser l'interpolation K .

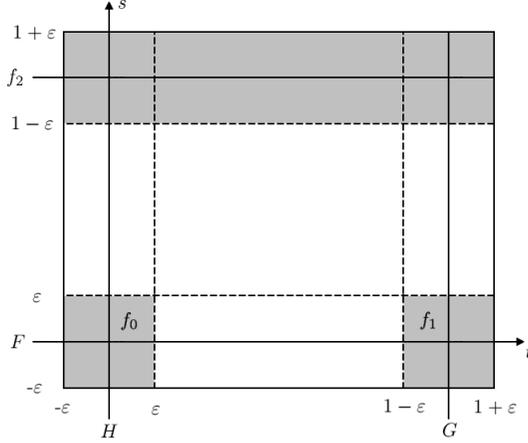


Fig. 1.5. Interpolation K entre les différentes homotopies $F + h$, $G + h'$ et $H + h''$. On précise que les vagues n'ont pas été inscrites sur la figure afin d'en garantir la lisibilité.

On considère également une fonction de Morse $h : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un maximum en $(0,0)$, des points de selle en $(0,1)$ et $(1,0)$ ainsi qu'un minimum en $(1,1)$. Sans perte de généralité, on peut demander que $K_{t,0}(x) + h(t,0) > K_{t',1}(x') + h(t',1)$ et $K_{0,s}(x) + h(0,s) > K_{1,s'}(x') + h(1,s')$ pour tous $x, x' \in \mathcal{M}$ et $t, t', s, s' \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Enfin, on considère Y un pseudo-gradient pour $K + h$ qui coïncide avec $X - \nabla h$ sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, avec $X' - \nabla h$ sur $\mathcal{M} \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$, avec $X'' - \nabla h$ sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ et avec $X_1 - \nabla h$ sur $\mathcal{M} \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Quitte à perturber légèrement Y , on peut supposer que (K, Y) est une paire Morse-Smale. Le complexe de Morse de (K, Y) est $C_k(K) = C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_2) \oplus C_{k-1}(f_1) \oplus C_k(f_2)$ et sa différentielle est donnée par la matrice suivante :

$$d_k^K = \begin{pmatrix} d_{k-2}^{f_0} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{k-2}^H & d_{k-1}^{f_2} & 0 & 0 \\ \varphi_{k-2}^F & 0 & d_{k-1}^{f_1} & 0 \\ \Phi_{k-2}^K & \text{id}_{C_{k-1}(f_2)} & \varphi_{k-1}^G & d_k^{f_2} \end{pmatrix}$$

où Phi_{k-2}^K représente les lignes de flot de Y reliant les points critiques de f_0 en $(0,0)$ à ceux de f_2 en $(1,1)$. L'identité $d_{k+1}^K d_{k+2}^K = 0$ mène à l'égalité $\varphi_k^G \varphi_k^F + \varphi_k^H + \Phi_{k-1}^K d_k^{f_0} + d_{k+1}^{f_2} = 0$, d'où on déduit que $\varphi_k^G \varphi_k^F \sim \varphi_k^H$.

Cette deux étapes étant complétées, on peut enfin montrer que φ^F est une équivalence. En effet, en notant I l'homotopie constante de la première étape et \overline{F} l'homotopie F parcourue en sens contraire, c'est-à-dire $\overline{F}_t = F_{1-t}$, on déduit de la seconde étape que $\varphi^{\overline{F}}\varphi^F \sim \varphi^I = \text{Id}_{C_\bullet(f_0)}$. Bref, l'homologie de Morse est indépendante de la paire Morse-Smale nécessaire à la construction d'un complexe de Morse.

Pour conclure cette section, on présente rapidement une méthode pour comparer l'homologie de Morse à l'homologie cellulaire. On en déduira que l'homologie de Morse correspond bien à l'homologie singulière de la variété \mathcal{M} (l'homologie cellulaire coïncide avec l'homologie singulière), donc qu'en calculant l'homologie de Morse, on obtient l'invariant homologique « standard » de la variété et non pas un invariant homologique quelconque.

On a vu à la précédente section que les variétés stables et instables des points critiques sont difféomorphes à des disques. En fait, il est possible d'obtenir une décomposition cellulaire à partir d'une fonction de Morse. Pour chaque point critique $x \in C_k(f)$ on associe une k -cellule. Celle-ci est la sous-variété instable compactifiée $\overline{W}^u(x) = W^u(x) \cup_{y \in C(f)} (\overline{\mathcal{L}}(x,y) \times W^u(y)) \simeq \overline{D}^k$. L'application de recollement $\phi_k : \overline{W}^u(x) \rightarrow \mathcal{M}$ est composée de l'inclusion sur $W^u(x)$ et de la restriction sur $\partial\overline{W}^u(x)$, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{L}}(x,y) \times W^u(y) \rightarrow W^u(y)$ pour chaque y .

Il n'est pas utile ici de montrer que cette décomposition est bien une décomposition cellulaire; on réfère à [1] pour les détails. On admet tout de même que $\partial\overline{W}^u(x) = \cup_{y \in C(f)} (\overline{\mathcal{L}}(x,y) \times W^u(y)) \simeq S^{k-1}$. On explique rapidement pourquoi le complexe de Morse et le complexe cellulaire sont isomorphes. Clairement, l'association entre les points critiques et les cellules est une bijection. De plus, la différentielle du complexe cellulaire sur $\overline{W}^u(x)$ est donnée par le degré des applications de recollement entre les k -cellules et les $(k-1)$ -cellules. Or ce degré est exactement le nombre de lignes de flot reliant x à $y \in C_{k-1}$, car il y a autant de copies de $W^u(y)$ dans $\partial\overline{W}^u(x)$ qu'il y a de lignes de flot dans $\overline{\mathcal{L}}(x,y)$. Bref, les différentielles coïncident et les complexes sont isomorphes.

Un corollaire de cet important résultat est l'explication des inégalités de Morse. En notant b_k le rang du k -ième groupe d'homologie d'une variété compacte \mathcal{M} et $c_k(f)$ le nombre de point critique d'indice k d'une fonction de Morse f sur \mathcal{M} , on a l'inégalité $c_k(f) \geq b_k$, car H_k est le quotient d'un sous-groupe de C_k .

1.3. Éléments de modules de persistance

Dans cette section, nous présentons brièvement les modules de persistance et quelques résultats d'importance à leur sujet. Ensuite, nous introduisons l'homologie de Morse filtrée et comment on peut lui associer un module de persistance. La principale référence dont sont tirés les définitions, théorèmes et propositions présentés dans cette section est [6].

1.3.1. Modules de persistance

Définition 1.3.1. Soient R un anneau unifié associatif et $\{V_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ une collection de R -modules (gauches) de type fini. Soit également une famille de morphismes $\pi_{s,t} : V_s \rightarrow V_t$ pour chaque paire $s \leq t \in \mathbb{R}$. Alors (V, π) est un module de persistance si les axiomes suivants sont satisfaits.

- (i) Pour tout $r \leq s \leq t$, on a $\pi_{s,t}\pi_{r,s} = \pi_{r,t}$.
- (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in (t-\varepsilon, t]$, $\pi_{s,t}$ est un isomorphisme.
- (iii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ excepté un nombre fini qu'on nomme points spectraux, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in [t, t+\varepsilon)$, $\pi_{t,s}$ est un isomorphisme.
- (iv) Il existe $t_- \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \leq t_-$ on a $V_t = 0$.

Pour la suite, on parlera d'un module de persistance V sans mentionner la famille de morphismes π .

On déduit assez rapidement des axiomes (i) et (ii) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\pi_{t,t} = \text{id}_{V_t}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $s < t$ tel que $\pi_{s,t}$ est un isomorphisme. En notant $\pi_{s,t}^{-1}$ son inverse, on a $\text{id}_{V_t} = \pi_{s,t}^{-1}\pi_{s,t} = \pi_{s,t}^{-1}\pi_{s,t}\pi_{t,t} = \text{id}_{V_t}\pi_{t,t} = \pi_{t,t}$. De plus, puisque (ii) spécifie qu'il n'y a qu'un nombre fini de points spectraux, on déduit qu'il existe un $t_+ \in \mathbb{R}$ (le plus grand point spectral) tel que pour tout $s, t > t_+$, on a $V_s \simeq V_t$. En effet, $[s, t] \subset \mathbb{R}$ étant compact, $\pi_{s,t}$ est la composition d'un nombre fini d'isomorphismes, donc $\pi_{s,t}$ est un isomorphisme. On notera V_∞ pour V_t avec $t > t_+$ et on le nommera module terminal.

L'exemple le plus simple auquel on puisse penser est celui d'un module de persistance sur un intervalle. Soit $(a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On note $R(a, b]$ le module de persistance en question. Celui-ci est défini par les modules $R(a, b]_t = R$ si $t \in (a, b]$ et $R(a, b]_t = 0$ si $t \notin (a, b]$ et la famille de morphismes $\pi_{s,t} = \text{id}_R$ si $s, t \in (a, b]$ et $\pi_{s,t}$ autrement. Il n'est pas très difficile de vérifier que $R(a, b]$ est bien un module de persistance. Pour la suite, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert-fermé, on notera par $R(I)$ le module de persistance sur I . De même, on notera $R(a, \infty)$ le module de persistance pour lequel $R(a, \infty)_t = R$ dès que $t > a$ et $\pi_{s,t} = \text{id}_R$ dès que $a < s \leq t$.

L'une des opérations des plus élémentaires sur les modules de persistance est celle de somme directe finie.

Définition 1.3.2. Étant donné V et V' deux modules de persistance, la somme directe $V \oplus V'$ est le module de persistance défini par $(V \oplus V')_t = V_t \oplus V'_t$ et dont la famille de morphismes est $\pi_{s,t} \oplus \pi'_{s,t}$. Il est évident que $V \oplus V'$ est un module de persistance.

Par exemple, étant donné une collection d'intervalles ouverts-fermés et ouverts-infini $\{I_j\}_{j=1}^n$ et des entiers naturels $\{m_j\}_{j=1}^n$, on a un module de persistance $\bigoplus_{j=1}^n R(I_j)^{m_j}$, où m_j désigne la multiplicité de $R(I_j)$, c'est-à-dire $R(I_j)^{m_j} = \bigoplus_{k=1}^{m_j} R(I_j)$. Ces modules de persistance sont généralement nommés *code-barres*. La figure 1.6 permet de visualiser des exemples de code-barres.

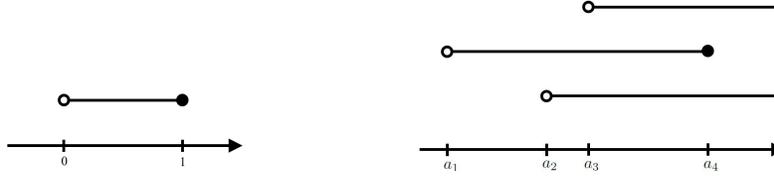


Fig. 1.6. Exemples de code-barres : celui de gauche est $R(0,1]$ et celui de droite est $R(a_1, a_4] \oplus R(a_2, \infty) \oplus R(a_3, \infty)$.

Ces exemples simplistes ne permettent pas vraiment de comprendre où survienne les modules de persistance et ce qui motive leur définition. La prochaine section traitera d'ailleurs de cette question en présentant l'homologie de Morse comme un module de persistance. Mais avant d'y arriver, on présente encore quelques définitions et résultats.

Définition 1.3.3. *Étant donné V et V' deux modules de persistance sur le même anneau R , une famille de morphismes $\varphi_t : V_t \rightarrow V'_t$ est un morphisme de modules de persistance si pour tous $s \leq t \in \mathbb{R}$, le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{\pi_{s,t}} & V_t \\ \downarrow \varphi_s & & \downarrow \varphi_t \\ V'_s & \xrightarrow{\pi'_{s,t}} & V'_t \end{array}$$

Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, φ_t est un isomorphisme, alors la famille φ est un isomorphisme de modules de persistance.

Il est clair qu'une catégorie de modules de persistance sur R existe : les morphismes de modules de persistance peuvent être composés et tout module de persistance admet un morphisme identité. De plus, cette catégorie est enrichie sur R , admet un objet nul (le module de persistance nul valant 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$) et admet un biproduit pour toute paire de modules de persistance. Nous ne nous éterniserons pas plus que nécessaire sur cette catégorie, car nous n'en aurons pas besoin pour ce mémoire.

Une seconde opération élémentaire sur les modules de persistance est la notion de translation.

Définition 1.3.4. *Étant donné un module de persistance V et $\delta \in \mathbb{R}$, on définit le module de persistance translaté $V[\delta]$ donné par $V[\delta]_t = V_{t+\delta}$ et dont la famille de morphismes est $\pi[\delta]_{s,t} = \pi_{s+\delta, t+\delta}$. Pour $\delta > 0$, le morphisme de module $\varphi^\delta : V \rightarrow V[\delta]$ défini par $\varphi_t^\delta = \pi_{t, t+\delta}$ est nommé δ -translation. Le cas $\delta = 0$ est en fait le morphisme identité sur V .*

Étant donné un morphisme de modules de persistance $\varphi : V \rightarrow V'$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on définit le morphisme translaté $\varphi[\delta] : V[\delta] \rightarrow V'[\delta]$ par $\varphi[\delta]_t = \varphi_{t+\delta}$.

Avant d'introduire la prochaine notion, il serait important de discuter de la δ -translation. Pour $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, l'image de la δ -translation $\varphi^\delta : R(I) \rightarrow R(I)[\delta]$ est isomorphe à $(a, b - \delta]$. On comprend aisément qu'une δ -translation retranche aux extrémités droites d'un code-barre l'équivalent d'un intervalle de longueur δ , excepté pour les intervalles de longueur

infini. Pour un module de persistance quelconque, une telle analogie n'est pas possible, car on ne sait pas s'il peut être « représenté » comme un code-barre. On reviendra sur ce que signifie « représenté comme un code-barre ».

La prochaine notion permet de comparer deux modules de persistance. Nous montrerons par la suite qu'on obtient une métrique sur l'espace des modules de persistance.

Définition 1.3.5. *Étant donné V et V' des modules de persistance, $0 < \delta \in \mathbb{R}$ ainsi que deux morphismes $F : V \rightarrow V'[\delta]$ et $G : V' \rightarrow V[\delta]$, on dira que V et V' sont δ -entrelacés si $G[\delta]F = \varphi_V^{2\delta}$ et $F[\delta]G = \varphi_{V'}^{2\delta}$. On dira de F et G qu'ils sont des δ -entrelacements.*

Pour V et V' des modules de persistance, on définit la distance d'entrelacement par $d_{ent}(V, V') = \inf \{ \delta > 0 \mid V \text{ et } V' \text{ sont } \delta\text{-entrelacés} \}$.

Remarquons que si V_∞ n'est pas isomorphe à V'_∞ , alors $d_{ent}(V, V') = -\infty$. En effet, $\varphi_V^{2\delta}$ est un isomorphisme sur V_t dès que $t > t_+$ (idem pour $\varphi_{V'}^{2\delta}$). On en déduit que tout δ -entrelacement entre V et V' doit être un isomorphisme sur les modules terminaux, ce qui est impossible si $V_\infty \not\simeq V'_\infty$. De même, si $V_\infty \simeq V'_\infty$, alors V et V' sont δ -entrelacés pour un δ fini. En effet, il suffit de prendre δ suffisamment grand pour que tout V_t avec $t > t_-$ soit envoyé dans $V'_\infty \simeq V_\infty$ via les morphismes $\pi_{s,t}$ et que tout V'_t avec $t > t'_-$ soit envoyé dans $V_\infty \simeq V'_\infty$ via les morphismes $\pi'_{s,t}$. Ce δ est majoré par $\max\{t'_+ - t_-, t_+ - t'_-\}$.

Proposition 1.3.6. *La distance d'entrelacement est une pseudo-métrique sur l'espace des modules de persistance ayant le même module terminal.*

DÉMONSTRATION. Pour tout module de persistance V , on a $d_{ent}(V, V) = 0$, car $F = G = \varphi^\delta$ est un δ -entrelacement pour tout $\delta > 0$. De plus, puisque la définition d'un δ -entrelacement est symétrique, pour tous modules de persistance V et V' , on a $d_{ent}(V, V') = d_{ent}(V', V)$. Enfin, si $F : V \rightarrow V'[\delta]$ et $G : V' \rightarrow V[\delta]$ sont des δ -entrelacements pour V et V' et si $F' : V' \rightarrow V''[\delta']$ et $G' : V'' \rightarrow V'[\delta']$ sont des δ' -entrelacements pour V' et V'' , alors $F[\delta]F' : V \rightarrow V''[\delta + \delta']$ et $G[\delta]G' : V'' \rightarrow V[\delta + \delta']$ sont des $(\delta + \delta')$ -entrelacements pour V et V'' . On en déduit donc que $d_{ent}(V, V'') \leq d_{ent}(V, V') + d_{ent}(V', V'')$. \square

Pour montrer que la distance d'entrelacement n'est pas dégénérée, il faudra attendre de montrer des résultats un peu plus fort. D'ici là, on n'assume rien et on travaille avec d_{ent} comme pseudo-métrique. On présente maintenant un court exemple de calcul de la distance d'entrelacement. Soit $R(a, b]$ et $R(c, d]$ des modules de persistance. Alors $d_{ent}(R(a, b], R(c, d]) \leq \min \left\{ \max \left\{ \frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2} \right\}, \max \{ |a-c|, |b-d| \} \right\}$. En effet, si $\delta \geq \max \left\{ \frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2} \right\}$, alors les (2δ) -translations sur $R(a, b]$ et $R(c, d]$ retranche l'entièreté des intervalles. En d'autres mots, les (2δ) -translations sont les morphismes nuls. On en déduit que $0 : R(a, b] \rightarrow R(c - \delta, d - \delta]$ et $0 : R(c, d] \rightarrow R(a, \delta, b - \delta]$ sont des δ -entrelacements entre $R(a, b]$ et $R(c, d]$, d'où la première inégalité. Si $\delta \geq \max \{ |a-c|, |b-d| \}$, alors $a - 2\delta \leq c - \delta \leq a$ et $b - 2\delta \leq d - \delta \leq b$. On peut donc considérer $F : R(a, b] \rightarrow R(c - \delta, d - \delta]$ valant l'identité sur $(a, d - \delta]$ et étant nul ailleurs. De même, on peut considérer $G : (c, d] \rightarrow (a - \delta, b - \delta]$ défini de

manière analogue. Enfin, on a bien $G[\delta]F = \varphi_{R(a,b)}^{2\delta}$ et $F[\delta]G = \varphi_{R(c,d)}^{2\delta}$. Notons que $(a, d - \delta]$ ou $(c, b - \delta]$ peuvent être vides sans que cela pose problème, car dans ce cas $b - 2\delta < a$ ou $d - 2\delta < c$ et les morphisme nuls sont des δ -entrelacement. Bref, la seconde inégalité est démontrée. Nous montrerons plus loin que cette inégalité est en fait une égalité.

Nous poursuivons en présentant plusieurs résultats importants. Leur démonstration étant longue et de peu d'intérêt dans le cadre de ce mémoire, nous ne ferons que les énoncer.

Théorème 1.3.7 (Théorème de la forme fondamentale, [6]). *Soit V un module de persistance sur $R = \mathbb{F}$ un corps. Alors il existe une famille finie $\{(I_j, m_j)\}_{j=1}^n$ d'intervalles ouverts-fermés ou ouverts-infini distincts et leur multiplicité tel que $V \simeq \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{F}(I_j)^{m_j}$. De plus, $\{(I_j, m_j)\}_{j=1}^n$ est unique à permutations des indices près.*

On parlera alors du code-barre $\mathcal{B}(V)$ d'un module de persistance V . Remarquons que ce théorème est également valide si le module de persistance V est tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, V_t est un R -module libre, pour R un anneau associatif unifié. Ayant maintenant établi une correspondance entre certaines classes de modules de persistance et les code-barres, on introduit une métrique sur l'espace des code-barres.

Définition 1.3.8. *Étant donné un intervalle $I = (a, b]$ ou $I = (a, \infty)$ ainsi que $\delta \in \mathbb{R}$, on note $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$ ou $I^{-\delta} = (a - \delta, \infty)$. Pour \mathcal{B} un code-barre et $\varepsilon > 0$, on note $\mathcal{B}_\varepsilon = \{I \in \mathcal{B} : |I| > \varepsilon\}$, où $|I|$ désigne la longueur de I .*

Étant donné X et Y des ensembles finis d'ensembles, une correspondance entre X et Y est une bijection $\mu : X' \rightarrow Y'$ pour certains $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$. On a alors $X' = \text{coim}(\mu)$ et $Y' = \text{im}(\mu)$. Par soucis de simplicité, on note $\mu : X \rightarrow Y$.

Pour $0 < \delta \in \mathbb{R}$, une δ -correspondance entre deux code-barres \mathcal{B} et \mathcal{C} est une correspondance $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $\mathcal{B}_{2\delta} \subset \text{coim}(\mu)$;
- (ii) $\mathcal{C}_{2\delta} \subset \text{im}(\mu)$;
- (iii) Si $\mu(I) = J$, alors $I \subset J^{-\delta}$ et $J \subset I^{-\delta}$.

S'il existe une δ -correspondance entre \mathcal{B} et \mathcal{C} , on dira qu'ils sont δ -correspondants. La bottleneck distance entre deux code-barres \mathcal{B} et \mathcal{C} est définie par $d_{\text{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \inf \{\delta > 0 : \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sont } \delta\text{-correspondants}\}$.

Il est clair que si \mathcal{B} et \mathcal{C} n'ont pas le même nombre d'intervalles infinis, alors $d_{\text{bot}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\infty$, car il n'y a aucune δ -correspondance entre eux. En effet, les intervalles infinis en trop devraient être associés à des intervalles de longueur finie et la condition (iii) implique que δ est infini, ce qui est impossible. De même, deux code-barres ayant même nombre d'intervalles infinis sont δ -correspondants pour un certain δ fini. Il suffit de prendre δ assez grand pour que $\mathcal{B}_{2\delta} = \mathcal{C}_{2\delta} = \emptyset$.

Proposition 1.3.9 ([6]). *La bottleneck distance est une métrique sur l'espace des code-barres ayant le même nombre d'intervalles infinis.*

DÉMONSTRATION. Clairement, $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ donné par l'identité est une δ -correspondance pour tout $\delta > 0$, donc $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = 0$. De plus, si $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$, alors pour tout $\delta > 0$, il existe une δ -correspondance entre \mathcal{B} et \mathcal{C} . Puisque les code-barres contiennent un nombre fini d'intervalles, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}_{2\delta} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_{2\delta} = \mathcal{C}$. Alors toute δ' -correspondance $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ pour $0 < \delta' < \delta$ est une bijection sur tous les intervalles de \mathcal{B} et \mathcal{C} . De plus, puisque les bijections entre \mathcal{B} et \mathcal{C} sont en quantité finie, il existe un $\delta > 0$ minimisant la différence entre les paires d'intervalles associés. En effet, pour chaque bijection entre \mathcal{B} et \mathcal{C} , il existe un δ minimal tel que $I \subset J^{-\delta}$ et $J \subset I^{-\delta}$ dès que $I \in \mathcal{B}$ est associé à $J \in \mathcal{C}$. Parmi tous ces δ , il en existe un minimal, qu'on note δ_- . Puisque $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$, alors il existe une δ -correspondance pour $0 < \delta < \delta_-$, ce qui contredit la minimalité de δ_- . On en déduit que $\delta_- = 0$ et que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Par définition, la bottleneck distance est symétrique, car toute δ -correspondance $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ induit une δ -correspondance $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$.

