





**Université de Montréal**

**Étude combinatoire et algorithmique de la médiane de  
permutations sous la distance de Kendall-Tau**

par

**Charles Desharnais**

Département d'informatique et recherche opérationnelle  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en informatique et recherche opérationnelle

30 avril 2019



# RÉSUMÉ

---

Une permutation peut être vue comme un classement qui ordonne des éléments ou des candidats en fonction d'une préférence ou d'un critère. Ce classement peut être le vote d'un électeur qui doit classer tous les candidats en ordre de préférence, le résultat d'une compétition sportive avec plusieurs athlètes ou encore une liste des meilleurs films de 2018. Cependant, il se peut, dans les exemples ci-dessus, que les électeurs n'aient pas les mêmes préférences ou encore qu'une compétition sportive soit divisée en plusieurs épreuves dont les classements diffèrent les uns des autres. C'est pourquoi il existe des règles pour générer une permutation "consensus", c'est-à-dire qui est le meilleur compromis entre les différents classements. L'un de ces consensus est la médiane de permutation, appelée aussi consensus de Kemeny. Cette dernière méthode respecte un ensemble de propriétés qui justifient son utilisation. Le calcul du consensus de Kemeny est toutefois un problème NP-difficile. Conséquemment, de nombreux travaux de recherche ont été effectués sur le sujet. Ce mémoire étudie principalement des classes spéciales du problème, c'est-à-dire le calcul du consensus de Kemeny d'un ensemble de permutations présentant des caractéristiques spécifiques.

Mots clés : méthode de Kemeny, médiane de permutations, règle de Kemeny, distance de Kendall- $\tau$ , consensus de Kemeny, permutations



# ABSTRACT

---

A permutation can be seen as a ranking which orders elements or candidates by a criteria or a preference. This ranking can be an elector's vote to rank candidates in order of preference, athletes in a sports competition or a list of the best movies of 2018. However, in these examples, the electors may not all have the same preferences and the athletes might be judged on more than one challenge in which rankings differ. This is why "consensus" rules of permutation exist as the best compromise for the different rankings. One of these consensus is the median permutation, or the Kemeny consensus. This method respects some properties which justify its use, but is NP-hard to compute. Consequently, numerous researchers have devoted time to study this problem. This master's thesis aims to study the calculation of the Kemeny consensus in special cases of the problem, which are set of permutations with specific characteristics.

Key words : Kemeny method, median of permutations, Kemeny Rule, Kendall- $\tau$  distance , Kemeny consensus, permutations



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Résumé</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	v
<b>Liste des tableaux</b> .....	xi
<b>Liste des figures</b> .....	xiii
<b>Liste des notations</b> .....	xv
<b>Liste des sigles et des abréviations</b> .....	xvii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>Chapitre 1. Définitions et présentation du problème</b> .....	5
1.1. Définitions de base.....	5
1.2. Définition du problème étudié.....	6
1.3. Autres définitions et notations.....	7
1.3.1. Les permutations vues comme des classements.....	7
1.3.2. Quelques notations ensemblistes.....	7
1.3.3. Distance de Kendall sur un domaine partiel.....	9
1.3.4. Matrices gauche, droite et de majorité.....	10
1.3.5. Propriétés de base des mouvements d'insertion.....	11
1.3.6. Additivité.....	12
1.3.7. Quelques définitions sur les graphes.....	13
<b>Chapitre 2. Revue de littérature</b> .....	15
2.1. Propriétés et comparaison de différentes règles de consensus.....	15
2.1.1. Autres règles de consensus.....	15
2.1.2. Critères.....	16

2.1.3.	Avantage du consensus de Kemeny .....	18
2.2.	Complexité du problème .....	19
2.2.1.	Cas triviaux .....	19
2.2.2.	Médiane d'un nombre de permutations pair et supérieur à 2 .....	19
2.2.2.1.	Idée de la réduction .....	20
2.2.2.2.	Réduction .....	20
2.2.3.	Médiane d'un nombre de permutations impair et supérieur à 2 .....	21
2.3.	Lien entre le problème de la médiane, MFASP et LOP .....	21
2.4.	Recherche exacte .....	23
2.4.1.	Branch-And-Bound .....	23
2.4.2.	Programmation en nombres entiers .....	26
2.4.3.	Algorithmes à paramètres fixes .....	28
2.4.4.	Réduction d'espace de recherche .....	30
2.4.5.	Major Order Theorem .....	31
2.4.6.	Bornes inférieures .....	33
2.4.7.	Médianes de 3 permutations .....	34
2.5.	Heuristiques .....	35
2.5.1.	Heuristiques à base d'autres méthodes de consensus .....	36
2.5.2.	Quelques autres heuristiques .....	36
2.5.3.	Heuristiques à base de mouvements d'insertion .....	37
2.5.4.	Combinaisons et comparaisons des heuristiques .....	38
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Le cas automédian .....</b>	<b>39</b>
3.1.	Travaux précédents .....	39
3.2.	Action de groupe et morphisme .....	40
3.3.	Permutations décomposables et somme directe .....	41
3.3.1.	Définitions et notations .....	41
3.3.2.	Théorèmes et propriétés .....	43
3.4.	Compter les ensembles automédians .....	47
3.5.	Retour sur le chapitre .....	47
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Ensembles de permutations multicirculaires .....</b>	<b>49</b>

4.1. Ensembles équilibrés .....	49
4.2. Définitions et notions de bases des ensembles multicirculaires.....	51
4.3. Trouver les médianes d'un ensemble multicirculaire .....	53
4.3.1. Médianes d'une famille circulaire.....	53
4.3.2. Médianes de l'union de deux familles circulaires.....	54
4.3.3. Médianes de l'union de plus de deux familles circulaires.....	55
4.4. Application possible .....	59
<b>Chapitre 5. Produit de mélange et ensembles automédians inséparables</b>	<b>61</b>
5.0.1. Propriété utile en combinatoire .....	61
5.1. Produit de mélange.....	62
5.1.1. Définitions et notations .....	62
5.1.2. Propriétés sur la position d'un élément dans un produit de mélange ...	64
5.1.3. Positionnement conjoint .....	68
5.1.4. Propriétés sur la distance .....	71
5.1.5. Propriétés sur les médianes .....	72
5.2. Ensembles automédians inséparables .....	77
<b>Conclusion.....</b>	<b>79</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>81</b>
<b>Annexe A. Complément de preuve.....</b>	<b>A-i</b>



# LISTE DES TABLEAUX

---

1. I	Appariement des différents vocabulaires.....	7
------	--	---



# LISTE DES FIGURES

---

2.1	Exemple de consensus obtenus par différentes méthodes.....	16
2.2	BnB par préfixes, sans élagage.....	24
2.3	BnB par préfixes, avec élagage par contraintes MOT.....	25
4.1	Illustration du théorème 23.....	58



# LISTE DES NOTATIONS

---

$\pi, \sigma, \phi, \rho, \psi, \gamma$	Permutations
$n$	Taille des permutations
$\mathbb{S}_n$	Espace des permutations
$a \prec b$	Élément $a$ préféré à l'élément $b$
$d_{KT}(\pi, \sigma)$	Distance de Kendall- $\tau$
$A$	Ensemble de permutations
$m$	Nombre de permutations, taille de $A$
$\mathcal{M}(A)$	Ensemble des permutations médianes
$L$	Matrice gauche
$R$	Matrice droite
$\Delta$	Matrice de majorité
$circ(A)$	Famille circulaire de $A$
$\oplus$	Somme directe
$\sqcup$	Produit de mélange



# LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

---

3HSP	<i>3-hitting set problem</i>
BnB	<i>Branch-And-Bound</i>
FPT	<i>Fixed Parameter Tractable</i>
LOP	<i>Linear ordering problem</i>
MFAS	<i>Minimum feedback arcset</i>
MFASP	<i>Minimum feedback arcset problem</i>
MOT	<i>Major Order Theorem</i>

# REMERCIEMENTS

---

J'aimerais remercier ma directrice de recherche Sylvie Hamel pour m'avoir guidé pendant ma maîtrise, tout en me laissant une très grande autonomie dans ma recherche, et aussi pour avoir été très présente même à distance durant la fin de ma rédaction.

Je souhaiterais aussi remercier Robin Milosz que j'ai côtoyé tout au long de ma maîtrise. Robin a manifesté un enthousiasme contagieux pour notre sujet et s'est toujours fait un plaisir de répondre aux questions des autres. Une partie des résultats présentés dans ce mémoire repose d'ailleurs sur les travaux qu'il a réalisés avec Sylvie au cours de son parcours à l'université.

J'aimerais finalement remercier tous les gens de mon entourage (surtout mes parents), qui ont contribué, de près ou de loin, à ce que je puisse terminer ce mémoire malgré un contexte de santé précaire. Sur ce dernier point, il y avait d'ailleurs des raisons d'être optimiste au moment d'écrire ces lignes.



# INTRODUCTION

---

Le problème de la médiane de permutations consiste, pour un ensemble  $A$  de  $m$  permutations des éléments  $1, 2, \dots, n$ , à trouver la (ou parfois les) permutation qui minimise la somme des distances de Kendall- $\tau$  de celle-ci aux  $m$  permutations de l'ensemble  $A$ . La distance de Kendall- $\tau$  entre deux permutations compte le nombre de paires d'éléments n'apparaissant pas dans le même ordre relatif dans les deux permutations.

Le problème étant NP-difficile, de nombreuses recherches sur sa résolution autant exacte qu'approximative ont été effectuées au cours des dernières années. Ce mémoire fait entre autres un survol de la littérature existante au chapitre 2, mais introduit d'abord toutes les définitions et concepts de bases nécessaires à l'élaboration du sujet au chapitre 1. Par la suite, le mémoire traite principalement de classes spéciales du problème, c'est-à-dire le calcul du consensus de Kemeny d'un ensemble de permutations présentant des caractéristiques spécifiques, entre autres des ensembles que nous appellerons "équilibrés" et "multicirculaires".

D'abord, au chapitre 3, la classe des ensembles automédians est abordée. Les ensembles automédians sont des ensembles de permutations qui ont la propriété particulière d'être égaux à l'ensemble de leurs médianes ( $A = \mathcal{M}(A)$ ). Ce chapitre a pour but de s'approcher le plus possible d'une caractérisation complète des ensembles automédians et définit au passage l'opération de somme directe permettant de décomposer les ensembles automédians.

Le chapitre 4 propose quant à lui une règle pour calculer le consensus d'un ensemble d'ordres de préférences cycliques. Cela se fait en transformant cet ensemble en ensemble de permutations dit "multicirculaire", puis en calculant le consensus de Kemeny de ce dernier. Nous prouvons toutefois que le calcul de cette règle est NP-difficile, malgré le fait que les ensembles de permutations multicirculaires forment une classe spécifique d'ensembles de permutations.

Finalement, le chapitre 5 introduit le produit de mélange, qui entrelace les permutations de deux ensembles de permutations pour en construire un nouveau. De nombreuses propriétés de cette opération sont introduites dans le but ultime d'étudier l'ensemble de médianes d'un produit de mélange en fonction des propriétés des ensembles mélangés au départ.



# Chapitre 1

---

## DÉFINITIONS ET PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Ce chapitre a pour but de définir toutes les notions concernant le problème de la médiane de permutations et les autres problèmes directement en lien avec celui-ci. D'abord, les définitions de base sont présentées. Ensuite, le problème de la médiane de permutations est formulé. Le reste du chapitre contient plusieurs autres définitions et concepts nécessaires à tous les autres chapitres de ce mémoire.

### 1.1. DÉFINITIONS DE BASE

**Définition 1.** Une permutation de taille  $n$  est une bijection sur l'ensemble  $\{1,2,\dots,n\}$ .

**Définition 2.** On note  $\mathbb{S}_n$  l'ensemble des permutations de taille  $n$ .

Soit  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . L'image de l'élément  $i$ , c'est-à-dire  $\pi(i)$ , peut être notée  $\pi_i$ . On peut représenter  $\pi$  par la séquence de ses éléments :  $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$ , où  $\pi_i$  est l'élément à la position  $i$ . Par exemple, si  $n = 3$ ,  $\pi_1 = 3$ ,  $\pi_2 = 1$ ,  $\pi_3 = 2$ , alors on peut noter  $\pi = 312$ . Cela permet d'alléger la notation.

On note  $\pi^{-1}$  la fonction inverse de  $\pi$ . Ainsi, alors que  $\pi_i$  est l'élément à la position  $i$  dans  $\pi$ ,  $\pi^{-1}(i)$ , aussi noté  $\pi_i^{-1}$ , représente au contraire la position de l'élément  $i$  dans  $\pi$ .

**Définition 3.** On notera  $I_n$  la permutation identité. Plus formellement, si  $\sigma = I_n$ , alors,  $\forall i \in [1..n], \sigma_i = i$ .

**Définition 4.** La **distance de Kendall- $\tau$**  entre deux permutations est le nombre de paires d'éléments n'apparaissant pas dans le même ordre dans les deux permutations. Plus formellement,

$$d_{KT}(\pi, \sigma) = \#\{(i, j) \mid i < j \wedge (\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1})\},$$

où XOR est l'opérateur OU EXCLUSIF.

**Exemple 1.** La distance de Kendall- $\tau$  entre les permutations 14235 et 15243 est 4, car les paires (2,4), (2,5), (3,5) et (4,5) sont dans des ordres opposés. On note  $d_{KT}(14235, 15243) = 4$ .

En pratique, on peut voir chaque permutation comme un ordre de préférence et lorsque  $\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1}$ , on dit que  $i$  précède  $j$ , dénoté  $i \prec_\pi j$ .

Tout au long de ce mémoire, on utilisera des lettres majuscules, le plus souvent  $A$ , pour représenter un ensemble de permutations. On utilisera  $m_A$  ou  $\#A$  pour désigner le nombre de permutations dans  $A$ , ou seulement  $m$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

**Définition 5.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  et  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . La distance de Kendall- $\tau$  entre  $A$  et  $\pi$  est égale à la somme des distances de Kendall- $\tau$  entre  $\pi$  et chaque permutation de  $A$ . Plus formellement :

$$d_{KT}(\pi, A) = \sum_{\sigma \in A} d_{KT}(\pi, \sigma). \quad (1.1.1)$$

**Exemple 2.** Soient  $\pi = 51234$  et  $A = \{54321, 51243\}$ . Alors,  $d_{KT}(\pi, A) = d_{KT}(\pi, 54321) + d_{KT}(\pi, 51243) = 6 + 1 = 7$ .

Notez que dans les applications pratiques,  $A$  peut contenir plusieurs fois la même permutation. Dans ce cas,  $A$  est un multiensemble et la définition précédente devient :

$$d_{KT}(\pi, A) = \sum_{\sigma \in A} \#_A(\sigma) d_{KT}(\pi, \sigma), \quad (1.1.2)$$

où  $\#_A(\sigma)$  est le nombre d'occurrences de  $\sigma$  dans  $A$ .

**Définition 6.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  et  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . On dit que  $\pi$  est une **médiane** de permutations de  $A$  si elle est à distance de Kendall- $\tau$  minimale de  $A$ . Autrement dit,  $\forall \sigma \in \mathbb{S}_n, d_{KT}(\pi, A) \leq d_{KT}(\sigma, A)$ .

## 1.2. DÉFINITION DU PROBLÈME ÉTUDIÉ

Il est possible qu'un ensemble de permutations  $A$  ait plusieurs médianes. On note  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des médianes de  $A$ . Le problème de médiane de permutations consiste donc à trouver les médianes d'un ensemble de permutations. Dans certains contextes, le but est simplement de trouver une médiane d'un ensemble  $A$ , alors que dans d'autres, le but est de calculer complètement  $\mathcal{M}(A)$ .

**Exemple 3.** Soient  $A = \{15234, 35124, 42531\}$ . Après calculs, on trouve que  $\mathcal{M}(A) = \{51234, 52314, 53124\}$ , car ces trois permutations sont à distance 11 de  $A$  et toutes les autres permutations de  $\mathbb{S}_5$  sont à distance supérieure à 11 de  $A$ .

Le problème étant NP-difficile (ce point sera abordé plus en détail à la section 2.2), beaucoup de recherches d'algorithmes exacts et d'heuristiques ont été faites au cours des dernières années pour résoudre le problème. Ce mémoire se concentre plutôt sur des classes spéciales du problème, c'est-à-dire la résolution du problème de la médiane pour un ensemble  $A$  ayant certaines propriétés spécifiques.

Vocabulaire des permutations	Vocabulaire des classements
Permutation	Vote, classement
Ensemble de permutations	Profil, Ensemble de classements
Élément	Candidat
$a$ précède $b$ ( $a \prec b$ )	$a$ est préféré à $b$
$a$ est à la position $k$ dans $\pi$ ( $\pi_a^{-1} = k$ )	$a$ est classé à $k$ -ième dans $\pi$
Médiane de permutation	Consensus de Kemeny
Élément le plus à gauche (resp. droite) dans une médiane	Candidat gagnant, ou premier (resp. perdant, ou dernier)

TABLEAU 1. I. Appariement des différents vocabulaires

### 1.3. AUTRES DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Avant d’aller plus loin, nous allons poser des définitions et notations qui ne font pas toutes partie de la littérature standard, mais qui seront utiles pour la suite.

#### 1.3.1. Les permutations vues comme des classements

L’application pratique la plus courante du problème de la médiane est d’établir un consensus de différents classements des mêmes éléments. Un vocabulaire différent est généralement utilisé : les éléments de 1 à  $n$  sont souvent appelés candidats, chaque permutation de ces éléments représente un classement (parfois appelé vote) et la médiane de ces classements est le consensus de Kemeny. L’ensemble de permutations est parfois appelé ensemble de classements, ou profil.

Dans la littérature, l’ensemble  $C$  des éléments est souvent représenté autrement que par les nombres de 1 à  $n$ . Au lieu d’être une bijection sur  $[1..n]$ , un classement  $\pi$  est plutôt une bijection de  $[1..n]$  vers  $C$ , où  $\pi(i) = \pi_i$  est l’élément classé  $i$ ème dans  $\pi$ . La distance de Kendall- $\tau$  entre deux classements  $\pi$  et  $\sigma$  est plutôt :

$$d_{KT}(\pi, \sigma) = \#\{\{i, j\} \in C^2 \mid i \neq j \wedge (\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1})\}$$

Les définitions de la distance de Kendall- $\tau$  entre un ensemble de classements et un classement et la définition d’une médiane restent inchangées.

Le lecteur peut se référer au tableau 1. I qui indique les équivalences de vocabulaire entre les permutations et les classements, afin de ne pas être mélangé pendant la lecture du mémoire.

#### 1.3.2. Quelques notations ensemblistes

Étant donné que les ensembles de permutations peuvent être en pratique des multiensembles, comme expliqué à la sous-section 1.1, quelques notations sont rappelées ci-dessous.

**Définition 7.** *A et B deux multiensembles. Alors,  $A+B$  est la **somme** (parfois aussi appelée **l'union cumulative**) de A et B. Autrement dit,  $\forall x, \#_{A+B}(x) = \#_A(x) + \#_B(x)$ . De plus,  $\text{supp}(A)$  est l'ensemble des éléments présents au moins une fois dans A.*

**Exemple 4.** *Soient  $A = \{x,x,y\}$  et Soient  $B = \{x,z,z\}$ . Alors  $A+B = \{x,x,x,y,z,z\}$  et  $\text{supp}(A) = \{x,y\}$ .*

Notons que, dans ce mémoire, la notation multienssembliste est utilisée au chapitre 2 , mais nous avons décidé de ne pas travailler avec des multiensembles à partir du chapitre 3 afin de ne pas alourdir la notation.

Certains ensembles de nombres entiers ou de paires de nombre entiers sont utilisés suffisamment souvent dans le mémoire pour qu'il vaille la peine de leur définir leur propre notation.

**Définition 8.** *Soient deux entiers positifs  $i < j$ . L'intervalle  $[i..j]$  est l'ensemble des nombres entiers compris entre  $i$  et  $j$  inclusivement.*

**Définition 9.** *Soient deux entiers positifs  $i < j$ . Alors,*

$$\text{pairs}(i,j) = \{(a,b) \in [i..j]^2 | a < b\}$$

**Définition 10.** *Soient deux entiers positifs  $i$  et  $j$ . Alors,*

$$\text{hp}(i,j) = \{[1..i] \times [i + 1..i + j]\}$$

**Exemple 5.** *On a  $\text{hp}(3,1) = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$  et  $\text{pairs}(2,4) = \{(2,3),(2,4),(3,4)\}$ .*

La distance de Kendall- $\tau$  entre deux permutations de taille  $n$  correspond aux nombres de paires d'entiers de  $\text{pairs}(1,n)$  n'apparaissant pas dans le même ordre dans les deux permutations, ce qui motive l'utilisation de cette notation.

L'ensemble  $\text{hp}(a,b)$  est quant à lui utile lorsqu'on souhaite partitionner  $\text{pairs}(1,n)$  de la manière suivante :

**Théorème 1.** *Soit  $1 < k < n$ . Alors  $\text{pairs}(1,k)$ ,  $\text{hp}(k,n - k)$  et  $\text{pairs}(k + 1,n)$  forment une partition de  $\text{pairs}(1,n)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour n'importe quelle paire  $(i,j) \in \text{pairs}(1,n)$ ,  $(i,j)$  vérifie exactement un des trois cas suivants :

1.  $i < j \leq k$  : dans ce cas,  $(i,j) \in \text{pairs}(1,n)$ , mais  $(i,j)$  n'est dans aucun des des deux autres ensembles.
2.  $i < k \leq j$  : dans ce cas,  $(i,j) \in \text{hp}(k,n - k)$ , mais  $(i,j)$  n'est dans aucun des deux autres ensembles.
3.  $k < i < j$  : dans ce cas,  $(i,j) \in \text{pairs}(k + 1,n)$ , mais  $(i,j)$  n'est dans aucun des deux autres ensembles.

□

L'utilisation de ce partitionnement est donnée dans la sous-section suivante.

### 1.3.3. Distance de Kendall sur un domaine partiel

Il peut être utile de séparer le calcul de distance de Kendall- $\tau$  selon les différentes paires d'éléments.

**Définition 11.** Soient  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ,  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $D \subset \text{pairs}(1,n)$ . Alors la distance de Kendall- $\tau$  entre  $\pi$  et  $\sigma$  sur le domaine  $D$ , notée  $d_{KT;D}(\pi,\sigma)$ , est le nombre de paires d'éléments de l'ensemble  $D$  n'apparaissant pas dans le même ordre dans  $\pi$  et  $\sigma$ .

$$d_{KT;D}(\pi,\sigma) = \#\{(i,j) \in D \mid \pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1}\}.$$

*Remarque :* le domaine par défaut est  $D = \text{pairs}(1,n)$  et dans ce cas, on a naturellement  $d_{KT;D}(\pi,\sigma) = d_{KT}(\pi,\sigma)$ .

La distance de Kendall- $\tau$  sur un domaine  $D$  entre une permutation et un ensemble de permutations est naturellement définie comme suit :

**Définition 12.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ ,  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $D \subset \text{pairs}(1,n)$ . Alors :

$$d_{KT;D}(\pi,A) = \sum_{\sigma \in A} d_{KT;D}(\pi,\sigma).$$

**Théorème 2.** Soit  $X$  une partition de  $D$ . Alors,

$$d_{KT;D}(\pi,\sigma) = \sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi,\sigma).$$

DÉMONSTRATION.

$$\sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi,\sigma) = \sum_{Y \in X} \#\{(i,j) \in Y \mid \pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1}\}.$$

Comme les différents  $X \in Y$  sont tous disjoints, les ensembles dont les cardinalités sont sommées ci-dessus sont aussi disjoints. Par les lois de Morgan, la somme des cardinalités est dans ce cas égale à la cardinalité de l'union de ces ensembles :

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi,\sigma) &= \#\bigcup_{Y \in X} \{(i,j) \in Y \mid \pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1}\} \\ &= \#\{(i,j) \in \bigcup_{Y \in X} \mid \pi_i^{-1} < \pi_j^{-1} \text{ XOR } \sigma_i^{-1} < \sigma_j^{-1}\} \\ &= d_{KT;\bigcup_{Y \in X}}(\pi,\sigma) \\ &= d_{KT;D}(\pi,\sigma). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ ,  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $D \subset \text{pairs}(1,n)$  et  $X$  une partition de  $D$ . Alors,

$$d_{KT;D}(\pi,A) = \sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi,A).$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
d_{KT;D}(\pi, A) &= \sum_{\sigma \in A} d_{KT;D}(\pi, \sigma) \\
&= \sum_{\sigma \in A} \left( \sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi, \sigma) \right) \\
&= \sum_{Y \in X} \left( \sum_{\sigma \in A} d_{KT;Y}(\pi, \sigma) \right) \\
&= \sum_{Y \in X} d_{KT;Y}(\pi, A).
\end{aligned}$$

□

L'avantage du corollaire 1 est qu'il permet plus de flexibilité dans la manière de calculer la distance de Kendall- $\tau$ . L'une des séparations du calcul les plus courantes dans ce mémoire est la suivante :

**Corollaire 2.** *Soient  $A \subset \mathbb{S}_n$ ,  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $1 \leq k < n$ . Alors,*

$$d_{KT}(\pi, A) = d_{KT;pairs(1,k)}(\pi, A) + d_{KT;pairs(k+1,n)}(\pi, A) + d_{KT;hp(k,n-k)}(\pi, A).$$

DÉMONSTRATION. Cela découle facilement du corollaire précédent, puisque les ensembles  $pairs(1,k)$ ,  $pairs(k+1,n)$  et  $hp(k,n-k)$  forment une partition de  $pairs(1,n)$ , selon le théorème 1.

□

### 1.3.4. Matrices gauche, droite et de majorité

Dans cette section, on aborde les matrices gauche, droite et de majorité d'un ensemble de permutations. Chacune de ces matrices contient toute l'information pertinente au calcul de la médiane d'un ensemble de permutations.

**Définition 13.** *Soit  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ . La **matrice gauche** (resp. **droite**) de  $A$ , notée  $L(A)$  (resp.  $R(A)$ ) est la matrice de taille  $n \times n$  où  $L(A)_{ij}$  (resp.  $R(A)_{ij}$ ) est le nombre de permutations de  $A$  où  $i \prec j$  (resp.  $j \prec i$ ). La **matrice de majorité** de  $A$ , notée  $\Delta(A)$ , est la différence entre la matrice gauche et la matrice droite, i.e.  $\Delta(A) = L(A) - R(A)$ .*

Étant donné que dans chaque permutation de  $A$ , soit  $i \prec j$ , soit  $j \prec i$ , on a que  $L(A)_{ij} + R(A)_{ij} = m_A$  pour n'importe quels éléments différents  $i$  et  $j$ . Voici d'autres propriétés de base :

$$L(A)_{ij} = R(A)_{ji}, \tag{1.3.1}$$

$$\Delta(A)_{ij} = -\Delta(A)_{ji}. \tag{1.3.2}$$

On peut utiliser respectivement  $L$ ,  $R$  et  $\Delta$  au lieu de  $L(A)$ ,  $R(A)$  et  $\Delta(A)$  pour noter les matrices gauche et droite et la matrice de majorité s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Maintenant que les matrices gauche et droite sont définies, on peut les utiliser en combinaison avec le corollaire 1 pour calculer la distance de Kendall- $\tau$ .

$$\begin{aligned} d_{\text{KT}}(\pi, A) &= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} d_{\text{KT};\{(i,j)\}}(\pi, A) \\ &= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} \sum_{\sigma \in A} d_{\text{KT};\{(i,j)\}}(\pi, \sigma). \end{aligned}$$

Le terme  $d_{\text{KT};\{(i,j)\}}(\pi, \sigma)$  vaut 0 si  $\pi$  et  $\sigma$  ont les éléments  $i$  et  $j$  dans le même ordre, 1 sinon. La somme  $\sum_{\sigma \in A} d_{\text{KT};\{(i,j)\}}(\pi, \sigma)$  vaut donc  $R_{ij}$  si  $\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1}$  et  $L_{ij}$  sinon. On obtient donc :

$$d_{\text{KT}}(\pi, A) = \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} (\text{Si } \pi_i^{-1} < \pi_j^{-1}, \text{ alors } R_{ij}, \text{ sinon } L_{ij}). \quad (1.3.3)$$

Nous verrons plus tard que cette définition est utile pour calculer rapidement des bornes minimales pour la distance de Kendall- $\tau$ .

Une manière plus compacte de réécrire la sommation ci-dessus consiste à itérer sur les paires de positions et non les paires d'éléments, comme suit :

$$d_{\text{KT}}(\pi, A) = \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} R_{\pi_i \pi_j} \quad (1.3.4)$$

En effet, pour toute paires de positions  $(i,j) \in \text{pairs}(1,n)$ , les éléments placés à ces positions dans  $\pi$  sont  $\pi_i$  et  $\pi_j$  et la contribution de cette paire d'éléments à la distance est  $R_{\pi_i \pi_j}$ .

**Définition 14.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ ,  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $1 \leq i \neq j \leq n$  tels que  $\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1}$ . On dit que  $i$  et  $j$  sont dans leur **ordre majoritaire** (resp. **minoritaire**) dans  $\pi$  par rapport à  $A$  si  $L(A)_{ij} < R(A)_{ij}$  (resp.  $R(A)_{ij} < L(A)_{ij}$ ).

### 1.3.5. Propriétés de base des mouvements d'insertion

Dans cette sous-section, on étudie l'effet d'un mouvement d'insertion dans une permutation sur la distance de Kendall- $\tau$  entre celle-ci et un ensemble de permutations  $A$ . Un **mouvement d'insertion** dans une permutation consiste à en retirer un élément et à le placer ailleurs dans la permutation.

On peut représenter une permutation par une concaténation de lettres minuscules et majuscules. Chaque lettre minuscule représente un élément tandis que chaque lettre majuscule représente une liste ordonnée d'éléments. Toutes concaténées ensemble, les lettres présentent tous les éléments dans l'ordre de la permutation.

**Exemple 6.** Soit  $\pi = 15728643$ . Alors on peut écrire  $\pi = PKiQ$ , où  $P = 157$ ,  $K = 28$ ,  $i = 6$  et  $Q = 43$ .

On appellera **forme concaténée** cette manière de noter une permutation. Représenter une permutation sous forme concaténée est utile lorsqu'on souhaite la manipuler avec des mouvements d'insertion.

**Théorème 3.** *Soient deux permutations de mêmes tailles pouvant être écrites sous formes concaténées  $PKiQ$  et  $PiKQ$  respectivement, pour les mêmes valeurs de  $P, Q, K, i$ . Alors,*

$$d_{KT}(PKiQ, A) - d_{KT}(PiKQ, A) = \sum_{k \in K} \Delta(A)_{ik}.$$

DÉMONSTRATION. Si  $i$  est à gauche (resp. à droite) d'un élément  $k \in K$ , cela contribue à la distance de Kendall- $\tau$  par  $R(A)_{ik}$  (resp  $L(A)_{ik}$ ). Toutes les autres paires d'éléments sont dans le même ordre dans les deux permutations. La différence entre  $d_{KT}(PKiQ, A)$  et  $d_{KT}(PiKQ, A)$  vaut donc  $\sum_{k \in K} L(A)_{ik} - R(A)_{ik} = \sum_{k \in K} \Delta(A)_{ik}$ .  $\square$

### 1.3.6. Additivité

La prochaine section exprime certaines caractéristiques d'un ensemble (ou multiensemble) de permutations  $A+B$  par rapport à celles de  $A$  et  $B$  individuellement.

