

**Université de Montréal**

**Aspects géométriques et topologiques du  
crochet de Poisson des variétés symplectiques**

par

**Jordan Payette**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en Mathématiques

Orientation Mathématiques fondamentales

novembre 2019



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Aspects géométriques et topologiques du  
crochet de Poisson des variétés symplectiques**

présentée par

**Jordan Payette**

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*Egor Shelukhin*

---

(président-rapporteur)

*François Lalonde*

---

(directeur de recherche)

*Michael Usher, Claude Viterbo*

---

(membres du jury)

*Leonid Polterovich*

---

(examineur externe)

*Egor Shelukhin*

---

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le :

*30 juillet 2019*

---



*Je dédie cette thèse à mes parents :  
sa prose à ma mère,  
sa science à mon père*



## SOMMAIRE

---

Cette thèse étudie deux problèmes de nature géométrique et topologique associés au crochet de Poisson sur les variétés symplectiques, c'est-à-dire à l'opération bilinéaire sur les fonctions lisses qui s'exprime dans une carte de Darboux  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$  sous la forme

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Le premier problème porte sur la notion de submersion symplectique que nous introduisons dans le présent texte et qui généralise la notion de symplectomorphisme. Il s'avère qu'une submersion symplectique est un morphisme de Poisson : il s'agit d'une application  $\phi$  entre variétés symplectiques qui satisfait  $\{\phi^* f, \phi^* g\} = \phi^* \{f, g\}$ . Notre intérêt pour ces fonctions réside dans le fait que le théorème de non-tassement de Gromov porte sur l'aire minimale possible pour les images des submersions symplectiques  $\phi : (B^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  obtenues comme compositions d'un plongement symplectique  $\Phi : (B^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  et de la projection standard  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  vers le plan de coordonnées conjuguées  $(p_1, q_1)$ . Nous investiguons le problème inverse dit « de représentabilité » : nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une submersion symplectique  $\phi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se factorise sous la forme  $\phi = p \circ \Phi$  où  $\Phi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  est un plongement ou une immersion symplectique. Nous montrons par ailleurs qu'il existe une submersion symplectique qui ne se factorise pas de la sorte à travers une immersion et qu'il existe aussi une submersion symplectique qui se factorise de la sorte à travers une immersion, mais pas à travers un plongement.

Le deuxième problème porte sur la conjecture du crochet de Poisson de Polterovich [Po2, Po3]. Étant donné une variété symplectique  $(M, \omega)$  et un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $M$ , nous pouvons définir l'invariant  $pb(\mathcal{F})$  associé à une partition de l'unité  $\mathcal{F}$  subordonnée à  $\mathcal{U}$ , qui est une sorte de norme sur les crochets de Poisson entre les paires de fonctions de la partition. En dénotant  $e_H(\mathcal{U})$  l'énergie

de disjonction de Hofer maximale d'un ouvert du recouvrement  $\mathcal{U}$ , la conjecture demande s'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\mathcal{U}$  et de  $\mathcal{F}$  telle que  $pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U}) \geq C$ . Cette conjecture a été établie récemment par Buhovski-Logunov-Tanny dans le cas des surfaces [BLT] ; en nous inspirant de travaux antérieurs de Buhovski-Tanny [BT], nous avons aussi démontré la conjecture pour les surfaces de genre  $g \geq 1$  [Pa]. Nous exposons notre approche dans le second chapitre de cette thèse. À l'aide des submersions symplectiques, nous généralisons nos méthodes afin d'attaquer la conjecture en dimensions supérieures ; nous obtenons ainsi une nouvelle preuve d'un théorème de Polterovich et de Buhovski-Tanny concernant l'invariant  $pb$  pour des recouvrements formés de petits ouverts [Po4, BT].

Afin de rendre cette thèse aussi accessible et auto-suffisante que possible, nous débutons par une introduction à la topologie symplectique. Des annexes recueillent les faits plus particuliers que nous utilisons tout au long de ce travail.

**Mots-clés** : Topologie symplectique, crochet de Poisson, submersion symplectique, morphisme de Poisson, problème de représentabilité, invariant  $pb$ , énergie de disjonction de Hofer, partition de l'unité



## SUMMARY

---

This thesis studies two problems of geometric and topological nature associated to the Poisson bracket on symplectic manifolds—*i.e.*, the bilinear operation on smooth functions which is expressed in a Darboux chart  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$  as

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

The first problem concerns the notion of "symplectic submersion" that we introduce here and which generalizes the concept of symplectomorphism. A symplectic submersion turns out to be a Poisson morphism, namely a map  $\phi$  between symplectic manifolds which satisfies  $\{\phi^*f, \phi^*g\} = \phi^*\{f, g\}$ . Our interest in those maps stems from the fact that Gromov's nonsqueezing theorem is a statement about the minimal area possible for the images of the symplectic submersions  $(B^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  which are compositions of a symplectic embedding  $\Phi : (B^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  and of the standard projection  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  onto the plane of conjugated variables  $(p_1, q_1)$ . We investigate the inverse "representability" problem : we give necessary and sufficient conditions for a symplectic submersion  $\phi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$  to factorize in the form  $\phi = p \circ \Phi$  where  $\Phi : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  is either a symplectic embedding or a symplectic immersion. We show moreover that there exists a symplectic submersion which does not factorize in this way through an immersion, and also that there exists a symplectic submersion which does factorize in this way through an immersion, but not through an embedding.

The second problem concerns Polterovich's Poisson bracket conjecture [**Po2**, **Po3**]. Given a symplectic manifold  $(M, \omega)$  and an open cover  $\mathcal{U}$  of  $M$ , we can define the invariant  $pb(\mathcal{F})$  of a partition of unity  $\mathcal{F}$  subordinated to  $\mathcal{U}$ , which is a sort of norm on the pairwise Poisson brackets of the functions in  $\mathcal{F}$ . Denoting  $e_H(\mathcal{U})$  the maximal Hofer displacement energy of a set in  $\mathcal{U}$ , the conjecture asks whether there exists a constant  $C > 0$  independent of  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{F}$  such that  $pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U}) \geq C$ . This conjecture was proved recently by Buhovsky-Logunov-Tanny in the case of

surfaces [BLT]; based on earlier work of Buhovsky-Tanny [BT], we also proved the conjecture for surfaces of genus  $g \geq 1$  [Pa]. We present our approach in the second chapter of this thesis. Using symplectic submersions, we generalize our methods in order to tackle the conjecture in higher dimensions; in particular, we obtain a new proof of a theorem of Polterovich and Buhovsky-Tanny about the  $pb$  invariant of covers made up of small open sets [Po4, BT].

In order to make this thesis as accessible and self-contained as possible, we first give an introduction to symplectic topology. The appendices also collect the more specialized facts we use throughout this work.

**Keywords** : Symplectic topology, Poisson bracket, symplectic submersion, Poisson morphism, representability problem,  $pb$  invariant, Hofer displacement energy, partition of unity

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	vii
<b>Summary</b> .....	ix
<b>Remerciements</b> .....	xiii
<b>Introduction</b> .....	3
0.1. Rudiments de la topologie symplectique.....	5
0.1.1. Variétés symplectiques, sous-variétés et morphismes.....	5
0.1.2. Dynamique hamiltonienne et crochet de Poisson.....	9
0.1.3. Flexibilité chez les variétés symplectiques .....	14
0.1.4. Rigidité chez les variétés symplectiques.....	18
0.1.5. Géométrie de Hofer .....	25
0.1.6. Rigidité $C^0$ du crochet de Poisson.....	27
0.1.7. Invariants spectraux et quasi-états symplectiques.....	29
0.2. Submersions symplectiques.....	31
0.2.1. Motivations.....	31
0.2.2. Résumé du chapitre 1.....	34
0.3. Crochets de Poisson des partitions de l'unité .....	36
0.3.1. Motivations.....	36
0.3.2. Résumé du chapitre 2.....	41
<b>Chapitre 1. Submersions symplectiques</b> .....	47
1.1. Fonctions symplectiques .....	47
1.2. Structure des submersions symplectiques.....	50
1.3. Caractérisation des submersions symplectiques .....	54
1.4. Relations à la littérature .....	56
1.5. Question de Polterovich.....	58

1.6.	Problème de représentabilité .....	60
1.6.1.	Le problème d'immersion .....	60
1.6.2.	Le problème de plongement .....	63
1.6.3.	Contre-exemples .....	66
1.7.	Conclusion .....	70
<b>Chapitre 2.</b>	<b>Crochets de Poisson de partitions de l'unité .....</b>	<b>75</b>
2.1.	Invariants $pb$ .....	75
2.2.	Effet des submersions symplectiques .....	79
2.3.	Cas des surfaces .....	80
2.3.1.	Résultats de Buhovski-Logunov-Tanny .....	81
2.3.2.	Notre méthode .....	82
2.3.3.	Démonstrations .....	85
2.4.	Résultats en dimensions supérieures .....	96
2.4.1.	Stratégie d'attaque .....	97
2.4.2.	Recouvrements confinés selon une submersion symplectique ....	101
2.5.	Conclusion .....	109
<b>Bibliographie</b> .....		<b>111</b>
<b>Annexe A.</b>	<b>Florilège symplectique .....</b>	<b>A-i</b>
A.1.	Astuce de Moser .....	A-i
A.2.	Isotopies symplectiques .....	A-iii
A.3.	Énergie de disjonction .....	A-v
<b>Annexe B.</b>	<b>Lemme de Buhovski-Logunov-Tanny .....</b>	<b>B-i</b>
B.1.	Preuve du lemme .....	B-ii
B.2.	Généralisation aux paires de collections .....	B-vi
B.3.	Amélioration de la constante .....	B-viii
B.4.	Version non linéaire de la réduction .....	B-xii
<b>Annexe C.</b>	<b>Lemme de topologie .....</b>	<b>C-i</b>

## REMERCIEMENTS

---

Cinq années se sont écoulées depuis l'écriture des remerciements dans mon mémoire de maîtrise. Bien que je pense encore chaque mot que j'y ai écrit, je prends ici l'occasion de réitérer ma reconnaissance envers plusieurs personnes et de reconnaître l'apport des personnes que j'ai rencontrées depuis.

Tout d'abord, je remercie les personnes qui me font un si grand honneur en acceptant de faire partie de mon jury de thèse : Egor Shelukhin comme président-rapporteur, mon directeur François Lalonde, Michael Usher et Claude Viterbo comme membres du jury et Leonid Polterovich comme examinateur externe.

Je remercie mon directeur de recherche depuis près de neuf ans, François Lalonde, pour l'entièreté de mon parcours universitaire à ses côtés. Sa façon géométrique de contempler les idées mathématiques a été une grande source d'inspiration. Sa confiance et son optimisme à mon endroit m'ont énormément encouragé. Je le remercie aussi de m'avoir permis de séjourner à Luminy au début de mon doctorat et à Lyon plus tard : ces deux événements figurent parmi les plus chers à mon cœur.

Cela m'amène à remercier Silvia Anjos et Martin Pinsonnault qui, à travers nos discussions empreintes de curiosité, ont fait de mon séjour à Luminy une expérience si agréable.

Je remercie Baptiste Chantraine, François Charette, Octav Cornea, Emmanuel Giroux et Egor Shelukhin d'avoir tant fait pour le groupe de topologie symplectique de Montréal, depuis longtemps mais particulièrement durant les dernières années. Face à un sujet si vaste, à la fois enraciné dans l'histoire et tourné vers l'avenir, un certain doctorant aurait eu vite fait de s'égarer sans leur aide précise.

Je remercie aussi Gilles Brassard, Marlène Frigon, Iosif Polterovich, Frédéric Rochon, Christiane Rousseau et Luc Vinet pour avoir fait de mes études graduées une période intellectuellement si enrichissante.

Mon temps à Lyon, avec ses quelques escapades à Grenoble, a aussi été l'occasion de connaître d'autres gens formidables. Je remercie d'abord Damien Gayet et Jean-Yves Welschinger d'avoir accepté de superviser mon séjour là-bas. En plus d'eux, je remercie Sylvain Courte, Nguyen Viet Dang, Stéphane Guillermou, Vincent Humilière, Marco Mazzucchelli, Klaus Niederkrüger, Bruno Sevennec, Jean-Claude Sikorav et Nicolas Vichery d'avoir fait de Lyon et de Grenoble des endroits si dynamiques, instructifs et plaisants ainsi que pour leur intérêt à mon endroit. Je remercie par ailleurs les étudiants là-bas, notamment Michele Ancona, Benjamin Celaries et Alejandro Rivera pour leur aide sur divers sujets mathématiques. Un merci tout distingué va à Alexandre Vérine, non seulement pour nos échanges mathématiques stimulants, mais aussi pour avoir tant fait pour nous aider, Karen et moi, durant notre séjour à Lyon.

Je suis fort reconnaissant à Yakov Eliashberg de m'avoir reçu à Stanford malgré son horaire chargé. Ses idées m'ont libéré de certains préjugés mathématiques qui m'ont entravé pendant trop longtemps.

Je remercie Lev Buhovski, Leonid Polterovich et Shira Tanny ; non seulement pour leurs travaux sans lesquels cette thèse ne serait pas ce qu'elle est, mais aussi pour leurs généreuses invitations à Tel Aviv et à Haifa. Leurs lumières m'ont permis de progresser sur plusieurs questions.

Je considère Yvan Saint-Aubin comme le codirecteur officieux de mes études doctorales. Je ne saurais dire à quel point j'ai apprécié sa confiance, son écoute, ses conseils, son humanisme, son optimisme et son côté un brin espiègle.

Je suis reconnaissant au CRSNG, au DMS et à l'ISM pour le financement que ces organismes m'ont accordé au cours des cinq dernières années. Je suis aussi reconnaissant au DMS pour sa confiance en m'accordant mes deux premières charges de cours, deux expériences des plus enrichissantes.

Je remercie toutes les nouvelles amitiés que j'ai pu nouées et celles que j'ai eu l'immense plaisir de voir s'épanouir au cours des années. Merci à Charles Bédard, Geoffroy Bergeron, Jean-Philippe Chassé, Vincent Dumoulin, Jonathan Godin, Alexis Langlois-Rémillard, Jean-Michel Lemay, Alexis Leroux-Lapierre, Marc-André Miron, Fabrice Nonez, Serge-Olivier Paquette et Paul Raymond-Robichaud pour toutes les discussions de sciences et de vie. *Dankeschön an Johannes Kleiner, für alles.* Merci à Catherine Henri et Frédérick Laliberté, et à Nicolas Longtin-Martel d'être de si bons amis. Merci à Noé Aubin-Cadot, Dustin Connery-Grigg, Jean Lagacé, Vincent Létourneau, Alexandre Perrier et Dominique Rathel-Fournier pour leur camaraderie qui a tant compté au cours des années. Je suis reconnaissant par ailleurs à Jean et à Dominique pour leurs commentaires concernant cette thèse.

Je remercie ma famille et ma belle-famille pour leur aide depuis toujours. Un merci tout particulier va à Audrey-Anne Provost et à Joël Payette pour leur immense bonté.

Je remercie ma meilleure amie et épouse, Karen Joannette. Je lui suis déjà très reconnaissant d'avoir eu l'audace de lire et de corriger quelques passages de cette thèse durant ce qui aurait dû être ses moments de répit. Je la remercie surtout d'avoir vécu avec moi mes plus beaux souvenirs, d'avoir relevé tant de défis et de ne pas s'être encore lassée d'en relever d'autres. Je suis choyé.

Enfin, je remercie mes parents, Sylvie Turmel et Jean-Pierre Payette. Je remercie ma mère de m'avoir appris les beautés de la langue française. Je remercie mon père d'avoir cultivé ma curiosité de la géométrie. Je bénéficie de leur générosité et de leur dévouement depuis toujours, qui semblent inépuisables. Je leur dois tant ; je leur devais au moins cette thèse.





# INTRODUCTION

---

Cette thèse se veut une contribution à la *topologie symplectique*, c'est-à-dire à la discipline mathématique vouée à l'étude topologique des variétés symplectiques. Nous y explorons divers aspects du crochet de Poisson, une opération sur l'ensemble des fonctions réelles lisses définies sur une variété symplectique, et ce à travers une perspective manifestement géométrique et topologique. Cet ouvrage traite principalement et plus précisément de deux sujets qui sont largement indépendants l'un de l'autre, bien qu'ils se recoupent.

Le premier sujet, traité dans le chapitre un, concerne ce que nous appelons les *submersions symplectiques*, qui sont des applications particulières entre variétés symplectiques qui généralisent les symplectomorphismes. Nous formulons le *problème de représentabilité des submersions symplectiques* dans les sections 0.2.2 et 1.6, problème qui se décline en deux versions dites « plongée » et « immergée » et qui consiste grossièrement à établir en quelles circonstances une submersion symplectique  $f$  d'un domaine  $X \subset \mathbb{R}^{2n}$  vers  $\mathbb{R}^{2k}$  se factorise sous la forme  $f = p \circ \Phi$  où  $\Phi$  est un plongement ou une immersion symplectique de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $p$  est la « projection symplectique standard » de  $\mathbb{R}^{2n}$  vers  $\mathbb{R}^{2k}$ . Des circonstances nécessaires et suffisantes sur  $f$  pour que de telles factorisations existent sont énoncées dans le théorème 1.6.5 pour la version immergée et dans le théorème 1.6.10 pour la version plongée. Nous donnons aussi dans la section 1.6.3 des exemples de submersions symplectiques pour lesquelles l'une ou l'autre des deux versions du problème est insoluble.

Le second sujet, abordé dans le chapitre deux, porte sur l'*invariant pb des partitions de l'unité* sur les variétés symplectiques, invariant introduit il y a quelques années par L. Polterovich [Po1, Po2] dans le cadre de ses recherches sur la « théorie des fonctions sur les variétés symplectiques » [PoR] et sur ses relations avec la physique quantique. Motivé par une conjecture de Polterovich [Po2] que nous nommons *conjecture du crochet de Poisson*, nous établissons diverses bornes inférieures sur cet invariant en diverses circonstances ; nous démontrons

notamment le théorème 2.3.8, donnant ainsi les premiers exemples de variétés symplectiques (à savoir les surfaces fermées de genre  $g \geq 1$ ) pour lesquelles la conjecture du crochet de Poisson est confirmée. Ce résultat, annoncé initialement dans [Pa] sur la base d'un travail antérieur de Buhovski et Tanny [BT], a été obtenu indépendamment par Buhovski, Logunov et Tanny [BLT] pour toutes les surfaces fermées. Un apport nouveau de cette thèse est l'obtention de résultats en dimensions supérieures, en particulier du théorème 2.4.7 qui fait appel aux submersions symplectiques abordées au chapitre un et qui nous sert à fournir une nouvelle démonstration du théorème 0.3.5 dû à Polterovich–Buhovski–Tanny ; voir le corollaire 2.4.12. Le succès de notre démarche repose grandement sur le lemme 2.4.2 obtenu avec l'aide L. Buhovski, un résultat technique intéressant en lui-même.

La lecture de cette thèse requiert somme toute assez peu de prérequis, comparée au standard de la littérature symplectique. Ceci dit, les sujets qui y sont abordés et la perspective qui y est adoptée se situent en périphérie des principaux courants de recherche en géométrie et en topologie symplectiques ; de fait, ils peuvent paraître quelque peu inusités à un certain nombre de symplecticiens. Cette situation rend possible et même opportun de poursuivre l'introduction de cette thèse par une exposition des rudiments de la topologie symplectique aiguillée vers les sujets dont nous traiterons dans les chapitres ultérieurs, et ce à un niveau qui convienne à un lecteur plus néophyte. Nous profitons aussi de cette occasion afin de fixer certaines conventions, nomenclatures et notations et afin d'énoncer divers résultats auxquels nous pourrions référer par la suite<sup>1</sup>. Après ce survol, nous enchaînerons, pour chacune des deux parties de cette thèse, avec une description du contexte ayant mené aux questions soulevées durant notre doctorat, puis avec des énoncés des principaux résultats qui nous occuperont tout au long de la thèse. Le corps de la thèse suivra avec les deux chapitres.

Nous terminons cet ouvrage par trois annexes : la première rappelle quelques faits en topologie symplectique bien connus, mais plus pointus ; la deuxième présente divers résultats techniques dûs à Buhovski, Logunov et Tanny [BT, BLT] et ainsi que des résultats nouveaux qui en sont inspirés, notamment dans la sous-section B.4 cruciale pour le lemme 2.4.2 ; la troisième annexe présente un dernier ingrédient technique qui nous permet au chapitre deux de réduire nos considérations en dimensions supérieures à des considérations en dimension deux.

---

1. Nous avertissons néanmoins le lecteur du fait que les chapitres et les annexes recourent aussi beaucoup à des notations qui leur sont propres.

## 0.1. RUDIMENTS DE LA TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

Le matériel de cette section est abordé dans une large proportion dans l'introduction à la topologie symplectique de McDuff et de Salamon [MS2]. D'autres références utiles sont Audin & Lafontaine [AL] et McDuff & Salamon [MS1] pour les courbes  $J$ -holomorphes, Polterovich [Po1] et Polterovich & Rosen [PoR] pour la dynamique hamiltonienne, les crochets de Poisson, la rigidité  $C^0$  et les invariants spectraux et Eliashberg & Mishachev [EMi] pour les aspects de flexibilité. Nous référons le lecteur à ces ouvrages pour de plus amples détails.

### 0.1.1. Variétés symplectiques, sous-variétés et morphismes

Une *variété symplectique* est une paire  $(M, \omega)$  où  $M$  est une variété réelle lisse munie d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une 2-forme différentielle  $\omega \in \Omega_{dR}^2(M; \mathbb{R})$  qui est

- (1) *non dégénérée* en ce sens que le morphisme (dit *de musicalité*)

$$\omega^\flat : TM \rightarrow T^*M : v \in T_m M \mapsto \omega^\flat(v) := \omega(v, -) \in T_m^*M$$

est un monomorphisme de fibré vectoriel, c'est-à-dire qu'il est injectif sur chaque fibre, donc un isomorphisme par considérations dimensionnelles ;

- (2) *fermée* en ce sens que la dérivée extérieure  $d\omega \in \Omega_{dR}^3(M; \mathbb{R})$  est identiquement nulle sur  $M^2$ .

La non-dégénérescence de  $\omega$  implique que la dimension réelle de  $M$  est paire, disons  $2n$ . Il s'agit là d'une conséquence d'un fait d'algèbre linéaire portant sur un *espace vectoriel symplectique*, c'est-à-dire sur une paire  $(V, \eta)$  où  $V$  est un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée, la paire étant ici choisie égale à  $(T_m M, \omega_m)$  pour  $m \in M$ . Pour s'en convaincre et à des fins ultérieures, considérons le cas plus général d'une forme bilinéaire antisymétrique  $\sigma$  quelconque sur un espace vectoriel réel  $V$  arbitraire. Définissons le *rang de  $\sigma$*  comme étant la dimension de l'image de l'application  $\sigma^\flat : V \rightarrow V^*$ . Il s'avère que ce rang est toujours pair ; conséquemment, lorsque  $(V, \sigma)$  est symplectique,  $\text{Im } \sigma^\flat = V^*$  a dimension paire. En effet, l'affirmation est triviale si  $\text{Im } \sigma^\flat = \{0\}$ . Autrement, il existe  $v \in V$  tel que  $0 \neq \sigma^\flat(v)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $0 \neq w \in V$  tel que

$$0 \neq \sigma^\flat(v)(w) = \sigma(v, w) = -\sigma(w, v) = \sigma^\flat(w)(-v).$$

---

2. Ci-dessus,  $\Omega_{dR}^*(M; \mathbb{R})$  le complexe de de Rham constitué des formes différentielles réelles sur  $M$ .  $H_{dR}^*(M; \mathbb{R})$  dénotera la cohomologie de ce complexe.

Ceci implique que  $\sigma^b(w)$  est linéairement indépendant de  $\sigma^b(v)$ , car  $\sigma^b(v)(-v) = \sigma_m(v, -v) = 0$  par bilinéarité et antisymétrie de  $\sigma$ . Ainsi,  $\text{Im } \sigma^b$  possède un sous-espace de dimension deux engendré par les images de  $v$  et de  $w$ . Considérons maintenant l'intersection  $W := \mathbb{R}\langle v, w \rangle^0 \cap \text{Im } \sigma^b$  de l'annihlateur de  $\mathbb{R}\langle v, w \rangle$  et de  $\text{Im } \sigma^b$ ; <sup>3</sup> si  $W \neq \{0\}$ , essentiellement le même argument (raffiné par une utilisation judicieuse du procédé de Gram-Schmidt) montre que  $W$  possède un sous-espace de dimension deux. Par récurrence, nous déduisons que  $\text{rang } \sigma$  est bien pair.

Mentionnons, encore à des fins ultérieures, une autre caractérisation du rang de  $\sigma$  : il s'agit du double du plus grand entier  $r$  tel que  $\sigma^r := \wedge^r \sigma \neq 0$ . En effet, définissons le *noyau de  $\sigma$*  comme étant le sous-espace

$$V^\sigma = \text{Ker } \sigma := \{ v \in V \mid \sigma(v, -) = 0 \}.$$

Observons que  $V^\sigma = \text{Ker } \sigma^b$  ; ainsi, l'image de  $\sigma^b$  peut être identifiée avec un supplémentaire  $W$  de  $V^\sigma$ . Notons que  $\dim W = r = \text{rang } \sigma$  et que la restriction de  $\sigma$  à  $W$  est non dégénérée. Ainsi,  $\sigma^r$  ne s'annule pas sur un  $2r$ -multivecteur non nul formé de vecteurs dans  $W$ . Par ailleurs, puisque tout  $2(r+1)$ -multivecteur alterné non nul (si ceci existe) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de multivecteurs non nuls de la forme  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2(r+1)}$  dont au moins l'un des  $v_j \in V^\sigma$ , il en résulte que  $\sigma^{r+1}$  doit s'annuler sur tous les  $2(r+1)$ -multivecteurs alternés et est donc la  $2(r+1)$ -multiforme nulle. Nous déduisons comme corollaire que si  $(M^{2n}, \omega)$  est une variété symplectique, alors  $\omega^n$  est une forme volume.

Voici quelques familles d'exemples de variétés symplectiques :

- (1) Une famille élémentaire, mais centrale à cette thèse est celle des surfaces  $S$  munie d'une forme d'aire  $\omega$ . La fermeture de  $\omega$  est automatique du fait que  $\Omega_{dR}^3(S; \mathbb{R}) = \{0\}$  pour une surface  $S$ .
- (2) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  où  $\omega_0$  est la *forme symplectique standard* : étant donné des coordonnées  $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , la forme symplectique s'exprime  $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$ .
- (3) Étant donné une variété lisse  $Q$ , l'espace cotangent  $(T^*Q, d\lambda)$  est symplectique, où  $\lambda \in \Omega_{dR}^1(T^*Q; \mathbb{R})$  est la *1-forme tautologique* et où  $d\lambda$  est la *forme symplectique tautologique*. Plus explicitement, si  $\pi : T^*Q \rightarrow Q$  dénote la projection évidente, pour  $\alpha \in T^*Q$  et pour  $v \in T_\alpha T^*Q$ , nous posons  $\lambda_\alpha(v) := \alpha(d\pi(v))$ . Étant donné des coordonnées locales  $(q_1, \dots, q_n)$  sur  $Q$  et en dénotant  $(p_1, \dots, p_n)$  les coordonnées induites dans chaque fibre  $T_q^*Q$

---

3.  $\mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  dénote l'espace vectoriel réel engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$ . L'annihlateur d'un sous-espace  $U \subset V$  est défini comme étant  $U^0 := \{ \alpha \in V^* \mid \alpha|_U = 0 \}$ .

au-dessus de cette carte,  $\lambda$  se lit  $\sum_{j=1}^n p_j dq_j$ , ce qui rend manifeste le fait que  $d\lambda$  est bien une forme symplectique.

- (4) Plus généralement, une *variété symplectique exacte* est une variété symplectique  $(M, \omega)$  telle que  $\omega$  est exacte, c'est-à-dire de la forme  $\omega = d\lambda$ . Une telle variété ne peut pas être fermée, c'est-à-dire compacte sans bord : en effet, si c'était possible, en raison de la non-dégénérescence de  $\omega$  et du théorème de Stokes, nous aurions  $0 \neq \int_M \omega^n = \int_M d(\lambda \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \lambda \wedge \omega^{n-1} = 0$ , une contradiction. Des exemples sont les sous-variétés équidimensionnelles des  $\mathbb{R}^{2n}$  et des cotangents munies des restrictions des formes symplectiques ambiantes.
- (5) Étant donné deux variétés symplectiques  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$ , nous pouvons doter le produit  $M_1 \times M_2$  d'une forme symplectique  $\omega_1 \oplus \omega_2 := \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$ , où  $\pi_j : M_1 \times M_2 \rightarrow M_j$  sont les projections canoniques. Par ailleurs, si  $(M, \omega)$  est symplectique, alors  $(M, t\omega)$  est symplectique pour tout réel  $t \neq 0$ .

Les variétés symplectiques possèdent divers types de sous-variétés dignes d'intérêt. Étant donné un espace vectoriel symplectique  $(V^{2n}, \eta)$  et un sous-espace vectoriel  $W$ , l'*orthogonal symplectique de  $W$*  est le sous-espace vectoriel

$$W^\eta := \{v \in V \mid \eta(v, w) = 0 \forall w \in W\}.$$

Le morphisme de musicalité  $\eta \mapsto \eta^\flat$  identifie  $W^\eta \subseteq V$  et l'annihilateur  $W^0 \subseteq V^*$  de  $W$ , ce dernier pouvant être lui-même identifié avec le quotient  $V^*/\eta^\flat(W)$ . Ainsi, puisque  $\eta^\flat$  est injective, nous en déduisons la relation  $\dim W + \dim W^\eta = \dim V$ . Cela nous permet de distinguer quatre types spéciaux de sous-espaces :

- (1)  $W \subseteq V$  est *symplectique* si  $W \cap W^\eta = \{0\}$  ; cela correspond donc à avoir  $W^\eta$  symplectique. Il s'avère que cela correspond aussi à ce que la restriction de  $\eta$  à  $W$  soit symplectique. Selon l'identité précédente portant sur les dimensions,  $W$  et  $W^\eta$  sont des sous-espaces supplémentaires.
- (2)  $W \subset V$  est *isotrope* si  $W^\eta \supseteq W$ . Dans une telle situation, nous avons  $\dim W \leq (1/2) \dim V = n$ . Il s'avère que cela correspond à ce que la restriction de  $\eta$  à  $W$  soit nulle.
- (3)  $W \subseteq V$  est *coisotrope* si  $W^\eta \subseteq W$ . Dans une telle situation, nous avons  $\dim W \geq (1/2) \dim V = n$ . Observons que  $W$  est coisotrope si et seulement si  $W^\eta$  est isotrope. En outre,  $W^\eta$  est alors le noyau de la restriction de  $\eta$  à  $W$ , c'est-à-dire le noyau de l'application  $(\eta|_{W \times W})^\flat : W \rightarrow W^*$ .
- (4)  $W \subseteq V$  est *lagrangien* s'il est isotrope et coisotrope, c'est-à-dire si  $W = W^\eta$ . Dans une telle situation,  $\dim W = (1/2) \dim V = n$ .

Ces notions se transposent au contexte non linéaire : une sous-variété immergée  $N$  d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  est respectivement *symplectique*, *isotrope*, *coisotrope* ou *lagrangienne* si pour tout  $m \in N$ , le sous-espace  $T_m N \subset (T_m M, \omega_m)$  est respectivement symplectique, isotrope, coisotrope ou lagrangien. En guise d'exemples simples, mentionnons que les sous-variétés unidimensionnelles d'une variété symplectique de dimension non nulle sont isotropes, que les hypersurfaces de codimension un sont coisotropes et que les fibres et la section nulle d'un cotangent  $(T^*Q, d\lambda)$  sont lagrangiennes.

Étant donné une immersion  $\iota : C \looparrowright (M, \omega)$  telle que  $\iota(C)$  est coisotrope, la distribution  $\text{Ker } \iota^*\omega \subset TC$  est la *distribution canonique (isotrope) sur  $(C, \iota^*\omega)$* . Notons que cette distribution a rang constant. Nous affirmons qu'elle est intégrable au sens de Frobenius, le feuilletage associé étant appelé le *feuilletage canonique (isotrope) sur  $(C, \iota^*\omega)$* . Plus généralement, étant donné une forme fermée  $\sigma$  de rang constant sur une variété  $M$ , la distribution  $\text{Ker } \sigma \subset TM$  est intégrable. En effet, étant donné deux champs vectoriels  $X, Y$  tangents à  $\text{Ker } \sigma$  ainsi qu'un champ vectoriel  $Z$  quelconque sur  $M$ , nous calculons

$$\begin{aligned} [X, Y] \lrcorner \sigma &= (\mathcal{L}_X Y) \lrcorner \sigma = \mathcal{L}_X (Y \lrcorner \sigma) - Y \lrcorner \mathcal{L}_X \sigma \\ &= \mathcal{L}_X (Y \lrcorner \sigma) - Y \lrcorner (d(X \lrcorner \sigma) + X \lrcorner d\sigma) = 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que  $X \lrcorner \sigma$ ,  $Y \lrcorner \sigma$  et  $d\sigma$  sont des formes nulles. Ainsi  $[X, Y] \in \text{Ker } \sigma$ , ce qui établit l'intégrabilité au sens de Frobenius. Ce calcul établit au passage que  $\mathcal{L}_X \sigma = 0$  pour n'importe quel champ vectoriel tangent à la distribution canonique. Ce fait implique que si la distribution canonique est fibrante, c'est-à-dire si l'espace topologique obtenu en quotientant  $M$  par la distribution canonique est une variété  $Q$ , alors la 2-forme  $\sigma$  descend sur  $Q$  en une 2-forme symplectique  $\bar{\sigma}$ ; la paire  $(Q, \bar{\sigma})$  est alors appelée la *réduction de  $(M, \sigma)$* . Nous voyons donc comment des immersions coisotropes peuvent donner lieu à de nouvelles variétés symplectiques par réduction. En guise d'exemple, la  $(2n - 1)$ -sphère de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  est coisotrope et que son feuilletage canonique est la fibration de Hopf, à savoir la fibration en cercles obtenue en intersectant la sphère avec tous les droites complexes de  $\mathbb{C}^n$  passant par l'origine; la réduction est l'espace projectif  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  muni de la forme symplectique  $r^2 \omega_{FS}$  où  $\omega_{FS}$  est la forme de Fubini-Study.

Les variétés symplectiques possèdent des morphismes distingués : une application  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  est *symplectique* si  $\phi^* \omega_2 = \omega_1$ . Nous conviendrons de réserver l'expression *symplectomorphisme* aux applications symplectiques entre

variétés symplectiques équidimensionnelles. Un calcul simple permet d'établir que  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  est symplectique si et seulement si son graphe  $\Gamma_\phi := \{(m, \phi(m)) \in M_1 \times M_2 \mid m \in M_1\}$  est isotrope pour la forme symplectique  $\omega_1 \oplus -\omega_2$ ; en particulier,  $\phi$  est un symplectomorphisme si et seulement si son graphe est lagrangien. Signalons d'ores et déjà que la notion de fonction symplectique que nous étudierons au chapitre 1 vise à généraliser quelque peu les applications symplectiques.

La fermeture de la forme symplectique donne lieu à l'important *théorème de Darboux* : pour toute variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  et pour tout point  $m \in M$ , il existe un ouvert  $m \in U \subset M$  et une carte  $\phi : (U, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  qui est symplectique. Une telle carte est appelée une *carte de Darboux*, et les coordonnées associées sont des *coordonnées de Darboux*. Diverses preuves de ce résultat existent : l'une d'elle consiste à étendre les coordonnées symplectiques standard en  $(T_m M, \omega_m) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  afin d'obtenir une carte  $\phi'$  près de  $m$  dans laquelle  $\omega$  se lit  $\omega_0 + d\alpha$  avec  $d\alpha_{\phi'(m)} = 0$ , puis recourt à l'astuce de Moser afin de construire une diffeotopie locale  $\psi_t$  près de  $\phi'(m)$ , qui fixe ce point et qui satisfasse  $\psi_t^* \omega_0 = \omega_0 + t d\alpha$ ; la carte  $\phi := \psi_1 \circ \phi'$  est telle que souhaitée. Incidemment, toutes les variétés symplectiques d'une dimension donnée sont localement identiques. Il résulte de ce fait que les variétés symplectiques n'admettent aucun invariant local autre que la dimension; toute quantité qui parviendrait à distinguer des variétés symplectiques de même dimension devrait sonder ces variétés dans leur globalité. C'est de ce premier constat que point la possibilité d'une topologie symplectique.

### 0.1.2. Dynamique hamiltonienne et crochet de Poisson

L'ensemble des difféomorphismes symplectiques à support compact d'une variété symplectique est noté  $\text{Symp}(M, \omega)$ <sup>4</sup>. C'est un sous-groupe de Lie de dimension infinie du groupe de tous les difféomorphismes de  $M$  dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{symp}(M, \omega)$  correspond à l'ensemble des champs vectoriels lisses  $X$  sur  $M$  dont la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  partout sur  $M$ ; par l'identité de Cartan et la fermeture de  $\omega$ , il s'agit des champs vectoriels vérifiant  $d(X \lrcorner \omega) = 0$ .

La sous-algèbre de Lie formée par les champs vectoriels  $X$  pour lesquels les 1-formes  $X \lrcorner \omega$  sont exactes est l'*algèbre des champs hamiltoniens*, notée  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$ . Autrement dit, un champ hamiltonien est un champ vectoriel  $X$  tel qu'il existe une fonction réelle lisse  $H \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ , appelée *fonction hamiltonienne* ou encore

4. Bien que la restriction aux difféomorphismes à support compact ne soit pas nécessaire pour la présente sous-section, elle nous importera dans le cadre de la géométrie de Hofer.

simplement *hamiltonien*, qui satisfait  $X \lrcorner \omega = -dH$  ; la notation  $X = X_H$  dénote du hamiltonien qui « génère » le champ hamiltonien  $X$ <sup>5</sup>. Les difféomorphismes symplectiques obtenus en intégrant des chemins lisses  $t \mapsto X_{H_t}$  dans  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$  depuis l'identité, c'est-à-dire les solutions  $\Phi_t : M \rightarrow M$  à un problème de Cauchy du type

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X_{H_t}(\Phi_t(x)) \text{ et } \Phi_0(x) = x \text{ pour tout } x \in M,$$

forment le *groupe des difféomorphismes hamiltoniens*, noté  $\text{Ham}(M, \omega)$ . Nous allons maintenant montrer que  $\mathfrak{symplect}(M, \omega)$  est effectivement stable pour le crochet de Lie sur  $\mathfrak{diff}(M)$  ; en fait, étant donné deux champs symplectiques  $X, Y \in \mathfrak{symplect}(M, \omega)$ , leur crochet de Lie  $[X, Y]$  s'avère hamiltonien. En effet, nous calculons  $[X, Y] \lrcorner \omega = (\mathcal{L}_X Y) \lrcorner \omega = \mathcal{L}_X(Y \lrcorner \omega) - Y \lrcorner (\mathcal{L}_X \omega)$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont symplectiques,  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  et  $d(Y \lrcorner \omega) = 0$ , de sorte que  $[X, Y] \lrcorner \omega = -d(\omega(X, Y))$ , qui est une 1-forme exacte. Incidemment,  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$  est bien une sous-algèbre de Lie ; c'est même un idéal de  $\mathfrak{symplect}(M, \omega)$ .

L'emploi du nom « hamiltonien » est justifié par la raison suivante. Étant donné une famille lisse  $X_t$  de champs hamiltoniens donnée par une famille lisse de fonctions  $H_t$ , les courbes intégrales de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = X_t(x(t))$  satisfont donc  $\dot{x}(t) \lrcorner \omega_{x(t)} = -dH_{x(t)}$ . Cette dernière relation, lorsque lue dans une carte de Darboux  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ , devient le système de  $2n$  équations

$$\dot{p}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(x(t)) \text{ et } \dot{q}_j(t) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(x(t)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Nous reconnaissons ici les fameuses *équations de Hamilton* qui généralisent le célèbre deuxième principe de Newton dans le cadre du formalisme hamiltonien de la mécanique classique. Les variétés symplectiques apparaissent ainsi comme des scènes naturelles sur lesquelles se déroule le ballet des phénomènes mécaniques (classiques). Cette géométrisation des idées de Hamilton a été initiée notamment par le physicien J. W. Gibbs [Gi1, Gi2] et le mathématicien H. Poincaré [P1, P2] il y a un peu plus d'un siècle et a été grandement mise de l'avant depuis les années 1960, notamment par V. Arnold [Ar2].

Nous pouvons espérer que les propriétés globales des dynamiques hamiltoniennes que les variétés symplectiques supportent soient intimement liées à la

---

5. Notons que  $X$  a ici support compact et que le choix de  $H$  est unique à l'addition des constantes près. Ainsi, si  $M$  est fermée, nous pouvons choisir  $H$  de manière unique afin que  $\int_M H \omega^n = 0$  ; si  $M$  est ouverte, nous pouvons choisir  $H$  à support compact de manière unique ; ces choix sont dits *normalisés*. Nous noterons  $C_0^\infty(M; \mathbb{R})$  l'espace des fonctions normalisées, qui est isomorphe comme espace vectoriel à  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$ .



topologie (symplectique) de ces espaces. Cet espoir est avéré, en particulier à travers la théorie de Floer, sujet sur lequel nous glisserons quelques mots plus loin.

Nous avons jusqu'à maintenant adopté une approche ensembliste et, pour ainsi dire, covariante du formalisme symplectique. Ceci dit, le point de vue hamiltonien motive une perspective duale davantage axée sur les fonctions et, de ce fait, plus contravariante. Plus précisément, étant donné une variété symplectique  $(M, \omega)$ , définissons un autre (iso)morphisme de musicalité :

$$\omega^\sharp := -(\omega^\flat)^{-1} : T^*M \rightarrow TM .$$

Ainsi,  $\mathfrak{symp}(M, \omega)$  est l'image par  $\omega^\sharp$  des 1-formes réelles fermées sur  $M$ , tandis que  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$  est l'image par  $\omega^\sharp$  des 1-formes réelles exactes sur  $M$ . En fait, la relation  $X_H \lrcorner \omega = -dH$  s'exprime tout bonnement  $X_H = \omega^\sharp(dH)$ .

Ce nouveau morphisme de musicalité nous permet de définir un bivecteur  $\pi$  sur  $M$ , appelé *bivecteur de Poisson*, en posant pour  $m \in M$  et pour  $\alpha, \beta \in T_m^*M$

$$\pi_m(\alpha, \beta) := \omega_m(\omega^\sharp \alpha, \omega^\sharp \beta) .$$

Ce bivecteur définit lui-même un morphisme

$$\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM : \alpha \in T_m^*M \mapsto \pi_m(\alpha, -) ;$$

nous affirmons que  $\pi^\sharp = \omega^\sharp$ . En effet, pour tout  $X \in T_m M$  et  $\alpha \in T_m^*M$ , nous calculons

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= X(\alpha) = (\pi^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}X)(\alpha) = \pi_m((\pi^\sharp)^{-1}X, \alpha) = \omega_m(\omega^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}X, \omega^\sharp \alpha) \\ &= -\omega_m(\omega^\sharp \alpha, \omega^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}X) = (-\omega^\flat \omega^\sharp \alpha)(\omega^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}X) = \alpha(\omega^\sharp(\pi^\sharp)^{-1}X) . \end{aligned}$$

Ceci implique effectivement  $\omega^\sharp(\pi^\sharp)^{-1} = Id$ .

Le bivecteur  $\pi$  induit le *crochet de Poisson* sur l'espace des fonctions réelles lisses :

$$\begin{aligned} \{-, -\} : C^\infty(M; \mathbb{R}) \times C^\infty(M; \mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}) , \\ \{f, g\}(m) &:= \pi_m(df_m, dg_m) = \omega_m(X_f, X_g) . \end{aligned}$$

La lecture de cette définition dans une carte de Darboux révèle que

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) ,$$

expression qui coïncide bien avec celle rencontrée en mécanique hamiltonienne pour le crochet de Poisson. Il est clair que le crochet de Poisson est une application bilinéaire antisymétrique. Il s'agit même d'un crochet de Lie ; en fait, l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

s'avère équivalente à la fermeture de  $\omega$ . De plus, le crochet de Poisson est une (bi)dérivation, en ce sens que  $\{-, fg\} = f\{-, g\} + \{-, f\}g$ .

Une paire  $(M, \pi)$  est une *variété de Poisson* si  $\pi$  est un bivecteur tel que le crochet associé  $\{f, g\} = \pi(df, dg)$  est un crochet de Lie ; le morphisme de musicalité est alors plutôt noté  $\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM : \alpha \in T_m^*M \mapsto \pi_m(\alpha, -)$ . Observons que puisque tout covecteur  $\alpha \in T_m^*M$  peut s'exprimer sous la forme  $df_m$  pour une certaine fonction réelle lisse  $f$ , la donnée du crochet de Poisson suffit à reconstruire le bivecteur  $\pi$ . En vertu de ce qui précède, les variétés symplectiques sont des exemples de variété de Poisson. En fait, les variétés symplectiques se reconnaissent comme étant les variétés de Poisson pour lesquelles les seules fonctions  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  qui vérifient  $\{f, -\} = 0$  sont les constantes ; cette condition de non-dégénérescence correspond en effet à exiger que  $\pi^\sharp$  soit un monomorphisme, donc un isomorphisme, de sorte que nous puissions reconstruire la forme symplectique  $\omega = \pi \circ [(\pi^\sharp)^{-1} \otimes (\pi^\sharp)^{-1}]$ .

Étant donné deux variétés de Poisson  $(M_1, \pi_1)$  et  $(M_2, \pi_2)$ , une application lisse  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  est un *morphisme de Poisson* si  $\phi_*\pi_1 = \pi_2$ . Un tel morphisme peut alternativement être caractérisé en termes des crochets de Poisson associés :  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  est Poisson si et seulement si pour toutes  $f, g \in C^\infty(M_2, \mathbb{R})$ ,  $\phi^*\{f, g\}_{\pi_2} = \{\phi^*f, \phi^*g\}_{\pi_1}$  comme fonctions sur  $M_1$ . En effet, étant donné des fonctions lisses  $f, g \in C^\infty(M_2, \mathbb{R})$ , nous avons l'égalité entre fonctions

$$\begin{aligned} \phi^*\{f, h\}_{\pi_2} - \{\phi^*f, \phi^*g\}_{\pi_1} &= \phi^*(\pi_2(df, dg)) - \pi_1(d(\phi^*f), d(\phi^*g)) \\ &= \pi_2(df, dg) \circ \phi - \pi_1(\phi^*df, \phi^*dg) \\ &= [(\pi_2 - \phi_*\pi_1)(df, dg)] \circ \phi. \end{aligned}$$

Puisque l'évaluation en tout  $y \in M_2$  des 1-formes exactes sur  $M_2$  engendrent la fibre  $T_y^*M_2$ , la formule ci-dessus établie que

$$\phi^*\{-, -\}_{\pi_2} - \{\phi^*(-), \phi^*(-)\}_{\pi_1} = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_2 - \phi_*\pi_1 = 0.$$

Les variétés de Poisson offrent un cadre suffisant pour formuler géométriquement la mécanique hamiltonienne. En effet, étant donné une variété de Poisson

$(M, \pi)$  et un hamiltonien  $H \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ , le *champ hamiltonien engendré par  $H$*  est  $X_H = \pi^\sharp(dH)$ ; notons  $\mathfrak{ham}(M, \pi)$  l'ensemble des champs hamiltoniens. Les équations de Hamilton s'expriment simplement  $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$ . Rappelons qu'une *constante du mouvement*, encore appelée *intégrale première* ou *quantité conservée*, pour l'équation de Hamilton est une fonction  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  telle que pour toute solution  $x(t)$ ,  $df(\dot{x}(t)) = 0$  identiquement dans le temps. De telles fonctions tirent leur importance du fait qu'elles aident à localiser les solutions  $x(t)$  de l'équation de Hamilton dans la variété  $M$ , puisque les solutions doivent appartenir aux (intersections des) ensembles de niveau des diverses quantités conservées. En dénotant  $\langle -, - \rangle$  le produit de dualité entre  $TM$  et  $T^*M$ , la condition définissant une constante du mouvement se réécrit  $0 = \langle df, \pi^\sharp(dH) \rangle = \pi(dH, df) = \{H, f\}$ , de sorte qu'une fonction  $f$  est une constante du mouvement pour la dynamique générée par  $H$  si et seulement si  $\{H, f\} = 0$  identiquement sur  $M$ .

Plus généralement, nous avons  $-df(X_g) = \{f, g\} = dg(X_f)$ , ce qui établit que le crochet de Poisson calcule la variation instantanée d'une fonction le long du champ hamiltonien généré par une autre fonction. En outre, étant donné une variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  et  $k \leq n$  fonctions lisses  $f_1, \dots, f_k$  qui Poisson-commutent deux à deux (c'est-à-dire que  $\{f_i, f_j\} = 0$  pour tout  $i, j$ ) et dont les dérivées sont partout linéairement indépendantes, les ensembles de niveau de  $(f_1, \dots, f_k) : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  sont des sous-variétés coisotropes de codimension  $k$  de  $M$  dont la distribution canonique est générée par les  $k$  champs  $X_{f_j}$ . Ce constat motive d'ailleurs une notion de sous-variété coisotrope d'une variété de Poisson.

Mentionnons que l'application  $\delta := \pi^\sharp \circ d : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{ham}(M, \pi)$  est un morphisme de Lie pour le crochet de Poisson à la source et le crochet de Lie à la cible. Dans le cas particulier des variétés symplectiques, cela découle de nos considérations antérieures : pour  $X_f, X_g \in \mathfrak{ham}(M, \omega)$ , nous avons déjà établi que  $[X_f, X_g] \lrcorner \omega = -d\omega(X_f, X_g)$ , c'est-à-dire que  $[\delta f, \delta g] = \delta\{f, g\}$ . Plus encore, dans le cas symplectique, puisque  $\{f, g\}\omega^n = n df \wedge dg \wedge \omega^{n-1}$ , le théorème de Stokes implique que  $C_0^\infty(M; \mathbb{R})$  est stable sous le crochet de Poisson ; ainsi,  $\delta : C_0^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{ham}(M, \omega)$  est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

Le cumul de ces considérations établit toute l'importance que revêt le crochet de Poisson en mécanique classique, dans la théorie des systèmes dynamiques intégrables, mais aussi dans le cadre d'une *géométrie* symplectique où des objets géométriques (précis) sont décrits et étudiés en relation avec des fonctions lisses (précises). L'extension de ces idées aux variétés de Poisson conduit à la *géométrie de Poisson*, un vaste domaine de recherche qui est encore fort actif de nos jours.

### 0.1.3. Flexibilité chez les variétés symplectiques

Nous avons signalé qu'il découle du théorème de Darboux que la distinction de deux variétés symplectiques (de même dimension) nécessite forcément une étude globale desdites variétés. Ce projet et d'autres projets de nature similaire permettent certainement d'envisager l'existence d'une étude « topologique » des variétés symplectiques. Néanmoins, rien n'indique de prime abord qu'une telle étude aboutirait à une théorie des phénomènes symplectiques qui soit riche et ainsi digne de mention particulière : l'essentiel des phénomènes symplectiques pourrait se révéler approximé par des phénomènes qui ne sont pas de nature proprement symplectique. Le but de cette sous-section est de creuser un peu les raisons qui justifient cette possibilité nommée *flexibilité* (de la symplectique).

**Existence d'immersions symplectiques.** Étant donné deux variétés symplectiques  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$ , nous pouvons nous questionner quant à l'existence d'une application symplectique  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ . Observons qu'une telle application est nécessairement une immersion : si  $v \in \text{Ker } d\phi$ , alors  $v \lrcorner \omega_1 = v \lrcorner (\phi^* \omega_2) = \phi^*(d\phi(v) \lrcorner \omega_2) = 0$ , de sorte que  $v$  appartient à la section nulle de  $TM_1$  par non-dégénérescence de  $\omega_1$ . Conséquemment, il faut  $\dim M_1 \leq \dim M_2$  pour qu'une immersion symplectique existe. Le problème d'existence d'immersions symplectiques s'avère soumis à un h-principe, c'est-à-dire que le problème se réduit à l'existence d'un type d'applications passablement moins contraintes et de nature bien moins symplectique.

Étant donné une variété symplectique  $(M, \omega)$ , dénotons par  $[\omega] \in H_{dR}^2(M; \mathbb{R})$  la 2-classe de cohomologie à laquelle appartient  $\omega$ . Étant donné deux variétés symplectiques  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$ , appelons *morphisme symplectique formel* un morphisme de fibré  $F : TM_1 \rightarrow TM_2$  tel que

- (1) l'application sous-jacente  $f : M_1 \rightarrow M_2$  à  $F$ , à savoir l'unique application lisse faisant commuter le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{F} & TM_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array} \quad ,$$

vérifie  $f^*[\omega_2] = [\omega_1]$  ;

- (2) pour tout  $m \in M_1$ , l'application  $F_m : (T_m M_1, (\omega_1)_m) \rightarrow (T_{f(m)} M_2, (\omega_2)_{f(m)})$  est symplectique.

Un morphisme symplectique formel s'interprète donc comme un type particulier de section du fibré  $J^1(M_1, M_2) \rightarrow M_1$  où  $J^1(M_1, M_2)$  dénote l'espace des 1-jets d'applications lisses de  $M_1$  vers  $M_2$ . Notons  $FSymp(M_1, M_2)$  (s'il n'y a aucun risque de confusion quant aux formes symplectiques considérées) l'espace des morphismes symplectiques formels entre  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$  muni de la topologie induite par la topologie  $C^0$  sur l'espace des sections de  $J^1(M_1, M_2) \rightarrow M_1$ . Observons que le 1-jet d'une application symplectique  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  est un exemple de morphisme symplectique formel ; en d'autres termes, l'application tangente  $F := d\phi : TM_1 \rightarrow TM_2$  est un exemple de morphisme symplectique formel. L'adjectif « formel » sert à souligner le fait que  $df_m : T_m M_1 \rightarrow T_{f(m)} M_2$  et  $F_m : T_m M_1 \rightarrow T_{f(m)} M_2$  ne coïncident pas forcément pour un morphisme symplectique formel quelconque, alors qu'elles coïncident tautologiquement pour la différentielle d'une application symplectique. Notons  $Symp(M_1, M_2)$  (s'il n'y a aucun risque de confusion quant aux formes symplectiques considérées) l'espace des applications symplectiques entre  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$  muni de la topologie induite par la topologie  $C^1$  sur l'espace des fonctions lisses de  $M_1$  vers  $M_2$ . Ainsi, il y a une inclusion continue  $Symp(M_1, M_2) \subset FSymp(M_1, M_2)$ .

Suivant une notation maintenant répandue dans la littérature des h-principes, notons  $Op A$  afin de désigner un voisinage ouvert suffisamment petit (pour les besoins d'une situation donnée) d'un sous-ensemble  $A$  d'une variété  $M$ . Étant donné une variété lisse  $M$ , un *polyèdre de  $M$*  est un sous-complexe simplicial d'une décomposition simpliciale de  $M$  ; la *codimension d'un polyèdre* est alors le minimum des codimensions des faces du polyèdre.

Nous sommes maintenant en position d'énoncer un h-principe d'ordre symplectique (16.4.2 dans [EMi]) : étant donné deux variétés symplectiques  $(M_1, \omega_1)$  et  $(M_2, \omega_2)$  et un polyèdre  $A \subset M_1$  de codimension strictement positive, l'inclusion  $Symp(Op A, M_2) \subset FSymp(Op A, M_2)$  est une équivalence d'homotopie. Ainsi, l'existence (de familles paramétrées) d'immersions symplectiques de minces voisinages de polyèdres  $A$  dans une variété symplectique est complètement déterminée par l'existence de (familles de) morphismes symplectiques formels ; ce dernier problème, quant à lui, peut souvent être abordé à l'aide de considérations purement topologiques qui n'ont rien de foncièrement symplectiques. Comme corollaires de ce h-principe (dit « local », car valide de prime abord uniquement près d'un polyèdre  $A$ ) et en raison de théorèmes de « voisinages symplectiques », il est possible d'établir que les problèmes d'immersions symplectiques de codimension deux ou plus, d'immersions isotropes, d'immersions lagrangiennes et d'immersions

coisotropes de codimension un ou plus satisfont des  $h$ -principes « globaux ». Le caractère symplectique de ces problèmes se révèle ainsi être bien moins central qu'il n'y paraissait aux premiers abords.

**Plongements symplectiques.** La condition d'immersion symplectique sur une application  $\phi$  n'opère qu'à un niveau infinitésimal. Or la richesse de la topologie n'émerge souvent qu'à travers l'étude de problèmes conditionnés à un niveau global ; il n'en va peut-être pas autrement de la topologie symplectique. Afin de sonder cette possibilité, considérons tout d'abord le problème d'existence de *plongements* symplectiques  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ , c'est-à-dire d'immersions symplectiques injectives.

Si  $M_1$  est une variété ouverte et si  $\dim M_1 < \dim M_2$ , alors le  $h$ -principe pour les immersions symplectiques se raffine en un  $h$ -principe pour les plongements symplectiques. Il en va de même si  $M_1$  est fermée et si  $\dim M_1 + 4 \leq \dim M_2$ . Nous référons le lecteur à 12.1.1 dans [EMi] pour connaître les raffinements utiles. La leçon que nous souhaitons tirer ici est qu'en présence d'hypothèses additionnelles convenables, les conditions de symplecticité et d'injectivité n'imposent pas de contraintes majeures à l'existence d'une telle application  $\phi$ , puisque ce problème se réduit largement à celui de l'existence d'une immersion symplectique formelle injective, cet autre problème pouvant lui-même être approché à l'aide de méthodes classiques de topologie différentielle.