Enfin, si $\mu_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ est une δ_1 -correspondance et $\mu_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une δ_2 -correspondance, alors $\mu_2\mu_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ est une $(\delta_1 + \delta_2)$ -correspondance. Effectivement, $\delta_1 + \delta_2 > \max\{\delta_1, \delta_2\}$, d'où on déduit $\mathcal{B}_{\delta_1+\delta_2} \subset \text{coim}(\mu_2\mu_1)$ et $\mathcal{D}_{\delta_1+\delta_2} \subset \text{im}(\mu_2\mu_1)$. De plus, si $\mu_2\mu_1(I) = K$, alors $I \subset \mu_1(I)^{-\delta_1} \subset \mu_2\mu_1(I)^{-(\delta_1+\delta_2)} = K^{-(\delta_1+\delta_2)}$ et $K \subset \mu_2^{-1}(K)^{-\delta_2} \subset \mu_1^{-1}\mu_2^{-1}(K)^{-(\delta_1+\delta_2)} = I^{-(\delta_1+\delta_2)}$. On en conclut que $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) \leq d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + d_{bot}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. \square

On présente un court exemple de calcul de la bottleneck distance. Pour $\mathcal{B} = (a, b]$ et $\mathcal{C} = (c, d]$, il existe une δ -correspondance dès que $\delta \geq \max\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$. Celle-ci est la correspondance vide, car $\mathcal{B}_{2\delta} = \mathcal{C}_{2\delta} = \emptyset$. De même, si $\delta \geq \max\{|a-c|, |b-d|\}$, alors $(a, b] \subset (c, d]^{-\delta}$ et $(c, d] \subset (a, b]^{-\delta}$. On en déduit aisément que $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \leq \min\left\{\max\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}, \max\{|a-c|, |b-d|\}\right\}$. Ce résultat n'est pas sans rappeler celui concernant $d_{ent}(R(a, b), R(c, d))$. Le prochain théorème clarifie la relation entre la distance d'entrelacement et la bottleneck distance.

Théorème 1.3.10 (Théorème d'isométrie, [2]). *Lorsque V est un module de persistance sur un corps \mathbb{F} , alors la correspondance $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ est une isométrie, c'est-à-dire que si V' est un tel autre module de persistance, alors $d_{ent}(V, V') = d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(V'))$.*

En particulier, on en conclut que d_{ent} est une métrique sur l'espace des modules de persistance sur un corps \mathbb{F} ayant le même module terminal. La démonstration de ce théorème est très longue et peu pertinente pour la suite de ce mémoire, on assumera donc ce résultat.

1.3.2. Homologie de Morse comme module de persistance

Nous présentons maintenant une application des modules de persistance à l'étude de fonctions de Morse. Nous en profitons pour introduire l'homologie de Morse filtrée et pour l'interpréter en tant que module de persistance.

À ce titre, soit (f, X) une paire Morse-Smale sur une variété compacte \mathcal{M} munie d'une métrique α fixée. Pour cette section et le reste du mémoire, on notera les sous-niveaux de f par

$(f < t) = \{x \in \mathcal{M} : f(x) < t\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $C_k(f < t) = \{x \in C_k(f) : f(x) < t\}$. Notons $d_{k,t}$ la restriction de d_k à $C_k(f < t)$. Puisque f diminue le long des lignes de flot de X , on en déduit que $d_{k,t}(C_k(f < t)) \subset C_{k-1}(f < t)$. De plus, pour $x \in C_k(f < t)$, on a $d_{k-1,t}d_{k,t}(x) = d_{k-1}d_k(x) = 0$. Ainsi $(C_{\bullet,t}, d_{\bullet,t})$ est un complexe de chaînes pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On introduit donc $Z_k(f < t) = \text{Ker}(d_{k,t})$ les groupe de cycles et $B_k(f < t) = \text{Im}(d_{k+1,t})$ les groupes de bords. Puisque $d_{k-1,t}d_{k,t} = 0$, on en déduit que $B_k(f < t) \subset Z_k(f < t)$. L'homologie de Morse filtrée associée à (f, X) est la famille $H_k(f < t) = Z_k(f < t)/B_k(f < t)$.

Il est clair que l'homologie de Morse filtrée dépend du choix de la paire Morse-Smale, car les sous-niveaux de f dépendent de f . En particulier, les égalités $B_k(f < t) = B_k \cap (f < t)$ sont généralement fausses. En effet, il ne fait aucun doute que des bords dans B_k puissent ne pas être des bords dans $B_k(f < t)$, car leur pré-image pour d_{k+1} appartient à un sous-niveau supérieur de f . Par exemple, la fonction hauteur f sur la sphère à deux maximums x_1 et x_2 , un point de selle y_1 et un minimum z_1 admet y_1 comme bord dès $t \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, mais pas lorsque $t < \min\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Nous n'avons pas spécifié si l'homologie de Morse $H_{\bullet}(f < t)$ est à coefficients dans \mathbb{Z}_2 ou \mathbb{Z} , ou même un anneau associatif unifié quelconque. Puisque le théorème de la forme fondamentale et le théorème d'isométrie sont valides pour les modules de persistance sur un corps \mathbb{F} , on considèrera l'homologie de Morse filtrée à coefficient dans \mathbb{Z}_2 , mais la plupart des résultats qui suivent s'appliquent également pour \mathbb{Z} .

Proposition 1.3.11 ([6]). *L'homologie de Morse filtrée $H_k(f < t)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé est un module de persistance.*

DÉMONSTRATION. D'abord, on vérifie que $H_k(f < t)$ est de type fini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque f a un nombre fini de points critiques (\mathcal{M} étant compacte), $Z_k(f < t)$ est un \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel de dimension finie. Il s'en suit que $H_k(f < t)$ est de dimension finie, donc de type fini.

Il faut maintenant définir une famille de morphismes $\pi_{s,t} : H_k(f < s) \rightarrow H_k(f < t)$. On pose $\pi_{s,t} = \tilde{i}_{s,t}$ le morphisme induit du morphisme inclusion $i_{s,t} : C_k(f < s) \rightarrow C_k(f < t)$. Vérifions que $\pi_{s,t}$ est bien défini. D'abord, remarquons que le morphisme inclusion $i_{s,t}$ commute avec les différentielles, c'est-à-dire $d_{k,t}i_{s,t}(x) = i_{s,t}d_{k,s}(x)$ pour tout $x \in C_k(f < s)$. En effet, les applications différentielles $d_{k,s}$ respectent la filtration en ce sens que si un point critique x appartient à $C_k(f < s) \subset C_k(f < t)$, alors $d_{k,s}(x)$ et $d_{k,t}(x)$ coïncident. Ceci est dû au fait que f diminue le long des lignes de flot de X . Considérons $[x] = [y] \in H_k(f < s)$. Alors $x - y = d_{k+1,s}(z)$ pour un certain $z \in C_{k+1}(f < s)$, d'où on tire la suite d'égalités suivantes :

$$\pi_{s,t}[x] = [i_{s,t}(x)] = [i_{s,t}(y) + i_{s,t}d_{k+1,s}(z)] = [i_{s,t}(y)] + [d_{k+1,t}i_{s,t}(z)] = \pi_{s,t}[y].$$

Bref, $\pi_{s,t}$ est bien défini. Il ne reste qu'à vérifier que π satisfait les axiomes (i) à (iv). Pour le premier, puisque les inclusion $i_{s,t}$ satisfont $i_{s,t}i_{r,s} = i_{r,t}$ pour $r \leq s \leq t$, on a $\pi_{s,t}\pi_{r,s} = \pi_{r,t}$.

Pour le second axiome, si t n'est pas une valeur critique, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(t - \varepsilon, t]$ ne contient aucune valeur critique, car les valeurs critiques sont en nombre fini. Il s'en suit que l'inclusion $i_{s,t} : C_k(f < s) \rightarrow C_k(f < t)$ est un isomorphisme dès que $s \in (t - \varepsilon, t]$. Il en va de même pour $\pi_{s,t}$. Or le résultat est également valide si t est une valeur critique, car $(f < t)$ et $(f < s)$ contiennent les mêmes points critiques si s est suffisamment près de t .

Pour le troisième axiome, l'argument est similaire. Si t n'est pas une valeur critique, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $[t, t + \varepsilon)$ ne contient aucune valeur critique. On en déduit que $i_{t,s}$ est un isomorphisme dès que $s \in [t, t + \varepsilon)$ et il en va de même pour $\pi_{t,s}$. Toutefois, si t est une valeur critique, alors $C_k(f < s)$ possède un point critique en plus que $C_k(f < t)$ pour tout $s > t$. Alors le morphisme inclusion $\pi_{t,s}$ n'est pas un isomorphisme pour tout $s > t$. Il n'y a donc aucune raison pour que $\pi_{t,s}$ soit un isomorphisme si $s > t$, aussi près s puisse-t-il être de t . Puisque les valeurs critiques sont en nombre fini, les points spectraux de $H_k(f < t)$ sont aussi en nombre fini.

Enfin, pour le quatrième axiome, si $t \leq \min(f)$, alors $C_k(f < t) = \emptyset$, d'où on déduit que $H_k(f < t) = 0$. Ainsi, $t_- = \min(f)$ satisfait l'axiome (iv). \square

On peut également considérer le module de persistance $H_\bullet(f < t) = \bigoplus_{k=1}^{\dim \mathcal{M}} H_k(f < t)$. Il est clair que le module terminal de $H_\bullet(f < t)$ est $H_\bullet(f)$ et que celui-ci apparaît au point spectral $t_+ = \max(f)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier comment les morphismes algébriques de complexes de Morse $\varphi : C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ induisent des morphismes en homologie de Morse filtrée, c'est-à-dire que la restriction de φ au sous-niveau $(f < t)$ admet comme codomaine $(g < t)$, et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$. À première vue, il n'y a aucune raison pour que les morphismes algébriques soient bien définis par la restriction aux sous-niveaux de f et g . Par exemple, si $f = g + c$ pour c une constante, alors le morphisme identité envoie un point critique de f de valeur t au même point critique de g de valeur $t + c$. Lorsque restreint aux sous-niveaux de f et g , ce morphisme n'est pas défini pour $s \in (t, t + c)$, car $C_\bullet(f < s)$ contient un point critique que $C_\bullet(g < s)$ ne possède pas. Par contre, si $f(x) > g(y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{M}$, alors les morphismes induits d'homotopie seront bien définis par restriction aux sous-niveaux, donc induiront à leur tour des morphismes de modules de persistance.

On voudrait obtenir une méthode générale permettant d'induire d'un morphisme de complexes quelconque un morphisme de modules de persistance. Puisque les points critiques de f et g admettent une valeur maximale et une valeur minimale (\mathcal{M} étant compacte), les morphismes de complexes associent des points critiques de f à des points critiques de g dont les valeurs sont distantes d'au plus $\max(g) - \min(f)$. On en déduit aisément que $\varphi_t : C_\bullet(f < t) \rightarrow C_\bullet(g < t + \max(g) - \min(f))$ est bien défini. Il est toutefois possible de faire mieux. En effet, puisque les points critiques de f et g sont en nombre fini, il existe une valeur minimale $c \in \mathbb{R}$ tel que le morphisme restreint $\varphi_t : C_\bullet(f < t) \rightarrow C_\bullet(g < t + c)$ soit bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans le pire des cas, $c = \max(g) - \min(f)$. On en déduit que

le morphisme algébrique de complexes $\varphi : C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ induit un morphisme de modules de persistance $\varphi_t : C_\bullet(f < t) \rightarrow C_\bullet(g < t)[c]$. On dira que c est l'action de φ_t .

On offre maintenant un exemple d'application de l'homologie de Morse filtrée pour étudier des fonctions de Morse. Soient (f, X) et (g, Y) deux paires Morse-Smale sur \mathcal{M} . Notons $\|f\| = \max|f|$ et $\delta = \|f - g\|$. Alors $f - \delta \leq g$ et, selon ce qui a déjà été discuté, tout morphisme algébrique entre les complexes de Morse $C_\bullet(f)$ et $C_\bullet(g)$ induit un morphisme de modules de persistance d'action au plus δ . En particulier, pour l'homotopie descendante $G_t = (1 - t)g + t(f - \delta)$, le morphisme de complexes qui en est induit permet d'obtenir un morphisme de module de persistance $G : H_\bullet(g < t) \rightarrow H_\bullet(f < t)[\delta]$. De même, à partir de l'homotopie $F_t = (1 - t)f + t(g - \delta)$, on obtient un morphisme $F : H_\bullet(f < t) \rightarrow H_\bullet(g < t)[\delta]$. Puisque les concaténations $(GF)_t$ et $(FG)_t$ sont respectivement homotopes à l'identité sur f et celle sur g , on en déduit que les compositions des morphismes de complexes de Morse GF et FG coïncident, à homotopie près, avec les morphismes identités. Enfin, l'action de GF et FG étant 2δ , on en déduit que les morphismes de modules de persistance correspondent aux inclusions $(f < t) \rightarrow (f < t + 2\delta)$ et $(g < t) \rightarrow (g < t + 2\delta)$. Ainsi, on a $G[\delta]F = \varphi_{H_\bullet(f)}^{2\delta}$ et $F[\delta]G = \varphi_{H_\bullet(g)}^{2\delta}$. On en déduit que F et G sont des δ -entrelacements entre $H_\bullet(f)$ et $H_\bullet(g)$, d'où on tire $d_{ent}(H_\bullet(f), H_\bullet(g)) \leq \delta = \|f - g\|$.

En d'autres mots, l'homologie filtrée de f et g est une obstruction à l'approximation de f par g . Par exemple, considérons f est la fonction hauteur sur S^2 et g est une fonction de Morse sur S^2 admettant deux maximums, un point de selle et un minimum. Supposons que f et g partagent les mêmes valeurs minimale α_1 et maximale α_4 . Nommons α_2 la valeur du point de selle de g et α_3 celle de son autre maximum. On suppose également que $\alpha_3 < \alpha_4$. On calcule facilement que le code-barre de $H_\bullet(f)$ est $\mathbb{Z}_2(\alpha_1, \infty) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha_4, \infty)$. En effet, l'intervalle (α_1, ∞) représente $H_0(f)$ qui vaut \mathbb{Z}_2 pour $t > \alpha_1$ et l'intervalle (α_4, ∞) représente $H_2(f)$ qui vaut \mathbb{Z}_2 pour $t > \alpha_4$. De même, on a $H_\bullet(g) = \mathbb{Z}_2(\alpha_1, \infty) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha_2, \alpha_3] \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha_4, \infty)$. En effet, pour $t \in (\alpha_1, \alpha_2]$, le sous-niveau $(g < t)$ est un disque, pour $t \in (\alpha_2, \alpha_3]$, c'est un cylindre, pour $t \in (\alpha_3, \alpha_4]$ c'est à nouveau un disque, et pour $t > \alpha_4$, c'est la sphère au grand complet. On a donc $H_0(g) = \mathbb{Z}_2(\alpha_1, \infty)$, $H_1(g) = \mathbb{Z}_2(\alpha_2, \alpha_3]$ et $H_2(g) = \mathbb{Z}_2(\alpha_4, \infty)$. La bottleneck distance entre ces deux code-barres est évidemment $\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}$, car toute δ -correspondance entre $\mathcal{B}(H_\bullet(f))$ et $\mathcal{B}(H_\bullet(g))$ doit ignorer l'intervalle $(\alpha_2, \alpha_3]$, donc $2\delta \geq \alpha_3 - \alpha_2$. Et puisque les intervalles infinis sont les mêmes, on en déduit que $2d_{bot}(\mathcal{B}(H_\bullet(f)), \mathcal{B}(H_\bullet(g))) = \alpha_2 - \alpha_3$. En combinant ce résultat à celui du précédent paragraphe et au théorème d'isométrie, on a $\|f - g\| \geq \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}$. C'est pourquoi nous avons affirmé que l'homologie filtrée est une obstruction à l'approximation de f par g (ou vice-versa).

1.4. Catégories de fonctions de Morse et leur homotopies

Pour la première section non élémentaire de ce chapitre introductif, nous présentons une catégorie dont les objets sont des fonctions de Morse et dont les morphismes sont des homotopies. En fait, nous introduisons deux versions de celle-ci : une dite standard et une pour laquelle l'action des morphismes est prise en compte. Soulignons que ces catégories sont depuis longtemps connues et pourraient être qualifiées de folkloriques. Nous terminons en discutant de certains désavantages de ces catégories. Pour cette section \mathcal{M} est une variété compacte, avec ou sans bord, pour laquelle une métrique α est fixée. Si \mathcal{M} est à bord, on considère que tous les pseudo-gradients auxquels nous ferons référence sont transverses à sa frontière.

On peut définir, pour \mathcal{M} et α fixées, une catégorie FdM (fonctions de Morse) dont les objets sont des paires Morse-Smale sur \mathcal{M} et dont les morphismes sont des homotopies. La composition est donnée par la concaténation des homotopies et le morphisme identité est l'homotopie constante. Cette catégorie est quelque peu triviale, en ce sens qu'on a vu que les homotopies induisent toutes le même morphisme de complexes de chaînes (à équivalence près). De plus, ce n'est pas tous les morphismes de complexes de chaînes qui induisent un morphisme de module de persistance. On comprend donc qu'il manque d'information à FdM pour pouvoir construire un foncteur vers la catégorie des modules de persistance.

C'est pourquoi on introduit la catégorie FdMf (version filtrée de FdM). Les objets sont des paires Morse-Smale sur \mathcal{M} et les morphismes $(f_0, X_0) \rightarrow (f_1, X_1)$ sont des quadruplets (F, Y, h, c) où F est une homotopie entre f_0 et f_1 constante près de 0 et 1; h est une vague telle que $h(0) = c$ et $h(1) = 0$; $f_0(x) + c > f_1(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{M}$; $F + h$ est une homotopie monotone entre $f_0 + c$ et f_1 ; $(F + h, Y)$ est une paire Morse-Smale sur $\mathcal{M} \times [0, 1]$; et Y est \mathcal{C}^∞ près de $X_0 - \nabla h$ et $X_1 - \nabla h$ là où F coïncide avec f_0 et f_1 .

La composition entre deux morphismes $(F_0, Y_0, h_0, c_0) : (f_0, X_0) \rightarrow (f_1, X_1)$ et $(F_1, Y_1, h_1, c_1) : (f_1, X_1) \rightarrow (f_2, X_2)$ est un quadruplet (F, Y, h, c) où F est la concaténation de F_0 et F_1 ; $c = c_0 + c_1$; h est une vague obtenue en modifiant légèrement la concaténation de h_0 et h_1 ; Y est un pseudo-gradient de $F + h$ coïncidant avec Y_0 et Y_1 à un facteur près³ là où h coïncide avec h_0 et h_1 ; et $(F + h, Y)$ est une paire Morse-Smale sur $\mathcal{M} \times [0, 1]$. Lorsqu'on dit que h est obtenue en modifiant la concaténation entre h_0 et h_1 , on entend que la concaténation est lissée dans un voisinage de $t = \frac{1}{2}$, là où se rencontre h_0 et h_1 , de telle sorte que h soit décroissante sur ce voisinage.

Il semble que le choix de Y et h dans la composition des morphismes soit arbitraire. C'est pourquoi l'ensemble des morphismes doit être quotienté par la relation d'équivalence $(F_0, Y_0, h_0, c_0) \sim (F_1, Y_1, h_1, c_1)$ si $F_0 = F_1$ à une paramétrisation sur $[0, 1]$ près; $c_0 = c_1$; $(F_0 +$

³Ce facteur est dû au fait que $F_0 + h_0$ et $F_1 + h_2$ sont parcourue deux fois plus rapidement lorsque concaténés.

h_0, Y_0) et $(F_1 + h_1, Y_1)$ ont le même complexe de chaînes filtré. Cette relation d'équivalence met en évidence que le choix de la vague n'a pas d'importance, excepté sa hauteur, et que le choix du pseudo-gradient est sans effet si, après changement, la différentielle filtrée est la même. Sous cette relation d'équivalence, la composition de morphisme est bien définie et est associative.

Il ne reste qu'à montrer que FdMf admet des morphismes identités. Puisqu'un morphisme $(F, Y, h, c) : (f, X) \rightarrow (f, X)$ est tel que $f(x) + c > f(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{M}$, on en déduit que $c > 0$. Or la composition de morphisme s'effectue en additionnant leur action respective. Pour qu'un morphisme agisse comme une identité, il faut donc que son action soit nulle. On se voit donc obligé d'introduire un morphisme identité qui n'a aucune réalisation géométrique. On notera ce morphisme $1^{(f, X)}$.

Il est facile de construire un foncteur entre FdMf et la catégorie des modules de persistance MdP. Celui-ci associe à un objet (f, X) de FdMf le module de persistance $H_\bullet(f < t)$, où on remarque que le pseudo-gradient est implicite, et à un morphisme $(F, Y, h, c) : (f_0, X_0) \rightarrow (f_1, X_1)$ le morphisme $\varphi^F : H_\bullet(f_0 < t) \rightarrow H_\bullet(f_1 < t)[c]$ induit de la paire Morse-Smale $(F + h, Y)$ tel que discuté à la précédemment. On souligne que la catégorie MdP a pour morphismes ceux dont l'action n'est pas nécessairement nulle. Enfin, spécifions que ce foncteur envoie les morphismes identité de FdMf aux morphismes identité MdP, c'est-à-dire les morphismes constants d'action nulle.

Néanmoins, on remarque une fois de plus que les morphismes de FdMf se confondent sous le foncteur précédemment défini. En effet, excepté une différence au niveau de l'action, les morphismes de FdMf sont tous égaux entre les modules terminaux. En fait, si $(F_0, Y_0, h_0, c_0), (F_1, Y_1, h_1, c_1) : (f_0, X_0) \rightarrow (f_1, X_1)$ et que $c_0 > c_1$, alors $\varphi_t^{F_0} = \pi_{t+c_1, t+c_0-c_1}^{f_1} \varphi_t^{F_1}$. On comprend donc qu'il y a un grand manque de diversité de morphismes de FdMf. Autre exemple que FdMf n'est pas assez riche : ses morphismes n'admettent par une structure de \mathbb{Z} -modules innée. Il est donc impossible de faire de FdMf une catégorie triangulée. Toutes ces limitations nous pousse à abandonner cette définition de morphisme au profit d'une autre. C'est d'ailleurs le sujet de la prochaine section.

1.5. Marquages entre fonctions de Morse

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle classe de morphismes entre deux paires Morse-Smale. Nous montrons par ailleurs que le morphisme de complexes de chaînes induit d'une homotopie peut être réalisé comme un morphisme de cette nouvelle classe. Pour ce qui suit, \mathcal{M} est une variété compacte munie d'une métrique α ; (f, X_f) et (g, X_g) sont des paires Morse-Smale sur \mathcal{M} ; et ϕ^f et ϕ^g sont les flots de X_f et X_g . On assume également que f et g sont en position générique, c'est-à-dire que les sous-variétés stables de f (resp. g) sont transverses aux sous-variétés instables de g (resp. f).

Cette nouvelle approche considère les croisements de lignes de flot entre X_f et X_g pour relier les points critiques de f et g . Plus précisément, pour $x \in C_k(f)$ et $y \in C_k(g)$, on considère $\eta^{f,g}(x,y) = W^u(x) \cap W^s(y)$ une sous-variété de dimension 0 de \mathcal{M} , orientée si \mathcal{M} l'est. Celle-ci est composée de points $z \in \mathcal{M}$ tels que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^f(z) = x$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^g(z) = y$. On définit alors une application linéaire $\varphi : C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ de la manière suivante : pour $x \in C_k(f)$, on a $\varphi(x) = \sum_{y \in C_k(g)} \#_{\mathbb{Z}_2} \eta^{f,g}(x,y)y$, ou bien $\#_{\mathbb{Z}}$ selon l'orientation de $\eta^{f,g}(x,y)$ si $C_k(f)$ et $C_k(g)$ sont des \mathbb{Z} -modules. En d'autres termes, φ compte, dans \mathbb{Z}_2 ou \mathbb{Z} , le nombre de croisements entre les lignes de flots ϕ^f partant de x et les lignes de flots ϕ^g arrivant en y .

1.5.1. L'application φ est un morphisme de chaînes

Nous montrons ici que l'application précédemment définie, notée φ , est un morphisme de chaînes, c'est-à-dire qu'elle commute avec les applications différentielles d^f et d^g . Pour ce faire, nous montrons que, pour une homotopie décroissante H quelconque, le morphisme de chaînes induit φ^H est tel que $\varphi_k^H - \varphi_k = d_{k+1}^g \vartheta_{k+1} + \vartheta_k d_k^f$, où $\vartheta_k : C_{k-1}(f) \rightarrow C_k(g)$ est un morphisme de modules.