**Théorème 4.** *Soient  $A, B \subset \mathbb{S}_n$  et  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . Alors, ces propriétés sont vraies :*

$$\begin{aligned} L(A) + L(B) &= L(A+B), \\ R(A) + R(B) &= R(A+B), \\ \Delta(A) + \Delta(B) &= \Delta(A+B), \\ d_{KT}(\pi, A) + d_{KT}(\pi, B) &= d_{KT}(\pi, A+B). \end{aligned}$$

**Note:** *la somme (+) de deux ensembles est un multiensemble puisque  $A$  et  $B$  peuvent contenir des permutations communes. Toutefois, dans le cas spécifique où  $A$  et  $B$  sont disjoints, la somme est équivalente à une union et le théorème ci-dessus reste vrai si tous les termes  $A+B$  sont remplacés par  $A \cup B$ .*

DÉMONSTRATION. Pour des éléments  $i, j$  distincts quelconques,  $L(A+B)_{ij}$  est le nombre de permutations de  $A+B$  dans lesquelles  $i \prec j$ . On peut séparer ces permutations en 2 ensembles : celles provenant de  $A$ , au nombre de  $L(A)_{ij}$  et celles provenant de  $B$ , au nombre de  $L(B)_{ij}$ . On a donc naturellement  $L(A+B)_{ij} = L(A)_{ij} + L(B)_{ij}$ . La deuxième et la troisième équation peuvent être obtenues de manière similaire.

Pour la quatrième, on a

$$\begin{aligned} d_{KT}(\pi, A) + d_{KT}(\pi, B) &= \sum_{\sigma \in A} d_{KT}(\pi, \sigma) + \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\pi, \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in A+B} d_{KT}(\pi, \sigma) \end{aligned}$$

$$= d_{KT}(\pi, A+B).$$

□

### 1.3.7. Quelques définitions sur les graphes

Avant de poursuivre, introduisons quelques définitions sur les graphes.

Un **tournoi** est un graphe orienté  $G(V,E)$  non-pondéré tel que pour n'importe quelle paire  $(i,j)$  de sommets distincts de  $G$ ,  $(i,j) \in E$  si et seulement si  $(j,i) \notin E$ .

Un graphe orienté est **acyclique** si et seulement s'il existe un ordre total de ses sommets tels qu'aucune arête n'est en sens contraire de cet ordre.

MFASP [11], (minimum feedback arc set problem) est un problème en théorie des graphes. Il consiste à trouver, pour un graphe orienté pondéré  $G(V,E)$ , l'ensemble d'arêtes le moins coûteux (c.à.d. dont la somme des poids des arêtes est minimale)  $F \subset E$  tel que  $G(V,E - F)$  est acyclique. Nous appellerons MFAS un tel ensemble d'arêtes. Il est possible qu'il y ait plus d'un MFAS possibles pour un graphe car plusieurs FAS (feedback arc sets) peuvent avoir un coût égal. Dans le cas d'un graphe non-pondéré,  $F$  est un ensemble d'arêtes de cardinalité minimale tel que  $G(V,E - F)$  est acyclique.

MFASP est NP-difficile. Même le cas précis où  $G$  est un tournoi a été prouvé NP-difficile par [9].

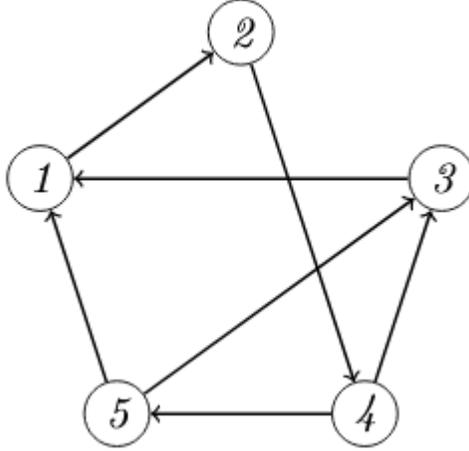
En analysant la définition 1.3.3 de la distance de Kendall- $\tau$  fournie dans la section précédente, on peut en déduire une borne inférieure évidente de la distance entre  $A$  et une quelconque permutation, soit :

$$LB(A) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(L_{ij}, R_{ij})$$

Pour qu'une permutation soit à une telle distance de  $A$ , il faut que toutes ses paires d'éléments respectent leur ordre majoritaire dans  $A$ . Malheureusement, c'est rarement le cas. Pour une permutation  $\pi$  quelconque, il y aura fort probablement certaines paires d'éléments  $(i,j)$  apparaissant dans leur ordre minoritaire selon  $A$ . Ceux-ci auront une contribution de  $\max(L_{ij}, R_{ij})$  à la distance au lieu de  $\min(L_{ij}, R_{ij})$ . On peut alors parler d'une "pénalité supplémentaire" valant  $|L_{ij} - R_{ij}| = |\Delta_{ij}|$  par rapport au minimum possible pour cette paire. Le graphe de majorité, décrit ci-bas, permet, entre autre, de modéliser ces "pénalités supplémentaires".

**Définition 15.** Soit  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ . Le **graphe de majorité** de  $A$ , noté  $G_A(V,E)$  (ou  $G(V,E)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté possible), est un graphe de tournoi tel que  $V = \{1,2 \dots n\}$  et  $E = \{(i,j) | L_{ij} > R_{ij}\}$ . Le poids de l'arête  $(i,j)$  est alors  $\omega_{ij} = L_{ij} - R_{ij} = \Delta_{ij}$ .

**Exemple 7.** Soit  $A = \{12435, 24531, 45312, 53124\}$  Alors son graphe de majorité est le suivant :



où toutes les arêtes présentes ont le même poids 2.

La distance  $d_{\text{KT}}(A, \pi)$  est donc égale à  $LB(A)$  plus la somme des poids de toutes les arêtes de  $G_A$  en sens contraire de l'ordre total induit par  $\pi$  (c.à.d. dont le sommet cible précède le sommet source dans  $\pi$ ). Trouver  $\pi$  qui minimise  $d_{\text{KT}}(A, \pi)$  est donc équivalent à trouver  $\pi$  qui minimise la somme des poids des arêtes de  $G_A$  à l'encontre de l'ordre total de  $\pi$ . Trouver une médiane de  $A$  se réduit donc à résoudre MFASP sur  $G_A$ .

**Exemple 8.** Reprenons l'ensemble de permutations  $A$  de l'exemple 7 et son graphe de majorité  $G_A$ . D'une part,  $\mathcal{M}(A) = \{24531, 45312\}$ . D'autre part, les deux MFAS de  $G_A$  sont  $\{(1,2)\}$  et  $\{(2,4)\}$ . Le retrait d'une seule de ces arêtes rendrait le graphe acyclique, car les arêtes restantes respecteraient un ordre total : 24531 dans le premier cas, 45312 dans le second. Ces deux ordres totaux correspondent justement aux médianes de  $A$ .

Cette nouvelle interprétation du problème sera utile dans la preuve de NP-difficulté du problème à la section 2.2.

Il est important de noter que la matrice de majorité  $\Delta$  d'un ensemble de permutations  $A$  ne correspond pas tout à fait à la matrice d'adjacence de  $G_A$ . En fait, soit  $Q$  la matrice d'adjacence de  $G_A$ . On a bel et bien  $\Delta_{ij} = Q_{ij}$  lorsque  $\Delta_{ij} \geq 0$ , mais  $Q_{ij} = 0$  lorsque  $\Delta_{ij} < 0$ . Ces deux matrices possèdent donc les mêmes valeurs positives, mais la matrice d'adjacence de  $G_A$  possède des valeurs nulles là où celles de la matrice de majorité sont négatives.

# Chapitre 2

---

## REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre sont présentés différents travaux et résultats en lien avec la recherche sur le consensus de Kemeny. Dans un premier temps, les propriétés du consensus de Kemeny seront discutées. Ensuite, des résultats théoriques sur la complexité du problème seront présentés. Le reste du chapitre portera sur la recherche de méthodes exactes et d'heuristiques pour résoudre le problème du consensus de Kemeny, effectuée principalement au cours des 30 dernières années.

### 2.1. PROPRIÉTÉS ET COMPARAISON DE DIFFÉRENTES RÈGLES DE CONSENSUS

L'application principale de la médiane de permutation (ou consensus de Kemeny) est de trouver un consensus de classement, comme discuté à la section 1.3.1. Comme il existe plusieurs méthodes de consensus autres que le consensus de Kemeny, cette section a pour but de motiver l'utilisation de ce dernier.

#### 2.1.1. Autres règles de consensus

La méthode de Kemeny est une méthode qui, à l'instar d'autres méthodes de consensus, produit un consensus  $\pi$  à partir d'un ensemble classements  $A$ , où chaque classement est un ordonnancement complet des candidats, sans restriction (il y a donc  $n!$  classements possibles,  $n$  étant le nombre de candidats). Désignons d'ailleurs par  $\zeta$  l'ensemble de ces méthodes.

Dans cette section, on présente deux autres méthodes de  $\zeta$ , Borda et Copeland.

1. Borda [7] :

Les candidats sont ordonnés dans le consensus selon leur position moyenne dans les classements de  $A$ .

2. Copeland [14] :

Pour chaque paire de candidat  $(a,b)$ , celui qui est préféré à l'autre dans la majorité des votes obtient 1 point (si  $a \prec b$  dans exactement la moitié des votes, les deux candidats

marquent un demi-point). Un consensus est ensuite formé où les candidats sont classés en ordre décroissant de score.

La figure 2.1 est un exemple de ces différentes méthodes de consensus sur un ensemble de permutations quelconque. Dans cet exemple, la similarité entre les différents consensus est assez grande, mais il y a tout de même quelques désaccords provenant du fait que chaque règle de consensus effectue un calcul différent.

```

Permutation Set:
 6 5 1 3 7 9 2 8 4
 4 8 5 3 6 7 2 1 9
 5 3 4 2 6 9 1 7 8
 3 6 5 9 4 2 1 8 7
 9 4 6 8 1 5 2 3 7
-----
Kemeny consensus:
 5 3 4 6 9 2 1 8 7
 5 3 6 9 4 2 1 8 7
 6 5 3 9 4 2 1 8 7
-----
Borda consensus:
 5 , 6 , 3 , 4 , 9 , 1 , 2-8 , 7
-----
Copeland consensus:
 3-5 , 6 , 9-4 , 2 , 1 , 8 , 7
-----

```

FIGURE 2.1. Exemple de consensus obtenus par différentes méthodes. Cette image affiche l'exécution d'un programme qui, pour un ensemble aléatoire de 5 permutations de 9 éléments, en calcule les consensus de Kemeny, Borda et Copeland. Les égalités sont exprimées par des "-" dans Borda et Copeland puisqu'elles surviennent entre le score d'éléments individuellement, tandis que pour la méthode de Kemeny, tous les consensus égaux sont affichés, puisque les égalités surviennent entre le score de permutations.

### 2.1.2. Critères

Voici quelque-uns des critères permettant de juger différentes méthodes de consensus de classement. Le respect ou non de chacun de ces critères est indiqué pour la méthode de Kemeny.

**Note:** Cette section utilise la notation des classement (voir section 1.3.1).

**Note:** Dans les lignes qui suivent, on mentionne toujours "un consensus" et non "le consensus". Ceci est dû au fait que la méthode Kemeny, à l'instar d'autres méthodes, peut produire des égalités et qu'il y a peut-être plus d'un consensus possible pour une instance du problème.

1. **Condorcet**[12] :

S'il existe un candidat  $a$  tel que pour tout candidat  $b$ ,  $a \prec b$  dans la majorité des classements (i.e.  $L_{ab} > 0$ ),  $a$  est automatiquement gagnant dans un consensus.

KEMENY : Oui. En effet, si  $a$  n'est pas premier dans un consensus, il suffit de le permuter avec l'élément  $b$  qui le précède immédiatement pour faire baisser la distance de Kendall- $\tau$ , donc le consensus n'était pas un consensus de Kemeny.

2. **Renforcement** Si deux profils  $A_1$  et  $A_2$  ont un même consensus  $\pi$ , alors  $\pi$  est aussi un consensus du profil  $A_1+A_2$ .

KEMENY : Oui. En effet, si  $\pi$  minimise à la fois  $d_{KT}(\pi, A_1)$  et  $d_{KT}(\pi, A_2)$ , alors  $\pi$  minimise  $d_{KT}(\pi, A_1) + d_{KT}(\pi, A_2) = d_{KT}(\pi, A)$ .

3. **Participation** : Si deux profils  $A_1$  et  $A_2$  ont des consensus ayant le même gagnant, alors  $A_1+A_2$  a aussi un consensus ayant ce même gagnant.

**Note:** Ce critère est une version plus forte du critère de renforcement.

KEMENY : Non. un contre-exemple formel est fourni dans [21]. De manière très informelle, Pour générer un contre-exemple, il faut générer un ensemble de classements tel que le score de sa médiane  $\pi$  est optimal "de justesse" comparativement à un autre ordre  $\sigma$  complètement différent. Par exemple, créons un ensemble  $A$  de classements des candidats  $a, b, c$  et  $d$ , ayant pour médiane  $\pi = abcd$ , mais tel qu'une permutation  $\sigma = badc$  est telle que  $d_{KT}(\pi, A)$  et  $d_{KT}(\sigma, A)$  ont un écart relatif très faible. Ensuite, si on ajoute plusieurs classements  $adcb$  (bref, des classements complètement opposés à la médiane initiale  $\pi$  outre le fait qu'ils ont le même gagnant) à l'ensemble  $A$ ,  $d_{KT}(\pi, A)$  pourrait dépasser  $d_{KT}(\sigma, A)$  et  $\sigma$  pourrait être la nouvelle médiane, plaçant ainsi  $b$  gagnant. Bref, on peut étonnamment faire perdre le statut de gagnant à un candidat en ajoutant des classements le favorisant.

4. **Indépendance des alternatives non-pertinentes (IIA)** :

Si  $A$  a un consensus  $\pi$  et qu'on décide de disqualifier un candidat  $a$  (i.e. on forme un nouveau profil  $A'$  en prenant les classements de  $A$  et en retirant  $a$  de chacun d'eux), alors  $\pi'$  est un consensus de  $A'$ , où  $\pi'$  s'obtient simplement en retirant  $a$  de  $\pi$ . Intuitivement, retirer le candidat n'a aucun impact sur le consensus entre les candidats restants.

KEMENY : Non. En fait, comme expliqué à la sous-section 2.1.3, aucune méthode pertinente de  $\zeta$  ne peut respecter ce critère.

5. **Indépendance locale des alternatives non-pertinentes (LIIA)** :

Si  $A$  a un consensus  $\pi$  et qu'on décide de disqualifier un candidat  $a$  classé premier ou dernier dans  $\pi$  (i.e. on forme un nouvel profil  $A'$  en prenant les classements de  $A$  et en retirant  $a$  de chacun d'eux), alors  $\pi'$  est un consensus de  $A'$ , où  $\pi'$  est s'obtient simplement en retirant  $a$  de  $\pi$ . Intuitivement, retirer un candidat classé premier ou dernier d'un consensus n'a aucun impact sur ce consensus entre les candidats restants. Cela peut aussi être compris intuitivement de cette manière : chaque segment d'un

consensus (liste d'éléments consécutifs dans un consensus) est ordonné de manière optimale localement.

**Note:** Ce critère est une version plus faible du critère IIA

KEMENY : Oui. Une démonstration formelle est disponible dans [38]. Nous allons tout de même présenter une preuve informelle que Kemeny respecte ce critère, en décomposant l'équation 1.3.4 de la distance de Kendall- $\tau$ .

$$d_{KT}(\pi, A) = \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} R_{\pi_i \pi_j}$$

$$d_{KT}(\pi, A) = \sum_{j=2}^n R_{\pi_1 \pi_j} + \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(2,n)} R_{\pi_i \pi_j}$$

Le deuxième terme de cette somme représente la contribution à la distance de Kendall- $\tau$  des paires d'élément n'impliquant pas le premier élément. Or, ce terme peut être minimisé individuellement en permutant les éléments de  $\pi$  sans déplacer le premier élément (optimisation locale) et donc sans affecter la valeur du terme  $\sum_{j=2}^n R_{\pi_1 \pi_j}$ . Ainsi, pour minimiser  $d_{KT}(\pi, A)$ , une fois  $\pi_1$  choisi, il faut minimiser  $\sum_{(i,j) \in \text{pairs}(2,n)} R_{\pi_i \pi_j}$  et ce dernier terme vaut justement  $d_{KT}(\pi', A')$ , où  $\pi'$  et  $A'$  sont obtenus en retirant  $\pi_1$  de  $\pi$  et de chaque permutation de  $A$ .

La preuve est parfaitement analogue dans le cas où on souhaiterait retirer le candidat classé dernier d'un consensus au lieu de premier.

## 6. Pareto[38] :

Si un candidat est préféré unanimement à un autre dans tous les classements de  $A$ , alors il doit l'être aussi dans un consensus.

KEMENY : Oui. Le Major Order Theorem présenté à la section 2.4.5 peut être aisément utilisé pour montrer que Kemeny respecte ce critère.

Il existe une panoplie d'autres critères pour juger une méthode de consensus de classements complets. Par exemple, les critères d'anonymité, de neutralité et de non-dictature sont des critères qui concernent le traitement égal des différents votes. Évidemment, les règles de Copeland, Borda et Kemeny respectent toutes ces trois critères puisqu'aucun vote n'y est traité différemment d'un autre.

### 2.1.3. Avantage du consensus de Kemeny

Avant de poursuivre, il est important de mentionner qu'aucune méthode de consensus parmi  $\zeta$  n'est parfaite. En effet, le théorème d'impossibilité d'Arrow [3] stipule qu'aucune méthode de  $\zeta$  ne peut respecter le critère d'indépendance des alternatives non-pertinentes

(IIA) à moins de bafouer l'un de ces deux critères essentiels à n'importe quelle méthode de consensus pertinente en pratique : Pareto et non-dictature. En conséquence, aucune des méthodes de Kemeny, Borda ou Copeland ne respecte le critère IIA. Kemeny respecte toutefois la version plus faible de ce critère, LIIA, contrairement à Borda et Copeland.

Dans [39], H.P. Young et A. Levenglick prouvent que la méthode de Kemeny est la seule parmi  $\zeta$  qui respecte les trois critères suivants : neutralité, renforcement et Condorcet. Par exemple, la méthode de Borda ne respecte pas le critère de Condorcet, tandis que la méthode de Copeland ne respecte pas le critère de renforcement.

Toutefois, le désavantage majeur du consensus de Kemeny est qu'il ne peut pas être calculé en temps polynomial, contrairement à la grande majorité des autres méthodes de consensus. Les avantages décrits plus haut justifient tout de même son intérêt. L'effervescence de l'informatique au cours des dernières décennies a donc relancé grandement l'intérêt de la recherche d'algorithmes exacts et d'heuristiques pour le calcul de la médiane de permutations.

## 2.2. COMPLEXITÉ DU PROBLÈME

Dans cette section, on étudie la complexité du problème consistant à trouver une médiane d'un ensemble  $A$  de  $m$  permutations.

### 2.2.1. Cas triviaux

Lorsque  $m = 1$ , le problème est trivial. En effet, la médiane d'un ensemble formé d'une seule permutation est toujours la permutation elle-même.

Lorsque  $m = 2$ , le problème est aussi trivial, car les deux permutations de  $A$  sont nécessairement des médianes de  $A$ . De manière plus compacte,  $A \subset \mathcal{M}(A)$ . En effet, soit  $\sigma$  une des deux permutations de  $A$ . Pour deux éléments  $i$  et  $j$  tels que  $i \prec_{\sigma} j$ , on a nécessairement  $\Delta(A)_{ij} \geq 0$ , puisqu'au moins la moitié des permutations de  $A$  respectent  $i \prec j$ . Le graphe de majorité  $G_A$  n'a donc pas d'arête de  $j$  vers  $i$ . En généralisant pour tout  $(i, j) \in \text{pairs}(1, n)$ ,  $G_A$  n'a aucune arête en sens contraire des éléments de  $\sigma$ , donc  $d_{\text{KT}}(\sigma, A)$  vaut exactement  $LB(A)$  (voir section 1.3.7) et  $\sigma$  est forcément une médiane de  $A$ .

### 2.2.2. Médiane d'un nombre de permutations pair et supérieur à 2

Lorsque  $m \geq 3$ , le problème est plus difficile. On peut séparer le cas  $m \geq 3$  en deux catégories : le cas où  $m$  est pair et le cas où  $m$  est impair. Nous aborderons surtout le premier cas.

Le problème consistant à trouver une médiane d'un ensemble de  $m$  permutations a été prouvé NP-difficile lorsque  $m$  est pair et  $m \geq 4$ . Dans cette section, nous présentons une preuve de cette affirmation utilisant la réduction fournie par [19].

### 2.2.2.1. Idée de la réduction

Comme expliqué dans la section 1.3.7, trouver une médiane d'un ensemble de permutations  $A$  est équivalent à résoudre MFASP sur  $G_A$ , le graphe de majorité de  $A$ . Le problème MFASP a déjà été démontré NP-difficile, mais il ne faut par contre pas prendre le raccourci d'en déduire que résoudre ce problème sur  $G_A$  est aussi NP-difficile, car  $G_A$  n'est pas un graphe quelconque. C'est un graphe généré par un ensemble de permutations, donc plus spécifique.

Par contre, résoudre le MFASP sur un tournoi a été démontré NP-difficile par [9]. L'astuce consiste à réduire ce dernier problème au problème consistant à trouver une médiane de 4 permutations.

### 2.2.2.2. Réduction

Soit un tournoi  $G = (V, E)$ , pour lequel on veut trouver un MFAS. Formons maintenant un nouveau graphe  $G' = (V', E')$ , ressemblant à  $G$ , mais dont les arêtes sont divisées en deux par des nouveaux sommets. Formellement, on pose  $V' = V \cup X$ , où  $X = \{e_{ij} | (i, j) \in E\}$  (Bref,  $X$  contient chaque sommet reliant deux arêtes issues de la division d'une arête de  $E$ ). Puis, on pose  $E' = \{(i, e_{ij}), (e_{ij}, j) | (i, j) \in E\}$ .

Premièrement, il est facile de remarquer que le nombre d'arêtes  $k$  qu'on doit retirer à  $G'$  pour le rendre acyclique est le même que le nombre d'arêtes qu'on doit retirer à  $G$  pour faire de même. En effet, les deux graphes ont la même structure. De manière intuitive, retirer une arête  $(i, j)$  dans  $G$  est analogue à retirer une arête  $(i, e_{ij})$  dans  $G'$ . Ainsi, trouver un MFAS de  $G$  donne directement un MFAS de  $G'$ .

La clé de la preuve est que  $G'$  est le graphe de majorité d'un ensemble de 4 permutations. Pour un sommet  $i$  de  $V$ , définissons, dans  $G'$ ,  $in(i)$  comme étant la liste (dans un ordre précis quelconque, par exemple lexical) des sommets de  $X$  entrant dans  $i$ . De manière analogue,  $out(i)$  est la liste ordonnée des sommets sortant de  $i$ . Maintenant, pour toute liste  $L$ , définissons  $L^r$  comme la liste  $L$  en ordre inverse. La raison pour laquelle on voudrait imposer un ordre à des sommets est qu'il faut les ordonner pour former des ordres préférentiels.

Soient quatre classements des sommets de  $V'$  définis comme suit :

$$R_1 = 1, out(1), 2, out(2), \dots, n, out(n)$$

$$R_2 = n, out(n)^r, n-1, out(n-1)^r, \dots, 1, out(1)^r$$

$$R_3 = in(1), 1, in(2), 2, \dots, in(n), n$$

$$R_4 = in(n)^r, n, in(n-1)^r, n-1, \dots, in(1)^r, 1$$

Notons en premier lieu que ces classements forment bel et bien un ensemble de 4 classements des sommets de  $V'$ , car tous les sommets de  $V'$  apparaissent exactement une fois dans chacun des classements (ceci est dû au fait que chaque sommet de  $X$  a exactement un voisin entrant et un voisin sortant).

Maintenant, étudions  $G_R$ , le graphe de majorité de l'ensemble  $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ . D'abord, on observe que l'effet combiné de  $R_1$  et  $R_2$  est que chaque sommet  $i \in V$  est doublement préféré à ses voisins sortants dans  $G'$ , tandis que les préférences entre toutes autres paires de sommets s'annulent. De manière analogue, l'effet combiné de  $R_3$  et  $R_4$  est que chaque sommet  $i \in V$  est doublement non-préféré à ses voisins sortants dans  $G'$ , tandis que les préférences entre toutes autres paires de sommets s'annulent. On en conclut donc que le graphe de majorité de l'ensemble  $R$  correspond parfaitement au graphe  $G'$ , à l'exception du fait que  $G_R$  est un graphe pondéré, mais cela ne fait aucune différence puisque toutes les arêtes de  $G_R$  ont le même poids 2. Ainsi, trouver un MFAS de  $G$  se réduit à trouver un MFAS de  $G'$ , ce qui se réduit à trouver un MFAS de  $G_R$ , ce qui se réduit finalement à trouver une médiane de  $R$ .

La conclusion est que trouver un MFAS d'un tournoi de  $n$  sommets peut se réduire à trouver une médiane de 4 permutations de taille  $n^2$  tout au plus. Comme le premier problème est NP-difficile, le second l'est aussi.

Cela règle le cas de la NP-difficulté pour  $m = 4$ . Maintenant, il est facile de montrer que le problème consistant à trouver une médiane de  $m$  permutations peut se réduire à trouver une médiane de  $m + 2$  permutations. En effet, si on veut résoudre le problème avec  $m$  permutations, on peut ajouter une permutation  $\pi$  et sa permutation d'ordre inversé  $\pi^r$  dans l'ensemble de permutations. Ces deux ajouts s'annulent, donc la(les) médiane(s) de permutations du nouvel ensemble est (sont) inchangée(s).

On peut donc conclure que, par induction, le problème est NP-difficile pour tout nombre de permutations pair  $m \geq 4$ .

### 2.2.3. Médiane d'un nombre de permutations impair et supérieur à 2

Il semble que le problème soit aussi NP-difficile si  $m$  est un nombre impair supérieur à 6. Une preuve de cette affirmation a été proposée par [4], mais n'est pas encore officiellement publiée.

À la connaissance actuelle, le problème est donc trivial pour  $m = 1$  et  $m = 2$ , NP-difficile pour les valeurs de  $m$  paires autres que 2, de complexité inconnue pour  $m = 3$  et  $m = 5$  et probablement NP-difficile pour les autres valeurs impaires de  $m$ .

## 2.3. LIEN ENTRE LE PROBLÈME DE LA MÉDIANE, MFASP ET LOP

Le problème de médiane de permutation peut être vu comme un cas spécifique d'un problème plus général et plus étudié, le LOP (Linear Ordering Problem). Ce problème consiste

à trouver [8], pour une matrice  $E$  de taille  $n \times n$ , une permutation  $\pi$  qui minimise

$$\sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{\pi_i \pi_j}$$

Le problème de la médiane se réduit facilement à LOP. En effet, pour un ensemble de permutations  $A$ , de matrices gauche et droite  $L$  et  $R$  respectivement, une permutation  $\pi$  médiane de  $A$  minimise  $d_{\text{KT}}(\pi, A)$ , qui vaut l'expression ci-dessous, selon 1.3.4 :

$$d_{\text{KT}}(\pi, A) = \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} R_{\pi_i \pi_j}$$

En posant  $E = R$ , le problème de la médiane est donc immédiatement transformé en problème LOP.

De plus, le problème MFASP décrit à la section 1.3.7 se réduit au problème LOP. En effet, pour un graphe orienté  $G$  quelconque, soit  $M$  sa matrice d'adjacences. Si on enlève toutes les arêtes en sens contraire de l'ordre induit par une certaine permutation  $\pi$ , le graphe devient acyclique. Le poids total des arêtes en sens contraire de  $\pi$  est donné par :

$$d_{\text{KT}}(\pi, A) = \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} M_{\pi_j \pi_i}$$

Pour le problème MFASP, on cherche donc  $\pi$  qui minimise cette somme. On remarque aisément qu'en posant  $E = M^T$ , où  $M^T$  est la matrice transposée de  $M$ , ce problème devient exactement LOP.

En fait, les problèmes MFASP et LOP sont équivalents. Puisque les éléments de la matrice  $M$  d'adjacence d'un graphe orienté pondéré, tout comme ceux de la matrice  $E$  du problème LOP, peuvent avoir n'importe quelle valeur réelle, on peut aussi passer de LOP à MFASP facilement.

Toutefois, ce n'est pas le cas pour le problème de la médiane. La matrice droite  $R$  d'un ensemble de permutations ne peut pas être égale à n'importe quelle matrice de nombres réels et est bien plus spécifique. La démonstration suivante de cette affirmation est inspirée de [4].

Pour  $m$  permutations de taille  $n$ , il y a moins de  $(n!)^m$  multiensembles de permutations possibles (car il y a  $n!$  choix pour chaque permutation du multiensemble, mais choisir  $\pi_1$  d'abord et  $\pi_2$  ensuite est équivalent à choisir  $\pi_2$  d'abord et  $\pi_1$  ensuite, car l'ordre ne compte pas dans un ensemble). La matrice droite  $R$  induite par cet ensemble de permutations a donc un nombre de valeurs possibles dans  $O(n!^m)$ . En contrepartie, LOP peut recevoir en argument n'importe quelle matrice  $E$  de taille  $n \times n$ . En assumant chacun de ses  $n^2$  éléments peut avoir au moins 2 valeurs possibles, cela donne un nombre de matrices  $E$  possible dans  $\Omega(2^{n^2})$ , ce qui est un ordre de grandeur largement supérieur à  $(n!)^m$ , pour un  $m$  fixe. En conclusion, pour une valeur de  $m$  fixe, le problème consistant à trouver la médiane d'un ensemble de  $m$  permutations de taille  $n$  est moins général que LOP sur une matrice  $n \times n$ .

Malgré cela, de nombreux algorithmes de recherche exacte et heuristiques mentionnés d’ici la fin du chapitre ont été créés pour résoudre MFASP et LOP, car leurs performances justifient leur utilisation sur le problème plus spécifique de la médiane de permutation.

## 2.4. RECHERCHE EXACTE

Une méthode naïve pour calculer  $\mathcal{M}(A)$  consiste à calculer, pour toutes les permutations  $\pi$  de  $\mathcal{S}_n$ ,  $d_{KT}(\pi, A)$  et choisir celle ou celles à distance minimale de  $A$ . Cet algorithme s’exécute malheureusement en  $\Omega(n!)$ , puisque  $|\mathcal{S}_n| = n!$ . Même si aucun algorithme ne pourrait systématiquement fournir une médiane en temps polynomial par rapport à  $n$  (à moins que  $P=NP$ ), il y a quand même une grande différence entre un algorithme un peu plus lent que polynomial et un algorithme en temps factoriel. C’est pourquoi les efforts de recherche pour ce problème se sont entre autres axés sur le développement d’algorithmes exacts les plus rapides et efficaces possibles.

