

Université de Montréal

Domination éternelle dans les graphes

par

Virgélot Virgile

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

3 décembre 2018

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

Domination éternelle dans les graphes

présenté par

Virgilot Virgile

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer

(président-rapporteur)

Geña Hahn

(directeur de recherche)

Benjamin Seamone

(co-directeur)

Iosif Polterovich

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

29 janvier 2019

Sommaire

Le présent mémoire traite du problème de domination éternelle dans les graphes. Nous considérons trois modèles différents du problème, à savoir le modèle du garde, de l'anglais *one-guard moves model*, le modèle des gardes, de l'anglais *all-guards move model*, et le modèle fractionnaire. Dans un premier temps, nous étudions quelques questions fondamentales liées à la relation entre le nombre de stabilité, le nombre de domination éternelle et la cardinalité d'une couverture minimum d'un graphe dans le modèle du garde. Dans un second temps, nous proposons une stratégie qui borne supérieurement par $\frac{mn}{7} + O(m + n)$ le nombre de domination éternelle de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ dans le modèle des gardes. Finalement, nous nous inspirons de quelques résultats de la théorie fractionnaire des graphes pour introduire une analogue fractionnaire du problème.

Mots-clés: Théorie des graphes, protection de graphes, ensemble dominant, ensemble dominant fractionnaire, domination éternelle.

Summary

In this thesis, we study the eternal domination problem in graphs. We consider three different models of the problem, namely the one-guard moves model, the all-guards move model and the fractional model. First of all, we study some fundamental questions related to the relation between the independence number, the eternal domination number and the clique cover number of a graph in the one-guard moves model. Second, we propose a strategy which gives an upper bound of $\frac{mn}{7} + O(m + n)$ on the eternal domination number of the strong grid $P_m \boxtimes P_n$ in the all-guards move model. In the end, inspired by the fundamental results in fractional graph theory, we introduce a fractional analogue of the eternal domination problem.

Keywords: Graph theory, graph protection, dominating set, fractional dominating set, eternal domination.

Table des matières

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xiii
Liste des sigles et des abréviations	xv
Remerciements	xvii
Introduction	1
Chapitre 1. Notions de base	5
1.1. Graphes	5
1.2. Familles de graphes	10
1.3. Fonctions et opérations sur les graphes	11
1.3.1. Fonctions de graphes	11
1.3.1.1. Fonction coloration	11
1.3.1.2. Fonction poids	13
1.3.2. Opérations sur les graphes	14
1.4. Graphes de Cayley	16
Chapitre 2. Modèle du garde	19
2.1. Nombre de stabilité et cardinalité d'une couverture minimum	21
2.1.1. Graphes de Mycielski	21

2.1.2.	Une borne supérieure sur γ^∞ en fonction du nombre d'indépendence	25
2.1.3.	Une conjecture de Goddard	27
2.2.	Triplets réalisables	31
2.2.1.	Famille \mathcal{G}	33
2.3.	Produit cartésien de graphes	36
2.3.1.	Produit cartésien d'un graphe par K_2	36
2.3.2.	Une conjecture de type Vizing	37
Chapitre 3.	Modèle des gardes	41
3.1.	Résultats préliminaires	42
3.1.1.	Dominer éternellement un arbre	46
3.1.1.1.	Algorithme de Klostermeyer-MacGillivray	47
3.2.	Dominer éternellement une grille forte	47
3.2.1.	La stratégie d'alternance	50
Chapitre 4.	Modèle fractionnaire	59
4.1.	Résultats préliminaires	59
4.2.	Dominer éternellement un arbre	64
4.3.	Famille $\mathcal{G}_{t,d}$	66
4.4.	Graphes k-connexes	68
4.5.	Graphes de Cayley	69
4.5.1.	Dominer éternellement $C_n \square K_2$	70
4.5.2.	Dominer éternellement $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$	73
4.6.	Produit de graphes	75
Index	79
Bibliographie	83

Liste des tableaux

- 3.1 Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans le sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques. 52
- 3.2 Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans le sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques. 53

Liste des figures

1.1	La grille $P_4 \square P_4$ et la grille forte $P_4 \boxtimes P_4$	15
2.1	\mathcal{M}_2^4 , Graphe de Grötzsch	22
3.1	Graphe de Petersen ($PG_{5,2}$)	44
3.2	Un ensemble dominant \mathcal{D}_{ij} de \mathcal{F} et un ensemble dominant \mathcal{D}'_{ij} de \mathcal{F}' dans deux sous-grilles fortes induites $P_{10} \boxtimes P_{10}$	48
3.3	Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans un sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques possibles. Le sommet coloré en rouge est le sommet attaqué et les gardes colorés en noir aux quatre coins sont ceux que nous avons fixés	55
3.4	Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans un sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques possibles. Le sommet coloré en rouge est le sommet attaqué et les gardes colorés en noir aux quatre coins sont ceux que nous avons fixés	56
3.5	Position initiale des gardes dans la grille forte $P_{25} \boxtimes P_{20}$ avant qu'une attaque survienne sur le sommet $(2,19)$	57
3.6	Position finale des gardes dans la grille forte $P_{25} \boxtimes P_{20}$ après qu'une attaque survient sur le sommet $(2,19)$	58
4.1	Position des gardes (en noir) dans un ensemble dominant efficace de $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{\pm 1, 6\})$ et dans un ensemble dominant efficace de $C_8 \square K_2$	72

Liste des sigles et des abréviations

$[n]$	$\{1, 2, \dots, n\}$
\mathbb{Z}_n	$\{0, 1, \dots, n - 1\}$
$\binom{X}{2}$	Collection de tous les sous-ensembles à deux éléments de X
$X \sqcup Y$	$X \cup Y$ avec $X \cap Y = \emptyset$
$G = (V, E)$	Graphe ayant pour ensemble de sommets V et d'arêtes E
\overline{G}	Complémentaire du graphe G
$G[S]$	Sous-graphe de G induit par un sous-ensemble de sommets S
$V \setminus S$	Ensemble des éléments de V qui ne sont pas dans S
$G - S$	Sous-graphe de G induit par les sommets de $V \setminus S$
δ	Degré minimum
Δ	Degré maximum
κ	Nombre de connexité
α	Nombre de stabilité
θ	Cardinalité d'une couverture minimum
ω	Cardinalité d'une clique maximum
χ	Nombre chromatique

$d_G(u, v)$	Distance entre les sommets u et v dans G
γ	Nombre de domination
γ_f	Nombre de domination fractionnaire
γ^∞	Nombre de domination éternelle dans le modèle du garde
γ_m^∞	Nombre de domination éternelle dans le modèle des gardes
γ_f^∞	Nombre de domination éternelle dans le modèle fractionnaire
K_n	Graphe complet à n sommets
$K_{m,n}$	Graphe biparti complet
P_n	Chaîne de longueur n
C_n	Cycle de longueur n
W_n	Roue à $n + 1$ sommets
$KG_{n,k}$	Graphe de Kneser
$PG_{n,k}$	Graphe de Petersen généralisé

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner ma reconnaissance.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'endroit de mon directeur de recherche, Dr. Gena Hahn, et de mon co-directeur de recherche, Dr. Benjamin Seamone, pour la qualité de leur encadrement. Leur soutien total et inconditionnel ainsi que la confiance qu'ils ont su placer en moi tout au long de ma maîtrise sont ce qui ont mené à l'achèvement de ce mémoire. Je remercie également Dr. Gary MacGillivray pour ses multiples conseils et commentaires adressés à l'égard de ce mémoire lors de sa visite à Montréal.

