

Université de Montréal

**STABILITÉ DES BULLES DE MASSE NÉGATIVE  
DANS UN ESPACE-TEMPS DE DE SITTER**

par

**Antoine Savard**

Département de Physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

Août 2019



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

**STABILITÉ DES BULLES DE MASSE NÉGATIVE  
DANS UN ESPACE-TEMPS DE DE SITTER**

présenté par

**Antoine Savard**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Richard MacKenzie*

---

(président-rapporteur)

*Manu B. Paranjape*

---

(directeur de recherche)

*Georges Azuelos*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

*26 novembre 2019*

---



# Sommaire

---

L'existence de la masse négative a un sens parfaitement physique du moment que les conditions d'énergie dominante sont satisfaites par le tenseur énergie-impulsion correspondant. Jusqu'à maintenant, seules des configurations de masses négatives avaient été trouvées. On démontre l'existence de bulles de masse négative stables dans un espace-temps qui s'approche asymptotiquement d'un espace-temps de de Sitter. Les bulles sont des solutions aux équations d'Einstein qui correspondent à une région intérieure qui contient une distribution de masse spécifique séparée par une coquille mince de l'espace-temps à masse négative de Schwarzschild-de Sitter à l'extérieur.

Ensuite, on applique les conditions de jonction d'Israel à la frontière de la bulle ce qui impose la conservation d'énergie-impulsion à travers la surface. Les conditions de jonction donnent une équation pour un potentiel pour le rayon de la bulle qui dépend de la distribution de masse à l'intérieur, ou vice versa.

Finalement, on trouve un potentiel qui aboutit à une solution stable, statique et non-singulière, ce qui crée une distribution de masse interne qui satisfait les conditions d'énergie dominante partout à l'intérieur. Cependant, la bulle ne satisfait pas ces conditions. De plus, on trouve une solution stable, statique et non-singulière pour une géométrie interne de de Sitter pure. La solution est fondamentalement différente : elle requiert que la densité d'énergie de la bulle change avec le rayon. La condition d'énergie dominante est satisfaite partout.

## Mots clefs :

relativité générale, gravitation, trou noir, Schwarzschild-de Sitter, bulle mince, masse négative, conditions de jonctions d'Israel, métrique, conditions d'énergie dominante, solutions stables.



# Summary

---

Negative mass makes perfect physical sense as long as the dominant energy condition is satisfied by the corresponding energy-momentum tensor. Until now, only configurations of negative mass have been found. We demonstrate the existence of stable, negative-mass bubbles in an asymptotic de Sitter space-time. The bubbles are solutions of the Einstein equations which correspond to an interior region of space-time containing a specific distribution of mass separated by a thin wall from the exact, negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time in the exterior.

Then, we apply the Israel junction conditions at the wall which impose the conservation of energy and momentum across the wall. The junction conditions give rise to an effective potential for the radius of the wall that depends on the interior mass distribution, or vice versa.

Finally, we find a potential that gives rise to stable, non-singular, static solutions, which yields an interior mass distribution that everywhere satisfies the dominant energy condition. However, the energy momentum of the wall does not satisfy the dominant energy condition. Moreover, we find a stable, non-singular, static solution for a pure de Sitter geometry inside the bubble. The solution is fundamentally different: the energy density of the bubble is no longer a constant, but now varies with the radius. The dominant energy condition is everywhere satisfied.

## **Keywords:**

general relativity, gravitation, black hole, Schwarzschild-de Sitter, thin bubble, negative mass, Israel's junction conditions, metric, dominant energy condition, stable solutions.



# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des tableaux</b> .....	xiii
<b>Table des figures</b> .....	xv
<b>Liste des sigles</b> .....	xvii
<b>Notation</b> .....	xix
<b>Dédicace</b> .....	xxi
<b>Remerciements</b> .....	xxiii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. La géométrie différentielle</b> .....	5
1.1. Variétés .....	6
1.1.1. Espace tangent .....	7
1.1.2. Espace dual .....	9
1.2. Tenseurs .....	10
1.2.1. Identification .....	11
1.2.2. Métrique .....	12
1.3. Dérivées .....	14
1.3.1. Dérivées de Lie .....	14
1.3.2. Dérivées covariantes .....	17

1.4.	Construction d'objets mathématiques .....	18
1.4.1.	Géodésiques .....	19
1.4.2.	La métrique, revisitée .....	20
1.4.3.	Vecteurs de Killing .....	21
1.4.4.	Tenseur de Riemann .....	22
1.4.5.	Tenseur de Ricci .....	25
1.4.6.	Scalaire de Ricci .....	26
1.5.	Exemple : la 2-sphère .....	27
1.5.1.	Variété différentiable .....	27
1.5.2.	Espace tangent et son dual .....	29
1.5.3.	La métrique .....	30
1.5.4.	Connexion de Levi-Civita et les géodésiques .....	30
1.5.5.	Vecteurs de Killing .....	31
1.5.6.	Tenseur de Riemann, de Ricci et courbure scalaire .....	31
1.6.	Conclusion .....	32
<b>Chapitre 2.</b>	<b>La relativité générale .....</b>	<b>35</b>
2.1.	L'équation d'Einstein .....	36
2.1.1.	La variété « espace-temps » .....	36
2.1.2.	Les champs de matière .....	37
2.1.3.	Commentaires sur l'équation de champ d'Einstein .....	41
2.2.	Les conditions d'énergies .....	42
2.2.1.	La condition d'énergie faible .....	42
2.2.2.	La condition d'énergie nulle .....	43
2.2.3.	La condition d'énergie forte .....	43
2.2.4.	La condition d'énergie dominante .....	43
2.2.5.	Exemple : le fluide parfait .....	44
2.2.6.	Violation des conditions d'énergie .....	46

2.3.	Solution sur le dos d'une enveloppe .....	46
2.3.1.	Théorème de Birkhoff.....	49
2.3.2.	Théorème d'énergie positive.....	50
2.4.	Conclusion.....	50
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Hypersurfaces .....</b>	<b>53</b>
3.1.	Métrique induite.....	54
3.2.	Conditions de continuité.....	55
3.2.1.	Première condition.....	56
3.2.2.	Deuxième condition.....	57
3.3.	Exemple : effondrement gravitationnel.....	58
3.4.	Conclusion.....	59
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Résultats .....</b>	<b>61</b>
4.1.	Présentation de l'article.....	61
4.2.	Contributions.....	63
<b>Chapitre 5.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>77</b>
5.1.	Travaux futurs.....	78
<b>Bibliographie.....</b>		<b>81</b>



# Liste des tableaux

---

2.1	Conditions d'énergie .....	42
-----	----------------------------	----



## Table des figures

---

1.1	Illustration des cartes locales.....	8
1.2	Vecteurs de Killing .....	21
1.3	Transport parallèle sur une 2-sphère .....	24
2.1	Représentation du cône de lumière.....	37



## Liste des sigles

---

DEC	Condition d'Énergie Dominante ( <i>Dominant Energy Condition</i> )
dS	de Sitter
AdS	Anti de Sitter



# Notation

---

Nous adopterons tout au long de cet ouvrage la convention des signes de [1], c'est-à-dire que la métrique aura la signature  $(-1, +1, +1, +1)$ . De plus, on adopte la notation tensorielle de [2], c'est-à-dire que les tenseurs seront imprimés en caractère gras comme  $\mathbf{X}$  et les nombres — les composantes des tenseurs par exemple — en caractère normal  $X^a, X_f$ .

$\mathbb{R}^n$	tuplet de nombres réels de dimension $n$
$g_{ab}$	composantes de la métrique
$h_{ab}$	composantes de la métrique induite
$\eta_{ab}$	composantes de la métrique de Minkowski
$R^a_{bcd}$	composantes du tenseur de Riemann
$R^a_b$	composantes du tenseur de Ricci
$T_x(\mathcal{M})$	espace tangent au point $x$
$T_x^*(\mathcal{M})$	espace dual au point $x$
$A \otimes B$	produit tensoriel de $A$ et $B$
$A_{,a}$	dérivée partielle de $A$ par rapport à $x^a$
$A_{;a}$	composante $a$ de la dérivée covariante de $A$
$A^a$	composante contravariante du tenseur $A$
$A_a$	composante covariante du tenseur $A$
$\delta^a_b$	delta de Kronecker
$\Theta(l)$	distribution de Heaviside



(dédicace) À ma famille, amies et amis.



# Remerciements

---

Ce projet a passé au travers de plusieurs épreuves. Tantôt, on pensait que rien ne fonctionnerait, jusqu'à la joie de voir nos calculs aboutir, puis trouver des erreurs en cours de vérifications qui abolissaient le travail accompli et nous renvoyait sur la planche à dessin, pour finalement trouver une solution qui fonctionne. Cette gamme d'émotions, échelonnées sur plusieurs mois, fut une rude épreuve qui, sans le support de certaines personnes, aurait pu être pire que ce fut.

Je remercie mon directeur Manu, pour sa confiance et sa patience. Cela m'a permis d'apprendre une tonne de choses intéressantes et je le remercie de l'opportunité qu'il m'a donnée. Merci à Bruno de me donner ma chance au doctorat, et du même coup de remettre de la joie et un objectif à ma vie.

Je remercie aussi Natalia pour les discussions sur le projet et les calculs, de même que pour sa rigueur, trait qui m'a poussé à donner le meilleur de moi-même.

Merci à Victor et Benjamin, sans qui ces heures passées dans le bureau n'auraient pas été aussi agréables.

Merci à Jean-Pascal, compatriote de souffrances. On aura passé pas mal de temps à se gratter la tête, ne sachant pas trop ce qu'on ferait de nos vies. Et à oublier nos problèmes devant un mur d'escalade, ou un verre.

Merci à Charles, mon ancien colocataire, qui m'a énormément fait rire avec ses blagues grivoises et sa gaité contagieuse. On a passé pas mal de bon temps sur nos écrans, et c'était nécessaire pour décompresser.

Je tiens à remercier mes parents, qui ont toujours cru en moi, qui ont nourri ma soif de savoir et qui m'ont donné l'opportunité d'être là où je suis aujourd'hui. Merci d'avoir supporté mes interminables laïus à table les fins de semaines.

Finally, I thank my girlfriend Geneviève, my confidante, without whom I would have given up more than once under the weight of demoralization and who has always helped me see the good side of things. Her candor has made me smile more than once and I owe her all my time for listening to me talk about my worries without end.

# Introduction

---

La possibilité de la masse négative a toujours soulevé des questionnements. En effet, depuis qu'il est connu que la métrique de Schwarzschild reste valide pour des masses négatives autant que positives, quelques-uns se sont penchés sur la question. Il s'agit évidemment d'un sujet tabou, car cette masse négative va à l'encontre de la plus dure et ancrée des intuitions physiques, c'est-à-dire que les objets qui nous entourent possèdent tous a priori une masse positive, ou, à tout le moins, c'est ce que laissent croire toutes les mesures qui ont été faites à ce jour.

L'idée même de la masse négative en a rebuté plus d'un, mais les efforts des dernières années sur le sujet ont permis de faire les premiers pas vers une compréhension un peu plus adéquate de la représentation que l'on s'en fait. Par exemple, il fut montré qu'il existe des configurations de matière qui correspondent à des espaces-temps de Schwarzschild. Ces configurations furent bâties à partir de bulles d'espace-temps, un concept plus mathématique que physique.

Ces bulles furent très souvent étudiées dans d'autres contextes de la relativité générale, par exemple pour décrire l'effondrement gravitationnel d'une étoile en un trou noir, ou toute sorte de phénomènes plus ou moins exotiques. Par bulles, on entend que deux solutions d'espace-temps sont reliées entre elles par une interface, une hypersurface, et, souvent, on traite le cas à symétrie sphérique, c'est-à-dire un des problèmes qui se résolvent analytiquement. Dans ce cas-là, l'hypersurface est bel et bien une bulle, au sens où il s'agit d'une  $n$ -sphère.

Dans notre situation, on a voulu étudier les bulles à épaisseur infinitésimale et à symétrie sphérique justement. En effet, bien qu'il soit possible de traiter des bulles ayant une épaisseur finie, il nous a semblé davantage naturel de traiter la configuration idéale mathématique, celle qui est par le fait même la plus naturelle aussi en matière d'interprétation physique. En effet,

il suffit alors d'interpréter toute la discontinuité entre les deux solutions comme étant une paroi ayant une densité d'énergie et une tension, si discontinuité à l'interface il y a, bien sûr.

Cependant, il faut rester sur ses gardes lorsqu'on traite du sujet de la masse négative. En effet, étant donné que la relativité générale admet une infinité de solutions qui n'ont aucun sens physique, comme de permettre à des observateurs de voyager à des vitesses supraluminiques, ou les voyages temporels, ou encore les densités d'énergie négative ; il faut d'abord et avant tout s'entendre sur ce que veut dire être *physique* pour une solution donnée. À partir de là, il est alors possible de tenter de construire des solutions stables et, surtout, fiables. Dans cette optique, on a déterminé que les conditions d'énergies sont parfaitement adaptées à l'établissement de l'existence physique d'une solution. Les inégalités simples qu'elles engendrent sont de bons témoins et sont souvent faciles à vérifier ; leur transgression implique généralement que l'espace-temps trouvé permet des situations dans lesquelles un observateur pourrait mesurer des courants d'énergie se déplaçant à des vitesses supérieures à celle de la lumière, ou encore des densités d'énergie négative.

Par contre, le plus gros problème des avancées des dernières années est qu'elles ne traitent jamais de la stabilité des solutions, elles se limitent à l'existence de configurations de masses négatives. Ainsi, on s'attaque dans ce qui suit à donner une réponse à cette question épineuse qu'est la stabilité des bulles de masse négative. Pour ce faire, il faut trouver une manière d'écrire une équation dynamique pour le rayon d'une bulle de masse négative, et il faut que le potentiel en résultant possède un minimum local nul, de telle sorte que la solution soit statique et stable.

Dans le chapitre un, une introduction non exhaustive de la géométrie différentielle sera présentée. On s'inspirera de quelques excellents manuels comme [2], [3] et [4]. Ce sujet étant extrêmement vaste, on se contentera d'introduire les concepts pertinents à la compréhension du présent texte. Il s'agit du langage naturel de la relativité générale, et une bonne introduction est ici pertinente. On terminera le chapitre sur un exemple de calculs faits en géométrie différentielle.

Puis, le chapitre deux présentera la relativité générale dans les mathématiques développées au chapitre précédent, dans l'esprit de [5], [2] et [6] pour ne nommer que ceux-là. On y présentera des résultats classiques comme les équations d'Einstein, et une solution à celles-ci,

la métrique de Schwarzschild. De plus, on introduira les différents types de conditions d'énergie, étant donné qu'il s'agit de la base sur laquelle on s'appuie pour déterminer le caractère physique de nos solutions.

Ensuite, le chapitre trois sera nécessaire afin de pousser plus loin notre analyse de la relativité générale. Une discussion exhaustive sur les bulles minces y sera développée, de même que sur les conditions de jonction requises afin de coller des solutions entre elles. Cette section sera complétée par un exemple d'effondrement d'étoile afin d'illustrer simplement les concepts.

Finalement, c'est au chapitre quatre que nos résultats seront donnés. On présentera notre contribution sous forme d'un article. On commence par calculer de quelle manière les conditions de jonction d'Israel se traduisent dans le problème général qu'est celui de coller deux métriques de Schwarzschild-de Sitter le long d'une hypersurface. À partir de cela, il sera possible de définir une bulle d'espace-temps, et on se fiera aux conditions d'énergie afin d'établir si notre solution est physique.

Pour la distribution de masse à l'extérieur de la bulle, on prendra celle de Schwarzschild-de Sitter où la masse est négative et la constante cosmologique est strictement positive. À partir des conditions de jonction d'Israel, nous pourrons trouver des solutions en supposant que la densité d'énergie de la bulle n'est pas une constante pour un espace-temps de de Sitter à l'intérieur de la bulle. Il sera aussi possible d'écrire une équation dynamique pour le rayon de la bulle. Ainsi, le potentiel qui en découlera dépendra des distributions de masse externe et interne et cette dernière pourra être trouvée analytiquement en choisissant un potentiel qui répond aux exigences requises afin d'avoir une solution stable, statique et sans singularité. Ensuite, il suffira de vérifier que nos distributions de masse internes répondent aux exigences des conditions d'énergie choisies.



# Chapitre 1

---

## La géométrie différentielle

La géométrie différentielle est l'étude des variétés, des objets mathématiques qui sont la généralisation des surfaces en deux dimensions. En général, les variétés peuvent être de dimensions finies ou infinies, être définies sur les nombres réels ou complexes. Cependant, nous nous limiterons ici à des variétés de dimensions finies sur les réels. Leur utilité vient surtout du fait qu'elles sont parfaitement adaptées à l'étude des dérivées et des champs vectoriels que l'on connaît sur des espaces euclidiens, c'est-à-dire plats, mais sur des structures courbées. Ainsi, cette section servira à généraliser les concepts du calcul différentiel sur des surfaces plus générales, ce qui demande un certain effort.

Nous débuterons par donner une définition rigoureuse de ce qu'est une variété différentielle. Par le fait même, il sera nécessaire de généraliser les notions de champs de vecteurs et l'espace de leur dual, les covecteurs, sur ces variétés afin de pouvoir parler de variétés différentiables.

Par la suite, nous définirons le concept abstrait de tenseur de rang arbitraire et la règle de transformation qui permet de les identifier. Nous en profiterons pour définir un tenseur très important dans la description des variétés, la métrique. Elle donne une notion de « distance » sur ces surfaces généralisées.

Ensuite, nous pourrions définir deux types de dérivées sur les variétés. On commencera par introduire la dérivée de Lie, une dérivée qui existe naturellement sur toute variété, mais qui manque de puissance afin de décrire précisément de quelle manière les tenseurs varient. Puis, on règlera ce problème en définissant une structure mathématique supplémentaire, les connexions, qui nous permettront de construire les dérivées covariantes qui seront plus appropriées pour créer des équations tensorielles.

Puis, on construira des objets à l'aide des définitions précédentes. On commencera avec la construction des géodésiques, les chemins les plus courts entre deux points. On enchaînera en revisitant la métrique, armé des nouveaux concepts de dérivées. Ensuite, on définira les vecteurs de Killing, des objets qui permettent d'identifier les isométries — les symétries — des variétés. On terminera ceci en construisant le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci, trois objets qui permettent de discuter de la courbure d'une variété.

Ainsi, on terminera cette section sur un exemple concret, mais tout de même relativement accessible, qui permettra de bien comprendre de quelle manière on se sert de ces concepts en pratique : la 2-sphère.

## 1.1. Variétés

Une variété est essentiellement un espace qui localement possède de fortes ressemblances avec un espace euclidien. On entend par « fortes ressemblances » que si on regarde la variété d'assez près, elle aura l'air plate. Notons par exemple la Terre, une sphère en première approximation, qui de notre point de vue semble bien plate ; ceci est seulement dû au fait que nous sommes très petits et à sa surface ; un individu s'élevant assez haut pourra sans problème voir sa courbure. Ainsi, il est possible de définir un ensemble de morceaux euclidiens assez petits qui ensemble peuvent recouvrir la variété<sup>1</sup>. Cette structure permet alors de définir la différentiation, mais ne permet pas de faire la distinction entre différents systèmes de coordonnées. Cela implique donc que les seuls objets définis par la variété sont nécessairement des objets qui sont indépendants du choix des coordonnées. Donnons maintenant une définition plus précise.

Soit  $\mathbb{R}^n$ , l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Il s'agit de l'ensemble des  $n$ -tuples  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  avec  $-\infty < x^i < \infty$ . Une application  $\phi$  d'un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$  à un second ouvert  $\mathcal{O}'$  de  $\mathbb{R}^m$  est dite être de classe  $\mathcal{C}^r$  si les coordonnées  $(x'^1, x'^2, \dots, x'^m)$  de l'image  $\phi(x)$  sont des fonctions  $r$ -fois différentiables des coordonnées  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  de  $x$  dans  $\mathcal{O}$ . Si cela est vrai pour tout  $r \geq 0$ , alors on écrit  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus, on entend que  $\mathcal{C}^0$  veut dire que l'application est continue.

---

1. En réalité, il existe plusieurs manières de recouvrir une sphère. La méthode la plus connue est très certainement celle où on prend six hémisphères, un pour chacun des deux côtés de chaque axe, pour la recouvrir.

Maintenant, on définit une variété  $\mathcal{C}^r$  à  $n$ -dimensions  $\mathcal{M}$  comme étant un ensemble  $\mathcal{M}$  muni d'un atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ , c'est-à-dire une collection de cartes  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  où les  $\mathcal{U}_\alpha$  sont des sous-ensembles de  $\mathcal{M}$  et les  $\phi_\alpha$  sont des applications bijectives des  $\mathcal{U}_\alpha$  aux ouverts dans  $\mathbb{R}^n$  telles que

- (1) les  $\mathcal{U}_\alpha$  recouvrent  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ ;
- (2) si  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$  est non vide, alors l'application

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

est une application  $\mathcal{C}^r$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et est un difféomorphisme<sup>2</sup>. La définition qu'on vient de donner semble un peu abstraite alors essayons de comprendre ce que cela veut dire. Les  $\mathcal{U}_\alpha$  sont des voisinages locaux des points  $x$  définis par les applications  $\phi_\alpha$ . On veut dire par là que si  $x \in \mathcal{U}_\alpha$  alors les coordonnées de  $x$  sont les coordonnées de  $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$ . De plus, la condition (2) veut simplement dire que dans l'intersection de deux voisinages locaux  $\mathcal{U}_\alpha$  les coordonnées dans l'un des voisinages de  $\mathbb{R}^n$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^r$  des coordonnées de l'autre voisinage de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci est illustré à la figure (1.1).

Évidemment, il y a beaucoup de choses à dire sur les variétés, mais nous allons nous arrêter ici, au profit d'exemples simples qui forment l'intuition de cette définition. Par exemple,  $\mathbb{R}^2$ , le plan euclidien à 2 dimensions est une variété. On peut prendre les coordonnées standard  $x$  et  $y$  telles que  $-\infty < x < \infty$  et  $-\infty < y < \infty$ , et l'application identité pour  $\phi$ . Dans ce cas, il suffit d'un seul voisinage local. Mais dans les coordonnées polaires, il faut au moins deux voisinages locaux pour recouvrir le plan.

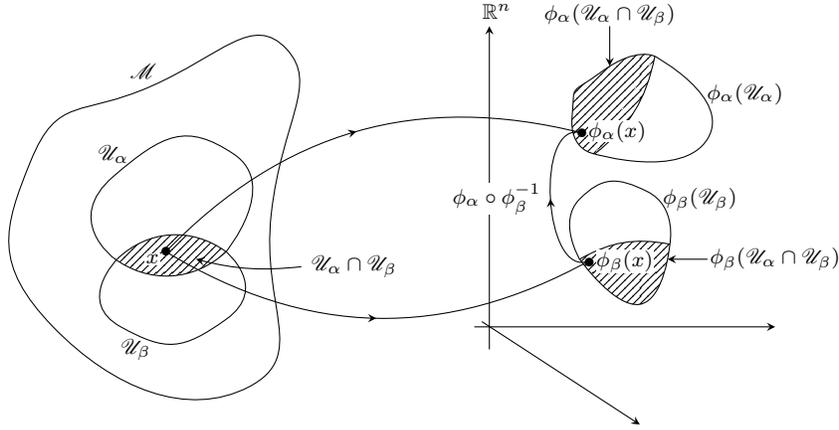
### 1.1.1. Espace tangent

La structure de la variété impose un ensemble de structures géométriques qu'il est possible de définir. Les plus simples d'entre elles sont les vecteurs. On exploite alors le fait que la variété soit localement plane pour y définir la notion de calcul différentiel; cela définira naturellement une structure vectorielle sur notre variété.

Soit une  $\mathcal{C}^k$  variété  $\mathcal{M}$ , qui contient un point  $x$ . Choisissons aussi une carte  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert qui contient  $x$ . Considérons aussi une courbe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\gamma(t)$ , sur  $\mathcal{M}$ . Il s'agit

---

2. Un difféomorphisme est un homoémorphisme différentiable, et dont l'inverse est aussi différentiable. Un homoémorphisme est une application continue bijective et dont l'inverse est continu aussi. Une application continue est une application dont la préimage d'un ouvert est un aussi un ouvert.



