

Université de Montréal

**Utilisation de la géométrie dynamique avec de futurs  
enseignants de mathématiques au secondaire pour  
repenser le développement du raisonnement**

par Caroline Damboise

Département de didactique  
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée  
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph. D.)  
en sciences de l'éducation,  
option didactique

Octobre 2019

© Caroline Damboise, 2019

Université de Montréal  
Faculté des sciences de l'éducation

Cette thèse intitulée

**Utilisation de la géométrie dynamique avec de futurs enseignants de  
mathématiques au secondaire pour repenser le développement du  
raisonnement**

Présentée par  
Caroline Damboise

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes

Sophie René de Cotret  
Présidente-rapporteuse

France Caron  
Directrice de recherche

Philippe R. Richard  
Membre du jury

Serge J. Larivée  
Représentant de la doyenne

Fabienne Venant  
Examinatrice externe (UQAM)

## Résumé

Les outils technologiques sont omniprésents dans la société et leur utilisation est de plus en plus grande dans les salles de classe. Du côté de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, ces outils se sont vu attribuer des rôles qui ont évolué avec les années. Les rôles de soutien, de visualisation et d'enrichissement des contenus en sont des exemples. Une utilisation des outils technologiques dans l'enseignement s'accompagne d'apports pragmatiques et épistémiques potentiels, mais comporte également des limites et des risques. Il s'avère important d'examiner le rôle accordé à l'outil technologique dans les activités qui le mobilisent. Puisque le raisonnement mathématique fait partie d'une des compétences visées à l'école (MELS, 2006) et que les futurs enseignants semblent accorder moins d'importance à la validation et la preuve comme composantes de ce raisonnement (Mary, 1999), nous émettons l'hypothèse qu'une séquence d'activités montrant la complémentarité de la preuve et des explorations tirant parti de la technologie pourrait aider les futurs enseignants à mieux saisir ces enjeux.

La présente recherche s'appuie sur l'ingénierie didactique pour développer et valider une séquence d'activités intégrant le logiciel GeoGebra. Cette séquence d'activités a été conçue dans les buts suivants : initier les futurs enseignants en mathématiques au secondaire à un logiciel de géométrie dynamique et leur donner l'occasion de voir des activités mathématiques utilisant la technologie et visant le développement du raisonnement, par l'articulation de l'exploration et de la preuve. Le cadre théorique sur lequel repose cette recherche intègre des éléments de l'approche anthropologique (Chevallard, 1992, 1998, 2003) et de l'approche instrumentale (Vérillon et Rabardel, 1995; Trouche, 2000, 2003, 2007; Guin et Trouche, 2002). Certaines idées sur les constructions robustes et molles (Soury-Lavergne, 2011), la distinction figure/dessin (Laborde et Capponi, 1994) et le réseau déductif (Tanguay, 2006) ont servi de repères dans la construction de la séquence d'activités.

Cette recherche s'est déroulée au cours de l'hiver 2016 dans une université québécoise, dans le cadre d'un cours de didactique de la géométrie auprès de futurs enseignants au secondaire en mathématiques. Un questionnaire pré-expérimentation a été rempli par les participants afin de voir leurs connaissances préalables sur les programmes, les outils

technologiques ainsi que leurs conceptions au sujet de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Par la suite, les étudiants ont expérimenté la séquence d'activités et ont eu à se prononcer sur les connaissances mises en jeu dans chacune des activités, l'opportunité de son utilisation avec des élèves du secondaire, et les adaptations perçues nécessaires pour sa réalisation (s'il y a lieu). Des traces écrites de leur travail ont été conservées ainsi qu'un journal de bord au fur et à mesure du déroulement de la séquence.

En triangulant les diverses données recueillies, il a été constaté que la séquence, tout en contribuant à l'instrumentation des participants au regard du logiciel utilisé, a eu chez certains d'entre eux un impact sur leur vision du développement du raisonnement mathématique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. L'analyse des données a mis en lumière la place accordée au raisonnement par les futurs enseignants, les raisonnements mobilisés par les étudiants dans les diverses activités ainsi que des indices sur les genèses instrumentales accompagnant ces raisonnements ou les induisant. Suite à l'analyse de ces données et aux constats qui en découlent, des modifications sont proposées pour améliorer la séquence d'activités.

**Mots-clés :** logiciel de géométrie dynamique, GeoGebra, raisonnement, niveaux de preuve, réseau déductif, preuve, approche instrumentale, approche anthropologique

## **Abstract**

Technological tools are ubiquitous in society and their use is growing in the classroom. In mathematics education, these tools have been assigned roles that have evolved over the years: support, visualization, content enrichment. The use of technological tools in education comes with potential pragmatic and epistemic contributions, but also has limitations and risks. We must therefore examine at the activity level the role technology should play. Mathematical reasoning is one of the competencies aimed by school (MELS, 2006) and future teachers seem to place less emphasis on validation and proving processes as components of this reasoning (Mary, 1999). We hypothesize that a sequence of activities showing the complementarity of the proving processes with explorations leveraging technology could help future teachers better understand these issues.

This research is based on didactical engineering to develop and validate a sequence of activities with GeoGebra software. The sequence of activities has been designed to: introduce pre-service secondary mathematics teachers to dynamic geometry software and give them the opportunity to see mathematical activities using technology that aim at developing mathematical reasoning and proof. The theoretical framework on which this research is based integrates elements of the anthropological theory of the didactic (Chevallard, 1992, 1998, 2003) and of the instrumental approach (Vérillon and Rabardel, 1995; Trouche, 2000, 2003, 2007; Guin and Trouche, 2002). Some ideas on robust and soft constructions (Soury-Lavergne, 2011), the distinction between figure and drawing (Laborde and Capponi, 1994) and the deductive network (Tanguay, 2006) served as benchmarks in the construction of the sequence of activities.

This research took place at a Quebec university during the winter of 2016, in a geometry didactics course for pre-service secondary mathematics teachers. A preliminary questionnaire was given to the participants to capture their prior knowledge of programs, technological tools and conceptions about mathematics teaching and learning. Subsequently, the students experienced the sequence of activities and had to decide on the knowledge involved in each activity, the relevance of its use with high school students, and the perceived adaptations necessary for its realization (if considered). Written traces of their work have been kept as well as a diary as the sequence unfolds.

By triangulating the various data collected, it was found that the sequence, while contributing to the instrumentation of the participants with regard to the software used, had, for some of them, an impact on their vision of the development of mathematical reasoning in mathematics education at secondary level. The analysis of the data highlighted the place given to the reasoning by the future teachers, the reasonings mobilized by the students in the various activities and also signs of the instrumental geneses inducing these reasonings and accompanying them. Following the analysis of these data and the findings that follow, modifications are proposed to improve the sequence of activities.

**Keywords** : dynamic geometry software, GeoGebra , reasoning, levels of proof, deductive network, proof, instrumental approach, anthropological approach

# Table des matières

Résumé.....	i
Abstract.....	iii
Table des matières.....	v
Liste des tableaux.....	x
Liste des figures.....	xi
Liste des sigles.....	xiii
Remerciements.....	xv
Introduction.....	1
1 Problématique.....	4
1.1 Présence accrue des outils technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.....	4
1.1.1 Rôles attribués à la technologie dans l'enseignement.....	6
1.1.2 Impact sur les contenus et les pratiques.....	8
1.1.3 Apports pragmatiques et épistémiques.....	10
1.1.4 Limites et risques.....	14
1.2 Le développement du raisonnement comme enjeu du cours de mathématiques.....	17
1.2.1 Le statut accordé au raisonnement mathématique.....	17
1.2.2 La géométrie dans les programmes actuels.....	20
1.2.3 Le rapport à la validation chez les futurs enseignants.....	21
1.3 Des approches d'intégration significatives visant le développement du raisonnement mathématique.....	22
1.3.1 Étude des fonctions.....	22
1.3.2 Entrée dans une géométrie dynamique.....	24
1.3.3 Travail sur la preuve en géométrie élémentaire.....	28
1.3.4 Articulation géométrie-algèbre - Le cas des coniques.....	29
1.4 Les coniques comme lieu d'exploration et de travail du raisonnement.....	31
1.5 Objectif de la recherche.....	33
2 Cadre théorique.....	35
2.1 L'approche anthropologique.....	35

2.1.1	Tâche, technique, technologie, théorie .....	36
2.1.2	Différentes organisations praxéologiques.....	38
2.2	L'approche instrumentale.....	39
2.2.1	La genèse instrumentale.....	40
2.2.2	Orchestration instrumentale.....	43
2.3	Apports des approches anthropologiques et instrumentales .....	44
2.3.1	Valeur pragmatique et valeur épistémique .....	45
2.3.1.1	Phénomène de <i>pseudo transparence</i> .....	47
2.3.1.2	Phénomène de <i>double référence</i> .....	48
2.3.2	Liens entre les approches anthropologique et instrumentale .....	48
2.4	Raisonnement, exploration et preuve.....	49
2.4.1	Types de raisonnement .....	49
2.4.2	Définition de la preuve et types de preuves.....	50
2.4.3	Fonctions de la preuve .....	53
2.4.4	Travail et espace de travail mathématique (ETM).....	54
2.4.5	Preuve dans un environnement technologique .....	58
2.4.5.1	Distinction dessin/figure .....	58
2.4.5.2	Propriétés caractéristiques et définitions .....	59
2.4.5.3	Réseau déductif.....	59
2.5	Concepts mathématiques ciblés dans la séquence d'activités .....	60
2.5.1	Quadrilatères.....	60
2.5.2	Médiatrice .....	63
2.5.3	Coniques .....	64
2.5.3.1	Intersection d'un cône .....	64
2.5.3.2	Lieu géométrique .....	65
2.5.3.3	Définition bifocale .....	66
2.5.3.4	Définition monofocale .....	67
2.5.3.5	Apports des différentes définitions dans un environnement de géométrie dynamique.....	69
2.6	Précisions apportées sur les questions de recherche.....	70
3	Méthodologie.....	72



3.1	Considérations générales sur la recherche .....	72
3.1.1	Participants à l'étude .....	73
3.2	Ingénierie didactique.....	74
3.2.1	Analyses préalables.....	74
3.2.2	Conception et analyse a priori.....	75
3.2.2.1	Description du questionnaire préalable.....	76
3.2.2.2	Description du questionnaire post-expérimentation .....	77
3.2.2.3	Principes généraux considérés dans l'élaboration de la séquence .....	78
3.2.2.4	Description des diverses activités .....	79
3.2.2.5	Analyse a priori des activités .....	87
3.2.2.6	Synthèse des liens entre les activités de la séquence didactique .....	100
3.2.3	Expérimentation, analyse a posteriori et validation .....	102
3.2.3.1	Paramètres de l'expérimentation .....	102
3.2.3.2	Analyse des données recueillies.....	104
4	Analyse des résultats et interprétation .....	105
4.1	Précisions sur les conditions effectives de l'expérimentation .....	105
4.2	Analyse des productions du groupe .....	107
4.2.1	Retour sur l'activité A .....	107
4.2.1.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	107
4.2.1.2	Niveaux de preuve .....	109
4.2.1.3	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	112
4.2.1.4	Évaluation globale de la contribution de l'activité A.....	114
4.2.2	Retour sur l'activité B .....	115
4.2.2.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	115
4.2.2.2	Niveaux de preuve .....	117
4.2.2.3	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	119
4.2.2.4	Évaluation globale de la contribution de l'activité B .....	120
4.2.3	Retour sur l'activité D .....	121
4.2.3.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	121
4.2.3.2	Niveaux de preuve .....	123
4.2.3.3	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	124

4.2.3.4	Évaluation globale de la contribution de l'activité D .....	126
4.2.4	Retour sur l'activité E.....	127
4.2.4.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	127
4.2.4.2	Écueils épistémiques.....	129
4.2.4.3	Niveaux de preuve .....	129
4.2.4.4	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	132
4.2.4.5	Évaluation globale de la contribution de l'activité E .....	134
4.2.5	Retour sur l'activité F .....	135
4.2.5.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	136
4.2.5.2	Écueils épistémiques.....	137
4.2.5.3	Niveaux de preuve .....	138
4.2.5.4	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	140
4.2.5.5	Évaluation globale de la contribution de l'activité F.....	141
4.2.6	Retour sur l'activité G .....	142
4.2.6.1	Instrumentation et instrumentalisation.....	143
4.2.6.2	Écueils épistémiques.....	144
4.2.6.3	Niveaux de preuve .....	145
4.2.6.4	Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire.....	150
4.2.6.5	Évaluation globale de la contribution de l'activité G.....	152
4.3	Profils des futurs enseignants au regard de la séquence .....	152
4.3.1	Les inspirés .....	155
4.3.2	Les sceptiques .....	158
4.3.3	Les encadrants.....	161
5	Conclusion .....	166
5.1	Synthèse des résultats .....	166
5.1.1	Raisonnement mobilisé par les étudiants.....	167
5.1.2	Enseignement envisagé par les futurs enseignants .....	167
5.1.3	Impact de la séquence chez les étudiants.....	168
5.2	Limites et critiques de la recherche .....	169
5.2.1	Limites et critiques de la séquence .....	169
5.2.2	Limites et critiques de l'expérimentation .....	169

5.3	Améliorations et modifications proposées à la séquence .....	171
5.4	Apports et perspectives de la recherche.....	172
5.5	Retombées potentielles .....	174
	Bibliographie.....	176
	Annexe A : Formulaire de consentement.....	186
	Annexe B : Certificat éthique .....	189
	Annexe C : Questionnaires préalable et post-expérimentation.....	190
	Questionnaire préalable .....	190
	Questionnaire post-expérimentation .....	193
	Annexe D : Guide d’instruction sur GeoGebra.....	197
	Annexe E : Séquence d’activités.....	201
	Activité A (Quadrilatère quelconque).....	201
	Activité B (Quadrilatères).....	205
	Activité C (Quadrilatères).....	208
	Activité D (Médiatrice).....	212
	Activité E (Les coniques).....	215
	Activité F (Parabole).....	219
	Activité G (Excentricité des coniques) .....	222
	Annexe F : Comparaison des questionnaires pré et post expérimentation avec les résultats des étudiants .....	230
	Questionnaire post-expérimentation .....	230

## Liste des tableaux

Tableau I. Définitions et propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers.....	62
Tableau II. Description, tâches et intentions didactiques des 7 activités de la séquence. ...	86
Tableau III. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité A.....	112
Tableau IV. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité A selon les étudiants. ....	114
Tableau V. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité B.....	119
Tableau VI. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité B selon les étudiants. ....	120
Tableau VII. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité D.....	124
Tableau VIII. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité D selon les étudiants. ....	126
Tableau IX. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité E.....	132
Tableau X. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité E selon les étudiants. ....	134
Tableau XI. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité F.....	140
Tableau XII. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité F selon les étudiants. ....	141
Tableau XIII. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité G.....	150
Tableau XIV. Caractérisation de l'enseignement souhaité des étudiants avant et après la séquence d'activités.....	153
Tableau XV. Caractérisation de l'enseignement anticipé des étudiants avant et après la séquence d'activités.....	154

## Liste des figures

Figure 1.	Représentation graphique de la fonction tangente sur la TI-83. ....	15
Figure 2.	Exemple de construction robuste (à gauche) et de construction molle (à droite). ....	26
Figure 3.	La genèse instrumentale schématisée par Trouche (2007, p. 25). ....	41
Figure 4.	L'espace de travail mathématique décrit par Kuzniak (2011). ....	56
Figure 5.	Espace de travail mathématique en géométrie (Gousseau-Coutat et Richard, 2011, p. 120). ....	57
Figure 6.	Classification des quadrilatères. ....	63
Figure 7.	Les sections coniques. ....	65
Figure 8.	Trois coniques ayant le même foyer et la même directrice selon la valeur de l'excentricité. ....	68
Figure 9.	Réseau déductif à compléter dans l'activité G. ....	99
Figure 10.	Principaux liens entre les activités de la séquence. ....	102
Figure 11.	Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité A. ....	108
Figure 12.	Production d'Alexandre dans GeoGebra pour l'activité A. ....	108
Figure 13.	Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité A. ....	108
Figure 14.	Production de Mylène dans GeoGebra pour l'activité A. ....	109
Figure 15.	Production écrite de Geneviève à la question 1 de l'activité A. ....	110
Figure 16.	Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité B. ....	116
Figure 17.	Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité B. ....	116
Figure 18.	Production écrite de Brigitte à la question 1 de l'activité B. ....	117
Figure 19.	Production de Brigitte dans GeoGebra pour l'activité B. ....	118
Figure 20.	Production écrite de Mylène à la question 5 de l'activité D. ....	122
Figure 21.	Production d'Alexandre dans GeoGebra pour l'activité E. ....	128
Figure 22.	Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité E. ....	128
Figure 23.	Production écrite d'Alexandre à la question 1 de l'activité E. ....	130
Figure 24.	Production écrite de Brigitte à la question 1 de l'activité E. ....	131
Figure 25.	Production écrite d'Ophélie à la question 1 de l'activité E. ....	131
Figure 26.	Production écrite d'Ophélie dans la section <i>Rétroaction</i> de l'activité E. ....	133
Figure 27.	Construction donnée aux étudiants pour l'activité F. ....	136

Figure 28.	Production écrite de Mylène à la question 1 c de l'activité F. ....	136
Figure 29.	Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité F. ....	137
Figure 30.	Production écrite d'Ophélie à la question 3 de l'activité F.....	139
Figure 31.	Construction donnée aux étudiants pour l'activité G. ....	143
Figure 32.	Production écrite de Geneviève aux questions 4 et 5 de l'activité G. ....	144
Figure 33.	Production écrite de Brigitte à la question 3 de l'activité G. ....	146
Figure 34.	Production écrite de Brigitte à la question 4 de l'activité G. ....	146
Figure 35.	Production écrite de Geneviève à la question 4 de l'activité G. ....	146
Figure 36.	Production écrite d'Alexandre aux questions 3, 4 et 5 de l'activité G. ....	147
Figure 37.	Production écrite de Valérie aux questions 3, 4 et 5 de l'activité G. ....	147
Figure 38.	Réseau déductif complété par Alexandre à l'activité G. ....	148
Figure 39.	Réseau déductif complété par Mylène pour l'activité G. ....	149
Figure 40.	Production écrite d'Alexandre dans la section <i>Rétroaction</i> de l'activité G. ...	151
Figure 41.	Niveaux de preuve déployés par les <i>inspirés</i> en fonction de l'activité.....	156
Figure 42.	Niveaux de preuve déployés par les <i>sceptiques</i> en fonction de l'activité.....	159
Figure 43.	Production écrite de Valérie à la question 3 de l'activité B.....	159
Figure 44.	Niveaux de preuve déployés par les <i>encadrants</i> en fonction de l'activité.....	163

## Liste des sigles

CST : Culture, société et technique

ETM : Espace de travail mathématique

GRMS : Groupe des responsables de mathématique au secondaire

MEES : Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur

MELS : Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport

MEQ : Ministère de l'Éducation

PDA : Progression des apprentissages

PFEQ : Programme de formation de l'école québécoise

SN : Sciences naturelles

TAD : Théorie anthropologique du didactique

TIC : Technologie informatique et de la communication

TNI : Tableau numérique interactif

TS : Technico-sciences

VMT : Virtual Math Teams

*À ma mère,  
Pour son exemple de courage, de force et de résilience.*



## Remerciements

Un merci tout spécial à ma directrice, Mme France Caron, qui a accepté de m'accompagner dans ce projet, qui m'a soutenue et offert de précieux conseils. Merci pour cette belle collaboration et le partage d'idées enrichissantes.

Merci à Mme Analia Bergé qui m'a si gentiment offert de réaliser mon expérimentation dans le cadre de son cours de didactique de la géométrie. Ce fut un réel plaisir de pouvoir travailler avec les étudiants de ce cours et de le faire avec votre collaboration.

Merci à ma sœur qui a été l'étincelle pour me lancer dans ce doctorat. Nos discussions m'ont donné le courage d'amorcer ce projet et de le poursuivre.

Merci à mon conjoint, à mes enfants et à ma famille qui m'ont écoutée et soutenue tout au long de ces études. Sans votre oreille attentive, votre patience et votre compréhension, il m'aurait été difficile d'aller au bout de cette aventure.

# Introduction

Dans mon expérience d'enseignante en mathématiques, j'ai souvent pu constater que certains élèves voulaient des procédures à appliquer plutôt que des occasions de comprendre ce qu'ils font. Le raisonnement mathématique ne semblait pas occuper une très grande place dans leur conception de l'activité mathématique. Cela m'a portée à réfléchir au raisonnement en mathématique et à la place qu'on lui accorde au secondaire. Est-ce qu'on explique suffisamment aux élèves d'où viennent les formules qu'on utilise? Favorise-t-on la compréhension ou valorise-t-on plutôt l'application de procédures? Je me suis également questionnée sur la place qu'on accorde au raisonnement dans les différents cours collégiaux et universitaires. L'idée de concevoir une séquence visant le développement du raisonnement mathématique a alors émergé.

Je cherchais une façon de concevoir une séquence d'activités qui puisse pousser plus loin la compréhension des notions et le raisonnement à mobiliser. Puisque les technologies sont de plus en plus présentes dans l'enseignement, mais souvent limitées à un rôle accessoire, je me suis intéressée à l'intégration de celles-ci dans la séquence. L'utilisation de la technologie pourrait me servir dans des activités pour libérer la partie plus technique et ainsi mettre davantage l'emphase sur le raisonnement mathématique.

La présente thèse traite de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans une séquence d'activités réalisée auprès de futurs enseignants de mathématiques au secondaire. Cette séquence a été conçue dans le but de donner aux futurs enseignants un exemple d'utilisation de la technologie pour développer le raisonnement afin qu'ils soient davantage en mesure de comprendre les enjeux liés à cette utilisation. Ainsi, l'hypothèse à la base de la séquence est qu'à travers son expérimentation, les étudiants pourront aller plus loin dans leurs apprentissages, établir de nouveaux liens entre différents concepts géométriques et envisager une façon d'en faire bénéficier leur enseignement. Cette séquence se base sur une articulation entre l'exploration que permet GeoGebra et le raisonnement qui peut en découler sur les objets géométriques construits dans cet environnement.

L'objectif de recherche orientant cette thèse repose sur une volonté de valoriser le développement du raisonnement mathématique dans l'usage d'outils technologiques. Nous voulions vérifier si les étudiants se satisfont de la visualisation permise par le logiciel ou s'ils

cherchent à en comprendre les raisons et s'engagent alors dans le développement d'une preuve plus élaborée. À travers l'étude de l'articulation entre la preuve et l'exploration permise dans un contexte d'utilisation de la technologie, nous souhaitons sonder et faire évoluer le rapport au raisonnement d'étudiants en enseignement des mathématiques et ce qu'ils entendent valoriser chez leurs élèves dans leur pratique future. Nous avons donc cherché à développer une séquence d'activités qui pourrait outiller en ce sens la formation à l'enseignement des mathématiques.

Dans le chapitre 1 de cette thèse, nous décrivons d'abord la problématique entourant l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques. La littérature associée est présentée en faisant état des différents rôles attribués à la technologie, à ses apports pragmatiques et épistémiques ainsi qu'à ses limites et risques. Nous nous tournons ensuite du côté du développement du raisonnement en mathématiques ainsi que du rapport à la validation et à la preuve qu'entretiennent les futurs enseignants. Des approches d'intégration de la technologie qui s'inscrivent dans la visée de développer le raisonnement sont ensuite présentées. Cela nous conduit à envisager et à orienter la conception d'une nouvelle séquence d'activités adaptée au contexte québécois de la formation initiale à l'enseignement des mathématiques au secondaire.

Le cadre théorique servant de base à cette recherche est l'objet du chapitre 2. Nous y décrivons les approches anthropologique et instrumentale ainsi que des éléments conceptuels ayant servi de repères à l'élaboration de la séquence d'activités. En particulier, les principaux types de raisonnement en mathématiques, les niveaux de preuve (Balacheff, 1998), les fonctions de la preuve (Mary, 1999) et l'espace de travail mathématique (Kuzniak, 2011) y sont présentés. Après un parcours des objets mathématiques ciblés par la séquence, le chapitre se termine par la formulation de nos questions de recherche.

Le chapitre 3 poursuit avec la méthodologie utilisée dans cette recherche. Cette méthodologie s'appuie sur l'ingénierie didactique développée par Artigue (1988, 1996, 2002b). Chacune des activités de la séquence est décrite en fonction des buts poursuivis, des conduites et des difficultés attendues chez les étudiants et du rôle que cette activité joue dans la séquence.

L'analyse des données est détaillée dans le chapitre 4 avec l'interprétation de ces résultats. Cette analyse débute par une analyse des productions de groupe dans les différentes

activités. Les difficultés rencontrées par les étudiants ainsi que les stratégies déployées seront présentées. Ainsi, il sera possible de constater des éléments portant sur les types de raisonnement mis en œuvre par les étudiants, les genèses instrumentales qui seront présentes tout au long de la séquence et la place qui sera accordée au raisonnement dans les adaptations envisagées par les futurs enseignants aux activités. Cette analyse permettra de faire ressortir trois profils chez les futurs enseignants et d'expliquer, tout au moins en partie, ce qu'ils ont retiré de l'expérience de la séquence proposée.

Nous concluons avec une synthèse des résultats obtenus, les limites de l'étude, les suites qu'on pourrait lui donner et les améliorations qu'on pourrait apporter à la séquence d'activités. Finalement, nous discutons des apports, perspectives et retombées possibles de ce projet de recherche. On retrouvera dans les annexes les activités de la séquence ainsi que les différents outils qui en ont permis l'expérimentation.

# 1 Problématique

En ce début de troisième millénaire, les outils technologiques sont omniprésents dans notre société. Cela se reflète en éducation, et particulièrement dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques; plusieurs recherches ont exposé les apports et les limites de l'intégration dans ce domaine. Ce chapitre présente la problématique entourant la présence et les usages de la technologie dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'origine de cette recherche. Nous ciblerons ensuite l'utilisation de la technologie dans le but particulier de soutenir le raisonnement mathématique. Cela nous conduira à cibler les contenus mathématiques visés dans l'étude et à préciser les objectifs de la recherche.

## 1.1 Présence accrue des outils technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Il y a plus de vingt ans, Cornu (1992) constatait déjà que la technologie changeait « la façon de travailler » (p.16) des mathématiciens et faisait ainsi évoluer le savoir mathématique même si cela ne se reflétait pas toujours de façon directe dans le savoir enseigné. En effet, comme il le soulignait alors, l'évolution de la technologie peut s'observer en l'espace d'un an alors que l'évolution des programmes suit des cycles beaucoup plus longs, d'une dizaine d'années typiquement. De plus, cette évolution des programmes suppose que les pratiques enseignantes évoluent en phase avec l'intégration de la technologie qu'on y fait, tout comme les façons dont les élèves apprennent et travaillent. Cornu (1992) ajoutait par ailleurs que « l'ordinateur ne remplace pas, en règle générale, l'intelligence, les aptitudes, les compétences des élèves : il les étend; il étend le champ des possibles, il ouvre des domaines nouveaux, des actions nouvelles » (p. 64). Il apparaissait donc à la fois possible et même légitime que les programmes évoluent en accordant une plus grande place, entre autres, aux mathématiques appliquées et aux mathématiques expérimentales qui se sont développées grâce aux technologies.

L'évolution des programmes de mathématiques au Québec n'a pas échappé à cette volonté de prendre en compte l'évolution technologique, avec une référence plus fréquente aux

possibilités de calcul et d'exploration apportées par la technologie et un encouragement à utiliser de nouveaux outils dans les activités mathématiques. De plus, les savoirs à enseigner ont quelque peu changé en lien avec l'évolution des mathématiques appliquées; on a ainsi vu apparaître des éléments de mathématiques discrètes tels que les graphes dans les programmes de cinquième secondaire (MEQ, 1996a, 1996b) et une plus grande importance accordée aux probabilités et à la statistique. Bref, l'évolution de la technologie est perceptible dans les programmes de mathématiques : d'abord au regard des savoirs contenus dans ces programmes, mais surtout au regard des différents types d'activité mathématique qu'on cherche à promouvoir.

En outre, la présence des outils technologiques se fait de plus en plus sentir dans les salles de classe. Après quelque quinze ans de présence de la calculatrice à affichage graphique qui en firent, et de loin, l'outil technologique le plus répandu dans les écoles secondaires québécoises (Boileau et Garançon, 2009), les supports informatiques se sont diversifiés. Depuis le plan d'intervention « Les TIC en éducation » élaboré en 1996, le Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS) a travaillé afin de rendre la technologie plus accessible. De nombreux projets ont vu le jour permettant à des familles d'avoir accès à des ordinateurs, de brancher en réseau des écoles ou des villages éloignés. Après la calculatrice et l'ordinateur portable, le projet de « L'école 2.0 : la classe branchée » élaboré par le MELS en 2011, a permis à plusieurs commissions scolaires de se procurer des tableaux numériques interactifs. Récemment, ce programme a été mis en suspens, mais le milieu scolaire semble se doter d'une nouvelle approche avec la présence croissante de tablettes numériques dans les salles de classe. Cela pourrait témoigner d'une volonté de passer de l'utilisation de la technologie pour l'enseignement à une utilisation accrue pour l'apprentissage.

Du côté logiciel, il convient de souligner l'importance croissante des logiciels de géométrie dynamique tels que Cabri-Géomètre et GeoGebra, lesquels offrent des possibilités intéressantes pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. De plus, avec sa fenêtre algébrique intégrée à son interface, GeoGebra permet d'ouvrir aisément aux domaines de l'algèbre, des fonctions et de la géométrie analytique. Ce logiciel peut notamment constituer un substitut intéressant aux calculatrices à affichage graphique pour l'étude des fonctions et de leurs paramètres. Également, dans le domaine de l'algèbre, l'utilisation de logiciels de manipulation symbolique ainsi que différents applets ont fait l'objet de recherches plus approfondies (Kieran

et Drijvers, 2006). Par exemple, Kieran et Drijvers (2006) ont pu observer que l'utilisation d'un outil technologique de manipulation symbolique dans des tâches de factorisation permet aux élèves d'enrichir leur façon de comprendre ce concept et la théorie qui l'entoure tout en les aidant à améliorer leurs techniques dans la résolution de la tâche demandée. Finalement, il convient de mentionner la possibilité d'utiliser des tableurs et autres logiciels de traitement de données dans l'enseignement et l'apprentissage des probabilités et de la statistique. La puissance de ces outils permet en effet de considérer des échantillons beaucoup plus grands et de reléguer les calculs fastidieux à l'arrière-plan, pour mieux cibler l'attention sur l'analyse statistique. Ils ouvrent aussi à la simulation de phénomènes stochastiques.

Bref, autant les logiciels que les outils disponibles semblent être plus variés et plus présents depuis le début des années 2000, ouvrant ainsi plusieurs avenues différentes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Cette présence accrue de la technologie n'est pas que le reflet de la disponibilité des outils; comme l'explique Caron (2003), elle a évolué en fonction des rôles que l'on a attribués à l'utilisation de ces outils dans l'enseignement.

### **1.1.1 Rôles attribués à la technologie dans l'enseignement**

La demande d'intégration des outils technologiques dans l'enseignement provient en partie de la société qui réclame de l'école de former à l'utilisation de ces outils de plus en plus présents dans le monde du travail. On cherche à qualifier de futurs employés aptes à se débrouiller avec les outils technologiques et à s'adapter à leur évolution. La présence accrue de la technologie dans la société paraît donc dicter à l'éducation la voie à suivre, c'est-à-dire celle de favoriser l'intégration des outils technologiques dans l'enseignement. Le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ), tant au premier cycle qu'au deuxième cycle du secondaire, mentionne que « le recours à la technologie – qui est devenu incontournable dans le quotidien de tout citoyen – y est considéré comme une aide précieuse dans le traitement de situations diverses. » (MELS, 2007, p. 2). Selon Karsenti,

si l'école a pour mission de mieux préparer les futurs citoyens aux défis de la société de demain, elle se doit de favoriser une intégration en profondeur, quotidienne et régulière, des technologies de l'information et de la communication pour mettre à profit les possibilités nouvelles, invitantes, prometteuses et diversifiées des TIC en éducation. (Karsenti, 2002, p. 1)

Collin et Karsenti (2012) suggèrent que les TIC doivent apporter « une valeur ajoutée à la situation d'enseignement-apprentissage » (p. 70) pour que leur intégration soit pertinente sur un plan pédagogique. Selon ces auteurs, la valeur ajoutée peut se décliner de différentes façons : « des supports riches, interactifs et diversifiés, une autonomie et une motivation accrues des élèves de même que des possibilités de collaboration, de mutualisation des compétences, ainsi que d'autoévaluation et de réflexion. » (Collin et Karsenti, 2012, p. 71). Cette vision pédagogique, nourrie d'observations des deux chercheurs dans le contexte d'enseignement des langues, gagne à être revue et précisée pour l'enseignement des mathématiques. L'épistémologie et les façons de faire propres à chaque discipline commandent en effet un regard didactique sur l'intégration des technologies qui prenne en compte les particularités de la discipline et des pratiques qui lui sont propres.

Le rôle de soutien accordé à la technologie est bien visible dans les classes de mathématiques, mais il a parfois pris d'autres directions que celles évoquées par Collin et Karsenti (2012). En effet, si la calculatrice a fait son apparition dans l'enseignement vers la fin des années 1970, elle y tenait essentiellement un rôle de vérification ou de soutien à une activité mathématique traditionnelle (Caron, 2003). Les années 1980 ont vu une intégration progressive de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques ainsi que la mise sur pied d'applications pédagogiques; des exercices pour la plupart. Par contre, le temps requis pour la programmation de nouvelles applications ou pour la mise en place de situations d'apprentissage en mathématiques dans un contexte de programmation semblait un obstacle que plusieurs préféraient ne pas surmonter. On laissait ainsi ces éléments à « une exploration autonome chez ceux qui avaient accès à un ordinateur [ou] à une forme d'auto-enseignement par la reproduction » (Caron, 2003, p. 61) pour ceux qui en avaient le désir ou qui manifestaient un intérêt particulier pour la programmation.

Vers la fin des années 1980 et le début des années 1990, le développement des capacités graphiques a constitué un tournant dans l'intégration des outils technologiques dans l'enseignement (Caron, 2003). Ainsi, en ouvrant vers des possibilités d'exploration et d'expérimentation, l'intégration de la technologie avait pour but de faire « gagner un temps précieux durant l'exploration de ces concepts et [permettre] ainsi d'atteindre avec davantage d'efficacité les objectifs pédagogiques visés. » (MEQ, 1996b, p. 15). L'efficacité des outils et le



gain de temps semblent donc avoir été des arguments ayant favorisé l'utilisation de la technologie à cette époque.

Dès la première version du programme de mathématiques aujourd'hui en vigueur, la technologie y est présentée comme un outil permettant à l'élève de se décharger « des opérations fastidieuses pour lui permettre d'approfondir ses connaissances » (Caron, 2003, p. 65). Le MELS encourage l'utilisation de la technologie en soulignant les apports des outils technologiques dans son *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ). Tant au premier cycle qu'au deuxième cycle du secondaire, les programmes de mathématiques déclarent qu'en permettant « l'exploration, la simulation et la représentation de situations nombreuses, complexes et diversifiées, la technologie favorise autant l'émergence que la compréhension de concepts et de processus mathématiques. Elle augmente l'efficacité de l'élève dans l'accomplissement des tâches qui lui sont proposées. » (MELS, 2007, p. 2). On suggère ainsi l'intérêt, pour l'enseignement et l'apprentissage de notions mathématiques, d'utiliser les outils technologiques.

Artigue décrit l'influence des logiciels dans l'enseignement « en tant qu'outils de visualisation, de réification et manipulation directe d'objets mathématiques, de calcul au sens large et de simulation » (Artigue, 2008, p. 14), résumant ainsi les principaux rôles attribués à la technologie. Cette influence s'est fait sentir tant du côté des contenus que des pratiques.

### **1.1.2 Impact sur les contenus et les pratiques**

Selon Cornu (1992), la technologie a un impact sur les programmes, car « les contenus évoluent, l'enseignement également. » (p. 64-65). La technologie permet d'élargir le contenu enseigné, mais aussi de l'enrichir en modifiant les approches ou en apportant des éléments nouveaux. En donnant comme exemple le fait que les ordinateurs permettent de trouver des nombres premiers qui sont de plus en plus grands, Cornu (1992) montrait que la présence de ces outils permet non seulement d'étendre « le domaine des nombres sur lesquels il est possible de travailler », mais aussi « de découvrir des propriétés nouvelles, et de développer des méthodes d'investigation nouvelles. » (p. 16).

Tout comme la recherche en mathématique, l'enseignement aussi a pu bénéficier de nouvelles approches. Artigue (2008) en donne un exemple en précisant que la technologie a influencé son propre enseignement des mathématiques au niveau universitaire en lui permettant

d'adopter une approche plus qualitative du concept d'équations différentielles. En fait, les possibilités de visualisation des interfaces graphiques lui ont permis d'adopter une telle approche en montrant « comment la donnée d'un champ de tangentes conditionnait physiquement le tracé et [...] en quoi la méthode d'Euler se différenciait des méthodes d'approximation de courbes par des lignes brisées » (Artigue, 2008, p. 14). Cette nouvelle approche permettait donc de compléter son ancien enseignement qui ne visait alors que les méthodes de résolution algébrique des équations différentielles. Ainsi, la technologie a favorisé le recours à des processus itératifs pour calculer des intégrales plus coriaces et pour mieux visualiser ce qui se produit lorsque l'on cherche une intégrale grâce au champ des tangentes. Elle soulignait que « la technologie a rendu viable un enseignement plus conforme à l'épistémologie actuelle du domaine » (Artigue, 2008, p. 15).

En offrant des moyens de décharger du travail technique fastidieux et d'aborder les concepts de façon plus qualitative, la technologie ouvre de nouvelles voies pour cibler la compréhension des concepts. Au Québec, dès les années 90, les programmes encourageaient l'emploi des technologies en mathématiques, en ce sens, en mentionnant que « l'enseignant devrait insister davantage sur la compréhension de concepts que sur l'utilisation de formules. » (MEQ, 1996b, p. 32). Dans ces programmes, on note aussi l'ajout en cinquième secondaire d'éléments de contenu associés à la statistique, avec une introduction à la corrélation et à la régression linéaire. Comme l'utilisation de la calculatrice à affichage graphique dans les cours de mathématiques permet de trouver rapidement l'équation de la droite de régression et le coefficient de corrélation associé, on peut supposer que l'accès à la technologie a favorisé la présence de ces contenus dans le programme. Une recherche de Forster (2006) a d'ailleurs souligné que l'introduction de la régression à l'aide d'outils technologiques pouvait permettre de développer la compréhension des élèves de ce concept. On est allé plus loin dans cette direction avec la réforme qui s'est déployée dans les années 2000. En effet, dès la quatrième secondaire, les élèves de la séquence Technico-Sciences apprennent à « interpoler ou extrapoler des valeurs à l'aide de la droite de régression [et même] du modèle fonctionnel le mieux ajusté à la situation » (MEES, 2016, p. 26). Ainsi, les modèles de corrélation étudiés ne sont plus seulement linéaires.

Le MELS met en évidence la valeur ajoutée qu'il attribue à la technologie dans les situations d'apprentissage en mathématiques :

La technologie, qui influe sur la mathématique et sur son utilisation, ne saurait se substituer aux activités intellectuelles. Elle demeure cependant d'une grande utilité. Elle permet notamment à l'élève de faire des apprentissages en mathématique, d'explorer des situations plus complexes, de manipuler un grand nombre de données, d'utiliser une diversité de modes de représentation, de simuler et de faciliter des calculs fastidieux. Il peut ainsi se consacrer à des activités significatives, développer ses aptitudes en calcul mental et approfondir le sens des concepts et des processus mathématiques. (MELS, 2006, p. 238)

Cet extrait laisse envisager des approches différentes dans certains domaines dont les probabilités et la statistique. En permettant d'augmenter le nombre de données dans le calcul d'une moyenne, la technologie rend accessibles des tâches plus significatives faisant appel à ce concept. De même, en ouvrant sur les possibilités de simulation, on peut mieux lier les probabilités théoriques et les probabilités expérimentales.

Dans le domaine de la géométrie, le MELS fait valoir l'intérêt de recourir aux logiciels de géométrie dynamique :

Les logiciels de géométrie dynamique constituent une bonne illustration de l'apport de la technologie. Ces logiciels permettent à l'élève de manipuler plus facilement certaines figures, d'explorer différentes situations, de découvrir certaines propriétés des figures ou encore d'en construire à partir de leurs définitions et de leurs propriétés et, ainsi, de consolider ses savoirs géométriques. (MELS, 2006, p. 238)

L'approche de l'enseignement de la géométrie peut donc être modifiée par l'utilisation de la technologie en ouvrant sur l'exploration et la manipulation de figures. Cela dit, au-delà des ajouts de contenus ou de la modification des approches, il convient d'examiner de plus près les apports de la technologie en classe de mathématiques.

### **1.1.3 Apports pragmatiques et épistémiques**

Lorsque des techniques sont enseignées en mathématiques, on tient compte de leur double fonction selon Artigue (2013) : « Elles ont une fonctionnalité pragmatique : elles produisent des résultats, et une fonctionnalité épistémique : elles contribuent à la compréhension des objets mathématiques qu'elles engagent, et leur légitimité didactique repose sur ces deux fonctionnalités à la fois » (p. 5). Dans la littérature, plusieurs auteurs font une distinction entre

les apports pragmatiques et les apports épistémiques de l'utilisation de la technologie par les élèves (Cornu, 1992; Balacheff, 1998; Artigue, 2002a, 2008). Dans un environnement technologique, Lagrange (2002) précise qu'« avec les nouveaux outils, des techniques papier/crayon, souvent laborieuses, voient ainsi leurs fonctions pragmatiques assurées par des techniques « presse bouton » » (p. 166); soulevant ainsi que l'outil technologique peut produire des résultats de façon plus rapide, sur des problèmes plus complexes. Ainsi, dès lors qu'on utilise un outil technologique dans le but de résoudre une tâche mathématique, ou que l'on agit sur l'outil pour produire un résultat, on est dans une démarche exploitant l'apport pragmatique de l'outil. Lorsqu'on tient compte de la compréhension des objets mathématiques et que l'on vise la réflexion tout en engendrant de nouvelles questions ou de nouveaux problèmes, on se situe davantage dans la quête d'un apport épistémique. Ces deux apports peuvent être concurrents et même liés au sein de la réalisation d'une même tâche mathématique avec un outil technologique, sans avoir nécessairement le même poids. Artigue (2013) mentionne que l'introduction d'outils technologiques peut également perturber l'équilibre entre ces deux fonctions et être moins intéressant pour les enseignants :

Les environnements numériques modifient de ce point de vue les équilibres culturellement établis, étant source de techniques instrumentées à forte fonctionnalité pragmatique mais dont la fonctionnalité épistémique est à construire. Ainsi deviennent compréhensibles des résistances qui sont l'expression du malaise ressenti face à des ruptures d'équilibres face auxquelles les enseignants se retrouvent démunis. (Artigue, 2013, p. 5-6)

Un des premiers apports pragmatiques mentionné dans les recherches est le fait de faire plus rapidement les calculs grâce à l'outil. Un exemple souvent utilisé est celui de la racine carrée d'un nombre. En fait, l'algorithme à la main est assez long à effectuer, alors que si l'on utilise la calculatrice, celle-ci nous donne une valeur approchée tout à fait convenable, qui dépend du nombre de chiffres que l'outil peut afficher ainsi que du nombre de chiffres qui sont gardés dans sa mémoire. Cela dit, en n'enseignant plus la technique à la main, on n'alimente plus le lien avec le trinôme carré parfait et on ne recourt donc plus à ce pan de la théorie algébrique pour expliquer la technique qui est mobilisée par la calculatrice. Il y a donc un coût sur le plan épistémique, mais on peut le considérer acceptable au regard du gain en efficacité et de la possibilité d'élargir aux racines cubiques et  $n^{\text{ièmes}}$ . Cependant, le simple recours à la touche de la calculatrice constitue une forme de boîte noire pour les élèves puisque les méthodes sous-jacentes ou concurrentes ne sont plus enseignées. Ainsi, comme Balacheff (1998) le soulignait :

« Quand on crée un moyen pour montrer, en même temps on crée un moyen qui empêche de voir. » (p. 5). Plusieurs auteurs, dont Drijvers (2000), ont d'ailleurs souligné ce paradoxe dans l'utilisation de la technologie en mathématiques. Tout en admettant que de ne pas montrer comment l'outil arrive à un résultat puisse constituer un obstacle aux apprentissages des élèves, Drijvers souligne néanmoins que cela peut les motiver à comprendre le fonctionnement de l'outil ou à développer de nouvelles connaissances sur les concepts qui sont en jeu.

De façon plus générale, les fonctions de calcul de l'outil qui s'appuient sur des méthodes numériques et itératives notamment, permettent de résoudre des problèmes qu'on ne pourrait pas résoudre à la main ou avec des méthodes analytiques; cela est notamment vrai autant pour le calcul des racines des équations, polynomiales ou autres (et donc pour la recherche de zéros des fonctions ou d'intersection de courbes), que pour le calcul d'intégrales, la résolution d'équations différentielles ou de vastes systèmes d'équations. La classe des problèmes qui sont accessibles aux élèves grâce à la technologie s'en trouve augmentée, puisque de nouvelles techniques sont rendues possibles en utilisant l'outil (Cornu, 1992). Néanmoins, Caron (2003) soutient qu'à l'école, « l'utilisation typique des outils technologiques (...) n'étend presque jamais les apprentissages mathématiques au-delà de ce qu'il était possible de faire sans cette technologie » (p. 58). Les apports pragmatiques ne sont donc pas pleinement exploités, sans doute par crainte de développer une certaine dépendance vis-à-vis des boîtes noires et d'y perdre une partie des connaissances, mais peut-être aussi par habitude d'une certaine centration sur les processus de calcul dans le programme.

Du côté des apports épistémiques, la capacité de visualiser à partir des différentes représentations de certains logiciels permet de découvrir des propriétés sur des objets mathématiques que l'on ne pouvait pas voir aussi aisément sans ces outils. C'est cet apport qui avait permis à Artigue (2008) d'envisager une autre approche pour son enseignement des équations différentielles. Selon Boileau et Garançon (2009), les enseignants se servent souvent de cette visualisation possible afin d'impliquer davantage les élèves dans l'exploration des savoirs enseignés et dans la construction de leurs connaissances mathématiques. Les élèves sont placés dans des situations où ils doivent explorer des phénomènes, les modifier et essayer de comprendre ce qui se passe lors de ces modifications. Par exemple, le rôle des paramètres d'une fonction semble plus facile à visualiser pour les élèves, mais la plupart du temps, on ne va ni

très loin avec cette notion ni de façon rigoureuse : on se contente de généraliser à partir de quelques observations. Au-delà de ces généralisations hâtives, il convient alors de mieux examiner l'apport de ces activités d'observation sur la compréhension des élèves et les apprentissages réalisés. Tout comme deux représentations d'un solide depuis des perspectives différentes ne nous donnent pas les mêmes informations sur ses propriétés, la représentation graphique et l'équation d'une fonction quadratique ne donnent pas un accès aussi facile aux mêmes propriétés. Par exemple, les zéros d'une fonction comme  $y = 7(x - 2,01)(x - 2,005)$ , se trouvent plus facilement avec le registre symbolique qu'avec le simple registre graphique. De plus, certaines représentations par l'outil peuvent induire l'utilisateur en erreur.

Afin d'aider à exercer un jugement critique chez les élèves, Caron (2003) souligne qu'une confrontation aux limites et aux erreurs de l'outil constitue une première voie à exploiter, et ajoute qu'« on ne pourra parler d'intégration réussie [...] que lorsqu'on visera un outillage technologique et conceptuel qui expose autant les limites de ces outils que les nouvelles possibilités de résolution qu'ils offrent et les nouveaux champs d'étude qu'ils ouvrent. » (Caron, 2003, p. 67) Par exemple, en faisant varier les échelles pour la représentation d'une fonction telle que celle mentionnée ci-dessus, on pourrait amener l'élève à exercer son jugement critique à mieux comprendre la façon dont l'outil gère la représentation graphique, à raffiner sa compréhension de l'objet mathématique dans les différents registres et à développer un regard critique. Il faut donc donner la possibilité à l'élève de construire ses connaissances à l'aide de l'outil en lui permettant une certaine autonomie dans son activité mathématique, en ouvrant les problèmes qui lui sont présentés et en lui offrant des occasions de mieux comprendre les mécanismes et les limites de l'outil.

Une question demeure en suspens, car sa réponse ne semble pas faire l'unanimité : quelles sont les habiletés « papier/crayon » requises ou les connaissances de base que devraient avoir les élèves avant qu'on leur permette un recours à un type d'outil pour un type de tâche? Les avis dans la littérature divergent sur ce point de vue, mais plusieurs renvoient aux limites et aux risques associés à l'utilisation de la technologie en classe de mathématiques.

### 1.1.4 Limites et risques

Il est indéniable que l'utilisation des outils technologiques comporte aussi des limites et des risques, lesquels varient selon l'outil technologique utilisé et le contenu mathématique en jeu.

Une des premières limites vient des contraintes de communication avec le logiciel. Les différentes recherches ayant porté sur l'apprentissage pré-algébrique avec un tableur comme Excel (Haspekian, 2005; Kieran et Yerushalmy, 2004; Capponi et Balacheff, 1989) ont mis en évidence le langage et le symbolisme qui sont propres aux feuilles de calcul de ces environnements. Cette contrainte de communication peut influencer les apprentissages des élèves, puisque les règles utilisées dans le logiciel ne sont pas toujours les mêmes que celles utilisées en mathématiques. Dès 1989, Capponi et Balacheff attiraient l'attention sur l'interaction de deux niveaux de syntaxe très différents, celui du logiciel et celui du langage algébrique. Malgré le décalage entre les deux, la syntaxe rigoureuse que le logiciel impose pour exprimer (voire même traduire) les formules ou les expressions, ainsi que la présence conjointe avec ce logiciel de différents registres sémiotiques utilisables peuvent être exploités dans la conceptualisation. Pour cette raison, ce logiciel peut jouer un rôle intéressant dans le développement du raisonnement algébrique de l'élève, car les élèves voient plus facilement les relations entre toutes les données. Artigue souligne ainsi le fait que ce logiciel peut être vu comme un intermédiaire entre l'arithmétique et l'algèbre : « il est algébrique par son langage, il est arithmétique dans sa manière d'organiser le travail mathématique, en allant du connu vers l'inconnu, en permettant le recours à la démarche analytique. » (Artigue, 2008, p. 21) En ce sens, il peut être utilisé comme moyen pour soutenir le passage de l'arithmétique à l'algèbre chez les élèves. Ainsi, même si ce logiciel n'était pas destiné spécifiquement pour le domaine de l'éducation, il peut, par des activités mathématiques élaborées, aider les élèves dans certains apprentissages liés à l'algèbre. Son utilisation exige cependant des élèves qu'ils aient déjà certaines notions sur les formules et les variables afin de mieux saisir les représentations du logiciel (Haspekian, 2005).

Si l'on considère les calculatrices à affichage graphique, Boileau et Garançon (2009) soulèvent une limite de cet outil concernant la visualisation. En fait, comme les écrans sont petits, les graphiques sont moins fidèles qu'ils pourraient l'être sur des ordinateurs ou des outils

technologiques avec plus de pixels. Ainsi, comme le montre la figure 1, le tracé d'une fonction comme  $y = \tan(x)$  aura l'apparence d'une succession de segments verticaux<sup>1</sup> avec des sauts de l'un à l'autre sur la calculatrice à affichage graphique. Pareille représentation peut conduire certains élèves à ne plus distinguer entre les valeurs où la fonction est définie et celles où elle ne l'est pas. De façon moins apparente et donc plus insidieuse, cette limite peut également se retrouver dans des grapheurs et logiciels de géométrie dynamique qui ne prennent pas la précaution d'identifier les valeurs critiques.

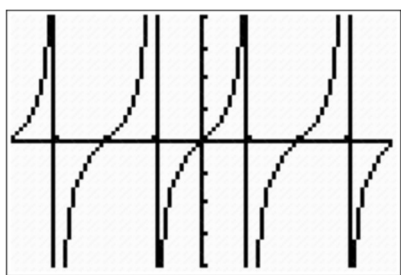


Figure 1. Représentation graphique de la fonction tangente sur la TI-83.

Parmi les formes plus traditionnelles d'intégration de la technologie en classe de mathématiques, on note aussi celle de limiter l'utilisation de l'outil à un rôle de vérification ou de prise en charge des calculs, en espérant pouvoir alors libérer du temps pour l'apprentissage des concepts. Selon Lagrange (2000), cette banalisation de l'outil et la réduction des techniques qu'il prend en charge à un rôle accessoire ne sauraient garantir une meilleure acquisition des concepts ou un travail adéquat du raisonnement mathématique :

L'introduction d'un instrument technologique, si elle tente de réduire la dimension technique de l'activité mathématique à un rôle accessoire, ne peut réellement contribuer à des acquisitions conceptuelles : les élèves vont rencontrer les pièges de la double référence<sup>2</sup> et de l'expérimentation aveugle. En revanche, la prise en compte des techniques est, avec l'instrumentation, une des clés qui permettent de penser l'intégration de la technologie dans l'enseignement. (p. 26)

---

<sup>1</sup> En dépit des apparences, les grands traits verticaux tracés par cette calculatrice ne sont pas des asymptotes qu'elle a « voulu » intégrer à la représentation, mais bien la meilleure représentation qu'elle puisse donner du segment qui lie deux points dont elle a calculé les coordonnées.

<sup>2</sup> Nous reviendrons sur ce terme en 2.3.1.2.



Il faut donc tenir compte des techniques « nouvelles » mises de l'avant par ces outils et réfléchir sur la façon d'en optimiser la transposition dans l'activité des élèves et dans le développement de leur raisonnement mathématique. Une recherche de Kieran et Guzmán (2007), sur l'utilisation de la calculatrice à affichage graphique dans la théorie élémentaire des nombres, illustre bien que la « théorie émerge avec le développement des techniques » (p. 73). Cette recherche s'est déroulée auprès de jeunes de 12 à 15 ans (secondaires 1-2-3) et a pu montrer comment des techniques « nouvelles » permises par les outils se transposent dans l'activité des élèves et peuvent enrichir leur compréhension des concepts et leur raisonnement mathématique. C'est en gardant à l'esprit cet apport de la technologie et les nouvelles relations qu'elle fait émerger avec les savoirs que les enseignants et les didacticiens doivent penser les scénarios pédagogiques utilisés et vécus en classe.

Même lorsqu'on fait utiliser par les élèves les outils technologiques dans une démarche exploratoire potentiellement porteuse, on n'est pas à l'abri des raccourcis que pareille utilisation peut induire. Ainsi, à partir de quelques exemples, les élèves peuvent être portés à généraliser ce qu'ils observent; cela n'est pas négatif en soi, car une telle tâche favorise le développement du raisonnement inductif, mais cela le devient quand là s'arrête le processus de recherche pour établir une propriété générale. En effet, plusieurs élèves sont prêts à accorder à l'outil une valeur de vérité absolue, car « son efficacité, sa rapidité de calcul, sa capacité à passer rapidement d'une représentation à une autre paraissent justifier une acceptation inconditionnelle des résultats. » (Caron, 2003, p. 64). Dans le même esprit, Tanguay (2012) dénonce le danger des mesures automatiques fournies par les logiciels de géométrie dynamique :

[...] la mesure, si elle n'est pas adéquatement intégrée à cette transition de la géométrie du menuisier à la géométrie du mathématicien, peut s'ériger en obstacle. Le danger est grand, en effet, de lui donner toute la place, et bien des élèves auront tôt fait de ne recourir qu'à elle comme unique moyen de validation. Les logiciels de géométrie dynamique comme Cabri-géomètre ou GeoGebra peuvent de surcroît amplifier cette mainmise des validations empiriques et expérimentales sur les validations déductives. (Tanguay, 2012, p.34)

En effet, se limiter à de simples observations ou mesures n'est certes pas suffisant pour construire des connaissances mathématiques. Il faut s'engager dans une recherche d'explication du phénomène observé. Après avoir entendu certains futurs enseignants témoigner de leur vision de GeoGebra comme d'un outil qui « nous dispense de faire des preuves » et après avoir constaté

qu'un tel outil « permet à des individus encore forts peu habiles à produire des démonstrations de se prononcer avec conviction et de façon généralement exacte sur la véracité d'énoncés en géométrie élémentaire », Boileau et Garançon (2009, p.253) rappellent l'importance pour l'enseignement des mathématiques de viser la compréhension, la recherche de la raison pour laquelle un énoncé est toujours vrai, « que ne peuvent apporter même les vérifications expérimentales les plus exhaustives ». DeVilliers (2007) souligne également la difficulté de convaincre, en présence de tels outils, les apprenants novices et même les plus expérimentés de l'importance de la preuve comme moyen ultime de validation (DeVilliers, 2007, p. 52).

La manipulation et la visualisation permises par un logiciel de géométrie dynamique, si elles favorisent l'exploration, paraissent donc aussi faire obstacle à la recherche d'explication, ou de preuve. Il convient donc de regarder de plus près l'importance accordée à ces aspects dans l'enseignement des mathématiques au Québec.

## **1.2 Le développement du raisonnement comme enjeu du cours de mathématiques**

Comme nous avons pu le voir, si la technologie ouvre de nouvelles possibilités pour l'enseignement des contenus et si son intégration permet même d'enrichir les contenus enseignés, elle demande une vigilance accrue pour articuler exploration et preuve, pour éviter que la vérification expérimentale ne se substitue à l'exercice du raisonnement mathématique. On peut se demander à quel point ces préoccupations sont partagées dans l'enseignement actuel des mathématiques au Québec. Un regard vers les programmes et le rapport à la validation chez les futurs enseignants offre quelques éléments de réponse.

### **1.2.1 Le statut accordé au raisonnement mathématique**

Le *Programme de formation de l'école québécoise* (MELS, 2007) fait du raisonnement mathématique l'une des trois compétences visées par l'enseignement des mathématiques. On y précise que : « le développement et l'exercice de cette compétence exigent de l'élève qu'il émette des conjectures, qu'il construise et exploite des réseaux de concepts et de processus mathématiques et qu'il les valide en réalisant des preuves ou des démonstrations. » (MELS, 2007, p. 28). Tout en évoquant les différents types de raisonnement (inductif ou déductif) qu'il

cherche à voir s'exercer, ce passage annonce les composantes qu'il donne de la compétence à déployer un raisonnement mathématique :

- Établir des conjectures;
- Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques;
- Réaliser des démonstrations ou des preuves.

La première composante laisse donc place à l'idée du raisonnement inductif qui, au fur et à mesure que les concepts et processus mathématiques des élèves se développeront, pourra mener à un raisonnement déductif, idée présente dans la troisième composante avec les preuves ou démonstrations. Le MELS définit le raisonnement inductif en disant qu'il « consiste à généraliser à partir de l'observation de cas particuliers. » (2007, p. 28). Le raisonnement déductif, quant à lui, y est défini comme un « enchaînement de propositions qui permet de tirer des conclusions à partir d'énoncés considérés comme vrais. » (MELS, 2007, p. 28).

Les trois composantes associées par le MELS à la compétence « raisonner » participent au développement du raisonnement mathématique, mais une importance égale n'est pas attribuée à chacune dans la pratique. Dans les programmes antérieurs, la place laissée à ces composantes a beaucoup varié; en particulier, on a pu observer d'un programme à l'autre un mouvement de balancier entre la valorisation du travail de la preuve et sa mise de côté (Caron et René de Cotret, 2007). Ainsi, dans les années 60, on encourageait la déduction des élèves à la suite de raisonnements logiques qui s'appuient sur différents postulats ou théorèmes afin de favoriser le développement du raisonnement déductif. Ces idées seront abandonnées dans les programmes en 1969, laissant ainsi au raisonnement déductif un statut accessoire et facultatif. Si en 1980, la démonstration était considérée comme de l'enrichissement et le raisonnement déductif n'était pas travaillé (Caron et René de Cotret, 2007), ce n'est qu'au début des années 1990, qu'on assista à une revalorisation officielle de ce type de raisonnement, laquelle sera vite abandonnée au profit d'actions à portée plus réduites, comme faire une construction ou calculer à partir d'algorithmes connus. Ainsi ce sont surtout les situations aujourd'hui qualifiées de « situations d'application », exploitant principalement la sous-composante *Appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques*, qui étaient présentes dans ces années. En lien avec l'apparition de l'approche par compétences, le MELS a entrepris pour une nouvelle fois la revalorisation du

raisonnement déductif en lui accordant un statut particulier dans la compétence 2 avec une de ses composantes (*Réaliser des démonstrations ou des preuves*), laquelle peut aussi participer à « *former des réseaux de concepts et de processus mathématiques* » avant même de chercher à les appliquer. Cela n'a pas été suivi de prescriptions quant aux façons d'intégrer ce type de raisonnement dans les apprentissages mathématiques et l'on a continué d'observer une domination des « situations d'application » directe pour porter la responsabilité du développement d'un raisonnement, somme toute limité, dans les activités d'apprentissage et d'évaluation des élèves. D'ailleurs, dans la PDA, le terme *Démontrer* n'apparaît qu'à deux occasions : en lien avec l'isométrie ou la similitude de triangles ainsi qu'en lien avec les identités trigonométriques (MEES, 2016).