Ensuite, je tiens à remercier du fond du coeur ma famille, spécialement mes très chers parents, Jacob et Belone, et mes soeurs, Kathiana et Randale, pour leur amour, leur compréhension aussi bien que leur support durant toutes mes études. Je ne saurais arriver jusqu'ici sans eux et pour cela je suis infiniment reconnaissant.

Finalement, un énorme merci à tous ceux et celles, spécialement Rose Daphney Cheres-tal, qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail. Leurs conseils et leurs mots d'encouragement m'ont beaucoup soutenu et m'ont donné la force nécessaire pour surmonter les obstacles qui se sont dressés sur mon chemin.

Introduction

La théorie des graphes, grâce à ses nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'informatique, la biologie, la physique ou la chimie, pour ne citer que ceux-là, est l'une des branches des mathématiques qui ont connu d'énormes progrès au cours des dernières décennies. Compte tenu du fait qu'elle peut être utilisée pour modéliser toute collection d'éléments mis en relation les uns avec les autres, en particulier tout problème lié à la notion de réseau, nous la retrouvons presque partout. À titre d'illustration, la structure du lien d'un site web en informatique peut être modélisée par un graphe dont les sommets représentent les pages web et dont les arêtes représentent les liens entre les pages. En physique et en chimie, la théorie des graphes est utilisée pour modéliser les molécules car ces derniers peuvent être représentés par des graphes dont les sommets représentent les atomes et dont les arêtes représentent les liaisons chimiques entre les atomes. Ce faisant, cette théorie est un outil très puissant pour résoudre certains problèmes de la vie courante.

Bien que les origines historiques des problèmes de protection de graphes par des gardes mobiles remontent à l'ancien Empire Romain, ce n'est que dans les années 1990 que des études modernes sur ces problèmes ont été formellement effectuées d'après [26]. Les quatre articles suivants [3, 33, 36, 34], publiés respectivement en 1995, 1997, 1999 et 2000 ont initialisé la recherche dans le domaine en étudiant, du point de vue mathématique, les stratégies de défense de l'Empire Romain contre les ennemis extérieurs sous l'empereur Constantin 1er. Le problème de domination éternelle est aussi un problème de protection de graphe par des gardes mobiles et consiste à trouver le nombre minimum de gardes qu'il faut placer sur les sommets d'un graphe (au plus un garde peut être placé sur chaque sommet) pour protéger ce graphe contre une suite infinie d'attaques à temps discret. Chaque attaque survient sur l'un des sommets du graphe et uniquement les gardes placés dans le voisinage

du sommet attaqué peuvent être utilisés pour le défendre. Dans ce cas, le garde choisi pour répondre à l'attaque est déplacé vers le sommet attaqué et occupe cette nouvelle position jusqu'à ce que sa présence soit nécessaire pour répondre à une prochaine attaque. Les deux premiers modèles étudiés furent respectivement le modèle du garde, de l'anglais *one-guard moves model*, introduit par Burger et *al.* dans [7] et le modèle des gardes, de l'anglais *all-guards move model*, introduit par Goddard et *al.* dans [13]. La différence entre les deux modèles est que dans le modèle du garde, uniquement le garde qui répond à l'attaque est autorisé à être déplacé à chaque étape tandis que dans le modèle des gardes, tous les autres gardes sont aussi autorisés à être déplacés à chaque étape selon qu'il existe une meilleure position qu'ils puissent occuper après que le garde qui répond à l'attaque est déplacé. Plusieurs autres modèles de ce problème ont également été introduits. C'est le cas de: *m-eternal vertex cover* [24, 11, 2], *eternal total domination* [24], *eternal connected domination* [24], *eviction model* [19], *eternal independent dominating sets* [18], *secure independent sets* [32].

Parmi les différents modèles mentionnés au paragraphe précédent, nous ne considérons que les deux premiers dans ce mémoire. Dans le but de permettre à notre étude d'être accessible à tout un chacun, le premier chapitre est consacré à la définition de certains termes du langage propre au domaine et à la présentation de quelques résultats classiques de la théorie des graphes. Une étude du modèle du garde suit au second chapitre dans lequel nos principaux résultats sont les suivants. D'abord, nous prouvons au théorème 2.2.5 et au corollaire 2.2.9 l'existence d'une famille de graphes pour une classe infinie de triplets d'entiers strictement positifs, ce qui répond à l'une des questions de Klostermeyer et de MacGillivray dans [22]. Ensuite, nous présentons au théorème 2.3.3 une classe infinie de contre-exemples à la conjecture 2.3.1 de Klostermeyer et de Mynhardt concernant le nombre de domination éternelle du produit cartésien d'un graphe par K_2 . Nous concluons par quelques résultats partiels concernant la conjecture 2.3.5 de type Vizing.

Le troisième chapitre porte sur le modèle des gardes. Dans ce modèle, le nombre de domination éternelle de la grille $P_m \square P_n$ a fait l'objet de beaucoup d'attention au cours des dernières années. En effet, Lamprou et *al.* ont prouvé dans [27] que le nombre de

domination éternelle de la grille $P_m \square P_n$ est borné supérieurement par $\frac{mn}{5} + O(m + n)$. Ce dernier étant aussi le nombre de domination de la grille $P_m \square P_n$ d'après [8]. En ce qui concerne la grille forte $P_m \boxtimes P_n$, Finbow et *al.* ont récemment prouvé que le nombre de domination éternelle de ce graphe est borné supérieurement par $\frac{mn}{6} + O(m + n)$, ce résultat non publié nous a été communiqué au 6ème congrès canadien de mathématiques discrètes et algorithmiques. Il existait encore un très grand écart entre la meilleure borne supérieure connue $\frac{mn}{6} + O(m + n)$ et la meilleure borne inférieure connue car cette dernière est le nombre de domination de la grille forte $\frac{mn}{9} + O(m + n)$. Notre résultat dans ce chapitre est inspiré de la méthode de Lamprou et *al.* dans [27] et consiste en une stratégie qui borne supérieurement par $\frac{mn}{7} + O(m + n)$ le nombre de domination éternelle de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$. Ceci a été un travail d'équipe fait en collaboration avec les chercheurs suivants: Alizée Gagnon, Alexander Hassler, Jerry Huang, Aaron Krim-Yee, Fionn Mc Inerney, Ben Seamone et Andrés Mejía Zacarías. Au moment où ce mémoire était en train d'être finalisé, un autre résultat de Mc Inerney et *al.* a été annoncé dans [29]. Ce résultat montre que le nombre de domination éternelle de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ est borné supérieurement par $\frac{mn}{9} + O(m\sqrt{n})$ avec $m \geq n$. Nous en discuterons brièvement à la fin du chapitre 3.

