

Université de Montréal

**Extension de l'homomorphisme de Calabi aux
cobordismes lagrangiens**

par

Pierre-Alexandre Mailhot

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

Septembre 2019

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

Extension de l'homomorphisme de Calabi aux cobordismes lagrangiens

présenté par

Pierre-Alexandre Mailhot

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea

(président-rapporteur)

Egor Shelukhin

(directeur de recherche)

François Lalonde

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

26 septembre 2019

Sommaire

Ce mémoire traite de la construction d'un nouvel invariant des cobordismes lagrangiens. Cette construction est inspirée des travaux récents de Solomon dans lesquels une extension de l'homomorphisme de Calabi aux chemins lagrangiens exacts est donnée. Cette extension fut entre autres motivée par le fait que le graphe d'une isotopie hamiltonienne est un chemin lagrangien exact. Nous utilisons la suspension lagrangienne, qui associe à chaque chemin lagrangien exact un cobordisme lagrangien, pour étendre la construction de Solomon aux cobordismes lagrangiens. Au premier chapitre nous donnons une brève exposition des propriétés élémentaires des variétés symplectiques et des sous-variétés lagrangiennes. Le second chapitre traite du groupe des difféomorphismes hamiltoniens et des propriétés fondamentales de l'homomorphisme de Calabi. Le chapitre 3 est dédié aux chemins lagrangiens, l'invariant de Solomon et ses points critiques. Au dernier chapitre nous introduisons la notion de cobordisme lagrangien et construisons le nouvel invariant pour finalement analyser ses points critiques et l'évaluer sur la trace de la chirurgie de deux courbes sur le tore. Dans le cadre de ce calcul, nous serons en mesure de borner la valeur du nouvel invariant en fonction de l'ombre du cobordisme, une notion récemment introduite par Cornea et Shelukhin.

Mots-clés : Topologie symplectique, difféomorphismes hamiltoniens, homomorphisme de Calabi, chemins lagrangiens, cobordismes lagrangiens, chirurgie lagrangienne.

Summary

In this master's thesis, we construct a new invariant of Lagrangian cobordisms. This construction is inspired by the recent works of Solomon in which an extension of the Calabi homomorphism to exact Lagrangian paths is given. Solomon's extension was motivated by the fact that the graph of any Hamiltonian isotopy is an exact Lagrangian path. We use the Lagrangian suspension construction, which associates to every exact Lagrangian path a Lagrangian cobordism, to extend Solomon's invariant to Lagrangian cobordisms. In the first chapter, we give a brief introduction to the elementary properties of symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. In the second chapter, we present an introduction to the group of Hamiltonian diffeomorphisms and discuss the fundamental properties of the Calabi homomorphism. Chapter 3 is dedicated to Lagrangian paths, Solomon's invariant and its critical points. In the last chapter, we introduce the notion of Lagrangian cobordism and we construct the new invariant. We analyze its critical points and evaluate it on the trace of the Lagrangian surgery of two curves on the torus. In this setting we further bound the new invariant in terms of the shadow of the cobordism, a notion recently introduced by Cornea and Shelukhin.

Key words : Symplectic topology, Hamiltonian diffeomorphisms, Calabi homomorphism, Lagrangian paths, Lagrangian cobordism, Lagrangian surgery.

Table des matières

Sommaire	v
Summary	vii
Remerciements	xiii
Introduction	3
Chapitre 1. Topologie symplectique	7
1.1. Espaces vectoriels symplectiques	7
1.1.1. Sous-espaces lagrangiens	14
1.1.2. Structures complexes linéaires	15
1.2. Variétés symplectique	18
1.2.1. Exemples de variétés symplectiques	20
1.2.2. Isotopies et dérivée de Lie	23
1.2.3. Symplectomorphismes	25
1.3. Théorème de Darboux	28
1.3.1. Théorème et truc de Moser	28
1.4. Sous-variétés lagrangiennes	33
1.4.1. Exemples et construction de sous-variétés lagrangiennes	33
1.4.2. Voisinages de sous-variétés lagrangiennes	35
Chapitre 2. Difféomorphismes hamiltoniens et homomorphisme de Calabi	39
2.1. Difféomorphismes hamiltoniens	39

2.1.1.	Crochet de Poisson	43
2.1.2.	Chemins de difféomorphismes hamiltoniens	47
2.2.	L'homomorphisme de Calabi	51
2.2.1.	Variétés symplectiques exactes et $\mathcal{C}al$	54
2.2.2.	Interprétation géométrique de $\mathcal{C}al$: le cas du disque	56
2.2.3.	Variétés symplectiques fermées et $\mathcal{C}al$	58
Chapitre 3. Chemins lagrangiens et fonctionnelle de Solomon		61
3.1.	Chemins lagrangiens	61
3.2.	Fonctionnelle de Solomon	64
3.2.1.	Points critiques de \mathcal{C} et géométrie calibrée	68
Chapitre 4. Cobordismes lagrangiens et extension de la fonctionnelle de Solomon		73
4.1.	Cobordismes lagrangiens	73
4.2.	Exemples et constructions	77
4.2.1.	Produit d'un chemin lisse et d'une lagrangienne	77
4.2.2.	Suspension lagrangienne	77
4.2.3.	Trace d'une chirurgie lagrangienne	80
4.3.	Extension de l'homomorphisme de Calabi	83
4.3.1.	Première variation et points critiques	87
4.3.2.	Démonstrations des théorèmes A et B	90
4.4.	Calcul de la fonctionnelle sur quelques exemples	92
4.4.1.	Produit d'un chemin lisse et d'une lagrangienne	92
4.4.2.	Suspension lagrangienne	93
4.4.3.	Trace d'une chirurgie lagrangienne sur \mathbb{T}^2	95
4.5.	Ombre de la trace d'une chirurgie et C : le cas du tore	97

Bibliographie 103

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de recherche, Egor Shelukhin. Au cours de mes deux années de maîtrise, il a fait preuve d'une disponibilité et d'une écoute hors pair. À travers nos longues discussions, il m'a fait découvrir une impressionnante quantité de sujets mathématiques passionnants. Je le remercie aussi de m'avoir proposé le sujet de recherche dont traite ce mémoire et, plus précisément, de m'avoir suggéré l'existence d'un lien entre l'homomorphisme de Calabi et les cobordismes lagrangiens.

J'aimerais également remercier les membres de mon jury, Octav Cornea, François Lalonde et Egor Shelukhin pour le temps qu'ils ont dévoué à la lecture et l'évaluation de ce mémoire. Je les remercie pour leurs commentaires constructifs.

Je remercie l'Institut des sciences mathématiques (ISM) pour leur soutien financier. Je remercie plus particulièrement Alexandra Haedrich de m'avoir offert l'opportunité de m'impliquer au sein de la communauté mathématique.

Je remercie mes ami.e.s du DMS, où l'ambiance est toujours agréable, que j'ai eu la chance de côtoyer au cours des deux dernières années: Justin Bélair, Rosalie Bentz-Moffet, Jean-Philippe Chassé, Thomas Davignon, Julien Gaboriaud, Antoine Giard, Jonathan Godin, Alexis Langlois Rémillard, Alexis Leroux-Lapierre, Raphaël Lima-barbosa, Fabrice Nonez, Jordan Payette, Alexandre Perrier, Dominique Rathel-Fournier, Philippe Robitaille-Grou, Ben Sigman, Simon St-Amant, Jérémie Turcotte.

Pour leurs encouragements constants et leur écoute lorsque je tentais de vulgariser ma recherche, je remercie mes ami.e.s du Département de physique et de Polytechnique Montréal: Arnold Amisi, Étienne Beauchamp, Lucas Bellier, Sophie Dallaire, François De Brienne, Alexandre Dessouki, Julie Doucet Lamoureux, Vicky Houle,

Charly Jeffrey, Adrien Merlot, Laurent Noiseux, Kenza Rahmi, Bénédicte Samuel-Lafleur, Maxime Spinelli.

Je remercie les membres de ma famille pour leur support et leur intérêt. Je ne remercierai jamais assez ma mère Murielle Monette, mon père Luc Mailhot et ma sœur et meilleure amie Annabelle Minde Mailhot de m'avoir poussé à suivre mes passions depuis toujours. Leur appui a su alimenter mon voyage à travers le monde, parfois solitaire, de la recherche mathématique.

Finalement, je tiens à remercier du fond du cœur Leslie Duong de m'avoir consolé et enthousiasmé au cours des périodes les plus difficiles. Merci de toujours croire en moi.

Introduction

Les variétés symplectiques sont des variétés lisses munies d'une forme différentielle de degré 2 fermée et non-dégénérée appelée forme ou structure symplectique. Elles apparaissent naturellement dans plusieurs branches des mathématiques et de la physique. En géométrie complexe, toute variété complexe projective est munie d'une structure symplectique. En mécanique hamiltonienne, l'espace de phase T^*N d'un système mécanique ayant un espace de configuration N est naturellement muni de la forme symplectique

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots dp_n \wedge dq_n,$$

où $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ sont des coordonnées locales sur T^*N . La topologie symplectique étudie principalement les propriétés des variétés symplectiques qui sont invariantes sous symplectomorphismes, ces difféomorphismes qui préservent la forme symplectique.

Les variétés symplectiques sont souvent étudiées à travers leurs sous-variétés. Les sous-variétés lagrangiennes jouent un énorme rôle dans cette étude. Une sous-variété L d'une variété symplectique (M, ω) est lagrangienne si $\dim L = (\dim M)/2$ et si ω s'annule sur L . Comme nous le verrons au premier chapitre, les formes différentielles de degré 1 fermées et même les symplectomorphismes admettent une interprétation du point de vue des sous-variétés lagrangiennes. On retrouve aussi naturellement les sous-variétés lagrangiennes en mécanique hamiltonienne, où l'espace des impulsions possibles T_q^*N à un point $q \in N$ est une sous-variété lagrangienne de T^*N . Étant donné l'impressionnante quantité d'exemples de sous-variétés lagrangiennes qui existe, nous pourrions même être menés à croire, tout comme Weinstein [27], que *tout est une sous-variété lagrangienne*.

L'important rôle joué par les sous-variétés lagrangiennes nous mène à vouloir les classifier. Pour ce faire, nous avons besoin d'établir une relation d'équivalence entre celles-ci. Il existe une multitude de ces relations d'équivalence, la plus forte d'entre elles étant l'isotopie hamiltonienne. Deux sous-variétés lagrangiennes L_0 et L_1 sont jointes par une isotopie hamiltonienne s'il existe une famille de fonctions hamiltoniennes $\{H_t\}_{t \in [0,1]}$ à support compact telle que l'application au temps 1 du flot engendré par cette dernière envoie L_0 sur L_1 . La classification des sous-variétés lagrangiennes à isotopie hamiltonienne près n'est pas facile et encore très peu de résultats sont connus en dimension supérieure ou égale à 4.

Une relation d'équivalence plus souple entre les sous-variétés lagrangiennes est celle des cobordismes lagrangiens, notion qui fut introduite par Arnold [3]. Grosso modo, deux variétés lagrangiennes L_0 et L_1 d'une variété symplectique M sont lagrange-cobordantes s'il existe une sous-variété lagrangienne W dans $\mathbb{C} \times M$ ayant comme bord $L_0 \sqcup L_1$. Peu de temps après leur introduction, les cobordismes lagrangiens furent étudiés par Eliashberg [10] et Audin [4] qui les ont classifiés dans le cas où $M = \mathbb{C}^n$ à l'aide de méthodes purement topologiques. Les aspects plus rigides des cobordismes lagrangiens furent étudiés par Chekanov [8] dans le cadre de la théorie des courbes holomorphes. Plus récemment, Biran et Cornea [6] ont lancé une étude des cobordismes lagrangiens du point de vue de la théorie de Floer.

Dans ce mémoire, nous introduisons un nouvel invariant des cobordismes lagrangiens qui découle de l'homomorphisme de Calabi $\mathcal{C}\mathcal{al}$, introduit par Calabi [7], qui est un homomorphisme entre le recouvrement universel $\widetilde{\text{Ham}}$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique et les réels. Cet homomorphisme fut étendu par Solomon [24] à un invariant \mathcal{C} des chemins lagrangiens exacts, ces familles $\{\Lambda_t\}_{t \in [0,1]}$ de sous-variétés lagrangiennes engendrées par une isotopie hamiltonienne. Cette extension de $\mathcal{C}\mathcal{al}$ aux chemins lagrangiens exacts fut motivée par le fait selon lequel le graphe d'une isotopie hamiltonienne est un chemin lagrangien exact. Or, il existe aussi une construction, la suspension lagrangienne, qui associe à chaque chemin lagrangien exact $\{\Lambda_t\}_{t \in [0,1]}$ un cobordisme lagrangien entre Λ_0 et Λ_1 . C'est ce lien

entre les chemins lagrangiens et les cobordismes lagrangiens qui motive l'extension de l'homomorphisme de Calabi à un invariant C des cobordismes lagrangiens. Nous démontrons l'invariance de C sous isotopie hamiltonienne (théorème A) et sous certaines conditions d'exactitude, nous démontrons que C ne dépend que du bord du cobordisme lagrangien sur lequel il est évalué (théorème B). Pour ce faire, nous calculons la première variation de C avec laquelle nous serons aussi en mesure de caractériser ses points critiques dans le cas des cobordismes lagrangiens élémentaires. Finalement, nous calculons C sur la trace d'une chirurgie lagrangienne de deux courbes sur le tore pour ensuite borner le résultat par l'ombre de la trace de la chirurgie, une notion récemment introduit par Cornea et Shelukhin [9].

Le chapitre 1 expose les propriétés élémentaires des variétés symplectiques et des sous-variétés lagrangiennes, le tout débutant avec l'image locale, c'est-à-dire les espaces vectoriels symplectiques et leurs sous-espaces lagrangiens. Nous y démontrons le théorème de Darboux qui stipule que toutes les variétés symplectique d'une même dimension sont localement identiques. Finalement, nous démontrons le théorème du voisinage lagrangien de Weinstein qui assure, pour toute sous-variété lagrangienne compacte L , l'existence d'un voisinage V de L symplectomorphe à un voisinage V_0 de la section nulle de T^*L .

Au chapitre 2 nous introduisons les difféomorphismes hamiltoniens et le groupe $\text{Ham}(M, \omega)$ duquel ils sont élément. Par la suite nous étudions l'homomorphisme de Calabi sous sa forme standard et celle qu'il prend dans le contexte des variétés symplectique exactes. Nous discutons brièvement de l'interprétation géométrique de l'homomorphisme de Calabi dans le cas du disque \mathbb{D}^2 et de son comportement dans le cas des variétés symplectiques fermées.

Le chapitre 3 traite des chemins lagrangiens et de leurs géométrie. Nous introduisons l'invariant de Solomon \mathcal{C} et discutons des cas où il se réduit à l'homomorphisme de Calabi. Finalement, nous établissons le lien entre les points critiques de \mathcal{C} et les sous-variétés lagrangiennes spéciales d'une variété presque Calabi-Yau.

Le dernier chapitre est dédié à l'introduction des cobordismes lagrangiens à travers quelques exemples, à la construction de l'invariant C et à la démonstration des résultats annoncés ci-dessus.

Chapitre 1

Topologie symplectique

Ce chapitre traite des notions de base de la topologie symplectique. Une attention bien particulière est portée aux sous-espaces vectoriels lagrangiens et aux sous-variétés lagrangiennes. Nous suivons principalement l'ouvrage de McDuff et Salamon [18]. Pour une introduction motivée par la mécanique classique nous recommandons le classique ouvrage d'Arnold [2].

1.1. Espaces vectoriels symplectiques

Les espaces vectoriels symplectiques fournissent un modèle local à partir duquel les variétés symplectiques sont construites. L'étude de ces espaces vectoriels découle directement de l'étude des formes bilinéaires antisymétriques et non-dégénérées. Dans ce qui suit, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Définition 1.1.1. Un **espace vectoriel symplectique** est la donnée d'une paire (V, ω) , où V est un espace vectoriel réel et ω est une forme bi-linéaire sur V satisfaisant aux deux conditions suivantes:

- ω est **antisymétrique**, c'est-à-dire que

$$\forall \xi, \eta \in V, \omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi);$$

- ω est **non-dégénérée**, c'est-à-dire que

$$\text{si } \xi \in V \text{ et } \omega(\xi, \eta) = 0 \forall \eta \in V \implies \xi = 0.$$

La forme ω est ainsi appelée **structure symplectique linéaire** ou **forme symplectique**.

Exemple 1.1.2. Considérons d'abord \mathbb{R}^2 comme un espace vectoriel engendré par les vecteurs de base $\{\partial_p, \partial_q\}$. Par la suite, nous munissons \mathbb{R}^2 de l'application bilinéaire antisymétrique

$$\omega_{\mathbb{R}^2} = dp \wedge dq$$

qui associe, à deux vecteurs $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$, l'aire signée du parallélogramme engendré par ceux-ci. De manière plus explicite, on a

$$\omega_{\mathbb{R}^2}(\xi, \eta) = dp(\xi)dq(\eta) - dp(\eta)dq(\xi) = \xi_p \eta_q - \eta_p \xi_q = \det \begin{pmatrix} \xi_p & \xi_q \\ \eta_p & \eta_q \end{pmatrix}.$$

Il en découle directement que

$$\omega(\partial_p, \partial_q) = 1 = -\omega(\partial_q, \partial_p) \quad \text{et} \quad \omega(\partial_p, \partial_p) = 0 = \omega(\partial_q, \partial_q).$$

À partir de ces relations et de la bilinéarité de $\omega_{\mathbb{R}^2}$, nous pouvons déduire que $\omega_{\mathbb{R}^2}$ est non-dégénérée. Ainsi, $(\mathbb{R}^2, \omega_{\mathbb{R}^2})$ est bel et bien un espace linéaire symplectique.

Nous pouvons répéter cette construction sur n copies de \mathbb{R}^2 de sorte à obtenir une structure symplectique sur \mathbb{R}^{2n} . Pour ce faire, nous considérons \mathbb{R}^{2n} comme un espace vectoriel engendré par les $2n$ vecteurs de base $\{\partial_{p_1}, \partial_{q_1}, \dots, \partial_{p_n}, \partial_{q_n}\}$. Par la suite, nous munissons \mathbb{R}^{2n} de la structure symplectique

$$\omega_{\mathbb{R}^{2n}} = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j.$$

Remarquons que $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ s'écrit comme la somme des structures symplectiques ω_i associées aux sous-espaces vectoriels engendrés par les paires $\{\partial_{p_i}, \partial_{q_i}\}$. □

L'espace vectoriel symplectique $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^{2n}})$ défini à l'exemple 1.1.2 ainsi obtenue est le **prototype d'un espace vectoriel symplectique** et $\omega_{\mathbb{R}^2}$ est appelée **structure symplectique standard**. Cette appellation reflète une caractéristique essentielle des espaces vectoriels symplectiques qui s'exprime sous la forme d'un théorème de classification (théorème 1.1.6). La preuve de ce théorème repose en grande partie sur le complément symplectique, notion que nous introduisons sans plus tarder.

Définition 1.1.3. Soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $W \subset V$ un sous-espace linéaire. Le **complément orthogonal symplectique** de W , noté W^ω , est défini comme

$$W^\omega = \{\xi \in V \mid \omega(\xi, \eta) = 0, \forall \eta \in W\}.$$

Il est important de noter que W^ω n'est pas nécessairement transverse à W . La définition suivante nous permet de caractériser les relations d'inclusions entre W et W^ω .

Définition 1.1.4. Un sous-espace W de (V, ω) est dit

- **isotrope**, si $W \subset W^\omega$,
- **coisotrope**, si $W^\omega \subset W$,
- **symplectique**, si $W \cap W^\omega = \{0\}$,
- **lagrangien**, si $W = W^\omega$.

Notons que W est symplectique si et seulement si la restriction $\omega|_W$ de ω à W est non-dégénéré. Dans ce cas, il est alors naturel de considérer $(W, \omega|_W)$ comme un espace-vectoriel symplectique.

Le lemme suivant réunit quelques propriétés fondamentales des compléments symplectiques orthogonaux.

Lemme 1.1.5. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Alors l'application $\iota_\omega : V \rightarrow V^*$ définie par

$$\iota_\omega(\xi) = \omega(\xi, \cdot) =: \xi \lrcorner \omega$$

est un isomorphisme. De plus, si $W \subset V$ un sous-espace. Alors,

- (1) $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$,
- (2) $(W^\omega)^\omega = W$,
- (3) W est symplectique si et seulement si W^ω est symplectique.

Démonstration. La non dégénérescence de ω sur V assure l'injectivité de ι_ω . La surjectivité de ι_ω découle quant-à-elle du fait, qu'en dimension finie, $\dim V = \dim V^*$.

(i) Nous venons de démontrer que l'application $\iota_\omega(\xi) = \omega(\xi, \cdot)$ est un isomorphisme entre V et son dual V^* . Considérons à présent l'application linéaire $\Phi_W : V \rightarrow W^*$ donnée par

$$\Phi_W(\xi) = \iota_\omega(\xi) \Big|_W.$$

Remarquons que $\ker \Phi_W = W^\omega$ et puisque ι_ω est, en particulier, surjective, $\text{im } \Phi_W \cong W$. Ainsi, en vertu du théorème du rang,

$$\dim V = \dim \ker \Phi_W + \dim \text{im } \Phi_W = \dim W^\omega + \dim W.$$

(ii) D'après la définition du complément orthogonal symplectique, il est clair que $W \subseteq (W^\omega)^\omega$. De plus, selon (i),

$$\dim W = \dim V - \dim W^\omega = \dim (W^\omega)^\omega.$$

Ainsi, $W = (W^\omega)^\omega$.

(iii) Supposons que W soit symplectique. Par définition, $W \cap W^\omega = \{0\}$. Or, selon (ii), $(W^\omega)^\omega = W$, ainsi

$$W^\omega \cap (W^\omega)^\omega = W^\omega \cap W = \{0\},$$

ce qui fait de W^ω un espace symplectique par définition. La preuve où l'on suppose d'abord que W^ω est symplectique est identique. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de classification annoncé précédemment.

Théorème 1.1.6 (Classification des espaces vectoriels symplectiques). *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Alors,*

(1) V est de dimensions $2n$ pour un certain entier positif n et admet une base

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\} \text{ telle que, } \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\omega(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \omega(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = 0 \text{ et } \omega(\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k) = \delta_{jk}.$$

(2) Il existe un isomorphisme d'espace vectoriel $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ tel que

$$\Psi^* \omega = \omega_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Démonstration. (i) Soit $e_1 \in V \setminus \{0\}$. Alors, par non-dégénérescence de ω , il existe $f_1 \in V \setminus \{0, e_1\}$ tel que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Notons qu'à multiplication d'une constante près, on peut choisir e_1 et f_1 de sorte à avoir $\omega(e_1, f_1) = 1$. Posons

$$V_1 = \langle e_1, f_1 \rangle,$$

l'espace vectoriel engendré par e_1 et f_1 . Par construction, il est clair que V_1 est un sous-espace symplectique de V . Par définition d'un espace vectoriel symplectique, il suit directement que

$$V_1 \cap V_1^\omega = \{0\}.$$

De plus, en vertu du lemme 1.1.5,

$$\dim V_1 + \dim V_1^\omega = \dim V.$$

Ainsi, d'après un argument standard d'algèbre linéaire,

$$V = V_1 \oplus V_1^\omega.$$

Notons que selon le lemme 1.1.5, V_1^ω est aussi un espace vectoriel symplectique.

Par non-dégénérescence de ω sur V_1^ω , il existe $e_2, f_2 \in V_1^\omega \setminus \{0\}$ tels que $\omega(e_2, f_2) = 1$. Posons $V_2 = \langle e_2, f_2 \rangle$. D'une méthode analogue à celle employée pour V_1 , on en déduit que V_2 est un sous-espace symplectique de V_1^ω et que $V_1^\omega = V_2 \oplus V_2^\omega$. Alors,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_2^\omega.$$

Puisque $\dim V < +\infty$, le procédé décrit ci-dessus s'arrêtera à un certain espace vectoriel $V_n = \langle e_n, f_n \rangle$ de sorte à ce que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Notons que, par construction, $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ est une base de V , d'où $\dim V = 2n$. De plus, puisque tous les V_i sont orthogonaux selon ω , $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\omega(e_j, e_k) = \omega(f_j, f_k) = 0 \text{ et } \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk}.$$

(ii) Définissons l'application linéaire $\Psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ par

$$\Psi(\xi) = \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} e_j + \xi_{q_j} f_j)$$

pour $\xi = (\xi_{p_1}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{p_n}, \xi_{q_n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Puisque les e_j et f_j sont linéairement indépendants, $\ker \Psi = \{0\}$. Ainsi, puisque \mathbb{R}^{2n} et V sont de dimension finie, Ψ est un isomorphisme.

Il reste à montrer que $\Psi^* \omega = \omega_{\mathbb{R}^{2n}}$. Soient $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{2n}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Psi^* \omega(\xi, \eta) &= \omega(\Psi(\xi), \Psi(\eta)) \\ &= \omega\left(\sum_{i=1}^n (\xi_{p_i} e_i + \xi_{q_i} f_i), \sum_{j=1}^n (\eta_{p_j} e_j + \eta_{q_j} f_j)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \omega(\xi_{p_i} e_i + \xi_{q_i} f_i, \eta_{p_j} e_j + \eta_{q_j} f_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\omega(\xi_{p_i} e_i, \eta_{q_j} f_j) + \omega(\xi_{q_i} f_i, \eta_{p_j} e_j)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\xi_{p_i} \eta_{q_j} \delta_{ij} - \xi_{q_i} \eta_{p_j} \delta_{ij}) = \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} \eta_{q_j} - \xi_{q_j} \eta_{p_j}) =: \omega_{\mathbb{R}^{2n}}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

L'isomorphisme Ψ introduit dans le théorème 1.1.6 est un exemple bien particulier des transformations les plus importantes qu'il existe entre les espaces vectoriels symplectiques.