En tirant parti des environnements technologiques qui se déploient dans les écoles et des recherches sur la question, il apparaît possible d'envisager des situations plus riches qui permettent d'intégrer la recherche de conjectures et de preuves dans les expériences des élèves, et, par conséquent, dans le développement de leur raisonnement. Cela demande aussi que les enseignants leur accordent une place dans les leçons qu'ils conçoivent. Sur cet aspect, Caron et René de Cotret (2007) rapportaient que « l'introduction de situations qui demandent de formuler des conjectures peut donc se révéler déstabilisante pour les enseignants qui n'ont pas été confrontés dans leur propre formation à ce type de tâches » (p. 131) et que le déploiement d'outils technologiques, qui viennent justement modifier certaines traditions, constitue une occasion d'ouvrir à d'autres types de tâches que celles auxquelles le système d'enseignement s'est progressivement habitué. Si les tâches d'exploration et de formulation de conjectures semblent depuis avoir gagné en importance, en raison notamment de la présence en classe d'outils technologiques, il n'est pas sûr toutefois que la preuve ait bénéficié d'une même attention.

Comme la géométrie a traditionnellement été le lieu privilégié pour développer le raisonnement mathématique et le rapport à la preuve, il convient de regarder de plus près la place accordée au raisonnement dans la partie du programme consacrée à ce champ disciplinaire.

## 1.2.2 La géométrie dans les programmes actuels

Le parcours des documents ministériels que constituent le PFEQ (MELS, 2006, 2007) et la *Progression des apprentissages* (PDA) (MEES, 2016) conduit à remarquer que l'aspect calculatoire est très présent dans la géométrie enseignée au secondaire; en effet, en plus de la reconnaissance et la description d'objets géométriques et la maîtrise de quelques constructions, un grand nombre d'éléments de la PDA sont en lien avec la recherche de mesures manquantes.

Au premier cycle du secondaire, on favorise la reconnaissance, la description et la construction ou la décomposition des figures planes et des solides. Il y a quelques objectifs en lien avec la justification d'affirmations portant sur les définitions ou les propriétés des figures, mais ils sont peu nombreux : sur 10 énoncés portant sur les figures planes, un seul mentionne de « justifier des affirmations à partir de définitions ou de propriétés de figures planes » (MEES, 2016, p. 28). Dans le PFEQ, on parle ainsi de ce que l'élève doit accomplir en géométrie au premier cycle :

En géométrie, [l'élève] déploie un raisonnement lorsqu'il apprend à reconnaître les caractéristiques des figures usuelles, met en évidence leurs propriétés et effectue des opérations sur les figures planes à l'aide de transformations géométriques. Il compare et calcule des angles, des longueurs et des aires, et il forme des patrons (développements) de solides qu'il représente par un dessin. Il se familiarise avec les définitions des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. Il détermine des mesures manquantes dans différents contextes. (MELS, 2006, p. 243)

À partir de la quatrième secondaire, d'autres objectifs en lien avec la démonstration et la justification d'affirmations s'ajoutent dans la PDA, laissant ainsi suggérer une importance à accorder au raisonnement déductif. Ces démonstrations sont principalement en lien avec les isométries et les similitudes des triangles ou avec les identités trigonométriques. Dans le PFEQ du second cycle, on mentionne :

En géométrie, l'élève déploie un raisonnement lorsqu'il dégage les caractéristiques des figures, met en évidence leurs propriétés et y effectue des opérations. Il recourt à différents types de raisonnement mathématique lorsqu'il construit des figures, compare ou calcule des mesures, notamment à l'aide d'expressions algébriques. Il déduit des propriétés ou des mesures manquantes dans différents contextes en utilisant des définitions et des énoncés déjà admis. Dans certains cas, il a recours à une preuve indirecte pour conclure à l'existence d'une propriété. (MELS, 2007, p. 30)

Comme la preuve n'a qu'une importance relativement mineure dans les prescriptions ministérielles, l'articulation entre exploration et preuve pourrait dépendre du rapport à la validation qu'entretient l'enseignant dans sa classe de mathématiques.

### **1.2.3 Le rapport à la validation chez les futurs enseignants**

Une recherche de Claudine Mary portant sur la place et les fonctions de la validation chez les futurs enseignants avait montré que ces derniers tendaient à utiliser un type de validation particulier, consistant à faire vivre « des expériences répétées souvent à l'aide d'une illustration » à laquelle ils sont prêts à accorder un « potentiel de preuve » (Mary, 1999, p. iv). Après plusieurs cas qui appuyaient leur conjecture, les étudiants en formation des maîtres semblaient prêts à généraliser cette dernière. Ce processus était considéré comme une preuve acceptable par plusieurs futurs enseignants (Mary, 1999).

Deux fonctions de la validation ont été observées dans les leçons préparées par les futurs enseignants : « le besoin de validation de l'objet mathématique » ainsi que « la présentation des contenus et la progression du groupe-classe » (Mary, 1999, p. 273). Ainsi, si les futurs enseignants n'exploitent qu'un sous-ensemble restreint des fonctions de la validation dans la préparation des leçons, une formation à l'enseignement des mathématiques qui sensibilise aux différentes fonctions de la validation pourrait les aider à les exploiter davantage.

Puisque les programmes ont longtemps hésité sur le statut à donner à la validation et à la preuve, il devient intéressant de se questionner sur les impacts que cela peut avoir chez les enseignants actuels et leurs élèves. La recherche de Mary (1999) montrait que les futurs enseignants d'il y a 20 ans ne considéraient pas cet enjeu comme quelque chose d'important. Il pourrait donc s'avérer intéressant de voir si le même constat peut être fait aujourd'hui et si des situations proposées auprès de futurs enseignants qui cherchent à les engager, en interaction avec des outils technologiques, dans un processus de validation les inciterait à accorder davantage de place aux « situations de conjecture » et de « validation » dans leur enseignement, tel que le promeut le MELS dans son approche par compétences et conformément aux différents types de raisonnement (inductif et déductif) mobilisés dans la pratique mathématique.

## 1.3 Des approches d'intégration significantes visant le développement du raisonnement mathématique

Pour illustrer des approches d'intégration des technologies visant le raisonnement mathématique, nous présentons quelques exemples de recherches ayant intégré des outils technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage en algèbre et en géométrie. Il y aurait aussi beaucoup à dire du côté des probabilités et de la statistique, mais pour les fins de cette thèse, nous avons choisi de nous limiter aux champs plus « classiques » de l'algèbre et de la géométrie.

### 1.3.1 Étude des fonctions

Dans l'étude des fonctions, Caron (2003) mentionnait que l'utilisation la plus typique de la calculatrice à affichage graphique dans les classes de mathématiques portait sur le rôle des paramètres. Pour aller plus loin que la simple observation de résultats, elle faisait valoir l'importance pour l'élève, à travers la rencontre de faits surprenants, de s'engager dans une recherche d'explication et de développer au passage des compétences d'explicitation et de raisonnement.

Pour voir les effets d'une méthode exploratoire dans l'étude des fonctions polynomiales, une recherche de Krysinska, Mercier et Schneider (2007), auprès de trois groupes d'élèves de quatrième secondaire (environ 15 ans), proposait la question suivante : « À quels types de graphiques conduisent les fonctions du second degré  $y = ax^2 + bx + c$  lorsqu'on fait varier  $a$ ,  $b$  et  $c$ ? Essayez de dégager les rôles des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . » (p. 140). Les élèves devaient, en groupes de quatre, proposer des conjectures susceptibles de répondre à cette question en utilisant leur calculatrice pour ensuite rédiger un rapport sur le sujet. Une plénière afin de discuter des conjectures trouvées par les élèves de la classe terminait cette partie de l'expérimentation. Deux stratégies principales ont été exploitées : fixer deux paramètres de la fonction en faisant varier le troisième paramètre afin de voir ce qui arrive au graphique et fixer un seul paramètre en faisant varier les deux autres. Cette recherche a permis aux chercheuses de conclure que la calculatrice possède « une valence pragmatique élevée », car elle permet de visualiser rapidement plusieurs phénomènes graphiques. Ainsi, les élèves ont pu tester et formuler des

conjectures sur les rôles des paramètres; travaillant ainsi sur le raisonnement inductif. Par contre, les élèves ont éprouvé deux difficultés majeures lors de cette activité : celle de passer d'une représentation graphique vers une représentation algébrique et celle d'interpréter ce que la calculatrice affiche. Ainsi, la « valence épistémique » de la calculatrice n'est pas assurée d'emblée par sa simple utilisation dans une activité d'exploration; de même que le raisonnement déductif.

Afin d'engager un plus grand travail sur le sens, les chercheurs ont dû modifier les questions afin de permettre aux élèves de mieux associer les écritures algébriques aux phénomènes graphiques visualisés sur la calculatrice. En effet, pour le rôle du paramètre  $a$ , les deux premières classes ont travaillé sur la question : « Décrivez la transformation géométrique qui fait passer de la première  $[(y = x^2)]$  à la seconde  $[(y = 3x^2)]$  et justifiez-la en associant un point quelconque de la première à son image sur l'autre par cette transformation. » (Krysinska, Mercier et Schneider, 2007, p. 143). Dans cette question, « la technique de correspondance point à point » suggérait la méthode à utiliser aux élèves; laissant ainsi peu de place à un travail épistémique. Les chercheurs ont donc reformulé la question ainsi dans le troisième groupe : « Quelle transformation géométrique faut-il faire subir à la courbe d'équation  $y = x^2$  pour obtenir la courbe d'équation  $y = 3x^2$ ? » (Krysinska, Mercier et Schneider, 2007, p. 144) Cette modification a donc permis de tirer parti sur le plan épistémique des apports pragmatiques de l'outil.

Jonin (2006) propose un scénario pédagogique utilisant le tableur Excel sur « l'enchaînement des fonctions conduisant de  $x$  à  $f(x)$  quand  $f$  est donnée par une formule » (p. 44). Ainsi, le scénario repose sur la comparaison entre, d'une part, ce à quoi correspond l'image d'une valeur  $x$  lorsqu'à partir de  $x$  on procède à un enchaînement de compositions de fonctions et, d'autre part, l'image obtenue pour cette même valeur  $x$  lorsqu'on utilise l'expression algébrique développée de la fonction composée associée. Jonin (2006) met en évidence quelques limites à cette situation, mais également des façons d'utiliser ces limites pour



favoriser le raisonnement des élèves. Par exemple, il note que la syntaxe de certaines fonctions<sup>3</sup> peut sembler difficile pour les élèves qui en effectuent le chaînage; elle peut exiger des adaptations comme la présence de parenthèses afin que ces fonctions soient bien traitées par le logiciel, alors qu'elles ne sont pas nécessaires dans un environnement traditionnel. Ces limites apparentes, lorsque bien exploitées, peuvent se révéler porteuses sur le plan de l'apprentissage. Jonin insiste sur le fait que prendre en compte les limites du tableur dans le scénario et les intégrer « concourt à la construction d'une culture critique de l'outil informatique et réactive dans un même temps nos connaissances mathématiques, ce qui ne peut que les valoriser et les renforcer » (Jonin, 2006, p.46). Ainsi, même si un outil technologique comporte des limites, ces dernières peuvent servir de levier pour l'apprentissage des élèves.

### 1.3.2 Entrée dans une géométrie dynamique

Dans l'enseignement de la géométrie, l'introduction de logiciels de géométrie dynamique (d'abord Cabri-Géomètre, et à sa suite, Geometer's Sketchpad et GeoGebra) a ouvert de nouvelles possibilités. Un premier point à souligner est qu'un logiciel de géométrie dynamique peut faire paraître certaines techniques manuelles obsolètes, mais des activités nécessitant de telles techniques peuvent participer de façon importante au développement de la conceptualisation de certaines notions ou compléter les apprentissages réalisés avec le logiciel. En fait, il faut voir ces deux types d'activités comme complémentaires et susceptibles de développer une meilleure conceptualisation chez les élèves (De Villiers, 2007).

De Villiers (2007) mentionne quelques pièges à éviter au regard de leur utilisation dans l'enseignement. D'abord, l'utilisation de ce type de logiciel ne doit pas se limiter aux constructions qu'on ferait avec un simple tableau noir. Les enseignants doivent repenser leur façon d'enseigner avec ces logiciels, car la représentation dynamique à laquelle ils donnent accès peut modifier profondément l'ordre et la façon de présenter les savoirs. De Villiers (2007) rappelle aussi qu'on a tort de croire que les élèves doivent connaître toutes les fonctions et tous

---

<sup>3</sup> Par exemple, Jonin (2006) demandait d'entrer la fonction  $-(x + 2)^2 + 5$ , mais comme le premier « moins » n'était pas pris en compte par l'environnement développé, certains élèves ont proposé d'inscrire l'expression  $0 - (x + 2)^2 + 5$  ou encore l'expression  $(x + 2)^2 (-1) + 5$ . Les élèves ont su ainsi adapter les expressions algébriques à l'outil et exercer un certain contrôle sur ce dernier.

les mécanismes internes d'un logiciel de géométrie dynamique avant de pouvoir commencer à l'utiliser. En fait, on peut montrer aux élèves des figures géométriques qui ont été construites dans le logiciel, leur faire émettre des hypothèses sur l'effet du déplacement d'une figure ou d'un point ou leur faire dégager les propriétés des figures à partir de tels déplacements. En revanche, la construction avec ce logiciel d'une figure qui soit robuste aux déplacements<sup>4</sup> est une activité très riche mais pas toujours accessible à l'élève, car en plus de demander une meilleure connaissance du logiciel, elle repose bien souvent sur la connaissance des propriétés de la figure à construire. De Villiers (2007) relève que lorsque des enseignants demandent ce type de construction aux élèves avant de leur avoir fait explorer les propriétés des objets en jeu, il n'est alors pas étonnant que la tâche se révèle trop ardue.

Pour sortir de ce cercle vicieux et mieux exploiter les possibilités offertes par les environnements de géométrie dynamique, Soury-Lavergne (2011) regroupe en deux types les constructions possibles avec un environnement de géométrie : des constructions robustes et des constructions molles. Le premier type est celui qui est le plus utilisé par les enseignants, où le travail demandé aux élèves est d'observer ce qui se passe dans la figure présentée et ensuite, de formuler la propriété qui semble se dégager de cette figure. Un exemple est la construction d'un cercle avec un diamètre AB et un point M qui est libre sur le cercle. Les points A, B et M sont reliés ensemble et forment un triangle et la tâche des élèves est de vérifier ce qui se produit pour l'angle AMB lorsque le point M se déplace sur le cercle. Ainsi, les élèves vont bouger le point M pour valider l'hypothèse que l'angle AMB sera toujours de 90 degrés. Cependant, la réflexion des élèves est relativement peu favorisée, si on la compare à celle mobilisée dans une construction molle. Pour en arriver à une construction de ce type, il faudrait placer le point M à l'extérieur du cercle afin qu'il puisse se déplacer dans tout l'espace de travail : à l'extérieur, à l'intérieur et sur le cercle. Ainsi, les élèves pourront tester toutes ces positions afin d'émettre une conjecture sur l'angle AMB. Cette conjecture sera ainsi plus riche que le simple fait de constater le phénomène avec la conjecture déjà établie sous les yeux (voir figure 2 pour les deux types de constructions).

---

<sup>4</sup> Dans une figure robuste, l'objet mathématique représenté restera toujours le même peu importe le déplacement des points de cet objet. Ainsi, la figure conserve ses propriétés même si on la déplace.

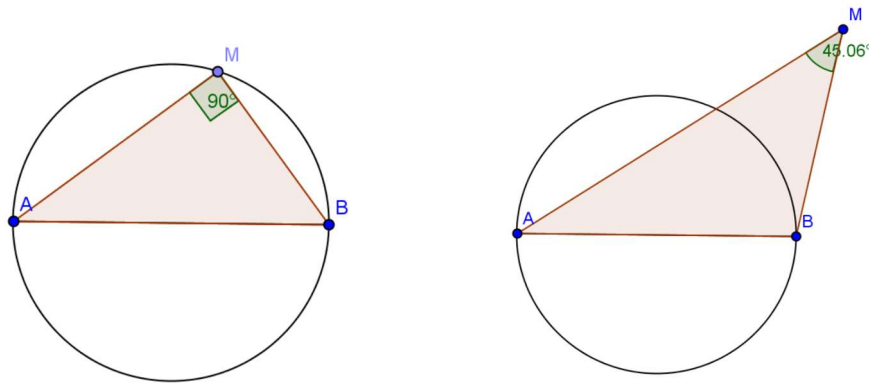


Figure 2. Exemple de construction robuste (à gauche) et de construction molle (à droite).<sup>5</sup>

Cet exemple permet d'illustrer le théorème de Thalès pour le cercle qui dit que si un triangle AMB est inscrit dans un cercle et que le plus long côté est un diamètre de ce cercle, alors le triangle est un triangle rectangle. On remarque que la construction robuste est bâtie en se basant sur deux propriétés mathématiques (triangle inscrit dans un cercle et plus long côté est un diamètre) qui sont vérifiées pour toutes les positions possibles du point M; propriétés qui sont donc invariantes. Le déplacement du point M sert à valider cette propriété faisant en sorte que l'on a un angle droit en M. De l'autre côté, une construction molle permet de relâcher l'invariance d'une de ces propriétés (triangle inscrit), plaçant ainsi les élèves en position d'émettre des conjectures et de les tester par déplacement du point M. L'accent est mis sur la relation entre les hypothèses formulées et la conclusion attendue.

Soury-Lavergne (2011) soutient que la complémentarité des deux types de constructions (robustes et molles) fait des logiciels de géométrie dynamique des outils intéressants pour les enseignants en ce sens que chaque type permet de faire ressortir des propriétés ou des théorèmes mathématiques de façon différente. Regardons un peu plus en détail les apports et les limites de chacun de ces deux types ainsi que le raisonnement qui peut être favorisé dans chacun. D'abord, la construction robuste semble être celle que les enseignants utilisent le plus puisqu'elle ajoute

---

<sup>5</sup> Le lecteur qui souhaite manipuler les fichiers GeoGebra peut se rendre sur les liens suivants : <https://www.geogebra.org/m/rf8dagud> (construction robuste) et <https://www.geogebra.org/m/usenptza> (construction molle).

une précision et un gain de temps comparativement aux constructions papier/crayon. De plus, les élèves peuvent découvrir les différentes propriétés par eux-mêmes. Un apport de ce type de construction est la possibilité qu'ont les élèves de différencier des propriétés vraies sur une figure de celles qui ne sont vérifiées que par moments.

Selon Soury-Lavergne (2011), il existe deux façons principales d'intégrer les constructions robustes dans les situations d'apprentissage, et ces façons diffèrent selon la personne qui détient le contrôle dans l'exécution de la tâche demandée et selon l'incertitude engendrée par cette tâche. La première façon consiste à donner aux élèves un modèle de construction, de type « boîte noire », qu'ils doivent alors utiliser. Ainsi, l'incertitude porte sur ce que les élèves doivent trouver et c'est l'enseignant qui détient le contrôle, car les élèves dépendent de l'enseignant pour savoir si ce qu'ils ont pu observer est bien ce qui devait l'être dans la tâche en question. Dans l'autre façon de faire, les élèves doivent partir d'un énoncé qui leur est donné afin d'envisager une façon de réaliser la construction. Ils savent ce qu'ils ont à construire, mais leur incertitude a trait à la façon d'y parvenir et aux moyens à utiliser. Le contrôle de la tâche se retrouve ici du côté de l'élève. Ces deux façons sont assez complémentaires et Soury-Lavergne (2011) souligne qu'une construction robuste réalisée par l'élève ressemble finalement beaucoup à la pratique papier/crayon, mais reportée dans un environnement technologique qui permet de déplacer les points de la figure tout en conservant invariante la propriété géométrique derrière la construction de cette dernière. Ce déplacement est tout aussi possible dans une construction molle, mais ne repose pas sur une propriété que l'on peut observer immédiatement. Le déplacement permet ainsi de mettre en évidence la relation entre les hypothèses que l'on formule et la conclusion à laquelle on arrive. C'est pourquoi elle soutient que la construction molle permet d'ajouter des éléments plus significatifs dans l'apprentissage des élèves, puisqu'ils utilisent déjà ce genre de construction en dehors de la classe pour eux-mêmes :

Par exemple, Acosta (2008) décrit la technique des lieux géométriques [...] comme consistant à trouver la bonne construction en faisant une ou plusieurs constructions intermédiaires qui ne respectent pas l'une des données du problème. Avec la géométrie dynamique, ces constructions intermédiaires sont des constructions molles par rapport à la construction cherchée et leur exploration dynamique permet de déterminer un lieu qui fournit les caractéristiques géométriques de la construction robuste et donc de la solution. (Soury-Lavergne, 2011, p. 7)

En fait, selon Soury-Lavergne (2011), la construction molle représente certes un défi pour les enseignants, car ces derniers ne sont pas habitués à laisser les élèves contrôler l’outil, à faire leurs propres expérimentations ni à relâcher certaines contraintes d’un problème mathématique. Soury-Lavergne avance cependant que ce type de construction semble plus riche au niveau de la conceptualisation proposée aux élèves et du raisonnement qu’ils peuvent y mobiliser. Une étude de Jones (1998) allait dans le même sens en montrant que les raisonnements intuitifs des élèves, principalement utilisés dans les constructions molles, sont nécessaires dans la résolution de problèmes mathématiques. Un exemple d’une construction proposée à ces étudiants est de leur demander de construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point P de tangence, donné lui aussi. Les étudiants se sont lancés dans cette construction en faisant des ajustements perceptifs au fur et à mesure de la progression de leur travail et ils ont pris en compte les propriétés des constructions déjà réalisées. Soury-Lavergne (2011) fait valoir la richesse d’une telle approche en soulignant que les élèves ont pu parvenir à la solution par leurs constructions intermédiaires, lesquelles leur ont également donné des arguments pour la preuve et l’exercice d’un raisonnement déductif.

L’enseignant doit aussi se souvenir que les élèves accordent souvent une valeur de vérité absolue à ce qui semble évident et qu’il convient alors les placer en situation de vivre des conflits cognitifs, notamment par la rencontre de faits surprenants. Caron (2003) souligne l’importance de développer le jugement critique des élèves et d’utiliser la preuve comme moyen pour valider, expliquer et généraliser un résultat qui peut alors devenir une nouvelle connaissance chez l’élève. En mettant la preuve à contribution, ce n’est plus l’outil qui contrôle le travail effectué par l’élève, mais bien ce dernier qui contrôle l’outil. Par exemple, il convient de sensibiliser les élèves au fait que si la mesure d’une grandeur affichée sur l’écran jusqu’à l’ordre des centièmes paraît constante, cela ne constitue pas une preuve en soi. On peut certes encourager les élèves à vérifier avec un grand plus grand nombre de décimales, mais cette vérification n’en constituera ni une preuve rigoureuse ni le germe d’une plus grande compréhension d’une régularité.

### **1.3.3 Travail sur la preuve en géométrie élémentaire**

Laborde (2000) montre différentes façons de favoriser un travail sur la preuve à partir de l’utilisation par les élèves d’un logiciel de géométrie dynamique. Il est question d’activités

dans des environnements dynamiques ou les élèves doivent expliquer ce qu'ils observent. Un exemple de tâche développée par Jones (cité dans Laborde, 2000) est de construire un rectangle en ne partant que de la verticale de ce dernier et en le modifiant ensuite pour avoir un carré. Les élèves doivent expliquer en quoi il s'agit bien du quadrilatère attendu; jouant ainsi avec les propriétés ou les relations nécessaires pour prouver ce qu'ils avancent. Cette idée nous donne un exemple de contexte dans lequel un travail en lien avec le raisonnement déductif est possible à partir des conjectures dégagées par l'observation.

On trouve chez Gousseau-Coutat et Richard (2011) une séquence d'activités où, à l'inverse, ce sont les contraintes de la construction qui sont connues et c'est la figure résultante qu'il faut identifier et justifier. Les élèves doivent manipuler un quadrilatère pour réaliser certaines contraintes données (ex. milieux des diagonales confondus), conclure sur la nature du quadrilatère ainsi obtenu (toujours un parallélogramme) et en expliquer la raison. En leur faisant comparer les résultats pour différents ensembles de contraintes, on favorise la coordination des différentes propriétés caractéristiques d'un même objet mathématique.

Ces exemples donnent à penser qu'un travail dans un environnement de géométrie dynamique peut ouvrir à un travail sur la preuve, porteur d'une nouvelle richesse au niveau conceptuel, si les activités didactiques sont bien définies.

### **1.3.4 Articulation géométrie-algèbre - Le cas des coniques**

La géométrie analytique est un autre domaine pour lequel l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut s'avérer profitable. Si GeoGebra, avec sa fenêtre algébrique qui se combine avec la fenêtre de géométrie, paraît un support tout « naturel » pour travailler la géométrie analytique, d'autres logiciels moins algébriques en apparence, comme Cabri-Géomètre, ont aussi donné lieu au développement d'activités significatives en géométrie analytique, avec les coniques plus particulièrement. Une étude de Defence (1998) a ainsi montré qu'un tel logiciel pourrait favoriser l'apprentissage de notions plus abstraites dans ce champ mathématique. Dans cette étude, le comportement et la façon de penser de deux élèves ont été analysés dans le but de comprendre comment leur représentation algébrique des coniques a pu évoluer au contact de démonstrations mécaniques des coniques sur Cabri-Géomètre : les élèves

sont en effet passés d'une conception fondée sur le calcul numérique et les extrémités de l'ellipse à une conception basée sur un ensemble de points qui vérifient un certain nombre de conditions :

His thinking had gone from one full of concern for numerical calculations and finding the extremities of the ellipse to one that sees the dependencies, or associations, between the objects on the screen : i.e. the radii of the circles and the moveable point on the segment (or ray). This conversion of thinking had come about from the very nature of the software. His new conceptions of the ellipse and the hyperbola were now those that see them as sets of points generated by a given condition. (Defense, 1998, p. 11)

De plus, toujours selon Defence, le fait qu'une même équation algébrique puisse représenter différents objets géométriques se visualise mieux grâce à un tel outil. Celui-ci favorise une meilleure compréhension des équations chez les élèves et les prépare ainsi aux concepts d'algèbre linéaire. Dans le même esprit, Garançon a élaboré certaines activités avec Cabri-Géomètre présentant les coniques comme lieux géométriques du plan (Boileau et al., 1998). Il souligne que ce logiciel de géométrie dynamique permet d'aller loin dans l'étude des coniques, à condition, rappelle-t-il à son tour, d'aménager une place importante au raisonnement et à la démonstration, car, selon Garançon ce sont « ces derniers qui permettent de valider et comprendre l'origine des propriétés découvertes » par l'utilisation du logiciel (dans Boileau et al., 1998, p. 52).

Également, Bahamon (2011) s'est intéressé aux relations métriques dans les coniques dans sa recherche de maîtrise. Il a étudié les stratégies et les démarches d'élèves de 5<sup>e</sup> secondaire lorsqu'ils travaillent sur une démonstration touchant aux coniques et à la construction de l'ellipse en particulier, d'abord dans un environnement papier/crayon, puis dans l'environnement dynamique de Cabri-Géomètre. Il souligne les apports de cet environnement sur le déploiement du raisonnement des élèves :

La clarté de la construction avec Cabri a permis aux élèves de se concentrer sur les triangles qu'elle faisait apparaître, ce qui a amené une réflexion tant sur les propriétés géométriques qui se conservent lors du déplacement de la figure que sur l'utilisation des théorèmes et des propriétés pour la construction de la démonstration demandée. Cette réflexion a engendré aussi une discussion sur les caractéristiques de l'ellipse construite, ses deux axes de symétrie ainsi que sur la signification donnée à l'équation du cercle. (Bahamon, 2011, p. 134-135)

L'utilisation de ce logiciel aura permis aux élèves de se décentrer des calculs liés à l'ellipse et d'approfondir cet objet sous différents points de vue : « comme lieu géométrique,

comme courbe algébrique de second degré ou comme transformée d'un cercle. » (Bahamon, 2011, p. 136). On rejoint ainsi les apports mentionnés ci-dessus par Defence (1998) et, par l'établissement de tous ces liens, on tend à favoriser le développement du raisonnement des élèves.

## **1.4 Les coniques comme lieu d'exploration et de travail du raisonnement**

La présente recherche cherche à intégrer la technologie dans l'enseignement pour favoriser, à travers l'exploration qu'elle permet, le développement d'un raisonnement mathématique qui fasse place au dégagement de régularités, à l'établissement de liens entre les concepts et au travail de la preuve. Ainsi, il nous apparaît intéressant de proposer à de futurs enseignants une séquence d'activités dans un environnement de géométrie dynamique afin d'observer le raisonnement mathématique qu'ils y déploient et de recueillir leurs réactions et les adaptations qu'ils envisageraient pour intégrer ces activités au secondaire.

Différentes recherches ont montré que les logiciels de géométrie dynamiques permettent l'apprentissage de concepts plus abstraits tels que les coniques et que leur utilisation favoriserait même leur apprentissage (Defence, 1998; Bongiovanni, 2001; Bahamon, 2011). Comme il s'agit d'un thème mathématique au programme, avec lequel beaucoup d'enseignants semblent moins à l'aise, il nous apparaît pouvoir bénéficier d'une consolidation des connaissances qui fasse davantage de place à l'exploration et au raisonnement.

Dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ), le thème des coniques apparaît à la troisième année du deuxième cycle (soit en cinquième secondaire), dans les séquences Sciences Naturelles (SN) et Technico-Sciences (TS). Le PFEQ stipule qu'à la troisième année du cycle,

[L]'étude des coniques amène l'élève à découvrir d'autres applications, notamment en ce qui a trait aux systèmes de télécommunication. Elle permet ainsi d'approfondir et d'appliquer divers concepts ou processus comme l'optimisation, le calcul algébrique ou les relations. L'élève observe les coniques à partir de la section d'un cône ou de diverses manipulations (pliage, jeu d'ombres, construction). Il relève des régularités et cherche à définir les différentes coniques. Il en détermine les équations et en décrit chacune des régions en faisant appel à la relation d'inégalité. Il détermine les coordonnées de points



d'intersection et différentes mesures à l'aide de manipulations algébriques en recourant, lorsque cela est nécessaire, à un changement de variable. (MELS, 2007, p. 109)

La progression des apprentissages (PDA) précise dans la section portant sur la géométrie analytique les apprentissages à faire relativement aux coniques :

1. Décrire, représenter et construire des lieux géométriques dans les plans euclidien et cartésien, avec ou sans outils technologiques<sup>6</sup>;
2. Analyser et modéliser des situations faisant appel à des lieux géométriques dans les plans euclidien et cartésien<sup>7</sup>;
3. Analyser et modéliser des situations à l'aide des coniques ci-dessous<sup>8</sup> :
  - a) parabole centrée à l'origine et obtenue par translation
  - b) cercle, ellipse et hyperbole centrées à l'origine
  - c) cercle, ellipse et hyperbole obtenues par translation<sup>9</sup>
4. Déterminer les coordonnées de points d'intersection entre
  - a) une droite et une conique<sup>10</sup>
  - b) deux coniques (une parabole et une conique)<sup>11</sup> (MEES, 2016, p. 36)

Si le PFEQ et la PDA présentent les coniques comme lieux géométriques utiles à la modélisation mathématique de situations réelles, l'enseignement de ce thème est souvent limité à l'étude de coniques particulières dans le plan cartésien, graphiquement et algébriquement, sans pour autant établir entre elles des liens structurants.

---

<sup>6</sup> « En SN, l'étude des lieux géométriques se limite aux coniques. » (MEES, 2016)

<sup>7</sup> « En TS, les lieux géométriques incluent également des lieux plans, c'est-à-dire des lieux géométriques qui font intervenir uniquement des droites ou des cercles. En SN, l'étude des lieux géométriques se limite aux coniques. » (MEES, 2016)

<sup>8</sup> « Cela implique la description des éléments d'une conique (rayon, axes, directrice, sommets, foyers, asymptotes, régions), la représentation graphique de la conique, de la région intérieure ou extérieure, la construction de la règle d'une conique à partir de sa définition, la recherche de la règle (sous forme canonique) d'une conique, de sa région intérieure ou extérieure et finalement, la validation et l'interprétation de la solution obtenue, au besoin. » (MEES, 2016)

<sup>9</sup> Seulement pour la séquence TS

<sup>10</sup> « En TS, cet énoncé est associé à la résolution de systèmes qui font intervenir des modèles fonctionnels à l'étude et est majoritairement graphique (avec ou sans outils technologiques). » (MEES, 2016)

<sup>11</sup> Seulement pour la séquence SN

Ainsi, ce thème mathématique nous semble particulièrement porteur pour orienter une séquence d'activités favorisant l'établissement de liens entre concepts mathématiques. Nous pensons également que ce thème pourra nous donner l'occasion de concevoir des activités permettant l'exploration tout en y intégrant des éléments de preuve, de façon à favoriser le développement du raisonnement des étudiants en leur faisant établir des liens entre ces différents lieux géométriques, en sollicitant autant la preuve que l'exploration dans un environnement de géométrie dynamique.

Cette recherche, relevant de la didactique des mathématiques, exploitera des concepts et processus de la géométrie et de l'algèbre, et des coniques en particulier.

## 1.5 Objectif de la recherche

Cette recherche a pour but le développement et la validation d'une séquence d'activités signifiantes intégrant le logiciel GeoGebra pour la formation à l'enseignement des mathématiques et ciblant le développement du raisonnement. L'objectif général de cette recherche est double et peut être précisé comme suit :

*Développer une séquence d'activités intégrant le logiciel GeoGebra qui puisse enrichir les apprentissages de futurs enseignants en faisant émerger chez eux un besoin de prouver des relations observées dans cet environnement et d'établir des liens entre différents objets ou lieux géométriques*

*Évaluer l'apport de la séquence développée en analysant les processus de genèse instrumentale qui se déploient dans la réalisation des activités, le raisonnement mathématique mobilisé par les étudiants, les adaptations envisagées à cette séquence pour les élèves, et l'effet global de la séquence sur la vision de l'enseignement des mathématiques chez ces futurs enseignants.*

Cet objectif semble pertinent et permettra sans doute de fournir des éléments pouvant soutenir le raisonnement mathématique tout en engageant un processus d'exploration et de validation chez les participants de l'étude. Aussi, comme sous-objectifs, nous nous proposons de vérifier notamment si les futurs enseignants s'engageront d'emblée dans un processus de validation de leurs conjectures ou s'ils se satisferont simplement de la manipulation et de la visualisation offertes par GeoGebra. Ainsi, nous souhaitons mettre l'accent sur le raisonnement mathématique afin de permettre aux futurs enseignants de visualiser des activités favorisant le développement des différentes composantes de la compétence 2 décrites par le MELS. De façon

générale, les réactions des étudiants à chacune des activités et les adaptations qu'ils envisageraient pour leur utilisation avec des élèves du secondaire nous permettront de mieux saisir les rôles respectifs qu'ils attribuent aux technologies, à l'exploration, à la preuve dans les apprentissages mathématiques de leurs élèves et le développement de leur raisonnement. Également, nous souhaitons leur donner une occasion, à travers une séquence d'activités, de faire des liens entre différents concepts de géométrie et de leur proposer une occasion d'unifier l'ensemble des lieux géométriques.

Tout en nous appuyant sur un vaste éventail de recherches, notre étude s'avère originale dans la mesure où la séquence d'activités proposée pour les futurs enseignants a été conçue dans le but explicite d'explorer dans un contexte d'utilisation d'outils technologiques le rapport au raisonnement mathématique de futurs enseignants et ce qu'ils entendent valoriser chez leurs élèves tout en leur permettant d'établir des liens entre différents concepts de géométrie.

## 2 Cadre théorique

L'utilisation d'outils technologiques en classe de mathématiques offre un potentiel intéressant pour l'enseignement et pour l'apprentissage des mathématiques, mais vient aussi avec son lot de difficultés ou de limites avec lesquelles il faut composer. Afin d'aider à mieux comprendre les enjeux et les risques associés à l'intégration de tels outils, deux approches théoriques se révèlent particulièrement utiles : l'approche anthropologique développée par Chevallard (1998) et l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995). L'approche anthropologique a servi d'outil pour réfléchir sur les tâches à proposer aux étudiants ainsi que sur les techniques qu'ils peuvent mobiliser pour s'acquitter de ces tâches. L'approche instrumentale permet de considérer les phénomènes qui peuvent survenir en utilisant GeoGebra dans une séquence d'activités.

### 2.1 L'approche anthropologique

Le postulat de base de la théorie anthropologique du didactique (TAD), développée par Chevallard (1992; 1998; 2003) est que « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de *praxéologie* » (Chevallard, 1998, p. 1). Chevallard soutient ainsi qu'une activité humaine s'inclut dans une organisation praxéologique constituée de tâches ( $t$ ), de techniques ( $\tau$ ), de technologie ( $\theta$ ) et de théorie ( $\Theta$ ). Ce quadruplet d'éléments, noté  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ , permet d'analyser l'activité humaine et par conséquent l'activité mathématique, au sein d'une institution donnée. Chevallard et Cirade (2010) définissent cette structure comme suit :

La structure praxéologique la plus simple se compose d'un *type de tâches*  $T$ , d'une *technique*  $\tau$ , manière réglée d'accomplir les tâches  $t$  du type  $T$ , d'une *technologie*  $\theta$ , discours raisonné (*logos*) sur la technique (*teckhnê*) censé la rendre intelligible comme moyen d'accomplir les tâches du type  $T$ , enfin d'une composante *théorique*  $\Theta$ , qui gouverne la *technologie*  $\theta$  elle-même, et donc l'ensemble des composantes de la praxéologie. (Chevallard et Cirade, 2010, p. 41)

Chacune des composantes de cette structure praxéologique sera illustrée à l'aide d'un exemple dans ce qui suit et il sera ensuite question des différents types d'organisations praxéologiques que l'on peut rencontrer permettant d'analyser l'activité mathématique.

### 2.1.1 Tâche, technique, technologie, théorie

La première composante d'une organisation praxéologie est une tâche ( $t$ ) qui est exprimée généralement par un verbe qui précise le *type de tâche* ( $T$ ) à effectuer. Lorsqu'une tâche relève d'un certain type de tâche, on peut utiliser la notation  $t \in T$  (Chevallard, 1998). Par exemple, le verbe « évaluer » n'est pas très précis et ne constitue pas une tâche, mais plutôt un genre de tâches. Si l'on ajoute « évaluer une expression algébrique en substituant une variable par sa valeur numérique », on peut parler d'un *type de tâches*. Bien que cet élément ne soit pas encore très précis, il donne des informations ainsi qu'une orientation sur ce que l'élève devra accomplir dans son activité mathématique. Une tâche relevant de ce type de tâche pourra alors être : « évaluer l'expression  $2x^2$  lorsque  $x = -3$  ». Chevallard (1998) précise que les tâches et le type de tâches sont des « construits institutionnels » dont la reconstruction dans une classe, par exemple, constitue « l'objet même de la didactique ».

Pour chaque type de tâches  $T$ , il existe un « savoir-faire » permettant la réalisation des tâches qui en relèvent. Ce « savoir-faire » porte le nom de technique (technè) et constitue la deuxième composante d'une organisation praxéologique. Ainsi, l'organisation praxéologique développée par Chevallard (1998) contient un bloc pratico-technique, nommé *praxis* et noté  $[T/\tau]$ . Chevallard précise que chaque technique possède une portée et peut être supérieure à une autre, soit sur une partie de  $T$  ou sur  $T$  complet. De plus, une technique ne signifie pas forcément la présence d'un algorithme permettant de résoudre ce type de tâches, car dans certains types de tâches, il n'existe pas de technique algorithmique. Chevallard mentionne des exemples en ce sens comme « axiomatiser tel domaine des mathématiques » ou même « fonder une famille ». Finalement, Chevallard ajoute que pour une *institution*<sup>12</sup> donnée, il arrive parfois que l'on ne reconnaisse qu'une seule technique possible pour un type de tâches  $T$  ou bien un nombre restreint de techniques.

---

<sup>12</sup> Au sens de Chevallard, une *institution* est un ensemble imposant à ses sujets des « manières de faire et de penser propres ». Ainsi, une classe peut être considérée comme une *institution*; de même qu'une école qui n'est qu'une plus grande *institution*.

Afin d'illustrer cette composante, il est possible de regarder la tâche « résoudre l'équation  $2x + 4 = 5$  ». Plusieurs façons de faire existent dans les manuels scolaires actuels du Québec pour la résolution d'équations du premier degré. Ainsi, on peut accomplir cette tâche soit par des méthodes intuitives (essais/erreurs, « recouvrement » ou opérations inverses) ou bien par une méthode formelle se basant sur les équations équivalentes. Dans ces manuels, l'introduction à cette tâche se fait typiquement d'abord par l'encouragement à des méthodes intuitives, et se termine par l'adoption de la méthode formelle. Il est reconnu que la méthode formelle est plus rapide, lorsque maîtrisée et plus efficace que les méthodes intuitives. Ainsi, elle a une valeur pragmatique supérieure. De plus, la méthode formelle a une portée plus importante que les méthodes intuitives, car elle peut aussi s'étendre aux types de tâches tels que « résoudre une équation de la forme  $ax + b = cx + d$  ». Lorsqu'on utilise ce type de tâches avec une méthode intuitive comme la méthode dite « par recouvrement » (où l'on recouvre l'expression qui contient la variable  $x$ ), il peut s'avérer ardu, voire même impossible, de résoudre l'équation de cette forme parce que l'inconnue se retrouve dans chacun des membres de l'égalité; il y a donc là avantage pour l'élève à adopter la méthode formelle (Vlassis et Demonty, 2002).

La troisième composante de ce quadruplet est représentée par la technologie notée  $\theta$  et est constituée par un discours rationnel ou raisonné (*logos*) sur les techniques (Chevallard, 1998). Cette composante de l'organisation praxéologique a trois fonctions principales : justifier la ou les technique(s), expliquer ou éclairer la technique et produire d'autres techniques. Il arrive même parfois que certains éléments technologiques soient intégrés dans la technique selon Chevallard. Par exemple, le raisonnement utilisé dans un problème d'arithmétique peut à la fois avoir une composante technique et technologique : « Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, soit 3 fois 10 F » (Chevallard, 1998, p. 226). Dans ce problème, le fait de trouver le résultat demandé est une composante technique et la composante technologique, elle, s'illustre lorsque l'on justifie qu'il s'agit bien du résultat attendu. Chevallard note que la fonction de justification l'emporte souvent sur la fonction d'explication. Un exemple de technologie serait d'expliquer ou de justifier la technique employée lorsque l'on a à résoudre une équation comme  $2x + 4 = 5$  avec la méthode intuitive des opérations inverses. Ainsi, l'élève pourra expliquer la technique qu'il utilise en disant qu'il part du 5, enlève 4 et divise par 2. Il pourra aussi justifier cette

méthode en disant que l'on effectue des opérations sur des nombres en se basant sur l'état final (5) et en inversant chacune des opérations afin de retrouver l'inconnue,  $x$ . Cette technique fonctionne bien, car on a une seule inconnue dans un seul membre de l'équation. De plus, pour les élèves, elle est plus près de la pensée arithmétique avec laquelle ils travaillent depuis le primaire (Vlassis et Demonty, 2002).

Finalement, la dernière composante de l'organisation praxéologique est la théorie et elle joue le même rôle pour la technologie que celle-ci joue pour la technique. Tout en ayant les mêmes fonctions que la technologie, la théorie se situe à un niveau plus abstrait, car elle concerne la justification, l'explication et la production de la technologie. Chevallard (1998) mentionne aussi que le bloc technologico-théorique, noté  $[\theta / \Theta]$ , est considéré comme un savoir et peut également évoluer au fil des progrès techniques et technologiques. Nous verrons un exemple de théorie dans la section suivante traitant des différentes organisations praxéologiques possibles.

### 2.1.2 Différentes organisations praxéologiques

Les quatre composantes décrites ci-dessus forment une organisation praxéologique ou une organisation de savoirs. Cette organisation peut servir à analyser une activité mathématique et l'on peut rencontrer différents types d'organisation mathématique : ponctuelle, locale, régionale et globale (Matheron, 2000). Lorsqu'on analyse une activité mathématique et que l'on remarque qu'elle s'agrège autour d'un seul type de tâche, on parle d'un exemple d'organisation *ponctuelle*. Matheron en donne une illustration dans l'analyse d'une activité d'un manuel qui porte sur le type de tâche : « construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs ». Dans cette activité, toutes les tâches sont organisées autour de ce type de tâches en guidant l'élève face aux sous-tâches à réaliser et à la technique qui sera utilisée. Dans le cas où plusieurs organisations ponctuelles sont agrégées autour d'un même élément technologique, comme le théorème de Thalès dans l'exemple donné par Matheron, on parle d'organisation *locale* autour de ce thème. Il peut arriver que certains éléments des techniques soient omis dans ce type d'organisation et cela peut porter les élèves à croire, sans comprendre, ce que l'enseignant dit. Ces omissions sont parfois liées à des choix didactiques, mais la « valeur éducative » d'un tel enseignement est discutable, dans la mesure

où il ne favorise pas les « capacités de réflexion et de critique des élèves » (Matheron, 2000, p. 59), et ne s'inscrit donc pas dans le développement du raisonnement.

Pour ce qui est d'une organisation *régionale*, Matheron (2000) souligne qu'elle est le résultat de plusieurs types de tâches, des techniques leur étant associées et d'éléments technologiques autour d'un thème particulier des mathématiques, représentatif de la théorie. Ainsi, le théorème de Thalès, au cœur de plusieurs savoirs mathématiques, trouve de nombreuses applications avec l'homothétie de deux triangles ou les relations métriques dans les triangles qui sont autant d'éléments technologiques relevant de ce théorème. Finalement, l'organisation mathématique *globale* est une structure formée autour de plusieurs éléments théoriques qui servent de base à d'autres résultats qui en découlent (Matheron, 2000). Un exemple d'une telle organisation globale pourrait être illustré par la géométrie euclidienne avec ses différents axiomes (éléments théoriques) ayant servi de base pour établir de nouveaux savoirs accompagnés de leurs propriétés et leurs preuves, habilement structurés par Euclide dans les *Éléments*.

En résumé, une organisation praxéologique et ses différents types de tâches, qu'on peut vouloir fixer dans le temps et l'espace, ont aussi un caractère dynamique qui permet d'analyser l'évolution des pratiques mathématiques dans les institutions où on les rencontre. De plus, une telle structure permet d'analyser finement les effets possibles de l'intégration d'outils technologiques sur les activités mathématiques proposées. Néanmoins, l'analyse a priori de ces activités avec de tels outils ne saurait être complète sans l'approche instrumentale qui permet de mieux comprendre les processus en jeu lorsqu'on les utilise dans l'apprentissage et dans l'enseignement d'un contenu mathématique. Dans la section suivante, l'approche instrumentale sera décrite à travers la genèse instrumentale (propre à l'apprentissage) et l'orchestration instrumentale (propre à l'enseignement).

## **2.2 L'approche instrumentale**

Lorsqu'un outil technologique est utilisé dans une classe, différents processus peuvent survenir tant au niveau de l'apprentissage que de l'enseignement. Afin d'étudier ces processus, Trouche (2005) soutient que l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995) est particulièrement fructueuse. Cette approche est en lien avec des éléments de



l'ergonomie cognitive développée par Vérillon et Rabardel (1995) et de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1998).

Le point de départ de l'approche instrumentale réside dans la distinction entre artefact et instrument. Trouche (2007), en citant Rabardel, établit cette distinction en précisant qu'« un instrument n'existe pas en soi, un artefact devient un instrument quand un sujet a pu se l'approprier pour lui-même et l'a intégré dans sa propre activité » (p. 23). Selon Trouche (2007), un outil informatique est un artefact qui offre plusieurs caractéristiques nouvelles : regroupement de plusieurs artefacts, « disposer d'un grand nombre d'images » ainsi que de « réaliser rapidement un grand nombre de calculs » (Trouche, 2007, p. 21). L'artefact informatique devient un instrument lorsque l'on a combinaison de ce dernier avec un ou des schème(s). Pour Vergnaud (1991), l'élève (ou plus généralement l'individu) se construit des schèmes au fur et à mesure qu'il est confronté à des situations d'apprentissage. Ces schèmes évoluent et se modifient selon l'adaptation de l'élève aux nouvelles situations qui lui sont présentées ainsi que son contact avec le ou les artefact(s). Cela ne signifie pas pour autant que les connaissances qui se développent alors soient toujours adéquates ou universellement applicables.

### **2.2.1 La genèse instrumentale**

Ainsi, le processus par lequel un artefact devient un instrument résulte de la combinaison d'interactions entre les schèmes d'un individu, ses connaissances, ses façons de travailler et l'artefact lui-même avec ses contraintes et ses apports dans la situation présentée à l'élève. Ce processus se nomme la genèse instrumentale et nécessite deux composantes principales ou sous-processus : l'instrumentation qui est relative aux schèmes et l'instrumentalisation qui est relative aux artefacts. Trouche (2007) distingue ces sous-processus selon leur point de départ (voir figure 3).

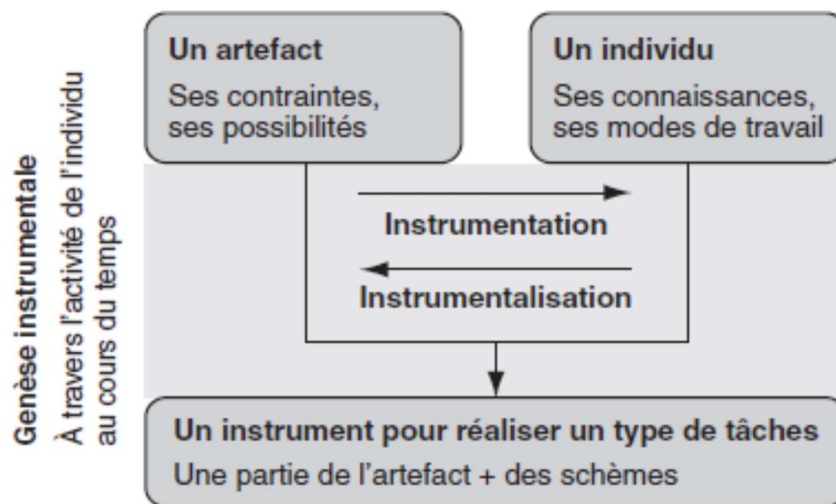


Figure 3. La genèse instrumentale schématisée par Trouche (2007, p. 25).

Les deux sous-processus s'effectuent en parallèle, mais l'élève débute toujours par une première instrumentation. Lors de la réalisation d'une tâche donnée, les schèmes du sujet émergent et évoluent au fur et à mesure que l'artefact conditionne l'action de l'élève (Guin et Trouche, 2002).

Pour analyser ce processus, il faut être en mesure de connaître les contraintes de l'artefact ainsi que ses possibilités qui sont liées à la *transposition informatique*, telle que définie par Balacheff (1998). Cette transposition vient du passage d'une représentation externe à un système de représentation interne à l'artefact et c'est ce processus qui définit la transposition informatique. Comme le souligne Balacheff (1998) « l'exploration est guidée par la connaissance » (p. 27). Un artefact aura donc certaines contraintes qui limiteront le passage d'un objet mathématique théorique extérieur à cet artefact à sa représentation sur cet outil. Une certaine connaissance de l'outil est donc importante afin de mieux comprendre ce que l'on observe.

Guin et Trouche (2002) distinguent trois types de contraintes des artefacts qui sont à considérer dans un contexte de genèse instrumentale :

- *contraintes internes* : liées à la nature du matériel (par exemple, le nombre de pixels de l'écran ou la capacité de la mémoire de l'outil);
- *contraintes de commandes* : liées à la syntaxe des commandes et à leur existence;

- *contraintes d'organisation* : liées à l'ergonomie générale de l'artefact (par exemple, disposition de l'écran, du clavier).

Par exemple, pour le premier type de contrainte, lorsque l'on trace une fonction sur une calculatrice graphique (artefact), nous sommes limités par le nombre de pixels disponibles (contrainte interne de l'artefact) et nous ne pouvons pas voir tous les détails de la fonction. Une personne qui possède les connaissances nécessaires pourra comprendre le comportement de la courbe près d'une tangente lorsqu'elle change l'échelle de la calculatrice. Le choix d'échelle conditionne donc l'action de la personne qui, selon ses connaissances, effectuera des changements d'échelle afin de bien saisir le comportement de la fonction. Ainsi, on peut parler de *transposition informatique*. En utilisant uniquement le papier/crayon, ce travail ne se fait pas aussi rapidement qu'en présence de la calculatrice. Dans le chapitre 1, il a été question de la recherche de Jonin (2006) et d'Haspekian (2005) qui donnent des exemples de contraintes liées à la syntaxe des commandes dans le tableur Excel. Bref, il importe de considérer ces contraintes dans l'élaboration d'activités liées à un outil technologique.

Le processus d'instrumentalisation s'engage lorsque l'élève utilise l'outil et le « met à sa main ». Trouche (2003) précise qu'un même outil peut être un instrument différent pour deux élèves. En effet, trois stades se vivent différemment d'un élève à l'autre et ne sont pas nécessairement linéaires : découverte et sélection, personnalisation et ensuite, transformation de l'outil. Il arrive même qu'au stade de transformation de l'outil, les élèves le transforment dans des directions que le concepteur ou l'enseignant n'avait pas prévues. Par exemple, il peut arriver que les élèves fassent un transfert de programme d'un outil à un autre.

D'autre part, Mariotti (2001) souligne que l'utilisation d'un artefact dans le domaine scolaire induit une fonction de *médiation sémiotique*. En fait, c'est la nature même de l'artefact et son utilisation qui en font un instrument de médiation. Selon Mariotti (2002), ce processus de médiation sémiotique peut être décrit selon deux niveaux : l'utilisation par l'élève de l'instrument ainsi que l'utilisation par l'enseignant. Mariotti explique que l'élève, afin d'accomplir le but de la tâche, utilisera certains schèmes, et des significations émergeront de l'interaction de l'élève avec l'artefact dans l'activité. De son côté, l'enseignant utilise l'artefact avec des schèmes reliés au but pédagogique de la tâche et centrés sur des stratégies

de communication (traduction libre de Mariotti, 2002, p. 16). La construction de sens résulte ainsi de l'interaction entre ces deux niveaux, comme le produit d'un processus d'internalisation guidé par l'enseignant.

Autrement dit, en manipulant l'artefact à travers les processus de genèse instrumentale, l'élève en vient à se questionner et à construire de nouvelles connaissances. Ces connaissances viennent donner un peu plus de sens au niveau des concepts mathématiques à l'œuvre dans les tâches utilisant les artefacts, mais elles peuvent demeurer fortement liées à l'artefact utilisé et ne pas être dotées de la généralité souhaitée. Si l'enseignant encadre la genèse instrumentale par le choix qu'il fait des tâches qu'il propose aux élèves, sa contribution à cette genèse devient plus visible, mais peut-être pas plus porteuse, lorsqu'il utilise l'artefact devant eux pour expliquer certains concepts mathématiques.

En résumé, le processus de genèse instrumentale se produit dans le travail que l'élève accomplit avec l'outil ou l'artefact. C'est un processus qui est en lien direct avec les apprentissages des élèves. Il est donc important que les élèves gardent des traces écrites de ce qu'ils font dans l'exécution des différentes tâches et ce, afin de permettre au chercheur de mieux comprendre le processus en cours. Par contre, l'analyse de l'activité mathématique n'est pas complète si on ne considère pas le rôle de l'enseignant qui a pour responsabilité d'encadrer et d'harmoniser les genèses instrumentales individuelles. C'est avec le concept d'*orchestration instrumentale* que Guin et Trouche (2002) ont étudié cette question.

### **2.2.2 Orchestration instrumentale**

Dans leur étude des conditions d'enseignement avec des environnements technologiques complexes, requérant l'appropriation par l'élève des outils mis à contribution et donc l'encadrement et la coordination des genèses instrumentales individuelles, Guin et Trouche (2002) ont en effet proposé la notion d'*orchestration instrumentale* en la définissant ainsi : « la gestion *didactique* des artefacts d'un environnement informatisé d'apprentissage, pour le traitement d'une *situation* mathématique, dans l'objectif de *socialiser*, relativement, les *genèses instrumentales* et d'assister la *constitution des systèmes d'instruments*. » (Guin et Trouche, 2002, p. 243).

L'orchestration s'effectue à plusieurs niveaux : au niveau des artefacts, des modes d'utilisation des artefacts ainsi qu'au niveau méta de la relation du sujet avec les artefacts. Par exemple, lorsqu'un enseignant encadre l'activité des élèves sur la recherche des limites d'une fonction, on est situé au premier niveau, celui des artefacts. On se retrouve au niveau méta lorsque l'élève réfléchit sur son activité instrumentée en laissant des traces de celle-ci (Trouche, 2007). Pour le deuxième niveau, celui des modes d'utilisation des artefacts, Trouche (2000) introduit l'idée d'*élève sherpa* afin de faciliter la gestion de ces modes. Pour cet auteur, l'élève sherpa joue plusieurs rôles dans la classe tels que référence, guide, auxiliaire et médiateur. Dans l'expérimentation de Trouche (2000), ce travail de l'élève sherpa se déployait dans le pilotage d'une calculatrice branchée à un rétroprojecteur. Un autre exemple d'élève sherpa peut se manifester lorsqu'un enseignant utilise le TNI et demande à un élève de venir expliquer sa démarche sur le TNI ou de manipuler les objets disposés sur celui-ci devant les autres élèves de la classe. Parfois, il arrive même que les élèves en savent un peu plus que l'enseignant sur le TNI et lui donnent des indications sur la façon de le calibrer ou d'utiliser les outils qui y sont accessibles.

En s'appuyant sur le travail d'un élève sherpa, le professeur peut guider les élèves dans leur démarche et combiner ses propres résultats à ceux de l'élève. On peut ainsi favoriser les débats dans la classe, mieux expliquer les procédures utilisées par les élèves et favoriser la participation des élèves en difficulté. L'élève sherpa permet donc une « gestion collective d'une partie des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation » (Trouche, 2007, p. 33). Néanmoins, cela nécessite un plus grand temps consacré à la tâche et modifie également l'ensemble des artefacts en y ajoutant d'autres éléments. Bref, le fait de prendre en compte ces éléments de l'orchestration instrumentale entraîne un travail beaucoup plus complexe pour un professeur qui est isolé. Un accompagnement didactique s'avère donc important (Trouche, 2007).

### **2.3 Apports des approches anthropologiques et instrumentales**

Les approches anthropologique et instrumentale présentées dans les sections qui précèdent permettent de faire ressortir, dans l'étude de l'apprentissage et de l'enseignement d'un contenu mathématique, plusieurs éléments permettant de comprendre l'activité

mathématique en interaction avec un outil technologique. En fait, dès que l'on intègre un outil technologique dans une activité mathématique, plusieurs phénomènes peuvent se produire tant au niveau de l'apprentissage du contenu mathématique pour les élèves qu'au niveau de l'enseignement de ce contenu par les enseignants<sup>13</sup>. Afin de guider une recherche dans un tel contexte d'intégration, il s'avère important d'analyser, a priori, les tâches proposées aux élèves, les techniques qui y sont associées, la technologie et la théorie sous-jacentes (organisation praxéologique) ainsi que les processus de genèse et d'orchestration instrumentale. Une analyse a posteriori est également importante afin de voir les décalages qui se sont produits entre ce qui a été pensé au début de l'expérimentation et ce qui a été vécu réellement (Artigue, 2008).

L'apport de l'approche anthropologique dans un contexte d'intégration d'outils technologiques est de deux ordres selon Artigue (1997). D'abord, cette approche permet de

penser la question de l'intégration, de façon globale, en la considérant comme un phénomène social et institutionnel, de prendre de la distance avec les cadres d'analyses épistémologiques et cognitifs qui sont le plus souvent utilisés, pour restituer leur place nécessaire aux dimensions écologiques et institutionnelles de l'analyse. (Artigue, 1997, p. 137).

Ensuite, elle aide à réfléchir, dans l'analyse didactique, sur « la dimension technique et instrumentale du travail mathématique » (p. 138). Ainsi, Artigue (1997) mentionne que l'approche anthropologique permet une analyse de l'activité mathématique où « la question de l'apprentissage mathématique se pose [...] en termes de développement de rapports personnels à des objets donnés » (p. 138) ou des savoirs selon les rapports entretenus dans l'institution où l'on se trouve. À la fois sur les plans personnels et institutionnels, l'apport des outils technologiques au développement de ces rapports mérite d'être examiné.

### **2.3.1 Valeur pragmatique et valeur épistémique**

Au chapitre 1, nous avons évoqué les apports pragmatiques et épistémiques attribués aux outils technologiques. Selon le contexte institutionnel et curriculaire dans lequel un outil est intégré, sa valeur est appelée à varier en fonction des utilisations qu'on en fait et du rôle qu'on lui attribue. Il peut donc être éclairant d'analyser les apports des outils et les difficultés

---

<sup>13</sup> Le genre masculin est privilégié afin d'alléger le contenu de cette thèse.

ou risques qui leur sont associés en les liant d'une part avec l'approche anthropologique, du côté des tâches proposées et des techniques admissibles, et d'autre part avec l'approche instrumentale pour apprécier le processus d'intégration de la technologie. Cela permet de mieux expliquer certaines orientations qui paraissent privilégiées dans l'utilisation de la technologie tant au niveau de l'enseignement que de l'apprentissage des mathématiques et certains phénomènes observés lors de l'instrumentation.

Puisque l'intégration de tâches utilisant des outils informatiques dans l'enseignement et l'apprentissage gagne à s'appuyer sur des analyses a priori effectives, il convient de considérer les apports pragmatique et épistémique de l'outil dans ces tâches. Artigue (2008) mentionne d'ailleurs que l'utilisation de tels outils est plus souvent orientée vers la valeur pragmatique :

La tendance observée et bien compréhensible consiste à utiliser les outils technologiques juste pour leur valeur pragmatique : produire rapidement et facilement des résultats dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon, au détriment de leur valeur épistémique : aider à comprendre les objets mathématiques mis en jeu. (Artigue, 2008, p. 22).