La théorie fractionnaire des graphes est née de l'observation qu'un problème NP-complet peut devenir un problème polynomial si nous ne l'interprétons pas de façon discrète mais de façon continue. Ainsi, elle permet aux mathématiciens non seulement de simplifier certains problèmes de la théorie des graphes mais encore d'élargir le champ d'application de cette dernière. Inspirés des résultats fondamentaux de la théorie fractionnaire des graphes, nous proposons au dernier chapitre un modèle fractionnaire du problème de domination éternelle. Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont nouveaux et ont été trouvés à l'assistance d'autres chercheurs : Devvrit Khatri, Aaron Krim-Yee, Nithish Kumar, Gary MacGillivray, Ben Seamone et AnQi Xu.

Chapitre 1

Notions de base

Le présent chapitre a pour objet de définir certains termes propres à la théorie des graphes et de présenter quelques résultats préliminaires dans le domaine. Quoique nous supposions que les notions de base de la théorie des ensembles sont connues du lecteur, les notations utilisées tout au long du mémoire sont aussi définies dans la liste des sigles et des abréviations.

1.1. Graphes

Un **graphe** G est un couple (V, E) où V est un ensemble dont les éléments sont appelés **sommets** et E est un sous-ensemble de $\binom{V}{2}$ dont les éléments sont appelés **arêtes**. Sauf indication contraire, tous les graphes mentionnés dans ce mémoire sont finis, c'est-à-dire qu'ils ont un ensemble fini de sommets. En pareil cas, la cardinalité de V est appelée l'**ordre** du graphe G . Si plus de clarté est nécessaire, alors nous écrirons $G = (V(G), E(G))$. Un graphe est souvent représenté dans un plan par une figure géométrique constituée de points (qui représentent ses sommets) et de lignes (qui représentent ses arêtes) reliant deux à deux certains de ces points. Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un **sous-graphe** d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. De plus, H est un **sous-graphe couvrant** de G si $V(H) = V(G)$ tandis que H est un **sous-graphe induit** de G si $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Si S est un sous-ensemble de sommets de $V(G)$, alors le sous-graphe de G induit par les sommets de S est noté $G[S]$ et le sous-graphe de G induit par les sommets de $V(G) \setminus S$ est noté $G - S$.

Deux sommets $u, v \in V$ sont **adjacents** si $\{u, v\} \in E$; dans un tel cas, u est un **voisin** de v de même que v est un voisin de u . Un sommet u est un **voisin privé** d'un sommet v

par rapport à un ensemble de sommets S si u n'a que v comme voisin dans S . Une arête $\{u, v\}$ est dite **incidente** aux sommets u et v . Notons que pour plus de commodité, nous écrivons uv au lieu de $\{u, v\}$. Le **voisinage ouvert** d'un sommet v , noté $N(v)$ ou $N_G(v)$, est l'ensemble de tous les voisins de v tandis que le **voisinage fermé** de v ou **voisinage** de v , noté $N[v]$ ou $N_G[v]$, est l'ensemble $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le voisinage ouvert d'un sous-ensemble de sommets S , noté $N(S)$ ou $N_G(S)$, est l'ensemble de tous les sommets de G n'appartenant pas à S et qui ont au moins un voisin dans S tandis que le voisinage fermé de S ou voisinage de S , noté $N[S]$ ou $N_G[S]$, est l'ensemble $N[S] = N(S) \cup S$. Le **degré** d'un sommet v , noté $d(v)$ ou $d_G(v)$, est la cardinalité du voisinage ouvert de v . Le **degré minimum** de G , noté $\delta(G)$, est la plus petite valeur des degrés des sommets de G tandis que le **degré maximum** de G , noté $\Delta(G)$, est la plus grande valeur des degrés des sommets de G . Un **sommet universel** est un sommet adjacent à tous les autres sommets du graphe. Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré; de surcroît, le graphe est dit **d -régulier** si tous ses sommets sont de degré d . Un graphe **cubique** est un graphe 3-régulier.

Un **stable** est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents. L'ensemble vide est un stable qui n'a aucun sommet. Un stable est dit **maximal** si tout sommet du graphe n'appartenant pas à ce stable est adjacent à au moins un sommet du stable, il est dit **maximum** s'il est de plus grande cardinalité parmi tous les stables du graphe. Notons qu'un stable maximum est aussi un stable maximal mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Un stable maximum n'est pas nécessairement unique. Le **nombre de stabilité** d'un graphe G , noté $\alpha(G)$, est la cardinalité d'un stable maximum de G . Une **clique** est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents. L'ensemble vide est une clique qui n'a aucun sommet. Une clique est dite **maximale** si tout sommet du graphe n'appartenant pas à cette clique n'est pas adjacente à au moins un sommet de la clique, elle est dite **maximum** si elle est de plus grande cardinalité parmi toutes les cliques du graphe. Comme pour les stables, une clique maximum est aussi une clique maximale mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Une clique maximum n'est pas nécessairement unique. La cardinalité d'une clique maximum de G est notée $\omega(G)$. Une **couverture par cliques** d'un graphe G ou **couverture** d'un graphe G est une partition des sommets de G en cliques. Une **couverture minimum** de G est une partition des sommets de G en un nombre minimum

de cliques. La cardinalité minimum d'une couverture par cliques de G est donc la cardinalité d'une couverture minimum de G et est notée $\theta(G)$. En d'autres mots, $\theta(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \text{il existe des cliques } C_1, C_2, \dots, C_k \text{ telles que } \cup_{i=1}^k C_i = V(G)\}$, c'est-à-dire le nombre minimum de cliques dont la réunion contient tous les sommets de G .

Observation 1.1.1. *Soit G un graphe et H un sous-graphe induit de G . Alors, nous avons:*

- (1) $\alpha(G) \geq \alpha(H)$
- (2) $\omega(G) \geq \omega(H)$
- (3) $\theta(G) \geq \theta(H)$

DÉMONSTRATION. Le graphe H étant un sous-graphe induit du graphe G ; alors, un stable maximum de H est un stable (pas nécessairement maximum) de G , une clique maximum de H est une clique (pas nécessairement maximum) de G et une couverture minimum de G couvre aussi tous les sommets de H par des cliques. \square

Proposition 1.1.2. *Soit G un graphe. Alors, pour tout sommet $v \in V$, nous avons:*

- (1) $\alpha(G) - 1 \leq \alpha(G - \{v\}) \leq \alpha(G)$
- (2) $\omega(G) - 1 \leq \omega(G - \{v\}) \leq \omega(G)$
- (3) $\theta(G) - 1 \leq \theta(G - \{v\}) \leq \theta(G)$