Définition 1.1.7. Un **symplectomorphisme linéaire** $\Psi : V \rightarrow W$ est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels symplectiques (V, ω_V) et (W, ω_W) qui respecte l'équation

$$\Psi^* \omega_W = \omega_V.$$

Le **groupe des symplectomorphismes linéaires** d'un espace symplectique (V, ω) vers lui-même est noté

$$\text{Sp}(V, \omega) := \{\Psi \in \text{GL}(V) \mid \Psi^* \omega = \omega\}.$$

On note $\text{Sp}(2n)$ le groupe linéaire symplectique de \mathbb{R}^{2n} muni de la forme symplectique standard $\omega_{\mathbb{R}^{2n}}$.

Le théorème 1.1.6 assure que toute forme symplectique sur un espace vectoriel engendre une forme volume.

Corollaire 1.1.8. Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire anti-symétrique ω . Alors,

$$\omega \text{ est non-dégénérée (symplectique)} \iff \omega^{\wedge n} = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ fois}} \neq 0.$$

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que ω soit dégénérée. Alors, il existe $\xi \in V$ pour lequel $\omega(\xi, \eta) = 0 \forall \eta \in V$. Posons une base $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ de V telle que $v_1 = \xi$. Ainsi, par construction, $\omega^{\wedge n}(v_1, \dots, v_{2n}) = 0$.

(\Leftarrow) Supposons que ω soit non-dégénérée. Alors, par définition, (V, ω) est un espace linéaire symplectique. En vertu du théorème 1.1.6, il existe un isomorphisme $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\omega = \Psi^* \omega_{\mathbb{R}^{2n}}$. Or, puisque

$$\omega_{\mathbb{R}^{2n}}^{\wedge n} = n! p_1 \wedge q_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge q_n$$

est une forme volume sur \mathbb{R}^{2n} , on a $\omega^{\wedge n} = \Psi^* \omega_{\mathbb{R}^{2n}}^{\wedge n} \neq 0$. ■

1.1.1. Sous-espaces lagrangiens

Étant donné l'attention toute particulière qui sera portée aux sous-espaces lagrangiens au cours de ce mémoire, nous énumérons quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes.

Tout d'abord, une conséquence directe du lemme 1.1.5.

Lemme 1.1.9. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Alors, $L \subset V$ est un sous-espace lagrangien si et seulement si L est isotrope et $\dim L = n$.*

Démonstration. (\Rightarrow) Soit $L \subset V$ un sous-espace lagrangien. Par définition, $L = L^\omega$. Ainsi, L est en particulier isotrope. De plus, en vertu du lemme 1.1.5, $\dim L + \dim L^\omega = \dim V$. Or, $\dim L = \dim L^\omega$, ainsi, $\dim L = (\dim V)/2 = n$.

(\Leftarrow) Supposons que L soit isotrope ($L \subset L^\omega$) et que $\dim L = n$. On veut démontrer que $L = L^\omega$. En vertu du lemme 1.1.5, $\dim L + \dim L^\omega = \dim V$. Ainsi, $\dim L^\omega = n$. Alors, puisque $L \subset L^\omega$ et que $\dim L = \dim L^\omega = n$, $L = L^\omega$. ■

L'exemple suivant donne une construction simple et cruciale d'un sous-espace lagrangien.

Exemple 1.1.10. Soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $\Psi : V \rightarrow V$ une application linéaire. Alors, $\Psi \in \text{Sp}(V, \omega)$ si et seulement si le graphe de Ψ

$$\Gamma_\Psi = \{(\xi, \Psi\xi) \mid \xi \in V\} \subset V \times V$$

est un sous-espace lagrangien de $V \times V$ muni de la forme symplectique

$$-\omega \oplus \omega := -\text{pr}_1^*\omega + \text{pr}_2^*\omega.$$

Démontrons cette équivalence. Pour que Γ_Ψ soit un sous-espace lagrangien, il faut que $(-\omega \oplus \omega)|_{\Gamma_\Psi} = 0$ et pour que $\Psi \in \text{Sp}(V, \omega)$, il faut que Ψ soit un isomorphisme et que $\Psi^*\omega = \omega$. Soient $(\xi, \Psi\xi), (\eta, \Psi\eta) \in \Gamma_\Psi$. Alors, par définition de $-\omega \oplus \omega$,

$$\begin{aligned} (-\omega \oplus \omega)((\xi, \Psi\xi), (\eta, \Psi\eta)) = 0 &\iff -\omega(\xi, \eta) + \omega(\Psi\xi, \Psi\eta) = 0 \\ &\iff \omega(\xi, \eta) = \Psi^*\omega(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Notons que par non-dégénérescence de ω , la dernière égalité exige que $\ker \Psi = \{0\}$, donc Ψ doit être un isomorphisme. \square

Lemme 1.1.11. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Si $L \subset V$ est un sous-espace lagrangien engendré par la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ alors, \mathcal{B} s'étend à une base symplectique de V .*

Démonstration. Il suffit, en vertu du théorème 1.1.6, de considérer $V = \mathbb{R}^{2n}$ avec $\omega = \omega_{\mathbb{R}^{2n}}$ muni de la structure complexe $J_{\mathbb{R}^{2n}}$ ($J_{\mathbb{R}^{2n}}^2 = -\mathbb{1}$). Soit $L \subset V$ un sous-espace lagrangien engendré par la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Il est clair que $L' = J_{\mathbb{R}^{2n}}L$ est aussi un sous-espace lagrangien. L'isomorphisme $\iota_\omega : V \rightarrow V^*$ nous permet d'identifier L' avec L^* . On peut donc choisir $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset L'$ comme étant la base duale à $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. La base symplectique de V désirée est alors donnée par $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}$. \blacksquare

1.1.2. Structures complexes linéaires

La démonstration du lemme 1.1.11 utilise la notion de structure complexe sur \mathbb{R}^{2n} pour trouver un complément orthogonal à un sous-espace lagrangien. Nous donnons ici la définition générale des structures complexes linéaires et étudions brièvement leurs interactions avec les structures symplectiques linéaires.

Définition 1.1.12. Une **structure complexe linéaire** sur un espace vectoriel V est un automorphisme

$$J : V \rightarrow V \text{ tel que } J^2 = -\mathbb{1}$$

Muni de cette structure, V devient un espace vectoriel complexe sur lequel la multiplication par $i = \sqrt{-1}$ correspond à J . Ceci nous permet de définir la multiplication par un scalaire $s + it \in \mathbb{C}$ comme

$$(s + it)\xi = s\xi + tJ\xi.$$

L'espace des structures complexes linéaires sur V est noté $\mathcal{J}(V)$. Une paire (V, J) , où $J \in \mathcal{J}(V)$ est appelé un espace vectoriel complexe.

Remarque 1.1.13. Soit V un espace linéaire de dimension réelle n muni d'une structure complexe linéaire J . Alors, n est pair. En effet, puisque $J^2 = -\mathbb{1}$,

$$(\det J)^2 = (\det J^2) = (-1)^n.$$

Or, on doit avoir $\det J \in \mathbb{R}$. Ceci est possible si et seulement si n est pair. □

Exemple 1.1.14. L'exemple standard d'un espace vectoriel muni d'une structure complexe linéaire est \mathbb{R}^{2n} muni de l'automorphisme

$$J_{\mathbb{R}^{2n}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Suite à l'identification usuelle $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$, nous remarquons que $J_{\mathbb{R}^{2n}}$ correspond bel et bien à la multiplication par i . □

La prochaine proposition est l'analogue du théorème de classification des espaces linéaires symplectiques dans le cas des espaces vectoriels complexes.

Proposition 1.1.15. Soit V un espace vectoriel de dimension réelle $2n$ muni d'une structure complexe linéaire J . Alors, il existe un isomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ tel que $J\Phi = \Phi J_0$.

Démonstration. En tant qu'espace vectoriel complexe, il existe $v_1, \dots, v_n \in V$ tel que

$$\{v_1, Jv_1, \dots, v_n, Jv_n\}$$

soit une base réelle de (V, J) . Considérons l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ donnée par

$$\Phi(\xi) = \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} v_j + \xi_{q_j} Jv_j)$$

pour tout $\xi = (\xi_{p_1}, \dots, \xi_{p_n}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Puisque les v_j et les Jv_j sont linéairement indépendants, $\ker \Phi = \{0\}$. Ainsi, étant donné les dimensions finies de \mathbb{R}^{2n} et V , Φ est un isomorphisme.

Il reste à montrer que $J\Phi = \Phi J_0$. Soit $\xi = (\xi_{p_1}, \dots, \xi_{p_n}, \xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors, par définition de Φ , J et J_0 ,

$$\begin{aligned} J\Phi(\xi) &= \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} Jv_j + \xi_{q_j} J^2v_j) = \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} Jv_j - \xi_{q_j} v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (\xi_{p_j} Jv_j - \xi_{q_j} v_j) \\ &= \Phi(-\xi_{q_1}, \dots, -\xi_{q_n}, \xi_{p_1}, \dots, \xi_{p_n}) = \Phi(J_0\xi). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

Définition 1.1.16. Soit (V, ω) un espace linéaire symplectique. On dit qu'une structure complexe linéaire $J \in \mathcal{J}(V)$ est **compatible avec** ω si

$$J^*\omega = \omega \quad \text{et} \quad \omega(\xi, J\xi) > 0$$

pour tout $\xi \in V \setminus \{0\}$. On note l'**espace des structures complexes linéaires sur** V

$$\mathcal{J}(V, \omega) := \{J \in \mathcal{J}(V) \mid J^*\omega = \omega, \omega(\xi, J\xi) > 0 \forall \xi \in V \setminus \{0\}\}.$$

Remarque 1.1.17. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$. Alors,

$$g_J(\xi, \eta) := \omega(\xi, J\eta)$$

est un produit intérieur défini positif sur V . De plus,

$$g_J(\xi, J\eta) = -g_J(J\xi, \eta).$$

□

Les structures complexes compatibles existent toujours sur un espace vectoriel symplectique.

Proposition 1.1.18. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Alors $\mathcal{J}(V, \omega) \neq \emptyset$.*

Démonstration. En vertu du théorème 1.1.6, (V, ω) admet une base symplectique $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ qui satisfait à

$$\omega(e_j, e_k) = \omega(f_j, f_k) = 0 \text{ et } \omega(e_j, f_k) = \delta_{jk}.$$

Nous pouvons donc définir $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ par

$$J e_j = f_j \text{ et } J f_j = -e_j.$$

■

1.2. Variétés symplectique

Les variétés symplectiques sont des variétés différentiables admettant une structure symplectique linéaire sur tout plan tangent. Cette structure linéaire découle d'une forme différentielle bilinéaire fermée et non-dégénérée. Dans ce qui suit toute variété est connexe, lisse, de dimension finie et fermée (c'est-à-dire sans bord et compacte) à moins d'indication contraire.

Définition 1.2.1. Une **variété symplectique** est une paire (M, ω) , où M est une variété et $\omega \in \Omega^2(M)$ respecte les deux conditions suivantes

$$d\omega = 0 \text{ (}\omega \text{ est fermée)} \text{ et } \omega_x \text{ est non dégénérée } \forall x \in M.$$

En particulier, ω_x est une structure linéaire symplectique sur $T_x M$ pour tout $x \in M$.

On dit alors que ω est une **forme** ou **structure symplectique**.

La proposition suivante réunit quelques conséquences directes du fait que tout plan tangent à une variété symplectique soit un espace vectoriel symplectique.

Proposition 1.2.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors,*

- (1) $\dim M = 2n$.
- (2) M est orientable.

(3) Il existe un isomorphisme canonique $TM \rightarrow T^*M$ donné par

$$X \mapsto X \lrcorner \omega := \omega(X, \cdot).$$

Démonstration. (i) Puisque ω_x est une forme symplectique linéaire pour tout $x \in M$, $(T_x M, \omega_x)$ est un espace vectoriel symplectique. Ainsi, en vertu du théorème 1.1.6, $\dim T_x M = 2n$. Or, il est bien connu que $\dim T_x M = \dim M \forall x \in M$. Alors, $\dim M = 2n$.

(ii) Puisque ω_x est non-dégénérée pour tout $x \in M$, le corollaire 1.1.8 nous assure que $(\omega_x)^{\wedge n} \neq 0$ pour tout $x \in M$. Ainsi, M est orientable.

(iii) Selon le lemme 1.1.5, puisque $(T_x M, \omega_x)$ est un espace vectoriel symplectique, $\xi \mapsto \omega_x(\xi, \cdot)$ est un isomorphisme entre $T_x M$ et $T_x^* M$. Ainsi, $X \mapsto X \lrcorner \omega$ est bel et bien un isomorphisme entre TM et T^*M . ■

Examinons à présent quelques conséquences de la condition de fermeture imposée sur une forme symplectique. Cette condition implique entre autre que toute forme symplectique représente une classe de $H^2(M; \mathbb{R})$.

Proposition 1.2.3. Soient (M, ω) une variété symplectique fermée. Alors, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

(1) ω^k est fermée,

(2) ω^k n'est pas exacte, c'est-à-dire qu'il n'existe pas $\lambda \in \Omega^{2k-1}(M)$ tel que $\omega^k = d\lambda$.

Démonstration. (i) On procède par induction. Pour le cas $k = 1$, $d\omega = 0$ suit directement de la définition. Supposons, comme étape d'induction, que $d(\omega^{k-1}) = 0$. Alors, en vertu de la formule de Leibniz,

$$d(\omega^k) = d\omega \wedge \omega^{k-1} + \omega \wedge d(\omega^{k-1}) = 0.$$

(ii) Supposons, en vue d'une contradiction, que ω^k soit exacte. Alors, il existe $\lambda \in \Omega^{2k-1}(M)$ tel que $\omega^k = d\lambda$. Alors, puisque $d\omega = 0$, ω^n est aussi exacte:

$$\omega^n = \omega^k \wedge \omega^{n-k} = d\lambda \wedge \omega^{n-k} = d(\lambda \wedge \omega^{n-k}).$$

Ainsi, puisque M est fermée, $\partial M = \emptyset$ et le théorème de Stokes nous assure que

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \lambda \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Or, selon la proposition 1.2.2, ω^n est une forme volume, donc $\int_M \omega^n \neq 0$, une contradiction. ■

Les propositions 1.2.2 et 1.2.3 donnent trois obstructions qui empêchent certaines variétés d'admettre une structure symplectique: la dimension d'une variété symplectique M doit être paire, M doit être orientable et $H^{2k}(M; \mathbb{R}) \neq 0 \forall k \in \{1, \dots, \dim M/2\}$. Par exemple, la dernière restriction implique que les sphères \mathbb{S}^{2n} pour $n > 1$ ne sont pas symplectique et ce, même si leur dimension est paire. En effet, il est bien connu que $H^2(\mathbb{S}^{2n}; \mathbb{R}) = 0$ si $n > 1$.

1.2.1. Exemples de variétés symplectiques

Explorons à présent quelques exemples importants de variétés symplectiques.

Exemple 1.2.4 (\mathbb{C}^n et \mathbb{R}^{2n}). Considérons $M = \mathbb{C}^n$ avec coordonnées z_1, \dots, z_n . On peut définir sur M la forme symplectique canonique

$$\omega_{\mathbb{C}^n} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

Suite à l'identification $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ usuelle donnée par $z_j \mapsto \operatorname{Re}(z_j) + i \operatorname{Im}(z_j)$ nous retrouvons exactement $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^{2n}})$. □

Exemple 1.2.5 (Surfaces). Soit Σ une surface orientable plongée dans \mathbb{R}^3 munie d'un champ de vecteur $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$, c'est-à-dire $\nu(x) \perp T_x M \forall x \in M$. Nous pouvons alors munir Σ de la forme volume ω donnée par

$$\omega_x(\xi, \eta) = \langle \nu(x), \xi \times \eta \rangle,$$

pour $\xi, \eta \in T_x \Sigma$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard dans \mathbb{R}^3 . D'un point de vu géométrique, $\omega_x(\xi, \eta)$ évalue le volume du parallélépipède engendré par $\nu(x), \xi$

et η . Il est alors clair que ω est une forme symplectique. De manière plus générale, n'importe quelle surface orientable munie d'une forme aire est symplectique. \square

Exemple 1.2.6 (Produit cartésien de variétés symplectiques). Soient (M_1^{2n}, ω_1) et (M_2^{2n}, ω_2) , deux variétés symplectiques. Posons $M = M_1 \times M_2$ et notons les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ M_1 & & M_2 \end{array}$$

On peut munir M de la forme bilinéaire

$$\omega = \omega_1 \oplus \omega_2 := \text{pr}_1^* \omega_1 + \text{pr}_2^* \omega_2.$$

Vérifions que ω est bel et bien une forme symplectique sur M . Puisque la dérivée extérieure d commute avec les tirés en arrière et puisque ω_1 et ω_2 sont, en particulier, fermées,

$$d\omega = d(\text{pr}_1^* \omega_1) + d(\text{pr}_2^* \omega_2) = \text{pr}_1^* d\omega_1 + \text{pr}_2^* d\omega_2 = 0.$$

La non-dégénérescence de ω découle directement du fait que ω^{2n} est une forme volume. En effet,

$$\omega^{2n} = \binom{2n}{n} (\text{pr}_1^* \omega_1)^n \wedge (\text{pr}_2^* \omega_2)^n \neq 0.$$

De manière plus générale, si $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1 \text{pr}_1^* \omega_1 + c_2 \text{pr}_2^* \omega_2$ définit aussi une forme symplectique sur $M_1 \times M_2$. \square

Exemple 1.2.7 (\mathbb{T}^{2n}). Considérons le **tore plat** $\mathbb{T}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n} / \mathbb{Z}^{2n}$ de dimension $2n$ avec coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ à valeur dans \mathbb{S}^1 . Alors, \mathbb{T}^{2n} admet la forme symplectique canonique

$$\omega_{\mathbb{T}^{2n}} := \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j.$$

\square

Exemple 1.2.8 (Le fibré cotangent). Soit X^n une variété lisse. Posons $M := T^*X$, le fibré tangent de X . On construit une forme symplectique canonique sur M . Pour ce faire, considérons d'abord la projection canonique sur M

$$\begin{array}{ccc} M & & (x, \xi) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ X & & x \end{array}$$

Au point $p = (x, \xi) \in M$, nous avons la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} T_p M & & T_p^* M \\ d\pi_p \downarrow & & \uparrow d\pi_p^* \\ T_x X & & T_x^* X \end{array}$$

Définissons la 1-forme

$$(\theta_{\text{can}})_p := d\pi_p^* \xi = \xi \circ d\pi_p$$

et la 2-forme

$$\omega_{\text{can}} := d\theta_{\text{can}}.$$

Alors, (M, ω_{can}) est une variété symplectique. Pour vérifier que ω_{can} est bel et bien une forme symplectique, il suffit d'examiner son expression en coordonnées locales. Soit $(U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ la carte locale sur T^*X induite par la carte locale (U, x_1, \dots, x_n) sur X . Alors, sur T^*U ,

$$\theta_{\text{can}} = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j \quad \text{et} \quad \omega_{\text{can}} = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j.$$

Il est alors clair que ω_{can} est une forme symplectique sur M . La forme θ_{can} est appelée **forme tautologique** ou **forme de Liouville** et ω_{can} est appelée **forme symplectique canonique**. □

1.2.2. Isotopies et dérivée de Lie

Avant de se lancer dans l'étude des applications qui préservent les formes symplectiques, nous rappelons quelques définitions et résultats concernant les isotopies et la dérivée de Lie. Nous donnons qu'un aperçu des preuves. Dans ce qui suit, nous considérons une variété lisse M .

Définition 1.2.9. Une **isotopie** est une application lisse $\varphi : [0,1] \times M \rightarrow M$ telle que

$$\varphi(t, \cdot) \in \text{Diff}(M) \quad \forall t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \text{id}_M.$$

On note $\varphi_t := \varphi(t, \cdot) : M \rightarrow M$.

Toute isotopie engendre un champ vectoriel. Soit $\varphi_t : M \rightarrow M$. Alors, on peut définir une famille de champs vectoriels X_t par le biais de l'équation

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = X_t \circ \varphi_t \tag{1.2.1}$$

Sous une condition supplémentaire toute famille de champs vectoriels engendre une isotopie. En effet, si M est compacte et si X_t est une famille de champs vectoriels, alors il existe une isotopie φ_t satisfaisant à 1.2.1. Ainsi, dans le cas où M est compacte, il existe une équivalence

$$\{\text{isotopies de } M\} \longleftrightarrow \{\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{X}(M)\} .$$

Dans le cas où X est un champ vectoriel ne dépendant pas du temps, l'isotopie engendrée par X est appelée **flot de X** .

Définition 1.2.10. Soient $X \in \mathcal{X}(M)$ et φ_t l'isotopie engendrée par X . La **dérivée de Lie selon X** est l'opérateur $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ défini par

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega \right|_{t=0} .$$

Remarque 1.2.11. La dérivée de Lie peut aussi être définie le long d'une famille de champs de vecteurs X_t . Selon le théorème de Picard, il existe $\epsilon > 0$ tel que X_t engendre localement un flot φ_t pour $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. On peut donc définir

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega \right|_{t=0}.$$

Les deux propositions qui suivent donnent les deux formules qui seront le plus utilisées dans ce mémoire. La première donne une expression algébrique de la dérivée de Lie et la deuxième nous permet d'exprimer, en terme de la dérivée de Lie, la dérivée temporelle du tiré arrière d'une forme différentielle par une isotopie.

Proposition 1.2.12 (Formule magique de Cartan). *Soit $X \in \mathcal{X}(M)$. Alors, pour toute forme $\omega \in \Omega^k(M)$,*

$$\mathcal{L}_X \omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega).$$

Proposition 1.2.13. *Soient φ_t une isotopie de M et X_t la famille de champs vectoriels engendrée par φ_t . Alors, $\forall \omega \in \Omega^k(M)$,*

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega.$$

Les propositions 1.2.12 et 1.2.13 se démontrent à l'aide de la même méthode. Notons d'abord que, pour un domaine de coordonnées U sur M , tout élément de $(\Omega^\bullet(U), \wedge)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de produits extérieurs de formes dans $\Omega^0(U)$ et $d\Omega^0(U)$. Les deux démonstrations en question sont constituées des trois étapes suivantes.

- (i) Démontrer que les formules tiennent pour $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$.
- (ii) Vérifier que les deux côtés de chaque équation commutent avec la dérivée extérieure d .
- (iii) Vérifier que les deux côtés de chaque équation respectent la formule de Leibniz sur $(\Omega^\bullet(M), \wedge)$. Par exemple, vérifier que

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \alpha) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \mathcal{L}_X \alpha.$$

Il est possible de généraliser assez aisément la proposition 1.2.13 pour une famille $\omega_t \in \Omega^k(M)$.

Corollaire 1.2.14. Soient φ_t une isotopie de M et X_t la famille de champs vectoriels engendrée par φ_t . Alors, pour toute famille $\omega_t \in \Omega^k(M)$,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = \varphi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right).$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la règle de dérivation en chaîne.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t &= \frac{d}{d\tau}\varphi_\tau^*\omega_t \Big|_{\tau=t} + \frac{d}{d\tau}\varphi_t^*\omega_\tau \Big|_{\tau=t} = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega_t \Big|_{\tau=t} + \varphi_t^*\frac{d}{d\tau}\omega_\tau \Big|_{\tau=t} \\ &= \varphi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right). \end{aligned}$$

■

1.2.3. Symplectomorphismes

D'une manière semblable au cas des espaces vectoriels symplectique, les transformations d'intérêt entre deux variétés symplectiques sont celles qui préservent les formes symplectiques.

Définition 1.2.15. Soient (M, ω_M) et (N, ω_N) deux variétés symplectiques. Un **symplectomorphisme entre M et N** est un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow N$ qui satisfait à l'équation

$$\varphi^*\omega = \omega.$$

On note le **groupe des symplectomorphismes** d'une variété symplectique (M, ω) vers elle-même

$$\text{Symp}(M, \omega) := \{\varphi \in \text{Diff}(M) \mid \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Notons $\mathcal{X}(M)$ l'espace des champs vectoriels sur M . La proposition 1.2.2 assure qu'il existe, tout comme en géométrie riemannienne, une bijection entre les champs

vectoriels et les formes de degré 1 sur M par le biais de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ X &\longmapsto X \lrcorner \omega \end{aligned}$$

Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 1.2.16. Soit (M, ω) une variété symplectique. Un **champ vectoriel symplectique** est un champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(M)$ satisfaisant à l'équation

$$d(X \lrcorner \omega) = 0,$$

c'est-à-dire que la 1-forme $X \lrcorner \omega$ est fermée. On note l'ensemble des champs vectoriels symplectiques sur M

$$\mathcal{X}(M, \omega) := \{X \in \mathcal{X}(M) \mid d(X \lrcorner \omega) = 0\}.$$

Remarque 1.2.17. En vertu de la *formule magique de Cartan*, la condition de fermeture imposée sur $X \lrcorner \omega$ peut s'écrire en terme de la dérivée de Lie de ω le long de X . En effet, puisque ω est fermée,

$$\mathcal{L}_X \omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) = d(X \lrcorner \omega).$$

Ainsi, $X \in \mathcal{X}(M, \omega)$ si et seulement si $\mathcal{L}_X \omega = 0$. □

La proposition suivante assure qu'une famille de champs vectoriels est symplectique si et seulement si l'isotopie qu'elle engendre est une famille de symplectomorphismes. Ladite proposition démontre aussi que si M est fermée, alors $\mathcal{X}(M, \omega)$ est l'algèbre de Lie du groupe $\text{Symp}(M, \omega)$.

Proposition 1.2.18. Soit (M, ω) une variété symplectique fermée. Considérons une famille de champs vectoriels $X_t \in \mathcal{X}(M)$ qui engendre l'isotopie $\varphi : [0, 1] \times M \rightarrow M$.

Alors,

(1) $\varphi_t \in \text{Symp}(M, \omega) \forall t$ si et seulement si $X_t \in \mathcal{X}(M, \omega) \forall t$.

De plus, si $X, Y \in \mathcal{X}(M, \omega)$,

(2) $[X, Y] \lrcorner \omega = -dH$, où $H = \omega(X, Y)$.

En particulier, $[X, Y] \in \mathcal{X}(M, \omega)$.

Démonstration. **(i).** En vertu de la proposition 1.2.13,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \varphi_t^*(X_t \lrcorner d\omega + d(X_t \lrcorner \omega)) \stackrel{\textcircled{2}}{=} \varphi_t^*d(X_t \lrcorner \omega), \quad (1.2.2)$$

où $\textcircled{1}$ suit de la formule magique de Cartan et $\textcircled{2}$ découle du fait que ω est fermée.