Il existe un coût au niveau de l'appropriation des outils ainsi que de leur instrumentation. Ce coût peut être perçu comme étant trop grand lorsque l'utilisation des outils dépasse le cadre des techniques traditionnelles utilisées en mathématiques. Ainsi, les outils sont souvent utilisés dans des tâches similaires à celles de tâches papier/crayon; ce qui contribue peu à aider la compréhension des objets mathématiques qui sont présents dans ces tâches. Le fait de laisser le calcul à l'outil devrait permettre de centrer l'attention sur le développement du sens dans les tâches mathématiques qui sont proposées, mais ce n'est pas toujours le cas. Plusieurs recherches soulignent l'intérêt de proposer des activités plus riches et dépassant le cadre imposé par les programmes pour exploiter davantage la valeur épistémique (Caron et De Cotret, 2007; Artigue, 2008; Cornu, 1992). Par contre, certaines difficultés peuvent survenir lors de la réalisation de ces tâches et produire des décalages. Artigue (2008) ajoute que pour surmonter les décalages entre les attentes et les réalisations qui se produisent dans les environnements technologiques, il faut alors « penser les usages de la technologie dans la durée, la progression dans le temps des connaissances instrumentales et mathématiques ainsi que les institutionnalisations associées, les rapports à construire et à

faire évoluer entre techniques papier/crayon et techniques instrumentées » (Artigue, 2008, p. 22).

Dans l'élaboration des tâches qui seront proposées aux élèves, il faut considérer la valeur épistémique de l'outil et ce, afin de permettre aux élèves de pousser leur réflexion sur les concepts mathématiques et leur conceptualisation. Selon Artigue (1997), l'examen de la valeur épistémique de l'outil peut faire apparaître deux phénomènes didactiques en jeu lors de la transposition des savoirs : le phénomène de *pseudo transparence* et celui de *double référence*. En gardant à l'esprit ces deux phénomènes, le chercheur peut concevoir des tâches mettant les élèves en conflit cognitif et leur permettant ainsi de conceptualiser.

### **2.3.1.1 Phénomène de *pseudo transparence***

Le premier phénomène, celui de *pseudo transparence*, fait référence aux décalages qui se présentent entre les différents modes de représentation de l'objet mathématique. Ces décalages, qui paraissent infimes aux yeux des experts, causent des perturbations dans les apprentissages des élèves. La machine étant programmée pour simplifier l'expression entrée par les utilisateurs, le simple fait qu'elle fasse disparaître une parenthèse dans l'expression peut suffire à perturber un élève en difficulté. Même si la représentation donnée par l'outil est proche de celle papier/crayon, les élèves en difficulté peuvent ne pas la reconnaître. Ball (2003) et Ruthven (2002) mentionnent aussi ce phénomène en parlant de différences de langages entre celui exploité par l'outil informatique et celui que l'on utilise en mode papier/crayon. Haspekian (2005) ajoute qu'« au-delà des différences dans les représentations, c'est parfois le fonctionnement mathématique tout entier qui peut différer d'un environnement à l'autre » (p. 70). Afin de contrer cette difficulté, Haspekian (2005), à partir de ses travaux autour du tableur, mentionne qu'il pourrait être intéressant de faire un travail réflexif avec les élèves dans le but de souligner les différences entre le monde des propriétés mathématiques et celui des conventions. Ainsi, les élèves pourraient être plus à l'affût des manifestations relatives au phénomène de pseudo transparence. Un autre exemple illustrant ce phénomène pourrait être la fonction « compas » du logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. Aucun compas n'est présent dans le logiciel, mais à partir d'un segment utilisé comme rayon et d'un point comme centre, le cercle sera tracé. Comme le logiciel ne montre pas l'intervention du compas annoncé par cette fonction, cela peut être déroutant pour les élèves de ne pas



comprendre comment ce cercle a été tracé ou de ne pas voir le lien entre la technique instrumentée et la technique avec le compas; la fonction compas prend donc doublement des allures de « boîte noire ».

### 2.3.1.2 Phénomène de *double référence*

L'autre phénomène souligné par Artigue (1997) est celui de la *double référence* et se situe au niveau de la transposition même. Comme les élèves doivent constamment manipuler deux environnements différents : papier/crayon et informatique, il y a des décalages entre les solutions attendues chez les élèves de façon papier/crayon et les solutions effectives produites par les outils informatiques. Kieran et Drijvers (2006) expliquent la *double référence* en utilisant un exemple avec la factorisation. Dans cet exemple, ils écrivent que la calculatrice symbolique (TI-92 Plus) factorise l'expression algébrique  $x^{10} - 1$  de la façon suivante:  $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ . Cependant, si on fait, avec papier/crayon, une factorisation incomplète telle que:  $(x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  et qu'on prend le dernier facteur de cette factorisation en demandant à la calculatrice symbolique de le factoriser, celle-ci ne donne que le résultat:  $(x + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$ . C'est donc à l'enseignant ou au chercheur qu'il revient de composer avec ces deux phénomènes dans son orchestration instrumentale afin d'assurer une certaine validité à l'expérimentation.

### 2.3.2 Liens entre les approches anthropologique et instrumentale

Plusieurs chercheurs ayant mis l'approche instrumentale à contribution s'appuient aussi sur des éléments de l'approche anthropologique de Chevallard. En fait, Lagrange (2000) a adapté les idées de Chevallard en se concentrant sur trois termes développés par Chevallard dans une organisation praxéologique, soient : tâche, technique et théorie. Lagrange définit ces termes en mentionnant que :

[...] les tâches sont d'abord des problèmes. Les techniques s'élaborent relativement aux tâches puis se hiérarchisent. Des techniques officielles émergent et les tâches se routinisent en devenant des moyens pour perfectionner les techniques. L'environnement théorique se constitue pour rendre compte des techniques, de leur fonctionnement et de leurs limites. Il se développe ensuite au cours d'un travail de la technique qui vise à la fois l'amélioration des techniques et leur maîtrise. (Lagrange, 2000, p. 16)

Ainsi, la technologie (discours raisonné sur la technique) est intégrée, à la fois, dans la dimension technique et la dimension théorique. Comme le rappelle Artigue (2002a), une technique est une manière de résoudre une tâche; lorsque cette technique devient routinière dans une institution donnée, la technique deviendra un assemblage complexe entre raisonnement et travail routinier.

Les travaux de Lagrange (2000) ont également montré l'intérêt des techniques afin d'améliorer le rapport au savoir. Ainsi, il soutient que l'on ne doit pas simplement reléguer les techniques à l'outil afin de mieux servir le savoir. Il faut aussi considérer les « techniques nouvelles » permises par ces outils, ce qu'elles apportent au niveau de la conceptualisation et comment on peut les articuler efficacement avec les techniques habituelles dans l'enseignement des mathématiques. Ce sont des éléments à considérer dans les tâches intégrant des outils technologiques.

## **2.4 Raisonnement, exploration et preuve**

Dans l'élaboration des tâches qui seront proposées aux futurs enseignants, nous visons l'intégration et l'articulation d'éléments d'exploration et de preuve pour favoriser le développement du raisonnement. Il convient donc de regarder de plus près autant les différents volets du raisonnement mathématique que le milieu didactique dans lequel se fera le travail et devront s'articuler exploration, visualisation et preuve.

### **2.4.1 Types de raisonnement**

De façon générale, on peut définir le raisonnement comme étant le processus cognitif mis en œuvre par une personne dans le but de mieux cerner ou de comprendre un phénomène ou une réalité observée. Ainsi, en classe de mathématique, le raisonnement sert notamment à comprendre les diverses théories ou les concepts liés à un domaine particulier. Les raisonnements déductif et inductif<sup>14</sup> sont particulièrement exploités dans un travail mathématique et constituent les deux formes d'inférence les plus utilisées (Legendre, 2005).

---

<sup>14</sup> D'autres types de raisonnement tels que le raisonnement abductif ou par analogie pourraient être définis ici. Il a été choisi de ne retenir ici que les raisonnements déductif et inductif, principalement mobilisés dans l'enseignement des mathématiques au secondaire.

À l’instar des auteurs des programmes actuels, Jeannotte (2015) distingue ces deux raisonnements sur la base de tâches qui les sollicitent typiquement et de ce qui est alors attendu de l’élève: « Les tâches qui amènent les élèves à identifier une régularité et conjecturer favorisent le développement du raisonnement inductif. Les tâches qui demandent aux élèves de fournir une preuve développent principalement le raisonnement déductif » (p. 102).

Ainsi, le raisonnement inductif est axé sur l’étude de faits particuliers afin d’en tirer une idée plus générale, souvent basée sur des arguments numériques ou des exemples, alors que le raisonnement déductif va plus loin et amène les élèves à prouver une idée générale observée en se basant sur des axiomes ou des théorèmes mathématiques. C’est à ce second type de raisonnement, et donc de tâche, que nous nous intéressons dans la section suivante.

## **2.4.2 Définition de la preuve et types de preuves**

Balacheff (1987) définit la preuve ainsi : « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » (p. 148) en précisant que l’on parle de démonstrations lorsque ces preuves « sont une suite d’énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l’aide d’une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (1987, p. 148). Selon Mary (1999), la preuve en mathématiques part d’objets qui sont définis ainsi que de prémisses. Il s’agit d’une méthode de validation qui procède à l’aide d’inférences logiques entre ces objets et ces prémisses pour en arriver à une conclusion qui dépasse ainsi la simple perception. Cette définition plus restreinte rejoint le sens attribué à la démonstration par Balacheff.

Balacheff (1988) distingue deux catégories de preuves exploitées dans les situations d’enseignement et apprentissage : les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles. Il distingue ainsi ces deux catégories :

La réalisation matérielle d’une décision, ou celle du contenu d’une affirmation, permet des preuves pragmatiques lorsqu’elles sont produites par l’élève lui-même pour établir la validité d’une proposition. Lorsque cet accès à la réalisation n’est pas possible alors l’élève est contraint à des preuves intellectuelles. (Balacheff, 1988, p. 54).

Parmi ces deux catégories de preuves, Balacheff a distingué différents types de preuve selon le niveau de rigueur et de formalisme mobilisés. Notons qu'un même élève peut utiliser des preuves de niveaux différents, selon la tâche qui lui est présentée, selon sa compréhension de la notion de preuve et selon les attentes qu'il perçoit de l'enseignant.

Dans les preuves pragmatiques, on retrouve trois niveaux : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique. *L'empirisme naïf* est le niveau le plus simple que Balacheff a défini en disant qu'il « consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas » (p. 56). Cette forme de validation a été observée fréquemment par Mary (1999) chez les étudiants en formation à l'enseignement des mathématiques, dans la préparation de leurs leçons; les étudiants se basaient sur une géométrie plus perceptive que déductive afin de « faire en sorte que les élèves comprennent sans pour autant s'appuyer sur les propriétés mathématiques connues des élèves pour justifier les résultats » (Mary, 1999, p. iv). Tanguay et Geeraerts (2012) parlent ainsi d'une rupture entre la géométrie du perceptible et la géométrie déductive; rupture que l'on peut observer dans les praxéologies géométriques du début du secondaire vers le deuxième cycle du secondaire.

Balacheff définit *l'expérience cruciale* lorsqu'un « individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible » (p. 57). Ainsi, l'élève en vient à considérer que « si cela marche [pour ce cas], alors cela marchera toujours » (Balacheff, 1988, p. 57). *L'exemple générique*, quant à lui, se manifeste par « l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe » (Balacheff, 1988, p. 57). Bossez (2013) a souligné le fait que ce niveau se distingue des deux autres parce que l'élève va « décrire le processus en jeu » (p. 10) au lieu de simplement faire la constatation ou l'observation de ce processus. On assiste à une certaine évolution vers le raisonnement et le développement de preuves plus intellectuelles ou vers une géométrie davantage déductive.

Dans les preuves intellectuelles, on retrouve trois autres niveaux : l'expérience mentale, le calcul sur les énoncés et la démonstration. Bossez (2013) précise que *l'expérience mentale* peut être observée lorsque « l'élève imagine l'action et ses conséquences sur l'objet sans recourir à un exemple » (p. 10). Cela rejoint la définition de *l'expérience mentale* donnée

par Balacheff (1988), où précisait-t-il alors, l'élève s'engage dans un processus d'intériorisation en détachant son action « de sa réalisation sur un représentant particulier » (p. 58). Ainsi, l'objet mathématique considéré est davantage travaillé dans le domaine de la géométrie déductive. L'autre type, *le calcul sur les énoncés*, a été défini par Balacheff (1988) comme l'ensemble des preuves « qui iraient au-delà de l'expérience mentale, mais que nous ne pourrions reconnaître véritablement comme des démonstrations » (p. 64) puisque celles-ci sont incomplètes. Elles se baseraient sur « des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées [...] comme le résultat de calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites. » (Balacheff, 1988, p. 143). Le dernier type de preuve intellectuelle, la *démonstration*, est celle reconnue et acceptée par l'ensemble de la communauté des mathématiciens. Il s'agit donc de LA preuve constituée par une « suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (Balacheff, 1988, p. 30).

Dans un environnement de géométrie dynamique, il convient de mentionner que certains niveaux de Balacheff (1988) peuvent se manifester conjointement. En effet, lorsque l'on part d'une figure particulière dans un logiciel de géométrie dynamique, la figure peut être modifiée plusieurs fois et donne ainsi accès à plusieurs possibilités de figures pour valider une hypothèse et la généraliser. Les sous-niveaux *exemple générique*, *expérience cruciale* et *expérience mentale* sont donc difficiles à distinguer et peuvent être convoqués simultanément dans un tel environnement.

De plus, il est à noter que ces différents types de preuves peuvent être utilisés spontanément par les élèves de façon variable selon les situations auxquelles ils sont confrontés. Il convient donc de varier les situations afin de favoriser le passage aux preuves intellectuelles dans l'apprentissage de la géométrie; les outils technologiques peuvent être une occasion d'élaborer des tâches variées permettant l'exploration et le développement de la preuve. Car c'est en entrant dans le domaine des preuves intellectuelles qu'on permet à l'élève de bénéficier de toutes les vertus associées au développement du raisonnement déductif, de tirer parti des riches apports et fonctions de la preuve.

S'il apparaît raisonnable de supposer que la plupart des étudiants en enseignement des mathématiques ont réussi, au niveau secondaire, collégial ou universitaire, à négocier le passage aux preuves intellectuelles et à la géométrie déductive, leur projection dans l'enseignement secondaire et des praxéologies qu'ils associent à ce niveau peut les ramener à se satisfaire des preuves pragmatiques et de la géométrie du perceptible (Mary, 1999). En ce sens, les niveaux de Balacheff (1988) constituent un outil conceptuel pertinent pour analyser les raisonnements qu'ils mobilisent dans des tâches qui les préparent à l'enseignement.

### 2.4.3 Fonctions de la preuve

En se basant sur les travaux de Barbin et De Villiers, Mary (1999) distingue cinq *fonctions* ou *raisons d'être* de la preuve : *statuer et systématiser, expliquer et éclairer, convaincre, produire des connaissances* ainsi que *communiquer*. La première fonction permet « d'organiser la théorie » alors que la seconde permet d'« expliquer pourquoi un énoncé est vrai » (Mary, 1999, p. 25). Dans cette seconde fonction, une simple représentation visuelle peut servir à *éclairer*, ou même offrir un début d'*explication*, mais on risque de rester alors au niveau de la géométrie du perceptible. Il faut *convaincre* de la véracité ou de la fausseté de ce que l'on a observé ou de l'énoncé étudié. C'est ainsi que l'on a recours à la démonstration ou plus généralement au raisonnement déductif. La preuve sert aussi à *construire des connaissances*. Mary (1999), en se basant sur les propos de Lakatos, illustre cette fonction avec la construction à l'école de la relation d'Euler. L'exploration de cette relation sert essentiellement à engager un travail exploratoire et à développer une capacité à dégager des régularités, entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces dans ce cas. Ici, on tend à construire des connaissances sur les polyèdres plutôt qu'à vérifier la justesse de cette relation, privilégiant le raisonnement inductif et cantonnant la preuve à un niveau pragmatique. C'est cette fonction, *produire des connaissances*, que les mathématiques expérimentales tendent à exploiter et c'est cette orientation qu'on semble avoir retenue dans le nouveau curriculum mathématique en misant sur l'intégration des outils technologiques qui ont un certain potentiel dans ce domaine. La fonction de *communication* se révèle lorsque les résultats obtenus suite à une preuve doivent être communiqués afin de partager les nouvelles connaissances ou d'engager des débats d'idées. Ainsi, le contact social semble être important dans cette fonction

de la preuve et il faut en tenir compte lors de l'élaboration de tâches portant sur la géométrie. Il est à noter que ces fonctions de la preuve, définies par Mary (1999), rejoignent deux des fonctions de la technologie (composante de la TAD) énoncées par Chevallard (1998), soient *expliquer* ou *éclairer la technique* et *produire d'autres techniques*.

#### **2.4.4 Travail et espace de travail mathématique (ETM)**

Pour étudier plus particulièrement le travail du raisonnement mathématique en interaction avec un outil logiciel, la notion d'*espace de travail mathématique* (ETM) s'avère un outil conceptuel intéressant, combinant les processus de visualisation, de construction et de preuve. Cet outil permet également d'illustrer les preuves pragmatiques et intellectuelles définies par Balacheff (1998) et d'analyser le travail mathématique des étudiants dans une séquence didactique intégrant un outil de géométrie dynamique tel que GeoGebra.

Kuzniak (2011) distingue deux niveaux dans l'espace de travail mathématique : le niveau épistémologique et le niveau cognitif. Il mentionne également que différents processus de genèse sont en jeu lors du travail mathématique : « [L]e travail mathématique est le résultat d'un processus progressif de genèse qui va permettre une articulation interne aux niveaux épistémologique et cognitif ainsi que l'articulation de ces deux niveaux. » (Kuzniak, 2011, p. 19). Le travail mathématique peut débuter par une exploration dans un milieu de géométrie dynamique pour aboutir ensuite à une preuve en passant par les deux niveaux. Ce travail « résulte alors d'un processus qui va permettre de donner progressivement un sens, d'une part à chacun des niveaux épistémologique et cognitif et, d'autre part, d'articuler ces deux niveaux grâce à différentes genèses. » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 17).

Au niveau épistémologique, Kuzniak mentionne trois composantes qui sont en interaction : un espace réel et local, un ensemble d'artefacts et un système référentiel. Il les définit ainsi : « [l'] espace réel et local comme support matériel avec un ensemble d'objets concrets et tangibles; [l'] ensemble d'artefacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels [et le] système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés » (Kuzniak, 2011, p. 13). Comme le mentionnent Kuzniak et Richard (2014) : « [C]es composantes ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées selon un but déterminé qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique. » (p. 17). Le

niveau épistémologique est donc en relation étroite avec les contenus mathématiques du domaine ciblé pour l'activité mathématique et permet de structurer son organisation. Ainsi, dans une tâche de construction d'une figure géométrique où l'on demande de construire un parallélogramme dans GeoGebra, l'espace réel et local serait constitué par la figure à construire et ses constituants, l'artefact serait GeoGebra et le système référentiel serait toutes les définitions et propriétés relatives à cette figure qui sont admises dans le PFEQ par exemple.

Pour le niveau cognitif, Kuzniak insiste sur l'idée de trois processus cognitifs étroitement liés : visualisation, construction et preuve. Ce niveau permet de structurer l'espace de travail de l'élève. Kuzniak et Richard (2014) précisent ainsi ces processus :

un processus de visualisation relatif à la représentation de l'espace et au support matériel; un processus de construction, fonction des instruments utilisés (règles, compas, etc.) et des configurations géométriques en jeu; un processus discursif, qui produit des argumentations et des preuves. (p. 18).

Il convient de souligner que cette conception de l'espace mathématique s'adapte selon les différents domaines de l'activité mathématique. Comme dans l'exemple de construction d'un parallélogramme mentionné dans le paragraphe précédent, le processus de visualisation s'opère entre la représentation mentale du parallélogramme de l'élève et sa représentation dans GeoGebra. Le processus de construction peut s'illustrer par les choix de fonctions pour tracer le parallélogramme. Par exemple, l'utilisation de segments pour construire les diagonales et ensuite les sommets du parallélogramme. Finalement, le processus de preuve vient avec la visualisation et la construction afin de s'assurer qu'il s'agit bien d'un parallélogramme qui est construit. La figure 4 (tirée de Kuzniak, 2011, p. 20) illustre le tout de façon plus schématique.



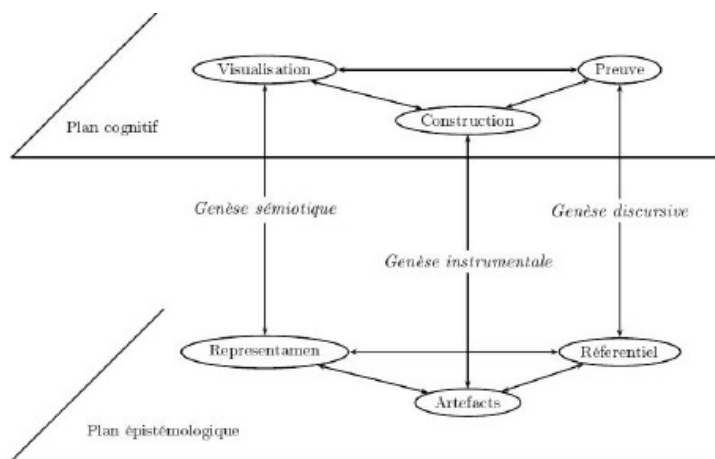


Figure 4. L'espace de travail mathématique décrit par Kuzniak (2011).

Cet espace de travail intègre trois processus de genèse : la *genèse sémiotique*, la *genèse instrumentale* et la *genèse discursive*. La *genèse sémiotique* est « basée sur les registres de représentation sémiotiques qui assure aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires » (Kuzniak, 2011, p. 21). Cette genèse, nécessaire, peut aussi participer au maintien d'un niveau de preuve pragmatique tel que défini par Balacheff (1988). De son côté, la « *genèse discursive* de la preuve [...] utilise les propriétés réunies dans le référentiel théorique pour les mettre au service du raisonnement mathématique et d'une validation non exclusivement iconique, graphique ou instrumentée » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 20). Cette genèse permet d'accéder au niveau de preuve intellectuelle défini par Balacheff (1988) puisque la validation n'est plus basée exclusivement sur l'aspect visuel de la figure. Entre les deux, la *genèse instrumentale*, déjà abordée en 2.2.1, résulte des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation et « permet de rendre opératoires les artefacts dans le processus constructif qui contribue à l'accomplissement du travail mathématique » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 20). Cette genèse peut favoriser le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, lorsque les activités d'une séquence sont bien définies et que le travail planifié et mis en œuvre dans le milieu technologique renvoie aux propriétés théoriques de la figure.

Dans la lignée de ces travaux, Gousseau-Coutat et Richard (2011) définissent l'espace de travail mathématique dans un contexte géométrique lorsque l'élève est en interaction avec un milieu de géométrie dynamique (voir figure 5). Ce schéma plus détaillé comporte certaines

précisions sur la *genèse sémiotique* qui s'oriente sur la figure en géométrie et que nous nommerons la *genèse figurale* (nommée *vidéo-figurale* dans la figure 5). Cet élément pourra être utilisé dans l'analyse des productions des étudiants vu la réflexion qu'ils peuvent faire sur la figure construite dans le milieu de géométrie dynamique. Néanmoins, le cadre conceptuel des ETM sera considéré en intégrant seulement cet élément de l'ETM<sub>géométrie</sub> puisque l'analyse portera principalement sur l'organisation des explications des étudiants, sur le niveau de preuve mobilisé et sur son travail mathématique dans la séquence didactique.

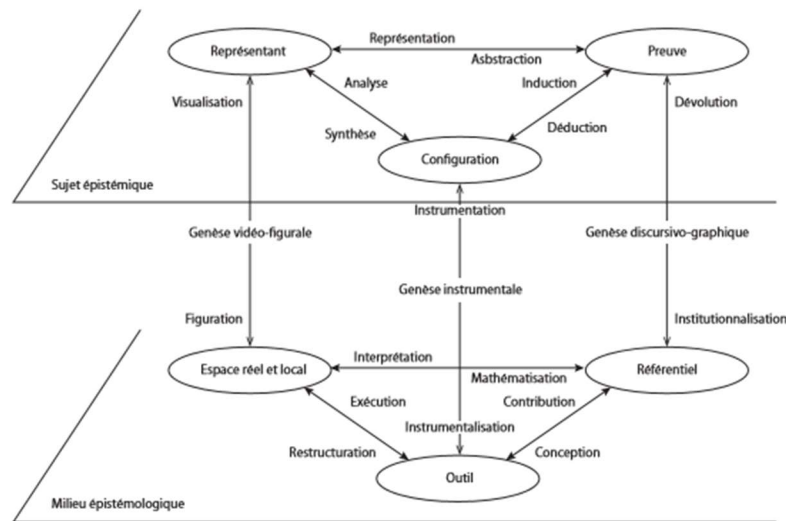


Figure 5. Espace de travail mathématique en géométrie (Gousseau-Coutat et Richard, 2011, p. 120).

Dans un espace de travail mathématique en géométrie, il faut organiser les tâches de façon à ce que l'élève puisse les résoudre. Cet espace remplira deux conditions : « En premier lieu, il doit permettre de travailler dans le paradigme correspondant à la problématique visée, et en second lieu, ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide. » (Coutat, Laborde et Richard, 2016, p. 5). Ainsi, lors d'un travail géométrique, le processus cognitif lié à la preuve s'avère un élément à considérer de même que les éléments théoriques sous-jacents à ce travail. Il convient de regarder en détails les types de preuves que les étudiants peuvent réaliser ainsi que la définition même de ce processus.

## 2.4.5 Preuve dans un environnement technologique

Lorsque l'on élabore une tâche nécessitant une preuve dans un environnement technologique, plusieurs éléments sont importants à distinguer. L'environnement technologique permet d'amener le travail perceptif sur un dessin vers le travail sur une figure. Pour s'engager dans cette voie, il s'avère d'abord essentiel de distinguer entre dessin et figure. Il peut aussi s'avérer pertinent de présenter le concept de réseau déductif permettant d'organiser une preuve se basant sur une figure construite dans un environnement technologique.

### 2.4.5.1 Distinction dessin/figure

Laborde et Capponi (1994) ont précisé la distinction entre figure et dessin de la façon suivante :

le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. (Laborde et Capponi, 1994, p. 168-169)

Ainsi, le dessin est un objet que l'on peut construire afin de se représenter une situation, soit en le traçant à l'aide d'un crayon, soit en utilisant un environnement technologique, alors qu'une figure est davantage un objet abstrait sur lequel on travaille dans l'élaboration de preuves intellectuelles.

Pour sa part, Rigaut (2013) rappelait l'apport des environnements de géométrie dynamique pour aider l'élève à faire la distinction entre figure et dessin :

les logiciels de géométrie dynamique sont considérés comme des outils qui favorisent la distinction entre dessin et figure, fondement du travail géométrique, le déplacement de points permettant de distinguer les connaissances spatiales des connaissances géométriques. Le passage du dessin à la figure ne se fait pas naturellement ni automatiquement, mais se construit peu à peu et les logiciels de géométrie dynamique peuvent aider et assister les élèves à faire ce passage. (Rigaut, 2013, p. 18)

Soury-Lavergne (2011) soulignait également que cette distinction entre figure et dessin est la pierre angulaire de toute activité géométrique et que les tâches dans la construction d'une

figure robuste se fondent sur celle-ci. Ainsi, il peut être intéressant de concevoir une séquence en considérant cette distinction figure/dessin tout en amenant les futurs enseignants vers des preuves dépassant le domaine du perceptif.

#### **2.4.5.2 Propriétés caractéristiques et définitions**

Une façon d'amener les élèves à faire la distinction entre dessin et figure consiste à les faire travailler sur les propriétés caractéristiques et les définitions d'une figure. Ainsi, Rigaut (2013) suggère que la figure « est une construction de l'esprit, un objet idéal [... qui] peut être décrite par un texte, une formulation, l'énoncé de ces propriétés, un dessin, [...] » (p. 15). Quand on mentionne à un élève qu'un carré a quatre côtés congrus, il a une représentation mentale de cette figure. Cette représentation sera peut-être de nature différente selon les propriétés que l'on donne à cet objet, mais la figure restera la même. Soury-Lavergne (2011) souligne que le fait de déplacer les différentes constructions dans les milieux de géométrie dynamique et d'invalider des hypothèses, permet aux élèves de passer « d'un travail perceptif sur le dessin à un travail géométrique sur la figure » (p. 5). Ainsi, les propriétés géométriques dont ils se servent dans leurs constructions se révèlent être des outils contribuant à ces constructions et non plus de simples énoncés dont ils se servent dans une preuve. Le passage à la preuve n'est pas gagné pour autant, et il convient d'envisager des moyens d'en favoriser l'accès pour l'élève.

#### **2.4.5.3 Réseau déductif**

L'utilisation d'un réseau déductif tel que développé par Tanguay (2006) semble être une occasion de développer l'élaboration de preuves intellectuelles et de favoriser le travail sur une figure. Ayant observé des difficultés au niveau des preuves fournies par les élèves, Tanguay (2006) a élaboré une organisation déductive de la démonstration à portée didactique. En fait, il propose une séquence qui part d'un énoncé complexe à démontrer pour aller vers la démonstration de plus simples énoncés. Une telle approche, qui va en sens inverse de ce qui est typiquement fait dans les manuels, s'avère plus près du travail de recherche en mathématiques. L'utilisation d'un tel réseau peut soutenir la recherche de preuve sur une figure construite dans un environnement technologique. À l'intérieur de ce réseau, le déploiement du raisonnement déductif peut se manifester grâce à l'exploration et à la

visualisation permise par un outil technologique. Cela nous semble une piste à retenir dans l'élaboration d'une séquence didactique visant le développement du raisonnement.

## **2.5 Concepts mathématiques ciblés dans la séquence d'activités**

La séquence d'activités que nous proposons au chapitre suivant cherche à favoriser le raisonnement mathématique et l'établissement de liens entre les notions, à travers des activités d'exploration et de preuve, dans un environnement de géométrie dynamique. Des concepts enseignés au secondaire ont été ciblés à cette fin, avec un degré de difficulté croissant.

Les quadrilatères sont des concepts vus au primaire et au premier cycle du secondaire; le degré de familiarité avec ceux-ci facilitera l'instrumentation des étudiants avec le logiciel. Comme l'idée d'inclusion des quadrilatères est abordée au premier cycle du secondaire, l'exploitation de ce thème au début de la séquence pourrait aussi offrir aux étudiants l'occasion de prouver certaines de leurs observations suite à leurs constructions.

Le concept de médiatrice comme lieu géométrique permettra notamment de préparer à aborder les coniques. Ce dernier thème, dont la difficulté conceptuelle est plus grande, a le potentiel d'engager les étudiants dans une dynamique d'exploration et de preuve, dans la recherche d'une explication aux observations effectuées.

Ces concepts seront donc définis dans les sections suivantes en fonction des principaux éléments praxéologiques les définissant de façon générale, puis plus spécifiques à l'organisation du secondaire. Ces définitions nous serviront de guide dans l'élaboration d'une séquence didactique pouvant sensibiliser au développement du raisonnement.

### **2.5.1 Quadrilatères**

En mathématiques, on définit un quadrilatère comme étant une figure plane ayant quatre côtés. Il existe des quadrilatères particuliers qui sont étudiés au secondaire : le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme et le trapèze (MELS, 2009). Le tableau I donne la définition de chacun de ces quadrilatères ainsi que quelques-unes de leurs propriétés caractéristiques liées aux angles intérieurs, aux diagonales ou aux côtés de ces quadrilatères

(Bergeaut et al., 2016; Charnay et Mante, 2013). L'organisation des propriétés caractéristiques sert de base pour spécifier les relations d'inclusion des quadrilatères.

Dans ce tableau, on peut également voir les relations d'inclusion entre les quadrilatères, lesquelles s'appuient sur les propriétés qu'ils partagent. Ainsi, il est possible de dire que le carré est un rectangle et un losange, car il possède toutes les propriétés de ces deux quadrilatères. Par exemple, il suffit pour caractériser le losange de référer à ses quatre côtés congrus; comme cette propriété est aussi partagée par le carré, cela en fait aussi un losange. Par contre, comme le carré a des caractéristiques de plus que le losange, ce dernier ne peut prétendre de façon générale au statut de carré. Le même raisonnement s'applique aux propriétés du rectangle qui sont partagées par le carré; ce dernier ayant aussi des propriétés différentes du rectangle. On peut également ajouter que les carrés sont aussi des parallélogrammes. et même des trapèzes, car ils ont toutes les propriétés que ces figures, et que la relation d'inclusion est transitive. Le tout s'illustre bien dans la figure 6.

<b>Quadrilatère</b>	<b>Définition</b>	<b>Propriétés caractéristiques (ou définitions équivalentes)</b>
Carré	Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange. <sup>15</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur, perpendiculaires et se coupent en leur milieu.</li> <li>• Rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur.</li> <li>• Losange avec un angle droit.</li> </ul>
Rectangle	Quadrilatère qui a quatre angles droits. <sup>16</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrilatère avec trois angles droits.</li> <li>• Quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.</li> <li>• Parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur.</li> <li>• Parallélogramme avec un angle droit.</li> </ul>
Losange	Quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.</li> <li>• Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.</li> <li>• Parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.</li> </ul>
Parallélogramme	Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrilatère dont les côtés opposés sont de même longueur.</li> <li>• Quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu.</li> <li>• Quadrilatère dont les angles opposés sont égaux.</li> <li>• Quadrilatère dont les angles consécutifs sont supplémentaires.</li> </ul>
Trapèze	Quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles. <sup>17</sup>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrilatère avec une paire d'angles consécutifs supplémentaires.<sup>18</sup></li> </ul>

Tableau I. Définitions et propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers.

<sup>15</sup> On pourrait également le définir ainsi : quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur et trois angles droits.

<sup>16</sup> Trois angles droits suffisent à ce que le quatrième le soit.

<sup>17</sup> Dans la catégorie des trapèzes, on retrouve le trapèze rectangle ainsi que le trapèze isocèle.

<sup>18</sup> Cela entraîne qu'il y en a une seconde.

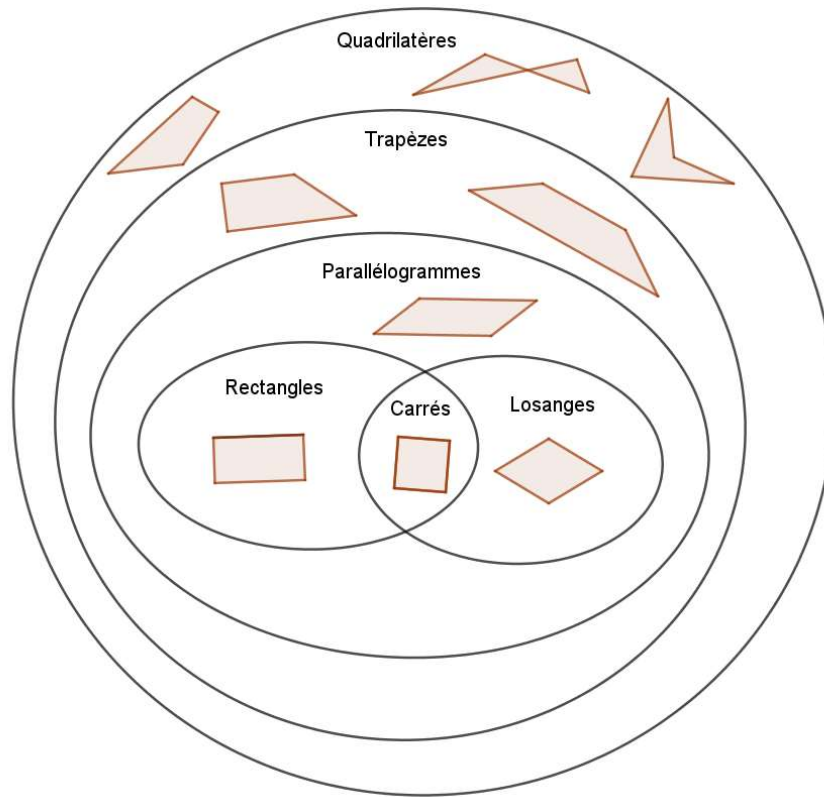


Figure 6. Classification des quadrilatères.

Dans la conception de la séquence d'activités, il semble pertinent de débiter par quelques éléments propres aux quadrilatères afin de permettre une instrumentation de GeoGebra. Les étudiants universitaires pourront ainsi visualiser leur construction ainsi que les propriétés sous-jacentes à cette construction afin de s'appropriier le logiciel puisque les définitions et les propriétés des quadrilatères sont des notions enseignées dès la première secondaire qu'ils maîtrisent déjà. Ainsi, l'environnement de GeoGebra pourra fournir une occasion de voir plusieurs quadrilatères qui sont construits et prouver qu'il s'agit bien d'un de ces quadrilatères. Ces notions pourront faire partie de la première partie de la séquence et ce, afin d'instrumenter les étudiants qui ne sont pas tous familiers de la même façon avec GeoGebra.

### 2.5.2 Médiatrice

Un autre concept qu'il semble pertinent de cibler est celui de médiatrice, vue comme un lieu géométrique particulier. On peut en effet définir la médiatrice comme un lieu



géométrique puisqu'il s'agit de la « droite constituée de tous les points qui sont à égale distance des extrémités [d'un] segment » (Bergeaut et al., 2016, p. 50). Cette définition prépare aux coniques et peut aussi servir à montrer les limites de la résolution et du dynamisme d'un logiciel de géométrie dynamique, où l'on n'a jamais accès à « tous » les points.

Bien entendu, la médiatrice ne se définit pas seulement ainsi; cette définition alternative est plutôt vue comme la propriété caractéristique de la médiatrice. Plus typiquement, on définira la médiatrice d'un segment comme la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par le milieu de celui-ci. D'ailleurs, une technique souvent utilisée au secondaire pour tracer la médiatrice est celle avec le compas permettant de tracer les points d'intersection de deux cercles dont les centres sont les extrémités du segment et leur rayon vaut plus de la moitié de ce segment. On peut mentionner aussi que la médiatrice a comme caractéristique de constituer l'axe de symétrie d'un segment donné; axe de symétrie qui n'est pas confondu avec ledit segment (Bergeaut et al., 2016).

### **2.5.3 Coniques**

Au chapitre 1, nous avons soulevé le fait que le thème des coniques est peu exploité dans le PFEQ (MELS, 2007). Il apparaît ainsi pertinent de passer en revue les différentes définitions des coniques pour en apprécier toute la richesse et les liens qu'elles permettent d'explorer. La définition propre à l'intersection d'un cône, la définition en termes de lieux géométriques, la définition bifocale et la définition monofocale seront donc énoncées ci-dessous.

#### **2.5.3.1 Intersection d'un cône**

La définition suivante est utilisée dans les manuels scolaires afin d'introduire les coniques. Historiquement, elle constitue une des premières définitions des coniques. Selon cette définition, une conique est une courbe plane obtenue par l'intersection d'un plan avec un cône de révolution à deux nappes (Laroche, 2003; Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986). Les deux nappes du cône de révolution sont jointes par leur sommet et ce point de rencontre se nomme l'apex (figure 7). Ainsi, selon la position du plan par rapport au cône et à l'apex, on obtient différents types de coniques: les coniques dégénérées et les coniques propres. Lorsque

le plan passe par l'apex, on parlera des coniques **dégénérées (point, droite et droites sécantes)** alors qu'il sera question de coniques **propres** lorsque le plan ne passe pas par l'apex (Breton et al., 1999; Boivin et al., 2011). Ces dernières seront exploitées dans des activités de la séquence. Parmi les coniques propres ou non dégénérées, on retrouve :

- le **cercle** lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône;
- l'**ellipse** lorsque le plan est incliné par rapport à l'axe du cône ainsi que sécant à une seule nappe;
- la **parabole** lorsque le plan est parallèle à une génératrice du cône;
- l'**hyperbole** lorsque le plan est incliné et sécant aux deux nappes ou parallèle à l'axe.

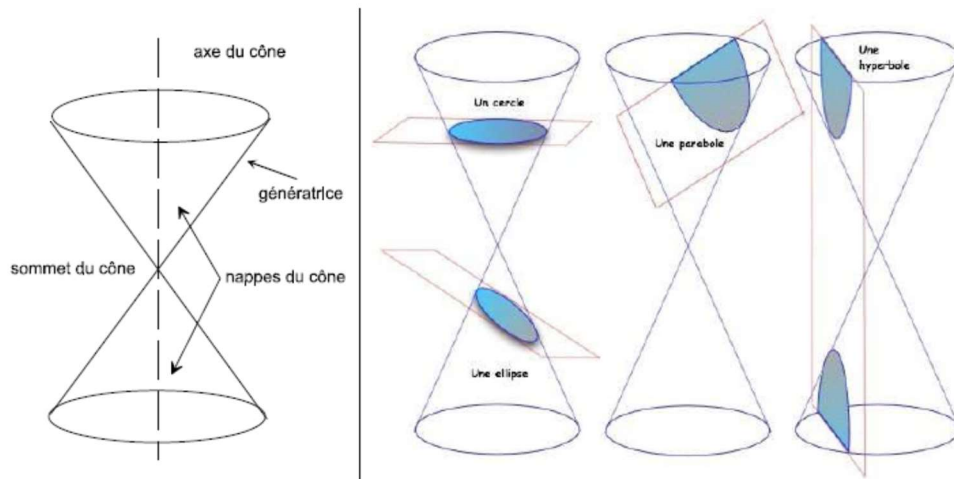


Figure 7. Les sections coniques.<sup>19</sup>

### 2.5.3.2 Lieu géométrique

Une autre définition des coniques est celle de lieu géométrique. Cette définition permet de réunir les coniques en tant qu'ensembles de points ayant une caractéristique particulière (Rousseau, 2008). Ainsi, le cercle est considéré comme le lieu des points qui sont à égale distance d'un point fixe nommé centre du cercle. Pour sa part, la parabole est décrite comme le lieu des points qui sont à la même distance d'un point fixe nommé foyer et d'une

<sup>19</sup> Image tirée du site : <http://www.aix-planetarium.fr/ficimages/Coniques.pdf>, consulté le 10 février 2014.

droite que l'on nomme directrice. Finalement, les définitions de l'ellipse et de l'hyperbole ont également cette idée de lieu de points. En effet, l'ellipse est considérée comme le lieu des points du plan dont la somme de la distance à deux points fixes (foyers) est une constante alors que l'hyperbole est représentée par le lieu des points du plan dont la valeur absolue de la différence à deux points fixes (foyers) est également une constante. La *Progression des apprentissages* ainsi que les manuels scolaires utilisés au secondaire mettent d'ailleurs l'accent sur cette idée de lieu géométrique afin d'avoir une définition englobant toutes les coniques et de les envisager comme outils de modélisation mathématique (MELS, 2009; MEES, 2016; Boivin et al., 2011).

### 2.5.3.3 Définition bifocale

L'ellipse et l'hyperbole sont les coniques que l'on définit typiquement par la présence de deux foyers; leur définition bifocale a servi chez les Arabes pour construire les coniques géométriquement. Cette définition a été énoncée par De La Hire et reprise par L'Hôpital respectivement aux XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles. Cette définition repose sur la présence de deux foyers (F et F') distants d'une valeur équivalant à une constante, soit  $2c$ . On considère d'abord l'ellipse comme étant l'ensemble des points M tels que la somme des distances de ce point à chacun des foyers est constante et vaut  $2a$ . D'où l'expression,  $MF + MF' = 2a$  pour décrire l'ellipse. L'hyperbole est quant à elle le lieu des points M pour lesquels la valeur absolue de la différence des distances entre M et chacun des foyers est une constante qui vaut aussi  $2a$ . L'expression décrivant l'hyperbole est donc  $|MF - MF'| = 2a$  (Laroche, 2003).

Cette définition bifocale est retenue dans le PFEQ. Dans le manuel de Boivin et al. (2011), des explications algébriques permettant de trouver les équations cartésiennes sont présentées. En partant de la définition bifocale de l'ellipse et en utilisant une démarche algébrique incluant la formule de la distance entre deux points (Breton et al., 1999; Boivin et al., 2011), nous pouvons retrouver l'équation d'une ellipse centrée à l'origine avec les foyers de part et d'autre de l'origine sur l'un des axes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De même, l'équation d'une hyperbole centrée à l'origine dont les foyers sont sur l'axe des  $x$  peut s'écrire :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2-a^2)} = 1$  et devient  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  en posant  $b^2 = c^2 - a^2$ . Lorsque le centre de la conique n'est pas à l'origine du plan cartésien, mais qu'on garde parallèle à l'axe des  $x$  la droite passant par les foyers, des paramètres  $h$  et  $k$  représentant le centre de la conique translatée doivent être pris en considération dans l'équation cartésienne de la conique. Ainsi, avec des foyers sur une droite parallèle à l'axe des  $x$ , l'équation de l'ellipse et celle de l'hyperbole deviennent respectivement :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Les équations cartésiennes sont décrites dans le PFEQ ainsi que dans la progression des apprentissages (MELS, 2007; MELS, 2009). On voit également ces équations cartésiennes apparaître dans les manuels, autant dans les exercices (voir par exemple *Visions* de Boivin et al., 2011) que dans les encadrés théoriques qui expliquent les principales propriétés à retenir pour les coniques, dont l'axe focal, l'axe de symétrie, l'équation de la directrice, les coordonnées des foyers en sont quelques exemples.

Le cercle peut être vu comme un cas particulier de l'ellipse où les deux foyers sont confondus (en son centre). La parabole n'a pas de définition bifocale.

#### 2.5.3.4 Définition monofocale

Une autre définition des coniques est la définition monofocale, peu utilisée dans les manuels scolaires. Pappus (290-350) ayant introduit les notions de foyer, de directrice et d'excentricité, il est possible de se servir de ces notions afin de définir une conique. Cette définition porte le nom de monofocale ou plus communément la définition selon foyer/directrice. Ainsi, une conique se définit comme l'ensemble des points  $M$  du plan tels que la distance d'un point  $M$  à un point fixe nommé foyer ( $F$ ) divisé par la distance du point  $M$  au projeté orthogonal de  $M$  sur une droite nommée directrice (point  $H$ ) est un rapport

constant. Cette relation s'écrivant symboliquement comme  $\frac{d(MF)}{d(MH)} = e$ , où  $e$  représente un réel non nul que l'on nomme excentricité. Selon la valeur de l'excentricité, on peut retrouver les différentes coniques (Laroche, 2003) :

- lorsque  $e = 1$ , il s'agit d'une **parabole**;
- lorsque  $e > 1$ , il s'agit d'une **hyperbole**;
- lorsque  $0 < e < 1$ , il s'agit d'une **ellipse**.

Dans la figure 8, on peut voir une représentation de trois coniques de même foyer et de même directrice selon leur valeur de l'excentricité.

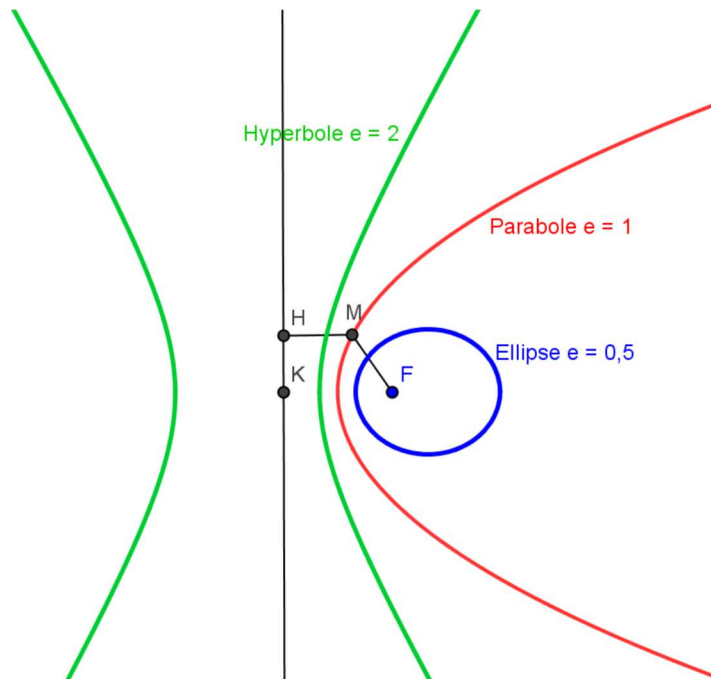


Figure 8. Trois coniques ayant le même foyer et la même directrice selon la valeur de l'excentricité.

Il est important de noter que le cercle n'a pas de définition monofocale à proprement parler, mais on pourrait considérer un cercle comme une ellipse, avec le foyer en son centre, la directrice à l'infini, et une excentricité de 0.

Dans le PFEQ, il reste peu d'éléments de la définition monofocale des coniques. On peut dire que la définition de la parabole retient cependant l'idée que la distance entre un point de cette conique et le foyer est la même que celle de ce même point à la directrice, sans mentionner l'excentricité, c'est ce que l'on constate dans Boivin et al. (2011). D'autre part, le manuel *Visions* de Boivin et al. (2011, p. 75) fait mention de cette définition dans une note didactique laissée à l'intention de l'enseignant stipulant d'« inviter les élèves à comparer les

définitions monofocales » des coniques. Par contre, aucun exercice n'est proposé dans ce sens.

### 2.5.3.5 Apports des différentes définitions dans un environnement de géométrie dynamique

La définition de lieu géométrique représente une entrée en matière pertinente, car elle renvoie à un invariant des points de la figure (la propriété qu'ils partagent), et à ce titre, elle se prête bien à un environnement de géométrie dynamique. Par exemple, il apparaît intéressant d'utiliser le fait que l'ellipse est une figure dont la somme des distances d'un point situé sur l'ellipse à chacun des deux foyers est constante. Cette propriété de la définition bifocale d'une ellipse peut servir à réaliser une construction (*molle ou robuste*) en s'assurant de garder constante la somme des distances aux foyers. Une construction *molle* pourrait être réalisée avec les deux foyers et un point de l'ellipse dans un logiciel de géométrie dynamique. En activant la trace de ce point de l'ellipse et en le déplaçant, on doit s'assurer de conserver la somme constante pour voir l'apparition d'une ellipse. Ce type de construction qui permet de donner sens à la définition n'engage toutefois pas un travail de la preuve. De là la complémentarité de la construction *robuste*, qu'elle soit donnée ou à concevoir. En effet, si une construction *robuste* est déjà donnée, les propriétés géométriques qui la sous-tendent permettent de prouver que l'on est bien en présence d'une ellipse, d'une hyperbole, d'une parabole ou d'un cercle. De plus, un environnement comme GeoGebra, qui permet de travailler conjointement algèbre et géométrie, favorise l'établissement de liens entre les différentes formules algébriques des coniques et les éléments géométriques qui les constituent.

La définition monofocale a l'avantage d'unifier les différentes coniques. Ainsi, une preuve de l'unification des coniques en lien avec la notion d'excentricité apparaît comme une occasion intéressante de faire découvrir cette définition moins connue aux étudiants. Par son caractère plus abstrait, la notion d'excentricité pourrait bénéficier d'une visualisation à l'aide d'un environnement de géométrie dynamique. Une construction *robuste* qui s'appuierait sur le concept d'excentricité permettrait de représenter l'ensemble des coniques, et par cette propriété spectaculaire, pourrait favoriser la recherche d'explication. Vu la difficulté de la

preuve, il nous semble toutefois important de fournir, en plus des étapes de la construction, des éléments pour soutenir cette recherche et l'articulation d'une preuve.

## 2.6 Précisions apportées sur les questions de recherche

Nous faisons l'hypothèse que la conception d'activités riches dans un environnement technologique pourrait permettre aux étudiants d'aller plus loin dans leur apprentissage, et d'établir de nouveaux liens entre différents concepts géométriques tels que les quadrilatères, les médiatrices, et les coniques. La séquence d'activités devra donc se baser sur une articulation entre l'exploration permise par GeoGebra et le raisonnement sur les différents objets mathématiques qui seront explorés. Un des buts de cette séquence sera de vérifier si les étudiants ne se satisfont que de la visualisation de l'outil en l'utilisant comme une boîte noire en géométrie perceptive ou s'ils voudront pousser davantage vers l'élaboration d'une preuve expliquant ce qu'ils observent lié à la géométrie déductive. Nous supposons que l'outil du réseau déductif pourra être un élément les poussant vers ce type de géométrie.

Par cette séquence d'activités, nous voulons tenter de répondre aux questions suivantes en précisant certains éléments :

1. Quel type de raisonnement mathématique est mobilisé par les futurs enseignants dans leur travail sur les activités?
  - a. Est-ce que l'exploration est davantage utilisée dans les différentes activités ou cherchent-ils la démonstration de leurs conjectures?
  - b. À quel niveau de preuve se situent-ils typiquement?
  - c. Observe-t-on une évolution au fur et à mesure du parcours de la séquence d'activités?
2. Quels types de tâches les futurs enseignants privilégient-ils avec leurs élèves dans les adaptations apportées aux activités de la séquence?
  - a. Quels rôles accordent-ils à l'exploration? À la preuve ou à la validation?
  - b. Quelle importance accordent-ils au développement du raisonnement?

3. Quels apports et limites les futurs enseignants perçoivent-ils quant à l'utilisation de la technologie en enseignement de la géométrie?
4. La séquence se révèle-t-elle propice au développement du raisonnement? À l'établissement de nouveaux liens entre les concepts de géométrie? Au développement d'une pratique instrumentée? À une nouvelle vision de l'enseignement?



## 3 Méthodologie

Dans le présent chapitre, les considérations générales de l'étude seront énoncées en précisant, entre autres, les participants de l'étude. L'ingénierie didactique qui servira de cadre méthodologique au projet sera ensuite présentée et mise à profit pour décrire et justifier le questionnaire préalable, la séquence d'activités, les liens entre celles-ci ainsi que le questionnaire post-expérimentation. Finalement, les paramètres de l'expérimentation seront décrits ainsi que la cueillette des données.

### 3.1 Considérations générales sur la recherche

La présente étude s'inscrit dans le cadre d'une recherche de développement, car elle a pour but de concevoir et valider des activités mathématiques ayant pour support l'environnement technologique qu'est GeoGebra. Cette séquence d'activités vise la formation initiale des futurs maîtres en leur permettant de vivre et d'envisager une nouvelle portée à l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques. Elle permet d'abord une instrumentation au regard du logiciel GeoGebra, avec de premières activités faisant appel à des notions de géométrie au programme du premier cycle du secondaire (quadrilatères, médiatrice). Elle soutient ensuite l'apprentissage et l'approfondissement de notions abordées en fin de secondaire (coniques). Un objectif de cette séquence d'activités est de favoriser et valoriser le développement du raisonnement mathématique dans l'apprentissage en montrant aux futurs enseignants des situations intégrant des éléments de preuve afin de compléter une exploration faite dans un environnement technologique. On cherche ainsi à répondre à l'observation faite par Mary (1999) à l'effet que les futurs enseignants ne voient pas comment expliquer les preuves aux élèves ni comment pousser plus loin cette idée de validation dans leur cheminement mathématique. Conformément à la méthodologie de l'ingénierie didactique (voir section 3.2), la validation de la séquence d'activités se fera par une comparaison de l'analyse a priori des activités avec une analyse a posteriori des résultats de l'expérimentation de ces activités auprès d'étudiants en enseignement des mathématiques au secondaire. Notons de plus qu'une pré-expérimentation avec un étudiant volontaire aura permis de valider la clarté des consignes associées aux tâches.

### 3.1.1 Participants à l'étude

Cette séquence a été expérimentée en classe auprès de sept étudiants au baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire à l'hiver 2016. Elle visait principalement à documenter l'apport, sur le rapport à la preuve chez de futurs enseignants, de l'intégration d'un outil technologique tel que GeoGebra pour l'enseignement de la géométrie au secondaire, plus spécifiquement des coniques. Pour réaliser cette recherche, les participants de l'étude ont réalisé des tâches mathématiques nécessitant l'utilisation de GeoGebra lors d'un cours de didactique de la géométrie. Les participants de l'étude étaient des étudiants inscrits au baccalauréat en enseignement secondaire, profil mathématique et étaient en deuxième ou en troisième année. Les étudiants avaient complété un ou trois cours de didactique dans leur cheminement selon leur niveau d'études.

Dans le cadre du cours de didactique de l'hiver, ils ont été amenés à réaliser la séquence d'activités (voir annexe E). La professeure responsable de ce cours permettait aux étudiants de réaliser la séquence tout en étant présente dans la salle de classe, mais n'intervenait pas durant la réalisation de celle-ci. Elle ne prenait pas part aux discussions ni à l'institutionnalisation des diverses activités. La séquence était considérée comme un enrichissement des connaissances des étudiants et n'était pas évaluée dans le cadre du cours de didactique par la professeure. Les séances étaient dirigées par la chercheuse ainsi que les périodes de discussion qui suivaient chacune des activités. La chercheuse circulait durant la réalisation d'une activité et répondait aux questions des étudiants, jouant ainsi le rôle d'enseignante à l'occasion.

Dans cette séquence, les étudiants ont répondu à différentes questions relatives à leurs constructions, à ce qu'ils ont observé dans l'environnement informatique ainsi qu'à ce qu'ils ont pu en déduire. Également, des questions ont porté sur la possibilité de transfert de ces activités auprès d'élèves du secondaire et des adaptations qu'ils feraient des dites activités. La construction et la validation de ces activités auprès de futurs enseignants s'est appuyée sur l'ingénierie didactique que nous exposons dans la section suivante.

## 3.2 Ingénierie didactique

L'ingénierie didactique (Artigue, 1988, 1996, 2002b) est une approche méthodologique qui se déploie sur trois phases principales :

1. les analyses préalables;
2. la conception et l'analyse a priori;
3. l'expérimentation, l'analyse a posteriori et la validation.

Chacune de ces phases sera regardée en détail en considérant les objectifs de la présente recherche.

### 3.2.1 Analyses préalables

Comme il a été mentionné au chapitre 1, la géométrie enseignée au secondaire au Québec est davantage une géométrie axée sur le calcul de mesures. La praxéologie de la géométrie enseignée au secondaire n'est donc pas fortement orientée vers le raisonnement et la preuve. En effet, au premier cycle du secondaire, on se limite souvent à une géométrie de type calculatoire en faisant peu de preuves au niveau géométrique. D'ailleurs, les tâches de reconnaissance, de description et de construction sont privilégiées dans la progression des apprentissages au détriment des tâches de justification et de preuves. À partir de la quatrième secondaire, des tâches de justifications d'affirmations et de démonstration s'ajoutent dans la progression des apprentissages, laissant ainsi suggérer une importance accrue à la preuve, mais qui vient un peu tard et demeure le fait d'expériences isolées.

Le thème des coniques n'est pas, à notre avis, pleinement exploité dans l'enseignement actuel des mathématiques. Bien souvent, il n'est abordé qu'en surface sans permettre aux élèves d'établir des liens signifiants entre leurs connaissances, anciennes et nouvelles. De plus, la preuve et le raisonnement déductif paraissent des éléments peu valorisés dans la pratique des élèves ainsi que chez les futurs enseignants. Par ailleurs, l'utilisation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques de logiciels de géométrie dynamique tels que GeoGebra est souvent limitée à un rôle de soutien à la visualisation. Il serait opportun d'outiller dans la formation initiale les futurs enseignants à l'endroit d'un tel logiciel tant au niveau de leur

instrumentation au regard des fonctions de l'outil que de l'instrumentalisation de l'outil à des fins didactiques. Ainsi, il nous est apparu intéressant de concevoir une séquence d'activités intégrant pareil environnement technologique qui favorise la valorisation et le développement du raisonnement déductif à travers l'étude de la géométrie et des coniques, plus particulièrement.

### **3.2.2 Conception et analyse a priori**

Dans la présente recherche, des activités ont été conçues afin de permettre aux futurs enseignants de faire des liens entre différents concepts de la géométrie dans l'environnement de GeoGebra. Avant la réalisation des diverses activités, les étudiants ont dû répondre à un questionnaire préalable qui a fourni des informations sur les connaissances des participants de la recherche en lien avec l'utilisation des outils technologiques, leurs apports et leurs limites, la notion de preuve mathématique ainsi que leurs connaissances des programmes mathématiques du secondaire. Ces informations ont servi de base à l'interprétation de certaines réponses qui ont été émises dans les activités qui ont suivi. Après la séquence d'activités, les étudiants ont dû répondre à un court questionnaire afin de voir l'évolution de leurs apprentissages et de leurs conceptions suite à cette séquence. Les buts de ces questionnaires étaient de pouvoir comparer le rapport à la preuve des étudiants ainsi que leur rapport à la technologie avant et après l'expérimentation. Ainsi, il était possible de recueillir des éléments pour les situer selon la praxéologie qu'ils envisageraient au secondaire en lien avec la preuve et l'utilisation de la technologie.

Une analyse a priori des activités a été effectuée afin de prévoir les réponses possibles des étudiants ainsi que leurs constructions dans GeoGebra (voir annexe E). Pour chacune des questions des activités de cette annexe, une réponse jugée optimale a été présentée suivie d'alternatives possibles que les étudiants pourraient mentionner. Une analyse des activités a aussi été réalisée au tableau II de la section 3.2.2.4 afin de clarifier les intentions didactiques, les intentions de la recherche et les principales difficultés anticipées des étudiants. Cette analyse a servi de base lors de la réalisation des activités pour la chercheuse qui a dirigé ces dernières lors du cours de didactique. Dans cette analyse, l'identification des réponses attendues et des difficultés possibles constitue une première validation de la séquence et des questions présentées dans les activités. Dans les sections suivantes, une description du questionnaire préalable, du

questionnaire post-expérimentation ainsi que de chacune des activités sera réalisée. Pour la partie des activités, des précisions seront également données concernant l'articulation des activités dans la séquence proposée ainsi que leur justification à l'égard de certains éléments théoriques.

### 3.2.2.1 Description du questionnaire préalable

Le questionnaire préalable (voir annexe C) qui a été utilisé comportait 5 questions portant sur les perceptions des futurs enseignants au regard des thèmes suivants : le programme actuel en mathématiques, l'utilisation de la technologie, la présence de la preuve dans l'enseignement des mathématiques ainsi que les conceptions des futurs enseignants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les éléments qui ont été recueillis dans ce questionnaire ont permis d'interpréter certaines réponses données dans les activités par les étudiants et de mieux connaître les étudiants qui formaient l'échantillon de la présente étude. Regardons ces questions un peu plus en détail ainsi que leurs interactions possibles.