Le problème de l'existence d'un plongement symplectique dans le cas équidimensionnel  $\dim M_1 = \dim M_2 = 2n$  est plus subtil. Il existe une obstruction à peu près évidente à l'existence d'un tel plongement, l'obstruction volumique, qui provient du fait (connu sous le nom de *théorème de Liouville* dans la littérature physique) qu'un symplectomorphisme  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$  préserve les formes volume associées,  $\phi^* \omega_2^n = \omega_1^n$ . Ce faisant, si  $\phi$  est un plongement symplectique, il en résulte que  $\text{Vol}(M_1, \omega_1) = \text{Vol}(\phi(M_1), \omega_2) \leq \text{Vol}(M_2, \omega_2)$ . La forme symplectique étant une structure plus fine que la forme volume induite, existe-t-il d'autres obstructions plus fines, symplectiques, à l'existence de plongements symplectiques, ou est-ce qu'au contraire l'essentiel de ce problème se réduit au problème de l'existence d'une application volumique ? Afin de sonder cette question, considérons plutôt un problème apparenté : étant donné deux plongements symplectiques  $\phi_0, \phi_1 : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ , existe-t-il une isotopie de plongements symplectiques  $\{ \phi_t : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2) \}_{t \in [0,1]}$  interpolant entre les deux ?

Un important résultat dû à A. Katok (à savoir le « lemme principal » dans [Ka]) rend plausible l'idée que la réponse à ce dernier problème soit affirmative, et ce en vertu de considérations essentiellement volumiques. Ce lemme implique en particulier qu'étant donné deux sous-variétés compactes de pleine dimension  $A, B \subset (M^{2n}, \omega)$  de même mesure (pour la mesure de Lebesgue induite par  $\omega^n$ ) tous deux compris dans un ouvert connexe  $U \subset M$  et  $\epsilon > 0$ , il existe une isotopie hamiltonienne  $\{\psi_t : M \rightarrow M\}_{t \in [0,1]}$  supportée dans  $U$  telle que  $\psi_0 = id$  et telle que la différence symétrique  $\psi_1(A) \Delta B$  a mesure inférieure à  $\epsilon$ .

Ce résultat est d'autant plus remarquable que la construction proposée pour  $\psi_t$  permet d'établir, avec un peu de minutie, qu'il existe des sous-variétés hautement disconnexes  $A' \subset A$  et  $B' \subset B$  de même mesure et de mesure arbitrairement près de celle de  $A$  et  $B$  pour lesquelles  $\psi_1 : A' \rightarrow B'$  est un difféomorphisme que nous pouvons passablement bien décrire, voire prescrire. En contrepartie à ce contrôle, le comportement de  $\psi_1$  sur  $U \setminus (A' \cup B')$  n'est à peu près pas contraint par cette construction. Pour résumer, le lemme de Katok implique qu'étant donné deux plongements symplectiques  $\phi_0, \phi_1 : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ , pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout ouvert connexe  $U$  qui contiendrait les images des deux plongements, il existe une isotopie de plongements symplectiques  $\{\phi'_t : (M_1, \omega_1) \rightarrow (U, \omega_2)\}_{t \in [0,1]}$  telle que  $\phi'_0 = \phi_0$  et telle que la mesure de  $\phi_1(M_1) \Delta \phi'_1(M_1)$  soit inférieure à  $\epsilon$ ; en outre,  $\phi_1$  et  $\phi'_1$  pourraient coïncider sur un ouvert (hautement disconnexe) de  $M_1$  de mesure arbitrairement près de celle de  $M_1$ .

**Difféomorphismes symplectiques.** En guise de dernière suggestion de la flexibilité des phénomènes topologiques symplectiques, mentionnons l'*alternative de Gromov* qui s'énonce comme suit (voir 3.4.4 (H) dans [G2]). Étant donné une variété symplectique fermée  $(M^{2n}, \omega)$ , la fermeture du groupe  $\text{Symp}(M, \omega)$  dans  $\text{Diff}(M)$  selon la topologie de la convergence uniforme consiste en l'une des deux possibilités suivantes :

**Rigidité :** soit la fermeture consiste en  $\text{Symp}(M, \omega)$  lui-même,

**Flexibilité :** soit la fermeture consiste en un sous-groupe (de codimension finie) du groupe des difféomorphismes volumiques de  $(M, \omega^n)$  qui contient notamment tous les difféomorphismes volumiques exacts, à savoir ceux obtenus en intégrant un chemin lisse de champs vectoriels  $X_t$  qui satisfait en tout temps  $[X_t \lrcorner \omega^n] = 0 \in H_{dR}^{2n-1}(M; \mathbb{R})$ .

Nous pourrions tendancieusement exprimer ce résultat comme suit : s'il existe un seul difféomorphisme (forcément volumique) de  $M$  qui ne soit pas symplectique et qui soit tout de même uniformément approximé par une suite de difféomorphismes

symplectiques, alors tous les difféomorphismes volumiques sont ainsi approximés.

La solution à l'alternative de Gromov est connue de nos jours sous le nom du *théorème d'Eliashberg-Gromov*, solution que nous expliquerons dans la prochaine sous-section. Il convient néanmoins de prolonger le suspense et de réfléchir quelque peu aux conséquences de l'alternative. Un invariant topologique symplectique devrait être (tautologiquement) invariant sous l'action de  $\text{Symp}(M, \omega)$  et devrait être vraisemblablement invariant sous l'action de la fermeture  $C^0$  de ce groupe. La flexibilité envisagée par l'alternative augure donc qu'un invariant symplectique puisse être obligatoirement invariant sous tous les difféomorphismes volumiques et, ce faisant, puisse ne pas être un invariant foncièrement symplectique.

#### 0.1.4. Rigidité chez les variétés symplectiques

Malgré ce que les éléments de flexibilité relevés dans la sous-section précédente laissent partiellement présager, la topologie symplectique ne se dissout pas dans les topologies volumique ou différentielle : elle est strictement plus fine que ces autres topologies. Les phénomènes symplectiques qui échappent à toute approximation par des phénomènes topologiques plus généraux donnent lieu à la *rigidité* de la topologie symplectique.

Le caractère rigide de la topologie symplectique était pressenti depuis longtemps, principalement à travers la rigidité soupçonnée de la dynamique hamiltonienne. En effet, le théorème de Poincaré-Birkhoff [**P3**, **Bi1**, **Bi2**] (consulter aussi [**BN**]) stipule qu'un homéomorphisme d'une couronne  $C \subset \mathbb{R}^2$  qui préserve les aires et qui fait tourner les deux frontières de  $C$  en des sens opposés doit posséder au moins deux points fixes ; en comparaison, il est aisé de trouver des exemples de difféomorphismes d'une couronne qui ne vérifient pas les deux hypothèses et qui n'ont aucun point fixe. Dans les années 1960, Arnold a réalisé que le théorème de Poincaré-Birkhoff découle de la conjecture (maintenant dite *d'Arnold*) suivante (voir [**Ar1**] et aussi l'appendice 9 dans [**Ar2**]) : tout difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique fermée  $(M, \omega)$  possède au moins autant de points fixes qu'une fonction réelle lisse sur  $M$  doit avoir de points critiques. Notons qu'une fonction réelle lisse sur une variété fermée possède au moins deux points critiques, à savoir ses points extrémaux ; en comparaison, sur le tore  $T^{2n}$ , une translation type ne possède aucun point fixe. La conjecture d'Arnold prétend ainsi à un comportement singulier, « rigide », des difféomorphismes hamiltoniens. Cette conjecture a été établie dans plusieurs circonstances au tournant des années



1970-1980 : mentionnons seulement le travail d'Eliashberg pour les surfaces [E1], le travail de Conley et Zehnder pour les tores [CZ] et le travail de Fortune et Weinstein pour les espaces projectifs complexes [FW]. L'avènement de l'homologie (hamiltonienne) de Floer vers la fin des années 1980 et son développement dans les années subséquentes ont permis de montrer (une version homologique affaiblie de) la conjecture d'Arnold pour toutes les variétés symplectiques.

Un certain scepticisme demeure néanmoins quant à la rigidité des phénomènes symplectiques. Dans quelle mesure la rigidité de la dynamique hamiltonienne traduit-elle la rigidité de la topologie symplectique dans son ensemble ? Est-il possible que la rigidité de la dynamique hamiltonienne trahisse plutôt une rigidité présente chez les difféomorphismes volumiques exacts ? Afin de nous convaincre du caractère rigide de la symplectique, il convient que nous retournions aux sujets abordés dans la sous-section précédente. Nous devons tout d'abord aborder l'ingrédient clé qui permette d'établir cette rigidité.

**Structures presque complexes.** Une *structure presque complexe* sur une variété  $M$  est un endomorphisme lisse  $J : TM \rightarrow TM$  qui satisfait  $J^2 = -Id$  ; une telle structure n'existe que si  $M$  a dimension paire. Une telle paire  $(M, J)$  est une *variété presque complexe*. Si  $M = \Sigma$  a dimension réelle deux, une variété presque complexe  $(\Sigma, J)$  est plutôt appelée une *surface de Riemann*.

Soit une variété presque complexe  $(M, J)$ . Une *courbe  $J$ -holomorphe* est une application lisse  $u : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$  qui satisfait l'*équation de Cauchy-Riemann* (*non linéaire*)  $J \circ du = du \circ j$ , où  $(\Sigma, j)$  est une surface de Riemann.

Étant donné une variété symplectique  $(M, \omega)$ , une structure presque complexe  $J \in \text{End } TM$  est dite *compatible avec  $\omega$*  si

- (1)  $J$  est *dominée* (ou *calibrée*) *par  $\omega$* , c'est-à-dire que pour tout  $m \in M$ ,  $\omega_m(v, Jv) > 0$  pour tout  $v \in T_m M$  non nul ;
- (2)  $J$  est un endomorphisme symplectique formel, c'est-à-dire que pour tout  $m \in M$ ,  $\omega_m(Jv, Jw) = \omega_m(v, w)$  pour tout  $v, w \in T_m M$ .

Pour une telle  $J$ ,  $g_J(v, w) := \omega(v, Jw)$  est une métrique riemannienne sur  $M$  ; le triplet  $(\omega, J, g_J)$  est dit *compatible*. L'espace  $\mathcal{J}(M, \omega)$  des structures presque complexes compatibles n'est jamais vide et est toujours contractile [G2].

Une observation fondamentale de Gromov [G1] est que l'étude des courbes  $J$ -holomorphes dans une variété presque complexe  $(M, J)$  est facilitée par la présence d'une forme symplectique  $\omega$  sur  $M$  (si une telle forme existe sur  $M$ ) compatible avec  $J$ . Incidemment, les courbes  $J$ -holomorphes permettent de sonder la topologie symplectique d'une variété symplectique : étant donné un problème symplectique sujet à certaines conditions globales, ce problème peut souvent être reconverti en un problème d'existence de courbes  $J$ -holomorphes assujetties à certaines conditions énergétiques, frontières et homologiques. La « rigidité » des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire le fait que ces solutions forment souvent un espace de dimension finie, voire un ensemble fini, traduit alors une certaine rigidité du problème symplectique de départ lui-même. À bien des égards, les courbes  $J$ -holomorphes s'interprètent comme étant les « géodésiques » d'une variété symplectique, de sorte que la topologie symplectique s'interprète comme une « géométrie bidimensionnelle », et chaque problème de nature symplectique appelle à considérer les « géodésiques » les plus appropriées à le sonder.

Afin d'exemplifier un tant soit peu cette observation de Gromov, remarquons que pour un triplet compatible  $(\omega, J, g)$  sur  $M$ , dans chaque  $T_m M$  nous avons les identités  $\omega(v, w) = g(Jv, w)$  et  $g(Jv, Jw) = g(v, w)$ . Ainsi, en évoquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons l'*inégalité de Wirtinger*  $|\omega(v, w)| \leq \|v\|_g \|w\|_g$ , le cas d'égalité ayant lieu si et seulement si  $Jv$  et  $w$  sont colinéaires. Étant donné une surface compacte orientée  $\Sigma$  et une application lisse  $u : \Sigma \rightarrow (M, \omega, J, g)$ , nous pouvons considérer les structures rappelées  $\bar{\omega} = u^*\omega$  et  $\bar{g} = u^*g$ ; le 2-tenseur symétrique  $\bar{g}$  détermine la 2-densité  $|\sigma_{\bar{g}}|(v, w) := (\bar{g}(v, v)\bar{g}(w, w) - \bar{g}(v, w)^2)^{1/2}$  sur  $\Sigma$ , et l'orientation sur  $\Sigma$  permet de définir sans ambiguïté une 2-forme sous-jacente  $\sigma_{\bar{g}}$ . Du fait que  $\|v\|_{\bar{g}}\|w\|_{\bar{g}} = \sigma_{\bar{g}}(v, w)$  si  $\{v, w\}$  forme une paire orientée de vecteurs  $\bar{g}$ -orthogonaux, il résulte de l'inégalité de Wirtinger que  $\bar{\omega}(v, w) \leq \sigma_{\bar{g}}(v, w)$  pour tout  $p \in \Sigma$  et pour tout  $v, w \in T_p \Sigma$ , avec égalité si et seulement si  $Jdu(v)$  et  $du(w)$  sont positivement colinéaires. Il en résulte la forme intégrale suivante de l'inégalité de Wirtinger,

$$A_\omega(u) := \int_\Sigma u^*\omega \leq E_g(u) := \int_\Sigma \sigma_{u^*g}$$

où  $A_\omega(u)$  est la  $\omega$ -aire de  $u$  et où  $E_g(u)$  est l'énergie de  $u$ . Notons que l'égalité  $A_\omega(u) = E_g(u)$  tient si et seulement si pour tout  $p \in \Sigma$ ,  $du(T_p \Sigma)$  est compris dans une droite  $J$ -complexe de  $T_{u(p)} M$  d'orientation compatible; en particulier, si  $(\Sigma, j)$  est une surface de Riemann, alors l'égalité tient si  $u$  est  $J$ -holomorphe. Une propriété fondamentale de la  $\omega$ -aire est que sa valeur ne dépend que de la

classe d'homologie (relative) que représente  $u$ . Ainsi, les courbes  $J$ -holomorphes minimisent l'énergie parmi toutes les courbes représentant une classe d'homologie (relative) donnée. Puisque l'énergie s'avère égale à la superficie induite par la métrique  $g$ , les  $J$ -courbes d'une variété symplectique sont des surfaces minimisantes et s'apparentent ainsi effectivement beaucoup aux géodésiques.

Une variété symplectique  $(M, \omega)$  est dite *symplectiquement asphérique* si l'intégration du rappel de  $\omega$  par toute application lisse  $u : S^2 \rightarrow M$  est nulle. Mentionnons un résultat d'existence et d'unicité des courbes  $J$ -holomorphes qui suit d'un résultat plus général de Gromov [G1] :

**Théorème 0.1.4.1.** *Soient une variété symplectique  $(N, \omega) = (S^2 \times M, \omega_{S^2} \oplus \omega_M)$  où  $(M, \omega_M)$  est symplectiquement asphérique et  $J$  une structure presque complexe compatible avec  $\omega$ . Alors pour n'importe quel point  $p \in N$ , il existe une (unique à reparamétrage près) courbe  $J$ -holomorphe plongée  $u : (S^2, j) \rightarrow (N, J)$  passant par  $p$  et représentant la classe d'homologie  $[S^2 \times \{p\}] \in H_2(N)$ . Bref,  $N$  est feuilletée par des  $J$ -courbes plongées représentant la classe du facteur  $S^2$  dans le produit  $S^2 \times M$ .*

**Non-tassement des plongements symplectiques.** En géométrie riemannienne, les géodésiques dans une variété riemannienne  $(M, g)$  permettent de définir le rayon d'injectivité  $\text{inj}(M, g)$  de ladite variété; pour qu'un plongement isométrique  $u : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$  existe, il faut nécessairement que l'inégalité  $\text{inj}(M_1, g_1) \leq \text{inj}(M_2, g_2)$  tienne. À l'aide de la théorie des courbes  $J$ -holomorphes, Gromov a découvert un phénomène analogue en symplectique :

**Théorème 0.1.4.2** (Non-tassement symplectique [G1]). *S'il existe un plongement symplectique  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0)$ , alors  $r \leq R$ . Ici,  $B^{2m}(r)$  désigne la boule fermée de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$ .*

*Démonstration :* Soit  $\phi$  un tel plongement. Pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut compactifier la boule  $B^2(R + \epsilon)$  en une sphère  $S^2(A)$  d'aire  $A = \pi(R + \epsilon)^2$ ; nous obtenons ainsi un plongement symplectique  $\phi' : B^{2n}(r) \hookrightarrow S^2(A) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$ . Puisque l'image de ce plongement est compacte, il existe  $L > 0$  suffisamment grand tel que  $S^2(A) \times [-L, L]^{2(n-1)} \supset \text{Im } \phi'$ ; en compactifiant ce cube  $[-L, L]^{2(n-1)}$  en un tore  $T^{2(n-1)}(L)$ , nous obtenons un plongement symplectique  $\phi'' : B^{2n}(r) \rightarrow N = S^2(A) \times T^{2(n-1)}(L)$ . Notons  $\omega$  la structure symplectique ainsi induite sur  $N$ . Maintenant, puisque  $\phi''$  est un plongement, nous pouvons pousser la structure complexe standard  $J_0$  sur  $B^{2n}(r)$ , vue comme sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ , afin

de définir une structure presque complexe  $J$  sur l'image  $B$  de  $\phi''$ ; puisque  $\phi''$  est symplectique,  $J$  est compatible avec  $\omega$  sur  $B$ . Pour une raison apparentée à celle expliquant pourquoi  $\mathcal{J}(N, \omega)$  est contractile, nous pouvons prolonger  $J$  en une structure presque complexe définie sur tout  $N$  et compatible avec  $\omega$ . Du fait que le tore est (symplectiquement) asphérique, le résultat de Gromov mentionné à la sous-section précédente implique qu'il existe une  $J$ -courbe  $u : (S^2, j) \rightarrow (N, J)$  représentant la classe de la base  $S^2(A)$  et passant par le point  $\phi''(0)$ , où  $0 \in B^{2n}(r)$  est le centre de la boule. Ainsi,  $A_\omega(u) = A$ . Or, puisque  $u$  est  $J$ -holomorphe, le rappel  $u^*\omega$  est une 2-forme positive (pour l'orientation induite par  $j$ ), de sorte que l'intégrale de  $u^*\omega$  sur toute portion de  $S^2$  est aussi positive. Incidemment, si  $\Sigma$  dénote la composante connexe de  $u^{-1}(B)$  contenant  $0$ , alors  $\int_\Sigma u^*\omega \leq A$ . En outre, puisque  $(\phi^{-1} \circ u)(\Sigma)$  est une surface minimisante qui passe par  $0$  et dont le bord se trouve dans  $\partial B^{2n}(r)$ , le lemme de monotonie pour les surfaces minimales (consulter par exemple [Hum], p.103) implique  $\int_\Sigma u^*\omega \geq \pi r^2$ . Ainsi,  $\pi r^2 \leq A$ , c'est-à-dire  $r \leq R + \epsilon$ ; ceci étant vrai pour tout  $\epsilon$ , la conclusion suit.  $\square$

Ce non-tassement des plongements symplectiques n'est certainement pas une propriété partagée par les plongements volumiques : quel que soit  $r > 0$ ,

$$\psi_r : B^4(r) \rightarrow B^2(1) \times \mathbb{R}^2 : (p_1, q_1, p_2, q_2) \mapsto \left( \frac{p_1}{r}, \frac{q_1}{r}, rp_2, rq_2 \right)$$

est un plongement qui préserve la forme volume  $\omega_0^2$ .

Le phénomène de non-tassement symplectique montre que les limites du lemme de Katok ne sont pas dues à la méthode de démonstration, mais qu'elles sont essentiellement intrinsèques aux plongements symplectiques. Rappelons que le lemme de Katok montre que pour  $r > R > 0$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un plongement symplectique  $\phi : B^{2n}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tel  $\phi(A') \subset B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$  pour un sous-ensemble ouvert  $A' \subset B^{2n}(r)$  tel que  $\text{Vol}(B^{2n}(r) \setminus A') < \epsilon$ . Le théorème de non-tassement établit néanmoins qu'aucune composante connexe de  $A'$  ne peut contenir une  $J_0$ -courbe d'aire supérieure à  $\pi R^2$ , de sorte que  $A'$  doit être (haute-ment) disconnexe<sup>6</sup>, et que  $\phi$  est « indomptable » sur  $A'' := B^{2n}(r) \setminus A'$ , puisque

6. Notons cependant que le sous-ensemble  $A'$  peut être choisi de sorte à intersecter une portion arbitrairement grande (en superficie) d'une  $J_0$ -courbe plongée. De plus, comme le suggère un h-principe susmentionné, il existe des  $J_0$ -courbes plongées d'aire arbitrairement élevée. En effet, soient  $0 < r < 1$  et considérons  $\delta, \epsilon > 0$  tels que  $(1 - \delta)^2 + \epsilon^2 = 1$ . En utilisant les coordonnées complexes  $z_k = p_k + iq_k$  sur  $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ , posons  $\psi_n : B^2(1) \rightarrow B^4(r) : z \mapsto ((1 - \delta)rz, \epsilon rz^n)$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Il s'agit d'un plongement holomorphe qui passe par  $0$  et qui envoie  $\partial B^2(1) \rightarrow \partial B^4(r)$ ; la forme rappelée  $\phi^*\omega_0$  est ainsi symplectique, est compatible avec la structure  $J_0$  sur  $B^2(1)$  et a aire  $A_n = [(1 - \delta)^2 + n^2\epsilon^2]\pi r^2 = [1 + (n^2 - 1)\epsilon^2]\pi r^2$ . En évoquant un résultat de Dacorogna-Moser [DaM], il existe un difféomorphisme symplectique  $\rho_n : (B^2(\sqrt{A_n/\pi}), \omega_0) \rightarrow (B^2(1), \phi^*\omega_0)$ , de

$\phi(A'')$  doit intersecter le complément de  $B^2(r) \times \mathbb{R}^{2(n-1)} \supset B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Ceci montre que les phénomènes symplectiques se trouvent à l'interface flexibilité-rigidité comme à peu près nul autre phénomène géométrique : les plongements symplectiques entre domaines de  $\mathbb{R}^{2n}$  ne sont pas déterminés par leur aspect local, contrairement aux plongements isométriques en raison du théorème de Mazur-Ulam [MU], mais ils sont plus contraints que les plongements volumiques, qui existent essentiellement dès que le codomaine a volume supérieur au domaine en raison du théorème de Dacorogna-Moser [DaM].

Mentionnons que le phénomène de non-tassement des boules symplectiques est fort général. En effet, Lalonde et McDuff [LM1] ont montré que pour n'importe quelle variété symplectique  $(M^{2(n-1)}, \omega)$ , s'il existe un plongement symplectique  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (B^2(R) \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$ , alors  $r \leq R$ . Il a été établi ensuite par plusieurs auteurs que la même conclusion tient en remplaçant  $B^2(R)$  par la 2-sphère de même aire  $\pi R^2$  ; consulter le chapitre 12 de [MS2] pour des références. En contrepartie à ce phénomène, Lalonde [L1], Polterovich (voir 12.4 dans [MS2]) et Traynor [T] ont donné divers exemples montrant qu'un certain tassement est possible dans un produit de la forme  $(T^2(A) \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$  où  $(T^2(A), \omega_0) = (\mathbb{R}^2/(\sqrt{A}\mathbb{Z})^2, \omega_0)$ , en ce sens qu'il existe parfois un plongement symplectique de  $B^{2n}(r)$  dans un tel produit qui satisfasse  $\pi r^2 > A$ .

**Capacités symplectiques.** Le non-tassement symplectique illustre le caractère bidimensionnel des phénomènes symplectiques à travers l'inégalité des « aires »  $\pi r^2 \leq \pi R^2$ . Afin de rendre compte d'une idée de « taille bidimensionnelle » des variétés symplectiques qui évoque le rayon d'injectivité en géométrie riemannienne, Ekeland et Hofer [EH] ont introduit la notion suivante. Une *capacité symplectique*  $c$  (en dimension  $2n$ ) associe à toute variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  un nombre  $c(M, \omega) \in [0, \infty]$  en respectant les propriétés suivantes :

**Conformité :**  $c(M, \lambda\omega) = \lambda^2 c(M, \omega)$  pour tout  $\lambda \neq 0$  ;

**Monotonie :** s'il existe un plongement symplectique  $\phi : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ , alors  $c(M_1, \omega_1) \leq c(M_2, \omega_2)$  ;

**Normalisation :**  $c(B^{2n}(1), \omega_0) = c(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0) = \pi$ .

L'existence d'une capacité symplectique (en dimension  $2n$ ) est équivalente à la validité du non-tassement symplectique (en dimension  $2n$ ). D'une part, étant

---

sorte que  $\phi_n := \psi_n \circ \rho_n : (B^2(\sqrt{A_n/\pi}), \omega_0, \rho_n^* J_0) \rightarrow (B^4(r), \omega_0, J_0)$  est un plongement symplectique,  $J_0$ -holomorphe, relatif aux bords et qui passe par 0.

donné une telle capacité  $c$ , nous déduisons des axiomes

$$\begin{aligned} c(B^{2n}(r), \omega_0) &= c(B^{2n}(1), r^2\omega_0) = \pi r^2, \\ c(B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0) &= c(B^2(1) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, R^2\omega_0) = \pi R^2, \end{aligned}$$

de sorte qu'un plongement symplectique  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0)$  existe (si et) seulement si  $\pi r^2 \leq \pi R^2$ , ce qui est l'énoncé du non-tassement symplectique. D'autre part, le non-tassement symplectique implique que les deux associations suivantes respectent l'axiome de normalisation (puisqu'elles respectent clairement les deux autres axiomes, il s'agit de capacités symplectiques en dimension  $2n$ ) : la *taille de Gromov*

$$c_B(M, \omega) := \sup \{ \pi r^2 : \exists \phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega) \text{ symplectique} \}$$

et la *capacité cylindrique*

$$c^Z(M, \omega) := \inf \{ \pi R^2 : \exists \phi : (M, \omega) \hookrightarrow (B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0) \text{ symplectique} \}.$$

Observons que pour toute capacité symplectique  $c$  (en dimension  $2n$ ), nous avons  $c_B(M, \omega) \leq c(M, \omega) \leq c^Z(M, \omega)$  pour toute variété symplectique  $(M, \omega)$ . Soulignons aussi que le non-tassement symplectique de Lalonde-McDuff s'exprime  $c_B(B^2(R) \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega) \leq \pi R^2$  quel que soit  $(M^{2(n-1)}, \omega)$ . Mentionnons qu'il est possible et parfois pertinent de définir la notion de capacité symplectique uniquement sur une sous-catégorie des variétés symplectiques de dimension  $2n$ , par exemple la sous-catégorie des domaines de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ; consulter [CHLS].

**Isotopies de plongements symplectiques.** Dans la section 0.1.3, nous avons signalé que le lemme de Katok permettait d'envisager que n'importe quels deux plongements symplectiques  $\phi_0, \phi_1 : (M_1^{2n}, \omega_1) \rightarrow (M_2^{2n}, \omega_2)$  puissent être reliés par une isotopie de plongements symplectiques  $\phi_t : (M_1^{2n}, \omega_1) \rightarrow (M_2^{2n}, \omega_2)$ . La théorie des courbes  $J$ -holomorphes décrite précédemment a permis de confirmer ce présage en quelques circonstances, mais l'a aussi infirmé en d'autres circonstances. Par exemple, McDuff [M] a montré que dans le cas des boules symplectiques  $M_1 = B^4(r)$  et  $M_2 = B^4(R)$ ,  $r \leq R$ , munies de leur forme symplectique standard, l'espace des plongements symplectiques (muni de la topologie  $C^\infty$ ) est connexe. En comparaison, Eliashberg et Gromov ([EG], section 3.4.B) ont établi que pour  $r < R$ , si  $M_1 = B^4(r)$  et si  $M_2$  est formé de deux boules disjointes  $B^4(R)$  reliées par un tube très mince, les formes symplectiques étant standard, alors l'espace des plongements symplectiques de  $M_1$  vers  $M_2$  est disconnexe. De très nombreux travaux se sont depuis intéressés à la topologie de divers espaces de plongements symplectiques ; l'étude plus particulière de leurs composantes

connexes est souvent désigné comme étant le « problème du chameau symplectique » (voir par exemple le chapitre 14, problème 48 dans la troisième édition de [MS2]).

**Fermeture du groupe des difféomorphismes symplectiques.** En guise de dernière manifestation de la rigidité symplectique pour cette sous-section, considérons à nouveau l'alternative de Gromov concernant la fermeture  $C^0$  parmi les difféomorphismes des symplectomorphismes d'une variété fermée  $(M, \omega)$ . Eliashberg [E2, E3] a démontré que le groupe des difféomorphismes symplectiques est toujours fermé  $C^0$ , ce qui a été confirmé par Gromov en utilisant les courbes  $J$ -holomorphes ; voir §3.4.4.(H-I) dans [G2]. Ce résultat est désormais couramment désigné sous l'appellation de *théorème d'Eliashberg-Gromov*. Ekeland et Hofer [EH] ont donné une autre démonstration de ce résultat grâce aux capacités. Deux grandes idées sont en jeu : la première consiste à montrer qu'un difféomorphisme  $\phi : M \rightarrow M$  qui est la limite  $C^0$  d'une suite de symplectomorphismes préserve la capacité de tout ellipsoïde  $E$  suffisamment petit,  $c(\phi(E), \omega) = c(E, \omega)$  ; la seconde consiste à établir qu'un difféomorphisme qui préserve la capacité de tout ellipsoïde suffisamment petit est un (anti)symplectomorphisme,  $\phi^*\omega = \pm\omega$ . Par continuité, il en résulte qu'un difféomorphisme qui est la limite  $C^0$  d'une suite de symplectomorphismes est lui-même un symplectomorphisme.

### 0.1.5. Géométrie de Hofer

Rappelons que le groupe des difféomorphismes hamiltoniens  $\text{Ham}(M, \omega)$  d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  (que nous supposons ici fermée) est modélisé sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{ham}(M, \omega)$  qui est isomorphe à  $C_0^\infty(M; \mathbb{R})$ . Hofer [H] s'est intéressé à la (pseudo-)métrique finslérienne obtenue sur  $\text{Ham}(M, \omega)$  en considérant la norme  $\|F\| := \max_M F - \min_M F$  sur  $C_0^\infty(M; \mathbb{R})$  que nous observons être invariante sous l'action de tous les difféomorphismes de  $M$ .

Plus exactement, la (pseudo-)norme de Hofer sur  $\text{Ham}(M, \omega)$ , aussi appelée l'énergie de Hofer, est

$$\|\phi\|_H := \inf \left\{ \int_0^1 \|H_t\| dt : H \in C_0^\infty(M \times [0, 1]; \mathbb{R}), \phi_{X_H}^1 = \phi \right\},$$

ce qui donne lieu à la (pseudo-)métrique de Hofer sur  $\text{Ham}(M, \omega)$

$$d_H(\phi, \psi) := \|\phi\psi^{-1}\|_H.$$

Ici,  $C_0^\infty(M \times [0, 1]; \mathbb{R})$  dénote l'espace des fonctions lisses sur  $M \times [0, 1]$  qui sont normalisées en chaque instant  $t \in [0, 1]$ .

Il est plutôt aisé de montrer que ces quantités respectent tous les axiomes d'une pseudo-norme sur un groupe et d'une pseudo-métrie. Premièrement, le difféomorphisme identité est généré par  $H = 0$ , d'où  $\|Id\|_H = 0$ . Deuxièmement, si  $\phi$  et  $\psi$  sont respectivement générés par  $F_t$  et  $G_t$ , alors  $\phi \circ \psi$  s'avère généré par  $H_t := F_t + G_t \circ \phi_t^{-1}$ , d'où  $\|H_t\| \leq \|F_t\| + \|G_t\|$  et donc  $\|\phi \circ \psi\|_H \leq \|\phi\|_H + \|\psi\|_H$ . Troisièmement, si  $\phi$  est généré par  $F_t$ , alors par les deux points précédents,  $\phi^{-1}$  est généré par  $-F_t \circ \phi_t$ , d'où  $\|\phi\|_H = \|\phi^{-1}\|_H$ . Incidemment, nous avons  $d_H(\phi, \phi) = 0$ ,  $d_H(\phi, \psi) \leq d_H(\phi, \theta) + d_H(\theta, \psi)$  et  $d_H(\phi, \psi) = d_H(\psi, \phi)$ . En outre, nous avons clairement  $d_H(\phi, \psi) = d_H(\phi \circ \theta, \psi \circ \theta)$ , tandis que  $d_H(\phi, \psi) = d_H(\theta \circ \phi, \theta \circ \psi)$  en raison de  $\|\eta\|_H = \|\eta \circ \xi \circ \eta^{-1}\|_H$  qui découle du fait que si  $\xi$  est généré par  $H_t$ , alors  $\eta \circ \xi \circ \eta^{-1}$  est généré par  $H_t \circ \eta^{-1}$ .

L'observation cruciale de Hofer [H] est que pour  $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , il s'agit là d'une véritable norme et d'une véritable métrique sur  $\text{Ham}(M, \omega)$ , c'est-à-dire que  $\|\phi\|_H = 0$  implique  $\phi = Id$  et donc que  $d_H(\phi, \psi) = 0$  implique  $\phi = \psi$ . Ce fait a ensuite été généralisé à d'autres variétés symplectiques par Viterbo [V] et Polterovich (voir [Po1]) et a été établi pour toutes les variétés symplectiques par Lalonde et McDuff [LM1] qui ont montré comment cette non-dégénérescence de la norme de Hofer découle du non-tassement symplectique. Pour comprendre ce point, suivant Hofer, disons qu'un sous-ensemble  $X \subset (M, \omega)$  est *disjoignable* s'il existe un difféomorphisme hamiltonien  $\phi$  (à support compact) tel que  $\phi(\bar{X}) \cap \bar{X} = \emptyset$ .<sup>7</sup> Définissons l'*énergie de disjonction d'un ensemble*  $X \subset M$  comme étant

$$e_H(X) := \inf \left\{ \|\phi\|_H : \phi \in \text{Ham}(M, \omega), \phi(\bar{X}) \cap \bar{X} = \emptyset \right\},$$

où nous posons  $e_H(X) = +\infty$  si  $X$  n'est pas disjoignable. Si  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$  n'est pas l'identité, il déplace un point  $p \in M$  et donc disjoint une petite boule symplectique  $B$  centrée en  $p$  d'elle-même, de sorte que  $e_H(B) \leq \|\phi\|_H$ .<sup>8</sup> Afin de démontrer la non-dégénérescence de la norme de Hofer, il suffit ainsi de démontrer que  $e_H(B) > 0$  pour toute boule symplectique; pour ce faire, l'ingrédient clé est l'*inégalité capacité-énergie*

$$c_B(X) \leq e_H(X).$$

Hofer [H] a établi cette inégalité lorsque  $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Lalonde-McDuff [LM1] ont redémontré la même inégalité pour  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  et ont montré que, pour une variété symplectique  $(M^{2n}, \omega)$  quelconque, l'inégalité  $c_B(B) \leq 2e_H(B)$  tient

7. Incidemment,  $X$  est disjoignable si et seulement si sa fermeture  $\bar{X}$  est disjoignable. Cette exigence de disjointre la fermeture d'elle-même n'est pas anodine et permet d'obtenir une caractérisation assez nette de la disjonction lorsque  $M$  est une surface fermée; voir l'annexe A.

8. Dorénavant, suivant une pratique répandue, l'expression *boule symplectique* désignera l'image d'un plongement symplectique de la forme  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (M^{2n}, \omega)$ .



pour toute boule symplectique  $B \subset M$  qui est « strictement disjointe » d'elle-même, en ce sens qu'elle peut être disjointe d'une boule symplectique de taille double qui la contient, ce qui suffit à démontrer la non-dégénérescence de la norme de Hofer. En fait, ils démontrent que la validité d'une telle inégalité pour toutes les variétés symplectiques est équivalente au non-tassement symplectique des boules dans toutes les variétés de la forme  $B^2(R) \times M$  ; consulter [L2, ?]. Plus récemment, en utilisant la théorie des invariants spectraux (voir §0.1.7), Usher [U] a démontré que l'inégalité  $c_{HZ}(X) \leq e_H(X)$  tient pour tout sous-ensemble  $X \subset M$  de n'importe quelle variété symplectique fermée  $(M, \omega)$  et pour les variétés ouvertes qui sont pour ainsi dire « fermables » ; ici,  $c_{HZ}$  dénote la *capacité de Hofer-Zehnder (sensible au  $\pi_1(M)$ )* [HZ]. Remarquons que l'énergie de disjonction agit ainsi comme une capacité symplectique « relative à  $M$  » sur la sous-catégorie formée par les ouverts de  $(M, \omega)$ , en ce sens que

**Conformalité** : pour  $X \subset M$  et  $\lambda \neq 0$ ,  $e_H(X) \mapsto \lambda^2 e_H(X)$  lorsque  $\omega \mapsto \lambda \omega$  ;

**Monotonie** : pour  $X \subset Y \subset M$ ,  $e_H(X) \leq e_H(Y)$  ;

**Non-trivialité** : pour une boule symplectique  $B \subset M$ , alors  $c_B(B) \leq e_H(B)$ .

### 0.1.6. Rigidité $C^0$ du crochet de Poisson

Nous avons déjà souligné que l'algèbre de Poisson  $(C^\infty(M; \mathbb{R}), \{-, -\})$  permet de reconstruire la variété symplectique  $(M, \omega)$ . De ce fait, nous pouvons anticiper l'existence de divers phénomènes de rigidité du côté du crochet de Poisson. L'exploration de tels phénomènes apparaît néanmoins relativement récente, une recherche soutenue n'ayant émergée que depuis l'article de Cardin–Viterbo [CaV] et d'une série de travaux du duo Entov–Polterovich et de leurs collaborateurs (incluant [EnPo1, EnPo2, EnPoZ, Z, B]) tous parus depuis moins d'une quinzaine d'années.

Un des premiers et des plus emblématiques phénomènes de ce type est la *rigidité  $C^0$  du crochet de Poisson* sur les paires de fonctions, établie par Entov–Polterovich [EnPo2] et qui s'énonce comme suit :

**Théorème 0.1.6.1.** *Étant donné  $(M, \omega)$ , la fonctionnelle*

$$C_c^\infty(M; \mathbb{R}) \times C_c^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty) : (F, G) \mapsto \|\{F, G\}\|,$$

où  $\| - \|$  dénote la norme uniforme, est semi-continue inférieurement dans la topologie  $C^0$  (induite par la norme), c'est-à-dire que pour toute paire de fonctions

$F, G \in C_c^\infty(M; \mathbb{R})$ ,

$$\liminf_{f, g \xrightarrow{C^0} F, G} \|\{f, g\}\| = \|\{F, G\}\| .$$

Ce théorème généralise un résultat dû à Cardin et Viterbo [**CaV**], à savoir

$$\ll \liminf_{f, g \xrightarrow{C^0} F, G} \|\{f, g\}\| = 0 \text{ implique } \|\{F, G\}\| = 0 \gg$$

(notons que l'implication inverse est triviale), et généralise à toutes les variétés symplectiques la semi-continuité de cette fonctionnelle établie par Zapolsky dans le cas particulier des surfaces [**Z**]. Une démonstration assez courte de cette semi-continuité  $C^0$ , trouvée par Buhovski [**B**] et exposée dans [**PoR**], repose sur la positivité de l'énergie de disjonction des boules symplectiques<sup>9</sup>. L'argument va moralement comme suit : rappelons d'abord que  $\{F, G\}$  calcule le taux de variation instantané de  $F$  dans la direction du flot de  $G$ . Notons aussi que nous pouvons supposer que  $\{F, G\} \not\equiv 0$ . Près de là où la fonction  $|\{F, G\}|$  est maximale, après un court laps de temps  $s$  (possiblement négatif), l'application au temps  $s$  du flot de  $G$ ,  $\phi_s^G$ , disjoint une boule  $U$  suffisamment petite et ce suffisamment loin pour que  $\inf_U F - \sup_{\phi_s^G(U)} F = q > 0$ . Par la positivité de l'énergie de disjonction, dès qu'une fonction  $g$  est suffisamment proche  $C^0$  de  $G$ , il s'avère que  $\phi_s^g(U) \cap \phi_s^G(U) \neq \emptyset$ , de sorte qu'il y a un point  $p \in U$  qui est transporté par  $\phi_s^g$  dans  $\phi_s^G(U)$ . En choisissant  $f$  suffisamment près de  $F$ , nous avons  $f(p) - f(\phi_s^g(p)) \gtrsim q$  et le théorème des accroissements finis implique donc que le maximum de  $|\{f, g\}|$  ne peut pas être drastiquement inférieur au maximum de  $|\{F, G\}|$ .

La semi-continuité de la fonctionnelle  $\|\{F, G\}\|$  permet d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème d'Eliashberg-Gromov sur la fermeture  $C^0$  de  $\text{Symp}(M, \omega) \subset \text{Diff}(M)$  ; voir §2.2 dans [**PoR**]. La démonstration repose aussi sur la proposition suivante, qui découle de l'argumentaire dans [**PoR**] :

**Proposition 0.1.6.2.** *Soient  $(M^{2n}, \omega)$  et  $(N^{2n}, \eta)$  des variétés symplectiques et  $\phi : M \rightarrow N$  une submersion qui satisfait  $\phi^*\eta \neq c\omega$  pour toute constante  $c \neq 0$ . Alors il existe des fonctions  $F, G \in C_c^\infty(N)$  telles que  $\|\{F, G\}\| = 1/2$  et telles que  $\|\{\phi^*F, \phi^*G\}\| \geq 1$ .*

Afin d'en déduire le théorème d'Eliashberg–Gromov, considérons  $(M, \omega) = (N, \eta)$  et  $\phi \in \text{Diff}(M)$  qui n'est pas symplectique. Supposons par l'absurde qu'il existe

---

9. Buhovski [**B**] a même obtenu une estimée optimale du module de semi-continuité de la fonctionnelle  $(F, G) \mapsto \|\{F, G\}\|$ , la « loi 2/3 ». Une autre démonstration de ce résultat a été donnée par Entov et Polterovich [**EnPo3**].

une suite  $\phi_n \in \text{Symp}(M, \omega)$  qui converge uniformément vers  $\phi$ . Traitons d'abord le cas quand  $\phi$  ne vérifie pas  $\phi^*\omega = c\omega$  pour une certaine constante  $c$ . La proposition s'applique alors et nous obtenons l'absurdité

$$1 \leq \|\{\phi^*F, \phi^*G\}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\{\phi_n^*F, \phi_n^*G\}\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\{F, G\}\| = 1/2.$$

Le cas où  $\phi^*\omega = c\omega$  avec  $c \neq 1$  est traité comme suit. Puisque  $\phi$  a support compact (par hypothèse, voir §0.1.2) si  $M$  est ouverte ou puisque  $\int_M \phi^*\omega^n = \pm \int_M \omega^n$  si  $M$  est fermée, nous déduisons  $c = -1$ . Considérons plutôt la variété  $(M \times M, -\omega \oplus \omega)$ , le difféomorphisme  $\phi' := id \times \phi$  qui vérifie  $(\phi')^*(-\omega \oplus \omega) = -\omega \oplus -\omega \neq c'(-\omega \oplus \omega)$  quel que soit  $c' \in \mathbb{R}$  et la suite de symplectomorphismes  $\phi'_n = id \times \phi_n$  qui convergerait uniformément vers  $\phi'$ . Ceci est absurde en vertu de ce qui précède.

La rigidité  $C^0$  du crochet de Poisson généralise donc le théorème d'Eliashberg–Gromov. Ceci n'a pas échappé à Cardin et à Viterbo qui notent [CaV] qu'une suite de symplectomorphismes  $\phi_k$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  correspond à une suite de cartes de Darboux  $(F_{1(k)}, G_{1(k)}, \dots, F_{n(k)}, G_{n(k)})$  vérifiant pour tout  $k \in \mathbb{N}$  les relations  $\{F_{i(k)}, G_{j(k)}\} = \delta_{ij}$  et  $\{F_{i(k)}, F_{j(k)}\} = 0 = \{G_{i(k)}, G_{j(k)}\}$ . Ainsi, moralement, si les suites convergent uniformément vers la carte  $(F_1, G_1, \dots, F_n, G_n)$ , nous devrions avoir  $\{F_i, F_j\} = 0 = \{G_i, G_j\}$  en vertu de la rigidité  $C^0$  et, plus hypothétiquement,  $\{F_i, G_j\} = \delta_{ij}$  en raison d'une rigidité  $C^0$  plus fine ; bref, la carte limite devrait être aussi une carte de Darboux. Un tel raffinement de la rigidité  $C^0$  a été établi par Humilière [Hu].

### 0.1.7. Invariants spectraux et quasi-états symplectiques

Un aspect important des dynamiques hamiltoniennes, ancré dans leur définition même, est que ces dynamiques sont instantanément générées par des fonctions réelles, les hamiltoniens, définies sur l'espace de phase dans lequel la dynamique a lieu, de sorte que l'étude instantanée de ces dynamiques est réduite à l'étude de fonctions réelles lisses plutôt qu'à celle de champs vectoriels lisses. Un fait autrement plus remarquable est que ce constat persiste, de manière subtile, dans l'étude des dynamiques hamiltoniennes en temps fini : les isotopies hamiltoniennes  $\phi_H^t : M \times [0, 1] \rightarrow M$  d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  déterminent des fonctions réelles sur des espaces auxiliaires qui encodent les propriétés dynamiques desdites isotopies. Nous référons ici aux intégrales d'action sur les espaces de chemins, dont les balbutiements remontent à aussi loin que Fermat, Maupertuis et Lagrange, ainsi qu'aux fonctions génératrices considérées par Hamilton et Jacobi. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que l'étude variationnelle des fonctions génératrices

et des intégrales d'action aient été au cœur de plusieurs percées concernant la topologie des dynamiques hamiltoniennes, notamment la conjecture d'Arnold.

Les invariants spectraux ont été introduits un peu plus récemment, par Viterbo [V] pour les fonctions génératrices et par Schwarz [Sc] et par Oh [O] pour la fonctionnelle d'action considérée en théorie de Floer. Sommairement, dans le cadre de cette dernière théorie, les invariants spectraux sont des fonctions  $c : \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont des « sélecteurs de points critiques » de la fonctionnelle d'action, la sélection étant effectuée via une approche minimax qui sonde la présence, pour ainsi dire, d'une classe d'homologie prescrite dans les ensembles de sous-niveau de la fonctionnelle d'action. Rappelons-nous seulement que l'invariant spectral  $c$  associé à la classe fondamentale  $[M] \in H_{2n}(M; \mathbb{Q})$  existe pour toute variété symplectique fermée  $(M, \omega)$  et qu'en restreignant  $c$  aux isotopies générées par un hamiltonien autonome (c'est-à-dire indépendant du temps), nous obtenons une application  $c : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Une observation importante d'Entov et de Polterovich [EnPo1] est que cet invariant spectral  $c$  détermine le *quasi-état symplectique (partiel)* :<sup>10</sup>

$$\zeta : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta(H) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c(kH)}{k} - \frac{\int_M H \omega^n}{\int_M \omega^n}.$$

Listons ci-dessous quelques-unes de ses propriétés ; nous référons le lecteur à [PoR] et aux références qui y sont citées pour de plus amples informations.

**Normalisation** :  $\zeta(a) = a$  pour toute fonction constante  $M \mapsto a$  ;

**Stabilité** :  $\min_M (F - G) \leq \zeta(F) - \zeta(G) \leq \max_M (F - G)$  ;

**$\mathbb{R}_+$ -homogénéité** : pour  $s \geq 0$ ,  $\zeta(sF) = s\zeta(F)$  ;

**Invariance** :  $\zeta$  est invariante sous l'action de  $\text{Symp}(M, \omega)$  sur les fonctions ;

**Annulation** : si  $F$  a support disjoignable, alors  $\zeta(F) = 0$  ;

**Quasi-sous-additivité** : si  $\{F, G\} = 0$ , alors  $\zeta(F + G) \leq \zeta(F) + \zeta(G)$ .

Soulignons que la propriété de stabilité implique que  $\zeta$  est 1-Lipschitz pour la norme uniforme sur  $C^\infty(M; \mathbb{R})$  et, conséquemment, se prolonge continûment sur  $C^0(M; \mathbb{R})$ . Cette même propriété implique aussi la monotonie de  $\zeta$ , à savoir que  $\zeta(F) \geq \zeta(G)$  si  $F \geq G$ .

La *quasi-additivité* d'une application  $s : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est la propriété de satisfaire  $s(F + G) = s(F) + s(G)$  si  $\{F, G\} = 0$  ; si  $s$  vérifie cette propriété sous

<sup>10</sup>. Il s'avère que  $c(F + G) \leq c(F) + c(G)$  si  $\{F, G\} = 0$ , d'où  $c(0) \geq 0$  et  $-c(-H) \leq c(kH)/k \leq c(H)$ . Le lemme de Fekete implique donc que  $\zeta$  est bien défini.

certaines conditions sur  $F$  et  $G$ , la quasi-additivité est dite *partielle*. Il n'est pas clair si le quasi-état (partiel)  $\zeta$  vérifie cette propriété de quasi-additivité, ou même une version partielle. À ce propos, il importe de signaler une dernière propriété cruciale du quasi-état  $\zeta$ , à savoir l'*inégalité du crochet de Poisson* [**EnPoZ**]

$$\Pi(F, G) := |\zeta(F + G) - \zeta(F) - \zeta(G)| \leq \sqrt{8 \|\{F, G\}\| E(F, G)} \quad (0.1.7.1)$$

où  $\|F\| = \max_M F - \min_M F$  et  $E(F, G) := \min \{e_H(\text{supp } F), e_H(\text{supp } G)\}$ . Ainsi, si  $F$  ou  $G$  a support disjoignable, il en résulte que  $\zeta(F + G) = \zeta(F) + \zeta(G)$  si  $\{F, G\} = 0$  ; bref,  $\zeta$  satisfait une quasi-additivité partielle, d'où notre emploi de l'expression « quasi-état partiel ».

**Remarque 0.1.1.** *Une version plus forte de l'inégalité (0.1.7.1) est*

$$\Pi(F, G) \leq \sqrt{2 \|\{F, G\}\| S(F, G)} \quad (0.1.7.2)$$

avec  $S(F, G) = \sup_{s>0} \min \{w(sF), w(sG)\}$ , où  $w(H) := c(H) + c(-H)$  ; il s'avère que  $w(F) \leq 4e_H(\text{supp } F)$ . Voir [**PoR**]. Pour certaines variétés symplectiques, par exemple  $(M, \omega) = (P\mathbb{C}^{2n}, \omega_{FS})$ , nous avons  $\sup_{F \in C^\infty(M; \mathbb{R})} w(F) < \infty$ , de sorte que  $\zeta$  est pleinement quasi-additif.

**Remarque 0.1.2.** *En inspectant la démonstration de l'inégalité du crochet de Poisson, il n'est pas difficile d'établir (même si cette observation est nouvelle à notre connaissance) que  $\zeta$  est quasi-additif si et seulement si  $\zeta$  est  $\mathbb{R}$ -homogène, c'est-à-dire si et seulement si  $\zeta(-F) = -\zeta(F)$ . Notons que cette égalité n'est pas satisfaite sur les surfaces fermées de genre  $g \geq 1$  [**HuLeS**].*

## 0.2. SUBMERSIONS SYMPLECTIQUES

### 0.2.1. Motivations

Nous avons introduit la notion de *fonction symplectique*, plus particulièrement celle de *submersion symplectique*, assez tôt durant notre doctorat dans l'espoir de mieux cerner le sens « profond » du non-tassement symplectique. Cet espoir a en retour beaucoup orienté la ligne directrice de nos réflexions sur cette notion, et le chapitre 1 présente les conclusions que nous avons su tirer. Dans cette sous-section, nous expliquons les raisons qui ont motivé notre étude de ce concept.

Malgré leur (agréable!) caractère géométrique, les démonstrations offertes par Gromov et par Lalonde-McDuff du phénomène de non-tassement des boules symplectiques (voir §0.1.4) fournissent relativement peu d'informations sur l'allure type d'une boule symplectiquement plongée. De plus, ces démonstrations substituent la boule plongée par des objets auxiliaires qui sont dans une certaine mesure *ad hoc* et dont la géométrie a parfois bien peu à voir avec celle de ladite boule. Afin d'explicitier ces remarques, revenons sur la démonstration du non-tassement de Gromov (théorème 0.1.4.2). Dans celle-ci, le plongement symplectique  $\phi : B^{2n}(r) \hookrightarrow B^2(R) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$  se voit remplacée par la  $J$ -courbe  $u : (S^2, j) \rightarrow (N, J)$ . La propriété fondamentale de cette  $J$ -courbe est qu'une portion de celle-ci (comprise dans l'image de la boule et passant par le centre de cette image) est d'aire comprise entre  $\pi r^2$  et  $\pi R^2$ ; c'est cette propriété qui fait de la  $J$ -courbe un bon substitut à la boule. Cependant, notons que la courbe dépend d'un choix arbitraire d'extension  $J$  de la structure presque complexe poussée, ce qui suggère que la disposition spatiale de la courbe dans la variété compactifiée  $N$  peut être passablement déconnectée de la disposition spatiale de la boule plongée, puisque influencée par des données extérieures à cette boule. Par ailleurs, le non-tassement est foncièrement un énoncé ensembliste portant sur l'image d'un plongement symplectique; pourtant, la  $J$ -courbe est hautement sensible au paramétrage  $\phi$  de cette image à travers la structure presque complexe poussée. En fait, il n'est pas difficile de penser à des exemples où la portion de la  $J$ -courbe comprise dans l'image de la boule soit « verticale », c'est-à-dire comprise dans une fibre  $T^{2(n-1)}$ , de sorte que cette portion ne parvient pas, à elle seule, à bien décrire l'étalement « horizontal » de la boule, étalement pourtant au cœur du non-tassement.

Ce caractère extrinsèque des démonstrations du non-tassement nous était passablement troublant au début de notre doctorat<sup>11</sup>. C'est pourquoi nous avons été grandement interpellé en apprenant l'existence d'une reformulation moins ensembliste, plus fonctionnelle et plus intrinsèque du phénomène de non-tassement des boules, que voici :

**Théorème 0.2.1** (Reformulation du non-tassement symplectique). *Soient un plongement symplectique  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$  et la projection canonique  $p : (\mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$ . L'aire de l'image de  $f := p \circ \phi$  est d'au moins  $\pi r^2$ .*

---

11. À vrai dire, ce caractère nous est toujours troublant, mais nous reconnaissons désormais que cela reflète un aspect profond des phénomènes symplectiques.

*Démonstration de l'équivalence* : Cette énoncé implique trivialement l'énoncé original du non-tassement. En effet, si  $\text{Im } \phi \subset B^2(R) \times M^{2(n-1)}$ , alors  $\text{Im}(p \circ \phi) \subset B^2(R)$  et donc  $\omega_0(\text{Im}(p \circ \phi)) \leq \omega_0(B^2(R)) = \pi R^2$ . La reformulation implique donc  $\pi r^2 \leq \pi R^2$ , soit  $r \leq R$ .

L'implication réciproque découle d'une procédure de tassement notamment abordée par Eliashberg et Gromov [EG]. Soit un plongement symplectique  $\phi : B^{2n}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}$ . Puisque la boule est compacte, l'image  $B$  de  $f = p \circ \phi$  est compacte et a disons aire  $A$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , le corollaire A.1.2 implique l'existence d'un plongement symplectique  $\Psi : (B, \omega_0) \rightarrow (B^2(s), \omega_0)$  où  $\pi s^2 = A + \epsilon$ . Nous pouvons ainsi considérer le plongement symplectique

$$\phi' := (\Psi \times id) \circ \phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (B \times M^{2(n-1)}, \omega_0) \hookrightarrow (B^2(s) \times M^{2(n-1)}, \omega_0).$$

Selon le théorème de non-tassement de Lalonde-McDuff, ceci implique  $r \leq s$ , c'est-à-dire  $\pi r^2 \leq \pi s^2 < A + \epsilon$ . Puisque ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\pi r^2 \leq A$ .  $\square$

Cette reformulation est intéressante dans la mesure qu'elle met de l'avant le caractère bidimensionnel de la géométrie symplectique, avec son allusion aux aires plutôt qu'aux rayons. Cet autre énoncé conduit aussi à des remarques intrigantes. D'une part, l'application  $f = p \circ \phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  a décidément quelque chose de « symplectique ». D'autre part, l'espace  $\mathbb{R}^{2n}$  semble relégué à un rôle secondaire. De là proviennent les trois questions suivantes :

- (1) En quel sens l'application  $f : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  ci-dessus est-elle « symplectique » ?
- (2) Étant donné une telle « fonction symplectique », sous quelle(s) condition(s) satisfait-elle le non-tassement ?
- (3) Étant donné une telle « fonction symplectique », sous quelle(s) condition(s) se factorise-t-elle à travers une immersion, voire à travers un plongement, dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  suivi de la projection  $p$  ?

La question (2) tire son importance de la possibilité que la composition d'une immersion symplectique  $B^{2n}(r) \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$  et de  $p$  puisse être une « fonction symplectique », auquel cas seules quelques-unes de ces fonctions satisferaient le non-tassement. Par ailleurs, le théorème de non-tassement de Lalonde-McDuff s'exprime aussi en termes de compositions  $B^{2n}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)} \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui sont vraisemblablement des « fonctions symplectiques ». Ce dernier point rend la question (3) d'autant plus intéressante : comment par exemple une fonction  $f : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  pourrait-elle « savoir » qu'elle se factorise à travers

$(\mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$ , mais pas à travers  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega_0)$  ? La question (3) est ce que nous appelons le *problème de représentabilité des fonctions symplectiques*.