**Figure 1.1.** Dans l'intersection de deux voisinages locaux  $\mathcal{U}_\alpha$  et  $\mathcal{U}_\beta$ , les coordonnées des deux voisinages de  $\mathbb{R}^n$  sont reliées par  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ , une application  $C^r$ . On comprend bien visuellement comment des voisinages de  $\mathbb{R}^n$  peuvent recouvrir la variété  $\mathcal{M}$ . Dessin inspiré de [2].

simplement d'une application d'un intervalle arbitraire  $(-1,1)$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$  sur la variété  $\mathcal{M}$ , de sorte que  $\gamma(0) = x$ . C'est donc une application à un paramètre,  $t$ , dans un système de coordonnées arbitraires  $x^a$  où  $a = 1, 2, \dots, n$ . Ainsi, on peut créer les fonctions  $\phi \circ \gamma(t) : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , qui sont différentiables au sens usuel, et dont les dérivées nous donnent les vecteurs de la base de l'espace tangent<sup>3</sup>. L'ensemble des vecteurs tangents à une courbe passant par le point  $x$  forme alors un espace vectoriel. Mettons cela en pratique. Si on veut connaître la pente d'une fonction scalaire  $f(x^a)$  le long de la courbe sur la variété au point  $x$ , il suffit alors de prendre la dérivée dans le système de coordonnées local, donc par rapport aux coordonnées de  $x$  :

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_\gamma \Big|_{t=0} = \frac{dx^a}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^a} \Big|_{\gamma(0)}. \quad (1.1)$$

Le vecteur  $(d/dt)_\gamma \Big|_{t=0}$ , ou plus précisément vecteur *contravariant*, est un opérateur qui assigne la valeur du gradient de  $f$  au vecteur tangent à la courbe  $\gamma(t)$  au point  $x$ . Il s'agit d'une combinaison linéaire des vecteurs de base  $(\partial/\partial x^a)_x$ , étant donné qu'on somme sur les

3. On ne peut pas simplement prendre la dérivée de la courbe, c'est-à-dire,  $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ , car cela n'est valide que si la variété est plongée dans  $\mathbb{R}^n$ , ce qui n'est pas toujours le cas. De plus, il est important de noter que cela est vrai à une relation d'équivalence près. En effet, pour faire proprement les choses, il faut définir une relation d'équivalence entre les courbes différentes de sorte à ce que si deux courbes définissent le même vecteur, il n'y ait aucun problème.

indices répétés. Ainsi, tous les vecteurs tangents au point  $x$  s'écrivent comme une combinaison linéaire des dérivées par rapport aux composantes locales  $(\partial/\partial x^a)_x$ ; on écrira alors qu'un vecteur se décompose en  $\mathbf{A} = A^a(\partial/\partial x^a) = A(x^a)(\partial/\partial x^a) = (dx^a/dt)|_x(\partial/\partial x^a)$ . On écrit que  $\mathbf{A} = A^a \mathbf{E}_a$ , où les  $\{\mathbf{E}_a\}$  sont une base quelconque. Il s'agit de la base de l'espace vectoriel tangent à  $x$  trouvé plus haut, que l'on nomme  $T_x(\mathcal{M})$ .

On peut aisément calculer de quelle manière se transforment ces vecteurs sous un changement de coordonnées arbitraires :

$$\left. \frac{dx^{a'}}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^{a'}} \right|_{\gamma(0)} = \frac{dx^{a'}}{dx^a} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^a}{dx^{a'}} \frac{\partial f}{\partial x^a} \Big|_{\gamma(0)} = \left. \frac{dx^a}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^a} \right|_{\gamma(0)}. \quad (1.2)$$

Comme attendu,  $(df/dt)_\gamma|_{t=0}$  est un invariant; la pente d'une fonction est indépendante des coordonnées. Donc, en utilisant cela, on dit que tout objet  $A^a$  qui se transforme comme

$$A^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} A^a, \quad (1.3)$$

sous un changement de coordonnées est un vecteur. Mais qu'en est-il des objets dont la transformation est inverse?

### 1.1.2. Espace dual

Maintenant que nous avons une bonne intuition de ce qu'est un vecteur sur une variété, il faut s'attaquer à l'opération qui prend ce vecteur et l'envoie sur un nombre. On veut donc définir ici une fonction linéaire à valeur réelle qui prend en argument des vecteurs de  $T_x(\mathcal{M})$ . On appelle ces fonctions des *covecteurs* de par leur existence duale à celle des vecteurs. Il s'agit d'un cas particuliers de ce qu'on appelle les formes différentielles; ce sont des *un-formes* dans notre cas, où encore des vecteurs *covariants*.

Il s'agit donc d'un objet  $\omega$  au point  $x$ , qui prend un vecteur  $\mathbf{X}$  de  $T_x(\mathcal{M})$  et qui associe la quantité  $\langle \omega, \mathbf{X} \rangle$  à un nombre réel. Tout comme nous avons fait précédemment, nous allons en trouver une base. On cherche des covecteurs  $\{\mathbf{E}^a\}$  tels que lorsqu'on les applique sur la base de vecteurs qu'on emploie plus haut  $\mathbf{E}_a = \partial/\partial x^a$ , on ait  $\langle \mathbf{E}^a, \mathbf{E}_b \rangle = \delta^a_b$ . Ceci nous permet alors d'écrire :

$$\langle \omega, \mathbf{X} \rangle = \langle \omega_a \mathbf{E}^a, X^b \mathbf{E}_b \rangle = \omega_a X^a. \quad (1.4)$$

Afin de bien voir ce qui se passe, on introduit, comme précédemment, une fonction  $f$  sur  $\mathcal{M}$ . On définit alors la différentielle  $df$  de  $f$  au point  $x$  comme étant la un-forme qui

respecte :

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = Xf. \quad (1.5)$$

Si les coordonnées locales sont les  $x^a$ , alors la différentielle de  $f$  s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a \quad (1.6)$$

Un choix judicieux de base serait alors simplement  $dx^a = \mathbf{E}^a$ ; on a bel et bien :

$$\left\langle dx^b, \frac{\partial}{\partial x^a} \right\rangle = \frac{\partial x^b}{\partial x^a} = \delta^b_a \quad (1.7)$$

L'espace engendré par ces un-formes est noté  $T_x^*(\mathcal{M})$ . Cet espace est l'*espace dual* à l'espace tangent  $T_x(\mathcal{M})$ . Un exemple simple pour comprendre les dernières lignes est de penser aux vecteurs comme étant des vecteurs colonnes qui engendrent l'espace tangent, et aux un-formes comme étant les vecteurs lignes comme engendrent l'espace dual. Ainsi, lorsqu'on applique une un-forme sur un vecteur par le produit matriciel, on retrouve bien un nombre. En utilisant (1.2), la règle de transformation sous un changement de coordonnées des vecteurs covariants est la suivante :

$$\omega_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \omega_a. \quad (1.8)$$

Les règles de transformation (1.3) et (1.8) décrivent de quelle manière les composantes de ces objets se transforment sous un changement de coordonnées. Ainsi, en faisant la même transformation à ces deux objets, on peut construire  $\langle \omega, \mathbf{A} \rangle = A^a \omega_a$  qui est un scalaire, et donc un objet invariant par rapport au choix de système de coordonnées.

## 1.2. Tenseurs

En utilisant ces définitions, il est possible de généraliser les concepts d'espace tangent et dual en prenant plusieurs de ceux-ci et en les multipliant ensemble. Ainsi, un *tenseur*  $\mathbf{T}$  de type  $(r, s)$  est une fonction linéaire dans chacun de ces arguments qui prend en argument  $(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$ , soit  $r$  un-formes et  $s$  vecteurs, élément de l'ensemble ordonné :

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_x^* \times T_x^* \times \dots \times T_x^*}_{r \text{ fois}} \times \underbrace{T_x \times T_x \times \dots \times T_x}_{s \text{ fois}}, \quad (1.9)$$

qui est créé à l'aide du produit cartésien, et qui envoie cet élément sur le nombre  $T(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$ . L'espace engendré par ces fonctions au point  $x$  est ce qu'on appelle le *produit tensoriel*

$$T_s^r(x) = \underbrace{T_x \otimes \dots \otimes T_x}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_x^* \otimes \dots \otimes T_x^*}_{s \text{ fois}}. \quad (1.10)$$

Notons qu'en particulier, un tenseur de type  $(1,0)$  est un vecteur  $T_0^1(x) = T_x$  et qu'un tenseur de type  $(0,1)$  est un vecteur dual  $T_1^0(x) = T_x^*$ . Cet espace doté de l'addition usuelle et la multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel de dimension  $n^{r+s}$ .

Ainsi, si on prend  $\mathbf{Y}_i \in T_x$ , où  $i = 1, \dots, r$ , et  $\boldsymbol{\eta}^j \in T_x^*$ , où  $j = 1, \dots, s$ , alors l'élément  $\mathbf{Y}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{Y}_r \otimes \boldsymbol{\eta}^1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\eta}^s \in T_s^r(x)$  prend un élément  $(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \in \Pi_r^s$  et l'envoie sur le nombre

$$\langle \boldsymbol{\omega}^1, \mathbf{Y}_1 \rangle \langle \boldsymbol{\omega}^2, \mathbf{Y}_2 \rangle \dots \langle \boldsymbol{\omega}^r, \mathbf{Y}_r \rangle \langle \boldsymbol{\eta}^1, \mathbf{X}_1 \rangle \langle \boldsymbol{\eta}^2, \mathbf{X}_2 \rangle \dots \langle \boldsymbol{\eta}^s, \mathbf{X}_s \rangle. \quad (1.11)$$

### 1.2.1. Identification

Évidemment, il existe une méthode beaucoup plus simple pour comprendre comment agissent les tenseurs, et comment les identifier. Il suffit en fait d'utiliser les bases duales qu'on a introduites plus haut,  $\{\mathbf{E}_a\}$  et  $\{\mathbf{E}^a\}$ . Pour ce faire, on commence par construire une base de l'espace des tenseurs; ceci est trivial, il suffit de prendre les produits tensoriels des bases de chacun des espaces tangents et de leur dual comme dans la définition (1.10) :

$$\{\mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_r} \otimes \mathbf{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{b_s}\}, \quad (1.12)$$

où tous les indices prennent leur valeur entre 1 et  $n$ . En utilisant cette base, on décompose aisément un tenseur  $\mathbf{T}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{T} = T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \mathbf{E}_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{a_r} \otimes \mathbf{E}^{b_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{b_s}, \quad (1.13)$$

où les  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$  sont les composantes de  $\mathbf{T}$  dans les bases duales et sont simplement données par  $T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = T(\mathbf{E}^{a_1}, \dots, \mathbf{E}^{a_r}, \mathbf{E}_{b_1}, \dots, \mathbf{E}_{b_s})$ . En utilisant maintenant les transformations pour les vecteurs et les covecteurs (1.3) et (1.8), on déduit trivialement que

$$T^{a'_1 \dots a'_r}_{b'_1 \dots b'_s} = \frac{\partial x^{a'_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial x^{a'_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{b'_1}} \dots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial x^{b'_s}} T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} \quad (1.14)$$

est la règle de transformation pour les composantes des tenseurs.

Enfin, on définit la *contraction* d'un tenseur comme étant le tenseur de type  $(r-1, s-1)$  dont un des indices est covariant et l'autre contravariant par

$$C_1^1(\mathbf{T}) = T^{ab\dots c}_{ade} \mathbf{E}_b \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_c \otimes \mathbf{E}_d \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_e. \quad (1.15)$$

Il est évident qu'on pourrait contracter n'importe quelles deux paires d'indices, tant qu'il y en ait un en haut et un en bas. De plus, la contraction d'une paire d'indices ne dépend pas des coordonnées, mais la contraction de plusieurs paires d'indices oui.

### 1.2.2. Métrique

Un tenseur extrêmement important à l'étude des variétés est la *métrique*. En effet, ce tenseur sert à généraliser le concept de produit scalaire, soit prendre deux vecteurs et les passer dans une machine spéciale qui les transformera en nombre. Cette machine, la métrique, est un tenseur  $\mathbf{g}$  en un point  $x \in \mathcal{M}$  symétrique<sup>4</sup> et de type  $(0,2)$ . La métrique associe la grandeur  $\sqrt{|g(\mathbf{X}, \mathbf{X})|}$  à chaque vecteur  $\mathbf{X} \in T_x$ . Elle permet aussi de dire si deux vecteurs sont orthogonaux, il suffit de vérifier si  $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ .

Cependant, ceci ne nous permet pas de calculer grand-chose. Il faut choisir une base pour calculer plus facilement. Dans la base  $\{\mathbf{E}_a\}$ , les composantes de la métrique sont simplement données par :

$$g_{ab} = g(\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b) = g(\mathbf{E}_b, \mathbf{E}_a), \quad (1.16)$$

par symétrie. Et si on choisit la base des coordonnées de l'espace tangent qu'on a employée précédemment  $(\partial/\partial x^a)$ , alors la métrique est simplement :

$$\mathbf{g} = g_{ab} dx^a \otimes dx^b. \quad (1.17)$$

En dimension finie, la métrique décrit un isomorphisme entre l'espace tangent et son dual. En effet, on peut s'en servir pour monter ou descendre des indices. Par exemple, si  $A_a$  sont les composantes d'un vecteur covariant, alors on peut calculer les composantes du vecteur

---

4. Un tenseur est dit symétrique si il est égal à sa partie symétrique, c'est-à-dire que sa partie antisymétrique est nulle, donc que  $T_{[a_1\dots a_r]} = 0$ . La partie symétrique d'un tenseur est  $T_{(a_1\dots a_r)} = \frac{1}{r!} \left( \sum_{\text{perm. des } a_i} T_{a_1\dots a_r} \right)$  et la partie antisymétrique est  $T_{[a_1\dots a_r]} = \frac{1}{r!} \left( \sum_{\text{alternée sur perm. des } a_i} T_{a_1\dots a_r} \right)$ .

contravariant par l'application de  $g^{ab}$  sur le premier :  $A^b = g^{ab}A_a$ ,  $A_b = g_{ab}A^a$ <sup>5</sup>. On peut aisément généraliser cela à un nombre arbitraire d'indices ; il suffit alors de multiplier l'expression par une métrique, avec les indices adéquats, pour chaque indice à monter/descendre. Avec cette nouvelle approche, il devient aisé de calculer la norme d'un vecteur, il s'agit simplement de faire

$$\sqrt{|g(\mathbf{X}, \mathbf{X})|} = \sqrt{|g_{ab}X^aX^b|} = \sqrt{X^aX_a}. \quad (1.18)$$

Pour que la métrique engendre un produit scalaire défini positif<sup>6</sup>, il faut que le nombre de valeurs propres positives de la matrice  $(g_{ab})$  soit égale à la dimension de la variété soit  $n$ . On appellera alors cela une variété *riemannienne*. Si une ou plusieurs des valeurs propres sont négatives, on appellera cela une *pseudo-métrique* et la variété sera dite pseudo-riemannienne. Dans le cas spécial où seulement une valeur propre est négative, la métrique sera dite lorentzienne. Dans ce cas, les vecteurs dans  $T_x$  pourront être soit *temporels*, *nuls* ou *spatiaux*. Dans l'ordre, cela veut simplement dire que la norme du vecteur sera négative, nulle, ou positive. Ce dernier cas sera extrêmement important au prochain chapitre, et il est bon de le garder en mémoire.

Il est aussi très important de noter que la métrique, comme tous les tenseurs, n'est pas définie sur la variété directement, mais plutôt sur l'espace tangent et son dual. Il est aisé de voir pourquoi cela est vrai. Il suffit de penser à un tenseur de type  $(1,0)$ , ou un vecteur. Il est clair que les vecteurs sont les droites tangentes à la variété, ainsi, ils «sortent» de la variété et ils ne sont donc pas dessus. Afin de rapporter cette distance sur la variété, il faut procéder avec un peu plus de précautions. Ainsi, la distance entre deux points  $x$  et  $y$  sur une variété  $\mathcal{M}$  qui sont reliés par une courbe  $\mathcal{C}^r$   $\gamma(t)$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ , et dont le vecteur tangent à la courbe est  $(\partial/\partial t)$ , s'écrit tout simplement, à l'aide de l'équation (1.1), comme étant la quantité suivante :

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left|g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right|} dt = \int_0^1 \sqrt{\left|g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial t} \frac{\partial x^b}{\partial t}\right|} dt. \quad (1.19)$$

---

5. Évidemment, il faut que la métrique ait un inverse, qu'elle soit non singulière, mais on assume ici que ce sera toujours le cas dans ce qu'on considère.

6. Un produit scalaire défini positif est un produit scalaire  $f$  tel que  $f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \geq 0$  avec l'égalité seulement si  $\mathbf{X} = 0$ .

Cette quantité revêt une intuition ; la grandeur du vecteur tangent à la courbe intégrée sur la longueur de la courbe permet de calculer la véritable distance sur la variété. On exprimera symboliquement aussi l'élément de distance infinitésimal comme

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.20)$$

Bien qu'il soit possible de mesurer la distance entre deux points directement, il n'est pas possible, avec les outils développés jusqu'à présent, de combiner des tenseurs qui ne sont pas au même point, étant donné qu'ils vivent dans des espaces tangents/cotangents distincts. Par exemple, les opérations  $T^a(x)\hat{T}^b(y)$  et  $T^a(x) - T^a(y)$  ne sont pas des opérations tensorielles. Ceci implique que les opérations de différentiation sur les tenseurs ne sont pas du tout triviales, et c'est sur ce point que nous allons nous pencher.

### 1.3. Dérivées

Comme les opérations tensorielles sont seulement définies lorsque les tenseurs sont au même point, il faut se munir d'une règle qui nous permettra de transporter des tenseurs d'un point à un autre afin de construire nos opérateurs de dérivées par exemple. Il est possible de définir trois types de dérivées sur les variétés, la dérivée extérieure, la dérivée de Lie et la dérivée covariante. Les deux premiers types sont définis entièrement par la structure de la variété, tandis que la troisième nécessite l'introduction de structures supplémentaires. Cependant, nous introduirons seulement la dérivée de Lie et la dérivée covariante, la dérivée extérieure étant moins utile au présent document.

#### 1.3.1. Dérivées de Lie

La dérivée de Lie fonctionne de la manière suivante : on veut définir une manière de calculer comment un champ tensoriel change le long de flot d'un autre champ de vecteurs. Par flot, on parle vraiment des courbes intégrales d'un champ vectoriel. Les courbes intégrales sont les solutions  $\gamma(t)$  au système d'équations

$$\frac{dx^a}{dt} = X^a(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad (1.21)$$

où les  $\{x^a\}$  sont les coordonnées locales et  $\mathbf{X} = X^a(\partial/\partial x^a)$  est un champ de vecteurs sur  $\mathcal{M}$ . Ces courbes sont donc simplement les courbes passant par un point  $x \in \mathcal{M}$  dont le vecteur tangent en tout point est  $\mathbf{X}|_{\gamma(t)}$ .

Le champ vectoriel  $\mathbf{X}$  définit une famille de fonction, les  $\phi_t$ , qui sont des difféomorphismes à un paramètre  $t$ . On veut dire par cela que pour un point initial  $x \in \mathcal{U}$ , l'application  $\phi_t$  transporte le point  $x$  à une distance paramétrique  $t$  le long de la courbe intégrale  $\gamma(t)$  de  $\mathbf{X}$ . La dérivée de Lie d'une fonction  $f$  par exemple est alors simplement calculée comme étant la différence entre la fonction évaluée en deux points sur la courbe intégrale :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(\phi_t(x)) - f(x)) = \frac{d}{dt}f(\phi_t(x))|_{t=0} = Xf(x), \quad (1.22)$$

qu'on a calculé en (1.1). Maintenant, on peut faire une définition analogue pour une un-forme  $\omega$ . Sa dérivée de Lie est un autre vecteur covariant :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\phi_t^*\omega|_x - \omega(x)). \quad (1.23)$$

Et de même pour un vecteur contravariant  $\mathbf{Y}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}|_x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathbf{Y}(x) - \phi_{t*}\mathbf{Y}|_x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{-t}(\phi_{t*}\mathbf{Y}|_x - \mathbf{Y}(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\phi_{-h*}\mathbf{Y}|_x - \mathbf{Y}(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\phi_h^*\mathbf{Y}|_x - \mathbf{Y}(x))^7. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Notons ici que la définition est un peu différente des deux précédentes, mais qu'il est possible de la ramener à une formulation similaire aux deux définitions précédentes par certains truchements. D'abord, il faut comprendre de quelle manière fonctionne la définition initiale. Le champ de vecteurs  $(\phi_{t*}\mathbf{Y})|_x = \phi_{t*}(\mathbf{Y}|_{\phi_{-t}(x)})$  est obtenu en évaluant  $\mathbf{Y}$  au point  $\phi_t^{-1}(x) = \phi_{-t}(x)$ , puis en bougeant le vecteur à nouveau en  $x$  par l'action de  $\phi_{t*}$ . Puis, on peut utiliser le fait que  $\phi_t^*\mathbf{Y}|_x = (\phi_t^{-1})_*(\mathbf{Y}|_{\phi_t(x)})$  pour obtenir la même forme de définition.

Maintenant, on aimerait évidemment utiliser nos bases d'espaces tangent et dual  $\{\mathbf{E}_a\} = \{\partial/\partial x^a\}$  et  $\{\mathbf{E}^a\} = \{dx^a\}$  pour écrire en composantes ces dérivées. Pour ce faire, on aura besoin de l'identité suivante, qui sera admise sans preuve :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\omega \otimes \mathbf{Y}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega) \otimes \mathbf{Y} + \omega \otimes (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}). \quad (1.25)$$

---

7. On définit les applications  $\phi_{t*}$  et  $\phi_t^*$  de la manière suivante. Soit  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ , une application entre deux variétés. Alors les applications  $\phi_*$  et  $\phi^*$  sont des applications qui décrivent respectivement la manière de transporter un vecteur contravariant de  $T_x\mathcal{M}$  à  $T_{\phi(x)}\mathcal{N}$  et un vecteur covariant de  $T_{\phi(x)}^*\mathcal{N}$  à  $T_x^*\mathcal{M}$ . Par exemple,  $\phi_*X(f)|_{\phi(x)} = X(f(\phi))|_x$  et  $\langle \phi^*\omega, \mathbf{X} \rangle|_x = \langle \omega, \phi_*\mathbf{X} \rangle|_{\phi(x)}$ . De même pour un tenseur de type (r,s) arbitraire,  $\phi_* : T_s^r(p) \rightarrow T_s^r(\phi(p))$ , et  $T(\omega^1, \dots, \omega^s, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r)|_x = \phi_*T((\phi^{-1})^*\omega^1, \dots, (\phi^{-1})^*\omega^s, \phi_*\mathbf{X}_1, \dots, \phi_*\mathbf{X}_r)|_{\phi(x)}$ .

On appelle cette règle la *règle de Leibniz*. Chaque dérivée qu'on définira aura cette propriété. Mais avant cela, on peut déjà calculer la dérivée de Lie d'un vecteur covariant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{X}} dx^a(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^*) dx^a(x) - dx^a(x)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \frac{\partial(x^a \circ \phi_t)}{\partial x^b} dx^b(x) - dx^a(x) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \frac{\partial(x^a \circ \phi_t)}{\partial x^b} - \delta^a_b \right] dx^b(x) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \frac{\partial(x^a \circ \phi_t)}{\partial x^b} - \frac{\partial(x^a \circ \phi_0)}{\partial x^b} \right] dx^b(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^b} \Big|_x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(x^a \circ \phi_t) - (x^a \circ \phi_0)] dx^b(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^b} \Big|_x X(x^a) dx^b(x) = \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_x dx^b(x). \tag{1.26}
\end{aligned}$$

L'avant dernière étape est valide, car on peut interchanger l'ordre des dérivées des fonctions des coordonnées locales, puisque celles-ci sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sachant que la dérivée de Lie préserve les contractions, on calcule à présent la dérivée de Lie d'un vecteur contravariant en utilisant la contraction (1.7) et la propriété (1.25) :

$$0 = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \delta^a_b = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \left\langle dx^a, \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle = \left\langle \mathcal{L}_{\mathbf{X}} dx^a, \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle + \left\langle dx^a, \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle, \tag{1.27}$$

de sorte que

$$dx^a \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^b} = -\frac{\partial X^a}{\partial x^b} \implies \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^b} = -\frac{\partial X^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{1.28}$$

Cependant, si on cherche la dérivée de Lie d'un vecteur quelconque et pas seulement d'un vecteur de base, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \left( Y^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(Y^a) \frac{\partial}{\partial x^a} + Y^a \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \frac{\partial}{\partial x^a} \\
&= X^b \frac{\partial Y^a}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a} - Y^a \frac{\partial X^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b} = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

L'expression (1.29) est une expression qui décrit la manière dont change le vecteur  $\mathbf{Y}$  dans la direction  $\mathbf{X}$ .

On peut finalement traduire ces calculs en une règle générale pour calculer la dérivée de Lie d'un tenseur de type arbitraire, il suffit, pour commencer d'utiliser la règle (1.25) sur

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{E}^a \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^d \otimes \mathbf{E}_e \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_h) \tag{1.30}$$

puis, de contracter tous les indices de sorte qu'on ait :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}T)^{ab\dots d}_{ef\dots h} &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (T^{ab\dots d}_{ef\dots h}) - T^{ib\dots d}_{ef\dots h} \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \\
&\quad - (\text{tous les indices du haut}) + T^{ab\dots d}_{if\dots h} \frac{\partial X^i}{\partial x^e} + (\text{tous les indices du bas}). \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Il est évident que la dérivée de Lie d'un tenseur qu'on vient de définir ne dépend pas seulement du vecteur  $\mathbf{X}$  au point  $x$  où on prend la dérivée, mais aussi du vecteur à des points qui se situent dans un voisinage de  $x$ . Ceci pose problème, car on aura besoin de dérivées qui ressemblent plus à une dérivée directionnelle et la dérivée de Lie est trop primitive pour satisfaire à cela. Ainsi, on a besoin d'une structure supplémentaire.

### 1.3.2. Dérivées covariantes

Cette structure supplémentaire nécessaire à la définition des dérivées covariantes est la *connexion*. On définit la connexion  $\nabla$  en un point  $x \in \mathcal{M}$  comme étant la règle qui à chaque champ de vecteurs  $\mathbf{X}$  associe l'opérateur différentiel  $\nabla_{\mathbf{X}}$ , dont l'application sur un vecteur arbitraire  $\mathbf{Y}$  donne le champ vectoriel  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  qui ne dépend que de  $\mathbf{X}$  en  $x$  et est linéaire en  $\mathbf{Y}$ . On appelle alors  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  la dérivée covariante associée à la connexion  $\nabla$  du vecteur  $\mathbf{Y}$  dans la direction  $\mathbf{X}$  en  $x$ . Sur une fonction arbitraire  $f$ , son effet est très simple,  $\nabla_{\mathbf{X}}f = Xf$ .