La question 1 proposait une liste d'énoncés<sup>20</sup> permettant de caractériser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les étudiants ont dû sélectionner, parmi cette liste, un maximum de 4 énoncés dans le but de décrire leur vision et leur appréciation des cours de mathématiques suivis dans leur parcours scolaire ainsi que l'enseignement qu'ils souhaiteraient donner à leurs futurs élèves. Pour sa part, la question 2 demandait aux étudiants de choisir dans une liste d'énoncés<sup>21</sup>, les 2 énoncés décrivant le mieux ce qui leur apportait le plus de satisfaction en mathématiques. Les réponses à ces deux premières questions permettaient d'établir et de comparer les différents profils des étudiants dans une grille Excel selon l'intérêt qu'ils ont pour la résolution de problèmes, l'application, la théorie, le raisonnement, la preuve, la technologie, les procédures, et l'importance qu'ils accordent dans la formation à ces différents aspects de la pratique mathématique.

Les questions ouvertes 3 à 5 cherchaient à valider et à préciser ces profils avec des éléments plus personnels. En particulier, nous nous attendions à ce que les réponses aux

---

<sup>20</sup> Ces énoncés sont tirés d'une liste utilisée dans la thèse de Caron (2001).

<sup>21</sup> Idem

questions 3 et 4 puissent donner des informations supplémentaires sur le rapport des étudiants au raisonnement et à la preuve en mathématiques. La question 3 demandait de donner une définition des mathématiques, avec l'intention de voir si certains éléments identifiés dans les deux premières questions allaient ressortir à nouveau. En demandant aux étudiants ce qu'ils pensent de l'enseignement des mathématiques au secondaire et ce que l'on devrait viser avec cet enseignement, la question 4 cherchait à documenter les praxéologies qu'ils considèrent plus importantes dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, dont certains éléments avaient pu émerger avec la question 1 (items e et f).

Finalement, la question 5 portait sur l'utilisation des outils technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le but de cette question était de voir ce qu'ils pensent d'une telle utilisation en leur demandant de spécifier des apports, des limites ainsi que des conditions d'utilisation de la technologie. Nous pensions ainsi avoir une idée un peu plus précise de l'intérêt des étudiants à l'égard de la technologie et de son utilisation.

### **3.2.2.2 Description du questionnaire post-expérimentation**

À la fin de la séquence, un second questionnaire a été donné aux étudiants. Ce dernier a permis de voir le cheminement des étudiants après avoir expérimenté la séquence. Il était alors possible de comparer certaines réponses données entre le questionnaire préalable et celui post-expérimentation afin de voir les différences apportées par la séquence dans la perception des étudiants. En effet, ce questionnaire, comportant 10 questions, reprenait certaines idées de questions présentes dans le questionnaire préalable.

D'abord, la question 1 présentait la même liste d'énoncés de la question 1 du questionnaire préalable. Les étudiants devaient, en choisissant 4 énoncés maximum, décrire l'enseignement qu'ils aimeraient faire et celui auquel ils pensaient aboutir. Ces sous-questions sont similaires aux sous-questions e et f du questionnaire pré-expérimentation. Il a été intéressant de noter les différences observées à la suite de la séquence d'activités tant au niveau des intérêts théoriques que pratique des étudiants ainsi que de l'importance qu'ils accordaient à certains éléments de l'activité mathématique comme la résolution de problèmes, l'application, la théorie, le raisonnement, les procédures et la technologie. Pour ce qui est de la question 2, elle était identique à celle du questionnaire préalable. Ainsi, nous avons pensé voir l'évolution des

étudiants en faisant ressortir leurs intérêts après cette séquence et en comparant si ces derniers ont changé comparativement à ceux qui ont été identifiés avant la séquence. Ces questions permettaient également de donner des éléments de comparaison sur leur rapport à la preuve et sur leur façon de concevoir le travail mathématique.

La question 3 était orientée sur l'utilisation du logiciel GeoGebra, ses apports, ses limites et ses conditions d'utilisation. Elle reprenait l'idée principale de la question 5 du questionnaire préalable, mais en spécifiant l'outil utilisé dans la séquence d'activités, soit GeoGebra. Par cette question, nous avons voulu voir si les étudiants percevaient un intérêt à utiliser un logiciel tel que GeoGebra dans l'enseignement des mathématiques. Nous voulions également constater si les étudiants retiendraient du travail fait avec un tel outil des idées d'utilisation de la technologie en lien avec la visualisation, l'exploration et le dégagement d'invariants.

Finalement, les questions 4 à 10 portaient sur la séquence en tant que telle. Par ces questions, nous avons voulu voir ce que les étudiants en ont pensé, leurs difficultés, leurs apprentissages. Nous avons voulu également faire ressortir les adaptations qu'ils pourraient envisager à l'égard d'une telle séquence dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Ces questions permettaient de nous donner des informations sur ce qu'avaient retiré les étudiants de la séquence au regard de leur enseignement futur. Elles permettaient également de valider les praxéologies que les futurs enseignants envisagent dans leur pratique future ainsi que les niveaux de preuve qu'ils privilégieraient avec les élèves dans les activités mathématiques.

### **3.2.2.3 Principes généraux considérés dans l'élaboration de la séquence**

Dans l'élaboration de la séquence d'activités, quelques principes énoncés dans les chapitres précédents ont servi de base à la rédaction de certaines questions. Parmi ces principes, les recommandations de DeVilliers (2007) ont été considérées ainsi que les deux types de construction dans un environnement de géométrie dynamique décrits par Soury-Lavergne (2011) : *robuste* et *molle*. Ces deux constructions ont été mises à profit dans les activités en s'assurant que les étudiants aient les prérequis pour réaliser les constructions robustes, car on exploitait des concepts enseignés au secondaire. La définition monofocale pouvait constituer un concept nouveau pour les étudiants, mais il a été amené progressivement dans les tâches et la

preuve de ce concept a été réalisée grâce à un réseau déductif tel que proposé par Tanguay (2006).

Dans la construction de certaines activités, des limites de l'outil technologique ont été mises en évidence; plus précisément la discrétisation du tracé. De plus, l'idée de développer le jugement critique des étudiants face à l'outil a également été prise en compte dans la rédaction et la gradation des différentes questions de chaque activité. La théorie anthropologique a été considérée dans l'élaboration des tâches et des questions demandées aux étudiants. En nous appuyant sur les praxéologies de la géométrie en usage au premier et au deuxième cycle du secondaire, nous avons cherché à élargir le répertoire de techniques envisageables et à développer un discours raisonné sur les tâches et les techniques par un recours aux propriétés géométriques. L'approche instrumentale a aussi été mise à profit dans l'articulation des différentes tâches de la séquence afin de favoriser une appropriation progressive de l'outil de géométrie dynamique. Les questions des activités ont aussi été pensées afin de permettre aux étudiants de prouver leurs affirmations en les amenant à s'engager dans une genèse discursive relative à la praxéologie à laquelle ils s'identifient. Chacune des activités sera décrite dans les deux sections suivantes en considérant ces éléments.

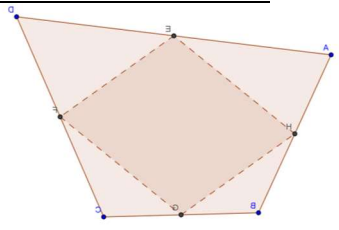
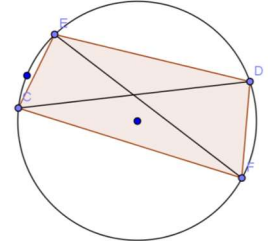
#### **3.2.2.4 Description des diverses activités**

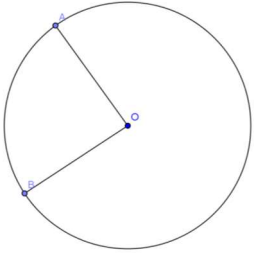
Dans la séquence des activités proposée en annexe E, nous avons voulu amener les étudiants, à l'aide d'activités variées avec GeoGebra, à vivre des activités mathématiques propices au développement du raisonnement, à réaliser qu'il est possible d'établir des liens entre différents contenus géométriques à travers une exploration et un travail sur la preuve, et à envisager une réutilisation de ces activités au secondaire, moyennant des adaptations. Chacune des 7 tâches de la séquence débutait par une construction dans GeoGebra que les étudiants devaient observer, compléter ou réaliser. Ensuite, une série de questions permettait aux étudiants de réfléchir sur la construction et de vérifier jusqu'à quel point ces derniers voudraient s'engager dans une démarche de validation et de preuve de cette construction. L'activité se terminait par une section *Rétroaction* cherchant à voir ce que les étudiants retenaient de cette dernière et s'ils jugeaient opportun d'utiliser cette activité ou une adaptation de celle-ci dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Dans la séquence d'activités qui a été élaborée, plusieurs

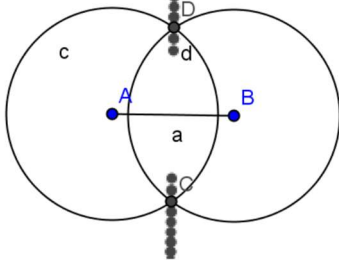


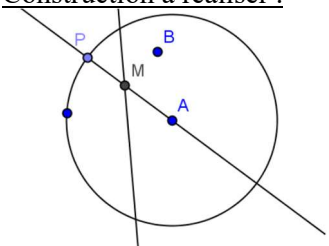
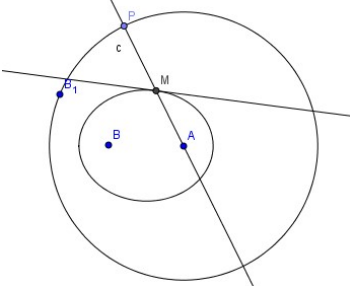
intentions (ou buts) nous ont guidée dans la construction des questions de chacune des activités. Le but général de la séquence était de sensibiliser les futurs enseignants à une utilisation riche de la technologie qui participe au développement du raisonnement mathématique et à l'établissement de liens entre les notions. Les buts secondaires se sont précisés au fur et à mesure du développement de la séquence d'activités. Il importe de souligner que les premières activités visaient l'instrumentation des futurs enseignants au logiciel de géométrie dynamique qu'est GeoGebra. Ainsi, les questions ont été orientées afin de permettre aux étudiants de s'approprier le logiciel s'ils ne le connaissent pas.

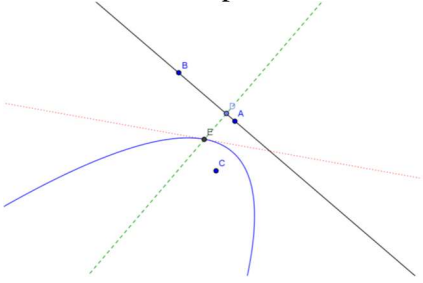
Le tableau ci-dessous montre une description sommaire de chacune des 7 activités de la séquence, avec les tâches qui devaient être accomplies par les étudiants ainsi que les intentions, didactiques et de recherche, pour chacune des activités. Quelques difficultés anticipées, qui seront détaillées dans l'analyse a priori qui suit, sont aussi énoncées. Pour pallier les difficultés liées à l'instrumentation, un guide d'instruction sur GeoGebra (voir annexe D) a été remis à chacun des étudiants. Il est à noter que le nom de chacune des activités n'a pas été donné aux étudiants afin de ne pas biaiser l'appréhension de l'activité.

Titre de l'activité	Description sommaire de l'activité et image de la construction	Tâches des étudiants	Intentions
<b>Activité A :</b> <b>Quadrilatère quelconque</b>	<p>À partir du tracé d'un quadrilatère quelconque, on relie les milieux de chaque côté de ce quadrilatère afin de former un parallélogramme.</p> <p><u>Construction à réaliser :</u></p>  <p>Pour voir une construction possible : <a href="https://www.geogebra.org/m/zmfkjdv">https://www.geogebra.org/m/zmfkjdv</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Réaliser la construction avec GeoGebra.</li> <li>Dégager qu'il s'agit bien d'un parallélogramme.</li> <li>Prouver cette conjecture.</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ne pas généraliser la preuve.</li> <li>Distinction polygone convexe et polygone non convexe.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Permettre une initiation au logiciel GeoGebra (polygone, milieu d'un segment).</li> <li>Favoriser une réflexion sur la formation de figures géométriques et sur ce qui permet de dire qu'il s'agit de tel type de figure (propriétés ou définition).</li> <li>Revoir la notion de preuve dans un environnement de géométrie dynamique.</li> <li>Faire la distinction entre figure et dessin.</li> <li>Revoir les relations d'inclusion dans la classification des quadrilatères.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>Voir la généralisation possible d'une preuve s'appliquant à tous les quadrilatères convexes.</li> </ul>
<b>Activité B :</b> <b>Quadrilatère</b>	<p>À l'aide d'un cercle et de deux cordes sécantes, on trace un quadrilatère inscrit dans le cercle.</p> <p><u>Construction à réaliser :</u></p>  <p>Pour voir une construction possible : <a href="https://www.geogebra.org/m/m2daftcf">https://www.geogebra.org/m/m2daftcf</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Réaliser la construction avec GeoGebra.</li> <li>Établir, expliciter et justifier les conditions nécessaires afin de former différents types de quadrilatères (carré, rectangle, ...).</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Difficulté à renommer les points du quadrilatère.</li> <li>Négligence de la relation d'inclusion entre les quadrilatères.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Poursuivre l'instrumentation avec GeoGebra (cercle).</li> <li>Réflexion sur la formation de figures géométriques et sur ce qui permet de dire qu'il s'agit de tel type de figure (propriétés ou définition).</li> <li>Réflexion sur la classification des quadrilatères.</li> <li>Élaboration et manipulation d'une <i>construction molle</i> dans la construction des quadrilatères au sens de Soury-Lavergne (2011) : exploration, dégagement des régularités, structuration des connaissances et formulation de conjectures.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>Voir si les étudiants se satisfont de la visualisation ou s'ils cherchent une preuve expliquant le tout.</li> </ul>

Titre de l'activité	Description sommaire de l'activité et image de la construction	Tâches des étudiants	Intentions
<b>Activité C :</b> <b>Losange</b>	<p>Un cercle est tracé avec deux rayons et on demande de compléter la figure afin d'obtenir un losange.</p> <p><u>Construction de départ :</u></p>  <p>Pour voir la construction de départ : <a href="https://www.geogebra.org/m/pstxymku">https://www.geogebra.org/m/pstxymku</a></p> <p>Pour une construction possible du losange en utilisant le concept de médiatrice : <a href="https://www.geogebra.org/m/rrhjxtek">https://www.geogebra.org/m/rrhjxtek</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trouver différentes méthodes de construction tout en mettant en jeu leurs connaissances sur les propriétés et la définition du losange.</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Faire afficher et interpréter le protocole de construction (distinguer le général du particulier).</li> <li>• Envisager une suite d'étapes menant à la <i>construction robuste</i> d'un losange.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Réflexion des étudiants sur les propriétés et la définition du losange.</li> <li>• Visualiser les éléments invariants d'une construction et ce qui peut bouger.</li> <li>• Développement d'une <i>construction robuste</i>, au sens de Soury-Lavergne (2011) avec la mise à profit des propriétés du losange.</li> <li>• Voir si les étudiants se satisfont d'une seule méthode de construction.</li> <li>• Voir les méthodes de construction utilisées.</li> <li>• Vérifier ce qu'ils pensent de l'accessibilité de la construction pour les élèves.</li> </ul>

Titre de l'activité	Description sommaire de l'activité et image de la construction	Tâches des étudiants	Intentions
<b>Activité D : Médiatrice</b>	<p>À partir d'un segment, on trace deux cercles sécants (d'un même rayon variable) dont les points d'intersection finissent par générer la médiatrice de ce segment.</p> <p><u>Construction à réaliser :</u></p>  <p>Pour une construction possible : <a href="https://www.geogebra.org/m/fqkjrmwf">https://www.geogebra.org/m/fqkjrmwf</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Concevoir la médiatrice comme un lieu géométrique.</li> <li>• Voir et prouver le théorème de la médiatrice et de sa réciproque.</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Discrétisation incomprise.</li> <li>• Autre définition de la médiatrice non donnée.</li> <li>• Faire afficher la trace des points.</li> <li>• Afficher une demi-droite seulement passant par C ou par D</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faire découvrir une technique différente pour tracer la médiatrice d'un segment.</li> <li>• Faire envisager la médiatrice comme un lieu géométrique et établir un rapport avec la réciproque du théorème.</li> <li>• Préparer à l'activité E, portant sur les coniques et réinvestissant les notions de médiatrice et de lieu géométrique, comme éléments de preuve.</li> <li>• Vérifier jusqu'à quel point les étudiants vont chercher à comprendre et prouver les éléments en jeu dans l'activité.</li> </ul>

Titre de l'activité	Description sommaire de l'activité et image de la construction	Tâches des étudiants	Intentions
<b>Activité E :</b>  <b>Lieux géométriques</b>	<p>Une construction permettant de voir les différentes coniques est réalisée. Cette construction se base sur les définitions des coniques en lien avec les foyers et la droite directrice.</p> <p><u>Construction à réaliser :</u></p>  <p>Pour une construction possible : <a href="https://www.geogebra.org/m/zvbaaywx">https://www.geogebra.org/m/zvbaaywx</a></p> <p><u>Construction avec le lieu géométrique :</u></p>  <p>Pour une construction possible présentant un lieu géométrique : <a href="https://www.geogebra.org/m/am4sswnf">https://www.geogebra.org/m/am4sswnf</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Constaté l'apparition de différents lieux géométriques (ellipse, cercle et hyperbole) dans une construction dynamique.</li> <li>• Démontrer qu'il s'agit bien de ces coniques en utilisant leurs définitions ou leurs propriétés.</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Respect des relations de dépendance dans la construction.</li> <li>• Faire afficher un lieu.</li> <li>• Repérer les invariants dans la construction.</li> <li>• Lier ces invariants avec les propriétés de l'ellipse, du cercle et de l'hyperbole.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faire considérer le cercle comme un cas particulier de l'ellipse.</li> <li>• Lier par une même construction ellipse et hyperbole.</li> <li>• Retrouver les propriétés des coniques dans les invariants associés à la construction.</li> <li>• Vérifier jusqu'à quel point les étudiants cherchent à comprendre et prouver les éléments en jeu dans l'activité et la formation des différents lieux géométriques</li> </ul>

Titre de l'activité	Description sommaire de l'activité et image de la construction	Tâches des étudiants	Intentions
<b>Activité F :</b> <b>Parabole</b>	<p>Une construction d'une parabole basée sur sa définition est donnée aux étudiants.</p> <p><u>Construction de départ :</u></p>  <p>Pour voir la construction de départ : <a href="https://www.geogebra.org/m/ewpx4bw3">https://www.geogebra.org/m/ewpx4bw3</a></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer, en regardant la construction, pourquoi il s'agit bel et bien de cette conique.</li> <li>• Voir le lien entre la parabole et une équation quadratique.</li> <li>• Visualiser les coordonnées du foyer de la parabole.</li> </ul> <p><u>Difficultés attendues :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprendre la construction de départ.</li> <li>• Repérer les invariants dans la construction.</li> <li>• Lier ces invariants avec les propriétés de la parabole.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Retrouver les propriétés de la parabole dans les invariants associés à la construction.</li> <li>• Envisager la représentation graphique d'une fonction quadratique comme un cas particulier de la parabole, plus simple sur le plan algébrique.</li> <li>• Vérifier si les étudiants peuvent transférer le lien propriété-construction appris avec l'activité E (ellipse et hyperbole).</li> </ul>



### 3.2.2.5 Analyse a priori des activités

La première activité de la séquence donne aux étudiants l'occasion d'apprendre quelques constructions de base du logiciel GeoGebra ou de parfaire leur connaissance du logiciel. Un tel travail s'inscrit dans l'instrumentation, car les étudiants s'approprient d'une part l'outil en vue de construire un quadrilatère et d'en renommer les sommets; ils s'en font aussi un instrument d'exploration, d'observation, de dégagement d'invariants et de vérification empirique, en apprenant à manipuler la figure et à observer les invariants afin de formuler et de tester leur conjecture.

Cette activité est une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011), car le déplacement des points du quadrilatère ne modifie pas la nature de la figure construite en reliant les milieux des côtés du quadrilatère, soit le parallélogramme. Les propriétés restent donc invariantes et la séquence débute par cette activité afin de permettre aux étudiants de voir le déplacement des points qu'il est possible de faire en utilisant GeoGebra et ce que cela permet d'observer. L'activité A se base sur des concepts en lien avec les quadrilatères tels que les propriétés ou la définition d'un parallélogramme ainsi que d'un quadrilatère convexe et non convexe. Ces connaissances font partie du bagage des étudiants depuis leur premier cycle du secondaire, et l'on suppose que l'identification du parallélogramme devrait être réalisée par la plupart des étudiants. La manipulation du quadrilatère ABCD est une technique qui permet de voir si le quadrilatère EFGH demeure toujours un parallélogramme, en particulier lorsque ABCD n'est plus convexe.

La question de prouver qu'il s'agit bien de ce quadrilatère en se basant sur les propriétés géométriques devrait permettre un travail davantage orienté vers la genèse discursive. Ainsi, les étudiants pourraient utiliser différentes techniques pour valider leur conjecture. Une première technique pourrait être le fait d'utiliser des valeurs numériques pour les angles ainsi que les mesures des côtés, mais cette technique relève d'une validation empirique (avec un ou plusieurs exemples) et n'entre pas dans la preuve intellectuelle et le raisonnement déductif. Une autre technique serait d'ajouter les diagonales du quadrilatère EFGH afin d'obtenir des triangles semblables, tel qu'indiqué à l'annexe E. Cette technique pourrait participer à l'élaboration d'une preuve se basant sur les propriétés géométriques de la figure construite. Une troisième technique



serait de partir des points milieux que l'on a identifiés sur chacun des côtés du quadrilatère ABCD, et de recourir directement au théorème de Varignon ou à celui des points milieux. Une telle technique s'inscrit dans la preuve intellectuelle mais en court-circuite l'élaboration, puisqu'elle est considérée déjà réalisée; son utilisation serait possible chez un étudiant de mathématiques, mais elle ne reflète pas les praxéologies qui ont cours au secondaire.

Un retour est prévu après la réalisation de l'activité par les étudiants. Dans ce retour dirigé par la chercheuse, un projecteur sera utilisé pour afficher la construction GeoGebra attendue devant les étudiants et les réponses données à chacune des questions feront l'objet d'une discussion. Dans cette discussion, il sera possible de faire un retour sur les constructions réalisées si les étudiants semblent en éprouver le besoin. Cette institutionnalisation permet aussi de soutenir le processus d'instrumentation au regard du logiciel. Elle peut également donner des pistes aux étudiants sur les éléments de preuve que l'on attend dans les différentes réponses et bonifier leur travail mathématique dans les prochaines activités.

La deuxième activité de la séquence fait encore appel aux quadrilatères, mais elle est bien différente. En fait, la construction que les étudiants vont réaliser est une *construction molle* (Soury-Lavergne, 2011), contrairement à la *construction robuste* sur laquelle s'appuyait l'activité précédente. On demande donc aux étudiants de tracer un quadrilatère à partir de deux cordes sécantes d'un cercle. Le déplacement des cordes, où l'on cherche à les garder sécantes, permet de générer différents types de quadrilatères et de faire dégager les propriétés des cordes qui permettent de les générer. La raison derrière le choix de ce type de construction pour la deuxième activité était de permettre aux étudiants de visualiser que l'on peut relâcher certaines contraintes (sur les cordes qui sont les diagonales) afin d'engager un travail de réflexion sur la façon d'obtenir chacun des quadrilatères demandés en jouant sur les propriétés de leurs diagonales.

Le travail d'instrumentation se poursuit dans cette activité. D'abord sur le plan technique, car les étudiants apprennent à tracer un cercle et peuvent réinvestir des connaissances acquises suite à la première activité (ex. renommer les sommets). Mais aussi, sur le plan didactique, en déplaçant les cordes et en observant les effets, les étudiants apprennent à se constituer un instrument d'exploration et de validation avec l'environnement GeoGebra. La praxéologie exploitée dans cette activité concerne les quadrilatères, les propriétés de leurs

diagonales ainsi que les relations d'inclusions; concepts déjà connus des étudiants depuis le premier cycle du secondaire et permettant d'étendre le contenu exploité dans la première activité tout en fournissant un milieu favorisant la réflexion par le déplacement. Puisque les étudiants sont moins familiers avec ce type de construction, nous avons inséré des questions qui contribuent à les diriger vers les techniques qu'ils peuvent employer. Ainsi, les étudiants utiliseront principalement le déplacement des cordes afin de former les quadrilatères demandés. Ils peuvent choisir d'indiquer les angles entre les diagonales ou les mesures de certains segments pour identifier leur quadrilatère; situant leur travail au plan de la géométrie perceptive, ils pourront alors dégager les conditions sur les deux cordes pour former un carré par exemple. Ils pourraient aussi se diriger vers un raisonnement plus déductif en utilisant des éléments théoriques de la construction pour justifier leur conjecture. Il est aussi possible que certains étudiants essaient d'ajouter des éléments non demandés dans la construction afin d'aider à établir des conditions comme la perpendicularité de segments.

Un retour en groupe, dirigé par la chercheuse, est encore prévu suite à cette activité afin de montrer la construction visée et de manipuler la figure construite pour tester les réponses formulées par les étudiants lors de l'échange. Le retour sur la section *Rétroaction* de l'activité permettra notamment de voir si la discussion fera émerger d'autres idées que celles inscrites sur les feuilles des étudiants. Cela permettra également de voir leur réflexion de futurs enseignants et ce qu'ils retiennent au niveau de la construction, des preuves et de l'activité lorsque l'on demande de suggérer des adaptations. Si le besoin est présent chez les étudiants, la chercheuse pourra faire une institutionnalisation des concepts en lien avec l'inclusion des quadrilatères et des éléments de preuve qui peuvent servir à amener le discours vers le raisonnement déductif.

La troisième activité porte également sur les quadrilatères, et plus particulièrement sur le losange. Dans cette dernière, les étudiants auront deux côtés du quadrilatère qui seront tracés et ils devront finaliser la séquence d'étapes pour compléter une *construction robuste* du losange (Soury-Lavergne, 2011). Avec le fichier, ils disposent déjà d'un début de *construction robuste*, car peu d'éléments de la construction sont mobiles. Les deux côtés construits auront toujours la même longueur puisque ce sont deux rayons d'un cercle et qu'ils ont donc un sommet commun (centre du cercle). En devant terminer la construction donnée, les étudiants s'engageront dans un processus de réflexion sur la façon de former un losange, en mettant à profit leurs

connaissances géométriques tels que définitions et propriétés du losange, du cercle, de la médiatrice.

Du côté de l'instrumentation, cette activité amène les étudiants à afficher un protocole de construction et à voir les éléments qui s'y affichent. Cela servira dans les activités qui suivront dans la séquence. La question 1 de l'activité sert à distinguer ce qui est mobile, ce qui est dépendant, ce qui est invariant, et à reconnaître dans les liens unissant ces éléments les propriétés de la figure qui découlent de cette *construction robuste*. La technique que les étudiants utiliseront pour répondre à cette question est le déplacement des points et ils pourront également faire afficher d'autres éléments dans la figure s'ils en ressentent le besoin, tel que l'angle formé par les deux rayons ou les mesures de ces rayons.

Les questions suivantes demandent aux étudiants de trouver au moins deux façons différentes de compléter le losange. Ainsi, les étudiants utiliseront des éléments liés à la praxéologie des quadrilatères que l'on utilise au secondaire tout en utilisant des éléments théoriques sur le concept du cercle ou de la médiatrice enseignés au secondaire. Pour compléter la construction, les étudiants peuvent utiliser le concept de médiatrice en reliant les extrémités des rayons touchant le cercle. Cela conduira à construire une diagonale du losange. Par la suite, leur technique se terminera en trouvant le point milieu de cette diagonale, la reliant au centre du cercle et en reportant la mesure de l'autre côté de la diagonale jouant le rôle de médiatrice.<sup>22</sup> Une autre technique envisagée pourrait être la construction de cercles sécants en un point représentant le dernier sommet du losange. En fait, chacun des deux côtés déjà tracés seraient les rayons de deux autres cercles sécants. Ainsi, on s'assure d'avoir quatre côtés congrus pour notre quadrilatère. Cette réflexion dans le processus de construction permet de placer le travail mathématique davantage dans un raisonnement déductif. Un travail sur le dessin plutôt que sur la figure pourrait conduire initialement certains étudiants à ne pas préserver le caractère robuste de la construction et à se limiter à ajouter de façon « molle » un quatrième sommet relié aux extrémités des deux rayons, et à le déplacer jusqu'à ce que les mesures des quatre côtés soient les mêmes. Une telle technique devrait se trouver disqualifiée par la demande qui est faite à la question 2 de s'assurer que la construction conduit invariablement à un losange même lorsqu'on

---

<sup>22</sup> Pour une construction possible du losange en utilisant ce concept : <https://www.geogebra.org/m/rrhjxtek>

déplace les sommets sur le cercle. Cette consigne devrait donc encourager la recherche d'une autre approche et favoriser l'élaboration d'une *construction robuste*. Un tel passage constitue un moment pivot dans l'instrumentation avec un logiciel de géométrie dynamique.

Si aux questions 2 à 4, on exploite davantage le rôle d'étudiant en mathématiques, la question 5 demande plutôt d'adopter la posture du futur enseignant ou de l'étudiant en didactique afin de réfléchir si les constructions réalisées sont toutes accessibles aux élèves du secondaire. Cette réflexion est poursuivie par les questions de la section *Rétroaction*. On souhaite donc voir ce que les futurs enseignants retiennent de cette activité comme idées pour l'enseignement.

Après la réalisation de l'activité, une phase d'échange est à nouveau prévue pour sonder l'instrumentation des étudiants et valider avec eux leurs différentes constructions. Dans cette discussion, on revient avec les étudiants sur les questions posées pour voir leurs points de vue mathématique et didactique. La chercheuse reviendra aussi sur la question 1, car elle permet de dégager les invariants du mouvement; une institutionnalisation de cet aspect de l'instrumentation servira dans les autres activités de la séquence.

À partir de l'activité D, on quitte le cadre rassurant des quadrilatères pour aborder et travailler la notion plus abstraite de *lieu géométrique*, constitué par un ensemble de points partageant une propriété géométrique commune. Dans cette quatrième activité, on amène à voir la médiatrice comme un lieu géométrique. L'instrumentation se poursuit par l'insertion d'un curseur avec lequel on fera varier le rayon des cercles sécants qui ont été tracés, par l'activation de la trace et par la construction d'un lieu géométrique. Les deux dernières techniques sont des éléments qui resserviront dans les prochaines activités, et l'on profite de l'activation de la trace pour faire ressortir l'idée de discrétisation, inhérente à tout logiciel.

La construction de cette activité est *robuste* (Soury-Lavergne, 2011), car on tracera toujours une médiatrice au segment AB en faisant bouger le curseur  $r$  représentant le rayon des deux cercles de centre A et B. Les trois premières questions de cette activité servent à questionner les étudiants sur les notions mathématiques de la construction et sur la façon de justifier le tout. Ainsi, en demandant sur quelles propriétés la construction repose, on incite les étudiants à dégager les invariants de celle-ci et à articuler observations et propriétés. On exploite

ainsi leurs connaissances mathématiques, on inscrit leur travail dans une genèse discursive et on favorise le recours au raisonnement déductif.

La question 4 confronte les étudiants à une limite du logiciel. En cherchant à combler les espaces vides laissés par la trace des points d'intersection entre les deux cercles, ils devraient en venir à constater que l'on ne peut avoir toutes les valeurs possibles de  $r$  et que l'étendue du lieu est plus difficile à parcourir quand le rayon se rapproche de la moitié du segment. Ils auront ensuite l'occasion de voir que le rendu se corrige en faisant tracer le lieu géométrique, faisant passer d'une représentation discrète à une représentation continue (tout au moins en apparence).

En répondant aux différentes questions posées dans cette activité, les étudiants pourraient faire un lien entre cette construction et la construction d'une médiatrice avec le compas. L'établissement de pareil lien entre l'environnement papier/crayon et l'environnement technologique permet d'abord de contribuer à l'instrumentation en faisant voir la fonction « cercle » comme un substitut au compas, autant pour tracer un cercle que pour contrôler ou reporter une mesure. Il pourrait aussi bonifier le raisonnement vers certaines propriétés de la construction.

Dans le retour après l'activité, deux objectifs sont ciblés. D'abord, sur le plan technique, on cherche à s'assurer que les étudiants maîtrisent la trace des points, l'affichage du lieu géométrique et comprennent l'articulation entre les deux. Cette discussion sur l'instrumentation permet d'outiller les étudiants ayant eu des difficultés techniques et de préparer aux prochaines activités. Si ce n'est pas le cas, la chercheuse pourrait réaliser une institutionnalisation de ces éléments techniques. Ensuite, sur le plan didactique, on cherche à conduire la discussion vers un raisonnement déductif s'appuyant sur les propriétés des figures (même valeur du rayon pour les deux cercles) pour expliquer que l'on est en présence du lieu géométrique qu'est la médiatrice. Une discussion portant sur l'adaptation de l'activité avec des élèves du secondaire est également prévue, permettant de dégager des idées en lien avec leur posture de futur enseignant.

Lors de la cinquième activité (E), les étudiants réinvestissent leurs connaissances du logiciel, acquises lors des activités précédentes. Dans la construction qui leur est demandée, ils ont à utiliser la construction d'une médiatrice et celle d'un cercle ainsi que l'activation de la

trace d'un point. La nouveauté au niveau de l'exploration avec GeoGebra réside dans la construction d'un même lieu géométrique qui donne lieu, en fonction du déplacement de certains points, tantôt à une ellipse (ou un cercle), tantôt à une hyperbole. Il est à noter que cette construction ne permet pas de visualiser une parabole, mais la prochaine activité portera sur cette conique.

Les connaissances mathématiques que les étudiants utiliseront sont liées à des concepts qu'ils devraient avoir vus en cinquième secondaire. En effet, la définition bifocale est abordée dans la présentation des coniques au secondaire, mais elle est plutôt vue rapidement pour diriger le travail mathématique des élèves du côté des équations algébriques des coniques. La construction réalisée par les étudiants dans cette activité permet de voir « en action » certaines propriétés géométriques qui serviront d'éléments de preuve à la définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole. Il est même possible, par cette construction, d'inclure le cercle dans la preuve comme étant un cas particulier de l'ellipse ayant ses deux foyers confondus. On est ici en présence d'une construction qu'on pourrait qualifier à la fois de *robuste* et *molle* : *robuste*, car elle génère systématiquement une conique, et *molle*, car selon la position du point B, c'est tantôt la somme des distances du point M aux foyers, tantôt leur différence, qui constitue l'invariant de la situation. Il est intéressant de préciser que le caractère dynamique du point B peut nous laisser penser à une *construction molle*, mais que la propriété liant la construction est invariable.

Dans la première question de cette activité, les étudiants devront d'abord identifier le lieu géométrique obtenu suite à l'activation de la trace du point M et ensuite prouver qu'il s'agit bien du lieu géométrique déterminé. Une première technique que les étudiants pourraient utiliser est de faire afficher les valeurs numériques des distances entre le point M et chacun des deux foyers de l'ellipse (A et B dans la construction). Ensuite, ils pourraient faire la somme de ces deux distances et valider leur conjecture à l'effet que la somme sera toujours constante peu importe l'emplacement du point M. Si leur explication ne va pas plus loin que l'utilisation de valeurs numériques, on reste au niveau des preuves pragmatiques dans leur travail.

Afin de diriger leur travail mathématique vers un certain raisonnement déductif, la question leur suggère d'utiliser les propriétés géométriques des figures construites dans GeoGebra. Ainsi, s'ils utilisent ces propriétés, ils devront, comme technique principale, identifier les foyers de l'ellipse construite (A et B dans la construction) ainsi que les invariants

de la construction : la longueur de  $[PA]$ , comme rayon du cercle construit. Lorsque ces éléments sont identifiés, les étudiants devront utiliser la définition bifocale de l'ellipse précisant que la somme des distances entre un point de l'ellipse et chacun des deux foyers est constante. Ils devront trouver un lien unissant  $[MA]$  et  $[MB]$  à la constante  $[PA]$ . C'est la définition de la médiatrice qui permet de trouver ce lien, car le point  $M$  est situé sur la médiatrice entre  $P$  et  $B$ . On a ainsi que  $[PM]$  est isométrique à  $[MB]$ . Comme  $[PA]$  est le rayon du cercle et qu'il est formé de la réunion de  $[PM]$  et de  $[MA]$ , on peut substituer  $[MB]$  à  $[PM]$  et ainsi obtenir que la somme des mesures de  $[MA]$  et de  $[MB]$  est égale au rayon du cercle. Les questions suivantes ont pour objectif d'amener les étudiants à étendre leur preuve à l'hyperbole et au cercle, en dégagant les éléments communs et ce qui les distingue. Ce travail leur permettant d'atteindre le niveau des preuves intellectuelles. Ils sont ainsi placés dans une posture d'étudiants en mathématiques.

Un retour sur l'activité, animé par la chercheuse, est prévu avec les étudiants. Dans ce retour, les différentes constructions réalisées seront abordées ainsi que les difficultés de nature technique. Par la suite, pour chacune des questions de l'activité, les étudiants seront invités à partager les stratégies utilisées pour expliquer, voire même prouver leurs conjectures. Une phase d'institutionnalisation des savoirs mathématiques est prévue si les étudiants semblent avoir eu des difficultés avec la définition bifocale. Dans cette phase, la chercheuse fera des rappels théoriques de la définition en montrant comment la figure construite peut correspondre tantôt à la définition de l'ellipse, tantôt à celle de l'hyperbole. Dans ce retour, les étudiants adopteront une posture didactique lorsqu'ils devront parler des adaptations de cette activité pour qu'elle soit donnée ou non à des élèves du secondaire.

Comme la cinquième activité ne permet pas de réaliser la construction d'une parabole, la sixième activité (F) a deux objectifs : travailler ce lieu géométrique et lier sa définition monofocale avec la fonction quadratique par la géométrie analytique. Dans cette activité, les étudiants partiront d'une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) d'une parabole se basant sur la définition monofocale et devront prouver qu'il s'agit bien de cette conique en utilisant les propriétés géométriques de la construction. Cette construction est dite *robuste*, car les propriétés géométriques sur lesquelles la construction se base sont invariantes. Ainsi, en déplaçant les éléments mobiles, on obtient toujours une parabole, car la médiatrice  $[DC]$  est liée au foyer  $C$

et au point D sur la droite directrice. Cela permet de s'assurer de l'invariance et de l'égalité des segments [DE] et [CE] où E est un point de ce lieu géométrique. Par la suite, les étudiants auront l'occasion d'explorer la construction d'un point de vue algébrique en essayant de trouver les conditions pour que l'équation de la parabole, soit la plus simple.

L'appropriation de GeoGebra se poursuit dans cette activité avec l'ajout de deux éléments techniques : l'utilisation de la fenêtre algébrique et le recours au plan cartésien. Les étudiants peuvent ainsi visualiser cet apport de GeoGebra et lier la parabole avec la fonction quadratique enseignée en quatrième secondaire. Ils réinvestissent également des éléments vus antérieurement, soit l'affichage du protocole de construction et le déplacement des points mobiles. La première question a d'ailleurs pour but de les amener à réfléchir sur les invariants et les points mobiles de la construction. Ainsi, on base leur travail mathématique dans une phase de découverte et de visualisation afin de faire ressortir les propriétés géométriques sous-tendant la construction. La question 2 leur demande ensuite d'expliquer qu'il s'agit bien d'une parabole et les éléments dégagés à la question précédente les aident à expliquer le tout.

Une technique pour justifier la présence de la parabole pourrait être de faire afficher la distance d'un point de la parabole au foyer et la distance de ce même point à sa projection orthogonale sur la droite directrice. Cette technique suppose que les étudiants ont pu repérer les éléments clés de la parabole (foyer et directrice) et qu'ils se servent de la définition monofocale de la parabole enseignée au secondaire. Néanmoins, on reste ainsi à un niveau pragmatique en expliquant la conjecture par un exemple numérique. Une seconde technique, se situant dans les preuves intellectuelles, consiste à utiliser la propriété caractéristique de la médiatrice pour justifier que la construction constitue une réalisation de la définition monofocale de la parabole. Comme cette propriété a été revue et utilisée dans les activités précédentes, nous pensons que cette sixième activité constitue une belle occasion pour valider si les étudiants cherchent à réinvestir les connaissances et pratiques utilisées ou développées dans la séquence.

À la question 3, les étudiants pourront envisager la représentation graphique de la fonction quadratique comme une parabole particulière grâce à l'utilisation de la fenêtre algébrique. Ils seront amenés à manipuler et changer les positions respectives du foyer et de la droite directrice afin de retrouver l'équation d'une fonction quadratique. On suppose qu'ils utiliseront leurs connaissances mathématiques de quatrième secondaire afin de faire ce lien.



Dans la section *Rétroaction*, on termine l'activité en amenant les étudiants dans une réflexion didactique afin de leur permettre de réfléchir sur l'utilisation de cette activité avec des élèves du secondaire et les modifications qu'ils en feraient. Cette section permet de cibler les connaissances didactiques et pédagogiques des étudiants et de s'intéresser au côté des futurs enseignants.

Suite à cette activité, un retour avec la chercheuse est planifié afin de permettre aux étudiants de partager leurs stratégies, leurs difficultés et leurs découvertes. Si la chercheuse constate que certains éléments visés n'ont pas fait l'objet d'une discussion, il sera possible de les aborder, voire même, de procéder à une institutionnalisation des savoirs si le besoin s'en fait sentir. Un des éléments à institutionnaliser est la définition monofocale, car elle servira de base à la dernière activité.

Cette dernière activité (G) vise l'apprentissage (ou la redécouverte) d'un nouveau concept, celui d'excentricité. L'idée d'utiliser ce concept dans une activité de la séquence vient d'une note didactique laissée dans le guide d'enseignement du manuel *Visions* qui suggère à l'enseignant d'« *inviter les élèves à comparer les définitions monofocales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole* » (Boivin et al, 2011, p. 75). En plaçant ce concept au centre de l'activité, un premier but est de permettre aux étudiants de découvrir cette définition moins connue des coniques et d'en saisir l'équivalence avec les définitions connues. Un second but est que les étudiants puissent envisager GeoGebra comme un environnement permettant de découvrir un nouveau concept en explorant et en validant des conjectures. Du côté des connaissances mathématiques que les étudiants auront à mobiliser pour expliquer et même valider la définition monofocale des coniques, il y a des éléments en lien avec les cas de similitude des triangles, l'élaboration de rapports proportionnels et l'idée de substituer des éléments isométriques. Ainsi, les connaissances mathématiques en jeu peuvent être supposées acquises par les étudiants puisqu'elles renvoient à des apprentissages faits au secondaire. La nouveauté, au niveau mathématique, est le fait de compléter un réseau déductif pour élaborer une preuve complexe permettant de la rendre plus accessible.

Puisque la construction est déjà donnée et que les activités précédentes ont permis l'appropriation de GeoGebra, voire même son instrumentation, les étudiants pourront utiliser toutes leurs connaissances du logiciel afin de comprendre la construction (affichage de valeurs

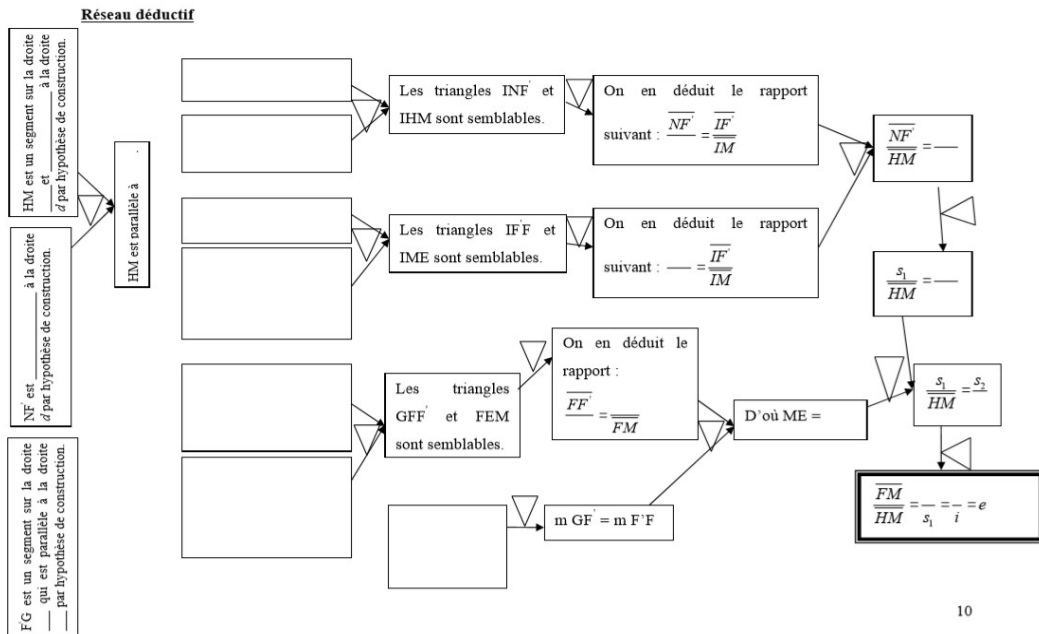
numériques, utilisation du protocole de construction). Il s'agit d'une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) puisque les propriétés géométriques derrière cette construction sont invariantes (distances entre un point et la droite directrice ainsi qu'entre un point et le foyer) et permettent de visualiser les différents cas auxquels conduit la définition monofocale des coniques. Les éléments mobiles sont peu nombreux et leur déplacement n'entraîne pas de modifications aux propriétés géométriques sur lesquelles se base cette construction. À la question 1, tout comme dans l'activité précédente, les étudiants sont amenés à trouver les éléments mobiles et fixes de la construction ainsi qu'à comprendre le protocole de construction. Comme la construction est assez complexe, quelques hypothèses ont été mentionnées dans le fichier GeoGebra et les étudiants doivent en vérifier la présence en regardant le protocole de construction. Le but de vérifier ces hypothèses est double : s'assurer d'une meilleure compréhension des étapes de la construction et faciliter l'émergence de la preuve dans le réseau déductif. Les étudiants pourraient vérifier les hypothèses en mentionnant seulement les étapes du protocole de construction qui réfèrent à chacune ou justifier le tout en précisant chaque hypothèse avec des éléments théoriques liés à la construction.

Par la suite, la question 2 demande aux étudiants de déplacer le curseur  $e$  et de visualiser dans quelles conditions la construction permet de former les différents lieux géométriques. Les questions 3, 4 et 5 servent à pousser leur réflexion sur chacun des lieux géométriques visualisés et à lier une valeur de  $e$  donnée avec les longueurs de  $[FM]$  et  $[HM]$ . Une technique que les étudiants pourraient utiliser est de faire afficher les valeurs numériques de ces segments. Ainsi, ils pourraient émettre des conjectures sur l'égalité ou non de ces longueurs et proposer des inégalités (plus grand, plus petit) lorsque ces questions demandent de lier les longueurs par une expression algébrique. Cette technique semble un point de départ intéressant, mais limite la portée de leur réflexion au niveau d'exemples numériques. Une technique qui paraît plus porteuse d'un raisonnement déductif, liant les longueurs à l'excentricité, consiste à construire des rapports entre ces longueurs pour trouver la valeur demandée pour  $e$  pour chacune des questions. La question 6 permet de généraliser en ne donnant plus de valeur spécifique à  $e$ . Cette question cherche à amener la réflexion des étudiants vers le niveau des preuves intellectuelles et à leur faire identifier les éléments clés de la définition monofocale (foyer et droite directrice) dans la construction. La question suivante permet aux étudiants d'apprendre que la valeur de  $e$

est nommée excentricité et ils auront à élaborer la définition monofocale des coniques. Le but de cette question est de vérifier si les liens avec le foyer et la droite directrice ressortiront dans leurs définitions.

À partir de la question 8, l'activité cherche à faire recueillir des éléments qui serviront dans le réseau déductif. Ainsi, on demande aux étudiants d'exprimer la valeur de  $e$  en fonction du rapport d'homothétie qui a permis de construire le point  $F'$ . Pour répondre à cette question, les étudiants devront repérer, dans le protocole de construction, le rapport d'homothétie  $k$  qui est lié avec la valeur de  $e$  :  $k = 1/(1+e)$ . Ils doivent ensuite faire le lien avec les distances du centre d'homothétie  $N$  à  $F$  et  $F'$  respectivement et ce rapport  $k$  défini. Par manipulations algébriques, ils pourront isoler la valeur de  $e$ . Cette première partie pourrait s'arrêter là si les étudiants ne voient pas le fait que  $\overline{NF} - \overline{NF'}$  peut se remplacer par  $\overline{FF'}$  et ensuite faire la substitution par  $s_2$  et  $s_1$ . Cela pourrait représenter une difficulté dans leur compréhension du réseau déductif. À la question 9, les étudiants sont amenés à décrire les valeurs  $i$  et  $j$  afin de faire un lien avec la droite directrice et le foyer d'une conique. Tous ces éléments théoriques permettent aux étudiants de compléter le réseau déductif servant de preuve à la définition monofocale des coniques.

Ce réseau déductif à compléter fait l'objet de la question 10 (voir figure 9). Pour compléter le réseau, les étudiants doivent établir des liens entre ce qu'ils observent dans la figure et les différents triangles. Afin de faciliter leur visualisation et le repérage des triangles semblables, différentes couleurs ont été insérées dans la construction donnée aux étudiants. Certains éléments ont été ajoutés dans le réseau déductif afin de permettre aux étudiants d'utiliser les bons triangles pour faire les rapports permettant de voir apparaître la valeur de l'excentricité. La question 11 permet de lier algébriquement la définition monofocale à chacune des coniques. Ce travail, lié au réseau déductif, place les étudiants dans une démarche de raisonnement déductif, car ils doivent utiliser des propriétés géométriques de la construction pour comprendre le phénomène qui s'y produit et le prouver.



10

Figure 9. Réseau déductif à compléter dans l'activité G

À partir de la question 12, les étudiants sont placés à nouveau dans une posture didactique de futur enseignant. Ils doivent d'abord dégager l'intérêt qu'ils voient à la définition monofocale. Cette posture de futur enseignant est à nouveau sollicitée dans la section *Rétroaction* où ils doivent se demander s'il est possible d'atteindre l'objectif du guide d'enseignement de faire comparer par les élèves les définitions des coniques. Il sera intéressant de noter leurs éléments de réponse et de voir si les étudiants pensent que cette définition et sa preuve sont accessibles à des élèves du secondaire, et les raisons qu'ils invoquent pour justifier leur réponse.

Suite à cette activité, un retour en groupe dirigé par la chercheuse est prévu. Dans ce retour, les étudiants pourront échanger sur les stratégies utilisées pour répondre aux questions et comprendre la construction, leurs difficultés ainsi que leurs réponses. Il sera possible de faire une institutionnalisation de certains éléments si le besoin s'en fait sentir. Ainsi, une institutionnalisation de la définition monofocale et de la preuve contenue dans le réseau déductif pourra être dirigée par la chercheuse.

### 3.2.2.6 Synthèse des liens entre les activités de la séquence didactique

Dans la séquence d'activités de cette étude, différents apprentissages peuvent être réalisés : des apprentissages techniques ou informatiques, des apprentissages ou des réinvestissements mathématiques ainsi que le développement d'une pratique mathématique instrumentée. Les activités A à D permettent aux étudiants d'apprendre à manipuler le logiciel de géométrie dynamique tout en explorant les divers outils de celui-ci et en réfléchissant sur les concepts mathématiques de chaque activité. Les premières activités permettaient d'instrumenter les étudiants au logiciel dans un contexte utilisant des notions tirées de la praxéologie des quadrilatères du premier cycle du secondaire ouvrant sur des éléments de preuve vus en quatrième secondaire. L'alternance entre les deux types de construction (*robuste* et *molle*) définis par Soury-Lavergne (2011) servait aussi à développer l'idée que GeoGebra puisse servir d'instrument de manipulation, de visualisation et d'exploration pour dégager des invariants et prouver des conjectures.

L'activité A amorçait une réflexion sur les quadrilatères et la notion de preuve en mathématiques. Les étudiants pouvaient se servir de triangles semblables afin de montrer que les côtés du quadrilatère sont parallèles deux à deux dans le but de prouver qu'il s'agit bien d'un parallélogramme. Cette réflexion a été poussée davantage dans l'activité B qui permettait aux étudiants de réfléchir sur les définitions des quadrilatères ainsi que leurs propriétés afin de déterminer le type de quadrilatère qui a été formé et dans quelles conditions il l'était. Cette construction peut être considérée comme une construction *molle* (Soury-Lavergne, 2011) comparativement à la construction de l'activité C. Dans cette dernière activité, les étudiants ont eu à se servir des propriétés et des définitions mobilisées dans l'activité précédente afin d'achever la construction (*robuste*) du losange. L'instrumentation des étudiants en lien avec le logiciel GeoGebra était considérée en choisissant le thème des quadrilatères, propre au premier cycle du secondaire. Ces premières activités ont été conçues en gardant à l'esprit l'idée de preuve et de jugement critique que l'on cherchait à valoriser chez les étudiants.

La séquence change un peu de ton à partir de l'activité D dans laquelle la notion de lieu géométrique était amenée en lien avec la définition même de la médiatrice; praxéologie toujours liée au secondaire. Ainsi, les étudiants pouvaient réinvestir leurs acquis instrumentaux des premières activités afin de réfléchir sur la définition de la médiatrice et sa propriété

caractéristique. Dans cette activité, les étudiants étaient confrontés à une limite de GeoGebra en lien avec la commande *Trace* : la médiatrice était formée par des points qui étaient espacés dans l'interface. Cette limite n'apparaissait pas lorsque l'on utilisait la commande *Lieu géométrique*. Cette idée de lieu géométrique, contenue dans l'activité D, a servi dans les constructions des activités suivantes de la séquence qui étaient en lien avec les coniques. En effet, dans l'activité E, les étudiants devaient visualiser et prouver les différents lieux géométriques (cercle, ellipse et hyperbole). L'activité F s'attardait à la parabole et essayait d'inciter les étudiants à voir un lien entre cette conique et l'équation quadratique, exploitant ainsi le côté algébrique de GeoGebra. Les constructions des activités E et F s'appuyaient sur la médiatrice, et sa propriété caractéristique permettait de prouver qu'il s'agissait bien des coniques observées. Finalement, l'activité G terminait cette séquence en proposant une unification des lieux géométriques formés par les coniques en essayant de rendre accessible une preuve, sous forme d'un réseau déductif, de la définition monofocale des coniques; définition moins connue des étudiants et évoquée dans certains guides pédagogiques.

Les principaux liens peuvent se résumer dans la figure 10 en considérant autant des éléments didactiques, instrumentaux ou mathématiques. Pour chacune des activités A à G, les éléments principaux ont été relevés et numérotés pour en montrer l'utilisation potentielle dans une activité ultérieure. La lettre indique l'activité de provenance et le nombre, l'élément considéré. Un code de couleur a également été ajouté afin de distinguer les différentes catégories d'éléments.

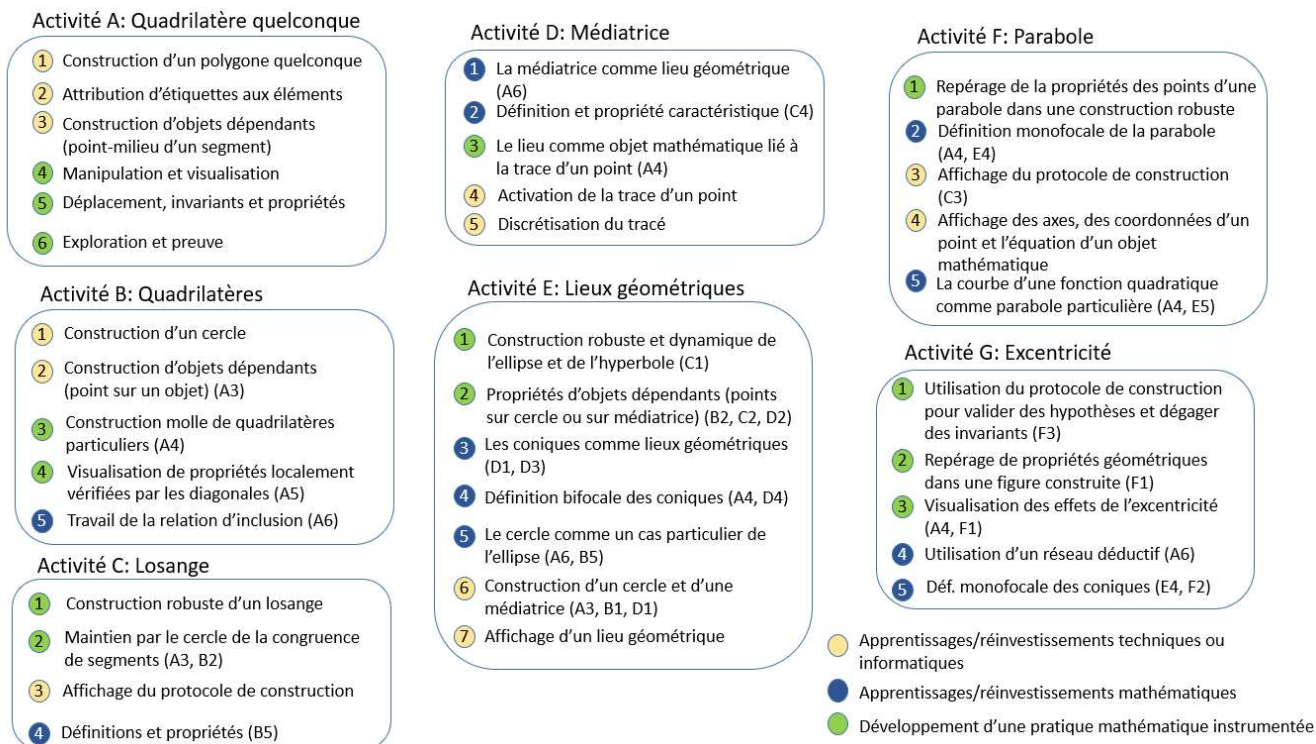


Figure 10. Principaux liens entre les activités de la séquence

### 3.2.3 Expérimentation, analyse a posteriori et validation

Une pré-expérimentation a eu lieu avec un étudiant volontaire en dernière année du baccalauréat. La séquence d'activités a été soumise à cet étudiant afin de valider nos questions et de voir si nos objectifs paraissaient être réalistes. Il s'agit d'une seconde façon de valider la séquence avant l'expérimentation. Certaines questions ont été précisées suite aux commentaires de cet étudiant ainsi que les consignes pour réaliser certaines constructions.

L'expérimentation a été ensuite réalisée avec un groupe d'étudiants inscrits en didactique de la géométrie. Les paramètres de cette expérimentation ainsi que l'analyse des données seront explicités dans les sections suivantes.

#### 3.2.3.1 Paramètres de l'expérimentation

L'approche choisie pour l'étude est davantage une approche qualitative reposant sur des productions écrites des étudiants, une discussion ainsi que des fichiers GeoGebra. Une première rencontre d'une quinzaine de minutes a eu lieu au début de la session afin de présenter le projet de recherche aux sept étudiants et de recueillir leur consentement à participer à celui-ci. Lors de

cette rencontre, la chercheuse a décrit un peu la séquence qui leur serait proposée dans GeoGebra en précisant que les activités porteraient sur les quadrilatères et les coniques. Elle a également présenté le formulaire de consentement en répondant aux questions des étudiants (annexe A). Par la suite, un total de cinq rencontres d'une durée de 90 minutes avait été planifié avec la professeure responsable du cours. Les quatre premières activités, étant plus courtes, devaient se faire en deux rencontres; les autres se déroulant chacune en une séance. Pour chacune des rencontres, la professeure responsable du cours était présente, mais ne faisait pas d'intervention; chaque rencontre étant dirigée par la chercheuse ainsi que les discussions constituant une certaine forme d'*institutionnalisation* de l'activité. Au début de la première séance, des consignes ont été données concernant les productions attendues par les étudiants. Ils devaient répondre aux questions des activités sur des feuilles mobiles et faire des sauvegardes de leurs fichiers GeoGebra sur la clé USB qui leur avait été fournie pour les activités. Un rappel de ces consignes s'est fait au début de chacune des séances suivantes.

À chacune des rencontres avec les étudiants, il y avait une présentation de l'activité qui était proposée, un moment pour réaliser celle-ci individuellement et finalement, un moment de synthèse sous forme d'une discussion de groupe. Les étudiants avaient accès à un guide d'instruction sur GeoGebra (voir annexe D) tout au long des activités. Ce guide leur a été remis lors de la première rencontre. Des traces écrites ont été recueillies tout au long des activités ainsi que des fichiers relatifs aux constructions réalisées dans GeoGebra. Les constructions réalisées étaient enregistrées sur une clé USB que chaque étudiant recevait au début de la rencontre. Cette clé USB contenait également les constructions données pour les activités C, F et G. Un journal de bord a également été utilisé lors des cours afin de consigner les discussions des étudiants et de l'enseignante lors de la réalisation des activités et des moments de discussion en groupe. Le tout a été complété par un enregistrement audio de la discussion suivant chacune des activités de la séquence.

Ces traces ont fait l'objet d'une première *analyse a posteriori* et ont servi à cibler des thèmes qui semblaient se dégager dans les activités ou les discussions. Ces thèmes ont été détaillés plus en profondeur de façon qualitative afin de comprendre ce qui semblait se dégager suite à la séquence d'activités. Une comparaison des questionnaires pré et post expérimentation a aussi été effectuée afin de mieux comprendre certaines réponses données des étudiants (voir



annexe F). Finalement, une amélioration des activités pourrait être proposée en fonction des observations et des traces recueillies lors de l'expérimentation.