Ainsi, soit $H : \mathcal{M} \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ une homotopie entre f et g , avec $\varepsilon > 0$, telle que $H(x,t) = f(x)$ si $t \in [-\varepsilon, 0]$ et $H(x,t) = g(x)$ si $t \in [1, 1 + \varepsilon]$. Soit $h : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse satisfaisant, pour un certain $c \geq 0$, les propriétés suivantes.

- (i) $h(-\varepsilon) = c$, $h(1 + \varepsilon) = 0$ et $\partial_t^2 g(t) = 0$ si $t \in \{0, 1\}$;
- (ii) $\partial_t(H(x,t) + h(t)) \leq 0$, avec égalité si et seulement si $t \in \{-\varepsilon, 1 + \varepsilon\}$.

Bref, $H + h$ est une homotopie décroissante entre $f + c$ et g . On étend $H + h$ à tout \mathbb{R} en posant $H = f$ si $t < -\varepsilon$ et $H = g$ si $t > 1 + \varepsilon$, ainsi qu'en prolongeant h de telle sorte que $\partial_t(H(x,t) + h(t)) > 0$ pour $t < -\varepsilon$ et $t > 1 + \varepsilon$. Pour la suite, on substitue la notation $H + h$ pour la notation plus concise H . Ainsi, H est, en quelque sorte, un recollement des fonctions f et g en une seule fonction de Morse sur tout $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$.

Considérons maintenant deux fonctions lisses $\alpha : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ et $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant les propriétés suivantes pour le même $\varepsilon > 0$ que précédemment.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \{-\varepsilon, 1 + \varepsilon\} & \partial_t \alpha < 0 & \text{si } t \in (-\varepsilon, 0) & \partial_t \alpha = 0 & \text{si } t \in \{-\varepsilon, 1 + \varepsilon\} \cup [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \in [0, 1] & \partial_t \alpha > 0 & \text{si } t \in (1, 1 + \varepsilon) \end{cases}$$

$$\beta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0 & \partial_r \beta < 0 & \text{si } r \in (0, 1) & \partial_r \beta = 0 & \text{si } r \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

La fonction α est ce qu'on pourrait nommer une fonction « creux » entre 1 et 0, alors que la fonction β serait une fonction « descente » de 1 à 0. Considérons la fonction $c(t,r) = \beta(r) + \alpha(t)(1 - \beta(r))$. Alors c est une homotopie entre la fonction constante 1 et la fonction creux α . Posons $H_{t,r}(x) = c(t,r)H(x,t)$, une homotopie entre H et αH . En particulier, pour $t \in [0, 1]$, $H(t,r)$ est une homotopie entre H et 0.

Soit $\phi_{t,r} : \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{M}$ une famille de courbes satisfaisant l'équation différentielle sans condition initiale

$$\left. \frac{\partial(\phi_{s,r})}{\partial s} \right|_t = X_{H_{t,r}}(\phi_{t,r})$$

où $X_{H_{t,r}}$ est un champ vectoriel à deux paramètres sur \mathcal{M} satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $X_{H_{t,r}} = X_f$ pour $t \leq -\varepsilon$ et $X_{H_{t,r}} = X_g$ pour $t \geq 1 + \varepsilon$;
- (ii) $(\nabla_x H_{t,r})(X_{H_{t,r}}) < 0$ pour $t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Autrement dit, $X_{H_{t,r}}$ est la partie en x d'un pseudo-gradient de $H_{t,r}$. Ainsi, pour chaque valeur de $r \in [0,1]$, $\phi_{t,r}$ est la courbe intégrale du champ vectoriel $H_{t,r}$ dépendant du temps défini sur \mathcal{M} . Il ne fait donc aucun doute que $\phi_{t,r}$ existe et est unique, car pour chaque r , $\phi_{t,r}$ existe et est unique. De plus, puisque $H_{t,r}$ est lisse en r , $\phi_{t,r}$ l'est aussi.

On peut donc considérer la famille de difféomorphismes à deux paramètres $\gamma_{t,r} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ associée à $\phi_{t,r}$. En effet, pour r fixé, $\phi_{t,r}$ est la courbe intégrale de $H_{t,r}$, donc induit une famille $\gamma_{t,r}$ de difféomorphismes sur \mathcal{M} . Notons que pour $t \in [0,1]$, on a $\gamma_{t,1} = \text{id}$, car $H_{t,1} \equiv 0$ pour ces valeurs de t . De plus, lorsque $t \leq -\varepsilon$ et pour toute valeur de $r \in [0,1]$, cette famille coïncide avec celle obtenue à partir de ϕ_t^f , nommément γ_t^f ; alors que pour $t \geq 1 + \varepsilon$ et $r \in [0,1]$, on a $\gamma_{t,r} = \gamma_t^g$, avec γ_t^g la famille de difféomorphismes obtenue à partir de ϕ_t^g . Enfin, pour $r \in [0,1]$ fixé, lorsque $t \in (-\varepsilon, 0)$, $\gamma_{t,r}$ correspond à γ_t^f à une paramétrisation en t près, alors que lorsque $t \in (1, 1 + \varepsilon)$, $\gamma_{t,r}$ correspond à γ_t^g à une paramétrisation en t près. En effet, pour $r \in [0,1]$ fixé, $X_{H_{t,r}}$ correspond à X_f ou X_g multiplié par une constante comprise entre 1 et 0. Ces paramétrisations décrivent donc des ralentissements.

Définissons maintenant une application $\psi : \mathcal{M} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ par $\psi(z,r) = (z, \gamma_{1,r}(z))$. Il ne fait aucun doute que ψ est une application lisse, car la famille de difféomorphismes $\gamma_{1,r}$ est lisse en z et r . Pour $x \in C_k(f)$ et $y \in C_k(g)$, on note $i : W^u(x) \times W^s(y) \hookrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ le plongement de la sous-variété instable de x et de la sous-variété stable de y dans \mathcal{M} . On s'intéresse à l'intersection $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$. En effet, si cet ensemble est une sous-variété de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, il sera possible de montrer que $\varphi^H \sim \varphi$.

Pour ce faire, on montre que $\text{Im}\psi \pitchfork \text{Im}i$, ce qui est une condition plus forte, mais suffisante, pour obtenir le résultat désiré. Il faut donc montrer que $\forall(z,r) \in \mathcal{M} \times [0,1]$, on a $T_{(z,\gamma_{1,r}(z))}\text{Im}\psi + T_{(z,\gamma_{1,r}(z))}\text{Im}i = T_z\mathcal{M} \times T_{\gamma_{1,r}(z)}\mathcal{M}$. Localement, dans $\text{Im}i$, l'application différentielle de ψ prend la forme suivante

$$\psi_* = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ J_u \gamma_{1,r} & \partial_r \gamma_{1,r} \end{pmatrix}$$

où le système de coordonnées de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ utilisé est donné par $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$, avec $\{u_1, \dots, u_k\}$ définissant $W^u(x)$ et $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ définissant $W^s(y)$; et où le système de coordonnées de $\mathcal{M} \times [0,1]$ utilisé est $\{u_1, \dots, u_n, r\}$. Ici, $J_u \gamma_{1,r}$ désigne la matrice jacobienne selon

les variables u_i du difféomorphisme $\gamma_{1,r}$. Notons qu'on a $\partial_r \gamma_{1,r}|_{r=0} = \partial_r \gamma_{1,r}|_{r=1} = 0_{n \times 1}$. En effet, lorsque $t \in [1, 1+\varepsilon]$, on a $H_{t,r}(x) = c(t,r)H(x,t) = c(t,r)g(x)$ et donc les courbes $\phi_{t,r}$ correspondent à ϕ_t^g moyennant une paramétrisation $t \mapsto s(t,r)$, c'est-à-dire $\phi_{t,r} = \phi_{s(t,r)}^g$. Cette paramétrisation satisfait la propriété $\partial_r s(1,r) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $r \in \{0,1\}$. En effet, $H(1,r) = \beta(r)g$ et $\partial_r \beta(r) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $r \in \{0,1\}$, donc la variation en r de la trajectoire $\phi_{1,r}$ satisfait la même inégalité. Ainsi, il en va de même pour la famille de difféomorphismes $\gamma_{1,r}$. Nous sommes maintenant prêts à démontrer que $\text{Im}\psi \pitchfork \text{Im}i$.

D'abord, pour $r = 1$, rappelons que $\gamma_{1,1} = \text{Id}$, d'où on déduit $J_x \gamma_{1,1} = \text{Id}$. Donc, pour $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$, on a

$$T_{(z,z)} \text{Im}\psi = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, u_i)\}_{i=1}^n \quad \text{et} \quad T_{(z,z)} \text{Im}i = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, 0), (0, v_j)\}_{i=1, j=k+1}^{k,n}.$$

Puisque f et g sont en position générique, c'est-à-dire $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$, et que $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$, on a

$$\text{Span}_{\mathbb{R}} \{u_i\}_{i=1}^k = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{v_i\}_{i=1}^k \quad \text{et} \quad \text{Span}_{\mathbb{R}} \{u_i\}_{i=k+1}^n = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{v_i\}_{i=k+1}^n.$$

Bref, il est évident que $T_{(z,z)} \text{Im}\psi + T_{(z,z)} \text{Im}i = T_z \mathcal{M} \times T_z \mathcal{M}$. Puisque z est arbitraire, $\text{Im}\psi$ et $\text{Im}i$ sont transversales en $r = 1$.

De plus, puisque la transversalité est une notion stable, une légère modification \mathcal{C}^∞ de $J_x \gamma_{1,1}$ n'entraîne pas une perte de transversalité entre ψ et i . On peut donc voir le paramètre r comme une modification de $J_x \gamma_{1,1}$. On en déduit aisément que $\exists \varepsilon_1 > 0$ tel que $\text{Im}\psi$ est transversale à $\text{Im}i$ pour $r \in (1 - \varepsilon_1, 1]$ et z adéquat.

Ensuite, étudions le cas $r = 0$. Soit $z \in W^u(x)$ tel que $\gamma_{1,0}(z) \in W^s(y)$, alors on a

$$T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}\psi = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, J_z \gamma_{1,0}(u_i))\}_{i=1}^n \quad \text{et} \quad T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}i = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, 0), (0, v_j)\}_{i=1, j=k+1}^{k,n}$$

$$\text{Donc } T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}\psi + T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}i = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, J_z \gamma_{1,0}(u_i))\}_{i=1}^n + 0 \times \text{Span}_{\mathbb{R}} \{J_z \gamma_{1,0}(u_i), v_j\}_{i=1, j=k+1}^{k,n}.$$

La question est de savoir si $\text{Span}_{\mathbb{R}} \{J_z \gamma_{1,0}(u_i), v_j\}_{i=1, j=k+1}^{k,n} = T_{\gamma_{1,0}(z)} \mathcal{M}$, et ce pour tout $z \in W^u(x)$ tel que $\gamma_{1,0}(z) \in W^s(y)$, auquel cas on aura bien $T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}\psi + T_{(z, \gamma_{1,0}(z))} \text{Im}i = T_z \mathcal{M} \times T_{\gamma_{1,0}(z)} \mathcal{M}$. Remarquons $\gamma_{1,0}$ est le difféomorphisme associé à la courbe intégrale du champ vectoriel $X_{H_{t,0}}$, qui est lui-même un pseudo-gradient de H . Par le caractère générique de la notion de transversalité, on peut admettre, sans perte de généralité, que pour tout z admissible, on ait $\text{Span}_{\mathbb{R}} \{J_z \gamma_{1,0}(u_i), v_j\}_{i=1, j=k+1}^{k,n} = T_{\gamma_{1,0}(z)} \mathcal{M}$. En d'autres mots, l'homotopie H , ou le pseudo-gradient $X_{H_{t,r}}$, peut être légèrement modifiée dans un voisinage de 0 de telle sorte que tout ce qui précède est toujours valide et que la matrice $J_z \gamma_{1,0}$ transforme les $\{u_i\}_{i=1}^k$ en vecteurs supplémentaires aux $\{v_j\}_{j=k+1}^n$. Bref, la transversalité est vérifiée en $r = 0$. De plus, par un argument en tout point similaire à ce qui précède, on en déduit que $\varepsilon_0 > 0$ tel que la transversalité entre ψ et i est vérifiée pour $r \in [0, \varepsilon_0]$ et z adéquat.

On règle maintenant le cas $r \in [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_1]$, qu'on suppose sans perte de généralité non vide. Puisque $\mathcal{M} \times [0,1]$ est compacte, $\text{Im}\psi$ est compacte et il n'existe qu'un nombre fini de points dans $\mathcal{M} \times [\varepsilon_0, 1 - \varepsilon_1]$ pour lesquels $\text{Im}\psi \not\cap \text{Im}i$. La matrice ψ_* génère le sous-espace vectoriel $\text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, J_z \gamma_{1,r}(u_i) + \partial_r \gamma_{1,r}(u_i))\}_{i=1}^n$, alors que la matrice i_* génère le sous-espace vectoriel $\text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, 0), (0, v_j)\}_{i=1, j=k+1}^{k,n}$. À elles deux, leur image correspond au sous-espace vectoriel suivant.

$$\begin{aligned} \psi_*(T_z \mathcal{M}) + i_* \left(T_z W^u(x) \times T_{\gamma_{1,r}(z)} W^s(y) \right) &= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{(u_i, J_z \gamma_{1,r}(u_i) + \partial_r \gamma_{1,r}(u_i))\}_{i=1}^n \\ &\quad + 0 \times \text{Span}_{\mathbb{R}} \{J_z \gamma_{1,0}(u_i) + \partial_r \gamma_{1,r}(u_i), v_j\}_{i=1, j=k+1}^{k,n} \end{aligned}$$

Encore une fois, il suffit de montrer que le second Span engendre tout $T_{\gamma_{1,r}(z)} \mathcal{M}$ pour conclure que la transversalité entre ψ et i est satisfaite. Si ce n'est pas le cas, il faudra procéder à certaines approximations.

Considérons $\tilde{X}_{H_{1,r}}$ une légère modification \mathcal{C}^∞ de $X_{H_{1,r}}$ dans de petits voisinages des points problématiques r satisfaisant les mêmes propriétés que $X_{H_{1,r}}$. La famille de solutions $\tilde{\gamma}_{t,r}$ de l'équation différentielle $\left. \frac{\partial(\tilde{\phi}_{s,r})}{\partial s} \right|_t = \tilde{X}_{H_{t,r}}(\tilde{\phi}_{t,r})$ est \mathcal{C}^∞ près de $\phi_{t,r}$ et coïncide avec elle en dehors des petits voisinages considérés. Les mêmes remarques s'appliquent lorsqu'on compare le bloc inférieur de $\tilde{\psi}_*$ avec celui de ψ_* . Or, l'ensemble des applications linéaires inversibles $T_z W^u(x) \rightarrow T_{\gamma_{1,r}(z)} \mathcal{M}$ transversales à $T_{\gamma_{1,r}(z)} W^s(y)$ est dense dans $GL(T_z W^u(x), T_{\gamma_{1,r}(z)} \mathcal{M})^4$. Ainsi, ces légères modifications assurent que $\pi_v \tilde{\psi}_*$ transporte $T_z W^u(x)$ de manière transverse à $T_{\gamma_{1,r}(z)} W^s(y)$. Bref, le second Span, suite à ces modifications, engendre bel et bien tout $T_{\gamma_{1,r}(z)} \mathcal{M}$. Autrement dit, $\text{Im}\tilde{\psi}$ est transversale à $\text{Im}i$. Pour la suite, on notera ψ pour désigner $\tilde{\psi}$.

Cette transversalité permet de conclure que $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$ est une sous-variété de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ de dimension 1. En effet, $\text{codim}(\text{Im}\psi \cap \text{Im}i) = \text{codim}(\text{Im}\psi) + \text{codim}(\text{Im}i) = 2n - (n+1) + 2n - (\text{ind}(x) + n - \text{ind}(y)) = 2n - 1$. De plus, puisque $\mathcal{M} \times [0,1]$, $W^u(x)$ et $W^s(y)$ sont compactes, $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$ est compacte. Ainsi, les composantes connexes de $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$ sont difféomorphes à des cercles ou des intervalles fermés.

En regardant de plus près $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$, on réalise qu'en $r = 0$, la variété correspond à l'ensemble des paires $(u, v) \in \mathcal{M}$ telles que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^f(u) = x$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^g(v) = y$ et $\phi_{0,1}(u) = \phi_1^H(u) = v$, avec ϕ^f , ϕ^g et ϕ^H les courbes intégrales des champs X_f , X_g et $X_{H_{t,0}} = X_H$. Autrement dit, cet ensemble, noté $\eta^H(x, y)$, correspond aux lignes de flot de X_H reliant les points critiques x et y . Bref, $\eta^H(x, y)$ décrit précisément le morphisme φ^H associé à l'homotopie H .

En $r = 1$, la variété correspond à l'ensemble des paires $(u, v) \in \mathcal{M}$ telles que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^f(u) = x$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t^g(v) = y$ et $u = \phi_{0,1}(u) = v$. En d'autres termes, cet ensemble, noté précédemment $\eta^{f,g}(x, y)$, est $W^u(x) \cap W^s(y)$, ou encore aux croisements entre les lignes

⁴Théorème de transversalité sous contrainte, voir Audin et Damian A.3.13

de flot de X_f partant de x et celles de X_g arrivant à y . Bref, $\eta^{f,g}(x,y)$ décrit l'application φ présentée plus haut.

Ces deux ensembles font évidemment partie du bord de $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$, car $\{0,1\} = \partial[0,1]$. Toutefois, ils ne représentent pas l'entièreté de $\partial(\text{Im}\psi \cap \text{Im}i)$. En effet, il existe des configurations (γ_1, γ) , avec γ_1 une ligne de flot de ϕ^f joignant x à $x' \in C_{k-1}(f)$ et γ une ligne de flot de $\phi_{t,r}$ reliant x' à y . Ces configurations sont également des points frontières de $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$. Elles sont atteintes lorsque $t \rightarrow \infty$ pour ϕ_t^f et ϕ_t^g . On dénote l'ensemble de ces configurations par $\bigcup_{x' \in C_{k-1}(f)} \eta^f(x, x') \times \eta^\psi(x', y)$, avec $\eta^f(x, x')$ les lignes de flot de X_f joignant x à x' et $\eta^\psi(x', y)$ celles de $X_{H_{t,r}}$ reliant x' à y . De même, on a des configurations (γ, γ_2) , avec γ une ligne de flot de $\phi_{t,r}$ joignant x à $y' \in C_{k+1}(g)$ et γ_2 une ligne de flot de ϕ^g reliant y' à y . L'ensemble de ces configurations, noté $\bigcup_{y' \in C_{k+1}(g)} \eta^\psi(x, y') \times \eta^g(y', y)$ de manière analogue, est également composé de points frontière de $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$. Ces configurations sont atteintes lorsque $t \rightarrow -\infty$ pour ϕ_t^f et ϕ_t^g .

En considérant répétant tout ce qui précède pour toutes les paires de points critiques $x \in C_\bullet(f)$ et $y \in C_\bullet(g)$ de même indice, on obtient une large collection de variété compacte de dimension 1 ayant pour bord :

- (i) des configurations $(\gamma_1, \gamma, \gamma_2) \in \eta^H$, avec γ_1 une ligne de flot de ϕ^f partant de $x \in C_k(f)$ croisant une ligne de flot γ de $\phi_{t,r}$ qui croise à son tour une ligne de flot γ_2 de ϕ^g arrivant en $y \in C_k(f)$;
- (ii) des configurations $(\gamma_1, \gamma_2) \in \eta^{f,g}H$, avec γ_1 une ligne de flot de ϕ^f partant de $x \in C_k(f)$ croisant une ligne de flot γ_2 de ϕ^g arrivant en $y \in C_k(f)$;
- (iii) des configuration $(\gamma_1, \gamma) \in \eta^f(x, x') \times \eta^\psi(x', y)$, avec γ_1 une ligne de flot de ϕ^f reliant $x \in C_k(f)$ à $x' \in C_{k-1}(f)$ et γ une ligne de flot de $\phi_{t,r}$ reliant x' à $y \in C_k(g)$;
- (iv) des configuration $(\gamma, \gamma_2) \in \eta^\psi(x, y') \times \eta^g(y', y)$, avec γ une ligne de flot de $\phi_{t,r}$ reliant $x \in C_k(f)$ à $y' \in C_{k+1}(f)$ et γ_2 une ligne de flot de ϕ^g reliant y' à $y \in C_k(g)$.

Et puisque le bord d'une variété compacte de dimension 1 est composée d'un nombre pair de points frontière, on en déduit que pour tout $x \in C_k(f)$, on a $\varphi_k^H(x) + \varphi_k(x) = d_{k+1}^g \vartheta_{k+1}(x) + \vartheta_k d_k^f(x)$, où $\vartheta_{k+1} : C_k(f) \rightarrow C_{k+1}(g)$ est l'application linéaire donnée par les ensembles $\eta^\psi(x', y)$ et $\eta^\psi(x, y')$. Par conséquent, φ^H et φ sont des morphismes de complexes de chaînes homotopes. On remarque, pour conclure, que le choix de l'homotopie H était bel et bien sans importance.

Enfin, on souligne que tout ce qui a été fait est également valide si \mathcal{M} est orientée et $C_\bullet(f)$ et $C_\bullet(g)$ sont des complexes sur \mathbb{Z} . Dans ce cas, la sous-variété $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$ hérite d'une orientation de \mathcal{M} . Puisque l'application φ se réalise comme des points frontière de $\text{Im}\psi \cap \text{Im}i$ et que ceux-ci sont signés, φ est un morphisme de complexes de chaînes sur \mathbb{Z} .

1.5.2. Morphismes issus d'un marquage

Maintenant qu'une nouvelle approche pour construire le morphisme de complexes de chaînes $C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ associé à une homotopie $H : f \rightarrow g$ a été définie, on réalise que cette méthode laisse un plus grand degré de liberté. En effet, et tel qu'initialement annoncé, définir un morphisme de complexes de chaînes de Morse par des croisements de lignes de flot permet d'obtenir une plus grande diversité de morphismes au niveau de l'homologie.

À ce titre, on considère \mathcal{E} la collection de tous les croisements entre les lignes de flot ϕ^f et ϕ^g reliant des points critiques de même indice, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{\substack{x \in C_k(f) \\ y \in C_k(g)}} \eta^{f,g}(x,y)$$

Un *marquage* de ces croisements est une valuation $\xi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (ou \mathbb{Z}). Un marquage induit une application $C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ de la manière canonique suivante : $\varphi^\xi(x) = \sum_{y \in C_\bullet(g)} \xi(x,y)y$, avec $\xi(x,y)$ la somme des valeurs sur $\eta^{f,g}(x,y)$, c'est-à-dire $\xi(x,y) = \sum_{z \in \eta^{f,g}(x,y)} \xi(z)$. On dira d'un marquage qu'il est *adéquat* si l'application induite $C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ est un morphisme de chaînes, c'est-à-dire $\varphi_{k-1}^\xi d_k^f = d_k^g \varphi_k^\xi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

De cette manière, une panoplie de nouveaux morphismes de chaînes peuvent être introduits. En particulier, le marquage complet (tout croisement est évalué à 1) correspond au morphisme φ précédemment étudié, alors que le marquage trivial (tout croisement est évalué à 0) correspond au morphisme nul. Notons que ces deux morphismes ne sont généralement pas homotopes, donc ne coïncideront pas au niveau de l'homologie. Promesse tenue.

Entre les deux, une foule de morphismes peut surgir. Du même coup, remarquons que l'ensemble des marquages adéquats admet une structure naturelle de \mathbb{Z}_2 -module (ou \mathbb{Z}). Effectivement, l'addition de deux valuations $\xi_1, \xi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (ou \mathbb{Z}) donne une autre valuation, nommément $\xi_1 + \xi_2$. De plus, les applications linéaires induites satisfont $\varphi^{\xi_1} + \varphi^{\xi_2} = \varphi^{\xi_1 + \xi_2}$. On en déduit aisément que si ξ_1 et ξ_2 sont adéquats, alors $\xi_1 + \xi_2$ est adéquat. Bref, les marquages adéquats $\xi : C_\bullet(f) \rightarrow C_\bullet(g)$ forme un \mathbb{Z}_2 -module (ou \mathbb{Z} -module).