DÉMONSTRATION. Les bornes supérieures proviennent de l'observation 1.1.1. Pour les bornes inférieures, remarquons que: (1) S'il existe un stable maximum de G qui ne contient pas v , alors ce stable est aussi un stable maximum de $G - \{v\}$ de cardinalité $\alpha(G)$. Sinon, v est dans tous les stables de cardinalité maximum de G ; dans ce cas, un stable maximum de $G - \{v\}$ contient exactement 1 sommet de moins. (2) S'il existe une clique maximum de G qui ne contient pas v , alors cette clique est aussi une clique maximum de $G - \{v\}$ de cardinalité $\omega(G)$. Sinon, v est dans toutes les cliques de cardinalité maximum de G ; dans ce cas, une clique maximum de $G - \{v\}$ contient exactement 1 sommet de moins. (3) Si $\theta(G - \{v\}) \leq \theta(G) - 2$, alors il existe une couverture de G de cardinalité inférieure ou égale à $\theta(G) - 1$ car une clique peut couvrir uniquement le sommet v quand les autres cliques (au nombre de $\theta(G) - 2$ au plus) couvrent les autres sommets de G , ce qui est absurde. \square

Le **complémentaire** d'un graphe $G = (V, E)$, noté \overline{G} , est le graphe qui a pour ensemble de sommets V et pour ensemble d'arêtes $\binom{V}{2} \setminus E$. Ainsi, uv est une arête de G si et seulement si uv n'est pas une arête de \overline{G} . En conséquence, un sous-ensemble de sommets X est une clique de G si et seulement si X est un stable de \overline{G} de même qu'un sous-ensemble de sommets Y est un stable de G si et seulement si Y est une clique de \overline{G} . Cette dernière a alors pour conséquence $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ car la cardinalité d'un stable maximum de G est égale à la cardinalité d'une clique maximum de \overline{G} aussi bien que $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ car la cardinalité d'une clique maximum de G est égale à la cardinalité d'un stable maximum de \overline{G} .

Un **parcours** de longueur k est une suite de sommets $v_1 - v_2 - \dots - v_{k-1} - v_k$ telle que $v_i v_{i+1} \in E$ pour tout $i \in [k-1]$. Les sommets v_1 et v_k sont les **extrémités** du parcours tandis que les sommets v_2, v_3, \dots, v_{k-1} sont les **sommets internes** du parcours. Une **chaîne élémentaire** est un parcours dans lequel tous les sommets sont distincts. Deux chaînes élémentaires sont **disjointes** si elles n'ont aucun sommet interne en commun. La **distance** entre deux sommets u et v , notée $d(u, v)$ ou $d_G(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne élémentaire qui relie le sommet u au sommet v . L'**excentricité** d'un sommet v est la distance maximale du sommet v aux autres sommets de G . Un graphe G est **connexe** si pour toute paire de sommets $u, v \in V$ il existe une chaîne élémentaire qui relie le sommet u au sommet v ; de plus, le graphe est dit **k -sommets-connexe** ou **k -connexe** s'il possède au moins $k+1$ sommets et reste connexe après la suppression d'au plus $k-1$ sommets (et les arêtes incidentes à ces sommets). Le **nombre de connexité** de G , noté $\kappa(G)$, est le nombre minimum de sommets qu'il faut supprimer dans ce graphe pour que le sous-graphe induit par les sommets restants ne soit plus connexe ou contient un unique sommet. Le théorème 1.1.3 illustre l'une des caractérisations des graphes k -connexes.

Soit \mathcal{C} une relation définie sur l'ensemble des sommets d'un graphe G par: $u\mathcal{C}v$ s'il existe une chaîne élémentaire qui relie le sommet u au sommet v . La relation \mathcal{C} ainsi définie est une relation d'équivalence et les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de cette relation sont appelés les **composantes connexes** de G .

Théorème 1.1.3 (Théorème de Menger [30]). *Un graphe G est k -connexe si et seulement si pour toute paire de sommets $u, v \in V$ il existe k chaînes élémentaires disjointes reliant u à v .*

Un **couplage** d'un graphe G est un ensemble d'arêtes de G qui n'ont pas de sommets en commun. Un couplage **sature** un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ si pour tout sommet $v \in S$, il existe une arête du couplage incidente à v . Un couplage est dit **parfait** s'il sature tous les sommets du graphe.

Avant de passer à la section suivante, il nous semble important de définir une bijection entre les ensembles de sommets de deux graphes qui préserve la structure de ces deux graphes. Nous commençons par la définition suivante: Un **homomorphisme** d'un graphe $G = (V, E)$ dans un graphe $G' = (V', E')$ est une fonction $h : V \rightarrow V'$ telle que $uv \in E \implies h(u)h(v) \in E'$ pour tout $u, v \in V$. Un **isomorphisme** de G dans G' quant à lui est un homomorphisme bijectif $i : V \rightarrow V'$ tel que $uv \in E \iff i(u)i(v) \in E'$ pour tout $u, v \in V$; en pareil cas, les graphes G et G' sont dits **isomorphes**. En d'autres mots, un isomorphisme d'un graphe G dans un graphe G' est une bijection de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de G' qui préserve les arêtes de ces deux graphes. C'est alors clair que les isomorphismes de graphes induisent une relation d'équivalence dans l'ensemble de tous les graphes. Puisque les propriétés inhérentes à un graphe ainsi que sa structure et sa représentation ne dépendent pas de l'étiquetage de ses sommets mais de la relation d'adjacence entre ses sommets, nous voyons que deux graphes isomorphes présentent les mêmes propriétés, la même structure ainsi que la même représentation. Finalement, un **automorphisme** ϕ de G est un isomorphisme de G dans G . Un graphe G est dit **sommet-transitif** si pour toute paire de sommets $u, v \in V$ il existe un automorphisme ϕ de G tel que $\phi(u) = v$.

Observation 1.1.4. *Tout graphe sommet-transitif est un graphe régulier.*

Théorème 1.1.5. [14] *Soit G un graphe connexe, sommet-transitif et d -régulier. Alors, $\kappa(G) \geq \frac{2}{3}(d+1)$.*

Corollaire 1.1.6. *Soit G un graphe connexe, sommet-transitif et 3-régulier, alors $\kappa(G) = 3$.*

DÉMONSTRATION. Puisque G est un graphe 3-régulier, deux cas peuvent se présenter après la suppression de tous les voisins d'un sommet v . Soit qu'il n'existe plus de chaîne élémentaire de v aux autres sommets de G soit que v est le seul sommet restant. Dans les deux cas, nous avons $\kappa(G) \leq 3$. Maintenant, par le théorème 1.1.5, nous avons $\kappa(G) \geq \frac{8}{3} \Rightarrow \kappa(G) \geq 3$. \square

1.2. Familles de graphes

De par les propriétés particulières qui les caractérisent, les graphes peuvent être classés en plusieurs familles. En vue de faciliter une bonne compréhension du sujet et la lecture des chapitres suivants, une introduction de quelques familles de graphes connexes suit dans cette section.

Nous commençons par la **chaîne** de longueur $n \geq 1$, notée P_n , qui est un graphe isomorphe à celui qui a pour ensemble de sommets $[n]$ et ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$. Le **double rayon** quant à lui, noté P_∞ , est un graphe infini isomorphe à celui qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z} et ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$; en d'autres termes, un double rayon est une chaîne de longueur infinie dans les deux directions. Un **arbre** est un graphe connexe qui ne contient pas de cycles comme sous-graphe. Notons que le double rayon et les chaînes sont aussi des arbres. Les sommets de degré 1 d'un arbre sont appelés les **feuilles** de l'arbre. Une **étoile** à n feuilles est un arbre à $n + 1$ sommets dont un sommet universel et n feuilles.