On peut penser à la dérivée covariante  $\nabla\mathbf{Y}$  comme étant un tenseur de type (1,1) si on ne spécifie pas la direction dans laquelle l'évaluer. À ce moment, lorsqu'on la contracte avec une direction précise  $\mathbf{X}$ , on obtient un vecteur contravariant. Si on reprend nos bases définies plus haut  $\{\mathbf{E}_a\}$  et  $\{\mathbf{E}^a\}$ , on peut écrire les composantes de la dérivée covariante d'un vecteur comme étant :

$$\nabla\mathbf{Y} = Y^a_{;b} \mathbf{E}^b \otimes \mathbf{E}_a. \quad (1.32)$$

La connexion est déterminée par  $n^3$  fonctions définies par la dérivée covariante des vecteurs de base :

$$\nabla\mathbf{E}_c = \Gamma^a_{bc} \mathbf{E}^b \otimes \mathbf{E}_a \iff \Gamma^a_{bc} = \langle \mathbf{E}^a, \nabla_{\mathbf{E}_b} \mathbf{E}_c \rangle. \quad (1.33)$$

Par définition, il s'agit d'une dérivée, donc la règle de Leibniz s'applique, et on peut calculer que pour un vecteur contravariant  $\mathbf{Y}$ ,

$$\nabla\mathbf{Y} = \nabla(Y^c \mathbf{E}_c) = dY^c \otimes \mathbf{E}_c + Y^c \Gamma^a_{bc} \mathbf{E}^b \otimes \mathbf{E}_a, \quad (1.34)$$

et en coordonnées usuelles  $\{\partial/\partial x^a\}$  et  $\{dx^a\}$ , les composantes de  $\nabla Y$  deviennent

$$Y^c_{;b} = \frac{\partial Y^c}{\partial x^b} + \Gamma^c_{ba} Y^a. \quad (1.35)$$

Il est tout à fait possible d'appliquer la dérivée covariante sur n'importe quel type de tenseurs.

Par exemple, sur une un-forme on aurait

$$\nabla \omega = \omega_{a;b} \mathbf{E}^b \otimes \mathbf{E}^a. \quad (1.36)$$

Par un truc analogue à (1.27), et en utilisant le fait que la dérivée covariante respecte la règle de Leibniz et commute avec les contractions, on peut calculer que

$$\omega_{c;b} = \frac{\partial \omega_c}{\partial x^b} - \Gamma^a_{bc} \omega_a. \quad (1.37)$$

Ainsi, en s'inspirant de (1.30) et (1.31), on peut écrire les composantes de la dérivée covariante de tout tenseur de type arbitraire  $\nabla T$  comme étant simplement :

$$T^{ab\dots d}_{ef\dots h;k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (T^{ab\dots d}_{ef\dots h}) + \Gamma^a_{ki} T^{ib\dots d}_{ef\dots h} + (\text{tous les indices du haut}) - \Gamma^i_{ke} T^{ab\dots d}_{if\dots h} - (\text{tous les indices du bas}). \quad (1.38)$$

De plus, en utilisant la définition (1.44), il est possible de calculer de quelle manière changent les composantes de la connexion lors d'un changement de coordonnées. On trouve que

$$\Gamma^{a'}_{b'c'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \left( \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{b'} \partial x^{c'}} + \frac{\partial x^b}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^c}{\partial x^{c'}} \Gamma^a_{bc} \right). \quad (1.39)$$

Remarquons tout de suite le premier terme, la dérivée seconde, qui empêche que les  $\Gamma^a_{bc}$  se transforment comme un tenseur, et par le fait même, ces derniers ne sont donc pas des tenseurs. Mais cette nouvelle structure nous apporte-t-elle vraiment de nouvelles choses? Voyons voir ce qu'on peut construire avec cela.

## 1.4. Construction d'objets mathématiques

La dérivée de Lie et la dérivée covariante sont deux types de dérivées qui donnent des résultats très différents lorsqu'on les utilise. Cependant, parmi la kyrielle d'objets qu'il est possible de définir, nous nous pencherons seulement sur quelques-uns d'entre eux. D'abord, on peut définir les géodésiques comme étant la solution d'une équation différentielle impliquant

---

8. À noter que nous dénoterons aussi parfois les composantes de la dérivée usuelle d'un tenseur quelconque par  $T^{ab\dots d}_{ef\dots h,k}$ , où le point virgule est simplement remplacé par une virgule.

la connexion. Puis, on revient sur la métrique pour discuter de son expression en terme de la connexion. Ensuite, on peut définir les vecteurs de Killing à l'aide de la dérivée de Lie. Finalement, on introduit le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci à l'aide de la dérivée covariante et des contractions.

### 1.4.1. Géodésiques

La métrique nous donnait déjà une notion un peu limitée de la distance entre deux points. Elle nous donnait une idée de la taille d'un élément de «volume» infinitésimal. Cependant, bien qu'on puisse calculer la grandeur d'un vecteur, il est important de savoir aussi calculer la distance minimale entre deux points. Ainsi, nous nous pencherons maintenant sur la manière dont on peut réussir à calculer les courbes passant par deux points dont la longueur est un extremum<sup>9</sup>, et nous définirons cela comme étant une géodésique.

D'abord, il faut définir le concept de transport parallèle. Soit  $\mathbf{T}$  un tenseur  $\mathcal{C}^r$  défini le long d'une courbe  $\gamma(t)$  aussi  $\mathcal{C}^r$ . Ici, on parle vraiment d'une courbe dont en chaque point il y a un tenseur. Alors on définit la quantité  $D\mathbf{T}/\partial t$  comme étant la dérivée covariante de  $\mathbf{T}$  le long de la courbe  $\gamma(t)$ , on écrirait aussi  $\nabla_{\partial/\partial t}\mathbf{T}$ . Si  $\mathbf{X}$  est le vecteur tangent à  $\gamma(t)$ , alors la dérivée covariante est  $D\mathbf{T}^{a\dots d}_{e\dots h}/\partial t = T^{a\dots d}_{e\dots h;k}X^k$ . Et si on choisit des coordonnées classiques  $x^a(t)$  sur la courbe, alors  $X^a = dx^a/dt$  et alors pour un champ de vecteur  $\mathbf{Y}$  :

$$\frac{DY^a}{\partial t} = \frac{\partial Y^a}{\partial t} + \Gamma^a_{bc}Y^c \frac{dx^b}{dt}. \quad (1.40)$$

La courbe  $\gamma(t)$  est une géodésique si elle satisfait à l'équation :

$$\frac{D}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.41)$$

donc le vecteur tangent à la courbe  $\partial\gamma/\partial t$  est toujours tangent à la courbe. En définissant un système de coordonnées  $x^a$ , on trouve directement

$$\frac{d^2\gamma^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{d\gamma^b}{dt} \frac{d\gamma^c}{dt} = 0. \quad (1.42)$$

Il est aussi possible de faire du calcul des variations sur l'équation (1.19) afin de trouver les fonctions qui sont des extremums de l'action. En faisant une telle chose, on obtient

---

9. Il s'agit du mieux qu'on puisse faire. Cela veut dire que les courbes trouvées pourront être parfois des minima, parfois des maxima. Par exemple, si on prend deux points sur un cercle, alors il y aura généralement un sens préféré qui minimisera la distance entre les deux points et l'autre sens sera un maximum de la distance.

exactement la même équation que celle définie à l'aide de la dérivée covariante et du transport parallèle.

Cette équation possède toujours une solution pour un point initial  $x$  et un vecteur tangent initial  $\mathbf{X}|_x$ . La solution s'étend ainsi dans un voisinage du point initial, mais pas nécessairement sur toute la variété. Si une géodésique est bien définie pour toutes les valeurs du paramètre  $t$ , alors la géodésique est dite complète. Et si toutes les géodésiques sur la variété sont complètes, alors la variété est dite complète géodésiquement. L'incomplétude d'une géodésique est simple à comprendre. C'est seulement qu'il n'existe pas de courbe continue qui relie deux points sur la variété.

### 1.4.2. La métrique, revisitée

Si on revient maintenant à la métrique, on peut employer nos dernières avancées pour exprimer le lien qui unit la connexion et la métrique. En effet, malgré qu'on ait introduit la métrique et la connexion séparément, l'une n'existe pas sans l'autre. Pour une métrique  $g$  sur  $\mathcal{M}$ , il existe une unique connexion qui soit *symétrique* et *compatible*<sup>10</sup> avec la métrique. Ce choix pour la connexion porte le nom de connexion de Levi-Civita, en l'honneur de l'étudiant de Ricci. Les coefficients associés à la connexion de Levi-Civita sont appelés symboles de Christoffel. Les conditions de symétrie et de compatibilité sont toutes simples, il faut simplement que la dérivée covariante de la métrique soit nulle, ou encore :

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}, \quad g_{ab;c} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} - \Gamma^i_{ca}g_{ib} - \Gamma^i_{cb}g_{ai} = 0. \quad (1.43)$$

On peut donc écrire une équation pour les coefficients de la connexion en additionnant et soustrayant les dérivées covariantes appropriées. De fait, si on fait l'opération suivante, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= g_{bc;a} + g_{ca;b} - g_{ab;c} = \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} - \Gamma^i_{ab}g_{ic} - \cancel{\Gamma^i_{ac}g_{bi}} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \cancel{\Gamma^i_{bc}g_{ia}} - \Gamma^i_{ba}g_{ci} \\ &\quad - \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} - \cancel{\Gamma^i_{ca}g_{ib}} - \cancel{\Gamma^i_{cb}g_{ai}} \right) \\ &= \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} - 2\Gamma^i_{ab}g_{ic}, \end{aligned}$$

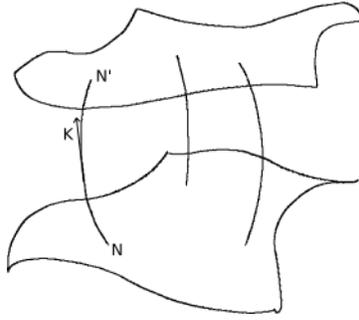
---

10. En fait, la compatibilité se traduit comme étant que les transports parallèles le long de n'importe quelle courbe sur une variété sont des isométries. Ce dernier terme sera défini plus loin.

de sorte que

$$\Gamma^i{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{ic} \left( \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ca}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right). \quad (1.44)$$

Il s'agit d'un résultat très intéressant, puisque cela veut dire que la connexion, structure mathématique qu'on introduit afin de définir la dérivée covariante, s'exprime en terme du tenseur qui donne la notion de distance infinitésimale entre deux points très proches. Évidemment, cela veut dire que la connexion peut aussi servir à mesurer la courbure de la variété, et cela sera donc notre but dorénavant. Nous tenterons de construire un tenseur qui mesure la courbure d'une variété, comme nous avons été en mesure de construire un tenseur qui sert à mesurer la distance entre deux points très rapprochés.



**Figure 1.2.** Illustration de l'effet d'un champ de vecteurs de Killing sur une variété  $\mathcal{N}$ .

### 1.4.3. Vecteurs de Killing

La manière classique d'introduire les vecteurs de Killing n'est pas forcément la plus générale, mais est certainement la plus simple à comprendre et à calculer. Ici, on commencera par donner une approche plus mathématique. Il s'agit d'abord de les définir en utilisant le concept d'isométrie. Une *isométrie* est un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  qui préserve la métrique, c'est-à-dire que  $\mathbf{g}$  est égal à  $\phi_*\mathbf{g}$  en tout point. Cela veut donc dire que l'application  $\phi_* : T_x \rightarrow T_{\phi(x)}$  préserve le produit scalaire défini par la métrique :

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_x = \phi_*g(\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y})|_{\phi(x)} = g(\phi_*\mathbf{X}, \phi_*\mathbf{Y})|_{\phi(x)}. \quad (1.45)$$

Soit les difféomorphismes  $\phi_t$  engendrés par un champ de vecteurs  $\mathbf{K}$  qu'on a introduit à la section sur les dérivées de Lie. Si ces fonctions sont des isométries, c'est-à-dire que pour chaque  $t$ ,  $\phi_t$  est une isométrie, alors on appelle le champ de vecteurs  $\mathbf{K}$  un (champ de)

vecteur de Killing. Si on prend la dérivée de Lie de la métrique le long du champ  $\mathbf{K}$  on trouve

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}}\mathbf{g} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_{-t*}\mathbf{g} - \mathbf{g}) = 0. \quad (1.46)$$

De cela, on peut écrire une équation pour les composantes de  $\mathbf{K}$ . En effet, si on dérive plutôt les composantes de la métrique plutôt que le tenseur en tant que tel et qu'on utilise (1.31) et la condition de compatibilité (1.43), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{ab} &= K^i \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^i} + g_{ib} \frac{\partial K^i}{\partial x^a} + g_{ai} \frac{\partial K^i}{\partial x^b} \\ &= K^i \left( \Gamma^j_{ia} g_{jb} + \Gamma^j_{ib} g_{aj} \right) + g_{jb} \frac{\partial K^j}{\partial x^a} + g_{aj} \frac{\partial K^j}{\partial x^b} \\ &= g_{jb} \left( \frac{\partial K^j}{\partial x^a} + K^i \Gamma^j_{ia} \right) + g_{aj} \left( \frac{\partial K^j}{\partial x^b} + K^i \Gamma^j_{ib} \right) \\ &= g_{jb} K^j_{;a} + g_{aj} K^j_{;b} \\ &= K_{b;a} + K_{a;b} = 2K_{(a;b)} = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

L'équation (1.47) est l'équation de Killing.  $\mathbf{K}$  est un vecteur de Killing si et seulement s'il satisfait à l'équation de Killing.

Intuitivement, un vecteur de Killing prend donc les points d'une variété et les transporte le long d'une courbe sur laquelle  $\mathbf{K}$  est le vecteur tangent. Il est à noter qu'il existe un tenseur, le tenseur de torsion, qui est à l'origine de la condition de symétrie (1.43). Lorsque ce tenseur est nul, alors on a la symétrie dans les coefficients de la connexion. Ceci est très important. En effet, lorsque la torsion s'annule, alors la dérivée de Lie s'exprime en terme de la dérivée covariante, et donc les vecteurs de Killing définissent une algèbre de Lie sur la variété qui s'exprime à l'aide d'un crochet de Lie  $[ \ , \ ]$ . Les difféomorphismes  $\phi_t$  engendrés par les  $\mathbf{K}$  forment alors un groupe de Lie des isométries sur la variété. Évidemment, ce groupe est incomplet et peut contenir aussi des symétries discrètes comme des réflexions.

#### 1.4.4. Tenseur de Riemann

Originellement, Riemann voulait savoir comment déterminer si une variété riemannienne est plate, c'est-à-dire localement isométrique à  $\mathbb{R}^n$ , ou encore pour un système de coordonnées  $x^a$  sur  $\mathcal{M}$ , quand-avons nous :

$$\mathbf{g} = dx^a \otimes dx^a? \quad (1.48)$$

Il s'agit de la question originale. La réponse à cette question étant le résultat d'un calcul relativement long et fastidieux, nous nous contenterons de donner le résultat, et nous l'interpréterons ensuite. Il trouva que si la quantité suivante est nulle, alors la métrique est plate :

$$0 = R^a{}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a{}_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a{}_{cb}}{\partial x^d} + \left( \Gamma^k{}_{db} \Gamma^a{}_{ck} - \Gamma^k{}_{cb} \Gamma^a{}_{dk} \right), \quad (1.49)$$

où les  $\Gamma^a{}_{bc}$  sont les symboles de Christoffel et sont donc symétriques et compatibles avec la métrique. Cette nouvelle quantité est un tenseur de type (1,3), c'est-à-dire que  $R^a{}_{bcd}$  se transforme comme l'équation (1.14). On définit donc un nouveau tenseur  $\mathbf{R}$  tel que

$$\mathbf{R}(\cdot, \cdot)(\cdot) = R^a{}_{bcd} dx^b \otimes dx^c \otimes dx^d \otimes \frac{\partial}{\partial x^a}. \quad (1.50)$$

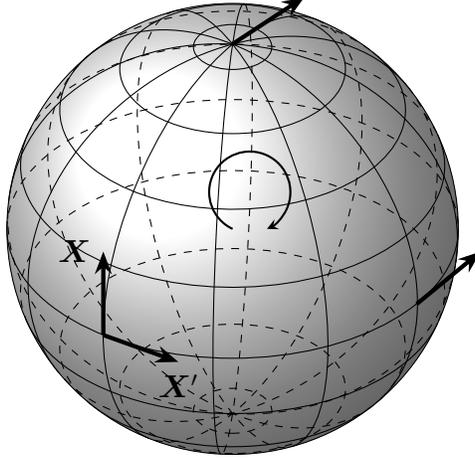
Le nom de ce tenseur est le *tenseur de courbure de Riemann*. Évidemment, on peut aussi le définir en terme de la connexion qu'on a définie plus haut, c'est-à-dire que

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{Z}}. \quad (1.51)$$

Ce tenseur mesure à quel point les dérivées covariantes échouent à commuter, et en ce sens ce tenseur est la condition pour qu'il existe une isométrie entre la variété et  $\mathbb{R}^n$ . L'échec de cette commutation définit la courbure d'une variété.

Voici un exemple très intuitif, mais informel. On peut directement voir les effets d'un espace courbe en comparant un terrain de tennis à la Terre. Commençons avec quelqu'un qui se trouve dans le coin inférieur droit du terrain de tennis et pointe sa raquette de tennis vers le nord. Si cette personne se déplace le long du pourtour du terrain en gardant toujours sa raquette pointée dans la même orientation, c'est-à-dire que sa raquette a toujours son orientation parallèle à l'orientation qu'elle avait aux instants précédents. Après avoir complété un tour, cette personne remarque que sa raquette a repris la même position et orientation qu'au départ. C'est normal, cela est dû au fait que le terrain de tennis est plat. Cependant, si on reprend la même expérience, mais sur la surface de la Terre : on fait une grande boucle. À partir de l'équateur, la personne pointe sa raquette vers le nord et commence à marcher vers le nord en faisant attention de bien garder l'orientation de sa raquette toujours parallèle aux instants précédents en utilisant l'horizon comme repère. Rendue au pôle Nord, la personne effectue une rotation de  $90^\circ$  vers la droite et redescend vers l'équateur, puis quand elle arrive à nouveau à l'équateur, elle effectue une nouvelle rotation de  $90^\circ$  vers la droite

et marche jusqu'à ce qu'elle arrive à son point de départ. Une fois arrivée, elle remarquera que bien que sa raquette soit au même endroit, maintenant elle pointe vers l'est. Ceci est le transport parallèle, et le tenseur de Riemann sert à mesurer la courbure nécessaire à expliquer cet écart.



**Figure 1.3.** Illustration du transport parallèle d'un vecteur sur une 2-sphère. On voit bien que les vecteurs initial et final ne pointent pas dans la même direction ; il y a un angle de  $90^\circ$  entre les deux, et cela est dû à la courbure de la sphère.

À partir de la relation (1.49), il est possible de montrer que le tenseur de Riemann admet les symétries suivantes :

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc} \iff R^a{}_{b(cd)} = 0 \quad (1.52)$$

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{dbc} + R^a{}_{cdb} = 0 \iff R^a{}_{[bcd]} = 0, \quad (1.53)$$

et ses premières dérivées covariantes respectent l'identité de Bianchi

$$R^a{}_{bcd;e} + R^a{}_{bec;d} + R^a{}_{bde;c} = 0 \iff R^a{}_{b[cd;e]} = 0. \quad (1.54)$$

Ces symétries sont très utiles lorsqu'on veut calculer des éléments du tenseur de Riemann comme on en fera l'exemple dans la section suivante, et ce sera particulièrement utile d'utiliser les identités de Bianchi lorsqu'on voudra résoudre les équations d'Einstein au chapitre suivant.

### 1.4.5. Tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est très simple. Il s'agit de la contraction du tenseur de Riemann sur le premier indice du haut et deuxième indice du bas

$$R_{bd} = R^a_{bad}. \quad (1.55)$$

Cela définit un tenseur de type  $(0, 2)$  qu'on dénotera par

$$\mathbf{Ric}(\ , \ ) = R_{ab} dx^a \otimes dx^b = C_2^1(\mathbf{R}). \quad (1.56)$$

Évidemment, il y a une raison pour laquelle quelqu'un calculerait ce tenseur. Dans un voisinage de n'importe quel point  $x$  sur une variété  $\mathcal{M}$  équipée d'une connexion symétrique, on peut choisir un système de coordonnées locales : les coordonnées géodésiques normales. Ces coordonnées s'obtiennent en prenant un point  $x$  et un vecteur  $\mathbf{X}$  de l'espace tangent et envoyant ce point sur le point  $\exp_x(\mathbf{X})$ <sup>11</sup> par l'application de la fonction exponentielle. Donc pour une géodésique  $\gamma(t)$ , cette fonction prend le point  $x$  et le vecteur tangent à la courbe  $\mathbf{X} = d\gamma(t)/dt$  tel que  $\gamma(0) = x$  et l'envoie sur le point  $\exp_x(\mathbf{X}) = \gamma(1)$ . Il est à noter que le domaine de définition de  $\exp$  ne contient peut-être pas tous les vecteurs de  $T_x(\mathcal{M})$ . En effet, malgré que le théorème d'existence des géodésiques garantisse qu'il existe une géodésique passant par le vecteur  $\mathbf{X}$ , il ne garantit pas que la géodésique soit complète.

Dans ce système de coordonnées, les symboles de Christoffel sont toujours nuls en  $x$ . On peut aussi s'arranger de manière à ce que la métrique soit simplement un delta de Kronecker en  $x$  et que la première dérivée partielle de la métrique soit nulle aussi. Ceci simplifie souvent les calculs.

De plus, comme un élément de volume d'un sous-ensemble  $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$  est donné par

$$\text{Vol.}(\mathcal{U}) = \int_{\phi(\mathcal{U})} \sqrt{\det |g_{ab}|} dV, \quad (1.57)$$

et que la métrique dans un voisinage du point  $x$  peut s'écrire simplement comme étant une correction à la métrique d'un espace euclidien plat :

$$g_{ab} = \delta_{ab} + \mathcal{O}(x^2), \quad (1.58)$$

---

11. On définit la fonction  $\exp : T_x(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ , telle que pour chaque  $\mathbf{X} \in T_x\mathcal{M}$ ,  $\exp(\mathbf{X})$  est le point dans  $\mathcal{M}$  à une distance unité de  $x$  le long de la géodésique  $\gamma$  définie par  $\mathbf{X}$ .

cela nous permet de faire un développement en série de l'élément de volume infinitésimal et on trouve

$$\sqrt{\det |g_{ab}|} dV = \left(1 - \frac{1}{6} R_{ab} x^a x^b + \mathcal{O}(x^3)\right) dV_{\text{euclidien}}. \quad (1.59)$$

Ainsi, cela montre que le tenseur de Ricci est la correction par rapport à l'espace euclidien au premier ordre non nul au volume due à la métrique lorsqu'on se déplace dans un voisinage du point  $x$ .

À partir des relations (1.54) et (1.53), on peut contracter l'indice contravariant avec l'indice de dérivée covariante et utiliser la définition de l'antisymétrie pour écrire que

$$\begin{aligned} 0 &= 3! R^a_{b[cd;a]} = R^a_{bcd;a} - R^a_{bdc;a} + R^a_{bda;c} - R^a_{bca;d} + R^a_{bac;d} - R^a_{bad;c} \\ &= 2R^a_{bcd;a} + 2R^a_{bac;d} - 2R^a_{bad;c} \\ &= 2R^a_{bcd;a} + 2R_{bc;d} - 2R_{bd;c}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$R^a_{bcd;a} = R_{bd;c} - R_{bc;d}. \quad (1.60)$$

On peut contracter les indices  $b$  et  $d$  dans l'expression précédente et on trouve

$$R^a_{c;a} = \frac{1}{2} R_{;c}. \quad (1.61)$$

Cette dernière identité est ce qu'on appelle l'identité de Bianchi contractée. Elle sera extrêmement importante au chapitre suivant étant donné que c'est cette identité qui nous met sur la voie du bon tenseur à employer afin d'écrire l'équation de champ d'Einstein.  $R$  sera défini à la sous-section suivante.

#### 1.4.6. scalaire de Ricci

On peut évidemment créer plusieurs scalaires, et donc des invariants, à partir du tenseur de Riemann, par exemple  $R_{abcd}R^{abcd}$ <sup>12</sup>,  $R_{ab}R^{ab}$ , ou encore  $R^a_a$ . Ce dernier invariant est ce

---

12. On appelle cet invariant le scalaire de Kretschmann. Il s'agit d'un invariant quadratique, contrairement au scalaire de Ricci, et il est un peu plus difficile à calculer. Cependant, il est très utile en relativité générale, car il permet d'identifier les singularités. Par exemple, en coordonnées standards, il peut être difficile de dire que la métrique de Schwarzschild n'admet qu'une seule singularité en  $r = 0$ , et que la singularité  $r = 2GM$  n'est due qu'aux coordonnées peu judicieuses. Avec le scalaire de Kretschmann, on peut aisément vérifier

qu'on appelle le scalaire de Ricci, ou encore la courbure scalaire ; on le note par  $R = R^a_a$ . Il s'agit d'un invariant important en relativité générale.

Informellement, il possède une interprétation géométrique très simple. Il s'agit simplement de la quantité par laquelle le volume d'une boule géodésique<sup>13</sup> sur une variété arbitraire change par rapport à une boule standard dans un espace euclidien. Si la courbure scalaire est positive, alors la boule sera plus petite que dans l'espace euclidien, et si la courbure scalaire est négative, alors la boule sera plus grande que dans l'espace euclidien. Quantitativement, on peut écrire le ratio suivant :

$$\frac{\text{Vol.}(B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{M})}{\text{Vol.}(B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n)} = 1 - \frac{R}{6(n+2)}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (1.62)$$

## 1.5. Exemple : la 2-sphère

Nous allons clore ce chapitre avec un exemple simple et formateur. En effet, les définitions précédentes peuvent sembler très arides et peu pratiques dans la vie de tous les jours, mais nous allons montrer que ce n'est pas le cas et qu'en réalité les calculs peuvent parfois s'avérer assez simples. La 2-sphère est probablement un des objets non triviaux des plus appréciés, car il est simple à visualiser et à traiter, sans pour autant qu'on passe à côté des subtilités des équations. Nous allons commencer par montrer qu'il s'agit d'une variété différentiable, puis nous allons calculer toutes les quantités que nous avons définies plus haut.

