,

Université de Montréal

Fonctions entières complexes ayant des propriétés prescrites sur la droite réelle

par

Mohamed Cheddadi

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques

août 2019

Sommaire

Ce mémoire traite successivement de prolongements-interpolations et d'approximations de certaines classes de fonctions définies sur des ensembles particuliers. Nous avons ainsi construit des prolongements de classe C^m(m fini ou non) pour des fonctions définies sur certains sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ (demi-espace, quart-espace, slab, ...) Aussi avons-nous prolongé une fonction analytique qui envoie un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ en une fonction holomorphe envoyant un voisinage ouvert U de I sur un voisinage ouvert V de J. Relativement au volet approximation nous avons considéré avec intérêt le théorème de Burke. Il constitue une généralisation du Lemme de Walsh. Ce dernier est lui-même une généralisation du théorème d'approximation de Weierstrass. Nous avons cherché, non sans difficultés, à en mettre au point une preuve plus simple que celle qui a été présentée par l'auteur. Nous avons eu recours au théorème d'approximation de Whitney après l'avoir généralisé du cas des fonctions lisses au cas des fonctions de classe C^m où m est fini. Il nous a permis de prouver certaines approximations qui nous permis à la fin de terminer la preuve du théorème de Burke.

Mots-clés : approximation, interpolation, holomorphe, variété, prolongement, dense, universalité.

Summary

This thesis is successively devoted to interpolation-extrapolation and approximation in certain classes of functions defined on particular sets. Thus, we construct extensions of class C^m (m finite or not) for functions defined on certain subsets (half-space, quarter-space, slabs, ...) of $\mathbb{R}^n$. Also, given a real-analytic function mapping an open interval I onto an interval J, we extend this function to a holomorphic function mapping a neighbourhood U of I in $\mathbb{C}$ into a given neighbourhood V of J. With regards to approximation, the Weierstrass approximation theorem was generalized by Walsh. A further generalization was given recently by Burke. We have attempted (with difficulty) to fashion a simpler proof than that given by Burke. As a tool we have invoked the Whitney approximation theorem for C^∞-functions, afte giving a version for C^m-functions, where m is finite. Finally, this allowed us to complete the proof of Burke's theorem.

Key-words : approximation, interpolation, holomorphic, manifold, extension, dense, universality.

Table des matières

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur Paul M. Gauthier et, mon co-directeur Javad Mashreghi. Je leur dois mon initiation à, l'activité de recherche en, mathématiques et le financement qui l'a accompagnée. J'ai beaucoup apprécié de travailler, sous la direction du Professeur Paul M. Gauthier qui m'a appris certains outils méthodologiques de recherche en mathématiques et m'a introduit dans la communauté mathématique. Je remercie mes professeurs en Maitrise, le personnel du département et particulièrement les techniciennes chargées de la gestion des dossiers étudiants et les bibliothécaires. Je termine en soulignant ma profonde gratitude envers toutes sources financières : famille, ministères, ..., etc, qui ont ajouté de la fluidité à mon travail.

INTRODUCTION

On peut dire que le sujet de ce mémoire porte sur l'approximation et l'interpolation. Les montres qui fonctionnent sont un exemple d'approximation. Une bonne montre qui fonctionne nous donne une très bonne approximation de l'heure, mais elle n'a jamais l'heure précise. Une montre qui est brisée par contre est un exemple d'interpolation. Elle a précisément la bonne heure deux fois par jour. Dans ce mémoire on cherche à construire des montres (fonctions analytiques) qui donnent à la fois une bonne approximation et aussi parfois de bonnes interpolations. Ce n'est pas évident, car les fonctions analytiques sont très rigides. Si l'on ajuste la fonction pour un certain critère, on risque de la déformer pour d'autres critères. Les fonctions analytiques sont globalement déterminées par leur comportement local. Par exemple, si le phénomène consistant à aller sur une autre galaxie est analytique, il est detérminé par son comportement ici chez nous, où nous pouvons l'observer et le mesurer.

Chapitre 1

PRÉALABLES

Définition 1.0.1. *On désigne par*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$$

l'ensemble de tous les nombres ***entiers naturels*** *et par :*

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, ...\}$$

l'ensemble privé de l'élément 0.

1.1. RAPPELS DE TOPOLOGIE

Ces rappels ont été tirés de l'ouvrage [**4**].

1.1.1. Espaces topologiques

1.1.1.1. *Ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages*

Définition 1.1.1. *On appelle* ***espace topologique*** *tout couple constitué par un ensemble X et un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X appelées* ***ensembles ouverts*** *(ou en abrégé «ouverts») et satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

O_1 : *L'ensemble $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts.*

O_2 : *Toute intersection* ***finie*** *d'ouverts est un ouvert.*

O_3 : *Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est un ouvert.*

On dit que $\mathcal{O}$ définit ***une topologie*** *sur X.*

Définition 1.1.2. *On dit qu'un sous-ensemble A de E est* ***fermé*** *lorsque son complémentaire $E \setminus A$ est ouvert.*

Définition 1.1.3. *On appelle* ***voisinage*** *d'un point x de X tout sous-ensemble de X contenant un ouvert contenant x. On désigne en général par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages V de x. On appelle voisinage d'une partie A de X tout sous-ensemble de X contenant un ouvert contenant A.*

Définition 1.1.4. *On dit qu'un espace E est* ***séparé*** *ou de Hausdorff lorsque deux points distincts quelconques de E possèdent deux voisinages* ***disjoints****.*

1.1.1.2. *Fermeture, intérieur, frontière*

Définition 1.1.5. *Soit A une partie de E et soit $x \in E$. On dit que x est* ***adhérent*** *à A si tout voisinage de x contient un point de A. On dit que x est un* ***point d'accumulation*** *de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x. On dit que x est un* ***point isolé*** *de A s'il appartient à A, mais n'en est pas un point d'accumulation, autrement dit s'il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A que x. On appelera* ***adhérence*** *de A l'ensembles des points de E qui sont adhérents à A.*

Définition 1.1.6. *On appelle fermeture de A, et on note $\overline{A}$, le plus petit ensemble fermé de E contenant A.*

Proposition 1.1.7. *Pour tout ensemble A, l'adhérence et la fermeture de A sont identiques.*

Définition 1.1.8. *On appelle* ***intérieur*** *d'un sous-ensemble A de E, la réunion, éventuellement vide, de tous les ouverts contenus dans A. C'est donc le plus grand des ouverts contenus dans A; on le note $int(A)$.*

Définition 1.1.9. *La frontière du sous-ensemble A de E, notée Fr(A), est l'ensembles des points x dont tout voisinage V contient au moins un point de A et un point de $E \setminus A$.*

Proposition 1.1.10. *Pour toute partie A de E, on a :*

$$Fr(A) = \overline{A} - int(A). \tag{1.1.1}$$

Définition 1.1.11. *Soit A un sous-ensemble d'un espace E. On dit que A est partout dense sur E si et seulement si :*

$$\overline{A} = E. \tag{1.1.2}$$

1.1.1.3. *Fonctions continues, Homéomorphismes*

Définition 1.1.12. *On dit que l'application f de l'espace topologique X dans l'espace topologique Y est continue au point x_0 de X si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 dont l'image par f soit dans V, c'est à dire telle que $f(U) \subset V$.*

Définition 1.1.13. *On dit que l'application f de X dans Y est continue sur X (ou dans X) si elle est continue en tout point de X.*

Théorème 1.1.14. *Dire que f est continue sur X équivaut à dire que, pour tout fermé B de $Y, f^{-1}(B)$ est un fermé de X.*

Définition 1.1.15. *Une bijection f de l'espace topologique X sur l'espace topologique Y est un homéomorphisme si et seulement si f et f^{-1} sont continues.*

1.1.1.4. *Sous-espace d'un espace topologique*

Définition 1.1.16. *Pour tout sous-ensemble A d'un espace topologique E on appelle **sou-espace** A de E l'ensemble A muni de la topologie dont les ouverts sont les traces sur A des ouverts de E.*

Proposition 1.1.17. *Pour que tout ouvert (resp. fermé) du sous-espace A de E soit un ouvert (resp. fermé) de E, il faut et il suffit que A soit ouvert (resp. fermé) dans E.*

1.1.1.5. *Espaces compacts*

Définition 1.1.18. *On dit qu'une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** d'un ensemble E si $E \subset \bigcup\limits_{i\in I} X_i$.*

Définition 1.1.19. *On dit qu'un espace E est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

La condition que E soit séparé a pour seul but d'éliminer des espaces peu utilisables tels que les espaces à topologie grossière.

Proposition 1.1.20. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle fermé $[a, b]$ est **compact**.*

Théorème 1.1.21. *Dans un espace compact E, tout sous-ensemble fermé est un sous-espace compact.*

Théorème 1.1.22. *Dans tout espace séparé E, tout sous-espace compact de E est fermé dans E.*

Théorème 1.1.23. *Dans tout espace séparé, la réunion de deux compacts est un compact; toute intersection de compacts est un compact.*

Théorème 1.1.24. *Pour toute application continue f d'un espace compact E sur un espace séparé F, le sous-espace $f(E)$ de F est compact.*

Corollaire 1.1.25. *Toute bijection continue f d'un espace compact E sur un espace séparé F est un homéomorphisme.*

Corollaire 1.1.26. *Toute fonction continue sur un espace compact E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée sur E et atteint ses bornes.*

1.1.1.6. *Connexité*

Définition 1.1.27. *On dit qu'un espace topologique E est connexe s'il n'existe aucune partition de E en deux parties fermées non vides. Cette propriété est évidemment (par dualité) équivalente à chacune des suivantes :*

(1) Il n'existe aucune partition de E en deux parties ouvertes non vides.

(2) Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

Théorème 1.1.28. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E. Si l'intersection de cette famille n'est pas vide, sa réunion est connexe.*

Théorème 1.1.29. *La fermeture de tout ensemble connexe est connexe.*

Définition 1.1.30. *On appelle* ***continu*** *tout espace compact et connexe.*

Définition 1.1.31. *On appelle* ***domaine*** *d'un espace E toute partie D ouverte et connexe de E.*

Définition 1.1.32. *Pour tout point x d'un espace E, on appelle composante connexe de x la réunion $C(x)$ des parties connexes de E qui contiennent x.*

Définition 1.1.33. *On dit qu'un espace E est connexe par arcs si pour tous $a, b \in E$, il existe une application continue f d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans E telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.*

1.1.2. Espaces métriques

Définition 1.1.34. *On appelle* ***espace métrique*** *tout couple constitué par un ensemble E et une application $(x, y) \to d(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$, possédant les propriétés suivantes :*

(1) $(x = y) \Leftrightarrow (d(x, y) = 0)$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie);*

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Inégalité triangulaire).*

La fonction d s'appelle ***une distance*** et $d(x, y)$ *s'appelle la distance des points x,y.*

Définition 1.1.35. *Soit E un espace métrique défini par une distance d, et soit A une partie de E. On appelle sous-espace métrique A de E l'ensemble A muni de la distance d_A définie par $d_A(x, y) = d(x, y)$ pour x et $y \in A$.*

Définition 1.1.36. *Dans tout espace métrique E, on appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r ($r \geq 0$ ou $+\infty$ et $a \in E$) l'ensemble $B(a, r)$ des points x de E tels que $d(a, x) < r$ (resp. $\leq r$). Lorsque E est le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on remplace souvent le mot boule par le mot disque. On appelle sphère de centre a et de rayon ($r \geq 0$) l'ensemble $S(a, r)$ des points de E tels que $d(a, x) = r$.*

Définition 1.1.37. *On appelle diamètre d'une partie A d'un espace métrique E, le suprémum $\delta(A)$ de l'ensemble de toutes les distances $d(x, y)$, où x et $y \in A$.*

1.1.2.1. *Topologie d'un espace métrique*

Définition 1.1.38. *Dans un espace métrique E on dit qu'un sous-ensemble A de E est ouvert s'il est vide ou si pour tout $x \in A$ il existe une boule ouverte de centre x et de rayon non nul contenue dans A.*

Proposition 1.1.39. *Tout espace métrique est séparé.*

1.1.2.2. *Continuité uniforme*

Définition 1.1.40. *On dit qu'une application f d'un espace métrique E dans un espace métrique F est **uniformément continue** si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que :*

$$(d_E(x, y) \leq \eta) \Rightarrow (d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon).$$

1.1.2.3. *Espaces métriques compacts*

Proposition 1.1.41. *Toute application continue f d'un espace métrique compact E dans un espace métrique F est **uniformément continue**.*

1.1.2.4. *Espaces métriques connexes*

Proposition 1.1.42. *Les seuls ensembles connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés).*

1.1.2.5. *Convergence simple et convergence uniforme*

Définition 1.1.43. *On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

Définition 1.1.44. *Soit X un ensemble quelconque, muni ou non d'une topologie, et soit Y un espace que nous supposerons métrique : on désigne par f et f_n des applications de X dans Y. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (ou encore que f est limite uniforme des f_n) si, pout tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$.*

1.1.3. Espaces normés

1.1.3.1. *Topologie associée à une norme*

Définition 1.1.45. *On appelle espace normé tout espace vectoriel E muni d'une norme. On dit qu'un espace normé E est un espace de Banach s'il est complet pour la distance associée à la norme.*

Théorème 1.1.46. *Soient E, F deux espaces normés, et f une application linéaire de E dans F. Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

(1) f est continue;

(2) f est bornée sur toute partie bornée de E;

(3) Il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $x \in E$ on ait :

$$||f(x)|| \leq k||x||. \tag{1.1.3}$$

Définition 1.1.47. *Sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des* ***applications linéaires continues*** *de E dans F on pose pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$:*

$$||f|| = \underset{||x||\leq 1}{sup} ||f(x)||.$$

Proposition 1.1.48. *La fonction $f \mapsto ||f||$ est une* ***norme*** *sur $\mathcal{L}(E, F)$. Pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F), ||f||$ est le plus petit nombre $k \geq 0$ tel que $||f(x)|| \leq k||x||$.*

1.1.3.2. *Ensembles convexes*

Définition 1.1.49. *Soit X un espace vectoriel et $(a, b) \in X^2$. Le segment $[a, b]$ est le sous-ensemble de X défini par :*

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}. \tag{1.1.4}$$

Définition 1.1.50. *Un sous-ensemble U d'un espace espace vectoriel normé X est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall (a, b) \in U^2 \quad [a, b] \subset U. \tag{1.1.5}$$

1.2. RAPPELS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Définition 1.2.1. *Une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ est différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h). \tag{1.2.1}$$

On dit alors que L est ***la différentielle*** *de f en a, ou l'application* ***linéaire tangente*** *à f en a. On a désigné par $h \mapsto 0(h)$ une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telle que, pour les normes $||.||_{\mathbb{R}^p}$ et $||.||_{\mathbb{R}^q}$ sur les espaces source et but, on ait*

$$\lim_{h \to 0} \frac{||o(h)||_{\mathbb{R}^q}}{||h||_{\mathbb{R}^p}} = 0.$$

Cette propriété ne dépend pas du choix des normes utilisées pour la formuler. On notera df_a la différentielle de f en a.

