Université de Montréal

INTÉGRABILITÉ ET SUPERINTÉGRABILITÉ DE DEUXIÈME ORDRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN TRIDIMENSIONEL

par

Hassan Abdul-Reda

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Septembre 2019

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

INTÉGRABILITÉ ET SUPERINTÉGRABILITÉ DE DEUXIÈME ORDRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN TRIDIMENSIONEL

présenté par

Hassan Abdul-Reda

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

William Witczak-Krempa
(président-rapporteur)

Pavel Winternitz
(directeur de recherche)

Manu Paranjape
(membre du jury)

Mémoire accepté le :
Mardi 26 Novembre 2019

Sommaire

L'article *A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symetries, Part I* publié il y a à peu près 50 ans a commencé une classification de ce qui est maintenant appelé les systèmes superintégrables. Il était dévoué aux systèmes dans l'espace Euclidien ayant plus d'intégrales de mouvement que de degrés de liberté. Les intégrales étaient toutes supposées de second ordre en quantité de mouvement. Dans ce mémoire, sont présentés de nouveaux résultats sur la superintégrabilité de second ordre qui sont pertinents à l'étude de la superintégrabilité d'ordre supérieur et de la superintégrabilité de systèmes ayant des potentiels vecteurs ou des particules avec spin.
Mots-clés : Hamiltonien, Intégrabilité, Classification, Quantité conservée, Intégrale de mouvement, Potentiel scalaire, Classique, Quantique, 3D, Espace euclidien, Séparation de variables, Crochet de Poisson, Symétrie.

Summary

The article *A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symetries, Part I* published about 50 years ago started the classification of what is now called superintegrable systems. It was devoted to systems in Euclidean space with more integrals of motion than degrees of freedom. The integrals were all assumed to be second order polynomials in the particle momentum. Here we present some further results on second order superintegrability that are relevant for studies of higher order superintegrability and for superintegrability for systems with vector potentials or for particles with spin.
Keywords : Hamiltonian, Integrability, Classification, Conserved quantity, Integrals of motion, Scalar potential, Classical, Quantum, 3D, Euclidean space, Separation of variables, Poisson bracket, Symmetry.

Table des matières

Remerciements

J'aimerais premièrement remercier les membres de ma famille biologique :

Mehdi, mon petit frère qui m'a appris à être responsable d'autrui et de moi même,
Kassem, mon grand frère qui m'a appris à aimer la science,
Ma mère, Charifa, qui m'a appris la géométrie Euclidienne et Riemannienne dès mon plus jeune âge. Merci d'avoir sacrifié ta carrière et ta jeunesse pour faire de moi et de mes frères les hommes qu'on est aujourd'hui.
Mon père, Salim, pour avoir été mon exemple dans la vie. J'ai cette année l'âge tu avais quand je suis né et je réalise que j'ai encore beaucoup à apprendre de la vie.
Chloé, la soeur que j'ai choisi d'avoir. Merci pour ton support et ta présence dans ma vie.

Ensuite ma famille académique :

Pavel Winternitz, mon père académique, mon enseignant, mon superviseur, mon ami, et mon exemple dans ma carrière.
Kamel Belbahri, qui m'a poussé dans la direction des sciences physiques et mathématiques dès ma première session en année préparatoire.
Et Julie Hlavacek-Larrondo, qui m'a appris bien plus que de la science et qui a réussi à me pousser à dépasser mes limites.

Finalement j'aimerais remercier les étudiants qui m'ont eu comme démonstrateur, en particulier Marc-Antoine Fortin, car parfois l'audience est celle qui éduque le démonstrateur malgré que ce soit son travail d'éduquer les étudiants.

Introduction

Ce mémoire expose les systèmes intégrables quadratiques dans l'espace Euclidien tridimensionel. Dans le premier chapitre les notions d'intégrabilité et de superintégrabilité quadratiques sont introduites dans le cas d'une particule soumise à un potentiel scalaire. Une méthode systématique de classification de ces systèmes est revue, et est par la suite appliquée au cas présent. Cette méthode consiste à supposer l'existance de deux intégrales de mouvement de forme quadratique dans la quantité de mouvement qui commutent entre elles et avec l'Hamiltonien du système associé à un potentiel scalaire arbitraire. Le système d'équations, appelé équations déterminantes, obtenu de cette contrainte permet alors de spécifier les formes exactes des intégrales du mouvement, ainsi que celle du potentiel tridimensionel. La classification de ces systèmes revient alors à une résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Un article dévoué à la superintégrabilité en mécanique quantique en trois dimensions à été publié en 1967 et, avec deux articles le précédant, a débuté une classification de systèmes superintégrables en mécaniques classique et quantique. Cet article était supposé être écrit en deux parties, cependant, pour des raisons de politique de la Guerre Froide de 1968, la deuxième partie n'a jamais été écrite. L'objectif du présent mémoire est de compléter son écriture. La première partie de l'article en question notait l'existence de onze classes de paires d'intégrales de mouvement, ainsi que le potentiel scalaire y correspondant. Chacune de ces classes est associée à un système de coordonnées qui permet la séparation de l'équation de Schroedinger.

Ce mémoire a donné naissance à un article scientifique destiné à la publication dans un journal de physique mathématique, et qui y est inclu. Pour cette raison, une partie de sa rédaction (le chapitre 2, qui contient entre-autres, des calculs et des méthodes mathématiques) a été faite en anglais.

Chapitre 1

Systèmes intégrables et superintégrables en mécaniques classique et quantique

1.1. Systèmes intégrables et superintégrables

1.1.1. Mise en contexte

Une méthode commune et efficace pour comprendre les systèmes physiques est d'en concevoir des modèles mathématiques, et d'utiliser ces modèles afin de faire des prédictions qui seront par la suite comparées à des observations. Cependant, les équations différentielles aux dérivées partielles et ordinaires provenant de ces modèles peuvent rapidement devenir complexes, et ne peuvent dans la plupart des cas pas être résolues analytiquement, mais uniquement de manière numérique. En effet, il existe très peu de systèmes pouvant être résolus de manière explicite et donner des solutions exactes pouvant prédire le comportement d'un système en tout temps. Ceux-ci sont appelés des systèmes Hamiltoniens classiques ou quantiques intégrables, et c'est l'existence de symétries et de quantités conservées, les intégrales du mouvement, dans ces systèmes qui en font un sujet intéressant à étudier. Contrairement aux symétries géométriques, qui sont connectées à l'invariance spatio-temporelle, les symétries d'intérêt dans cette étude sont les groupes d'invariance dynamiques concernant certains types d'interactions. Ils impliquent l'invariance de certaines lois physiques (i.e. des Lagrangiens, des éléments matriciels, etc.) par rapport aux transformations d'un groupe correspondant.

Le formalisme Hamiltonien décrit la dynamique d'un système physique de n dimensions en mettant en relation la dérivée temporelle de la position x_j ainsi que celle de la quantité de mouvement p_j qui s'y conjugue, à une seule fonction, l'Hamiltonien $\mathcal{H}$. Dans sa forme la plus simple, l'Hamiltonien peut être considéré comme étant l'énergie totale du système, $\mathcal{H} = T + V$, où T et V sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. La dynamique d'un système est alors décrite par les équations de Hamilton, à savoir

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}, \quad j = 1,...,n. \tag{1.1.1}$$

Les solutions de ces équations donnent les trajectoires du système. Une propriété X du système est par définition une intégrale du mouvement si elle Poisson-commute avec l'Hamiltonien. Autrement dit, elle doit satisfaire à la relation $\{\mathcal{H},X\} = 0$, où

$$\{A,B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial x_j} \tag{1.1.2}$$

est le crochet de Poisson. En effet, en utilisant les équations de Hamilton, dans les crochets de Poisson, on a

$$\{\mathcal{H},X\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j}\frac{\partial X}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\frac{\partial X}{\partial x_j} = -\frac{dX}{dt} = 0. \tag{1.1.3}$$

En termes du crochet de Poisson, les équations de Hamilton peuvent être réécrites sous la forme

$$\frac{dx_j}{dt} = \{\mathcal{H},x_j\}, \quad \frac{dp_j}{dt} = \{\mathcal{H},p_j\}, \quad j = 1,...,n. \tag{1.1.4}$$

1.1.2. Intégrabilité et superintégrabilité

Un système Hamiltonien à n dimensions est dit intégrable s'il existe n fonctions $X_i = X_i(\vec{r},\vec{p})$, (où $X_1 = \mathcal{H}$) définies sur au moins un ouvert fini de l'espace des phases, telles que

$$\{\mathcal{H},X_i\} = 0, \tag{1.1.5}$$

$$\{X_i,X_j\} = 0, \tag{1.1.6}$$

$$rang(\frac{\partial(X_1,...,X_n)}{\partial(x_1,...,x_n,p_1,...,p_n)}) = n. \tag{1.1.7}$$

Un système est alors intégrable s'il possède autant d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté. S'il possède plus d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté, on parle de système superintégrable. Un système superintégrable est dit minimalement superintégrable s'il possède $n + 1$ intégrales du mouvement, incluant le Hamiltonien, et maximalement superintégrable s'il en possède $2n - 1$ [**1**].

1.2. Particule soumise à un potentiel scalaire tridimensionel

Un article dévoué à la superintégrabilité en mécanique quantique en trois dimensions à été publié en 1967 [**2**]. Cet article, ainsi que deux autres le précédant [**3**] [**4**], a débuté une classification systématique de systèmes superintégrables en mécaniques classique et quantique (voir par exemple [**1**] pour une revue, et [**5**], [**6**] et [**7**]). Les problèmes addressés dans [**2**] incluaient les suivants. On considère un Hamiltonien non-relativiste

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{r}) \tag{1.2.1}$$

où en mécanique quantique, on a

$$p_j = -i\hbar\frac{d}{dx_j}, L_j = \epsilon_{jkl}x_k p_l \tag{1.2.2}$$

et en mécanique classique p_i est la composante de la quantité de mouvement conjuguée à la coordonnée x_i. Le moment cinétique $\vec{L}$ est introduit pour usage ultérieur. Les questions suivantes sont alors considérées :

1. Quelles sont les conditions sur le potentiel $V(\vec{r})$ qui assurent l'existence de deux intégrales de mouvement en involution de la forme

$$X^a = \Phi^a_{ik}(\vec{r})p_i p_k + f^a_i(\vec{r})p_i + g^a(\vec{r}), a = 1{,}2 \tag{1.2.3}$$

et quelle est la forme spécifique de ces intégrales ? Un tel système Hamiltonien est de deuxième ordre intégrable à la fois en mécanique classique et en mécanique quantique. Une sommation selon les indices répétés est sous-entendue dans cette équation et dans les équations subséquentes.

2. Quelles conditions supplémentaires devraient être imposées sur le potentiel afin que le système soit de deuxième ordre superintégrable, ie. qu'une ou deux intégrales de mouvement supplémentaires de la forme (1.2.3) puissent exister ?

En termes mathématiques, ces questions sont traduites par les conditions

$$[H, X_a] = 0, \tag{1.2.4}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \tag{1.2.5}$$

$$[H, Y_a] = 0, \tag{1.2.6}$$

où $a = 1{,}2$ et les crochets sont des commutateurs de Lie, $[A,B] = AB - BA$. En mécanique classique, ils sont des crochets de Poisson. On remarque que Y_1 et Y_2 ne commutent pas nécessairement, et de même pour X_a et Y_b. Les résultats obtenus étaient les suivants :

1. Toutes les intégrales X_a et Y_a doivent avoir la forme

$$X = a_{rs}L_rL_s + b_{rs}(p_rL_s + L_sp_r) + c_{rs}p_rp_s + g(\vec{r}) \tag{1.2.7}$$

où a, b et c sont des matrices $3 * 3$ à termes constants, telles que $a = a^T \in \mathbb{R}^{3*3}$, $b \in \mathbb{R}^{3*3}$, et $c = c^T \in \mathbb{R}^{3*3}$. Autrement dit, le terme principal se trouve dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre $e(3)$ de Lie Euclidienne. De plus, les termes pairs et impairs dans X commutent séparément, et alors l'expression de X ne contient pas de termes de premier ordre en p_i. Ces deux caractéristiques ont par la suite été démontrées universelles, ie. valides pour des intégrales d'un ordre arbitraire N et dans des espaces beaucoup plus généraux que E_3 [**8**]. Pour des développements plus approfondis de la théorie de superintégrabilité, voir [**9**], [**10**], [**11**], et [**12**].