Chapitre 2

Catégories des tuples de Morse et leurs marquages

Ce chapitre présente de nouvelles catégories de fonctions de Morse qui sont des versions améliorées des catégories FdM et FdMf, améliorées d'une part car leurs morphismes ne sont pas tous homotopes entre eux et d'autre part car elles sont triangulée (ou presque). Plus précisément, leurs objets sont des tuples de fonctions de Morse et leurs morphismes sont une généralisation des marquages tels que définis à la section 1.5. Soulignons d'avance que la transversalité entre les tuples de Morse est cruciale afin que la composition de marquages soit un marquage. Cette contrainte est particulièrement importante car, sans celle-ci, nous obtenons des pré-catégories, c'est-à-dire des catégories pour lesquelles la composition de morphismes n'est pas bien définie. Nous discutons d'ailleurs de certains moyens pour contourner ce problème, dont notamment l'ajout d'une condition de généricité globale ou encore la notion de catégorie engendrée par des tuples.

2.1. Tuples de Morse : marquages et morphismes

Nous désirons définir une catégorie hTdM de fonctions de Morse sur une variété compacte \mathcal{M} dont les morphismes sont donnés par des croisements de lignes de flot. Mais avant, nous devons mettre en place quelques notions préliminaires.

2.1.1. Suspension de fonctions de Morse

On définit, pour une fonction de Morse f sur \mathcal{M} , la k -suspension $f[k]$ comme étant la fonction de Morse f pour laquelle l'indice de ses points critiques est translaté de k , c'est-à-dire $C_{\bullet}(f[k]) = C_{\bullet+k}(f)$. De même, pour d^f sa différentielle de complexe de chaînes, on définit la différentielle $d_{\bullet}^{f[k]} = (-1)^k d_{\bullet+k}^f$. Remarquons qu'il est possible de connaître la suspension effectuée sur f , car \mathcal{M} étant compacte, le groupe $C_{\bullet}(f)$ non trivial de plus petit indice est

nécessairement associé aux minimums de f . La suspension effectuée est alors l'indice de ce groupe.

2.1.2. Tuple de Morse

On définit, pour f et g des fonctions de Morse sur \mathcal{M} , en position générique et potentiellement suspendues, un tuple de Morse (f, g) . Celui-ci est donné par $C_\bullet(f, g) = C_\bullet(f) \oplus C_\bullet(g)$. Une différentielle pour ce complexe est une application linéaire $d_\bullet : C_\bullet(f, g) \rightarrow C_{\bullet-1}(f, g)$ telle que

- (i) sous forme matricielle, $d_\bullet = \begin{pmatrix} d_\bullet^f & 0 \\ \varphi_\bullet & d_\bullet^g \end{pmatrix}$, avec d^f et d^g les différentielles respectives et φ une application linéaire induite d'un marquage entre $f[1]$ et g ;
- (ii) $d_{\bullet-1} \circ d_\bullet = 0$.

Nous reconnaissons que la notion de marquage entre tuples de Morse n'a pas encore été définie, donc que la définition d'un tuple de Morse est invalide. Pour l'instant, nous n'avons que la notion de marquage entre fonction de Morse, donc de marquage entre tuples de Morse de longueur 1. Dans les prochaines sections, nous allons définir ce qu'est un marquage de tuples de Morse et ce qu'est une application linéaire induite d'un marquage. Ces définitions pourront sembler invalides, car elles reposeront sur la notion antécédente de tuple de Morse. C'est pourquoi nous introduisons la longueur d'un tuple de Morse, c'est-à-dire le nombre de fonctions de Morse (avec potentielle répétition) qui le compose. Il nous paraît alors évident que, dans le cas où les tuples considérés sont de longueur 1, le concept de marquage est déjà défini : c'est en fait le concept de marquage entre fonctions de Morse. Donc, pour l'instant, nous sommes en mesure de définir les tuples de Morse de longueur 2. En admettant séparément la définition d'un tuple de Morse et celle d'application linéaire induite d'un marquage entre tuples de Morse, nous serons en mesure de définir récursivement les tuples de Morse de longueur 3, puis 4, puis 5... D'ici-là, acceptons cette définition telle qu'elle est, c'est-à-dire incomplète.

De plus, il est clair que plusieurs différentielles peuvent être définies pour le complexe (f, g) . C'est pourquoi, pour la suite du présent mémoire, lorsque nous mentionnerons un tuple (f, g) , nous sous-entendrons également qu'une différentielle est fixée.

De même, nous disons que $f = (f_1, \dots, f_k)$ et $g = (g_1, \dots, g_l)$, des tuples de Morse de longueur k et l , en admettant qu'ils existent, sont en position générique si, pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$, f_i et g_j sont en position générique lorsque considérées non suspendues. Pour $f = (f_1, \dots, f_k)$ et $g = (g_1, \dots, g_l)$, les différents tuples de longueur $k + l$ suivants sont considérés comme identiques si leur différentielles coïncident :

$$(f, g) = (f_1, \dots, f_k, g) = (f, g_1, \dots, g_l) = (f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l).$$

De plus, nous étendons la notion de suspension aux tuples de Morse : $(f,g)[k] = (f[k], g[k])$ et $d_{\bullet}[k] = (-1)^k d_{\bullet+k}$. Puisque $d_{\bullet}[k]$ satisfait (i) et (ii) pour $(f,g)[k]$, nous obtenons bien un tuple de Morse.

Enfin, nous admettons que le tuple vide muni de la différentielle vide, noté 0, est lui aussi un tuple de Morse, le seul de longueur 0. Remarquons que $0[k] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour $f = (f_1, \dots, f_k)$, on assume les égalités suivantes : $(0, f) = (f, 0) = f$.

2.1.3. Marquages entre tuples de Morse en position générique

Rappelons qu'un marquage entre $x \in C_{\bullet}(f)$ et $y \in C_{\bullet}(g)$, où f et g sont deux fonctions de Morse sur \mathcal{M} en position générique présentant la même suspension, est une valuation dans \mathbb{Z}_2 (ou \mathbb{Z}) des croisements de lignes de flot partant de x et arrivant à y . Nous étendons maintenant cette notion aux tuples de Morse en position générique.

D'abord, introduisons un peu de nomenclature. Pour f un tuple de Morse, nous notons $\bar{f} = f[k]$ avec k tel que $\max \{p : C_p(\bar{f}) \neq 0\} = \dim \mathcal{M}$ et nommons \bar{f} l'étalon de f . Pour $x \in C_{\bullet}(f)$, l'indice étalonné de x est l'entier naturel k tel que $x \in C_k(\bar{f})$. Pour $f_i \in f$, la fonction de Morse étalonnée est la fonction de Morse $\bar{f}_i \in \bar{f}$ représentant f_i , c'est-à-dire la suspension $\bar{f}_i = f_i[l]$ telle que $f_i[l] \in \bar{f}$ est l'analogue de $f_i \in f$. En particulier, si k est l'indice étalonné de $x \in C(f)$ et que $x \in C(f_i)$, alors $x \in C_k(\bar{f}_i)$, mais il est possible que $x \notin C_k(f_i)$ lorsque f_i est considérée non suspendue. En d'autres termes, l'indice étalonné d'un point critique x ne coïncide pas nécessairement avec l'indice habituel, soit celui donné par la dimension de la sous-variété instable. L'indice étalonné place plutôt les maximums du tuple f à un indice similaire aux maximums d'une fonctions de Morse standard.

En un sens, on peut interpréter l'indice étalonné comme la différence entre la dimension de \mathcal{M} et la dimension de la sous-variété stable de x lorsque x est vu comme un point critique du tuple, et non de la fonction. Cette interprétation prendra tout son sens une fois que la notion de marquage de tuples de Morse aura été introduite. En effet, la sous-variété stable d'un point critique comportera également des lignes de flot partant de points critiques n'appartenant pas à la même fonction de Morse que x . La sous-variété stable de x dans le tuple est donc plus grande que celle de x dans sa fonction de Morse.

Un marquage ξ entre $f = (f_1, \dots, f_r)$ et $g = (g_1, \dots, g_s)$, des tuples en position générique, est une collection de marquages donnée par :

- (i) $\xi(x_i, y_j)$, avec $x_i \in C_k(\bar{f}_i)$ et $y_j \in C_k(\bar{g}_j)$, ensemble de marquages des croisements de lignes de flot de $C(f)$ quittant x_i et les lignes de flot de $C(g)$ arrivant en y_j ;
- (ii) par défaut, si les points critiques considérés n'ont pas le même degré étalonné, alors on pose $\xi(x_i, y_j) = \emptyset$.

Par « lignes de flot de $C(f)$ quittant x_i », nous entendons les lignes de flots du pseudo-gradient X_{f_i} quittant x_i ainsi que les lignes de flots quittant x_i et apparaissant dans la partie

inférieure à la diagonale de d^f , donc potentiellement des croisements de lignes de flot entre f_i et $f_{i'}$, avec $i < i'$. Une description tout à fait similaire permet de définir les « lignes de flot de $C(g)$ arrivant en y_j ». Bref, les croisements entre toutes ces lignes de flot sont évalués dans \mathbb{Z}_2 ou \mathbb{Z} .

Notons enfin que la précédente définition admet les croisements entre lignes de flot non constantes et les lignes de flot constantes dans le cas précis où les points critiques sont des maximums ou des minimums du point de vue de l'indice étalonné. En effet, la condition de transversalité entre les tuples f et g assurent que les lignes de flot ne passent jamais par un point critique, excepté lorsque le point critique d'arrivée est un minimum (indice étalonné minimal) ou lorsque le point critique de départ est un maximum (indice étalonné maximal).

Pour revenir sur une précédente remarque, en admettant que les tuples de Morse de longueur l sont définis, on peut définir les marquages entre des tuples de Morse de longueur inférieure ou égale à l . Cela permettra de définir les applications linéaires induites de marquage pour des tuples de Morse de longueur inférieure ou égale à l . Il sera alors possible de définir les tuples de Morse de longueur $l + 1$ à partir de la définition précédemment donnée. Par raisonnement récursif, les tuples de Morse de longueur arbitraire et les marquages entre eux sont bien définis.

2.1.4. Morphisme issu d'un marquage

Nous montrons comment un marquage entre f et g permet de définir une application linéaire $\varphi : f \rightarrow g$. φ est la collection des $\varphi_{ij} : f_i \rightarrow g_j$, où chaque φ_{ij} est donné par l'ensemble des marquages passant de f_i à g_j . En d'autres termes, pour $x \in C_\bullet(f_i)$, $\varphi_{ij}(x) = \sum_{y \in C_\bullet(g_j)} \#_2 \xi(x, y) y$, où $\#_2$ désigne la cardinalité modulo 2, le tout étendu linéairement à tout $C_\bullet(f_i)$.

Remarquons que si $C_\bullet(f)$ et $C_\bullet(g)$ sont des \mathbb{Z} -modules, alors les marquages sont signés. La notion d'application \mathbb{Z} -linéaire issue d'un marquage signé entre f et g est similaire à la précédente, à la différence près que $\#_2$ est changé pour $\#_{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire la cardinalité signée.

On dit d'un marquage qu'il est *adéquat* si l'application linéaire induite commute avec les différentielles, c'est-à-dire $\varphi_{\bullet-1} d_\bullet^f = d_\bullet^g \varphi_\bullet$. C'est d'ailleurs la condition (ii) de la définition d'un tuple de Morse.

On dit que deux marquages adéquats sont homotopes, noté $\xi_1 \sim \xi_2$, s'il existe une application linéaire $\vartheta : f[-1] \rightarrow g$ de degré 1 telle que les morphismes φ_1 et φ_2 issus de ces marquages satisfont $(\varphi_1)_\bullet - (\varphi_2)_\bullet = d_{\bullet+1}^g \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_\bullet d_\bullet^f$.

2.1.5. Composition de marquages

Puisque notre objectif est de définir une catégorie dont les objets sont les tuples de Morse et les morphismes, les marquages adéquats, nous devons nous assurer que la composition

de marquages est bien définie. L'enjeu est le suivant : il ne fait aucun doute qu'on peut concaténer des marquages $\xi_1 : f \rightarrow g$ et $\xi_2 : g \rightarrow h$ afin de créer des chemins sur \mathcal{M} joignant les points critiques de f à ceux de h . Toutefois, ce qu'on obtient d'une telle concaténation n'est pas un marquage entre f et h , car aucun croisement de lignes de flots entre f et h n'est marqué, il y a toujours deux segments intermédiaires de lignes de flot de g . Il faut donc trouver un marquage $\xi : f \rightarrow h$ qui réalise le marquage $\xi_2\xi_1$.

Proposition 2.1.1. *Soient $\xi_1 : f \rightarrow g$ et $\xi_2 : g \rightarrow h$ des marquages adéquats, avec f , g et h des tuples de Morse en position générique deux-à-deux. Alors il existe un unique marquage adéquat $\xi : f \rightarrow h$ (à homotopie près) tel que le morphisme issu de ξ soit homotope à la composition de ceux induits de ξ_1 et ξ_2 .*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in C_k(\bar{f}_i)$ et $y \in C_k(\bar{h}_j)$. Soient γ_1 une ligne de flot de $C(f)$ partant de x et marquée par ξ_1 ainsi que γ_2 une ligne de flot de $C(h)$ arrivant en y et marquée par ξ_2 . Considérons l'espace de modules suivant.

$$\mathcal{E}(x,y; \gamma_1, \gamma_2) = \left\{ (\gamma_1, \gamma, \gamma_2) \left| \begin{array}{l} \exists g_l \in g \text{ tel que } \dot{\gamma} = X_{g_l}(\gamma) \\ \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que } \gamma_1(t_1) = \gamma(0), \gamma_2(t_2) = \gamma(1) \end{array} \right. \right\}$$

Autrement énoncé, on considère l'ensemble des chemins quittant x et arrivant en y et qui sont formés de γ_1 , γ_2 ainsi que d'une ligne de flot de X_{g_l} de longueur finie croisant γ_1 et γ_2 .

Le degré de liberté pour γ permet de paramétrer les composantes connexes de $\mathcal{E}(x,y; \gamma_1, \gamma_2)$ selon l'intervalle ouvert $(0,1)$. Ceci requiert un argument en tout point similaire à celui présenté à la section 1.5, à savoir que la dimension de l'espace des lignes de flot de f quittant x est la même que celle de l'espace des lignes de flot de g arrivant en y . Donc ajouter un degré permet d'obtenir un espace de configurations de dimension 1.

De même, on peut compactifier cet espace de modules de manière analogue à ce qui a été effectué à la section 1.5. Pour ce faire, on inclut les configurations suivantes :

- (i) les croisements entre les lignes de flot γ_1 et γ_2 ;
- (ii) les tuples $(\gamma_1, \gamma, \tilde{\gamma}, \gamma_2)$ tels que les paires (γ_1, γ) et $(\tilde{\gamma}, \gamma_2)$ s'intersectent et $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t) = z \in C_k(\bar{g})$;
- (iii) les tuples (γ_1, γ) , où γ_1 relie x à un point critique $x' \in C_{k-1}(\bar{f})$ et γ est une ligne de flot de X_{g_l} passant par x' et y ;
- (iv) les tuples (γ, γ_2) , où γ_2 relie un point critique $y' \in C_{k+1}(\bar{g})$ à y et γ est une ligne de flot de X_{g_l} passant par x et y' .

Cet espace, noté $\bar{\mathcal{E}}(x,y; \gamma_1, \gamma_2)$, est alors une variété compacte unidimensionnelle. Les composantes connexes à bord sont donc des intervalles. Si une concaténation de chemin du type $(\gamma_1, \gamma, \tilde{\gamma}, \gamma_2)$ présente des croisements marqués par η_1 et η_2 , et que cette concaténation appartient à la même composante connexe qu'une autre configuration de type (ii) ou (iii), on marque cette configuration. On marque également toutes les configurations de type (iv) et (v)

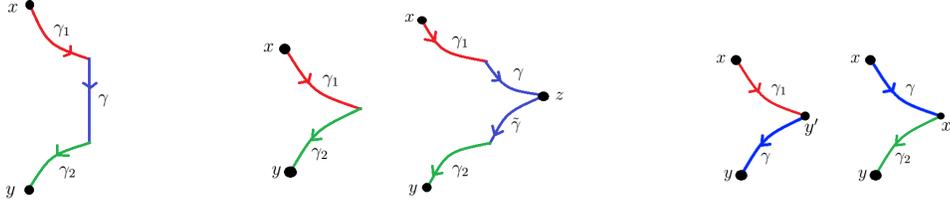


Fig. 2.1. Configurations apparaissant dans $\bar{\mathcal{E}}(x,y;\gamma_1,\gamma_2)$: celle de gauche appartient à $\mathcal{E}(x,y;\gamma_1,\gamma_2)$, celles du centre représentent ξ et $\xi_2\xi_1$ et celles de droite sont $d^g\vartheta$ et ϑd^f .

qui apparaissent dans $\bar{\mathcal{E}}(x,y;\gamma_1,\gamma_2)$. En considérant l'ensemble des $\bar{\mathcal{E}}(x,y;\gamma_1,\gamma_2)$, pour tout x , y , γ_1 et γ_2 tels que définis plus haut, et en effectuant des marquages similaires, on obtient un marquage $\xi : f \rightarrow h$ tel que le morphisme induit de ξ soit homotope à l'application linéaire issue de la concaténation $\xi_2\xi_1$. L'homotopie entre φ^ξ et $\varphi_{\xi_2\xi_1}$ est donnée par l'application linéaire $\vartheta : f[-1] \rightarrow h$ définie par les configurations de type (iv) et (v).

En fait, la précédente affirmation est incomplète, car le cas où γ_1 ou γ_2 est une ligne de flot constante n'a pas été traité. Dans cette situation, x et y doivent avoir un indice étalonné maximal ou minimal, et donc il existe une ligne de flot de f ou de h reliant x à y . Il suffit de marquer le croisement entre cette ligne de flot et la ligne de flot constante en y ou x de la même parité que celle de la quantité totale de chemins concaténés de $\xi_2\xi_1$ reliant x à y et de configurations de type (iv) ou (v) reliant x à y . Bref, le marquage ξ ainsi obtenu induit une application linéaire qui est homotope à celle issue du marquage $\xi_2\xi_1$. Et puisque sous forme matricielle le morphisme induit de la concaténation $\xi_2\xi_1$ égale la composition des morphismes induits de ξ_1 et ξ_2 et que cette composition commute avec les différentielles, ξ est un marquage adéquat.

Enfin, l'unicité de ξ à homotopie près est triviale. Ceci conclut la preuve. \square

Remarquons que si les marquages ξ_1 et ξ_2 sont signés, alors ξ est signé. En effet, le signe d'un croisement marqué par ξ est la multiplication des signes des segments concaténés de ξ_1 et ξ_2 associés à ce croisement.

2.2. Catégorie hTdm

Nous introduisons maintenant la catégorie hTdm des tuples de Morse sur une variété compacte \mathcal{M} munie d'une métrique α . Celle-ci est définie de la manière suivante.

- (i) $\text{Ob}_{\text{hTdm}} = \{(f, d) \text{ tuple de Morse sur } (\mathcal{M}, \alpha)\}$, pour la suite nous omettrons de spécifier la différentielle d ;
- (ii) $\text{Hom}(f, g) = \{\varphi \text{ application linéaire issu d'un marquage adéquat entre } f \text{ et } g\} / \sim$, avec \sim la relation d'équivalence induite par la notion de marquages adéquats homotopes;

- (iii) Pour $\varphi \in \text{Hom}(f,g)$ et $\psi \in \text{Hom}(g,h)$, la composition $\psi \circ \varphi$ est définie comme le morphisme dont l'existence est assurée par la proposition 2.1.1. De plus, cette composition est associative, car la multiplication matricielle est associative.

Puisque la notion de marquage entre tuples de Morse nécessite que ceux-ci soient en position générique, on suppose que tous les objets de hTdM sont en position générique deux-à-deux. C'est ce que nous nommons la condition de généricité globale.

Définition 2.2.1 (Condition de généricité globale). *Un ensemble de tuples de fonctions de Morse \mathcal{O} est dit globalement générique si tous les tuples sont en position générique deux-à-deux.*

Évidemment, cela restreint grandement l'ensemble Ob_{hTdM} , mais nous verrons, à travers ce chapitre ainsi qu'au cours du prochain, que hTdM est introduite afin de pouvoir comparer des tuples de Morse à des cônes de morphismes. À toute fin pratique, hTdM n'a pas besoin de contenir tous les tuples de Morse existant, mais seulement ceux que nous désirons comparer les uns aux autres. Soulignons que si f et g sont des tuples en position générique, alors pour tout morphisme $\varphi : f \rightarrow g$, le cône $C(\varphi)$ est en position générique avec f et g . De plus, étant donné un troisième tuple h en position générique avec f et g , h est, par définition, en position générique avec $C(\varphi)$. Nous en concluons que si hTdM est soumise à la condition de généricité globale, alors nous pouvons y ajouter les cônes de ses morphismes.

Il est alors évident que le choix des objets de hTdM est d'une grande importance : nous obtiendrions différentes versions de hTdM si nous modifions Ob_{hTdM} . À ce titre, pour \mathcal{O} un ensemble de tuples de Morse globalement générique, on définit la catégorie $\text{hTdM}(\mathcal{O})$ engendrée par \mathcal{O} , c'est-à-dire la catégorie pour laquelle l'ensemble des objets est \mathcal{O} auquel est ajouté le tuple vide, tous les cônes construits sur les tuples de \mathcal{O} ainsi que tous les biproduits et pour laquelle l'ensemble des morphismes est maximal (aucune restriction sur les morphismes). Il nous reste à définir le tuple vide, les cônes de morphisme entre tuples de Morse et les biproduits, mais comme précédemment, nous pouvons accepter cette définition et construire récursivement $\text{hTdM}(\mathcal{O})$ lorsque les cônes et les biproduits seront définis. Nous reviendrons sur ce point au moment opportun. Pour la suite de ce chapitre, lorsque nous parlerons de hTdM , nous supposerons qu'elle est engendrée par un tel ensemble \mathcal{O} (ce qui est toujours le cas si hTdM est globalement générique). En particulier, nous ne prendrons plus la peine de spécifier que les tuples sont en position générique.

Notons que, pour tout objet f , il existe un morphisme identité. Celui-ci est induit du marquage complet sur f , c'est-à-dire que toutes les lignes de flot constantes aux points critiques s'intersectent elle-même et sont marquées positivement. Il va de soi que le morphisme induit de ce marquage agit bel et bien comme un morphisme identité, la matrice le représentant étant la matrice identité sur $C_{\bullet}(f)$. En particulier, pour le tuple vide 0 , on a $\text{Hom}(0,0) = \{\emptyset\}$, avec \emptyset le morphisme vide issu du marquage vide. Celui-ci agit bel et bien comme l'identité. En effet, pour tout objet f , on a $\text{Hom}(0,f) = \{f\emptyset\}$ et $\text{Hom}(0,f) = \{\emptyset_f\}$,

avec $f\emptyset$ et \emptyset_f les morphismes vides, d'où on tire $f\emptyset \circ \emptyset = f\emptyset$ et $\emptyset \circ \emptyset_f = \emptyset_f$. De plus, pour tous objets f et g , on a l'égalité $f\emptyset \circ \emptyset_g = 0$, avec 0 le morphisme induit du marquage nul. On en déduit aisément la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *La catégorie hTdm possède un objet nul, nommé le tuple vide 0 .*

De plus, puisque chaque $\text{Hom}(f,g)$ est un \mathbb{Z}_2 -module (ou un \mathbb{Z} -module), hTdm est une catégorie « enrichie » sur $\mathbb{Z}_2\text{-Mod}$ (ou $\mathbb{Z}\text{-Mod}$).