### 0.2.2. Résumé du chapitre 1

Une notion de *fonction symplectique* entre variétés symplectiques est définie dans la section 1.1. Il s'agit des fonctions  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  dont le graphe dans  $M \times N$  est isotrope ou coisotrope pour la forme symplectique  $\omega_M \oplus -\omega_N$  ; les premières sont appelées *immersions symplectiques* et les secondes *submersions symplectiques*, du fait qu'il s'agit respectivement d'immersions et de submersions (lemme 1.1.6).

Pour des raisons dimensionnelles, ce sont les submersions symplectiques qui peuvent servir de candidates dans une éventuelle formulation fonctionnelle du non-tassement. Nous étudions la structure locale des submersions symplectiques dans la section 1.2. Nous établissons que les fibres de telles submersions sont des sous-variétés symplectiques dont la distribution  $\omega_M$ -orthogonale est donnée par  $H_f := \text{Ker}(\omega_M - f^*\omega_N)$ . Nous montrons que cette distribution s'intègre pour donner un feuilletage constitué de sous-variétés symplectiques transverses aux fibres de  $f$  et que la restriction de  $f$  à chacune de ces feuilles est un symplectomorphisme vers  $N$ . Comme corollaire, nous déduisons que pour toute submersion symplectique  $f : (M^{2m}, \omega_M) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  et pour tout ouvert suffisamment petit  $U \subset M$ , la restriction de  $f$  à  $U$  s'exprime comme compositions de submersions symplectiques  $U \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  ; le problème de représentabilité a toujours localement une solution positive.

Dans la section 1.3, nous identifions une autre caractérisation des submersions symplectiques, à savoir comme étant précisément les morphismes de Poisson entre deux variétés symplectiques. Les variétés symplectiques et les submersions symplectiques forment donc une catégorie. Incidemment, les applications  $f$  dans les théorèmes de non-tassement sont bien des submersions symplectiques.

Bien que les trois premières sections résument un travail original de notre part, ces résultats étaient tous déjà connus par la communauté mathématique sous une forme ou une autre. Il est donc opportun que nous pointions vers quelques travaux évocateurs du nôtre, chose faite dans la section 1.4.



Nous répondons dans la section 1.5 à une question que nous a posée L. Polterovich concernant une possible caractérisation des submersions symplectiques qui impliquerait une forme de rigidité  $C^0$  pour celles-ci. Nous montrons que cette caractérisation est valide (à un détail près) quand les variétés  $M$  et  $N$  ont même dimension et nous fournissons un contre-exemple lorsque  $\dim M \geq \dim N$ .

La section 1.6 porte sur le problème de représentabilité des submersions symplectiques, qui s'énonce comme suit :

**Problème de représentabilité** : Étant donné une variété symplectique  $(B, \omega)$ , en quelles circonstances une submersion symplectique  $f : (B, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  se factorise-t-elle, est-elle représentée sous la forme

$$f : (B, \omega) \xrightarrow{\phi} (\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_0 \oplus \omega_0) \xrightarrow{p} (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$$

où  $\phi$  et  $p$  sont symplectiques ? En quelles circonstances  $\phi$  est-elle un plongement <sup>12</sup> ?

Comme nous l'avions signalé, l'intérêt du problème de représentabilité réside notamment dans ses implications concernant une formulation plus intrinsèque du théorème de non-tassement ; une solution adéquate de ce problème fournirait d'ailleurs une nouvelle formulation de la capacité cylindrique  $c^Z$ . Les théorèmes 1.6.1 et 1.6.10 caractérisent abstraitement les submersions symplectiques qui se factorisent à travers une immersion ou un plongement dans un  $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$ , respectivement. Ces résultats mettent en lumière le caractère global du problème de représentabilité et, dans une certaine mesure, son caractère extrinsèque. Dans la dernière sous-section, suivant une suggestion que nous a faite Y. Eliashberg, nous construisons une submersion symplectique qui se factorise à travers une immersion, mais pas à travers un plongement. Nous décrivons aussi le cas d'une submersion symplectique qui ne se factorise pas de la façon considérée dans l'énoncé ci-dessus du problème de représentabilité.

La section 1.7 clôt ce chapitre en évoquant deux aspects du problème de représentabilité. Nous discutons d'abord d'une possible caractérisation des submersions symplectiques qui se factorisent symplectiquement à travers un plongement. Nous traitons ensuite d'une potentielle relation entre les submersions symplectiques « factorisables » et le problème de l'égalité de certaines capacités symplectiques sur la famille des domaines symplectiques convexes.

---

12. Nous parlerons de *factorisation symplectique (à travers une immersion ou un plongement)* pour désigner une telle factorisation.

### 0.3. CROCHETS DE POISSON DES PARTITIONS DE L'UNITÉ

#### 0.3.1. Motivations

Dans le cadre de son étude des phénomènes de rigidité du crochet de Poisson et des traces que ces phénomènes laissent dans les algèbres obtenues en quantifiant les variétés symplectiques, Polterovich [Po2] a introduit l'*invariant crochet de Poisson*, plus brièvement l'*invariant pb* (« pb » pour « *Poisson bracket* »), comme mesure quantitative de la non-commutativité (pour l'algèbre de Poisson) de fonctions formant une partition de l'unité. Nous définissons ci-dessous cet invariant et nous survolons les principaux résultats obtenus à son propos.

Plus explicitement, soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement ouvert d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  ;<sup>13</sup> nous supposons toujours que les  $U_i$  sont connexes. Soit  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\mathcal{U}$ , ce que nous noterons  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ . Plus précisément,  $f_i \geq 0$ ,  $\text{supp}(f_i) \subset \bar{U}_i$  pour tout  $i \in \langle 1, N \rangle := \{1, \dots, N\}$  et  $F := \sum_{i=1}^N f_i$  vaut identiquement 1 sur  $M$ . En dénotant par  $\| - \| : C^\infty(M) \rightarrow [0, +\infty)$  la norme uniforme pour les fonctions lisses sur  $M$ , définissons l'*invariant pb de  $\mathcal{F}$*  comme étant

$$pb(\mathcal{F}) := \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \|\{a \cdot \mathcal{F}, b \cdot \mathcal{F}\}\| = \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \left\| \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^N b_j f_j \right\} \right\| ,$$

et définissons l'*invariant pb de  $\mathcal{U}$*  comme étant

$$pb(\mathcal{U}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}} pb(\mathcal{F}) .$$

Plus généralement, étant donné deux recouvrements ouverts  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^P$  et deux partitions de l'unité  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  et  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^P \prec \mathcal{V}$ , nous pouvons définir des *invariants pb joints* (déjà entrevus dans [Po3]) :

$$pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \max_{a_i, b_j \in [-1, 1]} \left\| \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^P b_j g_j \right\} \right\| , \quad pb(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}, \mathcal{G} \prec \mathcal{V}} pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) ,$$

de sorte que  $pb(\mathcal{F}) = pb(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  et  $pb(\mathcal{U}) \geq pb(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ . Ces invariants peuvent s'interpréter comme étant des mesures du niveau de « Poisson-non-commutativité » ou « d'interaction symplectique » entre deux partitions de l'unité et, par extension, de deux recouvrements ouverts.

Observons que ces invariants, bien que toujours positifs, peuvent être nuls : étant donné une fonction lisse  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  et une partition de l'unité  $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^N$

13. Bien que la définition de l'invariant pb ne requiert aucune hypothèse sur  $(M, \omega)$ , nous supposons toujours que la variété est fermée, sauf mention explicite du contraire.

subordonnée à un recouvrement ouvert  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^N$  de l'image  $h(M) \subset \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{F} := \{f_i := g_i \circ h\}_{i=1}^N$  est une partition de l'unité sur  $M$  subordonnée à  $\mathcal{U} := \{U_i := h^{-1}(V_i)\}_{i=1}^N$  telle que  $pb(\mathcal{F}) = 0$ , d'où  $pb(\mathcal{U}) = 0$ . L'annulation de  $pb(\mathcal{U})$  et *a fortiori* de  $pb(\mathcal{F})$  est cependant impossible lorsque les ouverts constituant  $\mathcal{U}$  sont disjoignables ; il s'agit là d'une conséquence (de la contraposée) du *théorème de la fibre non disjoignable* [EnPo2], qui stipule que pour une fonction vectorielle  $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$  dont les composantes Poisson-commutent deux à deux, au moins une fibre  $\vec{f}^{-1}(p) \subset (M, \omega)$  n'est pas disjoignable.

Sur la base d'une démarche antérieure [EnPoZ], Polterovich [Po2] utilise l'invariant  $pb$  afin de quantifier le théorème de la fibre non disjoignable : si  $\mathcal{U}$  est formé de  $N$  ouverts disjoignables, alors

$$pb(\mathcal{U}) e_H(\mathcal{U}) \geq \frac{1}{8N^2} \quad (0.3.1.1)$$

où  $e_H(\mathcal{U}) := \max_{i \in \{1, \dots, N\}} e_H(U_i)$ .<sup>14</sup> Cette inégalité découle aisément de l'inégalité (0.1.7.1) satisfaite par le quasi-état symplectique  $\zeta$ . En effet, étant donné une partition de l'unité  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ , posons  $F_i = \sum_{j=1}^i f_j$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Pour tout  $i$ , il est clair que  $\|\{F_i, f_{i+1}\}\| \leq pb(\mathcal{F})$  et que  $E(F_i, f_{i+1}) \leq e_H(\mathcal{U})$ , tandis que la propriété d'annulation de  $\zeta$  implique  $\zeta(f_i) = 0$ . Ainsi, nous calculons

$$\begin{aligned} 1 = \zeta(1) &= \zeta(F_N) = \sum_{i=1}^{N-1} (\zeta(F_{i+1}) - \zeta(F_i) - \zeta(f_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{8 pb(\mathcal{U}) e_H(\mathcal{U})} < N \sqrt{8 pb(\mathcal{U}) e_H(\mathcal{U})} . \end{aligned}$$

Dans [Po3], Polterovich se questionne sur la borne inférieure optimale sur le produit  $pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$ . Il considère des recouvrements  $\mathcal{U}$  supposés « suffisamment réguliers », notion qui signifie moralement que chaque ouvert  $U_i$  peut être disjoint de lui-même à l'intérieur d'un voisinage approprié construit à même les ouverts de  $\mathcal{U}$ .<sup>15</sup> En particulier, la « régularité » d'un recouvrement est une mesure des attributs (semi-)locaux de  $\mathcal{U}$ , contrairement à sa cardinalité  $N$ . Soit  $\mathcal{E}$  une borne supérieure sur l'énergie d'une telle disjonction hamiltonienne ; soulignons que

14. Le théorème de la fibre non disjoignable découle bien de (0.3.1.1). Si toutes les préimages de  $\vec{f}$  étaient disjoignables, alors chaque fibre  $\vec{f}^{-1}(p)$  aurait un voisinage  $\vec{f}^{-1}(V_p)$  (avec  $p \in V_p \subset \mathbb{R}^N$  ouvert) disjoignable. Par compacité de  $\vec{f}(M)$ , il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{V} = \{V_{p_i}\}_{i=1}^N$  de  $\vec{f}(M)$  qui détermine un recouvrement  $\mathcal{U} = \{\vec{f}^{-1}(V_{p_i})\}_{i=1}^N$  ; ce dernier vérifierait  $e_H(\mathcal{U}) < \infty$ . Toute partition de l'unité  $\mathcal{G} \prec \mathcal{V}$  induit une partition de l'unité  $\mathcal{F} = \{g_i \circ \vec{f}\}_{i=1}^N$  subordonnée à  $\mathcal{U}$  qui satisfait  $pb(\mathcal{F}) = 0$ . Nous aurions donc  $0 = pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U}) \geq 1/8N^2 > 0$ .

15. Plus explicitement, il considère des  $\mathcal{U}$  qui sont soit  $(d,p)$ -réguliers, soit  $d$ -réguliers et constitués de *domaines de Liouville portables* ; consulter [Po3] pour les définitions.

$\mathcal{E} \geq e_H(\mathcal{U})$ . Il existe alors une constante  $C > 0$  indépendante de la cardinalité de  $\mathcal{U}$  et de  $\mathcal{E}$ , mais dépendante des quantités qui mesurent le « degré de régularité de  $\mathcal{U}$  », telle que  $pb(\mathcal{U}) \mathcal{E} \geq C$ . Sur la base de ce résultat et de son intuition selon laquelle les recouvrements « irréguliers » devraient avoir des  $pb$  élevés, Polterovich demande si l'énoncé suivant, depuis érigé au niveau de conjecture, est valide :

**Conjecture 0.3.1** (Conjecture du crochet de Poisson). *Il existe une constante  $C = C(M, \omega) > 0$  telle que pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de  $(M, \omega)$  formé d'ouverts disjoignables,*

$$pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U}) \geq C . \quad (0.3.1.2)$$

Ne manquant pas d'audace, nous pouvons aussi considérer l'énoncé :

**Conjecture 0.3.2** (Conjecture du crochet de Poisson généralisée). *Il existe une constante  $C' = C'(M, \omega) > 0$  telle que pour toute paire de recouvrements ouverts  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  de  $(M, \omega)$  formés d'ouverts disjoignables,*

$$pb(\mathcal{U}, \mathcal{V})e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq C' , \quad (0.3.1.3)$$

où  $e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \max \{e_H(\mathcal{U}), e_H(\mathcal{V})\}$ .

À notre connaissance, (0.3.1.1) est le meilleur estimé connu qui soit valide pour toutes les variétés symplectiques fermées et sans autre contrainte sur le recouvrement  $\mathcal{U}$  que celle d'être formé d'ouverts disjoignables. Ceci dit, une étude plus fine des invariants spectraux permet à Seyfaddini [S] et Ishikawa [I] d'adapter des arguments de [Po2, Po3] afin d'établir le résultat particulier suivant, où  $d = d(\mathcal{U})$  dénote le *degré du recouvrement  $\mathcal{U}$* ,

$$d = \max_{1 \leq i \leq N} \#\{j \in \langle 1, N \rangle : \bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset\} .$$

**Théorème 0.3.3.** *Soit  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique fermée asphérique, c'est-à-dire que  $[\omega]|_{\pi_2(M)} = 0$ , ou monotone, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $[\omega]|_{\pi_2(M)} = \lambda c_1|_{\pi_2(M)}$  où  $c_1 \in H_{dR}^2(M; \mathbb{Z})$  est la première classe de Chern de  $(M, \omega)$ . Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de degré  $d$  tel que chaque ouvert  $U_i$  est symplectomorphe à un ouvert borné strictement convexe de  $\mathbb{R}^{2n}$  de capacité au plus  $C$  ; si  $(M, \omega)$  est monotone, supposons aussi que l'énergie  $e_H(\mathcal{U})$  est suffisamment petite ( $e_H(\mathcal{U}) < |\lambda|/2$  suffit). Alors*

$$pb(\mathcal{U}) C \geq \frac{1}{2d^2} .$$

*Esquisse de démonstration* : La proposition 4.9 dans [Po3] montre qu'il est possible de réunir les ouverts du recouvrement  $\mathcal{U}$  afin de former un recouvrement  $\mathcal{U}' = \{U'_1, \dots, U'_k\}$  avec  $k \leq d + 1$  où chaque  $U'_i$  est une réunion disjointe de  $U_j$  et où chaque  $U_j$  n'appartient qu'à un seul  $U'_i$ . Les contributions de Seyfaddini et d'Ishikawa sont d'établir que dans le cadre des hypothèses du théorème, pour chaque ouvert  $U'_j$  et pour chaque fonction  $F$  supportée dans  $U'_j$ ,  $0 \leq w(F) = c(F) + c(-F) \leq C$ . Nous concluons en évoquant plutôt l'inégalité (0.1.7.2) dans la démonstration de (0.3.1.1) appliquée à  $\mathcal{U}'$ . □

**Remarque 0.3.4.** *Le résultat de Seyfaddini suppose que chaque  $U_i$  est symplectomorphe à une boule symplectique, de sorte que la notion de capacité évoquée ici n'a rien d'ambiguë. Le résultat d'Ishikawa est plus général et plus précis que ce que nous avons écrit ci-dessus ; nous référons à son article pour connaître la notion de capacité utilisée. Notons au passage qu'un ouvert strictement convexe de  $\mathbb{R}^{2n}$  est un domaine de Liouville portable.*

Dans une direction différente, Polterovich [Po4] et Buhovski–Tanny [BT] établissent la validité de la conjecture du crochet de Poisson sur toutes les variétés symplectiques fermées  $(M, \omega)$  sous l'hypothèse que les ouverts de  $\mathcal{U}$  sont suffisamment petits pour une métrique riemannienne compatible avec  $\omega$ . Plus explicitement :

**Théorème 0.3.5.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c = c(n) > 0$  ayant la propriété suivante : pour toute variété symplectique fermée  $(M, \omega)$ , étant donné une métrique riemannienne  $\omega$ -compatible  $g$ , il existe une constante  $\delta = \delta(M, \omega, g) > 0$  telle que pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  et pour toute paire de recouvrements  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  formés d'ouverts ayant diamètre moindre que  $\epsilon$ ,*

$$pb(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \epsilon^2 \geq c .$$

*Esquisse de démonstration* : Pour des partitions de l'unité  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  respectivement subordonnées à des recouvrements  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  formés d'ouverts suffisamment petits, il suffit d'obtenir l'estimé recherché pour la norme uniforme de  $\max_{a_i, b_j \in [-1, 1]} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^P b_j g_j \right\}$  dans une carte de Darboux. Quitte à considérer une plus petite carte, la métrique  $g$  peut être approximée par (un multiple de) la métrique euclidienne standard dans la carte. Nous pouvons donc supposer que nous travaillons dans un (petit) ouvert borné  $B$  du triplet standard  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, g_0)$ . Soient  $F, G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow [0, 1]$  deux fonctions lisses supportées dans  $B$  et vérifiant

$\|\{F, G\}\| \geq 1$ . Pour tout  $U_i \in \mathcal{U}$  et  $V_j \in \mathcal{V}$  choisissons des points  $u_i \in U_i$  et  $v_j \in V_j$  ; si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont formés d'ouverts suffisamment petits, alors les fonctions  $F' := \sum_i F(u_i)f_i$  et  $G' := \sum_j G(v_j)g_j$  sont proches  $C^0$  de  $F$  et de  $G$ , respectivement, l'approximation étant d'autant meilleure que les diamètres des  $U_i$  et  $V_j$  sont petits. En vertu de la rigidité  $C^0$  du crochet de Poisson (théorème 0.1.6.1), il en résulte que  $\|\{F', G'\}\| \geq 1/2$  dès que  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont formés d'ouverts suffisamment petits ; ceci nous permet de fixer un  $\delta$ . Or,  $F(u_i), G(v_j) \in [0, 1]$ , donc  $\max_{a_i, b_j \in [-1, 1]} \|\{\sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^P b_j g_j\}\| \geq 1/2$  ; ceci nous permet de fixer un  $c(n)$ . Si  $\epsilon < \delta$ , nous contractons  $B$  par le facteur  $\epsilon/\delta$  et nous transformons  $F$  et  $G$  conséquemment ; le nouveau crochet de Poisson est relié à l'ancien par un facteur multiplicatif  $\epsilon^{-2}$ , et les invariants pb changent conformément.  $\square$

**Remarque 0.3.6.** *Polterovich et Buhovski–Tanny ne considèrent que le cas  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ , mais leur argument s'adapte décidément afin d'impliquer l'énoncé ci-dessus. Buhovski et Tanny [BT] soulignent aussi le fait que l'inégalité est essentiellement optimale, en ce sens que pour tout triplet compatible  $(M, \omega, g)$ , il est possible d'exhiber une famille de recouvrements  $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  dont les diamètres des ouverts satisfont  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam}(\mathcal{U}_i) = 0$ , ainsi que  $\text{pb}(\mathcal{U}_i) \text{diam}(\mathcal{U}_i)^2 < C'$  pour une certaine constante  $C' < +\infty$  qui ne dépend pas de  $i \in \mathbb{N}$ . Leur argument s'adapte aussi pour donner un énoncé similaire sur des paires de recouvrements.*

*A priori*, il est vraisemblable que la conjecture soit plus simple à aborder pour les surfaces que pour les variétés symplectiques quelconques. Déjà, une caractérisation simple des ensembles connexes disjoignables est possible en dimension 2, à savoir qu'ils doivent être inclus dans des disques disjoignables ; voir l'annexe A. Un premier pas décisif dans cette direction est le travail de Buhovski et Tanny [BT] dans lequel, étant donné un recouvrement  $\mathcal{U}$  formé d'ouverts disjoignables sur une surface fermée  $(M, \omega)$ , les auteurs obtiennent des bornes inférieures sur  $\text{pb}(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$  qui ne dépendent d'aucune caractéristique particulière à la surface  $M$  et qui sont au moins aussi bonnes que toutes les bornes établies jusqu'alors. Plus précisément, ils obtiennent l'existence d'une constante universelle  $C > 0$  telle que pour tout recouvrement  $\mathcal{U}$  formé de *disques* disjoignables<sup>16</sup>,

$$\text{pb}(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U}) \geq C \max \left\{ \chi(\mathcal{J}), d^{-2} \right\}, \quad (0.3.1.4)$$

$$\text{pb}(\mathcal{U})\text{Area}(M, \omega) \geq C \max \left\{ |\mathcal{J}|, (\log d)^{-1} \right\}. \quad (0.3.1.5)$$

16. Comme nous l'expliquerons plus loin, du fait de la monotonie de  $\text{pb}$  sous le raffinement de recouvrements et du fait de la caractérisation de la disjonction en dimension 2, il est suffisant sur les surfaces de considérer des recouvrements formés de disques disjoignables.

Ici,  $d = d(\mathcal{U})$  dénote encore une fois le degré de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$  désigne l'ensemble des disques essentiels du recouvrement, où un disque  $U \in \mathcal{U}$  est *essentiel* si  $\mathcal{U} \setminus \{U\}$  n'est pas un recouvrement,  $|\mathcal{J}|$  est la cardinalité de  $\mathcal{J}$  et  $\chi(\mathcal{J})$  vaut 1 si  $\mathcal{J} \neq \emptyset$  et 0 sinon. Un autre intérêt de ce travail réside aussi au fait qu'il n'emploie que des arguments élémentaires, quoique rusés et parfois intriqués.

Dans une deuxième version de la prépublication [BT], Buhovski, Logunov et Tanny [BLT] modifient et simplifient les arguments qui mènent aux inégalités en degré de [BT] afin de démontrer la conjecture du crochet de Poisson généralisée pour toutes les surfaces symplectiques fermées, et ce pour une constante  $C$  indépendante de la surface<sup>17</sup>. Sommairement, leur démarche part de l'observation qu'en dimension 2, la quantité  $pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  est intimement liée aux nombres d'intersections des réunions d'ensembles de niveau des fonctions de  $\mathcal{F}$  avec les réunions d'ensembles de niveau des fonctions de  $\mathcal{G}$  ; les auteurs bornent ensuite inférieurement ces nombres d'intersections en ayant recours indirectement à l'hypothèse selon laquelle  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont constitués d'ouverts disjoignables. Soulignons qu'il s'agit d'une approche qui est globale presque d'entrée de jeu et qu'elle corrobore l'intuition de Polterovich selon laquelle des recouvrements « irréguliers », formés d'ouverts « distordus » qui s'intersectent beaucoup, ont des pb élevés.

### 0.3.2. Résumé du chapitre 2

Le second chapitre de cette thèse expose notre approche à la conjecture du crochet de Poisson. Après un survol du contenu de ce chapitre, nous glisserons quelques mots à propos du développement de notre perspective sur cette conjecture et comment notre cheminement se lie aux travaux susmentionnés.

Les définitions de diverses quantités associées à l'invariant  $pb$  sont données dans la section 2.1. Nous définissons deux versions de ces invariants, suivant Polterovich et Buhovski–Tanny. Un fait fondamental établi dans [BT] et redémontré dans l'annexe B est que ces versions sont équivalentes ; néanmoins, la version de Buhovski–Tanny est généralement beaucoup plus simple d'utilisation (notamment d'un point de vue de complexité algorithmique, voir la remarque B.3.4). Nous présentons aussi rapidement une généralisation de l'invariant  $pb$  aux collections de fonctions  $\mathcal{F}$  qui ne sont pas des partitions de l'unité ; cette notion jouait

---

17. À proprement parler, [BLT] n'établit pas la conjecture généralisée telle qu'énoncée ci-dessus, mais l'établit pour une variante de l'invariant  $pb$  dont nous discuterons plus tard. La conjecture généralisée découle néanmoins de leur résultat et du lemme B.2.1.

un certain rôle dans [Pa], mais nous ne le mentionnons ici que pour souligner l’analogie entre la conjecture 0.3.2 et le théorème des accroissements finis.

La section 2.2 explique le comportement des invariants  $pb$  et de l’énergie de Hofer par le rappel des partitions de l’unité et des recouvrements par des submersions symplectiques. Il s’agit là du cœur de toute notre méthode. Il convient à ce moment-ci de mentionner que l’annexe A collecte plusieurs faits bien connus concernant les isotopies de boules symplectiques et culmine avec la caractérisation des ensembles disjoignables dans les surfaces.

La section 2.3 traite exclusivement de la conjecture du crochet de Poisson pour les surfaces. La première sous-section présente les énoncés que Buhovski-Logunov-Tanny ont démontrés. La sous-section suivante énonce les principaux concepts et résultats que nous avons démontrés dans [Pa] ; nous les avons cependant quelque peu généralisés dans cette thèse. Nos résultats impliquent en particulier que la conjecture est vraie pour les surfaces de genre  $g \geq 1$  et qu’elle est aussi vraie sur la sphère sous une hypothèse de « localisation » ou de « séparation » des ouverts (théorème 2.3.8). La dernière sous-section contient les démonstrations de tous les énoncés de la sous-section précédente.

Le contenu de la section 2.4 est nouveau : nous cherchons à généraliser nos résultats précédents aux variétés symplectiques qui possèdent une submersion symplectique vers une surface. La première sous-section expose notre stratégie générale, qui repose sur une analogie entre la conjecture du crochet de Poisson et un théorème des accroissements finis pour les partitions de l’unité sur les variétés riemanniennes. L’idée maîtresse est de restreindre les partitions de l’unité à une courbe pseudoholomorphe bien choisie afin de pouvoir utiliser nos résultats en dimension deux, ce qui requiert deux nouveaux résultats importants démontrés dans les annexes (les lemmes B.4.1 et C.0.1). La seconde sous-section présente diverses réalisations de notre stratégie. En particulier, nous déduisons que la conjecture est valide pour les recouvrements obtenus en prenant les préimages par une submersion symplectique d’un recouvrement formé d’ouverts disjoignables sur une surface. Nous fournissons aussi une nouvelle démonstration du théorème 0.3.5 qui n’utilise pas la rigidité  $C^0$  du crochet de Poisson (corollaire 2.4.12).

Nous concluons le chapitre en évoquant deux pistes qui pourraient permettre de raffiner la borne inférieure sur le produit  $pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U})$  et de réduire la pleine conjecture aux champs d’applications de nos méthodes.



C'est notre directeur de thèse F. Lalonde qui nous a parlé pour la première fois de la conjecture 0.3.2 de Polterovich, il y a près de quatre ans. Nous avons été amené assez tôt dans le cours de notre recherche à considérer la fonction, :

$$P_{\mathcal{F}} : M \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto P_{\mathcal{F}}(x) = \max_{a,b \in [-1,1]^N} \left| \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^N b_j f_j \right\} \right|.$$

La norme uniforme de cette fonction correspond précisément à  $pb(\mathcal{F})$ . Une de nos premières idées a été d'étudier le cas des surfaces et de considérer plus particulièrement la forme symplectique (sur les surfaces)  $(P_{\mathcal{F}} + \epsilon)\omega$  ; l'astuce de Moser permet alors de produire une nouvelle partition de l'unité  $\mathcal{F}'$  (subordonnée en général à un nouveau recouvrement  $\mathcal{U}'$  qui n'est plus formé d'ouverts disjoignables) qui vérifie  $pb(\mathcal{F}') < \omega(M)^{-1} \int_M P_{\mathcal{F}} \omega + \epsilon$ . La conjecture du crochet de Poisson suggère donc que la moyenne de la fonction  $P_{\mathcal{F}}$  soit bornée inférieurement loin de zéro, ce qui défiait l'intuition que nous avons pour certains recouvrements sur les surfaces. Nous nous sommes ainsi efforcé, pendant un certain temps, à trouver des contre-exemples à la conjecture...

La parution de l'article [BT] il y a deux ans a complètement changé notre point de vue sur la question. En effet, ce travail nous montrait que la moyenne de la fonction  $P_{\mathcal{F}}$  est bel et bien bornée loin de zéro pour certains recouvrements sur les surfaces, notamment pour les recouvrements formés de petits ouverts ou ceux qui ont des ouverts essentiels, et que la borne inférieure dans l'équation (0.3.1.1) n'est pas optimale sur les surfaces. Par ailleurs, l'article démontre l'équivalence de la fonction  $P_{\mathcal{F}}$  et de la fonction

$$P_{\mathcal{F}}^{BT} : M \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{i,j=1}^N |\{f_i, f_j\}|,$$

or il est plus vraisemblable que la moyenne de  $P_{\mathcal{F}}^{BT}$  soit bornée loin de zéro. La démonstration de cette équivalence, dont l'essentiel est présenté dans l'annexe B de cette thèse, explique beaucoup du savoir empirique que nous avons accumulé lors de nos tentatives de réfutation de la conjecture.

À notre humble avis, cette première version du travail de Buhovski et de Tanny n'exposait pas de manière assez manifeste quelles étaient les leçons géométriques des inégalités qu'ils obtenaient. Dans l'article [Pa], nous avons donc entrepris de clarifier le sens géométrique de leurs résultats en les reliant à nos idées antérieures.

Observons que les quantités  $pb$  et  $e_H$  dépendent de la forme symplectique  $\omega$  de manière inverse : plus précisément, sous l'homothétie  $\omega \mapsto \lambda\omega$  avec  $\lambda > 0$ ,  $pb(\mathcal{U}) \mapsto \lambda^{-1}pb(\mathcal{U})$  et  $e_H(\mathcal{U}) \mapsto \lambda e_H(\mathcal{U})$  quel que soit  $\mathcal{U}$ . La quantité  $pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$  dépend donc seulement de la classe  $[\omega] \in \mathbb{P}(H_{dR}^2(M; \mathbb{R}))$ . L'invariance du produit  $pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$  sous les changements d'échelle suggère l'importante teneur géométrique de ce produit. L'utilisation de l'astuce de Moser dont nous avons traitée plus haut déforme beaucoup le recouvrement et la partition de l'unité, mais préserve le produit  $P_{\mathcal{F}}\omega$ . Ces observations nous ont conduit à interpréter la conjecture du crochet de Poisson comme une version symplectique du théorème des accroissements finis pour une partition de l'unité. En guise d'analogie simple, étant donné une variété riemannienne  $(M, g)$ , un domaine ouvert  $U \subset M$  de rayon d'injectivité  $\rho(U)$  en un point  $p \in U$  et une fonction  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$  supportée dans  $U$ , le théorème des accroissements finis implique que

$$\|\nabla f\|_{C^0} \rho(U) \geq f(p) .$$

Bref, le produit de la norme uniforme de la dérivée d'une (ou plusieurs) fonction(s) et de la taille du (des) ensemble(s) qui supporte(nt) la (les) fonction(s) est borné loin de zéro par une constante universelle. Cette analogie a été au cœur de nos réflexions sur la conjecture de Polterovich.

Notre travail [Pa] explore l'invariant  $pb$  en mettant de l'avant le comportement de cet invariant sous diverses opérations géométriques. Une idée simple, mais importante, présentée dans l'article est la possibilité de calculer  $P_{\mathcal{F}}$  en considérant plutôt le rappel de la partition de l'unité par un revêtement symplectique, et même plus généralement par une submersion symplectique. Compte tenu du fait que l'énergie de disjonction des ouverts relevés ne peut que diminuer, le produit  $pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U})$  est donc décroissant par l'opération de relèvement. Cette opération a aussi le bon goût de simplifier la géométrie des intersections des ouverts du recouvrement. Nous pouvons alors évoquer les inégalités portant sur les ouverts essentiels démontrées par Buhovski et Tanny afin d'obtenir de nouvelles bornes qui généralisent et améliorent dans bien des cas les équations 0.3.1.4 et 0.3.1.5. En fait, un argument de moyennage nous permet de démontrer la conjecture du crochet de Poisson pour toutes les surfaces de genre  $g \geq 1$  ainsi que de nombreux recouvrements sur la sphère (théorème 2.3.8)). Cet argument de moyennage nous avait été inspiré par notre démonstration d'une conséquence de la conjecture 0.3.2 concernant le nombre minimal d'intersections entre les cercles bords des disques qui forment un recouvrement d'une surface, conséquence dont nous discutons dans [Pa].

Néanmoins, nous découvrons notre démonstration de la conjecture du crochet de Poisson la journée même où Buhovski, Logunov et Tanny [**BLT**] présentaient leur superbe démonstration, en toute généralité, de la conjecture sur les surfaces. Ces circonstances particulières expliquent d'ailleurs pourquoi nous référons aux articles [**BT**] et [**BLT**] séparément, même si le second a remplacé le premier : notre travail est indépendant des nouveaux apports de leur second article, tandis que leur premier article nous a profondément inspiré.



# Chapitre 1

---

## SUBMERSIONS SYMPLECTIQUES

### 1.1. FONCTIONS SYMPLECTIQUES

Le but de cette section est de donner les définitions et les propriétés premières des fonctions symplectiques que nous étudierons tout au long de ce chapitre.

**Définition 1.1.1.** *Une application lisse  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  entre deux variétés symplectiques est une **fonction symplectique** si le rappel de la forme  $\omega_M \oplus -\omega_N$  est maximalelement dégénéré sur le graphe  $\Gamma_f := \{(m, f(m)) \in M \times N\}$ .*

Cette définition englobante est précisée par la proposition suivante.

**Proposition 1.1.2.** *Une fonction  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est symplectique si et seulement si son graphe  $\Gamma_f \subset (M \times N, \omega_M \oplus -\omega_N)$  est une sous-variété :*

- isotrope quand  $\dim M \leq \dim N$  ;
- coisotrope quand  $\dim M \geq \dim N$ .

*En particulier, quand  $M$  et  $N$  ont même dimension,  $f$  est symplectique si et seulement si son graphe  $\Gamma_f \subset (M \times N, \omega_M \oplus -\omega_N)$  est lagrangien.*

*Démonstration :* Pour alléger l'écriture, posons  $\Omega = \omega_M \oplus -\omega_N$ . Puisque  $\Gamma_f$  est une sous-variété, nous pouvons considérer pour chaque  $p \in \Gamma_f$  l'orthogonale symplectique de  $T_p\Gamma_f$  dans  $T_p(M \times N)$ , c'est-à-dire  $(T_p\Gamma_f)^\Omega$ . Par définition,  $f$  est symplectique si et seulement si en chaque  $p \in \Gamma_f$ , l'intersection  $T_p\Gamma_f \cap (T_p\Gamma_f)^\Omega$  a dimension aussi grande que possible, ce qui se produit lorsque le sous-espace de plus grande dimension contient l'autre. Puisque  $\dim \Gamma_f = \dim M$ , nous avons  $\dim (T_p\Gamma_f)^\Omega = \dim(M \times N) - \dim \Gamma_f = \dim N$ . Ainsi, quand  $\dim M \leq \dim N$ ,  $f$  est symplectique si et seulement si  $T_p\Gamma_f \subseteq (T_p\Gamma_f)^\Omega$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\Gamma_f$  est isotrope ; quand  $\dim M \geq \dim N$ ,  $f$  est symplectique si et seulement si  $T_p\Gamma_f \supseteq (T_p\Gamma_f)^\Omega$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\Gamma_f$  est coisotrope.

□

**Remarque 1.1.3.** *Quand  $\Gamma_f$  est coisotrope, sa distribution canonique isotrope est  $(T_p\Gamma_f)^\Omega$  et a rang  $\dim N$ .*

À moins de mention explicite du contraire,  $f$  dénotera toujours dans ce chapitre une fonction symplectique. Soient l'inclusion  $\iota_f : \Gamma_f \subset M \times N$  et les projections  $p_M : M \times N \rightarrow M$  et  $p_N : M \times N \rightarrow N$ . Considérons le difféomorphisme  $\gamma_f : M \rightarrow \Gamma_f : m \mapsto (m, f(m))$  et posons

$$\omega_f := (\iota_f \circ \gamma_f)^*\Omega = (\iota_f \circ \gamma_f)^*(p_M^*\omega_M - p_N^*\omega_N) = \omega_M - f^*\omega_N.$$

**Proposition 1.1.4.** *L'isomorphisme de fibré vectoriel  $T\gamma_f : TM \rightarrow T\Gamma_f$  se restreint à un isomorphisme  $\text{Ker } \omega_f \rightarrow \text{Ker } (\iota_f^*\Omega)$ .*

*Démonstration :* Cela découle aisément de l'identité  $\omega_f = \gamma_f^*(\iota_f^*\Omega)$  et du fait que  $\gamma_f^* : T^*\Gamma_f \rightarrow T^*M$  soit un isomorphisme de fibré vectoriel. □

**Remarque 1.1.5.** *Si  $\dim M \leq \dim N$ , alors  $\iota_f^*\Omega = 0$ , de sorte que  $\omega_f = 0$  et la proposition est évidente. Incidemment, la 2-forme  $\omega_f$  et la proposition n'ont de véritable intérêt que lorsque  $\dim M \geq \dim N$ , auquel cas  $\text{Ker } (\iota_f^*\Omega) = (T\Gamma_f)^\Omega$ .*

**Lemme 1.1.6.**  *$f$  est une immersion si  $\dim M \leq \dim N$  et  $f$  est une submersion si  $\dim M \geq \dim N$ .*

*Démonstration :*

Il suffit de montrer que la restriction de  $Tf|_{\text{Ker } \omega_f} : \text{Ker } \omega_f \rightarrow TN$  est un monomorphisme de fibré vectoriel. En effet, quand  $\dim M \leq \dim N$ ,  $\text{Ker } \omega_f = TM$  et nous concluons que  $f$  est une immersion. Quand  $\dim M \geq \dim N$ ,  $\text{Ker } \omega_f$  et  $TN$  ont rang  $\dim N$ , de sorte que  $Tf|_{\text{Ker } \omega_f} : \text{Ker } \omega_f \rightarrow TN$  et donc *a fortiori*  $Tf : TM \rightarrow TN$  seraient des épimorphismes ; bref,  $f$  serait une submersion.

Soit  $v \in (\text{Ker } Tf) \cap (\text{Ker } \omega_f)$ . Ainsi  $v \lrcorner f^*\omega_N = \omega_N(Tf(v), Tf(-)) = 0$ , de sorte que  $0 = v \lrcorner \omega_f = (v \lrcorner \omega_M) - (v \lrcorner f^*\omega_N) = v \lrcorner \omega_M$ . Puisque  $\omega_M$  est symplectique, ceci implique  $v = 0$ . □

Ce résultat justifie la définition suivante.

**Définition 1.1.7.** *Une fonction symplectique  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est une **immersion symplectique** si  $\dim M \leq \dim N$  et est une **submersion symplectique** si  $\dim M \geq \dim N$ .*

Quand  $\dim M \leq \dim N$ , nous avons l'égalité  $\omega_f = 0$ , c'est-à-dire  $f^*\omega_N = \omega_M$ . Bref, une immersion symplectique  $f$  est précisément une application symplectique dans le sens utilisé dans l'introduction de cette thèse. La notion de fonction symplectique, plus particulièrement la notion de submersion symplectique, étend donc naturellement la notion d'application symplectique étudiée antérieurement. Notre attention sera dorénavant concentrée sur les submersions symplectiques.

**Exemple 1.1.8.** Soient deux variétés symplectiques  $(M, \omega_M)$  et  $(N, \omega_N)$  et considérons leur produit  $(M \times N, \omega_M \oplus \omega_N)$ . Nous affirmons que la projection canonique  $p_M : (M \times N, \omega_M \oplus \omega_N) \rightarrow (M, \omega_M)$  est une submersion symplectique. (Il en va évidemment similairement pour la projection canonique sur  $N$ .) Il suffit de montrer que le noyau  $\text{Ker } \omega_{p_M}$  a rang maximal  $\dim(M \times N \times M) - \dim(M \times N) = \dim M$ . Nous calculons  $\omega_{p_M} = \omega_M \oplus \omega_N - p_M^*\omega_M = p_M^*\omega_M + p_N^*\omega_N - p_M^*\omega_M = p_N^*\omega_N$ , de sorte que  $\text{Ker } \omega_{p_M} = \text{Ker } Tp_N$  puisque  $\omega_N$  est symplectique. Puisque  $p_N$  est une submersion,  $\text{Ker } Tp_N$  coïncide avec le fibré obtenu en réunissant les espaces tangents aux fibres de  $p_N$ . Puisque ces fibres sont toutes difféomorphes à  $M$ , nous avons bien  $\text{rang } \text{Ker } \omega_{p_M} = \dim M$ .

□

Il est naturel de se demander si les fonctions symplectiques se composent afin de donner d'autres fonctions symplectiques, et ce d'autant plus compte tenu de la reformulation du non-tassement donnée par le théorème 0.2.1. Il est clair que les immersions symplectiques se composent afin de donner des immersions symplectiques ; nous verrons plus loin (corollaire 1.3.2) que les submersions symplectiques se composent aussi afin de donner des submersions symplectiques. Malheureusement, la collection de toutes les fonctions symplectiques n'est pas fermée sous la composition<sup>1</sup>. D'un côté, puisque l'image d'une submersion a dimension moindre que la dimension de la source et puisque l'image d'une immersion a même dimension que celle de la source, une submersion suivie d'une immersion n'est généralement ni une immersion, ni une submersion. D'un autre côté, la composition en sens inverse s'avère capable de fournir n'importe quelle fonction lisse :

1. Ce « malheur » contribue néanmoins beaucoup au fait que les phénomènes symplectiques soient subtils et donc intéressants. En effet, étant donné une variété symplectique  $(M, \omega)$  et une structure presque complexe compatible  $J$ , notons qu'une courbe  $J$ -holomorphe immergée  $u : (\Sigma, j) \rightarrow (M, J)$  est une immersion symplectique pour la forme symplectique  $u^*\omega$  à la source. Étant donné un plongement symplectique  $\phi : B^{2n}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , il est possible que nous puissions trouver une  $J_0$ -courbe plongée  $u : B^2(R) \rightarrow B^{2n}(r)$  (avec  $R \geq r$ ) telle que  $\phi \circ u$  intersecte (transversalement) chaque fibre de  $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$  au plus une fois, auquel cas la composition  $p \circ \phi \circ u : B^2(R) \rightarrow \mathbb{R}^2$  serait un plongement. Si ceci devait être une fonction symplectique, le théorème de non-tassement découlerait aussitôt.

**Proposition 1.1.9.** *Soit une fonction lisse  $g : (L, \omega_L) \rightarrow (N, \omega_N)$  entre deux variétés symplectiques. Alors il existe une variété symplectique  $(M, \omega_M)$ , une immersion symplectique  $i_g : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  et une submersion symplectique  $p_g : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  telles que  $g = p_g \circ i_g$ .*

*Démonstration :* Posons  $(M, \omega_M) = (L \times N \times N, \omega_L \oplus -\omega_N \oplus \omega_N)$ ,  $i_g(l) = (l, g(l), g(l))$  et  $p_g(l, n', n) = n$ . Alors  $i_g^*(\omega_L \oplus -\omega_N \oplus \omega_N) = \omega_L$ , de sorte que  $i_g$  est une immersion symplectique, et  $p_g$  est une submersion symplectique puisqu'il s'agit d'une projection canonique. □

**Remarque 1.1.10.** *Dans le contexte de la proposition précédente, il pourrait être intéressant de chercher une variété  $(M, \omega_M)$  « optimale » ; ceci généraliserait en quelque sorte le problème de représentabilité des submersions symplectiques que nous étudierons plus loin.*

## 1.2. STRUCTURE DES SUBMERSIONS SYMPLECTIQUES

Soit  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  une submersion symplectique.

**Lemme 1.2.1.** *Les distributions  $H_f := \text{Ker } \omega_f$  et  $V_f := \text{Ker } Tf$  sont symplectiques et orthogonales par rapport à  $\omega_M$ . Conséquemment, nous avons la décomposition symplectique  $(TM, \omega_M) = (H_f, \omega_M|_{H_f}) \oplus (V_f, \omega_M|_{V_f})$ .*

*Démonstration :* Il résulte du lemme 1.1.6 que  $Tf|_{H_f} : H_f \rightarrow TN$  en un isomorphisme sur chaque fibre, de sorte que le rappel de  $f^*\omega_N$  est symplectique sur  $H_f$ . Or,  $\omega_M = f^*\omega_N$  sur  $H_f$  ;  $H_f$  est ainsi  $\omega_M$ -symplectique.

Montrons que  $V_f = H_f^{\omega_M}$ , ce qui impliquera par ailleurs le fait que  $V_f$  est  $\omega_M$ -symplectique. Soient  $m \in M$  et  $v \in (H_f)_m$ . Alors pour tout  $w \in T_m M$ ,  $\omega_M(v, w) = \omega_f(v, w) + f^*\omega_N(v, w) = f^*\omega_N(v, w)$ . Ainsi,  $w \in (H_f)_m^{\omega_M}$  si et seulement si  $\omega_N(Tf(v), Tf(w)) = 0$  pour tout  $v \in (H_f)_m$ . Puisque  $(H_f)_m \cong T_{f(m)}N$  et  $\omega_N$  est symplectique,  $w \in (H_f)_m^{\omega_M}$  si et seulement si  $Tf(w) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $w \in (V_f)_m$ . □

**Définition 1.2.2.** *Les distributions  $H_f$  et  $V_f$  sont respectivement appelées les distributions horizontale et verticale de  $f$ .*



Puisque  $f$  est une submersion, la distribution  $V_f$  est intégrable au sens de Frobenius, ses feuilles étant les fibres de  $f$ . Ainsi, une submersion symplectique est feuilletée par des sous-variétés symplectiques ; notons  $V_f$  ce feuilletage vertical. La distribution horizontale  $H_f$  peut alors s'interpréter comme une connexion (d'Ehresmann) pour la « fibration »  $f : M \rightarrow N$ . Le résultat suivant stipule le fait remarquable selon lequel cette connexion est plate.

**Théorème 1.2.3.** *La distribution  $H_f$  s'intègre en un feuilletage symplectique  $\mathcal{H}_f$ .*

*Démonstration :* Nous avons rappelé dans la section 0.1.1 que la distribution donnée en chaque point par le noyau d'une 2-forme fermée donnée est intégrable au sens de Frobenius si son rang est constant. Or  $\omega_f = \omega_M - f^*\omega_N$  est une 2-forme fermée et  $H_f = \text{Ker } \omega_f$  a rang constant  $\dim N$ . □

**Corollaire 1.2.4.** *Pour chaque feuille  $L \in \mathcal{H}_f$ , en dénotant  $\iota_L : L \subset M$  l'inclusion, la restriction  $f|_L : (L, \iota_L^*\omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est un symplectomorphisme<sup>2</sup>.*

*Démonstration :* Puisque  $T_l L = (H_f)_l$  pour tout  $l \in L$ , il suffit de rappeler que  $T(f|_L) = Tf|_{TL} : (H_f, \omega_M|_{H_f}) \rightarrow (TN, \omega_N)$  est un isomorphisme symplectique. □

**Théorème 1.2.5.** *Notons  $2m = \dim M$ ,  $2n = \dim N$  et la projection symplectique standard  $pr : (\mathbb{R}^{2m}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Pour tout  $x \in M$ , il existe des voisinages ouverts  $Op x \subset M$  et  $Op f(x) \subset N$  ainsi que des cartes symplectiques  $\Psi : (Op x, \omega_M) \rightarrow (\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$  et  $\psi : (Op x, \omega_M) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} Op x & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^{2m} \\ f \downarrow & & \downarrow pr \\ Op f(x) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

*Démonstration :* En conséquence du théorème de Frobenius appliqué aux feuilletages  $\mathcal{H}_f$  et  $\mathcal{V}_f$ , il existe  $\epsilon > 0$  et des cartes

$$h, v : Op x \rightarrow I^{2n} \times I^{2(m-n)} := (-\epsilon, \epsilon)^{2n} \times (-\epsilon, \epsilon)^{2(m-n)}$$

tels que  $\mathcal{H}_f$  et  $\mathcal{V}_f$  sont localement données par  $\{v^{-1}(I^{2n} \times \{p\})\}_{p \in I^{2(m-n)}}$  et par  $\{h^{-1}(\{q\} \times I^{2(m-n)})\}_{q \in I^{2n}}$ , respectivement. Sans perte de généralité, supposons

---

2. Rappelons que nous réservons l'expression « symplectomorphisme » afin de désigner une application symplectique entre variétés équidimensionnelles.

que ces cartes envoient  $x$  à l'origine. Par projection sur  $I^{2n}$  ou sur  $I^{2(m-n)}$ , ces cartes induisent des submersions  $h' : Op x \rightarrow I^{2n}$  et  $v' : Op x \rightarrow I^{2(m-n)}$  qui sont constantes sur les feuilles de  $\mathcal{V}_f$  et de  $\mathcal{H}_f$ , respectivement. Ainsi, l'application  $\Psi' = (h', v') : Op x \rightarrow I^{2n} \times I^{2(m-n)}$  est un plongement qui envoie le double feuilletage  $(\mathcal{H}_f, \mathcal{V}_f)$  sur le double feuilletage standard  $(\mathcal{H}_{pr}, \mathcal{V}_{pr})$  de  $\mathbb{R}^{2m}$ . L'essentiel de la démonstration consiste à modifier  $h'$  et  $v'$  pour en faire des submersions symplectiques  $h''$  et  $v''$ , de sorte que  $\Psi = (h'', v'')$  sera le plongement escompté.

Pour  $p \in I^{2(m-n)}$ , notons  $L_p = v'^{-1}(I^{2n} \times \{p\})$  la feuille correspondante de  $\mathcal{H}_f \cap Op x$  et notons  $\iota_p : L_p \subset Op x$  l'inclusion. Considérons le difféomorphisme  $h'_p = h'|_{L_p} : L_p \rightarrow I^{2n}$ . Nous prétendons que pour tout  $p, q \in I^{2(m-n)}$ , les difféomorphismes  $h'_{q,p} := (h'_p)^{-1} \circ h'_q : L_q \rightarrow L_p$  sont des symplectomorphismes pour les restrictions de  $\omega_M$  aux feuilles horizontales, restrictions qui coïncident avec celles de  $f^*\omega_N$ . En effet, en évoquant la convexité de  $I^{2(m-n)}$ , il est clair que nous pouvons construire dans  $I^{2(m-n)}$  un champ vectoriel lisse autonome dont l'application à chaque temps  $t$  de son flot envoie  $q$  sur  $(1-t)p + tq$ . Ce champ peut être relevé dans  $Op x$  via  $v'$  en un champ vectoriel lisse autonome  $X$  tangent à la distribution  $\mathcal{V}_f$ , dont l'application à chaque temps  $t$  de son flot  $\{\phi_t\}$  envoie  $L_q$  sur  $L_{(1-t)p+tq}$ . Observons que  $\iota_{(1-t)p+tq} \circ h'_{q,(1-t)p+tq} = \phi_t \circ \iota_q$ . Nous calculons

$$(h'_{q,p})^*(f^*\omega_N|_{L_p}) - f^*\omega_N|_{L_q} = (h'_{q,p})^*\iota_p^*f^*\omega_N - \iota_q^*f^*\omega_N = \iota_q^*[\phi_1^*f^*\omega_N - f^*\omega_N],$$

de sorte qu'il suffit de montrer  $\phi_1^*f^*\omega_N = f^*\omega_N$ . Or

$$\phi_1^*f^*\omega_N - f^*\omega_N = \int_0^1 \frac{d}{dt} \phi_t^*(f^*\omega_N) dt = \int_0^1 \phi_t^* \mathcal{L}_X(f^*\omega_N) dt,$$

tandis que

$$\mathcal{L}_X(f^*\omega_N) = d(X \lrcorner f^*\omega_N) = f^*d(Tf(X) \lrcorner \omega_N) = f^*d(0 \lrcorner \omega_N) = 0.$$

Ainsi, si nous trouvons un symplectomorphisme  $h''_0 : (L_0, \omega_M|_{L_0}) \rightarrow (I^{2n}, \omega_0)$ , nous pourrions définir une submersion symplectique  $h'' : (Op x, \omega_M) \rightarrow (I^{2n}, \omega_0)$  en posant  $h''|_{L_p} := h''_0 \circ h'_{p,0}$ . Afin de définir  $h''_0$ , considérons la forme symplectique poussée  $(h'_0)^*(f^*\omega_N)$  sur  $I^{2n}$ . Par le théorème de Darboux, dans un voisinage de  $0 \in I^{2n}$  (noté abusivement aussi  $I^{2n}$ ), il existe un difféomorphisme  $\phi'$  tel que  $(\phi')^*\omega_0 = (h'_0)^*(f^*\omega_N)$ . L'application  $h''_0 := \phi' \circ h'_0$  est telle qu'escomptée.

Similairement, avec  $\omega_M - f^*\omega_N$  au lieu de  $f^*\omega_N$ , nous montrons que les feuilles verticales sont canoniquement symplectomorphes et nous utilisons le théorème de Darboux afin de modifier  $v'$  sur une seule feuille verticale afin d'en déduire l'existence d'une submersion symplectique  $v'' : (Op x, \omega_M) \rightarrow (I^{2(m-n)}, \omega_0)$ .

Observons que  $h''$  et  $v''$  ont toujours la particularité d'être constantes sur  $\mathcal{V}_f$  et  $\mathcal{H}_f$  respectivement, de sorte que  $\Psi := (h'', v'')$  est une carte symplectique qui

envoie  $(\mathcal{H}_f, V_f)$  sur  $(\mathcal{H}_{pr}, \mathcal{V}_{pr})$ . Du corollaire 1.2.4, nous obtenons un difféomorphisme symplectique  $f|_{L_0} : (L_0, \omega_M|_{L_0}) \rightarrow (f(L_0), \omega_N)$ . Nous obtenons le diagramme commutatif recherché en posant  $Op f(x) = f(L_0)$  et  $\psi = h_0'' \circ (f|_{L_0})^{-1}$ .  $\square$

**Remarque 1.2.6.** *La réciproque du théorème est vraie : une application lisse  $g : M \rightarrow N$  pour laquelle il existe, en tout point  $x \in M$ , des cartes symplectiques  $\Psi$  et  $\psi$  comme dans le théorème est une submersion symplectique. En effet, la condition de coisotropie du graphe  $\Gamma_g$  est locale, de sorte qu'il suffit de vérifier la coisotropie de chaque portion  $\Gamma_g \cap (Op x \times Op g(x))$ . Or nous avons la carte symplectique  $\Psi \times \psi : (Op x \times Op g(x), \omega_M \oplus -\omega_N) \rightarrow (\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_0 \oplus -\omega_0)$  qui envoie la portion de  $\Gamma_g$  sur une portion de (la coisotrope)  $\Gamma_{pr}$ .*

Il s'avère donc qu'une submersion symplectique décrit localement et canoniquement une variété symplectique  $(M, \omega_M)$  comme un produit symplectique. Il est naturel de se demander si cette description est aussi globale. Moralement, ceci se résume à déterminer si la monodromie de la connexion plate  $H_f$  est nulle. Les deux exemples ci-dessous scrutent cette question.

**Exemple 1.2.7.** Soient  $(M, \omega_M)$  et  $(N, \omega_N)$  des variétés symplectiques fermées avec  $N$  simplement connexe et  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  une submersion symplectique. Alors il existe une variété symplectique fermée  $(F, \omega_F)$  et un difféomorphisme symplectique  $\Psi : (M, \omega_M) \rightarrow (N \times F, \omega_N \oplus \omega_F)$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi} & N \times F \\ f \downarrow & & \downarrow p_N \\ N & \xrightarrow{id} & N \end{array}$$

La distribution horizontale  $H_f$  peut alors légitimement être interprétée comme une connexion d'Ehresmann plate. Le fait que  $N$  soit simplement connexe implique que la monodromie de cette connexion est nulle, de sorte qu'il y a une identification canonique (par transport parallèle) de toutes les fibres de  $f$  ; pour  $y \in N$  fixé, posons  $F := f^{-1}(\{y\})$ . Il en résulte en particulier que chaque feuille horizontale  $L \in \mathcal{H}_f$  n'intersecte chaque fibre de  $f$  qu'une seule fois, de sorte que  $M \cong L \times F$  symplectiquement. En vertu du corollaire 1.2.4,  $f|_L : L \rightarrow N$  est un revêtement (symplectique) de degré un, c'est-à-dire un difféomorphisme.  $\square$

**Exemple 1.2.8.** L'exemple suivant, étudié par Zambon [Za] à d'autres fins, montre que la monodromie de  $H_f$  n'est pas toujours nulle. Soient  $N = T^2$  et

$M = T^4$  où  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Utilisons les coordonnées  $(p_1, q_1)$  sur  $N$  et  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  sur  $M$  et, pour  $s \in \mathbb{R}$  fixé, considérons les formes symplectiques

$$\omega_N = dp_1 \wedge dq_1 \quad \text{et} \quad \omega_M = dp_1 \wedge d(q_1 + s \sin(2\pi q_2)) + dp_2 \wedge dq_2 .$$

Considérons l'application  $f : M \rightarrow N : (p_1, q_1, p_2, q_2) \mapsto (p_1, q_1)$ . Ainsi,

$$\omega_f = \omega_M - f^* \omega_N = (2\pi s \cos(2\pi q_2) dp_1 + dp_2) \wedge dq_2 .$$

La distribution noyau de cette application, c'est-à-dire  $H_f$ , est générée par les champs vectoriels

$$X_1 := \frac{\partial}{\partial p_1} - 2\pi s \cos(2\pi q_2) \frac{\partial}{\partial p_2} \quad \text{et} \quad X_2 := \frac{\partial}{\partial q_1} .$$

Il en résulte que  $\text{Ker } \omega_f$  a rang  $\dim N$ , de sorte que  $f$  est une submersion symplectique. Ainsi,  $H_f$  est intégrable (ce qui résulte ici aussi de l'identité  $[X_1, X_2] = 0$ ) ; les feuilles de  $\mathcal{H}_f$  contiennent en particulier les courbes intégrales du champ  $X_1$ , courbes de la forme  $(p_1(t), q_1(t), p_2(t), q_2(t)) = (p_1(0) + t, q_1(0), p_2(t), q_2(0))$ . Puisque  $p_1(1) = p_1(0) \in T^1$ , en considérant  $p_1(0) = 0$  et  $q_2(0) = q_2(t) = 0$ , nous sommes amené à calculer

$$p_2(1) - p_2(0) = \int_0^1 \frac{dp_2}{dt}(t) dt = -2\pi s \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = -2\pi s \pmod{1} .$$

Ainsi, si  $2\pi s \notin \mathbb{Q}$ , les courbes intégrales de la forme  $(p_1(t), q_1(t), p_2(t), q_2(t)) = (t, q_1(0), p_2(t), 0)$  ne se bouclent jamais, même si leur image par  $f$  a période 1. Il en résulte que certaines feuilles de  $\mathcal{H}_f$  sont plutôt difféomorphes à  $T^1 \times \mathbb{R}^1$ .