2. Les équations (1.2.3) à (1.2.6) impliquent que le potentiel doive satisfaire à la condition de compatibilité

$$R_{ir}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_r} = 0 \tag{1.2.8}$$

où R est une matrice définie par

$$R_{ir} = \Phi^1_{ik}\Phi^2_{kr} - \Phi^2_{ik}\Phi^1_{kr} \tag{1.2.9}$$

Comme R est antisymétrique, son rang peut être soit $r(R) = 0$ ou $r(R) = 2$. Dans la référence [**2**], le seul cas considéré est celui où $r(R) = 0$, i.e. $R \equiv 0$ (tous les éléments de R sont nuls).

3. L'intégrabilité de deuxième ordre avec $R \equiv 0$ est liée à la séparation des variables de l'équation de Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi, \Psi(x,y,z) = \Psi_1(\zeta)\Psi_2(\eta)\Psi_3(\xi) \tag{1.2.10}$$

où ζ, η, et ξ sont les systèmes de coordonnées pour lesquelles l'équation de Helmholtz, (en posant $V(\vec{r}) = 0$ dans le Hamiltonien de l'équation de Schrödinger) permet la séparation des variables dans $E(3)$. De manière plus spécifique, des triplets H, X_1, et X_2, d'opérateurs commutatifs étaient classifiés selon des orbites sous l'action du groupe Euclidien $E(3)$. Chacune de ces orbites correspond précisément à l'un des onze potentiels séparables de $E(3)$ trouvés plus tôt par Eisenhart [**13**].

4. La superintégrabilité de deuxième ordre, quant à elle, était liée à la multiséparabilité, ie. avec des potentiels permettant la séparation des variables dans au moins deux systèmes de coordonnées. Spécifiquement, chaque système superintégrable permettait la séparation des variables en coordonnées sphériques, en plus d'au moins un autre système de coordonnées.

L'article [**2**] était supposé être le premier de deux articles ; cependant, la deuxième partie n'a jamais été écrite suite à des problèmes politiques de la Guerre Froide de 1968. Cette partie devait considérer le cas où le rang de la matrice R est $r(R) = 2$, et trouver tous les systèmes superintégrables de l'espace $E(3)$, et non seulement ceux se séparant en coordonnées sphériques. Cette dernière tâche fut complétée par Evans [**14**] (en mécanique classique). Les résultats sont essentiellement les mêmes dans le cas quantique. De manière plus spécifique, les potentiels intégrables et superintégrables en mécaniques classique et quantique sont exactement les mêmes. Les intégrales sont les mêmes à une symétrisation près dans le cas quantique.

Le but de ce mémoire est alors de compléter les étapes manquantes et de cloturer l'analyse de l'intégrabilité quadratique dans $E(3)$. Autrement dit, les problèmes 1,2,3 et 4 seront résolus dans le cas manquant, c'est à dire celui où la matrice R est de rang $r(R) = 2$. Les étapes du travail sont comme suit. Premièrement, seulement les parties principales (ie. pour lesquelles on pose $g_1 = g_2 = 0$) des intégrales de mouvement sont considérées. Les commutateurs de Lie sont calculés pour chacune des conditions (1.2.4)-(1.2.6), et donnent des polynômes de troisième ordre en L_i et p_i. En égalant ces polynômes à zero, des systèmes d'équations mettant en relation les coefficients a_{ij}, b_{ij}, et c_{ij} sont obtenus, et leur résolution, ainsi que l'utilisation de symétries de rotation et de translation, permet de spécifier davantage les intégrales de mouvement. Afin de spécifier le potentiel et les fonctions g_1 et g_2, l'équation aux dérivées partielles (1.2.8) est résolue. Cette résolution impose aussi des contraintes supplémentaires sur les constantes a_{ij}, b_{ij} et c_{ij}, et donne la forme finale des intégrales de mouvement.

La section suivante est l'article résultant du travail fait dans le cadre de cette maîtrise et donne la plupart des détails de calcul pour les étapes mentionnées dans le paragraphe précédant.

Chapitre 2

Second order integrability and superintegrability in three-dimensional Euclidean space revisited

Ce chapitre est une version plus détaillée de l'article rédigé par l'auteur de ce mémoire ainsi que son superviseur, Pavel Winternitz. La première section introduit le sujet et résume ce qui a été dit dans le premier chapitre.

2.1. Introduction

An article devoted to superintegrability in quantum mechanics in the three-dimensional Euclidean space E_3 was published in 1967 [**2**], (though the term superintegrability had not yet been coined). This article, together with two earlier ones on the same problem in E_2 [**3**], [**4**] had a considerable impact (316, 272, 172 citations, respectively, according to Web of Science as of August 2019) and started a systematic search for superintegrable systems in clasical and quantum mechanics (see e.g. [**1**] for a review). The problems addressed in [**2**] included the following. Consider a nonrelativistic Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{r}) \tag{2.1.1}$$

where in quantum mechanics we have

$$p_j = -i\hbar\frac{d}{dx_j}, L_j = \epsilon_{jkl}x_k p_l \tag{2.1.2}$$

and in classical mechanics p_i are the components of the linar momentum canonically conjugate to the coordinate x_i. The angular momentum $\vec{L}$ is introduced for use below.

1. What are the conditions n the potential $V(\vec{r})$ for two integrals of motion in involution of the form

$$X^a = \Phi^a_{ik}(\vec{r})p_i p_k + f^a_i(\vec{r})p_i + g^a(\vec{r}), a = 1,2 \tag{2.1.3}$$

to exist and what is the form of these integrals? Such an Hamiltonian system is "second order" integrable, both in classical and quantum mechanics. Summation over repeated indices is to be understood in this equation and below. The real smooth functions Φ^a_{ik}, f_i, and g are arbitrary and to be determined from the commutativity conditions (2.1.4), (2.1.5) below.

2. What further conditions must be imposed on the potential to make the system "second order superintegrable", ie. for one or two more independant integrals of the form (2.1.3) to exist?

Thus, in quantum mechanics we must impose the conditions

$$[H, X_a] = 0, a = 1,2 \tag{2.1.4}$$

$$[X_1, X_2] = 0 \tag{2.1.5}$$

$$[H, Y_a] = 0 \tag{2.1.6}$$

where the brackets are Lie commutators. In classical mechanics they are Poisson brackets. Notice that Y_1 and Y_2 do ot necessarily commute, neither do X_a and Y_b. The results obtained were the following

1. All the integrals X_a and Y_a must have the form

$$X = a_{rs}L_r L_s + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs}p_r p_s + g(\vec{r}), a = a^T \in \mathbb{R} \tag{2.1.7}$$

That is, the leading term lies in the enveloping algebra of the Euclidean Lie algebra e(3).

Further, even and odd terms in X commute separately, so (2.1.7) contains no first order terms in p_i. These two features were later shown to be universal, i.e. valid for integrals of arbitrary order N and in much more general spaces than E_3 [**8**]. For further development of superintegrability theory, see [**9**], [**10**], [**11**], and [**12**].

2. Eq. (2.1.5) implies that the potential $V(\vec{r})$ must satisfy the compatibility condition

$$R_{ir}\frac{\partial V}{\partial x_r} = 0 \tag{2.1.8}$$

where R is a matrix defined as

$$R_{ir} = \Phi^1_{ik}\Phi^2_{kr} - \Phi^2_{ik}\Phi^1_{kr} \tag{2.1.9}$$

Since R is antisymmetric, its rank can be $r(R) = 0$ or $r(R) = 2$. In ref. [**2**] it was assumed that $r(R) = 0$, i.e. $R \equiv 0$.

3. Second order integrabiliy with $R \equiv 0$ was linked with separation of variables in the Schrodinger equation

$$H\Psi = E\Psi, \Psi(x,y,z) = \Psi_1(\zeta)\Psi_2(\eta)\Psi_3(\xi) \tag{2.1.10}$$

where ζ, η, ξ are coordinates for which the Helmholtz equation (eq. (2.1.10) with $V(\vec{r}) = 0$) allows the separation of variables in E(3). More specifically triplets of commuting operators X_1, X_2, H were classified into eleven orbits under the action of the Euclidean group E(3). Each orbit was shown to correspond precisely to one of the eleven separable potentials in E(3) found earlier by Eisenhart [**13**].

4. Second order superintegrability was linked with multiseparability, i.e. with potentials allowing the separation in at least two coordinate systems. All superintegrable systems were found hat allow separation in spherical coordinates plus at least one system.

The article [**2**] was supposed to be the first of two, however Part II was never written (for reasons that had nothing to do wih science but everything to do with Cold War politics of 1968). It was supposed to deal with the case where the rank of R is $r(R) = 2$ and to find all superintegrable systems in E_3 (not only those separating in spherical coordinates). This second task was completed by Evans [**14**] (in classical mechanics, but the results are the same in the quantum case).

The purpose of this article is to fill in the gap and to complete the analysis of quadratic integrability in E_3. Thus we will find all solutions of the questions 1, 2, 3 and 4 for $r(R) = 2$ in (2.1.8).

2.2. Formulation of the problem

We will consider the two second order operators

$$X_1 = a_{rs}L_rL_s + b_{rs}(p_rL_s + L_sp_r) + c_{rs}p_rp_s + g_1(\vec{r}), \tag{2.2.1}$$

$$X_2 = \alpha_{rs}L_rL_s + \beta_{rs}(p_rL_s + L_sp_r) + \gamma_{rs}p_rp_s + g_2(\vec{r}). \tag{2.2.2}$$

They both commute with the Hamiltonian H if the functions g_1, g_2, and V satisfy the equation

$$\frac{\partial g_a}{\partial x_i} + 2\phi^a_{ik}\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0, \quad a = 1{,}2. \tag{2.2.3}$$

The functions Φ^a_{ik} of (2.1.3) are now restricted to ϕ^a_{ik}, which are quite specific second order polynomials in x_1,x_2, and x_3. For $a = 1$, they have the form

$$\begin{aligned}
\phi^1_{11} &= a_{33}x_2^2 + a_{22}x_3^2 - 2a_{23}x_2x_3 - 2b_{12}x_3 + c_{11},\\
\phi^1_{22} &= a_{11}x_3^2 + a_{33}x_1^2 - 2a_{31}x_3x_1 - 2b_{23}x_1 + c_{22},\\
\phi^1_{33} &= a_{22}x_1^2 + a_{11}x_2^2 - 2a_{12}x_1x_2 - 2b_{31}x_2 + c_{33},\\
\phi^1_{12} &= -a_{12}x_3^2 - a_{33}x_1x_2 + a_{31}x_2x_3 + a_{23}x_3x_1 + b_{13}x_1 - b_{23}x_2 + (b_{22} - b_{11})x_3 + c_{12},\\
\phi^1_{23} &= -a_{23}x_1^2 - a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_3x_1 + a_{31}x_1x_2 + b_{21}x_2 - b_{31}x_3 + (b_{33} - b_{22})x_1 + c_{23},\\
\phi^1_{31} &= -a_{31}x_2^2 - a_{22}x_3x_1 + a_{23}x_1x_2 + a_{12}x_2x_3 + b_{32}x_3 - b_{12}x_1 + (b_{11} - b_{33})x_2 + c_{31},
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

specified in **[2]** (they are also used in equations (2.1.3) and (2.1.9) above.) When $a = 2$, they have the same form with $a_{ij} \to \alpha_{ij}$, $b_{ij} \to \beta_{ij}$, and $c_{ij} \to \gamma_{ij}$. The operators X_1 and X_2 must commute with each other. First of all, we consider their leading parts, $X_{1,L}$ and $X_{2,L}$, obtained by putting $g_1 = g_2 = 0$ in (2.2.1) and (2.2.2), and classify the leading parts under the action of the Euclidean group $E(3)$ and linear combinations of the type AX_1+BX_2+CH, where A, B, and C are constants. First we divide the pairs $\{X_1,X_2\}$ into six types.