Un certificat d'éthique (voir annexe B) a été nécessaire afin de mener à bien la réalisation de la phase d'expérimentation. Nous avons aussi demandé à chaque étudiant de remplir le formulaire de consentement se trouvant à l'annexe A.

### **3.2.3.2 Analyse des données recueillies**

Les données recueillies ont été classées dans des tableaux afin de faire ressortir les adaptations des activités que les futurs enseignants pensaient souhaitables, les différents niveaux de preuve utilisés dans les activités ainsi que le type de raisonnement pour chacune des activités. Également, nous avons comparé les réponses attendues avec les réponses effectives afin de valider notre analyse a priori et de comprendre les décalages entre les deux analyses, s'il y a lieu (validation interne) et d'envisager des améliorations possibles.

L'activité mathématique des étudiants à travers les activités a été analysée en fonction des genèses utilisées dans leurs explications. En analysant les explications qui ont été données par les étudiants, il était possible de les classer selon les niveaux de preuve définis par Balacheff (1988). Il est à noter que les sous-niveaux *exemple générique*, *expérience cruciale* et *expérience mentale* sont difficiles à distinguer dans un environnement technologique et peuvent être convoqués simultanément dans un tel environnement. Ainsi, nous les considérons fusionnés dans un niveau que nous appellerons Intermédiaire. Ce niveau faisant ainsi le lien entre les preuves pragmatiques et intellectuelles. L'approche instrumentale a permis de mieux saisir les apports de la séquence et les difficultés vécues par les étudiants au fil de son déploiement. Finalement, l'approche anthropologique a servi à caractériser les différentes modifications que les étudiants pourraient proposer à cette séquence dans le but de la faire vivre à des élèves du secondaire. Ainsi, l'approche utilisée est davantage qualitative.

## 4 Analyse des résultats et interprétation

L'analyse qualitative des données de la recherche recueillies dans les fichiers GeoGebra, dans les productions écrites des étudiants et dans la discussion après chacune des activités a permis de faire ressortir des thèmes récurrents qui nous ont servi à structurer la présentation des résultats. Dans ce chapitre, des précisions seront d'abord données concernant les conditions effectives de l'expérimentation. Ces précisions seront suivies d'une analyse des productions de groupe. Le chapitre se terminera par une synthèse des résultats selon trois profils dégagés chez les futurs enseignants.

### 4.1 Précisions sur les conditions effectives de l'expérimentation

Au moment de l'expérimentation, il y avait 7 étudiants inscrits au cours de didactique de la géométrie à l'hiver 2016. Ils ont tous accepté de faire les activités de la séquence, mais ne se sont pas tous présentés à chacune des rencontres. Une seule personne était en troisième année du baccalauréat, mais l'analyse de ses productions n'a pas montré de différences notables entre ses réponses et celles des autres étudiants. Elle avait suivi 75 crédits comparativement aux 45 crédits de cours suivis par les autres étudiants. Ces 30 crédits supplémentaires étaient répartis en pédagogie, en didactique et en mathématiques, mais tous avaient suivi le cours de géométrie euclidienne. Les cours supplémentaires n'étant donc pas en lien avec la géométrie, nous n'avons pas tenu compte de cette différence dans l'expérimentation.

Un autre point à souligner est le fait que l'activité C de la séquence n'a pas pu être réalisée par les étudiants. Vu le manque de temps disponible pour les rencontres et le fait que les deux premières activités ont demandé plus de temps que prévu, l'activité C de la séquence a dû être retirée. Cette activité visait à nouveau les quadrilatères, et favorisait l'instrumentation avec GeoGebra et l'application d'un raisonnement à travers une *construction robuste*. Ce type de construction était d'ailleurs exploité dans l'activité A et comme l'activité C n'était absolument pas nécessaire pour la suite, il a été jugé acceptable de la sauter. Il est à noter que cette activité permettait d'initier les étudiants à l'utilisation du protocole de construction, mais cette idée était reprise dans l'activité F, avec un contenu théorique plus étoffé.

Le calendrier des séances a dû être modifié suite à plusieurs facteurs : conditions météorologiques, temps plus long que prévu pour la réalisation et la discussion de certaines activités, heure tardive de certaines séances et heure de fin du cours (17h35). Une première rencontre, d'une durée de 30 minutes, a eu lieu le 14 janvier 2016 afin de présenter rapidement le projet de recherche, de recueillir le consentement des étudiants et de remplir le questionnaire pré-expérimentation. Par la suite, il y a eu une seconde rencontre de 90 minutes (16h00 à 17h35) le 28 janvier dans laquelle les étudiants ont réalisé l'activité A qui a été suivie d'une discussion formant une certaine *institutionnalisation* de l'activité. Les étudiants ont ensuite amorcé l'activité B. Dans cette rencontre, le guide d'instruction sur GeoGebra (voir annexe D) a été remis à tous les étudiants. Lors de la troisième séance (4 février, de 13h00 à 14h00), l'*institutionnalisation* de l'activité B a été réalisée après que les étudiants l'aient complété. Cette troisième séance s'est ajoutée à celles prévues au départ afin de terminer l'activité B qui a nécessité plus de temps que prévu. C'est à ce moment que la décision de sauter l'activité C a été prise afin de ne pas ajouter d'autres séances supplémentaires puisque la séquence devait s'inscrire dans le cadre du cours de didactique de la géométrie.

La quatrième séance a eu lieu le 11 février (de 16h00 à 17h35). Dans cette séance, les étudiants ont réalisé l'activité D suivie de la discussion ainsi que l'activité E suivie de la discussion. Certains étudiants ont même débuté l'activité F comme le tout se faisait individuellement et que l'*institutionnalisation* ne se faisait que lorsque tous les étudiants avaient remis leurs productions écrites. En raison des conditions routières et d'une tempête de neige, la cinquième séance, celle du 25 février a dû être écourtée : (de 16h00 à 17h00). Cette séance a portée sur l'activité F, *institutionnalisation* comprise, et s'est terminée par l'amorce de l'activité G. Il a donc été convenu qu'il y aurait une autre séance le 17 mars afin de compléter l'activité G et son *institutionnalisation*. Cette séance s'est terminée par le questionnaire post-expérimentation et le tirage du prix de participation. Cette séance ne pouvait avoir lieu plus tôt, car il y avait d'abord la semaine de lecture et ensuite l'examen du cours la semaine suivante. Il importe de préciser que les étudiants avaient accès aux feuilles de questions des activités précédentes ainsi qu'au guide d'instruction sur GeoGebra tout au long des différentes séances.

Dans les sections suivantes, nous analyserons les productions réalisées par les étudiants lors de ces séances : productions écrites aux réponses des activités, fichiers GeoGebra et questionnaires pré et post expérimentation.

## 4.2 Analyse des productions du groupe

Pour chacune des activités de la séquence, un résumé de l'activité ainsi qu'une description des difficultés rencontrées et des stratégies déployées pour l'ensemble des étudiants seront présentés. Cette description a été réalisée en intégrant les différents thèmes ressortis lors de l'analyse qualitative selon leur pertinence dans l'activité discutée.

### 4.2.1 Retour sur l'activité A

L'activité A part d'une construction d'un quadrilatère convexe quelconque sur lequel on identifie les milieux des côtés afin de construire un nouveau quadrilatère dont les sommets sont les points milieux. Les étudiants devaient donc trouver le type de quadrilatère ainsi obtenu et prouver qu'il s'agit bien de celui qui a été identifié. Ils devaient également vérifier si leur conclusion était toujours valide dans le cas d'un quadrilatère non convexe. Cette construction est considérée comme une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011), car les propriétés géométriques derrière la construction demeurent invariantes lorsque l'on fait bouger le quadrilatère formé. Cette manipulation permet de visualiser le fait que l'on sera toujours en présence d'un parallélogramme peu importe si le quadrilatère de départ est convexe ou non convexe.

#### 4.2.1.1 Instrumentation et instrumentalisation

Dans cette activité, les étudiants s'approprient le logiciel qu'ils n'avaient pas ou peu utilisé auparavant. On note une exploration de la construction, mais certains étudiants vont plus loin. En effet, Sonia utilise de la couleur et trace des diagonales dans un quadrilatère (voir figure 11), Alexandre inscrit les mesures d'angles et de côtés sur le quadrilatère (voir figure 12) et Geneviève utilise la médiatrice afin de trouver les milieux des côtés du quadrilatère (voir figure 13). Ces éléments n'étant pas demandés directement dans la construction, on note donc des initiatives d'instrumentation, voire même d'instrumentalisation chez ces étudiants.

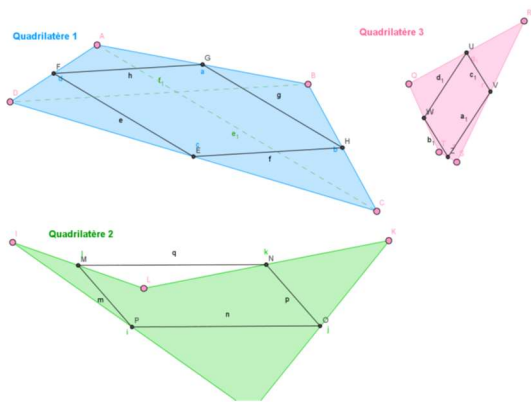


Figure 11. Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité A.

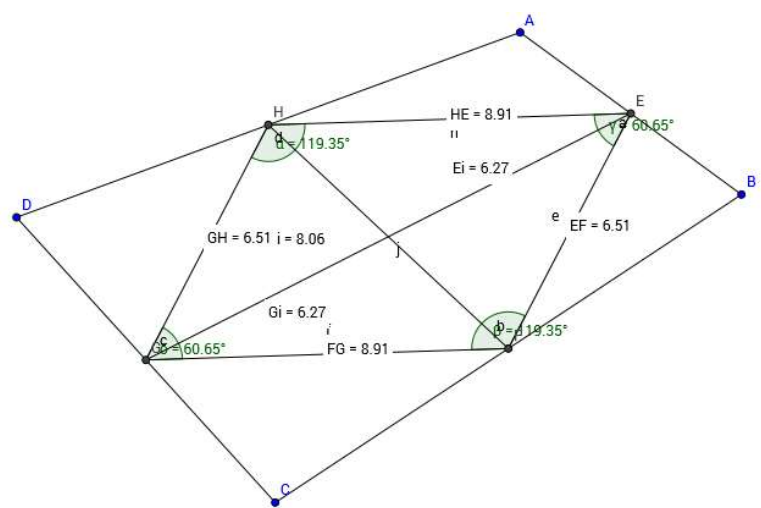


Figure 12. Production d'Alexandre dans GeoGebra pour l'activité A.

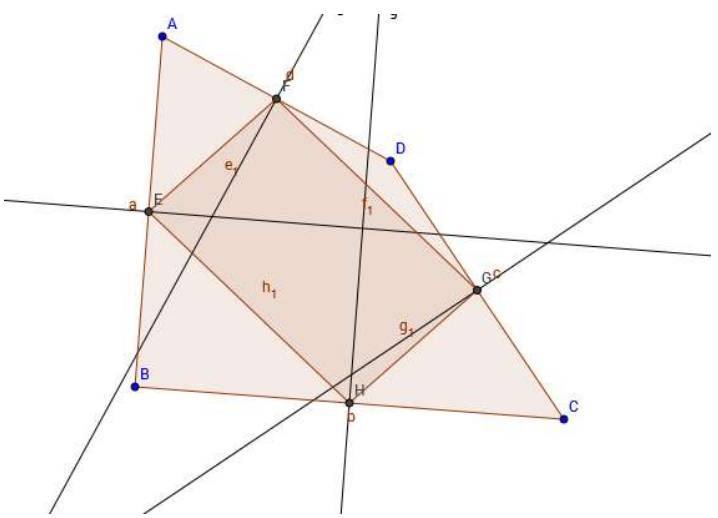


Figure 13. Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité A.

#### 4.2.1.2 Niveaux de preuve

À la question 1 de cette activité, on demandait aux étudiants de prouver qu'il s'agissait bien du quadrilatère qu'ils ont identifié. Alexandre, Ophélie et Sonia mentionnent simplement des éléments en lien avec la définition ou les propriétés du parallélogramme sans chercher à prouver le tout; l'aspect visuel de la construction et les mesures affichées semblent l'emporter ici sur la preuve. Ainsi, Alexandre mentionne qu'il s'agit d'un parallélogramme et ajoute, sans s'attarder à la redondance de ses arguments : « *Ses côtés opposés sont parallèles. De plus, ses angles opposés sont congrus.* » Sonia ajoute à ces éléments que « *la longueur du côté e est la même que celle du côté g; la longueur du côté h est la même que celle du côté f.* », comme s'il fallait s'assurer de toutes ces propriétés avant de pouvoir conclure. Bref, pour ces trois étudiants, les observations faites à partir des productions servent à confirmer les résultats obtenus et les propriétés énoncées ne semblent pas organisées selon une structure déductive.

Pour sa part, Mylène ne fait pas mention de ces éléments, mais explique qu'il s'agit d'un rectangle en disant que « *les médiatrices issues de chaque côté du quadrilatère forment deux diagonales se croisant en leur centre, et ce, de façon perpendiculaire.* » Cette réponse semble quelque peu confuse et en regardant son fichier GeoGebra (voir figure 14), on peut constater que la construction effectuée part d'un quadrilatère régulier, soit le carré, au lieu d'un quadrilatère quelconque. Ayant choisi dans sa construction la commande « polygone régulier » qui la limite à un cas très particulier des quadrilatères, elle ne peut explorer la situation dans sa généralité.

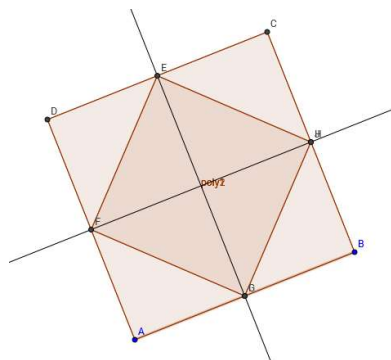


Figure 14. Production de Mylène dans GeoGebra pour l'activité A.

L'aspect visuel semble moins présent dans les explications de Valérie, Geneviève et Brigitte. Valérie élabore des rapports de valeur  $1/2$  entre les mesures des côtés pour arriver à

expliquer qu'il y a « deux paires de côtés congrus ». Il n'y a cependant pas de structure expliquant les rapports dont elle se sert. Pour leur part, Geneviève et Brigitte tentent une preuve plus élaborée que les autres étudiants, allant jusqu'à la démonstration presque complète chez Brigitte. Dans son raisonnement, cette dernière utilise la définition du parallélogramme (« les côtés opposés sont parallèles ») ainsi que les triangles semblables. Elle ne montre pas que les triangles sont semblables, mais elle utilise cet énoncé : « Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de ces côtés, alors elle est parallèle au troisième ». Elle arrive alors à montrer, par transitivité, que les côtés de son quadrilatère EFGH sont parallèles, et elle peut ensuite avancer que sa preuve est valide même si le quadrilatère est non convexe. Pour sa part, Geneviève se réfère au théorème de Thalès afin de prouver qu'il s'agit d'un parallélogramme en se fiant au fait que les droites opposées sont parallèles. Elle utilise donc des éléments en lien avec les propriétés et les définitions des quadrilatères, mais elle n'agence pas de façon logique les éléments de sa preuve, où se retrouvent mêlées hypothèses et conclusion (voir figure 15).

**Questions:**  
 1) Le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.  
 Les droites <sup>opposées</sup> formées par les pts milieux des côtés du quadrilatère ABCD. sont parallèles.  
 Grâce au théorème de Thalès, on sait que:  
 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}$  car  $\overline{EF}$  est // à  $\overline{BD}$ .  
 Même chose pour l'autre partie du polygone.  
 Puisque les droites  $\overline{EF}$  et  $\overline{GH}$  sont // à  $\overline{BD}$  et que  $\overline{EH}$  et  $\overline{GF}$  sont // à  $\overline{AC}$ , nous obtenons forcément un parallélogramme.

Figure 15. Production écrite de Geneviève à la question 1 de l'activité A.

Dans cette activité, certains étudiants ne sont pas en mesure de généraliser leur preuve pour un quadrilatère non convexe. C'est le cas d'Alexandre, Valérie, Ophélie et Mylène. Mylène et Ophélie disent qu'elles n'ont plus le même quadrilatère qu'à la question 1. Mylène ajoute même que l'« on n'arrive pas à tracer un quadrilatère à quatre côtés. Dans ce cas, le quatrième côté se trouve à l'extérieur de la figure. » Ce commentaire pourrait être lié au choix du carré

comme quadrilatère de départ dans sa construction GeoGebra. Pour sa part, Ophélie affirme que l'on obtient un « *quadrilatère quelconque, car les côtés ne sont plus parallèles [...]* ». Or, l'examen de son fichier GeoGebra permet de constater que sa construction est bien réalisée et que les côtés restent toujours parallèles. Il en est de même pour les constructions d'Alexandre et Valérie. On peut donc supposer que ces étudiants n'ont pas compris la question, n'ont pas réussi ou n'ont tout simplement pas tenté le déplacement de leur construction pour obtenir un quadrilatère non convexe. Ce pourrait aussi être un indice laissant supposer que le guide d'instruction sur GeoGebra fourni au début de la deuxième séance n'a pas été utilisé; marquant peut-être un manque au niveau de l'*orchestration instrumentale*.

Geneviève réfère aux relations d'inclusion des quadrilatères dès la question 2 en rappelant qu'« *un rectangle est un parallélogramme* ». Sonia mentionne que plusieurs théorèmes prouvent qu'il s'agit d'un parallélogramme, en donnant des exemples, sans pour autant expliciter leur utilisation :

*« Plusieurs théorèmes le prouvent (théorème de Varignon et théorème des points milieux). Le théorème des points milieux permet de montrer que les côtés opposés à EFGH sont parallèles à une diagonale du quadrilatère ABCD, donc parallèles entre eux. »* (Sonia)

Ces éléments nous permettent donc de dire que les niveaux de preuve mobilisés par les étudiants dans cette activité sont très variables. Certains adoptent une posture davantage en lien avec le niveau de preuve mobilisé au secondaire alors que d'autres font référence à des éléments de praxéologie plus typiques d'un étudiant en mathématiques. Le tableau III résume les niveaux de preuve mobilisés par les étudiants selon la typologie définie par Balacheff (1998). Il convient de rappeler que les niveaux de Balacheff ne peuvent pas s'observer de façon aussi claire dans un environnement de géométrie dynamique. Comme les sous-niveaux *exemple générique*, *expérience cruciale* et *expérience mentale* sont difficiles à distinguer et peuvent être convoqués simultanément dans un tel environnement, nous les considérons fusionnés. Dans ce tableau, le niveau intermédiaire représente la fusion entre ces sous-niveaux. Ainsi, nous parlerons de preuve pragmatique ou de preuve intellectuelle sans développer tous les sous-niveaux et nous parlerons donc de niveau intermédiaire lorsque l'étudiant est à cheval entre les preuves pragmatiques et intellectuelles. Dans le niveau des preuves pragmatiques, nous séparons le tout en deux catégories (empirisme naïf et début d'explication) ainsi que dans le niveau des preuves intellectuelles où nous séparons le tout en preuve incomplète et démonstration. Les noms des



étudiants sont classés selon leur niveau de preuve mobilisé : dans une même colonne, le deuxième étudiant (plus à droite) semble mobiliser un niveau plus élaboré que le premier et ainsi de suite.

Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)	(3)	Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
Alexandre Mylène	Ophélie	Valérie Sonia <sup>23</sup>	Geneviève	Brigitte

Tableau III. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité A.

#### 4.2.1.3 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Dans la section *Rétroaction*, il était demandé aux étudiants s'ils utiliseraient l'activité telle quelle avec des élèves du secondaire ou s'ils en feraient des modifications. Trois types d'utilisation semblent se dégager des réponses fournies par les étudiants : une activité d'introduction à la théorie, une activité de construction, manipulation et de visualisation ou une activité de validation des connaissances acquises antérieurement.

Brigitte mentionne que l'activité « *pourrait être utilisée pour introduire la théorie. [... Les élèves] pourraient voir par eux-mêmes la construction et voir qu'il apparaît toujours un parallélogramme* ». On suppose ici qu'elle utilise le verbe voir au sens de réaliser, car elle mentionne les mots eux-mêmes, laissant suggérer que les élèves pourraient être en situation de manipulation suite à sa réponse à la question de l'utilisation avec les élèves. Elle indique aussi que l'on « *peut déplacer notre quadrilatère et observer toujours le parallélogramme* » dans les idées qu'elle retient pour l'enseignement des quadrilatères. Ophélie émet une opinion contraire à celle de Brigitte en affirmant plutôt que « *l'élève devrait avoir son cahier sous la main ou avoir vu les notions requises peu de temps avant l'activité. Cela devrait être fait dans le but de*

<sup>23</sup> Comme Sonia mentionne, à la question 2, des théorèmes pouvant servir à prouver le fait qu'il s'agit d'un parallélogramme, nous la situons entre les preuves pragmatiques et intellectuelles même si son explication à la question 1 est davantage liée à l'aspect visuel de la construction.

*vérifier si l'élève sait bien reconnaître les quadrilatères et est en mesure de justifier* ». Elle semble donc se limiter à la praxéologie des quadrilatères développée au secondaire. En effet, au premier cycle, on se limite souvent à faire reconnaître les quadrilatères en fonction de leurs propriétés qui deviennent ainsi des *justifications* à l'identification. La *technique* qui est ainsi exploitée est de repérer les propriétés dans la construction pour les associer au bon quadrilatère avec pour seule *technologie* la liste des propriétés de chacun.

Les autres étudiants parlent davantage de la visualisation et de la construction permise par le logiciel. Cette construction permet, selon eux, d'apprendre à utiliser le logiciel et de construire des quadrilatères tout en identifiant des caractéristiques de ces derniers. Néanmoins, Valérie ajoute que « *les preuves doivent être encadrées par l'enseignant. L'élève peut découvrir grâce à GeoGebra la propriété des quadrilatères, mais il aura du mal à l'expliquer* ». Ce commentaire de Valérie soulève une idée d'encadrement de la part de l'enseignant afin de mieux diriger les preuves des élèves et rejoint encore une fois la praxéologie des quadrilatères limitée au premier cycle du secondaire par l'identification et la reconnaissance.

Ces différentes idées peuvent être regroupées selon la place occupée par l'élève ou par l'enseignant dans ladite activité (voir tableau IV). La comparaison avec le Tableau III donne à penser que plus l'étudiant valorise les preuves rigoureuses, plus il est prêt à favoriser l'autonomie de l'élève dans l'activité. En revanche, un étudiant se situant davantage au niveau des preuves pragmatiques a tendance à souhaiter davantage d'encadrement de l'enseignant tout au long de l'activité.

Enseignant		Élève
L'enseignant occupe la place principale dans l'activité : il est celui qui dirige le tout, qui cherche à réaliser la tâche en illustrant le phénomène. L'élève vérifie ce qui lui a été expliqué précédemment.		L'élève est au cœur de l'activité : il a le contrôle, il cherche à réaliser les tâches demandées et l'enseignant n'est qu'un guide, un accompagnateur.
Activité de validation des connaissances antérieures	Activité de construction, de manipulation et de visualisation	Activité d'introduction de la théorie
Ophélie	Valérie Sonia Geneviève Alexandre Mylène	Brigitte

Tableau IV. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité A selon les étudiants.

#### 4.2.1.4 Évaluation globale de la contribution de l'activité A

Dans cette activité, les étudiants utilisent tous des éléments visuels afin d'expliquer leurs observations. Ils font donc un travail mathématique au niveau de la *genèse figurale*, mais certaines étudiantes (Geneviève et Brigitte) dirigent leur travail mathématique vers la preuve (*genèse discursive*). En effet, ces dernières utilisent des théorèmes afin d'expliquer leurs observations comme cela est fait dans le cours de géométrie universitaire suivi en même temps que l'expérimentation. Adoptant elle aussi une posture d'étudiante en mathématiques, Sonia mentionne à son tour certains théorèmes, mais n'ira pas plus loin dans l'élaboration d'une preuve.

Les autres étudiants n'utilisent que des éléments en lien avec la définition du parallélogramme, situant ainsi leurs niveaux de preuve plus près de ce que l'on fait typiquement au secondaire en géométrie.

Si la plupart des étudiants paraissent distinguer entre la *figure* et le *dessin*, cela est moins apparent chez Mylène qui a du mal à généraliser au quadrilatère non convexe, en raison de son erreur de construction.

Il est intéressant de voir que les étudiants prônent davantage une utilisation liée à la *genèse figurale* pour cette activité. Si les étudiants mentionnent que les élèves pourraient

construire la figure et observer ce qui se passe, ils sont d'avis que l'enseignant doit superviser le tout. Il n'y a que Brigitte qui apporte l'idée d'une activité d'introduction, laissant ainsi présager une place plus importante laissée à l'élève dans l'activité.

Finalement, on peut noter chez les étudiants un début d'instrumentation et même d'instrumentalisation à l'égard de GeoGebra. Ainsi, certains étudiants ajoutent des informations dans la figure ou modifient l'aspect général par la couleur. Certaines de ces informations (les mesures en particulier) leur permettent de mieux appuyer ou même de guider leurs observations, même si certains utilisent ces informations pour conclure qu'ils sont en présence d'un parallélogramme, demeurant alors, teintés des praxéologies existantes au secondaire et encouragés par le logiciel, à un niveau de raisonnement qui ne dépasse pas la preuve pragmatique.

## **4.2.2 Retour sur l'activité B**

L'activité B consiste à construire un cercle et deux cordes sécantes dans ce cercle. Par la suite, les étudiants doivent tracer le quadrilatère formé par les points d'intersection des cordes sur le cercle. Cette construction est une *construction molle* (Soury-Lavergne, 2011) puisque les étudiants doivent déplacer les cordes afin de voir les conditions pour que le quadrilatère formé soit un carré, un losange, un rectangle et un parallélogramme. Ils doivent donc explorer et essayer d'établir des régularités pour déterminer ces conditions, faisant ainsi du logiciel un instrument de manipulation, d'exploration et de visualisation. Dans la construction, le cercle et les cordes sont des éléments qui demeurent invariants, mais le déplacement des points qui les déterminent permet de changer la forme du quadrilatère.

### **4.2.2.1 Instrumentation et instrumentalisation**

Dans cette activité, plusieurs étudiants semblent utiliser une *construction robuste* dans la tâche. En effet, l'enjeu de la tâche est réinterprété : on explore une *construction molle* afin de dégager une *construction robuste* pour les différents quadrilatères considérés (Geneviève et Sonia). Par exemple, dans le fichier GeoGebra de Sonia, on peut constater l'utilisation de droites parallèles et perpendiculaires lui servant de base pour obtenir un carré (voir figure 16).

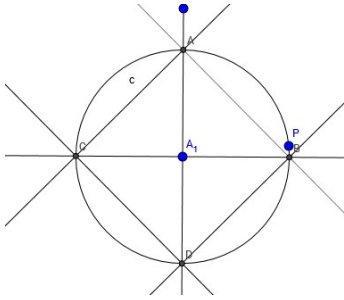


Figure 16. Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité B.

Les connaissances mathématiques des étudiants et le passage entre les propriétés et la séquence d'étapes de construction révèlent certaines difficultés, lesquelles ont aussi été formulées par les étudiants. En effet, certaines tentatives de *construction robuste* se heurtent aux limites de connaissance du logiciel de la part des étudiants. Geneviève soulève la difficulté de construire une perpendiculaire qui ne l'était pas toujours. Dans son fichier GeoGebra, on peut constater qu'elle a ajouté des droites parallèles et perpendiculaires dans sa construction (voir figure 17).

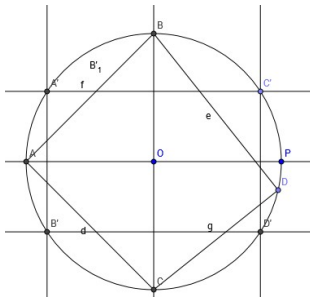


Figure 17. Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité B.

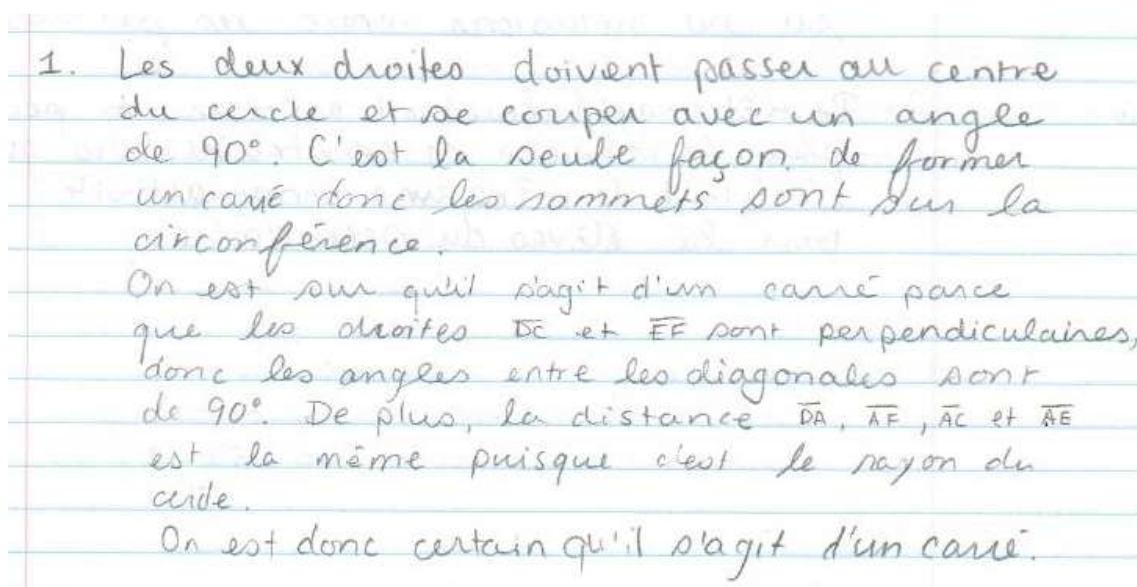
À leur tour, les réponses d'Ophélie indiquent aussi un besoin de faire une *construction robuste* lorsqu'on demande d'expliquer comment on peut s'assurer qu'il s'agit d'un carré :

« Il serait possible de diviser la circonférence en 4 et de placer des points à chaque tranche de circonférence et de les relier pour obtenir un carré. » (Ophélie)

Comme on le verra dans ce qui suit, cette volonté de faire ce type de construction est également en lien avec les niveaux de preuve que les étudiants ont mobilisés lors de cette activité. On peut aussi supposer que le fait de relâcher certaines contraintes dans la construction ne les a pas encouragés à déployer un raisonnement déductif, puisque les propriétés géométriques de la *construction molle* ne sont pas invariantes.

#### 4.2.2.2 Niveaux de preuve

Dans leurs productions écrites, les étudiants semblent utiliser davantage des constatations visuelles afin de déterminer les conditions permettant d'obtenir les quadrilatères demandés (carré, losange, rectangle et parallélogramme) et de s'assurer qu'il s'agit bien de ceux-ci. Pour le carré, tous les étudiants mentionnent que les deux cordes doivent être perpendiculaires et passer par le centre du cercle, montrant là leur maîtrise de ces éléments théoriques enseignés au secondaire. Certains étudiants parlent des propriétés et des définitions des quadrilatères, mais sans établir clairement cette distinction (Ophélie, Sonia et Brigitte). Néanmoins, leurs explications ne sont pas toutes élaborées de la même façon. Brigitte présente une explication plus complète que les autres même si dans sa démonstration, certains éléments sont sous-entendus et d'autres sont redondants (voir figure 18).



1. Les deux droites doivent passer au centre du cercle et se couper avec un angle de  $90^\circ$ . C'est la seule façon de former un carré donc les sommets sont sur la circonférence.

On est sûr qu'il s'agit d'un carré parce que les droites  $DE$  et  $EF$  sont perpendiculaires, donc les angles entre les diagonales sont de  $90^\circ$ . De plus, la distance  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{AC}$  et  $\overline{CE}$  est la même puisque c'est le rayon du cercle.

On est donc certain qu'il s'agit d'un carré.

Figure 18. Production écrite de Brigitte à la question 1 de l'activité B.

Le fichier GeoGebra de Brigitte permet de voir la nomenclature qu'elle utilise dans sa démonstration et de mieux la comprendre (voir figure 19).

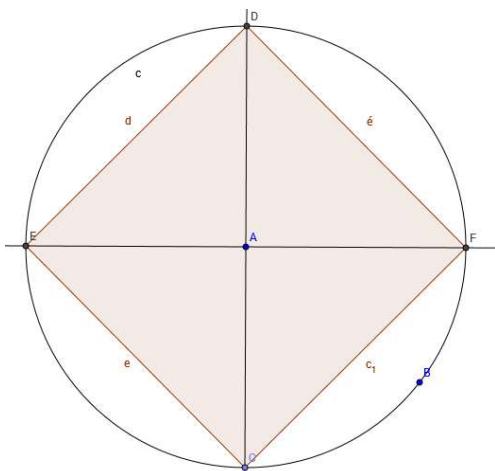


Figure 19. Production de Brigitte dans GeoGebra pour l'activité B.

De plus, les relations d'inclusion des quadrilatères ne sont pas mentionnées par tous les étudiants, et certains semblent ne pas les avoir comprises. C'est notamment le cas pour Alexandre, Valérie et Mylène. Alexandre mentionne que la construction du losange et du parallélogramme sont impossibles. Pour le parallélogramme, il explique que « [...] l'un des sommets ne serait pas situé sur le cercle ». Mylène soutient également cette idée en mentionnant que :

*« Pour avoir un parallélogramme, il faut que les deux diagonales se croisent en leur centre, mais que celles-ci ne forment pas un angle droit. » (Mylène)*

Les autres étudiants réfèrent aux relations d'inclusion dans leurs productions écrites, mais n'élaborent pas ces idées en lien avec les contraintes de l'activité. Par exemple, Ophélie spécifie clairement les relations de cette façon :

*« Si nous obtenons un carré, nous obtenons nécessairement un losange puisqu'un carré est un losange, mais l'inverse n'est pas vrai, un losange n'est pas un carré. » (Ophélie)*

En comparant les niveaux de preuve mobilisés par les étudiants (voir tableau V), nous pouvons constater que deux étudiants ont mobilisé un niveau de preuve plus élevé que dans l'activité précédente (Alexandre et Ophélie) et que les autres ont utilisé un niveau inférieur. Il est possible que la réinterprétation de la tâche par certains ou des difficultés dans la construction aient eu un impact sur le niveau de preuve mobilisé.

Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)	(3)	Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
Sonia Mylène	Valérie Geneviève	Alexandre Ophélie	Brigitte	

Tableau V. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité B.

#### 4.2.2.3 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Dans la section *Rétroaction*, trois utilisations avec les élèves semblent ressortir des propos des étudiants : activité de réflexion, activité de découverte et activité de visualisation. En effet, pour l'activité de réflexion, Ophélie mentionne que l'activité peut faire réfléchir les élèves sur les relations d'inclusion entre les différents quadrilatères : « *un carré est un rectangle, mais un rectangle n'est pas un carré [...]* ». Cette idée est également présente chez Brigitte.

Pour leur part, Alexandre et Valérie optent pour l'activité de découverte, mais celle-ci est plus axée vers les propriétés pour le premier et vers les manipulations pour la seconde. En effet, Alexandre mentionne qu'il « *est possible de leur faire découvrir les propriétés du cercle et des quadrilatères. Les élèves peuvent voir quels quadrilatères partagent les mêmes caractéristiques* ». Pour sa part, Valérie parle de la « *manipulation pour qu'ils découvrent que certaines formes se bâtissent dans des cercles* ». On peut supposer qu'ils commencent à considérer GeoGebra comme un environnement permettant l'exploration, la manipulation et la visualisation.

Cette idée de découverte semble sous-entendue par Mylène qui la lie à la visualisation et la construction permises par le logiciel. Ainsi, elle mentionne que les élèves peuvent visualiser les différences entre les figures et même développer leur esprit critique :

« *Dans le but de développer leur esprit critique face aux quadrilatères et leurs particularités, il est important que les élèves puissent faire les constructions et voir les correspondances entre les inclusions et la classification des formes aux mêmes propriétés.* » (Mylène)

Pour sa part, Geneviève n'est pas certaine d'utiliser cette activité telle quelle avec les élèves, mais y voit tout de même des idées intéressantes telles que l'inclusion des quadrilatères :

« *Je ne crois pas [que je l'utiliserais avec les élèves], car j'ai moi-même eu un peu de difficulté surtout pour expliquer.* » (Geneviève)



Encore une fois, on peut voir un certain lien émergent entre les niveaux de preuve mobilisés par les étudiants dans l'activité et la place qu'ils laisseraient à l'élève dans cette dernière (voir tableau VI)<sup>24</sup>.

Enseignant			Élève
L'enseignant occupe la place principale dans l'activité : il est celui qui dirige le tout, qui effectue l'activité en démonstration.			L'élève est au coeur de l'activité : il a le contrôle, il cherche à réaliser les tâches demandées et l'enseignant n'est qu'un guide, un accompagnateur.
	Activité de visualisation/manipulation	Activité de découverte	Activité de réflexion
	Mylène Geneviève	Alexandre Valérie	Ophélie Brigitte

Tableau VI. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité B selon les étudiants.

#### 4.2.2.4 Évaluation globale de la contribution de l'activité B

Dans cette activité, les éléments visuels semblent être encore une fois utilisés par les étudiants pour expliquer leurs réponses. Le fait de déplacer la figure et d'observer différents quadrilatères pourrait induire ce travail axé davantage sur l'aspect visuel et plus près de ce qui est fait dans les écoles secondaires. Si le travail effectué par les étudiants s'inscrit davantage dans la *genèse figurale*, on retrouve chez certains étudiants une amorce de *genèse discursive* avec la référence aux relations d'inclusion des quadrilatères.

D'autre part, une réinterprétation de la tâche a même été observée chez certains étudiants permettant de soupçonner une difficulté au niveau de l'instrumentation chez certains. Le fait de construire une perpendiculaire qui ne l'est pas toujours fût une difficulté pour Geneviève alors que d'autres ont contourné ce problème en traçant des perpendiculaires pour construire un quadrilatère précis. Ce fût le cas de Sonia qui a exploré la *construction molle* pour en dégager une *construction robuste*. On peut donc supposer que la distinction entre *figure* et *dessin* semble quelque peu confuse ou que ce refus de la *construction molle* peut être une volonté de retourner

<sup>24</sup> Ayant été absente lors de la période prévue pour la rétroaction, Sonia n'apparaît pas dans ce tableau.

à la *construction robuste* de l'activité A qui permettait de contrôler toutes les contraintes. On remarque que les connaissances mathématiques des étudiants ont pu constituer un obstacle dans la séquence d'étapes pour faire la construction demandée. Ainsi, le niveau de preuve mobilisé ne pouvait que porter sur l'aspect visuel sans pousser vers la preuve.

Également, ce qui est intéressant de souligner est l'utilisation que les futurs enseignants feraient de cette activité avec les élèves. En effet, cette dernière est davantage orientée vers une *genèse discursive*. Les futurs enseignants encourageraient la découverte et la réflexion chez leurs élèves en plus grand nombre que pour l'activité précédente. Ce qui est un peu contradictoire avec les niveaux de preuve qu'ils ont mobilisés lors de l'activité.

### 4.2.3 Retour sur l'activité D<sup>25</sup>

La médiatrice est le lieu géométrique que les étudiants finissent par créer dans cette activité. À partir d'un segment que les étudiants ont eux-mêmes défini, ils doivent construire deux cercles sécants et de même rayon ayant comme centres respectifs les extrémités de ce segment. Ils doivent ensuite faire afficher la trace des points d'intersection des cercles, lorsque varie le rayon, afin de visualiser le lieu géométrique ainsi formé. Il s'agit donc d'une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) puisqu'elle donne toujours lieu à une médiatrice et que les éléments de la construction sont déterminés à l'avance (cercles tracés, sécants, de même rayon). Ce qui demeure dynamique dans cette construction est l'apparition de différents points de la médiatrice lorsque le rayon des cercles varie.

#### 4.2.3.1 Instrumentation et instrumentalisation

Sur le plan conceptuel, les étudiants semblent avoir eu plus de facilité avec cette tâche puisqu'il s'agit d'une *construction robuste*. Ils ont eu plus de facilité à voir ce qui se passe et ils n'ont pas réinterprété l'activité et son but. Il n'y a que Valérie et Sonia qui n'aient pas clairement identifié la médiatrice à la question 1, mais elles décrivent tout de même ce qu'elles ont observé. Valérie écrit : « *Les cercles augmentent ou diminuent de diamètre. Ils tracent la droite*

---

<sup>25</sup> Par manque de temps et par choix pédagogique, l'activité C n'a pas été réalisée avec les étudiants. La séquence est donc passée de l'activité B à l'activité D. Pour plus de détails, voir la section 4.1.

*perpendiculaire de A et B* ». Cette formulation bancale est corrigée dans sa réponse à la question 2; elle précise alors qu'il s'agit de la médiatrice lorsqu'elle témoigne de ses observations. Pour sa part, Sonia reste à un niveau très primaire dans ses observations et ne réfère aucunement à la médiatrice :

*« En faisant varier le paramètre  $r$ , les cercles varient selon la valeur du rayon sélectionné. De plus, les points d'intersection des deux cercles restent marqués (C et D). »* (Sonia)

Sur le plan de l'instrumentation, cette activité permet également de confronter les étudiants aux limites du logiciel ou de sa paramétrisation. Néanmoins, certains semblent incapables d'expliquer ce qui se produit comme le témoigne la réponse de Mylène à la question 4 lorsqu'on demande d'expliquer les espaces vides de la trace :

*« À un certain moment, lorsque le rayon du cercle est trop petit, les deux cercles ne sont plus sécants et ceci dit, n'ont plus de points d'intersections. »* (Mylène)

Mylène semble confuse lorsqu'on demande de tracer le lieu géométrique de C et de D (voir figure 20).

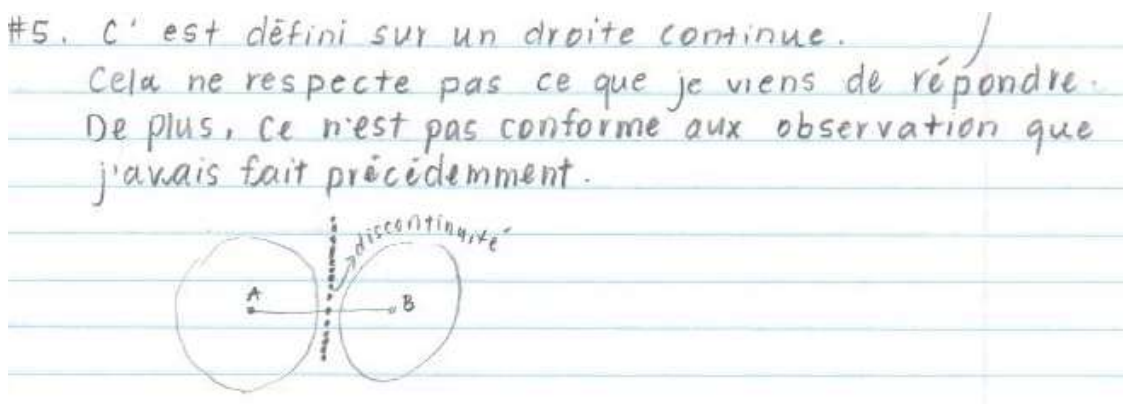


Figure 20. Production écrite de Mylène à la question 5 de l'activité D.

Sonia semble également manifester une confusion face à la caractéristique du logiciel, lors du passage de la commande *Trace* à la commande *Lieu*; ne remettant pas en cause le tracé des points d'intersection, elle paraît attribuer l'erreur à cette fonction *Lieu* :

*« Je constate que, même lorsque les deux cercles ne se coupent pas en C, le lieu géométrique est tout de même présent. Donc, cela ne démontre pas vraiment où les cercles se rencontrent vraiment. »* (Sonia)

Elle semble également utiliser le mot « démontre » dans le but de montrer ou de visualiser un élément. Ce glissement de sens peut être lié au niveau de preuve qu'elle paraît

mobiliser typiquement; en restant davantage au niveau pragmatique, elle paraît moins sensible à la fonction d'une « démonstration ».

#### 4.2.3.2 Niveaux de preuve

Bien que cette activité ait semblé plus facile pour les étudiants, les niveaux de preuve mobilisés n'ont pratiquement pas bougé depuis l'activité précédente. Néanmoins, certains liens semblent avoir été établis par les étudiants entre cette construction et la construction de la médiatrice en mode papier/crayon. En effet, Geneviève et Ophélie mentionnent cet élément dans leurs productions écrites et Brigitte le soulève également lors de la discussion.

*« Cette construction est en fait la même que si nous voulons trouver la médiatrice à l'aide d'un compas en traçant les cercles et en rejoignant leurs deux points d'intersection. »*  
(Ophélie)

*« C'est la méthode géométrique pour obtenir la médiatrice avec le compas et la règle. Mais le compas doit être ouvert à plus de la moitié du segment. »* (Geneviève)

Lorsque l'on demande aux étudiants d'expliquer les propriétés sur lesquelles reposent la construction, Ophélie et Geneviève sont les seules à ne pas faire mention du rayon du cercle. Brigitte et Alexandre ont d'ailleurs des explications un peu plus complètes que les autres :

*« Tous les points d'intersection sont à égale distance de A et de B puisque la distance est le rayon. Pour que la distance soit la même, il faut absolument que les points soient sur la médiatrice. »* (Brigitte)

*« Le rayon des deux cercles est égal. Ainsi, les distances AD, AC, BD et BC sont les mêmes. »* (Alexandre)

On note qu'Alexandre commence à élaborer davantage ses explications à partir de cette activité comme on peut le constater dans le tableau VII. Nous pouvons également voir que Geneviève semble revenir à un niveau où elle élabore des arguments liés à des explications plus mathématiques et des liens; quoique peu élaborés.

Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)	(3)	Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
Sonia		Geneviève	Alexandre	
Mylène		Ophélie	Brigitte	
Valérie				

Tableau VII. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité D.

#### 4.2.3.3 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Les étudiants mentionnent trois manières différentes d'utiliser cette activité avec des élèves du secondaire : une activité de découverte ou d'exploration, une activité de démonstration encadrée et une activité synthèse.

En effet, Valérie et Brigitte mentionnent cette idée de découverte, mais Brigitte ajoute « *qu'elle permet aux élèves d'explorer par eux-mêmes et de comprendre le phénomène* ». On note donc une ouverture vers le raisonnement chez cette dernière. Cette idée est quelque peu présente chez Sonia qui mentionne que l'activité pourrait être utilisée « *pour leur compréhension en lien avec les lieux géométriques.* », mais ne retient que la partie visualisation dans l'activité :

*« Cela montre aux jeunes que même si le rayon est de longueur différente, les lieux de rencontre des deux cercles forment une droite perpendiculaire au segment AB. »* (Sonia)

Aux yeux de certains étudiants, l'effort d'instrumentation requis pour l'activité semble trop grand pour qu'elle puisse être utilisée telle quelle avec des élèves. Alexandre préfère laisser à l'enseignant la part de construction de l'activité : « *Il faudrait que l'enseignant effectue la démonstration au projecteur et amène les élèves à se questionner* ». Ajoutons qu'il semble employer ici le mot « démonstration » au sens de « monstration » de la construction et de son exploration.

Ophélie et Geneviève optent plutôt pour un soutien plus grand pour permettre la construction par les élèves. En effet, Ophélie mentionne que des détails en lien avec la construction devraient être ajoutés, mais elle ne les précise pas. Elle ajoute que le but de cette activité serait de « *montrer comment construire une médiatrice sans utiliser la fonction du*

*logiciel.* » Elle insiste ainsi sur la *technique* qui semble prévaloir sur le raisonnement. On peut supposer qu'elle considère que le but de cette activité serait de construire la médiatrice, voire même de s'instrumenter avec GeoGebra. Pour sa part, Geneviève aimerait que la valeur du  $r$  « *représente vraiment les longueurs que l'on voit dans le cercle* ».

Mylène considère davantage cette activité comme une situation permettant « *d'enseigner différentes définitions (2) pour le concept de médiatrice* », mais elle ne précise pas de quelles façons y arriver. On peut supposer que la propriété caractéristique de la médiatrice pourrait être exploitée en mentionnant par exemple que si tous les points de la droite sont à égale distance de A et de B, alors on est en présence de la médiatrice du segment AB. Néanmoins, ces réponses ne nous permettent pas d'affirmer que c'est ce qu'elle pense comme méthode pour y parvenir. D'ailleurs, elle n'entrevoit l'utilisation de cette activité que si les élèves ont eu, au préalable, une « *activité d'amorce sur le concept de la médiatrice* », elle semble lui attribuer une fonction d'*institutionnalisation*.

La place laissée aux élèves dans cette activité semble plus limitée pour les étudiants et l'enseignant y occupe davantage un rôle principal (voir tableau VIII). Cela semble être différent des activités précédentes où des étudiants ayant mobilisés des niveaux de preuve plus élevés semblaient prêts à laisser plus de place aux élèves dans les activités. En comparant le tableau VIII au tableau VII, on constate qu'Alexandre manifeste un niveau de preuve plus élevé dans l'activité D, mais laisserait moins de place aux élèves et davantage à l'enseignant.

Enseignant			Élève
L'enseignant occupe la place principale dans l'activité : il est celui qui dirige le tout, qui effectue l'activité en démonstration.			L'élève est au cœur de l'activité : il a le contrôle, il cherche à réaliser les tâches demandées et l'enseignant n'est qu'un guide, un accompagnateur.
Activité de démonstration <sup>26</sup> encadrée	Activité de visualisation/manipulation	Activité de découverte	
Alexandre Mylène	Geneviève Ophélie Sonia	Brigitte Valérie	

Tableau VIII. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité D selon les étudiants.

#### 4.2.3.4 Évaluation globale de la contribution de l'activité D

Le fait d'avoir confronté les étudiants à une des limites du logiciel GeoGebra en a laissé certains perplexes. En effet, ils n'ont pas tous été en mesure d'explicitier la discontinuité autrement que par des éléments visuels (cercles n'étant plus sécants). Certains ont donc effectué un travail au niveau de la *genèse figurale* alors que d'autres ont poussé la réflexion vers la *genèse discursive*. En effet, des liens se sont faits entre la construction avec le logiciel et celle avec règle et compas; un début d'explication sur l'absence de points a même été formulé par certains étudiants. Cet élément lié à l'*instrumentation* laisse aussi supposer une certaine confusion entre *figure/dessin*. Ainsi, certains étudiants ont remarqué une discontinuité sans pouvoir l'expliquer puisqu'ils se concentraient sur le visuel de la construction. Il faudrait alors prévoir dans l'activité une phase d'*institutionnalisation* qui aborde cette idée de discrétisation puisqu'ils n'ont peut-être pas l'habitude d'être confrontés aux limites d'un outil technologique dans leur formation.

<sup>26</sup> Ici, le terme démonstration n'est pas utilisé au sens de preuve, mais plutôt comme une façon de prendre en charge l'exploration et de viser la visualisation chez les élèves.

Au niveau de l'*instrumentation*, l'activité a semblé plus facile pour les étudiants. Ils n'ont pas cherché à réinterpréter la tâche puisque la construction était guidée et *robuste*. Les éléments cherchés sont donc plus accessibles et permettent à certains de pousser leur réflexion au-delà de l'aspect visuel tels que Brigitte et Alexandre. On note ainsi que GeoGebra commence à devenir un instrument d'exploration pouvant mener à l'exercice du raisonnement déductif.

D'autre part, lorsque l'on regarde la façon dont les étudiants mentionnent réinvestir l'activité auprès des élèves, on peut constater que le travail mathématique lié à la *genèse discursive* semble absent. En effet, les étudiants semblent privilégier l'aspect visuel de cette construction en laissant peu de place aux élèves et à la réflexion.

#### **4.2.4 Retour sur l'activité E**

Cette activité permet d'explorer et d'unifier différents lieux géométriques. Grâce à la construction d'un cercle, d'un point B mobile à l'intérieur du cercle et de la médiatrice entre un point sur le cercle et le point à l'intérieur du cercle, les étudiants peuvent générer les coniques suivantes : cercle, ellipse et hyperbole. Il est demandé aux étudiants de prouver qu'il s'agit bien de la conique en se servant de la définition de cette dernière ainsi que des propriétés géométriques de la construction. Comme le point B est mobile, cette construction offre un caractère dynamique permettant de voir l'apparition de différents lieux géométriques. Néanmoins, il s'agit davantage d'une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) comme c'était le cas pour l'activité précédente.

##### **4.2.4.1 Instrumentation et instrumentalisation**

Dans cette activité, on peut constater le développement de la pratique d'exploration chez les étudiants. Ainsi, leurs constructions sont plus efficaces et ils cherchent davantage à comprendre les phénomènes observés suite à leur construction. La figure 21 nous montre la construction d'Alexandre dans laquelle on voit apparaître l'hyperbole.



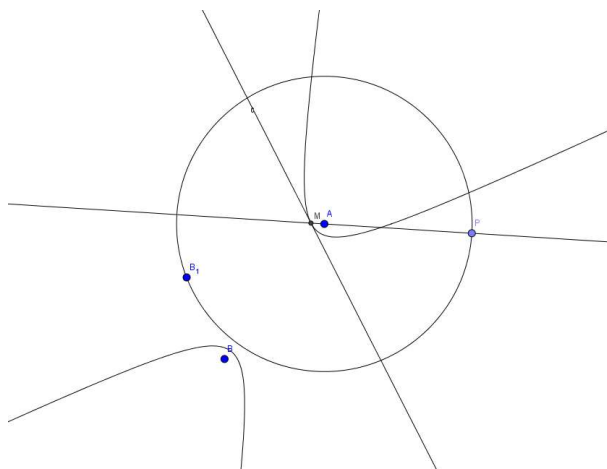


Figure 21. Production d'Alexandre dans GeoGebra pour l'activité E.

Cela dit, certains étudiants commettent des erreurs dans leur construction ou n'en exploitent pas tout le potentiel d'exploration. C'est notamment le cas de Sonia et de Mylène. Mylène ne voit pas apparaître l'hyperbole, car elle n'a pas sorti le point B du cercle. Pourtant, son fichier GeoGebra permet d'effectuer un tel déplacement. Ce n'était pas le cas pour le fichier GeoGebra de Sonia, où l'on peut repérer une erreur de construction. Cette erreur est attribuable à la construction d'un segment AP au lieu d'une droite, entraînant que le point M n'est plus défini lorsque B est à l'extérieur du cercle (voir figure 22).

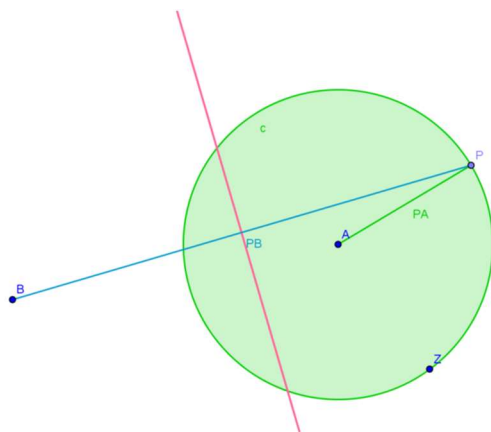


Figure 22. Production de Sonia dans GeoGebra pour l'activité E.

D'autres étudiants réinvestissent leurs apprentissages des activités précédentes. Par exemple, la construction GeoGebra de Geneviève témoigne d'un réinvestissement de l'activité D, car elle reprend la construction de la médiatrice tracée dans cette dernière pour construire la

médiatrice PB qui est demandée ici. Comme cette construction n'était pas demandée dans la tâche, on peut supposer ici soit un manque de connaissances des fonctions du logiciel GeoGebra ou même une interprétation des attentes du chercheur face à cette tâche.

#### 4.2.4.2 Écueils épistémiques

Les étudiants ont été confrontés au fait que leurs savoirs concernant les lieux géométriques étaient loin dans leur mémoire. Ainsi, dans la discussion à la suite de l'activité, un retour a été fait sur les définitions et les propriétés des différents lieux géométriques suite à la demande des étudiants. Lorsque nous demandions d'expliquer pourquoi on avait le lieu géométrique mentionné, la plupart des étudiants répondaient ne pas se souvenir des définitions. Cela peut être attribué au fait que la définition bifocale est vue rapidement en cinquième secondaire, comme mentionné dans l'analyse a priori. Il n'y a que Brigitte qui pouvait donner quelques-uns de ces éléments en lien avec l'ellipse : « *J'ai regardé sur Wikipédia.* », a-t-elle précisé.

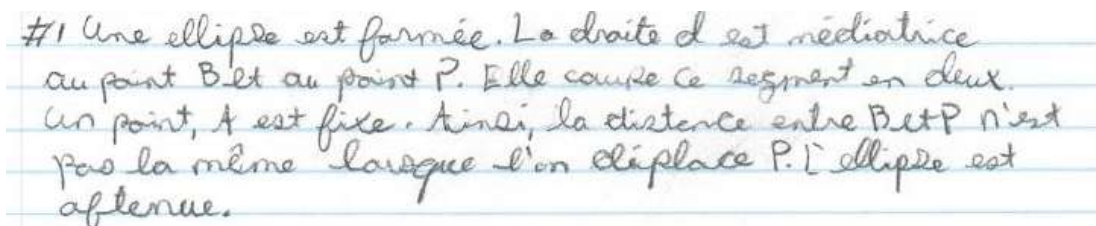
Ophélie mentionne dans la discussion que la théorie était loin pour elle : « *Pour moi, ça faisait longtemps les notions des lieux géométriques. Si cela fait longtemps que tu as pas vu les propriétés et les définitions, moi je les mettrais avant pour aide-mémoire.* » Cette demande pourrait témoigner du morcèlement des connaissances enseignées au secondaire et de la faible rétention qui en résulte chez les étudiants. L'activité a ainsi représenté un défi pour plusieurs au niveau conceptuel; ne pouvant s'appuyer sur une connaissance des propriétés des coniques, ils paraissaient démunis pour dégager les propriétés qui résultaient de la construction. La nécessité d'une institutionnalisation de la définition bifocale s'est donc imposée lors de la discussion. La chercheuse a dû faire des liens entre cette définition et la construction de l'ellipse en soulevant les invariants de la figure construite. Cette phase semblait importante pour la suite de la séquence afin de permettre une consolidation des définitions géométriques des coniques qui sont au centre des activités suivantes.

#### 4.2.4.3 Niveaux de preuve

À la première question de l'activité, les étudiants ont tous bien identifié l'ellipse de leur construction, même si Sonia l'a d'abord présentée comme un « *ovale* ». Néanmoins, ils n'ont pas tous prouvé ni expliqué qu'il s'agissait de ce lieu géométrique. En effet, Mylène n'a fait que

mentionner l'ellipse alors que Geneviève et Brigitte ont ajouté qu'il y avait deux foyers. Il est à noter que Geneviève semblait avoir oublié le terme exact puisqu'elle s'est contentée d'écrire : « *A et B représentent \_\_\_\_\_ de l'ellipse* ».

Les explications données par les autres étudiants reposent sur des éléments de leur construction, mais ne sont pas toutes élaborées de la même façon et restent des explications partielles. Sonia et Alexandre ne s'appuient pas sur la somme des distances des points aux foyers. Sonia mentionne : « *Le point M (point d'intersection de la droite d et du segment AB) se trouve sur l'ovale (la trace de M)* ». Pour sa part, l'explication d'Alexandre comporte certains éléments plus élaborés que celle de Sonia, mais il n'explique pas complètement l'obtention de l'ellipse (voir figure 23). Ophélie et Brigitte mentionnent d'autres éléments en lien avec la définition (voir figures 24 et 25). Si le discours d'Ophélie semble plus structuré, il est malheureusement erroné. En effet, on ne peut dire que les points A et B soient à égale distance de M comme elle l'affirme dans son explication (voir figure 25). Pour sa part, Brigitte tente une preuve (voir figure 24), mais elle n'est ni complète, ni même correcte dans la formulation des propositions avancées.



#1 Une ellipse est formée. La droite d est médiatrice au point B et au point P. Elle coupe ce segment en deux. Un point, A est fixe. Ainsi, la distance entre B et P n'est pas la même lorsque l'on déplace P. L'ellipse est obtenue.

Figure 23. Production écrite d'Alexandre à la question 1 de l'activité E.

Ça forme une ellipse autour de A et B.  
 La médiatrice est toujours tangente à l'ellipse.  
 Une ellipse est le lieu des points pour lesquels la somme des distances aux foyers est une valeur donnée. (J'ai regardé sur Wikipedia)  
 Donc le point géométrie se trouve où la somme des distances aux foyers A et B.  
 J'ai tracé des segments partant de A à M et de M à B.

Figure 24. Production écrite de Brigitte à la question 1 de l'activité E.

C'est bien une ellipse puisque celle-ci est constituée de deux points, A et B, autour desquels elle est située. Ces deux points sont placés à égale distance de la trace de M qui est l'ellipse.

Figure 25. Production écrite d'Ophélie à la question 1 de l'activité E.