Les dérivées partielles sont définies à partir de limites. Leur définition est analogue à celle des dérivées ordinaires qu'elles généralisent.

Définition 1.2.2. *Soit $a = (a_1, a_1, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction de n variables. La* ***dérivée partielle*** *(d'ordre 1, ou première) de f au point a par rapport à la i-ème variable x_i est, si elle existe, la dérivée directionnelle de f au point a dans la direction du i-ème vecteur de la base canonique, ou encore, la dérivée* *au point a_i de la fonction $\phi : x \quad \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} \tag{1.2.2}$$

Définition 1.2.3. *Un multi-indice de taille n est un vecteur*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

à coefficients α_i entiers naturels .

*Au multi-indice α est associé sa **longueur** (i.e son module) $|\alpha|$ définie par*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n.$$

On utilise pour un vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une notation sous forme d'exponentiation pour représenter le calcul polynômial :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

et on peut introduire l'opérateur différentiel

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n},$$

où

$$\partial_i^j = \frac{\partial^j}{\partial x_i^j}.$$

Il faut prendre garde à n'utiliser cette notation que dans le cas de fonctions pour lesquelles l'ordre des dérivations n'importe pas (c'est à dire vérifiant par exemple les conditions du Théorème de Schwarz). Pour écrire les formules classiques, on introduit une multi-factorielle généralisant la factorielle :

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!.$$

On va utiliser ces notations pour exprimer le polynôme de Taylor d'une fonction de **deux** variables, dans la suite. Dans ce cas on a

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Théorème 1.2.4. *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}, f \in C[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors :*

$$(\exists\ \lambda \in (0{,}1))\ (f(b) - f(a) = f'(a + \lambda(b - a)).(b - a)). \tag{1.2.3}$$

Définition 1.2.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \{0,1,\ldots,n\}$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, est dite de **classe** C^m (on note $f \in C^m(U)$) si, pour tout $k \in \{0,\ldots,m\}$, elle admet des **dérivées partielles d'ordre** k **continues sur** U **tout entier.***

Définition 1.2.6. *La fonction f est de classe C^∞ si et seulement si :*

$$(\forall m \in \mathbb{N})\ (f \in C^m(U)). \tag{1.2.4}$$

Définition 1.2.7. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, est dite de classe C^m, si et seulement si ses **parties réelles et imaginaires le sont**.*

Définition 1.2.8. *Une application $f : U \to \mathbb{R}^q$, est dite de classe C^m, si et seulement si ses composantes le sont.*

Définition 1.2.9. *Pour U, ouvert de $\mathbb{C}^p$, on dit qu'une application f sur U, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ ou $\mathbb{C}^q$ est de classe C^m si elle l'est en considérant U comme ouvert de $\mathbb{R}^{2p}$ de la façon usuelle.*

Définition 1.2.10. *Un homéomorphisme $f : U \to V$, d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^q$ est un C^m-difféomorphisme si et seulement si f et f^{-1} sont toutes deux de classe C^m.*

Théorème 1.2.11. *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé X et $f : U \to \mathbb{R}$ une **fonction différentiable** dans l'ouvert U. Si $[a,b] \subset U$ alors :*

$$(\exists\, \lambda \in (0,1))\ (f(b) - f(a) = Df(a + \lambda(b-a)).(b-a)). \tag{1.2.5}$$

Théorème 1.2.12. *(Inversion locale) Soit f une application de classe $C^m(m \geq 1)$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, et a un point de U où la différentielle df_a est **inversible**. Alors il existe un ouvert V inclus dans U et contenant a tel que $f : V \to f(V)$ soit un **difféomorphisme** de classe C^m.*

Théorème 1.2.13. *(Théorème des fonctions implicites, version générale) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^m, avec $m > 1$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tel que $f(a,b) = 0$ et la différentielle de l'application $y \in \mathbb{R}^q\ : \mapsto\ f(a,y) \in \mathbb{R}^q$ au point b est **inversible**. Alors, il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^p$, un voisinage W de b dans $\mathbb{R}^q$ et* *une application $\phi : V \to W$ de classe C^m tels que $V \times W \subset U$ et $\forall x \in V, \forall y \in W, f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$.*

1.3. NOTIONS SUR LES VARIÉTÉS

Définition 1.3.1. *Une **variété topologique de dimension** n est un espace topologique séparé dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.3.2. *Une **carte** d'une variété topologique X est la donnée d'un couple (U, ϕ) formé d'un ouvert U de X (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme ϕ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

*Un **atlas** de X est une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ (pas nécessairement finie) de cartes, dont les domaines U_i recouvrent X.*

Définition 1.3.3. *Deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) d'une variété topologique M sont **compatibles** d'ordre m $(1 \leq m \leq +\infty)$ si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou si l'application :*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \ \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2), \tag{1.3.1}$$

(dite fonction de transition) est un C^m-difféomorphisme. Un atlas de classe C^m d'une variété topologique M est un atlas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ de M dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles d'ordre m.

Définition 1.3.4. *Un atlas de classe C^m d'une variété topologique M est dit **maximal** si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même à l'atlas. Un tel atlas est aussi appelé **structure différentielle** de classe C^m.*

Définition 1.3.5. *Une **variété différentielle** de classe C^m est une variété topologique munie d'une structure différentielle de classe C^m.*

Définition 1.3.6. *Soient M et N deux variétés de classe C^m. Une application continue f de M dans N est dite de classe C^m si quel que soit $a \in M$, il existe une carte (U, ϕ) de M, avec $a \in U$, une carte (V, ψ) de N, avec $f(a) \in N$, telle que l'application :*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} \ : \ \phi(f^{-1}(V) \cap U) \ \to \ \psi(V), \tag{1.3.2}$$

soit de classe C^m.

Exemple 1.3.7. *(1)* $\mathbb{R}^n$ *est trivialement une variété topologique de dimension* n.

(2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *tout domaine de* $\mathbb{R}^n$ *a une* ***structure naturelle de variété lisse****.*

Soit M *un domaine de* $\mathbb{R}^n$*. Une première carte de* M *peut être* (M, id)*. Le singleton formé par cette carte est un atlas de classe* C^∞ *puisque, id est de classe* C^∞*. La classe d'équivalence, formée par tous les atlas de classe* C^∞ *de* M *qui sont équivalents à ce premier atlas, forme une structure différentielle de classe* C^∞ *(autrement dit, lisse) sur* M *qui en fait une variété différentielle lisse.*

(3) Le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *est une variété topologique de dimension* 1.

(4) Le n-Tore $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ *(*n *facteurs) est une variété topologique de dimension* n.

Chapitre 2

FONCTIONS DE CLASSE C^m SUR DES SOUS-ENSEMBLES DE $\mathbb{R}^n$

2.1. Différentiabilité aux sens faible et fort

Définition 2.1.1. *Soit A un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que $f \in C^m(A)$ au sens fort si et seulement s'il existe un ouvert U contenant A et une fonction $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ telle que :*

(1) $\tilde{f} \in C^m(U)$,

(2) $\tilde{f}|_A = f$.

Le Théorème I (pp. 65, **[12]**), nous donne une caractérisation de telles fonctions.

Théorème 2.1.2. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et A un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un ensemble de fonctions $\{f_\alpha\}_{|\alpha|\leq m}$ définies sur A pour les multi-indices α, satisfaisant la condition suivante; dite de compatibilité, en tout point $(x, y, a) \in A^3$:*

$$f_\alpha(x) = \sum_{|\beta|\leq(m-|\alpha|)} \left(\frac{f_{\alpha+\beta}(y)}{\beta!}(x-y)^\beta \right) \ + \ R_\alpha(x, y); \tag{2.1.1}$$

où $R_\alpha(x, y)$ possède la propriété suivante $(\forall\epsilon > 0)$ $(\exists\delta > 0)$ $(\forall(x, y) \in A^2)$

$$((|x - a| < \delta \text{ et } \quad |y - a| < \delta)) \quad \Rightarrow \quad (|R_\alpha(x, y)| \leq |x - y|^{m-|\alpha|}\epsilon). \tag{2.1.2}$$

Alors, il existe une fonction $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ telle que :

(1) $F|_A = f_0$;

(2) $\partial^\alpha F|_A = f_\alpha$;

*(3) F est **analytique réelle** en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Définition 2.1.3. *Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $A = \overline{\mathring{A}}$, par exemple $A = [0, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $f \in C^m(A)$ au sens faible si et seulement si*

(1) $f \in C^m(\mathring{A})$,

(2) Pour tout entier naturel $k \leq m$, toute dérivée partielle de f sur $\mathring{A}$ d'ordre k a un prolongement continu à A.

Il découle de cette définition que f possède un prolongement continu à A.

Pour comparer les notions «sens fort» et «sens faible», il est nécessaire de se placer sur $\mathbb{R}^n$ où elles coexistent. Pour cela considérons une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, où A est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.

Théorème 2.1.4. *Le sens fort implique le sens faible.*

Démonstration. Supposons que $f \in C^m(A)$ au **sens fort**. Cela signifie qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant A et une fonction g qui est de classe C^m sur cet ouvert, telle que $g|_A = f$. Il en résulte que pour tout entier naturel $k \leq m$, g admet des dérivées partielles d'ordre k sur A, qui sont toutes continues sur A. Elle sont des prolongements continus sur A de leurs restrictions a $\mathring{A}$. On en déduit que $f \in C^m(A)$ **au sens faible.** $\square$

On se demande si la réciproque est vraie; c'est-à-dire si le sens faible implique le sens fort. Dans cette optique, il serait utile de savoir sous quelles circonstances une fonction de classe C^m sur un ouvert U admet un prolongement de classe C^m sur la fermeture $\overline{U}$. Voici un cas trivial.

Lemme 2.1.5. *Soit f une fonction de classe C^m sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre au plus m aient des prolongements continus à l'origine. Alors f est de classe C^m sur $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, l'origine présente une **singularité artificielle** pour f.*

Démonstration. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ de classe C^m, sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Donc, elle possède des dérivéées partielles jusqu'à l'ordre m sur tout $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ qui y sont, de surcroit, continues et ayant des limites finies lorsqu'on tend vers l'origine, lesquelles sont leurs valeurs de prolongements par continuité à l'origine. On convient que

$$f(0,0,...,0) = \lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(0,0,...,0)} f(x_1,x_2,...,x_n). \tag{2.1.3}$$

Cherchons les dérivéées partielles du premier ordre de f au point 0.

Par définition

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0,...,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0,...,t,...,0) - f(0,0,...,0)}{t}. \tag{2.1.4}$$

Or, en vertu du théorème des accroissemnets finis, appliqué à f entre les points $(0,0,...,0)$ et $(0,0,...,t,...,0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0,...,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0,...,c_i(t),...,0); \tag{2.1.5}$$

où $c_i(t)$ est un nombre réel vérifiant

$$0 < |c_i(t)| \leq |t|. \tag{2.1.6}$$

Il en découle aisément que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0,...,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,...,x,...,x_n). \tag{2.1.7}$$

En réitérant, le même raisonnement, on obtient :

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^{\alpha_1},\ldots,\partial x_n^{\alpha_n}}(0,0,...,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^{\alpha_1},\ldots,\partial x_n^{\alpha_n}}(x_1,x_2,...,x_n). \tag{2.1.8}$$

pour tout $|\alpha| \leq m$. Les dérivéées partielles jusqu'à l'ordre m de f en $(0,0,...,0)$ existent et, ne sont autres que, les valeurs des prolongements de ces dérivées sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ à 0. On en déduit, alors, que $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Dans la suite on va examiner certains cas de sous-ensembles A de $\mathbb{R}^n$, pour lesquels on va prouver que le sens faible implique le sens fort.

2.2. Etude de cas particuliers

2.2.1. Demi-espace

Commencons par considérer la fonction f à valeurs réelles et définie sur le sous-ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$. On suppose que $f \in C^m(A)$ **au sens faible** et on lui cherche un prolongement à un ouvert U contenant A, ce qui lui permettrait d'être dans $C^m(A)$ au **sens fort.**

Explicitons les cas suivants :

(1) $m = +\infty$. (pp. 625, [**11**])

Soit $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, S_+ = \mathbb{R}^n \times \{t > 0\}$ et soit $D_+ = \{f \in C^\infty(S_+) \mid f$ et ses dérivéées partielles ont des limites continues lorsque $t \to 0_+\}$. D_+ est muni de la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée sur des sous-ensembles compacts de la fermeture de S_+ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ possède une topologie correspondante.

Théorème 2.2.1. *Il existe un opérateur de prolongement, linéaire et continu,*

$$E : D_+ \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}); \tag{2.2.1}$$

tel que

$$E(f)(x,t) = f(x,t) \quad pour \quad t > 0. \tag{2.2.2}$$

(2) m est fini. [**8**]

Soient $a_1, a_2, ..., a_{m+1}$ les solutions du système des $m+1$ équations à $m+1$ inconnues suivant :

$$(-1)^j a_1 + (-\frac{1}{2})^j a_2 + ... + (-\frac{1}{m+1})^j a_{m+1} = 1 \quad \text{où } j \in \{0, 1, ..., m\}. \tag{2.2.3}$$

Le déterminant du système, étant de Vandermonde avec éléments distincts 2 à 2, est non nul. Donc il existe une et une seule solution $(a_1, a_2, ..., a_{m+1})$ de ce système.
On définit sur l'ensemble :

$$-A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid x \leq 0\},$$

la fonction g par

$$g(x,y) = a_1 f(-x,y) + a_2 f(-\frac{x}{2}, y) + ... + a_{m+1} f(-\frac{x}{m+1}, y). \tag{2.2.4}$$

De la manière dont elle dépend de f, on peut conclure aisément, que $g \in C^m(-A)$ au **sens faible**.
On énonce, à présent, le Lemme suivant qui va nous être utile dans la suite.

Lemme 2.2.2. *Soit h une fonction définie sur un voisinage U d'un point x_0 d'un espace topologique X. Si U peut s'écrire*

$$U = A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

sachant que le point x_0 est un point limite pour chaque sous-ensemble A_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) et que les limites

$$\lim_{x \to x_0} h|_{A_i}(x), \quad i = 1, \ldots n, \quad (*)$$

existent et ont une même valeur b. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = b. \tag{2.2.5}$$

Démonstration. Soit W un voisinage de b. Par l'hypothèse $(*)$, on a

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\ (\exists\ U_i \text{ voisinage de } x_0)\ (\forall x \in A_i \cap U_i)\ (h(x) \in W).$$

Soit $V = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Alors, $x \in V \Rightarrow h(x) \in W$. Donc,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = b.$$

□

Sur la frontière $x = 0$ de A on a, en un point quelconque $(0, y)$:

$$g(0, y) = a_1 f(0, y) + a_2 f(0, y) + \ldots\ldots\ldots + a_{m+1} f(0, y) \tag{2.2.6}$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_{m+1}) f(0, y) = f(0, y), \tag{2.2.7}$$

après avoir considéré 2.2.3 pour $j = 0$.