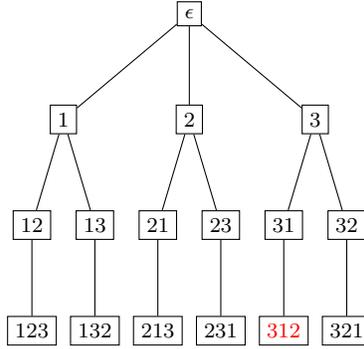
### 2.4.1. Branch-And-Bound

Plusieurs algorithmes Branch-And-Bound (BnB) ont été proposés pour résoudre le problème de la médiane.

Définissons d’abord la technique de Branch-And-Bound. De manière générale, supposons un problème de recherche où on tente de trouver, parmi un ensemble de solutions  $S$ , une solution  $a \in S$  qui minimise  $f(a)$ , pour une certaine fonction  $f$ . Dans ce contexte, un algorithme BnB est un algorithme qui explore un arbre de recherche pour trouver la meilleure solution. La racine de l’arbre est le point de départ, chacune des  $|S|$  feuilles de l’arbre représente une solution possible et chaque noeud interne de l’arbre représente un sous-ensemble de  $S$ . Plus précisément, les ensembles représentés par les noeuds enfants d’un même noeud parent forment une partition de l’ensemble de solutions représentés par le noeud parent.

Prenons l’exemple du problème consistant à trouver les médianes de  $A = \{132, 231, 312\}$ , où on effectue un algorithme BnB par préfixe. Un BnB par préfixes, pour notre problème, est un BnB dans lequel chaque noeud au  $k$ -ième niveau de profondeur de l’arbre représente un préfixe contenant les  $k$  premiers éléments, dans un certain ordre, d’une permutation médiane qu’on tente de former. Alors, l’arbre de recherche en découlant est présenté à la figure 2.2. Bien sûr, dans le cas du problème de la médiane, si tout l’arbre de recherche est exploré naïvement, le temps de recherche est  $\Omega(n!)$ , puisqu’il y a  $n!$  feuilles dans l’arbre de recherche. C’est en fait équivalent à exécuter l’algorithme naïf mentionné à la sous-section précédente. Cependant, les algorithmes BnB possèdent en général des opérations d’élagage, qui consistent à ne pas explorer une branche de l’arbre s’il est possible d’anticiper que toutes les solutions qui en découlent ne sont pas optimales. L’efficacité d’un algorithme BnB dépend de l’efficacité de son opération d’élagage.

FIGURE 2.2. BnB par préfixes, sans élagage



Arbre de recherche par préfixes de la médiane l'ensemble de permutations  $A = \{132, 231, 312\}$ . La permutation en rouge est la médiane de  $A$ .

Par exemple, soit  $A = \{216354, 352461, 613542, 623415\}$ . Un BnB naïf générerait un arbre de  $6! = 720$  feuilles. Toutefois, le Major Order Theorem (section 2.4.5) permet de trouver, en temps polynomial, plusieurs paires d'éléments qui sont obligatoirement dans un certain ordre dans une médiane de  $A$ , ce qui permet de réduire l'arbre de recherche à celui de la figure 2.3 pour notre exemple.

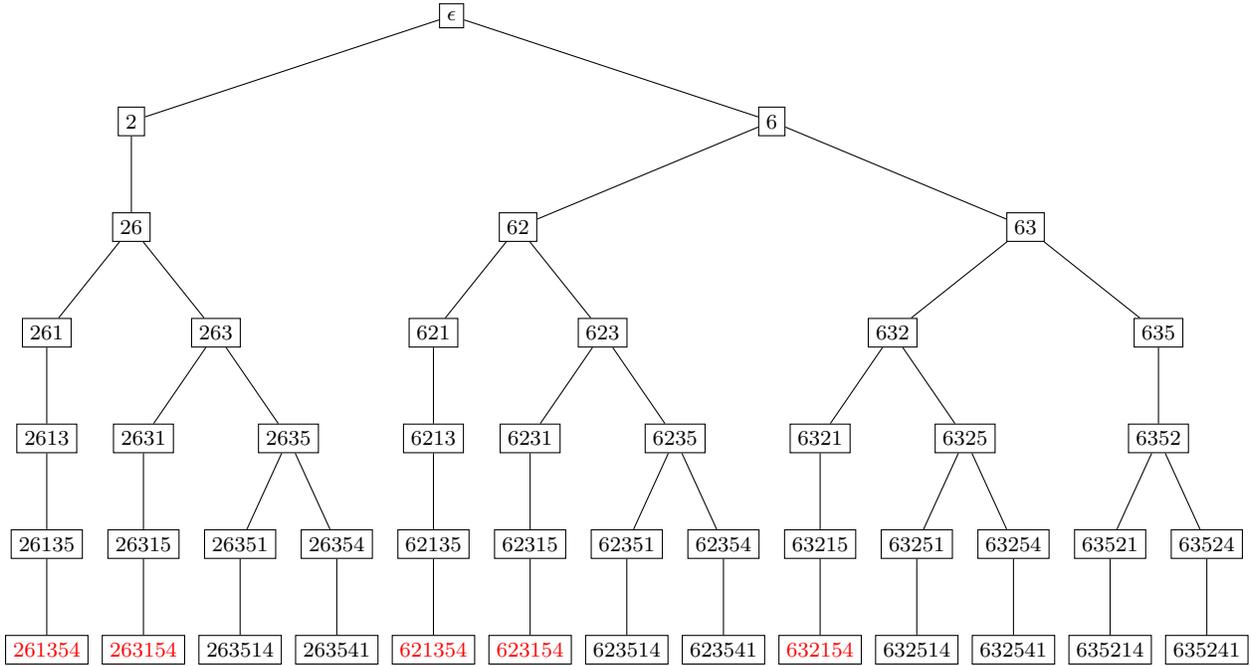
Bien sûr, le lecteur ne peut pas comprendre comment ces contraintes MOT ont été obtenues avant d'avoir lu la section 2.4.5. L'exemple précédent a pour but de montrer à quel point les procédures d'élagage peuvent affecter un algorithme BnB.

Les algorithmes BnB qui suivent sont distincts de ceux présentés ci-dessus puisque les noeuds internes de l'arbre ne représentent pas les préfixes des permutations qui en découlent.

Dans [16], un algorithme BnB est utilisé, où chaque noeud correspond à une paire d'éléments à ordonner. Le BnB résout le problème MFASP sur le graphe de majorité de  $A$ , (voir section 1.3.7). À chaque itération (descente dans un noeud), l'ordre d'une paire d'éléments dans une éventuelle médiane  $\pi$  est fixé. Ensuite, une fermeture transitive est appliquée (si, pour certains éléments  $i, j$  et  $k$ , les ordres  $i \prec j$  et  $j \prec k$  ont déjà été fixés, alors l'ordre  $i \prec k$  est aussi fixé). Une possible médiane  $\pi$  est formée lorsque toutes les paires sont ordonnées. Pour accélérer le calcul, à chaque itération, une borne inférieure est calculée, en tenant compte du fait qu'une paire  $(i, j)$  dont l'ordre n'est pas encore fixé aura une contribution d'au moins  $\min(L_{ij}, R_{ij})$  à la distance. Si la borne inférieure dépasse le score de la meilleure permutation trouvée à ce moment, la branche actuelle est coupée, car elle n'est pas pertinente. Les auteurs testent leurs algorithmes pour des ensembles de permutations de  $n = 15$  éléments et remarquent que le temps d'exécution varie fortement en fonction de la corrélation entre les permutations.

Un autre algorithme BnB est proposé dans [15]. Ici, chaque noeud est un classement partiel (c'est-à-dire un ordre total sur un sous-ensemble des éléments). À chaque descente, un nouvel élément doit être ajouté et il y a une branche pour chaque position possible du nouvel

FIGURE 2.3. BnB par préfixes, avec élagage par contraintes MOT



Arbre de recherche par préfixes de la médiane de l'ensemble de permutations  $A = \{216354, 352461, 613542, 623415\}$  avec l'utilisation de contraintes MOT. Ici, les contraintes MOT garantissent l'ordre des paires suivantes :  $2 \prec 1$ ,  $2 \prec 4$ ,  $3 \prec 4$ ,  $3 \prec 5$ ,  $5 \prec 4$ ,  $6 \prec 1$ ,  $6 \prec 3$ ,  $6 \prec 4$ ,  $6 \prec 5$ . Ainsi, une branche n'est pas explorée si son préfixe possède un certain élément  $b$  mais pas un certain l'élément  $a$ , alors que la contrainte  $a \prec b$  a été trouvée. Le nombre de feuilles est donc de 13 au lieu de 720 dans l'arbre. Les permutations en rouge correspondent aux médianes de  $A$ .

élément dans le classement. L'ordre dans lequel les éléments sont ajoutés est le même tout au long de l'algorithme (c'est un hyperparamètre arbitraire), seules les différentes positions d'ajout sont explorées. Par exemple, supposons que l'ordre d'ajout est  $(2,5,1,4, \dots)$ . En ignorant la possibilité d'élagage, au troisième niveau, il y aura six noeuds, dont 512, dont les enfants au quatrième niveau seront 4512, 5412, 5142 et 4512. À l'instar de l'algorithme décrit précédemment, celui-ci utilise l'équivalent d'une borne supérieure pour élaguer des branches inutiles. Pour tous les tests effectués avec leur algorithme, le temps d'exécution est de moins d'une seconde lorsque  $n \leq 10$  et d'au plus quelques minutes lorsque  $n \leq 35$ .

Revenons maintenant au BnB par préfixes. Robin Milosz et Sylvie Hamel ont récemment publié dans [28] un algorithme BnB par préfixes qui combine une version améliorée du Major Order Theorem utilisé dans l'exemple 2.3 avec une procédure d'élagage similaire à celle utilisée dans [16], décrite deux paragraphes plus haut. Ils parviennent à résoudre des instances aléatoires de  $n \leq 38$ ,  $m \leq 50$ , en quelques secondes seulement en moyenne.

D'autres algorithmes BnB existent pour la recherche exacte, mais ils sont en général, à l'exception de celui mentionné au paragraphe précédent, largement battus en temps

d'exécution par les algorithmes utilisant l' ILP ( Integer Linear Programming, voir section suivante).

### 2.4.2. Programmation en nombres entiers

Les algorithmes exacts les plus rapides ayant été trouvés à ce jour pour résoudre le problème LOP utilisent la programmation linéaire (LP) et plus précisément la programmation en nombres entiers (ILP) . Comme le problème de Kemeny se réduit à LOP (voir section 2.3), ces algorithmes résolvent aussi le problème de Kemeny. En fait, ils sont mêmes plus rapides à le résoudre que la plupart des algorithmes présentés précédemment, malgré le fait que le problème Kemeny soit un problème plus spécifique et qu'ils sont conçus pour un problème plus général. Pour résoudre le problème de Kemeny, il suffit donc de le transformer en problème LOP et nommons  $E$  la matrice du nouveau problème. LOP consiste à trouver la permutations  $\pi$  qui minimise

$$\sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{\pi_i \pi_j}$$

Ceci peut être modélisé par la programmation en nombre entiers de la manière :  $\forall 0 < i \neq j \leq n$ , on définit  $x_{ij}$  de la façon suivante :  $x_{ij} = 1$  si  $i \prec_{\pi} j$ ,  $x_{ij} = 0$  sinon. L'expression à minimiser devient alors :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{ij} x_{ij}$$

Il en découle naturellement le programme en nombre entiers suivant :

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall 0 < i \neq j \leq n$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad \forall 0 < i < j \leq n$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \quad \forall 0 < i \neq j < k \leq n$$

Les deux premières contraintes sont dues au fait que  $i \prec_{\pi} j$  si et seulement si  $\neg(j \prec_{\pi} i)$  (antisymétrie). La troisième contrainte sert à imposer la transitivité (on ne peut pas avoir  $i \prec_{\pi} j \prec_{\pi} k$  mais pas  $i \prec_{\pi} k$ ). Ces contraintes réunies permettent donc d'obtenir un ordre total des éléments de  $[1..n]$ , ce qui est nécessaire et suffisant, puisque l'ordre des éléments dans  $\pi$  représente en effet un ordre total.

Dans le précédent, modèle précédent, il y a  $n(n - 1)$  variables de forme  $x_{ij}$ , car  $\#\{0 < i \neq j \leq n\} = n(n - 1)$ . Or, il est possible de réduire de moitié le nombre de variables. La

fonction objective peut être manipulée comme suit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \neq j} E_{ij} x_{ij} \\
&= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,i) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ij} x_{ij} \\
&= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ji} x_{ji} \\
&= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ji} (1 - x_{ij}) \\
&= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ji} + \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} (E_{ij} - E_{ji}) x_{ij} \\
&= \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E_{ji} + \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} (E_{ij} - E_{ij}^T) x_{ij}
\end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière ligne est constant et n'a donc pas d'impact sur la solution optimale. Créons une nouvelle matrice  $E' = E - E^T$ . Le problème ci-dessus est parfaitement identique au problème suivant :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{(i,j) \in \text{pairs}(1,n)} E'_{ij} x_{ij} \\
& \text{s.a} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall 0 < i < j \leq n \\
& x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1 \quad \forall 0 < i < j < k \leq n \\
& -x_{ij} - x_{jk} + x_{ik} \leq 0 \quad \forall 0 < i < j < k \leq n
\end{aligned}$$

Ce dernier programme est équivalent au précédent, mais n'utilise que des variables  $x_{ij}$  pour  $0 < i < j \leq n$ . Sa solution donne directement la solution du programme précédent.

Ce programme peut être directement donné en argument à CPLEX, mais le nombre de contraintes et les contraintes d'intégrités peuvent rendre le calcul long. C'est pourquoi certains auteurs proposent des méthodes résolvant les programmes linéaires en plusieurs étapes. Dans [20] est présentée une méthode de résolution qui consiste, à chaque itération, à résoudre le programme linéaire avec CPLEX en respectant seulement une partie des contraintes triangulaires (relaxation). Ensuite, les autres contraintes sont triées en ordre de violation de la solution de la relaxation. Les contraintes les moins respectées sont ajoutées au modèle de la prochaine itération tandis que celles les plus facilement respectées dans l'itération précédente

sont retirées. On procède ainsi d'itération en itération jusqu'à ce qu'une solution temporaire respecte toutes les contraintes.

Dans [10], un algorithme ILP utilisant un modèle légèrement différent de celui décrit au début de cette sous-section est proposé pour la résolution du problème LOP, dans lequel certaines contraintes subissent une relaxation lagrangienne (c'est-à-dire qu'elles sont supprimées et remplacées par des pénalités dans la fonction à optimiser). La description complète de leur algorithme est complexe et nous l'élaborerons pas davantage puisque ça ne touche pas au sujet principal du mémoire.

### 2.4.3. Algorithmes à paramètres fixes

Certains algorithmes à paramètres fixes ont été proposés pour résoudre le problème de la médiane.

Intuitivement, les algorithmes à paramètres fixes sont des algorithmes dont le temps d'exécution est généralement exponentiel, mais tel que ce possible facteur exponentiel peut être englobé par un unique paramètre  $k$  ( $k$  dépend de l'instance du problème) Ainsi, si  $k$  est petit, le temps d'exécution sera court, peu importe les autres caractéristiques de l'instance du problème. Plus formellement, un problème est  $FPT(k)$  si ce problème peut être résolu par un algorithme en temps  $f(k)p(|x|)$ , où  $f$  est une fonction quelconque (en pratique, elle est d'ordre de grandeur plus que polynomial, sinon parler d'algorithme FPT est sans intérêt),  $p$  une fonction polynomiale et  $|x|$  la taille de l'instance du problème. Notons que de manière encore plus formelle,  $k$  devrait plutôt être noté  $k(x)$  dans puisque  $k$  dépend de  $x$ .

Jusqu'ici, le paramètre avec lequel nous avons travaillé pour mesurer la difficulté du problème de la médiane est  $n$ , la taille des permutations. Dans la section 2.2, il a été prouvé que le problème ne peut pas être résolu en temps polynomial par rapport à  $n$  (sauf si  $P=NP$ ).

Plusieurs auteurs ont proposé des algorithmes utilisant différents paramètres fixes pour résoudre le problème de la médiane. Voici une liste de ces paramètres pour un certain ensemble de permutations  $A$  :

- $n$  : taille des permutations de  $A$
- $m$  : nombre de permutations de  $A$
- $k$  : distance entre  $A$  et une de ses médianes
- $d$  : distance maximale entre  $A$  et une de ses médianes
- $\frac{k}{m}$

Dans [30], plusieurs algorithmes à paramètres fixes sont proposés. L'un d'eux, avec paramètre fixe  $n$ , peut trouver trouver une médiane en temps  $O(2^n n^2 m)$ . Son exactitude est basée sur le fait que le consensus de Kemeny respecte le critère LIIA.

Leur algorithme utilise la programmation dynamique. Il est basé sur le fait que pour optimiser l'ordonnancement d'un ensemble d'éléments  $X \subset [1..n]$  entre eux, il suffit de choisir un élément  $i \in X$  approprié comme premier élément de l'ordonnancement et les autres

éléments doivent être ordonnés de manière optimale entre eux . Plus formellement , pour chaque  $X \subset [1..n]$ , soit  $v_X$  le coût minimal engendré par l'ordonnement des éléments de  $X$ , c'est-à-dire la contribution minimale à la distance de Kendall- $\tau$  des paires d'éléments de  $X$ . L'élément  $i$  placé premier parmi  $X$  engendrera une contribution à la distance de  $\sum_{j \in X, i \neq j} R_{ij}$  par rapport aux autres éléments de  $X$ , puis les paires d'autres éléments, entre eux, auront une contribution à la distance de  $v_{X \setminus \{i\}}$ . Il s'en suit donc le système d'équations récursif suivant :

$$v_\emptyset = 0$$

$$v_X = \min_{\{i \in X\}} \{v_{X \setminus \{i\}} + \sum_{j \in X, i \neq j} R_{ij}\}$$

$$a_X = \arg \min_{\{i \in X\}} \{v_{X \setminus \{i\}} + \sum_{j \in X, i \neq j} R_{ij}\}$$

où  $a_X$  est l'élément à mettre à gauche parmi  $X$  pour minimiser la contribution des paires d'éléments de  $X$  à la distance. Ce système calcule donc  $v_X$  et  $a_X$  pour chaque  $X \in 2^{[1..n]}$ . Le dernier noeud calculé est  $v_{[1..n]}$ , le score de Kemeny d'une médiane. Une médiane peut ensuite être constituée rapidement en itérant sur les  $a_X$  en sens décroissant de  $|X|$  pour les valeurs appropriées de  $X$ .

Les mêmes auteurs proposent aussi deux autres algorithmes à paramètre fixes : l'un fonctionne en temps  $O(1.53^k + n^2m)$  et l'autre en temps  $(3d + 1)! mnd \lg(d)$ .

D'autres auteurs ont aussi proposé des algorithmes à paramètres fixes. Entre autres, Simjour [34] améliore les résultats trouvés initialement par [30]. Pour les paramètres  $k$  et  $d$ , il propose des algorithmes en temps respectifs  $O(1.403^k)$  et  $O(4.829^d)$ . De plus, pour le paramètre  $\frac{k}{m}$ , il propose un algorithme en temps  $O(36^{\frac{k}{m}})$ , puis un autre en temps  $O(4^{\frac{k}{m}})$  dans [31].

Par la suite, deux algorithmes en temps sous-exponentiel ont été trouvés (une fonction  $f(x)$  est sous-exponentielle si  $f(x) \in O(2^{o(x)})$ ). Les auteurs de [24] et [22] ont trouvé des algorithmes en temps respectifs  $O(2^{\sqrt{\frac{k}{m}}})$  et  $O(2^{\sqrt{k} \lg(k)})$ .

L'avantage d'avoir des algorithmes pour différents paramètres fixes est qu'on peut choisir l'algorithme approprié en fonction des caractéristiques de  $A$ . Par exemple, un algorithme à paramètre fixe  $n$  est pertinent lorsqu'il n'y a aucune corrélation apparente entre les permutations de  $A$ , tandis que ceux à paramètres fixes  $k$ ,  $d$  ou  $\frac{k}{m}$  sont préférables lorsque les permutations de  $A$  sont fortement corrélées, puisque cette corrélation fait baisser ces trois valeurs. En ce qui concerne la comparaison entre les paramètres fixes  $k$  et  $\frac{k}{m}$ , le premier est normalement préférable lorsque le nombre de permutations  $m$  est petit et vice-versa.

#### 2.4.4. Réduction d'espace de recherche

Plusieurs auteurs ont tenté de trouver des manières de réduire l'espace de recherche d'une médiane de permutation.

Dans [36], on invoque une extension du critère de Condorcet défini à la section 2.1.2, appelée ici réduction de Condorcet :

**Théorème 5.** [36] *Soit  $A$  un ensemble de permutations,  $L$  et  $R$ , ses matrices gauche et droite et  $C \subset [1..n]$ . Notons  $\bar{C}$  le complément de l'ensemble  $C$  i.e  $\bar{C} = [1..n] \setminus C$ . Si  $\forall (i,j) \in C \times \bar{C}, L_{ij} > R_{ij}$ , alors tous les éléments de  $C$  précéderont les éléments de  $\bar{C}$  dans n'importe quelle permutation médiane de  $A$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par contradiction, supposons qu'il est possible de partitionner  $A$  en deux ensembles  $C$  et  $\bar{C}$  tel que  $\forall (i,j) \in C \times \bar{C}, L_{ij} > R_{ij}$ , mais qu'il existe une médiane de  $A$  dans laquelle ce ne sont pas tous les éléments de  $C$  qui précèdent ceux de  $\bar{C}$ . Alors, dans la médiane, il existe un élément  $i \in \bar{C}$  suivi immédiatement par un élément  $j \in C$ . Permuter ces deux éléments ferait diminuer la distance de Kendall- $\tau$ , donc la médiane supposée n'en est pas une, ce qui nous amène à une contradiction.  $\square$

En mots, le Théorème 5 stipule que si on peut séparer les candidats en deux groupes tels que pour chaque paire formée d'un candidat  $i$  du premier groupe et un candidat  $j$  du deuxième,  $i$  précède  $j$  dans la majorité des permutations de  $A$ , alors tous les candidats du premier groupe précéderont tous les autres dans un consensus de Kemeny. Cela permet de diviser pour régner, c'est-à-dire résoudre le gros problème en le résolvant pour deux sous-ensembles de candidats plus petits, ce qui accélère grandement le temps de calcul.

Il n'est toutefois aucunement garanti qu'un tel sous-ensemble  $C$  existe. Néanmoins, dans [5], il est montré que l'on peut trouver un tel ensemble ou confirmer son inexistence en temps  $O(n^2m)$ . Les auteurs de cet article mentionnent aussi, sans surprise, qu'il est beaucoup plus probable de trouver un tel sous-ensemble lorsque les permutations de  $A$  sont corrélées et beaucoup moins lorsque les permutations sont générées au hasard. Cependant, de manière générale, les ensembles de permutations provenant du monde réel sont des ensembles corrélés.

Ainsi, selon leurs tests sur des instances de provenance réelle, appliquer la réduction de Condorcet puis résoudre chaque sous-instance avec CPLEX est nettement plus rapide qu'utiliser CPLEX sur l'instance initiale.

Une version encore plus forte du théorème précédent existe :

**Théorème 6.** *Soit  $A$  un ensemble de permutations,  $L$  et  $R$ , ses matrices gauche et droite et  $C \subset [1..n]$ . Notons  $\bar{C}$  le complément de l'ensemble  $C$  i.e  $\bar{C} = [1..n] \setminus C$ . Si  $\forall (i,j) \in C \times \bar{C}, L_{ij} \geq R_{ij}$ , alors il existe une permutation médiane de  $A$  dans laquelle tous les éléments de  $C$  précéderont les éléments de  $\bar{C}$ .*

Cette version de la règle de Condorcet est plus forte, car  $L_{ij} \geq R_{ij}$  est plus probable que  $L_{ij} > R_{ij}$ . En pratique, cela a l'avantage de rendre la réduction plus souvent applicable, mais a le désavantage de briser arbitrairement de potentielles égalités et ainsi éliminer certaines possibilités de médianes. Par exemple, soit simplement  $A = \{12,21\}$ . Le théorème 5 est inexploitable pour  $A$ , mais une application du théorème 6 permet de scinder l'ensemble d'éléments  $\{1,2\}$  en deux :  $C = \{1\}$  et  $\overline{C} = \{2\}$ . Cette application mène immédiatement à la permutation médiane 12, mais ignore une autre médiane de  $A$ , 21.

Une autre règle de réduction est la règle  $\frac{3}{4}$  [5].

**Théorème 7.** *Soit  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  et soient  $L$  et  $R$ , ses matrices gauche et droite. S'il existe un élément  $i$  tel que pour tout autre élément  $j$ ,  $|L_{ij} - R_{ij}| \geq \frac{m}{2}$ , alors cet élément  $i$  est séparateur. Plus précisément, dans une médiane de  $A$ , tous les éléments précédant  $i$  dans au moins le trois quart des permutations de  $A$  précéderont aussi  $i$  dans une médiane de  $A$ , tandis que les autres éléments, qui ne précèdent  $i$  que dans le quart des permutations, suivront  $i$  dans la médiane.*

À l'instar de la réduction de Condorcet, cette réduction permet de diviser pour régner. En ce qui concerne l'applicabilité de la règle, les auteurs de [5] prouvent que, grâce à cette réduction, le problème consistant à trouver médiane d'un ensemble  $A$  peut toujours être divisé en sous-problème(s) dont chaque instance a au plus  $\frac{16}{3}d_{av}$  candidats où  $d_{av}$  est la distance de Kendall- $\tau$  moyenne entre deux permutations de  $A$ . Malheureusement, ceci est peu utilisable en pratique puisque  $\frac{16}{3}d_{av} > n_A$  en général, sauf quand les permutations de  $A$  sont fortement corrélées.

De toute façon, il est démontré, dans [5], que toute réduction pouvant être trouvée par la règle  $\frac{3}{4}$  peut aussi être trouvée par le théorème 5, ce qui rend inutile la règle  $\frac{3}{4}$  lorsque le but est de ne trouver qu'une seule médiane d'un ensemble de permutations.

#### 2.4.5. Major Order Theorem

Dans [27], Robin Milosz et Sylvie Hamel démontrent le Major Order Theorem, un théorème qui permet de décider en temps polynomial l'ordre de certaines paires d'éléments dans une médiane. D'un point de vue pratique, ce théorème réduit significativement le temps de recherche moyen d'une médiane, mais est aussi utilisé dans les preuves théoriques de ce mémoire. En voici donc l'énoncé et la preuve.

**Théorème 8.** *Soit  $A \in \mathbb{S}_n$  et  $1 \leq i \neq j \leq n$  tels que  $i$  précède  $j$  dans plus de la moitié des permutations de  $A$ . Soit  $X$  l'ensemble contenant tous les autres éléments, i.e  $X = [1..n] \setminus \{i,j\}$ . Si*

$$2\Delta_{ij} > \sum_{k \in X} \max\{0, \Delta_{ki} + \Delta_{jk}\} \quad (2.4.1)$$

*alors  $i$  précède nécessairement  $j$  dans une médiane de  $A$*

DÉMONSTRATION. Par contradiction, supposons qu'une médiane dans laquelle  $j$  précède  $i$  existe. Cette médiane est obligatoirement de forme concaténée  $PjKiQ$ .

L'idée de la preuve est que  $PjKiQ$  ne peut pas être une médiane de  $A$  puisque l'une des deux permutations suivantes est nécessairement à plus courte distance de  $A$  :  $PijKQ$  ou  $PKijQ$ .

Supposons que ces deux permutations ne sont pas à plus courte distance de  $A$ . Alors :

$$\begin{aligned}
2d_{\text{KT}}(PjKiQ, A) &\leq d_{\text{KT}}(PijKQ, A) + d_{\text{KT}}(PKijQ, A) \\
&\stackrel{\text{Thm3}}{=} d_{\text{KT}}(PjiKQ, A) - \Delta_{ij} + d_{\text{KT}}(PKjiQ, A) - \Delta_{ij} \Rightarrow \\
2\Delta_{ij} &\leq d_{\text{KT}}(PjiKQ, A) - d_{\text{KT}}(PjKiQ, A) + d_{\text{KT}}(PKjiQ, A) - d_{\text{KT}}(PjKiQ, A) \\
&\stackrel{\text{Thm3}}{=} \sum_{k \in K} \Delta_{ki} + \sum_{k \in K} \Delta_{jk} \\
&= \sum_{k \in K} \Delta_{ki} + \Delta_{jk} \\
&\leq \sum_{k \in K} \max\{0, \Delta_{ki} + \Delta_{jk}\} \\
&\leq \sum_{k \in X} \max\{0, \Delta_{ki} + \Delta_{jk}\}.
\end{aligned}$$

Contradiction. Le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne est valide car  $K \subset X$  et l'ajout de termes non-négatifs dans une somme ne peut pas faire diminuer sa valeur.  $\square$

Il est possible de réécrire le théorème sous une autre forme. En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in X} \max\{0, \Delta_{ki} + \Delta_{jk}\} &= \sum_{k \in X} \max\{0, L_{ki} - R_{ki} - L_{kj} + R_{kj}\} \\
&= \sum_{k \in X} \max\{0, L_{ki} - (m - L_{ki}) - L_{kj} + (m - L_{kj})\} \\
&= \sum_{k \in X} \max\{0, 2L_{ki} - m - 2L_{kj} + m\} \\
&= \sum_{k \in X} \max\{0, 2L_{ki} - 2L_{kj}\} \\
&= 2 \sum_{k \in X} \max\{0, L_{ki} - L_{kj}\}.
\end{aligned}$$

On peut donc réécrire la condition du théorème comme suit :

$$\Delta_{ij} > \sum_{k \in X} \max\{0, L_{ki} - L_{kj}\}. \tag{2.4.2}$$

L'expression  $L_{ki} - L_{kj}$  représente le nombre de permutations de  $A$  où  $k$  apparaît à la fois après  $j$  et avant  $i$  moins le nombre de permutations de  $A$  où  $k$  apparaît après  $i$  et avant  $j$ .

Les auteurs montrent aussi une version plus forte du théorème. Dans le théorème initial, on suppose que  $K$  peut potentiellement contenir n'importe quel élément de  $X$ . Cependant, il se peut, par d'autres critères de réduction d'espace, ou encore par une première application du MOT, qu'on ait déjà établi qu'un certain  $k \in X$  ne puisse pas se retrouver dans  $K$ . En effet, s'il a déjà été prouvé que  $i \prec k$  ou  $k \prec j$  dans une médiane,  $k$  ne peut pas être entre  $j$  et  $i$  et n'est donc pas dans  $K$ . Il en découle ce théorème renforcé :

**Théorème 9.** *Soit  $A \in \mathbb{S}_n$  et  $1 \leq i \neq j \leq n$  tels que  $i$  précède  $j$  dans plus de la moitié des permutations de  $A$ . Soit  $X$  l'ensemble contenant tous les autres éléments, à l'exception de ceux qui ne peuvent pas se retrouver à la fois après  $j$  et avant  $i$  dans une médiane de  $A$ . Si*

$$\Delta_{ij} > \sum_{k \in X} \max\{0, L_{ki} - L_{kj}\}, \quad (2.4.3)$$

*alors  $i$  précède nécessairement  $j$  dans une médiane de  $A$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est totalement identique à celle du théorème 8. □

En pratique, cette version plus forte permet d'utiliser le MOT en succession avec un autre théorème de réduction d'espace. On peut aussi utiliser le MOT plusieurs fois, afin qu'à chaque itération, on puisse potentiellement trouver des contraintes qui augmenteront les chances d'en trouver d'autres à la prochaine itération. On arrête dès qu'une itération ne génère aucune nouvelle contrainte.