Nous disons que deux tuples sont isomorphes, noté $f \simeq g$, s'il existe un isomorphisme entre eux, c'est-à-dire s'il existe des morphismes $\varphi : f \rightarrow g$ et $\psi : g \rightarrow f$ tels que $\psi\varphi = 1^f$ et $\varphi\psi = 1^g$. De même, deux tuples sont dits équivalents, noté $f \sim g$, s'il existe une équivalence entre eux, c'est-à-dire s'il existe des morphismes $\varphi : f \rightarrow g$ et $\psi : g \rightarrow f$ tels que $\psi\varphi \sim 1^f$ et $\varphi\psi \sim 1^g$. Nous introduisons cette terminologie, redondante dans hTdm, car c'est celle que nous avons initialement utilisée dans le cadre de complexes de chaînes arbitraires.

Proposition 2.2.3. *Toute paire d'objets de hTdm admet un biproduit.*

DÉMONSTRATION. Soit $f, g \in \text{Ob}_{\text{hTdm}}$. Notons $f \oplus g$ le tuple de Morse (f,g) muni de la différentielle $\begin{pmatrix} d^f & 0 \\ 0 & d^g \end{pmatrix}$. Nous montrons d'abord qu'il existe des morphismes projections et inclusions satisfaisant les identités usuelles. Notons π_f (resp. π_g) le morphisme issu du marquage $f \oplus g \rightarrow f$ (resp. g) complet sur f (resp. $f \oplus g \rightarrow g$) et nul sur g (resp. f). Nous nommons ce morphisme la projection sur f (resp. g). Notons également i_f (resp. i_g) le morphisme issu du marquage $f \rightarrow f \oplus g$ (resp. $g \rightarrow f \oplus g$) complet sur f (resp. g) et nul sur g (resp. f). Nous nommons ce morphisme l'inclusion de f (resp. g). Il est alors évident que $\pi_f i_f = 1^f$, $\pi_g i_g = 1^g$, $\pi_f i_g = 0$, $\pi_g i_f = 0$ et $i_f \pi_f + i_g \pi_g = 1^{f \oplus g}$.

Nous montrons ensuite que $f \oplus g$ est à la fois le produit et la somme (coproduit) de f et g , ce qui permettra de conclure que $f \oplus g$ est le biproduit de f et g .

Soit h un objet de hTdm ainsi que deux morphismes $\varphi_f : h \rightarrow f$ et $\varphi_g : h \rightarrow g$. Considérons le morphisme $(\varphi_f, \varphi_g) : h \rightarrow f \oplus g$ issu des marquages associés à φ_f et φ_g . Alors $\pi_f(\varphi_f, \varphi_g) = \varphi_f$ et $\pi_g(\varphi_f, \varphi_g) = \varphi_g$. Il ne reste qu'à montrer que le morphisme (φ_f, φ_g) est unique par rapport aux deux précédentes égalités. Soit $\psi : h \rightarrow f \oplus g$ tel que $\pi_f \psi = \varphi_f$ et $\pi_g \psi = \varphi_g$. Par les propriétés des projections et inclusion, nous obtenons les égalités suivantes.

$$\psi = (i_f \pi_f + i_g \pi_g) \psi = i_f \pi_f \psi + i_g \pi_g \psi = i_f \varphi_f + i_g \varphi_g = (\varphi_f, \varphi_g)$$

Bref, nous en déduisons que $f \oplus g$ est le produit de f et g . Similairement, $f \oplus g$ est la somme de f et g , ce qui permet de conclure que $f \oplus g$ est le biproduit de f et g . \square

Nous définissons maintenant la notion de cône d'un morphisme, ce qui nous permettra de montrer que hTdm est une catégorie triangulée.

Définition 2.2.4. *Soit $f, g \in \text{Ob}_{\text{hTdm}}$ et $\varphi \in \text{Hom}(f,g)$. On définit le cône de φ par $C(\varphi) = (f[-1], g)$ et $d_{\bullet}^{C(\varphi)} = \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ -\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^g \end{pmatrix}$.*

Tel que mentionné plus tôt, hTdm est construite récursivement à l'aide des notions de cône et de biproduit. Plus précisément, hTdm est initialement composé de tuples de longueur 1 (ou 0 pour le tuple vide). On peut alors construire des tuples de longueur 2 à grâce aux opérations cône et biproduit, puis les tuples de longueur 3, etc. Au final, Ob_{hTdm} contient tous les tuples de longueur finie engendrés par l'ensemble \mathcal{O} . Bref, c'est ce qui conclut la définition de hTdm.

Enfin, nous montrons deux résultats très utiles dans la démonstration que hTdm est triangulée. Ces résultats sont duaux l'un de l'autre, comme nous le verrons dans la démonstration du théorème 2.3.2, à l'axiome TR2, et comme nous le verrons dans leur démonstration respective.

Proposition 2.2.5. *Soit $\varphi : f \rightarrow g$ un morphisme, son cône $C(\varphi)$ ainsi que le morphisme inclusion $i : g \rightarrow C(\varphi)$. Alors $C(i) \sim f[-1]$.*

DÉMONSTRATION. Considérons les marquages $\alpha : f[-1] \rightarrow C(i)$ et $\beta : C(i) \rightarrow f[-1]$ suivants

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\varphi[-1] \\ 1^{f[-1]} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1^{f[-1]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ces matrices commutent avec les différentielles, donc α et β sont des morphismes. De plus, $\beta\alpha = 1^{f[-1]}$. Il ne reste qu'à montrer que $\alpha\beta \sim 1^{C(i)}$. Considérons l'application linéaire $\vartheta : C(i)[-1] \rightarrow C(i)$ décrite par la matrice suivante :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1^{g[-1]} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors nous avons les égalités suivantes qui permettent de conclure que $\alpha\beta \sim 1^{C(i)}$.

$$\begin{aligned} d_{\bullet+1}^{C(i)} \vartheta_{\bullet+1} &= \begin{pmatrix} -d_{\bullet}^g & 0 & 0 \\ 0 & -d_{\bullet}^f & 0 \\ -1_{\bullet}^g & -\varphi_{\bullet} & d_{\bullet+1}^g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet}^g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{\bullet}^g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\bullet}^g \end{pmatrix} \\ \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(i)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet-1}^g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^g & 0 & 0 \\ 0 & -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ -1_{\bullet-1}^g & -\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{\bullet-1}^g & -\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^g \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (\alpha\beta)_{\bullet} - 1_{\bullet}^{C(i)} &= \begin{pmatrix} -\varphi_{\bullet-1} \\ 1_{\bullet-1}^f \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{\bullet-1}^f & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^g & 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\bullet}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1_{\bullet-1}^g & -\varphi_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\bullet}^g \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\alpha\beta)_{\bullet} - 1_{\bullet}^{C(i)} = d_{\bullet+1}^{C(i)} \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(i)} \end{aligned}$$

Bref, nous avons bien $C(i) \sim f[-1]$. □

Proposition 2.2.6. *Soit $\varphi : f \rightarrow g$ un morphisme, son cône $C(\varphi)$ ainsi que le morphisme projection $\pi[1] : C(\varphi)[1] \rightarrow f$. Alors $C(-\pi[1]) \sim g$*

DÉMONSTRATION. Considérons les marquages $\alpha : g \rightarrow C(-\pi[1])$ et $\beta : C(-\pi[1]) \rightarrow g$ donnés par les matrices suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1^g & \varphi \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ces matrices commutent avec les différentielles, donc α et β sont des morphismes. De plus, $\beta\alpha = 1^g$. Il ne reste qu'à montrer que $\alpha\beta \sim 1^{C(-\pi[1])}$. Considérons l'application linéaire $\vartheta : C(-\pi[1])[1] \rightarrow C(-\pi[1])$ décrite par la matrice suivante :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1^f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors nous avons les égalités suivantes qui permettent de conclure que $\alpha\beta \sim 1^{C(-\pi[1])}$.

$$\begin{aligned} d_{\bullet+1}^{C(-\pi[1])} \vartheta_{\bullet+1} &= \begin{pmatrix} -d_{\bullet}^f & 0 & 0 \\ -\varphi_{\bullet} & d_{\bullet+1}^g & 0 \\ 1_{\bullet}^f & 0 & d_{\bullet+1}^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet}^f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{\bullet}^f \\ 0 & 0 & -\varphi_{\bullet} \\ 0 & 0 & 1_{\bullet}^f \end{pmatrix} \\ \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(-\pi[1])} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet-1}^f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^f & 0 & 0 \\ -\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^g & 0 \\ 1_{\bullet-1}^f & 0 & d_{\bullet}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & 0 & d_{\bullet}^f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 1_{\bullet}^{C(-\pi[1])} - \alpha_{\bullet} \beta_{\bullet} &= \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^g & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\bullet}^f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{\bullet}^g \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1^g & \varphi_{\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_{\bullet} \\ 0 & 0 & 1_{\bullet}^f \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow 1_{\bullet}^{C(-\pi[1])} - \alpha_{\bullet} \beta_{\bullet} = d_{\bullet+1}^{C(-\pi[1])} \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(-\pi[1])} \end{aligned}$$

Bref, nous avons bien $C(-\pi[1]) \sim g$. □

2.3. hTdm est une catégorie triangulée

Nous montrons maintenant que hTdm est une catégorie triangulée pour l'autofoncteur de suspension $T = [-1]$ et une famille de triangles engendrée par les cônes de morphisme. Plus précisément, nous dirons que le triplet (φ, i, π) issu de la suite $f \xrightarrow{\varphi} g \xrightarrow{i} C(\varphi) \xrightarrow{\pi} f[-1]$, avec i l'inclusion et π la projection (similaire au morphisme π_f de 2.2.3), est un triangle strict. Un triplet (u, v, w) issu d'une suite $f \xrightarrow{u} g \xrightarrow{v} h \xrightarrow{w} f[-1]$ est un triangle s'il est équivalent à un triangle strict (u', i, π) sur f' et g' , c'est-à-dire s'il existe des équivalences α, β et γ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
f & \xrightarrow{u} & g & \xrightarrow{v} & h & \xrightarrow{w} & f[-1] \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha[-1] \\
f' & \xrightarrow{u'} & g' & \xrightarrow{i} & C(u') & \xrightarrow{\pi} & f'[-1]
\end{array}$$

Pour la suite, les objets seront implicitement désignés lorsqu'on parlera d'un triangle (u, v, w) .

Théorème 2.3.1. *hTdm est une catégorie additive.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà mentionné que hTdm est une catégorie enrichie sur Mod- \mathbb{Z} (ou Mod- \mathbb{Z}_2). Nous avons également déjà mentionné que le tuple vide 0 est l'objet nul de hTdm. Finalement, la proposition 2.2.3 assure l'existence d'un biproduit pour toute paire d'objets. \square

Théorème 2.3.2. *hTdm muni de l'autofoncteur $[-1]$ et de la famille $\mathcal{F} = \{(u, v, w) \text{ triangle}\}$ est une catégorie triangulée.*

DÉMONSTRATION. Comme précédemment discuté, hTdm est une catégorie additive. De plus, il ne fait aucun doute que $[-1]$ est un autofoncteur. Il ne reste qu'à montrer que la famille \mathcal{F} satisfait aux conditions d'une catégorie triangulée.

(TR1): Il est clair que tout morphisme $\varphi : f \rightarrow g$ appartient à au moins un triangle, nommément le triangle exact (φ, i, π) . De plus, \mathcal{F} contient, par définition, tout triplet (u, v, w) isomorphe à un triangle. Nous montrons maintenant que $(1^f, 0, 0)$ issu de la suite $f \xrightarrow{1^f} f \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} f[-1]$ est un triangle. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
f & \xrightarrow{1^f} & f & \xrightarrow{i} & C(1^f) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] \\
\downarrow 1^f & & \downarrow 1^f & & \downarrow 0 & & \downarrow 1^f[-1] \\
f & \xrightarrow{1^f} & f & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & f[-1]
\end{array}$$

Clairement, les deux premières boîtes commutent. Montrons que $\pi \sim 0$, avec 0 le morphisme nul issu du marquage nul entre $C(1^f)$ et $f[-1]$. Soit l'application linéaire $\vartheta : C(1^f)[-1] \rightarrow f[-1]$ décrit par la matrice $(0 \quad -1^{f[-1]})$. Alors on a les égalités suivantes.

$$d_{\bullet+1}^{f[-1]} \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(1^f)} = -d_{\bullet}^f \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(1^f)} = \begin{pmatrix} 0 & d_{\bullet}^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\bullet}^f & -d_{\bullet}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\bullet}^f & 0 \end{pmatrix} = \pi_{\bullet}$$

Ainsi, $\pi \sim 0$ et le diagramme commute. Il ne reste qu'à montrer que 0 est une équivalence entre $C(1^f)$ et 0. Le seul morphisme qui peut être considéré à ce titre est $\bar{0} : 0 \rightarrow C(1^f)$. Clairement $0 \circ \bar{0} = 1^0$. Montrons que $\bar{0} \circ 0 \sim 1^{C(1^f)}$. Pour ce faire, introduisons l'application linéaire $\vartheta : C(1^f)[-1] \rightarrow C(1^f)$ définie par la

matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1^{f[-1]} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} d_{\bullet+1}^{C(1^f)} \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(1^f)} &= d_{\bullet+1}^{C(1^f)} \vartheta_{\bullet+1} + \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(1^f)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & d_{\bullet}^f \\ 0 & 1_{\bullet}^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & -d_{\bullet}^f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^f \end{pmatrix} = 1_{\bullet}^{C(1^f)} \end{aligned}$$

(TR2): En vertu de TR1, il suffit de montrer que pour les triangles stricts (φ, i, π) , on a $(i, \pi, -\varphi[-1]) \in \mathcal{F}$ et $(-\pi[1], \varphi, i) \in \mathcal{F}$. Pour ce faire, on compare d'abord $(i, \pi, -\varphi[-1])$ à (i, i', π') , le triangle strict sur i .

$$\begin{array}{ccccccc} g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] & \xrightarrow{-\varphi[-1]} & g[-1] \\ \downarrow 1^g & & \downarrow 1^{C(\varphi)} & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1^{g[-1]} \\ g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{i'} & C(i) & \xrightarrow{\pi'} & g[-1] \end{array}$$

Le morphisme $\alpha : f[-1] \rightarrow C(i)$ est celui donné à la proposition 2.2.5. En particulier, α est une équivalence. Il ne reste qu'à montrer que les boîtes commutent. Il est évident que la première commute. Pour la seconde, on a les égalités suivantes, avec β l'équivalence de la proposition 2.2.5 :

$$\beta i' 1^{C(\varphi)} = \beta i' = \begin{pmatrix} 0 & 1^{f[-1]} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1^{f[-1]} & 0 \\ 0 & 1^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{f[-1]} & 0 \end{pmatrix} = \pi$$

Puisque $\alpha\beta \sim 1^{C(i)}$, on a $\alpha\pi = \alpha\beta i' 1^{C(\varphi)} \sim i' 1^{C(\varphi)}$, d'où on déduit que la seconde boîte commute. Enfin, pour la troisième, on a les égalités suivantes, démontrant que cette boîte commute et que les triangles sont équivalents, d'où $(i, \pi, -\varphi[-1]) \in \mathcal{F}$.

$$\pi' \alpha = \begin{pmatrix} 1^{g[-1]} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi[-1] \\ 1^{f[-1]} \\ 0 \end{pmatrix} = -\varphi[-1]$$

Pour montrer que $(-\pi[1], \varphi, i) \in \mathcal{F}$, nous ne ferons qu'ébaucher la démarche, car les calculs sont similaires à ceux effectués précédemment. Il suffit de considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} C(\varphi)[1] & \xrightarrow{-\pi[1]} & f & \xrightarrow{\varphi} & g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) \\ \downarrow 1^{C(\varphi)[1]} & & \downarrow 1^f & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1^{C(\varphi)} \\ C(\varphi)[1] & \xrightarrow{-\pi[1]} & f & \xrightarrow{i'} & C(-\pi[1]) & \xrightarrow{\pi'} & C(\varphi) \end{array}$$

où $\alpha : g \rightarrow C(-\pi[1])$ est le morphisme d'inclusion donné à la proposition 2.2.6. En particulier, α est une équivalence, d'inverse β . De toute évidence, la première boîte commute. Des calculs similaires aux précédents permettent de montrer que $\beta i' 1^f = \varphi$, d'où on tire $\alpha\varphi \sim i' 1^f$. Donc la seconde boîte commute. Enfin, la troisième boîte

commute, car un calcul direct montre que $\pi'\alpha = i$. Bref, les triangles sont équivalents, d'où $(-\pi[1], \varphi, i) \in \mathcal{F}$.

(TR3): Par TR1 et TR2, il suffit de montrer que cet axiome est vérifié pour les triangles stricts. Ainsi, soit les triangles stricts et morphismes suivants, tels que la première boîte commute.

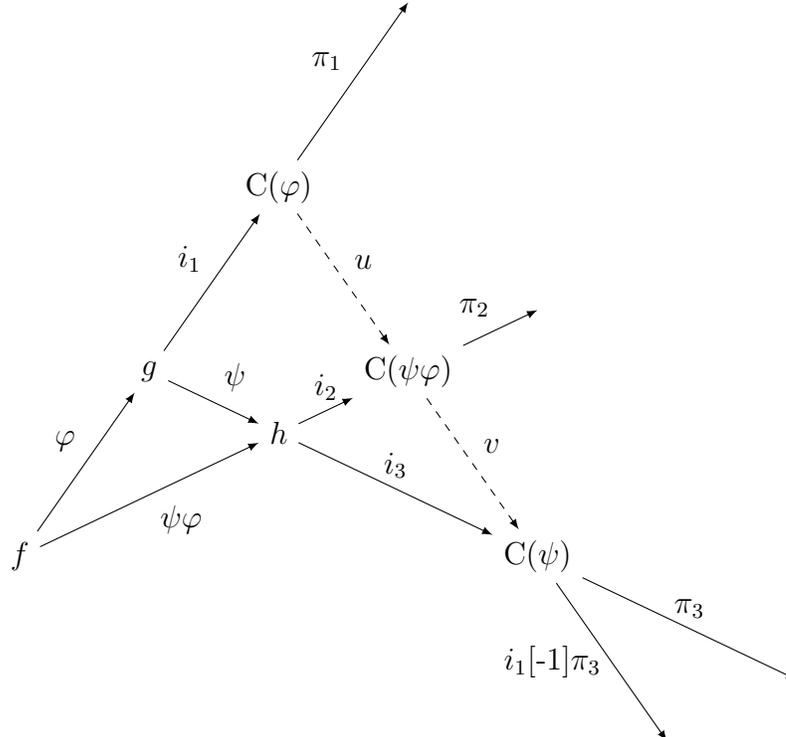
$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{\varphi} & g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \downarrow u[-1] \\ f' & \xrightarrow{\varphi'} & g' & \xrightarrow{i'} & C(\varphi') & \xrightarrow{\pi'} & f'[-1] \end{array}$$

Montrons qu'il existe un morphisme $w : C(\varphi) \rightarrow C(\varphi')$ faisant commuter les deux dernières boîtes. On définit $w = (u[-1], v)$, c'est-à-dire par la matrice diagonale $w = \begin{pmatrix} u[-1] & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. On vérifie que w est bien un morphisme.

$$\begin{aligned} w_{\bullet-1} d_{\bullet}^{C(\varphi)} &= \begin{pmatrix} u_{\bullet-2} & 0 \\ 0 & v_{\bullet-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ -\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{\bullet-2} d_{\bullet-1}^f & 0 \\ -v_{\bullet-1} \varphi_{\bullet-1} & v_{\bullet-1} d_{\bullet}^g \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^{f'} u_{\bullet-1} & 0 \\ -\varphi'_{\bullet-1} u_{\bullet-1} & d_{\bullet}^{g'} v_{\bullet} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^{f'} & 0 \\ -\varphi'_{\bullet-1} & d_{\bullet}^{g'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & v_{\bullet} \end{pmatrix} = d_{\bullet}^{C(\varphi')} w_{\bullet}. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie aisément que le diagramme est commutatif : $wi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = i'v$ et $\pi'w = (u[-1] \ 0) = u[-1]\pi$.

(TR4): Encore une fois, en vertu de TR1 et TR2, il suffit de vérifier l'énoncé pour des triangles stricts. Ainsi, soit le diagramme commutatif suivant (sans les morphismes pointillés).



On désire montrer que les morphismes u et v existent et satisfont les propriétés suivantes :

- (i) la diagonale de droite est un triangle, c'est-à-dire $(u, v, i_1[-1]\pi_3) \in \mathcal{F}$;
- (ii) le diagramme commute au grand complet, c'est-à-dire $i_2\psi \sim ui_1$, $\pi_2u \sim \pi_1$, $\pi_3v \sim \varphi[-1]\pi_2$ et $vi_2 \sim i_3$.

À ce titre, on introduit les marquages u et v représentés par les matrices suivantes :

$$u = \begin{pmatrix} 1^{f[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1^h \end{pmatrix}.$$

Il ne fait aucun doute que u et v sont adéquats, donc u et v sont des morphismes. De plus, la propriété (ii) est rapidement vérifiée.

$$i_2\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^h \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{f[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1^g \end{pmatrix} = ui_1$$

$$\pi_2u = (1^{f[-1]} \ 0) \begin{pmatrix} 1^{f[-1]} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} = (1^{f[-1]} \ 0) = \pi_1$$

$$\pi_3v = (1^{g[-1]} \ 0) \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1^h \end{pmatrix} = (\varphi[-1]) = \varphi[-1] (1^{f[-1]} \ 0) = \varphi[-1]\pi_2$$

$$vi_2 = \begin{pmatrix} \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 1^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1^h \end{pmatrix} = i_3$$

Pour montrer que la propriété (i) est également satisfaite, on compare $(u, v, i_1[-1]\pi_3)$ au triangle strict sur u . On considère donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{C}(\varphi) & \xrightarrow{u} & \mathbf{C}(\psi\varphi) & \xrightarrow{v} & \mathbf{C}(\psi) & \xrightarrow{i_1[-1]\pi_3} & \mathbf{C}(\varphi)[-1] \\ \downarrow 1^{\mathbf{C}(\varphi)} & & \downarrow 1^{\mathbf{C}(\psi\varphi)} & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1^{\mathbf{C}(\varphi)[-1]} \\ \mathbf{C}(\varphi) & \xrightarrow{u} & \mathbf{C}(\psi\varphi) & \xrightarrow{i} & \mathbf{C}(u) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{C}(\varphi)[-1] \end{array}$$

où α est donné par la matrice suivante :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1^{g[-1]} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1^h \end{pmatrix}.$$

De toute évidence, α est issu d'un marquage et α commute avec les différentielles, d'où on déduit que α est un morphisme. De plus, la troisième boîte commute et la vérification se passe de calculs. Pour la deuxième boîte, on considère l'application

linéaire $\vartheta : C(\psi\varphi)[-1] \rightarrow C(u)$ donnée par la matrice suivante :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 1^{f[-2]} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie maintenant que $\alpha v \sim i$.

$$\begin{aligned} \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(\psi\varphi)} &= \begin{pmatrix} 1_{\bullet-2}^f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ -\psi_{\bullet-1}\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ d_{\bullet+1}^{C(u)} \vartheta_{\bullet+1} &= \begin{pmatrix} d_{\bullet-1}^f & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{\bullet-1} & -d_{\bullet}^g & 0 & 0 \\ -1_{\bullet-1}^f & 0 & -d_{\bullet}^f & 0 \\ 0 & -\psi_{\bullet} & \psi_{\bullet}\varphi_{\bullet} & d_{\bullet+1}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{\bullet-1}^f & 0 \\ \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ -1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_{\bullet} v_{\bullet} - i_{\bullet} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\bullet-1}^g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ -1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(\psi\varphi)} + d_{\bullet+1}^{C(u)} \vartheta_{\bullet+1} \end{aligned}$$

Finalement, on montre que α est une équivalence, auquel cas on déduira que $(u, v, i_1[-1]\pi_3) \in \mathcal{F}$. Pour ce faire, on introduit l'application linéaire $\beta : C(u) \rightarrow C(\psi)$ définie par la matrice suivante :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1^{g[-1]} & \varphi[-1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^h \end{pmatrix}.$$

Clairement, β est issue d'un marquage et commute avec les différentielles, donc β est un morphisme. De plus, $\beta\alpha = 1^{C(\psi)}$. Pour vérifier que $\alpha\beta \sim 1^{C(u)}$, on introduit l'application linéaire $\vartheta : C(u)[-1] \rightarrow C(u)$ donnée par la matrice suivante :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1^{f[-1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie maintenant que $\alpha\beta \sim 1^{C(u)}$.