On peut, alors, introduire la fonction $\tilde{f}$ composée de ses restrictions : $\tilde{f}|_A = f$ et $\tilde{f}|_{-A} = g$.

Montrons que $\tilde{f}$ est dans $C^m(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. En effet, on a

$$\lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \tilde{f}|_{-A}(x, y) = \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} (a_1 f(-x, y) + a_2 f(-\frac{x}{2}, y) + \cdots + a_{m+1} f(-\frac{x}{m+1}, y))$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_{m+1}) f(0, y_0) = f(0, y_0).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \tilde{f}|_A(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)\\ &= f(0,y_0).\end{aligned}$$

Alors, en vertu du Lemme 2.2.2 ci-dessus, on peut conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \tilde{f}(x,y) = f(0,y_0). \tag{2.2.8}$$

Il en résulte que $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

On peut définir un opérateur differentiel d'ordre au plus m de la forme $d_x^k\partial_y^\alpha$, où $k+|\alpha|\leq m$. On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,y_0))}(d_x^k\partial_y^\alpha)g(x,y) &= \sum_{i=1}^{m+1} a_i \lim_{x\nearrow 0, y\to y_0}(d_x^k\partial_y^\alpha)f(-\frac{x}{i},y)\\ &= \sum_{i=1}^{m+1} a_i \lim_{x\nearrow 0, y\to y_0}(d_x^k\partial_y^\alpha f)(-\frac{x}{i},y)(-\frac{1}{i})^k\\ &= \sum_{i=1}^{m+1} a_i(-\frac{1}{i})^k \lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(d_x^k\partial_y^\alpha f)(x,y)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(d_x^k\partial_y^\alpha f)(x,y).\end{aligned}$$

D'où, de nouveau, en vertu du Lemme 2.2.2 , on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(d_x^k\partial_y^\alpha)\tilde{f}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)}(d_x^k\partial_y^\alpha f)(x,y). \tag{2.2.9}$$

Sur la frontiere $x=0$:

(a) <u>Dérivée partielle de $\tilde{f}$ suivant x :</u>

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(0,y_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(t,y_0)-\tilde{f}(0,y_0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(t,y_0)-f(0,y_0)}{t}.\end{aligned}$$

Si $t>0$ alors

$$\frac{\tilde{f}(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t}.$$

Puisque

$$(\exists c(t)\in(0,t))\ (\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(c(t),y_0)),$$

en vertu du théorème des accroissements finis, alors

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(c(t), y_0).$$

Finalement on obtient

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0), \tag{2.2.10}$$

qui est une quantité existante par hypothèse.

Si $t < 0$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(t, y_0) - f(0, y_0)}{t} &= \frac{a_1 f(-t, y_0) + a_2 f(-\frac{t}{2}, y_0) + ... + a_{m+1} f(-\frac{t}{m+1}, y_0) - f(0, y_0)}{t} \\ &= \frac{a_1(f(-t, y_0) - f(0, y_0)) + ... + a_{m+1}(f(-\frac{t}{m+1}, y_0) - f(0, y_0))}{t}. \end{aligned}$$

Or $(\forall k \in \{0, 1, ..., m\})$ $(\exists c_k(t) \in (0, -\frac{t}{k+1}))$ tel que :

$$\frac{f(-\frac{t}{k+1}, y_0) - f(0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_k(t), y_0)).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [f]}{\partial x}(0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(c_k(t), y_0) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

(b) Dérivée partielle de $\tilde{f}$ suivant $y_j \quad (1 \leq j \leq n)$:

Si $y_0 = (y_0^1, y_0^2, ..., y_0^j, ..., y_0^n)$ alors on a :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j}(0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{f}(0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^j + t, ..., y_0^n) - \tilde{f}(0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^j, ..., y_0^n)}{t}$$

Or :

$$\frac{\tilde{f}(0, y_0^1, ..., y_0^j + t, ..., y_0^n) - \tilde{f}(0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^n)}{t} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, y_0^1, ..., y_0^j + t, ... y_0^n) - f(x, y_0^1, ..., y_0^n)}{t}.$$

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y_0^1, ..., y_0^j + t, ..., y_0^n) - f(x, y_0^1, ..., y_0^n)}{t} &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0^1, \ldots, c^j(y_0, x, t), \ldots, y_0^n) \quad (2.2.12) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, c(y_0, x, t))), \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

où $0 < |c^j(y_0, x, t) - y_0^j| < |t|$.

Notons $[\partial f/\partial y_j]$ le prolongement continu de $\partial f/\partial y_j$ au demi-espace fermé A et fixons $\epsilon > 0$. Puisque $[\partial f/\partial y_j]$ est continue en $(0,y_0)$, il existe un $\delta > 0$, tel que $0 \leq x \leq \delta$, et $||y - y_0||_{\mathbb{R}^n} \leq \delta$, entrainent

$$\left| \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} \right] (x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} \right] (0,y_0) \right| \leq \epsilon.$$

En particulier, $|t| \leq \delta,$ et $0 \leq x \leq \delta$, entrainent :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, c(y_0, x, t))) - \left[\frac{\partial f}{\partial y_j} \right] (0,y_0) \right| \leq \epsilon.$$

On en déduit

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial j_j}(0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial j_j}(x, y). \tag{2.2.14}$$

Nous avons montré que la dérivée partielle par rapport à y_j $(1 \leq j \leq n)$ du prolongement de f existe sur A et est égale au prolongement de la dérivée partielle de f par rapport à y_j.

La réitération du même raisonnement permet de prouver l'existence, des dérivées partielles $d_x^k \partial_y^\alpha \tilde{f}(0, y_0)$ $(k + |\alpha| \leq m)$ qui, ne sont autres que, les limites de ces mêmes dérivées partielles de f sur l'intérieur $\mathring{A}$ de A lorsqu'on tend vers un point $(0, y_0)$ de la frontière $x = 0$.

Autrement dit

$$d_x^k \partial_y^\alpha) \tilde{f}(0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (d_x^k \partial_y^\alpha f)(x,y), \tag{2.2.15}$$

Il en découle

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (d_x^k \partial_y^\alpha) \tilde{f} = (d_x^k \partial_y^\alpha) \tilde{f}(0, y_0). \tag{2.2.16}$$

Ce qui signifie que $f \in C^m(A)$ **au sens fort.**

2.2.2. Généralisation

Soit K un sous-ensemble quelconque de $\{1, \ldots ,n\}$. Etudions de près, le cas du cône A de l'espace $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, explicitement exprimé ainsi :

$$A = \{(x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_k \geq 0\}, \tag{2.2.17}$$

pour $k \in K$. On a donc examiné plus haut, successivement les cas $|K| = 1$ où $|K|$ désigne la cardinalité de K. Supposons que le sens faible implique le sens fort dans le cas où $|K| = p$.

Si $|K| = p+1$, on peut, moyennant la fonction de reflexion, étendre f symétriquement à un axe, à un nouveau A, dont $|K| = p$.
La nouvelle fonction, par hypothèse de l'induction, peut être prolongée à $\mathbb{R}^n$.
Et on a, donc, prouvé que le cas de $|K| = p$ entraine celui de $|K| = p+1$. Ce qui est équivalent à dire :

Proposition 2.2.3. *Soit K un sous-ensemble quelconque de $\{1,\ldots,n\}$ et :*

$$A = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_k \geq 0\} \textit{ pour } k \in K.$$

Alors on a l'implication :

$$f \in C^m(A) \textit{ au sens faible } \Rightarrow \; f \in C^m(A) \textit{ au sens fort.} \tag{2.2.18}$$

2.2.3. Secteur du plan euclidien

Continuons, à présent, en prenant pour ensemble A, le secteur de $\mathbb{R}^2$ délimité par les demi-axes Oy $(y \geq 0)$ et $y = \cot(\alpha).x$ $(x \geq 0$ *et* $\quad \alpha < \pi/2)$.

Il est à noter que α est l'angle entre les 2 demi-droites.

On définit, comme ci-dessus, la même fonction g, sur l'ensemble :

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \; (-x,y) \in A\}.$$

Il est clair que la fonction $\tilde{f}$ composée par ses restrictions f et g est dans $C^m(A \cup B)$ au sens faible. Or $A \cup B$ est un secteur du même genre que A avec un angle 2α.
On réitère le même procédé n fois de sorte que :

$$n2\alpha \geq \pi/2.$$

La nouvelle fonction prolongée obtenue possède une restriction au quart du plan C situé entre les 2 demi-droites :

$$y = \cot(\alpha).x$$

et :

$$y = -\frac{x}{\cot(\alpha)},$$

où $\quad y \geq 0$.
Cette restriction est dans $C^m(C)$ au sens faible. En vertu, du résultat pour le quart de plan, trouvé ci-dessus, on conclut que $f \in C^m(A)$ au **sens fort.**

2.2.4. Slab

On en vient, à présent, au cas du slab :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}. \tag{2.2.19}$$

Visiblement, on peut se restreindre, sans perte de généralité, à $a = 0$ et $b = 1$. Alors :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq 1\}. \tag{2.2.20}$$

A gauche de 0, on peut reprendre notre fonction de prolongement citée ci-dessus, et définie pour tout $(x, y) \in (-\frac{1}{2}, 0] \text{ x } \mathbb{R}^n$ par :

$$g(x, y) = a_1 f(-x, y) + a_2 f(-\frac{x}{2}, y) + \cdots + a_{m+1} f(-\frac{x}{m+1}, y). \tag{2.2.21}$$

On a, ainsi, prolongé f à l'ensemble :

$$(-\frac{1}{2}, 1] \times \mathbb{R}^n.$$

Par des considérations de symmétrie, on peut reprendre le raisonnement précédent pour prolonger la nouvelle fonction à l'ouvert $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times \mathbb{R}^n$.
D'où le résultat.

2.3. Quelques résultats de différentiabilité

Définition 2.3.1. *Disons qu'un point x^0 d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est j^+-**accessible**, $j = 1, \ldots, n$, s'il existe $\epsilon > 0$, tel que le segment $[x^0, x^0 + \epsilon \mathbf{e_j}] \subset A$, où $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note alors*

$$\partial_{j+} f(x^0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x^0 + t\mathbf{e_j}) - f(x^0)}{t},$$

si cette limite existe.

Définition 2.3.2. *On dit que $f : A \to \mathbb{R}$ est de classe C^1_+ au point $x^0 \in A$, s'il existe un voisinage ouvert V de x^0 tel que tout point $x \in V \cap A$, est j^+-accessible, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\partial_{j+} f(x)$ **existe** et $\partial_{j+} f$ est **continue** au point x^0.*
On dit que f est de classe C^1_+ sur A si elle est de classe C^1_+ en tout point de A.

Si f est de classe C_+^m sur A, on définit de façon évidente les notations $\partial_+^\alpha f$ et $\partial_{j+}\partial_+^\alpha f$. On dit que f est de classe C_+^{m+1} en un point $x^0 \in A$ si pour un voisinage V de x^0, elle est de classe C_+^m sur $V \cap A$ et les fonctions $\partial_{j+}\partial_+^\alpha f(x)$ existent pour tout $|\alpha| \leq m$ et tout $j = 1, \ldots, n$ et sont continues en x^0. On dit que f est de classe C^{m+1} sur A, si elle est de classe C_+^{m+1} en tout point de A.

Soit $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\}$ et $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad ||x|| < \epsilon\}$ la boule ouverte de rayon $\epsilon > 0$ et centrée à l'origine.

Théorème 2.3.3. *Soit, pour un $\epsilon > 0$ donné, une fonction $f : \overline{B}_\epsilon \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n \to \mathbb{R}$ dans $C^m(\overline{B}_\epsilon \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n)$ au **sens faible**. Alors elle est de classe C_+^m au point* 0.

Démonstration. On va commencer par le prouver dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et $m = 1$.

On se donne arbitrairement un $\epsilon > 0$. Notre ensemble A est

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0, \text{ et } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \epsilon\}. \tag{2.3.1}$$

Supposons que, $f : A \to \mathbb{R}$ est dans $C^1(A)$ au **sens faible**. Soit le voisinage

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\epsilon}{2}\}, \tag{2.3.2}$$

du point $(0, 0)$ et l'ensemble :

$$U = V \cap A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\epsilon}{2}\}. \tag{2.3.3}$$

Montrons que tout point $(x, y) \in U$ est j^+-accessible ($j \in \{1, 2\}$). On a

$$(x, y) \in U \quad \Rightarrow \quad (x, y) \in V.$$

L'ensemble V étant ouvert (x, y) est centre d'une boule ouverte B_r de rayon un certain r contenue dans V.

$B_r \cap A$ est contenue U. Donc si on se déplace d'une distance de $\frac{r}{2}$ à droite ou en haut de (x, y) on va rester dans U et dans A à fortiori. D'autre part soit un point quelconque $(x, y) \in U$. Alors, par définition on a

$$\partial_{1+} f(x, y) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}, \tag{2.3.4}$$

si cette limite existe. Si x et y sont tous deux non nuls alors on a

$$\exists\ c(x,y,t) \in (x, x+t) \quad \partial_{1+} f(x,y) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(c(x,y,t)), y). \tag{2.3.5}$$

Lorsque $t \searrow 0$ le réel $c(x,y,t)$ tend vers x. Comme $f \in C^m(A)$ au sens faible on a le droit d'écrire

$$\partial_{1+} f(x,y) = \lim_{z \searrow x} \frac{\partial f}{\partial x}(z,y). \tag{2.3.6}$$

De même par symétrie on a

$$\partial_{2+} f(x,y) = \lim_{z \searrow y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,z). \tag{2.3.7}$$

D'autre part, par définition on a

$$\partial_{1+} f(0,0) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}, \tag{2.3.8}$$

si cette limite existe. Or

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}. \tag{2.3.9}$$

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire

$$(\exists\ c(x,y,t) \in (x, x+t)) \quad (\frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(c(x,y,t),y)). \tag{2.3.10}$$

On en déduit

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(c(x,y,t),y)). \tag{2.3.11}$$

Lorsque $x \to 0, c(x,y,t)$ demeure dans $(0,t)$. Et après avoir tendu t vers 0 on obtient

$$\partial_{1+} f(0,0) = \lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y). \tag{2.3.12}$$

D'une manière similaire on a aussi

$$\partial_{2+} f(0,0) = \lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{2.3.13}$$

D'autre part, en vertu de ce qui précède, on peut écrire

$$\lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \partial_{1+} f(x,y) = \lim_{(x,y) \searrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y). \tag{2.3.14}$$

En comparant les deux égalités précédentes on obtient

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \partial_{1+} f(x,y) = \partial_{1+} f(0,0). \tag{2.3.15}$$

Il en résulte la continuité de $\partial_{1+} f$ en $(0,0)$. Par symétrie on obtient le même résultat pour $j = 2$. Ce qui achève la vérification de la conjecture pour $m = 1$. Le même raisonnement peut être réitéré pour les dérivées d'ordre α où $|\alpha| \leq m$.