(\Rightarrow) Supposons que $\varphi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ pour tout t . Alors, par définition, $\varphi_t^*\omega = \omega$ et l'équation (1.2.2) nous assure que $d(X_t \lrcorner \omega) = 0$. Ainsi, $X_t \in \mathcal{X}(M, \omega)$. (\Leftarrow)

Supposons que $X_t \in \mathcal{X}(M, \omega)$ pour tout t . Alors, par définition, $d(X_t \lrcorner \omega) = 0$ et selon la formule (1.2.2), pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 = \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\varphi_\tau^*\omega \right) d\tau = \varphi_t^*\omega - \varphi_0^*\omega = \varphi_t^*\omega - \omega,$$

où la dernière égalité suit du fait que $\varphi_0 = \text{id}_M$. Ainsi, $\varphi_t^*\omega = \omega$, d'où $\varphi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$.

(ii). Notons $\varphi, \psi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ les isotopies respectivement engendrées par les champs vectoriels symplectiques X et Y . Par définition du crochet de Lie et de la dérivée de Lie,

$$\begin{aligned} [Y, X] \lrcorner \omega &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi_t^* X \lrcorner \omega) \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\psi_t^* X \lrcorner \psi_t^* \omega) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^* (X \lrcorner \omega) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} \mathcal{L}_Y (X \lrcorner \omega) \stackrel{\textcircled{3}}{=} Y \lrcorner d(X \lrcorner \omega) + d(Y \lrcorner (X \lrcorner \omega)) \stackrel{\textcircled{4}}{=} d\omega(X, Y). \end{aligned}$$

Ici, $\textcircled{1}$ suit du fait que $\psi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ qui est à son tour une conséquence de **(i)**, $\textcircled{2}$ découle de la proposition 1.2.13 et du fait que $\varphi_0 = \text{id}_M$, $\textcircled{3}$ est assurée par la formule magique de Cartan et $\textcircled{4}$ suit du fait que $X \lrcorner \omega$ est fermée. ■

Définition 1.2.19. Soit (M, ω) une variété symplectique sans bord. Une **isotopie symplectique** est une isotopie $\varphi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ qui satisfait à $\varphi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$ pour tout t .

Remarque 1.2.20. En vertu de la proposition 1.2.18, la famille de champs vectoriels X_t engendrée par une isotopie symplectique est elle aussi symplectique.

1.3. Théorème de Darboux

Il est maintenant temps de démontrer un des théorèmes les plus importants de la topologie symplectique: le théorème de Darboux. Ce dernier stipule que toutes les variétés symplectiques de même dimension sont localement identiques.

Théorème 1.3.1 (Théorème de Darboux). *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique. Alors, autour de tout point dans M , il existe une carte locale $(U, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ telle que*

$$\omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j.$$

En particulier, le théorème de Darboux implique que le seul invariant local qu'une variété symplectique peut admettre est sa dimension.

1.3.1. Théorème et truc de Moser

La démonstration du théorème de Darboux découle directement d'un problème plus général. Considérons une variété M de dimension $2n$ munie de deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 , et $N \subset M$ une sous-variété. Quelles conditions sont nécessaires pour garantir l'existence de deux voisinages V_0 et V_1 de N tels que (V_0, ω_0) et (V_1, ω_1) soient symplectomorphes?

Le théorème de Moser offre une réponse à cette question dans le cas où $N = M$. Ce dernier peut ensuite être utilisé en conjonction avec le théorème du voisinage tubulaire pour répondre à la question dans le cas où $N \subset M$. Ainsi, en se restreignant au cas où $N = \{p\} \subset M$, nous serons en mesure de démontrer le théorème de Darboux.

Théorème 1.3.2 (Moser). Soit M^{2n} une variété lisse compacte. Soient $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ deux formes fermées telles que $[\omega_0] = [\omega_1]$ et

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$$

est symplectique $\forall t \in [0,1]$. Alors, il existe une isotopie $\varphi : [0,1] \times M \rightarrow M$ telle

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Démonstration. La démonstration repose entièrement sur la résolution d'une certaine équation différentielle qui nous donnera une famille de champ vectoriels engendrée par l'isotopie désirée. Cette méthode est communément appelée **truc de Moser**. Afin de trouver ladite équation différentielle, supposons qu'il existe une isotopie $\varphi_t : M \rightarrow M$ telle que prédite par le théorème. C'est-à-dire que

$$\varphi_t^* \omega_t = \omega_0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Notons $X_t \in \mathcal{X}(M)$ la famille de champs vectoriels engendrés par φ_t par le biais de la formule

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = X_t \circ \varphi_t \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors,

$$0 = \frac{d}{dt} \omega_0 = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = \varphi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t \right)$$

Puisque $[\omega_1] = [\omega_0]$, il existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tel que $\omega_1 - \omega_0 = d\alpha$. Ainsi, par définition de ω_t , on a directement

$$\frac{d}{dt} \omega_t = \omega_1 - \omega_0 = d\alpha.$$

De plus, en vertu de la formule magique de Cartan et du fait que ω_t est supposée symplectique,

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega_t = X_t \lrcorner d\omega_t + d(X_t \lrcorner \omega_t) = d(X_t \lrcorner \omega_t).$$

On retrouve alors

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(d(X_t \lrcorner \omega_t) + d\alpha) &= 0 \\ \iff \\ d(X_t \lrcorner \omega_t) + d\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de trouver une solution X_t à l'équation 1.3.1. En effet, par compacité de M , X_t définira une unique isotopie φ_t qui respectera, d'après la discussion précédente,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t = 0 \implies \varphi_t^*\omega_t = \varphi_0^*\omega_1 = \omega_0.$$

Notons qu'il est suffisant de résoudre **l'équation de Moser**

$$X_t \lrcorner \omega_t = -\alpha.$$

Puisque ω_t est supposée symplectique, elle est en particulier non-dégénérée et l'équation précédente peut être résolue afin d'obtenir une solution lisse X_t . ■

Tel qu'annoncé précédemment, le théorème de Moser admet une version relative. **Théorème 1.3.3** (Moser, relatif). *Soient M^{2n} une variété et $V \subset M$ une sous-variété compacte. Soient $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ deux formes symplectiques qui coïncident sur V :*

$$\omega_0|_{TN} = \omega_1|_{TN}.$$

Alors, il existe des voisinages ouverts $V_0, V_1 \subset M$ de N et un difféomorphisme $\varphi : V_0 \rightarrow V_1$ tels que

$$\varphi|_N = \text{id}_N \quad \text{et} \quad \varphi^*\omega_1 = \omega_0.$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'existence d'un voisinage tubulaire de V et sur l'exactitude de $\omega_1 - \omega_0$ sur ce voisinage. Nous serons alors en mesure d'appliquer le truc de Moser pour trouver le difféomorphisme désiré. Pour ce faire nous aurons besoin de la proposition générale suivante.

Proposition 1.3.4. Soient M une variété, $V \subset M$ une sous-variété et $U \subset M$ un voisinage tubulaire de V . Soit $\omega \in \Omega^l(V)$ une forme fermée telle que $\omega|_{TV} = 0$. Alors,

- (1) ω est exacte sur U , c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \Omega^{l-1}(U)$ telle que $\omega = d\alpha$;
- (2) α peut être choisie de sorte à avoir $\alpha|_{TV} = 0$.

Démonstration. Puisque $U \subset M$ est un voisinage tubulaire de V , U est difféomorphe à un voisinage convexe $U_0 \subset NV$ de la section nulle. Notons ce difféomorphisme $\varphi : U_0 \rightarrow U$. Pour tout $t \in [0,1]$ définissons l'application

$$\begin{aligned} \rho_t : U_0 &\longrightarrow U_0 \\ (x, \xi) &\longmapsto (x, t\xi) \end{aligned}$$

Puisque U_0 est convexe, ρ_t est bien définie pour tout $t \in [0,1]$. Notons $\pi_0 : U_0 \rightarrow V$ la submersion de U_0 sur V et $i_0 : V \rightarrow NV$ l'inclusion de V dans NV comme section nulle. Puisque $\rho_1 = \text{id}$, que $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$ et que ρ_t fixe V pour tout t , $\{\rho_t\}_{t \in [0,1]}$ est une homotopie entre $i_0 \circ \pi_0$ et id qui fixe V . Ainsi, V est une rétraction de U_0 et, selon l'identification donnée par φ , V est aussi une rétraction de U .

Nous désirons à présent construire un opérateur d'homotopie entre $\rho_0 = i_0 \circ \pi_0$ et $\rho_1 = \text{id}$. En d'autres termes, nous cherchons à construire une application linéaire $H : \Omega^l(U_0) \rightarrow \Omega^{l-1}(U_0)$ respectant la relation

$$\text{id} - (i_0 \circ \pi_0)^* = dH + Hd. \tag{1.3.2}$$

Notons v_t le champ de vecteur qui, au point $q = \rho_t(p)$, est donné par le vecteur tangent à la courbe $\rho_s(p)$ au temps $s = t$. Définissons, pour tout $\beta \in \Omega^l(U_0)$ l'opérateur linéaire

$$H\beta = \int_0^1 \rho_t^*(v_t \lrcorner \beta) dt.$$

Démontrons que H satisfait bel et bien à la relation 1.3.2. Nous avons, pour tout $\beta \in \Omega^l(U_0)$,

$$\begin{aligned} dH\beta + Hd\beta &= d \int_0^1 \rho_t^*(v_t \lrcorner \beta) dt + \int_0^1 \rho_t^*(v_t \lrcorner d\beta) dt \\ &= \int_0^1 \rho_t^*(d(v_t \lrcorner \beta) + v_t \lrcorner d\beta) dt \end{aligned}$$

En vertu de la formule magique de Cartan et de la proposition 1.2.13, l'intégrand se réduit à

$$\rho_t^*(d(v_t \lrcorner \beta) + v_t \lrcorner d\beta) = \rho_t^* \mathcal{L}_{v_t} \beta = \frac{d}{dt} \rho_t^* \beta$$

Finalement, une simple application du théorème fondamental du calcul intégral nous permet d'obtenir

$$dH\beta + Hd\beta = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \rho_t^* \beta \right) dt = \rho_1^* \beta - \rho_0^* \beta = \text{id}\beta - (i_0 \circ \pi_0)^* \beta.$$

Démontrons à présent que ω est exacte sur U . Par hypothèse, $d\omega = 0$ et $i_0^* \omega = 0$. Ainsi, l'opérateur d'homotopie H nous assure que

$$\omega = dH\omega. \tag{1.3.3}$$

Nous pouvons donc poser $\alpha = H\omega$ et conclure que ω est exacte sur U_0 . L'identification $\varphi : U_0 \rightarrow U$ nous permet d'en déduire que ω est aussi exacte sur U .

Démontrons finalement que α est nulle sur TV . Par construction, ρ_t fixe V pour tout $t \in [0,1]$, donc $v_t(x) = 0$ pour tout $x \in V$ et pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, $\alpha_x = 0$ pour tout $x \in V$. ■

Démonstration. [Théorème 1.3.3] Puisque $V \subset M$ est une sous-variété compacte de M , V admet un voisinage tubulaire $U \subset M$. Par hypothèse, $\omega_1 - \omega_0$ est fermée sur U et $(\omega_1 - \omega_0)_p = 0$ pour tout $p \in V$. La proposition 1.3.4 assure alors l'existence d'une forme $\alpha \in \Omega^1(U)$ telle que $\omega_1 - \omega_0 = d\alpha$ sur U et que $\alpha_p = 0$ pour tout $p \in V$.

Considérons, pour $t \in [0,1]$, l'homotopie linéaire

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + t d\alpha$$

entre ω_0 et ω_1 . Par construction, $d\omega_t = 0$ sur U pour tout $t \in [0, 1]$. En rétrécissant U au besoin, nous pouvons supposer que ω_t est non-dégénérée, et donc symplectique, pour tout $t \in [0, 1]$. Ceci nous permet de trouver une solution X_t à l'équation de Moser

$$X_t \lrcorner \omega_t = -\alpha.$$

Notons que, puisque α est nulle sur V , $X_t(p) = 0$ pour tout $p \in V$. En rétrécissant U au besoin une seconde fois, nous pouvons supposer que X_t engendre une isotopie $\psi : [0, 1] \times U \rightarrow M$ qui, en vertu du truc de Moser, satisfait à la relation

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0$$

pour tout $t \in [0, 1]$. De plus, puisque $X_t(p) = 0$ pour tout $p \in V$ et tout $t \in [0, 1]$, $\psi_t|_V = \text{id}_V$. Afin de conclure la démonstration, nous n'avons qu'à poser $\varphi = \psi_1$, $V_0 = U$ et $V_1 = \psi_1(U)$. ■

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème de Darboux.

Démonstration. [Théorème 1.3.1] Appliquer le théorème de Moser relatif à un point $N = \{x\} \in M$ en conjonction avec le théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques. ■

1.4. Sous-variétés lagrangiennes

Définition 1.4.1. Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique et $L \subset M$ une sous-variété. On dit que L est une **sous-variété lagrangienne** si

$$\omega|_{TL} = 0 \quad \text{et} \quad \dim L = \frac{1}{2} \dim M = n.$$

Soit $f : L^n \rightarrow M^{2n}$ un plongement ou une immersion. On dit que f est **lagrangienne** si $f^*\omega = 0$.

1.4.1. Exemples et construction de sous-variétés lagrangiennes

Exemple 1.4.2 (Courbes dans une surface). Soit (Σ, ω) une surface orientée plongée dans \mathbb{R}^3 munie d'une forme volume ω (voir l'exemple 1.2.5). Toute courbe $\gamma \subset \Sigma$

est lagrangienne. En effet, si $\xi, \eta \in T_x \gamma$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\xi = r\eta$. Alors, $\omega(\xi, \eta) = r\omega(\xi, \xi) = 0$. \square

Exemple 1.4.3 (Sous-variétés lagrangiennes des fibrés cotangents). Soient X^n une variété et $M = T^*N$. Rappelons que (M, ω_{can}) est une variété symplectique (voir l'exemple 1.2.8). La section nulle $X_0 = \{(x, \xi) \in M \mid \xi = 0\}$ de M est une sous-variété lagrangienne. En effet, il est clair que $\theta_{\text{can}}|_{TX_0} = 0$. Ainsi, pour $i_0 : X_0 \hookrightarrow M$, l'inclusion de X_0 dans M , $i_0^* \theta_{\text{can}} = 0$. Il suit de la définition de ω_{can} que $i_0^* \omega = i_0^* d\theta_{\text{can}} = di_0^* \theta_{\text{can}} = 0$.

De manière plus générale, il est possible de montrer que le graphe d'une forme $\sigma \in \Omega^1(M)$ est une sous-variété lagrangienne de M si et seulement si $d\sigma = 0$. Pour ce faire, considérons l'application $s_\sigma : M \rightarrow T^*M$ donnée par $s_\sigma(x) = (x, \sigma_x)$. Notons que l'image de s_σ correspond au graphe de σ . Il suit de la définition de θ_{can} que $s_\sigma^* \theta_{\text{can}} = \sigma$. Or, par définition, le graphe de σ est lagrangien si et seulement si $0 = s_\sigma^* d\theta_{\text{can}} = ds_\sigma^* \theta_{\text{can}} = d\sigma$. \square

Exemple 1.4.4 (Graphe d'un symplectomorphisme). Soient (M_1^{2n}, ω_1) et (M_2^{2n}, ω_2) deux variétés symplectiques. Le produit $M_1 \times M_2$ muni de la forme symplectique $\omega = -\omega_1 \oplus \omega_2$ forme une variété symplectique (voir l'exemple 1.2.6). Tout symplectomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ engendre une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times M_2$. La proposition suivante donne une formulation précise de ce fait.

Proposition 1.4.5. *Soient (M_1^{2n}, ω_1) et (M_2^{2n}, ω_2) deux variétés symplectiques. Un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ est un symplectomorphisme si et seulement si $\text{Graphe}(\varphi)$ est une sous-variété lagrangienne de $(M_1 \times M_2, \omega = -\omega_1 \oplus \omega_2)$.*

Démonstration. Puisque $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ est un difféomorphisme, l'application

$$\begin{aligned} \gamma_\varphi : M_1 &\longrightarrow M_1 \times M_2 \\ x &\longmapsto (x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

plonge M_1 dans $M_1 \times M_2$ et son image correspond exactement à $\text{Graphe}(\varphi)$. Alors, d'une part, $\text{Graphe}(\varphi)$ est une sous-variété lagrangienne de $M_1 \times M_2$ si et seulement

si $\gamma_\varphi^* \omega = 0$. D'autre part, par définition de ω ,

$$\gamma_\varphi^* \omega = -\gamma_\varphi^* \text{pr}_1^* \omega_1 + \gamma_\varphi^* \text{pr}_2^* \omega_2 = -(\text{pr}_1 \circ \gamma_\varphi)^* \omega_1 + (\text{pr}_2 \circ \gamma_\varphi)^* \omega_2$$

Or, par construction, $\text{pr}_1 \circ \gamma_\varphi = \text{id}_{M_1}$ et $\text{pr}_2 \circ \gamma_\varphi = \varphi$. Ainsi,

$$\gamma_\varphi^* \omega = 0 \iff \varphi^* \omega_2 = \omega_1.$$

■

La proposition précédente établit un lien crucial entre les symplectomorphismes et les sous-variétés lagrangiennes. Comme nous le verrons au chapitre suivant, ce lien permet, entre autre, de généraliser certaines constructions sur $\text{Symp}(M)$ à l'espace des sous-variétés lagrangiennes de M . □

1.4.2. Voisinages de sous-variétés lagrangiennes

Le théorème de Weinstein [26] stipule que toute sous-variété lagrangienne L compacte admet un voisinage V symplectomorphe à un voisinage V_0 de la section nulle de T^*L .

Théorème 1.4.6 (Weinstein). *Soient (M, ω) une variété symplectique et $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne compacte. Alors, il existe*

- un voisinage $V_0 \subset T^*L$ de la section nulle L_0 ,
- un voisinage $V \subset M$ de L ,
- et un difféomorphisme $\varphi : V_0 \rightarrow V$

tels que

$$\varphi^* \omega = d\theta \quad \text{et} \quad \varphi|_L = \text{id}_L,$$

où $d\theta$ est la forme symplectique canonique sur T^*L .

Démonstration. En vertu de la proposition 1.1.18, il existe une structure complexe J sur M compatible avec ω . Munissons M de la métrique riemannienne g_J induite par J . La métrique g_J induit à son tour un isomorphisme $\Phi_q : T_q^*M \rightarrow T_qM$ définit,

pour tout $\xi \in T_q L$, par

$$g_J(\Phi_q(\eta^*), \xi) := \eta^*(\xi).$$

Pour tout $q \in M$, $J_q T_q L \subset T_q M$ est un sous-espace vectoriel lagrangien de $(T_q M, \omega_q)$ et est le complément orthogonal de $T_q M$ sous g_J . Définissons à présent l'application

$$\begin{aligned} \varphi : T^* L &\longrightarrow M \\ (q, \xi^*) &\longmapsto \exp_q(J_q \Phi_q(\xi^*)) \end{aligned}$$

où \exp_q est l'application exponentielle associée à g_J . Il existe alors un voisinage assez petit de la section nulle de $T^* L$ sur laquelle φ est un difféomorphisme. Pour un vecteur tangent $\xi = (\xi_0, \xi_1^*) \in T_q L \oplus T_q^* L = T_{(q,0)} T^* L$ à la section nulle de $T^* L$ au point $q \in L$, nous avons, par construction,

$$d\varphi_{(q,0)}(\xi) = \xi_0 + J_q \Phi_q(\xi_1^*).$$

Ainsi, pour $\xi, \eta \in T_q L \oplus T_q^* L$ et $d\theta \in \Omega^2(T^* L)$ la forme symplectique canonique sur $T^* L$, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega_{(q,0)}(\xi, \eta) &= \omega_q(\xi_0 + J_q \Phi_q(\xi_1^*), \eta_0 + J_q \Phi_q(\eta_1^*)) \\ &= \omega_q(\xi_0, \eta_0) + \omega_q(\xi_0, J_q \Phi_q(\eta_1^*)) \\ &\quad - \omega_q(\eta_0, J_q \Phi_q(\xi_1^*)) + \omega_q(J_q \Phi_q(\xi_1^*), J_q \Phi_q(\eta_1^*)) \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_q(\xi_0, J_q \Phi_q(\eta_1^*)) - \omega_q(\eta_0, J_q \Phi_q(\xi_1^*)) \\ &\stackrel{\textcircled{2}}{=} -g_J(\Phi_q(\eta_1^*), \xi_0) + g_J(\Phi_q(\xi_1^*), \eta_0) \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{=} \xi_1^*(\eta_0) - \eta_1^*(\xi_0) \\ &\stackrel{\textcircled{4}}{=} d\theta_{(q,0)}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

où $\textcircled{1}$ suit du fait que $T_q L$ et $J_q T_q L$ sont des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $(T_q M, \omega_q)$, $\textcircled{2}$ découle de la définition de g_J , $\textcircled{3}$ suit de la définition de Φ_q et $\textcircled{4}$ suit de la définition de la forme symplectique canonique (voir exemple 1.2.8). Ainsi, sur

la section nulle de T^*L , $\varphi^*\omega$ et $d\theta$ coïncident. Le théorème de Moser relatif permet donc de conclure la démonstration. ■

Chapitre 2

Difféomorphismes hamiltoniens et homomorphisme de Calabi

Nous introduisons dans ce chapitre le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique. Par la suite nous étudierons l'homomorphisme de Calabi entre ce groupe et \mathbb{R} . Comme le laisse sous-entendre le titre de ce mémoire, cet homomorphisme jouera un rôle crucial dans les prochains chapitres. Nous suivons ici principalement l'ouvrage de Oh [20].

2.1. Difféomorphismes hamiltoniens

Les difféomorphismes hamiltoniens sont des symplectomorphismes d'une variété symplectique M engendrés par une fonction lisse $H : M \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cadre de la mécanique analytique, les difféomorphismes hamiltoniens représentent l'évolution temporelle d'un système mécanique.

Définition 2.1.1. Soient (M, ω) une variété symplectique et $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Le champ vectoriel $X_h \in \mathcal{X}(M)$ déterminé par l'équation

$$X_h \lrcorner \omega = -dh$$

est appelé **champ vectoriel hamiltonien** et h est appelée **fonction hamiltonienne autonome** ou simplement **hamiltonien autonome**. Dans le cas où M est fermée, l'isotopie φ_t^h engendrée par X_h est appelée **flot hamiltonien**.

Remarque 2.1.2. Puisque $d^2 = 0$, tout champ de vecteur hamiltonien est en particulier symplectique. De plus, en vertu de la proposition 1.2.18, tout flot hamiltonien est symplectique.

Remarque 2.1.3. Un champ vectoriel hamiltonien X_h engendré par un hamiltonien h est toujours tangent aux ensembles de niveau de h . En effet, par définition de X_h ,

$$-dh(X_h) = X_h \lrcorner \omega(X_h) = \omega(X_h, X_h) = 0.$$

Soit (M, ω) une variété symplectique sans bord. Considérons, à présent, une fonction $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ lisse sur M qui *dépend du temps*. H est appelée **fonction hamiltonienne** ou simplement **hamiltonien** et on note $H_t := H(t, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$. Cette fois-ci, H engendre une famille de champs vectoriels X_t^H par le billet de l'équation

$$X_t^H \lrcorner \omega = -dH_t$$

et X_t^H engendre à son tour une isotopie φ_t^H appelée **isotopie hamiltonienne**. Dans ce cas, l'application qui associe φ^H à H est notée $H \mapsto \varphi^H$. La famille de champs vectoriels X_t^H est appelée **gradient symplectique de H** et on note $\text{sgrad } H := X_t^H$.

Définition 2.1.4. Un **difféomorphisme hamiltonien** est un symplectomorphisme φ qui est donné par l'application au temps 1 d'une isotopie hamiltonienne φ_t^H , c'est-à-dire que

$$\varphi = \varphi_1^H.$$

Dans ce cas, on dit que l'hamiltonien H génère φ . L'**espace des difféomorphismes hamiltoniens** est noté

$$\text{Ham}(M, \omega) := \{\varphi \in \text{Symp}(M, \omega) \mid \exists \varphi_t \text{ une isotopie hamiltonienne t.q. } \varphi = \varphi_1\}.$$

Il est clair que $\text{Ham}(M, \omega) \subset \text{Symp}(M, \omega)$, mais il ne suit pas directement de la définition que $\text{Ham}(M, \omega)$ est un sous-groupe de $\text{Symp}(M, \omega)$. En effet, il n'est pas évident que tout élément de $\text{Ham}(M, \omega)$ admet un inverse dans $\text{Ham}(M, \omega)$ et que

$\text{Ham}(M, \omega)$ est fermé sous la composition. Heureusement, c'est bel et bien le cas et la proposition suivante nous l'assure.

Proposition 2.1.5. *Soient $\varphi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ générés respectivement par les hamiltoniens $H, K : [0,1] \times M \rightarrow M$. Alors,*

(1) *l'hamiltonien \overline{H} engendre φ^{-1} , où $\overline{H} : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ est défini comme*

$$\overline{H}(t, x) = H_t \circ \varphi_t^H;$$

(2) *l'hamiltonien $H\#K$ engendre $\varphi \circ \psi$, où $H\#K : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ est défini comme*

$$H\#K(t, x) = H_t(x) + K_t \circ (\varphi_t^H)^{-1}(x).$$

La démonstration de la proposition précédente requiert un petit lemme.