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(u)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet-2}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\bullet-2}^f & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{\bullet-2} & -d_{\bullet-1}^g & 0 & 0 \\ -1_{\bullet-2}^f & 0 & -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & -\psi_{\bullet-1} & \psi_{\bullet-1}\varphi_{\bullet-1} & d_{\bullet}^h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1_{\bullet-2}^f & 0 & -d_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
d_{\bullet+1}^{C(u)} \vartheta_{\bullet+1} &= \begin{pmatrix} d_{\bullet-1}^f & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{\bullet-1} & -d_{\bullet}^g & 0 & 0 \\ -1_{\bullet-1}^f & 0 & -d_{\bullet}^f & 0 \\ 0 & -\psi_{\bullet} & \psi_{\bullet}\varphi_{\bullet} & d_{\bullet+1}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\alpha_{\bullet}\beta_{\bullet} - 1_{\bullet}^{C(u)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\bullet-1}^g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{\bullet-1}^g & \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 1_{\bullet-2}^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{\bullet-1}^g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{\bullet}^h \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1_{\bullet-2}^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{\bullet-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\bullet-1}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vartheta_{\bullet} d_{\bullet}^{C(u)} + d_{\bullet+1}^{C(u)} \vartheta_{\bullet+1}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(u, v, i_1[-1]\pi_3)$ est bien un triangle, étant équivalent au triangle strict (u, i, π) .

Ainsi, puisque hTdm est une catégorie additive et que, munie de l'autofoncteur $[-1]$ et de la famille de triangles définie précédemment, elle satisfait les axiomes TR1 à TR4, hTdm est une catégorie triangulée. \square

2.4. Catégorie hTdMf

Puisque les objets de hTdM sont induits des fonctions de Morse, nous pouvons considérer, comme à la section 1.3, leurs sous-niveaux. Ceci permet de définir les sous-niveaux d'un tuple de Morse et, ultimement, la notion de tuple de Morse filtré sera introduite. L'objectif de cette section est de généraliser les résultats des sections 2.2 et 2.3 du point de vue de la filtration des tuples et des morphismes.

2.4.1. Tuples de Morse filtrés

On définit, pour une fonction de Morse f sur \mathcal{M} et une constante $c \in \mathbb{R}$, f^c la fonction de Morse $f - c$. Cette opération est nommée translation. De même, pour $f = (f_1, \dots, f_k)$ un tuple de Morse, on définit le tuple de Morse translaté $f^c = (f_1^c, \dots, f_k^c)$. Nous avons déjà introduit les sous-niveaux d'une fonction de Morse. De manière analogue, pour un tuple de Morse $f = (f_1, \dots, f_k)$, on définit le sous-niveau $C(f < t) = C(f_1 < t) \oplus \dots \oplus C(f_k < t)$. En particulier, nous avons la relation $C(f^c < t) = C(f < t + c)$.

Définition 2.4.1. *Un tuple de Morse filtré est un tuple de Morse (f, d) muni d'une famille d'applications linéaires $\rho_{s,t} : C(f < s) \rightarrow C(f < t)$ définies par $\rho_{s,t}(x) = x$, $\forall s \leq t \in \mathbb{R}$. Nous notons cette famille d'applications linéaires ρ et la nommons l'application de filtration. De plus, nous demandons que l'application différentielle d respecte la filtration, c'est-à-dire que toutes les applications induites $d_{k,t} : C_k(f < t) \rightarrow C_{k-1}(f < t)$ soient bien définies. Pour la suite, nous omettrons de spécifier l'application différentielle d et l'application de filtration ρ lorsque nous parlerons d'un tuple de Morse filtré.*

Remarquons qu'un tuple de Morse peut toujours devenir un tuple de Morse filtré. En effet, si l'application différentielle d ne respecte pas la filtration, il suffit de translater les fonctions $f_i \in f$ qui posent problème. De plus, notons que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble des groupes abéliens gradués $C(f < t)$ forme un module de persistance. La démonstration est en tout point similaire à celle présentée à la section 1.3.

Nous définissons de manière tout à fait canonique l'opération de suspension d'un tuple de Morse filtré : $C_\bullet(f[k] < t) = C_{\bullet+k}(f < t)$ et $d_{\bullet,t}^{f[k]} = (-1)^k d_{\bullet,t}^f$. De même, les notions d'étalon d'un tuple de Morse filtré, d'indice étalonné et de fonction de Morse étalonnée sont définies de manière tout aussi canonique. L'opération de translation peut également être étendue aux tuples de Morse filtrés. Nous avons déjà défini f^c ; la différentielle quant à elle devient $d_{k,t}^{f^c} = d_{k,t+c}^f$.

La notion d'action d'un morphisme peut elle aussi être définie. En effet, un morphisme $\varphi : f \rightarrow g$ induit une famille d'applications linéaires $\varphi_t : (f < t) \rightarrow g$ données par la restriction. Puisque la variété \mathcal{M} considérée est compacte, f et g possèdent un nombre fini de points critiques. Ainsi, il existe une valeur $c \in \mathbb{R}$ minimale pour laquelle la famille d'applications linéaires $\varphi_t : (f < t) \rightarrow (g < t + c)$ est bien définie. Nous nommons cette

valeur l'action de φ et nous référerons au morphisme filtré φ par la famille d'applications linéaires φ_t pour cette valeur c . En particulier, pour $s \leq t$, nous avons l'égalité $\rho_{s,t}^g \varphi_s = \varphi_t \rho_{s,t}^f$. Puisque $C_\bullet(f < s) \subset C_\bullet(f < t)$, on simplifie la notation en identifiant $\varphi_t \rho_{s,t}^f$ à φ_t , d'où on tire l'identité plus concise $\rho_{s,t}^g \varphi_s = \varphi_t$.

Le précédent paragraphe indique comment obtenir un morphisme de tuples de Morse filtrés à partir d'un morphisme de tuples de Morse. Or, l'action du morphisme induit est quelque peu arbitraire. Nous aurions pu définir le morphisme induit comme étant celui d'action $c + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque. C'est pourquoi, pour la suite, lorsque nous parlerons d'un morphisme filtré, son action sera implicitement fixée. Par exemple, si φ est un morphisme filtré d'action c , alors nous pouvons parler du morphisme filtré φ' d'action $c + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ qui coïncide avec φ , tout en considérant que φ et φ' sont différents. En d'autres termes, nous ne nous limitons pas à une seule version d'un morphisme filtré, nous les considérons toutes (du moment qu'elles soient bien définies).

La composition de morphismes filtrés s'effectue de la manière canonique, c'est-à-dire en composant les morphismes selon la méthode établie à la proposition 2.1.1, puis en considérant la famille d'applications linéaires induite de cette composition. Si $\varphi : f \rightarrow g$ a une action c_1 et $\psi : g \rightarrow h$ a une action c_2 , alors $\psi\varphi : f \rightarrow h$ a une action $c_1 + c_2$. On dit que deux morphismes filtrés $\varphi, \psi : f \rightarrow g$ sont homotopes, noté $\varphi \sim \psi$, s'ils ont la même action c et s'il existe une famille d'applications linéaires $\vartheta_{\bullet,t} : C_{\bullet-1}(f < t) \rightarrow C_\bullet(g < t + c)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) $\rho_{s+c,t+c}^g \vartheta_{\bullet,s} = \vartheta_{\bullet,t} \rho_{s,t}^f$, pour toutes valeurs $s \leq t \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\varphi_{\bullet,t} - \psi_{\bullet,t} = d_{\bullet+1,t+c}^g \vartheta_{\bullet+1,t} + \vartheta_{\bullet,t} d_{\bullet,t}^f$, pour toutes valeurs $s \leq t \in \mathbb{R}$.

On dira de morphismes filtrés $\varphi : f \rightarrow g$ et $\psi : g \rightarrow f$ d'action respectives c et $-c$ qu'ils sont des isomorphismes (resp. équivalences) si $\psi\varphi = 1^f$ (resp. $\varphi\psi \sim 1^f$) et $\varphi\psi = 1^g$ (resp. $\varphi\psi \sim 1^g$), où 1^f et 1^g sont les morphismes identités de hTdM d'action 0. Remarquons que nous admettons qu'un isomorphisme ou une équivalence soit d'action non nulle. Cela est motivé par les raisonnements intuitifs suivants : f et f^c devrait être considérés isomorphes et si f et g sont équivalents, alors f et g^c devraient l'être également.

Définition 2.4.2. Soit $\varphi : f \rightarrow g$ un morphisme filtré d'action c . Nous définissons le cône de φ par $C(\varphi) = (f[-1], g^c)$, $d_{\bullet,t}^{C(\varphi)} = \begin{pmatrix} -d_{\bullet-1,t}^f & 0 \\ \sim\varphi_{\bullet-1,t} & d_{\bullet,t+c}^g \end{pmatrix}$ et $\rho_{s,t}^{C(\varphi)} = \rho_{s,t}^f \oplus \rho_{s,t}^{g^c} = \rho_{s,t}^f \oplus \rho_{s+c,t+c}^g$. $C(\varphi)$ est un tuple de Morse filtré.

Nous définissons maintenant la pré-catégorie hTdMf des tuples de Morse filtrés. Celle-ci est formée des objets et morphismes suivants :

- (i) $\text{Ob}_{\text{hTdMf}} = \{(f, d, \rho)$ tuple de Morse filtré induit d'un tuple de Morse de $\text{Ob}_{\text{hTdM}}\}$;
- (ii) $\text{Hom}_{\text{hTdMf}}(f, g) = \{\varphi$ morphisme filtré induit d'un morphisme de $\text{Hom}_{\text{hTdM}}(f, g)\} / \sim$, avec \sim la relation d'équivalence induite par la notion de morphismes homotopes.

Puisque le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_{>0}$ agit sur toute fonction de Morse par la multiplication, il admet également une action sur les tuples de Morse. De plus, un marquage entre des tuples f et g induit un marquage entre les tuples $r \cdot f$ et $r' \cdot g$, pour $r, r' \in \mathbb{R}_{>0}$. À ce titre, lorsque nous disons qu'un tuple de Morse filtré est induit d'un tuple de Morse, nous entendons que le tuple filtré, après une potentielle multiplication par $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et de potentielles translations, présente les mêmes fonctions de Morse et la même différentielle que le tuple non filtré. C'est également ce que nous entendons par « morphisme filtré induit d'un morphisme non filtré ».

Soulignons que la composition de morphismes, telle que définie plus tôt, est associative et que le morphisme identité de hTdM d'action 0 est le morphisme identité de hTdMf . Comme ce fut le cas pour hTdM , la composition de marquages filtrés n'est pas toujours un marquage filtré. Pour remédier à ce problème, il est encore possible d'appliquer la condition de généralité globale à hTdMf . Bien évidemment, une foule de catégories différentes sont obtenues de cette manière. C'est pourquoi il est plus pratique de parler de la catégorie hTdMf engendrée par un ensemble \mathcal{O} de tuples de Morse filtrés globalement générale.

Enfin, nous introduisons la notion de triangles stricts filtrés et de triangles filtrés. Nous dirons que le triplet (φ, i, π) issu de la suite $f \xrightarrow{\varphi} g \xrightarrow{i} C(\varphi) \xrightarrow{\pi} f[-1]$, avec φ d'action c , i l'inclusion d'action $-c$ et π la projection d'action 0, est un triangle filtré strict. Un triplet (u, v, w) issu d'une suite $f \xrightarrow{u} g \xrightarrow{v} h \xrightarrow{w} f[-1]$, avec $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ les actions de u , v et w , est un triangle filtré s'il est équivalent à un triangle filtré strict (u', i, π) , c'est-à-dire s'il existe des équivalences α , β et γ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{u} & g & \xrightarrow{v} & h & \xrightarrow{w} & f[-1] \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \alpha[-1] \\ f' & \xrightarrow{u'} & g' & \xrightarrow{i} & C(u') & \xrightarrow{\pi} & f'[-1] \end{array}$$

2.4.2. Version filtrée des précédents résultats

Nous énonçons maintenant une version pour les tuples de Morse filtrés de chaque proposition et théorème ayant apparu dans ce chapitre.

Proposition 2.4.3 (2.2.2). *La catégorie hTdMf possède un objet nul.*

DÉMONSTRATION. Le tuple vide, noté 0, est trivialement filtré. L'application de translation donne $0^c = 0$. Encore une fois, les (uniques) morphismes $\emptyset_f : f \rightarrow 0$ et ${}_f\emptyset : 0 \rightarrow f$ sont trivialement filtrés, car ρ^0 est vide, et d'action nulle. Notons qu'il ne ferait aucun sens de parler d'action non nulle pour les morphismes filtrés \emptyset_f et ${}_f\emptyset$, car il serait alors possible d'obtenir un morphisme $0 \rightarrow 0$ d'action non nulle, ce qui est un non sens. \square

Proposition 2.4.4 (2.2.3). *Toute paire d'objets non triviale de hTdMf n'admet pas de bi-produit.*

DÉMONSTRATION. En effet, considérons f et g deux tuples de Morse filtrés non vide et notons $f \oplus g$ son biproduit fictif. En considérant $\varphi_1 : h \rightarrow f$ et $\varphi_2 : h \rightarrow g$ des morphismes

filtrés non nuls d'action c_1 et c_2 , on en déduit qu'il doit exister un morphisme filtré $\psi : h \rightarrow f \oplus g$ d'action c_ψ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} & & h & & \\ & \swarrow \varphi_1 & \downarrow \psi & \searrow \varphi_2 & \\ f & \xleftarrow{\pi^f} & f \oplus g & \xrightarrow{\pi^g} & g \end{array}$$

En notant c_f et c_g les actions de π^f et π^g , on obtient les égalités $c_\psi = c_1 - c_f = c_2 - c_g$. Puisque c_ψ , c_f et c_g sont fixes et que c_1 et c_2 peuvent être modifiées indépendamment (il suffit de considérer $\rho_{s,t}^f \varphi_s$ pour modifier c_1 sans varier c_2), nous en arrivons à la contradiction $c_f - c_g = c_\psi - c_\psi$.

Toutefois, si f (ou g) est l'objet nul 0 , alors le biproduit de f et g est g (ou f) muni des inclusions et projections usuelles d'action nulle. Dans ce cas, le morphisme filtré ψ est simplement φ_2 (ou φ_1). \square

Proposition 2.4.5 (2.2.5). *Soit $\varphi : f \rightarrow g$ un morphisme filtré, son cône $C(\varphi)$ ainsi que le morphisme filtré inclusion $i : g \rightarrow C(\varphi)$ d'action $-c$. Alors $C(i) \sim f[-1]$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer les morphismes filtrés $\alpha : f[-1] \rightarrow C(i)$ et $\beta : C(i) \rightarrow f[-1]$ d'action c et $-c$ respectivement et donnés par les matrices suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\varphi[-1] \\ 1^{f[-1]} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1^{f[-1]} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que α et β respecte la gradation et la filtration de $f[-1]$ et $C(i)$. De plus, $\beta\alpha = 1^{f[-1]}$. Pour montrer que $\alpha\beta \sim 1^{C(i)}$, il suffit de considérer l'application linéaire $\vartheta : C(i)[-1] \rightarrow C(i)$ d'action nulle décrite par la matrice suivante :

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1^{g[-1]} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors l'égalité $\alpha_{\bullet,t+c}\beta_{\bullet,t} - 1_{\bullet,t}^{C(i)} = d_{\bullet+1,t}^{C(i)}\vartheta_{\bullet+1,t} + \vartheta_{\bullet,t}d_{\bullet,t}^{C(i)}$. \square

Proposition 2.4.6 (2.2.6). *Soit $\varphi : f \rightarrow g$ un morphisme filtré, son cône $C(\varphi)$ ainsi que le morphisme filtré projection $\pi[1] : C(\varphi)[1] \rightarrow f$ d'action 0 . Alors $C(-\pi[1]) \sim g$.*

DÉMONSTRATION. Démarche en tout point analogue à la démarche précédente. \square

Théorème 2.4.7 (2.3.1). *hTdmf n'est pas une catégorie additive.*

DÉMONSTRATION. Selon la proposition 2.4.4, hTdmf n'admet que rarement un biproduit. Néanmoins, hTdmf est une catégorie enrichie sur $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ (ou $\mathbb{Z}_2\text{-Mod}$) de la manière suivante : soient $\varphi, \psi : f \rightarrow g$ deux morphismes filtrés d'action c_1 et c_2 (spdg $c_1 \geq c_2$), alors la somme de φ_1 et φ_2 est définie par $\varphi_{\bullet,t} + \rho_{t,t+c_1-c_2}^g \psi_{\bullet,t}$. Cette opération associative et commutative

permet d'obtenir un morphisme filtré. De plus, la composition de morphisme est distributive sur cette opération. \square

Théorème 2.4.8 (2.3.2). *hTdmf munie de l'autofoncteur $[-1]$ et de la famille $\mathcal{F} = \{(u,v,w) \text{ triangle filtré}\}$ satisfait les axiomes TR1 à TR4 d'une catégorie triangulée.*

DÉMONSTRATION. Il ne fait aucun doute que la suspension $[-1]$ est un autofoncteur. Il ne reste qu'à montrer que la famille \mathcal{F} satisfait aux conditions d'une catégorie triangulée.

(TR1): Il est clair que tout morphisme filtré $\varphi : f \rightarrow g$ appartient à au moins un triangle filtré, nommément le triangle filtré strict (φ, i, π) . De plus, \mathcal{F} contient par définition tout triplet (u,v,w) isomorphe à un triangle filtré. Pour montrer que le triplet $(1^f, 0, 0)$ issu de la suite $f \xrightarrow{1^f} f \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} f[-1]$ est un triangle filtré, nous procédons de la même manière que précédemment. Les mêmes morphismes, lorsque considérés comme des morphismes filtrés, rendent le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{1^f} & f & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & f[-1] \\ \downarrow 1^f & & \downarrow 1^f & & \downarrow 0 & & \downarrow 1^{f[-1]} \\ f & \xrightarrow{1^f} & f & \xrightarrow{i} & C(1^f) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] \end{array}$$

Puisque les flèches verticales sont des équivalences, le triplet $(1^f, 0, 0)$ est bien un triangle filtré.

(TR2): Pour montrer que le triplet $(i, \pi, -\varphi[-1])$, issu du triangle filtré strict sur $\varphi : f \rightarrow g$, est un triangle filtré, nous considérons le même diagramme que précédemment, avec α le morphisme de la proposition 2.4.5.

$$\begin{array}{ccccccc} g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] & \xrightarrow{-\varphi[-1]} & g[-1] \\ \downarrow 1^g & & \downarrow 1^{C(\varphi)} & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1^{g[-1]} \\ g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{i'} & C(i) & \xrightarrow{\pi'} & g[-1] \end{array}$$

Si le morphisme filtré φ a une action c , alors les morphismes filtrés i' , α et $-\varphi[-1]$ ont une action c , i a une action $-c$ et π et π' ont une action 0. De plus, le morphisme filtré β donné à la proposition 2.4.5, d'action $-c$, permet de vérifier que le diagramme est commutatif et que les flèches verticales sont des équivalences.

Pour montrer que le triplet $(-\pi[1], \varphi, i)$, issu du triangle filtré strict sur $\varphi : f \rightarrow g$, est un triangle filtré, nous considérons le même diagramme que précédemment, avec α le morphisme de la proposition 2.4.6.

$$\begin{array}{ccccccc} C(\varphi)[1] & \xrightarrow{-\pi[1]} & f & \xrightarrow{\varphi} & g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) \\ \downarrow 1^{C(\varphi)[1]} & & \downarrow 1^f & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1^{C(\varphi)} \\ C(\varphi)[1] & \xrightarrow{-\pi[1]} & f & \xrightarrow{i'} & C(-\pi[1]) & \xrightarrow{\pi'} & C(\varphi) \end{array}$$

Si le morphisme filtré φ a une action c , alors les morphismes filtrés i et α ont une action $-c$ et i' , π et π' ont une action 0. De plus, le morphisme filtré β donné à la

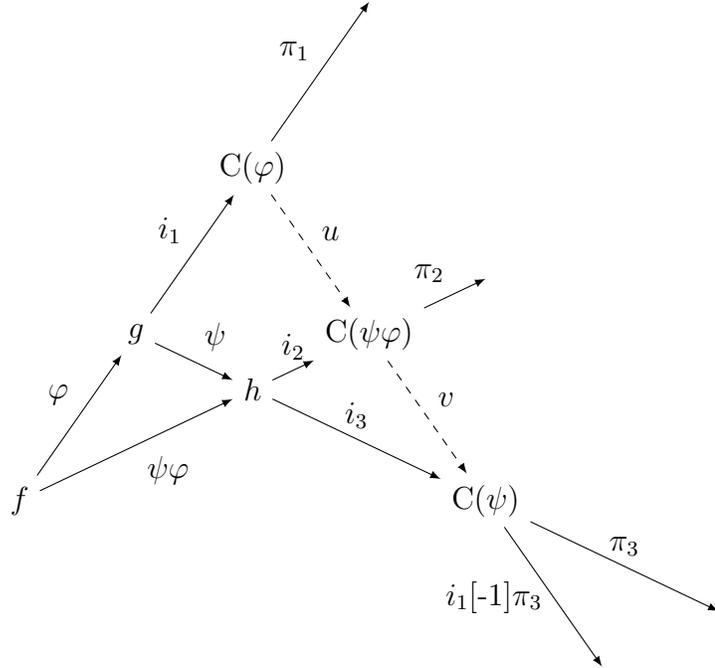
proposition 2.4.6, d'action c , permet de vérifier que le diagramme est commutatif et que les flèches verticales sont des équivalences.

(TR3): Par TR1 et TR2, il suffit de montrer que cet axiome est vérifié pour les triangles filtrés stricts. Ainsi, soit les triangles filtrés stricts et morphismes suivants, tels que la première boîte commute.

$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{\varphi} & g & \xrightarrow{i} & C(\varphi) & \xrightarrow{\pi} & f[-1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \downarrow u[-1] \\ f' & \xrightarrow{\varphi'} & g' & \xrightarrow{i'} & C(\varphi') & \xrightarrow{\pi'} & f'[-1] \end{array}$$

En notant c , c' et c'' les action respectives de φ , φ' et u , l'action de v doit être $c' + c'' - c$, autrement $v\varphi$ et $\varphi'u$ n'auraient pas la même action et la première boîte ne commuterait pas. Pour compléter le diagramme, nous introduisons la même application linéaire $w : C(\varphi) \rightarrow C(\varphi')$, cette fois vu comme un morphisme filtré d'action c'' (la même que u). Clairement, w est un morphisme filtré faisant commuter les deux dernières boîtes du diagramme.

(TR4): En vertu de TR1 et TR2, il suffit de montrer l'énoncé pour des triangles stricts. Soit le diagramme commutatif suivant (sans les morphismes pointillés).



Nous notons les actions de φ et ψ comme étant respectivement c et c' . Nous en déduisons que l'action de $\psi\varphi$ est $c + c'$, celle de i_1 est $-c$, celle de i_2 est $-(c + c')$, celle de i_3 est $-c'$ et celles de π_1 , π_2 , π_3 sont 0. Nous introduisons les mêmes applications linéaires u et v que précédemment, cette fois vues comme des morphismes filtrés d'action 0 et c . Clairement, u et v sont des morphismes filtrés rendant commutatif l'entièreté du diagramme.

□

Bref, même si hTdMf possède un objet nul, est enrichie sur \mathbb{Z} (ou \mathbb{Z}_2) et satisfait les axiomes TR1 à TR4, elle n'est pas une catégorie triangulée. En effet, elle n'admet pas un biproduit pour toute paire d'objets. Nous retenons néanmoins qu'elle en est presque une. D'ailleurs, ce qui sera important pour la suite, c'est le théorème 2.4.8, soit qu'elle satisfait les axiomes TR1 à TR4.