$\square$

Chapitre 3

PROLONGEMENT HOLOMORPHE

3.1. Définitions

Définition 3.1.1. *Une fonction complexe f de la variable complexe z définie sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite analytique sur U si pour chaque $a \in U$, il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que pour tout $z \in D(a, r)$ (disque ouvert de centre a et de rayon r contenu dans U), on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n. \tag{3.1.1}$$

Définition 3.1.2. *Soient U un ouvert de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et f une application de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable (au sens complexe) ou **holomorphe** en un point z_0 de U si la limite suivante, appelée dérivée de f en z_0,*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3.1.2}$$

*existe. On dit que f est **holomorphe** sur l'ouvert U si elle est holomorphe en tout point z_0 de U. En particulier, on appelle fonction **entière** une fonction **holomorphe dans tout le plan complexe.***

3.2. Prolongement holomorphe

Théorème 3.2.1. *Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une fonction **analytique nonconstante**. Alors, il existe des voisinage U de I et V de J dans $\mathbb{C}$ et une* *fonction* ***holomorphe surjective*** $F : U \to V$*, telle que*

$$F|_I = f. \tag{3.2.1}$$

Si en plus

$$(\forall x \in I)\ (f'(x) \neq 0), \tag{3.2.2}$$

alors on peut choisir U *et* V *tels que* $F : U \to V$ *soit* ***biholomorphe.***

DÉMONSTRATION. Puisque f est analytique sur I alors, pour tout point $a \in I, f$ est développable en série entière dans un intervalle centré en a. On considère la série entière complexe correspondante, qui est bien un prolongement holomorphe F_a de f à un disque D_a centré en a. On a que pour 2 points a et b de I tels que ces disques s'intersectent les deux développements en série entière sont égaux sur cette intersection. En prenant la réunion des disques D_a pour tous les points $a \in I$, on obtient un ourvert U et une fonction F définie localement comme F_a sur chaque D_a. La fonction F est **holomorphe** sur U et **surjective** sur son image $F(U) = V$. Comme F est une **fonction holomorphe non constante** définie sur un domaine U, elle est une application **ouverte**. Donc, $V = F(U)$ est un ouvert du plan complexe.

Puisque F est holomorphe, on a $F' = \partial F/\partial x$. En particulier, sur I :

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f', \tag{3.2.3}$$

et donc F' est un prolongement holomorphe de f'. Si $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, alors, par la continuité du prolongement F' de f', on peut choisir U tel que $F'(z) \neq 0, \forall z \in U$.

Soir $w_0 \in V$ et choisissons une valeur $z_0 \in F^{-1}(w_0)$. Il existe un voisinage ouvert U_0 de z_0, tel que la restriction F_0 de F à U_0 est une application **biholomorphe** de U_0 sur une voisinage ouvert V_0 de w_0. Notons $G_0 : V_0 \to U_0$ la fonction réciproque de $F_0 : U_0 \to V_0$. Alors, on peut prolonger G_0 holomorphiquement le long de tout chemin dans V débutant en w_0.

Soit γ : [0,1] $\to V$ un chemin dans V, partant de w_0 et terminant en w_1. Soit s un point de γ assez proche de w_0. F est donc, de par son **holomorphie**, développable en série entière au voisinage de s. Comme les développements de F sont égaux sur l'intersection des deux disques de convergence, le développement de F sur le disque centré en s est déterminé de façon unique. Et on peut réitérer le procédé le long de du chemin γ jusqu'au point

w_1 autour duquel le développement est bien déterminé de manière unique par celui autour de w_0. D'autre part, on sait que le rayon de convergence des séries précédentes, est une fonction Lipschitz, uniformément continue et continue de z élément de γ. Les coefficients des développements sont aussi fonctions continues de t et de z. Le long de γ on peut écrire les développements ainsi:

$$G_0^t(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)(w - \gamma(t))^n. \tag{3.2.4}$$

Les développements autour de w_0 et w_1 sont données, respectivement, par les valeurs 0 et 1 de t. Nous avons vu que si G_0 est une branche de F^{-1} dans un voisinage V_0 d'un point $w_0 \in V$, alors on peut prolonger G_0 le long de tout chemin dans V. En particulier on peut prolonger G_0 le long de tout chemin dans tout domaine W, tel que $V_0 \subset W \subset V$. Prenons le point w_0 sur J. Nous pouvons prendre pour V_0 un disque ouvert centré en w_0 et contenu dans V. Pour chaque $y \in J$, soit W_y un disque centré en y et contenu dans V, où $W_{w_0} = V_0$. Alors, la réunion W des W_y $(y \in J)$ est un domaine simplement connexe qui contient J et $W_0 \subset W \subset V$. Nous pouvons prolonger G_0 holomorphiquement le long de tout chemin dans W. Par le théorème de Monodromie, voir [**7**], p. 161, ce prolongement (à première vue multivoque) est une véritable fonction G. On a $F \circ G = Id$ sur W, où Id est la fonction identité. Car, si w est un élément de W alors:

$$F(z) = w, \tag{3.2.5}$$

pour un certain z dans U et :

$$\begin{aligned} F(G(w)) &= F(G(F(z))) \\ &= F(z) \\ &= w. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Soit $U_1 = G(W)$. Alors $G \circ F = I$ sur U_1. Donc $F : U_1 \to W$ est une application biholomorphe du voisinage U_1 de I dans $\mathbb{C}$ sur le voisinage W de J dans $\mathbb{C}$. $\square$

Chapitre 4

FONCTIONS ENVOYANT UN ENSEMBLE SUR UN AUTRE

4.1. Rappels de certains théorèmes

Théorème 4.1.1. *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème 4.1.2. *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Théorème 4.1.3. *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Théorème 4.1.4. *Si une suite converge vers l, toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.*

4.2. Prolongement de la bijection de Cantor en un homéomorphisme

Soient A et B deux sous-ensembles **dénombrables** et **denses** de $\mathbb{R}$. Cantor a montré qu'il existe toujours une bijection h de A vers B qui conserve l'ordre naturel réel. On se propose de montrer que h peut être prolongée en un **homéomorphisme** $\tilde{h}$ de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Soit x un élément quelconque de $\mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

(1) $x \in A$. On pose

$$\tilde{h}(x) = h(x). \tag{4.2.1}$$

(2) $x \in \mathbb{R} \setminus A$.

A étant dense dans $\mathbb{R}$ on sait que x est limite d'une suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans A. On peut en extraire une sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone et convergente vers x. Choisissons, sans perdre de généralité, la monotonie croissante pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Soit M un majorant de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans un intervalle ouvert centré en $M+1$ et de rayon $1/2$ il existe, en vertu de la densité de A dans $\mathbb{R}$, un élément a de A strictement plus grand que tous les éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme h conserve l'ordre naturel réel, $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée. Elle est donc convergente. Posons :

$$\tilde{h}(x) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n). \tag{4.2.2}$$

Proposition 4.2.1. *Dans la dernière relation $\tilde{h}(x)$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Posons

$$\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = l. \tag{4.2.3}$$

Supposons qu'il existe une autre suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ similaire à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un autre nombre réel l' différent de l tels que

$$\lim_{n\to+\infty} x'_n = x, \tag{4.2.4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} h(x'_n) = l'. \tag{4.2.5}$$

Sans perte de généralité supposons que $l < l'$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\epsilon' > 0$ suffisamment petits pour que les deux intervalles ouverts $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ et $(l'-\epsilon', l'+\epsilon')$ soient disjoints (séparabilité). Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$h(x_n) \in (i-\epsilon, l+\epsilon), \tag{4.2.6}$$

et

$$h(x'_n) \in (l'-\epsilon', l'+\epsilon'). \tag{4.2.7}$$

On aura ainsi

$$\forall n \geq N \quad h(x_n) < h(x'_n).$$

Remarquant la conservation de l'ordre par h il vient

$$\forall n \geq N \quad x_n < x'_n.$$

En passant aux limites on tombe sur l'absurdité

$$x < x.$$

D'où

$$l = l'. \tag{4.2.8}$$

$\square$

$\tilde{h}$ est donc bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$ par construction.

Inversement considérons $B = h(A)$. Soit y un élément de $\mathbb{R}$. Comme B est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans B qui converge vers y :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y. \tag{4.2.9}$$

Puisque $y_n \in B = h(A)$ alors il existe une suite unique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à éléments dans A telle que $h(x_n) = y_n$. Désignons par k l'application inverse de h. Donc: $x_n = k(y_n)$. On peut prolonger k par continuité sur $\mathbb{R}$, de la même façon que h en posant:

$$\tilde{k}(y) = \lim_{n\to+\infty} k(y_n). \tag{4.2.10}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\tilde{k}(y) &= \lim_{n\to+\infty} k(y_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty} k(h(x_n))\\ &= \lim_{n\to+\infty} x_n\\ &= x, \end{aligned}\tag{4.2.11}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{h}(x) &= \lim_{n\to+\infty} h(x_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty} y_n\\ &= y. \end{aligned}\tag{4.2.12}$$

Soit

$$\tilde{h}(\tilde{k}(y)) = y, \tag{4.2.13}$$

et

$$\tilde{k}(\tilde{h}(x)) = x, \tag{4.2.14}$$

$\tilde{h}$ et $\tilde{k}$ sont des bijections réciproques et continues sur $\mathbb{R}$. Donc $\tilde{h}$ est un **homéomorphisme** sur $\mathbb{R}$.

4.3. Définitions

Définition 4.3.1. *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On dit qu' une fonction $f : I \to J$ est* ***bianalytique*** *de I sur J, si f est une bijection et, f et f^{-1} sont toutes deux* ***analytiques****.*

Franklin, affirme (pp. 94, [**6**]), que si A et B sont deux ensembles **dénombrables et denses** de I et J respectivement, il existe une fonction **bianalytique** f de I sur J, telle que $f(A) = B$. Malheureusement, sa preuve suppose que la limite uniforme de fonctions analytiques est analytique, ce qui n'est pas toujours vrai. Notons aussi que si $f : I \to J$ est une fonction analytique et l'on sait que $f : A \to B$ est une bijection, pour deux ensembles dénombrables et denses dans I et J respectivement, on ne peut conclure si $f : I \to J$ est **injective**.

Définition 4.3.2. *Un ensemble ordonné E est dit* ***ordonné-dense****, si et seulement si pour tous $x, y \in E$ on a*

$$(x < y) \ \Rightarrow \ (\exists z \in E)\ (x < z < y). \tag{4.3.1}$$

Cantor a montré que, entre deux ensembles dénombrables et ordonnés-denses sans premiers éléments, il existe un isomorphisme d'ordre.

4.4. Construction d'une fonction entière

Théorème 4.4.1. *Soient A et B deux ensembles* ***dénombrables et denses*** *de $\mathbb{R}$ et choisissons $a \in A$ et $b \in B$. Alors, il existe une* ***fonction entière*** *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f : A \to B$ est une* ***bijection qui conserve l'ordre****, avec $f(a) = b$, et il existe des voisinages U et V de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ tels que $f : U \to V$ est* ***biholomorphe****. En particulier, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une* ***bijection bianalytique.***

Démonstration. Les ensembles A et B ont un ordre naturel et, puisque la restriction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme, alors ou bien elle conserve l'ordre de $\mathbb{R}$ ou inverse l'ordre de $\mathbb{R}$. Cantor nous donne une bijection de A sur B qui conserve l'ordre. Cette bijection a un prolongement unique qui donne un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Mais il n'y a aucune raison que cet homéomorphisme soit analytique. Pour obtenir une fonction entière, nous devons donc utiliser une autre méthode que celle de Cantor.

Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < 1.$$

La fonction f a la forme

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) \\ &= z + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j h_j(z), \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

où

$$f_n(z) = z + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(z). \tag{4.4.2}$$

Nous allons construire une énumération $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, une énumération $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B et la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, en prenant la suite de fonctions $(h_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de la forme suivante :

(1)

$$h_1 = 1,$$

(2)

$$h_j(z) = e^{-z^2} \prod_{k=1}^{j-1} (z - \alpha_k), \quad \text{pour} \quad j \geq 2,$$

on ait

$$f_n(\alpha_j) = \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n, \quad n = 1,2, \ldots; \tag{4.4.3}$$

$$|\lambda_n h_n(z)| < \epsilon_n, \quad \text{si} \quad |z| \leq n, \quad n > 1; \tag{4.4.4}$$

$$|\lambda_n h_n'(x)| < \epsilon_n, \quad \text{si} \quad -\infty < x < +\infty; \tag{4.4.5}$$

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}. \tag{4.4.6}$$

Par la deuxième condition, f sera une fonction entière et par la troisième nous pourrons dériver cette série terme-à-terme sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j h_j'(x) \\ &> 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \\ &> 0. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante et par conséquent **injective.**

Montrons que f est surjective sur $\mathbb{R}$. Soit y_0 un élément quelconque fixé de $\mathbb{R}$, et cherchons l'éventuelle existence d'une pré-image $x_0 \in \mathbb{R}$ de y_0. Posons

$$g(x) = f(x) - y_0.$$

On veut calculer les limites de g a l'infini. Pour cela considérons la limite du terme général

$$\lambda_j h_j(x) = \lambda_j e^{-x^2} \prod_{k=1}^{j-1} (x - \alpha_k),$$

de la série qui compose f. Ce terme tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Donc, à l'infini f est asymptotique à $x + \lambda_1$. Par conséquent on a

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

Donc, g s'annule quelque part en un x_0, qui est, bien entendu, la pré-image de y_0. Alors, f est surjective et, par suite, bijective comme fonction de $\mathbb{R}$, sur lui-même. On peut aussi constater que puisque $f(\alpha_n) = \beta_n, n = 1,2, \ldots,$ nous aurons donc une bijection $f : A \to B$.

Maintenant, nous allons montrer l'existence des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'abord, nous choisissons des énumérations $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A et B, avec $a_1 = a$ et $b_1 = b$. Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront des réarrangements de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construites par récurrence. Posons

(1) $\alpha_1 = a_1 = a$,

(2) $\beta_1 = b_1 = b$,

et,

(3) $\lambda_1 = \beta_1 - \alpha_1$.