From equations (2.2.1) and (2.2.2) we see that the matrices a, α, c, and γ can be chosen to be symmetric whereas b and β are not necessarily so. Each of these six cases will be treated separately. The determining equations for the matrices in (2.2.4) are obtained by setting the coefficients of all independant terms of the form $L_iL_kL_l$, $L_iL_kp_l$, $L_ip_kp_l$, and $p_ip_kp_l$ in the commutator $[X_1,X_2]$ equal to zero. Since $a = a^T$, rotations can be used to diagonalise a_{rs}, i.e. we can put $a_{rs} = a_r\delta_{rs}$.

The six cases are the following, where in all cases e.g. $a_{ik} \neq 0$ means that at least one component of the matrix a does not vanish:

$$
\begin{aligned}
&\text{I. } a_i \neq 0, \alpha_i \neq 0 \\
&\text{II. } a_i \neq 0, \alpha_i = 0, \beta_{ik} \neq 0 \\
&\text{III. } a_i \neq 0, \alpha_i = 0, \beta_{ik} = 0, \gamma_{ik} \neq 0 \\
&\text{IV. } a_i = 0, \alpha_i = 0, b_{ik} \neq 0, \beta_{ik} \neq 0 \\
&\text{V. } a_i = 0, \alpha_i = 0, b_{ik} = 0, \beta_{ik} \neq 0, c_{ik} \neq 0 \\
&\text{VI. } a_i = 0, \alpha_i = 0, b_{ik} = 0, \beta_{ik} = 0, c_{ik} \neq 0, \gamma_{ik} \neq 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

The condition $[X_1,X_2] = 0$, in which the terms proportional to $L_i L_k L_l$ are separated, implies that α_{rs} is also diagonal, $\alpha_{rs} = \alpha_r \delta_{rs}$, and also that

$$
\alpha_1(a_2 - a_3) + \alpha_2(a_3 - a_1) + \alpha_3(a_1 - a_2) = 0 \tag{2.2.6}
$$

Equating the terms proportional to $L_i L_k p_l$ to zero gives the system

$$
\begin{aligned}
&a_1\beta_{31} - \alpha_1 b_{31} = 0 \\
&a_1\beta_{21} - \alpha_1 b_{21} = 0 \\
&a_1(-\beta_{22} + \beta_{33}) - \alpha_1(b_{22} - b_{33}) = 0 \\
&(a_1 - a_2)(\beta_{13} + \beta_{31}) - (\alpha_1 - \alpha_2)(b_{13} - b_{31}) = 0 \\
&(a_1 - a_2)(\beta_{23} + \beta_{32}) - (\alpha_1 - \alpha_2)(b_{23} - b_{32}) = 0
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

to which all equations obtained by a cyclic permutation of the indices must be added.

The coefficients of $L_i p_k p_l$ give the system

$$
\begin{aligned}
(b_{12}+b_{21})\beta_{13}-(b_{31}+b_{13})\beta_{12}-b_{13}\beta_{21}+b_{12}\beta_{31}&=0\\
-a_1\gamma_{31}+\alpha_1c_{31}+(-b_{11}+b_{22})(\beta_{13}+\beta_{31})+(b_{13}+b_{31})(\beta_{11}-\beta_{22})+&\\
+(b_{12}+b_{21})\beta_{23}-b_{23}(\beta_{12}+\beta_{21})&=0\\
-a_1\gamma_{12}+\alpha_1c_{12}+(-b_{11}+b_{33})(\beta_{12}+\beta_{21})+(b_{12}+b_{21})(\beta_{11}-\beta_{33})+&\\
+(b_{13}+b_{31})\beta_{32}-b_{32}(\beta_{13}+\beta_{31})&=0\\
-a_1\gamma_{23}+\alpha_1c_{23}+(-b_{11}+b_{22})\beta_{23}-b_{21}\beta_{31}+&\\
+b_{31}\beta_{21}+b_{23}(\beta_{11}-\beta_{22})&=0\\
b_{11}(\beta_{32}-\beta_{23})+b_{22}\beta_{23}-b_{33}\beta_{32}-2b_{21}\beta_{31}+2b_{31}\beta_{21}+&\\
+(b_{23}-b_{32})\beta_{11}-b_{23}\beta_{22}+b_{32}\beta_{33}&=0\\
a_1(\gamma_{22}-\gamma_{33})-\alpha_1(c_{22}-c_{33})+b_{11}(\beta_{22}-\beta_{33})+b_{22}(\beta_{33}-\beta_{11})+&\\
+b_{33}(\beta_{11}-\beta_{22})+b_{32}\beta_{23}+b_{23}\beta_{32}&=0
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

+ all cyclic permutations.

The coefficients of $p_ip_kp_l$ give the system

$$
\begin{aligned}
b_{12}\gamma_{31}-b_{13}\gamma_{12}-\beta_{12}c_{31}+\beta_{13}c_{12}&=0\\
(-b_{11}+b_{22})\gamma_{31}+b_{13}(\gamma_{11}-\gamma_{22})+b_{12}\gamma_{23}-b_{23}\gamma_{12}+&\\
+(\beta_{11}-\beta_{22})c_{31}-\beta_{13}(c_{11}-c_{22})-\beta_{12}c_{23}+\beta_{23}c_{12}&=0\\
b_{12}(\gamma_{11}-\gamma_{33})+(b_{11}-b_{33})\gamma_{12}-b_{13}\gamma_{23}+b_{32}\gamma_{31}+(-\beta_{11}+\beta_{33})c_{12}+&\\
+\beta_{12}(c_{11}-c_{33})+\beta_{13}c_{23}-\beta_{32}c_{31}&=0\\
b_{11}(\gamma_{22}-\gamma_{33})+b_{22}(\gamma_{33}-\gamma_{11})+b_{33}(\gamma_{11}-\gamma_{22})+(b_{21}-b_{12})\gamma_{12}+&\\
+(b_{32}-b_{23})\gamma_{23}+(b_{13}-b_{31})\gamma_{31}-\beta_{11}(c_{22}-c_{33})-\beta_{22}(c_{33}-c_{11})-&\\
-\beta_{33}(c_{11}-c_{22})-(\beta_{21}-\beta_{12})c_{12}-(\beta_{32}-\beta_{23})c_{23}-(\beta_{13}-\beta_{31})c_{31}&=0
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

+ all cyclic permutations.

In the next section the determining equations will be solved for the constant matrices a, α, b, β c, and γ for each of the six cases (2.2.5).

2.3. Leading terms in X_1 and X_2

2.3.1. Case I: $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$

This case can be separated into the three subcases, $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$, $a_1 = a_2 \neq a_3$ and $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$ with the last two subcases leading to the same result as the first one. If $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$, equation (2.2.6) gives two different possibilities for the operators X_1 and X_2

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= L_3^2 + \beta_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + \gamma_{rs} p_r p_s + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

or

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= L_1^2 + \alpha L_3^2 + \beta_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + \gamma_{rs} p_r p_s + g_2(\vec{r}), \\ &\qquad 0 < \alpha \leq 1, \alpha \neq 1 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

The systems (2.2.7)-(2.2.9) can be used to further specify these expressions. The pair (2.3.1) becomes

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + b_{33}(p_3 L_3 + L_3 p_3) + c_{33} p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= L_3^2 + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

and (2.3.2) leads to the two following cases

$$\begin{aligned} X_1 =& L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + a\left(\frac{p_1^2}{c} + \frac{p_2^2}{b}\right) + g_1(\vec{r}) \\ X_2 =& L_1^2 + cL_2^2 - a p_3^2 + g_2(\vec{r}), 0 < c < 1 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

and

$$\begin{aligned} X_1 =& L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \frac{ac}{b}(p_2 L_2 + L_2 p_2) + \frac{a^2(b-2c)}{b} p_1^2 + \frac{a^2(2b-c)}{b} p_2^2 + g_1(\vec{r}) \\ X_2 =& bL_1^2 + cL_2^2 - ac(p_3 L_3 + L_3 p_3) + \frac{a^2 c(b-c)}{b} - \frac{a^2 c^2}{b} p_3^3 + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

The last pair however, only satisfies the commutation relation if $b = \frac{c}{2}$, or if $c = 1$, both of which are equivalent to one of the first two cases by rotations, translations and linear combinations of the type $X' = \mu X_1 + \nu X_2 + \lambda H$.

2.3.2. Case II: $a_i \neq 0,\ \alpha_i = 0,\ \beta_{ik} \neq 0$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_r L_r^2 + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + g(\vec{r}) \\
X_2 &= \beta_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + \gamma_{rs} p_r p_s + g(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

The system (2.2.5) is reduced to

$$
\begin{aligned}
a_1\beta_{31} &= 0 \\
a_1\beta_{21} &= 0 \\
a_1(\beta_{33} - \beta_{22}) &= 0 \\
(a_1 - a_2)(\beta_{13} + \beta_{31}) &= 0 \\
(a_1 - a_2)(\beta_{23} + \beta_{32}) &= 0 \\
a_2\beta_{12} &= 0 \\
a_2\beta_{32} &= 0 \\
a_2(\beta_{11} - \beta_{33}) &= 0 \\
(a_2 - a_3)(\beta_{21} + \beta_{12}) &= 0 \\
(a_2 - a_3)(\beta_{31} + \beta_{13}) &= 0 \\
a_3\beta_{23} &= 0 \\
a_3\beta_{13} &= 0 \\
a_3(\beta_{22} - \beta_{11}) &= 0 \\
(a_3 - a_1)(\beta_{32} + \beta_{23}) &= 0 \\
(a_3 - a_1)(\beta_{12} + \beta_{21}) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

As in the previous case, we distinguish three separate cases namely, $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0, a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$, and $a_1 = a_2 \neq a_3$. The first two lead to

$$
X_2 = \beta_{11}(p_r L_r + L_r p_r) + \gamma_{rs} p_r p_s + g_2(\vec{r}) \tag{2.3.8}
$$

which is equivalent to setting $\beta_{ik} = 0$, because $(p_1L_1+L_1p_1)+(p_2L_2+L_2p_2)+(p_3L_3+L_3p_3) = 0$. Since this is contrary to the hypothesis, this case is not to be considered. In the case

$a_1 = a_2 \neq a_3$, the operators X_1 and X_2 are reduced to

$$\begin{aligned} X_1 =& a_3 L_3^2 + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + g_1(\vec{r}) \\ X_2 =& \beta_{12}(p_1 L_2 + L_2 p_1 - p_2 L_1 - L_1 p_2) + \beta_{33}(p_3 L_3 + L_3 p_3) + \\ & + \gamma_{rs} p_r p_s + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

The coefficients b_{rs}, c_{rs} and γ_{rs} can be specified using the systems (2.2.6) and (2.2.7). (2.2.6) then becomes

$$\begin{aligned} -b_{31} &= 0 \\ c_{31}\alpha_1 &= 0 \\ c_{12}\alpha_1 - (b_{12} + b_{21})\beta_{33} &= 0 \\ -b_{31} + c_{23}\alpha_1 &= 0 \\ -2b_{31} + b_{32}\beta_{33} &= 0 \\ -(c_{22} - c_{33})\alpha_1 - b_{11}\beta_{33} + b_{22}\beta_{33} &= 0 \\ -b_{32} &= 0 \\ c_{12}\alpha_2 - (b_{12} + b_{21})\beta_{33} &= 0 \\ c_{23}\alpha_2 &= 0 \\ -b_{32} + c_{31}\alpha_2 - b_{31}\beta_{33} &= 0 \\ -(-c_{11} + c_{33})\alpha_2 - b_{11}\beta_{33} + b_{22}\beta_{33} &= 0 \\ 0 &= 0 \\ b_{13} + b_{31} + c_{23}\alpha_3 + (b_{23} + b_{32})\beta_{33} - a_3\gamma_{23} &= 0 \\ -b_{23} - b_{32} + c_{31}\alpha_3 + (b_{13} + b_{31})\beta_{33} - a_3\gamma_{31} &= 0 \\ b_{11} - b_{33} + c_{12}\alpha_3 + b_{12}\beta_{33} - a_3\gamma_{12} &= 0 \\ b_{11} + b_{22} - 2b_{33} + (b_{12} - b_{21})\beta_{33} &= 0 \\ b_{12} + b_{21} - (c_{11}) - c_{22})\alpha_3 - b_{11}\beta_{33} + b_{22}\beta_{33} + a_3(\gamma_{11} - \gamma_{33}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