Lemme 2.1.6. *Soit X_{H_t} une famille de champs vectoriels hamiltonien engendré par l'hamiltonien $H : [0,1] \times M \rightarrow M$. Alors, si $\varphi \in \text{Symp}(M, \omega)$,*

$$\varphi^* \text{sgrad } H_t = \text{sgrad}(H_t \circ \varphi).$$

Démonstration. Par définition de $\text{sgrad } H_t \circ \varphi$,

$$\text{sgrad}(H_t \circ \varphi) \lrcorner \omega = -d(H_t \circ \varphi).$$

Ainsi, il suffit de démontrer que

$$\varphi^* \text{sgrad } H_t \lrcorner \omega = -d(H_t \circ \varphi).$$

Pour ce faire, notons d'abord qu'étant donné que $\varphi \in \text{Symp}(M, \omega)$, $\varphi^* \omega = \omega$. Alors,

$$\begin{aligned} (\varphi^* \text{sgrad } H_t) \lrcorner \omega &= (\varphi^* \text{sgrad } H_t) \lrcorner \varphi^* \omega \\ &= \varphi^* (\text{sgrad } H_t \lrcorner \omega) = -\varphi^* dH_t = -d(H_t \circ \varphi) \end{aligned}$$

tel que désiré. ■

Démonstration. [Proposition 2.1.5] **(i)** Soit Y_t , le champ de vecteur qui engendre l'isotopie $(\varphi_t^H)^{-1}$. Il suffit de démontrer que

$$Y_t = \text{sgrad } \overline{H} = \text{sgrad}(-H_t \circ \varphi_t^H).$$

Puisque $(\varphi_t^H)^{-1} \circ \varphi_t^H = \text{id}_M$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \text{id}_M = \frac{d}{dt} \left((\varphi_t^H)^{-1} \circ \varphi_t^H \right) \\ &= (\varphi_t^H)_*^{-1} \circ \frac{d}{dt} \varphi_t^H + \frac{d}{dt} (\varphi_t^H)^{-1} \circ \varphi_t^H \\ &= (\varphi_t^H)_*^{-1} \circ \text{sgrad } H_t \circ \varphi_t^H + Y_t \circ (\varphi_t^H)^{-1} \circ \varphi_t^H \\ &= (\varphi_t^H)_*^{-1} \circ \text{sgrad } H_t \circ \varphi_t^H + Y_t. \end{aligned}$$

Ainsi, Y_t peut s'écrire sous la forme

$$Y_t = -(\varphi_t^H)_*^{-1} \circ \text{sgrad } H_t \circ \varphi_t^H = -(\varphi_t^H)^* \text{sgrad } H_t =: \text{sgrad}(-H_t \circ \varphi_t^H),$$

où la dernière égalité suit du lemme 2.1.6.

(ii) Soit W_t , la famille de champs vectoriels qui engendre l'isotopie $\varphi_t^H \circ \psi_t^K$. Il suffit de montrer que

$$W_t = \text{sgrad } H \# K.$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} W_t \circ (\varphi_t^H \circ \psi_t^K) &= \frac{d}{dt} (\varphi_t^H \circ \psi_t^K) \\ &= (\varphi_t^H)_* \circ \frac{d}{dt} \psi_t^K + \frac{d}{dt} \varphi_t^H \circ \psi_t^K \\ &= (\varphi_t^H)_* \circ \text{sgrad } K_t \circ \psi_t^K + \text{sgrad } H_t \circ \varphi_t^H \circ \psi_t^K \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de $X_{H \# K}$,

$$\text{sgrad } H \# K \lrcorner \omega = -d(H \# K) = -dH_t - d(K_t \circ (\varphi_t^K)^{-1}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{sgrad } H \# K &= \text{sgrad } H_t + \text{sgrad}(K_t \circ (\varphi_t^H)^{-1}) \\ &= \text{sgrad } H_t + (\varphi_t^H)_* \circ \text{sgrad } K_t \circ (\varphi_t^H)^{-1}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité suit du lemme 2.1.6.

On remarque alors que $W_t \circ \varphi_t^H \circ \psi_t^K = \text{sgrad } H \# K \circ \varphi_t^H \circ \psi_t^K$, donc, puisque φ_t^H et ψ_t^K sont inversibles, $W_t = \text{sgrad } H \# K$ ■

2.1.1. Crochet de Poisson

Définition 2.1.7. Soit (M, ω) une variété symplectique. Le **crochet de Poisson** associé à la forme symplectique ω est l'application

$$\{-, -\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

définie par

$$\{f, h\} := -dh(\text{sgrad } f) = \omega(\text{sgrad } h, \text{sgrad } f).$$

Le crochet de Poisson peut aussi s'écrire sous la forme d'une dérivée de Lie: pour toutes fonctions lisses $f, g \in C^\infty(M)$,

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{\text{sgrad } g}(f). \tag{2.1.1}$$

En effet, puisque f est une fonction lisse, $X \lrcorner f = 0$ pour tout champ de vecteur X . Ainsi, en vertu de la formule magique de Cartan,

$$\mathcal{L}_{\text{sgrad } g}(f) = \text{sgrad } g \lrcorner df + d(\text{sgrad } g \lrcorner f) = \text{sgrad } g \lrcorner df = df(\text{sgrad } g).$$

Ainsi, selon la définition du gradient symplectique et celle du crochet de Poisson, l'équation précédente prend la forme

$$\mathcal{L}_{\text{sgrad } g}(f) = -\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = \omega(\text{sgrad } g, \text{sgrad } f) = \{f, g\}.$$

Plusieurs propriétés fondamentales du crochet de Poisson suivent directement de la définition de la structure symplectique.

Théorème 2.1.8. Soient (M, ω) une variété symplectique. Alors, le crochet de Poisson $\{-, -\}$ associé à ω joui des propriétés suivantes. Pour toutes fonctions lisses $f, g, h \in C^\infty(M)$ et toute constante $C \in \mathbb{R}$,

- (1) (Bilinéarité) $\{Cf, g + h\} = C\{f, g\} + C\{f, h\}$.
- (2) (Antisymétrie) $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- (3) (Identité de Jacobi) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$;
- (4) (Règle de Leibniz) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$;
- (5) (Non-dégénérescence) $\{f, g\} = 0$ pour tout g si et seulement si f est une fonction constante.

Démonstration. Afin d'améliorer la lisibilité de la preuve, posons $X = \text{sgrad } f$, $Y = \text{sgrad } g$ et $Z = \text{sgrad } h$.

Les propriétés **(i)** et **(ii)** découlent respectivement de bilinéarité et de la nature antisymétrique de la forme symplectique ω .

(iii). Rappelons d'abord que, selon un théorème classique de géométrie différentielle (voir, par exemple, [25] chapitre 7), la différentielle de ω , qui est une forme de degré trois, peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Or, étant donné que ω est fermée par définition, $d\omega = 0$ et l'équation précédente donne

$$\begin{aligned} X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) & \tag{2.1.2} \\ &= \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Par définition de la dérivée de Lie et selon la formule (2.1.1),

$$X(\omega(Y, Z)) = \mathcal{L}_X(\omega(Y, Z)) = \mathcal{L}_X(\{h, g\}) = \{\{h, g\}, f\} = -\{\{g, h\}, f\}.$$

où la troisième égalité est donnée par la formule magique de Cartan et le fait selon lequel $\{h, g\}$ est une fonction lisse. D'une manière tout à fait analogue, on obtient

$$Y(\omega(X, Z)) = \{\{h, f\}, g\} \quad \text{et} \quad Z(\omega(X, Y)) = -\{\{f, g\}, h\}.$$

Ainsi, le côté gauche de l'équation (2.1.2) prend la forme

$$\begin{aligned} X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) & \quad (2.1.3) \\ & = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

Par la définition du crochet de Lie et selon la formule (2.1.1), on a

$$\begin{aligned} \omega([X, Y], Z) &= -[X, Y] \lrcorner dh = -[X, Y](h) \\ &= (-\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X)(h) \\ &= -\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{h, f\}\}. \end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve aussi

$$\begin{aligned} \omega([X, Z], Y) &= \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\}, \\ \omega([Y, Z], X) &= -\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

Alors, le côté droit de l'équation (2.1.2) s'écrit comme

$$\begin{aligned} \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) & \quad (2.1.4) \\ &= -2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}). \end{aligned}$$

Finalement, selon (2.1.3) et (2.1.4), (2.1.2) se réécrit sous la forme

$$3(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}) = 0,$$

de laquelle découle l'identité de Jacobi.

(iv). Puisque la différentielle d respecte elle-même la règle de Leibniz,

$$\{f, gh\} = -(dgh)(X) = -hdg(X) - gdh(X) = h\{f, g\} + g\{f, h\},$$

où la première et dernière égalité suivent de la définition du crochet de Poisson.

(v). Soit $f \in C^\infty(M)$ tel que

$$\{f, g\} = 0, \quad \forall g \in C^\infty(M).$$

Alors, par définition du crochet de Poisson,

$$\{f, g\} = -\omega(X, Y) = 0, \quad \forall g \in C^\infty(M) \iff X \lrcorner \omega = 0,$$

où $X = \text{sgrad } f$ et $Y = \text{sgrad } g$. Or, puisque $-\lrcorner \omega : TM \rightarrow T^*M$ est un isomorphisme, on doit nécessairement avoir $X = 0$. De plus, par définition de X ,

$$0 = X \lrcorner \omega = -df,$$

d'où f est constante. ■

Remarque 2.1.9. Les propriétés (i), (ii) et (iii) du 2.1.8 font de la paire $(C^\infty(M), \{-, -\})$ une algèbre de Lie.

Il est possible de trouver une expression du gradient symplectique du crochet de Poisson de deux fonctions lisses en termes de leur gradient symplectique.

Lemme 2.1.10. Soient (M, ω) une variété symplectique et $\{-, -\}$ le crochet de Poisson associé à ω . Alors, pour toutes fonctions lisses $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[\text{sgrad } f, \text{sgrad } g] = \text{sgrad } \{g, f\}.$$

Démonstration. Par définition du gradient symplectique, il faut démontrer que

$$[\text{sgrad } f, \text{sgrad } g] \lrcorner \omega = -d\{g, f\}.$$

D'une part, nous avons, en vertu de la proposition 1.2.18,

$$[\text{sgrad } f, \text{sgrad } g] \lrcorner \omega = -d(\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g)).$$

Et d'autre part, par définition du crochet de Poisson,

$$-d\{g, f\} = -d(\omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g)).$$

Ceci complète la démonstration. ■

Le lemme 2.1.10 nous assure que le crochet de Lie de deux champs vectoriels hamiltoniens est à son tour un champ vectoriel hamiltonien. Ainsi, les champs vectoriels hamiltoniens forment une sous-algèbre de Lie des champs vectoriels symplectiques.

Nous terminons cette discussion en donnant une propriété surprenante du crochet de Poisson. Cette dernière jouera un rôle important dans l'étude de l'homomorphisme de Calabi.

Lemme 2.1.11. *Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique et $\{\bullet, \bullet\}$ le crochet de Poisson associé à ω . Alors, pour toutes fonctions lisses $f, g \in C^\infty(M)$, la forme de degré $2n$ $\{f, g\} \omega^{2n}$ est exacte. Plus précisément,*

$$\{f, g\} \omega^{2n} = d(\text{sgrad } g \lrcorner (f \omega^{2n})) = -n df \wedge dg \wedge \omega^{n-1}.. \quad (2.1.5)$$

Démonstration. Notons d'abord que, par définition, $\text{sgrad } g$ est un champ vectoriel symplectique. Ainsi, $\mathcal{L}_{\text{sgrad } g} \omega = 0$ et par la règle de Leibniz,

$$\mathcal{L}_{\text{sgrad } g} \omega^{2n} = 0.$$

Il suit alors de la définition du crochet de poisson que

$$\{f, g\} \omega^{2n} = \mathcal{L}_{\text{sgrad } g} (f) \omega^{2n} = \mathcal{L}_{\text{sgrad } g} (f \omega^{2n}) - f \mathcal{L}_{\text{sgrad } g} (\omega^{2n}) = \mathcal{L}_{\text{sgrad } g} (f \omega^{2n}).$$

Donc, en vertu de la formule magique de Cartan,

$$\{f, g\} \omega^{2n} = \text{sgrad } g \lrcorner d(f \omega^{2n}) + d(\text{sgrad } g \lrcorner (f \omega^{2n})) = d(\text{sgrad } g \lrcorner (f \omega^{2n})),$$

où la dernière égalité découle du fait selon lequel $d(f \omega^{2n})$ est une forme de degré $2n + 1 > \dim M$ et doit être nulle. ■

2.1.2. Chemins de difféomorphismes hamiltoniens

On définit une topologie C^∞ sur $\text{Symp}(M, \omega)$ et $\text{Ham}(M, \omega)$ comme étant celle induite par leur inclusion dans $\text{Diff}(M)$. Afin d'étudier la topologie de $\text{Ham}(M, \omega)$, il est naturel de considérer des familles lisses $\{\varphi_t\} \subset \text{Ham}(M, \omega)$. Nous sommes alors mené à nous demander si ces familles sont, en général, engendrées par une isotopie

hamiltonienne, c'est-à-dire si il existe un hamiltonien $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi_t = \varphi_t^H \circ \varphi_0$. Le théorème de Banyaga fournit une réponse positive à cette question.

Définition 2.1.12. Un chemin hamiltonien $\lambda : [0,1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ est une application définie comme une application lisse $\lambda : [0,1] \times M \rightarrow M$ vérifiant les critères suivants.

- (1) $\lambda(0) : M \rightarrow M$ est un difféomorphisme hamiltonien;
- (2) la dérivée temporelle

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \circ (\lambda(t))^{-1}$$

de λ est une famille de champs vectoriel hamiltoniens, c'est-à-dire que $\dot{\lambda}(t) \lrcorner \omega = -dH_t$, et

$$\lambda(t) = \varphi_t^H \circ \lambda(0)$$

pour un hamiltonien $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ qui est alors appelé l'**hamiltonien générateur de λ** .

L'espace des chemins hamiltoniens est noté $\mathcal{P}(\text{Ham}(M, \omega))$ et on note $\mathcal{P}(\text{Ham}(M, \omega), \text{id}_M)$ l'espace des chemins hamiltoniens donnés par l'identité au temps 0.

Le théorème de Banyaga s'exprime alors simplement comme suit.

Théorème 2.1.13 (Banyaga). *Tout chemin de difféomorphismes hamiltoniens dans $\text{Diff}(M)$ est un chemin hamiltonien.*

Il est important de noter que l'hamiltonien H qui génère un chemin hamiltonien λ n'est pas unique. En effet, étant donné qu'une application $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ génère l'application identité, $H + c$ génère aussi λ . Ce phénomène joue un rôle important lors du développement d'invariants symplectiques. Il est alors utile de définir un unique inverse à l'application $H \mapsto \lambda$ afin d'éliminer toute ambiguïté.

Définition 2.1.14. Soient (M, ω) une variété symplectique et $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien. Dans le cas où M est fermée, H est dit **normalisé** si

$$\int_M H_t \omega^n = 0.$$

Dans le cas où M est ouverte (M n'est pas compact ou est compact avec bord), H est dit **normalisé** si son support

$$\text{supp}(H) := \overline{\bigcup_{t \in [0, 1]} \text{supp } H_t}$$

est compact et contenu à l'intérieur de M .

Soit H l'hamiltonien normalisé qui engendre un chemin hamiltonien λ . Alors, l'inverse de l'application $H \mapsto \lambda$ donnée par

$$\text{Dev} : \mathcal{P}(\text{Ham}(M, \omega), \text{id}_M) \rightarrow C^\infty(M); \quad \text{Dev}(\lambda) = H$$

est bien définie.

Dans le but de pouvoir bien définir des invariants symplectiques, nous aurons à considérer des classes d'homotopie de chemins hamiltoniens. Une **homotopie de chemins hamiltoniens** est une famille lisse à deux paramètres $\{\lambda_t^s\}_{s, t \in [0, 1]}$ telle que, pour un $s \in [0, 1]$ fixe quelconque, $\lambda^s : [0, 1] \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$ est un chemin hamiltonien. On note alors $H_\bullet^s := \text{Dev}(\lambda_\bullet^s)$ l'hamiltonien qui engendre le chemin hamiltonien λ^s .

Lors de la manipulation d'homotopies de chemins hamiltoniens, nous ferons souvent usage du lemme général suivant, dû à Banyaga [5]. La preuve que l'on donne suit l'exposition de Oh [20].

Lemme 2.1.15 ([5]). Soient M une variété lisse. Considérons X_t^s et Y_t^s deux familles lisses à deux paramètres de champs vectoriels sur M tels que

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^s = X_t^s \circ \varphi_t^s \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} \varphi_t^s = Y_t^s \circ \varphi_t^s$$

pour φ_t^s , une famille lisse à deux paramètres de difféomorphismes de M . Alors,

$$\frac{\partial}{\partial s} X_t^s = \frac{\partial}{\partial t} Y_t^s - [Y_t^s, X_t^s].$$

Démonstration. Puisque φ_t^s est lisse comme famille à deux paramètres, il suit que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times M &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times M \\ (s, t, x) &\longmapsto (s, t, \varphi_t^s(x)) \end{aligned}$$

est lisse. On peut donc fixer $x \in M$ et considérer l'application lisse

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times M \\ (s, t) &\longmapsto (s, t, \varphi_t^s(x)) \end{aligned} .$$

Sous φ , la base $\{\partial/\partial s, \partial/\partial t\}$ du tangent de \mathbb{R}^2 est donc envoyée à

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} \oplus Y_t^s, \frac{\partial}{\partial t} \oplus X_t^s \right\}.$$

Puisque $\varphi_*[-, -] = [\varphi_*-, \varphi_*-]$ et que $[\partial/\partial s, \partial/\partial t] = 0$, on a

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} \oplus Y_t^s, \frac{\partial}{\partial t} \oplus X_t^s \right] = 0.$$

Ainsi, par bilinéarité du crochet de Lie,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial}{\partial s} \oplus Y_t^s, \frac{\partial}{\partial t} \oplus X_t^s \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial s}, X_t^s \right] + \left[Y_t^s, \frac{\partial}{\partial t} \right] + [Y_t^s, X_t^s] \\ &= \frac{\partial}{\partial s} X_t^s - \frac{\partial}{\partial t} Y_t^s + [Y_t^s, X_t^s]. \end{aligned}$$

Le résultat désiré découle donc directement de la dernière égalité. ■

Dans le cas où $X_t^s = \text{sgrad } H_t^s$ et $Y_t^s = \text{sgrad } F_t^s$, le lemme 2.1.15 admet une traduction au niveau des familles à deux paramètres d'hamiltoniens H_t^s et F_t^s .

Lemme 2.1.16. Soient (M, ω) une variété symplectique et $\{\lambda_t^s\}$ une famille lisse à deux paramètres de difféomorphismes hamiltoniens. Alors, pour $H_t^s = \text{Dev}(\lambda_t^s)$ et $F_t^s = \text{Dev}(\lambda_t^{\bullet})$,

$$\frac{\partial H_t^s}{\partial s} = \frac{\partial F_t^s}{\partial t} + \{F_t^s, H_t^s\}.$$

Démonstration. Posons $X_t^s = \text{sgrad } H_t^s$ et $Y_t^s = \text{sgrad } F_t^s$. En vertu du lemme 2.1.15,

$$\frac{\partial}{\partial s} X_t^s = \frac{\partial}{\partial t} Y_t^s - [Y_t^s, X_t^s]. \quad (2.1.6)$$

De plus, selon le lemme 2.1.10,

$$[Y_t^s, X_t^s] = \text{sgrad } \{H_t^s, F_t^s\} = \text{sgrad } \{H_t^s, F_t^s\}.$$

Notons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} X_t^s \right) \lrcorner \omega = \frac{\partial}{\partial s} (X_t^s \lrcorner \omega) = -\frac{\partial}{\partial s} (dH_t^s) = -d\left(\frac{\partial H_t^s}{\partial s} \right),$$

donc $\frac{\partial}{\partial s} X_t^s = \text{sgrad } \frac{\partial H_t^s}{\partial s}$ et, de manière analogue, $\frac{\partial}{\partial t} Y_t^s = \text{sgrad } \frac{\partial F_t^s}{\partial t}$. Ainsi, l'équation (2.1.6) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s} X_t^s \right) \lrcorner \omega &= \left(\frac{\partial}{\partial t} Y_t^s \right) \lrcorner \omega - [Y_t^s, X_t^s] \lrcorner \omega \\ d\left(\frac{\partial H_t^s}{\partial s} \right) &= d\left(\frac{\partial F_t^s}{\partial t} \right) + d\{H_t^s, F_t^s\} \\ \frac{\partial H_t^s}{\partial s} &= \frac{\partial F_t^s}{\partial t} + \{H_t^s, F_t^s\} + c(s, t), \end{aligned}$$

où $c(s, t)$ est une fonction lisse qui ne dépend que de s et de t . Or, puisque H_t^s et F_t^s sont normalisés par définition, $\{H_t^s, F_t^s\}$ l'est aussi. Ainsi, $c(s, t) \equiv 0$. Ceci complète la preuve du lemme. ■

2.2. L'homomorphisme de Calabi

Considérons à présent une variété symplectique (M^{2n}, ω) ouverte, c'est-à-dire que M n'est pas compacte ou elle est compacte avec un bord ∂M non-vide. Un chemin $\lambda \in \mathcal{P}(\text{Ham}(M, \omega), \text{id}_M)$ est à **support compact** si l'hamiltonien $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$

qui génère λ a un support compact contenu dans l'intérieur de M . On note l'ensemble de ces chemins hamiltoniens $\mathcal{P}_c(\text{Ham}(M, \omega), \text{id}_M)$. On note $\text{Ham}_c(M, \omega)$ l'espace des difféomorphismes hamiltoniens donnés par l'application au temps 1 d'un chemin hamiltonien à support compact.

Soit λ un chemin hamiltonien et $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ l'hamiltonien à support compact qui l'engendre. Dans [7], Calabi introduit l'intégrale

$$\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}(\lambda) = \int_0^1 \int_M H_t \omega^{\wedge n} \wedge dt$$

qui, étant donné le support compact de H , ne dépend que de λ . Calabi démontre que $\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}$ est un homomorphisme non-trivial du revêtement universel $\widetilde{\text{Ham}}_c(M, \omega)$ de $\text{Ham}_c(M, \omega)$. Rappelons que les éléments de $\widetilde{\text{Ham}}_c(M, \omega)$ sont définis comme étant les classes d'équivalence de chemins hamiltoniens sous homotopies à bouts fixes.

Théorème 2.2.1. *L'application*

$$\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l} : \mathcal{P}_c(\text{Ham}(M, \omega), \text{id}_M) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie un homomorphisme non-trivial invariant sous homotopie à bouts fixes. En particulier, $\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}$ induit un homomorphisme non-trivial de $\widetilde{\text{Ham}}_c(M, \omega)$ noté $\widetilde{\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}}$.

La démonstration du théorème 2.2.1 est une conséquence directe des deux lemmes suivants et de la définition du revêtement universel de $\text{Ham}_c(M, \omega)$. Démontrons d'abord l'invariance sous homotopies à bouts fixes.

Lemme 2.2.2. *Soient λ_\bullet^0 et λ_\bullet^1 deux chemins hamiltoniens hamiltoniens homotopes tels que $\lambda_\bullet^0 = \text{id}_M = \lambda_\bullet^1$ et $\lambda_1^0 = \lambda_1^1$. Supposons que $\text{Dev}(\lambda_\bullet^0) = H^0$ et que $\text{Dev}(\lambda_\bullet^1) = H^1$. Alors,*

$$\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}(\lambda_\bullet^0) = \mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{l}(\lambda_\bullet^1).$$

Démonstration. Soit $\lambda_\bullet^s, s \in [0,1]$, l'homotopie entre λ_\bullet^0 et λ_\bullet^1 . Posons

$$H_\bullet^s = \text{Dev}(\lambda_\bullet^s) \quad \text{et} \quad F_t^\bullet = \text{Dev}(\lambda_t^\bullet).$$

On peut considérer $\{H_t^s\}$ et $\{F_t^s\}$ comme des familles à deux paramètres de fonctions lisses à support compact sur M . Suite à un reparamétrage en s , on peut supposer que

$H^{s_0} = H^0$ pour s_0 dans un petit voisinage de 0 et que $H^{s_1} = H^1$ pour s_1 dans un petit voisinage de 1. Il s'en suit que $F_t^s(x) \equiv 0$ pour s dans un voisinage assez petit de 0 et 1. De plus, en vertu du lemme 2.1.16,

$$\frac{\partial H_t^s}{\partial s} = \frac{\partial F_t^s}{\partial t} + \{F_t^s, H_t^s\}. \quad (2.2.1)$$

Il suffit de démontrer que

$$\frac{d}{ds} \mathfrak{Cal}(\lambda^s) = 0.$$

Pour ce faire, on utilise d'abord l'équation (2.2.1). On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathfrak{Cal}(\lambda^s) &= \int_0^1 \int_M \left(\frac{d}{ds} H_t^s \right) \omega^{\wedge n} \wedge dt \\ &= \int_0^1 \int_M \left(\frac{\partial F_t^s}{\partial t} + \{F_t^s, H_t^s\} \right) \omega^{\wedge n} \wedge dt \\ &= \int_0^1 \int_M \frac{\partial F_t^s}{\partial t} \omega^{\wedge n} \wedge dt + \int_0^1 \int_M \{F_t^s, H_t^s\} \omega^{\wedge n} \wedge dt \end{aligned}$$

D'une part, étant donné que $F_0^s = F_1^s$, on a

$$\int_0^1 \int_M \frac{\partial F_t^s}{\partial t} \omega^{\wedge n} \wedge dt = \int_M (F_1^s - F_0^s) \omega^{\wedge n} = 0.$$

D'autre part, selon l'équation (2.1.5) et le théorème de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_M \{F_t^s, H_t^s\} \omega^n \wedge dt &= \int_M d(\text{sgrad } H_t^s \lrcorner (F_t^s \omega^{\wedge n})) \\ &= \int_{\partial M} \text{sgrad } H_t^s \lrcorner (F_t^s \omega^{\wedge n}) = 0, \end{aligned}$$

car le support de H est contenu à l'intérieur de M . Les deux équations précédentes garantissent que $\frac{d}{ds} \mathfrak{Cal}(H) = 0$. ■

Démontrons ensuite que \mathfrak{Cal} agit bien comme un homomorphisme.