Le **cycle** de longueur $n \geq 3$, noté C_n , est un graphe isomorphe à celui qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}_n et ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$. La **roue** à $n + 1$ sommets, notée W_n , est un graphe obtenu en ajoutant un sommet universel à un cycle de longueur n . Le **graphe complet** à n sommets, noté K_n , est un graphe dont les n sommets sont deux à deux adjacents. Le graphe complet à 3 sommets qui est aussi un cycle de longueur 3 est appelé le **triangle**. Un **graphe sans triangle** est un graphe dont le triangle n'est pas un sous-graphe.

Un **graphe biparti** est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux stables X et Y . Le graphe est dit **biparti complet** et est noté $K_{m,n}$ si tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y avec $|X| = m$ et $|Y| = n$. Un **graphe séparé** est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y où X est une clique et Y est un stable. Le graphe est dit **séparé complet** si tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y .

Théorème 1.2.1 (Théorème de Hall [17]). *Un graphe biparti $G = (V, E)$ ayant pour bipartition $V = X \sqcup Y$ admet un couplage qui sature Y (respectivement X) si et seulement si pour tout sous-ensemble S de Y (respectivement de X), le nombre de sommets de X (respectivement de Y) adjacents à un sommet de S est supérieur ou égal à la cardinalité de S .*

Le **graphe de Kneser** $KG_{n,k}$ est un graphe isomorphe à celui qui a pour ensemble de sommets $\binom{[n]}{k}$ où deux sommets X, Y sont adjacents si et seulement si $X \cap Y = \emptyset$. Le **graphe de Petersen généralisé** $PG_{n,k}$ est un graphe isomorphe à celui qui a pour ensemble de sommets $\{v_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v'_i : i \in \mathbb{Z}_n\}$ et pour ensemble d'arêtes $\{v_i v'_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v_i v_{i+1} : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v'_i v'_{i+k} : i \in \mathbb{Z}_n\}$. Le graphe de Petersen généralisé $PG_{5,2}$ qui est aussi le graphe de Kneser $KG_{5,2}$ est connu sous le nom de **graphe de Petersen** tout court.

1.3. Fonctions et opérations sur les graphes

1.3.1. Fonctions de graphes

Plusieurs fonctions peuvent être définies sur un graphe; les unes sur son ensemble de sommets, les autres sur son ensemble d'arêtes et bien d'autres encore sur les deux. Dans cette section, nous considérons uniquement celles définies sur l'ensemble des sommets d'un graphe en présentant les deux fonctions les plus courantes, à savoir la **fonction coloration** et la **fonction poids**.

1.3.1.1. Fonction coloration

Une **fonction coloration** ou **coloration** d'un graphe G est une fonction $c : V \rightarrow \mathbb{N}$. Notons que cette définition ne pose pas de problème car nous ne considérons pas les graphes infinis non dénombrables dans ce mémoire. Les éléments de \mathbb{N} représentent des couleurs

qui peuvent être utilisées pour colorer les sommets de G . Une coloration c est dite **propre** si pour toute paire de sommets $u, v \in V$ nous avons: $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Le **nombre chromatique** de G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer proprement G .

Proposition 1.3.1. *Pour tout graphe G , $\chi(G) = \theta(\overline{G})$ et $\chi(\overline{G}) = \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit c est une coloration propre de G et \mathcal{R} une relation définie sur les sommets de G par: $u\mathcal{R}v \iff c(u) = c(v)$. Alors, \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Puisque les sommets de chaque classe d'équivalence de la partition définie par la relation \mathcal{R} sont colorés par la même couleur, c induit une partition des sommets de G en stables. Ainsi, c induit une partition des sommets de \overline{G} en cliques. D'où, $\theta(\overline{G}) \leq \chi(G)$. Remarquons aussi qu'une couverture de \overline{G} induit une coloration propre de G . Ceci suit du fait qu'en attribuant une couleur différente à chacune des cliques de la partition des sommets de \overline{G} en cliques et pour toute clique C de cette partition, en colorant tous les sommets de C par la couleur attribuée à C , nous obtenons une coloration propre de G . D'où, $\chi(G) \leq \theta(\overline{G})$. Par conséquent, le nombre chromatique d'un graphe G est égal à la cardinalité d'une couverture minimum de son complémentaire \overline{G} de même que le nombre chromatique d'un graphe \overline{G} est égal à la cardinalité d'une couverture minimum de son complémentaire G . \square

Corollaire 1.3.2. *Pour tout graphe G , $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - \{v\}) \leq \chi(G)$.*

DÉMONSTRATION. Ce corollaire suit de la proposition 1.1.2 car pour tout graphe \overline{G} , l'inégalité $\theta(\overline{G}) - 1 \leq \theta(\overline{G} - \{v\}) \leq \theta(\overline{G})$ implique l'inégalité $\chi(G) - 1 \leq \chi(G - \{v\}) \leq \chi(G)$. \square

Un sommet v d'un graphe G est dit **critique** si $\chi(G - \{v\}) = \chi(G) - 1$. En d'autres termes, v est un sommet critique de G s'il existe une coloration propre de G par un nombre minimum de couleurs où v est le seul sommet à être coloré par sa couleur. Observons que la définition précédente implique aussi que si v est un sommet critique de G , alors il existe une couverture minimum de \overline{G} où l'une des cliques de cette couverture contient uniquement le sommet v . Un graphe G est dit **sommet-critique** si tout sommet de G est critique. Un **graphe parfait** est un graphe dont le nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes induits est égal à la cardinalité d'une clique maximum de ce sous-graphe. En particulier, si G est un graphe parfait, alors $\omega(G) = \chi(G)$. Les graphes complets, les graphes bipartis

et les arbres sont des exemples de graphes parfaits d'après le théorème 1.3.4. Les deux théorèmes suivants illustrent quelques caractéristiques des graphes parfaits.

Théorème 1.3.3 (Théorème faible des graphes parfaits [28]). *Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.*

Théorème 1.3.4 (Théorème fort des graphes parfaits [9]). *Un graphe est parfait si et seulement si ce graphe et son complémentaire ne contiennent pas de sous-graphe induit qui soit un cycle d'ordre impair supérieur ou égal à 5.*

Proposition 1.3.5. *Pour tout graphe parfait G , $\alpha(G) = \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque G est parfait, il s'ensuit du théorème faible des graphes parfaits (Théorème 1.3.3) que \overline{G} est aussi parfait. Nous avons ainsi $\omega(\overline{G}) = \chi(\overline{G})$. Rappelons que nous avons vu auparavant que la cardinalité d'une clique maximum de \overline{G} est égale au nombre de stabilité de G et nous avons aussi vu dans la proposition 1.3.1 que le nombre chromatique de \overline{G} est égal à la cardinalité d'une couverture minimum de G . En conséquence, $\alpha(G) = \theta(G)$. \square

1.3.1.2. Fonction poids

Une **fonction poids** d'un graphe G est une fonction $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Un **ensemble dominant** d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G qui contient dans son voisinage tous les sommets de G . D'une manière formelle, un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G s'il existe une fonction poids $w : V \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $D = \{v \in V : w(v) = 1\}$ et $\sum_{u \in N[v]} w(u) \geq 1$ pour tout sommet $v \in V$. Le **nombre de domination** de G , noté $\gamma(G)$, est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G . Une fonction poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ domine fractionnairement un graphe G si pour tout sommet $v \in V$, nous avons $\sum_{u \in N[v]} w(u) \geq 1$. Le **nombre de domination fractionnaire** de G , noté $\gamma_f(G)$, est la valeur $\gamma_f(G) = \min\{\sum_{v \in V} w(v) : w \text{ est une fonction poids qui domine fractionnairement } G\}$. Un **2-packing** est un sous-ensemble de sommets dont les voisinages sont deux à deux disjoints. Ainsi, un sous-ensemble $P \subseteq V$ est un 2-packing de G s'il existe une fonction poids $w : V \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $P = \{v \in V : w(v) = 1\}$ et $\forall v \in V, \sum_{u \in N[v]} w(u) \leq 1$.