To solve this system, we consider three cases: 1. $\beta_{12} \neq 0$, $\beta_{33} \neq 0$; 2. $\beta_{12} = 0, \beta_{33} \neq 0$ and 3. $\beta_{12} \neq 0, \beta_{33} = 0$, and using the solutions into the system (2.2.7) we find respectively for each case

$$
\begin{aligned}
X_1 =& a_3L_3^2 + g_1(\vec{r}) \\
X_2 =& \beta_{12}(p_1L_2 + L_2p_1 - p_2L_1 - L_1p_2) + \beta_{33}(p_3L_3 + L_3p_3)+ \\
&+ \gamma_{33}p_3p_3 + g_2(\vec{r}), \beta_{12} \neq 0, \beta_{33} \neq 0
\end{aligned}
\tag{2.3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 =& a_3L_3^2 + c_{33}p_3p_3 + g_1(\vec{r}) \\
X_2 =& \beta_{33}(p_3L_3 + L_3p_3) + \gamma_{33}p_3p_3 + g_2(\vec{r}), \beta_{33} \neq 0
\end{aligned}
\tag{2.3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 =& L_3^2 - abp_3^2 + a(p_2L_1 + L_1p_2) - b(p_1L_2 + L_2p_1) + g_1(\vec{r}) \\
X_2 =& p_2L_1 + L_1p_2 - p_1L_2 - L_2p_1 - a(p_2^2 + p_3^2) - a(p_1^2 + p_3^2) + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.13}
$$

2.3.3. Case III: $a_i \neq 0$, $\alpha_i = 0$, $\beta_{ik} = 0$, $\gamma_{ik} \neq 0$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_rL_r^2 + b_{rs}(p_rL_s + L_sp_r) + c_{rs}p_rp_s + +g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \gamma_{rs}p_rp_s + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.14}
$$

The system (2.2.5) is trivially satisfied. (2.2.6) becomes

$$
\begin{aligned}
-a_1\gamma_{31} &= 0 \\
-a_1\gamma_{12} &= 0 \\
-a_1\gamma_{23} &= 0 \\
a_1(\gamma_{22} - \gamma_{33}) &= 0 \\
-a_2\gamma_{12} &= 0 \\
-a_2\gamma_{23} &= 0 \\
-a_2\gamma_{31} &= 0 \\
a_2(\gamma_{33} - \gamma_{11}) &= 0 \\
-a_3\gamma_{23} &= 0 \\
-a_3\gamma_{31} &= 0 \\
-a_3\gamma_{12} &= 0 \\
a_3(\gamma_{11} - \gamma_{22}) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.3.15}
$$

If $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$, then $\gamma_{ii} = \gamma$, and $\gamma_{ik} = 0, i \neq k$. By a linear combination between X_2 and the Hamiltonian, this is equivalent to setting $\gamma = 0$, which contradicts the hypothesis $\gamma \neq 0$. If $a_1 = a_2 \neq a_3$, then either $a_1 \neq 0$ or $a_3 \neq 0$. The first possibility gives the same result as the case $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$. If $a_3 \neq 0$, then $\gamma_{ik} \neq 0, i \neq k$ and $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$. The operators X_1 and X_2 become

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_3 L_3^2 + b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + +g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \gamma_{33} p_3 p_3 + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.16}
$$

With a translation, $(x,y,z) \to (x + \sigma_1, y + \sigma_2, z + \sigma_3)$, with $\sigma_1 = -b_{13}$, $\sigma_{23} = b_{23}$, and $\sigma_3 = 0$, the system (2.2.7) becomes

$$
\begin{aligned}
b_{12}\gamma_{33} &= 0 \\
-b_{21}\gamma_{33} &= 0 \\
b_{32}\gamma_{33} &= 0 \\
b_{31}\gamma_{33} &= 0 \\
(b_{22} - b_{11})\gamma_{33} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.3.17}
$$

The operators X_1 and X_2 are then reduced to

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_3 L_3^2 + b_{33}(p_3 L_3 + L_3 p_3) + c_{rs} p_r p_s + +g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \gamma_{33} p_3 p_3 + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.18}
$$

2.3.4. Case IV: $a_i = 0$, $\alpha_i = 0$, $b_{ik} \neq 0$, $\beta_{ik} \neq 0$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= b_{rs}(p_r L_s + L_s p_r) + c_{rs} p_r p_s + g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \beta_{ik}(p_i L_k + L_k p_i) + \gamma_{ik} p_i p_k + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.3.19}
$$

The matrix b can be written as the sum of a symmetric and an anti-symmetric matrix. We therefore have $b_{21} = -b_{12}, b_{31} = -b_{13}, b_{32} = -b_{23}$. The system (2.2.6) becomes

$$\begin{aligned}
-b_{13}\beta_{21} + b_{12}\beta_{31} &= 0 \\
-b_{23}(\beta_{12} + \beta_{21}) + (-b_{11} + b_{22})(\beta_{13} + \beta_{31}) &= 0 \\
(-b_{11} + b_{33})(\beta_{12} + \beta_{21}) + b_{23}(\beta_{13} + \beta_{31}) &= 0 \\
-b_{13}\beta_{21} + b_{23}(\beta_{11} - \beta_{22}) + (-b_{11} + b_{22})\beta_{23} + b_{12}\beta_{31} &= 0 \\
2b_{23}\beta_{11} - 2b_{13}\beta_{21} - b_{23}\beta_{22} + b_{22}\beta_{23} + 2b_{12}\beta_{31} - b_{33}\beta_{32}+ & \\
+b_{11}(-\beta_{23} + \beta_{32}) - b_{23}\beta_{33} &= 0 \\
b_{33}(\beta_{11} - \beta_{22}) - b_{23}\beta_{23} - b_{23}\beta_{32} + b_{11}(\beta_{22} - \beta_{33})+ & \\
+b_{22}(-\beta_{11} + \beta_{33}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

$+$ all cyclic permutations.

Morever, we have $b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$, and $\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0$. Solving these equations, we find that β is also the sum of a symmetric and an anti-symmetric matrix, with $\beta_{ij} = \frac{\beta_{23}}{b_{23}} b_{ij}$. The linear combination, $X_1 \to -\frac{\beta_{23}}{b_{23}} X_1 + X_2$ implies that b=0, which is contrary to the hypothesis, so this case leads to no possible integrals of motion.

2.3.5. Case V: $a_i = 0$, $\alpha_i = 0$, $b_{ik} = 0$, $\beta_{ik} \neq 0$, $c_{ik} \neq 0$

c_{rs} can be diagonalised,

$$\begin{aligned}
X_1 &= c_{11}p_1^2 + c_{22}p_2^2 + c_{33}p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \beta_{ik}(p_i L_k + L_k p_i) + \gamma_{ik} p_i p_k + g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

The systems (2.2.5) and (14) are trivially satisfied. The system (2.2.7) becomes

$$\begin{aligned}
\beta_{13}(c_{11}-c_{22}) &= 0 \\
\beta_{12}(c_{11}-c_{33}) &= 0 \\
\beta_{32}(c_{33}-c_{11}) &= 0 \\
\beta_{12}(c_{11}-c_{33}) &= 0 \\
\beta_{23}(c_{22}-c_{11}) &= 0 \\
\beta_{31}(c_{33}-c_{22}) &= 0 \\
\beta_{31}(c_{33}-c_{22}) &= 0 \\
\beta_{11}(c_{22}-c_{33})+\beta_{22}(c_{33}-c_{11})+\beta_{33}(c_{11}-c_{22}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

As in the previous cases, we can separate the possibilities into three using system (2.2.7): $c_{11}=c_{22}=c_{33}\neq 0$, $c_{11}=c_{22}\neq c_{33}$, and $c_{11}\neq c_{22}\neq c_{33}$. The first implies that $c_{rs}=0$ with a linear combination with the Hamiltonian, and this case is to be rejected. If $c_{11}=c_{22}\neq c_{33}$, we find that,

$$\begin{aligned}
X_1 =& p_3^2+g_1(\vec{r}) \\
X_2 =& \beta_{13}(p_1L_3+L_3p_1)+\beta_{23}(p_2L_3+L_3p_2)+\beta_{33}(p_3L_3+L_3p_3)+ \\
&+\gamma_{ik}p_ip_k+g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

With a rotation around the z-axis, we can put $\beta_{13}=0$, and the integrals become

$$\begin{aligned}
X_1 =& p_3^2+g_1(\vec{r}) \\
X_2 =& \beta_{23}(p_2L_3+L_3p_2)+\beta_{33}(p_3L_3+L_3p_3)+\gamma_{ik}p_ip_k+g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

If $c_{11}\neq c_{22}\neq c_{33}$, we consider the cases where $\beta_{11}=\beta_{22}$, which leads to $\beta=0$, or $\beta_{11}\neq\beta_{22}$, and we find

$$\begin{aligned}
X_1 =& c_{11}p_1^2+c_{22}p_2^2+c_{33}p_3^2+g_1(\vec{r}), \\
&c_{22}(\beta_{33}-\beta_{11})+c_{33}(\beta_{11}-\beta_{22})+c_{11}(\beta_{22}-\beta_{33})=0 \\
X_2 =& \beta_{11}(p_1L_1+L_1p_1)+\beta_{22}(p_2L_2+L_2p_2)+\beta_{33}(p_3L_3+L_3p_3)+ \\
&+\gamma_{ik}p_ip_k+g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

With a linear combination $X_1 \to -c_{33}H$ and using the fact that $p_3L_3 + L_3p_3 = -p_1L_1 - L_1p_1 - p_2L_2 - L_2p_2$, these expressions are reduced to,

$$\begin{aligned} X_1 &= c_{11}p_1^2 + c_{22}p_2^2 + g_1(\vec{r}), -c_{22}\beta_{11} + c_{11}\beta_{22} = 0 \\ X_2 &= \beta_{11}(p_1L_1 + L_1p_1) + \beta_{22}(p_2L_2 + L_2p_2) + \gamma_{ik}p_ip_k + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

2.3.6. Case VI: $a_i = 0$, $\alpha_i = 0$, $b_{ik} = 0$, $\beta_{ik} = 0$, $c_{ik} \neq 0$, $\gamma_{ik} \neq 0$

$$\begin{aligned} X_1 &= c_{rs}p_rp_s + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= \gamma_{ik}p_ip_k + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

c_{rs} can be diagonalised. We find

$$\begin{aligned} X_1 &= c_{11}p_1^2 + c_{22}p_2^2 + c_{33}p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= \gamma_{ik}p_ip_k + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

2.4. The matrix R_{rs} and the potential

As stated in the Introduction the potential must satisfy the condition (2.1.8). In [**2**] it was assumed that R satisfied $R = 0$ and the equation $R_{ir}\frac{\partial V}{\partial x_r}$ was satisfied trivially. The potential was then determined from further determining equations obtained from lower order terms in the commutation $[X_1,X_2]$. We shall not reproduce these results here. Instead we concentrate on the case when $R \neq 0$ and (2.1.8) imposes additional constaints on the potential. Since $R = -R^T$ and $R \neq 0$, it always satisfies $rank(R) \leq 2$. In this section the functions ϕ^a_{ik} are computed for each of the six cases and their subcases found in the previous section, along with the matrix R, and the equation (2.1.8) is solved for the potentials. We are only interested in the case $rank(R) = 2$, since $rank(R) = 0$ was treated exhaustively in [**2**], and $rank(R) = 1$ is impossible (R is anti-symmetric). As will be seen in this section, for the present case, we distinguished two main possibilities for the matrix R. First, R was found to have the form

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & T \\ -S & -T & 0 \end{bmatrix}$$

where S and T are functions of x, y, and z, and such that $ST \neq 0$. In that case the equation for the potential is

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & T \\ -S & -T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{aligned} TV_z &= 0 \\ SV_z &= 0 \\ -TV_x - SV_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

The second possible form of R is

$$R = \begin{bmatrix} 0 & U & S \\ -U & 0 & T \\ -S & -T & 0 \end{bmatrix}$$

with U also a function of x, y and z, and $UST \neq 0$, and the equation for the potential is

$$\begin{bmatrix} 0 & U & S \\ -U & 0 & T \\ -S & -T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{aligned} UV_y + SV_z &= 0 \\ -UV_x + TV_z &= 0 \\ -TV_x - TV_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

In each case we will present the matrix R and are only interested in cases with $R \neq 0$.