Nous avons défini $\alpha_1, \lambda_1, \beta_1$ et donc aussi h_1, f_1, h_2 et f_2. Notons que

$$f_1(a) = f_1(a_1) = f_1(\alpha_1) = \beta_1 = b_1 = b. \tag{4.4.8}$$

Soit β_2 le premier b_j différent de $\beta_1 = b$. Supposons que l'on ait des membres distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}$ de la suite (a_i), tels que, pour chaque $k = 1, \cdots, n$, α_{2k-1} est le premier a_i pas précédemment choisi; des membres distincts $\beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ de la suite (b_j), tel que, pour chaque $k = 1, \ldots, n$, β_{2k} est le premier b_j pas précédemment choisi; des nombres positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-1}$, tels que les conditions (4.4.4), et (4.4.3) sont satisfaites, pour $k = 1, \ldots, 2n-1$. Nous allons maintenant choisir $\alpha_{2n}, \lambda_{2n}, \alpha_{2n+1}, \lambda_{2n+1}, \beta_{2n+1}$ et $\beta_{2(n+1)}$.

Posons

$$g(z,y) = f_{2n-1}(z) + y h_{2n}(z). \tag{4.4.9}$$

Si y est suffisament petit, alors (4.4.4) et (4.4.5) sont valables pour $\lambda_{2n} = y$. Soit y_n un tel y. La fonction $g(x,y_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $g(x,y_n)$ tend vers $\pm\infty$, lorsque $x \to \pm\infty$. Montrons qu'elle est donc surjective. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $u(x,y_n) = g(x,y_n) - \beta$. Donc

$$(\exists x_1 \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (x \leq x_1 \Rightarrow g(x,y_n) \leq \beta), \tag{4.4.10}$$

soit $u(x,y_n) \leq 0$, et

$$(\exists x_2 \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (x \geq x_2 \Rightarrow g(x,y_n) \geq \beta), \tag{4.4.11}$$

soi, $u(x,y_n) \geq 0$. Comme $u(x,y_n)$ est continue, elle prend la valeur 0 entre x_1 et x_2. Donc :

$$(\exists x_0 \in [x_1, x_2])\ (u(x_0,y_n) = 0).$$

D'où

$$(\exists x_0 \in \mathbb{R})\ (g(x_0,y_n) = \beta). \tag{4.4.12}$$

On en conclut que $g(x,y_n)$ est **surjective**.

Choisissons une valeur x_n, telle que $g(x_n,y_n) = \beta_{2n}$. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $\delta > 0$ et une fonction φ sur l'intervalle $I_{x_n,\delta} = (x_n - \delta, x_n + \delta)$, tels que dans le carré $I_{x_n,\delta} \times I_{y_n,\delta}$, on ait $g(x,y) = \beta_{2n}$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. Puisque A est dense dans $\mathbb{R}$, on peut choisir $\alpha_{2n} \in A \cap I_{x_n}$ et on pose $\lambda_{2n} = \varphi(\alpha_{2n})$. Si δ est suffisamment petit, alors λ_{2n} satisfait encore (4.4.4) et (4.4.5). (4.4.3) est satisfait par le choix que nous venons de faire de α_{2n} et λ_{2n}.

Le choix de α_{2n+1} est facile. On choisit le premier élément des a_j different de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ et on l'appelle α_{2n+1}. Puisque $h_{2n+1}(\alpha_{2n+1}) \neq 0$, la fonction linéaire :

$$\beta(\lambda) = f_{2n}(\alpha_{2n+1}) + \lambda h_{2n+1}(\alpha_{2n+1}), \tag{4.4.13}$$

est non-constante. Donc $J_n = \{\beta(\lambda) : |\lambda| < \epsilon\}$ est un intervalle ouvert non-vide et, puisque B est dense, nous pouvons choisir un élément de $(B \cap J_n) \setminus \{\beta_1, \cdots, \beta_{2n}\}$, que nous appelons β_{2n+1}. L'élément β_{2n+1} a par définition la forme $\beta_{2n+1} = \beta(\lambda)$ pour un certain λ, avec $|\lambda| < \epsilon$. Nous désignons ce λ par λ_{2n+1}. Si ϵ est suffisamment petit, alors λ_{2n+1} satisfait (4.4.4) et (4.4.5). La condition (4.4.3) est satisfaite par le choix que nous venons de faire pour β_{2n+1} et λ_{2n+1}. Pour $\beta_{2(n+1)}$ on choisit le premier élément des b_j different de $\beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}$. La construction des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et donc aussi de la fonction entière f, est terminée.

Considérons le Lemme 3.2.1, dans le cas ou $I = J = \mathbb{R}$ et la restriction de la fonction f ci-dessus à $\mathbb{R}$. Comme f est entière, elle est développable en série entière au voisinage de chaque point du plan complexe. Donc, en particulier au voisinage de chaque nombre réel. La restriction est, par conséquent, **analytique**. Ses dérivées sont, par ailleurs toutes strictement positives (elle n'est donc pas constante). Alors on peut faire appel au Lemme 3.2.1 ci-dessus pour déduire que cette restriction réelle de f possède un prolongement **biholomorphe** sur des voisinages U et V de $\mathbb{R}$. En vertu de l'unicité du prolongement analytique on peut conclure que la fonction entière f ci-dessus est **biholomorphe** sur ces deux voisinages. $\square$

Corollaire 4.4.2. *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, A et B deux ensembles dénombrables et denses, respectivement, dans I et J. Alors, I et J sont, localement en correspondance* ***bianalytique strictement croissante.*** *C'est à dire, si $a \in A$ et $b \in B$, il existe des intervalles ouverts I_a, J_b, avec $a \in I_a \subset I$ et $b \in J_b \subset J$, et il existe une correspondence bianalytique strictement croissante $f_{ab} : I_a \to J_b$, telles que $f_{ab}(A \cap I_a) = B \cap J_b$ et $f_{ab}(a) = b$.*

Démonstration. Choisissons deux éléments quelconques , $a \in I \cap A$ et, $b \in J \cap B$. Pour obtenir des ensembles dénombrables et denses dans $\mathbb{R}$, on complète A à l'extérieur de I par les éléments de $\mathbb{Q}$. De même pour B. Alors, d'après le Théorème 4.4.1,

$$(\exists \eta > 0)(\exists \epsilon > 0)((a - \eta, a + \eta) \subseteq I)((b - \epsilon, b + \epsilon) \subseteq J),$$

tels que

$$(a - \eta, a + \eta) \text{ et } (b - \epsilon, b + \epsilon),$$

soient en **correspondance bianalytique strictement croissante.** Ceci est vrai, pour tous a et b choisis, comme précédemment. Il existe, alors deux intervalles ouverts $(a-\eta, a+\eta)$ et $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ respectivement centrés en a et b, contenus respectivement dans I et J, et qui sont en correspondance bianalytique. Les traces des ensembles A et B sur ces deux intervalles sont deux ensembles denses et dénombrables dans ces intervalles. $\square$

Chapitre 5

APPROXIMATIONS SELON WHITNEY

5.1. Préalables

Définition 5.1.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et M une variété différentielle de classe C^m. Soit A un sous-ensemble de M et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in C^m(A)$* ***au sens fort,*** *si et seulement s'il existe un ouvert $U \subset M$ et une fonction $\tilde{f} \in C^m(U)$ tels que :*

(1) $A \subset U$.

(2) $\tilde{f}|_A = f$.

Définition 5.1.2. *On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties d'un espace topologique X est localement finie si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A_i = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$.*

Définition 5.1.3. *Si $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_k)_{k \in K}$ sont des recouvrements de E, on dit que le second de ces recouvrements est plus fin que le premier (ou que le premier est moins fin que le second) si*

$$(\forall\, k \in K)\ (\exists\, i \in I)\ (Y_k \subset X_i). \tag{5.1.1}$$

Théorème 5.1.4. *La réunion d'une famille* ***localement finie de parties fermées*** *d'un espace topologique X est* ***fermée*** *dans X.*

Démonstration. Effectivement, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de parties fermées de X. Soit $x \in X$ tel que x n'appartienne pas à $F = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$; il existe un voisinage V de x qui ne rencontre que les F_i dont les indices appartiennent à une partie finie J de I. Or, pour tout $i \in J, U_i = X \setminus F_i$ est ouvert et contient x; on en conclut que $X \setminus F$ contient le voisinage $V \cap (\bigcap_{i \in J} U_i)$ de x. C'est, donc, un ouvert et par conséquent, F est un fermé. $\square$

Définition 5.1.5. *Un espace topologique X est dit paracompact s'il est séparé et si; pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $\mathcal{R}'$ de X, plus fin que $\mathcal{R}$.*

La famille d'ensembles qui sont les domaines de cartes d'un atlas maximal fournit une base pour une topologie sur M, que nous appellerons la topologie induite par la structure C^m sur M ou simplement la topologie de variété si la structure C^m est entendue. Donc les ensembles ouverts sont exactement l'ensemble vide en plus des réunions arbitraires de domaines de cartes prises dans l'atlas maximal. Comme un atlas de classe C^m determine une structure de classe C^m, nous parlerons aussi de topologie induite par l'atlas. Cette topologie peut être caractérisée comme suit.

Un sous-ensemble $V \subset M$ est ouvert si et seulement si $x_\alpha(U_\alpha \cap V)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour toutes les cartes (U_α, x_α) dans chaque atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ donnant une structure de classe C^m.

Définition 5.1.6. *Soit M, un espace topologique, et soit $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recouvrement quelconque de M.*
*Une **partition de l'unité** subordonnée à $\mathcal{X}$ est un ensemble de fonctions continues $\{\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, ayant les propriétés suivantes :*

(1) $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $x \in M$,

(2) supp $\psi_\alpha \subset X_\alpha$,.

(3) l'ensemble des supports $\{supp\, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ est localement fini,

(4) $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in M$.

Théorème 5.1.7. *Si M est une variété de classe C^m ayant une base dénombrable et $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recouvrement ouvert de M, alors il **existe** une **partition de l'unité** de classe C^m (i.e., chaque fonction ψ_α est de clase C^m) subordonnée à $\mathcal{X}$.*

Définition 5.1.8. *On dit qu'une fonction* $f : A \to \mathbb{R}$ *sur un sous-ensemble* A *d'une variété* M *de classe* C^m, *est de* **classe** C^m **en un point** $x \in A$, *s'il existe un sous-ensemble ouvert* $U_x \subset M$ *contenant* x *et une application* $\tilde{f}$ *telle que*

(1) $\tilde{f} \in C^m(U_x)$.

(2) $\tilde{f}|_{A\cap U_x} = f$.

On dit que f *est* **ponctuellement** *de classe* C^m, *si elle est de classe* C^m *en tout point* $x \in A$. *Voir* [**2**].

5.2. Équivalence

Proposition 5.2.1. *Soit* M *une variété de classe* C^m *ayant une base dénombrable,* $A \subset M$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors, on a l'équivalence suivante :*

$$f \in C^m(A) \text{ au sens fort } \Leftrightarrow \ f \in C^m(A) \text{ ponctuellement.} \tag{5.2.1}$$

Démonstration. Supposons que $f \in C^m(A)$ au **sens fort**. Alors il existe un ouvert U de M qui contient A et, une fonction $\tilde{f}$ qui est de classe C^m sur U tels que $\tilde{f}|_A = f$. Soit x un point quelconque de A. Alors $x \in A$ et $A \subset U \ \Rightarrow \ x \in U$. Donc U est un voisinage ouvert de x sur lequel $\tilde{f}$ est classe C^m et $\tilde{f}|_{A\cap U} = \tilde{f}|_A = f$. Comme aucune condition n'a été émise sur x, ceci conduit à conclure que $f \in C^m(A)$ **ponctuellement.**

Inversement, supposons que $f \in C^m(A)$ **ponctuellement**. Donc, pour chaque $x \in A$, il existe un ouvert U_x et une fonction $\tilde{f}_x \in C^m(U_x)$ dont la restriction à $U_x \cap A$ coïncide avec f. Posons $U = \underset{x\in A}{\cup} U_x$. C'est, donc, un ouvert de M. Par ailleurs, $A \subset U$ par construction. Soit $\{\phi_x : U \to \mathbb{R}\}_{x\in A}$ une partition de l'unité de classe C^m subordonnée à $\{U_x\}_{x\in A}$. On considère la fonction $\tilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in U$ par

$$\tilde{f}(u) = \sum_{x\in A} \phi_x(u)\tilde{f}_x(u). \tag{5.2.2}$$

Fixons un $u \in U$. Alors puisque la famille des supports des fonctions $(\phi_x)_{x\in A}$ est localement finie, il existe un voisinage W_u de u, qui intersecte un nombre fini de supports de ϕ_x. Donc ϕ_x est nulle sur W_u sauf pour un ensemble fini F_u de x. Donc, dans W_u, on a que $\tilde{f}(y) = \sum_{x\in F_u} \phi_x(y)\tilde{f}_x(y)$. D'où

$$(\forall x \in F_u)\ (y \in \text{ supp } \phi_x \subset U_x).$$

Il en résulte que

$$y \in \bigcap_{x \in F_u} \operatorname{supp} \phi_x \subset \bigcap_{x \in F_u} U_x.$$

Or $\bigcap_{x \in F_u} U_x$ est un voisinage ouvert de y sur lequel toutes les fonctions f_x et ϕ_x sont de classe C^m. Il en est, donc, de même pour $\tilde{f}$ sur ce voisinage ouvert de y. Comme y a été choisi quelconque dans W_u et que u a été choisi quelconque dans U on en déduit que $\tilde{f} \in C^m(U)$.

D'autre part, soit u un élément quelconque de A. Alors :

$$\tilde{f}(u) = \sum_{x \in F_u} \phi_x(u) f_x(u). \tag{5.2.3}$$

Pour chaque $x \in F_u$ on a : $u \in U_x$ et $u \in A$. Donc $u \in A \cap U_x$. D'où $f_x(u) = f(u)$ en vertu de la ponctualité.

Par conséquent :

$$\tilde{f}(u) = \sum_{x \in F_u} \phi_x(u) f(u) = \sum_{x \in A} \phi_x(u) f(u) = f(u), \tag{5.2.4}$$

puisque $\phi_x(u) = 0$ pour $x \in A \setminus F$.

En conclusion $\tilde{f}|_A = f$ ce qui achève la preuve. □

5.3. Une généralisation du théorème d'approximation de Whitney et conséquences

Voici un résultat qui étend le théorème de Whitney du cas des fonctions lisses au cas plus général des fonctions de classe C^m.