Lemme 2.2.3. *Soient λ_\bullet et λ'_\bullet deux chemins hamiltoniens tels que $\lambda_0 = \text{id}_M = \lambda'_0$.*

Alors,

$$\mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet \circ \lambda'_\bullet) = \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet) + \mathfrak{Cal}(\lambda'_\bullet).$$

Démonstration. Posons $H_\bullet = \text{Dev}(\lambda_\bullet)$ et $H'_\bullet = \text{Dev}(\lambda'_\bullet)$. En vertu de la proposition 2.1.5,

$$\text{Dev}(\lambda_\bullet \circ \lambda'_\bullet) = H_\bullet \# H'_\bullet := H_\bullet + H'_\bullet \circ (\varphi_\bullet^H)^{-1}.$$

Ainsi, par définition de \mathfrak{Cal} ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet \circ \lambda'_\bullet) &= \int_0^1 \int_M (H_t \# H'_t) \omega^{\wedge n} \wedge dt \\ &= \int_0^1 \int_M (H_t + H'_t \circ (\varphi_t^H)^{-1}) \omega^{\wedge n} \wedge dt \\ &= \int_0^1 \int_M H_t \omega^{\wedge n} \wedge dt + \int_0^1 \int_M H'_t \circ (\varphi_t^H)^{-1} \omega^{\wedge n} \wedge dt \\ &= \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet) + \int_0^1 \int_M H'_t \circ (\varphi_t^H)^{-1} \omega^{\wedge n} \wedge dt \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Pour réduire la dernière intégrale, notons d'abord qu'étant donné que $(\varphi_\bullet^H)^{-1}$ est une isotopie hamiltonienne, $(\varphi_t^H)^* \omega = \omega$, donc $(\varphi_t^H)^* \omega^{\wedge n} = \omega^{\wedge n}$ pour tout t , d'où

$$\int_M H'_t \circ (\varphi_t^H)^{-1} \omega^{\wedge n} = \int_{(\varphi_t^H)^{-1}(M)} H'_t (\varphi_t^H)^* \omega^{\wedge n} = \int_M H'_t \omega^{\wedge n}$$

Ainsi, l'équation (2.2.2) prend la forme

$$\mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet \circ \lambda'_\bullet) = \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet) + \int_0^1 \int_M H'_t \omega^{\wedge n} \wedge dt = \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet) + \mathfrak{Cal}(\lambda'_\bullet)$$

qui correspond au résultat désiré. ■

2.2.1. Variétés symplectiques exactes et \mathfrak{Cal}

En général, $\widetilde{\mathfrak{Cal}}$ ne peut être descendu à un homomorphisme défini sur Ham_c . Dans [16], Kislev trouve plusieurs exemples de variétés symplectiques non-exactes sur lesquelles il existe un lacet hamiltonien pour lequel $\widetilde{\mathfrak{Cal}}$ est non-nul. Un des cas où $\widetilde{\mathfrak{Cal}}$ peut être descendu à un homomorphisme défini sur Ham_c est celui des variétés symplectique exactes.

Soit (M, ω) une variété symplectique exacte. Rappelons que M est nécessairement ouverte et que, par définition, il existe une forme de degré un $\alpha \in \Omega^1(M)$ telle que

$\omega = d\alpha$. Dans ce cas, Banyaga a démontré que l'homomorphisme de Calabi prend une forme bien particulière.

Théorème 2.2.4 ([5]). *Soit $(M^{2n}, d\alpha)$ une variété symplectique exacte. Considérons un difféomorphisme hamiltonien $\varphi \in \text{Ham}_c(M, d\alpha)$ et λ le chemin hamiltonien qui engendre φ . Alors,*

$$\mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet) = -\frac{1}{n+1} \int_M \varphi^* \alpha \wedge \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1}.$$

Le théorème 2.2.4 assure alors que $\mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet)$ ne dépend que du difféomorphisme hamiltonien $\varphi = \lambda_1$. Nous obtenons donc directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.5. *Soit $(M^{2n}, d\alpha)$ une variété symplectique exacte. Alors, $\widetilde{\mathfrak{Cal}}$ descend à un homomorphisme non-trivial*

$$\mathfrak{Cal} : \text{Ham}_c(M, d\alpha) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Avant de démontrer le théorème 2.2.4, nous établissons quelques résultats préliminaires. Considérons un difféomorphisme hamiltonien à support compact $\varphi \in \text{Ham}_c(M, d\alpha)$ et définissons la forme différentielle de degré un

$$\beta := \varphi^* \alpha - \alpha.$$

Puisque φ a support compact, $\beta \equiv 0$ près de ∂M . De plus, étant donné que $\varphi^* \omega = \omega$, β est fermée. Notons λ_\bullet le chemin hamiltonien générant φ , c'est-à-dire que

$$\lambda_0 = \text{id}_M, \quad \lambda_t = \varphi_t^H =: \varphi_t \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \varphi$$

pour une fonction hamiltonienne à support compact $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Le chemin hamiltonien λ_\bullet engendre une famille de formes différentielles de degré un

$$\beta_t := \varphi_t^* \alpha - \alpha,$$

qui est fermée, car $\varphi_t^* \omega = \omega$, et a support compact puisque $\varphi_t = \text{id}_M$ près de ∂M .

Suite à des calculs directs, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \beta_t = d(\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) - \varphi_t^* H_t) \tag{2.2.3}$$

et

$$\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) \omega^{\wedge n} = \varphi_t^*(-nH_t \omega^{\wedge n} + d(nH_t \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1})). \quad (2.2.4)$$

Démonstration. [Théorème 2.2.4] Selon la notation établie lors de la discussion précédente,

$$\begin{aligned} \int_M \beta \wedge \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} &= \int_M \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \beta_t dt \right) \wedge \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} \\ &= \int_0^1 \left(\int_M d(\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) - \varphi_t^* H_t) \wedge \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_M (\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) - \varphi_t^* H_t) d\alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \int_M (\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) - \varphi_t^* H_t) \omega^{\wedge n} \wedge dt \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de l'équation (2.2.3). Selon l'équation (2.2.4),

$$\begin{aligned} (\varphi_t^*(\text{sgrad } H \lrcorner \alpha) - \varphi_t^* H_t) \omega^{\wedge n} &= \varphi_t^*(-nH_t \omega^{\wedge n} + d(nH_t \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1})) - \varphi_t^*(H_t) \omega^{\wedge n} \\ &= -(n+1)\varphi_t^*(H_t) \omega^{\wedge n} + d(nH_t \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1}). \end{aligned}$$

Or, en vertu du théorème de Stokes et puisque $\text{supp } H$ est contenu à l'intérieur de M ,

$$\int_M d(nH_t \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1}) = \int_{\partial M} nH_t \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} = 0.$$

On retrouve alors

$$\int_M \beta \wedge \alpha \wedge \omega^{\wedge n-1} = -(n+1) \int_0^1 \int_M \varphi_t^*(H_t) \omega^{\wedge n} \wedge dt = -(n+1) \mathcal{C}al(\lambda.)$$

tel que désiré. ■

2.2.2. Interprétation géométrique de $\mathcal{C}al$: le cas du disque

En général, il est difficile de donner une interprétation géométrique simple de l'homomorphisme de Calabi. Un des cas où une telle interprétation est connue est celui du disque \mathbb{D}^2 . Cette dernière fut élaborée par Fathi dans le contexte de sa thèse [13]

et étudiée d'avantage par Gambaudo et Ghys [14]. Dans ces ouvrage, $\mathcal{C}al$ est interprété plus généralement comme un homomorphisme du groupe des difféomorphismes de \mathbb{D}^2 de classe C^1 préservant l'aire. Afin de rester bref, nous discuterons ici du cas particulier des difféomorphismes hamiltoniens de \mathbb{D}^2 à support compacte.

Considérons le disque unité $\mathbb{D}^2 = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid |p|^2 + |q|^2 \leq 1\}$ muni de la forme symplectique standard $\omega = dp \wedge dq$. Étant donné que ω est exacte, le corollaire 2.2.5 nous assure que $\widetilde{\mathcal{C}al}$ descend à un homomorphisme non-trivial

$$\mathcal{C}al : \text{Ham}_c(\mathbb{D}^2, \omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Soit le difféomorphisme hamiltonien $\varphi \in \text{Ham}_c(\mathbb{D}^2, \omega)$ tel que $\varphi = \varphi_1^H$ pour l'isotopie hamiltonienne φ_t^H engendrée un hamiltonien $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ à support compacte. Pour deux points distincts $x, y \in \mathbb{D}^2$, définissons $v_{\varphi_t}(x, y)$ comme étant le vecteur non-nul joignant $\varphi_t^H(x)$ à $\varphi_t^H(y)$. Notons $\text{Ang}_\varphi(x, y)$ l'angle balayé par $v_{\varphi_t}(x, y)$ lorsque t varie de 0 à 1. Puisque $\text{Ang}_\varphi(x, y)$ n'est pas bien définie nous obtenons une fonction

$$\text{Ang}_\varphi : X_2(\mathbb{D}^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

où $X_2(\mathbb{D}^2)$ est donné par le produit $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ duquel on retire la diagonale. Fathi démontre alors l'égalité suivante.

Théorème 2.2.6 ([13]). *Soit $\varphi \in \text{Ham}_c(\mathbb{D}^2, \omega)$. Soit μ_ω la mesure sur \mathbb{D}^2 induite par la forme d'aire ω . Notons $dx dy$ la mesure $\mu_\omega \otimes \mu_\omega$ induite sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$. Alors,*

$$2\mathcal{C}al(\varphi) = \iint_{X_2(\mathbb{D}^2)} \text{Ang}_\varphi(x, y) dx dy$$

comme homomorphisme de $\text{Ham}_c(\mathbb{D}^2, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour une démonstration du théorème 2.2.6 voir [13], [14] ou [23] qui n'utilise que des méthodes d'analyse complexe.

L'égalité offerte par le théorème 2.2.6 nous permet donc d'interpréter, dans le cas de \mathbb{D}^2 , $\mathcal{C}al(\varphi)$ comme le nombre de tours moyen de l'isotopie hamiltonienne qui engendre φ .

2.2.3. Variétés symplectiques fermées et $\mathcal{C}al$

Jusqu'à présent, nous avons seulement étudié l'homomorphisme de Calabi dans le contexte des variétés symplectiques ouvertes. On peut alors se demander en quoi cette hypothèse est utile. La réponse à cette question repose dans le théorème suivant dû à Banyaga [5].

Théorème 2.2.7 ([5]). *Soit (M, ω) une variété symplectique fermée. Alors, $\text{Ham}(M, \omega)$ est un groupe simple.*

Ainsi, dans le cas où (M, ω) est fermée, tout homomorphisme de $\text{Ham}(M, \omega)$ dans \mathbb{R} doit être trivial. Il n'y a donc pas d'intérêt à étudier $\mathcal{C}al$ d'une manière globale sur une variété symplectique fermée. Malgré cela, il est possible, dans certains cas, de construire un invariant global dont la restriction à certains ouverts de M est égale à l'homomorphisme de Calabi. La construction d'un tel invariant, appelé **quasimorphisme de Calabi** fut donnée initialement par Entov et Polterovich [12].

Considérons une variété symplectique (M, ω) fermée et notons $\mathcal{G} = \text{Ham}(M, \omega)$. À chaque ouvert $U \subset M$ non-vidé, il est possible d'associer un sous-groupe de \mathcal{G} noté \mathcal{G}_U . Le sous-groupe \mathcal{G}_U est constitué des difféomorphismes hamiltoniens $\varphi \in \mathcal{G}$ engendrés par un hamiltonien $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un support compris dans U . Notons

$$\mathcal{C}al_U : \mathcal{G}_U \rightarrow \mathbb{R}$$

la restriction de l'homomorphisme de Calabi à \mathcal{G}_U . Un **quasimorphisme** sur \mathcal{G} est une fonction $q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$,

$$|q(\varphi \circ \psi) - q(\varphi) - q(\psi)| \leq R \tag{2.2.5}$$

pour une certaine constante $R > 0$. En d'autres termes, un quasimorphisme est une fonction qui respecte la formule définissant un homomorphisme à un terme d'erreur R près. Un quasimorphisme q est dit **homogène** si $q(\varphi^m) = mq(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{G}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Les ouverts qui sont d'intérêt ici sont ceux qui peuvent être **disjoint** d'eux-même par un difféomorphisme hamiltonien, c'est-à-dire les ouverts $U \subset M$ non-vides pour lesquels il existe $\varphi \in \mathcal{G}$ tel que $\varphi(U) \cap \bar{U} = \emptyset$. Notons \mathcal{D} la classe des ouverts ayant cette propriété et sur lesquels ω est exacte.

Entov et Polterovich construisent dans [12] des quasimorphismes homogènes $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sur, entre autres, \mathbb{S}^2 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, et $\mathbb{C}P^n$ qui, lorsque restreints à un ouvert $U \in \mathcal{D}$, coïncident avec $\mathcal{C}al_U$. Avec une construction différente de celle donnée par Entov et Polterovich, Py [22] fut en mesure de construire ces mêmes quasimorphismes sur les surfaces fermées de genre ≥ 1 . Il est intéressant de noter que les quasimorphismes homogènes construits par Py coïncident, plus généralement, avec $\mathcal{C}al_U$ sur les ouverts U difféomorphes au disque.

Nous référons la lectrice ou le lecteur au texte d'Entov [11] pour une revue de littérature complète au sujet des quasimorphismes de Calabi.

Chapitre 3

Chemins lagrangiens et fonctionnelle de Solomon

Étant donné une variété symplectique (M, ω_M) , rappelons que nous pouvons munir la variété produit $M \times M$ de la forme $\omega = -\omega_M \oplus \omega_M$ de sorte à ce que la paire $(M \times M, \omega)$ soit à son tour une variété symplectique. La proposition 1.4.5 montre qu'à tout chemin hamiltonien λ_\bullet , on peut associer une famille de sous-variétés lagrangiennes $\Lambda_\bullet = \{\Lambda_t\}_{t \in [0,1]}$ de $M \times M$ générée par les graphes des difféomorphismes hamiltoniens donnés par λ_\bullet :

$$\Lambda_t = \{(x, \lambda_t(x)) \mid x \in M\} \subset M \times M.$$

Cette correspondance nous mène à croire que l'homomorphisme de Calabi provient en fait d'un invariant plus général défini sur les familles de sous-variétés lagrangiennes. Ce chapitre traite de la construction de cet invariant qui fut donnée par Solomon dans [24].

3.1. Chemins lagrangiens

Ce paragraphe est dédié à la notion de chemin lagrangien telle qu'introduite par Akveld et Salamon dans [1] et étendue par Solomon dans [24].

Considérons une variété symplectique générale (M^{2n}, ω) et L^n une variété orientée. Dans le cas où L est compacte, notons $\mathcal{X}(M, L, d)$ l'espace des plongements lagrangiens de L dans M qui représentent la classe d'homologie $d \in H_n(M)$:

$$\mathcal{X}(M, L, d) := \{\iota : L \hookrightarrow M \mid \iota^* \omega = 0, [\iota(L)] = d \in H_n(M)\}.$$

Dans le cas où L est non-compacte, on impose aussi qu'il existe $\iota_0 \in \mathcal{X}$ tel que tout $\iota \in \mathcal{X}$ coïncident avec ι_0 à l'extérieur d'un certain sous-ensemble compact de L .

Le groupe $\text{Diff}(L)$ des difféomorphismes de L agit sur \mathcal{X} par le biais de l'action

$$\begin{aligned} \text{Diff}(L) \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ (\varphi, \iota) &\longmapsto \iota \circ \varphi \end{aligned}$$

Alors, le quotient

$$\mathcal{L}(M, L, d) := \mathcal{X}/\text{Diff}(L)$$

peut être identifié à un sous espace des variétés lagrangiennes de M difféomorphes à L . La classe d'équivalence $\Lambda = [\iota] \in \mathcal{L}$ d'un plongement lagrangien $\iota : L \hookrightarrow M$ est identifiée à l'image $\iota(L) \subset M$ de ce dernier. L'espace \mathcal{L} peut être interprété comme une variété de dimension infinie.

Définition 3.1.1. Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique, $L^n \subset M$ une sous-variété orientée et Θ une variété à coins contractile. Une application $\Lambda : \Theta \rightarrow \mathcal{L}(M, L, d)$ est dite **lisse** si elle se relève à une fonction lisse $h : \Theta \rightarrow \mathcal{X}(M, L, d)$ telle que le diagramme suivante commute

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{X} \\ & \nearrow h & \downarrow \\ \Theta & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{L} \end{array}$$

Dans le cas où $\Theta = [0,1]$, $\Lambda = \{\Lambda_t\}_{t \in [0,1]}$ est appelée **chemin lagrangien** et dans le cas où $\Theta = [0,1]^2$, $\Lambda = \{\Lambda_{t,s}^s\}_{t,s \in [0,1]}$ est appelée **homotopie de chemins lagrangiens**.

Nous aurons besoin d'étudier le champ vectoriel tangent $\frac{d}{dt} \Lambda_t$ à un chemin lagrangien Λ_\bullet . Dans cette optique, le lemme suivant nous permettra de mieux visualiser l'espace tangent à \mathcal{L} en un point Λ_t pour t fixe.

Lemme 3.1.2 ([1]). Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique et $L^n \subset M$ une sous-variété orientée. Alors, pour $\Lambda \in \mathcal{L}(M, L, d)$,

$$T_\Lambda \mathcal{L} \simeq \{\beta \in \Omega^1(\Lambda) \mid d\beta = 0\}.$$

Le lemme 3.1.2 permet de définir le champ de vecteur tangent à un chemin lagrangien comme suit. Soit Λ_\bullet un chemin lagrangien. Par définition, il existe une application lisse $\iota : [0,1] \rightarrow \mathcal{X}$ telle que $\iota_t(L) = \Lambda_t$ pour tout $t \in [0,1]$. Définissons le champ vectoriel le long de ι_t par

$$v_t := \frac{d}{dt} \iota_t \in C^\infty(L, \iota_t^* TM)$$

et définissons la forme différentielle de degré 1 sur L

$$\alpha_t := \iota_t^*(v_t \lrcorner \omega) \in \Omega^1(L).$$

La dérivée au temps t de Λ_t est alors définie par

$$\frac{d}{dt} \Lambda_t := (\iota_t)_* \alpha_t$$

Il peut être démontré que la forme $(\iota_t)_* \alpha_t$ de degré 1 sur Λ_t est fermée et qu'elle ne dépend pas du choix du relèvement ι_t . Ainsi, la définition de $\frac{d}{dt} \Lambda_t$ concorde bel et bien avec la description de $T_{\Lambda_t} \mathcal{L}$ donnée au lemme 3.1.2.

La dérivée des chemins lagrangiens admet une généralisation directe aux familles de lagrangiennes lisses $\Lambda : \Theta \rightarrow \mathcal{L}$, où Θ est une variété à coins contractile. Soient $\xi \in T_\theta \Theta$ et $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Theta$ un chemin lisse tel que $\gamma(0) = \theta$. La dérivée de Λ dans la direction ξ est alors définie par

$$d\Lambda_\theta(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \Lambda_{\gamma(t)} \right|_{t=0} \in \Omega^1(\Lambda_\theta).$$

La description de la dérivée d'une famille de lagrangiennes donnée au cours de la précédente discussion nous permet d'établir la définition suivante.

Définition 3.1.3. Une famille de lagrangiennes $\Lambda : \Theta \rightarrow \mathcal{L}$ est dite **exacte** si, pour tout $\theta \in \Theta$ et $\xi \in T_\theta\Theta$, il existe une fonction lisse $h : \Lambda_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$d\Lambda_\theta(\xi) = -dh(\xi).$$

De plus, si les fonctions h sont à support compact, on dit que la famille Λ est elle aussi à **support compact**.

Étant donné un chemin lagrangien Λ_\bullet , il est naturel de se demander sous quelles conditions ce dernier peut s'écrire comme l'image, sous un chemin hamiltonien, d'une certaine lagrangienne initiale Λ_0 . La notion d'exactitude permet de répondre à cette question.

Lemme 3.1.4 ([1]). *Soient Λ_\bullet un chemin lagrangien et $\lambda_\bullet = \varphi_\bullet^H$ un chemin hamiltonien dans $\text{Ham}(M, \omega)$ avec $\lambda_0 = \text{id}_M$ généré par un hamiltonien $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, pour tout t ,*

$$\varphi_t(\Lambda_0) = \Lambda_t \quad \text{si et seulement si} \quad \left. \frac{d}{dt} \Lambda_t = -dH_t \right|_{\Lambda_t}.$$

3.2. Fonctionnelle de Solomon

Considérons les variétés (M, ω) et $L \subset M$ de la section précédente. Soit $\beta \in \Omega^n(M)$ une forme différentielle de degré n fermée sur M telle que

$$\beta \wedge \omega = 0.$$

Soit $\Lambda_\bullet = \{\Lambda_t\}_{t \in [0,1]}$ un chemin lagrangien exact dans $\mathcal{L}(M, L, d)$ ayant comme famille d'hamiltoniens associée $H_\bullet = \{H_t\}_{t \in [0,1]}$. Dans le cas où L est non-compact, supposons que H_\bullet soit à support compact. Dans le cas où L est compact supposons que la condition de normalisation

$$\int_d \beta = 0$$

tienne. Solomon définit dans [24] la fonctionnelle

$$\mathfrak{C}(\Lambda_\bullet) = \int_0^1 dt \int_{\Lambda_t} H_t \beta$$

et démontre les deux théorèmes suivants .

Théorème 3.2.1 ([24]). *Soit Λ_\bullet un chemin lagrangien dans $\mathcal{L}(M, L, d)$. Alors, $\mathfrak{C}(\Lambda_\bullet)$ ne dépend que de la classe d'homotopies à bouts fixes de Λ_\bullet .*

Théorème 3.2.2 ([24]). *Supposons qu'il existe des formes $\theta \in \Omega^1(M)$ et $\gamma \in \Omega^{n-1}(M)$ et une constante $c \neq -1$ telles que*

$$d\theta = \omega, \quad d\gamma = \beta \quad \text{et} \quad \theta \wedge \beta = -c\omega \wedge \gamma.$$

Alors, pour un chemin lagrangien θ_\bullet dans $\mathcal{L}(M, L, d)$,

$$\mathfrak{C}(\theta_\bullet) = \frac{1}{c+1} \left(\int_{\theta_0} \theta \wedge \gamma - \int_{\theta_1} \theta \wedge \gamma \right).$$

Remarque 3.2.3. Les conditions du théorème 3.2.2 peuvent se manifester dans le cas des variétés symplectiques exactes. Supposons que (M, ω) soit exacte avec $\omega = d\theta$ et notons $\xi \in \mathcal{X}(M)$ le champ de vecteur de Liouville associé à θ :

$$\xi \lrcorner \omega = \theta.$$

Alors, dans le cas où il existe une constante $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ telle que

$$\mathcal{L}_\xi \beta = c\beta,$$

la forme $\gamma = \frac{1}{c}(\xi \lrcorner \beta)$ satisfait aux conditions du théorème 3.2.2. En effet, en vertu de la formule magique de Cartan, on a

$$d\gamma = \frac{1}{c} d(\xi \lrcorner \beta) = \frac{1}{c} (\mathcal{L}_\xi \beta - \xi \lrcorner d\beta) = \frac{1}{c} \mathcal{L}_\xi \beta = \beta$$

et puisque $\omega \wedge \beta = 0$,

$$0 = \xi \lrcorner (\omega \wedge \beta) = (\xi \lrcorner \omega) \wedge \beta + \omega \wedge \xi \lrcorner \beta = \theta \wedge \beta + c\omega \wedge \gamma$$

tel que désiré.

Fixons $\Lambda_* \in \mathcal{L}(M, L, d)$ et notons $\mathcal{O} \subset \mathcal{L}(M, L, d)$ l'orbite de Λ_* sous $\text{Ham}_c(M, \omega)$. Le revêtement universel $\tilde{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} est constitué des classes d'homotopies

à bouts fixes des chemins dans \mathcal{O} débutant à Λ_* . Le théorème 3.2.1 implique alors directement que

$$\mathfrak{C} : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une fonctionnelle bien définie. Dans le cas où les hypothèses du théorème 3.2.2 tiennent, $\mathfrak{C}(\Lambda_\bullet)$ ne dépend que du point de départ Λ_0 et de fin Λ_1 de Λ_\bullet et descend alors à une fonctionnelle

$$\mathfrak{C} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 sont donc respectivement des analogues des théorèmes 2.2.1 et 2.2.4. Ici, \mathcal{O} prend la place de $\text{Ham}_c(M, \omega)$. Cette analogie est justifiée par le fait qu'étant donné un choix judicieux de la forme β , \mathfrak{C} correspond à l'homomorphisme de Calabi.