2.4.1. Case Ia: (2.3.3)

$$\begin{aligned} X_1 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + b_{33}(p_3 L_3 + L_3 p_3) + c_{33} p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= L_3^2 + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{11} &= (y^2 + z^2) \\
\Phi^1_{22} &= (x^2 + z^2) \\
\Phi^1_{33} &= c_{33} + (x^2 + y^2) \\
\Phi^1_{12} &= -xy \\
\Phi^1_{23} &= b_{33}x - yz \\
\Phi^1_{13} &= -b_{33} - xz \\
\Phi^2_{11} &= y^2 \\
\Phi^2_{22} &= x^2 \\
\Phi^2_{33} &= 0 \\
\Phi^2_{12} &= xy \\
\Phi^2_{23} &= 0 \\
\Phi^2_{13} &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

The coefficients R_{ir} are computed using the formula $R_{ir} = \Phi^1_{ik}\Phi^2_{kr} - \Phi^2_{ik}\Phi^1_{kr}$ and we find

$$\begin{aligned}
R_{12} &= 0 \\
R_{13} &= b_{33}y(x^2 + y^2) \\
R_{23} &= -b_{33}x(x^2 + y^2)
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

And so the matrix R_{ir} is

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{33}y(x^2+y^2) \\ 0 & 0 & -b_{33}x(x^2+y^2) \\ -b_{33}y(x^2+y^2) & b_{33}x(x^2+y^2) & 0 \end{bmatrix}$$

If $b_{33} = 0$, R is indentically zero and the potential resulting from this case gives the separation of variables in spherical coordinates, which was already found in [**2**]:

$$V = f(r) + \frac{1}{r^2}g(\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}h(\phi), \tag{2.4.6}$$

with the usual definitions of the spherical coodinates $\{r, \theta, \phi\}$. The case that interests us is then $b_{33} \neq 0$ and we can divide R by $b_{33}(x^2 + y^2)$. Using the equation $R_{ir}\frac{dV}{dx_r} = 0$ to compute the potential

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The potential $V(x,y,z)$ only depends on the variables x and y and satisfies the equations

$$\begin{aligned} V_z &= 0 \\ -yV_x + xV_y &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

The solution of this system is easily found using the method of characteristics. The potential depends on a single variable $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. This potential allows two first order integrals (the second order ones are their squares),

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V(\rho),\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ p_3 &= \frac{\partial}{\partial z} \\ L_3 &= \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}} \tag{2.4.8}$$

The presence of p_3 as an integral of motion reduces the problem to one in two dimensions (E_2).

2.4.2. Case Ib: (2.3.4)

$$\begin{aligned} X_1 =& L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + a\left(\frac{p_1^2}{c} + \frac{p_2^2}{b}\right) + g_1(\vec{r}) \\ X_2 =& L_1^2 + cL_2^2 - ap_3^2 + g_2(\vec{r}), \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

$$\textbf{with } \mathbf{0 < c < 1}$$

For this case we obtain $R = 0$ and hence the results of **[2]**, that is, the separation in sphero-conical coordinates for $a = 0$:

$$V = f(r) + \frac{g(\Theta) + h(\lambda)}{r^2(\Theta^2 - \lambda^2)}, \tag{2.4.10}$$

with the coordinates defined by

$$\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{r^2(\Theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)} \\ y^2 &= \tfrac{r^2(c^2-\Theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)} \\ z^2 &= \tfrac{r^2\Theta^2\lambda^2}{b^2c^2} \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

and ellipsoidal coordinates for $a \neq 0$:

$$V = \frac{(t-u)f(s) + (u-s)g(t) + (s-t)h(u)}{(s-t)(t-u)(u-s)}. \tag{2.4.12}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{(s-a^2)(t-a^2)(u-a^2)}{a^2(a^2-b^2)} \\ y^2 &= \tfrac{(s-b^2)(t-b^2)(u-b^2)}{b^2(b^2-a^2)} \\ z^2 &= \tfrac{stu}{a^2a^2} \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Using the linear combinations $X' = \mu X_1 + \nu X_2 + \lambda H$, this case can be re-written as

$$\begin{aligned} X_1 =& L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + c(p_2^2 + \alpha p_3^2) + g_1(\vec{r}) \\ X_2 =& L_1^2 + \alpha L_3^2 + c\alpha(p_2^2 + p_3^2) + g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

When $c \neq 0$ we find the integrals found in the case Ia. When $c = 0$, if $\alpha > 0$, we find the separation in the prolate spheroidal coordinates:

$$V = \frac{f(\cosh\eta) + g(\cos\alpha)}{\sinh^2\eta + \sin^2\alpha} + \frac{h(\phi)}{\sinh^2\eta\sin^2\alpha}, \tag{2.4.15}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= a\sinh\eta\sin\alpha\cos\phi \\ y^2 &= a\sinh\eta\sin\alpha\sin\phi \\ z^2 &= a\cosh\eta\cos\alpha \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

and if $\alpha < 0$, the separation in oblate spheroidal coordinates:

$$V = \frac{f(\sinh\eta) + g(\cos\alpha)}{\cosh^2\eta - \sin^2\alpha} + \frac{h(\phi)}{\cosh^2\eta\sin^2\alpha}. \tag{2.4.17}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= a\cosh\eta\sin\alpha\cos\phi \\ y^2 &= a\cosh\eta\sin\alpha\sin\phi \\ z^2 &= a\sinh\eta\cos\alpha \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

2.4.3. Case IIa: (2.3.11)

$$\begin{aligned} X_1 &= L_3^2 + g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= \beta_{12}(p_1L_2 + L_2p_1 - p_2L_1 - L_1p_2) + \beta_{33}(p_3L_3 + L_3p_3) + \\ &\quad + \gamma_{33}p_3p_3 + g_2(\vec{r}), \\ &\quad \textbf{with } \boldsymbol{\beta_{12} \neq 0, \beta_{33} \neq 0} \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{11} &= y^2 \\
\Phi^1_{22} &= x^2 \\
\Phi^1_{33} &= 0 \\
\Phi^1_{12} &= -y \\
\Phi^1_{23} &= 0 \\
\Phi^1_{13} &= 0 \\
\Phi^2_{11} &= 2\beta_{12}z \\
\Phi^2_{22} &= 2\beta_{12}z \\
\Phi^2_{33} &= \gamma_{33} \\
\Phi^2_{12} &= 0 \\
\Phi^2_{23} &= -\beta_{12}y + \beta_{33}x \\
\Phi^2_{13} &= -\beta_{12}x - \beta_{33}y
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

And the matrix R_{ir} is given by

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_{33}y(x^2+y^2) \\ 0 & 0 & \beta_{33}x(x^2+y^2) \\ \beta_{33}y(x^2+y^2) & -\beta_{33}x(x^2+y^2) & 0 \end{bmatrix}$$

Once again, we can divide the matrix by $\beta_{33}(x^2+y^2)$ and the equation $R_{ir}\frac{dV}{dx_r} = 0$ for the potential is,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The potential $V(x,y,z)$ and the integrals of motion are as in (2.4.8).

2.4.4. Case IIb: (2.3.12)

$$\begin{aligned}
X_1 &= L_3^2 + c_{33}p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= (p_3L_3 + L_3p_3) + \gamma_{33}p_3^2 + g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{11} &= y^2 \\
\Phi^1_{22} &= x^2 \\
\Phi^1_{33} &= c_{33} \\
\Phi^1_{12} &= -xy \\
\Phi^1_{23} &= 0 \\
\Phi^1_{13} &= 0 \\
\Phi^2_{11} &= 0 \\
\Phi^2_{22} &= 0 \\
\Phi^2_{33} &= \gamma_{33} \\
\Phi^2_{12} &= 0 \\
\Phi^2_{23} &= x \\
\Phi^2_{13} &= y
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

And the matrix R_{ir} is given by

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y(c_{33} - (x^2+y^2)) \\ 0 & 0 & x(-c_{33} + (x^2+y^2)) \\ -y(c_{33} - (x^2+y^2)) & -x(-c_{33} + (x^2+y^2)) & 0 \end{bmatrix}$$

Dividing by $c_{33} - (x^2+y^2)$ and using the equation $R_{ir}\frac{dV}{dx_r} = 0$ to compute the potential, we get

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We obtain once again the case (2.4.8).

2.4.5. Case IIc: (2.3.13)

$$\begin{aligned}
X_1 &= L_3^2 - abp_3^2 + a(p_2L_1 + L_1p_2) - b(p_1L_2 + L_2p_1) + g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= p_2L_1 + L_1p_2 - p_1L_2 - L_2p_1 - a(p_2^2 + p_3^2) - a(p_1^2 + p_3^2) + g_2(\vec{r})
\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

This is already exactly the same as the case XI in [**2**], which separates in paraboloidal coordinates:

$$V=\frac{(\nu-\lambda)f(\mu)+(\lambda-\mu)g(\nu)+(\mu-\nu)h(\lambda)}{(\mu-\nu)(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)}. \tag{2.4.24}$$

$$\begin{aligned} x&=\tfrac{(\mu-a)(\nu-a)(\lambda-a)}{a-b}\\ y&=\tfrac{(\mu-b)(\nu-b)(\lambda-b)}{b-a}\\ z&=\tfrac{1}{2}(\mu+\nu+\lambda-a-b)\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

2.4.6. Case III: (2.3.18)

$$\begin{aligned} X_1&=L_3^2+b_{33}(p_3L_3+L_3p_3)+c_{rs}p_rp_s+g_1(\vec{r})\\ X_2&=p_3^2+g_2(\vec{r})\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^1&=y^2+c_{11}\\ \Phi_{22}^1&=x^2+c_{22}\\ \Phi_{33}^1&=c_{33}\\ \Phi_{12}^1&=-xy+c_{12}\\ \Phi_{23}^1&=b_{33}x+c_{23}\\ \Phi_{13}^1&=-b_{33}y+c_{13}\\ \Phi_{11}^2&=0\\ \Phi_{22}^2&=0\\ \Phi_{33}^2&=1\\ \Phi_{12}^2&=0\\ \Phi_{23}^2&=0\\ \Phi_{13}^2&=0\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

And the matrix R_{ir} is given by

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -b_{33}y+c_{13}\\ 0 & 0 & b_{33}x+c_{23}\\ b_{33}y-c_{13} & -b_{33}x-c_{23} & 0\end{bmatrix}$$

When $b_{33} \neq 0$ we can translate along x and y to obtain $c_{13} = c_{23} = 0$ and dividing by b_{33} we again arrive to the potential and integrals (2.4.8). When $b_{33} = 0$, the equation for the potential is reduced to

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

which are two equations with constant coefficients for V. A rotation about the z-axis can be made so that $c_{13} \to 0$ and $c_{23} \to c \neq 0$, with $c_{13}^2 + c_{23}^2 = c^2 \neq 0$. The potential must then satisfy the equations

$$\begin{aligned} -cV_y &= 0 \\ cV_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

In other words the potential depends on a single cartesian coordinate, x. It allows two first order integrals

$$\boxed{\begin{aligned} V &= V(x) \\ p_2 &= \partial_y \\ p_3 &= \partial_z \end{aligned} \qquad (2.4.29)}$$