2.4.3. Pseudométrie sur hTdMf

On définit ici une pseudométrie sur l'espace des tuples de Morse filtrés. On introduit d'abord la notation $\text{act}(\varphi)$ pour désigner l'action d'un morphisme filtré $\varphi : f \rightarrow g$. Ensuite, pour deux tuples de Morse filtrés f et g , on note $\delta(f,g) = \inf_{\varphi: f \rightarrow g} \{\text{act}(\varphi)\}$ l'énergie pour passer de f à g . Enfin, on désigne l'énergie entre f et g par $d(f,g) = \max\{\delta(f,g), \delta(g,f), 0\}$.

Soulignons que si 0 n'était pas inclus dans l'expression de $d(f,g)$, alors il se pourrait que $d(f,g) < 0$. Par exemple, considérons f et g des fonctions de Morse parfaites sur S^2 . Notons leurs maximums par x_f et x_g , leurs minimums par y_f et y_g . Clairement, il existe un marquage adéquat envoyant x_f sur x_g et un autre envoyant y_g sur y_f . Si $f(x_f) > g(x_g) > g(y_g) > f(y_f)$, alors les morphismes filtrés induits de ces marquages ont tous deux une action négative. Nous en déduisons que $\delta(f,g) < 0$ et $\delta(g,f) < 0$. Ainsi, si $d(f,g) = \max\{\delta(f,g), \delta(g,f)\}$, nous aurions $d(f,g) < 0$, d'où la nécessité de bornée inférieurement $d(f,g)$.

Proposition 2.4.9. *$d(\cdot, \cdot)$ est une pseudométrie sur Ob_{hTdMf} , où hTdMf satisfait la condition de généralité globale.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que les trois axiomes d'une pseudométrie sont satisfaits.

- (i) Pour tout tuple de Morse filtré f , le morphisme filtré identité est d'action nulle. Donc $\delta(f,f) = 0$, d'où on déduit que $d(f,f) = 0$.
- (ii) Il ne fait aucun doute que $d(\cdot, \cdot)$ est symétrique.
- (iii) Considérons f , g et h trois tuples de Morse filtrés. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un morphisme filtré $\varphi : f \rightarrow g$ tel que $\text{act}(\varphi) = \delta(f,g) + \varepsilon$. Puisque $\delta(f,g) \leq d(f,g)$, on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un morphisme filtré $\varphi : f \rightarrow g$ tel que $\text{act}(\varphi) = d(f,g) + \varepsilon$. Cela découle du fait que si φ est d'action c , alors $\rho_{t, t+c}^g \varphi$ est d'action $c + c'$. De même, il existe un morphisme filtré $\psi : g \rightarrow h$ tel que $\text{act}(\psi) = d(g,h) + \varepsilon$.

Par conséquent, $\psi\varphi : f \rightarrow h$ est un morphisme filtré d'action $d(f,g) + d(g,h) + 2\varepsilon$. Puisque ε est arbitraire, on en déduit que $\delta(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$. Un argument similaire permet de conclure que $\delta(h,f) \leq d(h,g) + d(g,f) = d(f,g) + d(g,h)$. Finalement, on obtient l'inégalité du triangle $d(f,h) = \max\{\delta(f,h), \delta(h,f), 0\} \leq d(f,g) + d(g,h)$.

Notons au passage que $d(\cdot, \cdot)$ n'est pas une métrique. Il est clair qu'elle est dégénérée, car pour tout tuple de Morse filtré f , on a $d(f,0) = 0$. \square

Soulignons, pour terminer ce chapitre, que la proposition 2.4.9 offre une toute nouvelle manière de comparer des fonctions de Morse entre elles. Par exemple, la pseudométrie $d(\cdot, \cdot)$ permet de comparer deux pseudo-gradients associées à la même fonction de Morse. En effet, l'homologie de Morse d'une variété compacte \mathcal{M} calculée à partir d'une paire Morse-Smale (f, X) coïncide avec celle calculée à partir de la paire (f, X') . Or, il est fort possible que les complexes de Morse associés soient différents. Plus encore, considérer ces complexes de Morse à partir d'une filtration permet une étude beaucoup plus détaillée des comportements des flots de X et X' . La pseudométrie $d(\cdot, \cdot)$ est en mesure d'effectuer une telle comparaison.

De même, pour f et g des tuples de Morse filtrés en position non générique, une légère modification de g permet d'obtenir une paire de tuples filtrés en position générique. La pseudométrie $d(\cdot, \cdot)$ peut alors être utilisée pour discerner les différentes perturbations de g admissibles. Ces avenues ne sont pas explorées dans le présent mémoire, mais il nous semble évident qu'elles sont prometteuses. Bref, nous observons une fois de plus que les marquages offrent de nouveaux outils qui sont beaucoup plus sensibles que ceux traditionnellement obtenus des homotopies monotones entre les fonctions de Morse.

Chapitre 3

Décompositions en cône itéré

Ce chapitre présente des exemples où une fonction de Morse sur S^2 est décomposée en fonctions de Morse parfaites. Une telle décomposition est appelée un cône itéré. Nous ferons spécifiquement appel à des catégories hTdM et hTdMf ainsi qu'à tout le cadre formel dont elles sont équipées. Suit une discussion portant sur de plus amples applications des cônes itérés. Y est discutée l'idée que les fonctions de Morse parfaites sont des générateurs de cônes itérés. À ce propos, quelques conjectures sont énoncées. Si ces conjectures s'avéraient vérifiées, il serait possible d'étudier la dynamique d'une fonction de Morse « compliquée » en la comparant à un cône itéré de fonctions de Morse parfaites.

3.1. Exemples

Considérons une fonction de Morse f sur la sphère S^2 présentant deux maximums, un point de selle et un minimum. Notons les respectivement \bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{b} et \bar{c} . En quelques sortes, f est la fonction hauteur sur une sphère déformée comme à la figure 3.1.

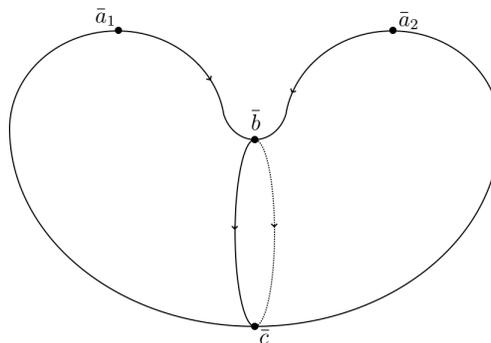


Fig. 3.1. La fonction de Morse f et les lignes de flot du gradient négatif reliant ses points critiques.

La différentielle associée à f est donnée par la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{b} & \bar{c} \end{matrix}$$

Considérons maintenant des points sur S^2 arbitrairement près des quatre précédents, nommément a_1 près de \bar{a}_1 , a_2 près de \bar{a}_2 , b_0 près de \bar{b} ainsi que c_0 , c_1 et c_2 près de \bar{c} . De plus, on demande que $b_0 \in W^u(\bar{a}_2)$. La figure 3.2 présente illustre la disposition de ces six points.

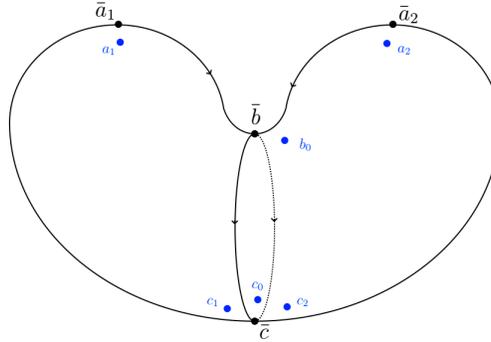


Fig. 3.2. Les points a_1 , a_2 , b_0 , c_0 , c_1 et c_2 tels que décrits.

Soit f_0 (resp. f_1 , f_2) la fonction hauteur sur S^2 ayant pour maximum b_0 (resp. a_1 , a_2) et pour minimum c_0 (resp. c_1 , c_2). À ces quatre fonctions, nous ajoutons les champs pseudo-gradients donnés par les gradients négatifs. Sans perte de généralité, nous assumons que ces quatre fonctions sont en position générique globale. L'objectif de ce qui suit est de montrer que la fonction f s'interprète comme le cône d'un morphisme $\varphi : f_1 \oplus f_2 \rightarrow f$. Plus précisément, nous expliciterons un isomorphisme (dans hTdM et hTdMf) entre f et $C(\varphi)$.

D'abord, définissons le morphisme φ . Pour ce faire, nous devons choisir un marquage entre les lignes de flot de $f_1 \oplus f_2$ et celles de f_0 . Nous marquons positivement la ligne de flot de $-\nabla f_1$ reliant a_1 à b_0 , négativement celle de $-\nabla f_2$ reliant a_2 à b_0 , positivement celle de $-\nabla f_0$ reliant c_1 à c_0 et négativement celle de $-\nabla f_0$ reliant c_2 à c_0 . L'application linéaire issue de ce marquage, nommément φ , est présentée sous forme matricielle de la manière suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_0 \\ c_0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

Notons que φ est trivialement un morphisme, car la différentielle de $f_1 \oplus f_2$ est la matrice $0_{4 \times 4}$ et celle de f_0 est la matrice $0_{2 \times 2}$. On peut donc considérer le cône de ce morphisme, c'est-à-dire $C(\varphi) = (f_0, f_1[-1], f_2[-1])$. Plus précisément, on a $C_0(\varphi) = \langle c_0 \rangle$, $C_1(\varphi) = \langle c_1, c_2 \rangle$, $C_2(\varphi) = \langle b_0 \rangle$ et $C_3(\varphi) = \langle a_1, a_2 \rangle$. Enfin, la différentielle de ce complexe s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante : $d^{C(\varphi)} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \\ -\varphi & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exemple est de montrer que l'objet f de la catégorie hTDM engendrée par $\{f, f_0, f_1, f_2\}$ est isomorphe (équivalent) à l'objet $C(\varphi)$. Pour ce faire, on construit une équivalence de hTDM entre ces objets. À ce titre, nous nous intéressons au marquage entre f et $C(\varphi)$ suivant.

- (i) Nous marquons positivement le croisement entre la ligne de flot de $-\nabla f$ partant de \bar{a}_i et se rendant à a_i et la ligne de flot de $-\nabla f_i$ constante en a_i , avec $i \in \{1, 2\}$.
- (ii) Nous marquons positivement un seul croisement entre une ligne de flot de $-\nabla f$ partant de \bar{b} et la ligne de flot de $-\nabla f_1$ partant de a_1 et se rendant à b_0 . Notons que ce croisement de lignes de flot est valide, car la ligne de flot reliant a_i à b_0 fait partie de $d^{C(\varphi)}$.
- (iii) Nous marquons positivement (resp. négativement) le croisement entre la ligne de flot de $-\nabla f$ constante en \bar{c} et la ligne de flot de $-\nabla f_1$ (resp. $-\nabla f_2$) partant de \bar{c} et se rendant à c_1 (resp. c_2).

L'application linéaire ψ issue de ce marquage s'exprime sous forme matricielle de la manière suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_0 \\ c_0 \end{matrix}$$

$\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \bar{b} \quad \bar{c}$

La figure 3.3 illustre ce marquage ainsi que la différentielle de $C(\varphi)$.

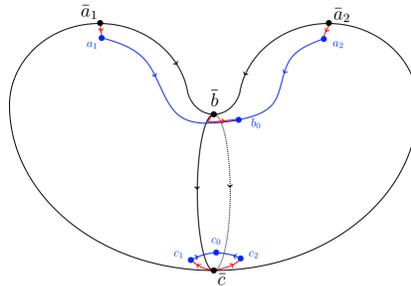


Fig. 3.3. En bleu, la différentielle du cône $C(\varphi)$. En rouge, le marquage ψ .

Nous vérifions que ψ est bien un morphisme de hTdm.

$$\psi d^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^{C(\varphi)}\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste qu'à montrer que ψ est une équivalence de hTdm, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $\Psi : C(\varphi) \rightarrow f$ issu d'un marquage adéquat tel que $\psi\Psi \sim 1^{C(\varphi)}$ et $\Psi\psi \sim 1^f$. Le marquage que nous proposons de considérer est le suivant.

- (i) Nous marquons positivement le croisement entre la ligne de flot de $-\nabla f_i$ partant de a_i et se rendant à \bar{a}_i et la ligne de flot de $-\nabla f$ constante en \bar{a}_i , pour $i \in \{1,2\}$.
- (ii) Nous marquons positivement le croisement entre la ligne de flot de $-\nabla f_0$ partant de b_0 et se rendant à \bar{b} et la ligne de flot de $-\nabla f$ constante en \bar{b} .
- (iii) Nous marquons positivement le croisement entre la ligne de flot de $-\nabla f_1$ constante en c_1 et la ligne de flot de $-\nabla f$ partant de c_1 et se rendant à \bar{c} .

Sous forme matricielle, Ψ a la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & b_0 & c_0 \end{matrix}$$

La figure 3.4 illustre ce second marquage ainsi que la différentielle de $C(\varphi)$.

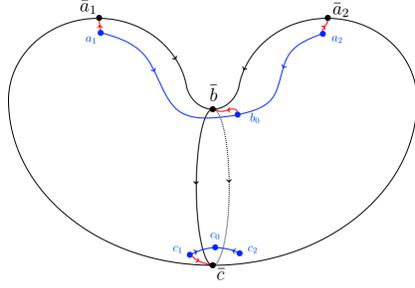


Fig. 3.4. En bleu, la différentielle du cône $C(\varphi)$. En rouge, le marquage Ψ .

Nous vérifions que ce marquage est adéquat.

$$\Psi d^{C(\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^f \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, nous vérifions que $\Psi\psi = 1^f$.

$$\Psi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^f$$

Enfin, nous montrons que $\psi\Psi \sim \text{if}_{C(\varphi)}$.

$$\psi\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous introduisons maintenant l'application linéaire $\vartheta : C(\varphi) \rightarrow C(\varphi)$ de degré 1 donnée par la matrice suivante.

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ b_0 \\ c_0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & b_0 & c_0 \end{matrix}$$

Nous vérifions que $1^{C(\varphi)} - \psi\Psi = \vartheta d^{C(\varphi)} + d^{C(\varphi)}\vartheta$.

$$\begin{aligned} \vartheta d^{C(\varphi)} + d^{C(\varphi)}\vartheta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1^{C(\varphi)} - \psi\Psi \end{aligned}$$

Bref, nous en concluons que $f \sim C(\varphi)$ dans hTdm.

Nous voudrions tout de même comparer plus précisément f et $C(\varphi)$. Pour ce faire, nous allons appliquer les précédents calculs à hTdmf, c'est-à-dire interpréter f , f_0 , f_1 , f_2 et $C(\varphi)$ comme des tuples de Morse filtrés. Nous pourrions alors calculer $d(f, C(\varphi))$ et évaluer la qualité de la décomposition en cône itéré.

Notons $f(\bar{a}_i) = \alpha_i$, $f(\bar{b}) = \beta$ et $f(\bar{c}) = \gamma$, avec $\bar{\gamma} < \bar{\beta} < \bar{\alpha}_i$ et où $i \in \{1, 2\}$. Considérons maintenant des fonctions de Morse f_0 , f_1 et f_2 semblables aux précédentes et ayant les

valeurs minimales et maximales suivantes : $f_i(a_i) = \alpha_i$, $f_0(b_0) = \beta$, $f_0(c_0) = \gamma_0$ et $f_i(c_i) = \gamma$, avec $\gamma_0 < \gamma$ et où $i \in \{1,2\}$. En d'autres termes, nous souhaitons que les fonctions de Morse parfaites f_0 , f_1 et f_2 aient leur points critiques près de ceux de f et que leurs valeurs critiques coïncident avec celles de f (excepté γ_0 , mais c'est sans importance comme on le verra plus loin).

Nous considérons ensuite les tuples de Morse filtrés suivants : f_0 et $f_1 \oplus f_2$, où $f_1 \oplus f_2$ est formé de $C_\bullet(f_1 \oplus f_2 < t) = C_\bullet(f_1 < t) \oplus C_\bullet(f_2 < t)$, $d_{\bullet,t}^{f_1 \oplus f_2} = d_{\bullet,t}^{f_1} \oplus d_{\bullet,t}^{f_2}$ et $\rho_{s,t}^{f_1 \oplus f_2} = \rho_{s,t}^{f_1} \oplus \rho_{s,t}^{f_2}$. Le morphisme φ précédent peut maintenant être vu comme un morphisme filtré. Puisque $\gamma_0 < \gamma$ et $\beta_0 < \alpha_i$, l'action de φ est négative. Nous pouvons donc considérer le morphisme filtré φ' d'action nulle qui coïncide avec φ . Afin d'alléger la notation, nous noterons φ ce second morphisme filtré. Le cône de φ est décrit par $C_\bullet(C(\varphi) < t) = C_{\bullet-1}(f_0 < t) \oplus C_\bullet(f_1 \oplus f_2 < t)$.

Ensuite, le morphisme ψ précédent est lui aussi un morphisme filtré. Son action est nulle car $\bar{a}_i \mapsto a_i$, $\bar{b} \mapsto b_0$ et $\bar{c} \mapsto c_1 - c_2$ sont toutes des applications d'action nulle. De même, le morphisme Ψ est également un morphisme filtré d'action nulle, et ce pour les mêmes raisons. Il ne reste plus qu'à montrer que ψ et Ψ sont des équivalences dans hTdmf. Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'application linéaire ϑ est d'action nulle et qu'elle commute avec les applications de filtration. Puisque ϑ ne fait qu'envoyer c_0 sur c_2 et que $\gamma_0 < \gamma$, l'action de ϑ est négative. En considérant plutôt $\rho_{t,t+\gamma-\gamma_0}^{C(\varphi)} \vartheta$, on obtient une application de degré 1 et d'action nulle, qu'on notera plus simplement ϑ . Par ailleurs, il est clair que $\rho_{s,t}^{C(\varphi)} \vartheta_{\bullet,s} = \vartheta_{\bullet,t} \rho_{s,t}^{C(\varphi)}$ pour toutes valeurs $s \leq t \in \mathbb{R}$. Bref, on en conclut que $f \sim C(\varphi)$ dans hTdmf.

3.2. Conjecture et discussion

Ainsi, non seulement f peut être décomposée en trois fonctions de Morse parfaites, mais cette décomposition est d'action (ou d'énergie) nulle. Par ailleurs, les points critiques a_i , b_0 et c_j , avec $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{0,1,2\}$, sont arbitrairement près des points critiques \bar{a}_i , \bar{b} et \bar{c} , avec $i \in \{1,2\}$. C'est donc dire qu'on peut étudier, selon une approximation arbitrairement précise, la dynamique de f du point de vue de la dynamique de fonctions de Morse parfaites. De plus, puisque ψ et Ψ sont d'action nulle, nous avons $d(f, C(\varphi)) = 0$, ce qui signifie que la décomposition est une bonne approximation.

Cet exemple est très simple, mais est particulièrement intéressant. En effet, la décomposition en cône itéré de f n'utilise que des fonctions de Morse parfaites. C'est donc dire que hTdmf engendrée par $\{f, f_0\}$ est en fait engendrée par $\{f_0, f_1, f_2\}$. Cet ensemble générateur peut d'ailleurs être réduit à $\{f_0\}$, car les tuples filtrés f_1 et f_2 sont obtenus en dilatant puis translatant le tuple filtré f_0 . Plus largement, nous pouvons nous demander si toute fonction de Morse sur S^2 peut être décomposée en fonctions de Morse parfaites. Cela s'énonce dans les termes suivants.

Conjecture 3.2.1. *Pour f un tuple de Morse sur S^2 munie de la métrique standard et f_0 une fonction de Morse parfaite, la catégorie hTdMf engendrée par f et f_0 est la catégorie hTdMf engendrée par f_0 .*

Puisque nous pouvons étudier la qualité de la décomposition en cône itéré du point de vue de la pseudo-métrique $d(\cdot, \cdot)$, une autre question intéressante est de savoir si un tuple de Morse f admet une décomposition en cône itéré C sur une fonction de Morse parfaite tel que $d(f, C) = 0$. Si cette question se répond par l'affirmative, nous en concluons que toute catégorie hTdMf sur S^2 engendrée par au moins une fonction de Morse parfaite est unique, à isomorphisme fonctoriel près.

Nous répondons partiellement à cette conjecture en présentant une famille de fonction de Morse admettant une décomposition en cône itéré sur une fonction de Morse parfaite. À ce titre, soit f une fonction de Morse sur S^2 ayant k maximums, $k - 1$ points de selle et 1 minimum ainsi qu'un pseudo-gradient associé à f respectant la condition de Smale. Notons ces points critiques $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^k$, $\{\bar{b}_j\}_{j=1}^{k-1}$ et \bar{c} . En particulier, pour chaque \bar{b}_j , il existe deux lignes de flot du pseudo-gradient de f qui relie ce point de selle au minimum \bar{c} . Pour ce qui en est des lignes de flots joignant les \bar{a}_i aux \bar{b}_j , elles sont considérées aussi générales que possible.

Soient f_i et g_j , pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq k - 1$, des fonctions de Morse parfaites. Notons a_i et b_j les maximums des f_i et g_j ainsi que c_i et d_j leurs minimums. Comme précédemment, plaçons les a_i et b_j près de leurs homologues \bar{a}_i et \bar{b}_j et fixons $f_i(a_i) = f(\bar{a}_i)$ et $g_j(b_j) = f(\bar{b}_j)$. De même, plaçons les c_i et les d_j près de \bar{c} et fixons $f_i(c_i) = f(\bar{c})$ et $g_j(d_j) = f(\bar{c}) - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Sans perte de généralité, on associe aux f_i et g_j des pseudo-gradients tels qu'on obtient des paires Morse-Smale en position générique avec f et son pseudo-gradient.

Nous définissons maintenant un morphisme $\varphi : \bigoplus_{i=1}^k f_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{k-1} g_j$ afin de construire son cône $C(\varphi)$. L'objectif de φ est de reproduire la différentielle associée au pseudo-gradient de f . À ce titre, si $d(\bar{a}_i) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} \bar{b}_j$, pour $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j, j' \leq k - 1$ et $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_2$ (ou \mathbb{Z} , alors on définit $\varphi(a_i) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} b_j$. Pour les c_i avec $1 \leq i \leq k - 1$, on définit $\varphi(c_i) = -d_i$ et pour c_k , on définit $\varphi(c_k) = \sum_{j=1}^{k-1} d_j$. Il ne fait aucun doute que φ est un morphisme, car d'une part les différentielles de $\bigoplus_{i=1}^k f_i$ et $\bigoplus_{j=1}^{k-1} g_j$ sont nulles et d'autre part il existe assurément, quitte à modifier légèrement la position des points critiques, des lignes de flots des f_i et g_j joignant les différents points critiques.

La position des points critiques des f_i et g_j nous permet de déduire quelques propriétés géométriques entre f et $C(\varphi)$. D'abord, puisque les a_i sont près des \bar{a}_i et que ces points critiques sont des maximums, on a $a_i \in W^u(\bar{a}_i)$. De plus, si les lignes de flots du pseudo-gradient associé à f relie \bar{a}_i et $\bar{a}_{i'}$ à \bar{b}_j , alors b_j étant près de \bar{b}_j , on a $b_j \in W^u(\bar{a}_i) \sqcup W^u(\bar{a}_{i'})$. On en déduit que l'une des deux lignes de flot apparaissant dans φ qui permettent de joindre a_i et $a_{i'}$ à b_j doit nécessairement croiser une ligne de flot sortant de \bar{b}_j . En effet, si $b_j \in W^u(\bar{a}_i)$, alors la ligne de flot reliant $a_{i'}$ à b_j doit passer de $W^u(\bar{a}_{i'})$ à $W^u(\bar{a}_i)$. Et puisque $W^u(\bar{b}_j)$ forme

un cercle (les deux lignes de flot quittant \bar{b}_j aboutissent en \bar{c}), alors S^2 peut être décomposé en deux disques le long de ce cercle. Par ailleurs, \bar{a}_i ne se trouve pas dans le même disque que $\bar{a}_{i'}$. Donc, b_j et $a_{i'}$ ne se trouvent pas dans le même disque. En supposant que la ligne de flot les reliant ne passe pas par \bar{b}_j ni par \bar{c} , cette trajectoire doit nécessairement croiser ce cercle en un autre endroit, d'où on conclut que la ligne de flot reliant $a_{i'}$ à b_j apparaissant dans φ intersecte une ligne de flot quittant \bar{b}_j . Un résultat analogue est également valide si $b_j \in W^u(\bar{a}_{i'})$. Enfin, puisque \bar{c} et les c_i sont des minimums, on a $\bar{c} \in W^s(c_i)$ pour tout i .