### 1.5.1. Variété différentiable

Pour montrer qu'il s'agit d'une variété différentiable, il faut commencer par trouver un atlas qui recouvre toute la sphère et dont la composition des cartes sur leur intersection est différentiable. Cependant, on doit bien définir ce qu'on entend par une 2-sphère. Le plus simple est bien entendu de la plonger dans  $\mathbb{R}^3$  et de la définir en utilisant les coordonnées cartésiennes usuelles. Ensuite, il faudra choisir un recouvrement et exprimer les coordonnées cartésiennes dans le choix des coordonnées que nous allons faire. On écrit alors que la sphère

---

que la seconde n'est pas une vraie singularité, car le scalaire est bien défini, contrairement à sa valeur infinie en  $r = 0$ .

13. Une boule géodésique de rayon  $r$  en  $x$  est définie comme étant l'ensemble des points qui sont atteignables par des géodésiques de longueur plus petite ou égale à  $r$ , à partir du point  $x$ .

de rayon  $r$  est définie par

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}. \quad (1.63)$$

Maintenant, il existe plusieurs manières de recouvrir une sphère. La plus naturelle serait de prendre six hémisphères ouverts et de les coller de la manière suivante. Les deux premiers recouvrent les deux pôles et sont collés le long de l'équateur. On a encore besoin de deux autres hémisphères qui seront apposés le long de l'axe est-ouest, de sorte que leur collage se fasse sur le méridien zéro de la sphère. À ce moment, il reste encore deux points qui n'ont pas été couverts ; le point en avant de la sphère, et le point opposé à l'arrière. Pour terminer le recouvrement, on appose les deux hémisphères restant sur l'axe avant-arrière, afin de recouvrir les deux points manquants. Bien que cela soit très intuitif, il nous faut tout de même six cartes afin de recouvrir cette sphère, et on sait qu'il existe des atlas qui n'ont que deux cartes, un nombre égal à la dimension de la sphère.

Une méthode plus adéquate serait d'utiliser de notre connaissance des coordonnées angulaires  $(\theta, \varphi)$  pour décrire notre sphère à l'aide de deux cartes seulement. Évidemment, nous sommes en mesure d'exprimer les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques. Pour commencer, on doit prendre des ouverts ; si  $0 < \theta < \pi$  est l'angle mesuré à partir de l'axe  $z$  et  $0 < \varphi < 2\pi$  est l'angle mesuré dans le plan  $xOy$  par rapport à l'axe  $x$ , alors on définit nos cartes de la sphère à  $\mathbb{R}^3$  comme étant :

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathcal{U}_1 &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right), \\ \phi_2 : \mathcal{U}_2 &\longrightarrow \mathcal{V} \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \arccos\left(-\frac{y}{r}\right), \arctan\left(\frac{z}{x}\right) \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha &= \{S^2/\mathcal{C}_\alpha \subset \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{C}_1 = \{(x, 0, z) \mid x \leq 0\}, \mathcal{C}_2 = \{(x, y, 0) \mid x \geq 0\}\}, \\ \mathcal{V} &= \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}. \end{aligned}$$

Il est important de noter ici que la première carte correspond à toute la sphère sauf le demi-grand cercle dont les points correspondent à  $(x, 0, z)$  avec  $x \geq 0$ . La deuxième carte n'est qu'une rotation des axes pour être certain qu'on couvre toute la sphère. On l'a tournée de

$\pi/2$  autour de l'axe  $x$  puis de  $\pi$  autour de l'axe  $z$ , de sorte que les points exclus soient maintenant ceux du grand cercle dont les points correspondent à  $(x, y, 0)$  avec  $x \leq 0$ . Sans entrer dans les détails, ces cartes forment un atlas de la sphère. Les fonctions inverses ne sont simplement que des paramétrisations de la sphère.

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{U}_1 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \\ \phi_2^{-1} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{U}_2 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \cos \theta, -r \sin \theta \sin \varphi).\end{aligned}$$

Puisque ces cartes sont inversibles et analytiques, tout comme leur inverse, ce sont bel et bien des difféomorphismes. Nous ferons les calculs dans la première carte, les calculs dans la seconde carte étant complètement analogue.

### 1.5.2. Espace tangent et son dual

Il est aisé de calculer les bases de l'espace tangent et dual de la sphère. Nous savons déjà qu'une base de ces espaces s'écrit comme étant les dérivées et les différentielles par rapport aux coordonnées locales, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et leur dual} \quad d\theta \quad \text{et} \quad d\varphi \tag{1.64}$$

forment les bases de l'espace tangent et dual. Comme la sphère est plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , elle hérite de sa structure différentielle, de sorte qu'on puisse exprimer les vecteurs de la base de l'espace tangent dans les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , les  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  :

$$\begin{aligned}(\phi_1^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\phi_1^{-1}(\theta, \varphi)) = r \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ (\phi_1^{-1})_* \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\phi_1^{-1}(\theta, \varphi)) = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

On peut aisément calculer la base de l'espace dual de manière complètement analogue. Mais on peut aussi simplement utiliser (1.7) pour écrire :

$$\begin{aligned}d\theta &= \frac{1}{r^2} (r \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}^* + r \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}}^* - r \sin \theta \hat{\mathbf{z}}^*) \\ d\varphi &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (-r \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}^* + r \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}^*)\end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{x}}^*$  est le dual de  $\hat{\mathbf{x}}$ . Dans ce cas-ci, ce ne sont que des vecteurs colonnes, donc les duaux sont des vecteurs lignes. Le produit  $\langle \ , \ \rangle$  est simplement le produit matriciel usuel.

### 1.5.3. La métrique

Il est aisé de calculer la métrique, on a déjà fait une bonne partie du travail. Comme  $dx^a = g^{ab}\partial/\partial x^b$ , on peut d'ores et déjà écrire

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

et comme cette matrice est une matrice diagonale, son inverse est trivialement

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

### 1.5.4. Connexion de Levi-Civita et les géodésiques

Avec la métrique, il n'est pas difficile de calculer les composantes de la connexion, et donc de calculer les géodésiques. Les symboles de Christoffel sont simplement donnés par l'équation (1.44), et comme la métrique n'a que deux composantes non nulles, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} &= \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \cot \theta. \end{aligned} \quad (1.67)$$

On peut écrire les équations géodésiques (1.42) comme étant

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \varphi'(t)^2 \\ \varphi''(t) &= -2 \cot(\theta(t)) \theta'(t) \varphi'(t). \end{aligned}$$

On peut intégrer directement la seconde équation, et remplacer cela dans la première :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi'(0) \left( \frac{\sin(\theta(0))}{\sin(\theta(t))} \right)^2 \\ \theta''(t) &= \varphi'(0)^2 \left( \frac{\sin(\theta(0))}{\sin(\theta(t))} \right)^2 \cot(\theta(t)). \end{aligned}$$

Évidemment, l'interprétation de ces solutions peut sembler ardue, mais un peu de travail permet de montrer que les géodésiques sont les cercles sur la sphère dont le centre est le

centre de la sphère. Par exemple, si  $\theta(t) = \pi/2$ , alors on trouve que  $\varphi(t) = \varphi'(0)t + \varphi(0)$ . Cette solution est l'équateur de la sphère.

### 1.5.5. Vecteurs de Killing

Maintenant que nous avons la métrique et la connexion, on peut calculer les vecteurs de Killing. Pour ce faire, il faut résoudre l'équation (1.47) pour la métrique (1.66). On peut déjà avoir une intuition de ce que ça nous donnera. On sait que les vecteurs de Killing engendrent les isométries de la 2-sphère. On connaît certainement de ces isométries, comme les rotations de la sphère autour de son centre. Pour un vecteur de Killing général  $\mathbf{K} = K^\theta(\theta, \varphi)\partial_\theta + K^\varphi(\theta, \varphi)\partial_\varphi$ , on a

$$0 = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\theta\theta} = 2K_{(\theta; \theta)} = 2\partial_\theta K_\theta = 2r^2\partial_\theta K^\theta$$

$$0 = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\theta\varphi} = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\varphi\theta} = 2K_{(\theta; \varphi)} = \partial_\varphi K_\theta + \partial_\theta K_\varphi - 2\cot\theta K_\varphi = r^2(\partial_\varphi K^\theta + \sin^2\theta\partial_\theta K^\varphi)$$

$$0 = \mathcal{L}_{\mathbf{K}}g_{\varphi\varphi} = 2K_{(\varphi; \varphi)} = 2\partial_\varphi K_\varphi + 2\sin\theta\cos\theta K_\theta = 2r^2\sin\theta(\sin\theta\partial_\varphi K^\varphi + \cos\theta K^\theta).$$

Il est aisé de résoudre ce système d'équations. De la première, on retire que  $K^\theta = f(\varphi)$ . Ceci implique que les deux autres équations s'écrivent comme

$$\partial_\theta K^\varphi = -f' \csc^2\theta$$

$$\partial_\varphi K^\varphi = f \cot\theta.$$

On peut résoudre ce système relativement aisément. Une solution particulière serait si  $K^\theta = f(\varphi) = 0$ , alors le système précédent admet comme solution,  $K^\varphi = a$ , où  $a$  est une constante, de sorte que  $\mathbf{K}_3 = a\partial_\varphi$  soit un vecteur de Killing. Donc notre intuition que les rotations autour du centre de la sphère sont des isométries était bonne. Les deux autres vecteurs de Killing qui découlent de ce système d'équations pour  $f \neq 0$  sont alors :

$$\mathbf{K}_1 = \cos\varphi\partial_\theta - \cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi$$

$$\mathbf{K}_2 = \sin\varphi\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi$$

$$\mathbf{K}_3 = \partial_\varphi.$$

### 1.5.6. Tenseur de Riemann, de Ricci et courbure scalaire

Finalement, on peut calculer le tenseur de Riemann, de Ricci et la courbure scalaire. Il suffit d'utiliser l'équation (1.49) avec les symboles de Christoffel (1.67) pour calculer ce dont

on a besoin. Ainsi, on trouve que les seules composantes non nulles du tenseur de Riemann sont

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = -R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta} = \sin^2 \theta$$

$$R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = -R^{\varphi}_{\theta\theta\varphi} = 1.$$

Cela permet de calculer le tenseur de Ricci en contractant l'indice contravariant avec le second indice covariant

$$g_{ae}g^{ec}R^a_{bcd} = R^a_{bad} = R_{bd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

En contractant encore une fois sur les indices restants, on trouve la courbure scalaire

$$R^a_a = g^{ab}R_{ab} = \frac{2}{r^2}.$$

Ceci termine notre traitement de la 2-sphère.

## 1.6. Conclusion

On a d'abord introduit le concept très général de variété différentiable, la généralisation des surfaces en plusieurs dimensions. Naturellement, il fut nécessaire d'introduire les espaces tangents et cotangents, ces espaces qui nous permettent d'utiliser les concepts que l'on connaît du calcul différentiel, et qui nous ont permis de définir les vecteurs contravariants et covariants.

Puis, on a présenté les tenseurs, ces objets très généraux qui étendent les concepts de vecteurs et covecteurs. Nous avons déterminé comment les identifier, et nous avons présenté un tenseur très célèbre et utile, la métrique, qui sert à calculer la norme des vecteurs sur une variété.

On a ensuite introduit plusieurs opérateurs différentiels, comme la dérivée de Lie, qui se trouve à être une structure naturelle sur les variétés. Nous avons aussi introduit une structure supplémentaire, la connexion, ce qui nous a permis de définir la dérivée covariante, une dérivée plus forte que la dérivée de Lie, qui nous permettra d'écrire des équations tensorielles au prochain chapitre.

Pour faire suite à cela, nous nous sommes efforcés de construire des objets mathématiques à l'aide de ces dérivées. Les géodésiques nous ont permis de calculer la distance extrémale entre deux points sur une variété. Nous avons fait ici un bref retour sur la métrique afin de

montrer que la métrique s'écrit en terme de la connexion sous certaines conditions. Puis, nous avons introduit les vecteurs de Killing, des vecteurs qui engendrent les isométries, difféomorphismes qui préserve la métrique. Finalement, la construction du tenseur de Riemann et de ses contractions fut présentée, tenseurs qui servent à mesurer la courbure d'une variété.

Nous avons terminé ce chapitre sur un exemple simple, la 2-sphère, afin de mettre en application les concepts définis plus avant.

Ceci termine notre traitement de la géométrie différentielle. La base nécessaire à la compréhension de la relativité générale fut introduite, mais évidemment le caractère succinct du présent document nous a forcés à laisser de côté plusieurs notions intéressantes. Le lecteur intéressé à combler ses manques en géométrie différentielle est libre de consulter les œuvres [3], [4], [7] ou [8]



# Chapitre 2

---

## La relativité générale

La relativité générale est le joyaux de la physique théorique classique. Einstein postula sa théorie en 1915, après près de dix années d'efforts. Il s'agit du travail d'un seul homme, et c'est pour cela qu'il fut acclamé autant par ses pairs. Après un premier article sur la relativité en 1905, Einstein voulait élargir sa théorie à des référentiels qui n'étaient pas nécessairement inertiels. C'est pourquoi dans un article de 1907 il argumente qu'un observateur en chute libre est dans un référentiel inertiel. Ce principe se nomme le principe d'équivalence.

Ensuite, il entama l'étude de la géométrie riemannienne sous la tutelle de son ami Grossmann, et sous la recommandation de Levi-Civita, il entreprit d'étudier les tenseurs et la manière dont il pourrait les intégrer dans sa future théorie de la gravitation. Ceci aboutira finalement en 1915 sur la relativité générale telle qu'on la connaît aujourd'hui.

Malheureusement, après quelques années, la théorie fut mise de côté au profit de la mécanique quantique. L'âge d'or de la relativité générale vint plus tard, de 1960 à 1980. C'est durant ces années que beaucoup de théories furent élaborées en cosmologie notamment, comme la théorie du Big Bang, et qu'on utilisa pleinement la théorie d'Einstein.

La relativité générale étant avant tout une théorie géométrique, son élégance a poussé les théoriciens à vouloir exprimer les autres forces de la nature dans un langage similaire, sans grand succès jusqu'à présent. Malgré cette élégante approche, les subtilités de la théorie sont cachées dans ces équations hautement non linéaires, et dont la résolution est loin d'être triviale. Notons par exemple le problème à deux corps qui n'admet pas de solution exacte en relativité générale [9], [10], [11] et [12].

Cependant, c'est aussi cette complexité mathématique qui donne naissance aux phénomènes les plus intéressants et exotiques en relativité générale. Par exemple, les trous noirs

[13] dont on a obtenu la première image tout récemment [14], les trous de vers [15], les ondes gravitationnelles [16] qui ont été observées par LIGO [17, 18, 19] il y a quelques années, et une pléthore d'autres phénomènes. Évidemment, le but du présent texte n'étant pas de faire une description exhaustive de tous ces phénomènes, nous nous contenterons des résultats pertinents à l'élaboration de notre sujet de recherche.

Pour discuter des endroits où la théorie se comporte étrangement, il faut d'abord avoir une description claire de la théorie. Nous commencerons par faire une démonstration peu rigoureuse de l'équation tensorielle d'Einstein. Nous en profiterons pour discuter de ce que les équations veulent dire physiquement, en comparant le tenseur d'Einstein au tenseur d'énergie-impulsion, les deux tenseurs les plus importants en relativité. De plus, nous discuterons des propriétés de conservations de ce dernier.

Ensuite, nous introduirons les différentes conditions d'énergie, qui sont des inégalités sur le tenseur d'énergie-impulsion qui permettent de qualifier ce dernier comme étant « physique » ou non. Ces différentes caractéristiques empêcheront la matière d'avoir une énergie négative, ou encore de pouvoir se déplacer plus rapidement que la lumière dans le vide. Nous illustrerons cela par un exemple.

Nous achèverons ce chapitre sur un exemple très important de solution à l'équation d'Einstein, le trou noir statique. Il s'agit de la première solution trouvée et elle revêt une importance capitale lorsque mise dans le contexte du théorème de Birkhoff.

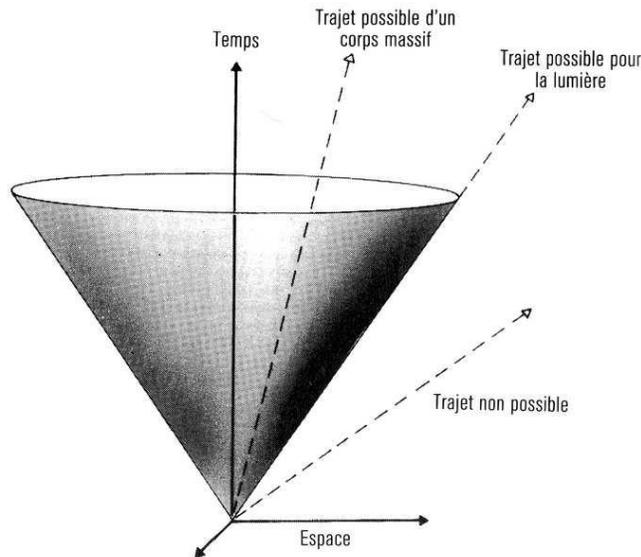
## 2.1. L'équation d'Einstein

Probablement une des équations de la physique les plus célèbres, l'équation d'Einstein peut parfois sembler un peu sortie d'un chapeau. Ainsi, nous tenterons de montrer de quelle manière on peut en arriver à la conclusion que cette combinaison d'objets mathématiques détermine de quelle manière l'espace-temps courbe sous la présence de matière, et comment la matière se comporte dans un milieu courbé.

### 2.1.1. La variété « espace-temps »

Nous allons décrire l'espace-temps par un modèle mathématique simple. Il s'agira simplement d'un ensemble de tous les événements de tous les endroits dans l'univers noté par  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , où  $\mathcal{M}$  est une variété connexe  $\mathcal{C}^\infty$  à quatre dimensions et  $\mathbf{g}$  est une métrique de

Lorentz ; la signature sera alors  $(-1, 1, 1, 1)$ <sup>1</sup>. Il s'agit d'une relativement bonne description de l'univers étant donné que nous avons l'expérience que ce dernier est continu et fait d'un seul morceau, à tout le moins, jusqu'à des tailles extrêmement petites, où on aurait peut-être besoin d'une structure supplémentaire. Pour ce qui est de la métrique, comme nous l'avons vu précédemment, cette dernière permettra d'identifier en tout point de la variété trois types de vecteurs, soit des vecteurs *timelike* (temporel), *null* (nul ou lumière) et *spacelike* (spatial), en fonction du signe de  $g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  qui serait respectivement négatif, nul ou positif. Ainsi, ce modèle d'espace-temps sera la base sur laquelle nous définirons nos champs tensoriels. De plus, nous utiliserons dorénavant les indices en alphabet grec pour dénoter les quatre coordonnées de l'espace-temps, et les indices en alphabet latin pour dénoter les trois coordonnées spatiales seulement.



**Figure 2.1.** Représentation du cône de lumière tirée de [20]. On voit bien que la frontière du cône correspond au cas limite de l'équation (2.1). Et comme on peut mesurer la métrique seulement à un facteur multiplicatif près, l'expérience nous dit que la lumière doit voyager sur les géodésiques nulles : le cône.

### 2.1.2. Les champs de matière

Maintenant que nous avons une variété comme espace-temps, la seule chose que le chapitre un nous a appris à faire avec une variété c'est de comparer des tenseurs en différents

---

1. La signature n'est autre chose que la convention employée pour les signes des éléments diagonaux de la métrique lorsqu'on l'écrit sous forme matricielle.

points. Ainsi, sur notre variété, nous aurons plusieurs champs tensoriels comme le champ électromagnétique, le champ de Higgs, et tous les autres champs que la physique moderne admet. Ces champs tensoriels décriront la matière dans l'univers, et les équations qui les gouvernent seront exprimées à l'aide de dérivées covariantes relatives à la connexion symétrique définie par la métrique. Nos champs de matière  $\Psi_{(i)}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma}$  doivent respecter certains postulats de la relativité restreinte, c'est-à-dire qu'on admet les points suivants comme étant la base sur laquelle on construit notre théorie.

### (1) *Causalité locale*

Ce postulat dit simplement que pour deux points sur la variété  $x$  et  $y$ , alors un signal peut être émis de l'un à l'autre le long d'une courbe temporelle ou nulle, c'est-à-dire une courbe dont le vecteur tangent est temporel ou nul tout le long de la courbe. Ceci est très important pour la métrique car cela la met à part en lui donnant un caractère géométrique très concret. En effet, en un point  $x$  en coordonnées locales, cette condition de causalité implique que les points atteignables à partir de  $x$  avec des courbes temporelles ou nulles sont ceux qui satisfont

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq 0. \quad (2.1)$$

La frontière de ces points forme un cône qui délimite les points qui sont atteignables, comme dans l'image (2.1). Il est possible de montrer que la métrique ne peut être mesurée qu'à un facteur multiplicatif près. Ainsi, cela veut dire que nous sommes libres de choisir ce paramètre comme bon nous semble. L'expérience nous dit qu'on n'a vu aucun signal se déplaçant plus rapidement que la lumière et on choisit donc que la lumière voyage sur les géodésiques nulles, de sorte que les points atteignables à partir d'un point  $x$  soient ceux qui se déplacent moins rapidement que la lumière<sup>2</sup>.

### (2) *Conservation locale de l'énergie et de l'impulsion*

Il doit exister un tenseur symétrique  $T^{\mu\nu}$ , qu'on nomme le *tenseur énergie-impulsion*, qui dépend des champs de matières  $\Psi_{(i)}^{\mu\dots\nu}{}_{\rho\dots\sigma}$ , de leurs dérivées covariantes et de la métrique qui doit respecter les conditions suivantes :

---

2. Notons aussi que cela n'est pas prédit par la relativité générale, mais plutôt par l'électromagnétisme.

- (1)  $T^{\mu\nu}$  est nul sur un voisinage si et seulement si les  $\Psi_{(i)}^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$  sont nuls sur le même voisinage ;
- (2)  $T^{\mu\nu}$  obéit à l'équation

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.2)$$

La première condition stipule que les champs de matière ont de l'énergie positive. La deuxième condition (2.2) est une équation de conservation de l'énergie. Si  $\mathbf{K}$  est un vecteur de Killing, donc un vecteur qui engendre une isométrie de l'espace-temps, alors on peut calculer un courant d'énergie vectoriel  $\mathbf{J}$  dont les composantes sont

$$J^\mu = T^{\mu\nu} K_\nu. \quad (2.3)$$

En prenant la dérivée covariante de cette équation, on trouve que

$$J^\mu_{;\mu} = T^{\mu\nu}_{;\mu} K_\nu + T^{\mu\nu} K_{\nu;\mu} = 0. \quad (2.4)$$

Le premier terme est nul par (2.2) et le second terme est nul car  $T^{\mu\nu}$  est symétrique et  $\mathbf{K}$  est un vecteur de Killing et donc il satisfait à (1.47). On peut intégrer cette équation et utiliser le théorème de Gauss pour transformer l'intégrale sur une région close en une intégrale sur la bordure de cette même région. Ainsi, cela nous dit que le flux d'énergie qui sort d'une région close le long d'une isométrie doit être nul.

Évidemment, ces deux conditions sur le tenseur énergie-impulsion ne nous permettent pas de le calculer. Cependant, il est possible de le calculer si les équations qui gouvernent les champs  $\Psi_{(i)}^{\mu\dots\nu}_{\rho\dots\sigma}$  s'obtiennent à partir d'un lagrangien. Un calcul très laborieux nous permet de montrer que la variation de l'action par rapport à la métrique nous donne une équation pour un tenseur symétrique qui satisfait (2.2), qu'on associe au tenseur d'énergie-impulsion. L'expression exacte de l'équation qui détermine le tenseur d'énergie-impulsion est donnée dans [21] et dans [22].

$$T_\mu{}^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\mu}} \eta_{\rho,\nu} - \mathcal{L} \delta_\mu{}^\nu \quad (2.5)$$

où  $\eta_{\rho,\mu}$  sont les perturbations des composantes  $\rho$  de la métrique. Cet indice  $\rho$  est un indice qui numérote toutes les paires d'indices  $(\mu, \nu)$ .  $\mathcal{L}$  est la densité lagrangienne associée à la matière dans l'espace-temps. On verra aussi parfois la notation équivalente

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.6)$$

(3) *L'équation de champ d'Einstein est vraie*

Jusqu'à maintenant, nous n'avons vu que comment calculer le tenseur énergie-impulsion, mais nous ne savons pas quelle est la métrique qui est donnée par cette distribution d'énergie. L'idée est donc de trouver une équation qui dans la limite newtonienne donne l'équation classique pour le potentiel newtonien

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.7)$$

Sans entrer trop dans les détails, il est possible de montrer que pour un  $t$  fixe, qu'il existe une fonction  $f$  telle que  $f^2 = K^\mu K_\mu$  pour un vecteur de Killing  $\mathbf{K}$ , dont le laplacien par rapport à la métrique induite<sup>3</sup> sur la surface définie par la coupe  $\{t = \text{constante}\}$  est proportionnel au tenseur de Ricci. Ainsi, si la métrique est presque plate, alors ce laplacien correspondra à l'équation (2.7) plus d'autres termes qui sont petits. Cela veut dire qu'on pourra écrire que

$$R_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

où  $W^{\mu\nu}$  est une fonction de la métrique et du tenseur d'énergie-impulsion. De plus, comme  $R_{\mu\nu}$  satisfait l'identité de Bianchi contractée (1.61), il en est de même pour  $W_{\mu\nu}$ . Ainsi, on ne peut pas avoir seulement  $R_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ , car l'identité de Bianchi combinée à la conservation de l'énergie (2.2) impliqueraient que  $T_{;\mu} = 0$ , et donc que  $T$  est constant dans l'espace-temps. Ceci ne peut pas être vrai, car par exemple,  $T = 0$  dans le vide et  $T > 0$  dans la matière. En fait la combinaison la plus générale au premier ordre qui dépend de la métrique et du tenseur énergie-impulsion, tout en satisfaisant (2.2) et (1.61) est :

$$R_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

pour des constantes  $\kappa$  et  $\Lambda$ . Il est possible de calculer que  $\kappa = 8\pi G$  à partir de la limite newtonienne<sup>4</sup> de l'équation. On fait un choix d'unité dans lequel la constante gravitationnelle  $G = 1$ . On peut aussi inverser cette équation est on trouve finalement :

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

---

3. Concept que nous définirons malheureusement au prochain chapitre.

4. La limite newtonienne est simple à obtenir. On doit simplement considérer une perturbation de l'espace-temps de Minkowski. En faisant cela, on trouve aisément que  $g_{tt} = -1 - 2\phi$ , où  $\phi = -MG/r$  est le potentiel newtonien.