For $b_{33} = c_{13} = c_{23} = 0$, the matrix is identically zero and we obtain the separation in circular cylindrical coordinates:

$$V = f(\rho) + \frac{1}{\rho^2} g(\alpha) + h(z), \tag{2.4.30}$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \alpha \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

or elliptic cylindrical coordinates:

$$V = \frac{f(\cosh \mu) + g(\cos \alpha)}{\cosh^2 \mu - \cos^2 \alpha} + h(z). \tag{2.4.32}$$

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \mu \cos \alpha \\ y &= a \sinh \mu \sin \alpha \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

2.4.7. Case Va: (2.3.24)

$$
\begin{aligned}
X_1 &= p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\
X_2 &= \beta_{23}(p_2 L_3 + L_3 p_2) + \beta_{33}(p_3 L_3 + L_3 p_3) + \gamma_{rs} p_r p_s + g_2(\vec{r})
\end{aligned}
\tag{2.4.34}
$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11}^1 &= 0 \\
\Phi_{22}^1 &= 0 \\
\Phi_{33}^1 &= 1 \\
\Phi_{12}^1 &= 0 \\
\Phi_{23}^1 &= 0 \\
\Phi_{13}^1 &= 0 \\
\Phi_{11}^2 &= \gamma_{11} \\
\Phi_{22}^2 &= 2\beta_{23} x + \gamma_{22} \\
\Phi_{33}^2 &= \gamma_{33} \\
\Phi_{12}^2 &= -\beta_{23} y + \gamma_{12} \\
\Phi_{23}^2 &= \beta_{33} x + \gamma_{23} \\
\Phi_{13}^2 &= -\beta_{33} y + \gamma_{13}
\end{aligned}
\tag{2.4.35}
$$

Using the equation $R_{ir}\frac{dV}{dx_r} = 0$ to compute the potential, we get

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & (\beta_{33} y - \gamma_{13}) \\ 0 & 0 & -(\beta_{33} x + \gamma_{23}) \\ -(\beta_{33} y - \gamma_{13}) & (\beta_{33} x + \gamma_{23}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

When $\beta_{33} = 0$, the matrix becomes analogous to the case III, and we get the same integrals of motion and potential as (2.4.24). When $\beta_{33} \neq 0$, a translation $y \to y + \frac{\gamma_{13}}{\beta_{33}}$, and $x \to x - \frac{\gamma_{23}}{\beta_{33}}$, gives the matrix a form analogous to the case I.a. and we get the same potential and integrals of motion as (2.4.8).

2.4.8. Case Vb: (2.3.25)

$$
\begin{aligned}
&X_1 = c_{11}p_1^2 + c_{22}p_2^2 + c_{33}p_3^2 + g_1(\vec{r}) \\
&X_2 = \beta_{11}(p_1L_1 + L_1p_1) + \beta_{22}(p_2L_2 + L_2p_2) + \beta_{33}(p_3L_3 + L_3p_3) + \gamma_{ij}p_ip_j + g_2(\vec{r}), \\
&\quad \mathbf{with}\ \mathbf{c_{11}}(\boldsymbol{\beta_{33}} - \boldsymbol{\beta_{22}}) + \mathbf{c_{22}}(\boldsymbol{\beta_{11}} - \boldsymbol{\beta_{33}}) + \mathbf{c_{33}}(\boldsymbol{\beta_{22}} - \boldsymbol{\beta_{11}}) = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{2.4.36}
$$

Making a linear combination $X_1 - c_{33}H$ and setting $(p_1L_1+L_1p_1)+(p_2L_2+L_2p_2) = -(p_3L_3+L_3p_3)$, this can be re-written as

$$
\begin{aligned}
&X_1 = c_{11}p_1^2 + c_{22}p_2^2 + g_1(\vec{r}) \\
&X_2 = \beta_{11}(p_1L_1 + L_1p_1) + \beta_{22}(p_2L_2 + L_2p_2) + \gamma_{ij}p_ip_j + g_2(\vec{r}), \\
&\quad \mathbf{with}\ -\mathbf{c_{11}}\boldsymbol{\beta_{22}} + \mathbf{c_{22}}\boldsymbol{\beta_{11}} = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{2.4.37}
$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$
\begin{aligned}
\Phi_{11}^1 &= c_{11} \\
\Phi_{22}^1 &= c_{22} \\
\Phi_{33}^1 &= 0 \\
\Phi_{12}^1 &= 0 \\
\Phi_{23}^1 &= 0 \\
\Phi_{13}^1 &= 0 \\
\Phi_{11}^2 &= \gamma_{11} \\
\Phi_{22}^2 &= \gamma_{22} \\
\Phi_{33}^2 &= \gamma_{33} \\
\Phi_{12}^2 &= (\beta_{22} - \beta_{11})z + \gamma_{12} \\
\Phi_{23}^2 &= -\beta_{22}x + \gamma_{23} \\
\Phi_{13}^2 &= \beta_{11}y + \gamma_{13}
\end{aligned}
\tag{2.4.38}
$$

And the matrix R_{ir} is given by

$$R = \begin{bmatrix} 0 & (c_{11}-c_{22})((\beta_{22}-\beta_{11})z+\gamma_{12}) & c_{11}(\beta_{11}y+\gamma_{13}) \\ -(c_{11}-c_{22})((\beta_{22}-\beta_{11})z+\gamma_{12}) & 0 & -c_{22}(\beta_{22}x+\gamma_{23}) \\ -c_{11}(\beta_{11}y+\gamma_{13}) & c_{22}(\beta_{22}x+\gamma_{23}) & 0 \end{bmatrix}$$

However, the commutation relation $[X_1,H]=0$, implies that

$$\begin{aligned} g_{1x}+c_{11}V_x &= 0 \\ g_{1y}+c_{22}V_y &= 0 \\ g_{1z} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

and it can easily be seen that the compatibility condition $g_{1xy}=g_{1yx}$ leads to $c_{11}=c_{22}\neq 0$, which, using the condition $-\beta_{22}c_{11}+\beta_{11}c_{22}=0$, implies that $\beta_{11}=\beta_{22}\neq 0$. The matrix is then reduced to

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{11}\beta_{11}y \\ 0 & 0 & -c_{11}\beta_{11}x \\ -c_{11}\beta_{11}y & c_{11}\beta_{11}x & 0 \end{bmatrix}$$

where the constants γ_{ij} were set to zero by translations of x and y, and we obtain the same potential and integrals of motion as (2.4.8).

2.4.9. Case VI: (2.3.28)

$$\begin{aligned} X_1 &= c_{11}p_1^2+c_{22}p_2^2+c_{33}p_3^2+g_1(\vec{r}) \\ X_2 &= \gamma_{ik}p_ip_k+g_2(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

The functions Φ_{ik} are given by

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{11} &= c_{11}\\
\Phi^1_{22} &= c_{22}\\
\Phi^1_{33} &= c_{33}\\
\Phi^1_{12} &= 0\\
\Phi^1_{23} &= 0\\
\Phi^1_{13} &= 0\\
\Phi^2_{11} &= \gamma_{11}\\
\Phi^2_{22} &= \gamma_{22}\\
\Phi^2_{33} &= \gamma_{33}\\
\Phi^2_{12} &= \gamma_{12}\\
\Phi^2_{23} &= \gamma_{23}\\
\Phi^2_{13} &= \gamma_{13}
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

And the matrix R_{ir} is given by

$$R = \begin{bmatrix} 0 & (c_{11}-c_{22})\gamma_{12} & (c_{11}-c_{33})\gamma_{13} \\ -(c_{11}-c_{22})\gamma_{12} & 0 & (c_{22}-c_{33})\gamma_{23} \\ -(c_{11}-c_{33})\gamma_{13} & -(c_{22}-c_{33})\gamma_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

For $R = 0$, i.e. when $\gamma_{ij} = 0$, $i \neq j$, we get separation in cartesian coordinates,

$$V = f(x) + g(y) + h(z). \tag{2.4.42}$$

When $R \neq 0$, making the linear combination $X_1 \to X_1 - c_{33}H$ we can see that the determining equations issued from $[X_1,H] = 0$ give once again the system

$$\begin{aligned}
g_{1x} + c_{11}V_x &= 0\\
g_{1y} + c_{22}V_y &= 0\\
g_{1z} &= 0
\end{aligned} \tag{2.4.43}$$

and $g_{1xy} = g_{1yx}$ implies that $c_{11} = c_{22}$. The matrix becomes as the case V-a, and the potential and integrals of motion are the same as (2.4.24).

2.5. Conclusion

The problem addressed in the present article was formulated in sections 2.1 and 2.2 and was solved in sections 2.3 and 2.4. In physical terms, the problem was to find all completely integrable classical and quantum Hamiltonian systems in Euclidean space E_3 of the form (2.1.1). Integrability implies the existence of two well defined integrals of motion $\{X_1,X_2\}$ in involution. In the paper, X_1 and X_2 were restricted to being second order polynomials in the momenta p_j, $j = 1,2,3$ as in (2.1.3).

The task was thus to obtain a complete solution of the determining equations, i.e. a system of partial differential equations following from equations (2.1.4), (2.1.5) and (2.1.6). The solution involves an analysis of a matrix R defined in (2.1.9) and used in (2.1.8). The matrix R is antisymmetric $R = -R^T \in \mathbb{R}^{3\times3}$ and can thus have rank $r(R) = r$, with $r = 0$ or $r = 2$. The case $r = 0$ was completely solved in [**2**]. The case $r = 2$ was left open and its analysis constitutes the original part of this paper. The main result can be summed up as a theorem.

Théorème 2.5.1. *If the rank of the matrix R satisfies $r = 2$ then the potential $V(x,y,z)$ is invariant under a two dimensional Abelian subgroup of the Euclidean Lie group $E(3)$ and allows two first order integrals of motion $\{Y_1,Y_2\}$. Two inequivalent cases occur:*

1. $V = V(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; Y_1 = p_3,\ Y_2 = L_3,$ (2.5.1)
2. $V = V(z)\ ; Y_1 = p_1,\ Y_2 = p_2.$ (2.5.2)

Comment: The second order integrals $\{X_1,X_2\}$ postulated in the formulation of the problem are in this case second order polynomials in Y_1 and Y_2, (and thus are elements of the enveloping algebra of the Lie algebra e(3)).

The proof of the theorem is given in section 2.4 of the paper. The essence of the proof is that if the matrix R in (2.1.5) has rank 2, then R can (up to nonzero multipliers) be reduced to one of two forms

$$R_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

or

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

The "polar case" R_p occurs in cases I.a, II.a, II.b, III ($b_{33} \neq 0$), V.a ($b_{33} \neq 0$), and V.b. The "Cartesian case" R_c occurs in cases III ($b_{33} = 0$) and VI.

A further result established in this thesis concerns the case rank $r = 0$ treated in [**2**]. Namely the classification of the triplets of commuting integrals $\{H, X_1, X_2\}$ depends crucially on the fact the pontential $V(\vec{r})$ in (2.1.1) is a scalar one, depending on position $\vec{r}$ only. In the presence of velocity dependant potentials, e.g. in a magnetic field, a quadratic integral (2.1.3) will not necessarily have the form (2.1.1).

The situation here is similar to the one that occurs in the study of superintegrability with higher integrals of motion in E_2 and more generally in E_n . Linear compatibility conditions occur that can either be solved trivially (all coefficients vanish), or they provide ODEs for the potential. These ODEs are compatibility conditions for the existence of higher order integrals, together with the separability of the potential in V_2 . These additional ODEs are non linear and lead to "exotic" potentials in terms of elliptic functions, Painlevé transcendents or new functions having the Painlevé property [**15**], [**16**], [**17**], [**18**] and [**19**].

Chapitre 3

Applications de la théorie de l'intégrabilité à des situations physiques connues

Dans ce chapitre, qui est facultatif à la compréhension de ce mémoire, différents exemples d'applications physiques et concrètes de la théorie de l'intégrabilité seront donnés. Les exemples suivants sont des exemples connus et qui ont été étudiés et sortent du cadre de la recherche originale de ce mémoire. Ils sont mis ici pour donner un exemple plus concret et physique de systèmes intégrables, et ne fait que énoncer les intégrales de mouvement. Plus précisément, trois exemples seront abordés, dont un en mécanique classique sur trois situations particulières dans lesquelles la precession d'un corps rigide est un problème intégrable, un système d'équations aux dérivées partielles à $(1+1)$-dimensions, l'équation de Korteweg-de Vries, qui mènera à parler de la théorie des solitons, et finalement, un dans la théorie des modèles de cristaux ou des réseaux (lattice), à savoir le réseau de Toda.