⊠

**Remarque 1.2.9.** *Dans ce dernier exemple,  $M$  est topologiquement un produit de la forme  $N \times F$ , mais cette décomposition n'est pas symplectique en ce sens que  $\omega_M$  n'y est pas de la forme  $\omega_N \oplus \omega_F$ . Nous n'avons pas cherché à produire un exemple de submersion symplectique  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  tel que  $M$  n'est pas difféomorphe à un produit  $N \times F$ , mais il pourrait être instructif d'établir si un tel exemple est possible.*

### 1.3. CARACTÉRISATION DES SUBMERSIONS SYMPLECTIQUES

Rappelons de la §0.1.2 qu'une variété symplectique  $(M, \omega_M)$  est aussi une variété de Poisson  $(M, \pi_M)$ . Il apparaît pertinent de comparer les notions de submersion symplectique et de morphisme de Poisson entre variétés symplectiques, chose accomplie par le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1.** *Soient  $(M, \omega_M)$  et  $(N, \omega_N)$  deux variétés symplectiques,  $\pi_M$  et  $\pi_N$  les bivecteurs de Poisson correspondants et  $f : M \rightarrow N$  une fonction lisse. Alors  $f$  est une submersion symplectique si et seulement s'il s'agit d'un morphisme de Poisson.*

*Démonstration :* Remarquons que  $f$  est Poisson si et seulement si  $f_*\pi_M = \pi_N$  et que  $f$  est une submersion symplectique si et seulement si  $\text{Ker}(\omega_M - f^*\omega_N)$  a rang maximal  $\dim N$ . Puisqu'il s'agit de critères locaux, il suffit de montrer l'équivalence des deux notions pour  $f : \text{Op } x \rightarrow \text{Op } f(x)$ , ce pour tout  $x \in M$ .

Supposons que  $f$  est une submersion symplectique. En vertu du théorème 1.2.5, nous pouvons nous ramener au cas de la projection standard

$$pr : (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2(m-n)}, \omega_0 \oplus \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0).$$

Si  $(p_1, \dots, q_n)$  dénotent des coordonnées de Darboux sur  $\mathbb{R}^{2n}$  et si  $(p_{n+1}, \dots, q_m)$  dénotent des coordonnées de Darboux sur  $\mathbb{R}^{2(m-n)}$ , un exercice simple établit

$$\pi_{\mathbb{R}^{2n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad \pi_{\mathbb{R}^{2m}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Il est alors clair que  $pr_*\pi_{\mathbb{R}^{2m}} = \pi_{\mathbb{R}^{2n}}$ , donc que  $pr$  est Poisson.

Supposons que  $f$  est Poisson. Montrons d'abord qu'il s'agit d'une submersion (du fait que  $M$  et  $N$  sont symplectiques). Soient  $y = f(x) \in N$  et  $v \in T_y N$ . Puisque les évaluations des 1-formes exactes sur  $N$  en  $y$  engendrent la fibre  $T_y^* N$  et puisque  $\pi^\sharp : T_y^* N \rightarrow T_y N$  est un isomorphisme, il existe  $h \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  telle que  $X_h|_y = v$ . Puisque  $f$  est Poisson, pour tout  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= (f^*\{g, h\}_N)(x) - \{f^*g, f^*h\}_M(x) \\ &= (\omega_N)_y (X_g|_y, v) - (\omega_M)_x (X_{f^*g}|_x, X_{f^*h}|_x) \\ &= -(\text{dg})_y(v) + (\text{d}(f^*g))_x (X_{f^*h}|_x) = (\text{dg})_y (-v + (f_*X_{f^*h})|_y). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $g$ , il en résulte que  $v = (f_*X_{f^*h})|_y$ . Soient  $(p_1, \dots, q_n)$  des coordonnées de Darboux sur  $\text{Op } f(x)$  et considérons les fonctions rappelées  $(f^*p_1, \dots, f^*q_n)$  sur  $\text{Op } x$ . Par ce qui précède,  $X_{p_i} = f_*X_{f^*p_i}$  et  $X_{q_j} = f_*X_{f^*q_j}$  pour tout  $i, j$ , de sorte que les champs  $X_{f^*p_i}$  et  $X_{f^*q_j}$  sont linéairement indépendants et engendrent tous ensemble un sous-espace  $H$  de dimension  $\dim N$ . De plus,  $\omega_M = f^*\omega_N$  sur  $H$ , c'est-à-dire que  $H \subseteq \text{Ker } \omega_f$ . Cela implique que  $\text{Ker } \omega_f$  a rang maximal  $\dim N$ , soit encore que  $f$  est une submersion symplectique. □

**Corollaire 1.3.2.** *Soient deux submersions symplectiques  $f : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  et  $g : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ . Alors  $g \circ f : (L, \omega_L) \rightarrow (N, \omega_N)$  est une submersion symplectique.*

*Démonstration :* Le théorème précédent implique que  $f$  et  $g$  sont Poisson. Ainsi,  $(g \circ f)_*\pi_L = g_*(f_*\pi_L) = g_*\pi_M = \pi_N$ , c'est-à-dire que  $g \circ f$  est Poisson. Il s'agit donc d'une submersion symplectique en vertu du théorème précédent.  $\square$

## 1.4. RELATIONS À LA LITTÉRATURE

Bien que le contenu des trois premières sous-sections de ce chapitre soit le fruit de notre travail personnel, la caractérisation des submersions symplectiques comme étant les morphismes de Poisson entre variétés symplectiques suggèrent que ces résultats ne sont pas nouveaux. Dans la présente section, nous relevons quelques relations entre nos considérations et les travaux d'autres auteurs.

Libermann [Li] et Weinstein (voir [CdSW]) ont étudié des morphismes de Poisson définis sur des variétés symplectiques dès les années 1980, ce qui a mené notamment à la notion de *paire duale* ([CdSW]). Plus récemment, Bande et Kotschick [BaK] ont étudié les *paires symplectiques* sur les 4-variétés symplectiques, structures qui sont indirectement liées aux fonctions symplectiques : si  $\dim M = 4$  et  $\dim N = 2$ ,  $(f^*\omega_P, \omega_M - f^*\omega_N)$  est une paire symplectique sur  $M$  au sens de Bande et de Kotschick. Datta et Rabiul Islam ont démontré des  $h$ -principes pour deux familles d'applications qui généralisent les submersions symplectiques : d'une part pour ce qu'ils appellent eux-mêmes des *submersions symplectiques*, à savoir des submersions dont les fibres sont des sous-variétés symplectiques [DRI1], d'autre part pour ce qu'ils appellent les *immersions symplectiques feuilletées*, que nous pourrions ici appeler « submersions présymplectiques », à savoir des applications  $f : (M, \omega) \rightarrow (N, \omega_N)$  (où  $\omega$  n'est supposée que fermée) pour lesquelles il existe un feuilletage horizontal  $\mathcal{H}_f$  tel que  $f$  est une immersion sur chaque feuille et  $\omega = f^*\omega_N$  sur chaque feuille [DRI2].

Le théorème suivant généralise plusieurs des résultats que nous avons démontrés dans les trois sections précédentes.

**Théorème 1.4.1** (Libermann [Li]). *Soient  $(M, \omega_M)$  une variété symplectique et  $\pi_M \in \mathcal{X}^2(M)$  le bivecteur de Poisson associé. Considérons une submersion lisse  $f : M \rightarrow N$  vers une variété lisse  $N$ . Alors il existe une (unique) structure de*

Poisson  $\pi_N$  sur  $N$  telle que  $f : (M, \pi_M) \rightarrow (N, \pi_N)$  soit un morphisme de Poisson si<sup>3</sup> et seulement si la distribution  $\omega_M$ -orthogonale à la distribution  $V_f := \ker Tf$ , à savoir  $H_f := (V_f)^{\omega_M}$ , est intégrable au sens de Frobenius.

Comme application de ceci : s'il existe une submersion lisse  $g : M \rightarrow Q$  telle que  $\ker Tg = H_f$ , alors le théorème stipule qu'il existe une structure de Poisson  $\Xi$  faisant de  $g$  un morphisme de Poisson et la paire  $(f, g)$  est duale au sens de Weinstein.

Les démonstrations initiales que nous avons trouvées pour nos résultats s'approchaient d'ailleurs beaucoup de celle du théorème de Libermann : le point central est que le rappel à  $M$  de hamiltoniens définis sur  $N$  s'avère fort utile afin d'étudier la distribution  $H_f$ .

Dans la même veine, mentionnons le théorème de Guillemin-Lerman-Sternberg concernant les fibrations symplectiques (consulter le chapitre 6 dans [MS2]). Pour la terminologie propre à ce sujet, une submersion symplectique  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  s'interprète comme étant une fibration symplectique, en fait hamiltonienne ; la forme  $\omega_f = \omega_M - f^*\omega_N$  est une 2-forme de connexion pour cette fibration et même une forme d'accouplement.

Comme nous l'avons mentionné, la paire d'ensembles

$$(\{\text{variétés symplectiques}\}, \{\text{fonctions symplectiques}\})$$

n'est pas une catégorie, mais la paire d'ensembles

$$(\{\text{variétés symplectiques}\}, \{\text{immersions symplectiques}\})$$

est une catégorie, tout comme

$$(\{\text{variétés symplectiques}\}, \{\text{submersions symplectiques}\}) .$$

Si la première nous paraît historiquement mieux connue, la seconde nous semble plus riche et intéressante. Cet intérêt fait écho à des travaux d'autres chercheurs : mentionnons les travaux de Sodoge [So] motivés par des propositions de Kapustin et Orlov [KO] concernant un élargissement de la catégorie de Fukaya afin d'y inclure des variétés coisotropes<sup>4</sup>. Mentionnons aussi que l'idée consistant à traiter

3. La direction « si » exige l'hypothèse additionnelle que les préimages de  $f$  soient connexes.

4. Évidemment, même élargie de la sorte, la catégorie de Fukaya n'est pas la même chose que la catégorie dont nous traitons, qui serait plutôt mitoyenne entre les catégories symplectique [BW] et Poisson [CdSW] de Weinstein.

équitablement les caractères présymplectique et Poisson d'une variété symplectique trouve son cadre naturel dans la théorie des structures de Dirac (consulter par exemple [Bu]).

Pour finir, signalons le travail de Humilière, Leclercq et Seyfaddini [HuLS] qui établit que les *homéomorphismes symplectiques*, à savoir les limites  $C^0$  de difféomorphismes symplectiques, préservent les sous-variétés coisotropes ainsi que leur distribution canonique. Ce résultat dépeint une certaine forme de rigidité  $C^0$  pour les sous-variétés coisotropes.

## 1.5. QUESTION DE POLTEROVICH

Compte tenu des divers résultats de rigidité  $C^0$  entourant les symplectomorphismes (§0.1.4), les crochets de Poisson (§0.1.6) et les sous-variétés coisotropes (§1.4), diverses questions peuvent être formulées afin de sonder le caractère  $C^0$  des submersions symplectiques. Les quelques considérations suivantes sont inspirées d'une question que nous a posée L. Polterovich.

**Définition 1.5.1.** *Une application  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  entre variétés symplectiques est **Cardin-Viterbo**, ou **CV**, si*

$$\| \{f^*g, f^*h\}_M \|_{C^0} = \| \{g, h\}_N \|_{C^0} \text{ quelles que soient } g, h \in C_c^\infty(N; \mathbb{R}).$$

Les submersions (anti-)symplectiques sont CV, tout comme la composition d'une application CV et d'une submersion (anti-)symplectique surjective<sup>5</sup>.

**Proposition 1.5.2.** *Soit  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  une application CV submersive entre variétés équidimensionnelles. Alors  $f$  est un (anti-)symplectomorphisme.*

*Démonstration :* En vertu de la proposition 0.1.6.2, les hypothèses de l'énoncé impliquent  $f^*\omega_N = c\omega_M$  pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , soit encore  $f_*\pi_M = c\pi_N$ . Puisque  $f$  est un difféomorphisme local, il existe deux boules  $B_M \subset M$  et  $B_N \subset N$  telles que  $f : B_M \rightarrow B_N$  est un difféomorphisme. Étant donné  $g, h \in C_c^\infty(B_N; \mathbb{R})$ , notons (abusivement)  $f^*g$  et  $f^*h$  les restrictions à  $B_M$  des fonctions rappelées par  $f$ . Nous calculons

$$\begin{aligned} \{f^*g, f^*h\}_M &= \pi_M(d(f^*g) \wedge d(f^*h)) = \pi_M(f^*(dg \wedge dh)) \\ &= (f_*\pi_M)(dg \wedge dh) = c\pi_N(dg \wedge dh) = c\{g, h\}_N. \end{aligned}$$

5. Une submersion  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est *anti-submersion* si  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, -\omega_N)$  est symplectique. De manière équivalente,  $f_*\pi_M = -\pi_N$ .



Ainsi,  $\|\{g, h\}_M\|_{C^0} = \|\{f^*g, f^*h\}_M\|_{C^0} = |c| \|\{g, h\}_M\|_{C^0}$ , d'où  $c = \pm 1$ . □

Une question naturelle est de savoir si, quand  $\dim M > \dim N$ , une application de Cardin-Viterbo est forcément une (anti-)submersion symplectique. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas (du moins quand les variétés sont ouvertes).

**Exemple 1.5.3.** Soient  $M = \mathbb{R}^4$  et  $N = \mathbb{R}^2$ . Considérons des coordonnées  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$  sur  $M$  et  $(p_1, q_1)$  sur  $N$ . Soient les formes symplectiques

$$\omega_M = d(e^{p_2^2+q_2^2}p_1) \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \quad \text{et} \quad \omega_N = dp_1 \wedge dq_1.$$

Étudions  $f(p_1, q_1, p_2, q_2) = (p_1, q_1)$ . Puisque la restriction de  $f$  à la sous-variété  $[p_2 = 0 = q_2]$  est un difféomorphisme symplectique, nous avons  $\|\{f^*g, f^*h\}_M\|_{C^0} \geq \|\{g, h\}_N\|_{C^0}$ . Fixons  $x \notin [p_2 = 0 = q_2]$ . Notre objectif est de montrer que  $|\{f^*g, f^*h\}_M(x)| < |\{g, h\}_N(f(x))|$ .

En vertu du théorème de densité de Nachbin [N], toute fonction lisse sur  $N$  est approximée  $C^1$  avec une précision arbitraire par un polynôme sur les compacts ; nous pouvons donc supposer que  $g$  et  $h$  sont des polynômes. Par la distributivité de  $f^*$  sur le produit et l'addition et en raison des propriétés du crochet de Poisson, il suffit de montrer que  $|\{f^*p_1, f^*q_1\}_M(x)| < |\{p_1, q_1\}_N(f(x))| = 1$ .

Nous vérifions que  $X_{f^*q_1} = -e^{-(p_2^2+q_2^2)} \partial_{p_1}$ , de sorte que  $\{f^*p_1, f^*q_1\}_M = -[d(f^*p_1)](X_{f^*q_1}) = e^{-(p_2^2+q_2^2)} \in (0, 1)$ , car  $p_2 \neq 0$  ou  $q_2 \neq 0$ . ⊠

**Remarque 1.5.4.** *Pour un contre-exemple avec  $M$  et  $N$  fermées, il conviendrait peut-être de regarder du côté de  $(N, \omega_N) = (S^2, \omega_0)$  (la structure symplectique usuelle conférant à  $S^2$  aire 1) et de  $M = S^2 \times_{\tau} S^2$ , le produit tordu de deux sphères vu comme fibré  $f : M \rightarrow N$  au-dessus de  $N$ , muni d'une structure symplectique telle que sa section « nulle » a aire 1 et sa section « à l'infini » a aire strictement supérieure à 1. Dans ce cas, la restriction de  $f$  à la section « nulle » est symplectique. Moralement,  $f^*\omega_N \leq \omega_M$  sur des plans transverses aux fibres, de sorte que  $\pi_N \geq f_*\pi_M$ . Cette situation semble donc avoir les mêmes propriétés qualitatives que l'exemple précédent. Il suffirait de vérifier tout cela dans une carte dense de  $M$ , mais le courage nous manque.*

## 1.6. PROBLÈME DE REPRÉSENTABILITÉ

Le corollaire 1.3.2 répond partiellement à la question (1) posée à la §0.2.1 : étant donné une immersion symplectique  $\phi : (B^{2n}(r), \omega_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$  et la projection  $p : (\mathbb{R}^2 \times M^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega)$ , la composition  $f := p \circ \phi$  est une submersion symplectique, soit encore un morphisme de Poisson. Le fait remarquable est que lorsque  $\phi$  est injective, la submersion  $f$  a la propriété de non-tassement, c'est-à-dire que  $\omega_0(\text{Im } f) \geq \pi r^2$ .

Une question naturelle est de déterminer sous quelles conditions une submersion symplectique  $f : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  a la propriété de non-tassement. Évidemment, il s'agit simplement de vérifier si  $\omega_0(\text{Im } f) \geq \pi r^2$  ; le véritable enjeu est de relier la propriété de non-tassement à d'autres attributs de la submersion.

Un défi plus précis est le :

**Problème de représentabilité** : Étant donné une variété symplectique  $(B, \omega)$ , en quelles circonstances une submersion symplectique  $f : (B, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  se factorise-t-elle, est-elle représentée sous la forme

$$f : (B, \omega) \xrightarrow{\phi} (\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_0 \oplus \omega_0) \xrightarrow{p} (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$$

où  $\phi$  et  $p$  sont symplectiques ? En quelles circonstances  $\phi$  est-elle un plongement ?

Évidemment, nous pourrions considérer  $(M^{2(n-k)}, \omega')$  au lieu de  $(\mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_0)$ , mais ce dernier espace est assurément le candidat le plus naturel. Si nous identifions des circonstances suffisantes permettant de résoudre le problème avec  $\phi$  un plongement, nous aurions alors identifié des conditions suffisantes pour qu'une submersion symplectique ait la propriété de non-tassement.

Notre objectif dans la présente section est d'attaquer le problème de représentabilité. Nous obtenons des caractérisations formelles des submersions symplectiques  $f$  qui sont factorisables symplectiquement ; ces caractérisations demeurent cependant difficiles d'utilisation en pratique.

### 1.6.1. Le problème d'immersion

Voici une première contrainte sur les variétés symplectiques  $(B, \omega)$  pour lesquelles le problème de représentabilité a une chance d'être soluble.

**Lemme 1.6.1.** *Soit  $(B^{2n}, \omega)$  une variété symplectique. Il existe une immersion symplectique  $\phi : (B, \omega) \looparrowright (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  si et seulement si  $\omega$  est exacte et  $B$  est symplectiquement parallélisable.*

*Démonstration :* Supposons qu'une telle immersion  $\phi$  existe. Puisque  $\omega_0$  est exacte,  $\omega = \phi^*\omega_0$  est aussi exacte. Puisque les fibres de  $T\mathbb{R}^{2n}$  s'identifient toutes à  $\mathbb{R}^{2n}$  symplectiquement et puisque  $T\phi : TB \rightarrow T\mathbb{R}^{2n}$  est un isomorphisme symplectique sur les fibres,  $B$  est symplectiquement parallélisable.

De manière réciproque, supposons que  $[\omega] = 0$  et qu'il existe une application  $F : TB \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  qui est un isomorphisme symplectique  $F_x : (T_x B, \omega_x) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  sur chaque fibre. Posons  $f : B \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^{2n}$  ; la paire  $(f, F)$  détermine un morphisme symplectique formel  $F : TB \rightarrow T\mathbb{R}^{2n}$  au sens de la §0.1.3. Nous avons mentionné dans cette section le h-principe pour les immersions symplectiques : pour tout polyèdre  $A \subset B$  de codimension au moins un, l'existence du morphisme symplectique formel  $F : T(Op A) \rightarrow T(Op \mathbb{R}^{2n})$  implique l'existence d'une immersion symplectique  $\psi : (Op A, \omega) \looparrowright (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Puisque  $[\omega] = 0 \in H_{dR}^2(B; \mathbb{R})$ , rappelons de la §0.1.1 que  $B$  est une variété ouverte. Il s'avère alors qu'il existe un polyèdre  $A$  de codimension au moins un (le cœur de  $B$ ) et une immersion symplectique  $\psi' : (B, \omega) \rightarrow (Op A, \omega)$  ; voir 4.3.1 dans [EMi] et le corollaire 3.3 dans [DRI1]. La composition  $\phi = \psi \circ \psi'$  est telle que recherchée. □

**Définition 1.6.2.** *Soient  $M$  une variété lisse et  $\beta \in \Omega_{dR}^2(M; \mathbb{R})$  une forme exacte. La **complexité** de  $\beta$  est*

$$K(\beta) := \min \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r \in C^\infty(M; \mathbb{R}), \beta = \sum_{i=1}^r df_i \wedge dg_i \right\}.$$

(Si l'ensemble de droite est vide, nous posons  $K(\beta) = +\infty$ .)

**Lemme 1.6.3.** *Soient  $\beta, \gamma \in \Omega_{dR}^2(M; \mathbb{R})$  deux formes exactes et  $\Phi : M \rightarrow N$  une application lisse.*

- (1)  $K(\beta) \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in M} \text{rang } \beta_x$ .
- (2)  $|K(\beta) - K(\gamma)| \leq K(\beta + \gamma) \leq K(\beta) + K(\gamma)$ .
- (3)  $K(-\beta) = K(\beta)$ .
- (4) Si  $\beta = \Phi^*\alpha$  avec  $\alpha \in \Omega_{dR}^2(N; \mathbb{R})$  exacte, alors  $K(\beta) \leq K(\alpha)$ .

*Démonstration :* Pour  $x \in M$ , rappelons de la §0.1.1 que le rang de  $\beta$  en  $x$  est

$$\text{rang } \beta_x := 2 \max \{ r \in \mathbb{N} \mid \wedge^r \beta_x \neq 0 \} = 2 \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \wedge^{r+1} \beta_x = 0 \}.$$

- (1) Si  $\beta = \sum_{i=1}^r df_i \wedge dg_i$ , alors  $\wedge^{r+1}\beta = 0$ , puisque chaque multivecteur élémentaire dans ce produit fait intervenir un produit de la forme  $df_i \wedge df_i$ . Donc  $\wedge^{r+1}\beta_x = 0$  pour tout  $x \in M$ , d'où  $2r \geq \text{rang } \beta_x$  pour tout  $x \in M$ .
- (2) Comme toujours pour les « inégalités triangulaires », il suffit d'établir l'inégalité  $K(\beta + \gamma) \leq K(\beta) + K(\gamma)$ . Si  $\beta = \sum_{i=1}^r df_i \wedge dg_i$  et si  $\gamma = \sum_{j=1}^s df_{r+j} \wedge dg_{r+j}$ , alors  $\beta + \gamma = \sum_{i=1}^{r+s} df_i \wedge dg_i$ , d'où  $K(\beta + \gamma) \leq r + s$ .
- (3)  $\beta = \sum_{i=1}^r df_i \wedge dg_i$  si et seulement si  $-\beta = \sum_{i=1}^r dg_i \wedge df_i$ .
- (4) Si  $\alpha = \sum_{i=1}^r df_i \wedge dg_i$ , alors  $\beta = \sum_{i=1}^r d(\Phi^* f_i) \wedge d(\Phi^* g_i)$ .

□

**Définition 1.6.4.** Une 2-forme exacte  $\beta$  est **simple** si  $2K(\beta) = \sup_{x \in M} \text{rang } \beta_x$ .

**Théorème 1.6.5.** Soient une variété symplectique  $(B^{2n}, \omega)$  et une submersion symplectique  $f : (B, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f = p \circ \phi$  avec  $\phi : (B, \omega) \looparrowright (\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$  une immersion symplectique et  $p : (\mathbb{R}^{2m}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  la projection symplectique standard.
- (2)  $\omega_f = \omega - f^*\omega_0$  est exacte et  $K(\omega_f) \leq m - k$ .

En particulier,  $f$  se factorise symplectiquement à travers une immersion symplectique  $\phi : B \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$  si et seulement si  $\omega_f$  est exacte et simple.

*Démonstration :* Nous utiliserons les coordonnées de Darboux globales standard  $(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)$  sur  $(\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  et  $(p_1, q_1, \dots, p_m, q_m)$  sur  $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$ .

Montrons que (1) implique (2). Posons  $\phi(x) = (f_1(x), g_1(x), \dots, f_m(x), g_m(x))$ , de sorte que  $f(x) = (p \circ \phi)(x) = (f_1(x), g_1(x), \dots, f_k(x), g_k(x))$ . Nous calculons

$$\omega_f = (\phi^*\omega_0) - (f^*\omega_0) = \sum_{i=1}^{m-k} df_{k+i} \wedge dg_{k+i},$$

d'où nous déduisons que  $\omega_f$  est exacte et que  $K(\omega_f) \leq m - k$ .

Montrons que (2) implique (1). Écrivons  $f(x) = (f_1(x), g_1(x), \dots, f_k(x), g_k(x))$ . Puisque  $K(\omega_f) \leq m - k$ , il existe  $f_{k+1}, g_{k+1}, \dots, f_m, g_m \in C^\infty(B; \mathbb{R})$  telles que  $\omega_f = \sum_{i=1}^{m-k} df_{k+i} \wedge dg_{k+i}$ . Considérons alors l'application lisse

$$\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^{2m} : x \mapsto (f_1(x), g_1(x), \dots, f_m(x), g_m(x)).$$

Il est clair que  $f = p \circ \phi$ . De plus, nous calculons

$$f^*\omega_0 = f^*\left(\sum_{i=1}^k dp_i \wedge dq_i\right), \text{ donc } \phi^*\omega_0 = \phi^*\left(\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i\right) = f^*\omega_0 + \omega_f = \omega.$$

Cela signifie que  $\phi$  est une immersion symplectique.

En particulier, si  $f$  se factorise à travers  $\phi : B \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ , cela implique  $K(\omega_f) = n - k$ , mais  $K(\omega_f) \geq (1/2) \text{rang } \omega_f = n - k$ . Donc  $\omega_f$  est simple.  $\square$

**Remarque 1.6.6.** *Supposons qu'il existe une immersion symplectique  $(B^{2n}, \omega) \looparrowright (\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$ , alors  $K(\omega) \leq m$ . Dans ce cas, étant donné une submersion symplectique  $f : (B, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$ , nous avons en raison du lemme 1.6.3*

$$K(\omega_f) \leq K(\omega) + K(f^*\omega_0) \leq m + k = (m + 2k) - k.$$

*Il existe ainsi toujours une factorisation symplectique  $f = p \circ \phi$  à travers  $\mathbb{R}^{2(m+2k)}$ . Cette conclusion découle alternativement de la proposition 1.1.9.*

**Remarque 1.6.7.** *Le corollaire 1.6.22 stipule qu'il existe une submersion symplectique  $f : (B^4(1), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  pour laquelle  $\omega_f$  n'est pas simple.*

**Remarque 1.6.8.** *Le contexte du lemme 1.6.1 correspond au cas  $k = 0$ . Il serait intéressant de généraliser ce lemme au contexte du dernier théorème. La proposition de généralisation la plus directe est «  $f$  se factorise à travers une immersion symplectique dans  $\mathbb{R}^{2n}$  si et seulement si  $\omega_f$  est exacte et s'il existe une trivialisation symplectique  $F : (V_f, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_0)$  ». La dernière remarque indique néanmoins que cette proposition précise est erronée, puisque sur  $B^{2n}(r)$ ,  $\omega_f$  est toujours exacte et  $V_f$  est toujours symplectiquement trivialisable.*

## 1.6.2. Le problème de plongement

Le problème de représentabilité à travers des plongements symplectiques est plus ardu. Nous le solutionnons dans le prochain théorème sous l'hypothèse que  $B$  est un domaine étoilé compact dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , disons centré à l'origine. Nous remercions M. Pinsonnault pour son aide dans la démonstration du théorème.

**Définition 1.6.9.** *Une submersion symplectique  $f : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  est **standard à l'infini** s'il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^{2n}$  en dehors duquel  $f$  coïncide avec la projection symplectique standard  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$ .*

**Théorème 1.6.10.** *Soient  $(B^{2n}, \omega_0) \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  un domaine étoilé centré en  $\{0\}$ ,  $f : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  une submersion symplectique et  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  la projection symplectique standard. Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $f = p \circ \phi$  avec  $\phi : (B, \omega) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  un plongement symplectique.

(2) Il existe une submersion symplectique  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  standard à l'infini telle que  $\tilde{f}|_B = f$ .

(3) Il existe un symplectomorphisme  $\Phi : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  qui est l'identité en dehors d'un compact  $K \subset \mathbb{R}^{2n}$  et qui vérifie  $f = p \circ \Phi|_B$ .

*Démonstration* : Montrons d'abord que (3) implique (1), car l'argument évoque, de manière simplifiée, l'argument qui donnera l'implication « (2)  $\Rightarrow$  (3) ». Puisqu'un tel  $\Phi$  est un difféomorphisme local, il suffit d'établir que  $\Phi$  est injectif, car  $\phi := \Phi|_B$  sera alors le plongement escompté. Soit  $L \in (0, \infty)$  suffisamment grand pour que  $K$  et  $\Phi(K)$  soient inclus dans le cube  $C_L := (-L, L)^{2n}$ . Il découle de ceci que  $\Phi$  induit un symplectomorphisme  $\Phi' : ((\mathbb{R}/2L\mathbb{Z})^{2n}, \omega_0) \rightarrow ((\mathbb{R}/2L\mathbb{Z})^{2n}, \omega_0)$  qui est injectif près de l'image de  $\partial C_L$  dans le tore  $(\mathbb{R}/2L\mathbb{Z})^{2n}$ . Considérant que  $\Phi'$  est une submersion entre variétés fermées, le théorème de fibration d'Ehresmann implique que  $\Phi'$  est une fibration localement triviale ; en particulier, toutes les fibres de  $\Phi'$  ont même cardinalité, à savoir 1. Bref  $\Phi'$  et donc  $\Phi$  sont injectives.

Montrons que (1) implique (2). En vertu du lemme A.2.1, il existe une difféotopie à support compact  $\tilde{\phi}_t \in \text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ,  $t \in [0, 1]$ , dont la restriction à  $B$  produit une isotopie de plongements symplectiques  $\phi_t : (B, \omega) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  telle que  $\phi_0$  est l'inclusion  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  et  $\phi_1 = \phi$ . Il suffit de poser  $\tilde{f} := p \circ \tilde{\phi}_1$ .

Montrons que (2) implique (3). Soit  $K \subset \mathbb{R}^{2n}$  un compact en dehors duquel  $\tilde{f}$  coïncide avec  $p$ . Ainsi,  $H_{\tilde{f}}$  et  $H_p$ , respectivement  $V_{\tilde{f}}$  et  $V_p$ , coïncident sur le complément de  $K$ .

Soit  $L > 0$  suffisamment grand pour que  $K \subset B^{2k}(L) \times B^{2(n-k)}(L)$  et que  $\tilde{f}(K) \subset B^{2k}(L)$ , où  $B^d(r)$  dénote la boule fermée de rayon  $r$  en dimension  $d$ . Nous pouvons ainsi compactifier ces boules en des polysphères afin d'obtenir une submersion  $F : S^{2k}(L) \times S^{2(n-k)}(L) \rightarrow S^{2k}(L)$  qui coïncide avec la projection standard en dehors de l'image de  $K$ . Considérant que  $F$  est une submersion entre variétés fermées, le théorème de fibration d'Ehresmann implique que  $F$  est une fibration localement triviale. En particulier, toutes les fibres de  $F$  sont difféomorphes à  $S^{2(n-k)}(L)$ , de sorte que toutes les fibres de  $\tilde{f}$  sont difféomorphes à  $\mathbb{R}^{2(n-k)}$ . Par ailleurs,  $H_{\tilde{f}}$  induit sur  $S^{2k}(L) \times S^{2(n-k)}(L)$  une connexion  $H_F$  pour  $F$  qui est plate, donc intégrable ; notons  $\mathcal{H}_F$  le feuilletage associé. La restriction de  $F$  à chaque feuille horizontale est une submersion entre variétés fermées équidimensionnelles, donc un revêtement, vers la variété simplement connexe  $S^{2k}(L)$ . Chaque feuille horizontale est ainsi difféomorphe à  $S^{2k}(L)$ , de sorte que chaque feuille horizontale de  $\mathcal{H}_{\tilde{f}}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2k}$ . L'espace quotient  $(S^{2k}(L) \times S^{2(n-k)}(L))/\mathcal{H}_F$  s'identifie à  $S^{2(n-k)}(L)$  et l'application quotient est une submersion lisse. Cette application induit une submersion  $\tilde{f}' : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-k)}$  dont les fibres sont  $\mathcal{H}_{\tilde{f}}$ . Notons que  $\tilde{f}'$

coïncide avec la projection  $p' : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-k)} : (p_1, \dots, q_n) \mapsto (p_{k+1}, \dots, q_n)$  en dehors de  $K$ .

Posons  $\Phi = (\tilde{f}, \tilde{f}') : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$ . Il s'agit d'une submersion lisse qui coïncide avec l'identité en dehors de  $K$  et qui vérifie  $p \circ \Phi|_B = \tilde{f}|_B = f$ . Il nous reste donc seulement à établir l'identité  $\Phi^*\omega_0 = \omega_0$ . Pour ce faire, il suffit d'établir que  $\tilde{f}' : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_0)$  est une submersion symplectique, c'est-à-dire que sa restriction à chaque feuille de  $\mathcal{V}_{\tilde{f}}$  est symplectique. Soit  $L_V \in \mathcal{V}_{\tilde{f}}$  une feuille incluse dans le complément de  $K$  ; pour les coordonnées de Darboux globales standard sur  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  nous avons donc  $L_V = \{(p_1^0, \dots, q_k^0)\} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$  pour un certain point  $p = (p_1^0, \dots, q_k^0, 0, \dots, 0) \in L_V \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Il est clair que la restriction de  $\tilde{f}'$  à  $L_V$  est symplectique. Considérons dans  $\mathbb{R}^{2k}$  des demi-droites qui émanent radialement du point  $(p_1^0, \dots, p_k^0)$ . Étant donné le fibré  $\tilde{f} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  muni de la connexion  $H_{\tilde{f}}$ , nous pouvons effectuer le transport parallèle le long de ces demi-droites afin d'identifier toutes les fibres, c'est-à-dire toutes les feuilles de  $\mathcal{V}_{\tilde{f}}$ , avec  $L_V$ . (En fait, c'est cette identification qui définissait implicitement  $\tilde{f}'$  ci-dessus.) Nous pouvons montrer que ce transport parallèle est symplectique, c'est-à-dire produit un symplectomorphisme entre  $L_V$  et n'importe quelle autre fibre, essentiellement via le même argument que celui employé localement lors de la démonstration du théorème 1.2.5. □

**Remarque 1.6.11.** *D'autres équivalences découlent de nos résultats antérieurs, par exemple :*

(4) *Il existe un graphe coisotrope  $\Gamma \subset (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2k}, \omega_0 \oplus -\omega_0)$  qui coïncide avec  $\Gamma_f$  au-dessus de  $B$  et qui est « standard à l'infini ».*

(5) *Il existe des fonctions lisses  $f_1, g_1, \dots, f_n, g_n$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telles que  $\{f_i, g_j\} = \delta_{ij}$ ,  $\{f_i, f_j\} = 0 = \{g_i, g_j\}$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)|_B$  et, en dehors d'un compact  $K$ ,  $f_i = p_i$  et  $g_j = q_j$ .*

**Remarque 1.6.12.** *Il est quelque peu curieux que les théorèmes 1.6.1 et 1.6.10 aient des formulations si différentes. À cet égard, observons que l'énoncé (2) implique :*

*Il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^{2n}$  et des 2-formes  $\alpha, \beta \in \Omega_{dR}^2(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$  fermées simples de rangs constants tels que*

$$\alpha|_B = f^*\omega_0, \beta|_B = \omega_f, \alpha|_{K^c} = p^*\omega_0, \beta|_{K^c} = \omega_p \text{ et } \wedge^n(\alpha + \beta) > 0.$$

*En effet, soit  $K \subset \mathbb{R}^{2n}$  un compact en dehors duquel  $\tilde{f}$  coïncide avec  $p$ . Posons  $\alpha := \tilde{f}^*\omega_0$  et  $\beta := \omega_{\tilde{f}}$ , qui sont assurément des formes exactes. Puisque  $\tilde{f}|_B = f$ ,*

nous avons  $\alpha|_B = f^*\omega_0$  et  $\beta|_B = \omega_f$ . Puisque  $\tilde{f}|_{K^c} = p$ , nous avons  $\alpha|_{K^c} = p^*\omega_0$  et  $\beta|_{K^c} = \omega_p$ . Puisque  $\alpha + \beta$  coïncide avec la forme symplectique standard  $\omega_0$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , nous avons  $\wedge^n(\alpha + \beta) > 0$ . Puisque  $\tilde{f}$  est une submersion symplectique,  $\alpha$  et  $\beta$  ont rangs constants  $2k$  et  $2(n-k)$ , respectivement. Puisque  $K(\alpha) \leq K(\omega_0) = k$ , il en résulte que  $\alpha$  est simple. L'existence de la submersion symplectique  $\tilde{f}'$ , qui vérifie  $\beta = (\tilde{f}')^*\omega_0$ , implique similairement  $K(\beta) \leq n - k$ , donc  $\beta$  est simple.

Il n'est pas du tout clair que cet énoncé implique par exemple (3). En effet, cet énoncé implique qu'il existe des fonctions lisses  $f_1, g_1, \dots, f_n, g_n$  telles que, notamment,  $\sum_{i=1}^n df_i \wedge dg_i$  coïncide avec  $\omega_0$  en dehors du compact  $K$ , de sorte que l'application  $\Phi = (f_1, \dots, g_n)$  est un symplectomorphisme en dehors de  $K$ . Il se pourrait néanmoins que ce  $\Phi$  ne soit pas injectif. Nous laissons ouvert le problème de cette possible réciprocité.

### 1.6.3. Contre-exemples

Le théorème 1.2.5 implique que toute submersion symplectique  $f : (B, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  solutionne localement le problème de représentabilité positivement, même dans sa version plongée. Il semble alors vraisemblable que la solution soit aussi globalement positive, du moins quand  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  est un domaine étoilé. Afin de renforcer ce sentiment, soulignons le fait suivant.

**Proposition 1.6.13.** *Soit  $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$  un domaine étoilé compact centré en  $\{0\}$ . Alors, pour chaque  $k$ , l'ensemble des submersions symplectiques  $f : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  est connexe par arcs.*

*Démonstration :* Soit  $f$  une telle submersion symplectique. Translatons d'abord  $\mathbb{R}^{2k}$  afin de se ramener au cas où  $f(0) = 0$ . En vertu du théorème 1.2.5, nous pouvons utiliser une isotopie symplectique supportée dans un petit voisinage  $Op\{0\} \subset B$  pour nous ramener au cas où  $f(p_1, \dots, q_n) = (p_1, \dots, q_k)$  sur  $Op\{0\}$ . Il s'agit ensuite d'une simple application de l'astuce d'Alexander : pour  $\lambda \geq 1$ , l'homothétie  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2k} : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$  transforme  $\Gamma_f$  en un autre graphe coisotrope  $\Gamma_{f_\lambda}$ . La portion de  $\Gamma_{f_\lambda}$  qui intersecte  $p_{\mathbb{R}^{2n}}^{-1}B$  détermine une submersion symplectique  $f_\lambda : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$ . Pour  $\lambda$  suffisamment grand,  $f_\lambda$  n'est que la restriction à  $B$  de la projection  $(p_1, \dots, q_n) \mapsto (p_1, \dots, q_k)$ .

□



Les prochains théorèmes, qui recourent à des méthodes homotopiques, établissent que cet espoir est néanmoins déçu. Nous sommes redevable à Y. Eliashberg de nous avoir suggéré le premier résultat, ce qui nous a inspiré le second.

**Théorème 1.6.14** (Eliashberg). *Soit  $p : (\mathbb{R}^4, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  la projection symplectique standard. Il existe une immersion symplectique  $\phi : (B^4(1), \omega_0) \looparrowright (\mathbb{R}^4, \omega_0)$  telle qu'il n'existe aucun plongement  $\psi : B^4(1) \hookrightarrow \mathbb{R}^4$  qui satisfasse  $p \circ \phi = p \circ \psi$ .*

*Démonstration* : Afin d'alléger la notation, posons  $B = B^4(1)$ . Étant donné le tore  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  et un disque ouvert  $D \subset T^2$ , posons  $S = T^2 \setminus D$ . Les structures usuelles du tore induisent sur  $S$  une forme symplectique (que nous noterons aussi  $\omega_0$ ) et une trivialisaton  $\tau$  de  $TS$ . Notons que  $S$  se rétracte par déformation sur un bouquet  $X = C_1 \vee C_2$  formé de deux lacets plongés  $C_1, C_2$  qui s'intersectent (transversalement) en un unique point  $x$ . En vertu du h-principe pour les plongements symplectiques (voir §0.1.3 ou 12.1.1 dans [EMi]), il existe un plongement symplectique  $(S, \omega_0) \hookrightarrow (B, \omega_0)$  (un représentant explicite peut aussi être exhibé). Nous identifierons désormais  $S$  et son image dans  $B$ .

Il existe clairement une immersion  $S \looparrowright \mathbb{R}^2$ . La restriction d'une telle immersion au bouquet  $X$  a pour image deux cercles immergés dans  $\mathbb{R}^2$  qui s'intersectent transversalement en l'image de  $x$  ; ces deux cercles s'intersectent donc ailleurs, de sorte que l'immersion n'est pas injective. Une telle immersion  $\iota : S \looparrowright \mathbb{R}^2$  peut être supposée symplectique en vertu d'arguments similaires à ceux de l'annexe A.

Une parenthèse : rappelons que le groupe des matrices symplectiques

$$\mathrm{Sp}(2n) := \left\{ \Psi \in M_{2n, 2n}(\mathbb{R}) \mid \Psi^T \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \Psi \right\}$$

est connexe par arcs et a pour groupe fondamental  $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n)) \cong \mathbb{Z}$ . De plus, toute projection symplectique  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  induit (en laissant les fibres  $\mathbb{R}^{2(n-k)}$  intactes) un monomorphisme  $\mathrm{Sp}(2k) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n)$  qui est injectif sur le  $\pi_1$ .

Observons que le fibré normal  $NS$  à  $S$  dans  $B^4(1)$  est trivial ; nous pouvons choisir une trivialisaton  $\nu$  de ce fibré de sorte que la trivialisaton  $\mathcal{T} = (\tau, \nu)$  de  $T_S B$ , lorsque comparée le long de chaque  $C_j$  à la trivialisaton standard de  $TB$ , corresponde à des classes nulles dans  $\pi_1(\mathrm{Sp}(4))$ . Ce faisant, cette trivialisaton se prolonge en une trivialisaton  $\tilde{\mathcal{T}}$  de tout  $TB$ .

L'immersion  $\iota : (S, \sigma) \rightarrow (B^2(1/2), \omega_0)$  rappelle la trivialisaton constante sur  $\mathbb{R}^2$  en une trivialisaton symplectique  $\tau'$  de  $TS$ , trivialisaton que nous pouvons comparer à la trivialisaton initiale  $\tau$  sur  $S$ . Pour  $j = 1, 2$ , la comparaison de  $\tau'$  relativement à  $\tau$  le long de  $C_j$  détermine une classe  $c_j \in \pi_1(\mathrm{Sp}(2))$ .

En abusant des notations, définissons un monomorphisme de fibré symplectique  $F : T_S B \rightarrow TB$  tel que  $f(x) = (0, \iota(x)) \subset B^2(1/2) \times B^2(1/2) \subset B$ , tel que  $F|_{TS} = T\iota : TS \rightarrow V_p$  et tel que  $F|_{NS} : NS \rightarrow H_p$  rappelle la trivialisatation constante de  $H_p$  en une trivialisatation  $\nu'$  sur  $NS$  qui, lorsque comparée à  $\nu$  le long de chaque  $C_j$ , détermine les classes  $-c_j \in \pi_1(\text{Sp}(2))$ . Ainsi, le rappel de la trivialisatation usuelle de  $TB$  par  $F$  sur  $T_S B$ , lorsque comparée à  $\mathcal{T}$  le long de chaque  $C_j$ , détermine la classe  $c_j + (-c_j) = 0$  dans  $\pi_1(\text{Sp}(4))$ . Ainsi,  $F$  peut être prolongée en un isomorphisme de fibré symplectique  $\tilde{F} : TB \rightarrow TB$ .

Ainsi,  $\tilde{F}$  est un morphisme symplectique formel (voir §0.1.3). Le h-principe relatif pour les immersions symplectiques implique donc qu'il existe une immersion symplectique  $\phi : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, \omega_0)$  telle que  $\phi|_S = f = (0, \iota)$ . Ceci détermine la submersion symplectique  $p \circ \phi : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  qui a la particularité d'avoir la surface  $S$  contenue dans l'une de ses feuilles verticales. S'il existait un plongement  $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}^4$  tel que  $p \circ \psi = p \circ \phi$ , alors  $\psi|_S$  serait un plongement de  $S$  dans  $p^{-1}((p \circ \psi)(S)) = p^{-1}((p \circ \phi)(S)) = p^{-1}(\{0\}) \cong \mathbb{R}^2$ , ce qui n'existe pas ; donc  $\psi$  n'existe pas non plus.

□

Le deuxième théorème nécessite un peu plus de préparation.

**Définition 1.6.15.** *Une submersion symplectique  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est **exacte** si pour toute application lisse  $\sigma : B^2 \rightarrow M$  qui envoie  $\partial B^2$  dans une feuille horizontale de  $\mathcal{H}_f$ , nous avons  $\int_{B^2} \sigma^* \omega_f = 0$ .*

**Proposition 1.6.16.** *Supposons qu'une submersion symplectique  $f : (B^{2n}, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  se factorise symplectiquement à travers  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Alors  $f$  est exacte.*

*Démonstration :* Par hypothèse,  $f = p \circ \phi$  où  $\phi : (B^{2n}, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  est une immersion symplectique et  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  est la projection symplectique standard. Chaque fibre de  $f$  est donc envoyée dans une fibre de  $p$  de manière immergée. Par hypothèse sur les dimensions, nous avons  $(T\phi)(V_f) = V_p$ . Puisque  $\omega = \phi^* \omega_0$ , nous avons  $(T\phi)(H_f) \subset [(T\phi)(V_f)]^{\omega_0} = V_p^{\omega_0} = H_p$ . Nous déduisons que  $\phi$  immerge les feuilles horizontales de  $f$  dans les feuilles horizontales de  $p$ .

Étant donné une application  $\sigma : B^2 \rightarrow B$  qui envoie  $\partial B^2$  dans une feuille de  $\mathcal{H}_f$ , l'application  $\phi \circ \sigma$  envoie  $\partial B^2$  sur un lacet dans une feuille horizontale  $L \in \mathcal{H}_p$ . Ce lacet est contractile puisque  $L \cong \mathbb{R}^{2k}$ , de sorte qu'en identifiant  $B^2$  à l'hémisphère nord de la 2-sphère  $S^2$ ,  $\phi \circ \sigma$  se prolonge en une application  $\tilde{\sigma} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  qui envoie l'hémisphère sud dans  $L$ . Puisque  $\omega_p$  est une forme exacte qui s'annule sur  $L$ , nous calculons  $\int_{B^2} \sigma^* \omega_f = \int_{B^2} (\phi \circ \sigma)^* \omega_p = \int_{S^2} \tilde{\sigma}^* \omega_p = 0$ .

□

**Remarque 1.6.17.** *Soulignons que cet argument ne se généralise pas au cas où la submersion symplectique se factoriserait plutôt à travers  $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$  avec  $m > n$ . En effet, de  $\omega_f = \phi^* \omega_p$ , nous pourrions déduire que  $(T\phi)(H_f)$  est transverse à  $V_p$ , mais pas qu'il lui est  $\omega_0$ -orthogonal. D'ailleurs, nous établissons dans le prochain théorème qu'il existe une submersion symplectique qui n'est pas exacte.*

**Définition 1.6.18.** *Une submersion symplectique  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$  est **plongée** si la restriction de  $f$  à chaque feuille horizontale est un plongement.*

**Proposition 1.6.19.** *Soit  $f = p \circ \phi$  où  $\phi : (B^{2n}, \omega) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  est un plongement symplectique et  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2k}, \omega_0)$  est la projection symplectique standard. Alors  $f$  est plongée.*

*Démonstration :* Comme précédemment, il découle des hypothèses que chaque feuille horizontale  $L \in \mathcal{H}_f$  est envoyée par  $\phi$  dans une feuille horizontale de  $p$ . Puisque  $\phi$  est un plongement, sa restriction à  $L$  est aussi un plongement. Puisque la restriction de  $p$  à chacune de ses feuilles horizontales est un difféomorphisme, il en résulte que  $f|_L$  est un plongement.

□

**Théorème 1.6.20.** *Il existe une submersion symplectique  $f : (B^4(1), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  plongée qui n'est pas exacte.*

*Démonstration :* Observons que la boule  $B^4(1)$  a capacité  $\pi$ . Considérons la variété symplectique  $(\mathbb{R}^2 \times B^2(2), \omega_0 \oplus \omega_0)$  où  $(B^2(2), \omega_0)$  a capacité  $4\pi$ . Nous compactifierons plus tard  $B^2(2)$  en une 2-sphère de même capacité. Observons que l'inclusion  $B^4(1) \subset \mathbb{R}^4$  est aussi une inclusion  $B^4(1) \subset \mathbb{R}^2 \times B^2(2)$ .

Montrons d'abord qu'il existe dans  $\mathbb{R}^2 \times B^2(2)$  une isotopie de plongements symplectiques de  $B^2(3)$  qui interpole entre  $B^2(3) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times B^2(2)$  et un plongement dans  $B^4(1)$ . Nous avons l'inclusion  $B^2(3) \rightarrow R = [-4, 4]^2$ . En dénotant  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , remarquons que pour tout  $t > 0$ , la transformation  $(u, v) \mapsto (tu, v/t)$  est symplectique. Quitte à traduire, nous pouvons ainsi symplectiquement isotoper  $R$  vers  $R' = [1, 2] \times [-32, 32]$ . Considérons les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , de sorte que  $\omega_0 = r dr \wedge d\theta = d(r^2/2) \wedge d\theta$ . Pour  $s > 0$ , la transformation  $\psi_s : (r, \theta) \mapsto (r', \theta') = (r/\sqrt{s}, s\theta)$  est une immersion symplectique de  $R'$  dans  $\mathbb{R}^2$  ; pour  $s = s_0$  suffisamment grand, cette transformation envoie  $R'$  dans la boule  $B^2(1/2)$ . Pour  $s \in [1, s_0]$  et pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, nous

déduisons que l'application  $\Psi_s : (R', \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times B^2(2), \omega_0 \oplus \omega_0)$  donnée par

$$(r, \theta) \mapsto (r', \theta', x', y') = (r/\sqrt{s}, s\theta, \epsilon(s-1)\theta, 0)$$

est bien définie et est un plongement symplectique. De plus, si  $\epsilon$  est assez petit,  $\Psi_{s_0}(R') \subset B^4(1)$ .

Ensuite, pour  $s \in [0, 2/3]$ , considérons les plongements symplectiques

$$\Phi_s : B^2(3) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times B^2(2) : x \mapsto (x', y') = (\sqrt{1-s^2}x, sx).$$

Ces applications permettent d'interpoler entre  $B^2(3) \times \{0\}$  et une variété dont la projection sur  $\mathbb{R}^2$  est un plongement et dont la projection sur  $B^2(2)$  est surjective.

Compactifions maintenant  $\mathbb{R}^2 \times B^2(2)$  en  $\mathbb{R}^2 \times S^2$  où  $S^2$  a capacité  $4\pi$ . Tout ce qui précède implique qu'il existe une isotopie de plongements symplectiques  $(B^2(3), \omega_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2 \times S^2, \omega_0 \oplus \omega_0)$  qui interpole entre un plongement contenu dans  $B^4(1)$  et un plongement  $\sigma$  qui envoie  $\partial B^2(3)$  sur une feuille horizontale de  $\mathcal{H}_p$ , où  $p = p_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . En particulier,  $\int_{B^2(3)} \sigma^* \omega_p = 4\pi \neq 0$ . Cette isotopie de  $B^2(3)$  s'avère s'étendre en une isotopie de difféomorphismes symplectiques de  $\mathbb{R}^2 \times B^2(2)$  qui débute en l'identité et qui finit en un difféomorphisme  $F$ . Posons  $\phi := F|_{B^4(1)}$  et  $f = p \circ \phi$ . Observons que  $\sigma : B^2(3) \rightarrow \phi(B^4(1))$ , de sorte que  $\int_{B^2(3)} \sigma^* \omega_f = 4\pi \neq 0$   $f$  n'est pas exacte. Puisque  $\phi$  est un plongement,  $f$  se restreint à un plongement sur chacune de ses feuilles horizontales.

□

**Remarque 1.6.21.** *Il est plus simple d'exhiber une submersion symplectique qui n'est ni plongée, ni exacte.*

**Corollaire 1.6.22.** *Il existe une submersion symplectique  $f : (B^4(1), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  telle que  $\omega_f$  n'est pas simple.*

*Démonstration :* La submersion  $f$  construite dans le théorème précédent n'étant pas exacte, elle ne peut pas se factoriser symplectiquement à travers une immersion dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Or, en vertu du lemme 1.6.1, cela signifie que  $\omega_f$  n'est pas simple.

□

## 1.7. CONCLUSION

Nous concluons ce chapitre en discutant deux sujets qui motivent l'étude du problème de représentabilité.

Le premier sujet est une possible caractérisation des submersions symplectiques  $f$  qui se factorisent symplectiquement à travers un plongement. Étant donné un domaine étoilé borné  $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$  et une submersion symplectique  $f = p \circ \phi : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  où  $\phi : (B, \omega_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  est un plongement symplectique et  $p : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  est la projection symplectique standard,  $f$  est exacte et plongée. Nous soulevons la question : la réciproque de ceci est-elle vraie ? C'est-à-dire :

Si  $f : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  est une submersion symplectique plongée exacte, est-ce que  $f = p \circ \phi$  pour un certain plongement symplectique  $\phi : (B, \omega_0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  ?

Observons que le contre-exemple produit dans le théorème 1.6.14 n'a aucune raison d'être une submersion symplectique plongée.

Expliquons vaguement pourquoi cette réciproque pourrait être vraie. Chaque feuille horizontale  $L \in \mathcal{H}_f$  est ici bidimensionnelle. Puisque  $f$  est plongée,  $L$  est symplectiquement difféomorphe à son image par  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$ . L'exactitude de  $f$  implique que l'aire de « trous » dans l'image  $f(L)$  est détectable en intégrant  $f^*\omega_0$  sur des 2-chaînes appropriées dans  $B$ . Supposons qu'il existe un h-principe relatif qui nous garantisse qu'il existe en ces circonstances un plongement symplectique  $\psi_L : (\mathbb{R}^2, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tel que  $\text{Im}(\psi_L) \cap B = L$ ,  $\psi_L|_{f(L)} = (f|_L)^{-1}$  et  $\psi_L$  coïncide avec une fibre de  $p' : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$  en dehors d'un compact. (Un tel h-principe relatif n'existe pas en toute généralité, mais son existence est ici vraisemblable.) Puisque  $f$  est exacte, tout 2-cycle dans  $B \cup \text{Im}(\psi_L)$  aurait aire nulle. Nous pourrions alors itérer cette construction sur une collection de feuilles  $L_i$  qui décrit bien le comportement global de  $f$  sur tout  $B$ . Si les extensions  $\psi_{L_i}$  sont choisies de telles sortes à ne pas être entrelacées, un autre  $h$ -principe relatif (cette fois-ci plus usuel) permettrait de rectifier les plans  $\psi_{L_i}(\mathbb{R}^2)$  afin qu'ils coïncident avec des fibres de  $p'$ . Nous aurions alors trouvé un plongement symplectique  $\phi' : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tel que la submersion symplectique  $f' = p \circ \phi'$  coïncide avec  $f$  sur un certain nombre de feuilles horizontales de  $\mathcal{H}_f$ . Puisque la restriction de  $f$  à une feuille horizontale détermine (presque)  $f$  sur tout un voisinage de ladite feuille,  $f$  et  $f'$  coïncident sur de larges portions de  $B$  ; il semble ainsi vraisemblable que  $f$  se factorise aussi à travers un plongement<sup>6</sup>.