#### 2.4.6. Bornes inférieures

Il est parfois utile de connaître une borne inférieure pertinente de la distance de Kendall- $\tau$  avant de lancer un algorithme calculant de manière exacte une ou des médianes d'un ensemble de permutations.

Dans [16], plusieurs algorithmes sont proposés pour calculer une borne inférieure à la distance de Kendall- $\tau$  entre un ensemble de permutations et une de ses médianes.

L'un d'eux permet de calculer  $LB$ , vu plus tôt dans la section 1.3.7. Ils démontrent ensuite qu'il est possible d'augmenter cette borne en tenant compte des cycles dans le graphe de majorité. En effet, la présence d'un cycle dans le graphe de majorité assure qu'au moins une des arêtes du cycle ne respecte pas l'ordre d'une médiane. Il y a donc une pénalité supplémentaire valant au moins l'arête du cycle ayant le moindre coût. Il est donc possible d'augmenter la borne inférieure en trouvant un ensemble de cycles disjoints et en additionnant le coût de chaque arête à moindre coût.

Les mêmes auteurs trouvent toutefois une borne inférieure encore plus intéressante dans [13]. Il s'agit en fait de transformer le problème de la médiane en LOP, tel que vu à la section 2.3 et de résoudre ce modèle par programmation linéaire avec le modèle vu à la section 2.4.2, mais avec la relaxation suivante : omettre la contrainte d'intégrité  $x_{ij} \in \{0,1\}, \forall(i,j)$  et la remplacer par  $x_{ij} \in [0,1], \forall(i,j)$ . En général, la présence ou non de contraintes d'intégrité

dans un programme linéaire influence grandement le temps de calcul requis pour obtenir une solution, largement en faveur du programme non-entier, qui demeure toutefois de complexité NP-difficile. Les auteurs prouvent par la suite que cette borne inférieure est supérieure ou égale à celles fournies précédemment grâce aux cycles, peu importe l'instance du problème. Ils remarquent aussi que, dans tous leurs tests, la borne inférieure trouvée est à moins de 0,4% de la vraie distance de Kendall- $\tau$ . Finalement, dans plus de la moitié de leur tests, la solution de la relaxation respecte la contrainte d'intégrité, donc la borne inférieure est égale à la distance de Kendall- $\tau$ .

L'établissement de bornes inférieures a plusieurs utilités. Entre autres, si une heuristique propose une permutation médiane dont la distance à un ensemble  $A$  est égale à une borne inférieure trouvée précédemment, alors la permutation est nécessairement une médiane. Dans le cas d'une recherche heuristique (prochain chapitre), si la distance  $d$  n'est pas égale mais à peine plus grande qu'une borne inférieure trouvée  $b$ , alors il est certain que l'heuristique a fourni une permutation à distance valant  $\frac{d}{b}$  de la distance minimale tout au plus, ce qui est souvent suffisamment bas en pratique.

#### 2.4.7. Médiannes de 3 permutations

La plupart des algorithmes exacts calculant le consensus de Kemeny qui ont été vus jusqu'à maintenant sont aussi utilisables pour les problèmes LOP et MFASP. Ils ne profitent donc pas de la spécificité du problème de la médiane. C'est pourquoi il peut être intéressant de tenter de profiter de cette spécificité, surtout lorsque le nombre  $m$  de permutations est petit.

Dans [29], Robin Milosz et al. abordent le cas spécifique du calcul de la médiane de  $m = 3$  permutations. Les auteurs démontrent que pour un ensemble de permutations  $A$  tel que  $m_A = 3$  et dont le graphe de majorité est  $G$ , si deux éléments  $i$  et  $j$  ne font partie d'aucun cycle (orienté) de longueur 3 dans  $G$ , alors ces éléments doivent être classés dans leur ordre majoritaire dans une médiane. Autrement dit, pour  $i, j \in [1..n], i \neq j \wedge \Delta_{ij} > 0$ , s'il n'existe aucun  $k \in [1..n] \setminus \{i, j\}$  tel que  $\Delta_{jk} > 0$  et  $\Delta_{ki} > 0$ , alors  $i \prec j$  dans une médiane. Ils appellent ce théorème le "3-cycle theorem".

Les auteurs proposent aussi une conjecture selon laquelle le théorème ci-dessus ne s'applique pas uniquement aux ensembles de 3 permutations, mais aussi à n'importe quel ensemble possédant un nombre impair de permutations. Ils ont effectué des tests massifs pour trouver un contre-exemple à cette conjecture, sans succès.

Pour le cas spécifique de 3 permutations, les auteurs font un lien avec le 3-Hitting set problem.

**Conjecture 1.** *Soit  $A \in \mathbb{S}_n$ ,  $m_A = 3$  et son graphe de majorité  $G$ . Soit  $F$  le plus petit d'ensemble d'arêtes de  $G$  tel que tous les 3-cycles de  $G$  ont au moins une arête dans  $F$ , alors :*

$$d_{KT}(\pi, A) = LB(A) + \#F$$

Dans [13], il était déjà prouvé que  $LB(A) + \#F$  est une borne inférieure de la distance minimale peu importe  $m_A$ , mais les auteurs de [29] ont fait massivement des tests pour le cas  $m_A = 3$  et n'ont trouvé aucune instance où cette borne minimale ne valait pas exactement la distance d'une médiane.

Cette conjecture, si elle est vraie, permet de calculer le score d'une médiane simplement en trouvant le plus petit ensemble d'arêtes qui couvrent tous les 3-cycles. Ceci correspond parfaitement au 3-hitting set problem (3HSP) [23],

Cette conjecture (si elle est vraie), permet aussi de réduire problème consistant à trouver la distance de Kendall- $\tau$  entre une ensemble de 3 permutations et une de ses médianes au problème 3HSP. Bien que ce dernier problème soit montré NP-difficile dans [23], il est en pratique beaucoup plus rapide à résoudre que celui du score d'une médiane, comme on peut le constater dans le paragraphe suivant.

À l'aide de la programmation ILP avec CLPEX, les auteurs de [29] exécutent des tests pour mesurer l'impact des résultats ci-dessus. Ajouter les contraintes obtenues par le "3-cycle theorem" au modèle réduit significativement le temps de calcul d'une médiane. Toutefois, cette accélération n'est rien, comparée à celle obtenue en résolvant seulement la réduction du problème vers 3HSP. Cependant, cette dernière permettrait seulement de trouver le score d'une médiane et non la médiane elle-même.

## 2.5. HEURISTIQUES

Les algorithmes exacts présentés précédemment dans ce chapitre peuvent être utilisés dans les cas où une médiane d'un ensemble de permutations est calculable en temps raisonnable. Ces cas surviennent généralement lorsque  $n$  est petit ou encore lorsque les permutations de  $A$  sont fortement corrélées.

Cependant, lorsque  $n$  est grand et que la corrélation entre les permutations est inexistante ou insuffisante pour compenser la grandeur de  $n$ , aucun algorithme ne peut fournir une médiane en temps raisonnable, puisque le problème est NP-difficile, comme montré à la section 2.2. Il est donc pertinent de développer des heuristiques pouvant rapidement retourner une permutation "presque" médiane.

Les heuristiques peuvent être jugées selon deux critères : leur temps d'exécution et leur fiabilité. Dans le cas présent, la fiabilité représente la proximité relative entre  $d_{KT}(\pi, A)$  et  $d_{KT}(\sigma, A)$ , où  $\pi$  est une médiane de  $A$  tandis que  $\sigma$  est la permutation retournée par l'heuristique.

Tout au long de cette section, le terme "pseudomédiane" est utilisé pour désigner la permutation retournée par une heuristique comme proposition de médiane. Le terme "pseudomédiane" n'est pas utilisé dans la littérature, mais nous semble assez intuitif puisque la permutation retournée n'est en général pas une médiane mais proche de l'être.

L'une des mesures de la fiabilité est le facteur d'approximation. On dit qu'une heuristique pour trouver une médiane d'un ensemble  $A$  est de facteur d'approximation  $x$  si l'heuristique retourne toujours une permutation qui est au plus à une distance de  $A$   $x$  fois plus grande qu'une vraie médiane de  $A$  (de manière plus compacte,  $\frac{d_{KT}(\text{pseudomedian}, A)}{d_{KT}(\text{median}, A)} \leq x$ ). Cette mesure est toutefois à prendre avec un grain de sel pour deux raisons. D'abord, le facteur d'approximation est une borne supérieure de la valeur de  $\frac{d_{KT}(\text{pseudomedian}, A)}{d_{KT}(\text{median}, A)}$  dans le pire cas et non en moyenne. Ensuite, certaines heuristiques sont difficiles à analyser mathématiquement, ce qui rend difficile la recherche d'un facteur d'approximation, alors qu'en pratique la fiabilité moyenne peut être excellente.

### 2.5.1. Heuristiques à base d'autres méthodes de consensus

Une heuristique simple pour proposer une permutation médiane est de retourner le consensus calculé par une autre méthode opérant en temps polynomial (Borda, Copeland, Spearman Foot-Rule[18], Ranked Pairs[35] etc. ). Certaines de ces méthodes sont décrites à la section 2.1.2. En ce qui concerne celles de Borda et Copeland, les égalités peuvent être brisées arbitrairement. Dans [33], il est démontré que Borda et Copeland sont respectivement des 2-approximation et  $\frac{3}{2}$ -approximation de la médiane de permutations. Ces méthodes ont l'avantage de la rapidité, surtout Borda.

### 2.5.2. Quelques autres heuristiques

— QuickSort [37][1] :

QuickSort consiste à choisir arbitrairement un élément  $i \in [1..n]$  surnommé l'élément "pivot". Ensuite, les autres éléments sont séparés en deux ensembles  $P$  et  $S$  contenant respectivement les éléments qui précéderont  $i$  et les éléments qui suivront  $i$  dans la pseudomédiane. Le critère de décision est le suivant : pour chaque  $j \neq i$ , si  $\Delta_{ij} < 0$ , alors  $j$  est placé dans  $P$  tandis que  $j$  est placé dans  $S$  si  $\Delta_{ij} > 0$ . Si  $\Delta_{ij} = 0$ , le choix est fait au hasard. Ensuite l'algorithme QuickSort est appliqué récursivement sur chacun des ensembles  $P$  et  $S$ .

D'un point de vue théorique, l'algorithme est une 2-approximation, mais les auteurs de [1] montrent que cela peut être facilement amélioré en une  $\frac{11}{7}$ -approximation avec la variante suivante : pour calculer une pseudomédiane d'un ensemble de permutations  $A$ , exécuter  $\sigma = \text{QuickSort}(A)$ , puis retourner la permutation à distance minimale de  $A$  parmi  $\sigma$  et les permutations de  $A$ .

— MC4 [19] :

MC4 est une heuristique utilisant les chaînes de Markov et est fortement inspirée de l’algorithme PageRank de Google [32]. Chaque élément représente un état. Pour  $(i, j) \in [1..n]^2$ ,  $P(i, j)$  représente la probabilité, lors d’une itération, de passer de l’état  $i$  à l’état  $j$  et est calculé comme suit : pour  $i \neq j$ , alors  $P(i, j) = \frac{1}{n}$  si  $\Delta_{ij} < 0$ ,  $\frac{\delta}{n}$  sinon. Pour  $i \in [1..n]$ ,  $P(i, i) = 1 - \sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} P(i, j)$ . L’hyperparamètre  $0 < \delta < 1$  correspond à une probabilité de transiter dans un état totalement aléatoire. Après un grand nombre d’itérations, la loi de probabilité de l’état dans lequel on se trouve converge vers un vecteur de probabilité stationnaire (qui ne dépend pas de l’état de départ, puisque la contrainte  $\delta \neq 0$  empêche d’avoir plusieurs vecteurs stationnaires distincts possibles). Au final, Les éléments sont donc classés dans la pseudomédiane en ordre décroissant de probabilité stationnaire.

Le choix de la valeur de  $\delta$  est optionnel. Une autre modification optionnelle consiste à calculer une approximation du vecteur de probabilité stationnaire au lieu du vecteur de probabilité stationnaire exact. Cela se fait en multipliant par elle-même la matrice de transition de la chaîne de Markov (i.e. la matrice contenant toutes les probabilités de passer d’un état  $i$  à un état  $j$  lors d’une itération) un nombre fini de fois pour diminuer le temps de calcul. L’algorithme MC4 auquel on apporte cette dernière modification s’appelle MC4Approx dans [33]. Aucun facteur d’approximation n’a été calculé pour MC4 et MC4Approx par les auteurs de [19] et [33], mais des tests dans [19] suggèrent qu’elles obtiennent des meilleurs résultats que toutes les autres heuristiques mentionnées jusqu’à maintenant.

### 2.5.3. Heuristiques à base de mouvements d’insertion

L’heuristique LocalSearch (connue sous plusieurs noms différents, selon la source) est une heuristique dont le fonctionnement est le suivant : à partir d’une certaine permutation initiale, des mouvements d’insertion (voir sous-section 3) faisant baisser la distance de Kendall- $\tau$  sont appliqués jusqu’à tomber dans un minimum local (c’est-à-dire une permutation pour laquelle aucun mouvement d’insertion ne peut faire baisser la distance) et la permutation actuelle est retournée comme pseudomédiane. Deux implémentations sont possibles : à chaque itération, le meilleur mouvement d’insertion (celui qui fait le plus baisser la distance) est effectué ou bien le premier mouvement d’insertion détecté pouvant faire baisser la distance est effectué.

Il est important de noter que le facteur d’approximation pour l’algorithme ci-dessus n’est pas représentatif de sa performance en pratique. Comme expliqué dans [33], aucun facteur d’approximation garanti pertinent n’a été trouvé pour LocalSearch lorsque l’algorithme débute avec une permutation quelconque, alors que cette heuristique est très performante en pratique (voir section suivante).

Notons que les mouvements d'insertions ont plusieurs noms différents dans la littérature, entre autres : LocalSearch move [2], single vertex move [25], mouvement circulaire [6] et bien d'autres. Il est important de noter que dans ce mémoire, ce qui est appelé mouvement circulaire a une définition différente et consiste en fait à un type précis de mouvement d'insertion (voir définition 29).

#### 2.5.4. Combinaisons et comparaisons des heuristiques

Les algorithmes ci-dessus ne représentent qu'une fraction de toutes les heuristiques qui ont été proposées dans les dernières années pour le problème de la médiane. De plus, il est possible de combiner plusieurs heuristiques pour en former une autre, ce qui résulte en un grand nombre de possibilités. C'est pourquoi deux études comparatives ont été effectuées : d'abord [33] en 2009, puis [2] en 2012. Les auteurs ont testé massivement un grand nombre d'heuristiques sur plusieurs ensembles de données dont voici les grandes lignes des résultats.

D'abord, les auteurs de [33] comparent un nombre significatif d'algorithmes sur des ensembles de données provenant du Web. Ils concluent qu'utiliser le consensus de Borda comme heuristique est de loin la méthode la plus rapide et retourne un assez bon résultat (i.e. une pseudomédiane assez proche d'être une médiane). Le consensus de Copeland est, lui aussi, rapide à calculer et fournit des résultats encore meilleurs. Toutefois, la conclusion principale des auteurs est que l'algorithme ayant le meilleur compromis entre temps de calcul et les résultats consiste à utiliser une heuristique rapide (notamment Borda ou Copeland), puis fournir la permutation retournée en entrée à LocalSearch. Au cours de leurs tests, jamais un algorithme constitué de Borda ou Copeland suivi de LocalSearch n'a retourné une pseudomédiane à plus de 0,03% de la distance minimale.

Dans [2], des tests encore plus complets (104 algorithmes comparés sur 49 ensembles de données) confirment la conclusion générale de [33], soit qu'appliquer LocalSearch après une autre heuristique est la meilleure méthode. De plus, une nouvelle heuristique nommée Beam Search (un algorithme de type Branch-And-Bound limitant l'utilisation de mémoire) est proposée. Utiliser cette heuristique puis LocalSearch est la meilleure de toutes les méthodes dans leurs tests, notamment dans le cas où les permutations sont légèrement mais pas fortement corrélées.

# Chapitre 3

---

## LE CAS AUTOMÉDIAN

Le problème de la médiane étant NP-difficile, l'une des piste explorées consiste à résoudre le problème de la médiane pour une sous-classe des sous-ensembles de  $\mathbb{S}_n$  de permutations possibles. Dans ce chapitre, nous tentons le plus possible de caractériser les ensembles automédiens, c'est-à-dire les ensembles de permutations égaux à leur propre ensemble de médianes. Plus formellement, nous avons la définition suivante.

**Définition 16.** *Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ .  $A$  est un ensemble de permutations **automédian** si et seulement si  $A = \mathcal{M}(A)$ .*

Le problème a été initialement étudié dans [26] où quelques cas particuliers d'ensembles automédiens ont été présentés (voir section 3.1). Nous avons exploré le problème de façon plus théorique, trouvant des propriétés de fermeture intéressantes mais sans toutefois le résoudre complètement. Une partie des résultats trouvés ont été rassemblés dans l'article [17].

La résolution des ensembles automédiens demeure d'intérêt plutôt théorique puisqu'en pratique, de tels ensembles sont très peu probables. Il n'est donc rentable en pratique, lorsqu'on veut calculer une ou toutes les médianes d'un ensemble de permutations, de d'abord vérifier s'il fait partie des ensembles automédiens. Par contre, plusieurs des définitions et concepts de bases définis dans ce chapitre pourraient aussi être utilisés pour élucider d'autres classes spéciales, par exemple  $A \subset \mathcal{M}(A)$  ou encore  $\mathcal{M}(A) \subset A$ .

**Note:** Dans ce chapitre, nous travaillons uniquement avec des ensembles de permutations et ne traitons donc pas des multiensembles de permutations. En effet,  $\mathcal{M}(A)$ , l'ensemble des médianes de  $A$ , est par définition un ensemble, donc l'expression  $A = \mathcal{M}(A)$  est fautive si  $A$  est un multiensemble. Toutefois, pour traiter le cas où  $A$  est un multiensemble, il aurait été possible d'étudier le problème  $\text{supp}(A) = \mathcal{M}(A)$ , mais cela n'a pas été fait dans ce mémoire.

### 3.1. TRAVAUX PRÉCÉDENTS

Deux cas spécifiques d'ensembles automédiens ont été étudiés dans [26]. Chacun de ces deux cas est couvert par un théorème de ce mémoire.

Le premier est le théorème 22 et est présenté de manière formelle dans la section 4.3. De manière informelle, il stipule que si un ensemble de permutations  $A$  est formé de toutes les permutations obtenues à partir de la rotation des éléments d'une permutation  $\pi$ , alors  $A = \mathcal{M}(A)$ . Par exemple, si on forme  $A$  en faisant toutes les rotations la permutation 1423, on obtient  $A = \{1423, 4231, 2314, 3142\}$  et par conséquent,  $\mathcal{M}(A) = \{1423, 4231, 2314, 3142\} = A$ .

Le deuxième stipule qu'étant donné certains entiers positifs  $k, n$  et  $\ell$ , si  $A = I_k \oplus \mathbb{S}_n \oplus I_\ell$ , alors  $A = \mathcal{M}(A)$ . Le lecteur doit toutefois poursuivre la lecture bien plus loin afin de comprendre cette notation.

Dans ce chapitre, nous tentons de caractériser les ensembles automédians de manière plus générale. Le chapitre est formé d'une cascade de définitions et de théorèmes, dont les derniers permettent de caractériser les ensembles automédians séparables, une classe d'ensembles automédians définie à la section 3.3.

## 3.2. ACTION DE GROUPE ET MORPHISME

Soit  $\mathcal{P}(\mathbb{S}_n)$  l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de  $\mathbb{S}_n$ . Comme  $\mathbb{S}_n$  est un groupe sous la composition de permutations, nous définissons l'action de groupe, **composition par la gauche** suivante sur  $\mathcal{P}(\mathbb{S}_n)$  :

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{S}_n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) \\ (\pi, A) &\longmapsto \pi \circ A, \end{aligned}$$

en posant  $\pi \circ A = \{\pi \circ \sigma \mid \sigma \in A\}$ . Nous allons d'abord démontrer certains lemmes à propos de l'invariabilité de la distance de Kendall- $\tau$  sous cette action. Nous noterons parfois  $\pi \circ \sigma$  par  $\pi\sigma$  pour alléger la notation.

**Lemme 1.** *Soient  $\pi, \sigma, \psi$  des permutations de  $\mathbb{S}_n$ . Alors  $d_{KT}(\pi\sigma, \pi\psi) = d_{KT}(\sigma, \psi)$ .*

DÉMONSTRATION. Pour toute paire  $(i, j)$  dans des ordres différents dans  $\sigma$  et  $\psi$ , la paire  $(\pi(i), \pi(j))$  est aussi dans un ordre différent dans  $\pi\sigma$  et  $\pi\psi$  et vice-versa i.e. la bijection  $\pi$  associe chaque paire qui contribue à la distance dans un cas à une paire qui contribue à la distance dans l'autre cas. Ainsi, la distance totale est la même dans les deux cas.  $\square$

**Lemme 2.** *Soit  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  un ensemble de permutations and soit  $\pi$  une permutation de  $\mathbb{S}_n$ . Alors,  $d_{KT}(\pi\sigma, \pi A) = d_{KT}(\sigma, A)$ .*

DÉMONSTRATION. Cela découle directement du fait que  $d_{KT}(\sigma, A) = \sum_{\gamma \in A} d_{KT}(\sigma, \gamma)$ .  $\square$

Tout est maintenant en place pour démontrer le prochain résultat :

**Théorème 10.** *Soit  $\mathcal{M} : \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}_n)$  la fonction qui associe l'ensemble de permutations  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  à l'ensemble de ses médianes  $\mathcal{M}(A)$ . La fonction  $\mathcal{M}$  est un morphisme d'action i.e.  $\pi\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(\pi A)$ , tel qu'illustré sur le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
(\pi, A) \vdash \dots \dots \dots \rightarrow \pi A & & \\
\mathbb{S}_n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) \xrightarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) & & \begin{array}{c} \pi A \\ \vdots \\ \mathcal{M}(\pi A) \end{array} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{S}_n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) \xrightarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) & = & \mathcal{M}(\pi A) \\
(\pi, \mathcal{M}(A)) \vdash \dots \dots \dots \rightarrow \pi \mathcal{M}(A) & & 
\end{array}$$

DÉMONSTRATION. Nous voulons montrer que  $\pi \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(\pi A)$ . Par le lemme 2, on a que  $\forall \sigma \in \mathbb{S}_n, d_{\text{KT}}(\sigma, A) = d_{\text{KT}}(\pi \sigma, \pi A)$ . Donc,  $\sigma$  minimise la distance à  $A \iff \pi \sigma$  minimise la distance à  $\pi A$ . Ainsi,  $\forall \sigma \in \mathbb{S}_n, \sigma \in \mathcal{M}(A) \iff \pi \sigma \in \mathcal{M}(\pi A)$ .  $\square$

Rappelons que l'**orbite** de  $A$  sous l'action  $\circ$  est l'ensemble de tous les  $\sigma A, \sigma \in \mathbb{S}_n$ . Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant :

**Corollaire 3.** *Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles de permutations de  $\mathbb{S}_n$  dans le même orbite de l'action  $\circ : \mathbb{S}_n \times \mathcal{P}(\mathbb{S}_n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}_n)$ . Alors,  $B = \mathcal{M}(B) \iff A = \mathcal{M}(A)$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $A$  et  $B$  sont dans le même orbite, on a que  $B = \pi A$  pour un certain  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . Ainsi,  $B = \mathcal{M}(B) \iff \pi A = \mathcal{M}(\pi A) \stackrel{\text{Theo. 10}}{\iff} \pi A = \pi \mathcal{M}(A) \iff A = \mathcal{M}(A)$ .  $\square$

**Exemple 9.** *Soit  $A = \{1234, 2314, 4312\}$ . Le calcul des médianes de  $A$  nous donne  $\mathcal{M}(A) = \{1234, 2314, 3124\}$ . Maintenant, soit la permutation  $\pi = 3421$  qui sera utilisée pour faire une composition à gauche. Puisque  $\pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 2$  et  $\pi(4) = 1$ , la composition à gauche avec l'ensemble  $A$  donne  $\pi A = \{3421, 4231, 1234\}$ . Le calcul des médianes de  $\pi A$  nous donne bien que  $\mathcal{M}(\pi A) = \pi \mathcal{M}(A) = \{3421, 4231, 2341\}$ .*

**Note:** Tous les théorèmes de cette section peuvent être intuitivement compris de la manière suivante : la composition à gauche n'est qu'une fonction qui change le «nom» des éléments et non leur position. Toutes les propriétés restent donc inchangées.

### 3.3. PERMUTATIONS DÉCOMPOSABLES ET SOMME DIRECTE

Dans cette section, on définit la somme directe, opération qui permettra ensuite de créer des ensembles automédiens à partir d'ensembles automédiens plus petits déjà connus. Quelques autres définitions sont cependant nécessaires avant d'y arriver.

#### 3.3.1. Définitions et notations

**Définition 17.** *Une permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  est dite **k-décomposable**, où  $k \in [1..n-1]$ , si  $i > k \iff \pi_i > k, \forall i \in [1..n]$ .*

**Définition 18.** Une permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  est dite **indécomposable**, si elle n'est  $k$ -décomposable pour aucun  $k \in [1..n-1]$ .

**Exemple 10.** La permutation 3127564 est 3-décomposable alors que la permutation 6127534 est indécomposable.

**Définition 19.** Un ensemble de permutations  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  est dit  **$k$ -décomposable**, où  $k \in [1..n-1]$ , si toutes ses permutations sont  $k$ -décomposables.

**Définition 20.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_n$ ,  $k \in [1..n-1]$ .  $A$  est dit  **$k$ -séparable** s'il existe une permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  telle que  $\pi A$  est un ensemble de permutations  $k$ -décomposable. Si  $A$  n'est  **$k$ -séparable** pour aucun  $k \in [1..n-1]$ ,  $A$  sera alors qualifié d'**inséparable**.

**Note:** Un ensemble de permutations  $A$  est donc  $k$ -séparable s'il existe un sous-ensemble  $X \subset [1..n]$  de  $k$  éléments tels que des  $k$  premières valeurs de chaque permutation sont les éléments de  $X$ .

**Exemple 11.** Soit  $A = \{12354, 21345, 32154\}$ . Cet ensemble est 3-décomposable puisque toutes ses permutations sont 3-décomposables. Maintenant, soit  $B = \{14532, 41523, 54132\}$ .  $B$  est 3-séparable, car la permutation  $\sigma = 14523$  est telle que  $\sigma B = A$  et  $A$  est 3-décomposable.

**Exemple 12.** L'ensemble  $A = \{12345, 52341\}$  est inséparable.

Pour alléger la notation, s'il y a plusieurs valeurs  $k_1, k_2 \dots k_m$  en ordre croissant telles qu'une permutation ou un ensemble de permutations est  $k_i$ -décomposable (resp.  $k_i$ -séparable),  $1 \leq i \leq m$ , on dira qu'il/elle est  $k_1; k_2; \dots k_m$ -décomposable (resp.  $k_1; k_2; \dots k_m$ -séparable).

**Exemple 13.** L'ensemble  $A = \{4521763, 2546173\}$  est 3;6-séparable.

**Définition 21.** Soit  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  et  $k > 0$ .  $\sigma_{\uparrow k}$  est la permutation  $\sigma$  dont tous les éléments sont augmentés de  $k$ . On a donc  $\sigma_{\uparrow k} = (\sigma_1 + k)(\sigma_2 + k) \dots (\sigma_n + k)$ .

**Note:** Dans la définition précédente,  $\sigma_{\uparrow k}$  n'est pas une permutation, puisque c'est une bijection de  $[1..n]$  vers  $[1+k..n+k]$  et non une bijection de  $[1..n]$  vers  $[1..n]$ . Toutefois, on peut s'en servir pour former de nouvelles permutations, entre autres de la manière qui suit.

**Définition 22.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ . La **somme directe** de  $\pi$  et  $\sigma$ , notée  $\pi \oplus \sigma$ , est la permutation de longueur  $k + \ell$  formée par la concaténation de  $\pi$  et  $\sigma_{\uparrow k}$ . Ainsi,  $\pi \oplus \sigma = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_k (\sigma_1 + k)(\sigma_2 + k) \dots (\sigma_\ell + k)$ .

**Exemple 14.** Soient  $\pi = 132$  et  $\sigma = 2143$ , alors  $\pi \oplus \sigma = 1325476$ .

**Note:** Une permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  qui est  $k_1, k_2 \dots k_m$ -décomposable peut être écrite comme la somme directe de  $m + 1$  permutations indécomposables de longueurs  $k_i - k_{i-1}$ , pour  $1 \leq i \leq m + 1$ , avec  $k_0 = 0$  et  $k_{m+1} = n$ .

**Exemple 15.** La permutation  $\pi = 32145 \in \mathbb{S}_5$  est 3;4-décomposable. Elle peut être écrite comme  $\pi = 321 \oplus 1 \oplus 1$ , où  $321 \in \mathbb{S}_3$  et  $1 \in \mathbb{S}_1$  sont des permutations indécomposables.

On peut étendre la définition de la somme directe aux ensembles de permutations de la manière suivante :

**Définition 23.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ , deux ensembles de permutations de longueurs respectives  $k$  and  $\ell$ . La **somme directe** de  $A$  et  $B$ , dénotée  $A \oplus B$ , est définie comme  $A \oplus B = \{\pi \oplus \sigma \mid \pi \in A \text{ and } \sigma \in B\}$ .

**Note:** Par définition,  $A \oplus B$  est  $k$ -décomposable.

**Exemple 16.** Posons  $A = \{132, 312\}$  et  $B = \{2143, 2314, 2431\}$ . Alors,  $A \oplus B$  est 3-décomposable et  $A \oplus B = \{1325473, 1325647, 1325764, 3125473, 3125647, 3125764\}$ .

Il est facile de montrer que la somme directe  $\oplus$  est une opération associative, donc pour toute permutation  $\pi, \sigma$  et  $\phi$ , on a  $(\pi \oplus \sigma) \oplus \phi = \pi \oplus (\sigma \oplus \phi)$ . Cette associativité se généralise facilement aux sommes directes d'ensembles de permutations.

### 3.3.2. Théorèmes et propriétés

Démontrons d'abord le résultat suivant, concernant la distance de Kendall- $\tau$  entre deux permutations qui sont des sommes directes de plus petites permutations.