3.1. Les toupies d'Euler, de Lagrange et de Kovalevskaya

Un exemple de problème d'intégrabilité important en génie mécanique et aérospatiale, notament pour la conception des turbomachines [**20**], est la précession des corps rigides. En mécanique classique, la précession d'un corps rigide tel qu'une toupie sous l'influence de la gravitation n'est généralement pas considéré comme un problème intégrable. Cependant, trois exemples célèbres le sont, à savoir les toupies d'Euler, de Lagrange et de Kovalevskaya. En plus du Hamiltonien de ces systèmes, ces corps rigides possèdent trois intégrales de mouvement desquelles surgissent l'intégrabilité.

Formulation Hamiltonienne des toupies

Une toupie classique est caractérisée par trois axes principaux, définis par les trois vecteurs orthogonaux $\hat{e}^1$, $\hat{e}^2$ and, $\hat{e}^3$, auxquels correspondent les moments d'inertie I_1, I_2 and, I_3. Dans une formulation Hamiltonienne des toupies, les variables dynamiques conjuguées sont les composantes du vecteur moment cinétique $\vec{L}$ le long des axes principaux

$$(l_1,l_2,l_3) = (\vec{L}\cdot\hat{e}^1,\vec{L}\cdot\hat{e}^2,\vec{L}\cdot\hat{e}^3) \tag{3.1.1}$$

et les composantes selon z des trois axes principaux

$$(n_1,n_2,n_3) = (\hat{z}\cdot\hat{e}^1,\hat{z}\cdot\hat{e}^2,\hat{z}\cdot\hat{e}^3) \tag{3.1.2}$$

L'algèbre de Poisson de ces variables est donnée par

$$\{l_a,l_b\} = \epsilon_{abc}l_c, \{l_a,n_b\} = \epsilon_{abc}n_c, \{n_a,n_b\} = 0 \tag{3.1.3}$$

Si la position du centre de masse est donné par $\vec{R}_{cm} = (a\hat{e}^1 + b\hat{e}^2 + c\hat{e}^3)$, le Hamiltonien d'une toupie est donné par

$$H = \frac{(l_1)^2}{2I_1} + \frac{(l_2)^2}{2I_2} + \frac{(l_3)^2}{2I_3} + mg(an_1 + bn_2 + cn_3), \tag{3.1.4}$$

et les équations du mouvement sont déterminées par

$$\dot{l}_a = \{H,l_a\}, \dot{n}_a = \{H,n_a\}. \tag{3.1.5}$$

Toupie d'Euler

La toupie d'Euler est une toupie sur laquelle aucun moment de force n'est appliqué. Le Hamiltonien de ce système est donné par

$$H_E = \frac{(l_1)^2}{2I_1} + \frac{(l_2)^2}{2I_2} + \frac{(l_3)^2}{2I_3}. \tag{3.1.6}$$

Les quatre constantes de mouvement sont alors l'énergie H_E et les trois composantes du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire,

$$(L_1,L_2,L_3) = l_1\hat{e}^1 + l_2\hat{e}^2 + l_3\hat{e}^3. \tag{3.1.7}$$

Toupie de Lagrange

La toupie de Lagrange est une toupie symétrique dont le centre de masse le long de l'axe de symétrie est au point $\vec{R}_{cm} = h\hat{e}^3$. Son Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{(l_1)^2 + (l_2)^2}{2I} + \frac{(l_3)^2}{2I_3} + mghn_3, \tag{3.1.8}$$

et ses quatre constantes de mouvement sont l'énergie H_L, la composante du moment cinétique le long de l'axe de symétrie l_3, le moment cinétique le long de l'axe z,

$$L_z = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3, \tag{3.1.9}$$

et enfin la norme de son vecteur n,

$$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2, \tag{3.1.10}$$

Toupie de Kovalevskaya

La toupie de Kovalevskaya est une toupie symétrique pour laquelle $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = \frac{I}{2}$, et le centre de masse est dans le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie, $\vec{R}_{cm} = h\hat{e}^1$. Le Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{(l_1)^2 + (l_2)^2 + 2(l_3)^2}{2I} + mghn_1. \tag{3.1.11}$$

Les quatre constantes de mouvement sont l'énergie H_K, l'invariant de Kovalevskaya,

$$K = \xi_+ \xi_-, \tag{3.1.12}$$

où les variables $\xi_\pm$ sont définies par

$$\xi_\pm = (l_1 \pm i l_2)^2 - 2mghI(n_1 \pm i n_2), \tag{3.1.13}$$

la composante du moment cinétique dans la direction z,

$$L_z = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3, \tag{3.1.14}$$

et enfin la norme de son vecteur n,

$$n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2, \tag{3.1.15}$$

3.2. L'équation de Korteweg-de Vries

Un lien fondammental entre la superintégrabilité des systèmes quantiques et la théorie des groupes de Lie permet de voir la théorie de la superintégrabilité comme une intégrabilité non-abélienne [**21**]. Dans cette optique, les systèmes intégrables de dimension infinie (les sytèmes de solitons), décrits par exemple par l'équation de Kadomstev-Petviashvili ou par l'équation de Schrödinger non-linéaire, sont superintégrables [**22**], [**23**], [**24**]. En effet, les symétries de ces équations forment des algèbres non-abéliennes ayant des sous-algèbres abéliennes (les symétries de Orlov-Shulman) de dimension infinies de flots commutatifs. Un exemple de ces systèmes est l'équation de Korteweg-de Vries, qui est un modèle mathématique des ondes se propageant sur la surfaces des eaux peu profondes. Elle est considérée comme l'exemple typique de modèles exactement résolubles d'équations aux dérivées partielles. C'est un système d'équations nonlinéaires dispersives pour une fonction ϕ de deux variables réelles x, et t,

$$\partial_t\phi + \partial_x^3\phi - 6\phi\partial_x\phi = 0. \tag{3.2.1}$$

Solutions d'ondes solitaires ou solitons

Considérons les solutions pour lesquelles une onde de forme fixe donnée par $f(x)$ maintient sa forme pendant sont voyage vers la droite avec une vitesse de phase c [**25**]. Une telle solution est donnée par $\phi(x,t) = f(x-ct-a) = f(X)$ où on a posé $X = x-ct-a$. Substituant cette solution dans l'équation de Korteweg-de Vries donne l'équation différentielle

$$-c\frac{df}{dX} + \frac{d^3f}{dX^3} - 6f\frac{df}{dX} = 0, \tag{3.2.2}$$

ou encore, en intégrant par rapport à X,

$$-cf + \frac{d^2f}{dX^2} - 3f^2 = A, \tag{3.2.3}$$

où A est une constante d'intégration. Si la variable X est interprétée comme étant une variable de temps virtuelle, alors f satisfait à l'équation de mouvement Newtonienne d'une particule soumise à un potentiel cubique de la forme

$$V(f) = -(f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + Af). \tag{3.2.4}$$

En posant $A = 0$, et $c > 0$, la fonction potentiel $V(f)$ possède un maximum local en $f = 0$, et il existe une solution pour laquelle $f(x)$ commence à ce point au temps virtuel $-\infty$, se rend à un minimum local, et ensuite se rend à un maximum local au temps $+\infty$. En d'autres termes, $f(x)$ approche 0 quand $X \to \pm\infty$. Cette forme est caractéristique de l'onde solitaire ou soliton. Plus précisément, la solution est donnée par

$$\phi(x,t) = -\frac{c}{2\cosh^2}[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - a)] \tag{3.2.5}$$

Intégrales de mouvement

L'équation de Korteweg-de Vries possède une infinité d'intégrales de mouvement invariables dans le temps [**26**]. Elles sont données explicitement par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n-1}(\phi,\partial_x\phi, \partial_x^2\phi,...)dx, \tag{3.2.6}$$

où les polynomes P_n sont définis par récurrence par

$$P_1 = \phi \tag{3.2.7}$$

$$P_n = -\frac{dP_{n-1}}{dx} + \sum_{i=1}^{n-2} P_i P_{n-1-i}. \tag{3.2.8}$$

Les premières intégrales de mouvement sont la masse $\int \phi dx$, la quantité de mouvement $\int \phi^2 dx$, et l'énergie $\int 2\phi^3 - (\partial_x\phi)^2 dx$ [**27**].

Paires de Lax

Pour la section suivante, il est nécessaire de réécrire l'équation de Korteweg-de Vries sous la forme de l'équation de Lax, $L_t = [L,A]$, où L est un opérateur de Sturm-Liouville, en écrivant,

$$\partial_t\phi = 6\phi\partial_x\phi - \partial_x^3\phi, \tag{3.2.9}$$

et en posant,

$$\begin{aligned} L =& -\partial_x^2 + \phi \\ A =& 4\partial_x^3 - 3[\phi\partial_x + \partial_x\phi] \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

3.3. Le réseau de Toda

Le réseau de Toda [**28**] est d'un intéret considérable pour les physiciens car il sert d'exemple pour les systèmes de réseaux nonlinéaires dans lesquels certaines ondes peuvent se propager sans déformation. Dans la limite du continu, le réseau de Toda est décrit par l'équation de Korteweg-de Vries nonlinéaire, ce qui permet de lier la théorie de ces réseaux avec la théorie du soliton. Le réseau de Toda est un modèle simple pour un cristal unidimensionel en physique de l'état solide. Il est donné par une chaine de particules exhibant des interaction du type Plus-Proche-Voisin et décrit par les équations du mouvement,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p(n,t) &= e^{-(q(n,t)-q(n-1),t))} - e^{-(q(n+1),t)-q(n,t))}\\ \frac{d}{dt}q(n,t) &= p(n,t),\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

où $q(n,t)$ est le déplacement de la n-ième particule de sa position d'équilibre, et $p(n,t)$ est sa quantité de mouvement. C'est un exemple type de système complètement intégrable ayant des solutions en ondes solitaires. Pour le voir, on pose

$$\begin{aligned}a(n,t) &= \frac{1}{2}e^{-(q(n+1,t)-q(n),t))/2}\\ b(n,t) &= -\frac{1}{2}p(n,t),\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Alors le réseau devient

$$\begin{aligned}\dot{a}(n,t) &= a(n,t)(b(n+1,t) - b(n,t))\\ \dot{b}(n,t) &= 2(a(n,t)^2 - a(n-1,t)^2)\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Dans ce cas, le réseau de Toda est équivalent à l'équation de Lax

$$\frac{d}{dt}L(t) = [P(t),L(t)] \tag{3.3.4}$$

où les opérateurs L et P, sont donnés par

$$\begin{aligned}L(t)f(n) =& a(n,t)f(n+1) + a(n-1,t)f(n-1) + b(n,t)f(n)\\ P(t)f(n) =& a(n,t)f(n+1) - a(n-1,t)f(n-1).\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

La matrice $L(t)$ a la propriété que toutes ses valeurs propres sont invariantes dans le temps, ce qui en fait des constantes de mouvement indépendantes et fait du réseau de Toda un système complètement intégrable.

Chapitre 4

Conclusion et suite

4.1. Résumé

Le problème adressé dans ce mémoire de maitrîse présent a été formulé dans les sections 2.1 et 2.2 et a été résolu dans les section 2.3 et 2.4. Dans des termes physiques, le problème était de trouver tous les systèmes Hamiltoniens classique et quantique complètement intégrables dans l'espace Euclidien E_3 de la forme (2.1.1). L'intégrabilité implique l'existence d'intégrales de mouvement X_1 et X_2 bien définies et en involution. Dans la thèse, X_1 et X_2 ont été restreintes à être des polynomes de second ordre en quantité de mouvement p_j, où $j = 1,2,3$.