1.3.2. Opérations sur les graphes

Plusieurs opérations peuvent aussi être définies sur les graphes. Certaines sont des opérations unaires comme le complémentaire, d'autres sont des opérations binaires. Dans cette section, nous considérons uniquement les opérations binaires.

Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes tels que $V \cap V' = \emptyset$. La **réunion disjointe complète** de G et de G' , noté $G \vee G'$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V \sqcup V'$ et ensemble d'arêtes $E \sqcup E' \sqcup \{vv' : v \in V, v' \in V'\}$. Ainsi, la roue à $n + 1$ sommets, notée W_n , est la réunion disjointe complète du graphe C_n et du graphe K_1 .

Le **produit cartésien** d'un graphe $G = (V, E)$ par un graphe $G' = (V', E')$, noté $G \square G'$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V \times V'$ où deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- (1) $u = v$ et $u'v' \in E'$
- (2) $uv \in E$ et $u' = v'$.

Une **grille** $P_m \square P_n$ est le produit cartésien de deux chaînes de longueurs respectives m et n . Une **grille infinie**, notée $P_\infty \square P_\infty$, est le produit cartésien de deux doubles rayons.

Soit d un entier positif. L'**hypercube** de dimension d est le graphe Q_d défini récursivement de la manière suivante:

- Q_1 est le graphe complet à 2 sommets K_2 .
- Pour tout entier $d \geq 2$, Q_d est le graphe $Q_{d-1} \square K_2$.

Théorème 1.3.6. [14] *L'hypercube de dimension d est un graphe sommet-transitif.*

Théorème 1.3.7. [5] *L'hypercube de dimension d est un graphe d -régulier et d -connexe.*

Le **produit fort** d'un graphe $G = (V, E)$ par un graphe $G' = (V', E')$, noté $G \boxtimes G'$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V \times V'$ où deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:

- (1) $u = v$ et $u'v' \in E'$
- (2) $uv \in E$ et $u' = v'$
- (3) $uv \in E$ et $u'v' \in E'$.

Une **grille forte** $P_m \boxtimes P_n$ est le produit fort de deux chaînes de longueurs respectives m et n . Une **grille forte infinie**, notée $P_\infty \boxtimes P_\infty$, est le produit fort de deux doubles rayons. Pour un exemple de grille et de grille forte voir figure 1.1.

Proposition 1.3.8. *La grille forte infinie $P_\infty \boxtimes P_\infty$ est un graphe sommet-transitif.*

DÉMONSTRATION. Soient (i, j) et (i', j') deux sommets de $P_\infty \boxtimes P_\infty$. Observons que la fonction $\phi : V(P_\infty \boxtimes P_\infty) \rightarrow V(P_\infty \boxtimes P_\infty)$ telle que $\phi((x, y)) = (x + (i' - i), y + (j' - j))$ pour tout $(x, y) \in V(P_\infty \boxtimes P_\infty)$ est un automorphisme de $P_\infty \boxtimes P_\infty$ et $\phi((i, j)) = (i', j')$. \square

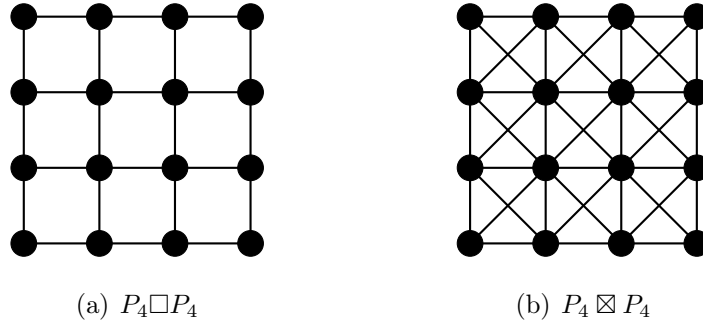


Fig. 1.1. La grille $P_4 \square P_4$ et la grille forte $P_4 \boxtimes P_4$

Proposition 1.3.9. *Les opérations \square et \boxtimes sont des opérations commutatives.*

DÉMONSTRATION. Avant tout, par commutative, nous entendons que les graphes $G \square G'$ et $G' \square G$ de même que les graphes $G \boxtimes G'$ et $G' \boxtimes G$ sont isomorphes. Ainsi, la proposition suit car la fonction $i : V(G \square G') \rightarrow V(G' \square G)$ telle que $i((x, x')) = (x', x)$ pour tout sommet $(x, x') \in V(G \square G')$ est un isomorphisme de $G \square G'$ dans $G' \square G$. La même fonction i définit un isomorphisme de $G \boxtimes G'$ dans $G' \boxtimes G$. \square

1.4. Graphes de Cayley

Les graphes de Cayley sont des graphes qui encodent la structure de groupes. Bien avant de les définir, commençons par introduire les groupes et quelques unes de leurs propriétés.

Un **groupe** est un couple $(\Gamma, *)$ où Γ est un ensemble et $*$ est une opération binaire définie sur Γ vérifiant les propriétés suivantes:

- (1) Γ est fermé sous l'opération $*$ ($\forall a, b \in \Gamma, a * b \in \Gamma$).
- (2) L'opération $*$ est associative sur Γ ($\forall a, b, c \in \Gamma, (a * b) * c = a * (b * c)$).
- (3) Γ admet un élément neutre pour l'opération $*$ ($\exists e \in \Gamma$ tel que $\forall a \in \Gamma, e * a = a * e = a$).
- (4) Chaque élément de Γ possède un inverse ($\forall a \in \Gamma, \exists b \in \Gamma$ tel que $a * b = b * a = e$).

Nous pouvons montrer que l'élément e est unique et pour tout a , l'élément b tel que $a * b = b * a = e$ est unique. Ainsi, nous notons ce dernier a^{-1} .

Si l'opération $*$ est commutative, c'est-à-dire $a * b = b * a$ pour tout $a, b \in \Gamma$, alors le groupe est dit **abélien**.

Une partie S d'un groupe Γ est un **symbole** de Γ si $e \notin S$ et $a \in S \iff a^{-1} \in S$. Le **graphe de Cayley** d'un groupe Γ et de symbole S , noté $\text{Cay}(\Gamma, S)$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets les éléments de Γ où deux sommets a, b sont adjacents si et seulement si $b^{-1} * a \in S$ et donc $a^{-1} * b \in S$.