**Lemme 3.** Soient  $\rho$  et  $\psi$ , deux permutations de  $\mathbb{S}_k$ ,  $\phi$  et  $\theta$ , deux permutations de  $\mathbb{S}_\ell$ . Soient  $\pi$  et  $\sigma$  les deux permutations de  $\mathbb{S}_n$ ,  $n = k + \ell$ , telles que  $\pi = \rho \oplus \phi$  et  $\sigma = \psi \oplus \theta$ . Alors,  $d_{KT}(\pi, \sigma) = d_{KT}(\rho, \psi) + d_{KT}(\phi, \theta)$ .

**DÉMONSTRATION.** Par définition,  $d_{KT}(\pi, \sigma) = \#\{(i, j) \mid i < j \text{ et } [(\pi_i < \pi_j \text{ et } \sigma_i > \sigma_j) \text{ ou } (\pi_i > \pi_j \text{ et } \sigma_i < \sigma_j)]\}$ , où  $\pi_i$  dénote la position de  $i$  dans la permutation  $\pi$ . Cette distance peut être partitionnée en trois :

$$\begin{aligned} & \#\{(i, j) \mid i < j \leq k \text{ and } [(\pi_i < \pi_j \text{ and } \sigma_i > \sigma_j) \text{ or } (\pi_i > \pi_j \text{ and } \sigma_i < \sigma_j)]\} + \\ & \quad + \\ & \#\{(i, j) \mid i \leq k < j \text{ and } [(\pi_i < \pi_j \text{ and } \sigma_i > \sigma_j) \text{ or } (\pi_i > \pi_j \text{ and } \sigma_i < \sigma_j)]\} + \\ & \quad + \\ & \#\{(i, j) \mid k < i < j \text{ and } [(\pi_i < \pi_j \text{ and } \sigma_i > \sigma_j) \text{ or } (\pi_i > \pi_j \text{ and } \sigma_i < \sigma_j)]\} \end{aligned}$$

Comme  $\pi$  et  $\sigma$  sont  $k$ -décomposables, seules les paires d'éléments  $(i, j)$  respectant  $i < j \leq k$  ou  $k < i < j$  contribueront à la distance, donc la deuxième ligne de l'équation vaut zéro. Comme on a aussi que  $\forall k < i < j, \pi_i - \pi_j = \phi_{i-k} - \phi_{j-k}$  et  $\sigma_i - \sigma_j = \theta_{i-k} - \theta_{j-k}$ , on peut réécrire l'équation de la distance comme suit :

$$\begin{aligned} & \#\{(i, j) \mid i < j \leq k \text{ and } [(\rho_i < \rho_j \text{ and } \psi_i > \psi_j) \text{ or } (\rho_i > \rho_j \text{ and } \psi_i < \psi_j)]\} \\ & \quad + \end{aligned}$$

$$\#\{(i,j) \mid i < j \leq n - k \text{ and } [(\phi_i < \phi_j \text{ and } \theta_i > \theta_j) \text{ or } (\phi_i > \phi_j \text{ and } \theta_i < \theta_j)]\}$$

ce qui vaut exactement  $d_{KT}(\rho, \psi) + d_{KT}(\phi, \theta)$ . □

Maintenant, explorons certaines propriétés reliant la somme directe d'ensembles de permutations et les médianes de ces ensembles.

**Théorème 11.** *Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$ ,  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $\omega \in \mathbb{S}_k$  et  $\alpha \in \mathbb{S}_\ell$ . Alors,*

$$d_{KT}(\omega \oplus \alpha, A \oplus B) = \#B d_{KT}(\omega, A) + \#A d_{KT}(\alpha, B).$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} d_{KT}(\omega \oplus \alpha, A \oplus B) &= \sum_{\phi \in A \oplus B} d_{KT}(\omega \oplus \alpha, \phi) \\ &= \sum_{\pi \oplus \sigma \in A \oplus B} d_{KT}(\omega \oplus \alpha, \pi \oplus \sigma) \\ &= \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\omega \oplus \alpha, \pi \oplus \sigma) \\ &\stackrel{lem3}{=} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\omega, \pi) + \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\alpha, \sigma) \\ &= \#B \sum_{\pi \in A} d_{KT}(\omega, \pi) + \#A \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\alpha, \sigma) \\ &= \#B d_{KT}(\omega, A) + \#A d_{KT}(\alpha, B). \end{aligned}$$

□

**Théorème 12.** *Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $k + \ell = n$ , deux ensembles de permutations. Alors,  $\mathcal{M}(A \oplus B) = \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B)$ .*

DÉMONSTRATION. On doit prouver que  $\forall \rho \in \mathbb{S}_n, \rho \in \mathcal{M}(A \oplus B) \iff \rho \in \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B)$ .

Cas 1 : si  $\rho$  n'est pas  $k$ -décomposable, d'une part, par définition de la somme directe,  $\rho \notin \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B)$ . D'autre part, comme les éléments de  $[1..k]$  ne précèdent pas tous les autres dans  $\rho$ , il existe un élément de  $[k + 1..\ell]$  suivi immédiatement par un élément de  $[1..k]$  dans  $\rho$ . Permuter ces deux éléments ferait diminuer  $d_{KT}(\rho, A \oplus B)$ , donc  $\rho$  n'est pas une médiane de  $A \oplus B$ . Ce cas ne contredit donc pas la double implication.

Cas 2 : si  $\rho$  est  $k$ -décomposable, alors elle peut-être écrite sous la forme  $\rho = \omega \oplus \alpha$  de sorte que  $\omega \in \mathbb{S}_k$  et  $\alpha \in \mathbb{S}_\ell$ . En utilisant le théorème 11, on obtient que  $d_{KT}(\rho, A \oplus B) = \#B d_{KT}(\omega, A) + \#A d_{KT}(\alpha, B)$ .

Cette distance doit être minimale pour que  $\rho \in \mathcal{M}(A \oplus B)$ . Pour minimiser, on doit trouver  $\omega$  et  $\alpha$  qui sont à distances minimales de  $A$  et  $B$  respectivement. Ainsi,  $\omega \in \mathcal{M}(A)$  et  $\alpha \in \mathcal{M}(B) \iff \rho \in \mathcal{M}(A \oplus B)$ . On a aussi par définition de la somme directe que

$\rho \in \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B) \iff \omega \in \mathcal{M}(A) \text{ et } \alpha \in \mathcal{M}(B)$ . En combinant ces deux équations, on obtient finalement  $\rho \in \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B) \iff \rho \in \mathcal{M}(A \oplus B)$ .  $\square$

On peut utiliser le théorème 12 et le prochain lemme pour obtenir de nouveaux ensembles automédiens en effectuant la somme directe de plus petits ensembles automédiens. Cela implique que l'ensemble des ensembles automédiens est fermé sous l'opération de somme directe.

**Lemme 4.** *Soient  $A, C \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B, D \subseteq \mathbb{S}_\ell$ , quatre ensembles de permutations. Si  $A \oplus B = C \oplus D$ , alors  $A = C$  et  $B = D$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\phi \in A \oplus B$ . Alors  $\exists \pi \in A, \sigma \in B$ , tel que  $\phi = \pi \oplus \sigma$ . Si  $A \oplus B = C \oplus D$ , alors  $\phi \in C \oplus D$ . Ainsi,  $\exists \rho \in C, \theta \in D$  tels que  $\phi = \rho \oplus \theta$ . Toutefois, puisque  $A, C \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B, D \subseteq \mathbb{S}_\ell$ , on a nécessairement que  $\rho = \pi$  et  $\sigma = \theta$ . En appliquant cela à tout  $\phi \in A \oplus B$ , on trouve que  $A = C$  et  $B = D$ .  $\square$

**Corollaire 4.** *Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ , deux ensembles de permutations. Alors  $A = \mathcal{M}(A)$  et  $B = \mathcal{M}(B) \iff A \oplus B = \mathcal{M}(A \oplus B)$*

DÉMONSTRATION. On a  $\mathcal{M}(A \oplus B) = A \oplus B \xrightarrow{\text{Theo 12}} \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B) = A \oplus B \xrightarrow{\text{lemme 4}} A = \mathcal{M}(A)$  et  $B = \mathcal{M}(B)$ .  $\square$

Maintenant, tout est en place pour démontrer que n'importe quel ensemble automédian décomposable s'obtient par la somme directe d'ensembles automédiens contenant des permutations de plus petite taille.

**Théorème 13.** *Soit  $C \subset \mathbb{S}_n$  un ensemble automédian  $k$ -décomposable. Alors il existe des ensembles automédiens  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $k + \ell = n$ , tels que  $A \oplus B = C$ .*

DÉMONSTRATION. D'abord, créons les multiensembles  $X$  et  $Y$  en suivant les étapes suivantes :

1. Créer deux multiensembles vides  $X$  et  $Y$ .
2. Pour chaque  $\pi \in C$  :
  - (a) Trouver les permutations  $\sigma$  et  $\phi$  telles que  $\pi = \sigma \oplus \phi$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_k$ . Ces permutations existent certainement puisque  $C$  est  $k$ -décomposable.
  - (b) Ajouter  $\sigma$  à  $X$  et  $\phi$  à  $Y$ .

Nous allons d'abord prouver que  $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y)$ . Pour y parvenir, il faut montrer que  $\forall \pi \in \mathbb{S}_n, \pi \in \mathcal{M}(C) \iff \pi \in \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y)$

D'une part, si  $\pi$  n'est pas  $k$ -décomposable, elle ne peut pas être dans  $C$  ou dans  $\mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y)$  étant donné que ces deux ensembles sont  $k$ -décomposables. Ce cas respecte donc l'expression  $\pi \in \mathcal{M}(C) \iff \pi \in \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y)$

D'autre part, si  $\pi$  est  $k$ -décomposable, alors elle peut être écrite sous forme  $\pi = \sigma \oplus \phi$ , telle que  $\sigma \in \mathbb{S}_k$ . En utilisant le lemme 3, on obtient  $d_{\text{KT}}(\pi, C) = d_{\text{KT}}(\sigma, X) + d_{\text{KT}}(\phi, Y)$ . Ainsi,  $\pi \in \mathcal{M}(C)$  si et seulement si  $\sigma$  et  $\phi$  minimisent  $d_{\text{KT}}(\sigma, X) + d_{\text{KT}}(\phi, Y)$ . On a donc :

$$\pi \in \mathcal{M}(C) \iff \sigma \in \mathcal{M}(X) \wedge \phi \in \mathcal{M}(Y).$$

Ce qui est équivalent, par la définition de la somme directe, à :

$$\pi \in \mathcal{M}(C) \iff \sigma \oplus \phi \in \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y).$$

On a donc bel et bien  $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y)$ . Comme  $C$  est automédian, on a  $C = \mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(X) \oplus \mathcal{M}(Y) = A \oplus B$ .

Nous avons donc prouvé que  $C$  peut être écrit sous la forme  $A \oplus B$ , où  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ . Il reste à prouver que  $A$  et  $B$  sont automédiens. Ceci s'obtient comme suit :  $C = \mathcal{M}(C) \iff A \oplus B = \mathcal{M}(A \oplus B) \xrightarrow{\text{Theo } 12} A \oplus B = \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{M}(B) \xrightarrow{\text{Lem } 4} A = \mathcal{M}(A) \wedge B = \mathcal{M}(B)$ . □

**Corollaire 5.** *Soit  $C \subset \mathbb{S}_n$ , un ensemble automédian  $k$ -séparable. Alors, il existe des ensembles automédiens  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $k + \ell = n$  tels que  $\pi(A \oplus B) = C$ .*

DÉMONSTRATION. Cela découle facilement de la définition 20 et du théorème 13. □

**Lemme 5.** *Soit  $C \subset \mathbb{S}_n$ , un ensemble automédian  $k_1; k_2; \dots; k_m$ -décomposable. Alors il existe des ensembles automédiens  $A_1 \subseteq \mathbb{S}_{k_1}$ ,  $A_2 \subseteq \mathbb{S}_{k_2 - k_1}$ ,  $\dots$ ,  $A_m \subseteq \mathbb{S}_{k_m - k_{m-1}}$ ,  $A_{m+1} \subseteq \mathbb{S}_{n - k_m}$ , tels que  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m \oplus A_{m+1} = C$ .*

DÉMONSTRATION. Nous allons faire une preuve par induction sur  $m$ .

**Cas de base  $m = 1$  :** Ce cas est prouvé par le théorème 13.

**Hypothèse d'induction :** Supposons que le lemme est vrai pour n'importe quel ensemble automédian  $C \subset \mathbb{S}_n$ ,  $k_1; k_2; \dots; k_m$ -décomposable.

Nous avons maintenant simplement besoin de démontrer que le lemme reste vrai pour  $m + 1$ . De ce fait, soit  $C \subset \mathbb{S}_n$  un ensemble automédian  $k_1; k_2; \dots; k_m; k_{m+1}$ -décomposable. Étant donné que  $C$  est  $k_{m+1}$ -décomposable, le théorème 13 nous indique que  $C$  peut être écrit sous la forme  $C = A \oplus B$ , où  $A$  et  $B$  sont des ensembles automédiens dans  $\mathbb{S}_{k_{m+1}}$  et  $\mathbb{S}_{n - k_{m+1}}$  respectivement. Maintenant, comme  $C$  est  $k_1; k_2; \dots; k_m$ -décomposable et  $C = A \oplus B$  avec  $A \subseteq \mathbb{S}_{k_{m+1}}$ ,  $A$  est aussi  $k_1; k_2; \dots; k_m$ -décomposable. Par hypothèse d'induction,  $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m \oplus A_{m+1}$ , avec  $A_1 \subseteq \mathbb{S}_{k_1}$ ,  $A_2 \subseteq \mathbb{S}_{k_2 - k_1}$ ,  $\dots$ ,  $A_m \subseteq \mathbb{S}_{k_m - k_{m-1}}$ ,  $A_{m+1} \subseteq \mathbb{S}_{k_{m+1} - k_m}$ . En renommant  $B = A_{m+2}$  la preuve est terminée. □

**Corollaire 6.** *Soit  $C \subset \mathbb{S}_n$  un ensemble automédian  $k_1; k_2; \dots; k_m$ -séparable, alors il existe des ensembles automédiens  $A_1 \subseteq \mathbb{S}_{k_1}$ ,  $A_2 \subseteq \mathbb{S}_{k_2 - k_1}$ ,  $\dots$ ,  $A_m \subseteq \mathbb{S}_{k_m - k_{m-1}}$ ,  $A_{m+1} \subseteq \mathbb{S}_{n - k_m}$  tels que  $\pi(A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m \oplus A_{m+1}) = C$ .*

DÉMONSTRATION. Cela découle aisément de la définition 20 et du lemme 5. □

Le corollaire précédent montre que tout ensemble automédian séparable peut être obtenu en faisant la somme directe d'ensembles automédiens inséparables plus petits. La recherche d'ensembles automédiens peut donc être réduite à la recherche d'ensembles automédiens inséparables.

### 3.4. COMPTER LES ENSEMBLES AUTOMEDIANS

Dans cette section, on construit une formule qui calcule le nombre d'ensembles automédiens de permutations d'une certaine taille en fonction du nombre d'ensembles automédiens inséparables de permutations de taille identique ou inférieure.

Soit  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble de tous les ensembles automédiens de permutations de taille  $n$ , i.e.  $\mathcal{F}_n = \{A = \mathcal{M}(A) \mid A \subseteq \mathbb{S}_n\}$  et soit  $\mathcal{I}_n$  l'ensemble contenant tous ceux qui sont inséparables, i.e.,  $\mathcal{I}_n = \{A = \mathcal{M}(A) \mid A \subseteq \mathbb{S}_n \text{ et } A \text{ inséparable}\}$ .

**Théorème 14.**

$$\#\mathcal{F}_n = \#\mathcal{I}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \times \#\mathcal{I}_i \times \#\mathcal{F}_{n-i} \quad (3.4.1)$$

DÉMONSTRATION. Pour former un ensemble automédian  $A$  séparable, on choisit d'abord le plus petit  $i$  pour lequel  $A$  est  $i$ -séparable. Ainsi,  $A$  est formé par la somme directe d'un ensemble automédian inséparable de  $\mathbb{S}_i$  et d'un ensemble automédian de  $\mathbb{S}_{n-i}$ , suivi d'une composition à gauche. Il y a  $\#\mathcal{I}_i$  possibilités pour le premier et  $\#\mathcal{F}_{n-i}$  possibilités pour le deuxième. Ensuite, par une composition à gauche, on décide quels éléments seront les  $i$  premiers des permutations de  $A$ , ce qui multiplie par  $\binom{n}{i}$  le nombre de possibilités. □

### 3.5. RETOUR SUR LE CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons démontré que tout ensemble automédian peut être obtenu par la somme directe d'ensembles automédiens inséparables. Il suffit donc de caractériser complètement les ensembles automédiens inséparables pour caractériser tous les ensembles automédiens.

Toutefois, explorer les ensembles automédiens inséparables est complexe. Bien que le prochain chapitre ne traite pas spécifiquement des ensembles automédiens, il contient des notions essentielles à la poursuite de la recherche sur les ensembles automédiens inséparables. Ceux-ci seront donc seulement abordés à la section 5.2.



# Chapitre 4

---

## ENSEMBLES DE PERMUTATIONS MULTICIRCULAIRES

Dans ce chapitre, on introduit une classe spécifique d'ensembles de permutations que nous avons nommée les ensembles multicirculaires. Le calcul de la médiane d'un ensemble multicirculaire sera étudié et une proposition d'application en sera donnée.

Avant d'aborder les ensembles de permutations multicirculaires, nous allons d'abord parler d'ensembles de permutations équilibrés.

**Note:** Dans ce chapitre et le chapitre 5, nous travaillons uniquement avec des ensembles de permutations et ne traitons donc pas des multiensembles de permutations, à l'instar du chapitre précédent. Pour ce chapitre et le prochain, toutefois, ce choix a été fait uniquement pour ne pas alourdir la notation. En fait, tous les résultats trouvés dans ces deux chapitres peuvent facilement être généralisés à des multiensembles de permutations.

### 4.1. ENSEMBLES ÉQUILIBRÉS

Certains ensembles de permutations sont tels que leurs éléments sont placés de manière à former, de manière intuitive, une sorte d'équilibre à l'intérieur de l'ensemble. Ici, on définira trois classes d'ensembles de permutations : les ensembles de permutations équilibrés, les ensembles de permutations symétriquement équilibrés et les ensembles de permutations uniformément équilibrés.

**Définition 24.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ . L'ensemble  $A$  sera dit **équilibré** si tous les éléments de ses permutations ont la même moyenne de position. Plus formellement,  $A$  est équilibré si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ ,

$$\sum_{\sigma \in A} \sigma_i^{-1} = \frac{n+1}{2} \times \#A$$

**Exemple 17.** L'ensemble de permutations  $A = \{12354, 35412, 42513\}$  est équilibré. En effet,

$$\sum_{\sigma \in A} \sigma_1^{-1} = 1 + 4 + 4 = 9,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in A} \sigma_2^{-1} &= 2 + 5 + 2 = 9, \\
\sum_{\sigma \in A} \sigma_3^{-1} &= 3 + 1 + 5 = 9, \\
\sum_{\sigma \in A} \sigma_4^{-1} &= 5 + 3 + 1 = 9, \\
\sum_{\sigma \in A} \sigma_5^{-1} &= 4 + 2 + 3 = 9.
\end{aligned}$$

**Théorème 15.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ , un ensemble de permutations équilibré. Alors  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , les deux égalités suivantes sont vraies

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} R(A)_{ij} &= \sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} L(A)_{ij}, \\
\sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} \Delta(A)_{ij} &= 0.
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.  $A$  est équilibré, donc, en moyenne,  $i$  se situe au centre des permutations. Il y a donc, au total, autant d'éléments à gauche des éléments  $i$  dans les permutations de  $A$  qu'il y a d'éléments à droite des éléments  $i$  dans les permutations de  $A$ , ce qui prouve les deux égalités.  $\square$

**Définition 25.** Soit  $A \in \mathbb{S}_n$ . On dira que  $A$  est **symétriquement équilibré** lorsque pour chaque élément  $i \in [1..n]$  et pour chaque position  $j \in [1..n]$ , on a :

$$\#\{\pi \in A \mid \pi_i^{-1} = j\} = \#\{\pi \in A \mid \pi_i^{-1} = n + 1 - j\}$$

De manière informelle, dans un ensemble de permutations  $A$  symétriquement équilibré, pour chaque permutation de  $A$  où  $i$  est le  $j$ -ème élément à partir de la gauche, il y a une permutation de  $A$  où  $i$  est le  $j$ -ème élément à partir de droite.

**Exemple 18.** Soit  $A = \{123456, 154326, 635241, 642531\}$ . Alors,  $A$  est symétriquement équilibré. En effet, l'élément 1 est autant de fois en position 1 qu'en position 6 et  $6 + 1 = 7$ . L'élément 2 apparaît aux positions 2, 3, 4, 5 et on a  $2 + 5 = 3 + 4 = 7$ . Le même raisonnement s'applique aux autres éléments.

**Théorème 16.** Tout ensemble symétriquement équilibré est équilibré.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in A} \sigma_i^{-1} &\stackrel{(1)}{=} \sum_{j \in [1..n]} j * \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i^{-1} = j\} \\
&\stackrel{(2)}{=} \sum_{j \in [1..n]} j * \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i^{-1} = n + 1 - j\} \\
&\stackrel{(3)}{=} \sum_{k \in [1..n]} (n + 1 - k) * \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i^{-1} = k\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in [1..n]} (n+1) * \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i^{-1} = k\} - \sum_{k \in [1..n]} k * \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i^{-1} = k\} \\
&= (n+1) * \#A - \sum_{\sigma \in A} \sigma_i^{-1}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
2 * \sum_{\sigma \in A} \sigma_i^{-1} &= (n+1) * \#A \\
\sum_{\sigma \in A} \sigma_i^{-1} &= \frac{n+1}{2} * \#A
\end{aligned}$$

Le passage (1) est une réorganisation de la sommation. Le passage (2) est possible car  $A$  est symétriquement équilibré. Le passage (3) est possible par changement de variable :  $k = n + 1 - j$ .

□

**Définition 26.** Un ensemble de permutations  $A \subseteq \mathbb{S}_n$  sera dit **uniformément équilibré** si  $\#\{\sigma \in A \mid \sigma_i = j\} = \frac{\#A}{n}, \forall 1 \leq i, j \leq n$ .

De manière informelle, un ensemble de permutations est uniformément équilibré si tous ses éléments apparaissent autant de fois à chaque position dans ses permutations.

**Exemple 19.** Soit  $A = \{1234, 2143, 3412, 4321\}$ . Alors,  $A$  est uniformément équilibré, puisque tous les éléments apparaissent une fois à chaque position  $i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

**Théorème 17.** Tout ensemble de permutations uniformément équilibré est symétriquement équilibré.

DÉMONSTRATION. Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ . Si  $A$  est uniformément équilibré, alors,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ , on a  $\#\{\sigma \in A \mid \sigma_i = j\} = \frac{\#A}{n} = \#\{\sigma \in A \mid \sigma_i = n + 1 - j\}$ . □

## 4.2. DÉFINITIONS ET NOTIONS DE BASES DES ENSEMBLES MULTICIRCU-LAIRES

**Définition 27.** Soit  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . On notera  $\text{circ}(\pi)$  la **famille circulaire** de  $\pi$ , définie comme suit :  $\text{circ}(\pi) = \{\sigma \in \mathbb{S}_n \mid (\pi_i - \sigma_i) \bmod n \text{ ne varie pas en fonction de } i\}$ .

**Exemple 20.** Soit  $\pi = 14253$ . Alors  $\text{circ}(\pi) = \{14253, 42531, 25314, 53142, 31425\}$ .

**Définition 28.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ . L'ensemble  $A$  sera dit **multicirculaire** s'il est formé par l'union de familles circulaires.

**Exemple 21.** L'ensemble  $\{1324, 1432, 2143, 2413, 3214, 3241, 4132, 4321\}$  est multicirculaire car il est égal à  $\text{circ}(4321) \cup \text{circ}(1324)$ .

**Note:** Les différentes familles circulaires sont disjointes, donc le nombre de permutations dans un ensemble multicirculaire est toujours un multiple de  $n$ , la taille des permutations.

**Définition 29.** Définissons  $c(\pi)$  comme étant la permutation  $\pi$  dans laquelle le premier élément est retiré et replacé en dernière position. Autrement dit,  $c(\pi) = \pi_2\pi_3 \dots \pi_1$ . Un tel mouvement sera appelé mouvement circulaire .

De cette manière,  $circ(\pi)$  peut être vu comme l'ensemble des permutations qu'on peut obtenir en faisant de 0 à  $n - 1$  mouvements circulaires sur  $\pi$ .

**Théorème 18.** Tout ensemble de permutations multicirculaire est uniformément équilibré.

DÉMONSTRATION. Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$  un ensemble de permutations multicirculaires formé de l'union de  $q$  familles circulaires. Pour chaque famille circulaire  $circ(\pi) \in A$ , chaque élément est présent à chaque position exactement une fois, donc  $\forall(i,j) \in [1..n]^2, \#\{\sigma \in circ(\pi) | \sigma_i = j\} = 1$ . On a donc  $\forall(i,j) \in [1..n]^2, \#\{\sigma \in A | \sigma_i = j\} = q = \frac{\#A}{n}$ , ce qui respecte la définition 26.  $\square$

Maintenant, étudions les matrices gauche, droite et de majorité d'une famille circulaire.

**Théorème 19.** Soient  $L,R$  les matrices gauche et droite de  $circ(I_n)$ . Alors,  $L_{ij} = (i-j) \bmod n$  et  $R_{ij} = (j-i) \bmod n$ .

DÉMONSTRATION. Pour  $i < j$ , le nombre de permutations dans lesquelles  $j \prec i$  correspond à  $j - i$ , donc  $R_{ij} = j - i$ . Pour  $i > j$ , on a  $R_{ij} = n - R_{ji} = n - (i - j) = n + j - i$ . On a donc bien pour  $i < j$  ou  $i > j$  que  $R_{ij} = (j - i) \bmod n$ . Pour  $L_{ij}$  on a  $L_{ij} = n - (j - i) \bmod n = (n - j + i) \bmod n = (i - j) \bmod n$ .  $\square$

**Corollaire 7.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $L,R$  les matrices gauche et droite de  $circ(\pi)$ . Alors,  $L_{ij} = (\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) \bmod n$  et  $R_{ij} = (\pi_j^{-1} - \pi_i^{-1}) \bmod n$ .

DÉMONSTRATION. Ce corollaire s'obtient du théorème 19 par isomorphisme de groupe.  $\square$

**Théorème 20.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$  et  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . Si  $A$  est équilibré, alors  $d_{KT}(\sigma,A)$  est identique  $\forall \sigma \in circ(\pi)$ .

DÉMONSTRATION. La preuve repose sur le fait qu'appliquer un mouvement circulaire à  $\pi$  ne change pas la distance. En effet, soit  $i$  le premier élément de  $\pi$ . Dans cette position, les paires d'éléments impliquant  $i$  ont une contribution  $\sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} R(A)_{ij}$  à la distance. Si on repositionne  $i$  à la fin de  $\pi$ , ces mêmes paires d'éléments auront en revanche une contribution de  $\sum_{j \in [1..n] \setminus \{i\}} L(A)_{ij}$  à la distance. Or, par le théorème 15, ces deux valeurs sont égales. On peut donc appliquer plusieurs mouvements circulaires à  $\pi$  sans changer sa distance à  $A$ . Ainsi toutes les permutations d'une même famille circulaire sont à une distance identique de  $A$ .  $\square$

**Corollaire 8.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ . Si  $A$  est équilibré, alors  $\mathcal{M}(A)$  est multicirculaire.

DÉMONSTRATION. Ceci découle facilement du théorème précédent.  $\square$

Puisque les médianes d'un ensemble équilibré  $A$  forment un ensemble multicirculaire, on peut procéder comme suit pour trouver toutes ses médianes : trouver une médiane de chaque famille circulaire de  $\mathcal{M}(A)$ , puis générer la famille circulaire de chaque médiane trouvée. Il

est par exemple possible de trouver toutes les médianes de  $A$  qui ont l'élément  $i$  à la position  $j$ , puis  $\mathcal{M}(A)$ . Le théorème ci-dessous résume cette procédure.

**Théorème 21.** *Soient  $A \subset \mathbb{S}_n$ , un ensemble équilibré et  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . Soient  $i, j \in [1..n]$ . Soit  $B = \{\pi \in \mathcal{M}(A) \mid \pi_i = j\}$ . Alors,*

$$\mathcal{M}(A) = \bigcup_{\pi \in B} \text{circ}(\pi).$$

DÉMONSTRATION. Le paragraphe précédant le théorème en est une preuve. □

**Exemple 22.** *Soit  $A = \{12354, 35412, 42513\}$ , un ensemble de permutations équilibré pour lequel on veut trouver les médianes. Par le théorème 21, on peut le faire simplement en trouvant toutes les médianes qui ont 1 comme premier élément, puis en générant la(les) famille(s) circulaire(s) de celle(s)-ci. Posons donc 1 comme premier élément à gauche d'une médiane recherchée. Les autres éléments 2, 3, 4 et 5 doivent être ordonnés de manière à minimiser la distance par rapport à  $A$ . Après calculs, on trouve que seul l'ordre 2354 a un nombre minimal de paires d'éléments en sens contraire des mêmes paires d'éléments dans les permutations de  $A$ . Ainsi  $\mathcal{M}(A) = \text{circ}(12354)$ .*

### 4.3. TROUVER LES MÉDIANES D'UN ENSEMBLE MULTICIRCULAIRE

Dans cette section, on étudie le problème consistant à trouver les médianes d'un ensemble multicirculaire. Cet ensemble étant l'union d'un certain nombre  $q$  de familles circulaires, on étudiera trois cas :  $q = 1$ ,  $q = 2$  et  $q > 2$ .

#### 4.3.1. Médianes d'une famille circulaire

Ce cas a été étudié dans [26]. Les auteurs ont montré que l'ensemble des médianes d'une famille circulaire est en fait la famille circulaire elle-même. Une famille circulaire est donc un ensemble automédian inséparable (Voir section 5.2). Nous allons toutefois présenter une autre démonstration de ce théorème, d'abord parce que l'idée générale derrière cette autre démonstration sera utilisée plus d'une fois dans ce chapitre, ensuite parce que la preuve originale est légèrement incomplète.

**Théorème 22.** *Soit  $\pi \in \mathbb{S}_n$ . Alors  $\mathcal{M}(\text{circ}(\pi)) = \text{circ}(\pi)$ .*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, résolvons uniquement le cas où  $\pi = I_n$ , la permutation identité. Il n'y a pas de perte de généralité puisque n'importe quelle famille circulaire est isomorphe à  $\text{circ}(I_n)$ . Posons  $A = \text{circ}(\pi)$ . Puisque  $A$  est équilibré, on peut utiliser le théorème 21. Ici, on fixera le dernier élément : on trouvera toute médiane  $\sigma$  telle que  $\sigma_n = n$ . Étonnamment, à partir du moment où on a fixé le dernier élément, l'application des contraintes MOT (voir section 2.4.5) permet de décider complètement  $\sigma$ .