Le deuxième sujet s'inscrit dans le cadre des réflexions autour d'une conjecture de Viterbo sur les capacités des convexes dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

---

6. Le lemme de Katok relativise cependant cette vraisemblance...

Soit  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  un domaine compact. Une caractérisation pratique des submersions symplectiques  $f : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  qui se factorisent symplectiquement à travers un plongement symplectique nous livrerait un moyen plus intrinsèque de décrire la capacité cylindrique de  $B$  : si nous nommons *factorisables* de telles submersions, nous aurions

$$c_Z(B, \omega_0) = \inf \{ \omega_0(f(B)) \mid f \text{ est une submersion symplectique factorisable } \}.$$

Pour la suite, soient  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  un convexe compact centré en  $\{0\}$  et  $f : (B, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  une submersion symplectique. Soit  $x \in \partial B$  tel que  $f(x) \in f(B)$ . Il s'avère que  $x$  est un point critique de la restriction  $f|_{\partial B}$ , de sorte que  $(H_f)_x \not\subset T_x(\partial B)$ . Ainsi,  $(H_f)_x$  et  $T_x(\partial B)$  s'intersectent le long d'un sous-espace de dimension un. Soient  $v$  appartenant à cette intersection et  $w \in T_x(\partial B)$  ; écrivons  $w = w_H + w_V$  avec  $w_H \in (H_f)_x$  et  $w_V \in (V_f)_x$ . Nous avons donc  $\omega_0(v, w) = \omega_0(v, w_H) = 0$ , ce qui signifie que  $(H_f)_x \cap T_x(\partial B) = [T_x(\partial B)]^{\omega_0}$ , à savoir une droite de la distribution canonique de l'hypersurface  $\partial B$ .

Considérons une orbite fermée  $C$  de la distribution canonique de  $\partial B$  et notons  $A$  son action. Pour  $x \in C$ , considérons une application affine  $l_x : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $l_x(x) > 0$  et  $l_x(T_x(\partial B)) = 0$  ; posons  $R_x = [l_x \leq 0]$ . Définissons  $R = \bigcap_{x \in C} R_x$  ; puisque  $B$  est convexe,  $B \subset R$ .  $R$  est, en un sens, l'image « symplectique » d'un cylindre  $(B^2(A) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}, \omega_0 \oplus \omega_0)$  où  $B^2(A)$  est un disque d'aire  $A$ . Cette idée suggère la possibilité de définir sur (une portion de)  $R$  (qui contient  $B$ ) une submersion symplectique  $f : (R, \omega_0) \rightarrow (B^2(A), \omega_0)$ . Si nous savions résoudre le problème de représentabilité à travers des plongements, la « simplicité » de la situation actuelle suggère que  $f$  se factoriserait vraisemblablement à travers un plongement symplectique de  $B$  dans  $B^2(A) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$  ; cela préciserait en quoi  $R$  est une image « symplectique » de  $B^2(A) \times \mathbb{R}^{2(n-1)}$ . Dès lors, nous aurions

$$c^Z(B, \omega_0) \leq \inf \{ A \text{ est l'action d'une orbite de } [T(\partial B)]^{\omega_0} \} = c_{EHZ}(B, \omega_0),$$

où  $c_{EHZ}$  est la *capacité d'Ekeland-Hofer-Zehnder* définie sur la catégorie des convexes. Puisque l'inégalité inverse tient trivialement, nous aurions établi  $c_{EHZ} = c^Z$  sur les convexes, ce qui est une partie de la conjecture de Viterbo concernant l'égalité de toutes les capacités sur les convexes.

Évidemment, outre la nécessité de solutionner le problème de représentabilité, cette démarche exige une connaissance de l'allure type d'une orbite fermée minimale de la distribution canonique de  $\partial B$ , problème qui a occupé de nombreux mathématiciens. La procédure que nous avons suggérée fonctionne néanmoins quand  $B$  est un *domaine de Reinhardt* convexe, c'est-à-dire un domaine tel que

«  $x \in B \Rightarrow e^{i\theta}x \in B \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$  ». Pour un tel domaine, les orbites isotropes sont toutes de la forme  $C = \{e^{i\theta}x \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  pour un certain  $x \in \partial B$ . Il existe donc un sous-espace  $W \cong \mathbb{R}^{2(n-1)}$  tel que  $T_{e^{i\theta}x}(\partial B) = W \oplus \mathbb{R}\langle ie^{i\theta}x \rangle$ , de sorte que  $R = D \times W$ , où  $D = \{re^{i\theta}x \mid r \in [0, 1], \theta \in \mathbb{R}\}$  est symplectiquement orthogonal à  $W$ . La projection  $R \mapsto D$  est une submersion symplectique qui est clairement factorisable. Nous en concluons que  $c_{EHZ} = c^Z$  sur les domaines de Reinhardt, résultat déjà établi par Hermann [He].





# Chapitre 2

---

## CROCHETS DE POISSON DE PARTITIONS DE L'UNITÉ

Dans ce chapitre, à moins de précisions contraires, nous considérons généralement une variété symplectique fermée  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ , deux recouvrements ouverts  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^P$  de  $M$  et deux partitions de l'unité  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^P$  subordonnées respectivement à  $\mathcal{U}$  et à  $\mathcal{V}$ .

### 2.1. INVARIANTS $pb$

Cette section définit divers invariants associés aux partitions de l'unité et présente quelques-unes de leurs relations.

Suivant Polterovich [Po2], ainsi que Buhovski et Tanny [BT], nous pouvons associer à une (paire de) partition(s) de l'unité deux types d'invariants  $pb$  différents.

**Définition 2.1.1.** *La fonction de Polterovich (de la paire  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ) est*

$$P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P(x) := \max_{a \in [-1, 1]^N, b \in [-1, 1]^P} \left| \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_i, \sum_{j=1}^P b_j g_j \right\} (x) \right|, \quad x \in M.$$

*L'invariant  $pb$  de Polterovich (de la paire  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ) est*

$$pb^P(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \|P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P\|_{C^0} = \sup_{x \in M} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P(x).$$

*L'invariant  $pb$  de Polterovich (de la paire  $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ) est*

$$pb^P(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}, \mathcal{G} \prec \mathcal{V}} pb^P(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

*Par ailleurs,  $P_{\mathcal{F}}^P := P_{\mathcal{F}, \mathcal{F}}^P$ ,  $pb^P(\mathcal{F}) := pb^P(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  et  $pb^P(\mathcal{U}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}} pb^P(\mathcal{F})$ .*

**Définition 2.1.2.** *La fonction de Buhovski-Tanny (de la paire  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ) est*

$$P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{BT}(x) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P |\{f_i, g_j\}(x)| \quad , \quad x \in M .$$

*L'invariant pb de Buhovski-Tanny (de la paire  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ) est*

$$pb^{BT}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \|P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P\|_{C^0} = \sup_{x \in M} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P(x) .$$

*L'invariant pb de Buhovski-Tanny (de la paire  $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ) est*

$$pb^{BT}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}, \mathcal{G} \prec \mathcal{V}} pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) .$$

*Par ailleurs,  $P_{\mathcal{F}}^{BT} := P_{\mathcal{F}, \mathcal{F}}^{BT}$ ,  $pb^{BT}(\mathcal{F}) := pb^{BT}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$  et  $pb^{BT}(\mathcal{U}) := \inf_{\mathcal{F} \prec \mathcal{U}} pb^{BT}(\mathcal{F})$ .*

**Remarque 2.1.3.** *Comme nous l'expliquons dans l'annexe B.3, la fonction de Polterovich est beaucoup plus difficile à calculer en pratique que la fonction de Buhovski-Tanny. Pour cette raison, nous travaillerons dans ce chapitre principalement qu'avec les invariants de Buhovski-Tanny ; afin d'alléger la notation, nous n'écrirons ainsi généralement plus les indices « BT ». Aussi, en certaines occasions, afin d'augmenter la lisibilité, nous écrirons  $P(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  au lieu de  $P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ , etc.*

Une observation cruciale, faite par Buhovski-Tanny [BT] quand  $\dim M = 2$  et généralisée ensuite par Buhovski-Tanny-Logunov [BLT] à toutes les dimensions, est l'équivalence de ces deux types d'invariants  $pb$  en présence d'une seule partition de l'unité. Le résultat suivant généralise cette observation aux paires de partitions.

**Lemme 2.1.4** (Équivalence des invariants  $pb$ ). *Il existe des constantes  $c(n) \geq c'(n) > 0$  telles que*

$$c(n) P_{\mathcal{F}}^{BT} \leq P_{\mathcal{F}}^P \leq P_{\mathcal{F}}^{BT} \quad \text{et} \quad c'(n) P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{BT} \leq P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^P \leq P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}^{BT} .$$

*En particulier,  $c(n) pb^{BT}(\mathcal{U}) \leq pb^P(\mathcal{U}) \leq pb^{BT}(\mathcal{U})$ .*

*Démonstration :* Fixons  $x \in M$  et considérons l'espace vectoriel symplectique  $(T_x M, \omega_x)$ . Pour tout  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, P$ , posons  $v_i := X_{f_i} \in T_x M$  et  $w_j = X_{g_j} \in T_x M$ . Le lemme découle alors du lemme B.0.1 et du lemme B.2.1. □

Dans la définition des invariants  $pb$ , l'hypothèse selon laquelle les collections de fonctions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont des partitions de l'unité n'intervient pas. Nous sommes ainsi amené à effectuer la généralisation suivante.

**Définition 2.1.5.** Une collection de fonctions  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  est une **partition positive** si  $f_i \geq 0$  pour chaque  $i$  et si la fonction  $F(x) := \sum_{i=1}^N f_i(x) > 0$ . Nous notons  $\hat{\mathcal{F}} := \{\hat{f}_i = f_i/F\}_{i=1}^N$  la partition de l'unité associée.

**Définition 2.1.6.** Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux partitions positives. La **fonction pb (de  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ )** est

$$P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(x) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\{f_i, g_j\}(x)| .$$

L'**invariant pb (de  $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ )** est  $pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \|P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}\|_{C^0}$ .

**Proposition 2.1.7.** Étant donné deux partitions positives  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^P$ , nous avons

$$\frac{3}{FG} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \geq P_{\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}} .$$

Ainsi,  $pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \geq \frac{1}{3} (\min_{x \in M} FG) pb(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$ .

*Démonstration :* Nous calculons

$$\begin{aligned} P_{\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}}(x) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \left| \left\{ \frac{f_i}{F}, \frac{g_j}{G} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{FG} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P \left| \{f_i, g_j\} - \{f_i, G\} \frac{g_j}{G} - \frac{f_i}{F} \{F, g_j\} \right| \\ &\leq \frac{1}{FG} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P |\{f_i, g_j\}| + \sum_{i=1}^N |\{f_i, G\}| \sum_{j=1}^P \frac{g_j}{G} + \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{F} \sum_{j=1}^P |\{F, g_j\}| \right) \\ &\leq \frac{3}{FG} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P |\{f_i, g_j\}| = \frac{3}{FG} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} . \end{aligned}$$

De plus,  $\|P_{\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}}\|_{C^0} \leq 3 \|P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}\|_{C^0} (\min_{x \in M} FG)^{-1}$ .

□

Il résulte de cette proposition que s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que  $pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq C$  quelles que soient les partitions de l'unité  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  respectivement subordonnées à  $\mathcal{U}$  et à  $\mathcal{V}$ , alors  $pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq (C/3) (\min_{x \in M} FG)$  quelles que soient les partitions positives  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  respectivement subordonnées à  $\mathcal{U}$  et à  $\mathcal{V}$ . Ainsi :

**Corollaire 2.1.8.** *Soient  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  des recouvrements ouverts sur  $(M, \omega_M)$  formés d'ouverts disjoignables. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

- (1) *Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour n'importe quelles partitions de l'unité  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  et  $\mathcal{G} \prec \mathcal{V}$ ,*

$$pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq C .$$

- (2) *Il existe une constante  $C' > 0$  telle que pour n'importe quelles partitions positives  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  et  $\mathcal{G} \prec \mathcal{V}$ ,*

$$pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq C' \min_M FG .$$

Cette inégalité est plus distinctement évocatrice de l'idée selon laquelle la conjecture du crochet de Poisson est une version symplectique du théorème des accroissements finis.

En poussant cette analogie plus loin, il est tentant d'interpréter  $P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$  comme la norme de la « dérivée » de la collection de fonctions

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \{(f_i, g_j) : M \rightarrow [0, \infty)^2\}_{i,j=1}^{N,P} ,$$

collection dont la somme, pour ainsi dire, est la fonction  $(F, G) : M \rightarrow [0, \infty)^2$ . La quantité  $\min_{x \in M} FG$  peut alors s'interpréter comme « l'oscillation » de la collection  $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , comme la  $\omega_0$ -aire du « cœur » de l'image de  $(F, G)$  ou de  $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ .<sup>1</sup> Cette interprétation heuristique se voit renforcée par l'observation suivante due à Zapolsky [Z], qui généralise une observation d'Entov–Polterovich [EnPo1] : étant donné deux fonctions lisses  $f$  et  $g$  sur une surface symplectique  $(M, \omega)$ ,  $|\{f, g\}(x)|$  est le déterminant jacobien en  $x \in M$  de l'application  $(f, g) : M \rightarrow \mathbb{R}^2 : y \mapsto (f(y), g(y))$ . Ainsi, par « changement de variables »,

$$\begin{aligned} \max_M |\{f, g\}| \cdot \omega(M) &\geq \int_M |\{f, g\}| \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \#[(f, g)^{-1}(u, v)] dudv \geq \text{Aire}((f, g)(M)), \end{aligned}$$

ce qui évoque bien une version symplectique du théorème des accroissement finis. Cette observation, lorsque appliquée à chaque pair  $(f_i, g_j) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ , est d'ailleurs le point de départ de la démonstration de la conjecture du crochet de Poisson sur les surfaces dans l'article [BLT] (résultat formulé dans le théorème 2.3.1 ci-dessous).

---

1. Après tout,  $\min_{x \in M} FG \geq (\min_{x \in M} F)(\min_{x \in M} G) = \omega_0([0, \min_{x \in M} F] \times [0, \min_{x \in M} G])$ .

## 2.2. EFFET DES SUBMERSIONS SYMPLECTIQUES

Cette section réunit quelques résultats qui montrent que les quantités qui interviennent dans la conjecture du crochet de Poisson se comportent bien lorsque rappelées par des submersions symplectiques.

**Proposition 2.2.1.** *Soient une submersion symplectique  $\phi : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^P$  des partitions positives de sommes  $F$  et  $G$  respectivement. Les collections  $\phi^*\mathcal{F} := \{\phi^*f_i\}_{i=1}^N$  et  $\phi^*\mathcal{G} := \{\phi^*g_j\}_{j=1}^P$  sont positives, de sommes respectives  $\phi^*F$  et  $\phi^*G$  et vérifient  $P(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G}) = \phi^*P(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . En outre, si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont respectivement subordonnées à des revêtements  $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^P$ , alors  $\phi^*\mathcal{F}$  et  $\phi^*\mathcal{G}$  sont respectivement subordonnées aux recouvrements  $\phi^{-1}\mathcal{U} := \{\phi^{-1}(U_i)\}_{i=1}^N$  et  $\phi^{-1}\mathcal{V} = \{\phi^{-1}(V_j)\}_{j=1}^P$ .*

*Démonstration :* Toutes les affirmations sont triviales et tiennent pour une application  $\phi$  quelconque, sauf pour l'égalité  $P(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G}) = \phi^*P(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Puisque  $\phi$  est un morphisme de Poisson (théorème 1.3.1),  $\{\phi^*f_i, \phi^*g_j\}_L = \phi^*\{f_i, g_j\}_M$ . L'égalité suit facilement de la définition de la fonctionnelle  $P$ . □

**Remarque 2.2.2.** *Plus généralement, si  $\phi$  est Cardin-Viterbo (définition 1.5.1), alors  $pb^P(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G}) = pb^P(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Si  $\dim L = 2l$ , ceci et le lemme 2.1.4 impliquent  $c(l)pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leq pb(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G}) \leq c(l)^{-1}pb(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Cela montre par ailleurs que l'utilisation des invariants de Polterovich est parfois avantageuse afin d'aborder des questions d'ordre théorique.*

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $\phi : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  une submersion symplectique. Toute isotopie  $\psi = \{\psi_t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Ham}(M, \omega_M)$  qui débute à l'identité se relève canoniquement en une isotopie  $\phi^*\psi = \{\phi^*\psi_t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Ham}(L, \omega_L)$  qui débute à l'identité, en ce sens que  $\psi_t \circ \phi = \phi \circ (\phi^*\psi_t)$ . De plus,  $\psi$  et  $\phi^*\psi$  ont la même norme de Hofer.*

*Démonstrations :* Soit  $h \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ . nous avons établi au cours de la preuve du théorème 1.3.1 que  $\phi_*(X_{\phi^*h}) = X_h$ . Par ailleurs,  $\min_L \phi^*h = \min_M h$  et  $\max_L \phi^*h = \max_M h$ .

Si l'isotopie  $\psi = \{\psi_t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Ham}(M, \omega_M)$  est générée par  $\{h_t\}_{t \in [0,1]} \subset C^\infty(M; \mathbb{R})$ , définissons  $\phi^*\psi \subset \text{Ham}(L, \omega_L)$  comme étant l'isotopie qui débute à l'identité et qui est générée par  $\{\phi^*h_t\}_{t \in [0,1]} \subset C^\infty(M; \mathbb{R})$ . Puisque  $\psi_0 = id_M$ ,  $\phi^*\psi_0 = id_L$  et  $\phi_*(X_{\phi^*h_t}) = X_{h_t}$ , nous avons bien  $\psi_t \circ \phi = \phi \circ (\phi^*\psi_t)$ . De plus,

$$\|\psi\|_H := \int_0^1 (\max_M h_t - \min_M h_t) dt = \int_0^1 (\max_L \phi^*h_t - \min_L \phi^*h_t) dt =: \|\phi^*\psi\|_H.$$

□

**Corollaire 2.2.4.** *Soient  $\phi : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  une submersion symplectique et  $U \subset M$  disjoignable. Alors  $\phi^{-1}(U) \subset L$  est disjoignable et  $e_H(\phi^{-1}(U)) \leq e_H(U)$ .*

*Démonstration :* Soient  $\epsilon > 0$  et  $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]} \subset \text{Ham}(M, \omega_M)$  une isotopie hamiltonienne qui disjoint  $U$  avec énergie  $\|\{\psi_t\}_t\|_H \leq e_H(U) + \epsilon$ . Puisque le relèvement  $\{\Psi_t\}_t \in \text{Ham}(L, \omega_L)$  vérifie  $\psi_t \circ \phi = \phi \circ \Psi_t$ ,  $\{\Psi_t\}_t$  disjoint  $\phi^{-1}(U)$  et ce avec énergie  $\|\{\Psi_t\}_t\|_H = \|\{\psi_t\}_t\|_H \leq e_H(U) + \epsilon$ . Donc  $e_H(\phi^{-1}(U)) \leq e_H(U)$ .

□

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $\phi : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  une submersion symplectique. Supposons que la conjecture du crochet de Poisson soit valide pour  $(L, \omega_L)$ . Alors la conjecture du crochet de Poisson est valide pour  $(M, \omega_M)$ .*

*Démonstration :* Soient  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  des recouvrements ouverts de  $M$  et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des partitions de l'unité respectivement subordonnées à  $\mathcal{U}$  et à  $\mathcal{V}$ . Par les résultats précédents et par hypothèse,

$$pb(\mathcal{F}, \mathcal{G}) e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq pb(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G}) e_H(\phi^*\mathcal{U}, \phi^*\mathcal{V}) \geq C(L, \omega_L) > 0.$$

□

**Remarque 2.2.6.** *Notons que lorsque  $L$  et  $M$  ont même dimension, une submersion symplectique  $(L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  est précisément une application de revêtement qui est symplectique. L'idée d'étudier la dynamique hamiltonienne sur une variété  $(M, \omega_M)$  en relevant les données à un revêtement symplectique  $(L, \omega_L)$  n'est pas nouvelle ; consulter par exemple l'exercice 7.2.E dans [Po1], qui renvoie lui-même aux articles [LM2].*

**Remarque 2.2.7.** *Puisque  $L$  est généralement de dimension supérieure à  $M$ , il est vraisemblablement plus difficile de valider la conjecture pour  $(L, \omega_L)$  que pour  $(M, \omega_M)$ . Or, la démonstration ci-dessus nécessite seulement de savoir que la conjecture est valide sur  $L$  pour les données de la forme  $(\phi^*\mathcal{F}, \phi^*\mathcal{G})$  et  $(\phi^*\mathcal{U}, \phi^*\mathcal{V})$ . Cette idée est centrale à notre démarche.*

### 2.3. CAS DES SURFACES

Dans cette section, nous expliquons notre méthode pour établir, en très grande partie, la conjecture du crochet de Poisson pour les surfaces.

Mentionnons d'entrée de jeu le théorème A.3.8, qui stipule qu'un ensemble  $X \subset (M, \omega)$  est disjoignable si et seulement s'il est contenu dans un disque fermé plongé  $D$  disjoignable, auquel cas pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $D$  peut être choisi de telle sorte à ce que  $e_H(D) < e_H(X) + \epsilon$ . Ainsi, quitte à remplacer chaque ouvert  $U_i$  par un disque fermé plongé minimal  $D_i$ , il suffit de démontrer la conjecture du crochet de Poisson pour des recouvrements formés de disques fermés plongés disjoignables.

### 2.3.1. Résultats de Buhovski-Logunov-Tanny

Afin d'aiguiller notre présentation et à des fins de comparaison, énonçons d'abord les résultats démontrés par Buhovski-Logunov-Tanny. Dans les énoncés qui suivent,  $\mathbb{E}[h] := (\text{Aire}(M, \omega))^{-1} \int_M h \omega$  dénote l'espérance d'une fonction  $h$ .

**Théorème 2.3.1** ([BLT]). *Soient  $(M, \omega)$  une surface symplectique fermée,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  et  $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=1}^P$  deux recouvrements formés d'ouverts disjoignables et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  et  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^P \prec \mathcal{V}$  des partitions de l'unité. Alors*

$$\int_M P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \omega \geq \frac{1}{2} \frac{\text{Aire}(M, \omega)}{e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V})}, \text{ soit encore } \mathbb{E}[P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}] e_H(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \geq \frac{1}{2}.$$

La conjecture du crochet de Poisson généralisée découle alors sur les surfaces fermées, puisque  $\text{pb}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}[P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}]$ .

La notion suivante a été introduite par Buhovski et Tanny [BT].

**Définition 2.3.2.** *Soient  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement constitué de disques plongés et  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Un disque  $U_i \in \mathcal{U}$  est **essentiel** si  $\mathcal{U} \setminus \{U_i\}$  n'est pas un recouvrement. Notons  $\mathcal{J}(\mathcal{U}) \subset \{1, \dots, N\}$  l'ensemble des disques essentiels de  $\mathcal{U}$  et  $|\mathcal{J}(\mathcal{U})|$  sa cardinalité.*

**Théorème 2.3.3** ([BT], [BLT]). *Soient  $(M, \omega)$  une surface symplectique fermée,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement ouvert formé de disques disjoignables et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Alors*

$$\int_{U_j} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \omega \geq 1 \text{ si } U_j \in \mathcal{J}(\mathcal{U}), \text{ donc } \int_M P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \omega \geq |\mathcal{J}(\mathcal{U})|.$$

Notons que les preuves de ces théorèmes dans [BLT] diffèrent passablement. La démonstration du théorème 2.3.1 utilise un argument combinatoire afin d'estimer les nombres d'intersections entre des ensembles de niveau des  $f_i$  avec les ensembles de niveau des  $g_j$  ; l'approche est globale ou topologique par nature et

s'applique directement aux paires de recouvrements. La démonstration du théorème 2.3.3 repose plutôt sur une interprétation dynamique de l'intégrale  $\int_{U_j} P_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \omega$  (avec  $U_j \in \mathcal{J}(\mathcal{U})$ ) ; l'approche est localisée ou géométrique par nature et ne s'applique d'ailleurs qu'à un seul recouvrement.

### 2.3.2. Notre méthode

Nous énonçons maintenant les principaux concepts et résultats de notre approche, dont plusieurs proviennent de notre article [Pa]. Notre méthode, élaborée indépendamment de [BLT], construit exclusivement sur l'idée de la démonstration du théorème 2.3.3 ; en ce sens, notre démarche est géométrique.

Ci-dessous,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  dénote toujours un recouvrement de  $(M, \omega)$  constitué de disques fermés plongés, pas nécessairement disjoignables. Nous posons aussi

$$\omega(\mathcal{U}) := \max_{U_i \in \mathcal{U}} \omega(U_i) := \max_{U_i \in \mathcal{U}} \text{Aire}(U_i, \omega).$$

Rappelons le corollaire A.3.7 : si les disques  $U_i$  sont tous disjoignables, alors  $e_H(U_i) = \omega(U_i)$ , donc  $e_H(\mathcal{U}) = \omega(\mathcal{U})$ .

**Définition 2.3.4.** Soient un point  $x \in M$  et un recouvrement  $\mathcal{U}$ . Considérons la collection  $\mathcal{U}_x := \{U_i \in \mathcal{U} \mid x \in U_i\} \subset \mathcal{U}$ . L'**enceinte de  $x$  (pour  $\mathcal{U}$ )** est l'ensemble

$$U_x := \bigcup_{U_i \in \mathcal{U}_x} U_i \subset M.$$

**Définition 2.3.5.** Un recouvrement  $\mathcal{U}$  est **localisé en  $m$  points** s'il existe des points  $x_1, \dots, x_m \in M$  tels que pour tout  $i$ ,  $x_i \in U_{x_j}$  si et seulement si  $x_i = x_j$ .

**Remarque 2.3.6.** Tout recouvrement est localisé en au moins un point. Si  $\mathcal{U}$  est localisé en  $m \geq 2$  points, il est aussi localisé en  $m - 1$  points. Si  $\mathcal{U}$  est localisé aux  $m$  points  $x_1, \dots, x_m$ , mais n'est pas localisé en  $m + 1$  points, alors les collections  $\{U_{x_i}\}_{i=1}^m$  et  $\cup_{i=1}^m \mathcal{U}_{x_i}$  sont des recouvrements de  $M$ .

**Lemme 2.3.7.** Si un disque  $U_i \in \mathcal{U}$  est essentiel, alors il est l'enceinte pour  $\mathcal{U}$  de tout point  $x \in M \setminus \cup_{j \neq i} U_j$ . Si  $|\mathcal{J}(\mathcal{U})| = m$ , alors  $\mathcal{U}$  est localisé en  $m$  points.

*Démonstration :* Si  $U_i \in \mathcal{J}(\mathcal{U})$ , alors  $\mathcal{U} \setminus \{U_i\}$  ne recouvre pas  $M$  ; il existe donc  $x_i \in U_i$  tel que  $x_i \notin U_j$  si  $U_j \neq U_i$ , de sorte que  $U_{x_i} = U_i$ . Conséquentement,  $\mathcal{U}$  est localisé aux points « essentiels »  $x_i$ .

□



Le résultat suivant, établi pour l'essentiel dans [Pa], découle d'une adaptation des arguments qui impliquent le théorème 2.3.3. Rappelons que  $\mathbb{E}[h] := (\text{Aire}(M, \omega))^{-1} \int_M h \omega$  dénote l'espérance d'une fonction  $h$ .

**Théorème 2.3.8** (Inégalités du crochet de Poisson). *Soient  $(M, \omega)$  une surface symplectique fermée,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement formé de disques plongés fermés localisé en  $m$  points et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Si  $M = S^2$ , supposons par ailleurs que  $m \geq 3$ . Alors*

$$\mathbb{E}[P_{\mathcal{F}}] \omega(\mathcal{U}) \geq 1, \quad \int_M P_{\mathcal{F}} \omega \geq m \quad \text{et} \quad \int_{U_x} P_{\mathcal{F}} \omega \geq 1 \quad \forall x \in M.$$

*En particulier, la conjecture du crochet de Poisson est vraie pour les surfaces fermées de genre  $g \geq 1$ , puisque  $\text{pb}(\mathcal{F}) \geq \mathbb{E}[P_{\mathcal{F}}]$ .*

**Remarque 2.3.9.** *Dans le cas des surfaces de genre  $g \geq 1$ , ce résultat implique les théorèmes 2.3.1 et 2.3.3, et ce sans exiger que les disques soient disjoignables. Notre approche situe donc (partiellement) les énoncés 2.3.1 et 2.3.3 au sein d'un même paradigme.*

*Sur la sphère, notre résultat et celui de Buhovski-Logunov-Tanny sont complémentaires, sans pour autant être exhaustifs. Considérons le cas du recouvrement  $\mathcal{U}$  formé de deux hémisphères légèrement élargis sur  $S^2$  et de la partition  $\{f, 1 - f\} \prec \mathcal{U}$ . Alors  $\mathcal{U}$  n'est pas constitué de disques disjoignables, n'est pas localisé en 3 points et satisfait  $\text{pb}(\mathcal{U}) \omega(\mathcal{U}) = 0$ . Ainsi, afin d'avoir  $\text{pb}(\mathcal{U}) \omega(\mathcal{U}) \geq C > 0$ , il faut des hypothèses supplémentaires sur  $\mathcal{U}$ , par exemple l'hypothèse de disjonction ou l'hypothèse de localisation en 3 points. Le récent travail de Shi et Lu [ShL] observe qu'en généralisant un lemme technique dans [BLT], généralisation essentiellement contenue dans [Pa], il est possible de déduire que pour un recouvrement par des disques  $\mathcal{U}$  sur  $S^2$ , alors  $\text{pb}(\mathcal{U}) \omega(\mathcal{U}) \geq C > 0$  si et seulement si  $\mathcal{U}$  ne possède pas un sous-recouvrement formé de seulement deux disques.*

La prochaine définition est nouvelle, les deux énoncés qui suivent la définition servent à la relier à la notion de localisation.

**Définition 2.3.10.** *Soient un point  $x \in M$  et un recouvrement  $\mathcal{U}$ .*

*On dit que le point  $x$  est **confiné (pour  $\mathcal{U}$ )** ou encore  $\mathcal{U}$  est **confiné en  $x$**  ou plutôt que l'enceinte  $U_x$  est **confinée (pour  $\mathcal{U}$ )**, s'il n'existe pas  $U_j \in \mathcal{U}$  tel que  $\{U_x, U_j\}$  soit un recouvrement de  $M$ . Posons*

$$C_{\mathcal{U}} := \{x \in M \mid x \text{ est confiné pour } \mathcal{U}\} \subset M$$

On dit que le point  $x$  est **fortement confiné (pour  $\mathcal{U}$ )** ou encore que  $\mathcal{U}$  est **fortement confiné en  $x$**  ou plutôt que l'enceinte  $U_x$  est **fortement confinée (pour  $\mathcal{U}$ )**, si  $\partial U_x \neq \emptyset$  et s'il existe une composante connexe de  $\partial U_x$  qui n'est contenue dans aucun  $U_i$ . Posons

$$FC_{\mathcal{U}} := \{ x \in M \mid x \text{ est fortement confiné pour } \mathcal{U} \} \subset M.$$

**Lemme 2.3.11.** *Si  $\mathcal{U}$  admet un point confiné, alors  $\mathcal{U}$  est localisé en deux points.*

*Démonstration :* Soit  $x \in M$  un point confiné pour  $\mathcal{U}$ . En particulier,  $M \not\subset U_x$  ; soit  $y \in M \setminus U_x$ . Si  $U_j \in \mathcal{U}_y$ , alors  $x \notin U_j$  ; autrement, nous aurions  $y \in U_j \subset U_x$ , une contradiction. Bref,  $x \notin U_y$ , de sorte que  $\mathcal{U}$  est localisé aux points  $\{x, y\}$ .  $\square$

**Lemme 2.3.12.** *Soit  $m \geq 3$ . Si  $\mathcal{U}$  est localisé en  $m$  points, alors  $\mathcal{U}$  est confiné en ces  $m$  points.*

*Démonstration :* Soient  $x_1, \dots, x_m \in M$  des points auxquels  $\mathcal{U}$  est localisé. Pour chaque  $x_i$  fixé, les autres  $x_j$  ne sont donc pas contenus dans  $U_{x_i}$ . Nous affirmons que pour tout  $U_k \notin \mathcal{U}_{x_i}$ ,  $\{U_{x_i}, U_k\}$  ne recouvre pas  $M$ , bref que  $x_i$  est confiné. Effet, si le contraire était vrai, les autres  $x_j$  devraient appartenir à  $U_k$ . Puisque  $m \geq 3$ , il existerait  $x_j$  et  $x_{j'}$  distincts tels que  $\{x_j, x_{j'}\} \subset U_k \subset U_{x_j} \cap U_{x_{j'}}$ , ce qui contredirait l'hypothèse de localisation en 3 points.  $\square$

**Remarque 2.3.13.** *Il est clair qu'un point fortement confiné est confiné, donc  $FC_{\mathcal{U}} \subseteq C_{\mathcal{U}}$ .*

Comme nous l'expliquerons dans la prochaine section, le théorème 2.3.8 découle du prochain résultat.

**Théorème 2.3.14** (Autres inégalités du crochet de Poisson). *Soient  $(M, \omega)$  une surface symplectique fermée,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement formé de disques fermés plongés localisé en  $m$  points fortement confinés et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Alors*

$$\mathbb{E}[P_{\mathcal{F}}] \omega(\mathcal{U}) \geq \frac{\omega(FC_{\mathcal{U}})}{\omega(M)}, \int_M P_{\mathcal{F}} \omega \geq m \text{ et } \int_{U_x} P_{\mathcal{F}} \omega \geq 1 \quad \forall x \in FC_{\mathcal{U}}.$$

Le théorème 2.3.14 découle quant à lui du :

**Théorème 2.3.15** (Estimé de l'enceinte confinée). *Soient un recouvrement  $\mathcal{U}$  formé de disques plongés fermés,  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité et  $x \in M$  un point fortement confiné. Alors*

$$\int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \omega \geq 1 .$$

Nous avons énoncé ces théorèmes sous l'hypothèse de confinements forts. Dans plusieurs cas de figure, les énoncés sont valides sous l'hypothèse de confinements usuels, voire sans hypothèse de confinement du tout ; seul le cas  $M = S^2$  avec  $m \leq 2$  semble exiger le recours à l'hypothèse la plus forte.

### 2.3.3. Démonstrations

Nous aurons besoin du résultat suivant, que nous démontrons plus loin dans l'actuelle sous-section :

**Théorème 2.3.16** (Estimé du disque essentiel [BT, BLT]). *Soient un recouvrement  $\mathcal{U}$  formé de disques plongés fermés,  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité et  $U_k \in \mathcal{U}$  essentiel. Si  $M = S^2$ , supposons par ailleurs que  $U_k$  est confiné. Alors*

$$\int_M \sum_{i=1}^N |\{f_i, f_k\}| \omega \geq 1 .$$

**Remarque 2.3.17.** *Dans [BT, BLT], ce résultat est démontré uniquement sous l'hypothèse que  $\omega(\mathcal{U}) < \omega(M)/2$ , quel que soit le genre de la surface  $M$ . L'argument se généralise néanmoins très directement au cas (fortement) confiné ; observons qu'un disque essentiel confiné est fortement confiné. En fait, puisque  $f_k = 0$  en dehors de  $U_k$ , l'estimé résulte d'une analyse des fonctions  $f_j$  uniquement dans l'ouvert  $U_k$  ; l'argument étant dès lors local, l'énoncé est valide pour une surface  $M$  quelconque.*

La structure de notre argumentaire va essentiellement comme suit,

théorème 2.3.16  $\xrightarrow{A}$  théorème 2.3.15  $\xrightarrow{B}$  théorème 2.3.14  $\xrightarrow{C}$  théorème 2.3.8 .

Pour les surfaces de genre  $g \geq 1$ , les implications  $A$  et  $C$  font appel aux revêtements symplectiques : au vu des résultats de la section 2.2, il suffit en effet de démontrer les théorèmes 2.3.15 et 2.3.8 pour le relèvement des données  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{U}$  à un certain revêtement  $(M', \omega')$  de  $(M, \omega)$  ; il s'avère aussi que les enceintes d'un recouvrement relevé ont des topologies plus simples que les enceintes du

recouvrement initial (voir la figure 2.1 ci-dessous) ; pour un revêtement de degré suffisamment grand, les enceintes sont même confinées, permettant d'évoquer les théorèmes 2.3.16 et 2.3.14. Nous comprenons ainsi que les implications  $A$  et  $C$  sont en bonne partie redondantes, et nous pourrions effectivement déduire le théorème 2.3.8 sans évoquer explicitement le théorème 2.3.15. Toutefois, nous souhaitons mettre l'accent aussitôt que possible sur l'implication  $B$  qui fait appel à un procédé de « moyennage » simple que nous généraliserons plus tard. Par ailleurs, dans le cas de la sphère, l'implication  $A$  est très aisée sous l'hypothèse du confinement fort, tandis que l'implication  $C$  est plus subtile (du fait qu'il n'existe aucun revêtement symplectique non trivial de  $S^2$ ) et nécessite une conséquence de la démonstration du théorème 2.3.16 ; nous discuterons donc du cas de  $S^2$  en dernier lieu.

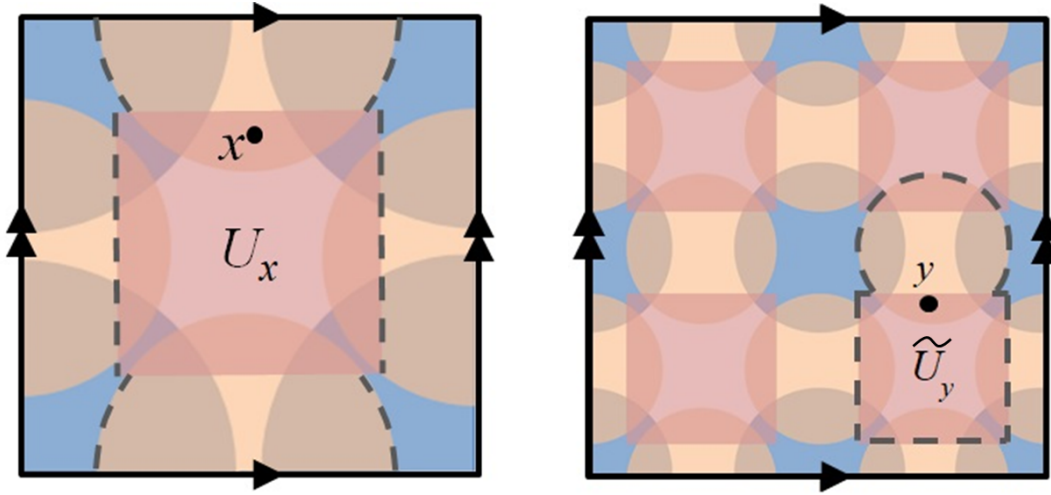


FIGURE 2.1. Simplification de la topologie des enceintes par relèvement des données à un revêtement.

*Démonstration du théorème 2.3.14* : Supposons  $(F)C_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ . Soit  $x \in (F)C_{\mathcal{U}}$ . Si  $U_j \in \mathcal{U}_x$ , alors  $f_j$  a support dans  $U_j \subset U_x$ , donc le crochet de Poisson  $\{h, f_j\}$  a support dans  $U_x$  pour toute fonction  $h$ . À l'aide du théorème 2.3.15, nous déduisons

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \omega = \int_{U_x} \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \omega \\ &\leq \int_{U_x} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\{f_i, f_j\}| \omega = \int_{U_x} P_{\mathcal{F}} \omega . \end{aligned}$$

Considérons une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $M$ . Posons  $P = (F)C_{\mathcal{U}}$ , tantôt pensé comme espace auxiliaire de paramètres  $p \in P$ , tantôt comme sous-ensemble de  $M$ . Remarquons que la forme symplectique  $\omega$  induit une mesure sur  $M$  ; dénotons par  $x$  un point quelconque de  $M$  et par  $\chi_S$  la fonction caractéristique d'un sous-ensemble  $S \subset M$ . Nous écrirons  $d\mu_p$  et  $\omega_x$  afin de souligner de quelle variable dépend chaque mesure. Encore à l'aide du théorème 2.3.15, nous calculons

$$\begin{aligned}
\mu(P) &= \int_P 1 d\mu_p \leq \int_P \left( \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_p\}} |\{f_i, f_j\}(x)| \omega_x \right) d\mu_p \\
&\leq \int_P \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_{U_j}(p) |\{f_i, f_j\}(x)| \omega_x d\mu_p \\
&= \sum_{i,j=1}^N \left( \int_P \chi_{U_j}(p) d\mu_p \right) \left( \int_M |\{f_i, f_j\}(x)| \omega_x \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^N \mu(U_j) \left( \int_M |\{f_i, f_j\}(x)| \omega_x \right) \\
&\leq \max_j \mu(U_j) \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_x.
\end{aligned}$$

Pour  $d\mu = \omega(M)^{-1} \omega_x$ , nous avons donc

$$\frac{\omega((F)C_{\mathcal{U}})}{\omega(M)} \leq \frac{\omega(\mathcal{U})}{\omega(M)} \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_x = \omega(\mathcal{U}) \mathbb{E}[P_{\mathcal{F}}].$$

Étant donné  $m$  points confinés  $x_1, \dots, x_m \in P$  auxquels  $\mathcal{U}$  est localisé, posons  $d\mu = m^{-1} \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}$  où  $\delta_{x_i}$  dénote le delta de Dirac en  $x_i$ . Par hypothèse de localisation, chaque  $x_i$  n'appartient qu'à une enceinte  $U_{x_j}$  ; autrement dit, tout  $U_k \in \mathcal{U}$  contient au plus un des  $x_i$ . Ainsi,  $\max_j \mu(U_j) = m^{-1}$ , d'où

$$1 \leq \frac{1}{m} \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_x.$$

□

Nous enchaînons maintenant avec la présentation des implications  $A$  et  $C$ . Jusqu'à nouvel ordre,  $M$  est une surface de genre  $g \geq 1$ . L'idée centrale est de relever toutes les données sur  $M$  à de nouvelles données sur un revêtement  $(M', \omega')$  de degré suffisamment élevé, d'appliquer les estimés établis à ces nouvelles données et de comparer les données sur  $M$  à celles sur  $M'$ . Dans [Pa], nous appelons cette procédure la *résolution du recouvrement*  $\mathcal{U}$ .

Étant donné une surface symplectique fermée  $(M', \omega')$ , une application lisse  $\phi : (M', \omega') \rightarrow (M, \omega)$  est un *revêtement symplectique* s'il s'agit d'un revêtement qui est une submersion symplectique. Le disque  $D = B^2(r)$  étant contractile, tout

plongement  $\iota : D \hookrightarrow M$  se relève via  $\phi$  en un plongement  $\tilde{\iota} : D \hookrightarrow M'$  qui vérifie  $\iota = \phi \circ \tilde{\iota}$ . Il en résulte le :

**Lemme 2.3.18.** *Soient  $\phi : (M', \omega') \rightarrow (M, \omega)$  un revêtement symplectique,  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $M$  formé de disques plongés fermés et  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Définissons le recouvrement  $\mathcal{U}'$  constitué des composantes connexes des ensembles de  $\phi^{-1}\mathcal{U}$  et la collection  $\mathcal{F}'$  formée des restrictions des fonctions de  $\phi^*\mathcal{F} \prec \phi^{-1}\mathcal{U}$  aux composantes connexes des ensembles correspondants de  $\phi^{-1}\mathcal{U}$ . Alors  $\mathcal{U}'$  est formé de disques plongés fermés et  $\mathcal{F}' \prec \mathcal{U}'$  est une partition de l'unité. De plus,  $\omega'(\mathcal{U}') = \omega(\mathcal{U})$  et  $P_{\mathcal{F}'} = \phi^*P_{\mathcal{F}}$ .*

*Démonstration du théorème 2.3.15 quand  $g \geq 1$  :* Soit  $x \in M$ .<sup>2</sup> Considérons le revêtement (symplectique) universel  $\tilde{\phi} : (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow (M, \omega)$ , qui est diffeomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , et fixons  $\tilde{x} \in \tilde{\phi}^{-1}(x)$ . Étant donné le recouvrement par des disques  $\mathcal{U}$  sur  $M$ , considérons son relèvement  $\tilde{\mathcal{U}}$  à  $\tilde{M}$ . Considérons aussi le rappel  $\tilde{\mathcal{F}}$  à  $\tilde{M}$  de la partition de l'unité  $\mathcal{F}$ , qui satisfait  $\tilde{\mathcal{F}} \prec \tilde{\mathcal{U}}$ . Dénotons par  $K$  la fibre type de  $\tilde{\phi}$ , de sorte que  $\tilde{\mathcal{U}}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}$  peuvent être indexés par l'ensemble  $\{1, \dots, N\} \times K$ .

La collection  $\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{x}}$  s'avère avoir la même cardinalité que  $\mathcal{U}_x$  : pour chaque  $U_i \in \mathcal{U}_x$ , il existe un unique disque (fermé) qui contient  $\tilde{x}$ , disque que nous noterons  $\tilde{U}_{i,i'}$  avec  $i' \in K$ . Donc  $\tilde{U}_{\tilde{x}}$  est borné et contenu dans un disque (plongé fermé) que nous notons  $\tilde{D}$ . Considérons le recouvrement  $\mathcal{U}'$  obtenu en remplaçant les disques  $\tilde{U}_{i,i'}$  qui contiennent  $\tilde{x}$  par le disque  $\tilde{D}$ . Observons que  $\mathcal{U}'$  est formé de disques (plongés fermés) et que  $\tilde{D}$  est essentiel.

Nous pouvons sommer toutes les fonctions dans  $\tilde{\mathcal{F}}$  qui sont subordonnées à l'un des disques  $\tilde{U}_{i,i'}$  qui contiennent  $\tilde{x}$  afin d'obtenir la fonction  $\tilde{f}$  supportée dans  $\tilde{D}$ . En remplaçant toutes ces fonctions par  $\tilde{f}$ , nous obtenons une nouvelle partition de l'unité  $\mathcal{F}' \prec \mathcal{U}'$ .

Le théorème 2.3.16 est un résultat local applicable même dans le cas de la surface non compacte  $\tilde{M}$ . Ainsi, du fait que  $\tilde{f}$  a support compact et que  $\mathcal{U}'$  est un recouvrement localement fini, nous déduisons

$$1 \leq \int_{\tilde{D}} \sum_{i,k} |\{\tilde{f}_{i,k}, \tilde{f}\}_{\tilde{M}}| \tilde{\omega} \leq \int_{\tilde{D}} \sum_{i,k} \sum_{\{(j,j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\}} |\{\tilde{f}_{i,k}, \tilde{f}_{j,j'}\}_{\tilde{M}}| \tilde{\omega}.$$

Nous souhaitons exprimer cette intégrale en termes des données sur  $M$ . Il s'agit là d'un exercice d'appariement qui n'est pas difficile, mais qui requiert une finesse un peu pénible. Moralement, la submersion symplectique  $\tilde{\phi} : \tilde{U}_{\tilde{x}} \rightarrow U_x$  se

---

2. Il découle de la démonstration que pour  $M$  de genre  $g \geq 1$ , il n'est pas nécessaire de supposer que  $x$  est confiné.

comporte comme un difféomorphisme vis-à-vis de l'intégrande considérée ici, de sorte que nous pouvons « changer de variables »  $\tilde{y} \in \tilde{U}_{\tilde{x}} \mapsto y \in U_x$ .

Quitte à agrandir et à perturber légèrement les disques  $U_i$ , nous pouvons supposer que leurs bords s'intersectent transversalement. Le complément de la réunion de ces bords est un ouvert dense de  $M$  qui possède un nombre fini de composantes connexes difféomorphes à des polygones ; appelons une telle composante une *face*. Fixons une face  $R$ . Le relevé de  $R$  par  $\tilde{\phi}$  consiste en plusieurs copies  $\{\tilde{R}_k\}_{k \in K}$  disjointes symplectomorphes à ladite face  $R$ . Pour chaque  $j$  tel que  $U_j \in \mathcal{U}_x$ , le disque  $\tilde{U}_{j,j'}$  qui contient  $\tilde{x}$  n'intersecte au plus qu'une seule de ces copies, donc  $\tilde{f}_{j,j'}$  n'est non nulle que sur un seul  $\tilde{R}_k$ , au maximum. Il y a ainsi une injection  $h : \{j : x \in U_j\} \cong \{(j, j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\} \rightarrow K$  qui associe à  $j$  l'unique indice  $k$  tel que  $\tilde{f}_{j,j'}$  ne s'annule pas sur  $\tilde{R}_k$ . En posant la somme sur l'ensemble vide comme valant 0, nous pouvons alors écrire

$$\int_{\tilde{\phi}^{-1}(R)} \sum_{i,l} \sum_{\{(j,j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\}} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| \tilde{\omega} = \sum_{k \in K} \int_{\tilde{R}_k} \sum_{i,l} \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| \tilde{\omega}.$$

Pour chaque  $k \in K$  et chaque  $i \in \{1, \dots, N\}$ , il n'y a qu'un seul  $l \in K$  pour lequel  $f_{i,l}$  n'est pas nul sur  $\tilde{R}_k$ . Donc, *sur la face*  $\tilde{R}_k$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i,l} \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \{ \tilde{\phi}^*(f_i), \tilde{\phi}^*(f_j) \}_{\tilde{M}} \right| \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \tilde{\phi}^* \{f_i, f_j\}_M \right|. \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{\phi} : (\tilde{R}_k, \tilde{\omega}) \rightarrow (R, \omega)$  est un difféomorphisme symplectique, ceci donne

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\phi}^{-1}(R)} \sum_{i,l} \sum_{\{(j,j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\}} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| \tilde{\omega} &= \sum_{k \in K} \int_{\tilde{R}_k} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \tilde{\phi}^* \{f_i, f_j\}_M \right| \tilde{\omega} \\ &= \sum_{k \in K} \int_R \sum_{i=1}^N \sum_{j \in h^{-1}(k)} \left| \{f_i, f_j\}_M \right| \omega = \int_R \sum_{i=1}^N \sum_{\{j : x \in U_j\}} \left| \{f_i, f_j\}_M \right| \omega. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{\tilde{M}} \sum_{i,l} \sum_{\{(j,j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\}} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| \tilde{\omega} \\ &= \sum_R \int_{\tilde{\phi}^{-1}(R)} \sum_{i,l} \sum_{\{(j,j') : \tilde{x} \in \tilde{U}_{j,j'}\}} \left| \{ \tilde{f}_{i,l}, \tilde{f}_{j,j'} \}_{\tilde{M}} \right| \tilde{\omega} \\ &= \sum_R \int_R \sum_{i=1}^N \sum_{\{j : x \in U_j\}} \left| \{f_i, f_j\}_M \right| \omega = \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j : x \in U_j\}} \left| \{f_i, f_j\}_M \right| \omega. \end{aligned}$$

□

*Démonstration du théorème 2.3.8 quand  $g \geq 1$*  : Comme dans la démonstration précédente, nous relevons d'abord toutes les données au revêtement universel  $\tilde{M}$ .

Puisque  $\mathcal{U}$  est fini, il est localement fini ; il n'admet donc qu'un nombre fini  $L$  d'enceintes distinctes. Compte tenu du fait que le groupe des transformations du revêtement  $\tilde{\phi}$  agit sur les enceintes de  $\tilde{U}$ , nous déduisons que  $\tilde{U}$  n'admet aussi que  $L$  types d'enceintes. Toutes les enceintes de  $\tilde{U}$  sont ainsi bornées ; fixons une enceinte représentante pour chacun des  $L$  types d'enceintes. Il est possible de réunir un nombre suffisant de domaines fondamentaux de  $\tilde{\phi}$  pour que la réunion couvre une boule qui couvre elle-même toutes les enceintes représentantes ; cette réunion peut être choisie comme domaine fondamental d'un revêtement symplectique  $\tilde{\phi}' : (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow (M', \omega')$  avec  $(M', \omega')$  fermée.

Notons que ceci induit un revêtement symplectique  $\phi' : (M', \omega') \rightarrow (M, \omega)$  tel que  $\tilde{\phi} = \phi' \circ \tilde{\phi}'$ . Ainsi, le recouvrement  $\mathcal{U}'$  obtenu en rappelant  $\mathcal{U}$  par  $\phi'$  coïncide avec le recouvrement obtenu en poussant en avant  $\tilde{U}$  par  $\tilde{\phi}'$ . Par construction, les enceintes de  $\mathcal{U}'$  ont la même topologie que les enceintes de  $\tilde{\mathcal{U}}$ .

Un fait crucial est que tous les points de  $M'$  sont confinés pour  $\mathcal{U}'$ . En effet, étant donné une enceinte  $U'_{x'}$  de  $\mathcal{U}'$ , notre construction implique que  $U'_{x'}$  est incluse dans une boule plongée  $B'$  de  $M'$ . S'il existait un disque  $U'_j \in \mathcal{U}'$  tel que  $M' \subset U'_j \cup U'_{x'}$ , nous aurions *a fortiori*  $M' \subset U'_j \cup B'$  ; cela impliquerait que  $M'$  est difféomorphe à une sphère, ce qui contredirait le fait que  $M'$  revêt la surface  $M$  de genre  $g \geq 1$ . Conséquemment,  $C_{\mathcal{U}'} = M'$ .

Supposons que  $\phi' : M' \rightarrow M$  soit un revêtement de degré  $d$ . Ainsi, nous avons  $\omega'(M') = d\omega(M)$ . De plus, si  $\mathcal{U}$  est localisé en  $m$  points  $x_1, \dots, x_m$ , alors  $\mathcal{U}'$  est localisé aux  $md$  points  $\cup_{l=1}^m (\phi')^{-1}(x_l)$ .

Étant donné une partition de l'unité  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ , considérons la partition de l'unité relevée  $\mathcal{F}' \prec \mathcal{U}'$ . Compte tenu du fait que  $\omega'(\mathcal{U}') = \omega(\mathcal{U})$  et que  $P_{\mathcal{F}'} = (\phi')^* P_{\mathcal{F}}$ , le théorème 2.3.14 implique

$$md \leq \int_{M'} P_{\mathcal{F}'} \omega' = \int_{M'} (\phi')^* P_{\mathcal{F}} (\phi')^* \omega = d \int_M P_{\mathcal{F}} \omega \Rightarrow m \leq \int_M P_{\mathcal{F}} \omega$$

ainsi que

$$1 = \frac{\omega'(C_{\mathcal{U}'})}{\omega'(M')} \leq \frac{\int_{M'} P_{\mathcal{F}'} \omega'}{\omega'(M')} = \frac{d \int_M P_{\mathcal{F}} \omega}{d\omega(M)} = \frac{\int_M P_{\mathcal{F}} \omega}{\omega(M)} .$$

L'inégalité  $\int_{U_x} P_{\mathcal{F}} \omega \geq 1$  pour  $x \in M$  résulte de la démonstration précédente et du premier argument dans la démonstration du théorème 2.3.14.

□



Nous expliquons maintenant la preuve de l'estimé de Buhovski-Tanny pour les disques essentiels d'un recouvrement. Rappelons le contexte : soient un recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  formé de disques plongés fermés,  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité et  $U_k \in \mathcal{U}$  essentiel. Si  $M = S^2$ , nous supposons par ailleurs que  $U_k$  est confiné. Nous voulons montrer l'inégalité

$$\int_M \sum_{i=1}^N |\{f_i, f_k\}| \omega \geq 1.$$

*Démonstration du théorème 2.3.16* : L'idée consiste à utiliser le flot du champ hamiltonien généré par  $f_k$  afin de paramétrer dynamiquement (une portion de)  $U_k$  à l'aide de coordonnées « énergie-temps », d'utiliser le théorème de Fubini pour réexprimer l'intégrale double comme une intégrale itérée en temps puis en énergie et d'évoquer finalement l'identité  $|\{f_i, f_k\}| = |\mathrm{d}f_i(X_{f_k})|$  afin de concevoir les intégrales en temps comme mesures de « l'oscillation totale » de  $f_i$  le long de des courbes intégrales de  $X_{f_k}$ .

Quitte à renommer les indices, supposons  $k = 1$ . Il existe  $x_1 \in U_1$  qui n'est couvert que par  $U_1$ . Fixons une métrique riemannienne quelconque sur  $M$ .

Puisque  $M$  est fermée, il découle du théorème de Sard que l'ensemble des valeurs critiques  $f_1$  est un compact de mesure nulle dans  $[0, 1]$  ; son complément  $E$  est ouvert de pleine mesure dans  $(0, 1)$ . (Notons que  $0 = f_1(\partial U_1)$  et  $1 = f_1(x_1)$  ne sont pas des valeurs régulières.) Pour toute composante connexe  $E_c$  de  $E$ , choisissons un point  $e_c \in E_c$ .