Théorème 5.3.1. [9]. *Soit M une variété différentielle lisse et $f : M \to \mathbb{R}^k$, une application continue. Soit $\delta : M \to \mathbb{R}$, une application* ***continue et positive.*** *Si $f \in C^m(A)$ au sens fort, où A est un ensemble fermé de M, alors il existe une fonction $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ de classe C^m qui est δ-proche de f et égale à f sur A.*

Démonstration. Supposons que $f \in C^m(A)$ au sens fort pour un certain fermé $A \subset M$. Alors, par définition il existe un voisinage ouvert U de A, et une fonction $f_0 \in C^m(U)$, telle que $f_0|_A = f$. Si $A = \emptyset$, nous prenons $U = \emptyset$. Considérons l'ensemble $U_0 = \{y \in U : \|f(y) - f_0(y)\| < \delta(y)\}$. Il est aisé de vérifier que U_0 est un ouvert contenant A.

Pour tout $x \in M \backslash A$, soit U_x un voisinage de x contenu dans $M \backslash A$ suffisamment petit pour que pour tout $y \in U_x$

$$\delta(y) \geq \delta(x)/2 \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(x)\| \leq \delta(x)/2. \tag{5.3.1}$$

Alors si $y \in U_x$, on a

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \delta(x)/2 \leq \delta(y). \tag{5.3.2}$$

La collection des U_x quand x parcourt $M \backslash A$ est un recouvrement ouvert de $M \backslash A$. Choisissons-en un sous-recouvrement dénombrable $\{U_{x_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Posant $U_i = U_{x_i}$ et $v_i = f(x_i)$, nous avons

$$(\forall y \in U_i)\ (\|f(y) - v_i\| \leq \delta(y)). \tag{5.3.3}$$

Soit $\{\phi_0, \phi_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_0, U_i\}$ de M, et définissons $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}^k$ par :

$$\tilde{f}(y) = \phi_0(y) f_0(y) + \sum_{i \geq 1} \phi_i(y) \cdot v_i. \tag{5.3.4}$$

Clairement $\tilde{f}$ est de classe C^m et est égale à f sur A. Pour tout $y \in M$, le fait $\sum\limits_{i \geq 0} \phi_i = 1$ implique

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(y) - f(y)\| &= \left\| \left(\phi_0(y) f_0(y) + \sum_{i \geq 1} \phi_i(y) \cdot v_i \right) - \left(\phi_0(y) + \sum_{i \geq 1} \phi_i(y) f(y) \right) \right\| \\
&\leq \phi_0(y) \|f_0(y) - f(y)\| + \sum_{i \geq 1} \phi_i(y) \|v_i - f(y)\| \\
&\leq \phi_0(y) \delta(y) + \sum_{i \geq 1} \phi_i(y) \delta(y) \\
&= \delta(y).
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

On en conclut que $\tilde{f}$ est δ-proche de f. □

Corollaire 5.3.2. *Soit A la réunion d'une famille **localement finie** d'intervalles fermés disjoints deux à deux, de la droite $\mathbb{R}$. Soit une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$, et une fonction continue et positive $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Supposons que $f \in C^m(A)$ au **sens faible**. Alors, il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δ-proche de f et de classe $C^m(\mathbb{R})$ égale à f sur A.*

Démonstration. Par le Théorème 5.1.4, A est un fermé de $\mathbb{R}$. Si $f \in C^m(A)$ au sens faible, alors f est de classe C^m au sens faible sur chaque intervalle fermé contenu dans A. On peut toujours, exprimer A sous la forme suivante

$$A = \bigcup_{j\in I}[a_j, b_j] = \bigcup_{j\in I} A_j, \tag{5.3.6}$$

où :

$$(\forall j \in I)\ (b_j < a_{j+1}). \tag{5.3.7}$$

Alors le fermé A est contenu dans son voisinage ouvert

$$U = \bigcup_{j\in I}(\frac{b_{j-1} + 3a_j}{4}, \frac{3b_j + a_{j+1}}{4}), \tag{5.3.8}$$

où chaque

$$U_j = (\frac{b_{j-1} + 3a_j}{4}, \frac{3b_j + a_{j+1}}{4}) \tag{5.3.9}$$

est un voisinage ouvert de A_j.

Il est à remarquer que tous les $(U_j)_{j\in I}$ sont disjoints deux à deux. Chaque $(A_j)_{j\in I}$ est un cas particulier de slab 2.2.4 qui a été traité précédemment et qui entraine que f est de classe C^m au sens fort sur celui-ci. Autrement dit, elle est la restriction d'une fonction g_j de classe C^m sur un ouvert U_{g_j} qui contient A_j. Considérons la réunion V des voisinages ouverts $U_{g_j} \cap U_j$ quand j décrit I. V est un voisinage ouvert de A sur lequel la fonction g définie par ses restrictions $g|_{U_{g_j}\cap U_j} = g_j|_{U_{g_j}\cap U_j}$, lorsque j décrit I, est de classe C^m; ce qui implique que f est de classe $C^m(A)$ au sens fort. On peut, alors, appliquer le Théorème 5.3.1 pour déduire le résultat. □

Corollaire 5.3.3. *Soient* $-\infty < a_0 < a_1 < a_2 < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$ *et* f *une fonction telle que :*

(i) $f \in C[a_0,a_2]$,

(ii) $f|_{[a_1,a_2]} \in C^m[a_1,a_2]$ *au* ***sens faible****.*

Soit $\epsilon > 0$ *donné. Alors, il existe une fonction* $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ *telle que :*

(i) $(\forall x \in [a_0, a_1])\ (|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon)$,

(ii) $(\forall x \in [a_1, a_2])\ (\tilde{f}(x) = f(x))$.

Démonstration. Prolongeons f par continuité sur tout $\mathbb{R}$. La nouvelle fonction F obtenue est, donc, continue sur la variété lisse $\mathbb{R}$. D'après le Corollaire précédent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ qui est $\epsilon-$proche de f et telle que

$$\tilde{f}|_{[a_1,a_2]} = f|_{[a_1,a_2]}. \tag{5.3.10}$$

$\square$

Corollaire 5.3.4. *Soit $-\infty < a_0 < a_1 < a_2 < +\infty$. Soit $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n_0 \leq n_1$. Soit f une fonction à valeurs réelles telle que*

(i) $f \in C^{n_0}[a_0,a_2]$,

(ii) $f \in C^{n_1}[a_1,a_2]$ au sens faible.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Alors, il existe une fonction $\tilde{f} \in C^{n_1}(\mathbb{R})$, telle que

(i) $(\forall k \leq n_0)$ $(\forall x \in [a_0, a_1])$ $(|D^{(k)}\tilde{f}(x) - D^{(k)}f(x)| \leq \epsilon)$,

(ii) $(\forall x \in [a_1, a_2])$ $(\tilde{f}(x) = f(x))$.

Démonstration. Posons

$$(\forall x \in [a_0, a_2])\ (h_{n_0}(x) = D^{(n_0)}f(x)).$$

Alors

$$h_{n_0} \in C^{(n_1-n_0)}[a_1, a_2],$$

et

$$h_{n_0} \in C[a_0, a_2].$$

Soit $\epsilon > 0$ choisi arbitrairement. Alors, en vertu du Corollaire précédent, il existe une fonction $H_{n_0} \in C^{(n_1-n_0)}(\mathbb{R})$, telle que

(*i*) $(\forall x \in [a_0, a_1])$ $(|H_{n_0}(x) - h_{n_0}(x)| \leq \epsilon/(a_1 - a_0))$,

(*ii*) $(\forall x \in [a_1, a_2])$ $(H_{n_0}(x) = h_{n_0}(x))$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ posons

$$H_{n_0-1}(x) = \int_{a_1}^{x} H_{n_0}(t)\mathrm{d}t + D^{(n_0-1)}f(a_1). \tag{5.3.11}$$

D'où :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (H_{n_0}(x) = H'_{n_0-1}(x)). \tag{5.3.12}$$

Il vient, pour tout $x \in [a_0, a_1]$ compte tenu de ce qui précède

$$|H_{n_0-1}(x) - D^{(n_0-1)}f(x)| = |\int_{a_1}^{x} H_{n_0}(t)\mathrm{d}t + D^{(n_0-1)}f(a_1) - D^{(n_0-1)}f(x)| \tag{5.3.13}$$

$$= |\int_{a_1}^{x} H_{n_0}(t)\mathrm{d}t - \int_{a_1}^{x} D^{(n_0)}f(t)\mathrm{d}t| \tag{5.3.14}$$

$$= |\int_{a_1}^{x} (H_{n_0} - D^{(n_0)}f)(t)\mathrm{d}t| \tag{5.3.15}$$

$$\leq \int_{x}^{a_1} |(H_{n_0} - h_{n_0})(t)|\mathrm{d}t \tag{5.3.16}$$

$$\leq \epsilon. \tag{5.3.17}$$

En réitérant plusieurs fois ce procédé, on construit une fonction $H_0 \in C^{n_1}(\mathbb{R})$ vérifiant :

(1) $(\forall k \leq n_0)$ $(\forall x \in [a_0, a_1])$ $(D^{(k)}H_0(x) = H_k(x))$,

(2) $(\forall k \leq n_0)$ $(\forall x \in [a_0, a_1])$ $(|D^{(k)}H_0(x) - D^{(k)}f(x)| \leq \epsilon)$.

Pour conclure, considérons la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie comme suit :

(1) $(\forall x \in (-\infty, a_1])$ $(\tilde{f}(x) = H_0(x))$,

(2) $(\forall x \in [a_1, a_2])$ $(\tilde{f}(x) = f(x))$,

(3) $(\forall x \in [a_2, +\infty))$ $(\tilde{f}(x) = H_0(x))$.

Alors $\tilde{f} \in C^{n_1}(\mathbb{R}))$ est une fonction qui répond au Corollaire. □

Chapitre 6

APPROXIMATION POLYNÔMIALE SUR DES INTERVALLES COMPACTS

6.1. Approximation et Interpolation : Quelques résultats

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Considérons-en la subdivision suivante :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_l = b \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N}^*. \tag{6.1.1}$$

Soient les entiers naturels $n_0, \ldots, n_{l-1}$. et l'ensemble $I = \{0, 1, ..., l-1\}$.

Désignons par $\sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}]$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, telles que, pour tout $i \in I,\ f \in C^{n_i}[a_i, a_{i+1}]$.

Les dérivées sur les sous-intervalles adjacents coïncident sur les points finaux communs (i.e. pour tout $i \in I$,f est une fonction de classe C^{m_i} sur $[a_{i-1}, a_{i+1}]$, où $m_i = \min(n_{i-1}, n_i)$).

$\sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}]$ a une structure d'espace vectoriel. On le munit de la norme suivante :

$$(\forall f \in \sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}])\ (|||f|||_l = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{n_i} \|D^{(k)} f\|_i), \tag{6.1.2}$$

où, $\|\cdot\|_i$ est la norme de la convergence uniforme sur l'intervalle compact $[a_i,a_{i+1}]$.

Lemme 6.1.1. *(pp.* 1181, **[5]***) Soit Y un sous-espace vectoriel dense de l'espace vectoriel normé X et soient $L_1, L_2,..., L_n$, des formes linéaires continues sur X. Alors pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $y \in Y$ tel que:*

(1) $\|x - y\| \leq \epsilon$,

(2) $(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\ (L_i(y) = L_i(x))$.

Rappelons tout d'abord ce résultat généralisant le théorème d'approximation de Weierstrass, quelque fois connu sous le nom du Lemme de Walsh.

Lemme 6.1.2. *Soit $a < b$ des nombres réels et soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $E \subset [a,b]$ un ensemble fini. Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^m et $\epsilon > 0$. Alors il existe un polynôme g tel que pour tous $k = 0, \cdots, m$ et tout $x \in \mathbb{R}, |D^{(k)}g(x) - D^{(k)}f(x)| \leq \epsilon$ et de surcroit on a $D^{(k)}f(x) = D^{(k)}g(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Plaçons-nous dans les conditions du Lemme 6.1.1 précédent en prenant pour X l'espace $C^m[a,b]$ et pour Y, l'ensemble de tous les polynômes sur $[a,b]$.

Montrons que ce dernier est **dense** dans le premier. Soit φ une fonction **continûment différentiable** sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$ donné et p_1 un polynôme. Soit p une primitive de p_1. Alors, on a

$$(\forall x \in [a,b])\ (\phi(x) - p(x) = \phi(a) - p(a) + \int_a^x (\phi' - p_1)(t)\mathrm{d}t). \tag{6.1.3}$$

Soit δ =min$\{\frac{\epsilon - |\phi(a) - p(a)|}{|b-a|}, \epsilon\}$. On peut toujours se ramener à $\delta > 0$ en choisissant, sans perte de généralité, $|\phi(a) - p(a)| < \epsilon$. Alors on a

$$(\forall x \in [a,b])\ (|\phi'(x) - p_1(x)| \leq \delta \ \Rightarrow \ |\phi(x) - p(x)| \leq \epsilon). \tag{6.1.4}$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, par intégration, on a qu'il existe $\delta > 0$, tel que, si p_1 est un polynôme tel que $|\varphi' - p_1| < \delta$, alors p_1 a une primitive p telle que $|\varphi - p| < \epsilon$ et $|\varphi' - p'| < \epsilon$. En répétant ce procédé plusieurs fois on a que si $\epsilon > 0$, il existe $\delta_m > 0$ tel que si P_ϵ est un polynôme tel que

$$(\forall x \in [a,b])\ (|D^{(m)}f(x) - D^{(m)}P_\epsilon(x)| \leq \delta_m).$$

Alors on a

$$(\forall k \leq m)\ (\forall x \in [a,b])\ (|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}P_\epsilon(x)| \leq \epsilon). \tag{6.1.5}$$

Ceci achève la preuve de (1).