Ceci est l'équation d'Einstein. On assume que ces équations sont valides car elles respectent, dans les limites de la précision des instruments, les observations. Pour plus de détails sur la dérivation on peut consulter [2] ou [23].

### 2.1.3. Commentaires sur l'équation de champ d'Einstein

Cette équation est en fait une version condensée de seize équations, quatre choix pour chaque indice. Cependant, comme le tenseur de Ricci, la métrique et le tenseur énergie-impulsion sont symétriques, nous avons en réalité dix équations non linéaires couplées aux dérivées partielles pour la métrique et ses dérivées première et seconde. De plus, si on ajoute à cela les identités de Bianchi, alors on a réellement seulement six équations différentes pour la métrique, car quatre des composantes de la métrique sont en réalité libres pour qu'on puisse effectuer des changements de coordonnées.

La constante  $\Lambda$  est la constante cosmologique. On l'a mise du côté de la courbure de l'espace-temps car historiquement Einstein l'avait ajoutée afin de rendre l'espace-temps dans sa théorie statique [24], c'est-à-dire que l'univers ne grandissait ni ne rapetissait. Il avoua suite à la découverte de l'expansion de l'univers par Hubble qu'il s'agissait d'une des plus grandes erreurs de sa vie. Mais elle a fini par faire un retour, mais pour une autre raison. Notons par exemple les résultats indépendants du *Supernova Cosmology Project* [25, 26] et du *High-Z Supernova Search Team* [27, 28], qui montrèrent que l'expansion de l'univers est en accélération. Aussi, il a été montré récemment dans l'expérience [29], qui confirme la prédiction théorique établie par Casimir [30], que le vide doit posséder une énergie aussi. Maintenant, il est plus commun de mettre la constante cosmologique  $\Lambda$  du côté de la matière et de voir cela comme étant une sorte de densité d'énergie du vide qui dirige l'accélération de l'expansion de l'univers. Voir [31] et [32] pour de plus amples détails sur l'histoire de la constante cosmologique.

Aussi, en fonction de la valeur de la constante, on définira trois classes d'espaces-temps. En effet, les bornes théoriques et expérimentales de  $\Lambda$  permettent de dire que  $\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$  selon [33]. Si  $\Lambda > 0$ , alors on appellera l'espace-temps un espace-temps de de Sitter (dS) ; si  $\Lambda = 0$ , alors ce sera un espace-temps de Minkowski ; si  $\Lambda < 0$ , ce sera un espace-temps anti de Sitter (AdS). Ceci sera d'une importance capitale dans le choix d'espace-temps que nous ferons afin de faire nos calculs au chapitre quatre.

Conditions d'énergie	Inégalité mathématique	Représentation physique
Faible	$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$	$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i > 0$
Nulle	$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0$	$\rho + p_i \geq 0$
Forte	$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})V^\mu V^\nu \geq 0$	$\rho + \sum_i p_i \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0$
Dominante	$T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0$ et $T^{\mu\nu}V_\nu T_\mu{}^\rho V_\rho \geq 0$	$\rho \geq 0, \quad \rho \geq  p_i $

**Table 2.1.** Ce tableau regroupe les conditions d'énergie. Il montre ce qu'elles représentent physiquement pour un fluide parfait et leur inégalité mathématique correspondante. Tableau inspiré de [5].

## 2.2. Les conditions d'énergies

Comme nous l'avons montré plus haut, les équations d'Einstein sont des équations pour les composantes de la métrique en fonction des énergies et des impulsions comprises dans l'espace-temps. Ces équations sont indépendantes de la physique, étant donné qu'il s'agit avant tout d'une théorie géométrique ; il est possible que ces équations donnent des solutions qui ne soient pas physiques, comme permettre à la matière de se déplacer à des vitesses supraluminiques ou être composée d'énergie négative, et il est donc primordial d'imposer des conditions sur le tenseur énergie-impulsion de sorte que les solutions qu'on trouve pour la métrique revêtent un sens physique. Il existe cependant quatre conditions possibles qu'on peut imposer au tenseur énergie-impulsion [5, 2]. Ces conditions représentent différentes propriétés physiques que la matière peut satisfaire. Les résultats qui suivent sont regroupés dans la table (2.1).

### 2.2.1. La condition d'énergie faible

La condition d'énergie faible stipule qu'un observateur ne peut pas mesurer une densité d'énergie négative, et ce, pour n'importe quelle distribution de matière. Mathématiquement, on a qu'un observateur, dont la ligne d'univers — la ligne qui décrit son mouvement — en  $x \in \mathcal{M}$  possède un vecteur tangent  $\mathbf{V} \in T_x(\mathcal{M})$  temporel, mesure une densité locale d'énergie comme étant  $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$ . Ainsi, l'impossibilité de mesurer une densité d'énergie négative se traduit comme étant :

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \tag{2.11}$$

### 2.2.2. La condition d'énergie nulle

La condition d'énergie nulle est presque identique à la condition d'énergie faible. En effet, il s'agit seulement de l'extension de cette dernière au cas où les vecteurs tangents peuvent aussi être nuls au lieu d'être seulement temporels. Cela veut donc dire qu'on peut interpréter cette condition comme étant qu'un photon ne peut pas « sentir » une densité d'énergie négative. Nous sommes donc dans la même situation que précédemment, sauf que  $\mathbf{W}$  est un vecteur lumière.

$$T_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0. \quad (2.12)$$

Il est à noter qu'à moins que  $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$  ne soit pas une fonction continue de  $V^\mu$ , alors la condition d'énergie faible implique la condition d'énergie nulle.

### 2.2.3. La condition d'énergie forte

La condition d'énergie forte est plutôt une condition sur le tenseur de Ricci. Elle stipule que la gravité devrait être attractive. Pour un vecteur temporel  $\mathbf{V}$ , on a que

$$\frac{1}{8\pi}R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (2.13)$$

par l'équation (2.9) avec une constante cosmologique nulle<sup>5</sup>. Notons aussi que cette condition d'énergie n'implique pas la condition d'énergie faible. Cette condition possède une interprétation un peu floue, et nous n'en parlerons pas vraiment plus, sachant aussi que plusieurs configurations de matière classique violent cette condition.

### 2.2.4. La condition d'énergie dominante

Cette condition est comme la condition d'énergie faible, mais avec une condition supplémentaire. En effet, elle stipule que pour tout vecteur temporel  $\mathbf{V}$ , alors  $T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0$  et  $J^\mu = T^{\mu\nu}V_\nu$  est un vecteur temporel ou lumière. Ceci s'interprète comme disant que pour n'importe quel observateur, la densité d'énergie n'est pas négative et que les courants d'énergie ne se déplacent pas plus rapidement que la lumière ou à l'envers dans le temps. Ainsi, on

---

5. À noter qu'elle peut aussi simplement être directement incluse dans le tenseur d'énergie impulsion si on la multiplie par les bonnes constantes.

peut écrire :

$$T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0 \quad \text{et} \quad J^\mu J_\mu = T^{\mu\nu}V_\nu T_\mu{}^\rho V_\rho < 0. \quad (2.14)$$

Trivialement, la condition d'énergie dominante implique la condition d'énergie faible, qui elle implique la condition d'énergie nulle si  $T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0$  est une fonction continue de  $V_\mu$ .

### 2.2.5. Exemple : le fluide parfait

On peut illustrer ce que veulent dire les conditions d'énergies pour un système physique extrêmement simple : le fluide parfait. Dans ce cas, il est aisé de traduire les inégalités mathématiques en des inégalités entre des grandeurs physiques tangibles comme la pression et la densité. La correspondance entre les deux est résumée à la table (2.1).

On définit un *fluide parfait* comme étant n'importe quel type de matière dont le tenseur énergie-impulsion prend la forme

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $p$  est sa pression et  $U^\mu$  sont les composantes d'un vecteur temporel qui décrit la vitesse propre du fluide. Ce vecteur est normalisé, ce qui veut dire qu'on a que la norme de  $\mathbf{U}$  est  $\mathbf{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -1$ . On peut toujours se placer dans un référentiel orthonormal  $\{\mathbf{E}_\alpha\}$  où le tenseur énergie-impulsion est diagonal, alors

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

On prend le vecteur de base temporel  $\mathbf{E}_0$  comme étant tangent à la ligne d'univers d'un observateur qui se déplace avec le fluide. Ainsi  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{U} = (1, 0, 0, 0)$ . Ainsi, si on prend le vecteur vitesse temporel unitaire d'un observateur général  $\mathbf{V}$ , dans cette base, ce vecteur s'exprime comme étant  $V^\mu = \gamma(1, a, b, c)$ , où  $\gamma^{-2} = 1 - a^2 - b^2 - c^2 \geq 0$ , et  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions des coordonnées et l'égalité étant réservé pour un observateur — des photons — se déplaçant sur des géodésiques nulles.

À partir de cela, on peut aisément calculer toutes les conditions d'énergie. Commençons par la condition d'énergie faible. Pour celle-ci, on calcule simplement :

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu &= (\rho + p)U_\mu U_\nu V^\mu V^\nu + pg_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \\
&= (\rho + p)(-\gamma)^2 - p \geq 0 \\
\implies \rho + (a^2 + b^2 + c^2)p &\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Comme les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont arbitraires, on distingue deux cas : si  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont nuls, et si deux des trois fonctions sont nulles. On obtient alors respectivement :

$$\rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho + p > 0. \tag{2.18}$$

Dans le deuxième cas, on arrive à une inégalité stricte puisque les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont chacune plus petite que l'unité.

La condition d'énergie nulle s'obtient de la même manière, sauf qu'il faut garder au moins une des fonctions étant donné que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Ainsi, la seule possibilité est

$$\rho + p \geq 0. \tag{2.19}$$

Il faut travailler un peu plus pour la condition d'énergie forte. En effet, il faut aussi calculer le terme  $\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$  :

$$\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = \frac{1}{2}(\rho - 3p). \tag{2.20}$$

Et si on combine cela avec l'équation (2.17), on a

$$\begin{aligned}
\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)V^\mu V^\nu &= (\rho + p)(-\gamma)^2 - p - \frac{1}{2}(\rho - 3p) \\
&= (\rho + p)\gamma^2 - \frac{1}{2}(\rho - p) \geq 0
\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que plus haut, ceci implique que

$$\rho + 3p \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho + p \geq 0. \tag{2.21}$$

Il ne reste maintenant que la condition d'énergie dominante qui indique que le tenseur énergie-impulsion doit aussi satisfaire la relation suivante

$$T_{\mu\nu}V^\nu T^\mu_\rho V^\rho \geq 0. \tag{2.22}$$

On calcule de la même manière que précédemment :

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}V^\nu T^\mu_\rho V^\rho &= \left( (\rho + p)U_\mu U_\nu V^\nu + pg_{\mu\nu}V^\nu \right) \left( (\rho + p)U^\mu U_\rho V^\rho + pg^\mu_\rho V^\rho \right) \\
&= \left( (\rho + p)U_\mu U_\nu V^\nu + pV_\mu \right) \left( (\rho + p)U^\mu U_\rho V^\rho + pV^\mu \right) \\
&= -(\rho + p)^2(-\gamma)^2 + 2p(\rho + p)(-\gamma)^2 - p^2 \\
&= -(\rho^2 - p^2)\gamma^2 - p^2 \\
\implies (\rho^2 - p^2)\gamma^2 + p^2 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Et encore une fois pour les mêmes situations que précédemment, et en se rappelant que la condition demande d'avoir un vecteur orienté vers le futur, on trouve que

$$\rho^2 \geq 0 \implies \rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho^2 \geq p^2 \implies \rho \geq |p|. \tag{2.24}$$

### 2.2.6. Violation des conditions d'énergie

Ces conditions sont valides typiquement pour de la matière classique, mais, bien qu'elles soient raisonnables, elles sont parfois violées par des champs de matière quantique. Notons par exemple l'effet Casimir, qui stipule que la densité d'énergie  $\rho$  entre deux plaques conductrices infinies séparées par une distance  $d$  est

$$\rho = -\frac{\pi^2\hbar}{720d^4}, \tag{2.25}$$

et ce phénomène viole de toute évidence la condition d'énergie faible. Cependant, ce n'est pas trop un problème. On se dit qu'il est possible que les conditions d'énergie soient violées localement, et ce, jusqu'à une certaine limite bien évidemment. On définira plutôt des conditions d'énergie moyenne. Ce sont les mêmes conditions, mais intégrées le long de géodésiques, et cela permet donc que localement les conditions classiques soient violées, mais qu'une fois intégrées sur toute la géodésique, elles doivent être satisfaites. Ceci joue un rôle central lorsqu'on tente de calculer s'il est possible de traverser un trou de vers. On peut lire par exemple [34], [35], [36] et [37].

## 2.3. Solution sur le dos d'une enveloppe

Maintenant armés d'une certaine compréhension de ce qu'est la relativité générale, on peut penser à résoudre les équations d'Einstein dans un cas simple, ce qui permettrait de

comprendre à quel point ces équations peuvent être difficiles à résoudre. Par un calcul relativement long et technique, il est possible de montrer [23] qu'un espace-temps statique et isotrope admet toujours une métrique de la forme

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.26)$$

Sans refaire tous les calculs, on peut calculer les symboles de Christoffel associés à cette métrique, de même que les éléments du tenseur de Ricci à l'aide de l'équation (1.44) et de la version contractée de (1.49). On trouve alors

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{rB} - \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \\ R_{rr} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta} \\ R_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le fait que plusieurs composantes comme  $R_{r\theta}$ ,  $R_{r\varphi}$ ,  $R_{t\theta}$ ,  $R_{t\varphi}$  et  $R_{\theta\varphi}$  soient nulles et que  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$  sont des conséquences de la symétrie de rotation dans la métrique. De plus, le fait que  $R_{rt}$  soit nul est dû au fait que la métrique est invariante sous inversion du temps  $t \rightarrow -t$ .

Si maintenant on applique les équations d'Einstein à la métrique qu'on vient de trouver, on peut déterminer les fonctions  $A(r)$  et  $B(r)$ . Contrairement à ce qu'on pourrait penser, le vide en relativité générale n'est pas donné par  $T^{\mu\nu} = 0$ , mais plutôt par  $R^{\mu\nu} = 0$ . Cela est intuitif si on réfléchit à la signification du tenseur de Ricci. Ce dernier mesure la correction au premier ordre qu'il faut apporter au volume d'une sphère euclidienne. Ainsi, si ce tenseur est nul, alors nous sommes dans le cas où un élément de volume n'est pas modifié et donc qu'il n'y a rien qui déforme l'espace-temps.

Si on combine  $R_{\mu\nu} = 0$  avec les équations (2.27), alors on a juste à égaliser  $R_{tt}$ ,  $R_{rr}$  et  $R_{\theta\theta}$  à zéro. De plus, on a que

$$\frac{R_{rr}}{B} + \frac{R_{tt}}{A} = \frac{1}{rB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0. \quad (2.28)$$

ce qui veut dire que

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \implies A(r)B(r) = \text{constante.} \quad (2.29)$$

On peut aussi ajouter une condition frontière à notre solution. On peut demander que les fonctions  $A$  et  $B$  soient telles qu'en  $r \rightarrow \infty$ , la métrique soit celle de Minkowski en coordonnées sphériques, c'est-à-dire que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (2.30)$$

Comme (2.30) doit toujours être valide et que (2.29) est vraie pour tous  $r$ , alors cela veut dire que la constante est égale à un et donc que

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.31)$$

En utilisant (2.31) dans (2.27), on trouve que

$$R_{\theta\theta} = -A - rA' + 1 = -\partial_r(rA) + 1 = 0 \quad (2.32)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} - \frac{A'}{rA} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rA} = 0 \quad (2.33)$$

La solution de la première équation est triviale

$$A(r) = 1 - \frac{c}{r}, \quad (2.34)$$

où  $c$  est une constante d'intégration. Cela définit immédiatement  $B(r)$ . Pour choisir la constante d'intégration, on se rappelle qu'on doit avoir que  $g_{tt} = -1 - 2\phi$ , où  $\phi = -GM/r$  est le potentiel newtonien. Ainsi, on choisit  $c = -2GM$ , de sorte que la solution finale soit

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{r}\right] \quad (2.35)$$

$$B(r) = \left[1 - \frac{2GM}{r}\right]^{-1}. \quad (2.36)$$

Ainsi, la métrique totale est

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r}\right] dt^2 + \left[1 - \frac{2M}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.37)$$

et c'est cette solution que trouva Schwarzschild en 1916. Cette solution représente un corps sphérique de masse  $M$  statique. Ici, on remarque deux choses. La première c'est qu'il semble

---

6. Dans un système d'unités où  $c = G = 1$ .

y avoir un problème lorsque  $r = 2M$  ; en ce point  $g_{rr}$  devient infini. La deuxième est évidemment lorsque  $r = 0$ . La singularité  $r = 2M$  n'est en fait qu'une singularité des coordonnées. En effet, lorsque des problèmes surviennent dans une métrique, c'est soit parce que les coordonnées qu'on a choisies ne sont pas adaptées au problème considéré, soit qu'on a réellement une singularité dans l'espace-temps. Ici, on peut choisir d'autres systèmes de coordonnées comme les coordonnées de Gullstrand-Painlevé [38], qui montre qu'il ne se passe rien de spécial en  $r = 2M$ . Cependant, un calcul simple des géodésiques lumières montre en fait qu'il existe un *horizon de Schwarzschild* en  $r = 2M$ . Cela veut dire que la lumière ne peut pas s'échapper de cette région et ira toujours vers le centre.

Cependant, la seconde singularité  $r = 0$  est une réelle singularité de l'espace-temps. Sans une théorie de gravité quantique, on ne peut rien dire de plus sur celle-ci.

### 2.3.1. Théorème de Birkhoff

Comme on peut s'en douter, les solutions des équations d'Einstein peuvent être difficiles à obtenir. On aimerait bien avoir un résultat qui nous permettrait de se restreindre à une famille de solutions. En fait, ce résultat existe et est tellement important qu'on en a fait un théorème afin d'exprimer l'idée plus aisément. Le *théorème de Birkhoff* [39] stipule que les seules solutions locales à symétries sphériques aux équations d'Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  sont localement isométriques à la métrique de Schwarzschild-de Sitter (Anti-de Sitter). Cette symétrie sphérique est simplement le groupe de symétrie  $SO(3)$ , ou encore que les vecteurs de Killing spatiaux de l'espace-temps engendrent une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ . Alors la métrique prend une forme généralisée de (2.37)

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^3}{3} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^3}{3} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.38)$$

Notons que les seules différences sont dans l'ajout des termes proportionnels à  $\Lambda$  aux éléments  $dt^2$  et  $dr^2$ .

Le fait d'être localement isométrique à une métrique de Schwarzschild-de Sitter se déduit du fait que le théorème dit que les seules solutions à symétries sphériques sont statiques et asymptotiquement plates. De cela, on peut montrer que les seules métriques qui correspondent à ces conditions sont localement isométriques à une métrique de Schwarzschild-de Sitter. Dans ce contexte, statique veut dire qui ne dépend pas du temps et est irrotationnelle.

### 2.3.2. Théorème d'énergie positive

Nous terminerons ce chapitre sur un théorème important en relativité générale, le *théorème d'énergie positive* [40], [41], [42] et [43]. Il stipule que si la condition d'énergie dominante est satisfaite, alors la masse ADM<sup>7</sup> d'un espace-temps asymptotiquement plat n'est pas négative. Cela veut dire que les espace-temps AdS et Minkowski n'admettent pas de masse négative<sup>8</sup>. Ainsi, on peut échapper au théorème en se plaçant dans un espace-temps dS. Ceci s'avérera crucial pour nos calculs au chapitre quatre.

## 2.4. Conclusion

La relativité générale est une théorie géométrique de la gravitation qui décrit de quelle manière l'énergie et l'impulsion dans l'univers se déplace au gré de la courbure de l'espace-temps, et qui explique comment cette dernière est influencée par la présence d'énergie et d'impulsion. Les équations d'Einstein font le pont entre ces concepts d'énergie et courbure. D'ailleurs, la haute non-linéarité des équations d'Einstein combinée au fait que les corps déforment l'espace-temps en même temps qu'ils sont influencés par cette déformation fait en sorte que les équations d'Einstein sont extrêmement difficiles à résoudre. Il faut alors souvent faire des simplifications assez draconiennes quant aux symétries de l'espace-temps.

La causalité et la conservation de l'énergie dans l'univers, combinées au fait que nous savons que dans des régimes de champs gravitationnels faibles nous devons retomber sur l'équation de Newton, nous ont permis de dériver les équations d'Einstein. Le caractère unique de l'espace-temps est dû en partie à la géométrie non euclidienne qu'il faut employer. Ceci donne alors naissance à trois classes de vecteurs différentes, les vecteurs temporels, lumières et spatiaux qui ont chacune une interprétation différente.

Les équations d'Einstein étant assez permissives quant à la nature de l'énergie et l'impulsion qui peut y avoir dans l'univers, cela nous force à être plus strict et imposer des conditions sur le tenseur énergie-impulsion, conditions qui nous assure, la plupart du temps,

---

7. ADM pour Richard Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner. Il s'agit de la masse, ou plutôt de l'énergie gravitationnelle qu'un observateur mesurerait à l'infini. C'est donc l'écart entre la métrique mesurée à l'infini et la métrique vers laquelle elle est sensée s'approcher asymptotiquement.

8. En fait, le théorème dit aussi que la masse ADM est précisément zéro seulement pour les espaces-temps de Minkowski.

que la matière considérée se comporte bien et possède de bonnes caractéristiques physiques. Cependant, ces conditions, quoique souvent vraies, ne sont pas satisfaites pour tous les systèmes physiques. L'univers permet qu'elles soient violées dans une certaine mesure. On pense notamment à l'effet Casimir.

On illustre la résolution des équations d'Einstein pour un univers à symétrie sphérique, et cette solution est un trou noir de Schwarzschild. Cette solution se trouve être d'une importance capitale en relativité générale. On introduit le théorème de Birkhoff, qui stipule que toute solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide est statique et asymptotiquement plate, ou en d'autres termes, est isométrique à la solution de Schwarzschild. On cite ensuite le théorème d'énergie positive, qui stipule que pour un univers asymptotiquement plat, la masse doit toujours être positive si la condition d'énergie dominante est satisfaite.

Évidemment, il ne s'agit ici que d'un aperçu de toute la richesse que cette théorie a à offrir ; il ne s'agit ici que d'une brève présentation des résultats qui sont utiles à la présente discussion. Pour avoir de plus amples détails sur la relativité générale et ses ramifications, nous ne saurions trop recommander de consulter [1], [44], [23] ou [6], des œuvres titanesques qui couvrent une bonne partie de la théorie classique de la relativité générale.



# Chapitre 3

---

## Hypersurfaces

Nous avons jusqu'à présent surtout introduit les concepts de base de la géométrie différentielle et de relativité générale, mais nous n'avons jamais vraiment discuté de tranches de l'espace-temps. En effet, une des questions qu'il est souvent pertinent de se poser est de quelle manière se comporte l'espace-temps en un temps fixe. Ceci possède une interprétation simple, mathématiquement ainsi que physiquement. La première s'interprète comme étant une sous-variété à trois dimensions, à la manière qu'une courbe sur une surface peut être une sous-variété. La seconde est simplement une tranche d'espace-temps dans laquelle le temps est fixe ; on regarde ainsi l'espace seulement sans évolution temporelle. Évidemment, une question naturelle qui se pose d'elle-même est alors, qu'arrive-t-il si on colle ensemble deux ou plusieurs de ces sous-variétés entre-elles ? Quelles sont les conditions que les objets mathématiques qui décrivent l'espace-temps doivent satisfaire afin que le collage soit une opération permise ? Et plus important encore, quelle interprétation physique peut-on tirer de ces collages ? Toutes ces questions font partie des motivations du chapitre quatre.

Dans un premier temps, nous introduirons le concept de structure induite. Ce concept est assez simple, il permet simplement de restreindre les objets mathématiques décrits au chapitre un à une sous-variété de dimension moindre. Nous nous attarderons sur la métrique, et ce, uniquement dans le cas d'une hypersurface spatiale.

Ensuite, nous démontrerons les conditions nécessaires afin qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la métrique — et par extension, tous les objets mathématiques définis sur la variété — de même que dans le tenseur énergie-impulsion lorsqu'on effectue un collage de deux espaces-temps. Ces conditions portent le nom de conditions de jonction d'Israel et sont très bien décrites dans [45], [46] et [5].

Nous terminerons sur un exemple simple qui permet d'illustrer la puissance du formalisme d'Israel : celui de l'effondrement d'une coquille sphérique. Nous verrons bien comment deux géométries peuvent être collées de sorte à ce qu'on trouve les équations du mouvement d'une coquille sphérique qui s'effondre. Voir par exemple [5] et [47].