Pour les autres lieux géométriques, les étudiants ont simplement énoncé les moments où ils les obtenaient sans donner d'explications à leurs constatations visuelles. Ophélie, Geneviève, Sonia et Valérie mentionnent le cercle comme étant un cas particulier de l'ellipse. Ophélie précise que ce cas particulier s'obtient « en plaçant le point B sur le point A » et ajoute ce début d'explication, lequel, à défaut d'être juste, est cohérent avec ce qui précède (figure 25):

« Le cercle peut être considéré comme un cas particulier de l'ellipse [...] l'ellipse passe à égale distance des deux points, ici situés l'un sur l'autre, ce qui forme le cercle et répond à ses propriétés ». (Ophélie)

Pour sa part, Brigitte mentionne l'hyperbole (qu'elle associe à chacune de ses branches) et décrit ce qu'elle observe :

« L'ellipse change de forme quand on déplace B. Quand on sort B du cercle, le lieu géométrique est deux hyperboles dont les points sont à l'extérieur et dans le cercle. Un des sommets se retrouve obligatoirement dans le cercle, l'autre, à l'extérieur. » (Brigitte)

À partir des explications fournies dans cette activité par les étudiants, il est possible de classer leurs productions selon le niveau de preuve mobilisé. On a pu déceler une progression dans le niveau de preuve, particulièrement chez ceux qui ont tenté des explications plus élaborées. Mais il convient de relever qu'aucun des étudiants n'a réussi à produire de démonstration complète pour expliquer l'apparition spectaculaire des différentes coniques à partir d'une même construction. L'effet de surprise n'aura pas réussi à les amener beaucoup plus loin.

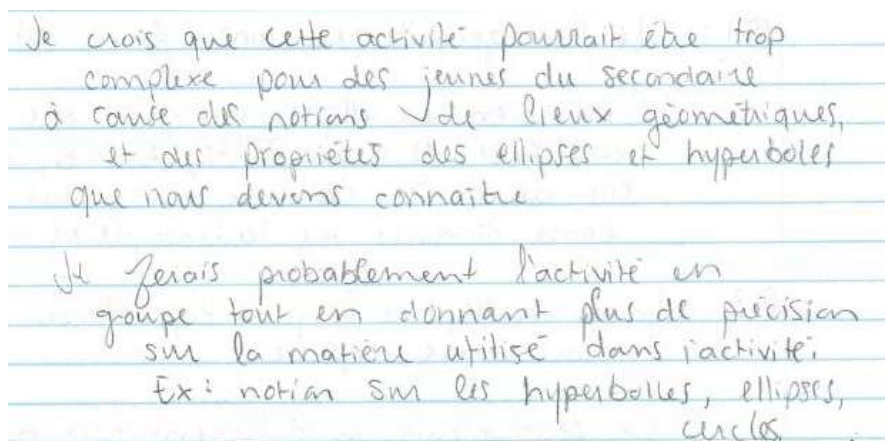
Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)		Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
Mylène	Sonia Valérie Geneviève	Alexandre	Ophélie Brigitte	

Tableau IX. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité E.

#### 4.2.4.4 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Dans la section *Rétroaction* de cette activité, on demandait aux étudiants l'utilisation qu'ils envisageraient de cette activité avec des élèves du secondaire et les modifications qu'ils lui apporteraient, le cas échéant. Seule Valérie en ferait une activité de découverte, qu'elle utiliserait telle quelle en cinquième secondaire dans le but de « faire découvrir les propriétés de l'ellipse » puisque « la composition est simple ». Cette idée n'est pas partagée par les autres étudiants, car ceux-ci considèrent que l'activité est complexe même si la construction ne nécessite pas beaucoup d'étapes. Ces étudiants mentionnent qu'il faut avoir des connaissances préalables sur les lieux géométriques pour comprendre ce qui se passe. La réponse d'Ophélie illustre bien cette position, et elle ajoute l'idée de faire le tout en groupe (voir figure 26). Geneviève et Alexandre croient qu'il faudrait donner plus de détails aux élèves en lien avec la construction, pour les guider davantage. Pour sa part, Mylène souligne qu'« il se passe beaucoup

de choses lorsqu'on bouge un seul élément. » Cela lui permet de justifier le fait que l'interprétation de cette construction soit plus complexe pour les élèves.



Je crois que cette activité pourrait être trop complexe pour des jeunes du secondaire à cause des notions de lieux géométriques, et des propriétés des ellipses et hyperboles que nous devons connaître.

Je ferais probablement l'activité en groupe tout en donnant plus de précision sur la matière utilisée dans l'activité.  
Ex: notion sur les hyperboles, ellipses, cercles.

Figure 26. Production écrite d'Ophélie dans la section *Rétroaction* de l'activité E.

Dans la discussion en groupe, Ophélie revient sur la complexité de l'activité pour des élèves du secondaire et l'intérêt qu'il y aurait à la faire vivre en groupe. Elle ajoute aussi des idées susceptibles d'outiller les élèves dans la recherche de l'explication :

« Si on demande la définition de l'ellipse, puis qu'on pose des questions avec le dessin et les mesures aux élèves, ça devrait aider. » (Ophélie)

Les étudiants s'entendent pour laisser moins de place aux élèves dans cette activité et accorder le rôle principal à l'enseignant qui effectuerait la construction face au groupe et guiderait la discussion (voir tableau X). Ce resserrement semble être attribuable moins à la complexité de la construction qu'à la complexité du phénomène que l'on observe ou à l'insécurité ressentie face à un contenu moins maîtrisé. Il est intéressant de noter ici que la posture d'étudiante en didactique de Valérie est celle qui laisserait une plus grande place à l'élève, mais qu'elle manifeste un niveau de preuve davantage pragmatique. D'autre part, Ophélie et Brigitte sont dans une orientation opposée : elles ouvrent vers des preuves intellectuelles dans l'activité, mais laissent peu de place à l'élève.

Enseignant				Élève
L'enseignant occupe la place principale dans l'activité : il est celui qui dirige le tout, qui effectue l'activité en démonstration.				L'élève est au cœur de l'activité : il a le contrôle, il cherche à réaliser les tâches demandées et l'enseignant n'est qu'un guide, un accompagnateur.
Illustration/ Révision	Activité guidée	Activité de visualisation/ manipulation	Activité de découverte	Activité de réflexion
Mylène Sonia Brigitte	Geneviève Alexandre Ophélie		Valérie	

Tableau X. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité E selon les étudiants.

#### 4.2.4.5 Évaluation globale de la contribution de l'activité E

L'activité E a permis d'observer une plus grande autonomie des étudiants dans la réalisation des constructions, témoignant de l'apport des activités précédentes dans le processus d'*instrumentation* avec le logiciel GeoGebra. Malgré quelques erreurs de construction pour certains, les étudiants ont une meilleure maîtrise du logiciel et réinvestissent des éléments des constructions précédentes, même lorsqu'ils s'avèrent moins efficaces. Cela dit, face à un contenu mal maîtrisé (les coniques), qui amène les étudiants aux limites de leurs connaissances mathématiques, leur analyse de la construction se limite au niveau visuel, ne dépassant pas, pour la plupart, la *genèse figurale* dans leurs explications. Ainsi, ils peuvent nommer la conique qui est construite et parfois situer quelques éléments constitutifs de cette dernière, mais ne pas faire référence à sa définition ni chercher à dégager les propriétés résultant de la construction.

Une seule étudiante a choisi de pallier cette difficulté en allant rafraîchir ses connaissances sur Internet. Cela lui a permis d'amorcer une réflexion sur sa construction en lien

avec la définition de l'ellipse, plaçant son activité mathématique au niveau de la *genèse discursive*, sans pour autant arriver à formuler une explication complète et parfaitement correcte.

De façon générale, les étudiants ont trouvé l'activité plus difficile à expliquer. Ils mentionnent même qu'elle devrait être plus détaillée pour des élèves du secondaire vu sa complexité. Selon la posture didactique des étudiants, les élèves devraient avoir vu la théorie avant de réaliser cette activité et ce, afin de simplifier la tâche. Dans leurs commentaires, des éléments en lien avec l'aspect visuel semblent ressortir beaucoup plus que la réflexion sur les raisons qui font en sorte que nous sommes en présence de telle ou telle conique. Cela donne à penser qu'ils pourraient se contenter d'un niveau de preuve pragmatique chez leurs futurs élèves.

#### **4.2.5 Retour sur l'activité F**

Dans cette activité, les étudiants doivent ouvrir un fichier GeoGebra avec une construction d'une parabole qui a déjà été réalisée. À l'aide de cette construction, de la possibilité de modifier la parabole en déplaçant son foyer et sa droite directrice, et de l'accès aux équations ou aux coordonnées de ces objets, ils peuvent envisager la représentation graphique d'une fonction quadratique comme un cas particulier de la parabole comme lieu géométrique et établir un lien entre son équation et les objets qui la déterminent (foyer et droite directrice). Cette activité permet de compléter l'étude des coniques débutée dans l'activité précédente, laquelle ne permettait pas d'obtenir une parabole. Cette construction est une *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) puisque les éléments sont déjà construits et que leurs propriétés résistent au déplacement (voir figure 27).



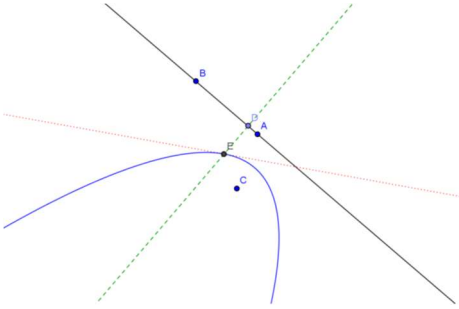


Figure 27. Construction donnée aux étudiants pour l'activité F.

#### 4.2.5.1 Instrumentation et instrumentalisation

Dans cette activité, certains étudiants mentionnent avoir eu des difficultés avec l'affichage du protocole de construction. En fait, dans leurs productions écrites, plusieurs étudiants ne semblent pas avoir compris le lien entre la construction et les éléments clés de la parabole. En effet, les réponses données par les étudiants lorsqu'ils doivent expliquer les étapes du protocole de construction restent liées à la visualisation de la construction : seule Brigitte mentionne que le point C est le foyer de la parabole dans sa production écrite. En général, les étudiants ne font que traduire le protocole de construction de façon similaire à Mylène (voir figure 28).

- c) ① Tracer un point quelconque et le nommer A.
- ② Tracer un autre point quelconque et le nommer B.
- ③ Tracer une droite de sorte qu'elle passe par les points A et B.
- ④ Tracer un point quelconque qui ne se situe pas sur la droite [AB] et nommer le C.
- ⑤ et ⑥ Tracer une droite perpendiculaire à la droite [AB] passant par un point d'intersection nommé D.
- ⑦ Tracer la médiatrice aux points C et D.
- ⑧ Identifier par un point E, le point d'intersection entre la droite b (⊥) et c (médiatrice).
- ⑨ Activer la fonction relative au lieu géométrique de [E, D].

Figure 28. Production écrite de Mylène à la question 1 c de l'activité F.<sup>27</sup>

En suivant les consignes de la question 3, les étudiants n'ont pas eu de difficultés à faire afficher les coordonnées, le plan cartésien et les équations, ainsi qu'à identifier les positions de

<sup>27</sup> On peut relever que Mylène ne parle pas de la médiatrice du segment [CD] mais bien de la médiatrice « aux points C et D ». On peut supposer un effet soit de l'utilisation du logiciel (où il est possible de construire la

la droite directrice qui simplifient l'équation de la conique. Dans le fichier GeoGebra de Geneviève, on peut voir qu'elle a placé le foyer à l'origine du plan cartésien sans doute pour voir si une telle configuration permettrait de simplifier davantage l'équation de la conique (voir figure 29). De telles productions, si elles témoignent de l'instrumentation avec le logiciel GeoGebra, pourraient permettre aux étudiants d'établir des liens avec les organisations praxéologiques autour des coniques qui ont cours à l'école secondaire.

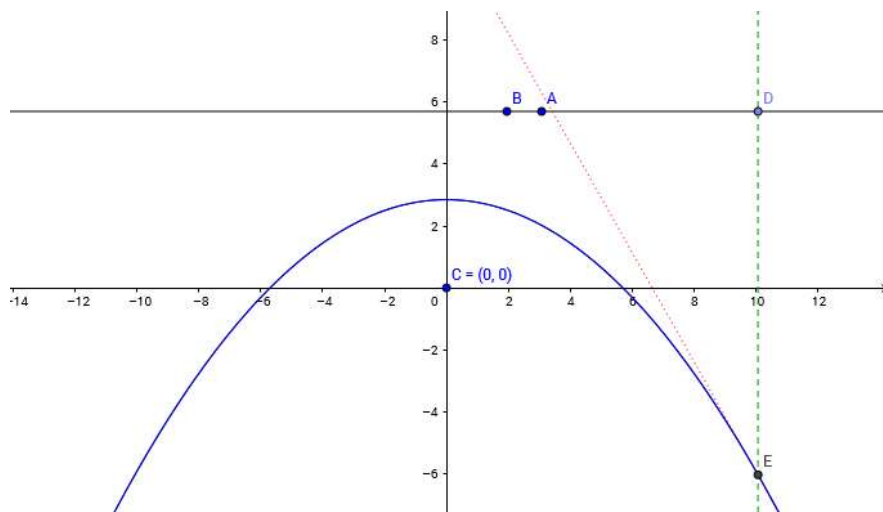


Figure 29. Production de Geneviève dans GeoGebra pour l'activité F.

#### 4.2.5.2 Écueils épistémiques

Lorsqu'on demande aux étudiants d'expliquer pourquoi la construction est celle d'une parabole, certaines difficultés sont soulevées. En effet, trois étudiants ne répondent pas à la question ou inscrivent un point d'interrogation. Il s'agit de Geneviève, Valérie et Alexandre. D'autres étudiants nomment quelques éléments liés à la construction, mais n'élaborent pas leur explication (Sonia et Mylène). Dans l'explication de Sonia, il semble y avoir une confusion entre le point D et le point E et elle ne mentionne pas non plus les éléments décrivant la parabole tels que le foyer et la directrice :

*« Le lieu géométrique forme une parabole car la parabole est tangente au point D et la droite C reste tangente en E à celle-ci. » (Sonia)*

---

médiatrice d'un segment en cliquant sur ses deux extrémités), de l'activité (où les deux points ne sont pas liés par un segment) ou d'un manque d'habitude dans l'expression rigoureuse des relations.

Pour sa part, Mylène mentionne seulement que « *C'est le foyer de la parabole* » comme explication. Bien que cette affirmation ne soit pas justifiée, elle est une des rares qui mentionne cet élément en lien avec la définition de la parabole. Ophélie se limite quant à elle à décrire le mouvement; ce qu'elle a observé en tirant parti du dynamisme de la construction.

*« C'est bien une parabole car si on bouge le point D, le point E se déplace pour toujours être le point d'intersection de la perpendiculaire et de la médiatrice et en bougeant le point D, la médiatrice se déplace obligatoirement. Et la trace formée par le point E forme une parabole autour du point C. »* (Ophélie)

Seule Brigitte semble avoir saisi une idée importante de la construction :

*« Il s'agit de l'endroit où le point E est à égale distance de C et de D. »* (Brigitte)

Mais en n'associant pas le segment [ED] à la distance du point E (appartenant au lieu géométrique) à la droite, elle demeure encore loin de la caractérisation des points de la parabole. Il est vrai que la définition même de la parabole paraît loin pour ces étudiants : lors de la discussion suivant l'activité, aucun d'entre eux ne référera à la directrice pour la droite passant par D, A et B. Cela dit, la plupart ont à nouveau du mal à dégager les propriétés du lieu géométrique à partir de la construction donnée. Il peut s'avérer étonnant de noter que l'institutionnalisation de la définition bifocale de l'activité précédente ne semble pas avoir été réinvestie par les étudiants. Il faut souligner qu'un délai de deux semaines a eu lieu entre les deux activités, pouvant peut-être expliquer ce faible rappel des connaissances mathématiques liées aux coniques, pourtant vues au secondaire.

#### **4.2.5.3 Niveaux de preuve**

Comme mentionné dans la section précédente, on peut voir que ce ne sont pas tous les étudiants qui expliquent la présence de la parabole en utilisant des éléments de sa définition; seule Brigitte s'en approche, mobilisant ainsi un niveau de preuve plus élevé que les autres étudiants. Il est également important de mentionner que Valérie n'a fait que la première question; étant absente à la deuxième rencontre sur cette activité. On ne peut donc la situer dans le tableau XI pour les niveaux de preuve.

D'autre part, les explications des étudiants se limitent beaucoup à des éléments visuels liés à la construction tout comme lors de l'activité précédente. Le niveau de preuve mobilisé ne se rend pas vraiment aux preuves intellectuelles. La majorité des étudiants restent au niveau des

preuves pragmatiques en essayant de décrire ce qu'ils observent plutôt que d'en donner une explication et en basant leur description sur des éléments associés à une genèse figurale. Cela est marqué dans leurs réponses données à la question 3 où l'on demandait de mentionner ce qu'ils remarquent au sujet de l'équation de la parabole lorsque la directrice est verticale, horizontale ou oblique. Les réponses les plus élaborées se limitent à l'orientation de la parabole en énumérant les différentes possibilités de la position de la droite AB (Brigitte, Alexandre et Mylène) ou à l'utilisation d'exemples (Ophélie). Seuls Geneviève et Alexandre considèrent seulement que l'équation est plus simple lorsque la droite est horizontale; oubliant ainsi de considérer la droite verticale.

Geneviève mentionne que le point C ne change pas, mais elle ne mentionne pas explicitement qu'il s'agit du foyer de la parabole : « *En bougeant A et B, C ne change pas. L'équation la plus simple est lorsque [AB] est à l'horizontale.* ». Son constat est lié à l'indépendance de la droite directrice et du foyer qui sont les éléments constituants de la parabole, mais sans mentionner qu'elle les identifie ainsi. De son côté, Ophélie fait mention du foyer en disant qu'il ne change pas lorsque l'on bouge les points A et B et élabore même sa réponse en donnant quelques exemples d'équations (voir figure 30).

Q3: Droite verticale:  $d = 4y^2 - 97,52x + 59,92y = -693,98$   
 $C = (12,19; -4,99)$

Droite horizontale:  $d = 4x^2 - 97,52x + 39,92y = -693,98$   
 $C = (12,19; -4,99)$

Droite oblique:  $d = 2,41x^2 + 4,78xy + 2,37y^2 - 116,6x + 47,73y = -829,76$   
 $C = (12,19; -4,99)$

Je remarque que si la droite AB change, l'équation de la parabole change, mais le foyer reste toujours le même.  
 L'équation est la plus simple pour la droite AB verticale et la droite AB horizontale.

Figure 30. Production écrite d'Ophélie à la question 3 de l'activité F.

Pour sa part, Sonia décrit avec application les formes d'équation de la droite directrice qui simplifient l'équation de la parabole:

« L'équation est plus simple lorsque la droite A, qui passe par AB est verticale ou horizontale. Le X et le Y (selon le cas) sont constants. Le X est constant quand la droite est verticale et le Y est constant quand la droite est horizontale. » (Sonia)

Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)	(3)	Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
	Geneviève Sonia Alexandre Mylène Ophélie	Brigitte		

Tableau XI. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité F.<sup>28</sup>

#### 4.2.5.4 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Pour cette activité, il n'y a que Geneviève, Sonia et Ophélie qui aient complété la section *Rétroaction*, mais Brigitte a ajouté des idées pour l'utilisation de cette activité lors de la discussion. Leurs positions respectives de futurs enseignants peuvent se regrouper en deux catégories : activité synthèse et activité dirigée par l'enseignant.

Les idées d'une activité synthèse sont explicitées par Ophélie et Brigitte. Dans la section *Rétroaction* de sa production écrite, Ophélie mentionne le fait que la construction est déjà réalisée, ainsi l'activité pourrait permettre aux élèves de « *comprendre la matière vue préalablement sur la parabole* ». Brigitte revient également sur cette idée dans la discussion en disant :

« *Moi je l'utiliserais l'activité, mais en la présentant après avoir vu la théorie sur la parabole, puis le rôle des paramètres. C'est quand même plus facile puisque la construction est déjà faite. Si on n'a pas à la construire, c'est plus facile.* » (Brigitte)

Pour sa part, Geneviève soutient qu'elle n'utiliserait peut-être pas cette activité au secondaire vu les difficultés qu'elle a elle-même eues. Elle ajoute cependant que « *si l'enseignant le fait, je crois que ce serait plus simple* ». Dans sa production écrite, Sonia déplore le manque

<sup>28</sup> Valérie n'ayant réalisé que la question 1 de l'activité n'apparaît pas dans le tableau.

de clarté dans les consignes techniques pour faire afficher le protocole de construction, mais elle utiliserait tout de même l'activité avec les élèves sans toutefois mentionner de quelle façon. Elle résume ainsi ce qu'elle retient de l'activité pour l'enseignement au secondaire :

« Avec cette activité, les élèves peuvent voir et décrire un exemple de construction. Aussi, cela permet de travailler avec la parabole et d'en faire la démonstration avec le logiciel. »  
(Sonia)

Bref, l'enseignant occuperait une plus grande place dans cette activité à laquelle les étudiants semblent n'accorder qu'un rôle d'aide à la visualisation (le terme « démonstration » renvoie à nouveau à l'idée de « monstration ») ou une contribution à l'*instrumentation* (par la découverte de l'accès au protocole de construction). Le dégagement de propriétés n'apparaît pas ciblé dans ce que les futurs enseignants projetaient de faire avec leurs élèves.

Enseignant				Élève
L'enseignant occupe la place principale dans l'activité : il est celui qui dirige le tout, qui effectue l'activité en démonstration.				L'élève est au cœur de l'activité : il a le contrôle, il cherche à réaliser les tâches demandées et l'enseignant n'est qu'un guide, un accompagnateur.
Illustration/Révision	Activité guidée	Activité de visualisation/manipulation		
Ophélie				
Geneviève				
Sonia				
Brigitte				

Tableau XII. Place occupée par l'enseignant ou par l'élève dans l'activité F selon les étudiants.

#### 4.2.5.5 Évaluation globale de la contribution de l'activité F

Dans cette activité, l'aspect visuel revient encore occuper une place importante. Les étudiants tentent un travail mathématique sur le plan de la *genèse figurale* en parlant d'éléments

observés dans la construction, en décrivant leurs observations, et en s'aidant pour certains de l'ajout du plan cartésien. Il y a cependant un début de réflexion plus approfondie chez Brigitte qui cherche à dégager des propriétés. Tout comme dans les activités précédentes, Brigitte cherche à inscrire son travail mathématique dans une *genèse discursive*.

Au niveau de l'*instrumentation*, on peut noter que les étudiants semblent plus à l'aise avec le logiciel, car certains prennent l'initiative de déplacer certains éléments de leur construction pour mieux répondre aux questions demandées dans la tâche (situer le foyer à l'origine). Néanmoins, lorsque l'on a demandé de faire afficher le protocole de construction, élément nouveau dans les activités, les étudiants n'ont pas eu le réflexe de consulter leur guide d'instructions sur GeoGebra (annexe D) et ont mentionné que des explications devraient être données sur la façon de faire afficher le protocole de construction. Il est important de préciser que les étudiants pouvaient poser des questions à la chercheuse tout au long de leur réalisation de l'activité, mais que peu utilisaient cette façon de faire. Cela paraît donc soulever un problème au niveau de l'*orchestration*.

#### **4.2.6 Retour sur l'activité G**

Dans cette activité, les étudiants étaient en présence d'une nouvelle construction dynamique des lieux géométriques (voir figure 31). Cette *construction robuste* (Soury-Lavergne, 2011) se base sur la définition monofocale des coniques; elle comporte un fort caractère dynamique permettant de voir apparaître les différents lieux géométriques.. Les buts de cette activité étaient d'abord de faire découvrir aux étudiants cette définition qui permet de lier les différentes coniques, et de les amener à envisager GeoGebra comme un outil d'exploration et de validation de conjectures autour d'un nouveau concept. En leur faisant compléter ensuite un réseau déductif afin de prouver qu'il s'agit bien de ces coniques à l'aide de la définition de l'excentricité, nous cherchions également à leur faire vivre l'expérience d'un tel réseau pour soutenir le travail de la preuve.

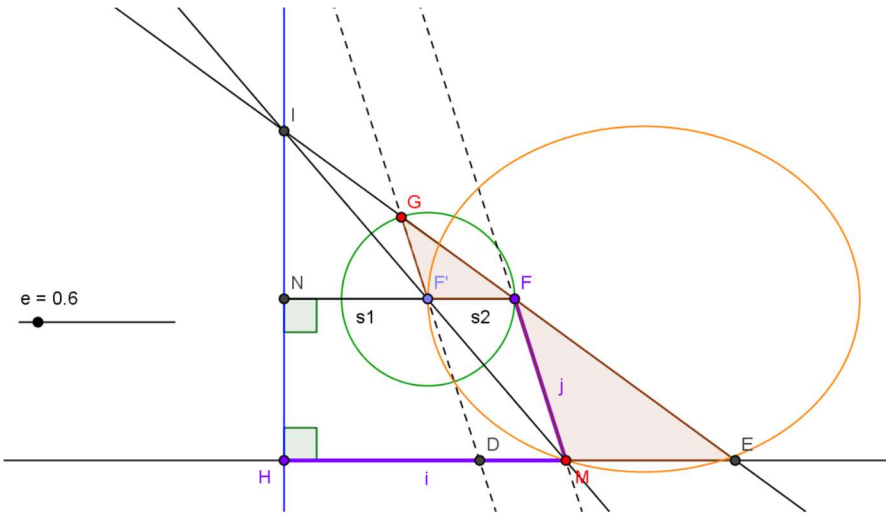


Figure 31. Construction donnée aux étudiants pour l'activité G.

#### 4.2.6.1 Instrumentation et instrumentalisation

Les étudiants ont poursuivi dans cette activité leur *instrumentation* au regard du logiciel. Un exemple de cette situation peut être observé lorsque les étudiants utilisent les valeurs numériques affichées pour les longueurs des segments afin d'exprimer l'excentricité. On ne demandait pas d'utiliser les valeurs numériques dans les questions de l'activité, mais certains les ont fait apparaître pour les utiliser dans leurs réponses. C'est notamment le cas pour Ophélie, Geneviève et Valérie qui ont trouvé les valeurs associées aux longueurs des segments [FM] et [HM] plaçant leur travail mathématique au niveau de la genèse figurale. Geneviève va plus loin que les deux autres en établissant de façon explicite les rapports entre ces longueurs comme on peut le voir à figure 32.



#4  $\overline{HM} = 6,01$  et  $\overline{FM} = 3,61$   
 $\frac{3,61}{6,01} = \frac{\overline{FM}}{\overline{HM}} \approx 0,6 = e$

Lieu géométrique Forme: Ellipse

#5 Lieu géométrique: Hyperbole  
 $\overline{HM} = 20,13$  et  $\overline{FM} = 30,19$   
 $e = 1,5 \approx \frac{\overline{FM}}{\overline{HM}} = \frac{30,19}{20,13}$

si je change G, j'ai la même chose:  
 $e = 1,5 \approx \frac{\overline{FM}}{\overline{HM}} = \frac{11,5}{7,67} \approx \frac{17,67}{11,78} \approx \dots$

Figure 32. Production écrite de Geneviève aux questions 4 et 5 de l'activité G.

#### 4.2.6.2 Écueils épistémiques

Cette activité est celle qui a causé le plus de difficultés aux étudiants. En raison de sa complexité et de sa longueur, la plupart des étudiants n'ont pas complété l'activité : Valérie et Ophélie se sont arrêtées à la question 5; Mylène, Geneviève et Brigitte se sont rendues à la question 9. Alexandre est le seul à avoir terminé l'activité, après avoir manifesté le souhait de prendre un autre moment afin de comprendre le réseau déductif et l'activité en elle-même. Dans l'ensemble, les étudiants attribuent leurs difficultés aux connaissances oubliées et à une baisse de motivation en raison de la longueur de l'activité et de l'heure à laquelle elle se tenait.

Dans la discussion qui a suivi l'activité, plusieurs étudiants avaient de la difficulté à énoncer la définition d'une parabole bien que le tout avait été énoncé dans l'activité précédente. Il importe de souligner qu'un délai de quelques semaines s'est écoulé entre les deux activités expliquant peut-être cet écueil épistémique. Brigitte nous a ainsi interpellée : « *Peux-tu nous aider? Je ne me souviens plus* ». Cette discussion a d'ailleurs été plus dirigée que pour les autres activités et plusieurs éléments de réponse ont dû être expliqués aux étudiants, incluant une définition de l'excentricité. Lorsque Geneviève a exprimé ne pas « voir le lien avec le  $e$  », personne ne semblait en mesure de l'aider. L'*institutionnalisation* du réseau déductif a semblé nécessaire afin de mieux comprendre la preuve de la validité de la définition des coniques par l'excentricité. Davantage que le réseau déductif, c'est la complexité de cette preuve qui a semblé

poser problème. Mylène a cherché à expliquer leurs difficultés tout en restant ouverte à la possibilité qu'une telle activité puisse se faire avec des élèves du secondaire :

*« Ça paraît peut-être difficile pour nous parce que cela fait longtemps qu'on a pas touché aux coniques, mais peut-être que pour les élèves ce ne le sera pas. »* (Mylène)

Il reste que la complexité du réseau déductif a découragé plusieurs étudiants. En effet, il n'y a qu'Alexandre, Mylène et Geneviève qui l'aient complété, alors que Brigitte et Ophélie n'ont rempli que quelques cases. La difficulté perçue était suffisante pour que Brigitte écarte d'emblée la possibilité pour des élèves du secondaire de réaliser la tâche par eux-mêmes :

*« C'est sûr que le réseau déductif est trop difficile pour les élèves du secondaire, mais si on le décortique en petites étapes, on peut le faire avec eux aussi. »* (Brigitte)

#### 4.2.6.3 Niveaux de preuve

Deux éléments de cette activité fournissent des indices intéressants sur les niveaux de preuve mobilisés par les étudiants : les expressions algébriques<sup>29</sup> liées à l'excentricité ainsi que le réseau déductif.

Concernant les expressions algébriques utilisées pour exprimer les rapports de [FM] et [HM] selon les différents types de coniques, les étudiants semblent avoir adopté principalement deux positions distinctes : le recours aux égalités (locales) ou la généralisation aux relations entre les variables. Geneviève, Brigitte, Ophélie, Mylène et Alexandre utilisent des égalités, mais à des niveaux différents. En effet, Geneviève intègre la valeur numérique des longueurs des segments dans ses égalités afin de lier la valeur de  $e$  donnée dans la question au rapport de [FM] et [HM]. Ainsi, on peut noter chez elle un travail plus élaboré de réflexion sur la figure. Les autres étudiants se limitent à commenter si les segments sont de même longueur ou non<sup>30</sup>, sans ajouter d'explications. Les réponses données par Brigitte (voir figures 33 et 34) laissent supposer qu'elle a fait plusieurs expérimentations en déplacement le point G avant de commenter s'ils ont la même longueur. Ça semble être aussi le cas chez Ophélie et Geneviève,

---

<sup>29</sup> Cette appellation a été utilisée dans l'activité G, mais elle pourrait être remplacée par expressions générales pour les mesures des segments.

<sup>30</sup> Il convient de noter que les étudiants parlent plutôt d'égalité des segments et non de leur longueur.

mais Geneviève, elle, se limite à un seul exemple numérique (voir figure 35). Ces égalités montrent un travail au niveau de la *genèse figurale*.

#3  $m\overline{FM} = m\overline{HM}$  quand  $e = 1$   
ces valeurs sont toujours pareil si  
on deplace le point G en laissant  $e = 1$

Figure 33. Production écrite de Brigitte à la question 3 de l'activité G.

#4  $m\overline{FM} \neq m\overline{HM}$ . elle ne garde pas la même  
proportion quand on deplace G.

Figure 34. Production écrite de Brigitte à la question 4 de l'activité G.

#4  $\overline{HM} = 6,01$  et  $\overline{FM} = 3,61$   
 $\frac{3,61}{6,01} = \frac{\overline{FM}}{\overline{HM}} \times 0,6 = e$   
Lieu géométrique Formé: Ellipse

Figure 35. Production écrite de Geneviève à la question 4 de l'activité G.

Pour sa part, Alexandre exprime le tout de façon qualitative (plutôt que symbolique) et lie les relations qu'il dégage aux différents objets géométriques qui apparaissent (voir figure 36). Des relations fonctionnelles, entre les longueurs des différents segments sont exprimées de façon qualitative un peu plus loin dans sa production:

« Plus  $e$  est grand, plus le segment  $FM$  est grand et le segment  $HM$  est petit. » (Alexandre).

#3 Leur valeur est la même. L'expression est  $\overline{FM} = \overline{HM}$

#4  $\overline{FM}$  et  $\overline{HM}$  ne sont plus égaux, il y a un trapèze.  
En déplaçant  $G$ , le trapèze se modifie. À un moment, cela forme un rectangle.

#5 Il s'agit d'un triangle rectangle.  $\overline{FM}$  et  $\overline{HM}$  ne sont pas de la même longueur.

Figure 36. Production écrite d'Alexandre aux questions 3, 4 et 5 de l'activité G.

Valérie utilise des inégalités, mais, comme en témoignent ses points d'interrogation, elle a du mal à généraliser ses réponses de façon algébrique (voir figure 37).

3. Parabole  
 $\overline{FM} = \overline{HM} = 5,57$   
 Ils restent égaux.  
 expression algébrique ??  $\overline{FM} = \overline{HM}$

4. Ellipse  $\overline{FM} = 2,91$   $\overline{HM} = 4,85$   
 $\overline{FM} < \overline{HM}$   
 exp. alg. ??  $\overline{FM} = \overline{HM}$

5. Hyperbole  
 $\overline{HM} > \overline{FM}$

Figure 37. Production écrite de Valérie aux questions 3, 4 et 5 de l'activité G.

Comme nous l'avons déjà mentionné, seuls trois étudiants ont complété le réseau déductif. Ces réseaux montrent un certain travail au niveau de la *genèse discursive*. Le réseau produit par Alexandre, quoiqu'erroné pour certaines justifications, est celui qui est le plus complet. Même s'il ne formule pas la conclusion finale ciblée ( $e = j/i$ ), son réseau déductif témoigne de la rigueur de son raisonnement. Il a même utilisé un cas non prévu pour démontrer que les triangles  $GFF'$  et  $FEM$  sont semblables, soit le cas CAC (voir figure 38). Si le temps supplémentaire accordé l'a aidé à pousser plus loin sa réflexion, il convient de souligner l'engagement avec lequel il a exprimé le souhait de compléter l'activité.

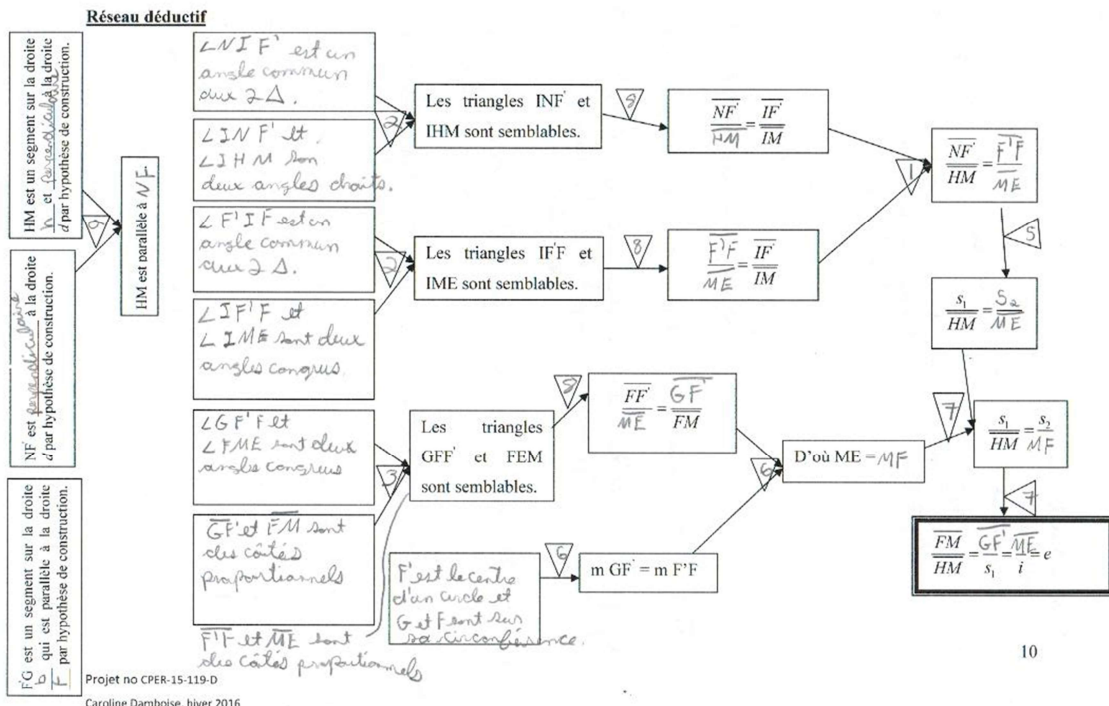


Figure 38. Réseau déductif complété par Alexandre à l'activité G.

Pour sa part, Mylène a complété le réseau déductif, mais elle semble avoir eu de la difficulté avec les cas de similitude des triangles. En effet, les énoncés inscrits dans les cases ne font pas référence aux angles, mais plutôt aux types de triangles qui sont présentés. On peut supposer ici que l'aspect visuel de la construction l'a emporté sur l'analyse des angles dans la figure construite (voir figure 39). On note aussi qu'elle n'arrive pas à la conclusion souhaitée, mais s'y approche à une substitution près ( $s_2 = j$ ).

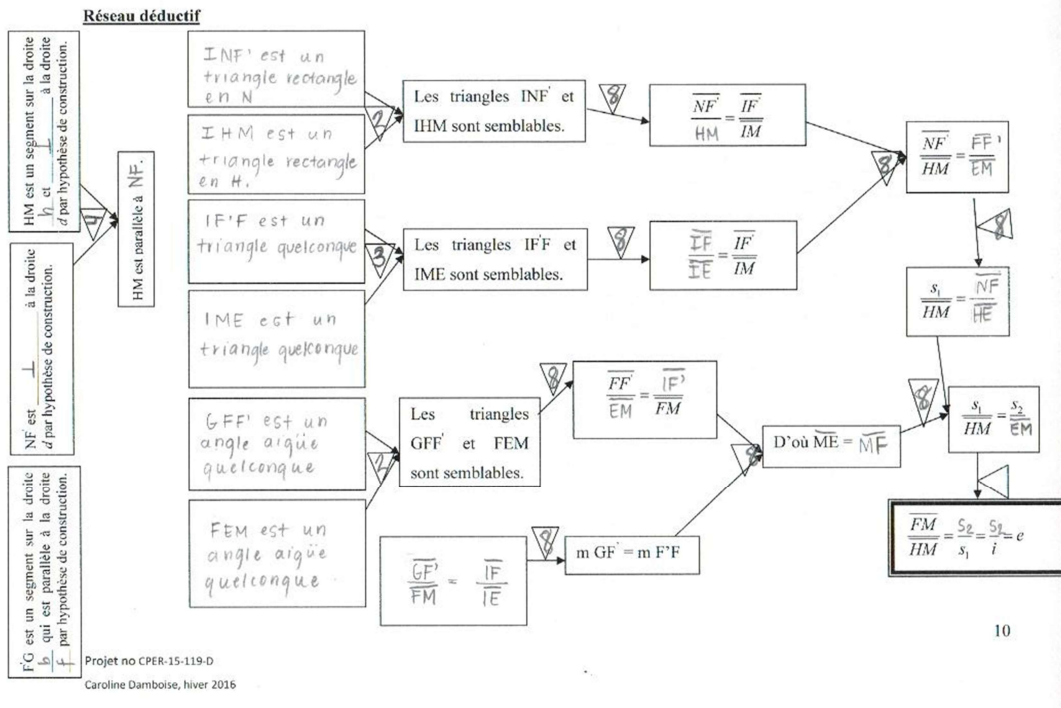


Figure 39. Réseau déductif complété par Mylène pour l'activité G.

Pour sa part, Geneviève complète le réseau déductif et arrive à la bonne conclusion. Par contre, elle n'établit pas les expressions algébriques demandées aux questions précédentes pour lier [FM] et [HM] utilisant seulement un exemple numérique pour illustrer la relation, comme illustré dans à la figure 35. Ce constat nous amène à classer son raisonnement parmi les preuves intellectuelles vu son réseau déductif complété, mais à juger que la preuve est incomplète, car les liens entre [FM] et [HM] semblent moins élaborés que chez Alexandre. Celui-ci mobilise une réflexion plus avancée que Geneviève dans l'expression des liens entre [FM] et [HM], mais une preuve moins élaborée que Geneviève dans son réseau déductif. Nous classerons donc ces deux étudiants au même niveau.

Brigitte et Ophélie ont fait quelques ajouts dans le réseau déductif, mais ne l'ont pas complété. À l'étude de ces ajouts, les deux arrivent à la conclusion souhaitée en établissant les rapports entre les segments, mais Ophélie a plus d'éléments que Brigitte. Cela rend la preuve d'Ophélie supérieure à celle de Brigitte sans pour autant lui faire atteindre le niveau des preuves intellectuelles.

Avec les rapports entre [FM] et [HM] établis ainsi que le réseau déductif, on peut effectuer le classement des étudiants selon les niveaux de preuve mobilisés. Le travail mathématique des étudiants semble osciller entre la *genèse figurale* et la *genèse discursive* comme on a pu le constater.

Preuves pragmatiques		Intermédiaire	Preuves intellectuelles	
Empirisme naïf (1)	Début d'explication (2)	(3)	Preuve incomplète (4)	Démonstration (5)
	Brigitte Ophélie Valérie	Mylène	Alexandre Geneviève	

Tableau XIII. Niveaux de preuve mobilisés à l'activité G.

#### 4.2.6.4 Utilisation potentielle de cette activité avec des élèves du secondaire

Les étudiants ne se voient pas utiliser cette activité telle quelle avec des élèves du secondaire. Ils partagent l'idée que l'enseignant devrait accompagner les élèves et que ces derniers devraient avoir vu les concepts au préalable.

Même si Mylène et Geneviève ont complété le réseau déductif, elles n'ont pas terminé l'activité, car elles n'ont pas répondu à toutes les questions. Alexandre est le seul à avoir été au bout de l'activité en répondant à toutes les questions; il est également le seul à avoir mentionné dans sa production écrite des éléments en lien avec la façon de l'utiliser avec des élèves du secondaire (voir figure 40).



Rétroaction:

1. Je crois que cela est possible. Cependant, les élèves doivent avoir une bonne connaissance des concepts. L'enseignant doit annoncer le but de l'activité avant de débiter.
2. Il est possible pour les élèves de comparer les définition à l'aide d'un outil visuel.
3. Il faudrait que les élèves voient en détail les différents concepts avant de faire l'atelier. Comme adaptation, je suggère de donner une feuille aux élèves qui contient des pistes de réflexion. Cela peut diminuer la complexité que pourrait représenter l'activité.

Figure 40. Production écrite d'Alexandre dans la section *Rétroaction* de l'activité G.

Selon lui, les élèves devraient avoir vu « *en détail les différents concepts* » avant d'être confrontés à cette activité et il faudrait ajouter des pistes de réflexion. Également, lors de la discussion, il mentionne que le réseau déductif ne serait peut-être pas à faire avec les élèves et il semble insister sur l'accompagnement que doit fournir l'enseignant tout au long de l'activité.

« *Moi je pense qu'on pourrait leur montrer la construction et leur expliquer les étapes, utiliser les triangles semblables, mais pas le réseau déductif.* » (Alexandre)

L'idée de fournir des pistes aux élèves est également présente chez d'autres étudiants lors de la discussion didactique. Brigitte ajoute qu'elle retient l'idée de ce réseau déductif, mais qu'il faudrait davantage d'énoncés parmi lesquels choisir comme pour le réseau qu'ils ont vu en classe en lien avec le texte de Tanguay (2006) : « *Déjà là c'était bien, mais d'avoir davantage d'énoncés comme celui qu'on a fait [avec notre professeure] serait mieux* ». Elle va même jusqu'à parler de faire un genre de « *Cherche et trouve* » avec le réseau déductif afin de rendre le tout plus accessible pour les élèves.

Si elle reconnaît à son tour la difficulté de l'activité pour des élèves, Geneviève souligne néanmoins, lors de la période de discussion, son appréciation du fait que la construction fasse ressortir le caractère unificateur de la définition des coniques par leur excentricité :

« *Ben, c'est peut-être un peu difficile pour les élèves du secondaire, mais c'est le fun de voir que tout peut se ramener à une définition unique avec des rapports entre les distances.* » (Geneviève)



Ce commentaire nous porte à croire que l'activité pourrait être travaillée en exploitant l'idée des rapports entre les distances. En effet, plusieurs étudiants ont eu le réflexe d'insérer des valeurs numériques, mais le lien entre ces valeurs et leur généralisation n'a pas toujours été réalisé; leur travail mathématique est donc resté limité, au niveau d'un raisonnement sur des exemples numériques.

#### **4.2.6.5 Évaluation globale de la contribution de l'activité G**

Dans l'ensemble de cette activité, on constate encore un travail mathématique au niveau de l'aspect visuel chez plusieurs étudiants. L'utilisation de valeurs numériques pour lier deux grandeurs permet de constater que le dessin est au cœur de leur réflexion et permet de diriger la réflexion au-delà de la *genèse figurale*. Certains vont pousser plus loin leur réflexion avec le *réseau déductif*, mais leurs lacunes au niveau des connaissances mathématiques exploitées dans cette activité semblent avoir freiné leur réflexion. Cela se répercute dans la façon dont ils envisagent l'utilisation d'une telle activité avec des élèves; en en faisant une activité fortement dirigée par l'enseignant.

L'*instrumentation* développée avec les activités précédentes a suffi à outiller les étudiants avec les éléments techniques nécessaires pour réaliser l'activité G. Les difficultés se situent surtout au niveau épistémique; en raison de la fragilité des connaissances relatives aux coniques et de la complexité du réseau déductif, le passage à l'excentricité s'est révélé plus ardu que prévu. Il apparaît donc nécessaire de repenser cette activité et peut-être même le réseau déductif afin d'atteindre les buts visés au départ.

### **4.3 Profils des futurs enseignants au regard de la séquence**

En regardant les réponses données au questionnaire post-expérimentation, on peut constater que 4 des 6 étudiants ont « beaucoup aimé » la séquence d'activités alors qu'Ophélie et Valérie mentionnent l'avoir seulement « un peu aimé ». Leurs explications nous permettent de mieux saisir leurs réponses, car elles mentionnent des difficultés vécues au niveau des concepts qui étaient loin pour elles. En croisant les analyses a posteriori avec les réponses données, avant et après expérimentation, aux questions leur demandant de caractériser leur enseignement souhaité et anticipé, on voit se dégager trois profils principaux chez les futurs

enseignants, qui permettent d'expliquer les impacts variables de la séquence. Afin de mieux dégager ces profils, deux tableaux (tableaux XIV et XV) ont été constitués pour réduire les données. Dans ces tableaux, une valeur de 2 (couleur verte) signifie que les étudiants ont donné ce choix de réponse pour les deux questionnaires, une valeur de 1 (couleur jaune) signifie que la réponse donnée est apparue dans le questionnaire post-expérimentation alors qu'elle était absente dans le questionnaire pré-expérimentation et finalement, une valeur de -1 (couleur rouge) indique que l'élément, choisi par l'étudiant avant l'expérimentation, est disparu de ses réponses dans le questionnaire post-expérimentation. Il s'avère important de préciser que Sonia ne fait pas partie de ces tableaux, n'ayant pas rempli le questionnaire post-expérimentation. Vers la fin des séances, elle était plus souvent absente et, contrairement aux autres étudiants qui avaient pu s'absenter, elle ne voyait pas l'intérêt de reprendre l'activité qu'elle avait manquée.

	Étudiants						
	Profil	Scept			Encadrants		Inspirés
	Nom	Val	Gen	Oph	Myl	Alx	Bri
<i>Caractérisation de l'enseignement souhaité</i>							
A. une suite de puzzles							
B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie							
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie		-1	1		1		2
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe		-1	2	-1	1		
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques							
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés				1			
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur							
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées		1		-1			
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation		1					-1
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant			2		2		
K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration						1	1
L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration							
M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés		1	2		-1	-1	2
N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés							
O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation		-1	-1	2			2
P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation							
Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)		2		1	1	2	
R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)							

Tableau XIV. Caractérisation de l'enseignement souhaité des étudiants avant et après la séquence d'activités.

	Étudiants						
	Profil	Scept			Encadrants		Inspirés
	Nom	Val	Gen	Oph	Myl	Alx	Bri
<i>Caractérisation de l'enseignement anticipé</i>							
A. une suite de puzzles							
B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie							
C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie		-1			2		1
D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe		-1	2	2	2	-1	1
E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques							
F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés				1	-1		
G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur						1	
H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées		2	1	-1	-1		-1
I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation		2	1				-1
J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant			2		1		
K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration						1	
L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration							
M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés		1	-1				2
N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés							
O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation			-1	2			
P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation							
Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)		1			1	-1	
R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)							

Tableau XV. Caractérisation de l'enseignement anticipé des étudiants avant et après la séquence d'activités.

Dans le tableau XIV, on constate qu'Alexandre et Brigitte choisissent dans le questionnaire post-expérimentation un élément caractéristique en lien avec le raisonnement (une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration) en remplacement d'une orientation plus technique ou plus appliquée. Ce constat semble se faire également dans la caractérisation de l'enseignement anticipé par Brigitte, où elle laisse de côté des éléments liés à une approche procédurale pour des éléments en lien avec le raisonnement et la preuve. C'est cette part accrue au raisonnement et à la preuve dans leurs caractérisations qui nous font dire que la séquence les a *inspirés* plus que les autres. Nous verrons plus loin que ces deux étudiants développent des idées pour expérimenter les activités avec les élèves, faire voir des relations entre les objets géométriques et aller davantage vers le raisonnement mathématique. Il est toutefois intéressant de noter qu'alors que ces étudiants souhaiteraient faire place à la technologie ou à l'expérimentation dans leur enseignement, ils ne croient pas que ces éléments caractériseront la pratique à laquelle ils aboutiront.

Dans la seconde catégorie, les *sceptiques*, on retrouve Valérie qui semble délaisser des caractérisations liées au raisonnement pour une place accrue aux technologies et aux

applications dans l'enseignement qu'elle souhaite désormais, tout en maintenant des visées procédurales (*une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées*) à cet enseignement. Ainsi, la séquence semble l'avoir déstabilisée au point de la décourager de développer le raisonnement chez les élèves ou l'a confortée dans cette vision selon laquelle « on n'a plus besoin de prouver ». Nous classerons également Sonia dans cette catégorie, puisqu'elle a été absente à plusieurs occasions et que certaines des réponses données lors des activités tendent à nous montrer que la séquence ne correspondait pas à ses attentes ou intérêts.

Finalement, dans la dernière catégorie, les *encadrants*, on retrouve Ophélie, Mylène et Geneviève. Ces étudiantes expriment des idées d'utilisation des activités où elles donnent un rôle accru à l'enseignant, pour encadrer la démarche des élèves ou même garder tout le contrôle de l'exploration ou de la manipulation avec le logiciel. Les étudiantes de ce groupe caractérisent leur enseignement en utilisant autant des éléments liés au raisonnement qu'à l'application de procédures.

Nous allons illustrer ces trois profils avec des exemples. Il est à noter qu'un étudiant peut parfois changer de profil pour certaines raisons qui seront énoncées ci-dessous.

### **4.3.1 Les inspirés**

Comme mentionné ci-dessus, on retrouve dans cette catégorie les étudiants qui semblent avoir retiré davantage de la séquence et souhaitent travailler le raisonnement avec leurs futurs élèves. Il s'agit d'Alexandre et de Brigitte. Dans la figure 41, on peut constater que les niveaux de preuve mobilisés par ces étudiants dans la séquence varient entre les preuves pragmatiques et intellectuelles et qu'Alexandre est celui dont le niveau de preuve mobilisé augmente dans la séquence. Sa demande de temps supplémentaire afin de compléter et de mieux comprendre l'activité G témoigne de la motivation qu'il a développée au fur et à mesure de la séquence. Brigitte témoignait au départ de dispositions particulièrement favorables au regard de la preuve et du raisonnement. Si l'on observe des niveaux de preuve plus bas dans les dernières activités, ceux-ci s'expliquent par les difficultés auxquelles elle a alors fait face, qu'elle attribuait au caractère lointain et estompé de ses connaissances sur les coniques.

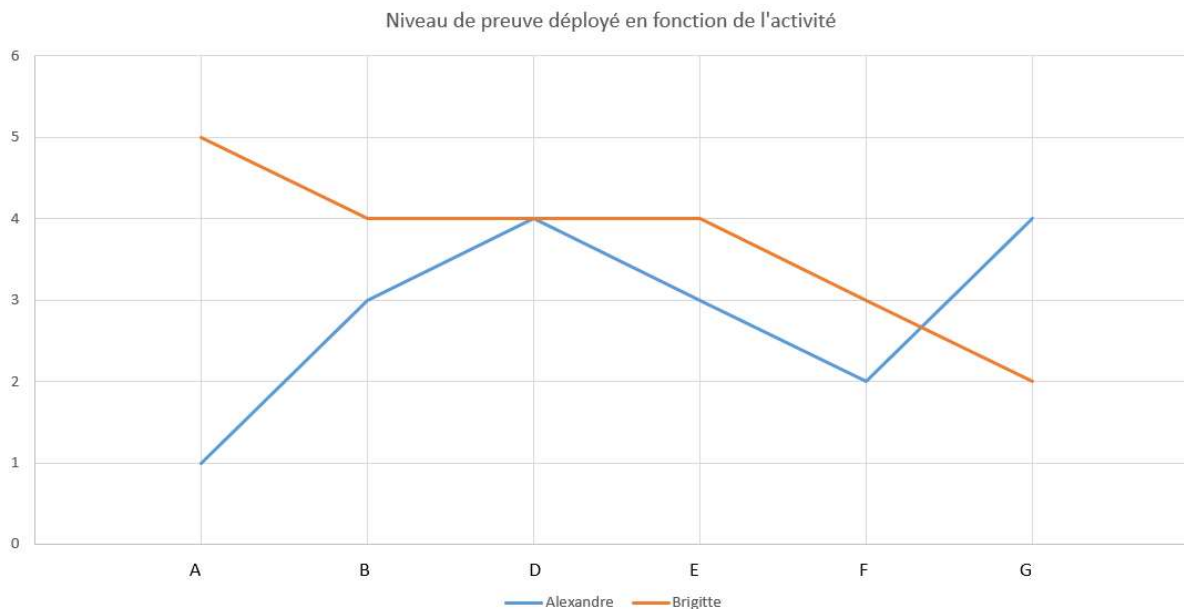


Figure 41. Niveaux de preuve déployés par les *inspirés* en fonction de l'activité.

Dans leurs rétroactions faisant suite aux différentes activités, ces deux étudiants retiennent des idées en lien avec les concepts exploités dans l'activité et font des liens entre différents éléments théoriques. Par exemple, Alexandre mentionne au sujet des définitions des différents lieux géométriques que l'on peut observer dans l'activité G, qu'il « *est possible pour les élèves de comparer les définitions à l'aide d'un outil virtuel* », laissant entrevoir un des buts souhaités de la séquence. Pour sa part, Brigitte témoigne après l'activité E :

*« C'est intéressant de voir la formation de l'ellipse. Cela nous amène à se questionner sur les propriétés des lieux géométriques. Cela peut être utile pour rendre cette matière visuelle et amusante. »* (Brigitte)

Cette idée de visualisation est aussi présente dans leurs réponses concernant les adaptations qu'ils feraient des activités. Leurs réponses montrent qu'ils laisseraient les élèves manipuler le logiciel et les différentes constructions en faisant quelques adaptations, sans pour autant réinterpréter le but de l'activité. Dans l'activité A, Brigitte mentionne l'idée d'utiliser l'activité pour introduire la théorie :

*« Cette activité pourrait être utilisée pour introduire la théorie. Ils pourraient voir par eux-mêmes la construction et voir qu'il apparaît toujours un parallélogramme. »* (Brigitte)

Pour d'autres activités, comme celles en lien avec la définition des différents lieux géométriques, ils mentionnent que les élèves devraient avoir vu la théorie avant. Ils ajoutent

néanmoins, des idées sur la façon d'utiliser l'activité avec les élèves tout en laissant place au raisonnement déductif. À cet effet, Alexandre, dans l'activité G mentionne :

*« Il faudrait que les élèves voient en détail les différents concepts avant de faire l'atelier. Comme adaptation, je suggère de donner une feuille aux élèves, qui contient des pistes de réflexion. Cela peut diminuer la complexité que pourrait représenter l'activité. »*  
(Alexandre)

En lien avec le raisonnement, Alexandre mentionne après l'activité D que l'enseignant pourrait prendre plus de place tout en questionnant les élèves :

*« Il faudrait que l'enseignant effectue la démonstration au projecteur et amène les élèves à se questionner. »* (Alexandre)

On peut donc constater que ces deux futurs enseignants, même lorsqu'ils envisagent un encadrement accru de la part de l'enseignant, cherchent à laisser une place au raisonnement déductif chez leurs élèves dans leur utilisation de GeoGebra. Cela se constate également dans leurs réponses au questionnaire post-expérimentation pour l'utilisation de la technologie, tant pour soutenir les explications que pour aller plus loin dans la découverte ou la preuve (voir réponses à la question 3 ci-dessous).

*« Permet d'aller plus loin qu'avec les manuels scolaires. L'élève peut découvrir certains concepts par lui-même. Utile pour réaliser des preuves et des démonstrations. »*  
(Alexandre, question 3)

*« Je trouve que c'est un logiciel intéressant à intégrer dans les cours, autant pour faire manipuler les élèves que pour réaliser des constructions qui aideront à mon explication de la théorie. »* (Brigitte, question 3)

Il est intéressant de mentionner les limites que ces étudiants soulèvent en lien avec GeoGebra. Alexandre soulève des éléments intéressants laissant suggérer une ouverture à l'utilisation de la technologie de sa part :

*« Il faut prendre du temps pour bien préparer les activités. L'enseignant doit avoir une excellente connaissance du logiciel et des concepts enseignés. »* (Alexandre, question 3, limites)

Ces étudiants ont d'ailleurs « beaucoup aimé » la séquence, malgré les difficultés vécues dans certaines activités. Brigitte souligne que ça lui « donne des idées à réaliser au secondaire » lorsqu'elle enseignera tout en mentionnant aussi des apprentissages réalisés : « J'ai appris plusieurs notions mathématiques que j'avais oubliées. J'ai amélioré ma manière d'utiliser GeoGebra ». Pour sa part, Alexandre mentionne que la séquence lui a permis de voir

« l'importance des preuves » ainsi que « l'utilisation des différents outils dans GeoGebra ». De plus, ces étudiants recommanderaient cette séquence, car « c'est très instructif » (Alexandre) et que « les activités sont intéressantes » (Brigitte).

En résumé, les *inspirés* retirent des idées de la séquence pour leur enseignement futur et semblent ouverts à intégrer le raisonnement déductif dans leur enseignement. De plus, ils suggèrent des pistes pour utiliser les activités avec leurs élèves, idées permettant la manipulation des constructions par les élèves. Leurs apprentissages sont liés à l'utilisation de GeoGebra, mais ils font aussi référence à la manière de l'utiliser (Brigitte) et aux preuves (Alexandre). Ils voient aussi un certain potentiel à l'utilisation de la technologie avec les élèves et les limites qu'ils soulèvent de son utilisation sont plus du côté de la préparation des activités et de la connaissance de l'outil technologique exploité. Ils sont donc prêts à utiliser GeoGebra comme un environnement d'exploration, pouvant introduire de nouveaux concepts, favoriser la formulation de conjectures et susciter un questionnement propice à l'élaboration de preuve.

### **4.3.2 Les sceptiques**

Dans cette catégorie, nous retrouvons Valérie et Sonia. Leur pratique mathématique semble avoir été en confrontation avec la séquence et elles n'ont participé qu'à trois rencontres sur les cinq. En fait, ces étudiantes passaient souvent à côté du but de l'activité, soit parce qu'elles le réinterprétaient, soit parce qu'elles se contentaient de généraliser rapidement à partir d'observations en demeurant à un niveau de preuve pragmatique. C'est ce que l'on peut constater à la figure 42. Ce travail limité de leur part pourrait être lié à leur manque d'intérêt à l'endroit de la séquence, comme si elle était trop loin des praxéologies du secondaire et de ce qui leur paraît raisonnable d'y envisager.

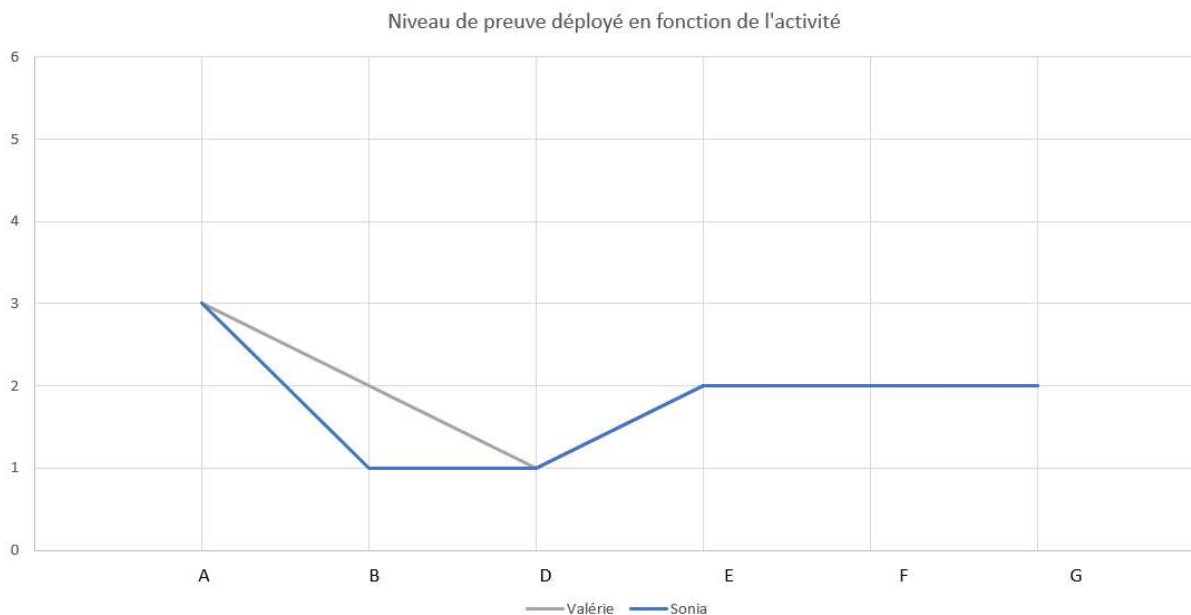


Figure 42. Niveaux de preuve déployés par les *sceptiques* en fonction de l'activité.