Définissons sur $C^m[a,b]$, les formes linéaires suivantes

$$(\forall k \in \{0,1,...,m\})\ (\forall j \in \{1,2,...,n\})\ (L_{kj}(f) = D^{(k)}f(x_j)).,\tag{6.1.6}$$

Montrons qu'elles sont, toutes, continues sur $C^m[a,b]$. En vertu de la définition de la norme $|||.|||_l$ par la relation 6.1.2 il vient

$$(\forall k \in \{0,1,...,m\})\ (\forall j \in \{1,2,...,n\})$$

$$\begin{aligned}
(|L_{kj}(f)| &= |D^{(k)}f(x_j)| && (6.1.7)\\
&\leq \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{k=0}^{n_i} \|D^{(k)}f\|_i && (6.1.8)\\
&\leq |||f|||_l. && (6.1.9)
\end{aligned}$$

On en déduit la continuité des formes linéaires L_{kj} et de surcroit

$$\|L_{kj}\| \leq 1.$$

La deuxième partie du Lemme 6.1.1, cité ci-dessus, nous permet, alors, de déduire (2). □

Lemme 6.1.3. *Posons $m = max\,\{n_i \mid i \in I\}$. Alors pour tout entier $l \geq 1$ on a*

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\forall f \in \sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}])\ (\exists \tilde{f} \in C^m(\mathbb{R}))\ (|||f-\tilde{f}|||_l \leq \epsilon). \tag{6.1.10}$$

C'est-à-dire, l'ensemble des restrictions à $[a,b]$ des fonctions $C^m(\mathbb{R})$ est ***dense*** *dans l' espace vectoriel normé $(\sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}],\ |||.|||_l)$.*

Démonstration. On raisonne par induction sur l. Le théorème est évident pour $l = 1$ (prendre $\tilde{f} = f$). Il est aussi vrai pour $l = 2$ par le Corollaire 5.3.4. Supposons-le vrai pour l et montrons qu'il l'est pour $l+1$. Appliquons l'hypothèse d'induction sur $[a_0, a_l]$ pour trouver une fonction $g \in C^p(\mathbb{R})$, où $p = \max\{n_i \mid 0 \leq i \leq l-1\}$, satisfaisant

$$|||f-g|||_l \leq \epsilon/4. \tag{6.1.11}$$

Appliquons le Corollaire 5.3.4 aux fonctions :

(1) $g \in C^p[a,a_l]$ sur $[a,a_l]$,

(2) $f \in C^{n_l}[a_l,a_{l+1}]$ sur $[a_l,a_{l+1}]$.

Comme $\max\{p,n_l\}=\max\{n_i\}_{0\leq i\leq l}$, on pose $m = \max\{n_i\}_{0\leq i\leq l}$. Il en résulte qu'il existe une fonction $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ telle que :

(1) $(\forall k \leq p)\ (\forall x \in [a_0,a_l])\ \ (|D^{(k)}g(x) - D^{(k)}\tilde{f}(x)| \leq \epsilon/(4l(p+1)))$,

(2) $(\forall k \leq n_l)$ $(\forall x \in [a_l, a_{l+1}])$ $(|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}\tilde{f}(x)| \leq \epsilon/2)$.

Par conséquent

(1) $|||g - \tilde{f}|||_l \leq \epsilon/4$,

(2) $(\forall k \leq n_l)$ $(\forall x \in [a_l, a_{l+1}])$ $(|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}\tilde{f}(x)| \leq \epsilon/2)$.

D'où

(1) $|||f - \tilde{f}||_l \leq \epsilon/2$,

(2) $(\forall k \leq n_l)$ $(\forall x \in [a_l, a_{l+1}])$ $(|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}\tilde{f}(x)| \leq \epsilon/(2(1+n_l)))$.

On obtient, en conclusion, que

$$|||f - \tilde{f}|||_{l+1} \leq \epsilon. \tag{6.1.12}$$

Ce qui achève la preuve par induction sur l. □

Théorème 6.1.4. *(pp. 62, [3]]) Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = b$ des nombres réels et soit $n_0, \cdots, n_{l-1}$ des entiers naturels. Soit $E \subset [a,b]$ un ensemble fini. Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n_i} sur $[a_i, a_{i+1}], i = 0, \cdots, l-1$. Supposons de plus que les dérivées sur les sous-intervalles adjecents coïncident sur les points communs terminaux, i.e., pour chaque $i = 1, \cdots, l-1$, f est de classe C^{m_i} sur $[a_{i-1}, a_{i+1}]$ où m_i =min$\{n_{i-1}, n_i\}$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un polynôme g tel que pour tout $i = 0, \cdots, l-1$, pour tout $k = 0, \cdots, n_i$, et tout $x \in [a_i, a_{i+1}]$, $|D^{(k)}f(x) - D^{(k)}g(x)| < \epsilon$ et de plus, si $x \in E$ alors $D^{(k)}f(x) = D^{(k)}g(x)$.*

Démonstration. Soit $f \in \sum_{i=0}^{l-1} C^{n_i}[a_i,a_{i+1}]$ et choisissons un $\epsilon > 0$ quelconque. Alors, en vertu du Lemme 6.1.3 il existe **une fonction** $h \in C^m(\mathbb{R})$, telle que

$$|||f - h|||_l \leq \epsilon/2, \quad \text{où} \quad m = \max\{n_i \mid i \in I\}. \tag{6.1.13}$$

D'autre part, par le Lemme 6.1.2 (Walsh), il existe un polynôme P_ϵ tel que:

(1) $|||h - P_\epsilon|||_l \leq \epsilon/2$,

(2) $(\forall k \in \{0, 1, ..., m\})$ $(\forall x \in E)$ $(D^{(k)}h(x) = D^{(k)}P_\epsilon(x))$.

Ainsi on a

(1) $|||f - P_\epsilon|||_l \leq \epsilon$,

(2) $(\forall i \in I)$ $(\forall x \in E \cap [a_i, a_{i+1}])$ $(\forall k \in \{0, 1, ..., n_i\})$ $(D^{(k)}f(x) = D^{(k)}P_\epsilon(x))$.

□

6.2. Conséquences

Lemme 6.2.1. *Soit* $f \in C[0,+\infty)$, $m \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon > 0$. *Alors, il existe une fonction* $\phi \in C[0,+\infty)$, *telle que:*

(1) $\phi(0) = f(0)$,

(2) $\phi'(0^+) = m$,

(3) $(\forall x \in [0,+\infty)\ (|\phi(x) - f(x)| \leq \epsilon)$.

Démonstration. La fonction ϕ sera définie sur trois intervalles: $[0,\mu], [\mu,\eta]$ et $[\eta,+\infty)$. Soit ϕ_0 la fonction linéaire qui prend la valeur $f(0)$ en 0 et a la pente m. Soit ϕ_1 la fonction linéaire qui prend la valeur $\phi_0(\mu)$ en μ et la valeur $f(\eta)$ en η. Posons:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_0(x), & 0 \leq x \leq \mu; \\ \phi_1(x), & \mu \leq x \leq \eta; \\ f(x), & \eta \leq x \leq +\infty. \end{cases}$$

Évidemment, ϕ est continue et la dérivée à droite existe et vaut m en 0.

Montrons que, si $0 < \mu < \eta$ sont suffisament petits, alors $|\phi(x) - f(x)| < \epsilon$, pour $x \in [0,\nu]$ et donc pour tous $x \in [0,+\infty)$. D'abord, on choisit μ assez petit que $|f(x) - f(0)| < \epsilon/2$ et $|\phi_0(x) - \phi(0)| < \epsilon/2$, pour $x \in [0,\mu]$. Il en suit que

$$|\phi(x) - f(x)| \leq |\phi(x) - \phi(0)| + |\phi(0) - f(x)| < \epsilon, \quad 0 \leq x \leq \mu.$$

Maintenant, chosissons $\eta > \mu$ si proche de μ que

$$|f(x) - f(\mu)| < \epsilon, \quad \mu \leq x \leq \eta.$$

Sur l'intervalle $[\mu,\eta]$ les graphes des fonctions f et ϕ sont tous deux dans la bande

$$f(\mu) - \epsilon < y < f(\mu) + \epsilon.$$

Donc,

$$|\phi(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \mu \leq x \leq \eta.$$

Donc, sachant que sur l'intervalle $[\eta,+\infty]$ on est dispensé de tout travail d'approximation, la preuve est terminée.

$\square$

Lemme 6.2.2. *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *telle que*

(1) $f \in C^1(-\infty,0]$,

(2) $f \in C[0, +\infty)$.

Soit $\epsilon > 0$. *Alors, il existe* $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$, *telle que*

(1) $(\forall x \in (-\infty, 0])\ (\tilde{f}'(x) = f'(x))$,

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon)$.

Démonstration. Prenons $m = f'(0^-)$ et $\epsilon > 0$, quelconque. Alors, en vertu du Lemme 6.2.1 il existe une fonction $\phi \in C[0, +\infty)$, telle que

(1) $\phi(0) = f(0)$,

(2) $\phi'(0^+) = m$,

(3) $(\forall x \in [0, +\infty))\ (|\phi(x) - f(x)| \leq \epsilon/2)$.

La fonction F composée de f sur $(-\infty, 0]$ et de ϕ sur $[0, +\infty)$, est continue sur $\mathbb{R}$. Sa restriction au fermé $(-\infty, 0]$ est de classe C^1. Alors, par le Théorème 5.3.1, il existe une fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\epsilon/2-$proche de F et telle que $g|_{(-\infty,0]} = F|_{(-\infty,0]} = f$.

On vérifie bien qu'on a

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (|g(x) - f(x)| \leq \epsilon)$;

(2) $(\forall x \in (-\infty, 0])\ (|g(x) - f(x)| = 0)$.

Donc

(1) $(\forall x \in (-\infty, 0))\ (g'(x) = f'(x))$;

(2) $g'(0) = f'(0^-)$.

Théorème 6.2.3. *Soit* $f \in C[a,b]$, *et* $a_1 \in (a, b)$ *tels que* $f \in C^1[a_1,b]$. *Alors, pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $g \in C^1[a,b]$ *telle que :*

(1) $(\forall x \in [a, b])\ (|f(x) - g(x)| \leq \epsilon)$.

(2) $(\forall x \in [a_1, b])\ (|f'(x) - g'(x)| \leq \epsilon)$.

Démonstration. Soit la fonction de la variable réelle $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

(1) $\tilde{f}(x) = f(a)$ sur $(-\infty, a]$,

(2) $\tilde{f}(x) = f(x)$ sur $[a,b]$,

(3) $\tilde{f}(x) = f'_-(b)x + f(b) - bf'_-(b)$ sur $[b, +\infty)$,

$f'_-(b)$ désignant la dérivée à gauche de b.

Clairement, $\tilde{f}$ est dans $C(-\infty, a_1]$. D'autre part elle est dans $C^1[a_1, +\infty)$.

On applique, alors, une version légèrement modifiée du Lemme 6.2.2 à la fonction $\tilde{f}$ avec

a_1 comme nouveau centre. La fonction g cherchée, n'est autre que la restriction de $\tilde{f}$ au segment $[a, b]$. $\square$

Proposition 6.2.4. *Pour tout $t > 0$, $\epsilon > 0$, et $m \in \mathbb{R}$, il existe une fonction g telle que :*

(1) $g \in C^{\infty}[0, t]$

(2) $|g| < \epsilon$,

(3) Toutes les dérivées de g sont nulles en zéro,

(4) $g(t) = 0$, et

(5) $g'(t) = m$.

DÉMONSTRATION. Si $m = 0$, on peut prendre pour g la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Sans perte de généralité, on suppose $m > 0$. Soit $f_2(x) = m(x - t)$, et choisissons $0 < t_2 < t$ si proche de t que $f_2(x) > -\epsilon/2$, pour $t_2 \leq x \leq t$. Soit $0 < t_1 < t_2$. Soit f_1 la fonction linéaire qui prend la valeur 0 en t_1 et la valeur $f_2(t_2)$ en t_2. Soit f_0 la fonction identiquement nulle. Définissons f sur $(-\infty, +\infty)$ en posant f égale à f_0 sur $(-\infty, t_1)$, égale à f_1 sur $[t_1, t_2]$ et égale à f_2 sur $(t_2, +\infty)$.

Le Théorème 5.3.1 de Whitney peut être appliqué sur $\mathbb{R}$ pour nos trois fonctions précédentes. Il en résulte qu'on peut trouver une fonction $\tilde{f}$ lisse sur $\mathbb{R}$ qui est $\epsilon/2$-proche de f sur $\mathbb{R}$. Comme f est lisse sur le fermé $(-\infty, t_1] \cup [t_2, +\infty)$; alors $\tilde{f}$ peut être prise égale à f sur ce fermé. La fonction g cherchée est $\tilde{f}|_{[0,t]}$.

$\square$

$\square$

Chapitre 7

APPROXIMATION ET INTERPOLATION PAR LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

7.1. Préalables

La fonction **Zêta de Riemann**, notée ζ, peut être définie par simples formules de deux façons (pp. 1, [**1**])

(1) Comme une série de Dirichlet,

(2) Comme un produit d'Euler.

On va utiliser la première de ces expressions comme définition, quitte à obtenir la seconde comme théorème.

Définition 7.1.1. *Si $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, alors la fonction* ***Zêta de Riemann*** *ζ est définie en posant*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{7.1.1}$$

On se place sur l'ensemble $E_{\sigma_0} = \{s = \sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 < \sigma_0 \leq \sigma\}$.

Théorème 7.1.2. *(Test M de Weierstrass)*

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que la série $\sum M_n$ converge. Si $(u_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un ensemble E , à valeurs complexes et telles que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall s \in E)\ (|u_n(s)| \leq M_n). \tag{7.1.2}$$

Alors la série $\sum u_n(s)$ converge ***uniformément*** *sur E.*

Dans notre cas $E = E_{\sigma_0}$ et $u_n(s) = \frac{1}{n^s}$. Alors on a pour tout $s \in E_{\sigma_0}$:

$$|u_n(s)| = |\frac{1}{n^s}| = |\frac{1}{n^{\sigma+it}}| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}} = M_n.$$

Or $\sigma_0 > 1 \quad \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ (étant série de Riemann) est convergente. D'où la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge **uniformément** sur tout ensemble E_{σ_0} tel que précédemment défini.

D'autre part, puisque

$$(\forall s \in E_{\sigma_0}) \ (|u_n(s)| \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}),$$

et que $\sum \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ converge alors $\sum |\frac{1}{n^s}|$ converge. Ce qui équivaut à dire que $\sum \frac{1}{n^s}$ converge **absolument** sur E_{σ_0}.