Dans ce qui suit, l'espace-temps sera dénoté par  $\mathcal{M}$  et un collage de deux espaces-temps par  $\mathcal{V}^+$  et  $\mathcal{V}^-$ . Une hypersurface sera alors dénotée par  $\Sigma$ . Les indices grecs seront réservés pour l'espace-temps et les indices latins pour l'hypersurface.

### 3.1. Métrique induite

Nous décrivons ici de quelle manière on peut parler de la géométrie intrinsèque d'une hypersurface. Dans un espace-temps à quatre dimensions, nos hypersurfaces seront des sous-variétés de dimension trois. Ainsi, si on a une carte locale  $(\mathcal{U}, \phi)$  de l'espace-temps muni des coordonnées  $x^\alpha$ , de même qu'un sous-ensemble ouvert  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  de  $\Sigma$  de sorte qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{V}' \subset \phi(\mathcal{U})$  tel que  $\phi^{-1}(\mathcal{V}') = \mathcal{V}$ . Alors on peut décrire ce sous-ensemble à l'aide de fonctions paramétriques différentiables  $x^\alpha(y^a)$  où  $a = 1, 2, 3$ . Ceci fait en sorte que  $(\mathcal{V}, \phi(x^\alpha))$  est une carte de  $\Sigma$  avec coordonnées  $y^a$ . On pourrait aussi la définir en imposant une restriction sur les coordonnées

$$\Phi(x^\mu) = 0. \tag{3.1}$$

Par exemple, une 2-sphère plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions peut être à la fois décrite par les fonctions paramétriques  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$  et  $z = r \cos \theta$ , où  $\theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées intrinsèques et  $r$  est le rayon de la sphère, où par la restriction  $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ .

Ensuite, on peut définir le vecteur normal à l'hypersurface  $\Sigma$ . Il s'agit simplement d'un vecteur unitaire  $n^\alpha$  dont la norme est positive si  $\Sigma$  est temporelle ou négative si  $\Sigma$  est spatiale. Ce vecteur pointera toujours dans la direction où  $\Phi$  augmente. En effet,  $\Phi_{,\alpha}$  est un vecteur normal à  $\Sigma$  car la valeur de  $\Phi$  ne change que dans la direction perpendiculaire à  $\Sigma$  : cette fonction est identiquement nulle sur l'hypersurface. Ainsi, on choisit  $n^\alpha$  de sorte que  $n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$ .

---

1. À noter que ce vecteur est bien défini seulement si l'hypersurface est temporelle ou spatiale. Si elle est de type lumière, alors ce vecteur est nul et il faut faire plus attention. On ne traitera pas ce cas ici.

On peut alors parler de structures induites. Pour ce faire, il suffit de restreindre l'élément de distance infinitésimal à l'hypersurface. Pour commencer, on définit simplement les vecteurs de base de l'espace tangent à  $\Sigma$

$$\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \quad (3.2)$$

Pour un déplacement dans  $\Sigma$ , on a selon (1.20)

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= h_{ab} dy^a dy^b \end{aligned} \quad (3.3)$$

où on définit la *métrique induite* sur l'hypersurface comme étant

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}. \quad (3.4)$$

Pour toutes les autres structures, c'est la même chose, c'est-à-dire qu'il suffit de changer tous les indices en utilisant des matrices de la forme de  $\partial x^\alpha / \partial y^a$ . Par exemple, pour un vecteur et une un-forme

$$A^\alpha = A^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \quad \text{et} \quad A_a = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}. \quad (3.5)$$

Il est à noter qu'étant donné que la matrice  $\partial x^\alpha / \partial y^a$  n'est pas en général inversible, on ne peut pas directement induire les vecteurs contravariants sur notre hypersurface, comme on le voit en (3.5). Il faudra ainsi transformer ces vecteurs en vecteurs covariants avec la métrique usuelle, les induire sur la sous-variété, puis les retransformer en vecteurs contravariants avec la métrique induite.

## 3.2. Conditions de continuité

Maintenant que nous sommes équipés des outils appropriés pour décrire les sous-variétés d'espace-temps, il est temps de voir de quelle manière on peut coller deux espaces-temps ou séparer un espace-temps en deux. La jonction entre les deux parties doit cependant satisfaire des conditions qu'on peut d'ores et déjà déduire simplement de par notre expérience avec ce que devrait être une théorie fonctionnelle de la gravité classique ; on parle évidemment d'une jonction lisse entre les deux parties de l'espace-temps. Évidemment, la difficulté principale réside dans le fait que les coordonnées de chaque côté de l'hypersurface ne sont pas forcément

les mêmes, ce pourquoi nous devons nous assurer que l'on compare les métriques et tenseurs énergie-impulsions induits sur l'hypersurface.

Ainsi, supposons que nous avons la situation suivante : soit une hypersurface  $\Sigma$  telle qu'elle sépare deux parties d'espace-temps. D'un côté nous aurons la partie « + » et de l'autre la partie « - ». Nous dénoterons par  $(\mathcal{V}^+, \mathbf{g}^+)$  et  $(\mathcal{V}^-, \mathbf{g}^-)$  les espaces-temps de part et d'autre de l'hypersurface les séparant. Supposons de plus qu'il existe une coordonnée  $l$ , le long des géodésiques qui traversent perpendiculairement l'hypersurface, qui est valide partout et telle que  $l < 0$  du côté « - » et  $l > 0$  du côté « + ». Prenons aussi que le vecteur normal à l'hypersurface  $n^\alpha$  soit dirigé du côté « + ».

Ainsi, lorsqu'on se déplace le long des géodésiques perpendiculaires à  $\Sigma$ , la distance infinitésimale parcourue en terme des coordonnées  $l(x^\alpha)$  est  $dx^\alpha = n^\alpha dl$ , et  $n_\alpha = \varepsilon \partial_\alpha l$ , où  $\varepsilon = n^\alpha n_\alpha$  où  $\varepsilon$  est égal à  $\pm 1$  : si  $\Sigma$  est temporelle,  $\varepsilon = +1$ , et si  $\Sigma$  est spatiale,  $\varepsilon = -1$ .

### 3.2.1. Première condition

La première condition concerne évidemment la métrique. Alors, nous définissons une métrique au sens des distributions pour tout l'espace-temps de la manière suivante :

$$g_{\mu\nu} = \Theta(l)g_{\mu\nu}^+ + \Theta(-l)g_{\mu\nu}^- \quad (3.6)$$

où  $\Theta(l)$  est évidemment la distribution de Heaviside. Cette métrique doit satisfaire aux équations d'Einstein des deux parties de l'espace-temps. On doit aussi s'assurer que cette métrique soit dérivable, car sa dérivée entre en jeu dans le calcul des différents tenseurs qui composent les équations d'Einstein, et ceux-ci doivent aussi être bien définis au sens des distributions. Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu, \gamma} &= \varepsilon \delta(l) n_\gamma g_{\mu\nu}^+ + \Theta(l) g_{\mu\nu, \gamma}^+ - \varepsilon \delta(l) n_\gamma g_{\mu\nu}^- + \Theta(-l) g_{\mu\nu, \gamma}^- \\ &= \Theta(l) g_{\mu\nu, \gamma}^+ + \Theta(-l) g_{\mu\nu, \gamma}^- + \varepsilon \delta(l) n_\gamma (g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Évidemment, cette dérivée ne sera pas une solution appropriée étant donné que nous avons le terme supplémentaire  $\varepsilon \delta(l) n_\gamma (g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-)$ . En effet, dans le calcul des symboles de Christoffel, un terme proportionnel à  $\delta(l)\Theta(l)$  apparaîtrait, et ceci n'est pas défini comme étant une distribution ; il faut donc s'arranger pour annuler le terme proportionnel au delta de Dirac. Ce terme n'est en général pas nul à la jonction des deux espaces-temps, c'est-à-dire aux points où  $l = 0$ . Ainsi, la première condition de jonction s'obtient aisément, il faut simplement que

la métrique soit continue au travers de l'hypersurface, c'est-à-dire que  $g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^-$ . Évidemment, on peut transformer cette affirmation en utilisant l'équation (3.4) et en utilisant le fait que les coordonnées  $y^a$  sur l'hypersurface sont les mêmes de chaque côté. Ainsi, on trouve la première condition de jonction de deux espaces-temps :

$$h_{mn}^+ = h_{mn}^-. \quad (3.8)$$

Notons ici que nous avons exprimé l'affirmation « aux points où  $l = 0$  » comme étant garante du fait que nous voulons l'égalité des métriques induites de part et d'autre de l'hypersurface. Cela se traduit simplement, il faut que  $\Sigma$  possède une géométrie bien définie.

### 3.2.2. Deuxième condition

L'autre tenseur qui intervient dans les équations d'Einstein et que nous n'avons pas traité est le tenseur énergie-impulsion. Un calcul assez fastidieux permet nous permet d'obtenir que

$$T_{\mu\nu} = \Theta(l)T_{\mu\nu}^+ + \Theta(-l)T_{\mu\nu}^- + \delta(l)S_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

où le tenseur  $S_{\mu\nu}$  est le tenseur d'énergie-impulsion d'une fine couche d'énergie sur l'hypersurface. Évidemment, il peut aussi être nul. Il est donné par [5]

$$16\pi\varepsilon S_{\mu\nu} = \kappa_{\alpha\mu}n^\alpha n_\nu + \kappa_{\alpha\nu}n^\alpha n_\mu - \kappa n_\mu n_\nu - \varepsilon\kappa_{\mu\nu} - (\kappa_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta - \varepsilon\kappa)g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

où  $\kappa_{\mu\nu} = \varepsilon(g_{\mu\nu}^+{}_{;\gamma} - g_{\mu\nu}^-{}_{;\gamma})n^\gamma$ . De plus, on peut induire ce tenseur sur l'hypersurface, on trouve

$$S_{mn} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} [K_{mn}^+ - K_{mn}^- - (K^+ - K^-)h_{mn}]. \quad (3.11)$$

Le tenseur  $K_{mn}$  est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface, ou la courbure externe, et elle s'exprime comme

$$K_{mn} = n_{\mu;\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^m} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^n}. \quad (3.12)$$

Ainsi, pour avoir une transition lisse au travers de l'hypersurface, on doit avoir que

$$K_{mn}^+ = K_{mn}^-. \quad (3.13)$$

Il s'agit de la seconde condition de jonction. Cette condition dit simplement que les courbures des deux côtés doivent être en accord l'une avec l'autre. Elle est très importante car elle implique aussi que le tenseur de Riemann est non-singulier sur  $\Sigma$ . Si cette condition est

violée, alors l'espace-temps est singulier sur  $\Sigma$ , mais cela porte une interprétation physique assez importante : il y aura une couche mince d'énergie sur l'hypersurface. On peut alors aussi penser à cette condition comme étant une sorte de conservation de l'énergie au travers de l'hypersurface, et si jamais l'énergie n'était pas conservée, alors le manque ou le surplus se retrouve sur l'hypersurface  $\Sigma$ .

Ces deux conditions ont été développées par Darmois dans [48] et Israel dans [45].

### 3.3. Exemple : effondrement gravitationnel

Évidemment, cela peut sembler légèrement abstrait ; il est convenable d'illustrer de quelle manière ce formalisme peut être utile avant d'entreprendre les plus difficiles problèmes du chapitre quatre. On peut par exemple regarder de quelle manière une coquille mince à symétrie sphérique s'effondre ; nous chercherons donc les équations du mouvement de la coquille.

Dans l'exemple qui suit, on suppose que l'espace-temps est plat à l'intérieur de la coquille, donc dans  $\mathcal{V}^-$ , et à l'extérieur, dans  $\mathcal{V}^+$ , la métrique est nécessairement celle de Schwarzschild en vertu du théorème de Birkhoff. On assume aussi que la coquille est faite de matière sans pression, ce qui veut dire que

$$S^{mn} = \sigma u^m u^n, \quad (3.14)$$

où  $\sigma$  est la densité surfacique et  $u^m$  est le champ de vitesse de la coquille. On utilise les coordonnées  $(\tau, \theta, \varphi)$  sur  $\Sigma$  ; dans ces coordonnées,  $u^m = \partial y^m / \partial \tau$ . Un calcul simple en utilisant (3.12) donne les valeurs de  $K_{mn}^\pm$  :

$$\begin{aligned} (K^\tau_\tau)^\pm &= \frac{\dot{\beta}_\pm}{\dot{R}}, \\ (K^\theta_\theta)^\pm &= (K^\varphi_\varphi)^\pm = \frac{\beta_\pm}{R}, \\ \beta_+ &= \left(1 - 2M/R + \dot{R}^2\right)^{1/2}, \\ \beta_- &= \left(1 + \dot{R}^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $R(\tau)$  est le rayon de la coquille et  $M$  est sa masse telle que vue dans  $\mathcal{V}^+$ . Maintenant, on peut calculer les composantes du tenseur énergie-impulsion de l'hypersurface en utilisant (3.11)

$$S^\tau_\tau = -\sigma = \frac{\beta_+ - \beta_-}{4\pi R}, \quad S^\theta_\theta = 0 = \frac{\beta_+ - \beta_-}{8\pi R} + \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{8\pi \dot{R}}. \quad (3.15)$$

On peut intégrer directement la seconde équation et remplacer dans la première. On trouve alors que  $4\pi R^2 \sigma = \text{constante} = m$ , où  $m$  est la masse inertielle de la coquille. Ainsi, cela veut dire que la première équation se réécrit comme  $\beta_- - \beta_+ = m/R$ , et cela s'interprète comme étant que la masse de la coquille ne change pas durant son évolution. On peut aussi prendre le carré de la seconde équation avec la définition de  $m$  et on trouve que  $M = m\beta_- - \frac{m^2}{2R}$ . Le premier terme s'interprète comme étant l'énergie cinétique relativiste de la coquille et le deuxième comme étant l'énergie nécessaire afin de construire la coquille. Ainsi, la somme de ces deux énergies donne la masse gravitationnelle totale conservée  $M$  de la coquille. C'est très important car cela illustre bien que toutes les formes d'énergie contribuent à la masse gravitationnelle d'un corps.

Les équations du mouvement sont données par les deux équations pour  $m$  et  $M$  :

$$\begin{aligned} m &= 4\pi R^2 \sigma, \\ M &= m\sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{m^2}{2R}. \end{aligned}$$

Quand  $M < m$  il y a un point de non-retour,  $\dot{R} = 0$ , en  $R_{\text{max}} = m^2/(2m - 2M)$ . Donc une coquille en expansion telle que  $M < m$  ne pourra échapper à sa propre gravité.

### 3.4. Conclusion

L'étude des hypersurfaces est un domaine assez vaste et utile en relativité générale. On peut souvent résoudre les problèmes, bien que parfois les équations soient trop compliquées pour être résolues analytiquement. Cependant, les équations qui découlent du formalisme d'Israel sont toujours utiles, et leur interprétation simple permet de comprendre des phénomènes physiques qui pourraient autrement paraître plus complexes qu'ils ne le sont vraiment.

Nous avons présenté de quelle manière on définit les hypersurfaces, et de quelle façon on induit sur ces coupes de l'espace-temps les structures de l'espace-temps total.

Puis, nous avons montré quelles sont les deux conditions de jonctions lors d'un collage de deux espaces-temps. La première dit simplement que la métrique induite de chaque côté de l'hypersurface doit être égale, et la seconde dit que la courbure externe de chaque côté de l'hypersurface doit être la même aussi. Cette deuxième condition s'interprète aussi comme étant que l'énergie est conservée au travers de l'hypersurface. Lorsque cette condition est

violée, cela ne veut pas dire que le collage ne fonctionne pas, mais plutôt qu'il y a de l'énergie sur l'hypersurface.

Nous avons terminé cette section sur un exemple qui se verra formateur pour le prochain chapitre. Nous avons montré de quelle manière ces conditions se traduisent dans le contexte d'une bulle mince sphérique qui sépare un espace-temps plat d'un espace-temps de Schwarzschild à l'extérieur.

# Chapitre 4

---

## Résultats

Dans ce qui suit, nous présentons l'article *Stable, thin wall, negative mass bubbles in de Sitter space-time* qui a été soumis à la revue *Physical Review D* et est aussi sur arXiv. Il a été écrit en collaboration avec Matthew Johnson, Manu B. Paranjape et Natalia Tapia-Arellano. À noter qu'il ne s'agit pas nécessairement de la forme finale de l'article.

### 4.1. Présentation de l'article

Dans cet article, on utilise les résultats du chapitre trois afin de calculer les équations du mouvement d'une bulle mince de masse négative séparant un espace-temps quelconque à l'intérieur d'un second espace-temps à l'extérieur qu'on prend comme ayant une géométrie de Schwarzschild-de Sitter. Une fois les équations du mouvement déterminées, on étudiera la stabilité des solutions de même que si elles prédisent des solutions physiques au sens de la condition d'énergie dominante définie dans le chapitre deux.

Des configurations de bulles de masse négative ont déjà été trouvées dans de précédents articles [49, 50], et celui-ci se veut être une suite dans laquelle on traite aussi la stabilité des solutions. On peut trouver le potentiel associé à la bulle mince en utilisant (3.11) et le fait que le tenseur énergie-impulsion de la bulle mince s'écrit comme  $S_{mn} = \text{diag}(\sigma, -\vartheta, -\vartheta)$ . En se basant sur l'exemple du chapitre trois, on calcule les composantes de ce tenseur et les équations qui en découlent font intervenir  $\dot{r}$ , où  $r$  est le rayon de la bulle. On peut alors interpréter  $\dot{r}$  comme faisant partie d'une équation dynamique, ce qui définit un potentiel lorsqu'on prend  $\dot{r}^2$  :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = E = 0. \tag{4.1}$$

On commence par montrer que ce potentiel qui gouverne le rayon de la bulle mince dépend de la fonction de masse à l'intérieur de la bulle, masse qui n'est pas spécifiée pour le moment, étant donné qu'on suppose uniquement que l'on connaît la fonction de masse à l'extérieur.

On prend d'abord un simple intérieur avec une constante cosmologique, et on trouve qu'il n'existe pas de configurations où  $\sigma$  est une constante donnant un minimum stable dans le potentiel, telles que la condition d'énergie dominante est satisfaite partout à l'intérieur de la bulle. Cependant, ces conditions initiales — la bulle mince avec un intérieur de Sitter — mènent à effondrement en une métrique de Schwarzschild-de Sitter de masse négative et singulière à l'origine. La condition d'énergie est valide partout même sur la bulle, et ce, malgré l'instabilité de la solution. Cela s'agirait probablement d'un contre-exemple à l'hypothèse de la censure cosmique, qui stipule qu'il n'existe pas de singularité qui ne soit pas cachée derrière un horizon des événements. Or, cela ne semble pas être le cas puisque notre solution s'effondre en une singularité de masse négative, donc sans horizon.

Cependant, si on admet que la densité d'énergie de la bulle  $\sigma$  n'est pas une constante, mais bien une fonction qui dépend du rayon  $r$  de la bulle, on peut trouver une déformation de cette densité d'énergie de sorte que le potentiel admette un minimum. Ainsi, il existe des configurations statiques, stables et non-singulières de bulles de masse négative qui ont une géométrie interne de de Sitter. Par la nature de la fonction de masse interne, la condition d'énergie dominante est respectée partout.

Pour traiter la stabilité d'autres types de géométries internes, il faut alors procéder à l'inverse. On peut écrire la fonction de masse interne en fonction du potentiel et choisir un potentiel avec un minimum tel qu'on le souhaite. En faisant cela, pour tout potentiel  $V(r)$ , on est forcé de prendre  $\sigma < 0$ , afin de retirer la singularité en  $r = 0$ . Et donc que la densité d'énergie sur la bulle mince est par définition négative. On peut alors vérifier si notre fonction de masse interne satisfait à la condition d'énergie dominante qui selon [49] prend la forme :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{m'_-(r)}{r^2} \right) \leq 0, \quad \frac{d}{dr} (m'_-(r)r^2) \geq 0. \quad (4.2)$$

On montre alors que ces conditions sont satisfaites pour notre choix de potentiel et cela confirme donc qu'il existe des solutions statiques stables aux perturbations sphériques. La bulle porte cependant une masse négative qui ne respecte pas la condition d'énergie dominante, mais nous avons vu au chapitre deux que cela peut parfois être possible.

## 4.2. Contributions

Nos contributions à cet article sont surtout sur la partie stabilité. Nous avons commencé par faire une vaste exploration numérique du cas où l'intérieur n'est qu'une géométrie de de Sitter, pour montrer qu'il n'existe pas de paramètres tels que la condition d'énergie dominante est satisfaite de même qu'il y ait présence d'un minimum comme voulu dans le cas d'un  $\sigma$  constant.

Dans un second temps, nous avons participé à l'effort que fut l'inversion de la méthode afin d'exprimer la fonction de masse à l'intérieur en fonction du potentiel dans le but de choisir un potentiel fonctionnel plutôt qu'une fonction de masse intérieure. Ensuite, il a seulement fallu trouver la bonne fonction et la déformer de sorte qu'on satisfasse le plus de contraintes possible. Évidemment, il n'est pas possible que la bulle mince satisfasse la condition d'énergie dominante pour un  $\sigma$  constant, car cela impose qu'elle doit posséder une densité d'énergie négative. Par contre, nous avons vérifié que pour un  $\sigma(r)$ , il est bel et bien possible de trouver une solution statique, non-singulière avec masse négative qui respecte la condition d'énergie dominante partout, de même que sur la surface de la bulle.

# Stable, thin wall, negative mass bubbles in de Sitter space-time.

Matthew C. Johnson<sup>3,5,\*</sup>, M. B. Paranjape<sup>1,2,3,†</sup>, Antoine Savard<sup>1,‡</sup> and Natalia Tapia-Arellano<sup>1,4,§</sup>

<sup>1</sup>*Groupe de physique des particules, Département de physique, Université de Montréal,  
C.P. 6128, succ. centre-ville, Montréal, Québec, Canada, H3C 3J7*

<sup>2</sup>*Centre de recherche mathématiques, Université de Montréal*

<sup>3</sup>*Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North, Waterloo, Ontario, Canada N2L 2Y5*

<sup>4</sup>*Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile,*

*Avenida Ecuador 3493, Estación Central, Santiago, Chile 9170124. and*

<sup>5</sup>*Department of Physics and Astronomy, 128 Petrie Science and Engineering Building,  
York University 4700 Keele Street, Toronto, Ontario, Canada, M3J 1P3*

## Abstract

Negative mass makes perfect physical sense as long as the dominant energy condition is satisfied by the corresponding energy-momentum tensor. Heretofore, only *configurations* of negative mass had been found [1, 2], the analysis did not address stability or dynamics. In this paper, we analyze both of these criteria. We demonstrate the existence of *stable*, static, negative mass bubbles in an asymptotically de Sitter space-time. The bubbles are solutions of the Einstein equations and correspond to an interior region of space-time containing a specific mass distribution, separated by a thin wall from the exact, negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time in the exterior. We apply the Israel junction conditions at the wall. For the case of an interior corresponding simply to de Sitter space-time with a different cosmological constant from the outside space-time, separated by a thin wall with energy density that is independent of the radius, we find static but unstable solutions which satisfy the dominant energy condition everywhere. The bubbles can collapse through spherically symmetric configurations to the exact, singular, negative mass Schwarzschild-de Sitter solution. Interestingly, this provides a counter-example of the cosmic censorship hypothesis. Alternatively, the junction conditions can be used to give rise to an interior mass distribution that depends on the potential for the radius of the wall. We show that for no choice of the potential, for positive energy density on the wall that is independent of the radius, can we get a solution that is non-singular at the origin. However, if we allow the energy density on the wall to depend on the radius of the bubble, we can find *stable*, static, non-singular solutions of negative mass which everywhere satisfy the dominant energy condition.

PACS numbers: 04.20.Cv,04.70.Bw,04.20.Jb,04.20.Dw,04.20.-q,02.40.Hw

## 1. Introduction

The Schwarzschild metric is a solution of the vacuum Einstein equations with one parameter, the mass. It is a solution of the Einstein equations for any value of the mass, including negative mass. However it is a singular solution, the singularity residing at the origin of the coordinate system. The singularity means that in some sense the solution actually contains a source, a singular source located at the position of the singularity. The positive mass singularity is hidden behind an event horizon while the negative mass singularity is naked. Smoothing out the singularity corresponds to adding an energy-momentum source to the space-time. The smoothed metric satisfies Einstein equations with this energy-momentum as the source. The negative mass singularity cannot be smoothed out with a source that could correspond to physically sensible energy-momentum. Physically sensible energy-momentum is taken to mean that at any point, the flow of the energy-momentum remains inside the future directed light-cone from that point. Such energy-momentum satisfies the dominant energy condition, which means, technically, for any future directed time-like or light-like vector  $u$  :

$$T^{0\nu}u_\nu \geq 0 \quad \text{and} \quad T^{\mu\nu}u_\nu T_{\mu\alpha}u^\alpha \geq 0 \quad (1)$$

If the dominant energy condition is satisfied, then one can prove the positive energy theorem [3–5] which implies that the ADM mass [6] must be positive, denying the possibility of negative mass. The positive energy theorem requires an asymptotically flat space-time or asymptotically anti-de Sitter space-time. Negative mass solutions have already been found in anti-de Sitter space-time [7, 8], however they cannot satisfy the dominant energy condition. But in asymptotically de Sitter space-time, the positive energy theorem does not hold, and it is here that one could imagine that physically reasonable, non-singular negative mass solutions could exist. The first example of such a possibility of negative mass was found in the article [1]. In this work a simple mathematical deformation of the negative mass

Schwarzschild-de Sitter metric

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2(-M + \Lambda r^3/6)}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2(-M + \Lambda r^3/6)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2)$$

was given. By changing  $(-M + \Lambda r^3/6) \rightarrow m(r)$  and imposing that  $m(r) \rightarrow 0$  for  $r \rightarrow 0$  but  $m(r) = -M + \Lambda r^3/6$  for sufficiently large  $r$  yields an asymptotic, negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time and the singularity at the origin is smoothed out. When this metric is inserted into the Einstein tensor, the result no longer vanishes, and the result is taken to be equal to the required energy-momentum tensor to satisfy Einstein's equations. It was shown in [1] that it was possible to choose the deformation so that the resulting energy-momentum tensor satisfies the dominant energy condition everywhere. This work established the possibility that non-singular negative mass configurations could exist that arise out of physically reasonable energy-momentum. The notion that the negative mass so obtained is spurious because it is defined only relative to the background, is groundless. There is no intrinsic notion of mass in asymptotic de Sitter space-time, [9–11]. Even positive mass in such a space-time is only defined relative to the background and therefore positive or negative mass configurations are equally valid.