Considérons une variété symplectique (M, ω_M) et un chemin hamiltonien λ_\bullet dans $\text{Ham}(M, \omega_M)$ tel que $\lambda_0 = \text{id}_M$ de sorte à ce que $\lambda_t = \varphi_t$ pour une isotopie hamiltonienne φ_\bullet . Munissons $M \times M$ de la forme symplectique $\omega = -\omega_M \oplus \omega_M$ et notons $p_1 : M \times M \rightarrow M$ et $p_2 : M \times M \rightarrow M$ les projections sur le premier et le deuxième facteur respectivement. Afin de définir \mathfrak{C} , il faut trouver une forme $\beta \in \Omega^n(M \times M)$ telle que $\beta \wedge \omega = 0$. Dans cette optique, posons

$$\beta = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i}.$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \beta \wedge \omega &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i} \wedge p_1^* \omega_M - p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i} \wedge p_2^* \omega_M) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (p_1^* \omega_M^{i+1} \wedge p_2^* \omega_M^{n-i} - p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} (p_1^* \omega_M^{n+1} - p_2^* \omega_M^{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\omega_M^{n+1} \in \Omega^{2n+2}(M)$ et $2n+2 > 2n = \dim M$, donc $\omega_M^{n+1} = 0$. Considérons à présent le chemin lagrangien Λ_\bullet dans $\mathcal{L}(M \times$

M, M) engendré par φ_\bullet :

$$\Lambda_t = \{(x, \varphi_t(x)) \mid x \in M\} \subset M \times M.$$

Notons $H : [0,1] \times M \rightarrow M$ l'hamiltonien normalisé qui engendre φ_\bullet et définissons

$$h_t = H_t \circ p_2 \Big|_{\Lambda_t}.$$

Étant donné que id_M est engendré par les hamiltoniens constants sur M ,

$$\frac{d}{dt} \Lambda_t = -dh_t.$$

Nous avons donc, par construction,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\Lambda_\bullet) &= \int_0^1 dt \int_{\Lambda_t} h_t \beta \\ &= \int_0^1 dt \int_M (\text{id}_M \times \varphi_t)^*(h_t \beta) = \int_0^1 dt \int_M H_t \omega^n = \mathfrak{Cal}(\lambda_\bullet). \end{aligned}$$

Vérifions à présent que, dans le cas où (M, ω_M) est exacte avec $\omega_M = d\theta_M$, on retrouve bel et bien l'expression de \mathfrak{Cal} donnée au théorème 2.2.4. Soit $\xi_M \in \mathcal{X}(M)$ le champ vectoriel de Liouville associé à θ_M et posons

$$\theta = -p_1^* \theta_M + p_2^* \theta_M$$

de sorte à avoir $d\theta = \omega$. Le champ vectoriel de Liouville associé à θ correspond alors à l'unique champ vectoriel $\xi \in \mathcal{X}(M \times M)$ tel que

$$p_{i*} \circ \xi = (-1)^i \xi_M \circ p_i$$

pour $i \in \{1,2\}$. On a donc, par définition de β et puisque $d\omega_M = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \beta &= d(\xi \lrcorner \beta) \\ &= \frac{1}{n+1} d \sum_{i=0}^n ((\xi \lrcorner p_1^* \omega_M^i) \wedge p_2^* \omega_M^{n-i} + p_1^* \omega_M^i \wedge (\xi \lrcorner p_2^* \omega_M^{n-i})). \end{aligned}$$

Par définition de β ,

$$\begin{aligned}\xi \lrcorner p_j^* \omega_M^k &= (-1)^j p_j^* (\xi_M \lrcorner \omega_M^k) \\ &= k(-1)^j p_j^* ((\xi_M \lrcorner \omega_M) \wedge \omega_M^{k-1}) = k(-1)^j p_j^* (\theta_M \wedge \omega_M^{k-1})\end{aligned}$$

pour $j \in \{1,2\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, d'où

$$\xi \lrcorner \beta = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i-1} \wedge ((i+1)p_1^* \theta_M + (n-i)p_2^* \theta_M)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi \beta &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i-1} \wedge ((i+1)p_1^* d\theta_M + (n-i)p_2^* d\theta_M) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i-1} \wedge ((i+1)p_1^* \omega_M + (n-i)p_2^* \omega_M) \\ &= \frac{n}{n+1} \sum_{i=0}^n p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i} = n\beta.\end{aligned}$$

En posant $\gamma = \frac{1}{n} \xi \lrcorner \beta$, on a

$$\theta \wedge \gamma = -\frac{1}{n} p_1^* \theta_M \wedge p_2^* \theta_M \wedge \sum_{i=0}^{n-1} p_1^* \omega_M^i \wedge p_2^* \omega_M^{n-i-1}$$

et on peut finalement utiliser le théorème 3.2.2 pour obtenir

$$\mathfrak{C}([\lambda_\bullet]) = -\frac{1}{n+1} \int_{\theta_1} \theta \wedge \gamma = -\frac{1}{n+1} \int_{\theta_1} p_1^* \theta_M \wedge \theta_M \wedge \omega_M^{n-1} = \mathfrak{Cal}([\varphi_\bullet])$$

tel que désiré.

3.2.1. Points critiques de \mathfrak{C} et géométrie calibrée

Afin de démontrer le théorème 3.2.1, Solomon calcule et utilise la première variation de \mathfrak{C} . Étant donné une homotopie $\{\Lambda_\bullet^s\}_{s \in [0,1]}$ de chemins lagrangiens exactes à support compact avec $\Lambda_0^s = \Lambda_0$ et une famille de fonctions $H_s : \Lambda_1^s \rightarrow \mathbb{R}$ à support compact telles que $\frac{d}{ds} \Lambda_1^s = -dH_s$,

$$\frac{d}{ds} \mathfrak{C}(\Lambda_\bullet^s) = \int_{\Lambda_1^s} H_s \beta. \quad (3.2.1)$$

Une fois cette formule en main, il est naturel de se demander quels sont les points critiques de \mathfrak{C} . Ces derniers sont définis comme étant les chemins hamiltoniens Λ_\bullet pour lesquels

$$\left. \frac{d}{ds} \mathfrak{C}(\Lambda_\bullet^s) \right|_{s=0} = 0$$

peut importe la déformation hamiltonienne $\varphi_s(\Lambda_\bullet) = \Lambda_\bullet^s$ gardant Λ_0 fixe choisit.

Lemme 3.2.4 ([24]). *Un chemin lagrangien Λ_\bullet dans $\mathcal{L}(M, L, d)$ est un point critique de \mathfrak{C} si et seulement si $\beta|_{\Lambda_1} = 0$.*

Démonstration. Soit $\{\Lambda_\bullet^s\}_{s \in [0,1]}$ une homotopie de chemins lagrangiens exacts à support compact qui fixe Λ_0 et soit $H_s : \Lambda_1^s \rightarrow \mathbb{R}$ la famille de fonctions à support compact pour laquelle $\frac{d}{ds} \Lambda_1^s = dH_s$. En vertu de la formule (3.2.1), Λ_\bullet est un point critique de \mathfrak{C} si et seulement si

$$\left. \frac{d}{ds} \mathfrak{C}(\Lambda_\bullet^s) \right|_{s=0} = \int_{\Lambda_1} H_0 \beta = 0$$

et ce peut importe le choix de l'homotopie Λ_\bullet^s . Ainsi, puisque cette homotopie est engendrée par H_s , l'égalité doit tenir pour toute fonction H_0 . Ceci est possible si et seulement si β est identiquement nulle sur Λ_1 . ■

Dans le contexte où M est une variété presque Calabi-Yau, Solomon démontre que les points critiques de \mathfrak{C} correspondent aux chemins lagrangiens Λ_\bullet pour lesquels Λ_1 est une sous-variété lagrangienne spéciale. Les lagrangiennes spéciales apparaissent naturellement dans le contexte des géométries calibrées développées par Harvey et Lawson dans [15].

Définition 3.2.5. Soit (M^n, g) une variété Riemannienne et soit une forme fermée $\rho \in \Omega^p(M)$ pour $p \leq n$. On dit que ρ est une **calibrage** si, pour tout plan P de dimension p dans TM ,

$$\rho|_P \leq \text{vol}_P,$$

où vol_P est la forme volume induite par g sur P . Une sous-variété N^p de M^n est dite **calibrée** si

$$\rho|_N = \text{vol}_N .$$

Un des aspects attrayant des sous-variété compactes calibrées est qu'elles minimisent le volume dans leur classe d'homologie.

Lemme 3.2.6. *Soient (M^n, g) une variété riemannienne, $\rho \in \Omega^p(M)$ un calibrage et N^p une sous-variété compacte calibrée de M^n . Alors, si $[N'] = [N] \in H_p(M)$, $\text{vol}(N) \leq \text{vol}(N')$.*

Démonstration. Puisque N est calibrée,

$$\text{vol}(N) = \int_N \text{vol}_N = \int_N \rho .$$

De plus, puisque N et N' sont homologues et que $d\rho = 0$, le théorème de Stokes nous assure que

$$\int_N \rho = \int_{N'} \rho .$$

Finalement, puisque ρ est un calibrage,

$$\int_{N'} \rho \leq \int_{N'} \text{vol}_N = \text{vol}(N') .$$

Des trois équations précédentes il suit que $\text{vol}(N) \leq \text{vol}(N')$. ■

Une variété presque Calabi-Yau de dimension $2n$ est une variété Kählerienne munie d'une forme holomorphe de degré n non-nulle. La partie réelle de cette forme holomorphe définit un calibrage pour un choix judicieux de métrique riemannienne. Avant d'entrer dans les détails, rappelons la définition d'une variété Kählerienne.

Définition 3.2.7. Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique. S'il existe, sur M , une structure presque complexe intégrable J compatible avec ω , on dit que le triplet (M, ω, J) est une **variété Kählerienne**. Dans le cas où il existe une forme holomorphe $\Omega \in \Omega^{(n,0)}(M)$ nulle part nulle, on dit que $(M^{2n}, \omega, J, \Omega)$ est une **variété presque Calabi-Yau**.

Soit $(M^{2n}, \omega, J, \Omega)$ une variété presque Calabi-Yau et $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse donnée par l'équation

$$\frac{\omega^n}{n!} = e^{-\tau} (-1)^{n(n-1)/2} (i/2)^n \Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

Alors, puisque J est compatible avec ω ,

$$g(\xi, \eta) := e^{\tau/n} \omega(\xi, J\eta)$$

définit une métrique riemannienne sur M . Harvey et Lawson ont démontré que $\text{Re } \Omega$ définit un calibrage sur (M, g) et que pour toute sous-variété lagrangienne L de M , il existe une fonction lisse $\vartheta : L \rightarrow \mathbb{S}^1$, appelée **angle lagrangien**, telle que

$$\Omega|_L = e^{i\vartheta} \text{vol}_{L,g}, \quad (3.2.2)$$

où $\text{vol}_{L,g}$ est la forme volume induite par g sur L .

Définition 3.2.8. Soit $(M^{2n}, \omega, J, \Omega)$ une variété presque Calabi-Yau. Une sous-variété lagrangienne L de M est dite **spéciale** si l'angle lagrangien qui lui est associé est constant.

Soit L une sous-variété Lagrangienne spéciale de M et ϑ_0 l'angle lagrangien constant qui lui est associé. Alors, suite à la normalisation

$$\Omega|_L \rightarrow e^{-i\vartheta_0} \Omega|_L.$$

et en vertu de l'équation 3.2.2, L est calibrée selon le calibrage $\text{Re } \Omega$. Le fait que L soit une lagrangienne spéciale est donc équivalent à

$$\text{Im } \Omega|_L = 0.$$

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour éclaircir le lien entre la fonctionnelle de Solomon et les lagrangiennes spéciales. Fixons une sous-variété lagrangienne quelconque $L \subset M$. Rappelons d'abord que pour définir \mathfrak{C} il faut trouver une forme fermée $\beta \in \Omega^n(M)$ pour laquelle $\beta \wedge \omega = 0$ et $\int_d \beta = 0$ pour

$d = [L] \in H_n(M)$. À cette fin, posons

$$\beta = \operatorname{Im} \Omega.$$

Puisque $\Omega \in \Omega^{(n,0)}(M)$ et que $\omega \in \Omega^{(1,1)}(M)$, $\omega \wedge \beta = 0$. De plus, pour satisfaire la condition de normalisation, il suffit de multiplier Ω par une constante complexe de module 1. Le lemme 3.2.4 nous assure alors qu'un chemin lagrangien Λ_\bullet sera un point critique de \mathfrak{C} si et seulement si $\operatorname{Im} \Omega|_{\Lambda_1} = 0$. Or, d'après la discussion précédente, ceci se produit si et seulement si Λ_1 est une sous-variété lagrangienne spéciale de M .

Chapitre 4

Cobordismes lagrangiens et extension de la fonctionnelle de Solomon

Soit Λ_\bullet un chemin lagrangien exact engendré par une famille de fonctions hamiltoniennes H_\bullet normalisée. L'image du plongement lagrangien

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times \Lambda_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \times M \\ (t,x) &\longmapsto (t, -H(t, \varphi_t(x)), \varphi_t(x)) \end{aligned}$$

où φ_\bullet est l'isotopie hamiltonienne engendrée par H_\bullet , est un cobordisme lagrangien entre Λ_0 et Λ_1 . Ceci laisse croire que la fonctionnelle de Solomon descend d'une fonctionnelle plus générale définie sur les cobordismes lagrangiens. Nous trouvons dans ce chapitre une expression pour cette fonctionnelle plus générale et nous l'évaluons sur quelques exemples de cobordismes lagrangiens.

4.1. Cobordismes lagrangiens

Dans le cadre général de la topologie différentielle, un cobordisme est une variété lisse de dimension $n+1$ dont le bord s'exprime comme l'union disjoint de deux variétés lisses de dimension n . Cette notion de cobordisme définit une relation d'équivalence entre les variétés lisses de même dimension. Formellement un cobordisme est défini comme suit.

Définition 4.1.1. Un *cobordisme lisse orienté de dimension $n+1$* est un triplet $(W; M^-, M^+)$, où M^- et M^+ sont des variétés lisses de dimension n , et W est une

variété lisse compacte de dimension $n + 1$ munie d'un difféomorphisme ¹

$$\partial W \longrightarrow M^- \sqcup -M^+$$

On dit alors que M^- et M^+ sont *cobordantes* et on note $M^- \simeq M^+$.

Remarque 4.1.2. Il n'est pas exigé dans la définition d'un cobordisme $(W; M^-, M^+)$ que M^- ou M^+ soient connexes. Un exemple est donné par la paire de pantalon: un cobordisme W plongé dans \mathbb{R}^3 entre $M^- = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ et $M^+ = \mathbb{S}^1$.

La relation \simeq définit une relation d'équivalence sur les variétés lisses de dimension n à difféomorphismes près. Pour cette raison, les cobordismes peuvent être utiles dans certains problèmes de classification de familles de variétés lisses. Dans le cas présent, les variétés en question sont les sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique fixée.

Dans ce qui suit, nous considérons une variété symplectique compacte (M^{2n}, ω_M) de dimension $2n$. Toutes les sous-variétés lagrangiennes $L^n \subset M^{2n}$ étudiées seront supposées fermées. On muni \mathbb{C} de la forme symplectique $\omega_{\mathbb{C}} = d\lambda$, où $\lambda = sdr$ et $(r, s) \in \mathbb{C}$. Le produit $\mathbb{C} \times M$ est, quant-à-lui, muni de la forme symplectique

$$\omega = \omega_{\mathbb{C}} \oplus \omega_M := p_1^* \omega_{\mathbb{C}} + p_2^* \omega_M,$$

où p_1 et p_2 désignent les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} \times M & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{C} & & M \end{array}$$

Pour des sous-ensembles $W \subset \mathbb{C} \times M$ et $S \subset \mathbb{C}$, on note

$$W \Big|_S = W \cap p_1^{-1}(S).$$

¹Le signe négatif devant M^+ désigne l'inversion de l'orientation sur M^+ . Nous plaçons le signe négatif devant M^+ en vue des calculs que nous aurons à faire sur les cobordismes lagrangiens.

Définition 4.1.3 ([6]). Un **cobordisme lagrangien** $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ est un cobordisme lisse $(W; \bigsqcup_i L_i^-, \bigsqcup_j L_j^+)$ entre deux familles de lagrangiennes $(L_i^-)_{1 \leq i \leq k_-}$ et $(L_j^+)_{1 \leq j \leq k_+}$ muni d'un plongement lagrangien

$$W \hookrightarrow ([0,1] \times \mathbb{R}) \times M \subset \mathbb{C} \times M$$

tel que, pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$W \Big|_{[0,\varepsilon) \times \mathbb{R}} = \bigsqcup_i \ell_i^- \times L_i^-, \quad W \Big|_{(1-\varepsilon,1] \times \mathbb{R}} = \bigsqcup_j \ell_j^+ \times L_j^+, \quad (4.1.1)$$

où les ℓ_i^- et ℓ_j^+ sont des segments horizontaux de la forme

$$\ell_i^- = [0,\varepsilon) \times \{a_i^-\}, \quad \ell_j^+ = (1-\varepsilon,1] \times \{a_j^+\}$$

avec $a_1^- < \dots < a_{k_-}^-$ et $a_1^+ < \dots < a_{k_+}^+$ des nombres réels. S'il existe un cobordisme lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ on dit que les familles $(L_i^-)_{1 \leq i \leq k_-}$ et $(L_j^+)_{1 \leq j \leq k_+}$ sont **lagrangiennes-cobordantes** et on note $(L_j^+) \simeq (L_i^-)$. Un cobordisme lagrangien entre deux lagrangiennes est dit **élémentaire**.

Remarque 4.1.4. La définition de cobordisme lagrangien donnée ici diffère de celle donnée par Biran et Cornea au niveau des constantes a_i^- et a_j^+ . En effet, on suppose ici que ces dernières ne sont pas seulement des entiers, mais des nombres réels quelconques. Or, cette différence importe peu puisque, à isotopie hamiltonienne de \mathbb{C} près, on retrouve la définition originale.

Puisqu'un cobordisme lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ est toujours plongé dans $\mathbb{C} \times M$, sa frontière s'écrit d'une manière précise et non pas à difféomorphisme près comme dans le cas d'un cobordisme lisse général. D'après la définition,

$$\partial W = \left(\bigsqcup_i b_i^-(W) \times L_i^- \right) \sqcup \left(\bigsqcup_j -b_j^+(W) \times L_j^+ \right),$$

où nous avons défini les bouts libres des segments ℓ_i^- et ℓ_j^+ comme

$$b_i^-(W) = \ell_i^- \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad b_j^+(W) = \ell_j^+ \cap (\{1\} \times \mathbb{R}).$$

Lorsqu'il viendra le temps de perturber un cobordisme lagrangien, il ne sera pas suffisant de le faire selon une isotopie hamiltonienne quelconque de $\mathbb{C} \times M$. Puisque le résultat de la perturbation devra lui aussi être un cobordisme lagrangien, nous devons nous restreindre à une classe particulière d'isotopies hamiltoniennes de $\mathbb{C} \times M$.

Définition 4.1.5. Une famille à un paramètre de cobordismes lagrangiens $\{W_t\}_{t \in [0,1]}$ est appelée **isotopie hamiltonienne verticale de cobordismes lagrangiens** si il existe une isotopie hamiltonienne $\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ de $\mathbb{C} \times M$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$,

- $W_t = \varphi_t(W)$ pour un cobordisme lagrangien W ;
- sur $W|_{[0,\varepsilon] \times \mathbb{R}}$ et $W|_{(1-\varepsilon,1] \times \mathbb{R}}$, pour tout $t \in [0,1]$

$$\varphi_t(r,s,x) = (r, s + h(t), \varphi_t^M(x))$$

où $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse et φ_t^M est une isotopie hamiltonienne de M .

Si $H : [0,1] \times \mathbb{C} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ est l'hamiltonien qui génère φ_t , on dit alors que W_\bullet est **engendré** par H_\bullet .

Une isotopie hamiltonienne verticale W_\bullet d'un cobordisme lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ engendrée par un hamiltonien H_\bullet **garde les bouts négatifs de W fixes** si, $\forall t \in [0,1]$ et $\forall i \in \{1, \dots, k_-\}$

$$\varphi_t|_{b_i^- \times L_i^-} = \text{id}_{\mathbb{C}} \times \text{id}_{L_i^-} \quad \text{et} \quad H_t|_{b_i^- \times L_i^-} = c^-(t)$$

pour une certaine fonction lisse $c^- : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que W_\bullet **garde les bouts positifs de W fixes** si, $\forall t \in [0,1]$ et $\forall j \in \{1, \dots, k_+\}$,

$$\varphi_t|_{b_j^+ \times L_j^+} = \text{id}_{\mathbb{C}} \times \text{id}_{L_j^+} \quad \text{et} \quad H_t|_{b_j^+ \times L_j^+} = c^+(t)$$

pour une certaine fonction lisse $c^+ : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si W_\bullet garde les bouts négatifs et positifs de W fixes, elle est appelée **isotopie hamiltonienne verticale à bouts fixes**.

4.2. Exemples et constructions

4.2.1. Produit d'un chemin lisse et d'une lagrangienne

Il s'agit de la construction la plus simple d'un cobordisme lagrangienne élémentaire. Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne et soit $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin lisse tel qu'il existe un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$ et des constantes $0 < \varepsilon^-, \varepsilon^+ < 1$ et $a^-, a^+ \in \mathbb{R}$ pour lesquels

$$(\mathbb{C} \setminus K) \cap \text{im}(\gamma) = [0, \varepsilon^-) \times \{a^-\} \sqcup (1 - \varepsilon^+, 1] \times \{a^+\}. \quad (4.2.1)$$

Lemme 4.2.1. *Le produit entre une courbe γ respectant la condition (4.2.1) et une sous-variété lagrangienne L est un cobordisme élémentaire entre L et elle-même.*

Démonstration. Puisque γ et L sont des sous-variété lagrangiennes de \mathbb{C} et M respectivement, $\gamma \times L$ est une sous variété lagrangienne de $\mathbb{C} \times M$. De plus, il est clair que $\partial(\gamma \times L) = L \sqcup -L$. Ainsi, la condition (4.2.1) nous permet de conclure que $\gamma \times L$ est bel et bien un cobordisme lagrangien. ■

4.2.2. Suspension lagrangienne

Étant donné un chemin lagrangien Λ_\bullet , $\Lambda_0 = L$, dans M engendré par une famille de fonctions hamiltoniennes normalisées $H : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$, on désire *suspendre* Λ_\bullet dans $\mathbb{C} \times M$ afin d'en faire une sous-variété lagrangienne lisse. La **suspension lagrangienne** de Λ_\bullet , notée $\Sigma(L; H_\bullet)$, est définie comme l'image du plongement

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times L &\longrightarrow \mathbb{C} \times M \\ (t,x) &\longmapsto (t, -H(t, \varphi_t(x)), \varphi_t(x)) \end{aligned}$$

où $\varphi_t : M \rightarrow M$ est l'isotopie hamiltonienne engendrée par H_t et où \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2 selon l'identification $r + is \mapsto (r, s)$. Par construction, il s'avère en fait que $\Sigma(L; H_\bullet)$ définit un cobordisme lagrangien élémentaire entre L et $\varphi_1(L)$. En

particulier, toutes paires $L, L' \subset M$ de sous-variétés lagrangiennes liées par une isotopie hamiltonienne sont lagrangiennes cobordantes, le cobordisme étant fourni par la suspension lagrangienne du chemin lagrangien Λ_\bullet avec $\Lambda_0 = L$ et $\Lambda_1 = L'$.

Lemme 4.2.2. *La suspension lagrangienne $\Sigma(L, H_\bullet)$ décrite ci-dessus est un cobordisme élémentaire entre L et $\varphi_1(L)$.*

Démonstration. On démontre d'abord en **(i)** que $\Sigma(L, H_\bullet)$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C} \times M$ et par la suite, on démontre en **(ii)** que $\Sigma(L, H_\bullet)$ respecte la condition (4.1.1) aux bouts.

(i) Il suffit de montrer que $f^*\omega = 0$. Notons X_t le champ vectoriel hamiltonien engendré par H_t . Au point $(t, x) \in [0, 1] \times L$, la différentielle de f est donnée par

$$(f_*)_{(t,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\partial_t H(t, \varphi_t(x)) & -(\mathrm{d}H_t)_{\varphi_t(x)} \circ (\varphi_{t*})_{(t,x)} \\ \partial_t \varphi_t(x) & (\varphi_{t*})_{(t,x)} \end{pmatrix}.$$

Suite à une dérivation en chaîne, $\partial_t H(t, \varphi_t(x))$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H(t, \varphi_t(x)) &= \frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x) + \left\langle (\mathrm{d}H_t)_{\varphi_t(x)}, \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x) - \langle X_t \lrcorner \omega_{\varphi_t(x)}, X_t \circ \varphi_t(x) \rangle = \frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x). \end{aligned}$$

De plus, par définition, $\partial_t \varphi_t(x) = X_t \circ \varphi_t(x)$. Ainsi, f_* prend la forme

$$(f_*)_{(t,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\partial_t H_t \circ \varphi_t(x) & -\varphi_t^*(\mathrm{d}H_t)_{\varphi_t(x)} \\ X_t \circ \varphi_t(x) & (\varphi_{t*})_{(t,x)} \end{pmatrix},$$

et nous pouvons calculer, pour $\frac{\partial}{\partial t} \in T_t[0, 1]$ et $\xi, \xi' \in T_x L$,

$$\begin{aligned} (f_*)_{(t,x)} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x) \right) \frac{\partial}{\partial s} + X_t \circ \varphi_t(x), \\ (f_*)_{(t,x)} \xi &= -\langle (\mathrm{d}H_t)_{\varphi_t(x)}, (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi \rangle \frac{\partial}{\partial s} + (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi, \\ (f_*)_{(t,x)} \xi' &= -\langle (\mathrm{d}H_t)_{\varphi_t(x)}, (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi' \rangle \frac{\partial}{\partial s} + (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi'. \end{aligned}$$

Puisque $\omega_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$, on a

$$(f^*)_{(t,x)}\omega(\xi, \xi') = \omega_M((\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi, (\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi') = \omega(\xi, \xi') = 0,$$

où la dernière égalité découle du fait que L est une sous-variété lagrangienne de M .

En ce qui concerne le terme croisé,

$$\begin{aligned} (f^*)_{(t,x)}\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \xi\right) &= \omega_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial r}, -\langle (dH_t)_{\varphi_t(x)}, (\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi \rangle \frac{\partial}{\partial s}\right) \\ &\quad + \omega_M(X_t \circ \varphi_t(x), (\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi) \\ &= \langle (dH_t)_{\varphi_t(x)}, (\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi \rangle - (dH_t)_{\varphi_t(x)}((\varphi_{t*})_{(t,x)}\xi) = 0. \end{aligned}$$

On peut ainsi conclure que $\Sigma(L; H_{\bullet})$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C} \times M$.

(ii) Sans perte de généralité, on peut normaliser la famille de fonctions hamiltoniennes H_{\bullet} pour faire en sorte qu'il existe un petit $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$H \Big|_{[0,\varepsilon] \times L} = 0 = H \Big|_{(1-\varepsilon,1] \times L}.$$

Ainsi, par construction,

$$\begin{aligned} \Sigma(L; H_{\bullet}) \Big|_{[0,\varepsilon] \times \mathbb{R}} &= ([0, \varepsilon] \times \{0\}) \times L \\ \text{et } \Sigma(L; H_{\bullet}) \Big|_{(1-\varepsilon,1] \times \mathbb{R}} &= ((1 - \varepsilon, 1] \times \{0\}) \times \varphi_1(L). \end{aligned}$$

La condition (4.1.1) est donc respectée et on peut conclure que $\Sigma(L; H_{\bullet})$ est un cobordisme lagrangien entre L et $\varphi_1(L)$. ■

Dans ce qui suit, la suspension lagrangienne jouera un rôle important. Étant donné le lien qu'elle établie entre les chemins lagrangiens et les cobordismes lagrangiens, elle nous permettra d'étendre la fonctionnelle de Solomon à ces derniers.