Puisque  $i$  précède  $i + 1$  dans toutes les permutations de  $A$  sauf une,  $\Delta_{i,i+1} = (n - 1) - 1 = n - 2$ . D'autre part, posons  $X = [1..n] \setminus \{i, i + 1, n\}$ , l'ensemble des éléments pouvant peut-être se retrouver après  $i + 1$  et avant  $i$  dans  $\sigma$  (cet ensemble ne contient pas  $n$  car  $n$  a déjà été placé à la fin de  $\sigma$ ). Une seule permutation de  $A$  possède des éléments entre  $i + 1$  et  $i$ , donc  $\sum_{k \in X} (L_{ki} - L_{kj}) = \sum_{k \in X} 1 = n - 3 < \Delta_{i,i+1}$ . Le théorème 9 nous donne donc que  $i$  précède  $i + 1$  dans  $\sigma$ .

On a donc  $1 \prec_{\sigma} 2 \prec_{\sigma} 3 \dots n - 1 \prec_{\sigma} n$ . Ainsi,  $I_n$  est la seule médiane de  $\text{circ}(I_n)$  ayant  $n$  comme dernier élément, donc  $\mathcal{M}(\text{circ}(I_n)) = \text{circ}(I_n)$ .

Pour le cas plus général où  $\pi \in \mathbb{S}_n$ , on peut utiliser les actions de groupes et morphismes décrits précédemment dans 3.2. En effet, on a :  $\mathcal{M}(\text{circ}(\pi)) = \mathcal{M}(\text{circ}(\pi \circ I_n)) = \mathcal{M}(\pi \circ \text{circ}(I_n)) = \pi \circ \mathcal{M}(\text{circ}(I_n)) = \pi \circ \text{circ}(I_n) = \text{circ}(\pi \circ I_n) = \text{circ}(\pi)$ .

□

#### 4.3.2. Médiannes de l'union de deux familles circulaires

En ce qui concerne les médianes d'ensembles formés de l'union de deux familles circulaires, nous sommes certains de la conjecture suivante, que nous n'avons toutefois pas réussi à prouver formellement.

**Conjecture 2.** *Soit  $A = \text{circ}(\pi) \cup \text{circ}(\sigma)$ , où  $\pi \in \mathbb{S}_n$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ , tels que  $\text{circ}(\pi) \neq \text{circ}(\sigma)$ . Alors,  $A \subset \mathcal{M}(A)$ .*

*De plus  $\mathcal{M}(A) \neq A$  si et seulement s'il existe, dans  $A$ , deux permutations de forme concaténées respectives  $PQR$  et  $WRQ$  telles que  $P \neq W$ . Dans ce cas,  $\text{circ}(PRQ)$  et  $\text{circ}(WQR)$  contiendront aussi des médianes de  $A$ .*

*En fait, il est certain que l'algorithme qui suit permet de trouver toutes les médianes de  $A$  :*

1. *On initialise :  $\mathcal{M}(A) := A$   
ajoutRecent := vrai*
2. *Tant que ajoutRecent = vrai*
  - (a) *ajoutRecent := faux*
  - (b) *(\*) On cherche, dans  $\mathcal{M}(A)$ , toutes paires de permutations d'écriture concaténées respectives  $PQR$  et  $WRQ$ . Alors,  $\text{circ}(PRQ)$  et  $\text{circ}(WQR)$  sont aussi des ensembles de médianes, qu'on ajoute à  $\mathcal{M}(A)$ , si pas déjà présentes. En cas de nouvel ajout, ajoutRecent := vrai.*

*retourner  $\mathcal{M}(A)$*

*et cet algorithme peut terminer en temps  $O(f(n) \times \#\mathcal{M}(A))$  où  $f$  est une fonction polynomiale, si la recherche à l'étape (\*) est bien optimisée.*

Nous n'avons pas été capables de prouver la conjecture. Des tests aléatoires n'ont montré aucun contre-exemple à cette conjecture. Il n'est pas difficile de démontrer, dans l'algorithme décrit ci-dessus, que si les permutations  $PQR$  et  $WRQ$  sont à une même distance de  $A$ , alors  $PRQ$  et  $WQR$  sont aussi à cette même distance de  $A$ . Par contre, pour prouver que ce sont toutes des médianes, il faut d'abord au moins montrer que l'une d'entre elles en est une, ce que nous n'avons pas réussi à faire. **Note:** Ne pas essayer une preuve par contradiction avec mouvement d'insertion. En effet, dans ce mémoire, beaucoup de preuves qu'une permutation n'est pas une médiane reposent sur le fait qu'un mouvement d'insertion peut faire baisser la distance. Cependant, ça ne s'applique pas ici. En effet, dans le cas où  $A$  est l'union de deux familles circulaires, l'algorithme LocalSerach ( voir 2.5.3), à partir d'une permutation quelconque de  $\mathbb{S}_n$ , peut tomber dans un minimum local qui n'est pas un minimum global et n'est donc pas une médiane.

### 4.3.3. Médianes de l'union de plus de deux familles circulaires

Trouver les médianes d'un ensemble formé par l'union d'au moins trois familles circulaires est plus compliqué. En fait, une réduction donne une borne inférieure sur la difficulté du problème. Cependant, nous avons d'abord besoin du théorème qui suit.

**Théorème 23.** Soient  $A \subset \mathbb{S}_n$ , où  $m_A \geq 2$  et  $n \geq 5$ . Soit  $k \geq \frac{m_A * n(n-1)(n-2)}{6}$ . Alors,

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{\pi \in A} \text{circ}(\pi \oplus I_k)\right) \subset \bigcup_{\phi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\phi \oplus I_k).$$

DÉMONSTRATION. Posons  $B = \bigcup_{\pi \in A} \text{circ}(\pi \oplus I_k)$ . On doit prouver que  $\mathcal{M}(B) \subset \bigcup_{\phi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\phi \oplus I_k)$ . Il est important de noter que, dans cette preuve,  $m$  et  $n$  représentent respectivement  $m_A$  et  $n_A$  et non  $m_B$  et  $n_B$ , pour éviter toute ambiguïté.

Nous allons séparer les éléments de  $[1..n+k]$  en deux ensembles :  $[1..n]$  et  $[n+1..n+k]$ . De manière intuitive, les éléments de  $[1..n]$  sont ceux qui proviennent de  $A$  tandis que ceux de  $[n+1..n+k]$  proviennent de  $I_k$ . On appellera donc "éléments originaux" ceux du premier ensemble et "éléments supplémentaires" ceux du second.

Puisque  $B$  est équilibré, on peut utiliser le théorème 21. Ici, on fixera le dernier élément : on analysera une permutation quelconque  $\sigma$  médiane de  $B$  telle que  $\sigma_{n+k} = n+k$  et on montrera qu'une telle permutation  $\sigma$  est nécessairement de forme  $\phi \oplus I_k$ , où  $\phi \in \mathcal{M}(A)$ . Cela impliquerait donc que toute médiane de  $B$  est une permutation de l'ensemble  $\bigcup_{\phi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\phi \oplus I_k)$ , ce qu'on veut démontrer.

**Première étape : ordonner les éléments supplémentaires entre eux dans  $\sigma$ .**

Comme dans la preuve du théorème 22, l'utilisation du théorème 9 permet d'ordonner complètement ces éléments dans  $\sigma$ . Pour n'importe quel  $i \in [n+1..n+k-2]$ , on pose  $X = [1..n+k-1] \setminus \{i, i+1\}$ . Seules  $m$  permutations de  $B$  ont  $i$  après  $i+1$  : ce sont celles qui ont  $i+1$  comme premier élément et  $i$  comme

dernier élément. Dans les autres permutations de  $B$ ,  $i + 1$  suit immédiatement  $i$ . Ainsi,  $\Delta_{i,i+1} = L_{i,i+1} - R_{i,i+1} = m(n + k) - m - m = m(n + k - 2)$  et  $\sum_{k \in X} L_{ki} - L_{k,i+1} = \sum_{k \in X} m = m(n + k - 3) < \Delta_{i,i+1}$ . Le théorème 9 nous donne donc que  $i \prec_{\sigma} i + 1$ . En regroupant ce résultat pour tout  $i \in [n + 1..n + k - 2]$ , on obtient  $n + 1 \prec_{\sigma} n + 2 \prec_{\sigma} n + 3 \dots n + k - 1 \prec_{\sigma} n + k - 1$ .

**Deuxième étape : prouver que tous les éléments originaux précèdent les éléments supplémentaires dans  $\sigma$ .**

Supposons que c'est faux. Posons  $u = \lfloor \frac{n+1+n+k}{2} \rfloor = n + \lfloor \frac{1+k}{2} \rfloor$ .  $u$  peut être vu comme l'élément du milieu parmi les éléments supplémentaires. Alors, au moins l'un des deux cas suivants se présente :

1. il existe un élément original  $i$  qui se trouve entre les éléments  $n + 1$  et  $u$ .
2. il existe un élément original  $i$  qui se trouve entre les éléments  $u$  et  $n + k$ .

Ces deux cas mènent à une contradiction. L'idée est que dans chacun des cas, il existe un mouvement d'insertion dans  $\sigma$  qui peut faire baisser  $d_{KT}(B, \sigma)$ , donc  $\sigma$  n'est pas une médiane.

1. Affirmation 1 : dans le premier cas, soit  $v$  l'élément original le plus à gauche tel que  $n + 1 \prec v$ . Retirer  $v$  et le réinsérer juste avant  $n + 1$  ferait baisser la distance.
2. Affirmation 2 : dans le deuxième cas soit  $v$  l'élément original le plus à droite. Retirer  $v$  et le réinsérer après  $n + k$  ferait baisser la distance.

La preuve de ces deux affirmations est pénible à rédiger et lire. Nous avons donc laissé leurs démonstrations dans l'annexe A, d'autant plus que leur compréhension n'est pas nécessaire au lecteur pour lire la suite.

La conclusion des deux premières étapes est que  $\sigma_i = i, \forall i \in [n + 1..n + k]$ . Les éléments originaux sont donc les  $n$  premiers dans  $\sigma$ , qui peut maintenant être écrite sous la forme  $\sigma = \phi \oplus I_k$ . Il ne reste plus qu'à ordonner les éléments originaux entre eux, c'est-à-dire décider  $\phi$ .

**Troisième étape : ordonner les éléments originaux entre eux dans  $\sigma$ .**

Cette étape est la plus importante, car nous allons montrer que l'ordre des éléments originaux correspond exactement à une médiane de  $A$ .

Séparons le calcul de  $d_{KT}(\sigma, B)$  en utilisant le corollaire 2 :

$$d_{KT}(\sigma, B) = d_{KT; \text{pairs}(1, n)}(\sigma, B) + d_{KT; \text{pairs}(n+1, n+k)}(\sigma, B) + d_{KT; \text{hp}(n, k)}(\sigma, B).$$

La raison pour laquelle il convient de séparer ces trois termes est que les deux derniers sont invariants par rapport à  $\phi$ . Ceci est dû au fait que les éléments supplémentaires sont déjà tous placés après les éléments originaux. On en conclut donc que trouver  $\phi$  qui minimise  $d_{KT}(\sigma, B)$  est équivalent à trouver  $\phi$  qui minimise  $d_{KT; \text{pairs}(1, n)}(\sigma, B)$ .

On a  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(B,\sigma) = \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\text{circ}(\pi \oplus I_k),\sigma)$ . Maintenant, étudions  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\text{circ}(\pi \oplus I_k),\sigma)$  pour chaque  $\pi \in A$ . Soit  $i$  le dernier élément de  $\pi$ . Chaque permutation  $\psi \in \text{circ}(\pi \oplus I_k)$  telle que  $\psi_i^{-1} > n$  a ses éléments originaux dans le même ordre que dans  $\pi$ . Ces permutations sont au nombre de  $k$ . Les autres permutations, au nombre de  $n$ , toutes réunies, ont les éléments originaux dans le même ordre que les permutations de  $\text{circ}(\pi)$ . La figure 4.1 aide à visualiser ces deux dernières affirmations. Ainsi,  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\text{circ}(\pi \oplus I_k),\sigma) = k * d_{\text{KT}}(\pi,\phi) + d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$ . Donc,

$$\begin{aligned} d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\sigma,B) &= \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\text{circ}(\pi \oplus I_k),\sigma) \\ &= \sum_{\pi \in A} k * d_{\text{KT}}(\pi,\phi) + d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi)) \\ &= k * \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\pi,\phi) + \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi)) \\ &= k * d_{\text{KT}}(\phi,A) + \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi)). \end{aligned}$$

L'intuition de la démonstration qui suit est que si  $k$  est suffisamment grand, l'expression est fortement variable en fonction de  $d_{\text{KT}}(\phi,A)$ , donc minimiser  $d_{\text{KT}}(\phi,A)$  est une condition nécessaire pour minimiser  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\sigma,B)$ .

Notons que  $d_{\text{KT}}(\phi,A)$  est un nombre entier, donc toute variation de  $k * d_{\text{KT}}(\phi,A)$  vaut au moins  $k$ . Ainsi, si  $k$  dépasse l'amplitude de  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$  (l'amplitude d'une expression est la différence entre la plus grande et la plus petites valeurs qu'elle peut prendre), minimiser  $d_{\text{KT}}(\phi,A)$  est nécessaire pour minimiser  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\sigma,B)$ .

Maintenant, calculons l'amplitude de  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$ . Comme démontré par [26],  $d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$  est minimale lorsque  $\phi = \pi$  et vaut, dans ce cas,  $\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$ . Ainsi,  $\phi = \pi^r$  maximiserait cette distance, qui serait alors de  $\frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$ . L'amplitude de  $d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$  est donc  $\frac{n(2n-1)(n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ . L'amplitude de  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi))$  est donc au plus  $\frac{m * n(n-1)(n-2)}{6}$ .

Ainsi, si  $k \geq \frac{mn(n-1)(n-2)}{6}$ , alors  $\sigma = \phi \oplus I_k$ , où  $\phi \in \mathcal{M}(A)$ .

Note importante : minimiser  $d_{\text{KT}}(\phi,A)$  n'est pas une condition **suffisante** pour minimiser  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\sigma,B)$ . En effet, pour deux permutations  $\phi$  et  $\phi'$  telles que  $d_{\text{KT}}(\phi,A) = d_{\text{KT}}(\phi',A)$ , il est probable que  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi,\text{circ}(\pi)) \neq \sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi',\text{circ}(\pi))$ , donc au moins l'une des deux permutations ne minimise pas  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\sigma,B)$ . C'est ce qui explique que l'inclusion n'est pas une égalité dans le théorème.

**Conclusion de la preuve.** Toute médiane  $\sigma$  de  $B$  telle que  $\sigma_{n+k} = n + k$  est de forme  $\phi \oplus I_k$  où  $\phi$  est à distance minimale de  $A$ . Ainsi,  $\mathcal{M}(B) \subset \bigcup_{\phi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\phi \oplus I_k)$ .

**Remarque sur la valeur de k** La valeur de  $k$  utilisée dans ce théorème est très élevée par rapport à  $n$ , afin d'en faciliter la preuve. En effet il aurait été possible, avec plus de travail, de remplacer  $k \geq \frac{m_A * n(n-1)(n-2)}{6}$  par  $k \geq f(n)$  pour une certaine

2	1	3	7	5	6	4	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	7	5	6	4	8	9	10	11	12	13	14	15	2
3	7	5	6	4	8	9	10	11	12	13	14	15	2	1
7	5	6	4	8	9	10	11	12	13	14	15	2	1	3
5	6	4	8	9	10	11	12	13	14	15	2	1	3	7
6	4	8	9	10	11	12	13	14	15	2	1	3	7	5
4	8	9	10	11	12	13	14	15	2	1	3	7	5	6
8	9	10	11	12	13	14	15	2	1	3	7	5	6	4
9	10	11	12	13	14	15	2	1	3	7	5	6	4	8
10	11	12	13	14	15	2	1	3	7	5	6	4	8	9
11	12	13	14	15	2	1	3	7	5	6	4	8	9	10
12	13	14	15	2	1	3	7	5	6	4	8	9	10	11
13	14	15	2	1	3	7	5	6	4	8	9	10	11	12
14	15	2	1	3	7	5	6	4	8	9	10	11	12	13
15	2	1	3	7	5	6	4	8	9	10	11	12	13	14

FIGURE 4.1. Illustration du théorème 23

Ici, les toutes permutations de  $\text{circ}(\sigma \oplus I_k)$ , avec  $\pi = 2137564$ ,  $n = 7$ ,  $k = 8$ . Les éléments originaux sont colorés, ceux des  $n$  premières permutations en rouge, ceux des  $k$  dernières permutations en bleu. En faisant abstraction des éléments supplémentaires, on constate que les éléments rouges forment  $\text{circ}(\pi)$ , tandis que les éléments bleus forment  $k$  fois la permutation  $\pi$ . C'est un exemple que  $\forall \phi \in \mathbb{S}_n$ ,  $d_{\text{KT};\text{pairs}(1,n)}(\text{circ}(\pi \oplus I_k), \phi \oplus I_k) = k * d_{\text{KT}}(\pi, \phi) + d_{\text{KT}}(\phi, \text{circ}(\pi))$ .

fonction  $f(n) \in O(n^2)$ . L'idée repose sur le fait que, dans la preuve précédente, une modification de  $\phi$  qui fait varier très légèrement  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi, \text{circ}(\pi))$  ne peut pas faire varier  $\sum_{\pi \in A} d_{\text{KT}}(\phi, \text{circ}(\pi))$  de toute son amplitude. Nous nous sommes contentés de  $f(n) \in O(n^3)$  parce qu'il en découlait un théorème juste assez fort pour être utilisé pour les résultats qui suivent.

□

Tout est maintenant en place pour le théorème qui suit.

**Théorème 24.** *Le problème consistant à trouver une médiane d'un ensemble de  $m$  permutations de taille  $n$  peut être réduit en temps polynomial au problème consistant à trouver une médiane d'un ensemble multicirculaire, formé de l'union de  $m$  familles circulaires dont les permutations sont de taille  $n + k$ , où  $k = \frac{mn(n-1)(n-2)}{6}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $A \subset \mathbb{S}_n$ , l'ensemble dont on veut trouver une médiane. Soit l'ensemble multicirculaire  $B = \bigcup_{\pi \in A} \text{circ}(\pi \oplus I_k)$ . La preuve repose sur le fait que, parce que  $k$  est suffisamment grand, le théorème 23 nous donne

$$\mathcal{M}(B) \subset \bigcup_{\pi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\pi \oplus I_k)$$

Ainsi, pour trouver une médiane de  $A$ , il suffit de générer  $B$  et de trouver une médiane de  $B$ . Selon l'inclusion ci-dessus, cette médiane est un élément de  $\bigcup_{\pi \in \mathcal{M}(A)} \text{circ}(\pi \oplus I_k)$  et est donc membre d'une famille circulaire de la forme  $\text{circ}(\pi \oplus I_k)$ , où  $\pi$  est une médiane de  $A$ . Dans

cette famille circulaire se trouve entre autre la permutation  $\pi \oplus I_k$ , dont on peut facilement extraire  $\pi$ , la médiane recherchée.  $\square$

Voici un exemple de la réduction pour en faciliter la compréhension.

**Exemple 23.** *Supposons qu'on veuille trouver une médiane de l'ensemble  $A = \{5742136, 6721534, 3741625\}$ . Pour y parvenir, on construit l'ensemble multicirculaire  $\text{circ}(5742136 \oplus I_k) \cup \text{circ}(6721534 \oplus I_k) \cup \text{circ}(3741625 \oplus I_k)$ . On calcule ensuite une médiane de cet ensemble. Supposons qu'on obtienne, comme médiane, une permutation de la famille circulaire  $\text{circ}(7421365 \oplus I_k)$ . Alors on peut facilement générer toute cette famille circulaire et la permutation  $7421365 \oplus I_k$ , puis en extraire 7421365, une médiane de  $A$ .*

**Corollaire 9.** *Pour toute valeur  $m$  telle que le problème consistant à trouver une médiane d'un ensemble de  $m$  permutations est NP-difficile, le problème consistant à trouver la médiane d'un ensemble formé de  $m$  familles circulaires est NP-difficile.*

**DÉMONSTRATION.** Cela découle directement du théorème précédent, plus précisément du fait qu'on réduit un problème de taille d'entrée  $\theta(n)$  à un problème de taille d'entrée  $\theta(n^3)$ .  $n^3$  étant seulement polynomial (et non exponentiel) en fonction de  $n$ , le problème source est dans une classe de complexité supérieure ou égale à la classe de complexité du problème cible. Notons aussi que la réduction est effectuée en temps polynomial.  $\square$

#### 4.4. APPLICATION POSSIBLE

Trouver un consensus de Kemeny d'un ensemble multicirculaire peut avoir une application. En effet, il est possible qu'on souhaite modéliser un ordre de préférence cyclique au lieu d'un ordre de préférence linéaire. Par exemple, prenons un problème concret où on veut obtenir le meilleur ordre cyclique d'actions quotidiennes : (1 :dormir), (2 :sport) (3 :manger) (4 :travailler)...etc. Comme une journée est un cycle qui se répète, les ordres 163245 et 324516 devraient être considérés comme concrètement équivalents.

Ici, nous présentons une règle pour trouver le consensus d'un ensemble  $C$  d'ordres de préférences cycliques :

1. Générer la famille circulaire de chaque ordre de préférence cyclique.
2. Faire l'union de toutes ces familles circulaires et en calculer l'ensemble des médianes de permutations.
3. L'ensemble des médianes trouvé est un ensemble multicirculaire. Il est formé par l'union de familles circulaires, dont chacune représente un consensus cyclique.

**Exemple 24.** *Supposons que des tâches doivent être ordonnées périodiquement, numérotées par les nombres de [1..8]. Les votes de préférence cycliques suivants sont donnés :*

13287465, 73158462 et 87156234. On souhaite en fournir un consensus périodique. Posons  $A = \text{circ}(13287465) \cup \text{circ}(73158462) \cup \text{circ}(87156234)$ . Après calculs, on obtient  $\mathcal{M}(A) = \text{circ}(15623847) \cup \text{circ}(15623874)$ .

Ainsi, 15623847 est l'un des deux consensus périodiques optimal. Les tâches peuvent donc être ordonnées périodiquement comme suit  $\dots 6238471562384715623847156238 \dots$ .

Il existe d'autres règles pour trouver un consensus pour des ordres de préférences cycliques et celles-ci peuvent évidemment fournir des réponses différentes. Ceci est donc une proposition d'une nouvelle règle pour établir le consensus d'ordres de préférence cyclique. Nous avons toutefois prouvé que la nôtre est malheureusement NP-difficile à calculer.

# Chapitre 5

---

## PRODUIT DE MÉLANGE ET ENSEMBLES AUTOMÉDIANS INSÉPARABLES

Ce chapitre introduit principalement le produit de mélange, un opérateur qui entrelace les permutations de deux ensembles de permutations pour en construire un plus gros. Le positionnement des éléments dans un produit de mélange est étudié, ce qui permet éventuellement d'en tirer des propriétés concernant l'ensemble des médianes d'un produit de mélange. Nous avons initialement développé cette opération pour construire des ensembles automédiants, abordés au chapitre 3, mais l'avons finalement généralisée.

### 5.0.1. Propriété utile en combinatoire

Voyons d'abord une propriété en combinatoire qui sera utile pour étudier le positionnement des éléments dans un produit de mélange.

**Théorème 25.** *Pour n'importe quels entiers  $1 \leq a \leq k \leq n$ , on a :*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=a}^{a+n-k} \binom{i-1}{a-1} \binom{n-i}{k-a}$$

DÉMONSTRATION.  $\binom{n}{k}$  peut être interprété comme le nombre de manières de choisir  $k$  nombres parmi  $[1..n]$ . Cependant il est aussi possible de choisir  $k$  nombres parmi  $[1..n]$  de la manière suivante.

Premièrement, on choisit une constante  $a \in [1..k]$ . Ensuite, si  $i$  est le  $a$ -ième plus petit nombre parmi ceux choisis, les valeurs de  $i$  possibles sont celles des nombres de l'ensemble  $[a..a+n-k]$ . Une fois que  $i$  est choisi, il reste deux choix à faire. D'abord, on choisit les  $a-1$  nombres plus petits que  $i$  ( $\binom{i-1}{a-1}$  possibilités). Ensuite, on choisit les  $k-a$  nombres plus grands que  $i$  ( $\binom{n-i}{k-a}$  possibilités).

□

Dans la prochaine section, on présente une opération qui est entre autres utile pour la caractérisation des ensembles automédiants inséparables, le produit de mélange. Par contre, les

propriétés du produit de mélange ont été explorées de manière plus générale que simplement dans l'intérêt de la recherche d'ensembles automédiens.

## 5.1. PRODUIT DE MÉLANGE

Dans cette section, on présente une autre opération permettant de construire des ensembles automédiens équilibrés avec d'autres ensembles automédiens équilibrés plus petits.

### 5.1.1. Définitions et notations

**Définition 30.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ , deux permutations de tailles respectives  $k$  et  $\ell$ . Le **produit de mélange** de  $\pi$  et  $\sigma$ , noté  $\pi \sqcup \sigma$  est l'ensemble contenant toutes les permutations de taille  $k + \ell$  obtenues en entrelaçant  $\pi$  avec  $\sigma_{\uparrow k}$  de toutes les manières possibles. Notons que  $\#\pi \sqcup \sigma = \binom{k+\ell}{k}$ .

**Exemple 25.** Soient  $\pi = 132 \in \mathbb{S}_3$  et  $\sigma = 21 \in \mathbb{S}_2$ , alors  $\sigma_{\uparrow 3} = 54$  et

$$\pi \sqcup \sigma = \{13254, 13524, 13542, 15324, 15342, 15432, 51324, 51342, 51432, 54132\}.$$

La raison pour laquelle les éléments de  $\sigma$  doivent être augmentés avant de procéder aux entrelacements est qu'on souhaite que chaque permutation résultante soit bel et bien une permutation, c'est-à-dire ne pas posséder plusieurs fois les mêmes éléments, selon la même logique que pour la somme directe, au chapitre 3. De manière intuitive, on dira alors que les éléments de  $[1..k]$  dans les permutations de  $\pi \sqcup \sigma$  proviennent de  $\pi$ , tandis que ceux de  $[k + 1..k + \ell]$  proviennent de  $\sigma$ . De manière tout aussi intuitive, on dira que  $[1..k]$  est l'ensemble des "petits éléments" tandis que  $[k + 1..k + \ell]$  est l'ensemble des "grands éléments".

**Définition 31.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ , deux ensembles de permutations de tailles  $k$  and  $\ell$ , respectivement. Le **produit de mélange** de  $A$  et  $B$ , noté  $A \sqcup B$ , est défini de la manière suivante :

$$A \sqcup B = \bigcup_{(\pi, \sigma) \in A \times B} \pi \sqcup \sigma$$

Notons que  $\#A \sqcup B = \binom{k+\ell}{k} \times \#A \times \#B$ .

**Exemple 26.** Soient  $A = \{132, 312\} \subseteq \mathbb{S}_3$  et  $B = \{21\} \subseteq \mathbb{S}_2$ . Alors,

$$A \sqcup B = \{13254, 13524, 13542, 15324, 15342, 15432, 51324, 51342, 51432, 54132, 31254, 31524, 31542, 35124, 35142, 35412, 53124, 53142, 53412, 54312\}.$$

**Définition 32.** Soit  $\phi \in \mathbb{S}_n$  et  $1 \leq k < n$ . On dénotera  $sep(\phi, k)$  la paire formée des deux permutations suivantes : celle respectant l'ordre marginal des éléments de  $[1..k]$  dans  $\phi$  et celle respectant l'ordre marginal des éléments de  $[k + 1..n]$  dans  $\phi$ , diminués de  $k$ . Plus formellement,  $sep(\phi, k) = (\pi, \sigma)$ , où  $\pi \in \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_{n-k}$  et  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$ .

**Exemple 27.** Soit  $\phi = 2617354$ . Alors  $sep(\phi, 3) = (\pi, \sigma)$ , où  $\pi = 213$  et  $\sigma = 3421$  (car  $\sigma_{\uparrow 3} = 6754$ ).

La définition 32 permet de redéfinir le produit de mélange de la façon suivante : Si  $\pi \in A \subset \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in B \subset \mathbb{S}_\ell$ , alors :

$$\begin{aligned}\pi \sqcup \sigma &= \{\phi \in \mathbb{S}_{k+\ell} \mid \text{sep}(\phi, k) = (\pi, \sigma)\} \\ A \sqcup B &= \{\phi \in \mathbb{S}_{k+\ell} \mid \text{sep}(\phi, k) \in A \times B\}\end{aligned}$$

**Théorème 26.** Soient  $\pi \in A \subseteq \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $(i, j) \in \text{pairs}(1, k)$  et  $(r, s) \in \text{pairs}(1, \ell)$ . Alors

$$\begin{aligned}\Delta(\pi \sqcup \sigma)_{ij} &\stackrel{(1)}{=} \binom{k+\ell}{k} \Delta(\pi)_{ij}, \\ \Delta(\pi \sqcup \sigma)_{r+k, s+k} &\stackrel{(2)}{=} \binom{k+\ell}{k} \Delta(\sigma)_{rs}, \\ \Delta(A \sqcup B)_{ij} &\stackrel{(3)}{=} \binom{k+\ell}{k} \#B \Delta(A)_{ij}, \\ \Delta(A \sqcup B)_{r+k, s+k} &\stackrel{(4)}{=} \binom{k+\ell}{k} \#A \Delta(B)_{rs}.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. L'égalité (1) vient du fait que tous les éléments de  $[1..k]$  apparaissent dans le même ordre dans  $\pi$  et dans chacune des permutations de  $\pi \sqcup \sigma$ . De façon analogue, les éléments de  $[k+1..k+\ell]$  apparaissent dans le même ordre dans  $\sigma_{\uparrow k}$  que dans les permutations de  $\pi \sqcup \sigma$ , ce qui prouve l'égalité (2).