Pour n'importe quelle valeur régulière  $e \in E$  de  $f_1$ , puisque  $M$  est fermée, l'ensemble de niveau  $f_1^{-1}(e) \subset U_1$  est constitué d'un nombre fini de cercles plongés disjoints  $C_i$ , forcément tous disjoints de  $\{x_1\}$  et de  $\partial U_1$ . Chacun de ces cercles  $C_i$  divise le disque  $U_1$  en deux composantes connexes,  $D_i$  et  $A_i$ , respectivement difféomorphes à un disque et à une couronne, la composante bord de  $\overline{D_i}$  étant  $C_i$  et les deux composantes bord de  $\overline{A_i}$  étant  $C_i$  et  $\partial U_1$ . Nous montrons maintenant qu'au moins un des  $C_i$  encercle  $x_1$ . Puisque les cercles  $C_i$  sont disjoints, il y a un ordre partiel sur ces cercles donné par  $C_i < C_j$  si et seulement si  $\overline{D_i} \subset \overline{D_j}$ . Il existe donc un nombre fini (non nul) de cercles maximaux  $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$  ; les disques correspondant  $D_{i_j}$  sont forcément deux à deux disjoints, de sorte qu'au plus l'un des  $C_{i_j}$  encercle  $x_1$ . Supposons par l'absurde qu'aucun de ces cercles maximaux n'encercle  $x_1$  ; ainsi, l'ensemble  $X = U_1 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{D_{i_j}} = \bigcap_{j=1}^m A_{i_j}$  contient  $\partial U_1$  et  $x_1$ . Par maximalité, observons que  $f_1^{-1}(e) \cap X = \emptyset$ . Du fait que les  $\overline{D_{i_j}}$  sont disjoints,  $X$  est connexe. En raison du théorème des valeurs intermédiaires,  $[0, 1] \supset f_1(X) \supset [f_1(\partial U_1), f_1(x_1)] = [0, 1]$ , d'où  $f_1^{-1}(e) \cap X \neq \emptyset$ , une contradiction.

Pour  $e \in E$  quelconque, soit  $C(e) \subset f_1^{-1}(e)$  un cercle qui encercle  $x_1$  et notons  $D \subset U_1$  le disque délimité par  $C(e)$ , de sorte que  $x \in D$ . Nous affirmons que pour chaque  $i > 1$ ,  $C(e)$  intersecte le complément de  $U_i$ . Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas pour un certain  $i > 1$ , disons  $i = 2$ ; cela signifierait que  $C(e) \subset U_2$ . Par définition de  $x_1$ ,  $x_1 \notin U_2$ . Donc le cercle  $C(e)$  (paramétré de manière injective par  $S^1$ ) serait contractile dans  $U_2$  et *a fortiori* dans  $M \setminus \{x_1\}$ . Or si  $M$  a genre  $g \geq 1$ , puisque  $C(e)$  encercle  $x_1$ , il s'avère que  $C(e)$  n'est pas homotopiquement trivial dans  $M \setminus \{x_1\}$ . L'hypothèse absurde ci-dessus ne peut donc être valide que lorsque  $g = 0$ , auquel cas  $D$  et la trace de la contraction de  $C(e)$  dans  $U_2$  permettraient de définir une application continue de degré 1 (donc surjective) de  $S^2$  dans  $M$ . Cela signifierait que  $M \subset D \cup U_2 \subset U_1 \cup U_2$ , ce qui contredirait l'hypothèse de confinement de  $U_1$ . Conséquemment, pour chaque  $i > 1$ , le minimum de  $f_i$  sur  $C(e)$  est 0.

Pour chaque  $e_c \in E$ , fixons un point  $x_c \in C(e_c)$ . Puisque  $E$  consiste en des valeurs régulières de  $f_1$ , la trajectoire de  $x_c$  sous le flot gradient de  $\nabla f_1$  détermine une application lisse  $x : E_c \rightarrow U_1$  qui satisfait  $x(e_c) = x_c$  et  $x(e) \in f_1^{-1}(E)$ . Nous obtenons ainsi une application lisse  $x : E \rightarrow f_1^{-1}(E)$  qui satisfait  $f_1(x(e)) = e$ .

Puisque  $E$  consiste en des valeurs régulières de  $f_1$  et puisque le flot  $\phi_{X_{f_1}}^t$  du champ hamiltonien  $X_{f_1}$  préserve les ensembles de niveau de  $f_1$ , pour chaque  $e \in E$ , le cercle dans  $f_1^{-1}(e)$  qui contient  $x(e)$  est une orbite de  $X_{f_1}$ , de période  $T(e) > 0$ . Ceci détermine une application lisse  $T : E \rightarrow (0, \infty)$ .

Considérons le sous-ensemble suivant de l'espace « énergie-temps » :

$$P := \{(e, t) \in \mathbb{R}^2 \mid e \in E, t \in (0, T(e))\} \subset \mathbb{R}^2.$$

L'application  $\Phi : P \rightarrow f_1^{-1}(E) : (e, t) \mapsto \phi_{X_{f_1}}^t(x(e))$  est un difféomorphisme sur son image. Observons que  $(T\Phi)(\partial_t) = X_{f_1}$ , que  $\Phi^* f_1 = e$  que  $-de = (\partial_t)_\perp (de \wedge dt)$ , d'où  $\Phi^*(\omega) = de \wedge dt$ .

Le reste de la démonstration est un calcul :

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{i=1}^N |\{f_i, f_1\}| \omega &= \sum_{i=2}^N \int_M |df_i(X_{f_1})| \omega \\ &\geq \sum_{i=2}^N \int_{\Phi(P)} |df_i(X_{f_1})| \omega \\ &= \sum_{i=2}^N \int_P |d(\Phi^* f_i)(\partial_t)| de \wedge dt \\ &= \sum_{i=2}^N \int_{e \in E} \int_{t=0}^{T(e)} \left| \frac{d(\Phi^* f_i)}{dt} \right| dt de \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=2}^N \int_{e \in E} 2 \left( \max_{t \in (0, T(e))} \Phi^* f_i - \min_{t \in (0, T(e))} \Phi^* f_i \right) de \\
&\geq \sum_{i=2}^N \int_{e \in E} 2 f_i(x(e)) de \\
&= \int_{e \in E} 2(1 - f_1(x(e))) de \\
&= \int_{e \in E} 2(1 - e) de \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.3.19.** Nous avons construit  $\text{Im } x$  de façon à ce que  $f_1$  soit monotone sur cet ensemble. Nous pourrions être plus minutieux, ce qui nous amènerait à considérer « l'oscillation totale » de  $f_1$  en plus de celle des autres  $f_i$ . En considérant les fonctions  $(f_i, f_1) : M \rightarrow [0, 1]^2$ , le calcul ci-dessus deviendrait

$$\int_M \sum_{i=1}^N |\{f_i, f_1\}| \omega = \int_{[0,1]^2} \sum_{i=2}^N \#\{ \text{préimages de } (u, v) \text{ par } (f_i, f_1) \} du dv.$$

Après la substitution  $f_1 \mapsto f_j$  et l'ajout d'une somme sur les  $j$ , cette égalité devient le point de départ du travail [BLT]. Ici, puisque  $f_i + f_1 \leq 1$ , l'image de chaque  $(f_i, f_1)$  est contenue dans le triangle  $\Delta = \{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid u + v \leq 1\}$  d'aire  $1/2$ . Or, en un sens, les diverses applications  $(f_i, f_1)$  se « somment » ; les hypothèses du théorème et le fait que  $\mathcal{F}$  soit une partition de l'unité impliquent moralement que l'image de cette « somme » est  $\Delta$ , recouvert deux fois. Cette interprétation est certes impressionniste, mais elle demeure évocatrice. L'article [BLT] présente des arguments topologiques et combinatoires plus subtils (et plus rigoureux) pour évaluer cette intégrale malgré l'absence d'hypothèse telle que l'essentialité.

**Remarque 2.3.20.** L'hypothèse de disjonction  $\omega(\mathcal{U}) < \omega(M)/2$  utilisée à l'origine par Buhovski et Tanny intervient précisément afin d'exclure la possibilité d'avoir  $M \subset U_1 \cup U_2$ , puisque cette inclusion impliquerait qu'au moins un des deux disques ait aire supérieure à  $\omega(M)/2$ . Ainsi, les disques essentiels disjoints sont confinés. Nous voyons toutefois que c'est le confinement du disque essentiel qui importe véritablement.

Comme l'exemplifiera la prochaine démonstration, nous pouvons généraliser quelque peu le résultat au cas d'un ouvert essentiel fortement confiné qui n'est pas un disque. Dans une telle situation, un ouvert  $U \in \mathcal{U}$  est essentiel si la collection  $\mathcal{U} \setminus \{U\}$  ne recouvre pas  $M$ , de sorte qu'il existe  $x \in U$  tel que  $U_x = U$ . L'hypothèse

de confinement fort diffère alors généralement de l'hypothèse de confinement normal : nous pouvons imaginer des situations où  $\partial U$  consiste en plusieurs cercles et où les autres ouverts de  $\mathcal{U}$  englobent chacun une seule composante connexe de  $\partial U$ . De tels exemples permettent d'ailleurs de montrer que l'hypothèse de confinement simple ne suffit généralement pas à assurer que  $pb(\mathcal{U})$  soit strictement positif.

Nous discutons maintenant le cas de la sphère, qui nous occupera pour toute la suite de la sous-section. Nous établissons tout d'abord l'implication  $A$ , qui se révèle être un corollaire simple du théorème 2.3.16.

*Démonstration du théorème 2.3.15 quand  $g = 0$*  : Soient un recouvrement  $\mathcal{U}$  formé de disques plongés fermés,  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité et  $x \in S^2$  un point fortement confiné. Considérons un disque  $D$  minimal ayant pour bord une composante du bord de l'enceinte  $U_x$  qui n'est contenue dans aucun autre  $U_i$  ; le recouvrement  $\mathcal{U}' := (\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_x) \cup \{D\}$  est un recouvrement par des disques fermés plongés tel que  $D$  est essentiel et confiné. En vertu du théorème 2.3.16, nous avons

$$1 \leq \int_M \sum_{\{i: U_i \notin \mathcal{U}_x\}} \left| \left\{ f_i, \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_x\}} f_j \right\} \right| \omega \leq \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: U_j \in \mathcal{U}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \omega.$$

□

Considérons enfin l'implication  $C$  pour la sphère. Notre stratégie se résume encore une fois à relever (symplectiquement) les données sur  $(S^2, \omega)$  en de nouvelles données sur le tore  $(T^2, \omega')$ . Nous ne pouvons cependant pas utiliser de submersion symplectique  $\phi : (T^2, \omega') \rightarrow (S^2, \omega)$ , puisqu'une telle application serait en particulier un revêtement, chose qui n'existe pas. Toutefois, les surfaces symplectiques pouvant être pensées comme des surfaces de Riemann, nous pouvons nous débrouiller avec l'aide des revêtements ramifiés « symplectiques ». Bien que la méthode soit générale, nous l'expliquerons avec un revêtement ramifié précis en tête.

**Proposition 2.3.21.** *Il existe un revêtement ramifié (topologique)  $\phi : T^2 \rightarrow S^2$  de degré 4 ramifié en trois points de la sphère.*

*Démonstration* : Nous construisons  $\phi$  sous forme d'une composition  $\phi' \circ \phi''$  de revêtements ramifiés.

Identifions  $S^2$  à la sphère de Riemann  $P\mathbb{C}^1$  et utilisons les coordonnées homogènes  $[z_0 : z_1]$ . Soient  $P_1 = [0 : 1]$ ,  $P_2 = [1 : 0]$ ,  $P_3 = [1 : 1]$  et  $P_4 = [1 : -1]$ .

Considérons  $\phi' : P\mathbb{C}^1 \rightarrow P\mathbb{C}^1 : [z_0 : z_1] \mapsto [z_0^2 : z_1^2]$ . Il s'agit d'un revêtement de degré 2 ramifié aux points  $P_1$  et  $P_2$ . Observons que  $\phi'(P_1) = P_1$ ,  $\phi'(P_2) = P_2$  et  $\phi'(P_3) = \phi'(P_4) = P_3$ . Topologiquement, le domaine est obtenu en collant deux copies du codomaine coupées le long de  $C_1 = \{[1 : -it] \mid t \in [0, +\infty)\}$ .

Il existe un revêtement ramifié  $\phi'' : T^2 \rightarrow S^2$  de degré 2 et ramifié aux quatre points  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ . Un tel exemple se construit topologiquement à l'aide de deux coupures, la première étant  $C_1$ , la deuxième étant  $C_2 = \{[1 : e^{i\theta}] \mid \theta \in [0, \pi]\}$ . Nous coupons d'abord le long de  $C_1$ . Les relevés de  $C_2$  sont alors les deux segments  $C'_2 = \{[1 : e^{i\theta}] \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$  et  $C''_2 = \{[1 : -e^{i\theta}] \mid \theta \in [0, \pi/2]\}$ . En retirant ces deux segments de  $P\mathbb{C}^1$ , nous obtenons deux « bouches » dont nous pouvons identifier les « lèvres » respectives pour former  $T^2$ .

La composition  $\phi = \phi' \circ \phi'' : T^2 \rightarrow S^2$  est un revêtement ramifié (lisse une fois  $\phi''$  régularisée) de degré 4 ramifié aux points  $P_1, P_2$  et  $P_3$ .

Alternativement, la fonction elliptique  $\wp$  de Weierstrass, interprétée comme fonction  $\phi'' = \wp : T^2 \rightarrow S^2$ , est ramifiée en quatre points. Quitte à appliquer un difféomorphisme, ces quatre points sont  $P_1, \dots, P_4$  et nous pouvons appliquer  $\phi'$ .  $\square$

**Remarque 2.3.22.** *Quitte à agir sur  $S^2$  par un symplectomorphisme, les trois points de ramifications peuvent être pris quelconques.*

Considérons un tel revêtement ramifié topologique lisse  $\phi : T^2 \rightarrow S^2$  ramifié aux points  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . Observons que tout disque plongé  $D \subset S^2$  qui ne contient (au plus) qu'un seul point de ramification est relevé par  $\phi$  en un ensemble dont toutes les composantes connexes sont des disques (plongés si le point de ramification est contenu dans l'intérieur de  $D$ ).

Étant donné une forme symplectique  $\omega$  sur  $S^2$ , considérons la 2-forme fermée  $\phi^*\omega$  sur  $T^2$ . Celle-ci est non dégénérée partout sauf en un nombre fini de points, à savoir les préimages de trois points ramifiés. Considérons de petits disques ouverts disjoints  $x_i \in D_i \subset S^2$ . Pour chaque composante connexe  $D'_{i,k}$  de  $\phi^{-1}(D_i)$ , considérons une 2-forme fermée positive  $\omega'_{i,k}$  supportée dans  $D'_{i,k}$  qui ne s'annule pas au point ramifié que contient  $D'_{i,k}$ . Pour  $\delta > 0$  à fixer ultérieurement, posons  $\omega' = \phi^*\omega + \delta \sum_{i=1}^3 \sum_{k \in \phi^{-1}(x_i)} \omega'_{i,k}$ . Si  $\delta$  est choisi assez petit,  $\omega'$  est symplectique qui vérifie  $\omega' \geq \phi^*\omega$ , c'est-à-dire que les structures de Poisson associées satisfont  $\phi_*\pi' \leq \pi$ , soit encore que  $|\{\phi^*f, \phi^*g\}_{\omega'}| \leq |\{f, g\}_\omega|$  quelles que soient  $f, g \in$

$C^\infty(S^2; \mathbb{R})$ . Par ailleurs, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\delta$  peut être choisi si petit que pour tout disque  $D' \subset T^2$ , nous ayons  $\omega'(D') < (\phi^*\omega)(D') + \epsilon$ .

Soient  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $S^2$  formé de disques fermés plongés qui est localisé aux trois points  $x_1, x_2$  et  $x_3$  et  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Considérons les relèvements  $\mathcal{U}'$  (formé des composantes connexes des ensembles dans  $\phi^{-1}\mathcal{U}$ ) et  $\mathcal{F}'$  (formée des restrictions des fonctions dans  $\phi^*\mathcal{F}$  aux ensembles appropriés dans  $\mathcal{U}'$ ) vers  $T^2$ . Soulignons que chaque  $U_i \in \mathcal{U}$  ne contient pas plus d'un des points  $x_k$ , donc les ensembles  $U'_j \in \mathcal{U}'$  sont des disques plongés fermés. Le paragraphe précédent implique d'une part  $P_{\mathcal{F}'} \leq \phi^*P_{\mathcal{F}}$ , d'autre part qu'un disque  $U'_j \in \mathcal{U}'$  vérifie  $\omega'(U'_j) \leq r_j \omega(\phi(U'_j)) + \epsilon$  avec  $r_j = 1, 2, 4$  selon que  $\phi(U'_j)$  ne contienne aucun  $x_k$  ( $r_j = 1$ ), contienne  $x_3$  ( $r_j = 2$ ) ou contienne  $x_1$  ou  $x_2$  ( $r_j = 4$ ), respectivement.

Compte tenu de nos résultats sur les surfaces de genre  $g \geq 1$ , ceci suffit à établir pour  $S^2$  toutes les inégalités énoncées dans nos théorèmes, mais avec les bornes inférieures possiblement divisées par 4. Cependant, les données relevées sur  $T^2$  ne sont pas quelconques. Par exemple, si  $x \in S^2$  est confiné pour  $\mathcal{U}$ , ses préimages dans  $T^2$  sont toutes confinées pour  $\mathcal{U}'$ . Autre exemple : un disque  $D'_{i,k}$  d'indice de ramification  $r_i$  intersecte  $r_i$  relevés d'un disque non ramifié. Ou encore : une fonction  $f'_{i,k}$  supportée dans un disque  $D'_{i,k}$  d'indice de ramification  $r_i > 1$  oscille  $r_i$  fois plus que la fonction  $f_i$  de laquelle elle origine. Un suivi minutieux de l'ensemble de notre argument établit que toutes les quantités qui interviennent dans nos inégalités sont « homogènes » par passage aux revêtements.

À cette étape-ci de la présentation, la démonstration de faisabilité de notre méthode nous semble accomplie. Nous n'en dirons donc pas davantage sur le cas de la sphère et, incidemment, sur le cas bidimensionnel.

## 2.4. RÉSULTATS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

La conjecture du crochet de Poisson est beaucoup plus subtile en dimensions supérieures à deux, pour de nombreuses raisons. Un obstacle majeur est l'absence de caractérisation utile des ensembles disjoignables et de leur énergie de disjonction, caractérisation qui permettrait d'expliciter et d'ainsi circonscrire le type de recouvrements sur lequel la conjecture porte<sup>3</sup>. Par ailleurs, la possibilité

---

3. Une telle caractérisation est fournie en dimension deux par le théorème A.3.8 et a permis à Buhovski-Logunov-Tanny et à nous-même de ramener un problème de nature initialement dynamique à un problème de géométrie et de topologie.

en dimension deux de réexprimer les intégrales  $\int_M |\{f_i, f_j\}| \omega$  comme des intégrales sur le codomaine des applications  $(f_i, f_j) : M \rightarrow [0, 1]^2$ , bref la possibilité de « changer de variables », n'existe plus en dimensions supérieures.

### 2.4.1. Stratégie d'attaque

Dans le but de sonder la conjecture en dimensions supérieures, une bonne boussole se révèle être, une fois de plus, l'interprétation de la conjecture comme étant une version symplectique et portant sur les partitions de l'unité du théorème des accroissements finis. En effet, nous pouvons formuler un analogue riemannien de la conjecture du crochet de Poisson comme suit :

**Proposition 2.4.1.** *Soient  $(M^n, g)$  une variété riemannienne fermée,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  une recouvrement ouvert tel qu'aucun  $U_i$  ne recouvre toute la variété<sup>4</sup> et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Définissons*

$$\gamma_{\mathcal{F}}^P(x) := \max_{a \in [-1, 1]} \left\| \sum_{i=1}^N a_i \nabla f_i(x) \right\|_g, \quad \gamma_{\mathcal{F}}^{BT}(x) := \sum_{i=1}^N \|\nabla f_i(x)\|, \quad s_R(\mathcal{U}) := \max_i s_R(U_i),$$

$$s_R(U_i) := \sup \{r > 0 \mid \exists \phi : (B^n(r), g_0) \hookrightarrow (U_i, g) \text{ plongement isométrique} \}.$$

Alors il existe  $c(n) > 0$  telle que

$$c(n) \gamma_{\mathcal{F}}^{BT} \leq \gamma_{\mathcal{F}}^P \leq \gamma_{\mathcal{F}}^{BT} \quad \text{et} \quad \|\gamma_{\mathcal{F}}^{BT}\|_{C^0} s_g(\mathcal{U}) \geq 1.$$

*Esquisse de démonstration :* L'équivalence des quantités  $\gamma^P$  et  $\gamma^{BT}$  s'établit essentiellement de la même façon, et plus simplement, que l'équivalence entre  $pb^P$  et  $pb^{BT}$  a été établie à l'origine par Buhovski-Logunov-Tanny (voir l'annexe B.1).

Le cas unidimensionnel  $n = 1$ , bref le cas du cercle  $(S^1, g)$ , est facile à démontrer en évoquant le théorème des accroissements finis. L'approche la plus simple est probablement l'analogie de notre démarche symplectique et consiste à établir la conjecture en présence d'un ouvert essentiel, puis à déduire le cas général en relevant les données à des revêtements riemanniens de  $(S^1, g)$ . L'approche analogue à celle de Buhovski-Logunov-Tanny est aussi possible et consiste à exprimer la norme  $L^1$  de  $\gamma_{\mathcal{F}}^{BT}$  sur  $S^1$  comme une intégrale sur l'intervalle  $[0, 1]$  d'une intégrande calculant l'enchevêtrement des ensembles de niveau des  $f_i$  et à montrer que cette intégrale vaut au moins  $\text{Vol}(S^1, g)/s_R(\mathcal{U})$ .

Enfin, la conjecture en dimension supérieure suit moralement en restreignant les données du problème à une portion d'un cercle géodésique  $L : (S^1, g) \looparrowright (M, g)$

4. Il ne s'agit peut-être pas de la bonne hypothèse ; lire la note de bas de page suivante.

approprié. En effet,  $\mathcal{F}$  se restreint à une partition de l'unité subordonnée à la restriction de  $\mathcal{U}$ . Aucun  $U_i|_{L(S^1)}$  ne contient toute la géodésique si la géodésique a été bien choisie<sup>5</sup>. Nous avons  $s_R(U_i|_{L(S^1)}) \leq s_R(\mathcal{U})$  du fait que le rayon d'injectivité  $s_R(U_i)$  est une mesure de la longueur de la plus longue géodésique qui traverse  $U_i$ . Finalement,  $\gamma_{\mathcal{F}|_{L(S^1)}}^{BT}(x) \leq \gamma_{\mathcal{F}}^{BT}(x)$  en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  $\square$

Cette démarche riemannienne suggère une approche symplectique analogue : étant donnée une variété symplectique fermée  $(M^{2n}, \omega)$ , un recouvrement  $\mathcal{U}$  formé d'ouverts disjoignables et une partition de l'unité  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ , il nous faudrait restreindre ces données à une surface symplectique « géodésique »  $(S, \omega_s) \looparrowright (M, \omega)$  et appliquer les résultats que nous avons établis en dimension deux. Cette approche se heurte toutefois à d'importants obstacles :

- (1) Il n'y a pas canoniquement de sous-variété symplectique « géodésique ». Certes, étant donné une structure presque complexe  $J$  compatible avec  $\omega$ , une  $J$ -courbe fait office de « géodésique », mais la structure  $J$  est de prime abord arbitraire.
- (2) Il n'y a pas d'analogue symplectique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, étant donné une sous-variété symplectique  $\iota : N \looparrowright (M, \omega)$ , nous n'avons pas forcément  $P_{\iota^*\mathcal{F}}(x) \leq P_{\mathcal{F}}(x)$  pour  $x \in \iota(N)$  ; en fait, pour tout  $L > 0$ , il est possible de trouver des exemples où  $P_{\iota^*\mathcal{F}}(x_0)/P_{\mathcal{F}}(x_0) \geq L$  en un certain  $x_0$ .
- (3) L'intersection des ouverts de  $\mathcal{U}$  avec une sous-variété symplectique  $N$  de  $(M, \omega)$  n'a aucune raison de donner lieu à des ouverts disjoignables dans  $(N, \iota^*\omega)$ . Par exemple, si  $(M, \omega) = (N \times F, \omega_N \oplus \omega_F)$  et  $\mathcal{U} = p_F^{-1}\mathcal{V}$  pour un certain recouvrement  $\mathcal{V}$  de  $F$  formé d'ouverts disjoignables, alors  $\mathcal{U}$  est aussi formé d'ouverts disjoignables, mais l'intersection de  $N \times \{v_0\}$  avec les ouverts de  $\mathcal{U}$  recouvrent chacun tout  $N \times \{v_0\}$ .

Il existe une solution simultanée aux obstacles (1) et (2) qui repose sur l'observation qu'une partition de l'unité  $\mathcal{F}$  admet des structures presque complexes compatibles  $J$  dont les  $J$ -courbes se comportent bien vis-à-vis du point (2).

---

5. L'existence d'une telle géodésique n'est pas évidente et pourrait parfois se révéler fautive ; l'analogue riemannien de la condition de disjonction est peut-être précisément la condition sur  $\mathcal{U}$  qui assurerait l'existence d'une telle géodésique. L'identification d'une bonne hypothèse riemannienne suggérerait vraisemblablement en retour une hypothèse symplectique plus tractable que l'hypothèse de disjonction.



**Lemme 2.4.2.** *Il existe une constante  $C'(n) > 0$  ayant la propriété suivante. Soient  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique fermée et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$  une partition de l'unité. Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un triplet compatible  $(\omega, J, g)$  tel que pour toute courbe  $J$ -holomorphe  $u : (S, j) \rightarrow (M, J)$  nous ayons*

$$P_{u^*\mathcal{F}}(x) \leq C'(n) (u^*P_{\mathcal{F}})(x) + \epsilon.$$

*Démonstration :* Posons  $X_{\mathcal{F}}(p) = \{X_{f_i}(p)\}_{i=1}^N$  ainsi que

$$N(X_{\mathcal{F}}) : M \rightarrow [0, \infty) : p \mapsto \inf_{g \in \mathfrak{Met}(M, \omega)} \sum_{i=1}^N \|X_{f_i}(p)\|_{g(p)}.$$

En vertu de la proposition B.1.1 de Buhovski-Logunov-Tanny, nous avons

$$N(X_{\mathcal{F}}(p))^2 \leq \frac{1}{c'(n)} P_{\mathcal{F}}(p).$$

Soit  $\delta > 0$ . En vertu du lemme B.4.1, il existe  $g \in \mathfrak{Met}(M, \omega)$  telle que

$$N_{\mathcal{F}}(p) \leq C(n) N(X_{\mathcal{F}}(p)) + \delta \quad \text{pour tout } p \in M$$

où nous avons posé

$$N_{\mathcal{F}} : M \rightarrow [0, \infty) : p \mapsto N_{X_{\mathcal{F}}(p)}(g) = \sum_{i=1}^N \|X_{f_i}(p)\|_{g(p)}.$$

Ainsi, pour  $\delta$  assez petit et pour une telle métrique riemannienne  $g$  correspondante, nous avons

$$N_{\mathcal{F}}(p)^2 \leq \frac{C(n)^2}{c'(n)} P_{\mathcal{F}}(p) + \delta^2 + 2C(n)N(X_{\mathcal{F}}(p))\delta \leq \frac{C(n)^2}{c'(n)} P_{\mathcal{F}}(p) + \epsilon.$$

Puisque  $g$  est compatible avec  $\omega$ , il existe une structure presque complexe  $J$  telle que  $g = g_J = \omega(-, J-)$ . Soient une  $J$ -courbe  $u : (S, j) \rightarrow (M, J)$  et  $x \in S$ . Si  $x$  est un point critique de  $u$ , alors toutes les fonctions de la collection  $u^*\mathcal{F}$  s'annulent en  $x$ , de sorte que l'inégalité à démontrer est triviale. Supposons donc que  $u$  est une immersion près de  $x$ . Quitte à travailler localement, nous pouvons supposer que  $u$  est un plongement et identifier  $S$  à son image  $u(S) \subset M$ . Puisque  $u$  est  $J$ -holomorphe et que  $(\omega, g, J)$  est compatible, il s'avère que la restriction  $(\omega, g, J)|_{T_x S}$  est compatible pour tout  $x \in S$ .

Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Pour  $v \in T_x S \subset T_x M$ , nous calculons

$$(u^*g)(\nabla(u^*f), v) = [d(u^*f)](v) = [u^*df](v) = df(v) = g(\nabla f, v)$$

ainsi que

$$(u^*\omega)(X_{u^*f}, v) = -[d(u^*f)](v) = -[u^*df](v) = -df(v) = \omega(X_f, v).$$

Ceci a de nombreuses conséquences. Premièrement, il en résulte que  $\nabla(u^*f) \in T_x S$  est la projection orthogonale de  $\nabla f \in T_x M$ , de sorte que

$$\|\nabla(u^*f)\|_{u^*g} = \|\nabla(u^*f)\|_g \leq \|\nabla f\|_g$$

Deuxièmement, par l'identité  $\nabla f = -JX_f$  et par compatibilité de la restriction  $(\omega, g, J)|_{T_x S}$ , il découle aussi que  $\nabla(u^*f) = -J|_{T_x S} X_{u^*f}$ , de sorte que

$$\|X_{u^*f}\|_{u^*g} = \|J|_{T_x S} X_{u^*f}\|_{u^*g} = \|\nabla(u^*f)\|_{u^*g} \leq \|\nabla f\|_g = \|J\nabla f\|_g = \|X_f\|_g.$$

En appliquant ceci à chaque  $f_i$ , nous obtenons  $N_{u^*\mathcal{F}}(x) \leq N_{\mathcal{F}}(x)$ .

Encore par compatibilité du triplet restreint,  $|(u^*\omega)(v, w)| \leq \|v\|_{u^*g}\|w\|_{u^*g}$  pour tout  $u, v \in T_x S$ , de sorte que

$$P_{u^*\mathcal{F}}(x) \leq N_{u^*\mathcal{F}}(x)^2.$$

En combinant toutes les inégalités, nous déduisons l'inégalité recherchée avec  $C'(n) \leq C(n)^2/c'(n)$ .

□

**Remarque 2.4.3.** *Le lemme 2.4.2 peut être généralisé afin de porter sur des collections quelconques de champs vectoriels  $X = \{X_i\}_{i=1}^N$  plutôt que sur les champs hamiltoniens générés par une partition de l'unité. En effet, tous les estimés sont essentiellement ponctuels. De plus, le fait que la courbe  $S$  soit  $J$ -holomorphe implique que la projection  $g$ -orthogonale et la submersion symplectique de  $T_x M$  vers  $T_x S$  coïncident, ce qui suffit à établir les estimés obtenus à cette étape de la démonstration.*

**Remarque 2.4.4.** *La démonstration du lemme 2.4.2 donne de nouvelles raisons de vouloir trouver les meilleures constantes  $c'(n)$  et  $C(n)$  dans la proposition B.1.1 et dans le lemme B.4.1.*

Nous ne connaissons pas de solution générale à l'obstacle (3). Le lemme 2.4.2 n'aide pas à cet égard, puisque les courbes  $J$ -holomorphes pour la structure presque complexe apparaissant dans le lemme sont vraisemblablement fort compliquées quand la partition de l'unité  $\mathcal{F}$  est compliquée. Toutefois, dans la prochaine sous-section, nous utilisons les submersions symplectiques afin d'identifier des conditions suffisantes qui permettent de contourner cet obstacle.

### 2.4.2. Recouvrements confinés selon une submersion symplectique

Les résultats de cette sous-section sont toutes des déclinaisons d'une même idée. Nous allons étudier des recouvrements ouverts  $\mathcal{U}$  sur  $(M^{2n}, \omega)$  qui sont suffisamment « tassés » et « réguliers » afin d'obtenir une sorte d'analogue de l'estimé des enceintes confinées (théorème 2.3.15). Nous utiliserons des submersions symplectiques justement afin de définir et de quantifier le degré de « tassement » et de « régularité » des recouvrements. Voici une première réalisation de cette idée.

**Définition 2.4.5.** Soient  $(M^{2n}, \omega_M)$ ,  $(F^{2m}, \omega_F)$  et  $(P^2, \omega_P)$  des variétés symplectiques fermées et  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Le recouvrement  $\mathcal{U}$  est  $(P, F)$ -régulier s'il existe une variété symplectique fermée  $(L^{2(m+1)}, \omega_L)$  et des submersions symplectiques  $g : (L, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  et  $f : (L, \omega_L) \rightarrow (P, \omega_P)$  tels que les fibres de  $f$  sont symplectomorphes à  $(F, \omega_F)$  et le recouvrement  $f(g^{-1}\mathcal{U})$  de  $P$  formé par les images par  $f$  des composantes connexes des ouverts  $g^{-1}(U_i)$  raffine un certain recouvrement par des disques fermés plongés  $\mathcal{V}$  et si de plus, quand  $P = S^2$ ,  $\mathcal{V}$  admet un point fortement confiné. De plus, pour  $c > 0$ , le recouvrement  $\mathcal{U}$  est dit  $c$ -tassé si  $\omega_P(P) \leq c$ .

**Lemme 2.4.6.** Soient  $(M^{2n}, \omega_M)$  et  $(F^{2m}, \omega_F)$  des variétés symplectiques fermées avec  $F$  (symplectiquement) asphérique,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement  $(S^2, F)$ -régulier  $c$ -tassé et  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Alors

$$pb(\mathcal{F}) \cdot c \geq \frac{1}{C'(m+1)}$$

où  $C'(m+1)$  dénote la constante mentionnée dans le lemme 2.4.2.

*Démonstration du lemme 2.4.6 :* Par hypothèse, il existe des submersions symplectiques  $f : (L^{2(m+1)}, \omega_L) \rightarrow (S^2, \omega_S)$  et  $g : (L^{2(m+1)}, \omega_L) \rightarrow (M, \omega_M)$  telles que  $\omega_S(S) \leq c$  et le recouvrement  $f(g^{-1}\mathcal{U})$  de  $S^2$  raffine un recouvrement par des disques fermés plongés  $\mathcal{V}$  qui admet un point confiné  $x$ . En raison de la proposition 2.2.1, nous avons  $P_{g^*\mathcal{F}} = g^*P_{\mathcal{F}}$ . Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $(L, \omega_L) = (M, \omega_M)$  et que  $g = id$ , de sorte que  $n = m + 1$ . L'exemple 1.2.7 établit alors que  $(M, \omega_M)$  est symplectomorphe au produit  $(S \times F, \omega_S \oplus \omega_F)$ , de sorte que nous pouvons supposer  $f = p_{S^2}$ .

Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $\lambda := \epsilon c < 1$ . Considérons une structure presque complexe compatible  $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$  comme dans le lemme 2.4.2. À des fins ultérieures, nous allons modifier  $J$  de la façon suivante. Puisque  $x \in S^2$  est confiné pour  $\mathcal{V}$ , il existe  $y \in S^2 \setminus V_x$  ; considérons un petit ouvert  $Op y \subset S^2$  disjoint de  $V_x$ . Puisque

l'espace  $\mathcal{J}(M, \omega)$  est contractile, nous pouvons altérer  $J$  dans  $(Op y) \times F$  pour obtenir une structure presque complexe compatible (que nous noterons encore  $J$ ) qui coïncide avec une structure produit  $J_1 \oplus J_2 \in \mathcal{J}(S^2, \omega_S) \oplus \mathcal{J}(F, \omega_F)$  près de  $\{y\} \times F$ . Puisque  $J$  est inchangée dans  $(Op V_x) \times F$ , alors

$$P_{u^*\mathcal{F}}(x) \leq C'(n) (u^*P_{\mathcal{F}})(x) + \epsilon$$

pour toute  $J$ -courbe  $u : (S^2, j) \rightarrow (M, J)$  et  $x \in \text{Im}(u) \cap [(Op V_x) \times F]$ .

Puisque  $(F, \omega_F)$  est symplectiquement asphérique, le théorème 0.1.4.1 implique qu'il existe une courbe  $J$ -holomorphe plongée  $u : (S^2, j) \rightarrow (M, \omega_M)$  qui représente la classe  $[S^2 \times \{f_0\}] \in H_2(S^2 \times F; \mathbb{Z})$ . Ce qui précède implique donc

$$\frac{1}{C'(n)} (\|P_{u^*\mathcal{F}}\|_{C^0} \cdot c - \lambda) \leq \|P_{\mathcal{F}}\|_{C^0} \cdot c$$

où les normes uniformes sont prises sur  $u^{-1}((Op V_x) \times F)$  et  $(Op V_x) \times F$ . Soulignons que les images des  $J$ -courbes sont des sous-variétés symplectiques, de sorte que la structure symplectique sur le domaine de  $u$  est tout simplement  $u^*\omega_M$ . Puisque l'inégalité est vraie pour tout  $\lambda < 1$ , il nous suffit de montrer que  $\|P_{u^*\mathcal{F}}\|_{C^0} \cdot c \geq 1$ .

Observons que  $u^*\mathcal{F} \prec u^{-1}f^{-1}\mathcal{V}$ . Compte tenu du théorème 2.3.15, du fait qu'une  $J$ -courbe a partout aire positive et du fait que  $\int_{S^2} u^*\omega_M = \int_{S^2} \omega_S \leq c$ , il nous suffit de montrer qu'il existe un recouvrement par des disques fermés plongés  $\mathcal{V}'$  sur  $S^2$  qui est raffiné par  $u^{-1}f^{-1}\mathcal{V}$  et qui admet un point fortement confiné dont l'enceinte est contenue dans  $u^{-1}((Op V_x) \times F)$ .

Par hypothèse,  $x \in S^2$  est fortement confiné pour  $\mathcal{V}$ . Puisque le produit d'intersection  $[S^2 \times \{f_0\}] \cdot [\{s_0\} \times F] = 1$ , pour tout  $p \in S^2$ , l'ensemble  $u^{-1}f^{-1}(p)$  n'est pas vide. Par construction,  $F_y = \{y\} \times F$  est une sous-variété  $J$ -pseudocomplexe de dimension complémentaire à  $\text{Im}(u)$ . Par positivité d'intersection des  $J$ -sous-variétés de dimensions complémentaires et du fait que  $[S^2] \cdot [F] = 1$ , nous en déduisons que  $F_y$  et  $\text{Im}(u)$  ne s'intersecte qu'une seule fois :  $u^{-1}f^{-1}(y) = \{y'\}$ . L'application  $g := f \circ u$  satisfait donc les hypothèses du lemme C.0.1, de sorte qu'il existe un recouvrement par des disques  $\mathcal{V}'$  raffiné par  $g^{-1}\mathcal{V}$  et  $x' \in g^{-1}(x)$  qui est fortement confiné pour  $\mathcal{V}'$ .

□

Voici un analogue en dimensions supérieures du théorème 2.3.14 :

**Théorème 2.4.7** (Inégalités du crochet de Poisson). *Soient  $(P, \omega_P)$  une surface symplectique fermée et  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement formé de disques fermés*

plongés localisé en  $m$  points fortement confinés. Soient  $(M^{2n}, \omega_M)$  une variété symplectique fermée,  $f : (M, \omega_M) \rightarrow (P, \omega_P)$  une submersion symplectique,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement ouvert de  $M$  qui raffine  $f^{-1}\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité. Supposons que la fibre type  $(F, \omega_F)$  de  $f$  soit symplectiquement asphérique. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_M[P_{\mathcal{F}}] \cdot \omega_P(\mathcal{V}) &\geq \frac{1}{C'(n)} \frac{\omega_P(FC_{\mathcal{V}})}{\omega_P(P)}, \\ \|P_{\mathcal{F}}\|_{C^0} \cdot \omega_P(P) &\geq \frac{m}{C'(n)} \text{ et} \\ \|P_{\mathcal{F}}|_{f^{-1}(V_x)}\|_{C^0} \cdot \omega_P(V_x) &\geq \frac{1}{C'(n)} \quad \forall x \in FC_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

où  $C'(m)$  dénote la constante mentionnée dans le lemme 2.4.2.

*Démonstration* : Nous scindons la démonstration en quelques étapes qui imitent la démarche que nous avons suivie en dimension deux.

**Étape 1** : Nous réduisons le problème à l'étude de recouvrements précis.

Sans perte de généralité, supposons que  $\mathcal{U}$  est le recouvrement formé par les composantes connexes de  $f^{-1}(\mathcal{V})$ .

Si  $P = S^2$  et si  $x \in FC_{\mathcal{V}}$ , alors l'enceinte  $V_x$  est contenue dans un disque dont la frontière n'est contenue dans aucun  $V_i \in \mathcal{V}$ . Si  $P$  a genre  $g \geq 1$ , nous avons vu dans la §2.3.3 qu'il existe un revêtement symplectique  $r : (P', \omega_{P'}) \rightarrow (P, \omega_P)$  de degré suffisamment grand pour que le recouvrement  $\mathcal{V}'$  par des disques fermés plongés induits aient des enceintes contenues dans des disques dont la frontière n'est contenue dans aucun disque  $V' \in \mathcal{V}'$ . En considérant le produit fibré  $M' := P' \times_P M$ , nous obtenons un diagramme commutatif de submersions symplectiques

$$\begin{array}{ccc} (M', \omega_{M'}) & \xrightarrow{r'} & (M, \omega_M) \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ (P', \omega_{P'}) & \xrightarrow{r} & (P, \omega_P) \end{array}$$

qui permet de relever toutes les données à  $M'$ . Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les enceintes de  $\mathcal{V}$  sont contenues dans des disques minimaux confinés pour  $\mathcal{V}$ .

**Étape 2** : Nous tâchons d'obtenir un estimé local en nous inspirant des théorèmes 2.3.15 et 2.3.16.

Soit  $x \in FC_{\mathcal{V}}$  et  $D_x$  le disque minimal qui contient l'enceinte  $V_x$ . Nous allons chercher une borne inférieure à la quantité

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \leq P_{\mathcal{F}}$$

là où elle peut être non nulle, à savoir dans  $f^{-1}(V_x) \subset f^{-1}(D_x)$ . Remplaçons  $\mathcal{V}$  par  $\mathcal{W} := (\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_x) \cup \{D_x\}$ . Considérons la fonction

$$f_x := \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} f_j$$

et la partition de l'unité  $\mathcal{F}_x := (\mathcal{F} \setminus \{f_j \mid V_j \in \mathcal{V}_x\}) \cup \{f_x\}$ . Notons que  $\mathcal{F}_x \prec f^{-1}\mathcal{W}$ .

Considérons un voisinage  $D'_x = Op D_x$  difféomorphe à un disque. Puisque  $f$  est une submersion symplectique, nous avons un difféomorphisme symplectique  $(f^{-1}(D'_x), \omega_M) \cong (D'_x \times F, \omega_P \oplus \omega_F)$ , de sorte que nous pouvons compatifier la situation pour nous ramener dans  $(S_x^2 \times F, \omega_S \oplus \omega_F)$ , où  $S_x^2 := \overline{D'_x} / \partial D'_x$ . Évidemment, les données  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{F}_x$ , etc. situées près de la frontière  $\partial D'_x \times F$  ne passent pas au quotient, mais à l'instar de la démonstration précédente et ultimement en raison du fait que le théorème 2.3.16 est un estimé local, il nous suffit de préserver les données dans  $D_x \times F$ . Nous pouvons donc modifier les données en dehors de  $Op(D_x \times F) \subset S_x^2 \times F$  comme bon nous semble.

À l'instar de ce que nous avons fait dans la démonstration du théorème 0.2.1, nous pouvons multiplier la forme symplectique  $\omega_P$  sur  $S_x^2$  par une fonction positive de façon à ce que la nouvelle forme symplectique sur  $S_x^2$  confère une aire aussi petite que désirée à l'ensemble  $S_x^2 \setminus V_x$ . Puisque  $f_x$  a support dans  $f^{-1}(V_x)$ , chaque crochet  $\{f_i, f_x\}$  est supporté dans  $f^{-1}(V_x)$ , de sorte que le changement de forme symplectique sur  $S_x^2$  n'altère pas la valeur de ces crochets. Ainsi, pour tout  $\delta > 0$ , nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\omega_P(S_x^2) = \omega_P(V_x) + \delta$ .

Notons  $y \in S_x^2$  le « point à l'infini ». Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, considérons la structure presque complexe compatible  $J$  sur  $S_x^2 \times F$  donnée par le lemme 2.4.2 appliquée à la collection  $\mathcal{F}_x$  (cela importe) et modifions-la afin qu'elle coïncide avec une structure produit près de  $J_S \oplus J_F$  près de  $\{y\} \times F$ . La même démarche que celle suivie dans la démonstration du lemme 2.4.6 nous permet de déduire que la variété  $S_x^2 \times F$  est feuilletée par des  $J$ -courbes  $u : (S^2, j) \rightarrow (S^2 \times F, J)$  telles que  $P(u^*\mathcal{F}_x) \leq C'(n) u^*P(\mathcal{F}_x) + \epsilon$  sur le domaine des  $J$ -courbes, soit

$$\sum_{i=1}^N \left| \left\{ u^*f_i, \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} u^*f_j \right\} \right| \leq C'(n) \cdot \sum_{i=1}^N \left| u^* \left\{ f_i, \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} f_j \right\} \right| + \epsilon.$$

En vertu du lemme C.0.1, la partition  $u^*\mathcal{F}$  est subordonnée à un recouvrement par des disques fermés plongés qui admet un point fortement confiné  $x'$

dont l'enceinte est comprise dans  $u^{-1}f^{-1}(D_x)$ . Puisque  $u^*f^*f_x = 1$  en  $x'$ , nous déduisons de la preuve du théorème 2.3.16 que

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{S^2} \sum_{i=1}^N \left| \left\{ u^*f_i, \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} u^*f_j \right\} \right| u^*\omega_M \\ &\leq C'(n) \cdot \int_{S^2} u^* \left( \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \right) u^*\omega_M + \epsilon \\ &\leq C'(n) \cdot \max u^* \left( \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \right) \cdot \omega_P(D'_x) + \epsilon \end{aligned}$$

Puisque  $\delta$  et  $\epsilon$  sont arbitraires, nous en déduisons la troisième inégalité recherchée.

**Étape 3 :** Nous pouvons revenir à la variété  $M$  entière. La démarche ci-dessus a été établie que pour tout  $p \in f^{-1}(x) \subset f^{-1}(FC_{\mathcal{V}})$ , il existe une trivialisatoin du domaine  $f^{-1}(D_{f(p)})$  par des courbes holomorphes, c'est-à-dire un difféomorphisme

$$\Phi_p : D_{f(p)} \times F \rightarrow f^{-1}(D_{f(x)}) : (x, q) \mapsto u_q(x)$$

où  $u_q$  dénote l'unique  $J$ -courbe telle que  $u_q(y) = q \in F$ .<sup>6</sup> Ainsi, nous calculons

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_{f(p)}\}} |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n &= \int_{f^{-1}(D_{f(p)})} \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_{f(p)}\}} |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n \\ &= \int_{q \in F} \int_{D_{f(p)}} u_q^* \left( \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} |\{f_i, f_j\}| \right) u_q^*\omega_M dq \\ &\geq \frac{1}{C'(n)} \int_{q \in F} \left[ \int_{S^2} \sum_{i=1}^N \left| \left\{ u_q^*f_i, \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_x\}} u_q^*f_j \right\} \right| u_q^*\omega_M - \epsilon \right] dq \\ &\geq \frac{\text{Vol}(F, \omega_F) (1 - \epsilon)}{C'(n)}. \end{aligned}$$

Notons que ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ . Considérons une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $M$  et posons  $A = f^{-1}(FC_{\mathcal{V}})$ , tantôt pensé comme espace auxiliaire de paramètres  $a \in A$ , tantôt pensé comme sous-espace de  $M$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\mu(A)}{C'(n)} &= \frac{1}{C'(n)} \int_A 1 d\mu_a \leq \frac{1}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \int_A \left( \int_M \sum_{i=1}^N \sum_{\{j: V_j \in \mathcal{V}_{f(a)}\}} |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n \right) d\mu_a \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \int_A \left( \int_M \sum_{i,j=1}^N \chi_{V_j}(f(a)) |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n \right) d\mu_a \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \sum_{i,j=1}^N \int_A \chi_{V_j}(f(a)) d\mu_a \cdot \int_M |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n \end{aligned}$$

6. En raison de la positivité d'intersection, une  $J$ -courbe n'intersecte  $F_y$  qu'une seule fois.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \sum_{i,j=1}^N \mu(f^{-1}(V_j) \cap A) \cdot \int_M |\{f_i, f_j\}| \omega_M^n \\
&\leq \frac{1}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \max_{j=1, \dots, N} \mu(f^{-1}(V_j) \cap A) \cdot \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_M^n.
\end{aligned}$$

Pour  $\mu(X) = (\text{Vol}(M, \omega_M))^{-1} \text{Vol}(X, \omega_M)$ , nous en déduisons

$$\frac{\text{Vol}(A, \omega_M)}{C'(n)} \leq \max_{j=1, \dots, N} \frac{\text{Vol}(f^{-1}(V_j) \cap A, \omega_M)}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_M^n.$$

En décomposant tout domaine de  $M$  en ensembles trivialisés par la submersion symplectique  $f$ , nous déduisons  $\text{Vol}(f^{-1}(X), \omega_M) = \omega_P(X) \text{Vol}(F, \omega_F)$ , d'où

$$\frac{\omega_P(FC_{\mathcal{V}}) \text{Vol}(F, \omega_F)}{C'(n)} \leq \max_{j=1, \dots, N} \omega_P(V_j \cap FC_{\mathcal{V}}) \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_M^n$$

ce qui implique aisément la première inégalité recherchée.

Supposons que  $\mathcal{V}$  est localisé aux points confinés  $x_1, \dots, x_m \subset A$ . Pour la mesure  $\mu(X) = [m \cdot \text{Vol}(F, \omega_F)]^{-1} \sum_{j=1}^m (\delta_{x_j} \otimes \omega_F^{n-1})(X)$ , nous obtenons

$$\frac{m}{C'(n)} \leq \max_{j=1, \dots, N} \frac{\#\{k : x_k \in V_j\}}{\text{Vol}(F, \omega_F)} \int_M P_{\mathcal{F}} \omega_M^n.$$

Puisque  $\mathcal{V}$  est localisé aux points  $x_k$ , le maximum ci-dessus vaut 1 et la deuxième inégalité recherchée découle aisément. □

**Corollaire 2.4.8.** *Dans le théorème précédent, si  $(P, \omega_P)$  est une surface de genre  $g \geq 1$ , alors  $\mathbb{E}_M[P_{\mathcal{F}}] \cdot \omega_P(\mathcal{V}) \geq C'(n)^{-1}$ .*

*Démonstration :* Comme nous l'avons déjà noté lors de la démonstration du théorème 2.3.8, en passant à un revêtement de  $(P, \omega_P)$  de degré suffisamment grand et en considérant le produit fibré associé à ce revêtement, tous les points du relèvement de  $\mathcal{V}$  sont fortement confinés, mais  $\mathbb{E}_M[P_{\mathcal{F}}] \cdot \omega_P(\mathcal{V})$  reste inchangé. □

Nous pouvons adapter notre stratégie afin d'étudier les « petits » recouvrements d'une variété symplectique quelconque, voire plus généralement les recouvrements « confinés ». La définition suivante vise à formaliser cette idée. Nous notons  $B(c)$  la boule standard d'aire  $c$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $H(c) = [0, \sqrt{c}]^2$ . Pour  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) \in (0, \infty)^n$ , nous posons  $K(\vec{c}) = B(c_1) \times H(c_2) \times \dots \times H(c_n) \subset \mathbb{R}^{2n}$ .

**Définition 2.4.9.** *Soient  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Soit  $\lambda \in (0, 1)$ . Une **boîte de confinement de  $\mathcal{U}$  de taille  $c$**  et*



**d'étanchéité**  $\lambda$  est la donnée d'un plongement symplectique

$$\phi : (K(c, c_2, \dots, c_n), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega)$$

tel que le recouvrement rappelé  $\phi^{-1}\mathcal{U}$  a les propriétés suivantes :

- (1) le recouvrement  $p_{B(c)}\phi^{-1}\mathcal{U}$  de  $B(c)$  raffine un recouvrement  $\mathcal{V}$  formé de disques fermés plongés de  $\mathbb{R}^2$ , où  $p_{B(c)} : K(\vec{c}) \rightarrow B(c)$  dénote la projection canonique ;
- (2) il existe  $\lambda' > 0$  tel que tout ouvert de  $\phi^{-1}\mathcal{U}$  qui intersecte  $(1 - \lambda)K(\vec{c})$  n'intersecte pas le complément de  $(1 - \lambda')K(\vec{c})$ .

Nous notons  $\omega(\mathcal{U}, \phi) := \inf \{ \omega_0(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \supset p_{B(c)}\phi^{-1}\mathcal{U} \}$ .

**Lemme 2.4.10.** *Étant donné une boîte de confinement de  $\mathcal{U}$  de taille  $c$  et d'étanchéité  $\lambda$ , si  $\mathcal{V}$  est un recouvrement par des disques planaires raffiné par  $p_{B(c)}\phi^{-1}\mathcal{U}$ , alors  $FC_{\mathcal{V}} \supset (1 - \lambda)B(c)$ , de sorte que  $\omega_0(FC_{\mathcal{V}}) \geq (1 - \lambda)c$ .*

*Démonstration :* Soit  $x \in (1 - \lambda)B(c)$ . Son enceinte  $V_x \subset \mathbb{R}^2$  est la réunion de disques qui n'intersectent pas le complémentaire de  $B(c)$  dans  $\mathbb{R}^2$  ; puisque  $V_x$  est connexe, il existe une plus grande composante  $C$  de  $\partial V_x$  dont l'intérieur contient toutes les autres composantes. Aucun disque  $V_j \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_x$  ne contient tout  $C$ , puisque le contraire signifierait que  $x \in V_j$ , donc que  $V_j \in \mathcal{V}_x$ . Donc  $x$  est fortement confiné pour  $\mathcal{V}$ . □

**Lemme 2.4.11** (Inégalité de la boîte de confinement). *Soient  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^N$  un recouvrement ouvert de  $M$ ,  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité et  $\phi$  une boîte de confinement de  $\mathcal{U}$  de taille  $c$  et d'étanchéité  $\lambda$ . Alors*

$$pb(\mathcal{F}) \cdot \omega(\mathcal{U}, \phi) \geq \frac{(1 - \lambda)^n}{C'(n)}.$$

*Démonstration :* Si  $\phi : K(\vec{c}) \rightarrow M$ , nous pouvons supposer que  $M = K(\vec{c})$ . Soit  $x \in (1 - \lambda)M$  ; posons  $J = \{j : U_j \in \mathcal{U}_x\}$ . Considérons les fonctions

$$f_x := \sum_{j \in J} f_j \quad \text{et} \quad P'_{\mathcal{F}} := \sum_{i \notin J} |\{f_i, f_x\}|.$$

Observons qu'elles sont supportées dans  $U_x \subset p_{B(c)}^{-1}(V_{p_{B(c)}(x)}) \cap (1 - \lambda')M$ . Nous pouvons donc changer les données dans un mince voisinage de  $\partial M$  sans altérer les fonctions  $f_x$  et  $P'_{\mathcal{F}}$ . Nous pouvons alors compactifier la situation pour nous ramener au cas  $M = S^2(c) \times T^2(c_2) \times \dots \times T^2(c_n)$ . Nous appliquons le lemme 2.4.2 à la collection  $\mathcal{F}' = \{f_x\} \cup \{f_i\}_{i \notin J}$  afin d'obtenir une structure presque complexe

compatible  $J$ . En vertu du théorème 0.1.4.1, il existe une  $J$ -courbe qui passe par  $x$  et qui représente la classe  $[S^2] \in H_2(M; \mathbb{Z})$ . Nous déduisons du lemme précédent et du lemme C.0.1 que  $u^{-1}p_{S^2(c)}\mathcal{V}$  est fortement confiné en un point  $x' \in u^{-1}(x)$ . Puisque  $(u^*f_x)(x') = 1$ , nous déduisons du théorème 2.3.16 que  $\int_{S^2} u^*(P'_x\omega_0) \geq 1/C'(n)$ .

Nous pouvons moyenner cet estimé sur l'ensemble  $(1 - \lambda)M$  par rapport à la mesure déterminée par  $\omega_0$  en suivant le même calcul que celui présenté au cours de la démonstration du théorème 2.4.7 ; nous obtenons ainsi l'inégalité annoncée.  $\square$

**Corollaire 2.4.12.** *Le théorème 0.3.5 est vrai : soient  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique (pas forcément fermée) et  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$  (pas forcément compatible). Il existe  $\delta = \delta(n, M, \omega, g) > 0$  et  $\alpha = \alpha(n, M, \omega, g) > 0$  telles que pour tout recouvrement fini  $\mathcal{U}$  par des ouverts de diamètre  $\epsilon < \delta$ , alors*

$$pb(\mathcal{U}) \cdot \epsilon^2 \geq \frac{\alpha}{C'(n)}.$$

*Démonstration :* Pour  $c > 0$  assez petit, il existe un plongement symplectique  $\phi : (K(c, \dots, c), \omega_0) \hookrightarrow (M, \omega)$  ; notons  $U$  son image et  $\psi = \phi^{-1} : (U, \omega) \rightarrow (K(c, \dots, c), \omega_0)$  la carte de Darboux correspondante. Étant donné  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ , nous avons  $pb(\mathcal{U}) \geq \|\phi^*\mathcal{F}\|_{C^0}$ . Notons  $g_0$  la structure riemannienne compatible usuelle sur  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Puisque l'application  $\psi$  est lisse sur un compact, elle admet une constante de Lipschitz  $L > 0$  finie, de sorte que

$$\|(T\psi)(v)\|_{g_0} \leq L\|v\|_g \text{ pour tout vecteur } v \in T_xU, \text{ pour tout } x \in U.$$

Pour  $\epsilon > 0$ , toute boule géodésique contenue dans  $U$  de diamètre  $s < \epsilon$  est donc envoyée dans une boule de  $\mathbb{R}^{2n}$  de diamètre  $Ls < L\epsilon$ , donc de capacité (cylindrique)  $L^2s^2 < L^2\epsilon^2$ , d'où  $\omega(\mathcal{U}, \phi) < L^2\epsilon^2$ .