4.2.3. Trace d'une chirurgie lagrangienne

Étant donné une sous-variété lagrangienne L générique² immergée, il est possible de supprimer les points d'auto-intersections de L pour en faire une sous-variété lagrangienne plongée L' . La **chirurgie lagrangienne**, introduite par Lalonde-Sikorav [17] et par Polterovich [21], accomplit exactement cette tâche. Il s'agit d'une variante d'une construction classique due à Milnor [19], appelée **chirurgie d'indice k** , qui consiste à retirer une copie de $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^l$ d'une variété de dimension $(k + l)$ créant ainsi une frontière $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{l-1}$ sur laquelle on colle une copie de $\mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^{l-1}$. Dans le cadre des cobordismes lagrangiens, Chekanov [8] utilisa la chirurgie lagrangienne pour transformer les cobordismes lagrangiens immergés en cobordismes lagrangiens plongés. Nous étudierons ici une version de la chirurgie lagrangienne de cobordismes lagrangiens donnée par Biran et Cornea [6] à partir de laquelle il est facile de faire des calculs.

Soient L' et L'' deux sous-variétés lagrangienne qui s'intersectent transversalement en un ou plusieurs points que l'on note $\{x_1, \dots, x_k\}$. En chaque point d'intersection x_j il existe une carte de Darboux $(\mathcal{V}_j, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ telle que $\mathcal{V}_j \cap L'$ est envoyé sur $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ et que $\mathcal{V}_j \cap L''$ est envoyé sur $i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Ainsi, étant donné que la chirurgie lagrangienne est une opération locale qui est appliquée à chaque point d'intersection, il est suffisant de la décrire dans le cas des lagrangienne $L_1 = \mathbb{R}^n$ et $L_2 = i\mathbb{R}^n$ de \mathbb{C}^n .

Considérons une courbe lisse

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a(t) + ib(t) \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes

- (1) $H(t) = t$ pour $t \in (-\infty, -1]$;
- (2) $H(t) = it$ pour $t \in [1, +\infty)$;
- (3) $\dot{a}(t), \dot{b}(t) > 0$ pour $t \in (-1, 1)$.

²Tous les points d'auto-intersection sont isolés, doubles et transverses.

Une telle courbe H est appelée une **poignée**. Le résultat de la chirurgie lagrangienne de $L_1 \cup L_2$ en $\{0\} = L_1 \cap L_2$ correspond alors à la sous-variété de \mathbb{C}^n donnée par

$$L := H \cdot \mathbb{S}^{n-1} = \left\{ (H(t)x_1, \dots, H(t)x_n) \mid t \in \mathbb{R}, \sum_j x_j^2 = 1 \right\}.$$

Vérifions que L est bel et bien une sous-variété lagrangienne de \mathbb{C}^n . Munissons \mathbb{C}^n des coordonnées $(p_1 + iq_1, \dots, p_n + iq_n)$ et de la forme symplectique standard $\omega = \sum_j dp_j \wedge dq_j$. La restriction de ω à L s'écrit comme

$$\begin{aligned} \omega|_L &= \sum_j (\dot{a}(t)x_j dt + a(t)dx_j) \wedge (\dot{b}(t)x_j dt + b(t)dx_j) \\ &= (a(t)\dot{b}(t) - \dot{a}(t)b(t)) \sum_j x_j dx_j \wedge dt. \end{aligned}$$

Or, puisque $\sum_j x_j^2 = 1$,

$$0 = d\left(\sum_j x_j^2\right) = 2 \sum_j x_j dx_j.$$

Ainsi, $\omega|_L = 0$ et on peut conclure que L est une sous-variété lagrangienne de \mathbb{C}^n .

Le lemme suivant nous assure qu'il existe un cobordisme lagrangien entre L et (L_1, L_2) . Ce cobordisme est appelé la **trace de la chirurgie lagrangienne** appliquée à $L_1 \cup L_2$.

Lemme 4.2.3 ([6]). *Il existe un cobordisme lagrangien $L \rightsquigarrow (L_1, L_2)$.*

Démonstration. Définissons la sous variété

$$\widehat{H} = H \cdot \mathbb{S}^n = \left\{ (H(t)x_1, \dots, H(t)x_{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}, \sum_j x_j^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^{n+1}. \quad (4.2.2)$$

Il suit d'un calcul identique à celui appliqué à L que \widehat{H} est une sous-variété lagrangienne de \mathbb{C}^{n+1} .

Notons $p_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur le premier facteur et $\widehat{p}_1 = p_1|_{\widehat{H}}$ sa restriction à \widehat{H} de sorte à ce que

$$\widehat{p}_1^{-1}(U) = (U \times \mathbb{C}^n) \cap \widehat{H}$$

pour tout $U \subset \mathbb{C}$. Pour $S_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \leq y\}$, on définit la variété à bord $W := \widehat{p}_1^{-1}(S_+)$. Remarquons que, par définition de H ,

$$\begin{aligned}\widehat{p}_1^{-1}(r,0) &= (r,0) \times L_1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \quad \text{pour } r \leq -1, \\ \widehat{p}_1^{-1}(0,s) &= (0,s) \times L_2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \quad \text{pour } s \geq 1, \\ \text{et } \widehat{p}_1^{-1}(0,0) &= (0,0) \times L.\end{aligned}$$

On définit à présent $W_0 = W \cap \widehat{p}_1^{-1}([-2,0] \times [0,2])$ de sorte à ce que la projection sous p_1 soit compacte. La variété W_0 est aussi à bord et

$$\partial W_0 = \{(-2,0)\} \times L_1 \sqcup \{(0,2)\} \times L_2 \sqcup \{(0,0)\} \times L.$$

Remarquons que W_0 est presque un cobordisme lagrangien, il faut montrer que l'on peut étendre la frontière en L selon une courbe débutant en $\{0\} \subset \mathbb{C}$.

Définissons la lagrangienne $V_L = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -x\} \times L \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ et posons $L^0 = \{(0,0)\} \times L$. Par construction,

$$V_L \cap p_1^{-1}(0,0) = L^0 = \widehat{H} \cap p_1^{-1}(0,0).$$

Soit $U(L^0) \subset \widehat{H}$, un assez petit voisinage de L^0 pour lequel il existe un voisinage de Darboux-Weinstein $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de $U(L^0)$ identifié, selon un symplectomorphisme, à un voisinage tubulaire de la section nulle $U(L^0)$ dans $T^*U(L^0)$. Notons $p : \mathcal{N} \rightarrow U(L^0)$ la projection induite par la projection canonique $T^*U(L^0) \rightarrow U(L^0)$.

Par construction, la projection $L^0 \rightarrow T\widehat{H}$ induite par p est injective. Ainsi, suite à un rétrécissement de $U(L^0)$ si nécessaire, $V_L \cap \mathcal{N}$ peut s'écrire comme le graphe d'une forme de degré un $\alpha \in \Omega^1(U(L^0))$ qui est nulle sur L^0 . Puisque V_L est une lagrangienne, $d\alpha = 0$. Alors, la proposition 1.3.4 nous assure que $\alpha = df$ pour une certaine fonction $f : U(L^0) \rightarrow \mathbb{R}$.

On peut utiliser une partition de l'unité pour construire un hamiltonien autonome $g : W \cup U(L^0) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g|_{U(L^0) \setminus W} = f|_{U(L^0) \setminus W}$ et que $g = 0$ hors d'un voisinage de $U(L^0)$. Soit φ_\bullet l'isotopie hamiltonienne engendré par g . Alors, $W' = \varphi_1(W_0)$ donne le cobordisme désiré entre L et (L_1, L_2) . ■

4.3. Extension de l'homomorphisme de Calabi

Fixons une famille de sous-variétés lagrangiennes fermées (L_1^-, \dots, L_{k-}^-) et notons leur classe fondamentale $[L_i^-] = d_i \in H_n(M)$. Supposons qu'il existe une forme $\beta \in \Omega^n(M)$ telle que

$$d\beta = 0, \quad \beta \wedge \omega_M$$

et sur laquelle on impose la condition de normalisation

$$\int_{\sum_i d_i} \beta = 0$$

pour $d_i = [L_i^-] \in H_n(M)$. Sur les cobordismes lagrangiens $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$, nous définissons la fonctionnelle

$$C(W) = - \int_W \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta},$$

où $\bar{\lambda} := p_1^* \lambda$ et $\bar{\beta} := p_2^* \beta$.

Nous sommes enfin prêt à énoncer les deux théorèmes principaux de ce mémoire. Le premier stipule que $C(W)$ est invariant sous isotopie hamiltonienne verticale à bouts fixes de W . Étant donné certaines conditions d'exactitudes analogue à celles requises par le théorème 3.2.2, le deuxième théorème assure que $C(W)$ ne dépend que des bouts de W .

Théorème A. *Soit $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ un cobordisme lagrangien dans $\mathbb{C} \times M$. Alors, la fonctionnelle $C(W)$ ne dépend que de la classe d'isotopie hamiltonienne verticale à bouts fixes de W .*

Théorème B. *Supposons qu'il existe des formes $\lambda_M \in \Omega^1(M)$ et $\gamma \in \Omega^{n-1}(M)$ et une constante $c \neq -1$ telles que*

$$d\lambda_M = \omega, \quad d\gamma = \beta \quad \text{et} \quad \lambda_M \wedge \beta = -c\omega_M \wedge \gamma.$$

Alors, pour un cobordisme lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ dans $\mathbb{C} \times M$,

$$C(W) = \frac{1}{c+1} \left(\int_{\sqcup_i L_i^-} \lambda_M \wedge \gamma - \int_{\sqcup_j L_j^+} \lambda_M \wedge \gamma \right)$$

où $\bar{\lambda}_M := p_2^ \lambda_M$ et $\bar{\gamma} = p_2^* \gamma$.*

Le théorème A peut être utilisé pour calculer plus facilement C sur la trace d'une chirurgie lagrangienne. Dans l'énoncé du lemme suivant et sa preuve, nous utilisons la notation de la démonstration du lemme 4.2.3.

Lemme 4.3.1. *Soient $L_1, L_2 \subset M$ deux sous-variétés lagrangiennes fermées qui s'intersectent transversalement en un point $p \in M$. Notons L la chirurgie lagrangienne de L_1 et L_2 en p selon une poignée H . Supposons que β satisfait à la normalisation*

$$\int_{d_1+d_2} \beta = 0, \tag{4.3.1}$$

où $d_i = [L_i] \in H_n(M)$. Alors,

$$C(W') = C(W_0),$$

où W' est l'extension du bout en L de W_0 selon un cobordisme trivial entre L et lui-même.

Démonstration. La démonstration repose sur la construction explicite de la fonction g utilisée dans la preuve du lemme 4.2.3. Cette construction me fut proposée par Egor Shelukhin.

Construisons d'abord un voisinage tubulaire $U(L^0) \subset \hat{H}$ de $L^0 = \{(0,0)\} \times L$ muni d'un difféomorphisme $\psi : L^0 \times (-1,1) \rightarrow U(L^0)$ tel que

$$\psi(L^0 \times \{0\}) = L^0 \subset U(L^0) \quad \text{et} \quad \psi^{-1}(W_0) = (-1,0] \times L^0.$$

Sur \hat{H} (voir (4.2.2) pour la définition) nous avons les fonctions $p_1^* r = a(t)w_1$ et $p_1^* s = b(t)w_1$, où $t \in \mathbb{R}$ et w_1 est la première coordonnée sur $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction

$u = p_1^* r - p_1^* s$ définie une coordonnée dans un certain voisinage de L_0 . En effet, puisque, sur L_0 , $w_1 = 0$ et $dw_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} du|_{L_0} &= ((\dot{a}(t)w_1 - \dot{b}(t)w_1)dt + (a(t) - b(t))dw_1)|_{L_0} \\ &= (a(t) - b(t))dw_1|_{L_0} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un voisinage tubulaire $U(L^0)$ de L^0 dans \hat{H} sur lequel du ne s'annule pas. Il s'en suit que u est une coordonnée sur $U(L^0)$. Nous pouvons normaliser u pour faire en sorte que $u : U(L^0) \rightarrow (-1,1)$. Par compacité de L^0 , nous pouvons couvrir L^0 par un nombre fini de cartes $\{\mathcal{U}_i\}_i$ où \mathcal{U}_i est un domaine de \mathbb{R}^n avec $\text{vol}(\mathcal{U}_i) < +\infty$. Alors, $U(L^0)$ peut être muni des coordonnées (x_1, \dots, x, u) .

Rappelons que, dans un voisinage de Weinstein \mathcal{N} de $U(L^0)$, $V_L = \{r = s\} \times L$ correspond au graphe d'une forme exacte $\alpha = df \in \Omega^1(U(L^0))$ telle que

$$\alpha|_{L^0} = 0 \text{ comme section de } T^*U(L^0) \quad \text{et} \quad f|_{L^0} = 0.$$

Ainsi, puisque f s'annule jusqu'au premier ordre sur L^0 , il existe une constante $C > 0$ indépendante de x et u telle que

$$|f|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C|u|^2 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x_i} \right| \leq C|u|$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Considérons une fonction lisse $\chi : (-1,1) \rightarrow [0,1]$ telle que, pour un certain $\delta > 0$, $\chi|_{(-1,\delta)} \equiv 0$ et $\chi|_{(1-\delta,1)} \equiv 1$. De plus, supposons que $|\chi'|, |\chi''| \leq c$ sur $(-1,1)$ pour une constante $c \gg 1$. Pour $\varepsilon > 0$, définissons la fonction $\chi_\varepsilon : (-1,1) \rightarrow [0,1]$ par

$$\chi_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0, & u \in (-1, \varepsilon] \\ \chi(\varepsilon^{-1}u), & u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 1, & u \in [\varepsilon, 1) \end{cases}$$

Par définition, il est clair que $|\chi'_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-1}$ et $|\chi''_\varepsilon| \leq c\varepsilon^{-2}$ sur $(-1,1)$. Nous notons aussi $\chi_\varepsilon : U(L^0) \rightarrow [0,1]$ la fonction $\chi_\varepsilon(x, u) = \chi_\varepsilon(u)$.

Nous pouvons à présent étudier la forme $df_\varepsilon \in \Omega^1(U(L^0))$, où $f_\varepsilon(x,u) = \chi_\varepsilon(x,u)f(x,u)$. Pour ε assez petit, nous remarquons directement que

$$\text{Graphe}|_{L^0 \times (-1,0]}(df_\varepsilon) = U(L^0) \cap \mathcal{N},$$

$$\text{Graphe}|_{L^0 \times [\varepsilon,1)}(df_\varepsilon) = V_L \cap \mathcal{N},$$

$$\text{Graphe}|_{L^0 \times [0,\varepsilon]}(df_\varepsilon) \subset \mathcal{N},$$

où la dernière inclusion découle des bornes sur f , χ_ε et χ'_ε . Choisissons $\varepsilon_0 > 0$ tel que cette inclusion tienne pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Ainsi, pour n'importe quel $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, f_ε est un candidat valide pour la fonction g de la preuve du lemme 4.2.3.

Soit $\delta > 0$ et considérons une courbe lisse $\gamma_\delta : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}_{r \geq 0}$ pour laquelle

$$\gamma_\delta(0) = (\delta, -\delta), \quad \dot{\gamma}_\delta(0) = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial s} \quad \text{et} \quad \gamma^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

Posons $\Gamma_\varepsilon = \text{Graphe}|_{L^0 \times (0,\varepsilon)}(df_\varepsilon)$. Alors, pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que le cobordisme

$$W_\varepsilon = W_0 \cup \Gamma_\varepsilon \cup (\gamma_\delta \times L),$$

est un candidat valide pour le cobordisme W' de la preuve du lemme 4.2.3. En vertu de la normalisation 4.3.1, $\int_L \beta = 0$, donc l'exemple 4.4.1 ci-dessous garantit que

$$C(W_\varepsilon) = \int_{W_0} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}.$$

De plus, puisque $\{W_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)}$ est une isotopie hamiltonienne verticale de cobordismes lagrangiens à bouts fixes, le théorème A nous assure que $C(W_\varepsilon)$ ne dépend pas de ε pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Il suffit alors, pour terminer la preuve, de démontrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} = 0.$$

Pour $u \in (0, \varepsilon)$, on paramétrise Γ_ε par $(x, u, d_{(x,u)}f_\varepsilon)$. Sur \mathcal{N} , nous avons les coordonnées locales (x, u, y, v) , où (y, v) sont les coordonnées sur $T_{(x,u)}^*L^0 \times (-1, 1)$.

Alors,

$$\begin{aligned} dy_i|_{\Gamma_\varepsilon} &= d\left(\chi_\varepsilon \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \left(\chi'_\varepsilon \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \chi_\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x_i}\right) du + \sum_{j=1}^n \chi_\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j, \\ dv|_{\Gamma_\varepsilon} &= d\left(\chi'_\varepsilon \cdot f + \chi_\varepsilon \frac{\partial f}{\partial u}\right) = \left(\chi''_\varepsilon \cdot f + 2\chi'_\varepsilon \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\right) du + \sum_{j=1}^n \chi_\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x_j} dx_j. \end{aligned}$$

Selon les bornes trouvées sur f , χ_ε et leurs dérivées, chaque élément des sommes précédentes est borné par une constante C_1 indépendante de ε . Nous pouvons donc écrire $\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}$ dans les coordonnées locales (x, u, y, v) comme une somme de formes différentielles de degré $n+1$ avec coefficients lisses bornés uniformément sur $0 \leq u \leq \varepsilon_0$ et indépendamment de ε . Ainsi, il existe une fonction lisse $\rho_\ell : \mathcal{U}_\ell \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $\Gamma_{\ell, \varepsilon} = \text{Graphe}|_{\mathcal{U}_\ell \times (0, \varepsilon)}(df_\varepsilon)$

$$\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}|_{\Gamma_{\ell, \varepsilon}} = \rho_\ell(x, u) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge du$$

et telle que, pour tout $x \in \mathcal{U}_\ell$ et $0 < u < \varepsilon$,

$$|\rho_\ell(x, u)| \leq C_2$$

où C_2 est une constante indépendante de ε et ℓ . Nous avons donc

$$\left| \int_{\Gamma_{\ell, \varepsilon}} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} \right| \leq \int_{\mathcal{U}_\ell} \int_0^\varepsilon |\rho_\ell(x, u)| dx_1 \cdots dx_n du \leq C_2 \text{vol}(\mathcal{U}_\ell) \varepsilon.$$

Alors, puisque $\text{vol}(\mathcal{U}_\ell) < +\infty$, on peut conclure que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} = 0$ tel que désiré. ■

4.3.1. Première variation et points critiques

Proposition 4.3.2. *Soit W_\bullet une isotopie hamiltonienne verticale d'un cobordisme lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ qui garde les bouts négatifs de W fixes. Alors,*

$$\frac{d}{dt} C(W_t) = - \int_{\bigsqcup_j b_j^+ \times L_j^+} \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}),$$

où H_\bullet est l'hamiltonien qui engendre W_\bullet et φ_\bullet est l'isotopie hamiltonienne associée à H_\bullet .

Démonstration. Par définition de C ,

$$-C(W_t) = \int_{W_t} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} = \int_{\varphi_t(W)} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} = \int_W \varphi_t^* (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}).$$

En dérivant par rapport à t , on trouve,

$$-\frac{d}{dt}C(W_t) = \int_W \frac{d}{dt} \varphi_t^* (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) = \int_W \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) \quad (4.3.2)$$

En vertu de la formule *magique* de Cartan,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_t} (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) + X_t \lrcorner d(\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) \\ &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) + X_t \lrcorner (d\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) \\ &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) + X_t \lrcorner (p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta}). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Par définition de ω et puisque $\beta \wedge \omega_M = 0$, on a

$$\begin{aligned} \omega \wedge \bar{\beta} &= p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta} + p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \beta \\ &= p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta} + p_2^* (\omega_M \wedge \beta) = p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta}. \end{aligned}$$

De plus, étant donné que $X_t \lrcorner \omega = -dH_t$,

$$\begin{aligned} X_t \lrcorner (\omega \wedge \bar{\beta}) &= (X_t \lrcorner \omega) \wedge \bar{\beta} + \omega \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta}) \\ &= -dH_t \wedge \bar{\beta} + \omega \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta}) = -d(H_t \bar{\beta}) + \omega \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta}). \end{aligned}$$

Ainsi, selon les deux équations précédentes, (4.3.3) s'écrit comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_t} (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) + X_t \lrcorner (\pi_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta}) \\ &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) + X_t \lrcorner (\omega \wedge \bar{\beta}) \\ &= d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) - d(H_t \bar{\beta}) + \omega \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta}). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

L'équation (4.3.4) permet de développer (4.3.2) comme

$$-\frac{d}{dt}C(W_t) = \int_W \varphi_t^* d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) - \int_W \varphi_t^* d(H_t \bar{\beta}) + \int_W \varphi_t^* (\omega \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta})).$$

Étudions chacun des termes de la somme précédente. Pour le troisième terme, étant donné que W est, en particulier, une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{C} \times M$, $\varphi_t^* \omega|_W = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi,

$$\boxed{\int_W \varphi_t^* (\omega \wedge (X_t \lrcorner \beta)) = 0.}$$

Pour le premier terme, nous avons, en vertu du théorème de Stokes,

$$\int_{W_0} \varphi_t^* d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) = \int_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} \varphi_t^* (X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) \quad (4.3.5)$$

$$- \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^* (X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})). \quad (4.3.6)$$

Ici, on peut développer l'intégrand comme

$$X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) = (X_t \lrcorner \bar{\lambda}) \wedge \bar{\beta} - \bar{\lambda} \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta}).$$

Rappelons que, d'après la définition 4.1.5, dans un voisinage des bouts de W , φ_t est donné par le produit d'une isotopie hamiltonienne dans \mathbb{C} et d'une isotopie hamiltonienne dans M . Ainsi,

$$\int_{\sqcup_j b_j^+ \times L_j^+} \varphi_t^* (\bar{\lambda} \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta})) = 0 = \int_{\sqcup_i b_i^- \times L_i^-} \varphi_t^* (\bar{\lambda} \wedge (X_t \lrcorner \bar{\beta})).$$

De plus, φ_t déplace les bouts de W verticalement dans \mathbb{C} , d'où

$$X_t \lrcorner p_1^* dr \Big|_{\partial W} = 0 \implies X_t \lrcorner \bar{\lambda} \Big|_{\partial W} = 0.$$

Donc,

$$\int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^* ((X_t \lrcorner \bar{\lambda}) \wedge \bar{\beta}) = 0 = \int_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} \varphi_t^* ((X_t \lrcorner \bar{\lambda}) \wedge \bar{\beta}).$$

L'équation (4.3.6) se réduit alors à

$$\boxed{\int_W \varphi_t^* d(X_t \lrcorner (\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})) = 0.}$$

Pour le deuxième terme, on a, encore une fois selon le théorème de Stokes,

$$- \int_W \varphi_t^* d(H_t \bar{\beta}) = - \int_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} \varphi_t^* (H_t \bar{\beta}) + \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^* (H_t \bar{\beta}). \quad (4.3.7)$$

Or, puisque φ_t fixe le bout négatif de W , $\varphi_t|_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} = \text{id}$ et $H_t|_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} = c^-(t)$ pour une certaine fonction lisse $c^-(t) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. De plus, on rappelle que, selon la condition de normalisation imposée sur β , $\int_{\sum d_i} \beta = 0$ pour $d_i = [L_i^-] \in H_n(M)$. Ainsi,

$$\int_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}) = \int_{\sqcup_i b_i^-(W) \times L_i^-} c^-(t) \bar{\beta} = 0$$

et l'équation (4.3.7) se réduit à

$$\boxed{- \int_{W_t} d(H_t \bar{\beta}) = \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}).}$$

Finalement, en rassemblant les trois termes, on trouve

$$\frac{d}{dt} C(W_t) = - \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}).$$

Ceci complète la démonstration. ■

Par définition, les points critiques de C sont les cobordismes lagrangiens W pour lesquels

$$\left. \frac{d}{dt} C(\varphi_t(W)) \right|_{t=0} = 0,$$

peut importe l'isotopie hamiltonienne verticale φ_\bullet gardant les bouts négatifs de W fixes choisie. La première variation de C trouvée à la proposition 4.3.2 nous permet donc de caractériser aisément les cobordismes lagrangiens élémentaires qui sont des points critiques de C .

Corollaire 4.3.3. *Un cobordisme lagrangien élémentaire $W : (L^+) \rightsquigarrow (L^-)$ est un point critique de C si et seulement si $\beta|_{L^+} = 0$.*

4.3.2. Démonstrations des théorèmes A et B

La démonstration du théorème A repose entièrement sur la première variation de C donnée à la proposition 4.3.2.