Le manque d'engagement de Valérie se reflète aussi dans le caractère laconique de ses productions. En effet, là où les autres étudiants utilisent deux pages pour répondre aux différentes questions d'une activité, elle n'en utilise qu'une pour écrire ses réponses. Celles-ci sont peu élaborées et restent souvent au niveau de l'observation, sans chercher à expliquer ce qu'elle voit. En témoigne sa réponse à la question 3 de l'activité B, où l'on demandait d'expliquer comment on peut s'assurer que l'on est en présence d'un rectangle (voir figure 43) :

#3  
Lors que deux droites quelconque se croisent  
au point milieu du cercle.

Figure 43. Production écrite de Valérie à la question 3 de l'activité B.

Pour sa part, Sonia a été absente lors des deux dernières rencontres, ce qui paraît témoigner d'un manque d'intérêt pour la séquence d'activités. Elle n'a d'ailleurs pas réalisé l'activité G comme les autres étudiants. Pourtant, elle semblait avoir un certain intérêt pour la compréhension, comme pourrait le suggérer la définition des mathématiques qu'elle a donnée en pré-expérimentation :



*« Les mathématiques sont pour moi très utiles dans la vie de tous les jours. Les mathématiques, en partie, permettent de comprendre et de faire l'étude de phénomènes présents dans la vie de tous les jours. » (Sonia)*

Cette définition pourrait laisser voir une ouverture vers un raisonnement applicable au quotidien, mais il n'a pas été possible de voir si une telle ouverture était toujours présente à la suite de la séquence, puisqu'elle n'a pas rempli le questionnaire post-expérimentation.

Dans leurs rétroactions face aux diverses activités, ces deux étudiantes retiennent principalement des idées en lien avec la manipulation permise par le logiciel. Dans son questionnaire post-expérimentation en lien avec l'utilisation de la technologie, Valérie souligne qu'il s'agit d'*« un bon support visuel pour la géométrie »*. Cette idée pourrait rejoindre davantage l'utilisation du raisonnement inductif.

D'ailleurs, Valérie mentionne avoir « un peu » aimé cette séquence, car elle pouvait *« manipuler les figures »*, mais elle ajoute aussi que c'était *« un peu difficile, les concepts étaient loin »*. Si elle attribue à l'oubli des concepts les difficultés qu'elle a vécues, celles-ci se sont manifestées dès l'activité A alors qu'elle révélait ne pas savoir comment expliquer sa réponse à la question 3 pour un quadrilatère non convexe; de telles difficultés pourraient témoigner d'une certaine méfiance à l'égard du raisonnement déductif et d'une structuration faible de ses connaissances. Cela dit, Valérie s'est déclarée quand même prête à utiliser la séquence avec des élèves, mais en s'assurant de *« faire un retour sur les notions avant »*. Elle souligne aussi avoir fait des apprentissages en lien avec le logiciel : *« J'ai beaucoup appris sur GeoGebra. Je ne savais pas l'utiliser avant et je me débrouille très bien maintenant. Où trouver les outils? Comment tracer certaines constructions? »*. Sa réponse aux limites de la technologie témoigne d'une certaine prudence au regard de la fiabilité et laisse suggérer qu'elle n'utiliserait pas les outils technologiques au premier plan dans ses cours, car elle mentionne qu'il faut *« prévoir un plan B (technologie) »*.

Une autre étudiante semble se rattacher à cette catégorie des sceptiques : Ophélie. Tout comme Valérie, Ophélie a « un peu » aimé cette séquence et elle mentionne aussi le caractère estompé de certaines connaissances : *« Matière parfois loin, pas vue depuis secondaire. Beaucoup de questions »*. Elle ajouterait aussi des retours sur la matière tout comme Valérie.

Ophélie soulève aussi comme limites de la technologie des éléments qui seraient plus liés aux limites de la séquence vécue :

*« Certaines constructions sont difficiles à faire pour des élèves du secondaire. [L'utilisation de la technologie] demande la connaissance des constructions préalablement. »* (Ophélie)

En regardant la caractérisation de l'enseignement souhaité et anticipé de Valérie et d'Ophélie, on peut voir que des intérêts ou des capacités en lien avec le raisonnement ont été abandonnés suite à la séquence d'activités au profit d'intérêts qui renvoient davantage au procédural. Néanmoins, Ophélie semble avoir conservé un certain intérêt ou capacité envers le raisonnement, ce qui nous amène à considérer cette étudiante davantage parmi la catégorie des *encadrants*.

En résumé, les sceptiques ont eu de la difficulté avec la séquence, se heurtant à des écueils épistémiques, autant pour accéder à leurs connaissances que pour déployer un raisonnement déductif. La déstabilisation vécue semble les avoir découragés ou désintéressés de la séquence et avoir entraîné leur absence pour quelques-unes des séances. Ils feraient les activités avec les élèves, mais principalement en restant au niveau de la manipulation et de la visualisation et en ne demandant pas de prouver ou d'expliquer les phénomènes observés. Ils soulignent des apprentissages réalisés par rapport au logiciel et peu en lien avec les connaissances. Ils voient des limites à l'utilisation de la technologie qui ne les porteront peut-être pas à les exploiter en classe très souvent. Ils n'utiliseront pas GeoGebra comme un environnement d'exploration de nouveaux concepts et de liens entre ces concepts; ils se limiteront à la visualisation et à une manipulation propice à l'exercice d'un raisonnement inductif.

### **4.3.3 Les encadrants**

Dans cette catégorie, nous retrouvons les étudiantes suivantes : Ophélie, Mylène et Geneviève. Ces étudiantes accordent un rôle accru à l'enseignant en présence des élèves selon les commentaires formulés dans les sections *Rétroaction* des activités. En effet, selon elles, les élèves doivent être encadrés dans les activités soit en précisant des éléments soit en donnant des indications sur la façon de faire certaines manipulations. Geneviève, dans l'activité F ajoute : *« Si l'enseignant le fait, je crois que ce serait plus simple »*. Ainsi, l'enseignant doit prendre une

place plus importante dans les diverses activités : en faisant des manipulations lui-même devant le groupe, en précisant des détails de la construction ou en expliquant la théorie avant.

Ophélie partage cette idée d'encadrement ou d'activité en groupe comme le révèle sa réponse à la section *Rétroaction* de l'activité E :

*« Je crois que cette activité pourrait être trop complexe pour des jeunes du secondaire à cause des notions de lieux géométriques et des propriétés des ellipses et hyperboles que nous devons connaître. Je ferais probablement l'activité en groupe tout en donnant plus de précisions sur la matière utilisée dans l'activité. Exemple : notions sur les hyperboles, ellipses, cercles. ».* (Ophélie)

Ainsi, elle n'est pas totalement contre l'idée de cette séquence, mais souhaite rendre le tout plus simple pour les jeunes du secondaire, en dirigeant davantage les opérations. Elle permet l'exploration des élèves dans les activités, mais envisage de mieux les outiller avant ou approfondir le tout en groupe après. Une autre idée qu'elle apporte en ce sens est donnée dans l'activité A :

*« [...] l'élève devrait avoir son cahier sous la main ou avoir vu les notions requises peu de temps avant l'activité. Cela devrait être fait dans le but de vérifier si l'élève sait bien reconnaître ses quadrilatères et est en mesure de justifier. »* (Ophélie)

Dans l'ensemble, les preuves qu'elle déploie restent principalement au niveau pragmatique quoiqu'on observe, dans certaines activités, une évolution vers les preuves intellectuelles (voir figure 44). Elle est la seule de ce groupe à déclarer n'avoir aimé qu'« un peu » la séquence d'activités.

Dans les premières activités, Mylène éprouvait des difficultés avec les tâches, autant avec les constructions dans GeoGebra, qu'avec les connaissances mathématiques en jeu (ex. relation d'inclusion entre les différents quadrilatères). Elle se cantonnait alors à noter ce qu'elle observait, mais vers les dernières activités, on peut noter une volonté d'expliquer davantage ses observations. Il est possible que cela soit un effet de la séquence, ce qui ne serait pas à négliger. On remarque tout de même qu'elle reste au niveau des preuves pragmatiques tout au long de la séquence; délaissant l'*empirisme naïf* à l'activité F et n'atteignant le niveau Intermédiaire qu'à la dernière activité.

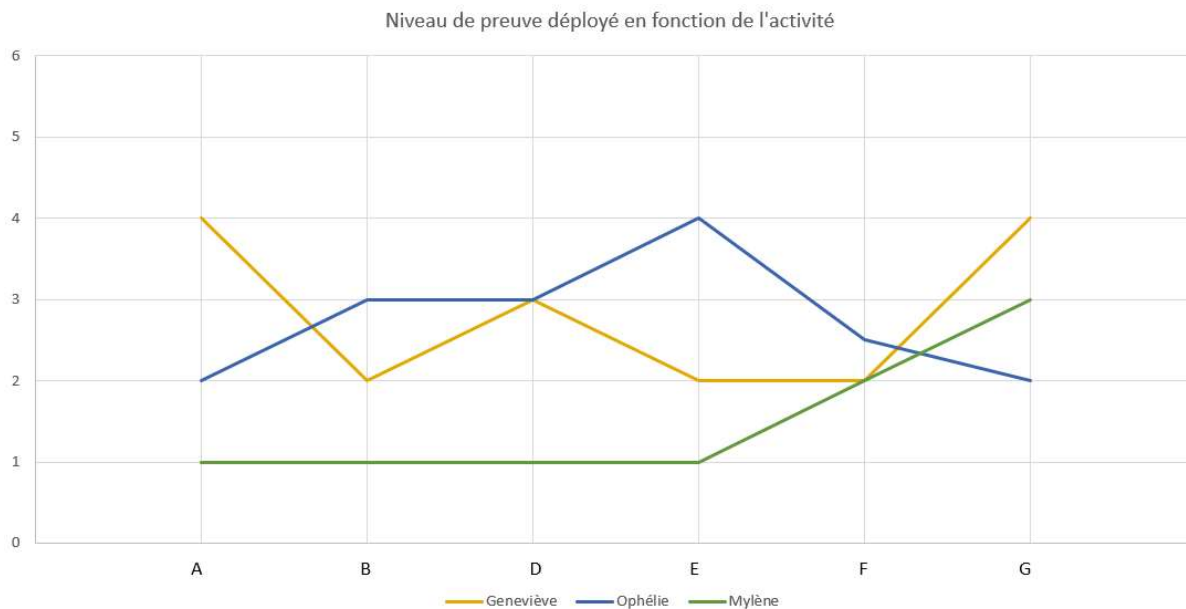


Figure 44. Niveaux de preuve déployés par les *encadrants* en fonction de l'activité.

Dans la caractérisation de leur enseignement souhaité et anticipé, ces étudiantes ont des intérêts autant pour la dimension procédurale que pour le raisonnement. Suite à la séquence, Geneviève recadre quelque peu la caractérisation de son enseignement souhaité, en remplaçant l'idée d'une ouverture sur l'expérimentation par une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie. Si elle s'intéresse donc à l'apprentissage par problèmes, cela ne signifie pas qu'elle renonce à ce que l'enseignant prenne parfois les rênes de l'activité; en témoigne sa rétroaction suite à l'activité F, que nous rapportions précédemment. Ce qu'elle a moins aimé de la séquence est de « *ne pas trop savoir ou on s'en allait, mais* », ajoute-t-elle, « *je comprends que c'était voulu* ». Néanmoins, elle mentionne avoir « *beaucoup aimé* » la séquence en précisant : « *Comme je n'avais jamais utilisé GeoGebra, cela m'a fait connaître un logiciel très intéressant* ». Elle ajoute même à la question 3 ce qu'elle pense de GeoGebra et de ses apports :

« *Très pratique, surtout en géométrie (pour ce que j'en sais). Permet de produire une bonne visualisation aux élèves. Permet de manipuler.* » (Geneviève, question 3, utilisation de GeoGebra)

« *Permet la manipulation chez l'élève. Permet de fournir des images complètes aux élèves. Peut cacher des choses.* » (Geneviève, question 3, apports)

Sa valorisation de la manipulation des élèves et de leur visualisation des notions mathématiques ne semble pas se préoccuper de leur développement de preuves intellectuelles,

qu'elle a pourtant parfois mobilisées. Elle limite aussi le rôle du logiciel à un instrument de manipulation et de visualisation.

Pour sa part, Mylène semble manifester une certaine volonté de laisser expérimenter l'élève, suggérant ainsi des idées communes avec ceux que la séquence a davantage inspirés, mais elle manifeste aussi une volonté de faire encadrer le tout par l'enseignant. Dans sa rétroaction suite à l'activité B, elle mentionne :

*« Dans le but de développer leur esprit critique face aux quadrilatères et leurs particularités, il est important que les élèves puissent faire les constructions et voir les correspondances entre les inclusions et la classification des formes aux mêmes propriétés. »* (Mylène)

Elle souligne par ailleurs, dans les dernières activités, que les constructions sont trop poussées pour des élèves du secondaire. On le constate dans sa rétroaction suite à l'activité E :

*« Cela peut être bien pour illustrer différents types de lieux géométriques. Néanmoins, je crois que cette construction est un peu poussée pour des élèves de niveau secondaire. Malgré le fait qu'elles sont rapides à réaliser, il se passe beaucoup de choses lorsqu'on bouge qu'un seul élément. »* (Mylène)

Elle a tout de même « beaucoup aimé » la séquence. Mylène souligne qu'elle a aimé pouvoir « approfondir [ses] connaissances par rapport à GeoGebra ainsi que toutes ses fonctions ». Elle ajoute aussi, à la question 3 du questionnaire post-expérimentation pour exprimer ce qu'elle pense de l'utilisation du logiciel :

*« J'ai apprécié apprendre davantage sur les constructions géométriques avec GeoGebra. Ça aide beaucoup à visualiser les énoncés et nous aide à faire des preuves convenables. »* (Mylène)

Elle précise plus loin un apport de GeoGebra en mentionnant qu'il « permet la preuve par construction ». Cette affirmation laisse supposer une conception selon laquelle visualiser un phénomène peut être suffisant pour le prouver à un niveau acceptable au secondaire, et cela pourrait expliquer le niveau de preuve pragmatique qu'elle a mobilisé dans la séquence.

En résumé, les *encadrants* vont chercher à encadrer les activités en favorisant la visualisation des élèves en grand groupe et, à l'occasion, encourager la manipulation par les élèves avec le logiciel lorsque l'activité leur semble plus facile à réaliser ou à comprendre. Les apports de l'utilisation de GeoGebra qu'ils mentionnent vont également dans le sens de la visualisation. L'enseignant doit guider, voire même expliquer ce qui se passe lorsque que la

construction est plus complexe. Ils souhaitent donc guider fortement les élèves dans les activités et même assumer seuls l'utilisation de l'outil peut-être parce qu'ils appréhendent la complexité de l'*orchestration instrumentale*. Si ces futurs enseignants paraissent prêts à valoriser le raisonnement inductif chez leurs élèves, l'exercice du raisonnement déductif doit pouvoir se limiter à une application plus ou moins directe de notions bien identifiées en amont. On cantonne donc le logiciel GeoGebra à ne jouer qu'un rôle de soutien lié à l'observation de phénomènes, voire même à la visualisation d'exemples.

## 5 Conclusion

Pour conclure cette thèse, nous présenterons une synthèse des principaux résultats de l'expérimentation. Ensuite, nous discuterons des limites et des critiques de notre recherche qui seront suivies des apports et des perspectives de cette étude. Nous poursuivrons avec quelques améliorations et modifications à notre séquence d'activités. Finalement, nous évoquerons quelques recommandations en lien avec des retombées potentielles qui pourraient être considérés dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, changements que semble suggérer notre recherche. Ces retombées pourraient impliquer des impacts sur la formation des futurs enseignants en mathématiques.

### 5.1 Synthèse des résultats

Rappelons d'abord que l'objectif premier de cette thèse était de développer une séquence d'activités intégrant le logiciel GeoGebra qui puisse enrichir les apprentissages de futurs enseignants, en faisant émerger un besoin de prouver des relations observées dans cet environnement et d'établir des liens entre différents objets ou lieux géométriques. Cet objectif général a été atteint, tout au moins en partie, puisque la séquence développée, tout en contribuant à l'instrumentation des étudiants à l'égard du logiciel GeoGebra, leur a permis de faire des apprentissages au regard de la géométrie et des coniques plus particulièrement, et pour certains d'entre eux, de développer une nouvelle vision du développement du raisonnement au secondaire. On peut d'ailleurs constater que 4 des 6 étudiants ont « beaucoup aimé » la séquence et que tous les étudiants recommanderaient l'emploi de cette séquence avec les étudiants de l'année suivante (question 10 du questionnaire post-expérimentation). Trois étudiants proposeraient des modifications (Brigitte, Valérie et Ophélie) en ajoutant des retours sur les concepts mobilisés dans les activités et Brigitte précise que ces rappels serviraient à « *pouvoir les faire correctement (surtout activité G)* ». On peut donc dire que la séquence a eu un impact positif chez l'ensemble des étudiants. Regardons plus en détail les impacts que l'on a pu relever dans l'analyse tant au plan du raisonnement mobilisé par les étudiants, de l'enseignement qu'ils envisagent avec leurs futurs élèves en utilisant cette séquence que de l'utilisation de la technologie en tant qu'outil pédagogique favorisant le raisonnement mathématique.

### 5.1.1 Raisonnement mobilisé par les étudiants

Malgré certaines difficultés vécues, l'ensemble des étudiants ont fini par rechercher des explications aux phénomènes observés dans les diverses activités même si parfois le niveau de preuve mobilisé ne dépassait pas les preuves pragmatiques. Cela pourrait venir du fait que la pratique en géométrie au secondaire se limite souvent aux preuves pragmatiques dans l'introduction des concepts et que les activités proposées aux élèves, lorsqu'elles ne visent pas le calcul d'une mesure, tendent à privilégier le raisonnement inductif.

Au début de la séquence, l'exploration et la visualisation des constructions était privilégiées par les étudiants. Leurs explications des phénomènes observés se limitaient à un aspect visuel lié principalement à la *genèse figurale* ainsi qu'à un niveau de *preuve pragmatique*. Graduellement, les différents retours faits sur les activités ont permis à certains de pousser plus loin leur réflexion vers les preuves intellectuelles et de chercher à expliquer, par le raisonnement déductif, les figures obtenues par construction. Cette évolution a même conduit un étudiant à demander une rencontre supplémentaire afin de mieux comprendre la dernière activité. Dans ces retours, il y a eu une *institutionnalisation* de trois ordres principaux : un retour sur les éléments techniques moins bien réussis, une révision des concepts mathématiques derrière l'activité ou la construction, ainsi que des éléments de preuve pour valider les conjectures afin d'amener l'idée d'un travail mathématique au niveau de la *genèse discursive*.

L'utilisation d'un réseau déductif semble avoir été difficile pour certains, car l'activité dans laquelle il a été utilisé était passablement complexe. Une discussion aurait pu être réalisée sur la construction avant que les étudiants ne passent au réseau déductif, en amenant notamment à repérer les triangles que l'on avait préalablement colorés dans la construction. Cette difficulté a paru décourager certains étudiants et les a conduits à écarter une telle activité de ce qu'il serait possible de faire au secondaire. Cela nous amène à considérer ce que les étudiants, futurs enseignants, envisagent de favoriser au niveau de la géométrie enseignée au secondaire.

### 5.1.2 Enseignement envisagé par les futurs enseignants

Trois profils d'étudiants se sont dégagés des analyses qualitatives : les *inspirés*, les *sceptiques* et les *encadrants*. Ces trois profils sont caractérisés principalement par les tâches que



les futurs enseignants se voient privilégier avec leurs futurs élèves. Ainsi, les *inspirés* proposent des pistes d'utilisation des activités avec les élèves qui leur laissent manipuler les objets et visualiser les phénomènes, et qui cherchent même à les engager dans une démarche de preuve suite à une exploration dans GeoGebra. Les *sceptiques* reconnaissent que la séquence d'activités peut être intéressante, mais ils ne voient pas l'intérêt de l'utiliser avec les élèves dans une démarche de preuve ou d'explication des phénomènes observés. Ces futurs enseignants sont intéressés par l'exploration, mais s'en tiennent principalement à la praxéologie typiquement en cours dans les écoles secondaires québécoises au regard de la géométrie et des preuves. Pour leur part, les *encadrants* voudraient que la séquence d'activités soit davantage réalisée par l'enseignant comme démonstration devant le groupe, quitte à questionner les élèves au fur et à mesure que la construction est manipulée devant eux. Ces futurs enseignants favorisent l'exploration, mais de façon guidée et ils ont une certaine ouverture vers le raisonnement déductif en autant que l'enseignant y contribue.

Le raisonnement mathématique n'est pas valorisé de la même façon chez les trois profils et varie en fonction de l'ouverture qu'ils ont face à la séquence d'activités. Il s'avère pertinent de mentionner l'impact de cette séquence chez les étudiants.

### **5.1.3 Impact de la séquence chez les étudiants**

La séquence a eu un impact positif chez la plupart des étudiants. Ils ont appris des éléments en lien avec le logiciel, et certains ont aussi appris des éléments plus théoriques en lien avec les coniques, notamment la notion d'excentricité. Si plusieurs ont vécu les difficultés ressenties sur le plan conceptuel comme un défi à surmonter et une occasion d'exercer leur raisonnement et d'approfondir leurs connaissances, certains ont ressenti une frustration qui les a conduits à se replier dans une vision plus étroite des apprentissages au secondaire et de l'utilisation de la technologie à cette fin. Nous souhaitons atténuer un tel frein aux apprentissages en procédant à une *institutionnalisation* des connaissances visées après chacune des activités. Néanmoins, l'heure tardive et le caractère non continu de la séquence n'a pas aidé à la rétention de certaines notions comme on a pu le constater entre les activités E et F. Étant donné que les connaissances mathématiques en jeu dans les activités relevaient de la géométrie enseignée au secondaire, nous n'avons pas jugé pertinent d'en faire la révision. Il serait

intéressant de s'assurer de la maîtrise des connaissances préalables avant de donner la séquence d'activités afin de constater si le travail mathématique se trouverait dirigé davantage vers la *genèse discursive*.

## **5.2 Limites et critiques de la recherche**

Avant de préciser les apports de la présente recherche, il importe de considérer ses limites et d'en faire une certaine critique. Certaines limites peuvent être liées à la séquence d'activités conçue, alors que d'autres limites peuvent être en lien avec les conditions de l'expérimentation. C'est ce qui sera énoncé dans les sections suivantes.

### **5.2.1 Limites et critiques de la séquence**

Une limite de la séquence vient de la présence de constructions déjà réalisées dans certaines activités, pouvant paraître étranges pour certains étudiants. Certaines difficultés avec les fichiers GeoGebra ont été observées dans les activités F et G pour lesquelles les étudiants devaient partir d'une telle construction et effectuer une manipulation sur celle-ci. Le fait de ne pas réaliser toutes les étapes par eux-mêmes a pu transformer quelques constructions en « boîtes noires » pour certains étudiants, et les questions posées ne suffisaient pas à les leur faire ouvrir.

L'activité G en elle-même a constitué un défi majeur, peut-être trop grand. Vu la complexité du réseau déductif, le découragement a pu s'installer laissant ainsi chez certains une idée d'activité trop difficile pour être accessible aux élèves.

L'utilisation du protocole de construction n'est pas non plus pleinement exploitée dans la séquence d'activités. Le fait de demander de faire afficher le protocole et d'expliquer les étapes de celui-ci laisse place à beaucoup de latitude dans les réponses des étudiants. Ils peuvent simplement nommer les éléments construits et répondre ainsi à la demande. Il pourrait être intéressant de reformuler cette question en demandant notamment d'y intégrer les propriétés des objets mathématiques impliqués dans la construction pour mieux conduire à l'explication.

### **5.2.2 Limites et critiques de l'expérimentation**

D'abord, il importe de mentionner que la taille de l'échantillon considéré ne permet pas de donner un poids statistique significatif à l'étude ainsi que la base volontaire de participation

des participants de la recherche. Cette participation se faisait dans le cadre d'un de leur cours de didactique, mais dans un contexte davantage parascolaire. Ainsi, aucune question à l'examen n'était tirée de la séquence d'activités limitant peut-être leur investissement dans la séquence ou le fait de réaliser le tout en cherchant des apprentissages.

De plus, l'heure tardive des séances peut constituer un facteur qui a pu diminuer la motivation de certains dans la poursuite des activités; voire même ne pas se présenter à toutes les séances. Le fait que les séances ne se sont pas déroulées de façon continue, mais aient été espacées de plus d'un mois et demi a pu ralentir les apprentissages de certains et même les démotiver. Ils ont également pu oublier ce qui a été fait auparavant dans les activités, appuyant ainsi l'observation selon laquelle certains étudiants ne se souvenaient plus des définitions des coniques, bien que le tout avait été revu dans l'*institutionnalisation* d'une activité précédente.

Également, le fait qu'une étudiante soit en troisième année et que les autres soient en deuxième année du baccalauréat pourrait avoir influencé certaines de leurs réponses. Bien que nous ayons considéré que les connaissances étaient similaires en lien avec leurs cours de géométrie, il est possible que cela ait pu avoir une influence dans son intérêt ou plutôt son manque d'intérêt pour la séquence. Il aurait pu être intéressant de vérifier les connaissances mathématiques préalables des étudiants dans le questionnaire pré-expérimentation. Ainsi, on aurait pu mieux voir ce dont ils se souvenaient des coniques et décider alors de la nécessité de procéder à un rappel de certains éléments théoriques. Cela aurait pu leur permettre d'approfondir leur travail mathématique, et d'engager un travail plus fécond dans la recherche de preuve ou d'explication en lien avec les propriétés géométriques de la construction.

L'abandon de l'activité C en cours de route a pu également handicaper les étudiants dans la suite des activités. Sur le plan de l'*instrumentation*, ils ont dû attendre à plus tard pour se familiariser avec le protocole de construction, dans un contexte géométrique (celui des coniques) qui représentait une plus grande difficulté. De façon plus fondamentale, c'est surtout du côté de la conceptualisation et de l'*instrumentalisation* que le retrait de cette activité a nui à l'expérimentation; en effet, les étudiants perdaient là l'occasion de réfléchir à la façon de concevoir une *construction robuste* en tirant parti des propriétés et des liens entre les objets géométriques. Les étudiants étaient ainsi placés en situation d'imaginer et de tester des façons

d'obtenir un losange qui résiste aux déplacements. Cette *construction robuste* qu'ils devaient faire dans l'activité leur permettait aussi de s'outiller face au logiciel et à ce type de construction.

Également, on n'a peut-être pas accordé suffisamment d'attention à l'*orchestration instrumentale* dans la séquence. Un recours à l'*élève sherpa* notamment aurait pu aider dans la phase d'*institutionnalisation* à mieux outiller les étudiants pour les activités suivantes et à leur faire apprécier le rôle des interactions sociales dans le développement du raisonnement et de certains apprentissages. Un outil intéressant dans ce sens pourrait être l'utilisation de Virtual Math Teams (VMT). Cet outil permet de combiner l'interface de GeoGebra 6 dans un espace de clavardage. Ainsi, il est possible de voir la réflexion des étudiants au fur et à mesure des échanges qu'ils ont entre eux. Cette réflexion n'a pas pu être constatée lors des activités, car nous n'avons que les productions écrites réalisées par les étudiants ainsi que la discussion au moment de l'*institutionnalisation* de l'activité.

### **5.3 Améliorations et modifications proposées à la séquence**

Cette séquence d'activités a été conçue en se basant sur des éléments tirés de la praxéologie de la géométrie au secondaire. Nous croyons que ces éléments sont toujours pertinents comme concepts centraux de la séquence, mais que quelques améliorations pourraient être apportées aux activités.

Le premier élément à mentionner concerne le réseau déductif. Nous croyons que cet outil constitue un milieu didactique intéressant afin de structurer et de formuler une preuve mathématique. Il constitue même une validation intrinsèque d'une preuve que l'on peut réaliser en lien avec une construction GeoGebra. Par contre, cet élément ne s'est pas avéré pleinement utilisé ou considéré par les étudiants dans la séquence. Malgré le fait que les étudiants avaient vu cette notion dans une activité de leur cours de didactique, il aurait été bénéfique de faire apparaître cet élément plus tôt dans la séquence. Par exemple, un réseau déductif aurait pu être utilisé dans l'activité A afin de faire ressortir l'idée des côtés parallèles du quadrilatère. Il aurait également pu être intéressant d'utiliser un tel réseau pour prouver que l'on est bel et bien en présence d'une ellipse ou d'une hyperbole dans l'activité E. Ainsi, une *institutionnalisation* plus grande de cet outil aurait permis de diminuer l'aspect plus complexe du réseau déductif de l'activité G.

Une autre modification pourrait être en lien avec les concepts demandés dans les différentes activités. En effet, les concepts liés aux quadrilatères ne semblent pas avoir constitué de problème particulier comparativement aux concepts en lien avec les coniques. Il pourrait alors être intéressant de proposer une réactivation des connaissances antérieures des coniques et des lieux géométriques avant de réaliser la séquence. Cela aurait peut-être permis aux étudiants de pousser davantage leurs explications vers la preuve de ces lieux géométriques observés.

Il serait aussi important de mentionner que l'on pourrait porter une attention sur le fait de dégager les invariants dans une construction. Dans certaines des activités de la séquence, il était demandé de faire afficher le protocole de construction et d'expliquer les étapes de celui-ci. L'analyse qualitative a permis de constater que l'explication des étapes n'était pas très élaborée et pourrait être mieux exploitée dans le processus de réflexion permettant d'expliquer le phénomène observé. Ainsi, une attention particulière devrait être accordée afin d'outiller les étudiants à dégager ce qui est constant dans une construction dynamique, les relations entre les différents éléments qui constituent la construction et les invariants qui en découlent. Il s'agit en quelque sorte de les amener à procéder à une modélisation intra-mathématique afin d'expliquer par les propriétés des différents éléments impliqués, les résultats produits par la construction.

La réalisation de cette séquence avec de futurs enseignants nous a servi à mieux comprendre l'impact de la praxéologie de la géométrie du secondaire dans leur parcours scolaire et ce qu'ils envisagent de faire au secondaire. Il nous apparaît donc essentiel de formuler certaines retombées potentielles afin de mieux articuler exploration, formulation de conjectures, validation et preuve dans la géométrie au secondaire.

## **5.4 Apports et perspectives de la recherche**

Comme la présente étude se rattache à la recherche-développement, ses apports et les perspectives qu'elle ouvre renvoient autant au développement d'activités d'apprentissages instrumentées en mathématiques qu'aux connaissances qu'elles permettent de développer.

Un premier apport de notre recherche est sans nul doute la séquence d'activités qui a été conçue. En fait, cette séquence cherchait à établir des liens entre des concepts de géométrie enseignés au secondaire et de permettre le développement du raisonnement, de la preuve en

particulier. Cette séquence est originale dans le cadre de la formation à l'enseignement, et elle peut être aussi utilisée dans des formations avec des enseignants déjà en fonction afin de susciter une réflexion sur la place accordée au raisonnement mathématique dans l'intégration des technologies. Tout en favorisant une appropriation de GeoGebra, sur le plan technique et comme instrument d'exploration et de visualisation permettant de formuler des conjectures, la séquence cherche aussi à faire ressortir la place de la preuve et de la validation dans le domaine de la géométrie.

Quelques idées nous apparaissent essentielles à retenir dans l'élaboration et l'exécution d'une séquence d'activités dans un environnement de géométrie dynamique. Il importe d'abord de varier les types de constructions utilisées dans les activités. Les *constructions robustes* et les *constructions molles* (Soury-Lavergne, 2011) ne nous donnent pas les mêmes informations sur les phénomènes observés, mais permettent toutes les deux de visualiser et d'amorcer un travail sur la preuve.

Également, afin de rendre le travail sur la preuve plus accessible, il faut donner l'occasion aux participants de la recherche d'apprendre à dégager les invariants d'une construction dynamique (surtout si la construction est déjà faite). Ce soutien permet de réfléchir sur la construction et d'engager le processus d'explication des élèves.

La conception d'activités avec un effet de surprise dans la construction tels qu'illustré par l'activité E, constitue une approche intéressante en autant que l'on cherche à y favoriser la recherche d'explication des phénomènes qui peuvent être observés.

Le fait d'exploiter les limites du logiciel pour aider les élèves à expliquer ce qu'ils observent ou comprennent des phénomènes peut être une activité riche sur le plan du raisonnement. L'exemple de l'activité D permet d'appuyer cette affirmation. En questionnant les élèves sur le phénomène observé suite à leur construction, ils peuvent s'engager dans une recherche d'explication, voire même de preuve.

D'autres éléments peuvent être considérés dans la conception d'activités en géométrie dynamique. Le fait de demander aux participants de réaliser une *construction robuste* en écartant certaines fonctions directes du logiciel GeoGebra demeure une option intéressante. La tâche

classique qui demande de construire un carré sans utiliser la fonction du polygone régulier offerte par le logiciel GeoGebra en constitue un exemple.

Sur le plan de la recherche en didactique sur le raisonnement mathématique mobilisé par des élèves ou des enseignants dans un contexte de géométrie dynamique, la possibilité d'exploiter des activités avec GeoGebra dans l'environnement avec VMT nous apparaît une autre idée particulièrement porteuse afin de pallier le manque d'échanges lorsque chaque étudiant travaille sur son écran. En permettant de générer un verbatim des discussions dans l'espace de clavardage, cet outil offre une visualisation immédiate de ce que font les participants, ainsi qu'un suivi de leur processus de raisonnement. Cela peut s'avérer très utile autant pour l'enseignant que pour le chercheur en didactique, les étudiants et les élèves.

## **5.5 Retombées potentielles**

La réalisation de cette séquence d'activités auprès de futurs enseignants en mathématiques a permis de constater l'influence des pratiques de géométrie au secondaire dans leur façon de raisonner géométriquement. Elle conduit ainsi à envisager l'importance de mieux articuler raisonnement inductif et raisonnement déductif en géométrie au secondaire en laissant plus de place à la preuve dans les activités, et ce, dès le premier cycle du secondaire. Nous avons montré qu'une séquence didactique en géométrie qui intègre un outil technologique peut être une façon de sensibiliser les futurs enseignants à la possibilité d'amener progressivement leurs élèves vers une recherche d'explication et de preuve en géométrie. Une telle approche pourrait inspirer d'autres séquences didactiques chez ces futurs enseignants et permettre ainsi à leurs élèves d'apprécier la cohérence des mathématiques et d'éviter l'oubli prématuré de connaissances lorsque celles-ci restent à un niveau superficiel.

De même, cette séquence, avec les améliorations proposées, pourrait servir de modèle dans la formation initiale des enseignants. Elle permet d'illustrer une façon de faire émerger le raisonnement déductif dans un milieu de géométrie dynamique et montre comment articuler, dans une séquence didactique, l'instrumentation avec l'outil, l'enchaînement des concepts, l'établissement de liens entre eux et le développement du raisonnement. En complément, la formation continue constitue une autre avenue d'exploitation de cette approche. Dans ce sens, nous avons élaboré et présenté un atelier au congrès de 2018 du Groupe des responsables de

mathématique au secondaire (GRMS) afin de semer des idées d'utilisation de la technologie en lien avec le processus de preuve ou d'explication que l'on peut chercher à mobiliser chez des élèves du secondaire.



## Bibliographie

- Artigue, M. (2013). L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *EM TEIA| Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(1), 1-14.
- Artigue, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. *Actes du séminaire DGESCO de février 2007*.
- Artigue, M. (2002a). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7(3), 245-274.
- Artigue, M. (2002b). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8(1), 59-72.
- Artigue, M. (1997). Le logiciel « Derive » comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 133-169.
- Artigue, M. (1996) Ingénierie didactique. Dans Brun, J. *Didactique des mathématiques* (p. 243-274). Lausanne, Paris, France : Delachaux et Niestlé.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Bahamon, B. R. (2011). *Démonstration des propriétés métriques sur les coniques avec un outil de géométrie dynamique* (Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal). Repéré à <http://www.archipel.uqam.ca/4629/>

- Balacheff, N. (1998). Éclairage didactique sur les EIAH en mathématiques. *Actes du Colloque annuel de la Société de Didactique des mathématiques du Québec*.
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modeling and Simulation* (Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble; Université Joseph-Fournier, Grenoble). Repéré à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Ball, L. (2003). Emerging Practices for Recording Written Solutions in a CAS Classroom. *Actes du Colloque européen sur l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques*.
- Bergeaut et al. (2016). *Mathématiques-Professeur des écoles-Ecrit/admissibilité-CRPE 2017* (vol. 2). Espagne : Dunod.
- Boileau, A. et M. Garançon. (2009). *Outils informatiques pour les enseignants de mathématiques*. Longueuil, Québec : Loze-Dion éditeur inc.
- Boileau, A., M. Garançon, C. Kieran, J.-B. Lapalme et B. Côté. (1998). Les coniques vues à travers l'informatique : cinq perspectives. *Actes du colloque du GDM 1998*.
- Boivin, C., D. Boivin, A. Ledoux, É. Meyer, F. Pomerleau et V. Roy. (2011). *Visions- 5<sup>e</sup> secondaire-SN-Tome 2. Guide pédagogique*. Montréal, Québec : Les Éditions CEC inc.
- Bongiovanni, V. (2001). *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants : étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fournier). Repéré à <http://www.theses.fr/2001GRE10149>

- Bossez, D. (2013). *Les obstacles rencontrés par les élèves de troisième pour écrire des preuves destinées à valider ou à réfuter une assertion mathématique* (Mémoire de master « Mathématiques et applications », Université Aix-Marseille.) Repéré à [http://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/memoire\\_master2\\_david\\_bossez.pdf](http://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/memoire_master2_david_bossez.pdf)
- Breton, G., C. Delisle, A. Deschênes et A. Ledoux. (1999). *Réflexions mathématiques 536 (tome 2)*. Montréal, Québec : Les Éditions CEC inc.
- Capponi, B. et N. Balacheff. (1989). Tableur et calcul algébrique. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 179-210.
- Caron, F. (2003). Les technologies dans les cours de mathématiques : catalyseur ou poudre aux yeux? *Actes du colloque du GDM de 2003*.
- Caron, F. (2001). *Effets de la formation fondamentale sur les compétences d'étudiants universitaires dans la résolution de problèmes de mathématiques appliquées* (Thèse de doctorat). Accessible par ProQuest Dissertations et Theses. (305457678)
- Caron, F. et René de Cotret, S. (2007). Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective. *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*.
- Charnay, R. et M. Mante. (2013). *Professeur des écoles. Admissibilité. Mathématiques* (vol. 1) Paris, France : Hatier.
- Chevallard, Y. (2003). Didactique et formation des enseignants. Communication aux Journées d'études INRP-GÉDIAPS. Dans B. Davind (éd.), *Impulsions 4* (p. 215-231). Lyon, France.

- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *Actes de l'École d'été de la Rochelle*.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. et G. Cirade. (2010). Chapitre II : Les ressources manquantes. Dans G. Gueudet et L. Trouche, *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 41-55). Rennes, France : Presses universitaires de Rennes.
- Collin, S. et T. Karsenti (2012). Les TIC en éducation : ni panacée, ni supercherie. *Québec français*, 166, 70-71.
- Cornu, B. (1992). L'évolution des mathématiques et de leur enseignement. Dans B. Cornu (ed.), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot* (p. 13–69). Paris, France : Presses Universitaires de France.
- Coutat, S., Laborde, C. et Richard, P.R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 195-221.
- Dahan-Dalmedico, A. et J. Peiffer. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*. Paris, France : Éditions du Seuil.
- Defence, A. (1998). Using Cabri-Géomètre to enhance the learning of conics. *Actes du GDM 1998*.
- DeVilliers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Learning and Teaching Mathematics*, 4, 46-52.

- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(3), 189-209.
- Forster, P. A. (2006). Assessing technology-based approaches for teaching and learning mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(2), 145-164.
- Gousseau-Coutat, S. et Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.
- Guin, D. et L. Trouche (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.
- Haspekian, M. (2005). An « Instrumental approach » to study the integration of a computer tool into mathematics teaching : the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10(2), 109-141.
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* (Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal). Repéré à <https://archipel.uqam.ca/8129/1/D2927.pdf>
- Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. Dans C. Mammana et V. Villani (dir.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> century An ICMI study*. (vol. 5, p. 78-83). Kluwer Academic Publishers.
- Jonin, P. (2006). Apports et limites du tableur – montage et démontage d'une fonction avec Excel. *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, (5), 44-46.

- Karsenti, T. (2002). Défis de l'intégration des TIC dans la formation et le travail enseignant : perspectives et expériences nord-américaines et européennes. *Politiques d'éducation et de formation*, 2(5), 27-42.
- Kieran, C. et Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection : a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 205-263.
- Kieran, C. et J. Guzmàn. (2007). Chapitre 3. Interaction entre calculatrice technique et théorie : émergence de structures numériques chez des élèves de 12 à 15 ans dans un environnement calculatrice. Dans R. Floris et F. Conne (dir.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (1<sup>ère</sup> éd., p. 61-73). Bruxelles, Belgique : Éditions De Boeck Université.
- Kieran, C. et M. Yerushalmy. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. Dans K. Stacey, H. Shick et M. Kendal (dir.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study. New ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Study Series* (vol. 8, p.99-152). Kluwer Academic Publishers.
- Krysinska, M., A. Mercier et M. Schneider. (2007). Chapitre 7. Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions. Dans R. Floris et F. Conne (dir.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (1<sup>ère</sup> éd., p. 135-160). Bruxelles, Belgique : Éditions De Boeck Université.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

- Kuzniak, A. et Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17, 1-24.
- Laborde, C., et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. In *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 151-161.
- Lagrange, J.-B. (2002). Étudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques. Dans D. Guin et L. Trouche (dir.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, (p. 151-185). Grenoble : La pensée sauvage.
- Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Laroche, F. (2003). *Promenades mathématiques : histoire, fondements, applications*. Paris, France : Ellipses Édition Marketing S.A.
- Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3e ed.). Montréal, Québec : Guérin.
- Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Education learning. Dans L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (dir.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p. 695-723). Lawrence Erlbaum Associates.

- Mariotti, M. A. (2001). La preuve en mathématiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 1(4), 437-458.
- Mary, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire* (Thèse de doctorat, Université de Montréal). Repéré à <https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp04/nq51967.pdf>
- Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies : quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, (54), 51-78.
- Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2006). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4<sup>e</sup> à la 6<sup>e</sup> année. Géométrie et sens de l'espace. Fascicule 1. Formes géométriques*. Repéré à [http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE\\_math\\_4-5-6\\_GSE\\_fasc1.pdf](http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_4-5-6_GSE_fasc1.pdf)
- Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ). (1996a). *Programme d'études - Mathématiques 514*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ). (1996b). *Programme d'études - Mathématiques 536*. Québec : Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement Supérieur (MEES). (2016). *Progression des apprentissages*. Repéré à [http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site\\_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA\\_PFEQ\\_mathematique-secondaire\\_2016.pdf](http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-secondaire_2016.pdf)
- Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS). (2009). *Progression des apprentissages*. Repéré à <http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionSecondaire/>
- Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS). (2007). *Programme de formation de l'école québécoise – Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Repéré à



<http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math>

Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise – Enseignement secondaire, premier cycle*. Repéré à <http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/>

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rigaut, J. (2013). *Le passage du dessin à la figure grâce à l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique* (Mémoire de maîtrise, Université d'Artois). Repéré à <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00861877/document>

Rousseau, C. (2008). *Chapitre 1. Les coniques*. Repéré à [http://www.dms.umontreal.ca/~rousseac/chapitre\\_conique.pdf](http://www.dms.umontreal.ca/~rousseac/chapitre_conique.pdf)

Ruthven, K. (2002). Instrumenting mathematical activity : reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 275-291.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *Les nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques*, 27, 1-17. Repéré à <http://revue.sesamath.net/spip.php?article364>

Tanguay, D. (2012). La notion d'angle au début du secondaire (première partie). *Revue Envol*, (158), 33-37.

Tanguay, D. (2006). Comprendre la structure déductive en démonstration. *Revue Envol*, (134), 9-17.

- Tanguay, D. et L. Geeraerts. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, (88), 5-24.
- Trouche, L. (2007). Chapitre 1. Environnements informatisés d'apprentissage : quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques? Dans R. Floris et F. Conne (dir.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (1<sup>ère</sup> éd., p. 19-38). Bruxelles, Belgique : Éditions De Boeck Université.
- Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour*.
- Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*. Document pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Paris VII.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 239-264.
- Vlassis, J. et Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire*. Belgique : Éditions De Boeck.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts : A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.

# Annexe A : Formulaire de consentement



## FORMULAIRE D'INFORMATION ET DE CONSENTEMENT

### « Facteurs influençant la participation volontaire à une séquence d'activités sur GeoGebra »

#### Qui dirige ce projet?

Ce projet est dirigé par Caroline Damboise, étudiante au doctorat à l'Université de Montréal en sciences de l'éducation, option didactique. Ma directrice de recherche est Mme France Caron, professeure au Département de didactique.

#### Décrivez-moi ce projet

Mon projet a pour but de mieux comprendre et outiller les futurs enseignants de mathématiques au regard de l'intégration des outils technologiques comme soutien au développement du raisonnement mathématique, tant avec les élèves que dans leurs apprentissages personnels.

#### Si je participe, qu'est-ce que j'aurai à faire?

Comme tous les étudiants du cours, vous aurez à participer à une séquence d'activités que j'ai élaborée. Cette séquence se déroulera dans le cours de Didactique de la géométrie, sous la supervision de votre professeure, Mme Analia Bergé. Tout au long de la séquence d'activités, vous serez amenés à utiliser le logiciel GeoGebra, ce qui vous permettra de vous l'approprier. Pour chacune des activités, vous aurez un questionnaire à remplir ainsi que des fichiers GeoGebra à remettre. Une rétroaction sera donnée à la suite de chacune des activités par la chercheuse. Vous pourriez aussi être convié à une entrevue individuelle. Lors de cette entrevue, je vous poserais des questions sur les réponses données dans les questionnaires et sur les activités. L'entrevue devrait durer environ 30 minutes et avec votre permission, je l'enregistrerais afin de pouvoir ensuite transcrire fidèlement ce que vous m'aurez dit et d'en utiliser certains extraits s'ils éclairent la recherche. Si vous préférez que je ne vous enregistre pas, je pourrai simplement prendre des notes.

#### Y a-t-il des risques ou des avantages à participer à cette recherche?

Il n'y a aucun risque à répondre aux questions.

En participant à cette recherche, vous ne courez pas de risques particuliers. Vous ne serez pas payé pour votre participation, mais vous aurez l'occasion de partager vos réflexions sur l'intégration des technologies et le développement du raisonnement mathématique. Vous en apprendrez peut-être davantage sur votre propre rapport aux mathématiques. Vous pourrez également participer à un tirage d'un livre ou d'un outil technologique. Il est également entendu que votre participation n'aura aucun effet (ou interférence) sur l'évaluation au cours.

**Que ferez-vous avec mes réponses?**

J'analyserai l'ensemble des réponses que tous les participants m'auront données afin d'essayer de voir les rôles accordés par les futurs enseignants à différentes utilisations de la technologie dans le développement du raisonnement mathématique. Les résultats feront partie de ma thèse de doctorat.

**Est-ce que mes données personnelles seront protégées?**

Oui! Aucune information permettant de vous identifier d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. De plus, les renseignements recueillis seront conservés de manière confidentielle. Les enregistrements et les transcriptions seront gardés dans un bureau fermé et seuls mon directeur de recherche et moi-même en prendrons connaissance. Les enregistrements et toute information permettant de vous identifier seront détruits 7 ans après la fin de mon projet. Je ne conserverai que les réponses transcrites, sans aucune information concernant les personnes qui me les auront données. Les résultats généraux de mon projet pourraient être utilisés dans des publications ou des communications, mais toujours de façon anonyme, c'est-à-dire sans jamais nommer ou identifier les participants.

**Est-ce que je suis obligé de répondre à toutes les questions et d'aller jusqu'au bout?**

Non! Vous pouvez décider de ne pas répondre à une ou plusieurs questions. Vous pouvez aussi à tout moment décider que vous ne voulez plus participer à l'entrevue et que vous abandonnez le projet. Dans ce cas, vous pourrez même me demander de ne pas utiliser vos réponses pour ma recherche et de les détruire. Cependant, une fois que le processus de publication des données sera mis en route, je ne pourrai pas détruire les analyses et les résultats portant sur vos réponses, mais aucune information permettant de vous identifier ne sera publiée.

**À qui puis-je parler si j'ai des questions durant l'étude?**

Pour toute question, vous pouvez communiquer avec moi au numéro suivant xxx-xxx-xxxx ou à l'adresse suivante [caroline.damboise@umontreal.ca](mailto:caroline.damboise@umontreal.ca).

Ce projet a été approuvé par le Comité plurifacultaire en éthique de la recherche de l'Université de Montréal. Pour toute préoccupation sur vos droits ou sur les responsabilités des chercheurs concernant votre participation à ce projet, vous pouvez contacter le conseiller en éthique du Comité plurifacultaire en éthique de la recherche (CPÉR) au [cper@umontreal.ca](mailto:cper@umontreal.ca) ou au 514-343-6111, poste 1896 ou consulter le site: <http://recherche.umontreal.ca/participants>.

Si vous avez des plaintes concernant votre participation à cette recherche, vous pouvez communiquer avec l'ombudsman (c'est un « protecteur des citoyens ») de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone 514-343-2100 ou à l'adresse courriel [ombudsman@umontreal.ca](mailto:ombudsman@umontreal.ca) (l'ombudsman accepte les appels à frais virés).

**Comment puis-je donner mon accord pour participer à l'étude?**

En signant ce formulaire de consentement et en me le remettant. Je vous laisserai une copie du formulaire que vous pourrez conserver afin de vous y référer au besoin.

## CONSENTEMENT

---

### Déclaration du participant

Je comprends que je peux prendre mon temps pour réfléchir avant de donner mon accord ou non à ma participation.

Je peux poser des questions à l'équipe de recherche et exiger des réponses satisfaisantes.

Je comprends qu'en participant à ce projet de recherche, je ne renonce à aucun de mes droits ni ne dégage les chercheurs de leurs responsabilités.

J'ai pris connaissance du présent formulaire d'information et de consentement et j'accepte de participer au projet de recherche.

Je consens à ce que les réponses que je donnerai soient incluses dans la présente recherche de façon anonyme : Oui  Non

Signature du participant : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_

Je consens à ce que l'entrevue soit enregistrée : Oui  Non

Signature du participant : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_

### Engagement de la chercheuse

J'ai expliqué les conditions de participation au projet de recherche au participant. J'ai répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées et je me suis assurée de la compréhension du participant. Je m'engage, avec l'équipe de recherche, à respecter ce qui a été convenu au présent formulaire d'information et de consentement.

Signature de la chercheuse : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_

# Annexe B : Certificat éthique



Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche

N° de certificat  
CPER-15-119-D(2)

## CERTIFICAT D'APPROBATION ÉTHIQUE - 2ième renouvellement -

Le Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche (CPER), selon les procédures en vigueur et en vertu des documents relatifs au suivi qui lui a été fournis conclut qu'il respecte les règles d'éthique énoncées dans la Politique sur la recherche avec des êtres humains de l'Université de Montréal

Projet	
Titre du projet	Utilisation de la géométrie dynamique avec de futurs enseignants de mathématiques au secondaire pour repenser le développement du raisonnement.
Étudiante requérant	Caroline Damboise (p1000040) Candidate au doctorat, Didactique - Faculté des Sciences de l'éducation Université de Montréal
Financement	
Organisme	Non financé
Programme	--
Titre de l'octroi si différent	--
Numéro d'octroi	--
Chercheur principal	--
No de compte	--

### MODALITÉS D'APPLICATION

Tout changement anticipé au protocole de recherche doit être communiqué au CPER qui en évaluera l'impact au chapitre de l'éthique. Toute interruption prématurée du projet ou tout incident grave doit être immédiatement signalé au CPER.

Selon les règles universitaires en vigueur, un suivi annuel est minimalement exigé pour maintenir la validité de la présente approbation éthique, et ce, jusqu'à la fin du projet. Le questionnaire de suivi est disponible sur la page web du CPER.

Raphaëlle Stenne, conseillère en éthique de la recherche  
Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche  
Université de Montréal

<b>7 mars 2018</b> Date de délivrance du renouvellement ou de la réémission*	<b>1er avril 2019</b> Date du prochain suivi
<b>1er décembre 2015</b> Date du certificat initial	<b>1er avril 2019</b> Date de fin de validité

\*Le présent renouvellement est en continuité avec le précédent certificat

adresse postale  
3333 Queen-Mary, bureau 220-3  
cper@umontreal.ca  
www.cper.umontreal.ca

Téléphone : 514-343-6111 poste 1896

# Annexe C : Questionnaires préalable et post-expérimentation

## Questionnaire préalable

1. Voici une liste d'énoncés donnant des caractéristiques possibles en lien avec les mathématiques :

### Liste 1

- A. une suite de puzzles
- B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie
- C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie
- D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe
- E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques
- F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés
- G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur
- H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées
- I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation
- J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant
- K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation
- P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation
- Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)
- R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)

En vous servant d'un maximum de 4 énoncés choisis dans cette liste, comment caractériseriez-vous :

a. Le cours de mathématiques ayant le plus contribué à votre compréhension de cette discipline?

\_\_\_\_\_

b. Le cours de mathématiques qui vous a le moins apporté? \_\_\_\_\_

c. L'ensemble de votre formation pré-universitaire en mathématiques? \_\_\_\_\_

d. Les cours de mathématiques que vous avez suivis à l'Université? \_\_\_\_\_

e. L'enseignement des mathématiques que vous aimeriez pouvoir faire au secondaire?

\_\_\_\_\_

f. L'enseignement des mathématiques auquel vous croyez que vous aboutirez?

\_\_\_\_\_

2. En vous servant d'un maximum de 2 énoncés choisis dans la **Liste 2**, qu'est-ce qui vous apporte le plus de satisfaction en mathématiques? \_\_\_\_\_

**Liste 2**

- A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas
- B. la réutilisation dans d'autres contextes (ou disciplines) de concepts (ou de méthodes) vus en maths
- C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème complexe
- D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement
- E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide d'outils technologiques de phénomènes mathématiques
- F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques
- G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode
- H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre un problème
- I. la découverte d'une preuve élégante

3. Quelle serait votre définition personnelle des mathématiques?

4. Selon vous, que devrait-on viser avec l'enseignement des mathématiques au secondaire?



5. Que pensez-vous de l'utilisation d'outils technologiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques? Quels en semblent les apports, les limites, les risques et les conditions d'utilisation?

<b>Utilisation d'outils technologiques</b>	
<b>Apports</b>	
<b>Limites</b>	
<b>Conditions d'utilisation</b>	

## Questionnaire post-expérimentation

1. Voici une liste d'énoncés donnant des caractéristiques possibles en lien avec les mathématiques :

### Liste 1

- A. une suite de puzzles
- B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie
- C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie
- D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe
- E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques
- F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés
- G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur
- H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées
- I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation
- J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant
- K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation
- P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation
- Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)
- R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)

En vous servant d'un maximum de 4 énoncés choisis dans cette liste, comment caractériseriez-vous :

- a. L'enseignement des mathématiques que vous aimeriez pouvoir faire au secondaire?
- b. L'enseignement des mathématiques auquel vous croyez que vous aboutirez? \_\_\_\_\_

2. En vous servant d'un maximum de 2 énoncés choisis dans la **Liste 2**, qu'est-ce qui vous apporte le plus de satisfaction en mathématiques? \_\_\_\_\_

### Liste 2

- A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas
- B. la réutilisation dans d'autres contextes (ou disciplines) de concepts (ou de méthodes) vus en maths
- C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème complexe
- D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement
- E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide d'outils technologiques de phénomènes mathématiques
- F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques
- G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode
- H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre un problème
- I. la découverte d'une preuve élégante

3. Que pensez-vous maintenant de l'utilisation d'un outil comme GeoGebra pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie? Quels en semblent les apports, les limites, les risques et les conditions d'utilisation?

<b>Utilisation de GeoGebra</b>	
<b>Apports</b>	
<b>Limites</b>	
<b>Conditions d'utilisation</b>	

4. La séquence d'activités ressemble-t-elle à ce que vous faites habituellement en mathématiques?

beaucoup     un peu     pas du tout

Ce qui est pareil	Ce qui est différent

5. Avez-vous aimé vivre cette séquence d'activités?

beaucoup     un peu     pas du tout

Ce que j'ai aimé	Ce que j'ai moins aimé

6. Quelles difficultés avez-vous rencontrées en vivant cette séquence d'activités?

--

7. Quelles stratégies avez-vous utilisées pour mieux progresser dans la séquence?

--

8. Qu'avez-vous appris (ou mieux compris) avec cette séquence d'activités? (Précisez autant que possible.)

--

9. Y a-t-il quelque chose qui reste flou à l'issue de cette séquence d'activités?  oui  non

Si oui, identifiez la zone où vous aimeriez avoir des éclaircissements :

--

10. Recommanderiez-vous d'utiliser à nouveau cette séquence avec des étudiants de l'an prochain?










oui, telle quelle     oui, mais avec modifications     non

Éléments à garder	Modifications proposées

*Merci beaucoup de votre participation!*

## Annexe D : Guide d'instruction sur GeoGebra

Voici un récapitulatif de différents boutons de construction du logiciel GeoGebra ainsi que des commandes disponibles pour chacun :


Nom	Bouton <sup>31</sup>	Description des commandes		
Déplacement		Déplacer	Tourner autour du point	
Point		Point	Point sur objet	Lier/Libérer point
		Intersection	Milieu ou centre	Nombre complexe
Droites et vecteurs		Droite donnée	Segment	Segment de longueur
		Demi-droite	Ligne brisée	Vecteur
		Représentant		
Relations		Perpendiculaire	Parallèle	Médiatrice
		Bissectrice	Tangentes	Polaire ou Diamètre
		Droite d'ajustement	Lieu	
Polygones		Polygone	Polygone régulier	Polygone indéformable
		Polygone semi-déformable		
Cercle		Cercle (centre-point)	Cercle (centre-rayon)	Compas
		Cercle passant par trois points		Demi-cercle
		Arc de cercle (centre-2 points)		Arc de cercle créé par 3 points
		Secteur circulaire (centre-2 points)		Secteur circulaire créé par 3 points
Coniques		Ellipse	Hyperbole	Parabole
		Conique passant par 5 points		
Mesures		Angle	Angle de mesure donnée	Distance ou Longueur
		Aire	Pente	Créer une liste
Transformations		Symétrie axiale	Symétrie centrale	Inversion
		Rotation	Translation	Homothétie

<sup>31</sup>Bouton donné à titre indicatif : ce sont les premiers items des menus qui peuvent varier selon les dernières commandes activées.


**Déplacement :**



Nommer un objet :

Sélectionner l'objet avec la flèche () et cliquer - droit sur la souris. Sélectionner *Afficher l'étiquette*. Il est possible de repositionner la lettre (ou la chaîne de caractères) en la déplaçant.


Activer la trace d'un objet :

Sélectionner l'objet avec la flèche () et cliquer - droit sur la souris. Sélectionner *Activer la trace*.


**Point :**




Tracer un point :

Sélectionner le bouton  et cliquer à l'endroit désiré de la fenêtre géométrique.

Indiquer le point d'intersection de deux objets :

Sélectionner le bouton  et cliquer sur *Intersection*. Cliquer ensuite sur chacun des deux objets désirés. Le point d'intersection de ces objets va ainsi apparaître.


Trouver le milieu d'un segment :

Sélectionner le bouton  et cliquer sur *Milieu ou centre*. Cliquer ensuite sur le segment approprié.


**Droites et vecteurs :**



Tracer un segment :

Créer d'abord ou sélectionner les deux points qui seront les extrémités du segment. Choisir l'option *Segment* avec le bouton  et cliquer sur les deux extrémités. (Il est aussi possible d'utiliser directement l'option sans avoir créé les deux points.)


Tracer une droite :

Indiquer d'abord les deux points par lesquels passera la droite. Relier ces deux points en choisissant l'option *Droite* avec le bouton . (Il est aussi possible d'utiliser directement l'option sans avoir créé les deux points.)

**Relations :**




Construire une médiatrice :

Sélectionner le bouton  et cliquer sur *Médiatrice*. Cliquer ensuite sur le segment ou sur les deux points formant le segment. La droite médiatrice apparaîtra.

**Polygones :**




Tracer un quadrilatère :

Sélectionner le bouton  et l'option *Polygone*. Construire ensuite le quadrilatère en créant ou sélectionnant quatre points et en revenant au point de départ.


**Cercle :**



Tracer un cercle (centre, point) :

Sélectionner le bouton  et l'option *Cercle (centre-point)*. Construire ensuite le cercle en cliquant dans la fenêtre géométrique pour créer ou sélectionner le centre et une deuxième fois pour créer ou sélectionner le point faisant partie du cercle.

Tracer un cercle (centre, rayon) :


Sélectionner le bouton  et l'option *Cercle (centre-rayon)*. Construire ensuite le cercle en cliquant dans la fenêtre géométrique pour créer ou sélectionner le centre et une fenêtre apparaîtra pour vous demander la valeur du rayon. On peut indiquer un nombre ou une variable (si on a déjà créé cette variable).



### **Coniques :**



Afficher l'équation d'une parabole :

Créer d'abord la parabole en utilisant le bouton  et en choisissant son foyer et sa directrice. L'équation de la parabole apparaîtra dans la fenêtre algébrique.