L'application  $id : K(c, \dots, c) \rightarrow K(c, \dots, c)$  est une boîte de confinement de taille  $c$  et d'étanchéité  $d/\sqrt{c}$  pour tout recouvrement de  $K(c, \dots, c)$  par des boules géodésiques de diamètre inférieur à  $d < \sqrt{c}$ . En effet, toute boule géodésique de diamètre  $d$  qui intersecte  $(1 - d/\sqrt{c})K(c, \dots, c)$  n'intersecte pas  $\partial K(c, \dots, c)$ . Ainsi, pour  $d < \sqrt{c} := \delta_0$ , nous déduisons du lemme 2.4.11

$$pb(\mathcal{U}) \cdot \epsilon^2 \geq \|\phi^*\mathcal{F}\|_{C^0} \cdot \epsilon^2 \geq \frac{(1 - L\epsilon/\sqrt{c})^n}{L^2C'(n)} \text{ dès que } \epsilon < \sqrt{c}/L.$$

$\square$

**Remarque 2.4.13.** *Comme le montre l'argument présenté dans [BT, BLT], pour tout  $v > 0$ , il existe  $c$  est suffisamment petit et  $\phi : K(c, \dots, c) \rightarrow M$  tels que  $L < 1 + v$ . Ainsi, les recouvrements par de très petites boules satisfont essentiellement  $\text{pb}(\mathcal{U})\epsilon^2 \geq C'(n)^{-1}$ .*

**Remarque 2.4.14.** *Des notions de confinement plus fortes sont possibles. Par exemple, nous pourrions plutôt considérer les plongements symplectiques de boules  $\phi : (B^{2n}(c), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$  : puisque  $B^{2n}(c) \subset K(c, \dots, c)$ , nous pouvons considérer la même exigence sur les images de  $p_{B^{2n}(c)}\phi^{-1}\mathcal{U}$  et la même notion d'étanchéité  $\lambda$ . La démonstration du lemme 2.4.11 repose sur un argument essentiellement local que nous pouvons utiliser à nouveau : dans la procédure de moyennage, nous intégrons plutôt sur une boule  $(1-\lambda)B^{2n}(c)$ . Exactement le même estimé s'ensuit.*

*Rappelons que  $(PC^n, \omega_{FS})$  est obtenu de  $(B^{2n}(c), \omega_0)$  en quotientant la frontière de la boule le long de la fibration de Hopf ; ici  $c = \omega_{FS}(PC^1)$ . Ainsi, nous pouvons déduire des estimés sur le pb de certains recouvrements de  $PC^n$  qui sont admettent  $(B^{2n}(c^-), \omega_0)$  comme boule de confinement, même dans le cas de recouvrements constitués d'ouverts passablement « gros ».*

## 2.5. CONCLUSION

Nous concluons ce chapitre en discutant de deux idées que nous souhaiterions explorer dans le futur.

La première idée émane d'une observation simple : pour  $i = 1, \dots, n$ , soient  $(S_i, \omega_i)$  une surface fermée,  $\mathcal{U}_i$  un recouvrement de  $S_i$  par des disques disjoignables et  $\mathcal{F}_i \prec \mathcal{U}_i$ . Nous pouvons considérer la variété produit  $(M, \omega) = (\prod_{i=1}^n S_i, \oplus_{i=1}^n \omega_i)$ , le recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_1 \times \dots \times U_n\}_{U_i \in \mathcal{U}_i}$  et  $\mathcal{F} = \{f_1 \times \dots \times f_n\}_{f_i \in \mathcal{F}_i}$ . Puisque chaque  $U \in \mathcal{U}_i$  contient une boule symplectique plongée de capacité  $\min_i e_H(\mathcal{U}_i)$ , l'inégalité capacité-énergie A.3.5 implique  $e_H(\mathcal{U}) \geq \min_i e_H(\mathcal{U}_i)$ , tandis que le corollaire 2.2.4 implique  $e_H(\mathcal{U}) \leq \min_i e_H(\mathcal{U}_i)$ , d'où l'égalité. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{f, f' \in \mathcal{F}} |\{f, f'\}(x_1, \dots, x_n)| \\ &= \sum_{f, f' \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{f f'}{f_i f'_i} \right) (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) |\{f_i, f'_i\}(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{f_i, f'_i} |\{f_i, f'_i\}(x_i)| = \sum_{i=1}^n P_{\mathcal{F}_i}(x_i). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|P_{\mathcal{F}}\|_{C^0} = \sum_{i=1}^n \|P_{\mathcal{F}_i}\|_{C^0}$ . Le théorème 2.3.1 implique alors

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n pb(\mathcal{F}_i)e_H(\mathcal{U}_i) \leq pb(\mathcal{F}) \max_i e_H(\mathcal{U}_i) \Rightarrow \frac{n}{2} \frac{\min_i e_H(\mathcal{U}_i)}{\max_i e_H(\mathcal{U}_i)} \leq pb(\mathcal{F})e_H(\mathcal{U}).$$

Compte tenu du théorème 2.4.7, cette borne inférieure n'est généralement pas optimale, mais la proportionnalité en  $n$  qu'elle exhibe est intéressante : c'est comme si chaque « direction symplectique » le long de laquelle un recouvrement est « tassé » contribuait une « unité » à la borne inférieure sur  $pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$ . Autrement dit, si un recouvrement  $\mathcal{U}$  est « tassé » le long de  $k$  « directions symplectiques » différentes, pouvons-nous anticiper avoir  $kc(n) \leq pb(\mathcal{U})e_H(\mathcal{U})$  ?

Afin de préciser un peu cette idée, supposons que nous ayons  $k$  submersions symplectiques  $f_i : (M, \omega) \rightarrow (S_i, \omega_i)$  dont les feuilletages verticaux sont « suffisamment transverses ». Pour une structure presque complexe telle que fournie par le lemme 2.4.2, le théorème 0.1.4.1 pourrait fournir  $k$  feuilletages de  $J$ -courbes ; si ces feuilletages s'avéraient aussi « suffisamment transverses » les uns aux autres, nous pourrions raffiner la démonstration lemme 2.4.2 afin que le  $pb$  de la restriction estime mieux la restriction du  $pb$ . Nos méthodes parviendraient alors peut-être à faire ressortir une certaine proportionnalité en  $k$ .

La seconde idée, beaucoup plus spéculative, vise à amener la conjecture du crochet de Poisson dans la sphère d'applicabilité de nos méthodes. Une interprétation géométrique bien connue de l'énergie de disjonction de Hofer (consulter par exemple [LM1]) va comme suit : une isotopie hamiltonienne d'énergie  $E$  générée par un hamiltonien  $H(x, t)$  détermine un plongement

$$M \hookrightarrow (M \times [0, 1] \times \mathbb{R}, \omega \oplus (dt \wedge de)) : (x, t) \mapsto (x, t, -H(t, x))$$

dont la projection sur l'espace « temps-énergie »  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  a aire  $E$ . Notre idée est davantage une question : étant donné une variété symplectique fermée  $(M, \omega)$ ,  $\mathcal{U}$  un recouvrement formé d'ouverts disjoignables et  $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$  une partition de l'unité, est-il possible à partir de ces données de construire une variété symplectique  $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ , un recouvrement  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\tilde{M}$ , une partition de l'unité  $\tilde{\mathcal{F}} \prec \tilde{\mathcal{U}}$  et une submersion symplectique appropriée  $f : (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow (S, \omega_S)$  vers une surface « temps-énergie »  $(S, \omega_S)$  tels que nous ayons  $pb(\tilde{\mathcal{F}}) \leq C(M, \omega) pb(\mathcal{F})$  et  $\omega_S(f(\tilde{\mathcal{U}})) \leq C'(M, \omega) e_H(\mathcal{U})$  ? Les méthodes de cette thèse pourraient alors être appliquées afin de déduire la conjecture du crochet de Poisson...

## Bibliographie

---

- [Ar1] V. I. Arnold, Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965), Groupe 1, 3719-3722.
- [Ar2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York, Springer, Graduate Texts in Mathematics, **60**, deuxième édition, 1989.
- [AL] M. Audin et J. Lafontaine (éds). *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Boston, Birkhäuser, Progress in Mathematics, **117**, 1994.
- [BaK] G. Bande et D. Kotschick. *The geometry of symplectic pairs*. *Trans. Am. Math. Soc.*, **358** (2005), no 4, 1643-1655.
- [BW] S. Bates et A. Weinstein. *Lectures on the Geometry of Quantization*, American Mathematical Society, Berkeley Mathematics, **8**, 1995.
- [Bi1] G. Birkhoff. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 14–22.
- [Bi2] G. Birkhoff. An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.*, **47** (1925), 297-311.
- [Bö] K. Böröczky Jr. *Finite Packing and Covering*, Cambridge, Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics, **154**, 2004.
- [BN] M Brown et W. D. Neumann. Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem. *Michigan Math. J.*, **24**, Issue 1 (1977), 21-31.
- [B] L. Buhovski. The 2/3-convergence rate for the Poisson bracket. *Geom. Funct. Anal.*, **21** (2010), no 6, 1620-1649.
- [BLT] L. Buhovski, A. Logunov and S. Tanny. Poisson Brackets of Partitions of Unity on Surfaces. Preprint arXiv :1705.02513v2.
- [BT] L. Buhovski and S. Tanny. Poisson Brackets of Partitions of Unity on Surfaces. Preprint arXiv :1705.02513v1.
- [Bu] H. Bursztyn. « A brief introduction to Dirac manifolds » dans A. Cardona, I. Contreras et A. F. Reyes-Lega (éds). *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*. Proceedings of the 2009 Villa de Leyva Summer School, Cambridge University Press, 2013.

- [CdSW] A. Cannas da Silva et A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. American Mathematical Society, Berkeley Mathematics, **10**, 2000.
- [CaV] F. Cardin et C. Viterbo. Commuting Hamiltonians and Hamilton-Jacobi multi-time equations. *Duke Math. J.*, **144** (2008), no 2, 235-284.
- [CHLS] K. Cieliebak, H. Hofer, J. Latschev et F. Schlenk. « Quantitative symplectic geometry » dans B. Hasselblatt, *Dynamics, Ergodic Theory, and Geometry : Dedicated to Anatole Katok*, Cambridge, Cambridge University Press, Mathematical Sciences Research Institute Publications, **54**, 2007.
- [CZ] C. Conley et E. Zehnder. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold. *Invent. Math.*, **73** (1983), 33-49.
- [DaM] B. Dacorogna et J. Moser. On a partial differential equation involving the Jacobian determinant. *Annales de l'I.H.P., section C*, **7** (1990), no 1, 1-26.
- [DRI1] M. Datta et M. Rabiul Islam. Submersions on open symplectic manifolds. *Topology and its Applications*, **156** (2009), 1801-1806.
- [DRI2] M. Datta et M. Rabiul Islam. Smooth maps of a foliated manifold in a symplectic manifold. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, **119** (2009), no 3, 333-343.
- [EH] I. Ekeland et H. Hofer. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. *Séminaire équations aux dérivées partielles*, École Polytechnique, **23** (1988).
- [E1] Y. Eliashberg. Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations. *Syktyokar University Preprint*, 1979.
- [E2] Y. Eliashberg. Rigidity of symplectic contact structures. *Prépublication, 7e conférence internationale de Léningrad en topologie*. (1982), en russe.
- [E3] Y. Eliashberg. A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology. *Func. Anal. and Appl.*, **21** (1987), 65-72.
- [EG] Y. Eliashberg et M. Gromov. « Convex symplectic manifolds » dans E. Bedford et al. (éds), *Several Complex Variables and Complex Geometry*, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **52**, Part 2, 1991, pp. 135-170.
- [EMi] Y. Eliashberg et N. Mishachev. *Introduction to the h-Principles*. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, **48**, 2002.
- [EnPo1] M. Entov et L. Polterovich. Quasi-states and symplectic intersections. *Comment. Math. Helv.*, **81** (2006), no 1, 75-99.
- [EnPo2] M. Entov et L. Polterovich. «  $C^0$ -rigidity of Poisson brackets » dans A. Fathi, Y.-G. Oh et C. Viterbo (éds), *Symplectic Topology and Measure Preserving Dynamical Systems* (Snowbird, Utah, 2007), Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, **512**, 2010.

- [EnPo3] M. Entov et L. Polterovich.  $C^0$ -rigidity of double Poisson brackets. *International Mathematics Research Notices*, **2009** (2009), no 6, 1134–1158.
- [EnPoZ] M. Entov, L. Polterovich et F. Zapolsky. Quasi-morphisms and the Poisson bracket. *Pure Appl. Math. Q.*, **3** (2007), no 4, 1037-1055.
- [Ep] D. B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.*, **115** (1966), 83-107.
- [Fl] A. Floer. Cuplength estimates on lagrangian intersections. *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989), no 4, 335–356.
- [FW] B. Fortune et A. Weinstein. A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces. *Bull. Am. Math. Soc.*, **12 :1** (1985), 128-130.
- [Gi1] J. W. Gibbs. A method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces. *Transactions of the Connecticut Academy*, **II** (1873), 382-404.
- [Gi2] J. W. Gibbs. *Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*. New York : Charles Scribner’s sons, 1902.
- [G1] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones Mathematicae*, **82** (1985), 307-347.
- [G2] M. Gromov. *Partial Differential Relations*. Berlin, Springer-Verlag, 1986.
- [He] D. Hermann. Non-equivalence of symplectic capacities for open sets with restricted contact type boundary. Prépublication d’Orsay numéro 32 (29/4/1998)
- [Hi] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. New York, Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, **33**, 1976.
- [H] H. Hofer. On the topological properties of symplectic maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, **115** (1990), 25-38.
- [HZ] H. Hofer et E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser Verlag, Modern Birkhäuser Classics, 1994 (2010).
- [Hu] V. Humilière. Hamiltonian pseudo-representations. *Comment. Math. Helv.*, **84** (2009), no 3, 571-585.
- [HuLS] V. Humilière, R. Leclercq et S. Seyfaddini. Coisotropic rigidity and  $C^0$ -symplectic geometry. *Duke Math. J.*, **164** (2015), no 4, 767-799.
- [HuLeS] V. Humilière, F. Le Roux et S. Seyfaddini. Towards a dynamical interpretation of Hamiltonian spectral invariants on surfaces. *Geom. Topo.*, **20** (2016), 2253-2334.
- [Hum] C. Hummel. *Gromov’s Compactness Theorem for Pseudo-holomorphic Curves*, Springer Basel AG, Progress in Mathematics, **151**, 1997.
- [I] S. Ishikawa. Spectral invariants of distance functions. *Journal of Topology and Analysis*, **8** (2016), no 4, 655-676.

- [KO] A. Kapustin et D. Orlov. Lectures on mirror symmetry, derived categories, and  $D$ -branes. *Russian Math. Surveys*, **59** (2004), no 5, 907-940.
- [Ka] A. Katok. Ergodic perturbations of degenerate integrable Hamiltonian systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **37** (1973), 539–576.
- [L1] F. Lalonde. Isotopy of symplectic balls, Gromov’s radius and the structure of ruled symplectic 4-manifolds. *Mathematische Annalen*, **300** (1994), 273-296.
- [L2] F. Lalonde. « J-holomorphic curves and symplectic invariants » dans J. Hurtubise et F. Lalonde (éds), *Gauge Theory and Symplectic Geometry*, Montréal, Springer Sciences + Business Media, NATO ASI Series, Series C, **488**, 1997.
- [LM1] F. Lalonde et D. McDuff. The geometry of symplectic energy. *Annals of Mathematics*, **141** (1995), 349-371.
- [LM2] F. Lalonde et D. McDuff. Hofer’s  $L^\infty$ -geometry : energy and stability of Hamiltonian flows I,II. *Invent. Math.*, **122** (1995), 1-33 , 35-69.
- [Li] P. Libermann. Problèmes d’équivalence et géométrie symplectique. IIIe rencontre de géométrie du Schnepfenried, 10-15 mai 1982, I. *Astérisque*, **107-108** (1983), 43-68.
- [MU] S. Mazur et S. Ulam. Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, Paris, **194** (1932), 946-948.
- [M] D. McDuff. Blow ups and symplectic embeddings in dimension 4. *Topology*, **30** (1991), No 3, 409-421.
- [MS1] D. McDuff et D. Salamon. *J-Holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Providence, American Mathematical Society, University Lecture Series, **7**, 1991 (1995).
- [MS2] D. McDuff et D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*, New York, Oxford University Press, Oxford Mathematical Monographs, deuxième édition, 2005.
- [N] L. Nachbin. Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, **228** (1949), 1549–1551.
- [O] Y.-G. Oh. « Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds » dans J. E. Marsden et T. S. Ratiu (éds), *The Breath of Symplectic and Poisson Geometry*, Boston, Birkhäuser, Progress in Mathematics, **232**, 2005.
- [Pa] J. Payette. The geometry of the Poisson bracket invariant on surfaces. Prépublication arXiv :1803.09741
- [P1] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I,II. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **7** (1881), 375-422 et **8** (1882), 251-296.



- [P2] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique célestes*, Paris, Gauthier-Villars et fils, 3 tomes, 1892-1899.
- [P3] H. Poincaré. Sur un théorème de géométrie. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, **33** (1912), 375-407.
- [Po1] L. Polterovich. *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*, Springer Basel AG, Lectures in Mathematics, 2001.
- [Po2] L. Polterovich. Quantum unsharpness and symplectic rigidity. *Lett. Math. Phys.*, **102** (2012), 245-264.
- [Po3] L. Polterovich. Symplectic geometry of quantum noise. *Commun. Math. Phys.*, **327** (2014), 481-519.
- [Po4] L. Polterovich. Symplectic rigidity and quantum mechanics. Article écrit à l'occasion du 7ECM Berlin 2016. Adresse URL : <https://sites.google.com/site/polterov/miscellaneous texts>
- [PoR] L. Polterovich et D. Rosen. *Function Theory on Symplectic Manifolds*, American Mathematical Society, CRM Monograph Series, **34**, 2014.
- [R] J. Rohn. Computing the norm  $\|A\|_{\infty,1}$  is NP-hard. *Linear and Multilinear Algebra*, **47** (2000), no 3, 195-204.
- [Sc] M. Schwarz. On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds. *Pacific J. Math.*, **193** (2000), no 2, 419-461.
- [S] S. Seyfaddini. Spectral killers and Poisson bracket invariants. *J. Mod. Dyn.*, 9 :51-66, 2015.
- [ShL] K. Shi et G. Lu. Lower bound for the Poisson bracket invariant on surfaces. Prépublication arxiv :1905.07939
- [So] T. Sodoge. *The geometry and topology of stable coisotropic submanifolds*. Doctoral thesis , Unversity College London, 2017.
- [T] L. Traynor. Symplectic packing constructions. *Journal of Differential Geometry*, **42** (1995), 411-429.
- [U] M. Usher. The sharp capacity-energy inequality. *Communications in Contemporary Mathematics*, **12**(2010), no 03, 457-473.
- [V] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Mathematische Annalen*, **292** (1992), no 4, 685-710.
- [Za] M. Zambon. An example of coisotropic submanifolds  $C^1$ -close to a given coisotropic submanifold. *Differential Geometry and its Applications*, **26** (2008), 635-637.
- [Z] F. Zapolsky. Quasi-states and the Poisson bracket on surfaces. *Journal of Modern Dynamics*, **1** (2007), no 3, 465-475.



# Annexe A

---

## FLORILÈGE SYMPLECTIQUE

Cette annexe collecte divers résultats symplectiques pertinents pour cette thèse, notamment à propos des surfaces. Ces résultats ne sont pas nouveaux et sont souvent énoncés dans la littérature sans épanchement. Pourtant, pour certains de ces résultats, nous ne connaissons aucune référence qui les démontre, du moins aucune qui présente des démonstrations minimalistes pour les besoins de la symplectique. Dans cette optique, nous énonçons ici les résultats dans leur formulation suffisante à nos propos et nous tâchons de fournir des esquisses des preuves de ceux-ci.

### A.1. ASTUCE DE MOSER

L'astuce de Moser est bien connue des symplecticiens. Étant donné une variété lisse  $M$  et une isotopie lisse  $\{\omega_t = \omega_0 + d\alpha_t\}_{t \in [0,1]}$  de formes symplectiques cohomologues, définissons la famille lisse de champs vectoriels  $X_t$  par la relation  $-d\alpha_t/dt = X_t \lrcorner \omega_t$ . Pour autant que les courbes intégrales qui débutent dans un ouvert  $U \subset M$  existent sur l'intervalle  $[0, 1]$ , celles-ci déterminent une famille lisse d'applications  $\phi_t : U \rightarrow M$  qui satisfait  $\phi_0 : U \subset M$ ,  $d\phi_t/dt = X_t$  et  $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$ . En effet,  $\phi_0^* \omega_0 = \omega_0$  et

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_t^* \omega_t}{dt} &= \phi_t^* \left( \mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right) = \phi_t^* \left( X_t \lrcorner d\omega_t + d(X_t \lrcorner \omega_t) + \frac{d\omega_t}{dt} \right) \\ &= \phi_t^* \left( d \left( -\frac{d\alpha_t}{dt} \right) + \frac{d(d\alpha_t)}{dt} \right) = \phi_t^* 0 = 0. \end{aligned}$$

Observons que  $X_t = 0$  pour tout  $t$  et partout sur un ouvert  $V$  si tous les  $\omega_t$  coïncident sur  $V$ , de sorte que l'isotopie produite coïncide avec l'identité sur  $V$ .

L'astuce de Moser sert notamment à fournir une preuve du théorème de Darboux et, plus généralement, des divers théorèmes de voisinages de Weinstein. Une autre application notable est la classification des surfaces symplectiques.

**Lemme A.1.1.** *Soient  $M$  une surface lisse orientable (possiblement à bord) et  $\omega_0, \omega_1$  des formes symplectiques qui confèrent à  $M$  la même orientation et la même aire<sup>1</sup>. Alors il existe un difféomorphisme symplectique  $\phi : (M, \omega_0) \rightarrow (M, \omega_1)$ . En outre, si  $\partial M \neq \emptyset$ , il existe  $\phi$  tel que  $\phi|_{\partial M} = Id_{\partial M}$ .*

*Démonstration :* D'une part, deux 2-formes sur une surface sont cohomologues si et seulement si elles confèrent la même superficie à la surface. D'autre part, l'espace des formes symplectiques (c'est-à-dire, jamais nulles) associées à une classe de cohomologie donnée est convexe.

Considérons d'abord le cas quand  $M$  est fermée, c'est-à-dire sans bord. Pour les formes  $\omega_0$  et  $\omega_1$  considérées dans l'énoncé du lemme, définissons pour  $t \in [0, 1]$  le chemin affine  $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$  constitué de formes symplectiques cohomologues. L'astuce de Moser fournit une famille de champs vectoriels  $X_t$  sur  $M$ , qui s'avère intégrable sur tout l'intervalle  $t \in [0, 1]$  du fait que  $M$  est fermée. L'astuce produit ainsi une isotopie  $\phi_t : M \rightarrow M$  telle que  $\phi_1^* \omega_1 = \omega_0$ . Bref, une surface symplectique fermée  $(M, \omega)$  est déterminée à symplectomorphisme près par sa superficie et son orientation.

Lorsque  $\partial M \neq \emptyset$ , afin d'appliquer l'astuce de Moser convenablement, il faut s'assurer de choisir  $X_t$  de telle sorte à ce que, sur la frontière, ces champs soient tangents à celle-ci ; le chemin  $\omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$  ne produit probablement pas une famille de champs vectoriels ayant cette propriété. Nous allons donc modifier  $\omega_1$ . Chaque composante connexe  $C_j$  de  $\partial M$  est difféomorphe à un cercle ; de plus,  $C_j \subset \tilde{M}$  est lagrangien pour chacune des deux formes symplectiques. Le théorème du voisinage de Weinstein pour les sous-variétés lagrangiennes implique qu'il existe, dans un voisinage  $Op C_j \subset \tilde{M}$ , une isotopie de rappelant  $\omega_1$  sur  $\omega_0$  qui, de surcroît, peut être prise égale à l'identité sur  $C_j$  ; ces diverses isotopies pour chaque  $j$  peuvent être prolongées en une difféotopie  $h_t$  de  $\tilde{M}$  supportée dans un voisinage de  $\cup_j C_j = \partial M$ . Posons  $\omega'_1 = h_1^* \omega_1$ , qui coïncide donc avec  $\omega_0$  dans un voisinage de  $\partial M$  dans  $M$ . Le chemin  $\omega'_t := \omega_0 + t(\omega'_1 - \omega_0)$  consiste en des formes symplectiques cohomologues. L'astuce de Moser produit une famille de champs vectoriels  $X_t$  qui s'annulent tous dans un voisinage de  $\partial M$  ; la famille s'intègre ainsi en une difféotopie  $\phi_t$  de  $M$  qui fixe à chaque instant tous les points de  $Op \partial M$  et qui vérifie  $\phi_1^* \omega'_1 = \omega_0$  ;  $\phi := h_1 \circ \phi_1$  est le difféomorphisme recherché.  $\square$

Nous pouvons déduire le corollaire suivant :

---

1. Si  $\partial M \neq \emptyset$ , par la classification des surfaces, il existe une inclusion  $M \subset \tilde{M}$  avec  $\tilde{M}$  une surface fermée. Nous exigeons des formes symplectiques  $\omega_0, \omega_1$  qu'elles se prolongent en des formes symplectiques sur (un voisinage de  $M$  dans)  $\tilde{M}$ .

**Corollaire A.1.2** (Tassement bidimensionnel). *Soit  $K \subset (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  un compact d'aire  $A$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un plongement symplectique  $\psi : K \rightarrow B^2(r)$  où  $\pi r^2 = A + \epsilon$ .*

*Démonstration* : Considérons un voisinage borné  $Op K$  d'aire strictement inférieure à  $A + \epsilon$ . Il existe  $R > r$  tel que  $Op K \subset B^2(R)$ . Soit une fonction lisse  $f : B^2(R) \rightarrow [1/2, 1]$  telle que  $f|_{Op K} = 1$  et telle que  $f < 1$  ailleurs. Pour  $s \geq 1$ , considérons la famille lisse de formes symplectiques  $\eta_s := f^s \omega_0$ ; notons que chaque  $\eta_s$  coïncide avec  $\omega_0$  sur  $Op K$ . Puisque  $\int_{B^2(R)} \eta_s$  est continue en  $s$ , que  $\int_{B^2(R)} \omega_0 = \pi R^2 > \pi r^2$  et que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{B^2(R)} \eta_s = \int_{Op K} \omega_0 < \pi r^2$ , il existe  $s_0$  tel que  $\int_{B^2(R)} \eta_{s_0} = \pi r^2$ . Ainsi,  $(B^2(R), \eta_{s_0})$  et  $(B^2(r), \omega_0)$  sont deux surfaces à bord difféomorphes, de même orientation et munies de formes symplectiques de même aire. Il résulte du lemme précédent qu'il existe un difféomorphisme symplectique  $\phi : (B^2(R), \eta_{s_0}) \rightarrow (B^2(r), \omega_0)$ ; il suffit de poser  $\psi = \phi|_{Op K}$ .  $\square$

## A.2. ISOTOPIES SYMPLECTIQUES

**Lemme A.2.1** (Astuce d'Alexander). *Soient  $0 \in U \subset \mathbb{R}^{2n}$  un domaine étoilé compact et un plongement symplectique  $\phi : (U, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tel que  $\phi(0) = 0$ . Il existe une difféotopie de  $\mathbb{R}^{2n}$  à support compact dont la restriction à  $U$  produit une isotopie de plongements symplectiques  $\phi_t : (U, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  telle que  $\phi_0 : U \subset \mathbb{R}^{2n}$  et  $\phi_1 = \phi$ .*

Plus généralement, si  $\phi(0) \neq 0$ , nous pouvons toujours précomposer par une isotopie de translations pour nous ramener à la situation du lemme.

*Démonstration* : Pour  $s \in \mathbb{R}$ , posons  $c_s : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  l'homothétie  $x \mapsto sx$ , et posons  $sU = c_s(U)$ . Observons que  $c_s^* \omega_0 = s^2 \omega_0$ . Pour chaque  $s \in (0, 1]$ , définissons  $f_s : (U, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  comme étant  $f_s := c_s^{-1} \circ \phi \circ c_s$ ; il s'agit d'une famille lisse de plongements symplectiques vérifiant  $f_1 = \phi$ . En identifiant  $\mathbb{R}^{2n} \cong T_0 \mathbb{R}^{2n}$ , il est clair que  $f_0 := \lim_{s \rightarrow 0^+} f_s = T\phi|_U$  existe et est un plongement symplectique.

Rappelons que le groupe des matrices symplectiques

$$\mathrm{Sp}(2n) := \left\{ \Psi \in M_{2n, 2n}(\mathbb{R}) \mid \Psi^T \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \Psi \right\}$$

est connexe par arcs. Puisque  $T\phi_0 \in \mathrm{Sp}(2n)$ , il existe un chemin lisse  $\{A_u\}_{u \in [0, 1]} \subset \mathrm{Sp}(2n)$  tel que  $A_0 = Id$  et  $A_1 = T\phi_0$ . Pour  $u \in [0, 1]$ , nous posons  $g_u = A_u|_U$ ; il s'agit d'une famille lisse de plongements symplectiques de  $U$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . La concaténation des chemins  $\{g_u\}$  et  $\{f_s\}$  produit, après reparamétrage régularisant, l'isotopie  $\phi_t$  désirée.

Le champ vectoriel  $X_t = d\phi_t/dt$  défini sur  $\phi_t(U)$  est symplectique sur son domaine ; son domaine étant contractile, il s'agit même d'un champ hamiltonien. Il existe donc une fonction lisse  $H$  définie sur le compact  $\{(p, t) \in \mathbb{R}^{2n} \times [0, 1] : p \in \phi_t(U)\}$  ; cette fonction se prolonge en une fonction lisse à support dans un compact de la forme  $K \times [0, 1]$ ,  $K \Subset \mathbb{R}^{2n}$ . Cette fonction hamiltonienne génère une isotopie hamiltonienne  $\psi_t$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que  $\psi_0 = Id$ ,  $\psi_t|_{K^c} = Id|_{K^c}$  et  $\psi_t|_U = \phi_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

□

**Lemme A.2.2.** *Soient  $\phi_0, \phi_1$  deux plongements symplectiques de  $(B^2(r), \omega_0)$  dans une surface connexe compacte  $(M, \eta)$ . Alors il existe une difféotopie hamiltonienne  $\psi_t$  supportée dans  $M \setminus \partial M$  telle que  $\psi_0 = Id$  et  $\phi_1 = \psi_1 \circ \phi_0$ .*

*Démonstration :* Posons  $B := \text{Im } \phi_0$  et  $C = \partial B$ . Un théorème de topologie différentielle stipule qu'il existe une difféotopie  $\psi'_t$  supportée dans  $M \setminus \partial M$  telle que  $\psi'_0 = Id$  et  $\phi_1 = \psi'_1 \circ \phi_0$  ; consulter par exemple le théorème 8.3.1 dans [Hi].

L'idée centrale consiste à produire une famille lisse de formes symplectiques  $\eta''_t$  qui sont toutes cohomologues à  $\eta$  (c'est-à-dire que  $\int_M \eta''_t = \int_M \eta$ ), qui coïncident toutes avec  $\eta$  sur  $Op \partial M$  et qui satisfont surtout  $\int_{\psi'_t(B)} \eta_t = \pi r^2$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . En effet, en vertu du lemme A.1.1, chaque paire  $(\psi'_t(B), \eta''_t)$  serait alors symplectiquement difféomorphe à  $(B^2(r), \omega_0)$ , suggérant à tout le moins la possibilité d'interpoler symplectiquement entre les plongements  $\phi_0$  et  $\phi_1$ .

Considérons d'abord la famille lisse de formes symplectiques cohomologues  $\eta_t := (\psi'_t)^* \eta$ . Observons que  $\eta_0 = \eta$  partout sur  $M$ , que  $\eta_t = \eta$  près de  $\partial M$  et que  $\eta_1 = \eta$  sur  $B$ . Considérons deux fonctions plateau  $\chi_1, \chi_2 : M \rightarrow [0, 1]$  telles que  $\chi_1 = 0$  sur  $B$  et sur  $Op \partial M$  et  $\chi_1 > 0$  ailleurs, tandis que  $\chi_2 > 0$  sur  $\text{int } B$  et  $\chi_2 = 0$  ailleurs. Considérons les fonctions lisses  $s_1(t), s_2(t)$  telles que les 2-formes

$$\eta'_t := \exp(s_1(t)\chi_1 + s_2(t)\chi_2) \eta_t$$

satisfassent les deux exigences  $\int_M \eta'_t = \int_M \eta$  et  $\int_B \eta'_t = \pi r^2$ . Compte tenu des supports des deux fonctions plateaux, il suffit de choisir l'unique valeur de  $s_2(t)$  permettant de satisfaire la seconde exigence, puis de choisir l'unique valeur de  $s_1(t)$  permettant de satisfaire la première exigence. Par construction,  $\eta'_t = \eta$  sur  $Op \partial M$ . Nous posons alors  $\eta''_t := (\psi'_t)_* \eta'_t$  ; il s'avère que  $\eta''_0 = \eta = \eta''_1$ .

Considérons désormais  $\eta''_{t,s} = \eta + s(\eta''_t - \eta)$  ; observons que  $\eta''_{t,s} = \eta$  près de  $\partial M$  et que  $\eta''_{0,s} = \eta = \eta''_{1,s}$ . Pour chaque  $t$ , l'astuce de Moser produit un difféomorphisme  $\psi''_t$  supporté dans  $M \setminus Op \partial M$  tel que  $(\psi''_t)^* \eta''_t = \eta$ . Observons que  $\psi''_0 = Id = \psi''_1$ .

Pour  $t \in [0, 1]$ , le rappel de  $\eta$  par  $\phi'_t := (\psi''_t)^{-1} \circ \psi'_t \circ \phi_0 : B^2(r) \rightarrow M$  donne une forme symplectique  $\omega_t$  cohomologue à  $\omega_0$ . Un raffinement paramétrique du lemme A.1.1 fournit une famille lisse de difféomorphismes symplectiques  $h_t : (B^2, \omega_0) \rightarrow (B^2(r), \omega_t)$  telle que  $h_0 = h_1 = Id$ . Nous posons alors  $\phi_t = \phi'_t \circ h_t$ , qui est une isotopie de plongements symplectiques interpolant entre  $\phi_0$  et  $\phi_1$ . À l'instar de la démonstration du lemme A.2.1, cette isotopie provient d'une difféotopie hamiltonienne ambiante supportée dans  $M - Op \partial M$ .

□

### A.3. ÉNERGIE DE DISJONCTION

Cette section comporte divers résultats fondamentaux pour nos considérations du chapitre 2. Rappelons de §0.1.5 qu'un sous-ensemble  $X \subset (M, \omega)$  est *disjoignable* s'il existe un difféomorphisme hamiltonien (à support compact)  $\phi : M \rightarrow M$  tel que  $\phi(\bar{X}) \cap \bar{X} = \emptyset$ , auquel cas nous disons que  $\phi$  *disjoint*  $X$ , et que l'*énergie de disjonction de  $X$*  est définie comme l'infimum de  $\|\phi\|_H$  parmi tous les difféomorphisme hamiltoniens (à support compact) qui disjointent  $X$ , l'infimum sur l'ensemble vide étant posé égal à  $+\infty$ . Nous débutons par deux lemmes techniques.

**Lemme A.3.1.** *Soient  $X, Y \subset (M, \omega)$  et  $\phi \in \text{Symp}(M, \omega)$  tels que  $\phi(X) = Y$ . Alors  $e_H(X) = e_H(Y)$  et  $X$  est disjoignable si et seulement si  $Y$  l'est.*

*Démonstration :* Observons d'abord que  $\phi(\bar{X}) = \bar{Y}$ . Puisque  $\phi^{-1} \in \text{Symp}(M, \omega)$  vérifie  $\phi^{-1}(Y) = X$ , il suffit d'établir  $e_H(Y) \leq e_H(X)$ . Si  $e_H(X) = \infty$ , l'inégalité est claire. Si  $e_H(X) < \infty$ , il existe un  $\psi \in \text{Ham}(M, \omega)$  tel que  $\psi(\bar{X}) \cap \bar{X} = \emptyset$ . Ainsi,  $\psi' := \phi \circ \psi \circ \phi^{-1} \in \text{Ham}(M, \omega)$  vérifie  $\psi'(\bar{Y}) \cap \bar{Y} = \emptyset$ . Il est clair que  $e_H(Y)$  est inférieure à l'infimum de  $\|\psi'\|_H$  parmi tous les  $\psi'$  susmentionnés. Or, l'invariance sous conjugaisons de la norme de Hofer implique  $\|\psi'\|_H = \|\psi\|_H$ . Donc  $e_H(Y) \leq e_H(X)$ . □

**Lemme A.3.2.** *Soit  $R = [0, 1] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$  un rectangle. Alors pour tout sous-ensemble  $X \subset R$ ,  $e_H(X) \leq L$ .*

*Démonstration :* L'énergie de disjonction étant monotone sous l'inclusion, il suffit de montrer  $e_H(R) \leq L$ . Pour ce faire, il suffit d'exhiber pour tout  $\epsilon > 0$  un difféomorphisme hamiltonien  $\phi$  à support compact d'énergie  $\|\phi\|_H < L + \epsilon$  qui disjoint  $R$ . Pour  $0 < \delta < \epsilon/3$ , le hamiltonien  $H(x, y) = (1 + \delta)y$  génère l'isotopie de translations  $\tau_t : (x, y) \mapsto (x + (1 + \delta)t, y)$ , de sorte que  $R \cap \tau_1(R) = \emptyset$ . En choisissant une fonction plateau  $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur  $[0, 2 + \delta] \times [0, L + \delta]$

et qui est supportée dans  $[-\delta, 2 + 2\delta] \times [-\delta, L + 2\delta]$ , le hamiltonien  $H' := \chi H$  génère une isotopie hamiltonienne à support compact dont l'application temps-1,  $\phi$ , vérifie  $R \cap \phi(R) = \emptyset$  et a énergie  $\|\phi\|_H < L + 3\delta < L + \epsilon$ .  $\square$

**Lemme A.3.3.** *Soit  $B$  l'image d'un plongement symplectique de  $B^{2n}(r)$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  pour les formes symplectiques standards. Alors  $e_H(B) \leq \pi r^2$ .*

*Démonstration :* Premièrement, en vertu du lemme A.3.1,  $e_H(X) = e_H(\phi(X))$  pour tout sous-ensemble  $X$  et pour tout difféomorphisme symplectique  $\phi$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ . En choisissant  $X = B$  comme dans le lemme et  $\phi$  comme étant le difféomorphisme symplectique ambiant de  $\mathbb{R}^{2n}$  fourni par l'astuce d'Alexander, il suffit d'établir le lemme dans le cas de la boule standard  $B^{2n}(r)$ .

Deuxièmement, puisque  $B^{2n}(r) \subset \prod_{i=1}^n B^2(r) = P^{2n}(r)$ , il suffit d'établir  $e_H(P^{2n}(r)) \leq \pi r^2$ .

Troisièmement, si  $f$  est un difféomorphisme hamiltonien de  $\mathbb{R}^2$  d'énergie  $e := \|f\|_H$  qui disjoint la boule  $B^2(r)$  d'elle-même, alors  $F = f \times Id_{\mathbb{R}^{2(n-1)}}$  est un difféomorphisme hamiltonien de  $\mathbb{R}^{2n}$  d'énergie  $\|F\|_H = e$  qui disjoint le polydisque  $P^{2n}(r)$  de lui-même<sup>2</sup>. Ainsi, il suffit de démontrer le lemme dans le cas  $n = 1$ .

Quatrièmement, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un plongement symplectique de  $B^2(r)$  dans le rectangle  $R = [0, 1] \times [0, \pi r^2 + \epsilon]$  (que nous pourrions écrire explicitement). D'après un argument utilisé à la première étape et le lemme précédent,  $e_H(B^2(r)) \leq \pi r^2 + \epsilon$ . Ceci étant vrai quel que soit  $\epsilon$ , il en résulte  $e_H(B^2(r)) \leq \pi r^2$ .  $\square$

**Lemme A.3.4.** *Soit  $B$  l'image d'un plongement symplectique de  $(B^{2n}(r), \omega_0)$  dans une surface compacte  $(M, \omega)$  d'aire  $A = \int_M \omega$ . Alors  $B$  est disjoignable si et seulement si  $\pi r^2 < A/2$ , auquel cas  $e_H(B) \leq \pi r^2$ .*

*Démonstration :* Si  $B$  est disjoignable, alors pour tout difféomorphisme hamiltonien  $\phi$  qui disjoint  $B$ , il existe un fermé  $B' \supset \text{int } B' \supset B$  que  $\phi$  disjoint aussi. Ainsi, en évoquant le fait que  $\phi$  préserve  $\omega$ ,

$$\int_B \omega < \int_{B'} \omega = \frac{1}{2} \left( \int_{B'} \omega + \int_{\phi(B')} \omega \right) \leq \frac{1}{2} A.$$

Ceci établit l'implication « seulement si ».

Il résulte des lemmes A.2.2 et A.3.1 que nous pouvons choisir  $B$  comme étant l'image de notre plongement préféré. En vertu de la classification des surfaces, nous savons que  $M$  est obtenue en recollant les segments du bord d'un polygone

<sup>2</sup>. En multipliant un hamiltonien générant  $F$  par une fonction plateau à support compact  $\chi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur toute la région de la disjonction de  $P^{2n}(r)$ ,  $F$  peut être remplacé par un difféomorphisme hamiltonien à support compact de même énergie.



(troué par un nombre fini de disques). Pour tout  $\epsilon > 0$ , nous pouvons trouver un plongement d'un rectangle  $R$  d'aire  $A - \epsilon$  dans le polygone troué. Ainsi, pour  $\epsilon$  suffisamment petit, il suffit de choisir  $B$  comme étant l'image par ce plongement de  $R$  de notre plongement favori de  $B^2(\epsilon)$  dans  $R$ . Le lemme A.3.2 permet de conclure que si  $B$  a aire  $\pi r^2 < A/2$ , alors  $B$  est disjoignable et  $e_H(B) \leq \pi r^2$ .  $\square$

**Théorème A.3.5** (Inégalité capacité-énergie). *Soit  $B$  l'image d'un plongement symplectique de  $(B^{2n}(r), \omega_0)$  dans une surface fermée  $(M, \omega)$ . Alors  $\pi r^2 \leq e_H(B)$ .*

*Démonstration* : L'énoncé dans le cas  $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, \omega_0)$  a été démontré par Hofer [H] ; il découle évidemment aussi des résultats généraux de Lalonde–McDuff [LM1] et de Usher [U]. L'énoncé dans le cas où  $M = S^2$  découle de [LM1] ou de [U]. Nous ne connaissons malheureusement aucune preuve « élémentaire » pour ces deux cas.

Nous affirmons toutefois que l'énoncé dans le cas des autres surfaces fermées découle essentiellement de l'énoncé pour  $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ . En effet, puisque  $M \neq S^2$ , le théorème d'uniformisation stipule que le revêtement universel de  $M$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . Nous pouvons donc relever tous les hamiltoniens normalisés sur  $M$  en des hamiltoniens sur  $\mathbb{R}^2$  qui ne sont néanmoins pas forcément normalisés. Si la difféotopie générée par un tel hamiltonien sur  $\mathbb{R}^2$  disjoint un relevé  $\tilde{B}$  de  $B$  (aussi d'aire  $\pi r^2$ ), alors il suffit de compactifier ce hamiltonien loin de la région de disjonction (convenablement, notamment en d'augmentant pas la norme de Hofer) pour se ramener au cas des hamiltoniens normalisés. Il en découle facilement que  $e_H(B; M) \geq e_H(\tilde{B}; \mathbb{R}^2) \geq \pi r^2$ .  $\square$

**Remarque A.3.6.** *Lorsque  $M = S^2$ , un énoncé partiel peut être déduit de l'inégalité capacité-énergie pour  $\mathbb{R}^2$ . Déjà, si  $B$  n'est pas disjoignable, l'inégalité est triviale ; supposons donc  $B$  disjoignable. Nous pouvons montrer que si  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  est une difféotopie hamiltonienne qui disjoint  $B$  et qui est standard en ce sens qu'il existe un point  $p \in M$  tel que  $\phi_t(p) = p$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors l'énergie de cette difféotopie est d'au moins  $\pi r^2$ . En effet, quitte à multiplier le hamiltonien générateur  $h_t$  par une fonction plateau appropriée, nous pouvons supposer que les  $\phi_t$  coïncident tous avec l'identité dans un voisinage de  $p$ . La disjonction s'opère donc essentiellement dans un disque, qui lui-même peut être interprété comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . L'enjeu pour  $S^2$  consiste donc à borner inférieurement l'énergie d'une difféotopie non standard par la capacité de la boule disjointe. Pour toute difféotopie hamiltonienne, le lemme A.3.4 implique  $M \not\subset B \cup \phi_1(B)$ , de sorte que pour tout  $\delta > 0$  suffisamment petit, il existe donc un point  $p$  contenu dans le complémentaire de  $B \cup \phi_1(B)$ . Il est tentant d'annuler le mouvement de  $p$  sous la*

*difféotopie à l'aide d'une autre difféotopie hamiltonienne d'énergie arbitrairement petite afin que se ramener au cas d'une difféotopie standard, mais il est difficile d'établir si cette nouvelle difféotopie continue de disjointre  $B$ .*

L'énoncé suivante suit directement du lemme A.3.4 et du théorème A.3.5 :

**Corollaire A.3.7.** *Soit  $B$  l'image d'un plongement symplectique de  $(B^{2n}(r), \omega_0)$  dans une surface compacte  $(M, \omega)$  d'aire  $A = \int_M \omega$ . Alors  $B$  est disjointre si et seulement si  $\pi r^2 < A/2$ , auquel cas  $e_H(B) = r^2$ .*

**Théorème A.3.8** (Caractérisation de la disjonction). *Soit  $(M, \omega)$  une surface fermée d'aire  $A$ . Un ensemble connexe  $X \subset M$  est disjointre si et seulement s'il est contenu dans un disque fermé plongé d'aire strictement inférieure à  $A/2$ .*

*Démonstration :* L'implication « si » découle directement de la monotonie de l'énergie de Hofer sous l'inclusion et du lemme A.3.4.

Pour l'implication « seulement si », remarquons d'abord que la fermeture de  $X$  est disjointre (par définition de disjonction) et connexe aussi. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que  $X$  est fermé; notons qu'il est alors compact. Comme nous l'avons déjà évoqué, si  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$  disjoint  $X$ , alors il doit aussi disjointre un voisinage ouvert  $Op X$ , que nous pouvons supposer connexe. En évoquant la compacité de  $X$ , il est clair que  $Op X$  peut être choisi avec frontière lisse par morceaux; après régularisation,  $Op X$  peut être choisi à frontière lisse. Quitte à prendre la fermeture, nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que  $X \subset M$  est une surface compacte connexe à frontière lisse; les composantes connexes de la frontière sont en nombre fini, sont disjointres et sont toutes difféomorphes à des cercles plongés.

Le lemme A.3.9 qui suit stipule qu'un lacet plongé disjointre doit être contractile. Ceci admis, il découle que les cercles frontières de  $X$  sont des courbes séparantes : pour chaque cercle frontière  $C$ ,  $M \setminus C$  consiste en deux composantes connexes dont au moins l'une d'elles est difféomorphe à un disque topologique (puisque  $C$  est contractile), dont uniquement l'une d'elles a aire inférieure à  $A/2$  (sans quoi  $C$  ne serait pas disjointre) et dont uniquement l'une d'elles contient  $\text{int } X$  (par connexité de  $\text{int } X$ ). Pour chaque cercle frontière  $C$ , notons  $C_-$  la composante de  $M \setminus C$  d'aire intérieure à  $A/2$  et  $C_+$  la composante d'aire supérieure à  $A/2$ ; posons aussi  $X'$  l'intersection de tous les ensembles  $\overline{C_+}$ .

Soient  $C \in \pi_0(\partial X)$  et  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$  qui disjoint  $C$ . Nous prétendons que  $\phi(C)$  n'est pas un sous-ensemble de  $C_-$ . Si ceci était possible, nous aurions soit  $\phi(C_-) \subsetneq C_-$  et donc  $\omega(\phi(C_-)) < \omega(C_-)$ , soit  $\phi(C_-) \supset C_+$  et donc

$\omega(\phi(C_-)) > \omega(C_-)$ , deux alternatives qui contrediraient le fait que  $\phi$  préserve les aires. Incidemment,  $\phi(\overline{C_-}) \subset C_+$ .

Nous prétendons ensuite qu'il existe un unique  $L \in \pi_0(\partial X)$  tel que  $X \subset \overline{L_-}$ . Supposons d'abord par l'absurde qu'il n'en existe aucun. Alors  $X \subset X'$  possède la même frontière que  $X'$ , de sorte que  $X = X'$ . Ainsi, si  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$  disjoint  $X$ , puisque  $X$  est connexe, il existerait  $C \in \pi_0(\partial X)$  tel que  $\phi(X) \subset C_-$ . Ceci impliquerait  $\phi(C) \subset C_-$ , ce qui est impossible. Concernant l'unicité de ce cercle  $L$ , puisque  $\partial X \setminus L \subset L_-$ , nous avons  $C'_- \subsetneq L_-$  et donc  $X \subset \overline{C'_+}$  pour tout autre  $C' \in \pi_0(\partial X)$ .

Nous affirmons que  $\overline{L_-}$  est difféomorphe à un disque fermé. Nous avons déjà établi qu'au moins une des composantes  $L_-$  ou  $L_+$  est difféomorphe à un disque ouvert à frontière lisse. Si cette seconde possibilité est réalisée, quel que soit  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$  qui disjoint  $X$ , nous avons établi que  $\phi(L_-) \subset L_+$ . Puisque  $L_+$  a genre 0, la sous-surface  $\phi(L_-) \cong L_-$  a aussi genre 0 ; puisque  $L_-$  n'a qu'une seule composante de bord, il s'agit d'un disque.  $\square$

**Lemme A.3.9.** *Soient  $(M, \omega)$  une surface fermée et  $C \subset M$  un lacet simple disjoignable. Alors  $C$  est contractile.*

Notons que l'énoncé est trivial lorsque  $M = S^2$ . Pour les cas  $M \neq S^2$ , nous allons fournir deux démonstrations, l'une basée sur des arguments généraux de rigidité symplectique, l'autre basée sur des faits plus classiques concernant les surfaces et les difféotopies hamiltoniennes<sup>3</sup>.

*Démonstration 1 :* Cette démonstration utilise l'homologie de Floer lagrangienne [F1]. Puisque  $M \neq S^2$ ,  $\pi_2(M) = 0$ . Supposons par l'absurde que  $C$  n'est pas contractile ; ce lacet ne borde donc aucun disque, d'où  $\pi_2(M, C) = 0$ . Le théorème 1 de [F1] stipule que pour tout  $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ ,  $|C \cap \phi(C)| \geq cl_{\mathbb{Z}_2}(C) = 2$  où  $cl_{\mathbb{Z}_2}(X)$  dénote la  $\mathbb{Z}_2$ -cuplength d'un espace topologique  $X$ , définie comme étant l'entier maximal  $k$  tel qu'il existe  $k - 1$  classes de cohomologie  $\alpha_j \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$  de degré non nul vérifiant  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k-1} \neq 0$ . Donc  $C$  n'est pas disjoignable.  $\square$

*Démonstration 2 :* Supposons par l'absurde que  $C$  n'est pas contractile. Soit  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]} \in \widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$  qui disjoint  $C$  et posons  $C' = \phi_1(C)$ . En vertu du fait classique selon lequel les isotopies hamiltoniennes sont dans le noyau du *morphisme de flux* (consulter par exemple [MS2] ou [Po1])

$$\text{Flux} : \widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega) \rightarrow H_{dR}^1(M; \mathbb{R}) : \{\psi_t\}_{t \in [0,1]} \mapsto \int_0^1 [X_t \lrcorner \omega] dt, \quad X_t := \frac{d\psi_t}{dt},$$

---

3. Nous remercions grandement Dominique Rathel-Fournier pour nos discussions concernant cette deuxième démonstration.

nous déduisons que l'isotopie  $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$  génère un cylindre (en général dégénéré)  $R : S^1 \times [0,1] \rightarrow M$  de bord  $-C + C'$  et d'aire  $\omega(R) = \int_{S^1 \times [0,1]} R^* \omega = 0$ . Par ailleurs,  $C$  et  $C'$  étant simples, isotopes, disjointes et non contractiles, il résulte du Lemme 2.4 dans [E $\mathbf{p}$ ] qu'il existe un cylindre plongé  $R' : S^1 \times [0,1] \hookrightarrow M$  tel que  $\partial R' = -C + C'$ . Puisqu'il est plongé, l'aire  $\omega(R') := \int_{S^1 \times [0,1]} (R')^* \omega$  vérifie  $0 < \omega(R') < \omega(M)$ . Puisque  $R$  et  $R'$  ont même bord, ces deux 2-chaînes diffèrent par un 2-cycle dans  $M$ , de sorte que la classe  $c = [R'] - [R] \in H_2(M; \mathbb{Z})$  a aire  $\omega(R') = \omega(c) \in \omega(M)\mathbb{Z}$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

# Annexe B

---

## LEMME DE BUHOVSKI-LOGUNOV-TANNY

Cette annexe porte sur un lemme dû en dimension deux au duo Buhovski–Tanny [BT] et généralisé en toutes dimensions dans la deuxième version de l'article coécrite avec Logunov [BLT]. Ce lemme établit l'équivalence de l'invariant pb de Polterovich et d'un invariant introduit par Buhovski–Tanny dans [BT], ce qui permet de reformuler les conjectures de Polterovich en termes de l'invariant de Buhovski–Tanny. Il s'énonce comme suit :

**Lemme B.0.1** ([BLT]). *Soit  $(V^{2n}, \omega)$  un espace vectoriel symplectique. Il existe une constante  $c(n) > 0$  telle que pour toute collection  $v_1, \dots, v_N \in V$ ,*

$$c(n) \sum_{i,j=1}^N |\omega(v_i, v_j)| \leq \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) \leq \sum_{i,j=1}^N |\omega(v_i, v_j)|.$$

Remarquons que puisque tout espace symplectique  $(V, \omega)$  de dimension  $2n$  est symplectiquement isomorphe à l'espace vectoriel symplectique standard  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , il suffit de démontrer le lemme dans ce dernier cas.

Le lemme est démontré dans la §B.1 à l'aide de la proposition B.1.1 et de ce que nous nommerons la *réduction (de Buhovski-Logunov-Tanny)*. Nous poursuivons en présentant des résultats nouveaux : nous généralisons le lemme aux paires de collections de vecteurs (§B.2), nous améliorons la constante qui figure dans le lemme (§B.3) et nous établissons une version non linéaire de la réduction (de Buhovski-Logunov-Tanny) qui se trouve au cœur de notre approche vers la conjecture de Polterovich en dimension supérieure (§B.4).

B-ii

## B.1. PREUVE DU LEMME

Dans cette section, nous suivons de très près l'annexe A de [BLT]. La démonstration du lemme B.0.1 offerte par Buhovski–Logunov–Tanny repose sur la proposition suivante :

**Proposition B.1.1.** *Soit  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  l'espace vectoriel symplectique standard muni de la norme euclidienne standard compatible  $\|-\|$ . Il existe une constante  $c'(n) > 0$  telle que pour toute collection  $v_1, \dots, v_N$  qui satisfait*

$$\sum_{i=1}^N \|v_i\| \leq \sum_{i=1}^N \|Sv_i\| \text{ pour tout } S \in \text{Sp}(2n),$$

alors

$$c'(n) \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\| \right)^2 \leq \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right).$$

Soulignons que nous travaillons avec le triplet compatible  $(\omega_0, J_0, g_0)$ , où  $\|v\|^2 = g_0(v, v) = \omega_0(v, J_0 v)$ . Par simplicité, nous écrirons  $g_0(v, w) = (v, w)$ . Suivant la présentation de [BLT], nous allons d'abord déduire le lemme de la proposition.

*Démonstration du lemme B.0.1 : L'inégalité*

$$\max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) \leq \sum_{i,j=1}^N |\omega_0(v_i, v_j)|$$

est facile à établir : puisque chaque  $a_i b_j \in [-1, 1]$ , nous avons

$$\max_{a,b \in [-1,1]^N} \sum_{i,j=1}^N a_i b_j \omega_0(v_i, v_j) \leq \max_{c \in [-1,1]^{N \times N}} \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \omega_0(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^N |\omega_0(v_i, v_j)|.$$

Il nous reste donc à établir l'inégalité de gauche. La démarche consiste à réduire le contexte à celui de la proposition C.1.0.1 ; nous appellerons ceci la démarche de *réduction* (de Buhovski–Logunov–Tanny).

Nous allons d'abord nous ramener au cas où  $v_1, \dots, v_N$  engendrent  $\mathbb{R}^{2n}$ . Si tel n'est pas le cas, alors il existe un sous-espace symplectique  $V \subsetneq \mathbb{R}^{2n}$  et un sous-espace isotrope  $W \subset V^{\omega_0}$  tel que  $\mathbb{R}\langle v_1, \dots, v_N \rangle = V \oplus W$ . En dénotant par  $P$  la projection évidente  $V \oplus W \rightarrow V$ , nous observons que les quantités qui apparaissent dans les inégalités du lemme B.0.1 sont inchangées par la substitution  $v_i \mapsto Pv_i$ . Or,  $Pv_1, \dots, Pv_N$  engendrent  $V$  et  $V$  est symplectiquement isomorphe à un espace  $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$  avec  $m < n$ .