Démonstration. [Théorème A] Soit φ_\bullet , l'isotopie hamiltonienne engendrée par la famille d'hamiltoniens verticale H_\bullet de sorte à ce que $W_t = \varphi_t(W)$ pour un cobordisme

lagrangien $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$. Puisque φ_t fixe les bouts négatifs et les bouts positifs de W_t ,

$$H_t \Big|_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} = c^+(t)$$

pour une certaine fonction lisse $c^+(t) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi la première variation de $C(W_\bullet)$ donnée par la proposition 4.3.2 se réduit à

$$-\frac{d}{dt}C(W_t) = \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}) = \int_{\sqcup_j b_j^+(W) \times L_j^+} c^+(t) \bar{\beta} = 0.$$

Alors, $C(W_t)$ ne dépend pas de t . En d'autres termes, $C(W_t)$ ne dépend que de la classe d'isotopie hamiltonienne verticale de W . ■

Démonstration. [Théorème B] Rappelons que l'on suppose l'existence de formes $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $\gamma \in \Omega^{n-1}(M)$ et d'une constante $c \neq -1$ telles que

$$d\lambda_M = \omega_M, \quad d\gamma = \beta \quad \text{et} \quad \lambda_M \wedge \beta = -c\omega_M \wedge \gamma.$$

Ainsi, en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} -C(W) &= \int_W \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta} = \int_W \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge dp_2^* \gamma \\ &= - \int_{\partial W} \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma + \int_W d\bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma = \int_W d\bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma, \end{aligned}$$

où la dernière égalité suit du fait que la frontière de W est un union disjoint de lagrangiennes dans M et donc que $\bar{\lambda}_{\mathbb{C}}|_{\partial W} = 0$. Par définition de ω , on a

$$\omega \wedge p_2^* \gamma = p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma + p_2^*(\omega_M \wedge \gamma),$$

donc, puisque W est une sous-variété lagrangienne de (M, ω) ,

$$\begin{aligned} -C(W) &= \int_W d\bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma \\ &= \int_W p_1^* \omega_{\mathbb{C}} \wedge p_2^* \gamma \\ &= \int_W \omega \wedge p_2^* \gamma - \int_W p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \gamma = - \int_W p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \gamma. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant la condition $\lambda_M \wedge \beta = -c\omega_M \wedge \gamma$, on a

$$\begin{aligned} \int_W p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \gamma &= \int_{\partial W} p_2^* \lambda_M \wedge p_2^* \gamma + \int_W p_2^* \lambda_M \wedge \bar{\beta} \\ &= \int_{\partial W} p_2^* \lambda_M \wedge p_2^* \gamma - c \int_W p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \gamma \\ \implies \int_W p_2^* \omega_M \wedge p_2^* \gamma &= \frac{1}{c+1} \int_{\partial W} p_2^* \lambda_M \wedge p_2^* \gamma. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc finalement écrire $C(W)$ sous la forme

$$C(W) = \frac{1}{c+1} \int_{\partial W} p_2^* \lambda_M \wedge p_2^* \gamma = \frac{1}{c+1} \left(\int_{\sqcup_i L_i^-} \lambda_M \wedge \gamma - \int_{\sqcup_j L_j^+} \lambda_M \wedge \gamma \right)$$

tel que désiré. ■

4.4. Calcul de la fonctionnelle sur quelques exemples

Nous évaluons la fonctionnelle C sur les exemples de cobordismes lagrangiens donnés à la section 4.2.

4.4.1. Produit d'un chemin lisse et d'une lagrangienne

Soit $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne et $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin qui, hors d'un sous-ensemble compacte de \mathbb{C} s'écrit comme $[0, \varepsilon] \times \{a^-\} \sqcup (1 - \varepsilon, 1] \times \{a^+\}$ pour certaines constantes $a^-, a^+ \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon < 1$. Alors, tel que démontré à la section 4.2.1, $W = \gamma \times L$ est un cobordisme lagrangien dans $\mathbb{C} \times M$. Rappelons que, par définition de $\beta \in \Omega^n(M)$, on doit imposer la condition de normalisation

$$\int_d \beta = 0$$

pour $d = [L] \in H_n(M)$. Ainsi, nous obtenons directement

$$C(\gamma \times L) = - \int_{\gamma \times L} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} = - \int_{\gamma} \lambda \int_L \beta = 0.$$

4.4.2. Suspension lagrangienne

L'évaluation de C sur la suspension lagrangienne d'un chemin lagrangien Λ_\bullet est égal à l'évaluation de la fonctionnelle \mathfrak{C} de Solomon sur ce chemin. Ce résultat nous permet de conclure que C étend bel et bien l'homomorphisme de Calabi aux cobordismes lagrangiens.

Proposition 4.4.1. *Soient $L \subset M$ une sous-variété lagrangienne et $\varphi_t \in \text{Ham}(M)$ une isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien H_t . Alors, pour $W = \Sigma(L; H_\bullet)$, la suspension lagrangienne de L selon φ_t ,*

$$C(W) = \int_{[0,1]} dt \int_{\varphi_t(L)} H_t \beta = \mathfrak{C}(\varphi_\bullet(L)).$$

Démonstration. La suspension lagrangienne $W = \Sigma(L; H_\bullet)$ correspond, par définition, à l'image du plongement lagrangien

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times L &\longrightarrow \mathbb{C} \times M \\ (t,x) &\longmapsto (t, -H(t, \varphi_t(x)), \varphi_t(x)) \end{aligned}$$

où \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2 selon l'identification $r + is \mapsto (r, s)$. Notons X_t le champ vectoriel engendré par la relation $\iota_{X_t} \omega = -dH_t$. Rappelons (voir 4.2.2) que pour $\frac{\partial}{\partial t} \in T_t[0,1]$ et $\xi \in T_x L$,

$$\begin{aligned} (f_*)_{(t,x)} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x) \right) \frac{\partial}{\partial s} + X_t \circ \varphi_t(x), \\ (f_*)_{(t,x)} \xi &= -\langle (dH_t)_{\varphi_t(x)}, (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi \rangle \frac{\partial}{\partial s} + (\varphi_{t*})_{(t,x)} \xi, \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver une expression explicite pour $f^* \bar{\lambda}$ et $f^* \bar{\beta}$. Pour $f^* \bar{\lambda} = \lambda(\pi_{1*} f_* -)$, considérons $\mathbf{v} = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi \in T_{(t,x)}[0,1] \times L$. On a donc

$$\pi_{1*} f_*(\mathbf{v}) = \xi_t \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} \circ \varphi_t(x) \cdot \xi_t + \langle \varphi_t^* dH_t, \xi \rangle \right) \frac{\partial}{\partial s}$$

et en appliquant $\lambda = sdr$,

$$f^* \bar{\lambda}_{f(t,x)}(\mathbf{v}) = \lambda_{(t, -H_t \circ \varphi_t(x))}(\pi_{1*} f_*(\xi)) = -H_t \circ \varphi_t(x) \cdot \xi_t.$$

Ainsi, on peut écrire $f^*\bar{\lambda}$ simplement comme

$$f^*\bar{\lambda} = -H_t \circ \varphi_t(x) dt.$$

Occupons-nous à présent de $f^*\bar{\beta} = \beta(\pi_{2*}f_* - \dots, \pi_{2*}f_* -)$. Soient n vecteurs tangents $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n \in T_{(t,x)}[0,1] \times L$ tels que $\mathbf{v}^i = \xi_t^i \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i$. Nous avons

$$\pi_{2*}f_*(\mathbf{v}^i) = \underbrace{X_t \circ \varphi_t(x)}_X \cdot \xi_t^i + \underbrace{\varphi_{t*}\xi^i}_{b^i} = X \cdot \xi_t^i + b^i.$$

En appliquant β , on trouve

$$\begin{aligned} f^*\bar{\beta}(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n) &= \beta(X \cdot \xi_t^1 + b^1, \dots, X \cdot \xi_t^n + b^n) \\ &= \beta(X \cdot \xi_t^1, b^2, \dots, b^n) + \dots + \beta(b^1, \dots, b^{n-1}, X \cdot \xi_t^n) \\ &\quad + \beta(b^1, \dots, b^n). \end{aligned}$$

Or, puisque $f^*\bar{\beta} \in \Omega^n([0,1] \times L)$, $f^*\bar{\beta}$ prend la forme générale

$$f^*\bar{\beta} = dt \wedge \gamma + \delta,$$

où $\gamma \in \Omega^{n-1}(L)$ et $\delta \in \Omega^n(L)$. Ici, δ correspond au terme $\beta(b^1, \dots, b^n)$, car les éléments de ce dernier ne contiennent aucun terme en ξ_t^i . Alors, $\delta = \varphi_t^*\bar{\beta}$ et

$$f^*\bar{\beta} = dt \wedge \gamma + \varphi_t^*\bar{\beta}$$

D'après les expressions obtenues pour $f^*\bar{\lambda}$ et $f^*\bar{\beta}$, on peut développer $f^*(\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta})$ comme

$$\begin{aligned} f^*(\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) &= f^*\bar{\lambda} \wedge f^*\bar{\beta} \\ &= -H_t \circ \varphi_t(x) dt \wedge (dt \wedge \gamma + \varphi_t^*\bar{\beta}) \\ &= -H_t \circ \varphi_t(x) dt \wedge \varphi_t^*\bar{\beta} = -dt \wedge \varphi_t^*(H_t \bar{\beta}) \end{aligned}$$

La fonctionnelle $C(\Sigma(L, \varphi_\bullet))$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} C(\Sigma(L, \varphi_t)) &= - \int_{f([0,1] \times L)} \bar{\lambda} \wedge \bar{\beta} \\ &= - \int_{[0,1] \times L} f^*(\bar{\lambda} \wedge \bar{\beta}) = \int_{[0,1]} dt \int_{\varphi_t(L)} H_t \bar{\beta} = \mathfrak{C}(\varphi_\bullet(L)) \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. ■

4.4.3. Trace d'une chirurgie lagrangienne sur \mathbb{T}^2

Soit \mathbb{T}^2 le tore plat de dimension 2 ayant comme domaine fondamental $\Pi = [-2, 2] \times [-2, 2]$ et comme coordonnées locales (θ_1, θ_2) . Munissons M de la forme symplectique standard

$$\omega_M = d\theta_1 \wedge d\theta_2.$$

Considérons les deux lagrangiennes $L_1 = \{\theta_2 = 0\}$ et $L_2 = \{\theta_1 = 0\}$. Nous désirons calculer C sur la trace de la chirurgie de $L_1 \cup L_2$ au point $(0, 0)$ selon une courbe $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que décrite à la section 4.2.3. On implémente directement le modèle local de cette chirurgie au point $(0, 0) \in M$.

Considérons une courbe lisse

$$\begin{aligned} H : [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a(t) + ib(t) \end{aligned}$$

respectant les conditions suivantes

- (1) $H(t) = t$ pour $t \in [-2, -1]$;
- (2) $H(t) = it$ pour $t \in [1, 2]$;
- (3) $\dot{a}(t), \dot{b}(t) > 0$ pour $t \in (-1, 1)$.

Alors,

$$L = H \cdot \mathbb{S}^0 = \{-H(t) \mid t \in [-2, 2]\} \cup \{H(t) \mid t \in [-2, 2]\} \subset \Pi$$

correspond à la sous-variété fermée dans M résultant de la chirurgie lagrangienne de $L_1 \cup L_2$ au point $(0, 0)$ selon H .

Avant de se lancer dans la construction de la trace de cette chirurgie lagrangienne, nous trouvons une forme fermée $\beta \in \Omega^1(M)$ telle que $\omega \wedge \beta = 0$ et $\int_{L_1 \sqcup L_2} \beta = 0$. Rappelons que cette forme est essentielle pour définir C sur les cobordismes lagrangiens entre L et $L_1 \cup L_2$. À cette fin, posons

$$\beta = kd\theta_1 - kd\theta_2$$

pour $k \in \mathbb{R}$ une constante quelconque. Nous remarquons directement que $d\beta = 0$. De plus, puisque $\omega_M = d\theta_1 \wedge d\theta_2$, il est clair que $\omega_M \wedge \beta = 0$. Finalement, pour la condition de normalisation, puisque $\int_{L_1} d\theta_1 = \int_{L_2} d\theta_2$, nous avons

$$\int_{L_1 \sqcup L_2} \beta = \int_{L_1} (kd\theta_1 - kd\theta_2) + \int_{L_2} (kd\theta_1 - kd\theta_2) = k \left(\int_{L_1} d\theta_1 - \int_{L_2} d\theta_2 \right) = 0.$$

Afin de construire la trace de la chirurgie précédente, considérons d'abord

$$\widehat{H} = H \cdot \mathbb{S}^1 = \{(H(t) \cos \tau, H(t) \sin \tau) \mid t \in [-2, 2], \tau \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{C} \times \Pi.$$

Le cobordisme préliminaire est alors donné par

$$W = \widehat{p}_1^{-1}(S_+) = \{(H(t) \cos \tau, H(t) \sin \tau) \mid t \in [-2, 2], \tau \in [-\pi/2, \pi/2]\} \subset \mathbb{C} \times \Pi$$

pour $S_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \leq y\}$ et a comme bord

$$\partial W = \{(-2, 0)\} \times L_1 \sqcup \{(0, 2)\} \times L_2 \sqcup \{(0, 0)\} \times L.$$

Selon le lemme 4.3.1, nous pouvons évaluer C sur W directement.

Nous calculons

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \Big|_{T_{(t,\tau)} W_{a,b}} &= \dot{a}(t)b(t) \cos^2(\tau) dt - a(t)b(t) \cos(\tau) \sin(\tau) d\tau \\ \bar{\beta} \Big|_{T_{(t,\tau)} W_{a,b}} &= k \sin(\tau)(\dot{a}(t) - \dot{b}(t)) dt + k \cos(\tau)(a(t) - b(t)) d\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta} \Big|_{T_{(t,\tau)} W_{a,b}} &= k \dot{a}(t)b(t) \cos^3(\tau)(a(t) - b(t)) dt \wedge d\tau \\ &\quad + k a(t)b(t) \cos(\tau) \sin^2(\tau)(\dot{a}(t) - \dot{b}(t)) dt \wedge d\tau. \end{aligned}$$

Nous sommes donc en mesure d'évaluer $C(W_{a,b})$:

$$\begin{aligned}
C(W_{a,b}) &= - \int_{W_{a,b}} \bar{\lambda}_{\mathbb{C}} \wedge \bar{\beta} \\
&= - \int_{-2}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\dot{a}(t)b(t) \cos^3 \tau)(k_1 a(t) + k_2 b(t)) d\tau dt \\
&\quad - \int_{-2}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k a(t)b(t) \cos(\tau) \sin^2(\tau)(\dot{a}(t) - \dot{b}(t)) d\tau \wedge dt \\
&= -\frac{4k}{3} \int_{-2}^2 \dot{a}(t)b(t)(a(t) - b(t)) dt - \frac{2k}{3} \int_{-2}^2 a(t)b(t)(\dot{a}(t) - \dot{b}(t)) dt \\
&= -2k \int_{-2}^2 \dot{a}(t)a(t)b(t) dt + \frac{4k}{3} \int_{-2}^2 \dot{a}(t)b^2(t) dt + \frac{2k}{3} \int_{-2}^2 a(t)b(t)\dot{b}(t) dt \\
&= -2k \int_{-2}^2 (\dot{a}(t) + \dot{b}(t))a(t)b(t) dt.
\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse, $b(t) = 0 \forall t \in [-2, -1]$ et $a(t) = 0 \forall t \in [1, 2]$. Ainsi, $C(W_{a,b})$ prend la forme

$$C(W_{a,b}) = -2k \int_{-1}^1 (\dot{a}(t) + \dot{b}(t))a(t)b(t) dt, \quad (4.4.1)$$

4.5. Ombre de la trace d'une chirurgie et C : le cas du tore

Étudions à présent la relation entre $C(W_{a,b})$ et l'ombre du cobordisme $W_{a,b}$, une notion récemment introduite par Cornea et Shelukhin [9].

Définition 4.5.1. Soit $W : (L_j^+) \rightsquigarrow (L_i^-)$ un cobordisme lagrangien dans $\mathbb{C} \times M$. L'**ombre** de W , notée $\mathcal{S}(W)$, est définie comme l'aire du sous-ensemble fermé donné par le complément des régions non-bornées de $\mathbb{C} \setminus \text{pr}_1(W)$.

Étant donné que $\text{pr}_1(W_{a,b})$ est simplement connexe, $\mathcal{S}(W_{a,b})$ correspond exactement à l'aire de la projection $\text{pr}_1(W_{a,b})$:

$$\mathcal{S}(W_{a,b}) = \int_{-1}^1 \dot{a}(t)b(t) dt.$$

Pour simplifier les calculs, nous désirons évaluer $C(W_{a,b})$ pour des $a(t)$ et $b(t)$ qui ne sont pas nécessairement lisses sur l'intervalle $[-2,2]$. Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.5.2. *Soit l'espace de fonctions $\mathcal{W} = W^{1,2}((-2,2)) \cap L_4((-2,2))$ muni de la norme*

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L_2} + \|\partial_t u\|_{L_2} + \|u\|_{L_4}.$$

Alors, l'application

$$\begin{aligned} F : \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto C(W_{u,v}) \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. En vertu de l'inégalité de Hölder, si $u, v \in \mathcal{W}$, alors $u(t)v(t) \in L_2((-2,2))$. De plus, en munissant $L_2((-2,2))$ de la norme standard $\|-\|_{L_2}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\longrightarrow L_2((-2,2)) \\ (u(t), v(t)) &\longmapsto u(t)v(t) \end{aligned}$$

est continue. La dérivée est un opérateur continu sur \mathcal{W} et son image est comprise dans L_2 . Ainsi, comme composition d'applications continues, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\longrightarrow L_2((-2,2)) \times L_2((-2,2)) \\ (u(t), v(t)) &\longmapsto (\dot{u}(t), u(t)v(t)) \end{aligned}$$

est continue. Finalement, puisque le produit scalaire dans $L_2((-2,2))$ est continue, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_{-1}^1 \dot{u}(t)u(t)v(t)dt \end{aligned}$$

est continue comme composition de fonctions continues. Le lemme suit de la définition de $C(W_{u,v})$ et du fait que la somme de deux fonctions continues est elle aussi continue. ■

La proposition suivante établie une relation d'inégalité entre $\mathcal{S}(W_{a,b})$ et $C(W_{a,b})$. Étant donné la nature géométrique de cette inégalité, il est important qu'elle tienne pour des dilatation de H par un coefficient γ . Dans cette optique, notons $W_{\gamma a, \gamma b}$ la trace de la chirurgie selon γH et imposons la condition $\gamma \in (0,2)$ pour assurer que $p_1(W_{\gamma a, \gamma b})$ soit bien contenu dans Π . Nous remarquons immédiatement que

$$\mathcal{S}(W_{\gamma a, \gamma b}) = \int_{-1}^1 (\gamma \dot{a}(t))(\gamma b(t)) dt = \gamma^2 \int_{-1}^1 \dot{a}(t)b(t) dt = \gamma^2 \mathcal{S}(W_{a,b}), \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} C(W_{\gamma a, \gamma b}) &= -2k \int_{-1}^1 (\gamma \dot{a}(t) + \gamma \dot{b}(t))(\gamma a(t))(\gamma b(t)) dt \\ &= -2k \gamma^3 \int_{-1}^1 (\dot{a}(t) + \dot{b}(t))a(t)b(t) dt = \gamma^3 C(W_{a,b}). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Proposition 4.5.3. *Pout tout $\gamma \in (0,2)$,*

$$\gamma \mathcal{S}(W_{\gamma a, \gamma b}) - \frac{\gamma^3}{6} \leq \frac{C(W_{\gamma a, \gamma b})}{2k} \leq \gamma \mathcal{S}(W_{\gamma a, \gamma b}) + \frac{\gamma^3}{3}$$

Démonstration. Selon la condition (3) ci-dessus, $\dot{a}(t) > 0$ pour tout $t \in (-1,1)$, le théorème de la fonction inverse assure l'existence d'une fonction lisse $a^{-1} : (-1,0) \rightarrow (-1,1)$ telle que $a^{-1} \circ a(t) = t$ pour tout $t \in (-1,1)$. Considérons la reparamétrisation $\rho : (-1,1) \rightarrow (-1,1)$ donnée par

$$\rho(t) = a^{-1}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

et posons

$$\tilde{a}(t) := a \circ \rho(t) = \frac{t-1}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{b}(t) := b \circ \rho(t).$$

Nous avons donc

$$\mathcal{S}(W_{a,b}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{b}(t) dt$$

et

$$C(W_{a,b}) = -2k \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} + \dot{\tilde{b}}(t)\right) \left(\frac{t-1}{2}\right) \tilde{b}(t) dt.$$

Selon les conditions (1) et (2) ci-dessus, $\tilde{b}(-1) = 0$ et $\tilde{b}(1) = 1$. Ainsi, une simple intégration par parties nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{C(W_{a,b})}{k} &= -2 \int_{-1}^1 \left(\frac{t\tilde{b}(t)}{4} - \frac{\tilde{b}(t)}{4} + \frac{t\dot{\tilde{b}}(t)b(t)}{2} - \frac{\dot{\tilde{b}}(t)b(t)}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tilde{b}^2(t) - t\tilde{b}(t)) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{b}(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\tilde{b}^2(t) - t\tilde{b}(t)) dt + A_{a,b} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\tilde{b}(t) - \frac{t+1}{2} \right)^2 dt - \frac{1}{8} \int_{-1}^1 (1+t)^2 dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{b}(t) dt + A_{a,b} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\tilde{b}(t) - \frac{t+1}{2} \right)^2 dt + 2A_{a,b} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

D'une part, nous avons, bien évidemment,

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\tilde{b}(t) - \frac{t+1}{2} \right)^2 dt$$

D'autre part, puisque $0 \leq \tilde{b}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [-1,1]$, le théorème d'estimation standard nous assure que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\tilde{b}(t) - \frac{t+1}{2} \right)^2 dt \leq \sup_{t \in [-1,1]} \left(\tilde{b}(t) - \frac{t+1}{2} \right)^2 \leq 1.$$

Nous avons donc

$$\mathcal{S}(W_{a,b}) - \frac{1}{6} \leq \frac{C(W_{a,b})}{2k} \leq \mathcal{S}(W_{a,b}) + \frac{1}{3}.$$

Finalement, en vertu des équations (4.5.1) et (4.5.2),

$$\begin{aligned}
\gamma^3 \left(\mathcal{S}(W_{a,b}) - \frac{1}{6} \right) &\leq \gamma^3 \frac{C(W_{a,b})}{2k} \leq \gamma^3 \left(\mathcal{S}(W_{a,b}) + \frac{1}{3} \right) \\
&\iff \\
\gamma(\gamma^2 \mathcal{S}(W_{a,b})) - \frac{\gamma^3}{6} &\leq \frac{C(W_{\gamma a, \gamma b})}{2k} \leq \gamma(\gamma^2 \mathcal{S}(W_{a,b})) + \frac{\gamma^3}{3} \\
&\iff \\
\gamma \mathcal{S}(W_{\gamma a, \gamma b}) - \frac{\gamma^3}{6} &\leq \frac{C(W_{\gamma a, \gamma b})}{2k} \leq \gamma \mathcal{S}(W_{\gamma a, \gamma b}) + \frac{\gamma^3}{3}
\end{aligned}$$



Il est pertinent de noter que la borne inférieure trouvée à la proposition 4.5.3 est optimale. En d'autres termes, il existe une courbe $H(t) = (a(t), b(t))$ satisfaisant aux propriétés (1), (2) et (3) telle que

$$\mathcal{S}(W_{a,b}) - \frac{1}{6} = \frac{C(W_{a,b})}{2k}.$$

En effet, il s'agit de la courbe donnée par

$$a(t) = \begin{cases} t & t \in [-2, -1] \\ \frac{t-1}{2} & t \in (-1, 1) \\ 0 & t \in [1, 2] \end{cases} \quad \text{et} \quad b(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-2, -1] \\ \frac{t+1}{2} & t \in (-1, 1) \\ t & t \in [1, 2] \end{cases}$$

et pour laquelle

$$\mathcal{S}(W_{a,b}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad C(W_{a,b}) = \frac{2k}{3}.$$

Bibliographie

- [1] Meike AKVELD et Dietmar SALAMON : Loops of Lagrangians submanifolds and pseudoholomorphic discs. *Geom. Funct. Anal.*, 11(4):609–650, 2001.
- [2] Vladimir I. ARNOL'D : *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 2e édition, 1978.
- [3] Vladimir I. ARNOL'D : Lagrange and Legendre cobordisms. I. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(3):1–13, 96, 1980.
- [4] Michèle AUDIN : Quelques calculs en cobordisme lagrangien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 35(3):159–194, 1985.
- [5] Augustin BANYAGA : Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. *Comment. Math. Helv.*, 53(2):174–227, 1978.
- [6] Paul BIRAN et Octav CORNEA : Lagrange cobordisms. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 26(3):295–340, 2013.
- [7] Eugenio CALABI : On the group of automorphisms of a symplectic manifold. *Problems in analysis (Lectures at the Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969)*, pages 1–26, 1970.
- [8] Yuri V. CHEKANOV : Lagrangian embeddings and Lagrangian cobordism. In *Topics in singularity theory*, volume 180 de *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 13–23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [9] Octav CORNEA et Egor SHELUKHIN : Lagrangian cobordism and metric invariants. *J. Differential Geom.*, 112(1):1–45, 2019.
- [10] Yakov ELIASHBERG : *Cobordisme des solutions de relations différentielles*. Travaux en cours. Hermann, Paris, 1984.
- [11] Michael ENTOV : Quasi-morphisms and quasi-states in symplectic topology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*,

- pages 1147–1171. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [12] Michael ENTOV et Leonid POLTEROVICH : Calabi quasimorphism and quantum homology. *Int. Math. Res. Not.*, (30):1635–1676, 2003.
- [13] Albert FATHI : *Transformations et homéomorphismes préservant la mesure : systèmes dynamiques minimaux*. Thèse de doctorat, Orsay, 1980.
- [14] Jean-Marc GAMBAUDO et Étienne GHYS : Enlacements asymptotiques. *Topology*, 36(6):1355–1379, 1997.
- [15] Reese HARVEY et H. Blaine LAWSON, Jr. : Calibrated geometries. *Acta Math.*, 148:47–157, 1982.
- [16] Asaf KISLEV : Compactly supported Hamiltonian loops with a non-zero Calabi invariant. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 21:80–88, 2014.
- [17] François LALONDE et Jean-Claude SIKORAV : Sous-variétés lagrangiennes des fibrés cotangents. *Comment. Math. Helv.*, (66):18–33, 1991.
- [18] Dusa McDUFF et Dietmar SALAMON : *Introduction to symplectic topology*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, third édition, 2017.
- [19] John MILNOR : A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds. In *Proceedings Symposia in Pure Mathematics*, pages 39–55. American Mathematical Society, 1961.
- [20] Yong-Geun OH : *Symplectic topology and Floer homology. Vol. 1*, volume 28 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015. Symplectic geometry and pseudoholomorphic curves.
- [21] Leonid POLTEROVICH : The surgery of Lagrange submanifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 1(2):198–210, 1991.
- [22] Pierre PY : *Quasi-morphisms and Hamiltonian diffeomorphisms*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2008.
- [23] Egor SHELUKHIN : “Enlacements asymptotiques” revisited. *Ann. Math. Qué.*, 39(2):205–208, 2015.

- [24] Jake SOLOMON : The calabi homomorphism, lagrangian paths and special lagrangians. *Math. Ann.*, 357(4):1389–1424, 2013.
- [25] Michael SPIVAK : *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., third édition, 1999.
- [26] Alan WEINSTEIN : Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6:329–346 (1971), 1971.
- [27] Alan WEINSTEIN : Symplectic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(1):1–13, 07 1981.