La tâche était alors d'obtenir une solution complète des équations déterminantes, i.e., un system d'equations differentielles qui suivent des equations (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6). La resolution comprends l'analyse d'une matrice R définie dans (2.1.9) et utilisée dans (2.1.8). La matrice R est anti-symétrique $R = -R^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et peut alors avoir un rang $r(R) = r$, où $r = 0$ ou $r = 2$. Le cas $r = 0$ a été complètement résolu dans [**2**]. Le cas $r = 2$ était laissé ouvert et son analyse constitue la partie originale de ce mémoire. Le résultat principal de cette analyse est le théorème suivant

Théorème 4.1.1. *Si le rang de la matrice R satisfait $r = 2$ alors le potentiel $V(x,y,z)$ est invariant sous un sous-groupe Abelien de deux dimensions du groupe de Lie Euclidien $E(3)$ et permet l'existence de deux intégrales de mouvement de premier ordre $\{Y_1,Y_2\}$. Deux cas* *inéquivalents surviennent :*

$$1.\ V = V(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; Y_1 = p_3,\ Y_2 = L_3, \tag{4.1.1}$$

$$2.\ V = V(z)\ ; Y_1 = p_1,\ Y_2 = p_2. \tag{4.1.2}$$

Commentaire : Les intégrales de deuxième ordre $\{X_1,X_2\}$ postulées dans la formulation du problème sont dans ce cas des polynômes de second ordre en Y_1 et Y_2, (et sont alors des éléments de l'algèbre de Lie enveloppante e(3)).

La preuve du théorème est donnée dans la section 2.4 de ce mémoire. L'essence de la preuve est que si la matrice R dans (2.1.5) possède un rang de 2, alors R peut (a des multiples non-nuls près) être réduite à une des deux formes suivantes,

$$R_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

or

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le "cas polaire" R_p survient dans les cas I.a, II.a, II.b, III ($b_{33} \neq 0$), V.a ($b_{33} \neq 0$), et V.b. Le "cas cartésien" R_c survient dans les cas III ($b_{33} = 0$) et VI.

Un résultat supplémentaire établi dans ce mémoire concerne le cas de rang $r = 0$ traité dans [**2**]. Spécifiquement, la classification des triplets d'intégrales commutatives $\{H,X_1,X_2\}$ depend crucialement du fait que le potentiel $V(\vec{r})$ dans (2.1.1) soit scalaire, i.e., qu'il ne dépende que de la position $\vec{r}$. Dans la présence de potentiels dépendants de la vitesse, e.g., dans un champ magnétique, une intégrale quadratique dela forme (2.1.3) n'aurait pas nécessairement la forme (2.1.1).

La situation est similaire à celle de l'étude de la superintégrabilité avec des intégrales de mouvement d'ordre supérieur dans E_2, et plus généralement dans E_n. Des conditions de compatibilité linéaires en ressortent, qui peuvent être résolues trivialement (tous les coefficients sont nuls), ou bien donnent naissance à des équations différentielles ordinaires pour le potentiel. Ces équations différentielles sont des conditions de compatibilité pour l'existence d'intégrales de mouvement d'ordre supérieur ainsi que pour la séparabilité du potentiel. Elles sont non linéaires et donnent lieu à des potentiels "exotiques" en termes de fonctions elliptiques, de transcendants de Painlevé, ou de nouvelles fonctions ayant la propriété de Painlevé [**15**], [**16**], [**17**], [**18**] et [**19**].

4.2. Projets futurs

Le projet ayant été cloturé dans ce mémoire a donné naissance à deux autres projets sur lesquels travaillent en collaboration l'auteur, le superviseur ainsi que le professeur Libor Snobl de l'Université Tchèque Technique. Le premier aborde la supérintégrabilité dans le même cadre que ce mémoire, à savoir l'espace Euclidien E_3 muni d'un potentiel scalaire, et le second y ajoute un potentiel vecteur pour donner un Hamiltonien de la forme

$$H = -\frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r}) \tag{4.2.1}$$

où $\vec{A}(\vec{r})$, est le potentiel vecteur représentant le champ magnétique.

Supérintégrabilité dans E_3 avec un potentiel scalaire

L'article [**2**] combiné au travail fait dans ce mémoire, prouve que dans l'espace E_3, l'intégrabilité est une condition suffisante et nécéssaire pour la séparation des variables du potentiel. De plus ce même article a tenté de lier la superintégrabilité maximale dans E_3 (i.e. l'existence d'une autre paire d'intégrales de mouvement de second ordre $\{Y_1,Y_2\}$, qui commutent entre elles et avec l'Hamiltonien, sans nécessairement commuter avec $\{X_1,X_2\}$) à la multi-séparabilité, i.e. la séparation des variables dans plusieurs systèmes de coordonnées. Spécifiquement, il énonce tous les systèmes superintégrables qui admettent la séparation des variables en coordonnées sphériques, plus dans au moins un autre système. C'est N.W. Evans dans [**14**] qui a complété cette tâche dans tous les autres systèmes de coordonnées. La question qui manque pour cloturer le problème de la superintégrabilité est le cas où le système est superintégrable sans être maximalement superintégrable. Autrement dit, il faudrait qu'il existe une seule intégrale de mouvement suplémentaire Y_a.

Afin que le système considéré soit superintégrable de second ordre, il faut qu'il existe des intégrales de mouvement supplémentaires de second ordre de la forme

$$Y = a_{rs}L_rL_s + b_{rs}(p_rL_s + L_sp_r) + c_{rs}p_rp_s + \phi(\vec{r}) \tag{4.2.2}$$

tel que $[H,Y] = 0$, avec

$$H = -\frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{r}) \tag{4.2.3}$$

et le potentiel $V(\vec{r})$ est un des onze potentiels trouvés dans [**2**]. La condition $[H,Y] = 0$ dans laquelle les termes proportionnels aux puissances de p_i sont mis à zero donne un système de quatre équations différentielles générales déterminantes couplées pour $V(\vec{r})$ et $\phi(\vec{r})$. Au premier ordre, le coefficient de p_m, les trois équations suivantes sont obtenues (pour $m = 1,2,3$) :

$$\begin{aligned} &- a_{rs}x_jx_l\frac{\partial V}{\partial x_k}(\epsilon_{rjk}\epsilon_{slm} + \epsilon_{rjm}\epsilon_{slk}) - 2b_{rs}\epsilon_{slm}x_l\frac{\partial V}{\partial x_r} - 2b_{ms}\epsilon_{slr}x_l\frac{\partial V}{\partial x_r} - \\ &- 2c_{mr}\frac{\partial V}{\partial x_r} - \frac{\partial \phi}{\partial x_m} = 0 \end{aligned} , \tag{4.2.4}$$

où ϵ_{ikl} est le symbole de Levi-Civita, ou le tenseur complètement anti-symétrique, et le terme δ_{ik} est le delta de Kroenecker. Encore une fois, une sommation sur les indices répétés est sous-entendue. À l'ordre zéro, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} &- a_{rs}\epsilon_{rjk}\epsilon_{slm}(\delta_{kl}x_j\frac{\partial V}{\partial x_m} + x_jx_l\frac{\partial^2 V}{\partial x_m \partial x_k}) - b_{rs}\epsilon_{slm}(\delta_{lr}\frac{\partial V}{\partial x_m} + 2x_l\frac{\partial^2 V}{\partial x_m \partial x_r}) + \\ &+ c_{mr}\frac{\partial^2 V}{\partial x_m \partial x_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0 \end{aligned} , \tag{4.2.5}$$

dont la dérivée divisée par deux s'avère être simplement une conséquence différentielle des trois premières. Au second ordre, les coéfficients s'annulent et alors la relation $[H,Y] = 0$ donne trois équations au total. Le but de ce deuxième projet est de contraintre davantage les potentiels, les paramètres et la fonction $\phi(\vec{r})$, en utilisant les potentiels dans [**2**] dans les équations (4.2.4).

Références

[1] W. Miller Jr., S. Post, and P. Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46(42) :423001, 2013.

[2] A.A. Makarov, J.A. Smorodinsky, K.H. Valiev, and P. Winternitz. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. part i. the integrals of motion. 1967.

[3] J. Friš, V. Mandrosov, J.A. Smorodinsky, M. Uhlíř, and P. Winternitz. On higher symmetries in quantum mechanics. *Physics Letters*, 16(3) :354–356, 1965.

[4] P Winternitz, J.A. Smorodinskii, M. Uhlíř, and I. Frish. Symmetry groups in classical and quantum mechanics. *Yadern. Fiz.*, 4, 1966.

[5] W. Miller Jr. Symmetry and separation of variables. 1977.

[6] E.G. Kalnins, J.M. Kress, and W. Miller Jr. Separation of variables and superintegrability ; the symmetry of solvable systems. *IOP ebooks. Bristol, UK : IOP Publishing*, 2018.

[7] E.G. Kalnins. *Separation of variables for Riemannian spaces of constant curvature*, volume 28. Longman Scientific & Technical, 1986.

[8] S. Post and P. Winternitz. General nth order integrals of motion in the euclidean plane. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(40) :405201, 2015.

[9] A.P. Fordy. A Kaluza–Klein reduction of super-integrable systems. *Journal of Geometry and Physics*, 131 :210–219, 2018.

[10] P.G. Estévez, S. Kuru, J. Negro, and L.M. Nieto. Solutions of a class of duffing oscillators with variable coefficients. *International Journal of Theoretical Physics*, 50(7) :2046–2056, 2011.

[11] J.F. Cariñena, F.J. Herranz, and M.F. Rañada. Superintegrable systems on 3-dimensional curved spaces : Eisenhart formalism and separability. *Journal of Mathematical Physics*, 58(2) :022701, 2017.

[12] C.M. Chanu, L. Degiovanni, and G. Rastelli. The Tremblay-Turbiner-Winternitz system as extended hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 55(12) :122701, 2014.

[13] L.P. Eisenhart. Separable systems of stackel. *Annals of Mathematics*, pages 284–305, 1934.

[14] N.W. Evans. Superintegrability in classical mechanics. *Physical Review A*, 41(10) :5666, 1990.

[15] I. Abouamal and P. Winternitz. Fifth-order superintegrable quantum systems separating in cartesian coordinates : Doubly exotic potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 59(2) :022104, 2018.

[16] A.M. Escobar-Ruiz, J.C. López Vieyra, P. Winternitz, and İ. Yurduşen. Fourth-order superintegrable systems separating in polar coordinates. ii. standard potentials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 51(45) :455202, 2018.

[17] I. Marquette, M. Sajedi, and P. Winternitz. Fourth order superintegrable systems separating in cartesian coordinates i. exotic quantum potentials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 50(31) :315201, 2017.

[18] S. Gravel and P. Winternitz. Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 43(12) :5902–5912, 2002.

[19] S. Gravel. Hamiltonians separable in cartesian coordinates and third-order integrals of motion. *Journal of mathematical physics*, 45(3) :1003–1019, 2004.

[20] P.F. Pelz, P. Tuabert, and F.J. Cloos. Vortex structure and kinematics of encased axial turbomachines. *International Journal of Turbomachinery Propulsion and Power*, 3(2) :12, 2018.

[21] B. Sheftel, P. Tempesta, and P. Winternitz. Recursion operators, higher order symmetries and superintegrability in quantum mechanics. *Czechoslovak Journal of Physics*, 51(4) :392–399, 2001.

[22] Yu. A. Orlov and I. Shulman. Additional symmetries of the nonlinear schrodinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 64(2) :862–866, 1985.

[23] Yu. A. Orlov and I. Shulman. Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation. *Lett. Math. Phys.*, 12 :171, 1986.

[24] Yu. A. Orlov and P. Winternitz. Algebra of pseudo differential operators and symmetries of equations in the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy. *Journal of Mathematical Physics*, 34 :4644, 1997.

[25] A.F. Vakakis. Normal modes and localization in nonlinear systems. pages 105–108, 2002.

[26] R.M. Miura, C.S. Gardner, and M.D. Kruskal. Korteweg–de Vries equation and generalizations. ii. existence of conservation laws and constants of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 9(8) :1204–1209, 1968.

[27] M.W. Dingemans. Water wave propagation over uneven bottoms. *Advanced Series on Ocean Engineering*, 13 :733, 1997.

[28] M. Toda. Vibration of a chain with a non-linear interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 22(2) :431–436, 1967.