Supposons ainsi que  $v = \{v_1, \dots, v_N\}$  engendrent  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soit

$$N_v : \mathrm{Sp}(2n) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto \sum_{i=1}^N \|Sv_i\|.$$

L'inégalité triangulaire inversée implique  $|N_v(S) - N_v(S')| \leq N_v(\mathrm{Id}) \|S - S'\|_{op}$ , de sorte que  $N_v$  est continue pour la topologie sur  $\mathrm{Sp}(2n)$  induite par la norme d'opérateur. Nous affirmons que  $N_v$  admet un minimum, disons en  $S_{min}$ .<sup>1</sup> En effet, peu importe  $L \geq 0$ , si  $S \in \mathrm{Sp}(2n)$  vérifie  $\|S\|_{op} \geq L$ , alors  $\|S^T S\|_{op} \geq L^2$ . Puisque  $S^T S$  est une matrice symétrique symplectique semi-définie positive, elle est diagonalisable sur les réels, ses valeurs propres sont strictement positives et sa norme d'opérateur coïncide avec sa plus grande valeur propre  $\lambda$ , d'où  $\lambda \geq L^2$ . Soit  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_{2n}\}$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $S^T S$ , avec  $S^T S u_1 = \lambda u_1$ . Pour n'importe quel vecteur  $w$ , en écrivant  $w = \sum_{k=1}^{2n} w_k u_k \in \mathbb{R}^{2n}$  (où  $w_k = (w, u_k)$ ), nous calculons

$$\begin{aligned} \|Sw\|^2 &= (Sw, Sw) = (w, S^T S w) = \sum_{k=1}^{2n} w_k (w, S^T S u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} w_k \lambda_k (w, u_k) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_k (w, u_k)^2 \geq \lambda (w, u_1)^2, \end{aligned}$$

où l'inégalité découle du fait que  $S^T S$  est définie positive. Ainsi,

$$N_v(S) \geq L \sum_{i=1}^N |(v_i, u_1)| \geq L \cdot a$$

où nous avons introduit la constante (indépendante de  $S$ )

$$a := \min_{\|w\|=1} \sum_{i=1}^N |(v_i, w)| > 0;$$

la positivité de  $a$  résulte du fait que les  $v_i$  engendrent  $\mathbb{R}^{2n}$ . Conséquemment,  $N_v(S) \geq a \|S\|_{op}$ . Considérons  $K := \{S \in \mathrm{Sp}(2n) : \|S\|_{op} \leq a^{-1} N_v(\mathrm{Id})\}$ . Observons que  $N_v(S) > N_v(\mathrm{Id})$  pour tout  $S \in K^c$ , de sorte qu'un minimum de  $N_v$  ne peut exister que dans  $K$ . Or l'ensemble  $K$  est compact, puisqu'il s'agit de l'intersection de la boule fermée de rayon  $a^{-1} N_v(\mathrm{Id})$  dans l'espace  $M_{2n,2n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  des matrices  $2n \times 2n$  muni de la norme d'opérateur et du sous-ensemble fermé  $\mathrm{Sp}(2n) \subset M_{2n,2n}(\mathbb{R})$ . Ainsi,  $N_v$  atteint un minimum global dans  $K$  qui est aussi global dans  $\mathrm{Sp}(2n)$ .

Puisque les quantités qui apparaissent dans les inégalités du lemme B.0.1 sont invariantes sous l'action du groupe  $\mathrm{Sp}(2n)$ , quitte à remplacer les  $v_i$  par les  $S_{min} v_i$ , nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $S_{min} = \mathrm{Id}$ . Ainsi,

1. Observons que ce minimum n'est pas unique, puisque  $N_v(S) = N_v(US)$  pour tout  $U \in \mathrm{U}(n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(n)$ .

B-iv

$N_v(S) \geq \sum_{i=1}^N \|v_i\|$  pour toute matrice symplectique  $S$  : la collection  $v_1, \dots, v_N$  satisfaisait l'hypothèse de la proposition B.1.1. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N |\omega_0(v_i, v_j)| &\leq \sum_{i,j=1}^N \|v_i\| \|v_j\| \leq \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\| \right)^2 \\ &\leq c'(n)^{-1} \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) \end{aligned}$$

où la première inégalité découle de la compatibilité du triplet  $(\omega_0, J_0, g_0)$  et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, tandis que la dernière inégalité résulte de la proposition B.1.1. Ceci démontre le lemme B.0.1 avec  $c(n) = c'(n)$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition B.1.1* : Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer qu'aucun des  $v_i$  n'est nul.

Introduisons quelques notations. Soit  $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j=1}^m$  une collection de  $m = m(n, \theta)$  cônes de demi-angle  $\theta \in (0, \pi/4)$  qui recouvrent  $\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$ , c'est-à-dire qu'il existe une collection  $\{u_j\}_{j=1}^m$  de vecteurs unité telle que

$$C_j := \left\{ u \in \mathbb{R}^{2n} : \frac{(u, u_j)}{\|u\|} > \cos \theta \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^{2n} \setminus 0 = \bigcup_{j=1}^m C_j.$$

Nous référerons à  $u_j$  comme étant le *centre de*  $C_j$ . Par le principe de pigeonnier, il existe  $C \in \mathcal{C}$  (sans perte de généralité, disons  $C = C_1$ ) qui maximise la somme des normes des  $v_i$  que le cône contient, c'est-à-dire que

$$\sum_{v_i \in C_j} \|v_i\| \leq \sum_{v_i \in C} \|v_i\| \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq m.$$

Montrons qu'il nous suffira d'établir un estimé de la forme

$$\left( \sum_{v_i \in C} v_i \right)^2 \leq A \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) \quad \text{avec } A = A(n, \theta) > 0.$$

En effet, en raison de la propriété maximisante de  $C$ , nous aurons alors

$$\left( \sum_{i=1}^N v_i \right)^2 \leq m^2 \left( \sum_{v_i \in C} v_i \right)^2 \leq m^2 A \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right),$$

ce qui, une fois  $\theta$  fixé, implique la proposition avec  $c'(n) = (m^2 A)^{-1}$ .

Afin d'établir ce nouvel estimé, soient  $v := (\sum_{v_i \in C} v_i) / \|\sum_{v_i \in C} v_i\|$ , qui est un vecteur unitaire dans  $C$ , et les sous-espaces  $V = \mathbb{R}\langle v, J_0 v \rangle$  et  $W = V^{\omega_0}$ , de sorte à obtenir une décomposition symplectique  $\mathbb{R}^{2n} = V \oplus W$ . Considérons la matrice



symplectique  $S$  suivante,

$$S(av + b J_0 v + w) = \frac{1}{2}av + 2b J_0 v + w \quad \text{quels que soient } a, b \in \mathbb{R}, w \in W.$$

D'une part, pour n'importe quel vecteur non nul  $u = av + b J_0 v + w$  décomposé selon la scission  $\mathbb{R}^{2n} = V \oplus W$ , nous calculons

$$\begin{aligned} \|Su\| - \|u\| &= \frac{\|Su\|^2 - \|u\|^2}{\|Su\| + \|u\|} \leq \frac{\|Su\|^2 - \|u\|^2}{\|u\|} \\ &= \frac{a^2/4 + 4b^2 + \|w\|^2 - a^2 - b^2 - \|w\|^2}{\|u\|} \\ &\leq \frac{3b^2}{\|u\|} \leq 3|b| = 3|\omega_0(u, v)|. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $u \in C$ , les vecteurs  $u$  et  $v$  forment entre eux un angle d'au plus  $2\theta$ , de sorte que  $\|u\| \geq a = (u, v) \geq \cos(2\theta) \|u\|$  et donc

$$\begin{aligned} \|Su\| &= \left( \frac{a^2}{4} + 4b^2 + \|w\|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \frac{a^2}{4} + 4(b^2 + \|w\|^2) \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{4} \frac{a^2}{\|u\|^2} + 4 \left( 1 - \frac{a^2}{\|u\|^2} \right) \right)^{1/2} \|u\| \leq \left( \frac{1}{4} \cos(2\theta)^2 + 4 \sin(2\theta)^2 \right)^{1/2} \|u\|, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que la fonction  $f(x) = \cos(x)^2/4 + 4 \sin(x)^2$  est croissante pour  $x \in [0, \pi/2]$ . Puisque  $f(0) = 1/4$ , si  $\theta$  est choisi suffisamment petit (par exemple, si  $\theta \leq \pi/30$ ), nous déduisons

$$\|Su\| \leq \frac{2}{3}\|u\| \quad \text{pour } u \in C, \text{ c'est-à-dire } \|Su\| - \|u\| \leq -\frac{1}{3}\|u\|.$$

Du fait de ces deux estimés et de l'hypothèse sur la collection  $\{v_i\}_{i=1}^N$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^N (\|Sv_i\| - \|v_i\|) \leq \sum_{v_i \notin C} (\|Sv_i\| - \|v_i\|) + \sum_{v_i \in C} (\|Sv_i\| - \|v_i\|) \\ &\leq 3 \sum_{v_i \notin C} |\omega_0(v, v_i)| - \frac{1}{3} \sum_{v_i \in C} \|v_i\|, \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$\sum_{v_i \in C} \|v_i\| \leq 9 \sum_{v_i \notin C} |\omega_0(v, v_i)|.$$

Rappelons que par définition,  $v := \left( \sum_{v_i \in C} v_i \right) / \left\| \sum_{v_i \in C} v_i \right\|$ . L'inégalité ci-dessus peut donc être réécrite sous la forme

$$\left\| \sum_{v_i \in C} v_i \right\| \left( \sum_{v_j \in C} \|v_j\| \right) \leq 9 \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right)$$

B-vi

en posant  $a_i = 1$  si  $v_i \in C$  et  $a_i = 0$  sinon, ainsi qu'en posant  $b_j = \text{sign } \omega_0(v, v_j)$  si  $v_j \notin C$  et  $b_j = 0$  sinon.

Compte tenu du fait que  $C = C_1$  est un cône centré en  $u_1$ , pour tout vecteur  $u \in C$  nous avons  $(u, u_1) \geq \cos(\theta) \|u\|$ . Ainsi,

$$\left\| \sum_{v_i \in C} v_i \right\| \geq \left( \sum_{v_i \in C} v_i, u_1 \right) \geq \sum_{v_i \in C} (v_i, u_1) \geq \cos(\theta) \sum_{v_i \in C} \|v_i\|.$$

En réunissant les deux dernières inégalités, nous déduisons

$$\left( \sum_{v_i \in C} \|v_i\| \right)^2 \leq \frac{9}{\cos \theta} \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right),$$

ce qui est l'estimé que nous cherchions à établir, avec  $A(n, \theta) = 9/\cos \theta$ . □

**Remarque B.1.2.** *Le théorème 6.3.1 dans [Bö] implique*

$$m(n, \theta) \geq \sqrt{2\pi} (\sin 2\theta)^{-(2n-1)}$$

pour  $\theta < \pi/4$ , de sorte que  $A(\theta)m(n, \theta)^2 \propto [\cos \theta (\sin 2\theta)^{4n-2}]^{-1}$ , ce qui suggère  $c(n) \geq O(C^n)$  avec  $C < 1$ .

## B.2. GÉNÉRALISATION AUX PAIRES DE COLLECTIONS

Nous pouvons généraliser le lemme B.0.1 comme suit :

**Lemme B.2.1.** *Soit  $(V, \omega)$  un espace vectoriel symplectique avec  $\dim V = 2n$ . Il existe une constante  $c''(n) \in (c(2n), c(n))$  telle que pour toute paire de collections de vecteurs  $u_1, \dots, u_M$  et  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^{2n}$ ,*

$$c''(n) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\omega(u_i, v_j)| \leq \max_{a \in [-1, 1]^M, b \in [-1, 1]^N} \omega \left( \sum_{i=1}^M a_i u_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right).$$

**Remarque B.2.2.** *Encore une fois, il suffit de démontrer ce lemme pour  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  et l'inégalité suivante est aussi valide :*

$$\max_{a \in [-1, 1]^M, b \in [-1, 1]^N} \omega \left( \sum_{i=1}^M a_i u_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\omega(u_i, v_j)|.$$

*Démonstration du lemme B.2.1 :* L'inégalité  $c''(n) \leq c(n)$  découle en considérant  $u_i = v_i$  pour tout  $i = 1, \dots, M = N$ . L'enjeu est ainsi d'établir  $c''(n) \geq c(2n)$ .

Considérons  $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ , de sorte que nous écrirons un vecteur  $z \in \mathbb{R}^{4n}$  sous la forme  $z = x \oplus y$ . Dotons  $\mathbb{R}^{4n}$  de la forme symplectique  $\omega$  définie par  $\omega(x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2) = \omega_0(x_1, y_2) - \omega_0(x_2, y_1)$ .

Pour chaque  $1 \leq i \leq M$  et pour chaque  $1 \leq j \leq N$ , posons  $u'_i = u_i \oplus 0$  et  $v'_j = 0 \oplus v_j$ . Nous avons

$$\omega(u'_i, v'_j) = \omega_0(u_i, v_j), \quad \omega(u'_i, u'_k) = 0 = \omega(v'_j, v'_l).$$

Posons  $w_i = u'_i$  pour  $1 \leq i \leq M$  et  $w_{j+M} = v'_j$  pour  $1 \leq j \leq N$ .

D'une part,

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\omega_0(u_i, v_j)| = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\omega(w_i, w_{j+M})| = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{M+N} |\omega(w_i, w_j)|.$$

D'autre part, pour tout  $\alpha, \beta \in [-1, 1]^{M+N}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{M+N} \alpha_i \beta_j \omega(w_i, w_j) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_{j+M} \omega(w_i, w_{j+M}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{i+M} \beta_j \omega(w_{i+M}, w_j) \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_{j+M} \omega(w_i, w_{j+M}) \right| + \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \alpha_{i+M} \beta_j \omega(w_{i+M}, w_j) \right| \\ &\leq 2 \max_{a \in [-1,1]^M, b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^M a_i u_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right). \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que le lemme B.0.1 implique

$$c(2n) \sum_{i,j=1}^{M+N} |\omega(w_i, w_j)| \leq \max_{\alpha, \beta \in [-1,1]^{M+N}} \sum_{i,j=1}^{M+N} \alpha_i \beta_j \omega(w_i, w_j),$$

nous déduisons le lemme B.2.1 :

$$c(2n) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\omega_0(u_i, v_j)| \leq \max_{a \in [-1,1]^M, b \in [-1,1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^M a_i u_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right).$$

□

**Remarque B.2.3.** En considérant  $v_j = Jw_j$  pour une structure presque complexe  $J$  compatible avec  $\omega$ , le lemme précédent est équivalent à l'inégalité

$$c''(n) \max_{a \in [-1,1]^M, b \in [-1,1]^N} g_J \left( \sum_{i=1}^M a_i u_i, \sum_{j=1}^N b_j w_j \right) \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |g_J(u_i, w_j)|.$$

Il ne s'agit donc pas d'une inégalité de nature symplectique, ni riemannienne.

### B.3. AMÉLIORATION DE LA CONSTANTE

Notre premier lemme a pour but d'expliciter la dépendance de  $c(n)$  en la dimension ; incidemment, il démontre que la validité du lemme B.0.1 en toutes dimensions découle de sa validité en dimension deux. Un deuxième lemme sert à déduire une meilleure valeur pour  $c(n)$  à partir de la constante  $c'(n)$  de la proposition B.1.1. Nous concluons cette section avec deux remarques importantes.

**Lemme B.3.1.** *Dans le contexte du lemme B.0.1,*

$$c(1) \geq c(n) \geq \frac{c(1)}{2 \cdot 3^{n-1} - 1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

*Incidemment, dans le lemme B.2.1,*

$$c(1) \geq c''(n) \geq c(2n) \geq \frac{c(1)}{2 \cdot 3^{2n-1} - 1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

*Démonstration :* Compte tenu du fait que  $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$ , il est clair que  $c(n) \geq c(n+1)$ . Il est aussi clair que  $c(n) \geq c''(n)$ . Seule l'inégalité  $c(k) \geq c(1)(2 \cdot 3^{k-1} - 1)^{-1}$  mérite donc notre attention. Nous allons l'établir par récurrence : elle est certainement valide lorsque  $k = 1$ , donc supposons qu'elle est vérifiée pour  $1 \leq k \leq n-1$ .

Soient  $A, B \in [-1, 1]^N$  tels que

$$\omega_0 \left( \sum_{i=1}^N A_i v_i, \sum_{j=1}^N B_j v_j \right) = \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right) =: \Omega.$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette quantité est non nulle ; elle est donc positive. Posons  $x = \sum_{i=1}^N A_i v_i$  et  $y = \sum_{i=1}^N B_i v_i$ , de sorte que  $V := \mathbb{R}\langle x, y \rangle$  est un plan symplectique, que  $W = V^{\omega_0}$  lui est transverse et  $\mathbb{R}^{2n} = V \oplus W$  symplectiquement. Dénotons  $P : V \oplus W \rightarrow V$  et  $Q : V \oplus W \rightarrow W$  les projections évidentes ; dénotons les restrictions de  $\omega_0$  à  $V$  et à  $W$  encore par  $\omega_0$ . Pour tout vecteur  $u \in V$ , nous écrirons  $u = u_x x + u_y y$ .

Considérons le parallélogramme  $R = \{ u = u_x x + u_y y \in V : u_x, u_y \in [-1, 1] \}$ . Nous prétendons que  $P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \in R$  pour tout  $a \in [-1, 1]^N$ . D'une part,

$$\begin{aligned} \omega_0 \left( x, \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) &= \omega_0 \left( Px, P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right) + \omega_0 \left( Qx, Q \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right) \\ &= \omega_0 \left( x, P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right) + \omega_0 \left( 0, Q \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right) \\ &= \omega_0 \left( x, \left[ P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right]_y y \right) = \left[ P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right]_y \Omega. \end{aligned}$$

Puisque  $\omega_0(x, \sum_{i=1}^N a_i v_i) \in [-\Omega, \Omega]$ , ceci implique  $\left[ P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right]_y \in [-1, 1]$ .  
 Similairement,  $\left[ P \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right]_x \in [-1, 1]$ .

Tâchons maintenant d'estimer les quantités

$$\Omega' := \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i P v_i, \sum_{j=1}^N b_j P v_j \right),$$

$$\Omega'' := \max_{a, b \in [-1, 1]^N} \omega_0 \left( \sum_{i=1}^N a_i Q v_i, \sum_{j=1}^N b_j Q v_j \right).$$

En prenant  $a = A$  et  $b = B$ , nous déduisons  $\Omega \leq \Omega'$ . En raison du paragraphe précédent,  $\Omega' \leq \max_{u, v \in R} \omega_0(u, v)$ . Or, ce dernier maximum est certainement atteint pour une paire de coins de  $R$  et vaut en fait

$$|\omega_0(x - y, x + y)| = 2 |\omega_0(x, y)| = 2\Omega.$$

Ainsi,  $\Omega' \leq 2\Omega$ . Quant à  $\Omega''$ , l'inégalité triangulaire et sa version renversée donnent

$$\Omega' - \Omega \leq \Omega'' \leq \Omega' + \Omega,$$

de sorte que  $\Omega'' \leq 3\Omega$ . En évoquant ces bornes supérieures, le lemme B.0.1 et l'hypothèse de récurrence, nous calculons

$$\begin{aligned} \sum_{i, j=1}^N |\omega_0(v_i, v_j)| &\leq \sum_{i, j=1}^N |\omega_0(P v_i, P v_j)| + \sum_{i, j=1}^N |\omega_0(Q v_i, Q v_j)| \\ &\leq \frac{\Omega'}{c(1)} + \frac{\Omega''}{c(n-1)} \leq \frac{2\Omega}{c(1)} + \frac{3\Omega}{c(n-1)} \\ &\leq \frac{2 + (2 \cdot 3^{n-2} - 1)3}{c(1)} \Omega = \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{c(1)} \Omega. \end{aligned}$$

Ceci établit  $c(n) \geq c(1)/[2 \cdot 3^{n-1} - 1]$ . □

Le lemme B.0.1 peut être reformulé en des termes qui n'ont rien de symplectique et, ce faisant, peut être largement généralisé. Étant donné une collection de vecteurs  $\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_N\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , considérons la matrice antisymétrique  $\Omega_{\mathcal{V}}$  de taille  $N \times N$  donnée par  $(\Omega_{\mathcal{V}})_{ij} = \omega_0(v_i, v_j)$ . En introduisant la matrice  $V$  de taille  $2n \times N$  dont la  $j$ -ième colonne est le vecteur  $v_j$ , nous pouvons écrire

$$\Omega_{\mathcal{V}} = V^T J_0 V \quad \text{où} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

Soulignons que le rang de la matrice  $\Omega_{\mathcal{V}}$  est d'au plus le rang de la matrice  $V$ , qui lui-même vaut au plus  $2n$ . D'une part, la matrice  $\Omega_{\mathcal{V}}$  peut s'interpréter comme étant une application linéaire  $\ell^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow \ell^1(\mathbb{R}^N)$ ; en dénotant  $\| - \|_{p,q}$  la norme

B-x

d'opérateur pour les applications linéaires  $\ell^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow \ell^q(\mathbb{R}^N)$ , nous calculons

$$\|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1} = \max_{a,b \in [-1,1]^N} \omega \left( \sum_{i=1}^N a_i v_i, \sum_{j=1}^N b_j v_j \right).$$

D'autre part, en identifiant l'espace des matrices  $N \times N$  avec  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , nous avons

$$\|\Omega_{\mathcal{V}}\|_1 = \sum_{i,j=1}^N |\omega(v_i, v_j)|.$$

Le lemme B.0.1 apparaît ainsi comme une comparaison des normes  $\|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1}$  et  $\|\Omega_{\mathcal{V}}\|_1$  et peut être généralisé afin de trouver des constantes  $C(k)$  telles que pour toute matrice  $M$  de taille  $N \times N$ ,

$$C(\text{rang } M) \|M\|_1 \leq \|M\|_{\infty,1} \leq \|M\|_1,$$

un problème purement d'algèbre linéaire ou de l'analyse fonctionnelle. Lorsque  $M = \Omega_{\mathcal{V}}$ , nous avons le résultat suivant :

**Proposition B.3.2.**  $c(n) \geq \sqrt{c'(n)/k_G}$ , où  $k_G$  est la constante de Grothendieck et  $c(n)$  et  $c'(n)$  sont les constantes apparaissant dans les énoncés B.0.1 et B.1.1.

*Démonstration* : La preuve repose sur l'inégalité de Grothendieck qui s'énonce comme suit : étant donné une matrice  $M = (m_{ij})$  de taille  $N \times N$ , alors

$$\left| \sum_{i,j=1}^N m_{ij} (A_i, B_j) \right| \leq k_G \|M\|_{\infty,1}$$

pour tout vecteur  $A_i, B_j$  dans la boule unité d'un espace de Hilbert, où  $(-, -)$  dénote le produit scalaire de l'espace de Hilbert. Considérons l'espace de Hilbert  $(\mathbb{R}^{2n}, g_0)$ , les vecteurs  $A_i = v_i$  et  $B_j = J_0 v_j$  et  $M = \Omega_{\mathcal{V}}$  ; observons que  $\|A_i\| = \|B_i\| = \|v_i\|$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Afin d'alléger la notation, écrivons  $\omega_{ij} = \omega_0(v_i, v_j) = g_0(v_i, J_0 v_j) = (A_i, B_j)$ . Nous calculons

$$\begin{aligned} \|\Omega_{\mathcal{V}}\|_1 &= \sum_{i,j=1}^N |\omega_{ij}| = \sum_{i,j=1}^N \frac{|\omega_{ij}|}{\sqrt{\|A_i\| \|B_j\|}} \sqrt{\|A_i\| \|B_j\|} \\ &\leq \left( \sum_{i,j=1}^N \frac{|\omega_{ij}|^2}{\|A_i\| \|B_j\|} \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j=1}^N \|A_i\| \|B_j\| \right)^{1/2} && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^N \omega_{ij} \left( \frac{A_i}{\|A_i\|}, \frac{B_j}{\|B_j\|} \right) \right|^{1/2} \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\| \right) \\ &\leq k_G^{1/2} \|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1}^{1/2} \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\| \right) && \text{(Grothendieck)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_G^{1/2} \|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1}^{1/2} c'(n)^{-1/2} \|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1}^{1/2} && \text{(proposition B.1.1)} \\
&= \left( \frac{k_G}{c'(n)} \right)^{1/2} \|\Omega_{\mathcal{V}}\|_{\infty,1}.
\end{aligned}$$

□

**Remarque B.3.3.** *Buhovski et Tanny nous ont récemment informé d'un travail en cours avec Gluskin dans le cadre duquel ils utiliseraient des conséquences plus fines de l'inégalité de Grothendieck afin de démontrer que pour toute matrice  $M$ ,*

$$C(\text{rang } M) \|M\|_1 \leq \|M\|_{\infty,1} \leq \|M\|_1$$

avec  $C(k) = C/\sqrt{k}$  pour une certaine constante universelle explicite  $C$ , de sorte que  $c(n) \geq C/\sqrt{2n}$ . Ce trio affirme aussi démontrer que  $c'(n) \geq C'/2n$  pour une certaine constante universelle explicite  $C'$  ; observons que ces deux résultats sont cohérents avec la proposition ci-dessus. Ces inégalités de Buhovski-Gluskin-Tanny seraient aussi optimales par rapport à  $\text{rang } M$  et à  $n$ .

**Remarque B.3.4.** *Glissons quelques mots sur la complexité du calcul des normes  $\|M\|_1$  et  $\|M\|_{\infty,1}$ . Il est assez clair que le calcul de  $\|M\|_1$  requiert un nombre d'étapes qui est environ proportionnel au nombre de bits servant à décrire  $M$ . En comparaison, pour  $M$  de taille  $N \times N$ , le calcul de  $\|M\|_{\infty,1}$  semble à première vue nécessiter de l'ordre de  $2^{2N} = \#\{(a,b) \in \{-1,1\}^{2N}\}$  étapes de calcul. Une étude plus minutieuse établit qu'en l'absence de contrainte sur l'ensemble des matrices  $M$  considéré, le calcul de  $\|M\|_{\infty,1}$  est un problème NP-difficile. Dans le cadre de cette thèse, la classe de matrices qui nous intéresse est celle des matrices de la forme  $\Omega_{\mathcal{V}}$ , classe qui comprend essentiellement toutes les matrices antisymétriques ; la classe des matrices antisymétriques comprend le sous-ensemble des matrices de la forme  $A_S := \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$  avec  $S$  symétrique. Observons que  $\|A_S\|_{\infty,1} = 2\|S\|_{\infty,1}$  (et au passage aussi que  $\|A_S\|_1 = 2\|S\|_1$ ). Or le calcul de  $\|S\|_{\infty,1}$  sur l'ensemble des matrices symétriques est NP-difficile [R]. Conséquemment, l'invariant de Polterovich est en général beaucoup plus ardu à calculer que l'invariant de Buhovski-Tanny. Ceci jette un autre éclairage sur l'importance du lemme B.0.1 : non seulement permet-il de simplifier toute tentative de démonstration de la conjecture de Polterovich sur les crochets de Poisson des partitions de l'unité, mais on peut aussi naïvement penser que l'obtention de constantes  $c(n)$  optimales se révélerait utile à la théorie de la complexité algorithmique.*

## B.4. VERSION NON LINÉAIRE DE LA RÉDUCTION

La démonstration du lemme B.0.1 présentée à la §B.1 consiste en une réduction de l'énoncé à celui de la proposition B.1.1. Étant donné l'espace vectoriel symplectique standard  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  muni de sa métrique riemannienne compatible standard  $g_0$  et une collection  $v = \{v_1, \dots, v_N\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ , nous y étudions la fonction

$$N_v : \mathrm{Sp}(2n) \rightarrow \mathbb{R} : S \mapsto \sum_{i=1}^N \|Sv_i\|.$$

Étant donné  $g \in \mathfrak{Met}(2n)$  une métrique riemannienne compatible avec  $\omega_0$ , il existe une matrice  $S_g \in \mathrm{Sp}(2n)$  telle que  $g(v, w) = g_0(S_g v, S_g w)$ , de sorte que nous pouvons étudier la fonction équivalente

$$N_v : \mathfrak{Met}(2n) \rightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \sum_{i=1}^N g(v_i, v_i)^{1/2}.$$

Considérons l'infimum  $N(v) := \inf_{S \in \mathrm{Sp}(2n)} N_v(S)$  ; si la collection  $v$  engendre  $\mathbb{R}^{2n}$ , alors cet infimum est atteint, disons en  $S_0$ , de sorte que  $S_0 v = \{S_0 v_1, \dots, S_0 v_N\}$  satisfait l'hypothèse de la proposition B.1.1. Toutefois, la section B.3 montre que le lemme B.0.1 peut être établi par des méthodes qui requièrent peu ou pas du tout l'étude de la fonction  $N_v$ .

Le détour par la géométrie riemannienne que prend l'argumentaire original de Buhovski-Logunov-Tanny peut se révéler fort commode pour parvenir à d'autres fins. Pour les nôtres, discutées dans la §2.4, une généralisation de la réduction que nous avons établie avec l'aide de L. Buhovski est requise<sup>2</sup>.

**Lemme B.4.1** (Buhovski-P.). *Il existe une constante  $1 \leq C(n) \leq 2n + 1$  ayant la propriété suivante. Soient  $(M^{2n}, \omega)$  une variété symplectique fermée et  $X = \{X_1, \dots, X_N\} \subset \Gamma^\infty(TM)$  une collection de champs vectoriels. Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une métrique riemannienne compatible  $g \in \mathfrak{Met}(M, \omega)$  telle que*

$$N_{X(p)}(g) \leq C(n) N(X(p)) + \epsilon \quad \text{pour tout } p \in M.$$

**Remarque B.4.2.** *Dans l'énoncé ci-dessus,  $X(p)$  est l'évaluation de la collection  $X$  au point  $p \in M$  et la quantité  $N(X(p))$  est calculée dans  $(T_x M, \omega_x)$  à l'aide d'un produit scalaire compatible quelconque.*

2. Nous nous demandons s'il existait  $g \in \mathfrak{Met}(M, \omega)$  telle que  $N_{X(p)}(g) = N(X(p))$  ; voir la remarque B.4.4. Buhovski a plutôt suggéré l'énoncé B.4.1 et sa méthode de démonstration. Ceci dit, toute lacune dans l'argument que nous présentons plus loin serait entièrement notre responsabilité.



**Lemme B.4.3.** *La fonction  $p \mapsto N(X(p))$  est continue.*

*Démonstration :* Il faut montrer que la fonction est continue en  $p_0$  pour tout point  $p_0 \in M$ . Il suffit d'établir ceci dans une carte de Darboux centrée en  $p_0$ , c'est-à-dire de montrer l'énoncé dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  en  $p_0 = 0$ . Considérons un produit scalaire  $g$  pour lequel  $N_{X(0)}(g) = N(X(0))$  ; nous interprétons  $g$  comme étant une métrique riemannienne laissée invariante par les translations de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{R}^{2n}$ , nous avons clairement

$$N(X(p)) \leq \sum_{i=1}^N \|X_i(p)\|_g.$$

Ainsi, puisque  $p \mapsto X(p)$  est continue,  $N(X(p))$  est semi-continue supérieure-ment en 0. Nous souhaitons montrer qu'elle est aussi semi-continue inférieure-ment. Puisque  $N(X(p)) \geq 0$ , cela est immédiat si  $N(X(0)) = 0$  ; supposons donc  $N(X(0)) > 0$ , ce qui implique que les  $X_i(p)$  engendrent au moins un sous-espace symplectique de dimension deux.

Supposons que  $N(X(p))$  n'est pas semi-continue inférieurement en 0 : il existerait  $\epsilon > 0$  et une suite de points  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 0 tels que

$$N(X(0)) \geq N(X(p_i)) + 2\epsilon \quad \text{pour tout } i,$$

c'est-à-dire qu'il existerait une suite de matrices  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{Sp}(2n)$  telles que

$$N(X(0)) \geq N_{X(p_i)}(S_i) + \epsilon \quad \text{pour tout } i.$$

Puisque la fonction  $S^{2n-1} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} : (w, p) \mapsto \sum_{j=1}^N g(X_j(p), w)$  est continue, puisque  $\{p_i\}_i \rightarrow 0$ , puisque  $p \mapsto X(p)$  est continue et puisque  $\mathbb{R}\langle X(0) \rangle$  a un sous-espace symplectique, il existerait  $i_0$  et  $L > 0$  tel que, en raison de l'argument de réduction de Buhovski-Logunov-Tanny,

$$\begin{aligned} N(X(0)) &\geq \|S_i\|_g \cdot \min_{\|w\|_g=1, w \in \mathbb{R}\langle X(p_i) \rangle} \sum_{j=1}^N g(X_j(p_i), w) + \epsilon \\ &\geq \|S_i\|_g \cdot L + \epsilon \quad \text{pour tout } i \geq i_0. \end{aligned}$$

La suite de matrices  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  serait ainsi incluse dans un compact de  $\text{Sp}(2n)$  ; une sous-suite convergerait donc vers  $S_\infty \in \text{Sp}(2n)$ . Compte tenu de la continuité des fonctions  $p \mapsto X(p)$  et  $\text{Sp}(2n) \times (\mathbb{R}^{2n})^N : (S, v_1, \dots, v_N) \mapsto \sum_{i=1}^N \|Sv_i\|_g$ , nous aurions finalement

$$N(X(0)) \geq N_{X(0)}(S_\infty) + \epsilon \geq N(X(0)) + \epsilon, \quad \text{une absurdité.}$$

□

**Remarque B.4.4.** *Le dernier lemme suggère que le lemme B.4.1 puisse être vrai avec  $C(n) = 1$ . En effet, si nous pouvions choisir continûment une association  $p \mapsto g(p)$  telle que  $N(X(p)) = N_{X(p)}(g(p))$ , le tour serait joué. Par contre, alors que la valeur minimale  $N(X(p)) = \min_g N_{X(p)}(g)$  dépend continûment de  $p \in M$ , il pourrait être impossible de choisir le minimum  $g(p)$  continûment sur tout  $M$  (quand il existe partout). Le lemme stipule néanmoins qu'une association continue  $p \mapsto g(p)$  existe telle que les fonctions  $N(X(p))$  et  $N_{X(p)}(g(p))$ , sans être forcément égales, ne diffèrent pas trop.*

L'idée de la preuve du lemme B.4.1 consiste à fixer une triangulation  $T$  de  $M$  assez fine et d'utiliser un argument de récurrence sur  $k \in \{0, \dots, 2n\}$  pour construire une métrique continue compatible  $g$  sur le  $k$ -squelette de  $T$  qui vérifie partout l'inégalité annoncée. Une régularisation de la métrique obtenue afin de la rendre lisse nous permettra de conclure. Il faudra toutefois nous préoccuper d'un certain nombre de technicités.

*Démonstration du lemme B.4.1 :* Fixons  $\epsilon > 0$  et une métrique compatible  $g_0 \in \mathfrak{Met}(M, \omega)$ . Notons  $d$  la distance déterminée par  $g_0$ . Par compacité de  $M$ , il existe un recouvrement de  $M$  par un nombre fini de cartes de Darboux  $\{U_a\}_{a \in A}$  d'images compactes. Étant donné  $a \in A$ , un point  $p \in U_a$  et un produit scalaire compatible  $g_p$  sur  $T_p M$ , la carte de Darboux permet de translater  $g_p$  afin d'obtenir une métrique riemannienne compatible sur  $U_a$  que nous noterons  $g_{p,a}$ .

**Étape 1 :** Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $X$  engendre  $T_p M$  pour tout  $p \in M$ . En effet, supposons l'inégalité démontrée pour de telles collections. Considérons une collection  $Y = \{Y_j\}_{j=1}^P \subset \Gamma^\infty(TM)$  qui engendre  $T_p M$  en tout point ; de tels champs existent localement et nous pouvons utiliser une partition de l'unité et évoquer la compacité de  $M$  pour conclure à l'existence de  $Y$ . Alors  $X \cup sY$  engendre aussi  $TM$  quel que soit  $s > 0$ . Observons que  $N_{X \cup sY}(g) = N_X(g) + sN_Y(g)$ , que  $N(X \cup sY) = N(X) + sN(Y)$  et que  $N(Y) > 0$ . Par hypothèse, pour  $\epsilon > 0$  et  $s < \epsilon(2C(n) \max_M N(Y))^{-1}$ , il existe  $g$  tel que

$$\begin{aligned} N_X(g) &\leq N_{X \cup sY}(g) \\ &\leq C(n) \cdot N(X \cup sY) + \epsilon/2 \\ &= C(n) \cdot N(X) + \epsilon/2 + sC(n) \cdot N(Y) \\ &< C(n) \cdot N(X) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci établit l'affirmation. Nous supposons dorénavant que  $X$  engendre  $TM$ .

**Étape 2** : Nous voulons montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $p \in M$ , il existe  $g_p$  qui satisfait  $N_{X(p)}(g_p) = N(X(p))$  et une boule  $B_p(r)$  centrée en  $p$  et de rayon  $r$  (pour la métrique  $d$ ) telle que si  $U_a \ni p$  et si  $q \in B_p(r)$ , alors  $|N_{X(q)}(g_{p,a}) - N_{X(p)}(g_{p,a})| < \epsilon/2$ .

Il suffit de montrer le résultat pour chaque  $a \in A$ , puisque nous pourrons prendre  $r = \min_{a \in A} r_a$ . Donc soit  $a \in A$  ;  $U_a$  est naturellement identifié à un compact dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . La métrique  $g_0$  est alors équivalente à la métrique standard  $g_{st}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $C > 0$  telle que  $C^{-1}\|v\|_{g_0} \leq \|v\|_{g_{st}} \leq C\|v\|_{g_0}$  pour tout  $v$ . Il nous suffit donc d'établir l'existence de  $r_a$  pour  $g_0 = g_{st}$ .

Une métrique  $g_{p,a}$  s'identifie à une matrice symétrique symplectique définie positive  $S_{p,a}^T S_{p,a}$  où  $S_{p,a} \in \text{Sp}(2n)$ , de sorte que  $N_{X(q)}(g_{p,a}) = \sum_{i=1}^N \|S_{p,a} X_i(q)\|$ . Il découle de la démonstration de la réduction de Buhovski-Logunov-Tanny que si  $g_p$  satisfait  $N(X(p)) = N_{X(p)}(g_{p,a})$ , alors

$$N(X(p)) \geq \|S_{p,a}\| \min_{\|w\|=1} \sum_{i=1}^N |(X_i(p), w)| =: \|S_{p,a}\| a(p),$$

de sorte que

$$\|S_{p,a}\| \leq \sup_{\|w\|=1, q \in U_a} N(X(q)) \left( \sum_{i=1}^N |(X_i(q), w)| \right)^{-1}.$$

En vertu du lemme précédent et de l'hypothèse de l'étape 1, la fonction de droite est continue sur le compact  $S^{2n-1} \times U_a$  ; elle est donc bornée supérieurement par  $L_a$ . Bref, si  $g_p$  satisfait  $N(X(p)) = N_{X(p)}(g_{p,a})$ , alors  $\|S_{p,a}\| \leq L_a$ . Pour un tel  $g_p$ , considérant que chaque  $X_i$  est lisse et admet donc un réel  $L'_a$  comme constante de Lipschitz sur  $U_a$ , nous calculons pour tout  $q \in U_a$ ,

$$\begin{aligned} |N_{X(q)}(g_{p,a}) - N(X(p))| &\leq \|S_{p,a}\| \sum_{i=1}^N \left| \|X_i(q)\| - \|X_i(p)\| \right| \\ &\leq L_a \sum_{i=1}^N \|X_i(q) - X_i(p)\| \\ &\leq L_a L'_a N \|q - p\|. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre  $r_a := \epsilon/2L_a L'_a N$ .

**Étape 3** : Nous construisons une triangulation  $T$  appropriée.

En vertu de l'étape précédente, pour tout  $p \in M$ , il existe un produit scalaire compatible  $g_p$  sur  $T_p M$  et une boule ouverte  $B_p$  centrée en  $p$  de rayon  $r$  telle que pour tout  $a \in A$  et tout  $u, v \in B_p$ ,  $|N_{X(u)}(g_{p,a}) - N_{X(v)}(g_{p,a})| < \epsilon$ . Quitte à rétrécir les boules, le lemme précédent nous permet de supposer que pour tout  $u, v \in B_p$ ,  $|N(X(u)) - N(X(v))| < \epsilon$ .

Considérons le recouvrement ouvert  $\{B_p\}_{p \in M}$ . En raison de la compacité de  $M$ , le lemme de Lebesgue implique qu'il existe  $r > \delta > 0$  tel que tout sous-ensemble  $Z \subset M$  de diamètre inférieur à  $\delta$  (pour la distance  $d$ ) est contenu dans un certain  $B_p$ .

Nous considérons enfin une triangulation  $T$  de  $M$  si fine que pour chaque simplexe  $\Delta \in T$ , son *étoile*  $St(\Delta)$ , c'est-à-dire la réunion de tous les simplexes qui contiennent  $\Delta$  comme face, ait diamètre inférieur à  $\delta$ . Conséquentment, étant donné un simplexe  $\Delta$  et  $u, v \in \Delta$ , nous avons  $|N_{X(u)}(g_{p,a}) - N_{X(v)}(g_{p,a})| < \epsilon$  pour tout  $a \in A$  et  $|N(X(u)) - N(X(v))| < \epsilon$ . Nous dénotons  $T^{(k)}$  le  $k$ -squelette de  $T$ . Si  $q \in M$ , nous noterons abusivement  $St(q)$  l'étoile de la face qui contient  $q$ .

Pour chaque simplexe  $\Delta \in T$ , nous pouvons effectuer un choix de barycentre  $b_\Delta \in \Delta$ . Pour chaque barycentre  $b$ , l'étape 2 nous a donné un produit scalaire compatible  $g_b$  sur  $T_b M$  tel que  $N(X(b)) = N_{X(b)}(g_b)$ . Étant donné  $q \in M$ , nous dénotons  $Bar(q)$  l'ensemble des barycentres contenus dans  $St(q)$ .

**Étape 4 :** Nous construisons la métrique riemannienne compatible souhaitée par récurrence sur la dimension  $k$  des squelettes de  $T$ . Ce faisant, nous allons aussi considérer la suite  $\epsilon_k = (k + 1)\epsilon$ .

Nous initions la récurrence à  $k = 0$ . Pour chaque point  $p \in T^{(0)}$ , puisqu'il s'agit tautologiquement d'un barycentre, nous avons déjà un produit scalaire compatible  $g(b)$  sur  $T_b M$  tel que  $N(X(b)) = N_{X(b)}(g(b))$ . Observons que ce produit s'étend sur l'étoile de la face qui contient  $b$  en une métrique  $g(b)_a$  pour tout  $a$  tel que  $U_a \ni b$ ; il y a donc un sens à évaluer  $g(b)$  sur des vecteurs basés ailleurs qu'en  $b$ . Par construction, si  $p \in T^{(0)}$  et  $q \in St(p)$ , alors

$$\begin{aligned} N_{X(q)}(g(p)_a) &\leq N_{X(p)}(g(p)_a) + \epsilon = N(X(p)) + \epsilon \\ &\leq \max_{b \in Bar(q)} N(X(b)) + \epsilon \text{ pour tout } a \text{ approprié.} \end{aligned}$$

Nous posons  $\epsilon_0 = \epsilon$ .

Pour  $k \geq 1$ , supposons que nous ayons construit sur  $T^{(k-1)}$  une métrique riemannienne continue compatible  $p \mapsto g(p)$  qui vérifie pour  $p \in T^{(k-1)}$  et  $q \in M$

$$N_{X(q)}(g(p)_a) \leq k \max_{b \in Bar(q)} N(X(b)) + \epsilon_{k-1} \text{ pour tout } a \text{ approprié.}$$

Nous allons vouloir construire sur  $T^{(k)}$  une métrique riemannienne continue compatible  $p \mapsto g(p)$  qui étend la métrique déjà construite sur  $T^{(k-1)}$  et qui vérifie pour  $p \in T^{(k)}$  et  $q \in M$

$$N_{X(q)}(g(p)_a) \leq (k + 1) \max_{b \in Bar(q)} N(X(b)) + \epsilon_k \text{ pour tout } a \text{ approprié.}$$

Soient  $\Delta$  un  $k$ -simplexe et  $b := b_\Delta$  son barycentre. Nous avons déjà un produit scalaire compatible  $g(b)$  sur  $T_bM$  tel que  $N(X(b)) = N_{X(b)}(g(b))$ . Puisque  $\Delta$  est inclus dans une carte de Darboux  $U_a$ , effectuons un choix quelconque  $a = a(b)$ . Par construction, pour tout barycentre  $b' \in St(\Delta)$ , le produit scalaire  $g_{b'}$  s'étend sur  $St(\Delta)$  en une métrique riemannienne continue compatible  $g_{b',a}$ .

Soit  $p \in \partial\Delta$  fixé, mais arbitraire. Le produit scalaire  $g(p)$  s'étend sur  $St(\Delta)$  (par translation) en une métrique riemannienne continue compatible  $g(p)_a$ . Pour la paire compatible  $(\omega_0, g(b))$ , le produit scalaire  $g(b)$  correspond à la matrice identité  $G_0 = I$  tandis que le produit scalaire  $g(p)$  correspond à une matrice symplectique symétrique définie positive  $G_1 = S^T S$  avec  $S \in \text{Sp}(2n)$ . Notons que  $S^T S = Q^T D Q$  où  $D$  est symplectique diagonale définie positive et  $Q$  est symplectique orthogonale. Étant donné un paramétrage  $t \mapsto p_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , du segment droit qui relie  $b$  et  $p$ , nous considérons sur  $T_{p_t}M$  le produit scalaire compatible  $g(p_t)$  correspondant à la matrice  $G_t := Q^T D^t Q$ ; observons en effet que  $G_t$  est une matrice symplectique symétrique définie positive. Ceci définit aussi  $g(p_t)_a$  partout  $St(p_t)$  (par translation).

Pour chaque  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$v^T G^t v = (Qv)^T D^t (Qv) \leq (Qv)^T (D^0 + D^1) (Qv) = v^T v + v^T G_1 v.$$

Ainsi  $\|v\|_{g(p_t)} \leq \sqrt{\|v\|_{g(b)}^2 + \|v\|_{g(p)}^2} \leq \|v\|_{g(b)} + \|v\|_{g(p)}$ , de sorte que pour tout  $q \in St(\Delta)$ ,

$$N_{X(q)}(g(p_t)_a) \leq N_{X(q)}(g(b)_a) + N_{X(q)}(g(p)_a).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$N_{X(q)}(g(p)_a) \leq k \max_{b' \in \text{Bar}(q)} N(X(b')) + \epsilon_{k-1},$$

tandis que par construction de la triangulation,

$$N_{X(q)}(g(b)_a) \leq N_{X(b)}(g(b)_a) + \epsilon = N(X(b)) + \epsilon.$$

Nous déduisons donc

$$\begin{aligned} N_{X(q)}(g(p_t)_a) &\leq N(X(b)) + k \max_{b' \in \text{Bar}(q)} N(X(b')) + \epsilon + \epsilon_{k-1} \\ &\leq (k+1) \max_{b' \in B(q)} N(X(b')) + \epsilon_k. \end{aligned}$$

Puisque  $g(p)$  est continue en  $p \in T^{(k-1)}$ , la construction donne lieu à une métrique continue compatible  $g(p)$  pour  $p \in T^{(k)}$ . Ceci démontre le pas de la récurrence.

B-xviii

Pour  $k = 2n$ , nous obtenons ainsi une véritable métrique continue  $g \in \mathfrak{Met}(M, \omega_0)$  qui satisfait pour tout  $p \in M$  (pour  $a = a(p) \in A$  approprié et pour  $q \in St(p)$ )

$$N_{X(q)}(g(p)_a) \leq (2n + 1) \max_{b \in B(q)} N(X(b)) + (2n + 1)\epsilon .$$

En particulier, pour  $q = p$ , nous avons

$$\begin{aligned} N_{X(p)}(g(p)) &\leq (2n + 1) \max_{b \in B(p)} N(X(b)) + (2n + 1)\epsilon \\ &\leq (2n + 1) N(X(p)) + (4n + 2)\epsilon . \end{aligned}$$

Quitte à renormaliser  $\epsilon$ , ceci démontre le lemme avec  $C(n) \leq 2n + 1$ .

□

# Annexe C

---

## LEMME DE TOPOLOGIE

Cette annexe porte sur un seul lemme de nature topologique que nous utilisons dans la §2.4 afin d'obtenir des estimés sur l'invariant  $pb$  de certaines partitions de l'unité en dimensions supérieures. Les concepts qui interviennent dans le lemme sont définis dans la §2.3.2.

**Lemme C.0.1.** *Soient  $\mathcal{V}$  un recouvrement par des disques fermés plongés de  $S^2$  tel que  $V_1 \in \mathcal{V}$  est essentiel et confiné, de sorte qu'il existe  $x \in M$  tel que  $x \in V_i$  si et seulement si  $V_i = V_1$ . Soient  $y \in S^2 \setminus V_1$  et  $g : S^2 \rightarrow S^2$  une application lisse de degré 1 telle que  $g^{-1}(y) = \{y'\}$ . Alors il existe un recouvrement par des disques fermés plongés  $\mathcal{V}'$  de  $S^2$  qui est raffiné par  $g^{-1}\mathcal{V}$  et tel qu'un certain point  $x' \in g^{-1}(x)$  est fortement confiné.*

*Démonstration :* Puisque  $g$  a degré non nul,  $g^{-1}(p) \neq \emptyset$  pour tout  $p \in S^2$ . Il résulte du lemme 2.3.11 que nous pouvons écrire  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_I \sqcup \mathcal{V}_J$  avec

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &:= \{V_1\} \\ \mathcal{V}_I &= \{V_i\}_{i \in I} = \{V_i \in \mathcal{V} \mid y \in V_i, x \notin V_i\} \\ \text{et } \mathcal{V}_J &= \{V_j\}_{j \in J} = \{V_j \in \mathcal{V} \mid x, y \notin V_j\}.\end{aligned}$$

Puisque le confinement est une propriété  $C^0$ , quitte à effectuer une perturbation  $C^0$  de  $g$ , ce qui ne modifierait que de manière  $C^0$  le recouvrement rappelé  $g^{-1}\mathcal{V}$ , nous pouvons supposer que le graphe de  $g$  intersecte transversalement l'espace  $S^2 \times \{x\} \subset S^2 \times S^2$ , c'est-à-dire que  $g^{-1}(x)$  a cardinalité finie.

**Étape 1 :** Puisque  $V_1 \in \mathcal{V}$  ne contient pas  $y$ , alors  $y' \notin g^{-1}(V_1)$ . Pour chaque composante connexe de  $g^{-1}(V_1)$ , disons la  $k$ -ième, nous incluons dans  $\mathcal{V}'$  le plus petit disque fermé  $V'_{1,k}$  qui contient cette composante et qui ne contient pas  $y'$ .

**Étape 2 :** Pour  $V_i \in \mathcal{V}_I$  qui contient  $y$ , considérons la composante connexe  $W_i$  de  $g^{-1}(V_i)$  qui contient  $y'$ . Puisque  $x$  est confiné,  $V_1 \cup W_i$  ne recouvre pas  $S^2$  ;

C-ii

il existe  $z_i \in S^2 \setminus (V_1 \cup W_i)$ . Puisque  $V_1$  est un disque,  $y$  et  $z_i$  appartiennent au disque  $S^2 \setminus V_1$ .

Nous affirmons qu'il existe  $z'_i \in g^{-1}(z_i)$  contenu dans la composante connexe  $X$  de  $S^2 \setminus g^{-1}(V_1)$  qui contient  $y'$ . Si ce n'était pas le cas, alors nous aurions  $g^{-1}(z_i) \subset S^2 \setminus X = \cup_k V'_{1,k}$ . Nous pourrions ainsi couvrir  $g^{-1}(z_i)$  par une collection finie de disques  $\{D_{i,k}\}_{k \in L}$  telle que pour chaque  $D_{i,l}$ ,

$$g|_{D_{i,l}} : (D_{i,l}, \partial D_{i,l}) \rightarrow (S^2 \setminus \{y\}, Op V_1).$$

Puisque  $S^2 \setminus \{y\}$  se rétracte par déformation sur le disque  $V_1$ , nous pourrions construire une homotopie d'application  $g_t : S^2 \rightarrow S^2$  qui coïncident toutes sur  $S^2 \setminus D_{i,l}$ , telle que  $g_0 = g$  et telle que  $g_1|_{D_{i,l}} : D_{i,l} \rightarrow Op V_1$ . Ainsi,  $z_i \notin g_1(D_{i,l})$ . Par récurrence sur l'ensemble fini  $L$ , nous obtenons finalement une application  $g' : S^2 \rightarrow S^2 \setminus \{z_i\} \subset S^2$  qui est homotope à  $g$ . Nous aboutissons ainsi à la contradiction  $0 = \deg(g') = \deg(g) \neq 0$ .

Donc  $z'_i \in X \cap g^{-1}(z_i)$  existe et satisfait  $z'_i \notin V'_{1,k}$  pour tout  $k$ . Nous pouvons alors inclure dans la collection  $\mathcal{V}'$  le plus petit disque  $V'_i$  qui contient  $W_i$  et qui ne contient pas  $z'_i$ . Bref,  $z'_i \notin V'_i \cup V'_{1,k}$  pour tout  $k$ .

**Étape 3 :** Pour  $V_i \in \mathcal{V}_I$  qui contient  $y$ , considérons les composantes connexes de  $g^{-1}(V_i)$  qui ne contiennent pas  $y'$ . Donc une telle composante connexe ne contient ni  $y'$ , ni n'intersecte  $g^{-1}(x)$ . Similairement, chaque  $V_j \in \mathcal{V}_J$  est tel que  $x, y \notin V_j$ , de sorte que (les composantes de)  $g^{-1}(V_j)$  n'intersecte pas  $\{y'\} \cup g^{-1}(x)$ . Nous allons traiter d'un coup toutes ces composantes connexes.

Nous affirmons qu'il existe  $x' \in g^{-1}(x)$  tel que pour n'importe quelle composante  $Z$  qui ne contient ni  $y'$  ni les points de  $g^{-1}(x)$ , alors  $y'$  et  $x'$  appartiennent à la même composante de  $S^2 \setminus Z$ . Si ce n'était pas le cas, alors pour tout  $x_k \in g^{-1}(x)$ , il existerait une composante  $Z_k \subset S^2 \setminus \{y'\}$  qui séparerait  $y'$  et  $x_k$ , de sorte qu'il y aurait un cercle plongé  $C_k \subset Z_k$  qui séparerait  $y'$  et  $x_k$ . Puisque les cercles  $C_k$  seraient inclus dans  $S^2 \setminus \{y'\}$ , nous pourrions les ordonner partiellement par l'inclusion. Les cercles maximaux seraient disjoints et en nombre fini. Pour un cercle maximal  $C_l \subset Z_l$ , notons  $D_l$  son intérieur. Nous aurions alors une application

$$g|_{D_l} : (D_l, \partial C_l) \rightarrow (S^2 \setminus \{y\}, f(Z_l) \setminus \{y\}).$$

Puisque  $f(Z_l)$  appartient à un disque  $V_l$  qui ne contient pas  $x$ , il est possible de trouver une homotopie d'applications  $g_t : S^2 \rightarrow S^2$  qui coïncident toutes sur  $S^2 \setminus C_l$ , telle que  $g_0 = g$  et telle que  $g_1(D_l) \subset Op V_l$ ; en particulier,  $g_1(D_l) \not\ni x$ . Par récurrence sur la collection finie de cercles maximaux, nous obtenons une application  $g' : S^2 \rightarrow S^2 \setminus \{x\} \subset S^2$  qui est homotope à  $g$ ; nous aboutissons à la contradiction  $0 = \deg(g') = \deg(g) \neq 0$ .



Donc un  $x' \in g^{-1}(x)$  tel qu'annoncé existe. Pour chaque composante  $Z$  qui n'intersecte pas  $\{y'\} \cup g^{-1}(x)$ , nous incluons dans  $\mathcal{V}'$  le plus petit disque  $V'_Z$  qui contient  $Z$  et qui ne contient ni  $y'$  ni  $x'$ .

**Étape 4 :** Toutes les composantes connexes du recouvrement  $g^{-1}\mathcal{V}$  ont été élargies en des disques pour former la collection  $\mathcal{V}'$ . Nous affirmons que  $x'$  est confiné pour  $\mathcal{V}'$ . En effet, les seuls disques de  $\mathcal{V}'$  qui peuvent contenir  $x'$  sont les  $V'_{1,k}$ , qui ne recouvrent pas tout  $S^2$  puisque ces disques ne contiennent pas  $y'$ . Ainsi,  $V'_{x'} \subset \cup_k V'_{1,k} \subset S^2 \setminus \{y'\}$ . Aucune paire  $(V'_{x'}, V'_Z)$  n'est un recouvrement, car chaque  $V'_Z$  ne contient pas  $y'$ . Aucune paire  $(V'_{x'}, V'_i)$  n'est un recouvrement, car il y a un point  $z'_i$  n'est pas recouvert. Donc  $x'$  est confiné.

**Étape 5 :** Le point  $x'$  est fortement confiné. En effet, par construction, l'enceinte de  $x$  pour  $\mathcal{V}'$  est contenue dans une composante  $D$  de  $S^2 \setminus X$ , où nous rappelons que  $X$  est la composante connexe de  $S^2 \setminus g^{-1}(V_1)$  qui contient  $y'$ . Ainsi, (un voisinage de)  $D$  est un disque. Si un disque  $V'$  de  $\mathcal{V}'$  qui ne contient pas  $x'$  contenait toute la frontière de  $D$ , alors nous aurions soit  $x' \in D \subset V'$ , soit  $S^2 = D \cup V'$ . La première possibilité est exclue. La seconde impliquerait que  $y' \in V'$  puisque  $y' \notin D$ , mais ni  $V' = V'_i$  ni  $D$  ne couvriraient un certain  $z'_i$ . Cette contradiction établit que  $x'$  est fortement confiné.

□