Théorème 7.1.3. *Pour $s = \sigma + it, \sigma > 1$, on a :*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{7.1.3}$$

*où le produit dans le membre droit porte sur tous les nombres **premiers** p.*

Théorème 7.1.4. *La fonction ζ admet un unique prolongement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un unique pôle en $s = 1$ de résidu 1.*

Théorème 7.1.5. *(Bohr-Courant) . Pour tout réel σ fixé tel que $1/2 < \sigma \leq 1$, l'ensemble $\{\zeta(\sigma + it) | t \in \mathbb{R}\}$ est **dense** dans $\mathbb{C}$.*

Autrement dit

$$\forall \sigma \in (1/2, 1] \quad \overline{\{\zeta(\sigma + it) | t \in \mathbb{R}\}} = \mathbb{C}. \tag{7.1.4}$$

Théorème 7.1.6. *(***[13]***) Soit K un sous-ensemble **compact** de la bande*

$$S = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \Re s < 1\}, \tag{7.1.5}$$

*dont le complémentaire $\mathbb{C} \setminus K$ dans $\mathbb{C}$ est **connexe**. Soit $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction **continue** sur K, **holomorphe** sur int(K) et n'ayant pas de zéro dans K. Alors*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists t \geq 0)(\forall s \in K)(|\zeta(s + it) - f(s)| \leq \epsilon). \tag{7.1.6}$$

*En outre, la **densité inférieure** de l'ensemble de telles valeurs t, est **positive**, comme c'est exprimé par l'inégalité suivante concernant une limite inférieure :*

$$0 \; < \; \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\lambda(\; \{t \in [0,T] \; : \; \sup_{s\in K} |\zeta(s+it) - f(s)| < \epsilon \; \}), \tag{7.1.7}$$

*où λ désigne la **mesure de Lebesgue** sur les nombres réels.*

7.2. Conséquences de la propriété d'Universalité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\epsilon = 1/n$ dans l'expression 7.1.6. Il en résulte qu'on peut écrire

$$(\forall \; n \in \mathbb{N})(\exists \; u(n) = u_n \geq 0)(\forall \; s \in K)(|\zeta(s+iu_n) - f(s)| < 1/n). \tag{7.2.1}$$

L'inégalité 7.1.7 devient alors :

$$0 \; < \; \liminf_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\lambda(\; \{u_n \in [0,T] \; : \; \sup_{s\in K} |\zeta(s+iu_n) - f(s)| < 1/n \; \}). \tag{7.2.2}$$

Le numérateur de la fraction précédente croit avec T. S'il était majoré par une valeur finie $M > 0$, le quotient précédent tendrait vers 0 lorsque T tend vers $+\infty$ et on aurait une contradiction. On en déduit que :

$$\lambda \left(\{u_n \in [0,+\infty) \; : \; \sup_{s\in K} |\zeta(s+iu_n) - f(s)| < 1/n\}\right) = +\infty. \tag{7.2.3}$$

Donc, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, on peut choisir u_n arbitrairement grand. En particulier, on peut prendre $u_n > n$.

Choisisons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un et un seul $u_n > n$, qu'on nommera t_n. On a ainsi établi le corollaire suivant,

Corollaire 7.2.1. *Soit K un sous-ensemble **compact** de la bande S précédemment définie, dont le complémentaire, dans $\mathbb{C}$, est **connexe**. Soit $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction définie et **continue** sur K, **holomorphe** sur int(K) et ne s'annulant en aucun point de K. Alors, il existe une suite réelle $t_n(K) \nearrow +\infty$, tellle que $\zeta(s+it_n(K))$ converge **uniformément** vers f sur K.*

Pour un $\sigma \in (1/2, 1)$ donné, on définit la droite

$$D_\sigma = \{\sigma + it \in S \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{7.2.4}$$

Proposition 7.2.2. *Tout espace E **connexe par arcs** est **connexe**.*

DÉMONSTRATION. Supposons que E n'est pas connexe. Alors, il existe deux fermés de E; F_1 et F_2; non vides et disjoints tels que :

$$E = F_1 \cup F_2. \tag{7.2.5}$$

Soit $(a, b) \in F_1 \times F_2$. Alors, en vertu de la connexité par arc de E, il existe une application **continue** f d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans E telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.

Il en résulte

$$f([\alpha, \beta]) = (f([\alpha, \beta]) \cap F_1) \cup (f([\alpha, \beta]) \cap F_2). \tag{7.2.6}$$

$[\alpha, \beta]$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$; et f est continue; donc $f([\alpha, \beta])$ est un compact connexe de E. Si on suppose que E est séparé, alors $f([\alpha, \beta])$ est un fermé de E, de par sa compacité. Il en résulte que $f([\alpha, \beta]) \cap F_1$ et $f([\alpha, \beta]) \cap F_2$ sont deux fermés de E. On peut vérifier qu'ils sont, en outre, non vides et disjoints.

Donc la relation 7.2.6 illustre l'écriture de $f([\alpha, \beta])$, qui est connexe, comme réunion de deux fermés non vides et disjoints, de E. Ce qui est absurde. On en conclut que tout espace connexe par arcs est connexe. □

Lemme 7.2.3. *Soit K_σ un **compact de** D_σ. Alors*

*(1) K_σ est un **compact de** S.*

*(2) $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$ est **connexe par arcs**.*

*(3) $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$ est **connexe**.*

DÉMONSTRATION. (1) K_σ étant **compact** de D_σ c'est un **fermé borné** de D_σ relativement à la topologie induite. Alors on peut écrire

$$K_\sigma = F \cap D_\sigma, \tag{7.2.7}$$

où F est un **fermé** de S.

Puisque $\{s \in S : 1/2 < \Re s < \sigma\}$ et $\{s \in S : \sigma < \Re s < 1\}$ sont des **ouverts de** S, leur **réunion** l'est aussi. Son complémentaire qui, n'est autre que D_σ est, donc, un fermé de S.

Par conséquent, $K_\sigma = F \cap D_\sigma$, étant l'**intersection** de 2 fermés de S est lui-même un fermé de S.

Comme K_σ est un ensemble borné de D_σ, il l'est aussi de S.

En conclusion, K_σ est un fermé borné de S et par conséquent en est un **compact**. Ce qui achève la preuve de la première partie.

(2) Montrons que $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$ est **connexe par arcs**.

On peut écrire :

$$\mathbb{C} \setminus K_\sigma = \{s \in \mathbb{C} \ : \Re s < \sigma\} \cup \{s \in \mathbb{C} : \sigma < \Re s\} \cup U = U_1 \cup U_2 \cup U;$$

où U est un ouvert non borné de D_σ.

Prenons deux points quelconques z_1 et z_2 de $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$. Envisageons, explicitement, toutes les possibilités :

(a) Les deux points z_1 et z_2 sont dans U_1.

Considérons l'application $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ telle que :

$$(\forall t \in [0, 1]) \ (f(t) = (1 - t)z_1 + tz_2).$$

On a, alors :

$$(\forall t \in [0, 1]) \ (\Re f(t) = (1 - t)\Re z_1 + t\Re z_2 < (1 - t)\sigma + t\sigma = \sigma).$$

Donc, f est une application continue de $[0, 1]$ dans U_1 telle que :

$$f(0) = z_1 \text{ et } f(1) = z_2.$$

(b) Les deux points z_1 et z_2 sont dans U_2.

Ce cas est, par symétrie, similaire au précédent.

(c) Le point z_1 est dans U_1 alors que z_2 est dans U.

On utilise la même fonction et, on a :

$$(\forall t \in [0, 1]) \ (f(t) = (1 - t)z_1 + tz_2).$$

D'où :

$$(\forall t \in [0, 1]) \ (\Re f(t) = (1 - t)\Re z_1 + t\Re z_2 \leq (1 - t)\sigma + t\sigma = \sigma).$$

D'où $f([0, 1]) \subset U_1 \cup U \subset \mathbb{C} \setminus K_\sigma$.

(d) Le point z_1 est dans U_2 alors que z_2 est dans U.

Ce cas est, par symétrie, similaire au au précédent.

(e) Les deux points z_1 et z_2 sont dans U.

Alors on choisit un point z_0 quelconque de U_1 par exemple. On peut joindre z_1 à z_0 par un segment de droite et joindre z_0 à z_2 par un autre segment de droite. La réunion de ces deux segments constitue l'arc joignant z_1 à z_2. Il est contenu dans $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$.

En conclusion, $\mathbb{C} \setminus K_\sigma$ est connexe par arc.

(3) Il est, par conséquent, connexe, en vertu du Théorème 7.2.2.

□

Il s'en suit que tout compact K_σ de D_σ est approprié pour appliquer le Théorème 7.1.6 pourvu que, la fonction f définie dessus remplisse ses hypothèses.

Corollaire 7.2.4. *Soit $\sigma \in (1/2, 1)$, K_σ un compact de D_σ et f une fonction définie et* ***continue*** *sur D_σ. Alors, il existe une suite réelle $(t_n(K_\sigma))_{n\in\mathbb{N}} \nearrow +\infty$, tellle $\zeta(s + it_n(K_\sigma))$ converge* ***uniformément*** *vers $f(s)$ sur K_σ.*

Démonstration. Fixons, arbitrairement, un $\sigma \in (1/2, 1)$ et un compact $K_\sigma \subset D_\sigma$.

Montrons que $\mathrm{int}(K_\sigma)$ dans $\mathbb{C}$ est vide. On sait que $\mathrm{int}(K_\sigma)$ dans $\mathbb{C}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans K_σ. Soit $s \in \mathrm{int}(K_\sigma)$. Alors s est centre d'un disque ouvert de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathrm{int}(K_\sigma) \subset K_\sigma$. Or il existe dans ce disque des points qui ont une partie réelle différente de σ alors que tous les points de K_σ ont σ pour partie réelle. Ceci ne peut être que si $\mathrm{int}(K_\sigma) = \emptyset$.

(1) Sous reserve que f ne s'annule pas sur K_σ , l'hypothèse d'holomorphie n'est plus requise, vu que $\mathrm{int}(K_\sigma)$ dans $\mathbb{C}$ est vide, le résultat cherché découle immédiatement du Corollaire 7.2.1.

(2) Supposons que f possède un zéro dans K_σ.

Proposition 7.2.5. *Soit P un polynôme complexe, $\epsilon > 0$, arbitrairement choisi et, un compact $K \subset \mathbb{C}$ tel que*

(1) $\mathrm{int}(K) = \emptyset$.

(2) $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe.

Alors, il existe un polynôme Q, sans zéros sur K, tel que

$$(\forall z \in K)\ (|P(z) - Q(z)| \leq \epsilon). \tag{7.2.8}$$

DÉMONSTRATION. $\text{int}(K) = \emptyset \Rightarrow \partial K = \overline{K} \backslash \text{int}(K) = \overline{K}$.

K est compact, donc il est fermé; soit $\overline{K} = K$. On déduit, alors $\partial K = K$. Supposons que P est un polynôme complexe, de degré n, possédant m zéros $z_1, z_2, ..., z_m$ dans K, et par conséquent dans sa frontière et $n - m$ zéros $z_{m+1}, z_{m+2}, ..., z_n$ dans $\mathbb{C} \setminus K$. Alors, on peut écrire :

$$(\exists a \in \mathbb{C})\ (\forall z \in \mathbb{C})\ (P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_m)(z - z_{m+1}...(z - z_n)). \tag{7.2.9}$$

Puisque P est continu en tout point $z \in \mathbb{C}$ alors :

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \eta > 0)\ (\forall u \in \mathbb{C})\ (|u| \leq \eta \Rightarrow |P(z) - P(z - u)| \leq \epsilon). \tag{7.2.10}$$

Puisque $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe, on peut choisir un $u \in \mathbb{C}$ ($|u| \leq \eta$) tel que :

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\ (z_i + u \in \mathbb{C} \setminus K).$$

$$K + u \subset \mathbb{C} \setminus K.$$

Soit Q le polynôme ainsi défini :

$$\begin{aligned}(\forall z \in \mathbb{C})\ (Q(z) &= P(z - u) \\ &= a(z - u - z_1)(z - u - z_2)......(z - u - z_m)(z - u - z_{m+1})...(z - u - z_n)).\end{aligned}$$

Les zéros de Q sont $z_1 + u, z_2 + u, ...$et, $z_n + u$. Ils sont tous dans $\mathbb{C} \setminus K$.

On obtient donc :

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\forall z \in K)\ (|P(z) - Q(z)| \leq \epsilon). \tag{7.2.11}$$

Ce qui achève la preuve.

□

Théorème 7.2.6. *(Théorème de Mergelyan), (pp.* 434, **[10]***) Soit K un espace compact du plan complexe dont le complémentaire est connexe. Soit f une fonction continue et à valeurs complexes sur K, holomorphe sur l'intérieur de K et soit $\epsilon > 0$. Il existe un polynôme P tel que $|f(z) - P(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in K$.*

Alors, on peut écrire :

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \text{ un polynôme } P)\ (\forall z \in K)\ (|f(z) - P(z)| \leq \epsilon/4). \tag{7.2.12}$$

En combinant les deux théorèmes précédents, on obtient :

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \text{ un polynôme } Q \text{ sans zéro dans } K)\ (\forall z \in K)\ (|f(z) - Q(z)| \leq \epsilon/2). \tag{7.2.13}$$

On peut appliquer à Q, qui est sans zéro dans K, un résultat précédent et déduire l'existence d'une suite $(t_n(K)) \nearrow +\infty$ telle que $\zeta(z + it_n(K))$ converge uniformément vers $Q(z)$ sur K. Explicitement, on a $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N(\epsilon))\ (\forall z \in K)$

$$\begin{aligned}(|\zeta(z + it_n(K)) - f(z)| &\leq |\zeta(z + it_n(K)) - Q(z)| + |Q(z) - f(z)| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon).\end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme de $\zeta(z + it_n(K))$ vers $f(z)$ sur K.

Remarque 7.2.7. . *On peut, toujours, prendre $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq \eta$ et :*

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\ (z_i + u \in \mathbb{C} \setminus K)\ (K + u \subset \mathbb{C} \setminus K).$$

Alors, on a :

$$(\forall z \in K)\ (Q(z) = P(z - u)). \tag{7.2.14}$$

□

Bibliographie

[1] A. A.Karatsuba, S. M. Voronin, The Riemann Zeta-Function, Walter de Gruyter.Berlin. New York 1992.

[2] Boivin, A.; Gauthier, P. M.; Manolaki, M. On zero sets of harmonic and real analytic functions. Ann. Math. Québec https://doi.org/10.1007/s40316-018-0098-1

[3] Burke, M.; Comonotone approximation and interpolation by entire functions Date: November 6, 2017. 1991 Mathematics Subject Classification. Primary 30E10; Secondary 26A48, 41A05, 41A28, 41A10.

[4] Choquet, G. Cours d'Analyse, Tome II, Topologie. Masson et Cie, Editeurs, 120, boul. Saint-germain, Paris-VI, 1973.

[5] Deutsch, Frank. Simultaneous interpolation and approximation in topological linear spaces. SIAM J. Appl. Math. **14** 1966 1180-1190.

[6] Franklin, P. Analytic transformations of everywhere dense point sets. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 91-100, MSC : Primary 26A03; Secondary 54F65, DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1925-1501300-2 MathSciNet review: 1501300

[7] Gamelin, Theodore W. Complex Analysis. ISBN 0-387-95069-9 www.springer-ny.com

[8] Hestenes, M. R. Extension of the range of a differentiable function . Duke Math. J. Volume 8, Number 1 (1941), 183-192.

[9] Lee, John M. Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, bf 218. Springer, New York, 2013.

[10] Rudin, Walter. Analyse réelle et complexe. 3ème édition. Dunod, Paris, 1998. ISBN 978-2-10-053447-0.

[11] Seeley, R. T. Extension of C^∞ functions defined in a half space. Proc. Amer. Math. Soc. **15** 1964 625-626.

[12] Whitney, H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

[13] Wikipédia. Zeta function universality.