### **Nombres, algèbre, autres :**

Créer un curseur avec des valeurs déterminées :

Dans la barre de saisie, inscrire la variable attribuée au curseur avec  $= 1$ . S'assurer que la puce est activée dans la fenêtre algébrique. Cliquer sur le curseur avec le bouton de droite de la souris et sélectionner *Propriétés*. Il est possible de donner des valeurs minimale et maximale pour le curseur.

Afficher les axes :

Cliquer dans la fenêtre géométrique avec le bouton de droite de la souris. Sélectionner *Axes*.

Afficher les coordonnées cartésiennes d'un point :

Cliquer sur le point avec le bouton de droite de la souris. Sélectionner *Propriétés* et ensuite s'assurer que la case *Afficher l'étiquette* est cochée, puis choisir *Nom & Valeur*.

Afficher le protocole de construction :

Sélectionner *Affichage* dans le menu au-dessus des boutons et Protocole de construction.

## Annexe E : Séquence d'activités

### Activité A (Quadrilatère quelconque)

#### Construction :

Dans GeoGebra, construisez un quadrilatère convexe quelconque ABCD. Trouvez les milieux de chacun des côtés de ce quadrilatère ABCD et notez-les E, F, G et H. Reliez ensuite ces 4 points, faites bouger les points A, B, C, D et notez vos observations.

#### Questions :

1. À quel type de quadrilatère peut-on associer la figure EFGH? Prouvez qu'il s'agit bien de ce quadrilatère en vous basant sur les propriétés géométriques.

*Le quadrilatère obtenu EFGH est un parallélogramme.*

*Les triangles AEH et ABD sont semblables par  $C_pAC_p$  :*

- *E et H étant les milieux respectifs des segments AB et AD, on a des côtés*

$$\text{homologues proportionnels } \left( \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AB}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{m\overline{AH}}{m\overline{AD}} = \frac{1}{2} \right).$$

- *L'angle A étant commun aux deux triangles et compris entre les paires de côtés homologues proportionnels.*

*Comme les deux triangles sont semblables et qu'ils ont l'angle A en commun (même sommet), les autres angles homologues sont donc congrus. Ainsi, l'angle AHE est congru à l'angle ADB et l'angle AEH est congru à l'angle ABD.*

*Ce qui permet de dire que les segments EH et BD sont parallèles puisque l'on a des angles correspondants congrus formés par une sécante et deux droites.*

*D'où le fait que EH et BD sont parallèles.*

*Les triangles CFG et CBD sont semblables par  $C_pAC_p$  :*

- *F et G étant les milieux respectifs des segments CB et CD, on a des côtés*

$$\text{homologues proportionnels } \left( \frac{m\overline{CF}}{m\overline{CB}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{m\overline{CG}}{m\overline{CD}} = \frac{1}{2} \right).$$

- L'angle C étant commun aux deux triangles et compris entre les paires de côtés homologues proportionnels.

Comme les deux triangles sont semblables et qu'ils ont l'angle C en commun (même sommet), les autres angles homologues sont donc congrus. Ainsi, l'angle CFG est congru à l'angle CBD et l'angle CGF est congru à l'angle CDB.

Ce qui permet de dire que les segments FG et BD sont parallèles puisque l'on a des angles correspondants congrus formés par une sécante et deux droites.

D'où le fait que FG et BD sont parallèles.

Par transitivité, on peut conclure que EH et FG sont parallèles, car BD est parallèle à EH et BD est parallèle à FG.

Les triangles DHG et DAC sont semblables par  $C_pAC_p$  :

- G et H étant les milieux respectifs des segments DC et DA, on a des côtés

$$\text{homologues proportionnels } \left( \frac{m\overline{DG}}{m\overline{DC}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{m\overline{DH}}{m\overline{DA}} = \frac{1}{2} \right).$$

- L'angle D étant commun aux deux triangles et compris entre les paires de côtés homologues proportionnels.

Comme les deux triangles sont semblables et qu'ils ont l'angle D en commun (même sommet), les autres angles homologues sont donc congrus. Ainsi, l'angle DHG est congru à l'angle DAC et l'angle DGH est congru à l'angle DCA.

Ce qui permet de dire que les segments GH et AC sont parallèles puisque l'on a des angles correspondants congrus formés par une sécante et deux droites.

D'où le fait que GH et AC sont parallèles.

Les triangles BAC et BEF sont semblables par  $C_pAC_p$  :

- E et F étant les milieux respectifs des segments AB et BC, on a des côtés

$$\text{homologues proportionnels } \left( \frac{m\overline{BE}}{m\overline{AB}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{m\overline{BF}}{m\overline{BC}} = \frac{1}{2} \right).$$

- L'angle B étant commun aux deux triangles et compris entre les paires de côtés homologues proportionnels.

*Comme les deux triangles sont semblables et qu'ils ont l'angle B en commun (même sommet), les autres angles homologues sont donc congrus. Ainsi, l'angle BEF est congru à l'angle BAC et l'angle BFE est congru à l'angle BCA.*

*Ce qui permet de dire que les segments EF et AC sont parallèles puisque l'on a des angles correspondants congrus formés par une sécante et deux droites.*

*D'où le fait que EF et AC sont parallèles.*

*Par transitivité, on peut conclure que GH et EF sont parallèles, car AC est parallèle à GH et AC est parallèle à EF.*

*Ainsi, comme les côtés du quadrilatère EFGH sont parallèles deux à deux, on a donc par définition un parallélogramme.*

*Autres alternatives :*

- *Citer ou utiliser le théorème de Varignon pour justifier le fait que l'on a un parallélogramme.*
- *Citer ou utiliser le théorème de Thalès ou le théorème des milieux.*
- *Utiliser les mesures des côtés ou des angles pour illustrer des caractéristiques du parallélogramme.*

2. Est-ce toujours le cas peu importe le type de quadrilatère convexe ABCD? Si oui, expliquez pourquoi. Si non, précisez le nouveau quadrilatère que vous avez obtenu et expliquez comment et pourquoi vous l'obtenez.

*Oui, c'est toujours le cas. On vient de le prouver en 1 pour le quadrilatère tracé et un quadrilatère quelconque, mais la preuve pour cette figure peut se généraliser. En effet, on aura toujours les cas des triangles semblables qui nous permettront de mentionner que les côtés du quadrilatère EFGH sont parallèles deux à deux (définition du parallélogramme).*

*Autres alternatives :*

- *Citer ou utiliser le théorème de Varignon pour justifier le fait que l'on a un parallélogramme.*
- *Citer ou utiliser le théorème de Thalès ou le théorème des milieux.*
- *Utiliser les mesures des côtés ou des angles pour illustrer des caractéristiques du parallélogramme.*

3. Est-ce toujours le cas si le quadrilatère ABCD devient non convexe? Si oui, expliquez pourquoi. Si non, précisez le nouveau quadrilatère que vous avez obtenu et expliquez comment et pourquoi vous l'obtenez.

*Oui, c'est toujours le cas. On aura toujours les cas des triangles semblables qui nous permettront de mentionner que les côtés du quadrilatère EFGH sont parallèles deux à deux (définition du parallélogramme).*

*Autres alternatives :*

- *Citer ou utiliser le théorème de Varignon pour justifier le fait que l'on a un parallélogramme.*
- *Citer ou utiliser le théorème de Thalès ou le théorème des milieux.*
- *Utiliser les mesures des côtés ou des angles pour illustrer des caractéristiques du parallélogramme.*

Rétroaction sur cette activité :

1- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement des quadrilatères au secondaire?

*Voici quelques exemples de réponses qui pourraient être formulées par les étudiants :*

- *Permet de faire une révision sur les triangles semblables*
- *Permet de travailler sur les propriétés et les définitions de certains quadrilatères (convexe, non convexe, parallélogramme)*
- *Permet de faire ressortir les propriétés de façon dynamique*
- *Permet de créer le besoin de preuve pour expliquer les observations*

2- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Voici quelques exemples de réponses qui pourraient être formulées par les étudiants :*

- *Possiblement en secondaire 4 lorsque l'on traite des triangles semblables*
- *Faire un réseau déductif pourrait être une adaptation lorsque l'on débute les preuves sur les triangles semblables*

## Activité B (Quadrilatères)

### Construction :

Construisez un cercle de centre O passant par un point P quelconque. Tracez deux cordes sécantes dans le cercle qui ne passent ni par O ni par P et que vous nommerez AC et BD. Tracez le quadrilatère ABCD formé par les points d'intersection des cordes avec le cercle.

### Questions :

1. Quelles conditions les deux cordes construites doivent-elles respecter, tout en demeurant sécantes, pour que ABCD soit un carré? Comment pouvez-vous vous assurer qu'il s'agit bien d'un carré? Est-ce la seule façon d'obtenir un carré? Si oui, expliquez votre réponse, si non expliquez comment vous pourriez l'obtenir autrement.

*Lorsque les deux cordes sont perpendiculaires et passent par le centre du cercle, nous obtenons un carré.*

*Les deux cordes représentent les diagonales du quadrilatère tracé. Elles sont congrues et passent par le centre du cercle, car elles sont des diamètres de ce cercle. Donc les diagonales nous indiquent que l'on a un rectangle (même milieu pour les cordes et même longueur).*

*Les deux cordes se croisent ensuite perpendiculairement, donc avec cette autre propriété des diagonales, on peut affirmer qu'il s'agit bien d'un losange. Comme nous avons un losange qui est rectangle, c'est bien un carré qui a été tracé.*

*C'est la seule façon d'obtenir un carré, car les diagonales doivent posséder ces trois propriétés afin de dire qu'il s'agit d'un carré.*

*Il y a aussi une possibilité que les étudiants utilisent les mesures des longueurs des cordes ainsi que les angles formés par les cordes sécantes.*

*Il est aussi possible que les étudiants répondent non, car ils ne réussissent pas à faire un carré selon eux.*

2. Dans quelles conditions obtenez-vous un losange? Comment pouvez-vous vous assurer qu'il s'agit bien d'un losange?

*Afin d'obtenir un losange, nous devons avoir deux diagonales qui se coupent en leur milieu et qui sont perpendiculaires. La seule façon de s'assurer qu'elles se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires est de s'assurer qu'elles partagent le cercle en 4 parties congrues. Ainsi, nous obtiendrons un losange qui est également un carré.*

*Il est aussi possible que les étudiants répondent non, car ils ne réussissent pas à faire un losange selon eux.*

3. Dans quelles conditions obtenez-vous un rectangle? Comment pouvez-vous vous assurer qu'il s'agit bien d'un rectangle?

*Lorsque les deux cordes sont des diamètres du cercle nous obtenons un rectangle. Pour nous assurer qu'il s'agit d'un rectangle, nous devons avoir deux diagonales congrues (représentées ici par les diamètres) ainsi que des diagonales se coupant en leur milieu (représenté ici par le centre du cercle). Ces deux propriétés servent à dire qu'il s'agit d'un rectangle. Il faut aussi noter qu'un carré est aussi un rectangle, mais qu'il a une propriété supplémentaire, soit d'avoir deux diagonales se coupant à 90 degrés.*

*Il est aussi possible que les étudiants répondent non, car ils ne réussissent pas à faire un rectangle selon eux.*

4. Est-il possible de faire un parallélogramme? Si oui, dans quelles conditions? Si non, pourquoi cette construction est impossible?

*Lorsque nous faisons un rectangle, un carré ou un losange, nous faisons également un parallélogramme. Par contre, un parallélogramme quelconque exige seulement que ses diagonales aient le même milieu; cela est impossible à réaliser si on désire que le milieu ne soit pas au centre du cercle. Et à partir du moment où il est au centre, nous avons inmanquablement un rectangle.*

*Il est aussi possible que les étudiants répondent non, car ils ne réussissent pas à faire un parallélogramme selon eux.*

Rétroaction sur cette activité :

1- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement des quadrilatères au secondaire?

*Voici quelques exemples de réponses qui pourraient être formulées par les étudiants :*

- *Les idées à retenir pourraient être en lien avec la classification des quadrilatères ainsi que les différentes propriétés des diagonales des quadrilatères.*
- *L'exploration sur GeoGebra permet d'amener les élèves à prouver des énoncés, à les amener au-delà de la visualisation.*
- *Le fait d'engager une réflexion sur la preuve grâce à cet outil technologique offre un support intéressant au développement de l'exploration et de la preuve chez les élèves du secondaire.*

2- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Voici quelques exemples de réponses qui pourraient être formulées par les étudiants :*

- *L'activité utilisée telle quelle pourrait servir à une discussion sur les propriétés des diagonales nécessaires et/ou suffisantes afin de déterminer le type de quadrilatère que l'on a illustré.*
- *L'activité pourrait être modifiée en illustrant un carré et en demandant aux élèves de dire pourquoi on a bel et bien un carré.*



## Activité C (Quadrilatères)

### Construction à utiliser :

En ouvrant le fichier losange.ggb, vous remarquez la construction incomplète du losange OACB.

### Questions :

1. Explorez cette figure en déplaçant les objets.

a. Que pouvez-vous faire bouger dans cette figure?

*Il est possible de faire bouger les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  dans la figure. Cela fait bouger les rayons  $OA$  et  $OB$  du cercle ou agrandir (diminuer) le cercle.*

b. Qu'est-ce qui demeure invariant (ne change pas)?

*Le fait que les points  $A$  et  $B$  sont des points situés sur le cercle et que le point  $O$  est le centre du cercle.*

c. Faites afficher le protocole de construction et expliquez les étapes de ce dernier.

*On a d'abord tracé un cercle de centre  $O$  et de point quelconque.*

*On a ensuite situé deux points  $A$  et  $B$  sur le cercle.*

*On a tracé les deux rayons  $OA$  et  $OB$ .*

2. Complétez la figure afin de former un losange OACB. Assurez-vous que votre construction conduit invariablement à un losange même lorsque vous déplacez  $A$  et  $B$  et expliquez pourquoi en référant aux différentes propriétés géométriques.

*Voici deux possibilités de construction :*

### **Première façon : Utilisation de la médiatrice**

*On trace le segment reliant  $A$  et  $B$  pour former une diagonale.*

*On trace le milieu de  $AB$  que l'on note  $M$ .*

*On trace la droite passant par  $M$  et  $O$ .*

*On trace un cercle de centre  $M$  et passant par  $O$ .*

*On note  $C$  le point d'intersection de ce cercle et de la droite  $MO$ .*

*Nous avons donc un losange, car les diagonales de ce dernier sont perpendiculaires et se croisent en leur milieu. (Propriétés des diagonales)*

**Deuxième façon : Utilisation de cercles**

*On trace un cercle de centre  $A$  et de rayon  $OA$ .*

*On trace un cercle de centre  $B$  et de rayon  $OB$ .*

*On note  $C$  le point d'intersection des deux cercles obtenus.*

*Les quatre côtés du quadrilatère sont donc congrus, il s'agit d'un losange. (Définition)*

3. Trouvez une seconde façon de compléter la construction du losange en faisant appel à des figures ou à des transformations géométriques complètement différentes, et en expliquant sur quelles propriétés géométriques la construction s'appuie.

*Voir la question précédente*

4. Pouvez-vous compléter la construction du losange en n'utilisant que des cercles? Si oui, expliquez comment; si non, expliquez pourquoi.

• **Oui, de cette façon :**

*On trace un cercle de centre  $A$  et de rayon  $OA$ .*

*On trace un cercle de centre  $B$  et de rayon  $OB$ .*

*On note  $C$  le point d'intersection des deux cercles obtenus.*

*Les quatre côtés du quadrilatère sont donc congrus, il s'agit d'un losange. (Définition)*

- *Certains étudiants peuvent aussi dire que cela est impossible.*

5. Les différentes constructions du losange que vous avez réalisées sont-elles également accessibles pour un élève qui débiterait son étude du losange? Précisez.

*Réponse possible :*

*Oui, si l'élève a une bonne connaissance à la fois des propriétés et de la définition du losange, du cercle ou de la médiatrice, car les constructions traitent de celles-ci. Par contre, si l'élève n'en est qu'au début de son étude du losange, peut-être ne connaît-il pas encore les propriétés de ce dernier. À ce moment, les constructions liées à la définition du losange sont peut-être plus accessibles.*

Rétroaction sur cette activité :

1. Parmi les constructions réalisées ci-dessus, laquelle ou lesquelles utilisent une définition du losange? Laquelle ou lesquelles utilisent des propriétés du losange? Justifier vos affirmations en précisant la définition ou les propriétés qui sont exploitées dans la construction.

*Réponses en fonction des deux méthodes décrites à la question 1 :*

*Médiatrice : propriétés (Diagonales perpendiculaires et se coupant en leur milieu)*

*Cercles : définition (Figure possédant quatre côtés congrus)*

2. Est-ce que toutes les constructions du losange que vous avez réalisées vous semblent équivalentes pour la construction des connaissances chez l'élève?

*Réponses variables selon les méthodes utilisées par les étudiants. Voici un exemple :*

*Les constructions produisent toutes un losange, mais elles n'en utilisent pas toutes les mêmes éléments. Une utilise les propriétés des diagonales et une autre se base sur la définition de cette même figure.*

3. Quelles idées de cette activité reprenez-vous pour l'enseignement des mathématiques au secondaire?

*Réponses possibles :*

- *Il peut être intéressant de faire un travail à la fois sur les propriétés des figures ainsi que sur les définitions. Cela permet d'aider les élèves à faire des liens entre les différents concepts.*
- *Le rôle des technologies dans une construction partielle permet d'engager le travail de l'élève sur les propriétés de la figure pour ensuite voir l'effet ou les effets sur cette dernière.*
- *Le fait de chercher différentes constructions représente un défi et permet de passer d'un travail sur les propriétés à un travail sur les définitions des figures en jeu.*

4. Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire?  
Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Réponse possible :*

*Oui, car le contenu est accessible surtout au niveau de la visualisation. Cependant, les élèves ne seront pas tous en mesure de réfléchir sur les façons de construire un losange. Il faudra peut-être leur donner la construction et leur faire réfléchir sur les éléments qui sont derrière cette construction.*

## Activité D (Médiatrice)

### Construction :

Définissez  $r = 1$  dans la barre de saisie et faites-en un curseur en activant la puce à gauche dans la fenêtre algébrique. Modifiez les propriétés de  $r$  pour que sa valeur soit définie de 0 à 10. Tracez un segment AB. Construisez un cercle de centre A et de rayon  $r$ . Construisez un cercle de centre B et de rayon  $r$ . Au besoin, jouez avec le curseur associé à  $r$  pour que les deux cercles soient sécants. Indiquez les points d'intersection, C et D, des deux cercles. Activez la trace pour chacun des points d'intersection.

### Questions :

1. En faisant varier le paramètre  $r$ , qu'observez-vous? Quel est le lieu géométrique des points C et D?

*On observe la formation d'une droite passant par les points C et D.*

*Le lieu géométrique est une droite perpendiculaire au segment AB. Tous les points de cette droite sont à la même distance du centre A et du centre B, car chacun des points de cette droite est distant de  $r$  par rapport à chacun des centres A et B. Ainsi, on peut dire que cette droite est la médiatrice du segment AB.*

2. Pourquoi est-ce ainsi? Sur quelle(s) propriété(s) cette construction repose-t-elle?

*Le fait que tous les points de la droite sont à égale distance du point A et du point B, soit la distance définie par la valeur du paramètre  $r$  qui constitue le rayon du cercle de centre A et du cercle de centre B. Il s'agit en fait du théorème réciproque de la médiatrice et de la propriété caractéristique de ce lieu (Si tous les points d'une droite sont à égale distance des extrémités d'un segment, alors cette droite est la médiatrice de ce segment.).*

3. À partir des éléments soulevés dans les questions précédentes, pourriez-vous envisager une nouvelle définition de l'objet identifié à la question 1?

*La médiatrice d'un segment représente le lieu des points qui sont à égale distance des extrémités de ce segment (définition moins utilisée de la médiatrice).*

*Elle représente également une droite perpendiculaire à ce segment et passant par le milieu de ce segment (définition plus courante de la médiatrice).*

4. Pourquoi lorsque le diamètre des deux cercles diminue, on peut constater que le lieu géométrique comporte des espaces vides? En jouant avec les propriétés du curseur, essayez de combler ces espaces.

*Cela vient du fait que l'on a défini l'espace entre les valeurs prises par  $r$  à  $0,1$ . Ainsi, on n'arrive pas à créer tous les rayons possibles pour des deux cercles et cela provoque donc des espaces vides. En modifiant les valeurs prises par  $r$  à  $0,01$ , on comblera ainsi certains espaces vides. Néanmoins, il y a toujours une limite à ce que le logiciel peut nous permettre de donner comme valeurs à  $r$ .*

5. Désactivez les traces des points C et D et construisez le lieu géométrique de  $C^{32}$ . Que constatez-vous? Est-ce conforme aux observations en 1?

*Une demi-droite est tracée à partir de C jusqu'au milieu du segment AB. Cela semble aller dans le même sens que les observations faites en 1, sauf que l'on n'a pas la portion de la demi-droite passant par D. Il faudrait donc construire ce lieu géométrique également afin d'obtenir une droite complète.*

Rétroaction sur cette activité :

- 1- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement au secondaire?

*Réponses possibles :*

- *Le fait qu'un lieu géométrique puisse aussi être représenté par une droite.*
- *L'idée de la médiatrice et le lien avec la construction faite au compas.*
- *Théorème réciproque, propriétés caractéristiques et définitions de la médiatrice*

- 2- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Réponses possibles :*

---

<sup>32</sup> Sélectionnez le bouton *Lieu* (quatrième bouton). Cliquez sur C et ensuite sur  $r$ .

*- Elle pourrait être utilisée lors de l'introduction des lieux géométriques.*

*- On pourrait s'en servir lorsqu'on définit la médiatrice.*

*But : envisager une autre définition de la médiatrice (idée du théorème réciproque) qui distingue une simple propriété d'une propriété caractéristique : lieu géométrique de tous les points qui sont à la même distance des extrémités d'un segment.*

## Activité E (Les coniques)<sup>33</sup>

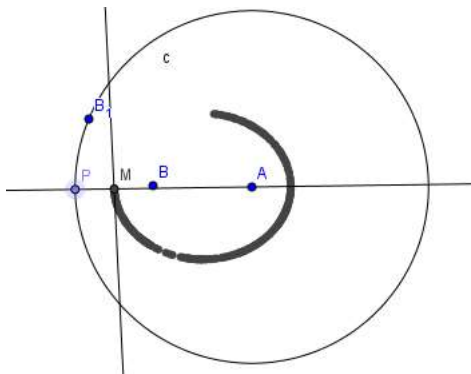
### Construction :

Construisez un cercle de centre A en utilisant la fonction cercle (centre, point). Tracez un point P sur le cercle (autre que celui ayant servi à faire le cercle). Tracez la droite PA. Inscrivez un point B à l'intérieur de la région du plan délimitée par le cercle. Construisez la droite  $d$  qui est la médiatrice de PB. Nommez M le point d'intersection de  $d$  et de PA.

### Questions :

1. Faites afficher la trace de M lorsque vous déplacez P sur le cercle. Quel est *le lieu géométrique* ainsi formé? En utilisant les propriétés géométriques des lieux ainsi que votre construction, prouvez qu'il s'agit bien de *ce lieu géométrique*.

*Le lieu géométrique formé par la trace de M semble être une ellipse.*



*Lorsque l'on déplace le point P, les segments PM et MB auront toujours la même longueur, car M est un point situé sur la médiatrice de PB. Ainsi, de par la définition de la médiatrice, on peut dire que PM et MB sont des segments congrus.*

*Également, le rayon PA aura toujours la même valeur puisque le point P ne fait que se déplacer tout le tour du cercle. Cette valeur est donc une constante puisqu'il s'agit du rayon du cercle.*

*On peut dire que  $PM + MA = PA$  (rayon du cercle).*

*Comme  $PM = MB$ , on obtient que  $MB + MA = PA$ .*

---

<sup>33</sup> Adaptation d'une activité de Garançon (dans Boileau et al., 1998, p. 51-52).



*Ce qui nous ramène donc à la définition d'une ellipse comme étant l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes, nommés foyers, est une constante. Dans notre figure, le point M est un point de l'ellipse et les points B et A sont les foyers. Ainsi, la somme des distances MB et MA est égale à une constante, soit le rayon du cercle.*

*Il est possible que les étudiants ne nomment que le lieu géométrique sans expliquer que l'on a  $MB + MA = PA$ .*

2. Désactivez maintenant la trace du point M et faites apparaître le lieu en précisant que M dépend de P. Que se passe-t-il lorsque le point B se déplace? Dans quelles conditions peut-on obtenir différents types de lieux géométriques? Expliquez pourquoi chacun de ces ensembles de conditions conduit bien au lieu géométrique observé.

*Lorsque l'on déplace le point B, on constate l'apparition de différents lieux géométriques.*

- *Lorsque le point B reste à l'intérieur du cercle, le lieu géométrique est une ellipse, comme on l'a démontré à la question 1.*
- *Lorsque le point B coïncide avec le centre A du cercle, le lieu géométrique est un cercle. Comme B coïncide avec A, on a que  $MA = MB$ , donc que tous les points de notre lieu géométrique sont à égale distance du centre du cercle. Également, on peut envisager le cercle comme un cas particulier de l'ellipse avec deux foyers communs : on a donc que  $MB + MA = PA$ , d'où que  $2 MA = PA$ ,  $MA = PA/2 = MB$ . On a donc une distance constante qui représente le rayon du cercle qui est la conique obtenue dans ce cas.*



3. Parmi les lieux géométriques identifiés au numéro 2, est-ce qu'il y en a un qui peut être envisagé comme un cas particulier d'un autre lieu géométrique? Précisez lequel s'il y a lieu; expliquez en quoi cette constatation peut conduire à réorganiser ou enrichir certaines connaissances que vous avez sur les lieux géométriques?

*Le cercle peut être considéré comme un cas particulier d'une ellipse avec les deux foyers qui coïncident l'un sur l'autre. Ainsi, on obtient une certaine union de ces deux coniques par une seule définition.*

*Il est possible que les étudiants n'identifient pas ce lieu géométrique.*

Rétroaction sur cette activité :

- 1- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement au secondaire?

*Réponses possibles :*

- *La visualisation permise par le logiciel semble intéressante pour voir que les différents lieux géométriques peuvent se bâtir avec une seule construction dynamique.*
- *L'idée de prouver chacun des lieux géométriques en se basant sur leur définition peut être intéressante.*

- 2- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Réponses possibles :*

- *La réflexion sur les différents lieux géométriques ne peut pas se faire au secondaire, car elle exige trop de travail chez les élèves.*
- *L'activité proposée est intéressante, car une seule construction permet de voir trois lieux géométriques et on peut travailler sur les définitions. On laisse les élèves explorer l'activité de façon dirigée et on observe ce qu'ils vont découvrir.*

## Activité F (Parabole)

### Construction à utiliser :

En ouvrant le fichier parabole.ggb, vous remarquez une construction d'un lieu géométrique représenté par une parabole. Répondez aux questions suivantes :

### Questions :

1. Explorez cette figure en déplaçant les objets.

a. Que pouvez-vous faire bouger dans cette figure?

*Les points A, B, C et D peuvent se déplacer dans la figure. Les points A, B et D se déplacent seulement sur la droite.*

b. Qu'est-ce qui demeure invariant?

*Le point E ne peut pas bouger. Il y a toujours une parabole qui demeure tracée même si on déplace les points A, B, C et D.*

c. Faites afficher le protocole de construction et expliquez les étapes de celui-ci.

*On a d'abord défini les points A et B et ensuite, une droite passant par ces points. Le but de cette droite est de représenter la directrice de la parabole.*

*Après, on a défini un point C quelconque pour représenter le foyer de la parabole, puis un point D passant sur la droite entre A et B.*

*On a tracé la perpendiculaire à la droite AB passant par le point D puisqu'on sait que le projeté orthogonal d'un point de la parabole se situe sur la droite directrice.*

*On a tracé la médiatrice de DC, puis on a défini le point de rencontre de la médiatrice et de la perpendiculaire à AB, noté par le point E. Le but de ces dernières étapes est d'obtenir les points qui sont à égale distance du point C (foyer) et de la droite passant par D (directrice).*

*On a ensuite tracé le lieu de E selon D selon la définition d'une parabole.*

*Il est possible que les étudiants ne fassent que nommer les différentes étapes sans les expliquer : définir les points A et B, construire une droite passant par A et B, etc.*

2. Expliquez pourquoi le lieu géométrique ainsi défini est bel et bien une parabole.

*Comme la droite passant par E (droite en rouge) se trouve à être la médiatrice de DC, cela implique que tous les points de cette droite sont à égale distance des points D et C. D'où le fait que  $DE = EC$ . Ainsi, l'ensemble des points de la parabole se trouvent à être à égale distance d'un point fixe (C, nommé foyer) et d'une droite passant par D (nommée directrice). Il est possible que les étudiants n'utilisent pas les notions de foyer et de directrice pour expliquer que le lieu géométrique est une parabole. Ils peuvent également ne pas expliquer le tout.*

3. Faites afficher les axes, les coordonnées du foyer<sup>34</sup> et l'équation de la parabole<sup>35</sup>. Que remarquez-vous lorsque vous déplacez les points A et B afin d'avoir une droite verticale? une droite horizontale? une droite oblique? Dans quels deux cas l'équation est-elle la plus simple?

*Lorsque la droite AB est verticale, nous avons la formation d'une parabole dont l'axe de symétrie est horizontal. L'équation de la parabole qui est affichée contient des termes en  $y^2$ , en  $x$  et en  $y$ .*

*Lorsque la droite AB est horizontale, l'axe de symétrie de la parabole est vertical. L'équation obtenue correspond à celle d'une fonction quadratique. En effet, l'équation de la parabole obtenue contient seulement des termes en  $x^2$ , en  $x$  et en  $y$ .*

*Lorsque la droite est oblique, nous avons une équation comportant des termes en  $xy$ , en  $x^2$ , en  $y^2$ , en  $x$  et en  $y$ . De plus, la visualisation de la parabole ainsi obtenue nous montre qu'il ne s'agit pas d'une fonction.*

*L'équation de la parabole est la plus simple lorsque la droite est soit verticale, soit horizontale.*

*Les étudiants peuvent oublier de traiter des deux possibilités ou ne pas répondre à la question.*

---

<sup>34</sup> Cliquez sur le point avec le bouton de droite, *propriétés*, sélectionnez *afficher l'étiquette*, choisissez *nom et valeur*.

<sup>35</sup> Tracez la parabole en identifiant le foyer et la directrice. L'équation s'affichera dans la fenêtre algébrique.

Rétroaction sur cette activité :

1- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement au secondaire? Que vous suggèrent-elles comme activités qu'il est possible de faire avec les élèves?

*Réponses possibles :*

- *La définition de la parabole est bien illustrée.*
- *On peut faire un lien avec l'équation de la parabole et sa représentation graphique.*
- *L'utilisation des coordonnées des foyers et de l'équation de la droite directrice peuvent être intéressantes d'un point de vue algébrique dans l'apprentissage de la parabole.*

2- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Réponses possibles :*

- *Il peut être intéressant de travailler avec les élèves sur la définition de la parabole. Cependant, cette définition est vue de façon rapide par manque de temps.*
- *Se servir du fichier pour leur faire voir les liens entre les modifications des déplacements du foyer et de la directrice sur l'équation de la parabole.*
- *Visualiser le fait que l'on n'a pas toujours une fonction au niveau des diverses représentations obtenues par GeoGebra.*

## Activité G (Excentricité des coniques)

Dans le guide pédagogique du manuel Visions, une note didactique mentionne à l'enseignant d'« inviter les élèves à comparer les définitions monofocales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole ». <sup>36</sup> L'activité suivante se base sur ces définitions que vous aurez l'occasion de démontrer.

### Construction à utiliser :

En ouvrant le fichier *excentricite.ggb*, vous remarquez une construction de *lieux géométriques*. Répondez aux questions suivantes :

### Questions :

1. Explorez cette figure en déplaçant le point G.

a. Qu'est-ce qui bouge dans cette figure?

*Le point G se déplace sur le cercle de centre F'.*

*Les droites a, b, f, g et h bougent.*

b. Trouvez, dans le protocole de construction, les étapes permettant d'assurer la validité des hypothèses 1, 3, 5 et 6 indépendamment de la position du point G.

*Hypothèse 1 : Numéros 7 et 8 du protocole de construction*

*Hypothèse 3 : Numéros 3, 4 et 5 du protocole de construction; comme la droite d est la droite d'équation  $x = -0.89$  et que les points N, F et F' sont sur l'axe des x, on a deux droites perpendiculaires*

*Hypothèse 5 : Numéro 13 du protocole de construction*

*Hypothèse 6 : Numéro 16 du protocole de construction*

---

<sup>36</sup> Boivin, C., D. Boivin, A. Ledoux, É. Meyer, F. Pomerleau et V. Roy. (2011). *Visions- 5<sup>e</sup> secondaire-SN-Tome 2. Guide pédagogique*. Montréal, Québec, Les Éditions CEC inc., p. 75.

2. En déplaçant le curseur  $e$ , quels sont les *lieux géométriques* qui sont formés et dans quelles conditions chacun est-il formé?

*Lorsque  $e = 0$ , on a aucun lieu géométrique qui semble être tracé. On voit seulement un point.*

*Lorsque  $e$  est compris entre 0 et 1, on voit apparaître une ellipse.*

*Lorsque  $e = 1$ , on voit une parabole.*

*Lorsque  $e$  est plus grand que 1, il s'agit d'une hyperbole.*

3. À l'aide du curseur, donnez la valeur de 1 à  $e$ . Quel est le *lieu géométrique* ainsi formé? Repérez les longueurs de [FM] et [HM] dans la fenêtre algébrique (ou simplement en faire afficher les mesures). Que se passe-t-il avec ces deux valeurs si on déplace le point G? Est-il possible de lier ces valeurs par une expression algébrique?

*Le lieu géométrique est une parabole.*

*Les deux longueurs des segments se modifient, mais les segments demeurent toujours congrus.*

*Oui, l'expression est  $m [FM] = m [HM]$  ou  $m [HM] / m [FM] = 1$ .*

*Il est possible aussi que les étudiants donnent les valeurs numériques de chacun des segments et disent simplement que ce sont les mêmes valeurs.*

4. À l'aide du curseur, donnez la valeur de 0,6 à  $e$ . Quel est le *lieu géométrique* ainsi formé? Que se passe-t-il avec les longueurs de [FM] et [HM] si on déplace le point G? Est-il possible de les lier par une expression algébrique?

*Le lieu géométrique est une ellipse.*

*Les deux longueurs des segments ont des valeurs différentes. Par contre, lorsqu'on divise la mesure de [HM] par la mesure de [FM], on obtient une valeur très près de 0,6 (valeur attribuée au départ à  $e$ ).*

*Oui, l'expression est  $m [HM] / m [FM] = 0,6 = e$ .*

*Il est possible aussi que les étudiants donnent les valeurs numériques de chacun des segments et disent simplement que ce sont des valeurs différentes ou qu'elles ne sont pas égales ou encore que [HM] est plus petit que [FM] :  $m [HM] \neq m [FM]$  ou  $m [HM] < m [FM]$ .*



5. À l'aide du curseur, donnez la valeur de  $1,5$  à  $e$ . Quel est le *lieu géométrique* ainsi formé? Que se passe-t-il avec les longueurs de  $[FM]$  et  $[HM]$  si on déplace le point  $G$ ? Est-il possible de les lier par une expression algébrique?

*Le lieu géométrique est une hyperbole.*

*Les deux longueurs des segments ont des valeurs différentes. Par contre, lorsqu'on divise la mesure de  $[HM]$  par la mesure de  $[FM]$ , on obtient une valeur très près de  $1,5$  (valeur attribuée au départ à  $e$ ).*

*Oui, l'expression est  $m [HM] / m [FM] = 1,5 = e$ .*

*Il est possible aussi que les étudiants donnent les valeurs numériques de chacun des segments et disent simplement que ce sont des valeurs différentes ou qu'elles ne sont pas égales ou encore que  $[HM]$  est plus grand que  $[FM]$  :  $m [HM] \neq m [FM]$  ou  $m [HM] > m [FM]$ .*

6. En vous servant de vos observations aux questions 3, 4 et 5, comment pouvez-vous lier les valeurs de  $[FM]$ ,  $[HM]$  et  $e$ ? Que pouvez-vous dire concernant le point  $F$  et la droite  $d$ ?

$$m [HM] / m [FM] = e$$

*Le point  $F$  semble être un des foyers de la conique et la droite  $d$  semble être la directrice.*

*Il est possible que les étudiants ne fassent pas ce lien.*

7. On appelle « excentricité » cette valeur  $e$ . Pouvez-vous à présent, en n'utilisant que des mots, élaborer les définitions monofocales de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole?

*Une ellipse se définit par l'ensemble des points dont le rapport de la distance à une droite directrice et de la distance à un foyer est constant et a une valeur comprise entre  $0$  et  $1$ .*

*Une hyperbole se définit par l'ensemble des points dont le rapport de la distance à une droite directrice et de la distance à un foyer est constant et a une valeur plus grande que  $1$ .*

*Une parabole se définit par l'ensemble des points étant à égale distance d'un point fixe nommé foyer et d'une droite directrice.*

*Il est possible que les étudiants n'élaborent pas les définitions demandées.*

La suite de cette activité vous aidera à comprendre cette construction qui permet d'unifier différents lieux géométriques.

8. Faites afficher le protocole de construction. L'image  $F'$  du point  $F$  a été construite par une homothétie de centre  $N$  et de rapport  $k$ . En regardant la figure et le protocole de construction qui l'a générée, trouvez la valeur de  $e$  en fonction de ce rapport d'homothétie.

$$m NF' / m NF = k = 1 / (1 + e)$$

$$\frac{1}{1+e} = \frac{\overline{NF'}}{\overline{NF}}$$

$$1+e = \frac{\overline{NF}}{\overline{NF'}}$$

$$e = \frac{\overline{NF} - \overline{NF'}}{\overline{NF'}}$$

$$e = \frac{\overline{FF'}}{\overline{NF'}} = \frac{s_2}{s_1}$$

*Il est possible que les étudiants n'arrivent pas à trouver le rapport ou qu'ils donnent un rapport soit erroné ou avec les valeurs de  $i$  et de  $j$ .*

9. Par rapport à la droite  $d$  et au point  $F$ , décrivez, dans vos mots, à quoi correspondent les valeurs  $i$  et  $j$ ?

*La valeur  $i$  correspond à la distance d'un point de la conique à la droite  $d$  (directrice).*

*La valeur de  $j$  correspond à la distance d'un point de la conique au point  $F$  (foyer de la conique).*

*Il est possible que les étudiants ne puissent pas faire la correspondance.*

10. Voici un réseau déductif à compléter qui servira à montrer que  $e = j/i$ . Ce réseau déductif est à la page suivante. On fera cette démonstration en se servant des triangles semblables ainsi que du rapport d'homothétie défini au numéro 8. Faire les flèches nécessaires à partir des hypothèses de construction (rectangles en gras). Voici une liste de justifications qui vous sera utile pour compléter le réseau déductif et en insérer le numéro dans les triangles prévus à cet effet.

1- Transitivité de l'égalité : si  $x = y$  et  $y = z$ , alors  $x = z$ .

2- Critère de similitude AA : deux triangles qui ont deux angles homologues congrus sont semblables.

3- Critère de similitude CAC : deux triangles qui ont un angle homologue congru compris entre deux côtés homologues proportionnels sont semblables.

4- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors les deux premières droites sont parallèles entre elles.

5- Par substitution d'éléments équivalents.

6- Un cercle est l'ensemble des points situés à la même distance du centre.

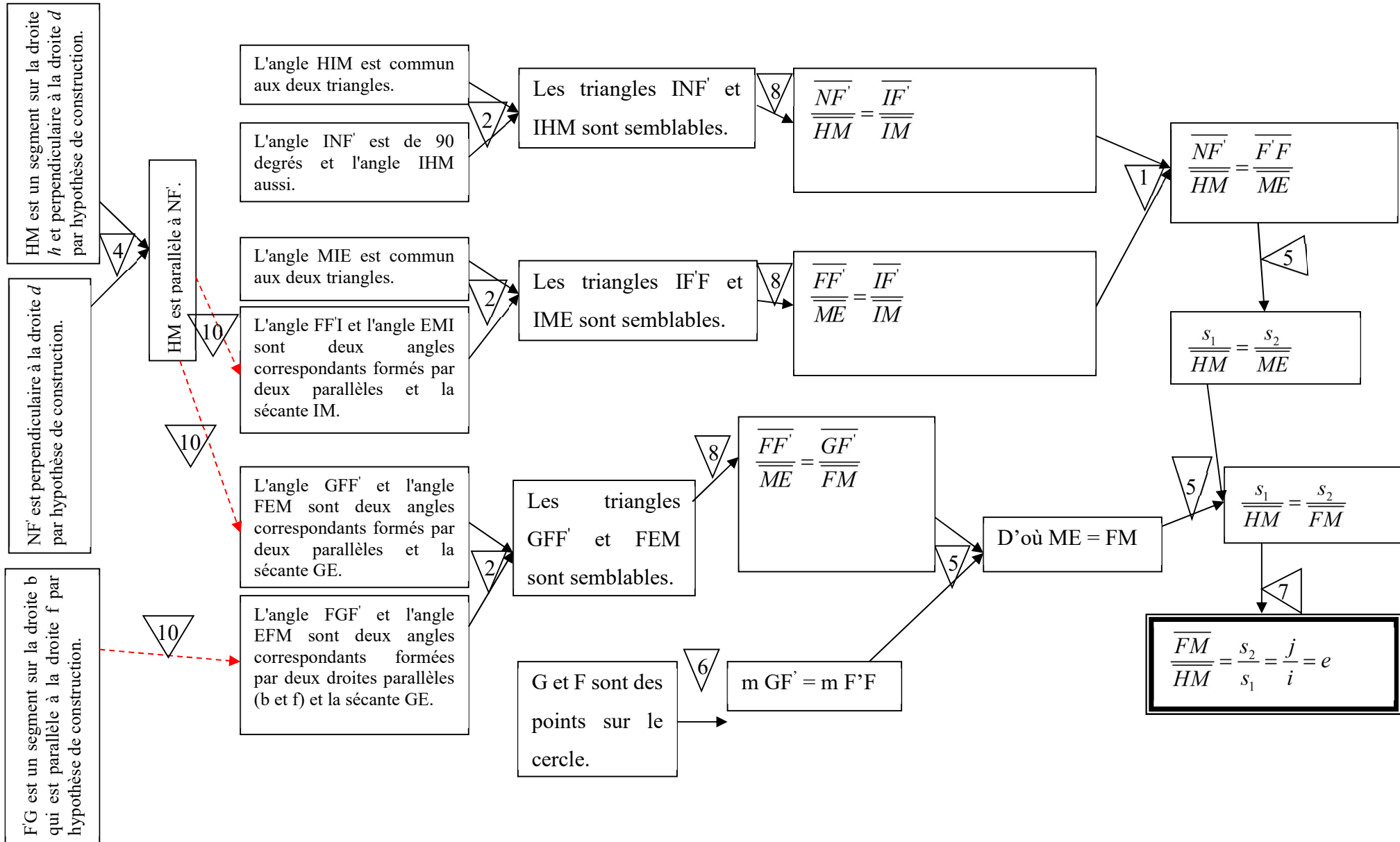
7- Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

8- Dans des triangles semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

9- Par hypothèse.

10- Justification personnelle : précision *Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont congrus.*

**Réseau déductif (version du corrigé)**



11. À l'aide du réseau déductif que vous venez de compléter ainsi que des réponses aux questions précédentes, pouvez-vous élaborer, algébriquement, les définitions monofocales des différents lieux géométriques?

*La définition monofocale permet d'unifier les définitions des lieux géométriques en utilisant le même foyer et la même droite directrice. Ainsi, on obtient les différents lieux géométriques selon le rapport de la distance entre un point du lieu (M) à sa projection orthogonale sur la droite directrice (H) ainsi que la distance d'un point du lieu (M) et le foyer (F) :*

- l'ellipse lorsque  $0 < \frac{m \overline{HM}}{m \overline{FM}} < 1$

- l'hyperbole lorsque  $\frac{m \overline{HM}}{m \overline{FM}} > 1$

- la parabole lorsque  $\frac{m \overline{HM}}{m \overline{FM}} = 1$

*Il est possible que les étudiants n'élaborent pas ces rapports.*

12. En comparant avec ce que l'on utilise au secondaire comme définitions, quels intérêts voyez-vous pour la définition monofocale?

*Exemple de réponse :*

*Habituellement, on enseigne la définition d'une ellipse et d'une hyperbole en fonction, respectivement, de la somme ou de la différence de la distance entre deux points fixes nommés foyers. Dans cette définition, il n'est pas question de la droite directrice, mais elle utilise les deux foyers de ces coniques. Pour sa part, la parabole est définie selon le fait que la distance d'un point de la conique au foyer est la même que de ce point à sa projection orthogonale sur la droite directrice. Ainsi, il peut s'avérer intéressant d'utiliser la définition monofocale qui se base sur des rapports de distance et utilise les notions de foyer et de droite directrice. On a donc une même définition pour les trois coniques qui utilise un seul foyer et une droite directrice.*

Rétroaction sur cette activité :

1- D'après vous, est-il possible d'atteindre l'objectif stipulé dans le guide pédagogique du manuel Visions avec des élèves du secondaire?

*Réponses possibles :*

*Oui, si on fait une activité telle que proposée dans ce contexte et que l'on utilise un réseau déductif troué.*

*Peut-être, mais le réseau déductif devrait être simplifié ou séparé en petites étapes.*

*Non, c'est trop compliqué et ce n'est pas au programme.*

2- Quelles idées de cette activité retenez-vous pour l'enseignement au secondaire?

*Réponses possibles :*

*- L'utilisation du réseau déductif dans l'enseignement de preuves.*

*- L'existence d'une définition liant tous les lieux géométriques entre eux.*

*- La visualisation des différents lieux géométriques dans une seule construction.*

3- Est-ce que cette activité pourrait être utilisée telle quelle auprès d'élèves du secondaire? Si oui, dans quel(s) but(s)? Si non, quelles adaptations pourraient être faites et pourquoi?

*Réponses possibles :*

*Possible dans les groupes de SN ou de TS; afin de leur montrer la présence d'une définition unissant les coniques et une preuve de cette définition.*

*On pourrait l'utiliser en adaptant le réseau déductif afin de le rendre plus simple : donner les différents énoncés à placer dans le réseau déductif.*

# Annexe F : Comparaison des questionnaires pré et post expérimentation avec les résultats des étudiants

## Questionnaire post-expérimentation

1. Voici une liste d'énoncés donnant des caractéristiques possibles en lien avec les mathématiques :

### Liste 1

- A. une suite de puzzles
- B. une suite de problèmes difficiles sans lien évident avec la théorie
- C. une suite de problèmes pour faire comprendre la théorie
- D. un enchaînement progressif de concepts, du plus simple au plus complexe
- E. une étude formelle d'espaces abstraits et de structures mathématiques
- F. une suite de définitions d'objets et de leurs propriétés
- G. une suite de théorèmes et de preuves donnés par le professeur
- H. une série d'exercices pour appliquer les formules enseignées
- I. un ensemble de techniques de calcul avec leurs conditions d'utilisation
- J. une volonté de faire découvrir la théorie par l'étudiant
- K. une ouverture sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- L. une focalisation sur le développement du raisonnement et du sens de la démonstration
- M. une ouverture sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- N. une focalisation sur les possibilités d'application des concepts enseignés
- O. une ouverture sur l'exploration et l'expérimentation
- P. une focalisation sur l'exploration et l'expérimentation
- Q. une ouverture sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)
- R. une focalisation sur la technologie (calculatrice, logiciels ou programmation)

En vous servant d'un maximum de 4 énoncés choisis dans cette liste, comment caractériseriez-vous :

- a. L'enseignement des mathématiques que vous aimeriez pouvoir faire au secondaire?

Participant	Pré-expérimentation	Post-expérimentation <sup>37</sup>
Mylène	J M	<b>C</b> <b>D</b> <b>J</b> <b>Q</b>
Alexandre	Q M	<b>K</b> <b>Q</b>
Brigitte	M O C I	<b>C</b> <b>K</b> <b>O</b> <b>M</b>
Valérie	C D Q O	<b>Q</b> <b>H</b> <b>I</b> <b>M</b>
Geneviève	J O D M	<b>C</b> <b>D</b> <b>J</b> <b>M</b>
Ophélie	D H O	<b>F</b> <b>O</b> <b>Q</b>
Sonia	D O	ABSENTE

<sup>37</sup> Les éléments surlignés en jaune sont les éléments différents qui sont apparus dans le questionnaire post-expérimentation.

b. L'enseignement des mathématiques auquel vous croyez que vous aboutirez?

Participant	Pré-expérimentation	Post-expérimentation
Mylène	C D F H	C D J Q
Alexandre	D Q	G K
Brigitte	I H M	M C D
Valérie	C D H I	Q H I M
Geneviève	J O D M	J D H I
Ophélie	D H O	D O F
Sonia	K J	ABSENTE

2. En vous servant d'un maximum de 2 énoncés choisis dans la **Liste 2**, qu'est-ce qui vous apporte le plus de satisfaction en mathématiques? \_\_\_\_\_

**Liste 2**

- A. la connaissance d'une formule ou d'une méthode générale applicable à tous les cas
- B. la réutilisation dans d'autres contextes (ou disciplines) de concepts (ou de méthodes) vus en maths
- C. la recherche fructueuse d'une approche de résolution à un problème complexe
- D. la compréhension d'un nouveau concept formel qui amène à penser autrement
- E. l'expérimentation et la visualisation à l'aide d'outils technologiques de phénomènes mathématiques
- F. la simplification d'une expression complexe par des manipulations algébriques
- G. la confirmation par le corrigé de votre maîtrise d'un concept ou d'une méthode
- H. la conception réussie d'un programme ou d'une procédure logicielle pour résoudre un problème
- I. la découverte d'une preuve élégante

Participant	Pré-expérimentation	Post-expérimentation
Mylène	C F	B H
Alexandre	A F	B G
Brigitte	B C	C B
Valérie	F B	F B
Geneviève	B D	G C
Ophélie	G B	C
Sonia	B D	Absente



3. Que pensez-vous maintenant de l'utilisation d'un outil comme GeoGebra pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie? Quels en semblent les apports, les limites, les risques et les conditions d'utilisation?

<b>Utilisation de GeoGebra</b>	<b>Mylène</b>	J'ai apprécié apprendre davantage sur les constructions géométriques avec GeoGebra. Ça aide beaucoup à visualiser les énoncés et nous aide à faire des preuves convenables.
	<b>Alexandre</b>	Aider les élèves dans leur apprentissage de la géométrie au secondaire.
	<b>Brigitte</b>	Je trouve que c'est un logiciel intéressant à intégrer dans les cours, autant pour faire manipuler les élèves que pour réaliser des constructions qui aideront à mon explication de la théorie.
	<b>Valérie</b>	Très pratique, un bon support visuel pour la géométrie. Gratuit
	<b>Geneviève</b>	Très pratique, surtout en géométrie (pour ce que j'en sais) Permet de produire une bonne visualisation aux élèves. Permet de manipuler.
	<b>Ophélie</b>	Très intéressant et très utile comme outil. Je l'utilise maintenant dans le cadre de mon cours de Géométrie euclidienne, il me permet de sauver du temps et de développer mon raisonnement mathématique.
<b>Apports</b>	<b>Mylène</b>	Visuellement très intéressant Permet la preuve par construction
	<b>Alexandre</b>	Permet d'aller plus loin qu'avec les manuels scolaires L'élève peut découvrir certains concepts par lui-même Utile pour réaliser des preuves et des démonstrations
	<b>Brigitte</b>	Visuel Manipulation des élèves pour apprendre des concepts par eux-mêmes Constructions géométriques parfaites
	<b>Valérie</b>	Visuel Efficace, simple Pratique
	<b>Geneviève</b>	Permet la manipulation chez l'élève Permet de fournir des images complètes aux élèves Peut cacher des choses
	<b>Ophélie</b>	Permet de mieux visualiser les paramètres des fonctions et ce qu'ils changent au schéma lorsqu'ils sont modifiés Accessible aux jeunes du secondaire

<b>Limites</b>	<b>Mylène</b>	<b>Preuve algébrique</b>
	<b>Alexandre</b>	<b>Il faut prendre du temps pour bien préparer les activités L'enseignant doit avoir une excellente connaissance du logiciel et des concepts enseignés.</b>
	<b>Brigitte</b>	<b>Compliciter à apprendre pour les élèves Nécessite un ordinateur</b>
	<b>Valérie</b>	<b>Prévoir un plan B (technologie)</b>
	<b>Geneviève</b>	<b>Ne peut pas déplacer les étiquettes pour que ce soit plus évident à voir (ex.)</b>
	<b>Ophélie</b>	<b>Certaines constructions sont difficiles à faire pour des élèves du secondaire Demande la connaissance des constructions préalablement</b>
<b>Conditions d'utilisation</b>	<b>Mylène</b>	<b>Aucune; le logiciel est gratuit et disponible en ligne</b>
	<b>Alexandre</b>	<b>Avoir une base de connaissances sur les logiciels de géométrie Connaître quelques concepts mathématiques</b>
	<b>Brigitte</b>	<b>Nécessite un ordinateur</b>
	<b>Valérie</b>	<b>Savoir l'utiliser Accès à l'ordinateur</b>
	<b>Geneviève</b>	<b>Les conditions sont de base, car en fouillant dans la barre des tâches, on trouve facilement ce que l'on veut. Je ne connaissais pas ce logiciel, et j'ai été capable de faire les activités sans utiliser le guide GeoGebra fourni.</b>
	<b>Ophélie</b>	<b>Avoir un ordinateur, ou tablette, etc Avoir une connaissance de base du logiciel</b>

4. La séquence d'activités ressemble-t-elle à ce que vous faites habituellement en mathématiques?

beaucoup     un peu     pas du tout

<b>Mylène</b>	<b>Un peu</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Un peu</b>
<b>Brigitte</b>	<b>Un peu</b>
<b>Valérie</b>	<b>Un peu</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Beaucoup</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Pas du tout</b>

Ce qui est pareil		Ce qui est différent	
<b>Mylène</b>	<b>Comprendre des constructions géométriques et pouvoir les expliquer</b>	<b>Mylène</b>	<b>Nous utilisons GeoGebra habituellement pour faire des preuves</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Graduation dans la difficulté Semblable à faire des preuves Demande à bien réfléchir</b>	<b>Alexandre</b>	<b>Présence de pistes de réflexion Utilisation d'un logiciel pour l'apprentissage</b>
<b>Brigitte</b>	<b>À l'université, on se sert beaucoup de ce logiciel pour réaliser nos preuves en géométrie.</b>	<b>Brigitte</b>	<b>Au secondaire, peu d'enseignants savent comment s'en servir On ne fait pas manipuler les élèves pour qu'ils trouvent la théorie à l'aide de ce logiciel</b>
<b>Valérie</b>	<b>Trouve la théorie en expérimentant</b>	<b>Valérie</b>	<b>Support visuel</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Construire des images</b>	<b>Geneviève</b>	<b>Utiliser le protocole de construction</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Analyse de constructions Faire des constructions</b>	<b>Ophélie</b>	<b>Le logiciel Période de laboratoire info Analyse de constructions en pouvant manipuler</b>

5. Avez-vous aimé vivre cette séquence d'activité?

beaucoup     un peu     pas du tout

<b>Mylène</b>	<b>Beaucoup</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Beaucoup</b>
<b>Brigitte</b>	<b>Beaucoup</b>
<b>Valérie</b>	<b>Un peu (ajout correct)</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Beaucoup</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Un peu</b>

Ce que j'ai aimé		Ce que j'ai moins aimé	
<b>Mylène</b>	<b>Approfondir mes connaissances par rapport à GeoGebra ainsi que toutes ces fonctions</b>	<b>Mylène</b>	<b>X</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Le fait de réviser des concepts Apprentissage du logiciel Voir des manières différentes pour l'enseignement de ces concepts</b>	<b>Alexandre</b>	<b>Horaire (difficulté à me concentrer le jeudi après 16h!)</b>
<b>Brigitte</b>	<b>Je me suis amélioré en ce qui concerne l'utilisation de GeoGebra Je suis plus habile Ça me donne des idées à réaliser au secondaire lorsque j'enseignerai</b>	<b>Brigitte</b>	<b>Il y avait des activités difficiles et des questions ambiguës selon moi</b>
<b>Valérie</b>	<b>Manipuler les figures</b>	<b>Valérie</b>	<b>Un peu difficile, les concepts étaient loin</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Comme je n'avais jamais utilisé GeoGebra cela m'a fait connaître un logiciel très intéressant</b>	<b>Geneviève</b>	<b>Ne pas trop savoir ou on s'en allait, mais je comprends que c'était voulu :-)</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Période de laboratoire Travailler avec GeoGebra Connaître ce logiciel davantage</b>	<b>Ophélie</b>	<b>Matière parfois loin, pas vue depuis secondaire Beaucoup de questions</b>

6. Quelles difficultés avez-vous rencontrées en vivant cette séquence d'activités?

<b>Mylène</b>	Les dernières activités m'ont semblé plus difficiles puisque la matière a été vu il y a plusieurs années. Elles demandaient plus de réflexion.
<b>Alexandre</b>	Certains des concepts étaient loin pour moi. J'ai donc donné des réponses erronées pour certaines activités.
<b>Brigitte</b>	Principalement l'activité G que je n'ai pas très bien compris. J'avais oublié certaines notions qui m'auraient été nécessaire.
<b>Valérie</b>	Les énoncés étaient parfois difficiles, les concepts étaient loin et nous étions fatigués.
<b>Geneviève</b>	Parfois c'était de faire les constructions, mais en posant des questions, c'était correct. Parfois c'était de comprendre les questions posées (de savoir où cela menait)
<b>Ophélie</b>	Matière pas vue depuis secondaire, donc manque parfois de petites notions Questions parfois difficiles à répondre

7. Quelles stratégies avez-vous utilisées pour mieux progresser dans la séquence?

<b>Mylène</b>	Poser des questions à l'enseignante lorsque je ne comprenais pas un détail ou une construction.
<b>Alexandre</b>	Prendre le temps pour réfléchir Faire des recherches pour ce qui est moins bien compris
<b>Brigitte</b>	J'ai tenté d'observer et de manipuler les figures données.
<b>Valérie</b>	Faire les étapes de construction et ensuite réfléchir. Regarder sur Google lorsque je ne souvenais pas d'une notion
<b>Geneviève</b>	Réutiliser les notions vues dans les activités précédentes. Poser des questions Observer le protocole de construction
<b>Ophélie</b>	Faire du mieux que je pouvais Poser des questions Réfléchir

8. Qu'avez-vous appris (ou mieux compris) avec cette séquence d'activités? (Précisez autant que possible.)

<b>Mylène</b>	<b>Les différentes applications :</b> - couleurs et texte - déplacement et mouvement -etc.
<b>Alexandre</b>	<b>L'importance des preuves</b> <b>L'utilisation des différents outils dans GeoGebra.</b>
<b>Brigitte</b>	<b>J'ai appris plusieurs notions mathématiques que j'avais oublié.</b> <b>J'ai amélioré ma manière d'utiliser GeoGebra.</b>
<b>Valérie</b>	<b>J'ai beaucoup appris sur GeoGebra. Je ne savais pas l'utiliser avant et je me débrouille très bien maintenant. Ou trouver les outils ? Comment tracer certaines constructions ?</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Tout!!</b> <b>Travailler avec GeoGebra et faire des constructions</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Le logiciel GeoGebra et ses applications</b> <b>Retour sur matière vue depuis quelque temps</b>

9. Y a-t-il quelque chose qui reste flou à l'issue de cette séquence d'activités?  oui  non  
Si oui, identifiez la zone où vous aimeriez avoir des éclaircissements :

<b>Mylène</b>	<b>NON</b>
<b>Alexandre</b>	<b>OUI, la dernière activité : j'ai besoin d'une excellente révision pour comprendre !</b>
<b>Brigitte</b>	<b>NON</b>
<b>Valérie</b>	<b>OUI, nous avons les étapes de construction à suivre, mais ça aurait été bien d'avoir une explication des étapes.</b>
<b>Geneviève</b>	<b>NON</b>
<b>Ophélie</b>	<b>NON</b>

10. Recommanderiez-vous d'utiliser à nouveau cette séquence avec des étudiants de l'an prochain?

oui, telle quelle     oui, mais avec modifications     non

<b>Mylène</b>	<b>Oui, telle quelle</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Oui, telle quelle</b>
<b>Brigitte</b>	<b>Oui, mais avec modifications</b>
<b>Valérie</b>	<b>Oui, mais avec modifications</b>
<b>Geneviève</b>	<b>Oui, telle quelle</b>
<b>Ophélie</b>	<b>Oui, mais avec modifications</b>

Éléments à garder		Modifications proposées	
<b>Mylène</b>	<b>J'ai beaucoup apprécié la séquence. Elle nous a permis de bien nous outiller par rapport à un logiciel de construction complexe.</b>	<b>Mylène</b>	<b>X</b>
<b>Alexandre</b>	<b>Tout, c'est très instructif!</b>	<b>Alexandre</b>	<b>Réviser certains concepts.</b>
<b>Brigitte</b>	<b>Les activités sont intéressantes. Ça aide pour manipuler GeoGebra.</b>	<b>Brigitte</b>	<b>Rappeler quelques notions au début des activités pour pouvoir les faire correctement (surtout activité G)</b>
<b>Valérie</b>	<b>Construction géométrique</b>	<b>Valérie</b>	<b>Peut-être faire un retour sur les notions avant</b>
<b>Geneviève</b>	<b>X</b>	<b>Geneviève</b>	<b>X</b>
<b>Ophélie</b>	<b>X</b>	<b>Ophélie</b>	<b>Ajouter (peut-être) des petits retours sur matière dans activités</b>

*Merci beaucoup de votre participation !*