Proposition 1.4.1. *Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ le graphe de Cayley d'un groupe Γ et de symbole S tel que $|S| = d$. Alors, G est un graphe d -régulier.*

DÉMONSTRATION. Soit a un sommet de G . Le voisinage ouvert de a est l'ensemble $N(a) = \{b : a^{-1} * b \in S\} = \{a * s : s \in S\}$. Puisque $|S| = d$, nous avons $|N(a)| = d$. \square

Théorème 1.4.2. [1, 14] *Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ le graphe de Cayley d'un groupe Γ et de symbole S . Alors, G est un graphe sommet-transitif.*

L'ensemble \mathbb{Z}_n muni de l'opération addition mod n est un groupe appelé le **groupe cyclique** d'ordre n . Le graphe de Cayley du groupe cyclique d'ordre n et de symbole $S = \{\pm m_1, \pm m_2, \dots, \pm m_k\}$ est appelé le **graphe circulant** $C_n[m_1, m_2, \dots, m_k]$.

Une partie \mathcal{P} d'un groupe Γ est une **partie génératrice** de Γ si pour tout élément x de $\Gamma \setminus \mathcal{P}$, nous avons $x = g_1 * g_2 * \dots * g_n$ avec $g_i \in \mathcal{P}$ ou $g_i^{-1} \in \mathcal{P}$. Une partie génératrice \mathcal{P} est minimale si pour tout élément x de \mathcal{P} , $\mathcal{P} \setminus \{x, x^{-1}\}$ n'est pas une partie génératrice de Γ .

Proposition 1.4.3. [14] *Soit $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ le graphe de Cayley d'un groupe Γ et de symbole S . Alors, G est un graphe connexe si et seulement si S est une partie génératrice de Γ .*

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait en deux étapes. Premièrement, supposons que S soit une partie génératrice de Γ et considérons deux sommets quelconques $a, b \in G$. Si $a^{-1} * b \notin S$, alors il existe un entier $n \geq 2$ et $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ tel que $a^{-1} * b = s_1 * s_2 * \dots * s_n \implies s_{n-1}^{-1} * s_{n-2}^{-1} * \dots * s_2^{-1} * s_1^{-1} * a^{-1} * b = s_n$. Donc, les sommets b et $a * s_1 * s_2 * \dots * s_{n-1}$ sont adjacents. D'une manière similaire, nous prouvons que les sommets $a * s_1 * s_2 * s_3 * \dots * s_{n-1}$ et $a * s_1 * s_2 * s_3 * \dots * s_{n-2}$ sont adjacents ainsi que les sommets $a * s_1 * s_2 * s_3 * \dots * s_j$ et $a * s_1 * s_2 * s_3 * \dots * s_{j-1}$ pour tout entier $2 \leq j \leq n-2$ et enfin les sommets $a * s_1$ et a . Ainsi, il existe une chaîne élémentaire de a à b . Maintenant, supposons que G soit un graphe connexe. Pour tout élément $x \notin S$ et tout élément $s \in S$, il existe une chaîne élémentaire $s - x_1 - x_2 - \dots - x$ qui relie s à x . Ainsi, il existe $s_1 \in S$ tel que $s^{-1} * x_1 = s_1 \implies x_1 = s * s_1$. De même, il existe $s_2, s_3, \dots, s_n \in S$ tel que $x_1^{-1} * x_2 = s_2 \implies x_2 = s * s_1 * s_2, \dots, x_{n-2}^{-1} * x_{n-1} = s_{n-1} \implies x_{n-1} = x_{n-2} * s_{n-1} = s * s_1 * s_2 * \dots * s_{n-1}$ et $x_{n-1}^{-1} * x = s_n \implies x = x_{n-1} * s_n = s * s_1 * s_2 * \dots * s_n$. En conséquence, S est une partie génératrice de Γ . □

Théorème 1.4.4. [35] *Un graphe connexe G est un graphe cubique de Cayley d'un groupe abélien si et seulement si G est l'un des graphes suivants: $K_4, Q_3, C_n \square K_2$ ou $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ avec $n \geq 3$.*

Chapitre 2

Modèle du garde

Maintenant que les notions de base ont été introduites, une étude du modèle du garde fait l'objet du présent chapitre. Rappelons que notre objectif est de protéger un graphe par un nombre minimum de gardes contre une suite infinie d'attaques sur ses sommets. Pendant que chaque attaque survient à temps discret sur un sommet du graphe, exactement un garde placé dans le voisinage du sommet attaqué peut être utilisé pour le défendre. Dans ce cas, le garde choisi est déplacé vers le sommet attaqué et occupe cette nouvelle position tandis que tous les autres gardes restent en place. Observons que les gardes doivent en tout temps occuper les sommets d'un ensemble dominant du graphe pour pouvoir être en mesure de répondre à chaque attaque. La collection de tous les ensembles dominants utilisés pour défendre le graphe est appelée une famille dominante du graphe.

Une **famille dominante** \mathcal{F} d'un graphe $G = (V, E)$ est une collection d'ensembles dominants de G qui satisfait la propriété suivante: $\forall D \in \mathcal{F}, \forall v' \notin D, \exists v \in D \cap N_G(v')$ tel que $D' = \{v'\} \cup D \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$. Le **nombre de domination éternelle** de G dans le modèle du garde, noté $\gamma^\infty(G)$, est la cardinalité minimum des ensembles dominants d'une famille dominante de G . En d'autres termes, $\gamma^\infty(G)$ est le nombre minimum de gardes nécessaires pour protéger G dans le modèle du garde. Remarquons que pour étudier le problème de domination éternelle, il nous suffit simplement de considérer que les graphes connexes car les gardes placés sur les sommets d'une composante connexe d'un graphe ne peuvent en aucun cas participer à la défense des sommets d'une autre composante connexe de ce graphe. Dans le cas d'un graphe non connexe, son nombre de domination éternelle est alors égal à la somme des nombres de domination éternelle de chacune de ses composantes connexes.

Par conséquent, sauf indication contraire, tous les graphes mentionnés dans ce chapitre sont des graphes connexes.