In a subsequent article, [2] it was shown that with energy and momentum corresponding to that of an ideal fluid, there exist bubble like configurations with the exterior space-time given exactly by the negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time. However also in [2], no dynamics were accorded to the ideal fluid, no equation of state was imposed and therefore the bubbles that were found were again just configurations and not solutions of a dynamical theory. The energy-momentum of an ideal fluid, in the comoving coordinate system, is characterized by two functions, the pressure and the density, and the dominant energy condition corresponds to:

$$\rho(r) \geq 0 \quad \rho(r) \geq |p(r)| \quad (3)$$

Einstein's equations are under-determined giving three equations for four fields assuming spherical symmetry, the pressure, the density and the coefficient fields of  $dt^2$  and  $dr^2$  in the metric. Usually an equation of state relating  $\rho$  to  $p$  is specified, giving rise to a deterministic system. Instead of providing the equation of state, in [2], the coefficient field of  $dr^2$  in the metric was simply specified. It was smoothly and explicitly deformed inside a radius  $y$  till  $r = 0$  from its value in the negative mass Schwarzschild-de Sitter metric outside, in a manner that eliminated the singularity at the origin. Einstein's dynamical equations were solved (numerically) for the coefficient field of  $dt^2$  in the metric, and for the density and pressure. It was observed that the dominant energy condition Eqn. (3) was satisfied. Thus it was shown that perfectly physical matter, that corresponding to an ideal fluid, could in principle organize itself to correspond to localized regions of negative mass.

However, this work was still unsatisfactory, stability of the solution was not addressed. It is still desirable to find a dynamical system in which actual self-consistent, soliton-like solutions of the dynamical matter/Einstein equations would exist and hence give rise to stable, non-singular, static solutions which correspond to localized regions of negative mass. In this article we show how to obtain dynamically *static*, non-singular solutions of negative mass which satisfy the dominant energy condition everywhere. The solutions are comprised of an inner and an outer space-time separated by a thin wall. We obtain stable solutions if the energy density on the wall is non constant *i.e.* is a (rather simple) function of the radius or if it breaks the dominant energy condition.

## 2. The setup

We will construct our solutions assuming a spherical geometry and using Schwarzschild coordinates. The solution will correspond to the exact negative mass Schwarzschild-de Sitter geometry given by Eqn. (2) outside, with  $\Lambda \rightarrow \Lambda_e$ , separated by a thin wall from an inside geometry. The conservation of energy and momentum across the wall is obtained by imposing the Israel junction conditions [12]. A clear exposition of the application of the Israel junction conditions is given in [13]. The wall is characterized by two parameters, the energy density per unit area  $\sigma$ , and the surface tension  $\vartheta$  (defined so that  $\vartheta$  is positive if the surface wants to contract and negative if the surface wants to expand). Then the stress-energy tensor of the wall will have the form (in an orthonormal system of coordinates)

$$S_{\hat{a}\hat{b}} = \text{diag.} (\sigma, -\vartheta, -\vartheta). \quad (4)$$

Imposing the Israel junction conditions will permit us to find the necessary inside geometry that will give rise to non-singular, stable solutions.

The interior mass function is taken to be  $m_-(r)$  which is not specified while the exterior mass function is taken to be explicitly

$$m_+(r) = -M + \frac{\Lambda r^3}{6} \quad (5)$$

corresponding to an exact negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time with mass  $-M$  cosmological constant  $\Lambda$ . The balance of energy-momentum flux through the interface gives rise to the junction condition in our case:

$$\left(1 - \frac{2m_-(r)}{r} + \dot{r}^2\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \dot{r}^2\right)^{1/2} = 4\pi\sigma r \quad (6)$$

and

$$\frac{\left(1 - \frac{m_-(r)}{r} - m'_-(r) + \dot{r}^2 + r\ddot{r}\right)}{\left(1 - \frac{2m_-(r)}{r} + \dot{r}^2\right)^{1/2}} - \frac{\left(1 + \frac{M}{r} - \frac{2\Lambda r^2}{3} + \dot{r}^2 + r\ddot{r}\right)}{\left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \dot{r}^2\right)^{1/2}} = 8\pi\vartheta r \quad (7)$$

where  $\Lambda$  is the vacuum energy on the outside  $-M$  is the value of the mass of the configuration as viewed from the outside and  $m_-(r)$  is the mass function inside. Writing this Eqn.(6) as simply

$$(a + \dot{r}^2)^{1/2} - (b + \dot{r}^2)^{1/2} = c^{1/2} \quad (8)$$

with obvious expressions for  $a, b, c$ , we can easily solve for  $\dot{r}^2$  by squaring both sides, reorganizing to put the square roots to one side and squaring again, which yields

$$(a + b - c)^2 - 4ab = 4c\dot{r}^2 \quad (9)$$

*i.e.*

$$\dot{r}^2 = \frac{(a - b)^2}{4c} - \frac{(a + b)}{2} + \frac{c}{4} \quad (10)$$

The LHS of Eqn.(10) can be thought of as (twice) the negative of the potential,  $V(r)$  and the dynamics corresponds to motion in this potential with vanishing total energy. Thus Eqn.(10) can be written as a dynamical equation for  $r$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = E = 0. \quad (11)$$

where

$$V(r) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(a - b)^2}{4c} - \frac{(a + b)}{2} + \frac{c}{4} \right). \quad (12)$$

Replacing for  $a, b$  and  $c$  we get

$$V(r) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\left(m_-(r) + M - \frac{\Lambda r^3}{6}\right)^2}{16\pi^2\sigma^2 r^4} - \left(1 + \frac{(m_-(r) - M)}{r} + \frac{\Lambda r^2}{6}\right) + 4\pi^2\sigma^2 r^2 \right). \quad (13)$$

A static stable solution will arise with a potential that admits a radius  $r_0$  such that

$$V(r_0) = 0, \quad V'(r_0) = 0, \quad V''(r_0) > 0. \quad (14)$$

Alternatively, we can use Eqn.(13) to solve for  $m_-(r)$  in terms of the potential  $V(r)$  or equivalently Eqn.(12) to solve for  $a$ . We have

$$(a - b)^2 - (a - b)2c + c^2 - 4bc + 8V(r)c = 0 \quad (15)$$

Thus

$$a - b = c \pm \sqrt{c^2 - (c^2 - 4bc + 8V(r)c)} = c \pm 2\sqrt{c(b - 2V(r))} \quad (16)$$

or

$$a = c + b \pm 2\sqrt{c(b - 2V(r))}. \quad (17)$$

Solving for  $a$  in Eqn.(8) when  $\dot{r} = 0$  and the  $V(r) = 0$  shows that we must take the  $+$  sign here. Replacing for  $a$ ,  $b$  and  $c$  we get

$$1 - \frac{2m_-(r)}{r} = (4\pi\sigma r)^2 + 1 + \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + 2\sqrt{(4\pi\sigma r)^2 \left(1 + \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - 2V(r)\right)} \quad (18)$$

or

$$m_-(r) = -8\pi^2\sigma^2 r^3 - M + \frac{\Lambda r^3}{6} - 4\pi\sigma r^2 \sqrt{1 + \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} - 2V(r)}. \quad (19)$$

One can see that for no choice of the potential,  $m_-(0) = 0$  for constant  $\sigma$ . This means that it is not possible to choose the potential so that the solution will be non-singular at the origin.

### 3. de Sitter bubbles

We begin by considering the case where the bubble interior is pure de Sitter with a different cosmological constant than the ambient de Sitter space-time, such that  $m_-(r) = \frac{\Lambda_i r^3}{6}$ . Vacuum bubbles of this type have been studied in a variety of contexts [14–22]. Here, we extend these previous analyses to negative mass in the exterior space-time as was analyzed by Barnaveli and Gogberashvili [23–25]. These authors did find the static, unstable negative mass solutions that we will expose in this section, however they did not find the stable solutions that we will reveal in subsection (5). We can write

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^4} + \frac{\beta}{r} - \gamma r^2 + \frac{1}{2} \quad (20)$$

where

$$\alpha = \frac{M^2}{32\pi^2\sigma^2}, \quad (21)$$

$$\beta = \frac{M(\Lambda - \Lambda_i)}{96\pi^2\sigma^2} + \frac{M}{2}, \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{(\Lambda_i - \Lambda)^2}{1152\pi^2\sigma^2} + \frac{(\Lambda_i + \Lambda)}{12} + 2\pi^2\sigma^2 \quad (23)$$

where  $\sigma$  is taken to be a constant independent of the bubble radius. The coefficients  $\alpha, \gamma$  are positive while  $\beta$  can have any sign. But for large and small  $r$ , the  $\beta/r$  term is unimportant. The potential  $V(r)$  obviously descends to  $-\infty$  in both limits,  $r \rightarrow 0$  and  $r \rightarrow \infty$ , and it is easy to show that it has exactly one maximum in between. The derivative of the potential, set equal to zero gives

$$2V'(r) = \frac{4\alpha}{r^5} - \frac{\beta}{r^2} - 2\gamma r = \frac{4\alpha - \beta r^3 - 2\gamma r^6}{r^5} = 0. \quad (24)$$

The numerator is a simple quadratic in  $r^3$  with solutions

$$r_{\pm}^3 = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 32\alpha\gamma}}{-4\gamma}. \quad (25)$$

The two roots are positive and negative, the cube root maintains the sign, and we discard the negative root. Thus we find one positive root where the derivative of the potential vanishes. The positive root is always

$$r_0 = \left( \frac{\sqrt{\beta^2 + 32\alpha\gamma} - \beta}{4\gamma} \right)^{1/3}. \quad (26)$$

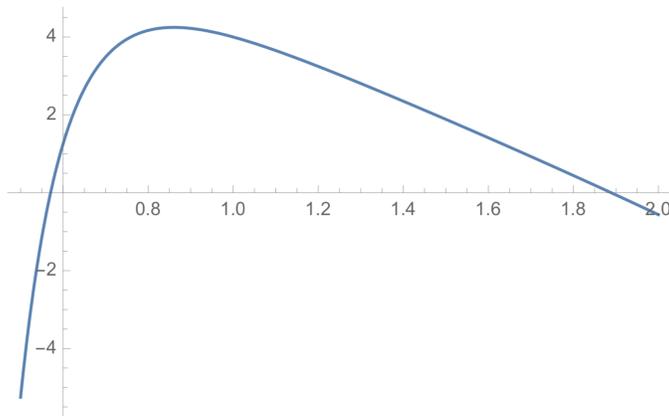


FIG. 1: (colour online) The potential  $V(r)$  plotted as a function of  $r$  (in units of mass) for generic values of  $\alpha, \beta, \gamma$

For this value of the radius to give a static solution requires that the potential vanish

$$V(r_0) = 0 \quad (27)$$

which can be simply arranged by choosing the parameters  $M, \Lambda, \Lambda_i$  and  $\sigma$ . Due to the asymptotic behaviour of the potential, this extremum must be a maximum. Thus it is obvious that one can have an unstable, negative mass bubble when the parameters are chosen so that the top of the potential has a double root at its maximum. This solution is the negative mass analog to the unstable solutions of Refs. [21, 22, 26].

We can find such a solution by solving the equation for  $V(r_0) = 0$  with  $r_0$  as given in Eqn.(26) (such that  $V'(r_0) = 0$ ). From Eqn.(20) we can write  $V(r_0) = 0$  implies

$$-\alpha + \beta r_0^3 - \gamma r_0^6 + \frac{r_0^4}{2} = 0. \quad (28)$$

Then replacing from  $V'(r_0) = 0$  that gives  $\beta r_0^3 = 4\alpha - 2\gamma r_0^6$  from Eqn.(24) we get

$$6\alpha - 6\gamma r_0^6 + r_0^4 = 0, \quad (29)$$

which is an easily, analytically solved cubic in the  $r_0^2$ . One can easily solve for the root analytically, and then plot the two solutions for  $r_0$  from Eqn.(26) and from the solution of the cubic Eqn.(29) giving the curves in Fig.(2). The crossing of the curves gives the value of  $r_0$  for which  $V(r_0) = 0$  and  $V'(r_0) = 0$ .

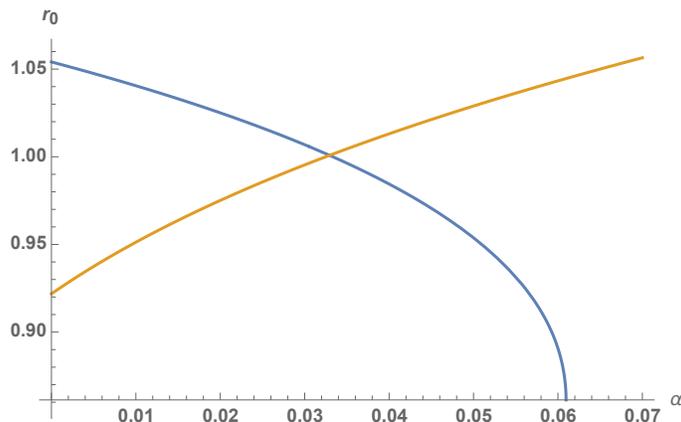


FIG. 2: (colour online) The the curves for  $r_0$  as a function of  $\alpha \approx .0165$ , with a  $\beta = -.235$  and  $\gamma = .3$ , with crossing point giving the solution for  $V(r_0) = 0$  and  $V'(r_0) = 0$  which occurs at about  $r_0 \approx 1$ .

Static but unstable negative mass solutions exist for a variety of parameters, including for both true vacuum (e.g.  $\Lambda > \Lambda_i$ ) or false vacuum (e.g.  $\Lambda < \Lambda_i$ ) bubbles. Assuming fixed  $\sigma$ , in Fig. 3 we plot the radius of the unstable solution as a function of the ratio  $\Lambda_i/\Lambda$ . The mass of the static unstable solutions increases as the ratio  $\Lambda_i/\Lambda$  decreases. The radius of the cosmological horizon (blue dashed line) in negative mass Schwarzschild de Sitter grows with increasing magnitude of the mass parameter [32], and unstable true vacuum bubbles track this growth, remaining just inside the cosmological horizon. False vacuum bubbles on the other hand are parametrically smaller than the cosmological horizon, decreasing in size as the ratio  $\Lambda_i/\Lambda$  increases. We can contrast these properties with the zero mass Coleman-de Luccia (CDL) true/false vacuum bubbles [27–29] or positive mass true/false vacuum bubbles [14–22]. CDL true vacuum bubbles are always smaller than the cosmological horizon, as shown in Fig. 3 (red dot-dashed line), and increase in size with the ratio  $\Lambda_i/\Lambda$ ; this trend is opposite that of negative mass unstable true vacuum bubbles. CDL false vacuum bubbles are always larger than the cosmological horizon. Qualitatively similar behavior is found for positive mass bubbles which do not collapse to a singularity. We can therefore see that negative mass bubbles are qualitatively very different than their positive mass counterparts.

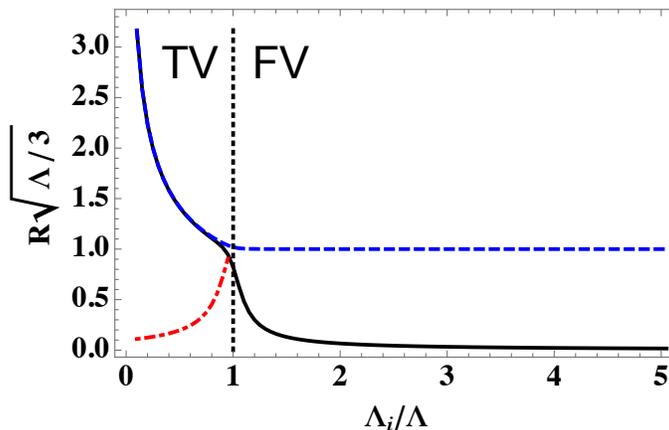


FIG. 3: (colour online) The radius of unstable negative mass vacuum bubbles (solid black) as a function of  $\Lambda_i/\Lambda$ . The regions corresponding to True Vacuum (TV) bubbles  $\Lambda_i/\Lambda < 1$  and False Vacuum (FV) bubbles  $\Lambda_i/\Lambda > 1$  are indicated. We overplot the radius of the cosmological horizon (blue dashed) and the zero mass Coleman-de Luccia true vacuum bubbles (red dot-dashed).

For other generic values of the parameters, there may be no turning points when the potential never crosses zero. In this case, initially expanding bubbles will continue to expand to infinite size, while initially collapsing bubbles will shrink away to zero size. When the parameters give a potential that does cross zero, the solutions split into two classes, those of radius greater than the larger zero crossing, which collapse to the minimum size given by the radius of the zero crossing and then bounce back to expand to infinite radius, and those of radius smaller than the smaller zero crossing which will expand to a maximum size given by the radius of the smaller zero crossing, and then shrink back down to zero size. This is all in exact analogy with the qualitative types of solutions that exist for positive mass bubbles [14–19, 21, 22].

For static unstable vacuum bubbles, the dominant energy condition reduces to  $\sigma \geq |\vartheta|$ . Conservation of stress energy implies  $\sigma = \vartheta$ , and it is therefore clear that our mass distributions satisfy the dominant energy condition. The other solutions described above also respect the dominant energy condition. Hence we can start with an initial physical mass distribution, that satisfies the dominant energy condition everywhere, but that in the latter case shrinks down to the singular solution corresponding to the exact negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time which has a naked singularity. Thus we have shown there exists perfectly physical initial data, that satisfies the dominant energy condition, which collapses to a naked singularity, albeit of negative mass. This is a counterexample to the cosmic censorship hypothesis. [30][33] Of course, we have not considered non-spherical perturbations. Because such perturbations grow in a collapsing bubble [21, 31], the system might evade the singular negative mass solution by fragmentation or gravitational radiation under non-spherical perturbations.

#### 4. Stable negative mass solutions for constant $\sigma \leq 0$ .

We take the interior mass function given in Eqn.(19) and rescale the parameters to have only dimensionless parameters which allows us to factor out one power of M:  $\Lambda = \frac{3\check{\Lambda}}{M^2}$ ,  $\check{\sigma} = \frac{\check{\sigma}}{4\pi\sigma M}$ ,  $r = M\check{r}$  such that the Eqn.(19) can be rewritten

$$\check{m}_-(\check{r}) = M \left( -1 + \frac{1}{2} (\check{\Lambda} - \check{\sigma}^2) \check{r}^3 - \check{\sigma} \check{r}^2 \sqrt{1 - 2\check{V}(\check{r}) + \frac{2}{\check{r}} - \check{\Lambda} \check{r}^2} \right). \quad (30)$$

We will drop the breves in the subsequent analysis. We have already observed that for any choice of the potential, it is impossible to remove the singularity at  $r = 0$  in the metric which comes in the form  $\frac{m_-(r)}{r}$ , the term  $-1$  in Eqn.(30) cannot be cancelled unless we take  $\sigma$  is negative, which we will briefly examine below. Such a detour affords a stable solution, but evidently one that is not physical, the energy density on the wall must be negative and the dominant energy condition is not satisfied. Then Eqn.(30) becomes, with  $\sigma \rightarrow -\sigma$

$$m_-(r) = M \left( -1 + \frac{1}{2} (\Lambda - \sigma^2) r^3 + \sigma r^2 \sqrt{1 - 2V(r) + \frac{2}{r} - \Lambda r^2} \right) \quad (31)$$

where now  $\sigma$  is taken positive. Making the further substitution

$$V(r) = -\frac{1}{2\sigma^2 r^4} (1 + \tilde{V}(r)), \quad (32)$$

we find

$$m_-(r) = M \left( -1 + \frac{1}{2} (\Lambda - \sigma^2) r^3 + \sqrt{1 + \tilde{V}(r) + \sigma^2 r^4 + 2\sigma^2 r^3 - \Lambda \sigma^2 r^6} \right) \quad (33)$$

and we see that as  $r \rightarrow 0$  we also have  $m_-(r) \rightarrow 0$  as long as  $\tilde{V}(r)$  also vanishes at the origin, so that any potential singularity in the metric at the origin is evaded. With the additional definition

$$(1 + U(r))^2 = 1 + \tilde{V}(r) + \sigma^2 r^4 + 2\sigma^2 r^3 - \Lambda \sigma^2 r^6 \quad (34)$$

we get the very simple expression

$$m_-(r) = M \left( \frac{1}{2} (\Lambda - \sigma^2) r^3 + U(r) \right), \quad (35)$$

We note that the potential singularity in the metric at the origin due to the  $-1$  term in Eqn.(33) has been neatly made to cancel. The dominant energy condition Eqn.(3) can be re-expressed in terms of the mass function [1]

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{m'_-(r)}{r^2} \right) \leq 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dr} (m'_-(r)r^2) \geq 0 \quad (36)$$

then with this reparametrization, we get

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{U'(r)}{r^2} \right) \leq 0 \quad \text{and} \quad 6(\Lambda - \sigma^2) + \frac{d}{dr} (U'(r)r^2) \geq 0. \quad (37)$$

The idea now is to choose the potential  $\tilde{V}(r)$ , and consequently  $U(r)$ , so that the three required conditions are satisfied: first that  $\tilde{V}(r)$  has a double zero giving rise to a minimum at a given radius, second to make sure that the dominant energy condition is satisfied at least in the bulk and third to ensure that  $m_-(r)$  vanishes at the origin so that there is no singularity. Such a minimum would actually give rise to an unstable maximum at the same radius for  $V(r)$  as can be ascertained by looking at Eqn.(32). However, it is easy to add small perturbations to  $\tilde{V}(r)$  afterwards to convert the maximum into a local, stable minimum in  $V(r)$  since around the maximum, which is also a double zero, the magnitude of  $V(r)$  is arbitrarily small. Sustained attempts to find a solution analytically in terms of a sixth order polynomial function for  $U(r)$ , which would have given rise to an analytical solution, were not successful. It seems that monomials of all orders are required. However, we have been able to find a numerical solution for a stable, nonsingular, negative mass bubble, which we expose below.

We additionally rescale the radial variable so that we insist that the radius of the thin wall bubble is 1. Thus replacing  $r \rightarrow r/\rho$  but then also re-scaling all the coupling constants  $\sigma \rightarrow \sigma\rho^{3/2}$ ,  $\Lambda \rightarrow \Lambda\rho^3$  and  $\tilde{V}(r) \rightarrow \tilde{V}(r/\rho)$  (which we will continue to call  $\tilde{V}(r)$ ) simply inserts a factor of  $1/\rho$  in the  $r^4$  term under the square root in Eqn.(38)

$$m_-(r) = M \left( -1 + \frac{1}{2} (\Lambda - \sigma^2) r^3 + \sqrt{1 + \tilde{V}(r) + \sigma^2 r^4 / \rho + 2\sigma^2 r^3 - \Lambda \sigma^2 r^6} \right). \quad (38)$$

however now, with the choice of  $\rho$  equal to the putative bubble radius.

A little numerical experimentation quickly shows that to satisfy the dominant energy condition,  $1 + \tilde{V}(r)$  must leave the origin at 1 with a positive slope. But then it can come down to have a smooth, double zero at  $r = 1$ . A possible choice, satisfying all the conditions is the simple function

$$1 + \tilde{V}(r) = \cos^2 \left( \frac{\pi(r - r_*)}{2(1 - r_*)} \right) \sec^2 \left( \frac{\pi r_*}{2(1 - r_*)} \right) \quad (39)$$

with  $r_*$ , in principle a free parameter, works well for  $r_* \approx 0.3$  and which is shown in Fig.(4). Then the dominant energy conditions and the interior mass functions are computed numerically as seen in Fig.(5). A simple smooth deformation of  $1 + \tilde{V}(r)$  allows for a stable solution, giving rise to a local minimum at  $r = 1$  in the true potential as in Fig.(7). The perturbation that was added is given by

$$\delta\tilde{V} = \sin^2(10r\pi) (0.1 \tanh(100(r - 0.9)) + 0.1) (0.1 \tanh(100(r - 1.1)) - 0.1) \quad (40)$$

which when added to  $\tilde{V}(r)$  gives the potential in Fig.(4). We ensure (numerically) that the deformation does not disturb the dominant energy conditions, as can be seen in Fig.(5). This solution is stable, non-singular and satisfies the dominant energy condition in the bulk, however, the solution is still not satisfactory as the energy-momentum on the wall is not physical.

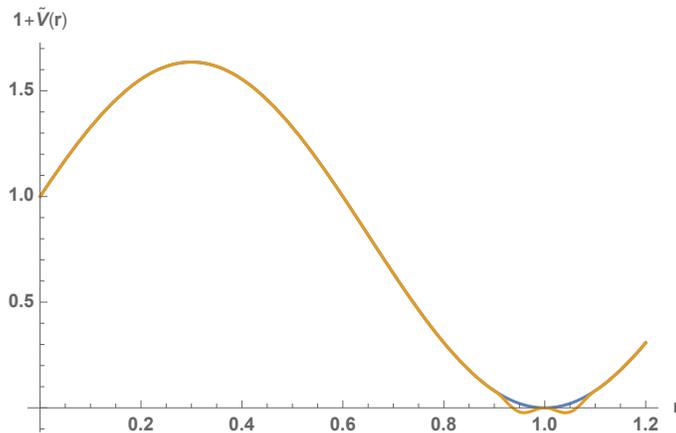


FIG. 4: (colour online) The potential  $1 + \tilde{V}(r)$  and its perturbed version. As one can see, it only affects the potential in the vicinity of  $r = 1$ . The parameters used are  $\Lambda = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_* = 0.3$  and  $\rho = 0.05$ .