L'égalité (3) vient du fait que

$$\begin{aligned}\Delta(A \sqcup B)_{ij} &\stackrel{\text{thm 4}}{=} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \Delta(\pi \sqcup \sigma)_{ij}, \\ &= \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \binom{k+\ell}{k} \Delta(\pi)_{ij}, \\ &= \sum_{\pi \in A} \#B \binom{k+\ell}{k} \Delta(\pi)_{ij}, \\ &\stackrel{\text{thm 4}}{=} \#B \binom{k+\ell}{k} \Delta(A)_{ij}.\end{aligned}$$

L'égalité (4) se démontre par une démarche similaire. □

**Corollaire 10.** Le théorème ci-dessus s'applique aussi pour les matrices gauche et droite.

DÉMONSTRATION. La preuve est parfaitement analogue à celle du théorème précédent. □

**Théorème 27.** Soit  $A \subset \mathbb{S}_k$  et  $B \subset \mathbb{S}_\ell$ . Si  $A$  est équilibré, alors,  $\forall i \in [1..k]$ ,

$$\sum_{j \in [1..k], j \neq i} \Delta(A \sqcup B)_{ij} = 0.$$

De manière analogue, si  $B$  est équilibré, alors,  $\forall i \in [1..\ell]$

$$\sum_{j \in [1..\ell], j \neq i} \Delta(A \sqcup B)_{i+k, j+k} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Prouvons d'abord la première égalité. Pour quelconque  $i \in [1..k]$ , renommons  $X = [1..k] \setminus \{i\}$ . On doit prouver que  $\sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{ij} = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{ij} &= \sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{ij} \\ &\stackrel{thm26}{=} \sum_{j \in X} \binom{k+\ell}{k} \#B \Delta(A)_{ij} \\ &= \binom{k+\ell}{k} \#B \sum_{j \in X} \Delta(A)_{ij} \\ &\stackrel{thm15}{=} \binom{k+\ell}{k} \#B \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons que, ci-dessus, le théorème 15 a pu être utilisé car  $A$  est équilibré. La deuxième équation se prouve de manière analogue. En effet, pour quelconque  $i \in [1..\ell]$ , renommons  $X = [1..\ell] \setminus \{i\}$ . On doit prouver que  $\sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{i+k, j+k} = 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{i+k, j+k} &= \sum_{j \in X} \Delta(A \sqcup B)_{i+k, j+k} \\ &\stackrel{thm26}{=} \sum_{j \in X} \binom{k+\ell}{k} \#A \Delta(B)_{ij} \\ &= \binom{k+\ell}{k} \#A \sum_{j \in X} \Delta(B)_{ij} \\ &\stackrel{thm15}{=} \binom{k+\ell}{k} \#A \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme plus tôt, le théorème 15 a pu être utilisé car  $B$  est équilibré. □

### 5.1.2. Propriétés sur la position d'un élément dans un produit de mélange

Maintenant, intéressons-nous à la distribution de la position d'un élément dans un produit de mélange. On veut savoir dans combien de permutations  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$ , le  $i$ -ème élément de  $\pi$

se trouve en position  $y$ . On veut aussi savoir dans combien de permutations  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$ , le  $j$ -ème élément de  $\sigma$ , augmenté de  $k$ , se trouve en position  $y$ . Le théorème suivant formalise cette question.

**Théorème 28.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ ,  $i \in [1..k]$ ,  $j \in [1..\ell]$  et  $y \in [1..k + \ell]$ . Alors,

$$\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_y = \pi_i\} = \begin{cases} \binom{y-1}{i-1} \binom{k+\ell-y}{k-i} & \text{si } y \in [i..i + \ell] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_y = \sigma_j + k\} = \begin{cases} \binom{y-1}{j-1} \binom{k+\ell-y}{\ell-j} & \text{si } y \in [j..j + k] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**DÉMONSTRATION.** Nous allons faire la preuve seulement pour les petits éléments (première équation) puisque la deuxième équation est prouvée de manière analogue.

D'abord, il est important de noter que la position minimale de l'élément  $\pi_i$  dans une permutation  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$  est  $i$ , car tous les petits éléments précédant  $\pi_i$  dans  $\pi$  doivent aussi le précéder dans  $\phi$ . De la même manière, la position maximale de  $\pi_i$  dans  $\phi$  est  $i + \ell$ , cela représentant le cas où tous les grands éléments précèdent  $\pi_i$  dans  $\phi$ .

Ensuite, le cas où  $y \in [i..i + \ell]$  se résout par combinatoire. Pour former une permutation  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$  respectant  $\phi_y = \pi_i$ , il y a  $\binom{y-1}{i-1}$  manières de choisir, parmi les  $y - 1$  éléments de  $\phi$  précédant la position  $y$ , lesquels proviennent de  $\pi$ . Ensuite, il y a  $\binom{k+\ell-y}{k-i}$  manières de choisir, parmi les  $k + \ell - y$  éléments suivant la position  $y$ , lesquels proviennent de  $\pi$ . On a donc bel et bien :

$$\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_y = \pi_i\} = \binom{y-1}{i-1} \binom{k+\ell-y}{k-i}$$

□

Évidemment, si on somme la dernière expression sur tous les  $y \in [i..i + \ell]$ , on obtient  $\binom{k+\ell}{k}$ , le nombre total de permutations de  $\pi \sqcup \sigma$ . Le théorème 25 confirme ce résultat (en y remplaçant  $(i, a, k, n)$  par  $(y, i, k, k + \ell)$ ). D'ailleurs, la preuve du théorème 25 est identique au raisonnement utilisé pour trouver l'équation ci-dessus.

Maintenant, intéressons-nous à la position moyenne d'un élément dans un produit de mélange.

**Définition 33.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ ,  $\phi = \pi \sqcup \sigma \subseteq \mathbb{S}_{k+\ell}$ ,  $i \in [1..k]$  et  $j \in [1..\ell]$ . Notons  $p_{\text{moy}}(i, k, \ell)$  la position moyenne de  $\pi_i$  dans les permutations de  $\phi$ . Notons  $p_{\text{moy}\uparrow_k}(j, k, \ell)$  la position moyenne de l'élément  $\sigma_j + k$  dans les permutations de  $\phi$ .

Note : La raison pour laquelle ces fonctions prennent seulement trois nombres entiers ( $i$  ou  $j$ ,  $k$  et  $\ell$ ) en argument est que ces trois nombres sont les seuls paramètres dont dépendent la valeur retournée par ces fonctions, comme le confirme le théorème suivant.

**Théorème 29.** Soient  $1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq j \leq \ell$ . Alors,

$$p_{moy}(i, k, \ell) = \frac{i(k + \ell + 1)}{k + 1},$$

$$p_{moy\uparrow_k}(j, k, \ell) = \frac{j(k + \ell + 1)}{\ell + 1}.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$  et  $\phi = \pi \sqcup \sigma \subseteq \mathbb{S}_{k+\ell}$ . Prouvons d'abord la première équation. La position moyenne d'un élément  $\pi_i$  dans  $\pi \sqcup \sigma$  peut être obtenue par moyenne pondérée :

$$p_{moy}(i, k, \ell) = \sum_{y=i}^{i+k} y \frac{\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_y = \pi_i\}}{\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma\}}$$

Cette expression peut être simplifiée en utilisant le théorème 28. On obtient :

$$\begin{aligned} p_{moy}(i, k, \ell) &= \sum_{y=i}^{i+k} y \frac{\binom{y-1}{i-1} \binom{k+\ell-y}{k-i}}{\binom{k+\ell}{k}} \\ &= \sum_{y=i}^{i+k} \frac{i \binom{y}{i} \binom{k+\ell-y}{k-i}}{\binom{k+\ell}{k}} \\ &= \sum_{y=i}^{i+k} \frac{i \binom{y}{i} \binom{k+\ell-y}{k-i}}{\frac{k+1}{k+\ell+1} \binom{k+\ell+1}{k+1}} \\ &= i \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \sum_{y=i}^{i+k} \frac{\binom{y}{i} \binom{k+\ell-y}{k-i}}{\binom{k+\ell+1}{k+1}} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{i(k + \ell + 1)}{k + 1}. \end{aligned}$$

L'égalité (\*) est due au fait que la dernière sommation vaut 1, selon le théorème 25 (en y remplaçant  $(i, a, k, n)$  par  $(y + 1, i + 1, k + 1, k + \ell + 1)$ ).

Il est aussi possible d'utiliser la moyenne pondérée pour calculer  $p_{moy\uparrow_k}(j, k, \ell)$ . En effet,

$$p_{moy\uparrow_k}(j, k, \ell) = \sum_{y=j}^{j+k} y \frac{\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_y = \sigma_j + k\}}{\#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma\}} = \sum_{y=j}^{j+\ell} y \frac{\binom{y-1}{j-1} \binom{k+\ell-y}{\ell-j}}{\binom{k+\ell}{k}}.$$

Cette dernière expression peut être simplifiée à  $\frac{j(k+\ell+1)}{\ell+1}$  par des manipulations semblables aux précédentes.  $\square$

Remarquons que, dans la preuve ci-dessus,  $y$  est proportionnel à  $i$  dans un cas et proportionnel à  $j$  dans l'autre. L'essentiel à retenir des résultats ci-dessus est que la position moyenne d'un élément dans un produit de mélange de deux permutations est parfaitement proportionnelle à sa position dans la permutation de laquelle cet élément provient. D'ailleurs, le théorème suivant est une conséquence de cette linéarité.

**Théorème 30.** Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ . Si  $A$  et  $B$  sont équilibrés, alors  $A \sqcup B$  l'est aussi.

DÉMONSTRATION. On doit prouver que tous les éléments ont une position moyenne identique dans  $A \sqcup B$ . Plus formellement,  $\forall i \in [1..k + \ell]$ , on doit avoir  $\frac{1}{\#(A \sqcup B)} \sum_{\phi \in A \sqcup B} \phi_i^{-1} = \frac{k+\ell+1}{2}$ .  
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#(A \sqcup B)} \sum_{\phi \in A \sqcup B} \phi_i^{-1} &\stackrel{def31}{=} \frac{1}{\#(A \sqcup B)} \sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} \sum_{\phi \in \pi \sqcup \sigma} \phi_i^{-1} \\ &= \frac{\binom{k+\ell}{k}}{\#(A \sqcup B)} \sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} \sum_{\phi \in \pi \sqcup \sigma} \frac{\phi_i^{-1}}{\binom{k+\ell}{k}}. \end{aligned}$$

$\sum_{\phi \in \pi \sqcup \sigma} \frac{\phi_i^{-1}}{\binom{k+\ell}{k}}$  est, par définition de la position moyenne, la position moyenne de  $i$  dans  $\pi \sqcup \sigma$ .

Premier cas : si  $i \in [1..k]$ ,  $i$  est un petit élément et sa position moyenne dans  $\pi \sqcup \sigma$  vaut, par la définition 33,  $p_{moy}(\pi_i^{-1}, k, \ell)$ . On poursuit donc :

$$\begin{aligned} &= \frac{\binom{k+\ell}{k}}{\#(A \sqcup B)} \sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} p_{moy}(\pi_i^{-1}, k, \ell) \\ &= \frac{\binom{k+\ell}{k}}{\#A \#B \binom{k+\ell}{k}} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} p_{moy}(\pi_i^{-1}, k, \ell) \\ &\stackrel{thm 29}{=} \frac{1}{\#A \#B} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \pi_i^{-1} \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \\ &= \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \frac{1}{\#A \#B} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \pi_i^{-1} \\ &= \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \frac{1}{\#A \#B} \sum_{\pi \in A} \#B \pi_i^{-1} \\ &= \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \frac{1}{\#A} \sum_{\pi \in A} \pi_i^{-1} \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{k + \ell + 1}{k + 1} \frac{1}{\#A} \frac{k + 1}{2} \#A \\ &= \frac{k + \ell + 1}{2}, \end{aligned}$$

où l'égalité (1) provient du fait que  $A$  est équilibré.

Deuxième cas : si  $i \in [k + 1..k + \ell]$ ,  $i$  est un grand élément et sa position moyenne dans  $\pi \sqcup \sigma$  vaut, par la définition 33,  $p_{moy\uparrow_k}(\sigma_{i-k}^{-1}, k, \ell)$ . On a donc :

$$\frac{1}{\#(A \sqcup B)} \sum_{\phi \in A \sqcup B} \phi_i^{-1} = \frac{\binom{k+\ell}{k}}{\#(A \sqcup B)} \sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} p_{moy\uparrow_k}(\sigma_{i-k}^{-1}, k, \ell).$$

Cette expression peut être simplifiée à  $\frac{k+\ell+1}{2}$  par une démarche similaire à la démarche précédente, en utilisant le fait que  $B$  est équilibré.

Tous les éléments de  $[1..k + \ell]$  ont donc une position moyenne valant  $\frac{k+\ell+1}{2}$  dans  $A \sqcup B$ , cet ensemble est donc par définition équilibré.  $\square$

### 5.1.3. Positionnement conjoint

La section précédente concernait le positionnement marginal d'un élément dans un produit de mélange. Maintenant, on s'intéresse au positionnement conjoint d'une paire d'éléments (un petit et un grand) dans un produit de mélange.

**Définition 34.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ ,  $i \in [1..k]$ ,  $j \in [1..\ell]$ , et  $r, s \in [1..k + \ell]$ . Alors,  $p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s) = \#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_r = \pi_i \wedge \phi_s = \sigma_j + k\}$ .

$p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s)$  est donc le nombre de permutations de  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$ , pour  $\pi \in \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$  quelconques, tel que le  $i$ -ème élément de  $\pi$  se trouve en position  $r$  dans  $\phi$  en même temps que le  $j$ -ème élément de  $\sigma$ , augmenté de  $k$ , se trouve en position  $s$  dans  $\phi$ . Cette fonction prend seulement ces six entiers en paramètre puisque sa valeur ne dépend pas de la nature précise des permutations  $\pi$  et  $\sigma$ .

**Théorème 31.** Soient  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq \ell$  et  $1 \leq r \neq s \leq k + \ell$ . Alors,

$$p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s) = \begin{cases} \binom{r-1}{i-1} \binom{k+\ell-s}{\ell-j} \binom{s-r-1}{s-i-j} & \text{si } i \leq r < s \wedge i + j \leq s \leq k + j & (*1) \\ \binom{s-1}{j-1} \binom{k+\ell-r}{k-i} \binom{r-s-1}{r-i-j} & \text{si } j \leq s < r \wedge i + j \leq r \leq i + \ell & (*2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$  et  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ .

Premier cas ( $r < s$ ) :

Tentons de former une permutation  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$  telle que  $\phi_r = \pi_i \wedge \phi_s = \sigma_j + k$ . Pour respecter ce critère, il y a plusieurs contraintes à respecter :

1.  $i \leq r$  :  $i - 1$  petits éléments devront être placés avant la position  $r$  dans  $\phi$ , alors il est nécessaire que  $i \leq r$
2.  $i + j \leq s \leq k + j$  : combien de petits éléments y aura-t-il avant la position  $s$ ? Il y en aura au moins  $i$ , car la position  $r$  est réservée à  $\pi_i$  et  $r < s$ . Il y en aura au plus  $k$ , le

nombre total de petits éléments. De plus, jusqu'à la position  $s$  inclusivement, il y aura  $j$  grands éléments, ce qui explique que  $i + j \leq s \leq k + j$ .

C'est pourquoi  $p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s)$  vaut 0 sinon. Maintenant, en respectant ces contraintes, comptons le nombre de manières possibles de former la permutation  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$  respectant  $\phi_r = \pi_i \wedge \phi_s = \sigma_j + k$ . La seule chose à décider est quelles positions dans  $\phi$  sont réservées aux petits éléments, car une fois ce choix fait, les ordres marginaux des petits et grands éléments sont obligatoirement ceux de  $\pi$  et  $\sigma_{\uparrow k}$  respectivement. La décision est déjà prise pour les positions  $r$  et  $s$ . Pour les autres, on peut séparer le calcul en trois :

1. Positions de  $[1..r - 1]$  :  $i - 1$  petits éléments précèdent  $\phi_r$  dans  $\phi$ , ce qui donne  $\binom{r-1}{i-1}$  manières de choisir où placer ces  $i - 1$  petits éléments.
2. Positions de  $[s + 1..k + \ell]$  :  $\ell - j$  grands éléments suivent  $\phi_s$  dans  $\phi$ , ce qui donne  $\binom{k+\ell-s}{\ell-j}$  manières de choisir où placer ces grands éléments.
3. Positions de  $[r + 1..s - 1]$  : il y a  $i - 1$  éléments précédant la position  $r$  et  $(k + \ell - s) - (\ell - j) = k - s + j$  petits éléments suivant la position  $s$ . Dans les positions de  $[r + 1..s - 1]$ , il reste donc  $k - (i - 1) - (k - s + j) - 1 = s - i - j$  positions à attribuer aux petits éléments (le  $-1$  ci-haut correspond au fait qu'un petit élément occupe la position  $r$ ). Cela qui donne  $\binom{s-r-1}{s-i-j}$  manières de choisir où placer les grands éléments dans cet intervalle.

Le produit de ces trois nombres de combinaisons correspond bel et bien à la ligne (1\*) de l'équation du théorème.

Deuxième cas ( $s < r$ ) :

La preuve de la ligne (\*2) est parfaitement analogue à celle de la ligne (\*1), donc nous ne l'élaborons pas. Le lecteur peut remarquer qu'en permutant  $i$  avec  $j$ ,  $k$  avec  $\ell$  et  $r$  avec  $s$ , la ligne (\*1) devient exactement la ligne (\*2), ce qui est logique.

Finalement, le cas  $r = s$  est évidemment impossible à respecter, puisque l'élément à la position  $r = s$  ne peut pas être petit et grand en même temps.

□

**Théorème 32.** Soient  $\pi \in \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in \mathbb{S}_\ell$ ,  $i \in [1..k]$  et  $j \in [1..\ell]$ . Alors,

$$L(\pi \sqcup \sigma)_{i,j+k} = \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_j^{-1}, r, s)$$

$$R(\pi \sqcup \sigma)_{i,j+k} = \sum_{(s,r) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_j^{-1}, r, s)$$

DÉMONSTRATION.  $L(\pi \sqcup \sigma)_{i,j+k}$  est le nombre de permutations  $\phi \in \pi \sqcup \sigma$  telle que  $\phi_i^{-1} \prec \phi_{j+k}^{-1}$ . Cette dernière expression peut être écrite de la manière équivalente suivante :

$r = \phi_i^{-1} \wedge s = \phi_{j+k}^{-1}$  où  $(r, s) \in \text{pairs}(1, k + \ell)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
L(\pi \sqcup \sigma)_{i, j+k} &= \sum_{(r, s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid r = \phi_i^{-1} \wedge s = \phi_{j+k}^{-1}\} \\
&\stackrel{(1)}{=} \sum_{(r, s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_r = i \wedge \phi_s = j+k\} \\
&\stackrel{(2)}{=} \sum_{(r, s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_r = \pi \circ \pi_i^{-1} \wedge \phi_s = \sigma \circ \sigma_j^{-1} + k\} \\
&\stackrel{(3)}{=} \sum_{(r, s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_j^{-1}, r, s).
\end{aligned}$$

Le passage (1) est effectué en appliquant la fonction  $\phi$  de chaque côté de chaque égalité interne. Le passage (2) est légal puisque que  $\pi \circ \pi_i^{-1}$  et  $\sigma \circ \sigma_j^{-1}$  sont des fonctions identités. Le passage (3) est valide par la définition 34.

Pour la valeur de  $R(\pi \sqcup \sigma)$ , la preuve est parfaitement analogue, sauf qu'on somme sur les paires  $(r, s)$  telle que  $r > s$  au lieu de  $r < s$ , logiquement.  $\square$

Malheureusement, ce théorème est difficilement exploitable. En effet, selon l'expression trouvée au théorème 31,  $p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s)$  n'est pas linéaire en fonction de  $i$  ou  $j$ .

Toutefois, il y a tout de même une certaine symétrie dans la formule trouvée par le théorème 31. D'un point de vue probabiliste, si on génère une permutation  $\phi$  de  $\pi \sqcup \sigma$  au hasard, la probabilité que l' $i$ -ème élément de  $\pi$  à partir de la gauche et que le  $j$ -ème élément de  $\sigma$  à partir de la gauche se retrouvent respectivement aux  $r$ -ième et  $s$ -ième positions de  $\phi$  à partir de la gauche vaut exactement la probabilité que l' $i$ -ème élément de  $\pi$  à partir de la droite et que le  $j$ -ème élément de  $\sigma$  à partir de la droite se retrouvent respectivement aux  $r$ -ième et  $s$ -ième positions de  $\phi$  à partir de la droite. Remarquez que la seule différence entre les deux parties de la phrase précédente est que le mot "gauche" est devenu le mot "droite". Cette symétrie est formalisée dans le théorème suivant.

**Théorème 33.** *Soient  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq \ell$  et  $1 \leq r \neq s \leq k + \ell$ . Alors,*

$$p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s) = p_{conj}(k, \ell, k - i + 1, \ell - j + 1, k + \ell - r + 1, k + \ell - s + 1)$$

**DÉMONSTRATION.** Nous allons faire la preuve seulement pour le cas  $r < s$ , la preuve pour le cas  $s < r$  étant parfaitement analogue.

Pour le cas  $r < s$ , nous allons aussi omettre une partie de la preuve. En fait, on peut le remarquer dans l'équation du théorème 31 que la fonction  $p_{conj}$  est nulle si certaines inégalités ne sont pas respectées. Il faudrait donc prouver que le terme à gauche respecte ces inégalités si et seulement si le terme de droite les respecte aussi, mais cette partie de la démonstration est omise par manque d'espace. Toutefois, à partir de ce point, nous démontrerons quand même que les deux termes sont égaux s'ils ne sont pas nuls.

Puisque  $r < s$ , on a  $k + \ell - r + 1 > k + \ell - s + 1$ . Le développement du terme de droite est donc obtenue par la ligne (\*2) du théorème 31. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
& p_{conj}(k, \ell, k - i + 1, \ell - j + 1, k + \ell - r + 1, k + \ell - s + 1) \\
&= \binom{(k + \ell - s + 1) - 1}{(\ell - j + 1) - 1} \binom{k + \ell - (k + \ell - r + 1)}{k - (k - i + 1)} \binom{(k + \ell - r + 1) - (k + \ell - s + 1) - 1}{(k + \ell - r + 1) - (k - i + 1) - (\ell - j + 1)} \\
&= \binom{k + \ell - s}{\ell - j} \binom{r - 1}{i - 1} \binom{s - r - 1}{i + j - r + 1} \\
&= \binom{k + \ell - s}{\ell - j} \binom{r - 1}{i - 1} \binom{s - r - 1}{s - i - j} \\
&= p_{conj}(k, \ell, i, j, r, s).
\end{aligned}$$

□

#### 5.1.4. Propriétés sur la distance

Voici maintenant certaines propriétés concernant la distance d'une permutation à un ensemble de permutations obtenu par produit de mélange.

**Théorème 34.** *Soient  $\pi \in A \subseteq \mathbb{S}_k$ ,  $\sigma \in B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ ,  $\phi \in \mathbb{S}_{k+\ell}$  et  $(\rho, \psi) = sep(\phi, k)$ . Alors, ces deux égalités sont vraies :*

$$\begin{aligned}
d_{KT}(\phi, \pi \sqcup \sigma) &= \binom{k + \ell}{k} (d_{KT}(\rho, \pi) + d_{KT}(\psi, \sigma)) + d_{KT;hp(k,\ell)}(\phi, \pi \sqcup \sigma). \\
d_{KT}(\phi, A \sqcup B) &= \binom{k + \ell}{k} (\#B d_{KT}(\rho, A) + \#A d_{KT}(\psi, B)) + d_{KT;hp(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B).
\end{aligned}$$

**DÉMONSTRATION.** Nous commençons par décomposer le calcul de la distance en utilisant le corollaire 2.

$$d_{KT}(\phi, \pi \sqcup \sigma) = d_{KT;pairs(1,k)}(\phi, \pi \sqcup \sigma) + d_{KT;pairs(k+1,k+\ell)}(\phi, \pi \sqcup \sigma) + d_{KT;hp(k,\ell)}(\phi, \pi \sqcup \sigma).$$

Pour chaque permutation  $\gamma \in \pi \sqcup \sigma$ , les éléments de l'intervalle  $[1..k]$  sont présents dans l'ordre induit par  $\pi$  tandis que les éléments de  $[k + 1..k + \ell]$  sont présents dans l'ordre induit par  $\sigma \uparrow k$ . On a donc  $d_{KT;pairs(1,k)}(\phi, \gamma) = d_{KT}(\rho, \pi)$  et  $d_{KT;pairs(k+1,k+\ell)}(\phi, \gamma) = d_{KT}(\psi, \sigma)$ . Puisque  $\pi \sqcup \sigma$  contient  $\binom{k+\ell}{k}$  permutations, on obtient  $d_{KT;pairs(1,k)}(\phi, \pi \sqcup \sigma) + d_{KT;pairs(k+1,k+\ell)}(\phi, \pi \sqcup \sigma) = \binom{k+\ell}{k} (d_{KT}(\rho, \pi) + d_{KT}(\psi, \sigma))$ , ce qui mène au résultat voulu. Ensuite, on a :

$$d_{KT}(\phi, A \sqcup B) \stackrel{Thm 4}{=} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} d_{KT}(\phi, \pi \sqcup \sigma)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{Cor 2}{=} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} (d_{\text{KT};\text{pairs}(1,k)}(\phi, \pi \sqcup \sigma) + d_{\text{KT};\text{pairs}(k+1,k+\ell)}(\phi, \pi \sqcup \sigma)) \\
& \qquad \qquad \qquad + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B) \\
& = \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \binom{k+\ell}{k} (d_{\text{KT}}(\rho, \pi) + d_{\text{KT}}(\psi, \sigma)) + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B) \\
& = \binom{k+\ell}{k} \left( \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} d_{\text{KT}}(\rho, \pi) + \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} (d_{\text{KT}}(\psi, \sigma)) + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B) \right) \\
& = \binom{k+\ell}{k} \left( \sum_{\pi \in A} \#B d_{\text{KT}}(\rho, \pi) + \sum_{\pi \in A} (d_{\text{KT}}(\psi, B)) + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B) \right) \\
& = \binom{k+\ell}{k} (\#B d_{\text{KT}}(\rho, A) + \#A d_{\text{KT}}(\psi, B)) + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B)
\end{aligned}$$

□

### 5.1.5. Propriétés sur les médianes

Tout est maintenant en place pour montrer certaines propriétés sur l'ensemble de médianes d'un ensemble de permutations obtenu par produit de mélange.

**Théorème 35.** *Soient  $A \subseteq \mathbb{S}_k$  et  $B \subseteq \mathbb{S}_\ell$ . Alors,  $\mathcal{M}(A \sqcup B) = \mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$  si et seulement si, pour tous éléments  $i$  et  $j$  tels que  $(i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ ,  $\Delta(A \sqcup B)_{ij} = 0$ .*

DÉMONSTRATION. Dans cette preuve, nous posons  $C = A \sqcup B$ , pour alléger l'écriture.

D'un côté,  $\mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$  contient tous les entrelacements des permutations de  $\mathcal{M}(A)$  et  $\mathcal{M}(B)$ . Donc pour n'importe quels  $i$  et  $j$  tels que  $(i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ , on trouvera, dans  $\mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$ , des permutations où  $i$  précède immédiatement  $j$  ainsi que des permutations où  $j$  précède immédiatement  $i$ , entre autres.

De l'autre côté, soient  $i$  et  $j$  de sorte que  $(i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ . Si  $\Delta(C)_{ij} > 0$ ,  $j$  ne peut pas précéder immédiatement  $i$  dans une médiane  $\pi$  de  $C$  puisque permuter  $i$  et  $j$  dans  $\pi$  ferait baisser  $d_{\text{KT}}(\pi, C)$ . Pour la même raison, si  $\Delta(C)_{ij} < 0$ ,  $i$  ne peut pas précéder immédiatement  $j$  dans une permutation médiane de  $C$ . Ainsi, la seule manière que  $\mathcal{M}(C)$  contienne à la fois des permutations où  $i$  suit immédiatement  $j$  et des permutations où  $j$  suit immédiatement  $i$  est que  $\Delta(C)_{ij} = 0$ .

Il est donc nécessaire que  $\forall (i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ ,  $\Delta(C)_{ij} = 0$  pour que  $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$ . Cependant, cette condition est aussi suffisante.

En effet, soit  $\phi \in \mathbb{S}_{k+\ell}$  et  $(\rho, \psi) = \text{sep}(\phi, k)$ . Selon le théorème précédent,  $\phi$  est une médiane de  $C$  si et seulement si elle minimise l'expression suivante :

$$\binom{k+\ell}{k} (\#B d_{\text{KT}}(\rho, A) + \#A d_{\text{KT}}(\psi, B)) + d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B)$$

Ors, si  $\forall (i,j) \in \text{hp}(k,\ell)$ ,  $\Delta(C)_{ij} = 0$ , le dernier terme est invariant par rapport à  $\phi$ . En effet,

$$d_{\text{KT};\text{hp}(k,\ell)}(\phi, A \sqcup B) = \sum_{(i,j) \in \text{hp}(k,\ell)} \#\{\gamma \in A \sqcup B \mid i \prec_\gamma j \text{ XOR } i \prec_\phi j\}.$$

Cependant, pour n'importe quelle paire  $(i,j)$ , si  $\Delta(C)_{ij} = 0$ , alors  $i \prec j$  dans exactement la moitié des permutations de  $C$ , donc  $\#\{\gamma \in A \sqcup B \mid i \prec_\gamma j \text{ XOR } i \prec_\phi j\} = \frac{\#C}{2}$ . La sommation précédente peut donc être simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \text{hp}(k,\ell)} \#\{\gamma \in A \sqcup B \mid i \prec_\gamma j \text{ XOR } i \prec_\phi j\} &= \sum_{(i,j) \in \text{hp}(k,\ell)} \frac{\#C}{2} \\ &= \sum_{(i,j) \in \text{hp}(k,\ell)} \frac{\binom{k+\ell}{k}}{2} \\ &= \binom{k+\ell}{k} \frac{k\ell}{2}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $d_{\text{KT}}(\phi, C)$  est minimal si et seulement si  $\#Bd_{\text{KT}}(\rho, A) + \#Ad_{\text{KT}}(\psi, B)$  est minimal. Les distances  $d_{\text{KT}}(\rho, A)$  et  $d_{\text{KT}}(\psi, B)$  peuvent être minimisées de manière indépendante en imposant  $\rho \in \mathcal{M}(A)$  et  $\psi \in \mathcal{M}(B)$  (ou de manière plus compacte  $(\rho, \psi) \in \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$ ). Ainsi,  $\phi$  est une médiane de  $C$  si et seulement si  $\text{sep}(\phi, k) \in \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)$ . On a donc  $\mathcal{M}(C) = \{\phi \in \mathbb{S}_{k+\ell} \mid \text{sep}(\phi, k) \in \mathcal{M}(A) \times \mathcal{M}(B)\}$  et cet ensemble correspond à  $\mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$  par la définition alternative du produit de mélange fournie à la page 63.  $\square$

La question "Si  $A \in \mathbb{S}_k$  et  $B \in \mathbb{S}_\ell$ , a-t-on  $\mathcal{M}(A \sqcup B) = \mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$  se résume maintenant à "est-ce que  $\Delta(A \sqcup B)_{ij} = 0$  pour tous  $(i,j) \in \text{hp}(k,\ell)$  ?".

**Théorème 36.** *Soient  $A \subset \mathbb{S}_k$  et  $B \subset \mathbb{S}_\ell$ , des ensembles de permutations équilibrés. Alors,  $\mathcal{M}(A \sqcup B) = \mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B)$  si au moins l'une des trois affirmations suivantes est vraie*

1.  *$B$  est uniformément équilibré.*
2.  *$A$  est uniformément équilibré.*
3.  *$A$  et  $B$  sont symétriquement équilibrés.*

**Note:** Dans cette preuve,  $\Delta$  et  $L$  représentent  $\Delta(A \sqcup B)$  et  $L(A \sqcup B)$ , pour alléger l'écriture. Selon le théorème précédent, il suffit de prouver que  $\Delta(A \sqcup B)_{ij} = 0; \forall (i,j) \in \text{hp}(k,\ell)$ . Nous allons le démontrer dans chacun des trois cas.

DÉMONSTRATION.