Montrons que $f \sim C(\varphi)$ dans hTdm. Pour ce faire, on introduit l'application linéaire $\psi : f \rightarrow C(\varphi)$ donnée par $\psi(\bar{a}_i) = a_i$, $\psi(\bar{b}_j) = b_j$ et $\psi(\bar{c}) = \sum_{i=1}^k c_i$. Par les précédents commentaires, il est clair que ψ peut être obtenu à partir d'un marquage. On vérifie aisément que ψ commute avec les différentielles, ce qui permet de montrer que ψ est un morphisme issu d'un marquage adéquat.

$$\begin{aligned} \psi d^f(\bar{a}_i) &= \psi \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} \bar{b}_j \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} b_j = d^{C(\varphi)}(a_i) = d^{C(\varphi)}\psi(\bar{a}_i) \\ \psi d^f(\bar{b}_j) &= 0 = d^{C(\varphi)}(b_j) = d^{C(\varphi)}\psi(\bar{b}_j) \\ \psi d^f(\bar{c}) &= 0 = \sum_{j=1}^{k-1} d_j - \sum_{j=1}^{k-1} d_j = d^{C(\varphi)}(c_k) + \sum_{i=1}^{k-1} d^{C(\varphi)}(c_i) = d^{C(\varphi)}\psi(\bar{c}) \end{aligned}$$

Nous introduisons également l'application linéaire $\Psi : C(\varphi) \rightarrow f$ définie par $\Psi(a_i) = \bar{a}_i$, $\Psi(b_j) = \bar{b}_j$, $\Psi(c_k) = \bar{c}$ et $\Psi(c_i) = \Phi(d_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$. Puisque les a_i et les b_j sont des maximums et que \bar{c} est un minimum, il est évident que Ψ peut être obtenu d'un marquage en $C(\varphi)$ et f . Nous vérifions rapidement que Ψ est en fait issu d'un marquage adéquat.

$$\begin{aligned} \Psi d^{C(\varphi)}(a_i) &= \Psi \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} b_j \right) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} \bar{b}_j = d^f(\bar{a}_i) = d^f\Psi(a_i) \\ \Psi d^{C(\varphi)}(b_j) &= 0 = d^f(\bar{b}_j) = d^f\Psi(b_j) \\ \Psi d^{C(\varphi)}(c_k) &= \Psi \left(\sum_{j=1}^{k-1} d_j \right) = 0 = d^f(\bar{c}) = d^f\Psi(c) \\ \Psi d^{C(\varphi)}(c_i) &= \Psi(-d_i) = 0 = d^f\Psi(c_i) \\ \Psi d^{C(\varphi)}(d_j) &= 0 = d^f\Psi(d_j) \end{aligned}$$

Soulignons que l'avant-dernière ligne concerne des valeurs de i allant de 1 à $k-1$ inclus. Il est évident que $\Psi\psi = 1^f : \Psi\psi(\bar{a}_i) = \Psi(a_i) = \bar{a}_i$, $\Psi\psi(\bar{b}_j) = \Psi(b_j) = \bar{b}_j$ et $\Psi\psi(\bar{c}) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i\right) + \Psi(c_k) = \bar{c}$. Pour montrer que $\psi\Psi \sim 1^{C(\varphi)}$, nous devons introduire une application linéaire $\vartheta : C(\varphi)[-1] \rightarrow C(\varphi)$ jouant le rôle d'une homotopie entre $\psi\Psi$ et $1^{C(\varphi)}$. À ce titre, on définit $\vartheta(a_i) = \vartheta(b_j) = \vartheta(c_i) = 0$ et $\vartheta(d_j) = c_j$. On vérifie alors que $\psi\Psi - 1^{C(\varphi)} = d^{C(\varphi)}\vartheta + \vartheta d^{C(\varphi)}$.

$$\psi\Psi(a_i) - 1^{C(\varphi)}(a_i) = a_i - a_i = 0 = d^{C(\varphi)}\vartheta(a_i) + \vartheta\left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij}\bar{b}_j\right) = d^{C(\varphi)}\vartheta(a_i) + \vartheta d^{C(\varphi)}(a_i)$$

$$\psi\Psi(b_j) - 1^{C(\varphi)}(b_j) = b_j - b_j = 0 = d^{C(\varphi)}\vartheta(b_j) + \vartheta d^{C(\varphi)}(b_j)$$

$$\psi\Psi(c_k) - 1^{C(\varphi)}(c_k) = \left(\sum_{i=1}^k c_i\right) - c_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i = d^{C(\varphi)}\vartheta(c_k) + \vartheta\left(\sum_{i=1}^{k-1} d_i\right) = d^{C(\varphi)}\vartheta(c_k) + \vartheta d^{C(\varphi)}(c_k)$$

$$\psi\Psi(c_i) - 1^{C(\varphi)}(c_i) = -c_i = d^{C(\varphi)}\vartheta(c_i) + \vartheta(-d_i) = d^{C(\varphi)}\vartheta(c_i) + \vartheta d^{C(\varphi)}(c_i)$$

$$\psi\Psi(d_j) - 1^{C(\varphi)}(d_j) = -d_j = d^{C(\varphi)}\vartheta(d_j) + \vartheta d^{C(\varphi)}(d_j) = d^{C(\varphi)}\vartheta(d_j) + \vartheta d^{C(\varphi)}(d_j)$$

Bref, $\psi\Psi - 1^{C(\varphi)} = d^{C(\varphi)}\vartheta + \vartheta d^{C(\varphi)}$ d'où on déduit que f admet une décomposition en cône itéré sur des fonctions de Morse parfaites. En particulier, la catégorie hTdm engendrée sur $\{f, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_{k-1}\}$ est égale à celle engendrée sur $\{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_{k-1}\}$ qui est elle-même égale à celle engendrée sur une unique fonction de Morse parfaite, car toutes les f_i et g_j sont obtenues par translation et dilatation d'une fonction de Morse parfaite quelconque (dans hTdm).

De plus, puisque les points critiques des f_i et des g_j sont arbitrairement près de ceux de f , cette décomposition est géométriquement très bonne. Puisque les valeurs critiques des f_i et g_j coïncident avec celles de f , à l'exception des $g_j(d_j)$, ψ et Ψ permettent de définir des isomorphismes entre f et $C(\varphi)$ dans la catégorie hTdmf engendrée sur $\{f, f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_{k-1}\}$ dont les actions sont nulles. Bref, on a $f \sim C(\varphi)$ dans hTdmf et $d(f, C(\varphi)) = 0$.

Bref, ce second résultat, qui est une généralisation de celui présenté à la précédente section, vient renforcer l'idée que les fonctions de Morse sur la sphère S^2 admettent une décomposition en cône itéré de fonctions de Morse parfaites. Il reste à voir si de tels exemples existent également pour d'autres fonctions de Morse sur S^2 , d'autres surfaces fermées orientées, nommément les tores à n trous Σ_n , ou même d'autres variétés compactes. Plus largement, il reste à montrer qu'il existe une méthode pour décomposer une fonction de Morse en un cône itéré de fonctions de Morse parfaites et, le cas avenant, montrer que cette décomposition est d'action nulle.

Chapitre 4

Déformations de fonctions de Morse

Ce chapitre traite de la contrainte de généricité globale à laquelle sont soumises les catégories hTdM et hTdMf introduites au chapitre 2. Nous présentons d'abord une méthode permettant de définir des catégories hTdM et hTdMf qui ne sont pas soumises à cette contrainte. Nous montrons ensuite que cette méthode n'est pas valide pour les surfaces fermées orientées, mis à part la sphère pour laquelle le résultat n'est ni affirmé, ni infirmé. Finalement, nous poussons ces résultats un peu plus loin et en déduisons certaines limites des marquages adéquats comme morphismes entre tuples de Morse.

4.1. Méthode des déformations

Lorsque les catégories hTdM et hTdMf ont été définies au chapitre 2, une condition de généricité globale a dû être appliquée afin que la composition de morphisme soit bien définie. L'avantage évident de cette manipulation est que la structure obtenue est bien une catégorie, triangulée pour hTdM et presque triangulée pour hTdMf ¹. Le désavantage chronique est que l'ensemble d'objets est considérablement réduit. Nous avons contourné ce problème en parlant d'une catégorie hTdM engendrée par un ensemble fini de tuples de Morse satisfaisant la condition de généricité globale. Après tout, lorsque nous désirons décomposer une fonction de Morse en un cône itéré, nous n'avons pas besoin d'avoir accès à tous les tuples de Morse imaginables.

Nous désirerions tout de même pouvoir parler de LA catégorie hTdM associée à une variété compacte \mathcal{M} munie d'une métrique α . Nous devons donc introduire une méthode permettant de définir des marquages entre tuples de Morse en position non générique. C'est ce que nous avons rapidement nommée, sans la présenter, la méthode des déformations. Voici en quoi elle consiste. Soient f et g des tuples de Morse en position non générique. Puisque la transversalité est une notion générique pour les fonctions de Morse (et donc pour les tuples

¹On rappelle que si hTdMf admettait un biproduit pour toute paire d'objet, elle serait triangulée. En particulier, hTdMf satisfait les axiomes $TR1$ à $TR4$.

de Morse), une légère déformation de g et des X_{g_i} permet d'obtenir un tuple de Morse \tilde{g} en position générique avec f . Nous sommes alors en mesure de calculer des marquages $f \rightarrow \tilde{g}$. Si \tilde{g} et les \tilde{X}_{g_i} sont C^∞ -près de g et des X_{g_i} , alors les complexes différentiels coïncident et nous sommes en mesure d'induire un « marquage » $f \rightarrow g$. En particulier, si un marquage $f \rightarrow \tilde{g}$ est adéquat, alors le marquage induit $f \rightarrow g$ est lui aussi adéquat.

Évidemment les marquages induits $f \rightarrow g$ dépendent des déformations \tilde{g} et \tilde{X}_{g_i} choisies. Afin que tout soit bien défini et que nous puissions construire une catégorie avec ces marquages induits, il suffit que pour deux déformations différentes $(\tilde{g}_0, \tilde{X}_{g_1}^0, \dots, \tilde{X}_{g_k}^0)$ et $(\tilde{g}_1, \tilde{X}_{g_1}^1, \dots, \tilde{X}_{g_k}^1)$ C^∞ -près de $(g, X_{g_1}, \dots, X_{g_k})$, les marquages induits de \tilde{g}_0 puissent être réalisés, à homotopie près, comme des marquages induits de \tilde{g}_1 . Nous pourrions alors définir la catégorie hTDM d'une paire (\mathcal{M}, α) pour laquelle les objets sont tous les tuples de Morse et les morphismes sont les marquages issus de la méthode des déformations. Soulignons au passage que si f et g sont en position générique, alors la déformation triviale laissant $(g, X_{g_1}, \dots, X_{g_k})$ inchangé est admissible. En particulier, toute catégorie hTDM satisfaisant la condition de généricité globale telle qu'introduite au chapitre 2 serait une sous-catégorie pleine de LA catégorie hTDM. De manière similaire, il est possible de lever la condition de généricité globale pour pouvoir parler de LA catégorie hTDMf associée à (\mathcal{M}, α) .

4.2. Le cas des surfaces Σ_n avec $n \neq 0$

Ici, nous montrons que les marquages ne permettent pas d'obtenir tous les morphismes de complexes de chaînes, du moins pour les tores à n trous (avec n non nul). Le contre-exemple présenté permet également de montrer que la méthode des déformations ne peut pas être utilisée pour ces surfaces. Plus précisément, nous présentons une situation pathologique pour le tore standard et montrons que cette situation est possible pour les tores à n trous.

Ainsi, considérons $\mathcal{M} = \Sigma_1 = S^1 \times S^1$ un tore muni de la métrique standard. En particulier, \mathcal{M} admet des paires Morse-Smale (f, X_f) pour lesquelles f est une fonction de Morse parfaite. Puisque f possède la quantité minimale de points critiques, la différentielle issue de X_f doit être nulle. La figure 4.1 présente un exemple d'un pseudo-gradient satisfaisant cette propriété.

Pour montrer qu'il existe des morphismes de complexes de chaînes qui ne peuvent être réalisés comme des marquages adéquats, nous utiliserons le fait que la différentielle d'une paire Morse-Smale parfaite est nulle. À ce titre, soit (f, X_f) et (g, X_g) de telles paires Morse-Smale. Notons a_1, b_1, c_1, d_1 les points critiques de f et a_2, b_2, c_2, d_2 ceux de g . Ici, les a_i sont les maximums, les b_i et c_i sont les points de selle et les d_i sont les minimums. Supposons que f et g sont en position générique et que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$. La figure 4.2 illustre cette situation.

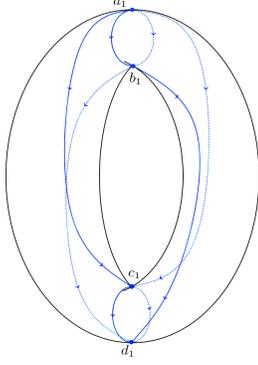


Fig. 4.1. La fonction de Morse parfaite f et les lignes de flot de X_f reliant ses points critiques. Les lignes pleines sont sur la face visible du tore et les lignes pointillées sur la face arrière.

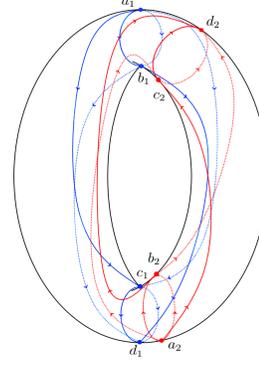


Fig. 4.2. Les fonctions de Morse parfaites f (bleu) et g (rouge) ainsi que les lignes de flot de leur pseudo-gradient. On remarque que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$.

Il est clair que l'application linéaire $\varphi : c_1 \mapsto b_2$ valant 0 pour les autres points critiques de f est un morphisme de complexes de chaînes. Puisque (f, X_f) et (g, X_g) sont parfaites, leurs différentielles sont nulles et leurs complexes d'homologie coïncident avec leurs complexes de Morse. Il s'en suit qu'un morphisme $\psi : f \rightarrow g$ est homotope à φ si et seulement si $\psi - \varphi = d\vartheta + \vartheta d = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\psi = \varphi$. Or, l'absence de lignes de flot brisées reliant c_1 à b_2 , due à $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$, permet de conclure que φ ne peut être réalisé comme un marquage adéquat entre f et g .

Non seulement avons nous montré que les marquages ne peuvent réaliser n'importe quel morphisme de complexes, du moins sur le tore Σ_1 , mais nous pouvons utiliser cet exemple pour montrer que la méthode des déformations ne permet pas de définir adéquatement des marquages entre des tuples de Morse en position non générique. Par exemple, si l'une des lignes de flot de X_g reliant a_2 à b_2 croisait en un point une des lignes de flot de X_f reliant c_1 à d_1 , alors ces trajectoires seraient tangentes l'une à l'autre en ce point d'intersection. Il existe une faible déformation de X_g pour laquelle $W^u(c_1) \cap W^s(b_2)$ est vide et une autre pour laquelle $W^u(c_1) \cap W^s(b_2)$ contient deux points d'intersection (voir la figure 4.3). Pour cette deuxième déformation, le précédent morphisme $\varphi : c_1 \rightarrow b_2$ peut être réalisé comme un marquage adéquat : il suffit de marquer un des deux points d'intersection de $W^u(c_1) \cap W^s(b_2)$. Or nous avons montré que pour la première déformation, ce morphisme ne peut pas être induit d'un marquage. Nous réalisons rapidement que les marquages induits entre f et g dépendent de la déformation choisie. Ainsi, il est impossible de définir une catégorie hTDM sur Σ_1 sans que celle-ci soit soumise à la condition de généricité globale par la méthode des déformations telle que proposée dans la précédente section.

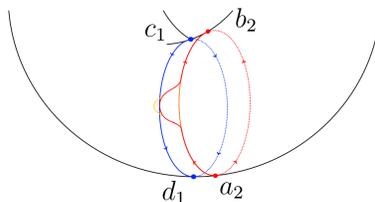


Fig. 4.3. Détail de $W^u(c_1)$ et $W^s(b_2)$ ainsi que des déformations de X_g . En rouge, la paire (g, X_g) en position non générique avec (f, X_f) . En jaune, une première déformation de X_g telle que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) \neq \emptyset$. En orange, une seconde déformation de X_g telle que $W^u(c_1) \cap W^s(b_2) = \emptyset$.

Le résultat est similaire pour les tores à n trous (avec n non nul). En effet, il existe des fonctions de Morse parfaites similaires à celles précédemment présentées. Le figure 4.4 en présente un exemple.

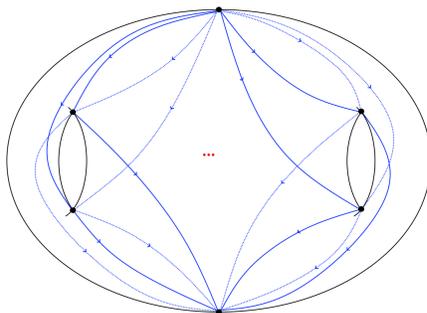


Fig. 4.4. Une fonction de Morse parfaite sur Σ_n et les lignes de flot reliant ses points critiques. Les trois petits points rouges signifient que le patron se répète pour chacun des $n - 2$ autres trous de Σ_n .

Il est clair qu'une situation analogue à celle présentée pour le tore Σ_1 aux figures 4.2 et 4.3 peut être obtenue en comparant deux fonctions de Morse parfaites sur Σ_n . Nous en déduisons que la méthode des déformations ne peut être appliquée pour les tores à n trous. De même, les morphismes de complexes de chaînes sur Σ_n ne peuvent pas toujours être réalisés en tant que marquages adéquats.

4.3. Discussion

La précédente section a permis d'établir deux faits. Premièrement, sur toute surface fermée orientée, excepté la sphère, il existe des tuples de Morse f et g en position générique pour lesquels il existe un morphisme de complexes $f \rightarrow g$ qui ne peut être réalisé géométriquement, c'est-à-dire qui n'est homotope à aucun marquage adéquat. Deuxièmement, pour ces mêmes surfaces, la méthode des déformations est inapplicable, en ce sens qu'il existe

toujours des tuples de Morse f et g en position non générique ainsi que \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 , des déformations \mathcal{C}^∞ -près de g et de ses pseudo-gradients X_{g_i} , pour lesquels il existe un marquage $f \rightarrow \tilde{g}_0$ qui n'est homotope à aucun marquage $f \rightarrow \tilde{g}_1$. En d'autres termes, définir que les marquages $f \rightarrow g$ sont ceux induits d'une faible déformation de g ne permet pas d'obtenir un ensemble bien défini de morphismes, car ceux-ci dépendent du choix de la déformation.

Ces deux conclusions nous permettent tout de même de réaliser que la condition de généralité globale est une condition optimale. En effet, les morphismes qui sont admis dans les catégories hTdm et hTdmf dépendent fortement de la géométrie des fonctions de Morse et il semble irréaliste de pouvoir bien définir des marquages entre des objets en position non générique. Ainsi, nous sommes en mesure de reconnaître que la condition de généralité globale est un mal nécessaire.

D'un certain point de vue, ceci constitue une limite du modèle des marquages adéquats. Nous réalisons que, tout dépendant de la situation, ceux-ci ne sont pas suffisamment nombreux (il existe des morphismes algébriques qui n'ont pas de réalisation géométrique) ou sont trop nombreux (certains morphismes géométriques dépendent d'une déformation des tuples de Morse). La condition pour qu'un marquage soit adéquat est une condition algébrique (il suffit que l'application linéaire induite soit un morphisme de complexes de chaînes) qui ne tient absolument pas compte de la dynamique des tuples de Morse. Il appert que les contraintes géométriques sont parfois plus fortes que cette contrainte algébrique, en ce sens que si $W^u(x) \cap W^s(y) = \emptyset$, pour x et y des points critiques de même indice, alors il est plus ardu d'obtenir un marquage adéquat envoyant x sur y (à homotopie près), qui autrement pourrait être obtenu. Nous citons à titre d'exemple le cas de la section 4.2, où la disposition des fonctions de Morse et de leurs pseudo-gradients ne permettait pas de construire un certain morphisme, et ce même à homotopie près, car les lignes de flot des pseudo-gradients ne s'intersectent pas.

Mais du point de vue du précédent chapitre, ces anomalies sont sans importance. En effet, la théorie des marquages adéquats a été introduite afin de pouvoir comparer différents systèmes de fonctions de Morse. Cette comparaison s'effectue en décomposant une fonction de Morse en un tuple de Morse construit comme étant un cône itéré de fonctions plus « simples », généralement des fonctions de Morse parfaites. Pour cet objectif, considérer des fonctions de Morse en position non générique serait contre-productif. En effet, nous serions contraints de choisir des déformations de ces fonctions, alors que nous aurions pu considérer ces déformations dès le début. De même, étudier une décomposition en cône itéré pour laquelle des morphismes essentiels ne seraient pas géométriquement réalisables est également contre-productif. Bref, les limites de la théorie des marquages adéquats sont embêtantes si nous désirons obtenir une seule catégorie par variété, ou si nous souhaitons établir une correspondance entre les morphismes de nature algébrique et ceux de nature

géométrique, mais à toute fin pratique, ces questions sont sans conséquences pour celui qui désire étudier les décompositions en cône itéré.

Sans conséquences ou presque. Il est possible d'argumenter que l'impossibilité de réaliser géométriquement certains morphismes algébriques est un indice que les tuples de Morse en jeu sont suffisamment différents. En effet, cette impossibilité met en lumière une certaine obstruction à la réalisation géométrique de morphismes. Les exemples qui ont été présentés dans les précédentes sections de ce chapitre permettent de comprendre que la proximité géométrique entre les points critiques des deux tuples de Morse est cruciale. Par proximité géométrique nous entendons que des points critiques de même indice étalonné admettent des intersections non vide entre leurs sous-variétés stables et instables. Par exemple, pour le cas des maximums et des minimums, la proximité géométrique implique qu'un des points critiques appartient à la sous-variété (in)stable de l'autre point critique. Si ce n'est pas le cas, alors il n'y a aucun moyen de relier par des lignes de flot brisées ces points critiques; leur éloignement est une obstruction à l'obtention de certains morphismes. Un raisonnement analogue est également valide pour les cas intermédiaires, c'est-à-dire les points critiques d'indice étalonné non maximal et non minimal, à la différence près que ces points critiques n'ont pas besoin de se trouver dans les sous-variétés (in)stables des uns et des autres, mais simplement que des lignes de flot brisées les relient. À l'autre extrême, si deux tuples de Morse admettent pour tous leurs points critiques de même indice étalonné des intersections non vides entre leurs sous-variétés stables et instables, alors il est évident que n'importe quel morphisme algébrique peut être réalisé géométriquement. Cette absence d'obstruction témoignerait de la proximité géométrique des différents points critiques, proximité qu'on pourrait interpréter comme étant de nature dynamique, car les lignes de flot des pseudo-gradients s'intersectent « beaucoup ». Bref, la réalisation géométrique de morphismes algébriques sous-entend que les tuples de Morse considérés ont des dynamiques similaires.

Références bibliographiques

- [1] M. AUDIN et M. DAMIAN : *Morse Theory and Floer Homology*. Universitext. Springer London, 2013.
- [2] Ulrich BAUER et Michael LESNICK : Induced matchings of barcodes and the algebraic stability of persistence. *In Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry*, SOCG'14, page 355–364, New York, NY, USA, 2014. Association for Computing Machinery.
- [3] Raoul BOTT : Morse theory indomitable. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 68:99–114, 1988.
- [4] H. CARTAN et S. EILENBERG : *Homological Algebra*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1999.
- [5] J.W. MILNOR : *Morse Theory*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1963.
- [6] Leonid POLTEROVICH, Egor SHELUKHIN et Vukašin STOJISAVLJEVIĆ : Persistence modules with operators in morse and floer theory. 2017.
- [7] Charles A. WEIBEL : *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.