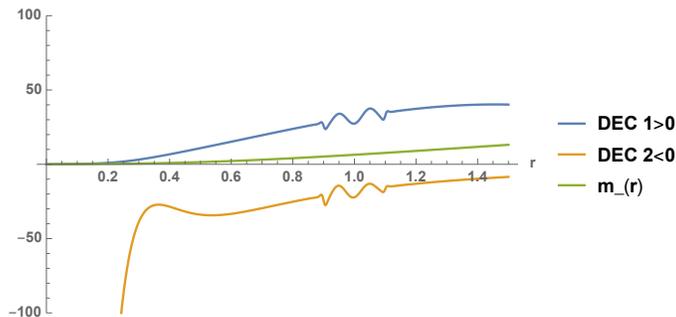


FIG. 5: (colour online) The dominant energy conditions Eqn.(36) labelled here as (dec1) and (dec2) and the interior mass labelled Eqn.(38) here as  $m_-$ . The parameters used are  $\Lambda = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_* = 0.3$  and  $\rho = 0.05$ .

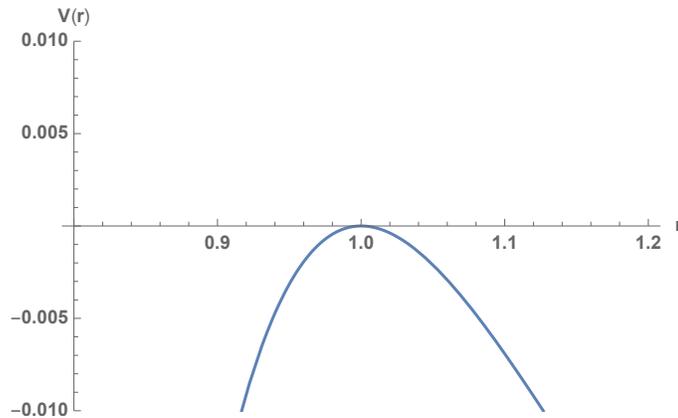


FIG. 6: (colour online) The potential  $V(r) = -\frac{1}{2\sigma^2 r^4}(1 + \tilde{V}(r))$  with  $1 + \tilde{V}$  as in Eqn.(39) without any perturbations. Note here that there is a zero at  $r = 1$ . The parameters used are  $\Lambda = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_* = 0.3$  and  $\rho = 0.05$ .

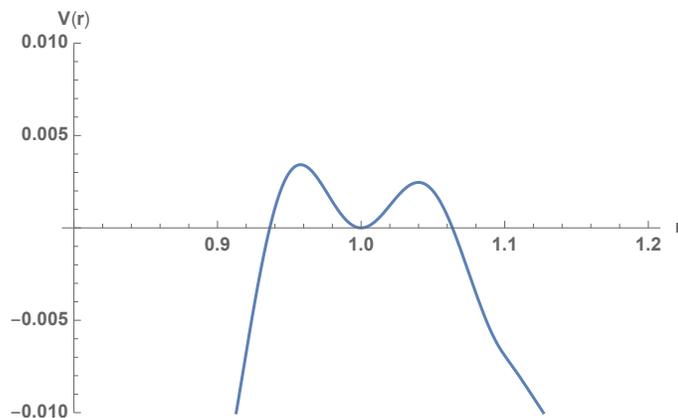


FIG. 7: (colour online) The potential  $V(r) = -\frac{1}{2\sigma^2 r^4}(1 + \tilde{V}(r))$  with  $1 + \tilde{V}$  as in Eqn.(39) with a perturbation as shown in Fig.(4). Note here that there is a local minimum at  $r = 1$ . The parameters used are  $\Lambda = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $r_* = 0.3$  and  $\rho = 0.05$ .

## 5. Stable, static solutions that satisfy the dominant energy condition everywhere

We can find stable static thin wall solutions that everywhere satisfy the dominant energy condition, including on the wall, if we allow the energy density on the wall to depend on the radius of the bubble. Such energy momentum on the wall, which knows about the radius of the bubble because it gives rise to the curvature of the lower dimensional space-time in the wall, is somewhat non-standard however it is perfectly physical. Thus if we generalize  $\sigma \rightarrow \sigma(r)$  in Eqn.(20) through Eqn.(23) we find, with  $\sigma \rightarrow (\sqrt{\Lambda/3}/4\pi)\sigma$ ,  $r \rightarrow \sqrt{3/\Lambda} r$  and  $M \rightarrow (1/\sqrt{3\Lambda})M$ ,

$$V(r) = -\frac{M^2}{18\sigma^2 r^4} + \frac{M \left( (1 - (\Lambda_i/\Lambda)) + \sigma^2 \right)}{6\sigma^2 r} - \frac{r^2 \left( 2(\Lambda_i/\Lambda)\sigma^2 + (1 - (\Lambda_i/\Lambda))^2 + \sigma^4 + 2\sigma^2 \right)}{8\sigma^2} + \frac{1}{2}. \quad (41)$$

Then we make  $\sigma$  a function of  $r$  to obtain a potential with a stable minimum of the required type. If we leave  $\sigma$  a constant, we obtain the potential like the example given by the graph in Fig.(1). Now we modify, using simple numerical experimentation. If initially  $\sigma = .04$  and then we modify it as

$$\sigma(r) = .04 - .0035 \tanh \left( \frac{25}{r_0} (r - r_0 + .105) \right) \quad (42)$$

where  $r_0$  is the position of the maximum of the potential when  $\sigma = .04$  is a constant, (in Eqn.(27) we had also imposed that  $V(r_0) = 0$ , but here we do not, since it is only the modified potential that must satisfy this condition) we find

that the potential has the required stable minimum as shown in Fig.(8). Here the potential  $V(r)$  for constant  $\sigma$  is shown and the modified potential with the stable minimum is called  $\bar{V}(r)$ .

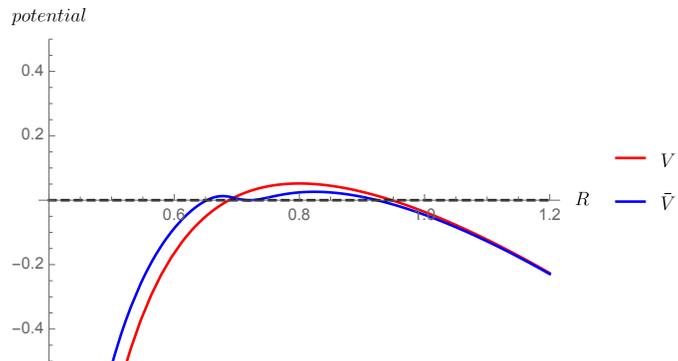


FIG. 8: (colour online) The potential  $V(r)$  for constant  $\sigma = .04$  (red) and the modified potential  $\bar{V}(r)$  (blue) with  $\sigma(r)$  given by Eqn.(42), and  $M = .045, \Lambda_i/\Lambda = .994$ .

The dominant energy condition is evidently satisfied in the bulk, as the metric describes a pure de Sitter space-time inside and a negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time on the outside (both of which satisfy the dominant energy condition). On the wall, the spatial stress [13] is given by

$$\vartheta(r) = \sigma(r) + \frac{r}{2} \frac{d\sigma(r)}{dr} \quad (43)$$

and we also find numerically that the dominant energy condition on the wall,  $\sigma \geq |\vartheta|$ , is satisfied as can be seen in Fig.(9).

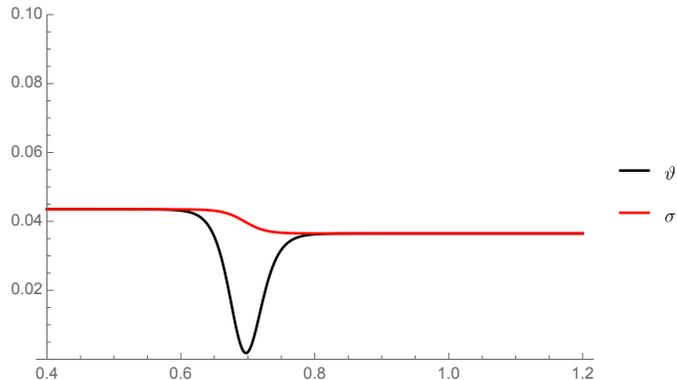


FIG. 9: (colour online)  $\sigma(r)$  (red) given by Eqn.(42) and  $\vartheta(r)$  (black) given by Eqn.(43) and  $M = .045, \Lambda_i/\Lambda = .994$ .

## 6. Conclusions

We have shown that there exist stable (against spherical perturbations), static negative mass bubble type solutions in the Schwarzschild-de Sitter space-time. The bubble wall is considered to be thin, and the Israel junction conditions are imposed across the wall. The junction conditions can be interpreted as giving the inside mass parameter  $m_-(r)$  as a functional of a potential  $V(r)$  that the radius of the bubble wall is sensitive to. In this paper we have shown, under the assumption of spherical symmetry and with constant positive energy density  $\sigma \geq 0$  on the wall, it is not possible to choose this potential in such a way that the bubble wall finds itself at a stable, classical minimum of the potential while determining an interior mass function in such a way that it is non-singular and that the dominant energy condition is everywhere satisfied. If we allow  $\sigma \leq 0$  then the bubble wall carries all the negative mass and does not respect the dominant energy condition, however stable solutions do exist and the dominant energy conditions can be made to be respected in the bulk away from the wall. It is as if the negative mass is localized on the bubble wall. We then allow the energy density on the wall to be non-constant but positive,  $\sigma(r) \geq 0$ . Then with the simple ansatz of a pure de Sitter space-time in the interior and a negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time in the exterior, we can find solutions corresponding to stable, non-singular, negative mass bubbles that respect the dominant energy condition everywhere including on the wall. The formation of such configurations in the early universe must have important consequences for its subsequent evolution.

We have further demonstrated that there exist perfectly physical initial conditions for the matter distribution which can collapse to a singular, negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time. The initial conditions correspond to a bubble in negative mass Schwarzschild-de Sitter space-time with a bubble with the interior given by a simple de Sitter space-time separated by a thin wall. The matter distribution actually satisfies the dominant energy condition everywhere including on the bubble wall. The bubble can collapse through spherically symmetric configurations, to the exact negative mass Schwarzschild-de Sitter metric, which is singular at the origin and is not hidden behind an event horizon. This is a counter example to the cosmic censorship hypothesis.

## 7. Acknowledgments

We thank Emil Mottola and Edward Wilson-Ewing for useful discussions. We thank NSERC of Canada for financial support and The Perimeter Institute for Theoretical Physics for hospitality. N. T. thanks to the Conicyt scholarship 21160064 and the University of Santiago de Chile. Research at Perimeter Institute is supported by the Government of Canada through the Department of Innovation, Science and Economic Development Canada and by the Province of Ontario through the Ministry of Research, Innovation and Science.

---

\* Electronic address: [mjohnson@perimeterinstitute.ca](mailto:mjohnson@perimeterinstitute.ca)

† Electronic address: [paranj@lps.umontreal.ca](mailto:paranj@lps.umontreal.ca)

‡ Electronic address: [antoine.savard@umontreal.ca](mailto:antoine.savard@umontreal.ca)

§ Electronic address: [natalia.tapiaa@usach.cl](mailto:natalia.tapiaa@usach.cl)

- [1] J. Belletère and M. B. Paranjape, *Int. J. Mod. Phys. D* **22**, 1341017 (2013), 1304.1566.
- [2] S. Mbarek and M. B. Paranjape, *Phys. Rev. D* **90**, 101502 (2014), 1407.1457.
- [3] R. Schon and S.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **65**, 45 (1979).
- [4] R. Schon and S.-T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **79**, 231 (1981).
- [5] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **80**, 381 (1981).
- [6] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 1997 (2008), gr-qc/0405109.
- [7] R. B. Mann, *Class. Quant. Grav.* **14**, 2927 (1997), gr-qc/9705007.
- [8] W. L. Smith and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* **56**, 4942 (1997), gr-qc/9703007.
- [9] A. Ashtekar, B. Bonga, and A. Kesavan, *Class. Quant. Grav.* **32**, 025004 (2015), 1409.3816.
- [10] A. Ashtekar, B. Bonga, and A. Kesavan, *Phys. Rev. D* **92**, 044011 (2015), 1506.06152.
- [11] A. Ashtekar, B. Bonga, and A. Kesavan, *Phys. Rev. D* **92**, 104032 (2015), 1510.05593.
- [12] W. Israel, *Nuovo Cim. B* **44S10**, 1 (1966), [*Nuovo Cim.*B44,1(1966)].
- [13] M. Visser and D. L. Wiltshire, *Class. Quant. Grav.* **21**, 1135 (2004), gr-qc/0310107.
- [14] V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Lett.* **120B**, 91 (1983).
- [15] S. K. Blau, E. I. Guendelman, and A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **35**, 1747 (1987).
- [16] E. Farhi and A. H. Guth, *Phys. Lett.* **B183**, 149 (1987).
- [17] V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. D* **36**, 2919 (1987).
- [18] E. Farhi, A. H. Guth, and J. Guven, *Nucl. Phys. B* **339**, 417 (1990).
- [19] A. Aurilia, M. Palmer, and E. Spallucci, *Phys. Rev. D* **40**, 2511 (1989).
- [20] P. O. Mazur and E. Mottola, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **101**, 9545 (2004), gr-qc/0407075.
- [21] A. Aguirre and M. C. Johnson, *Phys. Rev. D* **72**, 103525 (2005), gr-qc/0508093.
- [22] A. Aguirre and M. C. Johnson, *Phys. Rev. D* **73**, 123529 (2006), gr-qc/0512034.
- [23] A. Barnaveli and M. Gogberashvili, *Theor. Math. Phys.* **113**, 1491 (1997), [*Teor. Mat. Fiz.*113,346(1997)], hep-ph/9610548.
- [24] A. Barnaveli and M. Gogberashvili, pp. 5–44 (1995), hep-ph/9505412.
- [25] A. Barnaveli and M. Gogberashvili, *General Relativity and Gravitation* **26**, 1117 (1994), ISSN 1572-9532, URL <https://doi.org/10.1007/BF02108937>.
- [26] J. Garriga and A. Megevand, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 883 (2004), hep-th/0404097.
- [27] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, *Phys. Rev. D* **16**, 1762 (1977).
- [28] S. R. Coleman, *Phys. Rev. D* **15**, 2929 (1977), [Erratum: *Phys. Rev. D*16,1248(1977)].
- [29] S. R. Coleman and F. De Luccia, *Phys. Rev. D* **21**, 3305 (1980).
- [30] R. Penrose, *Riv. Nuovo Cim.* **1**, 252 (1969), [*Gen. Rel. Grav.*34,1141(2002)].
- [31] F. C. Adams, K. Freese, and L. M. Widrow, *Phys. Rev. D* **41**, 347 (1990).
- [32] This is a novel property of negative mass Schwarzschild-de Sitter, implying that the entropy associated with the cosmological horizon can grow without bound. This can be contrasted with positive mass Schwarzschild-de Sitter, where the total entropy associated with the cosmological and black hole horizons is bounded by the magnitude of  $\Lambda$ .
- [33] We thank E. Wilson-Ewing for pointing this out to us.



# Chapitre 5

---

## Conclusion

Nous avons analysé la structure de bulles d'espace-temps avec pour objectif d'étudier la stabilité de ces bulles lorsque l'espace-temps extérieur est un espace-temps de Schwarzschild-de Sitter avec une masse négative.

Pour ce faire, il a d'abord fallu introduire de manière non exhaustive la géométrie différentielle. Nous avons défini les concepts et outils de bases nécessaires à la compréhension de la relativité générale et de notre problème particulier. Ces concepts furent consolidés à l'aide d'une analyse complète d'une des variétés non triviales les plus riches, la 2-sphère.

Il s'adonne que ces outils soient les mieux adaptés à l'étude de la relativité générale, et nous avons donc présenté une introduction à ce sujet dans le langage développé au chapitre précédent ; il s'agit ainsi d'une version géométrique de la théorie de la gravitation. Nous avons formulé la théorie sous forme axiomatique, puis nous avons analysé la signification physique du tenseur énergie-impulsion. Une présentation des conditions d'énergies fut aussi donnée sous forme d'inégalités algébriques sur les composantes du tenseur énergie-impulsion, de même que leur interprétation physique. Ce chapitre fut terminé par une des premières solutions aux équations d'Einstein, le trou noir de Schwarzschild. Cela reste pertinent, car on parle souvent de ces objets encore aujourd'hui et surtout lorsqu'on discute des bulles minces, et ce, en raison du théorème de Birkhoff.

Une étude plus approfondie de la théorie de la gravitation d'Einstein nous amène à considérer les hypersurfaces, des tranches d'espace-temps. Elle se trouve à être les structures les mieux adaptées à l'étude des bulles minces d'espace-temps. En effet, une bulle mince n'est rien d'autre qu'une hypersurface de dimension trois dans l'espace-temps en quatre dimensions. On y développe une série de conditions de jonctions qui permettent de joindre de façon

lisse deux espaces-temps le long d'une hypersurface, notamment que l'énergie soit conservée au travers de celle-ci, quitte à ce qu'une partie de l'énergie soit déposée sur l'hypersurface. On pense par exemple à une partie interne séparée de l'extérieur par une 2-sphère dont la taille évolue dans le temps. On traite un de ces cas les plus triviaux afin d'illustrer de quelle manière les conditions de jonctions s'utilisent.

Nous avons ensuite présenté notre article intitulé *Stable, thin wall, negative mass bubbles in de Sitter space-time*. Dans cet article, on traite de la stabilité des solutions de bulles minces de masse négative. On conclut dans un premier temps que pour une bulle mince avec une géométrie de de Sitter à l'intérieur et une géométrie de Schwarzschild-de Sitter à l'extérieur, il n'existe pas d'ensembles de paramètres tels que le potentiel de la bulle admet un minimum local et que la fonction de masse à l'intérieure soit non-singulière et respecte la condition d'énergie dominante partout, lorsque  $\sigma \geq 0$ . Dans un deuxième temps, on conclut aussi qu'on peut avoir une bulle stable et statique pour  $\sigma < 0$ , car on peut trouver une fonction de masse à l'intérieur, exprimée en fonction du potentiel recherché que l'on fixe, qui est telle qu'elle satisfait la condition d'énergie dominante. Cependant, le prix à payer est que la bulle possède une densité d'énergie surfacique négative et viole donc cette même condition d'énergie à la surface uniquement, mais cela reste toujours d'une solution sans singularité étant donné que la masse à l'origine est nulle. Finalement, on montre que si on admet les déformations  $\sigma(r) \geq 0$ , alors il est possible de trouver des solutions stables, statiques et non-singulières qui respectent partout la condition d'énergie dominante, et en particulier à la surface de la bulle, en supposant un intérieur de Sitter pur et un extérieur de Schwarzschild-de Sitter avec masse négative. De plus, ces conditions initiales sont telles que la bulle peut s'effondrer en une singularité nue, violant ainsi la conjecture de censure cosmique.

## 5.1. Travaux futurs

Évidemment, comme on a trouvé une solution stable, il serait très intéressant de bien comprendre ce que signifie le fait que la bulle mince possède une densité d'énergie négative. Les simples analogies newtonienne ont leur limites, et il serait bien d'avoir une intuition physique plus complète de ces objets. Le cas où la géométrie interne est un espace-temps de de Sitter pose aussi ses questions. La signification d'une densité d'énergie qui varie n'est

pas non plus triviale, comme s'il existait un limite quelconque forçant ces bulles de masses négatives à avoir une densité d'énergie précise.

De plus, il serait intéressant de se pencher sur le mécanisme, s'il existe, par lequel ces bulles accrètent de la matière et de quelle manière ce procédé se produit. En effet, pour l'heure, il n'est pas trivial de concevoir un tel procédé, ni même s'il suit des principes clairs. Par exemple, quelle type de matière, masse positive ou négative, la bulle peut accréter ? Est-ce que la masse de bulle augmente ou diminue en fonction du type de matière absorbée ? Est-ce que ce procédé est même possible, considérant la précaire stabilité des bulles que nous avons décrites ci-haut ? Toutes ces questions sont pertinentes et difficiles à élucider.

Une autre avenue possible et fondamentale serait très certainement de quelle manière de telles bulles de masse négative interagissent entre elles. On parle bien évidemment d'interaction gravitationnelle. Comme nos bulles sont stables seulement lors de perturbations sphériques, il va de soi que cela est loin d'être trivial et il peut même être tout bonnement impossible de conserver la stabilité des bulles lors des interactions.

On pense à regarder éventuellement le cas de bulles non statiques. Dans ce qui fut fait, on a toujours regardé le cas où les bulles minces sont statiques, mais il est généralement admis que ce n'est pas le cas. Comme on a choisi un potentiel qui fonctionne, il serait intéressant de voir si on pourrait choisir des potentiels qui ne forcent pas une solution statique.



# Bibliographie

---

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, New York, 1973.
- [2] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [3] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume un. Publish or Perish, Inc., Houston, troisième édition, 1999.
- [4] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume deux. Publish or Perish, Inc., Houston, troisième édition, 1999.
- [5] Éric Poisson. *A Relativist's Toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [7] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics. IOP Publishing Ltd, Osaka, deuxième édition, 2003.
- [8] John M. Lee. *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Seattle, 1997.
- [9] Frans Pretorius. Evolution of binary black hole spacetimes. *Physical Review Letters*, 95(12), 2005.
- [10] A. Papapetrou. Equations of motion in general relativity. *Proc. Phys. Soc. A*, 64(57), 1951.
- [11] Miguel Alcubierre et al. Dynamical evolution of quasi-circular binary black hole data. *Phys. Rev. D*, 72 :044004, août 2005.
- [12] A. Einstein and L. Infeld. On the motion of particles in general relativity theory. *Canadian Journal of Mathematics*, 1(3) :209–241, 1949.
- [13] Karl Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196, 1916.
- [14] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875 :17, 2019.
- [15] A. DeBenedictis and A. Das. On a general class of wormholes geometries. *Class. Quantum Grav.*, 18 :1187–1204, 2001.

- [16] Albert Einstein. Näherungsweise integration der feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 688–696, 1916.
- [17] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116 :061102, Fév 2016.
- [18] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Gw151226 : Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116 :241103, Juin 2016.
- [19] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Gw170104 : Observation of a 50-solar-mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, 118 :221101, Juin 2017.
- [20] Stephen Hawking. *A Brief History of Time. From Big Bang to Black Holes*. Bantans Press, New York, 1988.
- [21] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, troisième édition, 2002.
- [22] L. Rosenfeld. Sur le tenseur d’impulsion-énergie. *Mémoires Acad. Roy. de Belgique*, 18 :1–30, 1940.
- [23] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [24] Albert Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 142–152, 1917.
- [25] S. Perlmutter et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, 391(6662) :51–54, 1998.
- [26] S. Perlmutter et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2) :565–586, juin 1999.
- [27] Brian P. Schmidt et al. The high- $z$  supernova search : Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type ia supernovae. *The Astrophysical Journal*, 507(1) :46–63, nov 1998.
- [28] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3) :1009–1038, sep 1998.
- [29] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to  $6\mu\text{m}$  range. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :5–8, Jan 1997.
- [30] H. B. G. Casimir and D. Polder. The influence of retardation on the london-van der waals forces. *Phys. Rev.*, 73 :360–372, Fév 1948.
- [31] Sean M. Carroll, William H. Press, and Edwin L. Turner. The cosmological constant. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30(1) :499–542, 1992.
- [32] S.E. Rugh and H. Zinkernagel. The quantum vacuum and the cosmological constant problem. *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 33(4) :663 – 705, 2002.
- [33] Planck Collaboration. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv :1807.06209*, 2018.
- [34] Matt Visser. *Lorentzian wormholes : From Einstein to Hawking*. 1995.

- [35] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Phys. Rev. Lett.*, 61 :1446–1449, 1988.
- [36] Robert Wald and Ulvi Yurtsever. General proof of the averaged null energy condition for a massless scalar field in two-dimensional curved spacetime. *Phys. Rev. D*, 44 :403–416, Juillet 1991.
- [37] U Yurtsever. Does quantum field theory enforce the averaged weak energy condition? *Classical and Quantum Gravity*, 7(11) :L251–L258, nov 1990.
- [38] P. Painlevé. La mécanique classique et la théorie de la relativité. *L’Astronomie*, 36 :6–9, 1922.
- [39] Kristin Schleich and Donald M. Witt. A simple proof of birkhoff’s theorem for cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, 51(11) :112502, 2010.
- [40] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 65(1) :45–76, Feb 1979.
- [41] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. Proof of the positive mass theorem. ii. *Communications in Mathematical Physics*, 79(2) :231–260, Mar 1981.
- [42] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80(3) :381–402, Sep 1981.
- [43] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, Gary T. Horowitz, and Malcolm J. Perry. Positive mass theorems for black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 88(3) :295–308, Sep 1983.
- [44] A. Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, New Jersey, 2013.
- [45] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento*, 1966.
- [46] Steven K. Blau, E. I. Guendelman, and Alan H. Guth. Dynamics of false-vacuum bubbles. *Phys. Rev. D*, 35(6) :1747, 1987.
- [47] W. Israel. Gravitational collapse and causality. *Phys. Rev.*, 153 :1388, 1967.
- [48] Georges Darmais. *Les équations de la gravitation einsteinienne*. Number 25 in Mémorial des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, 1927.
- [49] J. Belletête and M. B. Paranjape. On negative mass. *Int. J. Mod. Phys.*, D22, 2013.
- [50] S. Mbarek and M. B. Paranjape. Negative mass bubbles in de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, 90, 2014.