1.  $B$  est uniformément équilibré :

Soit un élément arbitraire  $i \in [1..k]$ . On sait que  $\sum_{j \in [1..k+\ell], j \neq i} \Delta_{ij} = 0$ , par le théorème 30, qui peut être utilisé puisque  $A$  et  $B$  sont équilibrés. On sait aussi que :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [1..k], j \neq i} \Delta_{ij} &\stackrel{thm26}{=} \binom{k}{k+\ell} \#B \sum_{j \in [1..k], j \neq i} \Delta(A)_{ij} \\ &\stackrel{thm15}{=} 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'explique par le fait que  $A$  est équilibré. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [k+1..k+\ell]} \Delta_{ij} &= \sum_{j \in [1..k+\ell], j \neq i} \Delta_{ij} - \sum_{j \in [1..k], j \neq i} \Delta_{ij} \\ &= 0 - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La somme  $\sum_{j \in [k+1..k+\ell]} \Delta_{ij}$  vaut donc 0. Ceci ne prouve pas que chaque terme de cette somme est nul. Cependant, si on prouve en plus que tous les termes de la somme sont égaux, cela prouve que tous les termes sont nuls, puisque une somme de termes égaux non-nuls ne peut pas donner 0. Pour y parvenir, intéressons-nous à  $L_{ij}$  pour diverses valeurs de  $j \in [k+1..k+\ell]$ .

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \#\{\phi \in A \sqcup B \mid \phi_i^{-1} = r \wedge \phi_j^{-1} = s\} \\ &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{\pi \in A} \#\{\phi \in \pi \sqcup B \mid \phi_i^{-1} = r \wedge \phi_j^{-1} = s\} \\ &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} \#\{\phi \in \pi \sqcup \sigma \mid \phi_i^{-1} = r \wedge \phi_j^{-1} = s\} \\ &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s). \end{aligned}$$

Ici, l'idée est de montrer que  $\sum_{\sigma \in B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_c^{-1}, r, s)$  est indépendant de  $j$ , cela étant causé par le fait que cette somme, lorsqu'on change  $j$ , devient la somme des mêmes termes dans un ordre différent. En effet, si on énumère, pour chaque  $\sigma \in B$ ,  $\sigma_{j-k}^{-1}$ , on obtient tous les nombres de 1 à  $\ell$   $\frac{\#B}{\ell}$  fois chacun, puisque  $B$  est uniformément équilibré. Ainsi, la liste de tous les  $p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s)$  pour chaque  $\sigma \in B$  est formée des mêmes nombres peu importe  $j \in [1..\ell]$ , donc  $\sum_{\sigma \in B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s)$  est constant pour  $j \in [1..\ell]$ .

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{\pi \in A} Const \\ &= Const_2. \end{aligned}$$

$L_{ij}$  est donc identique pour chaque  $j \in [k + 1..k + \ell]$ , ce qui implique que  $\Delta_{ij}$  est aussi identique pour chaque  $j \in [k + 1..k + \ell]$ . On a donc  $\Delta_{ij} = 0, \forall j \in [k + 1..k + \ell]$ .

Toute la démarche ci-dessus étant valide pour n'importe quel  $i \in [1..k]$ , on a bel et bien  $\Delta_{ij} = 0, \forall (i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ .

2.  $A$  est uniformément équilibré :

Pour le cas où  $A$  est uniformément équilibré, la preuve étant parfaitement analogue, nous en présentons seulement les grandes lignes.

Soit un élément arbitraire  $j \in [k + 1..k + \ell]$ .

De manière parfaitement analogue au premier cas, il est possible de montrer en utilisant les théorèmes 30, 26 et 15, que  $\sum i \in [1..k] \Delta_{ij} = 0$ . Il reste à prouver que les termes de cette sommation sont tous égaux.

Ensuite, pour n'importe quel,  $i \in [1..k]$ , on a :

$$L_{ij} = \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{\sigma \in B} \sum_{\pi \in A} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s).$$

Par un argument analogue à celui du premier cas, pour les différentes valeurs possibles de  $i$ ,  $\sum_{\pi \in A} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s)$  est une sommation des mêmes termes dans un ordre différent. Donc,  $L_{ij}$  (et du coup  $\Delta_{ij}$ ) est identique  $\forall i \in [1..k]$ . On conclut donc que  $\Delta_{ij} = 0; \forall i \in [1..k]$ .

Toute la démarche ci-dessus étant valide pour n'importe quel  $j \in [k + 1..k + \ell]$ , on a bel et bien  $\Delta_{ij} = 0 \forall (i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ .

3.  $A$  et  $B$  sont symétriquement équilibrés :

Le raisonnement qui suit s'applique pour n'importe quelle paire  $(i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ . Tout comme les deux cas précédents, on analyse la valeur de  $L_{ij}$  :

$$L_{ij} = \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1,k+\ell)} \sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s)$$

La sommation qu'on souhaite analyser à l'intérieur de celle-ci est la suivante :

$$\sum_{(\pi, \sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s)$$

Dans les preuves des deux cas précédents, cette sommation était formée des mêmes termes peu importe  $(i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ . Dans le cas actuel, non. Par contre, la symétrie de  $A$  et  $B$  a des conséquences particulières. L'idée de la preuve qui suit repose sur le fait que la distribution des termes de la somme est totalement symétrique autour de leur moyenne.

Plus formellement, puisque  $A$  est symétrique, il existe une bijection  $f$  sur  $A$  telle que  $\forall \pi \in A, (f(\pi))_i^{-1} = k - \pi_i^{-1} + 1$ . De manière analogue, puisque  $B$  est symétrique, il existe une bijection  $g$  sur  $B$  telle que  $\forall \sigma \in B, (g(\sigma))_{j-k}^{-1} = k - \sigma_{j-k}^{-1} + 1$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s) \\
&= \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, k - (f(\pi))_i^{-1} + 1, \ell - (g(\sigma))_{j-k}^{-1} + 1, r, s)
\end{aligned}$$

Cependant,  $f$  et  $g$  sont des bijections sur des ensembles, donc itérer sur les différentes valeurs de  $(f(\pi), g(\sigma))$  pour tout  $(\pi, \sigma) \in A \times B$  est équivalent à itérer sur les valeurs de  $(\pi, \sigma)$  pour tout  $(\pi, \sigma) \in A \times B$ . On peut donc remplacer tous les  $f(\pi)$  et  $g(\sigma)$  par  $\pi$  et  $\sigma$  respectivement. On poursuit donc :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, k - \pi_i^{-1} + 1, \ell - \sigma_{j-k}^{-1} + 1, r, s) \\
&\stackrel{Thm33}{=} \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, k - r + 1, \ell - s + 1)
\end{aligned}$$

On a donc, globalement :

$$\begin{aligned}
L_{ij} &= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \sum_{\pi \in A} \sum_{\sigma \in B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, r, s) \\
&= \sum_{(r,s) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, k - r + 1, \ell - s + 1)
\end{aligned}$$

Maintenant, posons les changements de variables  $x = k - r + 1$ . La clé, ici, est que pour tout  $(r, s) \in \text{pairs}(1, k + \ell)$ ,  $r < s \Leftrightarrow k - r + 1 > \ell - s + 1 \Leftrightarrow x > y$ . et  $y = \ell - s + 1$ . On obtient qu'itérer sur tous les  $(r, s) \in \text{pairs}(1, k + \ell)$  est équivalent à itérer sur tous les  $(y, x) \in \text{pairs}(1, k + \ell)$ . On poursuit donc :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(y,x) \in \text{pairs}(1, k+\ell)} \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} p_{conj}(k, \ell, \pi_i^{-1}, \sigma_{j-k}^{-1}, x, y) \\
&\stackrel{Thm32}{=} \sum_{(\pi,\sigma) \in A \times B} R(\pi \sqcup \sigma)_{ij} \\
&= R_{ij}.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $L_{ij} = R_{ij}$ , donc  $\Delta_{ij} = 0$ .

Toute la démarche ci-dessus étant valide pour n'importe quel  $i \in [1..k]$ , on a bel et bien  $\Delta_{ij} = 0$ ,  $\forall (i, j) \in \text{hp}(k, \ell)$ .

□

Beaucoup de théorèmes ont été prouvés dans cette section. D'un côté, ces théorèmes sont plus généralisés que nécessaire pour leur utilisation dans la recherche d'ensembles automédiens inséparables. En effet, beaucoup moins de travail serait requis si le seul but de tous ces théorèmes était de prouver le théorème 38, utile pour la recherche d'ensembles automédiens inséparables (prochaine section). Paradoxalement, ces théorèmes ne sont pas assez généralisés pour le calcul pur et simple d'une médiane d'un produit de mélange de deux ensembles de permutations quelconques. Toutefois, les théorèmes prouvés offrent tout de même une base solide pour une généralisation encore plus vaste.

## 5.2. ENSEMBLES AUTOMÉDIANS INSÉPARABLES

Pour terminer, faisons un petit retour sur les ensembles automédiens. Dans le chapitre 3, il a été démontré que tout ensemble automédian séparable est une somme directe d'ensembles automédiens inséparables. Il suffit donc de caractériser les ensembles automédiens inséparables pour caractériser tous les ensembles automédiens.

Malheureusement, nous n'avons pas élucidé complètement les ensembles automédiens inséparables et n'avons pas trouvé de manière générale de les représenter. Les outils et résultats trouvés à la section précédente et au chapitre 4 permettent toutefois d'exhiber plusieurs classes d'ensembles automédiens inséparables.

**Théorème 37.** *Soit  $A \in \mathbb{S}_n$  un ensemble automédian. S'il est équilibré, alors il est aussi multicirculaire.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $A$  est équilibré, alors  $\mathcal{M}(A)$  est multicirculaire, selon le théorème 8.  $A$  est donc multicirculaire, Puisque  $A = \mathcal{M}(A)$ . □

Comme expliqué à la section 4.3, toute famille circulaire est un ensemble automédian inséparable. De plus, la conjecture 2, à la page 54, si elle est vraie, indique quels ensembles formés de l'union de deux familles circulaires sont automédiens.

Des ensembles automédiens multicirculaires formés de plus de deux familles circulaires peuvent être trouvés en utilisant des contraintes circulaires.

**Définition 35.** *Soit  $\pi \in \mathbb{S}_n$  et  $i, j, k \in [1..n]$ . On dira que  $\pi$  respecte la ***n*-contrainte circulaire**  $(i, j, k)$  si une seule des trois inégalités suivantes est fausses :  $\pi_i^{-1} < \pi_j^{-1}$ ,  $\pi_j^{-1} < \pi_k^{-1}$ ,  $\pi_k^{-1} < \pi_i^{-1}$ .*

Ces contraintes circulaires peuvent être utilisées comme suit : soit  $X$  un ensemble de  $n$ -contraintes circulaires. Posons  $A = \{\pi \in \mathbb{S}_n | \pi \text{ respecte toutes les contraintes de } X\}$ .

Pour de nombreux ensembles  $X$ , l'ensemble de permutations  $A$  généré sera automédian circulaire, mais pas tous. Nous n'avons pas trouvé de règle générale pour dire quels ensembles

de  $n$ -contraintes circulaires induisent des ensembles automédiens. C'est pourquoi nous ne nous attarderons pas plus sur cette méthode.

Finalement, il est possible de former des ensembles automédiens inséparables avec des ensembles automédiens inséparables plus petits, selon le théorème suivant :

**Théorème 38.** *Soit  $A \subset \mathbb{S}_k$  et  $B \subset \mathbb{S}_\ell$ , deux ensembles automédiens équilibrés. Alors,  $A \sqcup B$  est un ensemble automédian multicirculaire.*

DÉMONSTRATION. D'abord,  $A$  et  $B$  sont en fait multicirculaires, par le théorème 37. Ensuite,  $A \sqcup B$  est automédian puisque  $\mathcal{M}(A \sqcup B) \stackrel{thm36}{=} \mathcal{M}(A) \sqcup \mathcal{M}(B) = A \sqcup B$ . Puis,  $A \sqcup B$  est équilibré, selon le théorème 30, car  $A$  et  $B$  sont équilibrés. Finalement,  $A \sqcup B$  est multicirculaire, encore par le théorème 37.  $\square$

Malheureusement, tous les résultats de cette section ne s'appliquent qu'aux ensembles automédiens inséparables qui sont équilibrés. Qu'en est-t-il des ensembles automédiens inséparables non-équilibrés? En fait, aucun ensemble automédian inséparable non-équilibré n'a été trouvé lors de l'écriture de ce mémoire. Des tests confirment l'inexistence de tels ensembles lorsque  $n \leq 5$ , mais cet échantillon est très petit. Ceci amène donc la conjecture suivante, que nous proposons avec moins de certitude que les autres conjectures de ce mémoire :

**Conjecture 3.** *Tout ensemble automédian inséparable est équilibré, et donc multicirculaire.*

# CONCLUSION

---

Le problème de la médiane de permutations est un problème NP-difficile qui a été étudié sous divers angles par de nombreux chercheurs. Les différents travaux des dernières années ont proposé de nombreux algorithmes exacts et heuristiques pour le calcul de la médiane de permutations. Un bon nombre d'entre eux ont été abordés au cours de ce mémoire, dont la contribution s'est par la suite plutôt concentrée sur des classes spéciales du problème.

Nous avons d'abord exploré la classe des ensembles automédians. Le résultat principal de ce chapitre est que tout ensemble automédian peut être décomposé en une somme directe d'ensembles automédians inséparables.

Par la suite, au chapitre 4, une règle a été proposée pour calculer le consensus de classements cycliques, qui utilise la distance de Kendall- $\tau$ . Il a toutefois été prouvé que le calcul d'un consensus selon cette règle est NP-difficile, par une réduction du problème classique de la médiane vers celui-ci.

Ensuite, au chapitre 5, le produit de mélange a été défini pour les ensembles de permutations, afin d'en construire des plus gros avec des plus petits. De nombreuses propriétés de cette opération ont été prouvées, servant ultimement au calcul des médianes d'ensembles de permutations obtenus par produit de mélange.

Cependant, quelques questions sont restées sans réponse au cours de ce mémoire. Dans un premier temps, la classe des ensembles automédians inséparables n'a pas été complètement résolue et forme ainsi un problème mathématique intéressant. De plus, au chapitre 4, bien que la NP-difficulté de la règle que nous avons introduite a été prouvée, aucun algorithme n'est proposé pour améliorer son temps de calcul pour une instance d'au moins 3 ordres de préférence cyclique. Une borne minimale a donc été trouvée à la difficulté du problème, mais il serait intéressant de lui trouver une borne maximale. Finalement, beaucoup de propriétés du produit de mélange ont été prouvées, mais bien d'autres son encore à trouver. Il y a aussi, de manière générale, quelques conjectures non prouvées dans ce mémoire. Tout cela laisse de la place à bien des possibilités de recherche future.



# Bibliographie

---

- [1] N. Ailon, M. Charikar, and N. Newman. Aggregating inconsistent information : ranking and clustering. *Journal of the ACM*, 55(5) :pp 1–27, 2008.
- [2] A. Ali and M. Meila. Experiments with Kemeny ranking : What works when ? *Mathematical Social Sciences*, 64(1) :28–40, 2012.
- [3] K.J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, 2nd edition, 144 pages, 1970.
- [4] G. Bachmeier, F. Brandt, C. Geist, P. Harrenstein, K. Kardel, D. Peters, and H.G. Seedig. k-majority digraphs and the hardness of voting with a constant number of voters. *ArXiv e-prints*, 2017. [arXiv:1704.06304](https://arxiv.org/abs/1704.06304).
- [5] N. Betzler, R. Bredereck, and R. Niedermeier. Theoretical and empirical evaluation of data reduction for exact Kemeny rank aggregation. *Autonomous Agents and Multi- Agent Systems*, 28(1) :721–748, 2014.
- [6] G. Blin, M. Crochemore, S. Hamel, and S. Vialette. Median of an odd number of permutations. *Pure Mathematics and Applications*, 21(2) :161–175, 2011.
- [7] Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1781.
- [8] S. Chanas and P. Kobylanski. A new heuristic algorithm solving the linear ordering problem. *Computational Optimization and Applications*, 6(2) :191–205, 1996.
- [9] P. Charbit, S. Thomassé, and A. Yeo. The minimum feedback arc set problem is np-hard for tournaments. *Comb. Probab. Comput.*, 16(1) :1–4, January 2007. URL : <http://dx.doi.org/10.1017/S0963548306007887>, doi:[10.1017/S0963548306007887](https://doi.org/10.1017/S0963548306007887).
- [10] I. Charon and O. Hudry. A branch-and-bound algorithm to solve the linear ordering problem for weighted tournaments. *Discrete Applied Mathematics*, 154(15) :2097 – 2116, 2006. International Symposium on Combinatorial Optimization CO'02. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X06000503>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.04.020>.
- [11] T. Coleman and A. Wirth. Ranking tournaments : Local search and a new algorithm. *Journal of Experimental Algorithmics*, 14, article 6, 9 pages, 2009.
- [12] Condorcet. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendue à la pluralité des voix. *Paris : Imprimerie royale*, 1785.

- [13] V. Conitzer, A. Davenport, and J. Kalagnanam. Improved bounds for computing Kemeny rankings. In *Proceedings of the 21st National Conference on Artificial Intelligence - Volume 1, AAAI'06*, pages 620–626. AAAI Press, 2006.
- [14] A. H. Copeland. A reasonable social welfare function. *University of Michigan Seminar on Applications of Mathematics to the social sciences*, 1951.
- [15] A. D'Ambrosio, S.A. Amodio, and C. Iorio. Two algorithms for finding optimal solutions of the Kemeny rank aggregation problem for full rankings. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 8(2) :198–213, 2015. URL : <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/ejasa/article/view/14986>.
- [16] A. Davenport and J. Kalagnanam. A computational study of the Kemeny rule for preference aggregation. In *Proceedings of the 19th National Conference on Artificial Intelligence, AAAI'04*, pages 697–702. AAAI Press, 2004.
- [17] C. Desharnais and S. Hamel. Medians of permutations : the automedian case. In *Proceedings of 15th International Permutation Patterns Conference*, 2017.
- [18] P. Diaconis and R.L. Graham. Spearman's footrule as a measure of disarray. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(2) :262–268, 1977.
- [19] C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, and D. Sivakumar. Rank aggregation methods for the web. In *Proceedings of the 10th international conference on World Wide Web, WWW '01*, pages 613–622. ACM, 2001. doi:10.1145/371920.372165.
- [20] Mitchell J. et B.Borchers. Solving linear ordering problems with a combined interior point/simplex cutting plane algorithm. *High performance optimization*, pages 349–366, 2000.
- [21] D.S. Felsenthal and H. Nurmi. Two types of participation failure under nine voting methods in variable electorates. *Public Choice*, 168(1-2) :115–135, 2016.
- [22] H. Fernau, F.V. Fomin, D. Lokshtanov, M. Mnich, G. Philip, and S. Saurabh. Ranking and drawing in subexponential time. In *proceedings of the 21st International Workshop on Combinatorial Algorithms*, pages 337–348, 2011. doi:10.1007/978-3-19222-7\_34.
- [23] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Communications*, pages 85–103, 1972.
- [24] M. Karpinski and W. Schudy. Faster algorithms for feedback arc set tournament, Kemeny rank aggregation and betweenness tournament. In *proceeding of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation, LNCS 6506*, pages 3–14, 2010.
- [25] C. Kenyon-Mathieu and W. Schudy. How to rank with few errors. *STOC07*, pages 95–103, 2007.
- [26] R. Milosz and S. Hamel. Medians of permutations : when  $A = M(A)$ . In *Proceedings of 12th International Permutation Patterns Conference*, pages 68–71, 2014.
- [27] R. Milosz and S. Hamel. Medians of permutations : Building constraints. In Sathish Govindarajan and Anil Maheshwari, editors, *Algorithms and Discrete Applied Mathematics*, pages 264–276. Springer International Publishing, 2016.

- [28] R. Milosz and S. Hamel. Exploring the median of permutations problem. *Journal of Discrete Algorithm*, 52–53 :92–111, 2018.
- [29] R. Milosz, S. Hamel, and A. Pierrot. Median of 3 permutations, 3-cycles and 3-hitting set problem. In *Proceedings of the 28th International Workshop On Combinatorial Algorithms, LNCS 10979*, pages 224–236, 2018.
- [30] J. Guo R. Niedermeier F.A. Rosamond N. Betzler, M.R. Fellows. Fixed-parameter algorithms for Kemeny rankings. *Theoretical Computer Science*, 410 :4554–4570, 2009.
- [31] N. Nishimura and N. Simjour. Parameterized enumeration of (locally-) optimal aggregations. In *proceedings of the 13th International Symposium on Algorithms and Data Structures, LNCS 8037*, pages 512–523, 2013. doi:10.1007/978-3-642-40104-6\_44.
- [32] L. Page, S. Brin, R. Motwani, and T. Winograd. The pagerank citation ranking : Bringing order to the web. Technical report, Stanford InfoLab, 1999.
- [33] F. Schalekamp and A. van Zuylen. Rank aggregation : Together we’re strong. In *Proceedings of the 11th SIAM Workshop on Algorithm Engineering and Experiments*, pages 38–51, 2009. doi:10.1137/1.9781611972894.4.
- [34] N. Simjour. Improved parameterized algorithms for the Kemeny aggregation problem. In *proceedings of the 4th International Workshop on Parameterization and Exact Computation, LNCS 5917*, pages 312–323, 2009. doi:10.1007/978-3-642-11269-0\_26.
- [35] T. N. Tideman. Independence of clones as a criterion for voting rules. *Social Choice and Welfare*, 4(3) :185–206, 1987. URL : <https://doi.org/10.1007/BF00433944>, doi:10.1007/BF00433944.
- [36] M. Truchon. An extension of the Condorcet criterion and Kemeny orders. *Internal Report, Université Laval*, page 16 pages, 1998.
- [37] A. van Zuylen and D.P. Williamson. Deterministic pivoting algorithms for constrained ranking and clustering problems. *Mathematics of Operations Research*, 34(3) :594–620, 2009. doi:10.1287/moor.1090.0385.
- [38] H.P. Young. Condorcet’s theory of voting. *The American Political Science Review*, 82(4) :1231–1244, 1988.
- [39] H.P. Young and A. Levenglick. A consistent extension of condorcet’s election principle. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35(2) :285–300, 1978.



# Annexe A

---

## COMPLÉMENT DE PREUVE

Cette annexe est une succession de théorèmes qui servent à prouver deux affirmations utilisées lors de la preuve du théorème 23. Cette partie de la preuve a été mise en annexe puisqu'elle est longue et d'une certaine manière incomplète (preuves analogues omises). Avec complétion, elle aurait brisé le rythme de lecture du mémoire.

**Note:** il faut avoir lu complètement les deux premières étapes dans la preuve du théorème 23 avant de lire le complément de preuve ci-dessous, car ici, nous récupérons toute la notation et les résultats trouvés jusqu'à la fin de l'étape 2.

Voici maintenant des théorèmes permettant de prouver les deux affirmations à la page 56, suivis par la preuve de celles-ci.

**Théorème 39.** *Soit  $v$  un élément original et  $n + 1 \leq i \leq n + k$  un élément supplémentaire. Si  $i < \frac{n+k+1}{2}$ , alors  $\Delta(B)_{vi} > 0$ . D'autre part, si  $i > \frac{3n+k}{2}$ , alors,  $\Delta(B)_{vi} < 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Dans toute permutation  $\psi \in B$  telle que  $\psi = \pi \oplus I_k$ ,  $v$  précède évidemment  $i$ , par définition de la somme directe. De plus, par construction, pour tout élément supplémentaire  $i$ , on a  $\psi_i^{-1} = i$ . Maintenant, la différence de position, qui vaut  $i - \psi_v^{-1}$ , correspond au nombre de permutation de  $\text{circ}(\psi)$  dans lesquelles cet ordre est renversé, c'est-à-dire  $i$  précède  $v$ . On aura donc que  $v$  précède  $i$  (resp.  $i$  précède  $v$ ) dans la majorité des permutations de  $\text{circ}(\psi)$  si et seulement si cette différence de position vaut moins (resp. plus) de la moitié de la longueur des permutations,  $\frac{n+k}{2}$ . D'une part, si  $i < \frac{n+k+1}{2}$ , la différence positionnelle vaut, tout au plus,  $i - \psi_v^{-1} \leq i - 1 < \frac{n+k-1}{2}$ , ce qui est moins de la moitié de la longueur des permutations, donc  $v$  précède  $i$  dans la majorité des permutations de  $\text{circ}(\psi)$ . En combinant pour tous  $\psi$   $n$ -décomposable de  $B$ , on a  $\Delta(B)_{vi} > 0$ .

D'autre part, si  $i > \frac{3n+k}{2}$ , la différence positionnelle vaut, au moins,  $i - \psi_v^{-1} \geq i - n > \frac{3n+k}{2} - n = \frac{n+k}{2}$ , donc donc  $i$  précède  $v$  dans la majorité des permutations de  $\text{circ}(\psi)$ . En combinant pour tous  $\psi$   $n$ -décomposable de  $B$ , on a  $\Delta(B)_{vi} < 0$ .

□

**Théorème 40.** Soit  $n < i < n+k$ . Alors,  $\forall v \in [1..n+k] \setminus \{i, i+1\}$ , on a  $L(B)_{vi} - L(B)_{v,i+1} = m$  et  $\Delta(B)_{vi} - \Delta(B)_{v,i+1} = 2m$

DÉMONSTRATION.  $\forall \pi \in A$ , une seule permutation de  $\text{circ}(\pi \oplus I_k)$  a des éléments entre  $i$  et  $i+1$  : c'est la permutation ayant  $i+1$  et  $i$  en première et dernière positions respectivement. Dans cette permutation,  $v$  est donc positionné entre les deux. En regroupant  $\forall \pi \in A$ , on obtient donc  $L(B)_{vi} - L(B)_{v,i+1} = m_A = m$ . Parce que  $\Delta(B) = L(B) - R(B) = L(B) - (m_B - L_B) = 2L(B) - m_B$ , on a aussi  $\Delta(B)_{ji} - \Delta(B)_{j,i+1} = 2L(B)_{ji} - m_B - 2L(B)_{j,i+1} + m_B = 2(L(B)_{ji} - L(B)_{j,i+1}) = 2m$   $\square$

**Corollaire 11.**  $\forall n < i \neq j < n+k$

$$\Delta(B)_{v;i} - \Delta(B)_{v;i+1} = \Delta(B)_{v;j} - \Delta(B)_{v;j+1}$$

**Théorème 41.** Soit les entiers non-négatifs  $r$  et  $s$  tels que  $r-s$  et  $r+s$  sont des éléments supplémentaires. Soit  $v$  un élément original. Alors,

$$\Delta(B)_{v;r-s} + \Delta(B)_{v;r+s} = 2\Delta(B)_{v;r}$$

DÉMONSTRATION. Cela se prouve par induction sur  $s$  : l'égalité est évidente pour  $s=0$ , et en supposant que  $\Delta(B)_{v;r-s} + \Delta(B)_{v;r+s} = 2\Delta(B)_{v;r}$ , on a

$$\begin{aligned} & \Delta(B)_{v;r-(s+1)} + \Delta(B)_{v;r+(s+1)} \\ &= \Delta(B)_{v;r-s} - 2m + \Delta(B)_{v;r+(s+1)} + 2m \\ &= \Delta(B)_{v;r-s} + \Delta(B)_{v;r+(s+1)} \\ &= 2\Delta(B)_{v;r} \end{aligned}$$

$\square$

**Théorème 42.** Soit les entiers non-négatifs  $r$  et  $s$  tels que  $r-s$  et  $r+s$  sont des éléments supplémentaires. Soit  $v$  un élément original. Alors,

$$\sum_{i=r-s}^{i=r+s} \Delta(B)_{vi} = (2s+1)\Delta(B)_{vr}$$

DÉMONSTRATION. Cela se démontre aussi par induction sur  $s$ . C'est trivial pour  $s=0$ , puis, en supposant que  $\sum_{i=r-s}^{i=r+s} \Delta(B)_{vi} = (2s+1)\Delta(B)_{vr}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=r-(s+1)}^{i=r+(s+1)} \Delta(B)_{vi} \\ &= \sum_{i=r-s}^{i=r+s} \Delta(B)_{vi} + \Delta(B)_{v;r-s-1} + \Delta(B)_{v;r+s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(2s + 1)\Delta(B)_{vr} + 2\Delta(B)_{vr} \\
&=(2(s + 1) + 1)\Delta(B)_{vr}
\end{aligned}$$

□

C'est à partir d'ici que les affirmations en page 56 peuvent enfin être prouvées.

1. Preuve de l'affirmation 1 : Soit  $z$  l'élément supplémentaire précédent  $v$  dans  $\sigma$ .  $\sigma$  peut donc être écrite sous forme concaténée  $PKvQ$ , où  $K$  est la liste des éléments supplémentaires de  $n + 1$  à  $z$  et  $P$  est par conséquent formé uniquement d'éléments originaux. Ors, en utilisant les théorèmes 3 et 42, si  $z - (n + 1)$  est pair, alors :

$$\begin{aligned}
&d_{\text{KT}}(PKvQ, B) - d_{\text{KT}}(PvKQ, B) \\
&\stackrel{\text{Thm3}}{=} \sum_{i=n+1}^z \Delta(B)_{vi} \\
&\stackrel{\text{Thm42}}{=} (z - n)\Delta(B)_{v; \frac{z+n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Ors,  $z < u$  donc  $\frac{z+n+1}{2} < \frac{u+n+1}{2} \leq \frac{n+\frac{k+1}{2}+n+1}{2} = \frac{k}{4} + n + \frac{3}{2}$ . Cette dernière valeur est plus petite que  $\frac{n+k+1}{2}$  (intuitivement, le terme dominant est  $\frac{k}{4}$  d'un côté,  $\frac{k}{2}$  de l'autre, donc  $\frac{n+k+1}{2}$  est la plus grande des deux valeurs dès que  $m \geq 2$  et  $n \geq 5$ ), donc le théorème 39 nous donne que  $\Delta(B)_{v; \frac{z+n+1}{2}} > 0$ . Ainsi,  $PKvQ$  ne peut pas être une médiane. Contradiction.

Dans le cas où  $z - (n + 1)$  est impair, le raisonnement est similaire. On obtient

$$\begin{aligned}
&d_{\text{KT}}(PKvQ, B) - d_{\text{KT}}(PvKQ, B) \\
&\stackrel{\text{Thm3}}{=} \Delta(B)_{v; n+1} + \sum_{i=n+2}^z \Delta(B)_{vi} \\
&\stackrel{\text{Thm42}}{=} \Delta(B)_{v; n+1} + (z - n - 1)\Delta(B)_{v; \frac{z+n+2}{2}}
\end{aligned}$$

Par un raisonnement presque identique, on trouve que  $\Delta(B)_{v; \frac{z+n+2}{2}} > 0$  et puisque  $\Delta(B)_{vn} > 0$  on a  $d_{\text{KT}}(PKvQ, B) > d_{\text{KT}}(PvKQ, B)$ , donc  $PKvQ$  n'est pas une médiane. Contradiction.

2. Preuve de l'affirmation 2 : L'affirmation 2 peut être prouvée de manière similaire en utilisant les mêmes théorèmes ci-dessus.