Proposition 2.0.1. [7] *Pour tout graphe G , $\alpha(G) \leq \gamma^\infty(G) \leq \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Notons que si tous les sommets d'un stable de G sont successivement attaqués, nous avons besoin d'autant de gardes que de sommets dans ce stable pour répondre à cette suite d'attaques. D'où, le nombre de stabilité de G est une borne inférieure sur le nombre de domination éternelle de G . En plaçant un garde dans une clique de G , ce garde à lui seul peut défendre tous les sommets de cette clique contre une infinité d'attaques. La cardinalité d'une couverture minimum de G est alors une borne supérieure sur le nombre de domination éternelle de G . \square

Corollaire 2.0.2. [7] *Pour tout graphe parfait G , $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Ce corollaire est une conséquence des propositions 1.3.5 et 2.0.1. \square

Observation 2.0.3. [7] *Pour tout entier $n \geq 1$:*

- i.* $\gamma^\infty(K_n) = 1$
- ii.* $\gamma^\infty(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- iii.* $\gamma^\infty(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $n \geq 4$
- iv.* $\gamma^\infty(K_{1,n}) = n$

Lemme 2.0.4. [22] *Soit G un graphe et H un sous-graphe induit de G . Alors, $\gamma^\infty(G) \geq \gamma^\infty(H)$.*

DÉMONSTRATION. Considérons une suite d'attaques sur les sommets de H qui nécessitent la défense de $\gamma^\infty(H)$ gardes. Soit $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ cette suite où, pour tout $i \in [k]$, $v^{(i)}$ est le i -ème sommet attaqué. Si les sommets de G sont attaqués dans ce même ordre, alors nous aurons aussi besoin de $\gamma^\infty(H)$ gardes pour les défendre. Ainsi, $\gamma^\infty(G) \geq \gamma^\infty(H)$. \square

Les inégalités de la proposition 2.0.1 peuvent aussi être strictes. En effet, le graphe C_5 a pour nombre de stabilité $\alpha(C_5) = 2$ et pour nombre de domination éternelle $\gamma^\infty(C_5) = 3$. Quant à la seconde inégalité, quoiqu'il existe un nombre infini d'exemples, trouver un parmi ces graphes n'a pas été une tâche facile jusqu'à ce que Goddard et *al.* présentent dans [13] un

graphe qui a pour nombre de domination éternelle 3 et dont la cardinalité d'une couverture minimum est 4. Klostermeyer et MacGillivray ont prouvé un autre résultat dans [21] qui a pour conséquence une généralisation de la construction de Goddard et *al.* Ces résultats sont discutés aux théorèmes 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8 et 2.1.9.

2.1. Nombre de stabilité et cardinalité d'une couverture minimum

Dans cette section, nous étudions quelques questions liées à la relation entre le nombre de stabilité, le nombre de domination éternelle et la cardinalité d'une couverture minimum d'un graphe. Tout d'abord, introduisons une famille de graphes qui possèdent des propriétés toutes particulières par rapport au nombre de stabilité et à la cardinalité d'une couverture minimum.

2.1.1. Graphes de Mycielski

Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et soit $\mathcal{M}_k = \{\mathcal{M}_k^l\}_{l \geq k}$ la famille de graphes définis récursivement comme suit:

- (1) \mathcal{M}_k^k est le graphe complet à k sommets.
- (2) Étant donné le graphe \mathcal{M}_k^{l-1} avec les sommets étiquetés v_1, v_2, \dots, v_n pour un entier $l > k$, nous construisons le graphe \mathcal{M}_k^l de la manière suivante:
 - (a) D'abord, nous ajoutons $n + 1$ nouveaux sommets étiquetés v'_1, v'_2, \dots, v'_n et v'' .
 - (b) Ensuite, pour tout $(i, j) \in [n] \times [n]$ tel que $v_i v_j \in E(\mathcal{M}_k^{l-1})$, nous ajoutons une arête $v_i v'_j$.
 - (c) Enfin, pour tout $i \in [n]$, nous ajoutons une arête $v'_i v''$.

Posons $\mathcal{M} = \bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Les graphes de la famille \mathcal{M} possèdent des propriétés très importantes que nous allons voir dans les deux propositions suivantes. Ces propriétés ont été prouvées pour $k = 2$ par Jan Mycielski dans [31] et les propositions 2.1.2 et 2.1.3 sont une généralisation de la preuve de Mycielski.

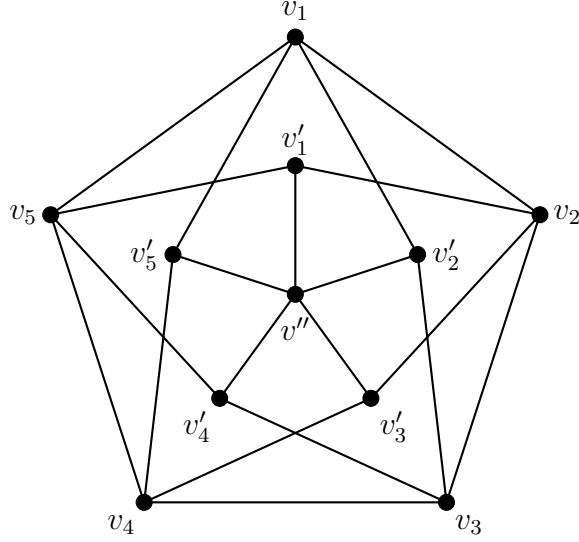


Fig. 2.1. \mathcal{M}_2^4 , Graphe de Grötzsch

Observation 2.1.1. Soient k , l_1 et l_2 trois entiers tels que $2 \leq k \leq l_1 < l_2$, alors le graphe $\mathcal{M}_k^{l_1}$ est un sous-graphe induit du graphe $\mathcal{M}_k^{l_2}$.

DÉMONSTRATION. Par construction, le graphe $\mathcal{M}_k^{l_2}$ contient tous les sommets du graphe $\mathcal{M}_k^{l_1}$. Observons que nous n'avons ni ajouté ni supprimé d'arêtes entre les paires de sommets du graphe $\mathcal{M}_k^{l_1}$ pour obtenir le graphe $\mathcal{M}_k^{l_2}$. \square

Proposition 2.1.2. $\omega(\mathcal{M}_k^l) = k$.

DÉMONSTRATION. Nous le prouvons par récurrence sur l . Le cas $l = k$ est clair car \mathcal{M}_k^k est un graphe complet à k sommets. Soit l un entier strictement supérieur à k , supposons que la cardinalité d'une clique maximum de \mathcal{M}_k^{l-1} soit $\omega(\mathcal{M}_k^{l-1}) = k$ et considérons le graphe \mathcal{M}_k^l . C'est clair que $\omega(\mathcal{M}_k^l) \geq k$ par l'observation 1.1.1 car le graphe \mathcal{M}_k^{l-1} est un sous-graphe induit du graphe \mathcal{M}_k^l . Remarquons que si v'' est dans une clique maximum de \mathcal{M}_k^l , alors cette clique est de cardinalité 2 car les voisins de v'' sont deux à deux non adjacents. Ainsi, nous pouvons considérer une clique maximum qui ne contient pas v'' . Pour la même raison, l'ensemble $\bigcup_{i \in [n]} \{v'_i\}$ peut avoir au plus un sommet dans une clique maximum. Supposons, sans perte de généralité, qu'une clique maximum X de \mathcal{M}_k^l contienne le sommet v'_1 , alors X ne contient pas le sommet v_1 . Puisque les voisinages de v_1 et de v'_1 dans X sont égaux, en remplaçant le sommet v'_1 dans X par v_1 , nous obtenons une nouvelle clique X' de \mathcal{M}_k^{l-1} de même cardinalité que X . Par conséquent, $\omega(\mathcal{M}_k^l) \leq k$ et nous avons ainsi $\omega(\mathcal{M}_k^l) = k$. \square

Proposition 2.1.3. $\chi(\mathcal{M}_k^l) = l$.

DÉMONSTRATION. Nous le prouvons par récurrence sur l . Le cas $l = k$ est clair car \mathcal{M}_k^k est un graphe complet à k sommets. Soit l un entier strictement supérieur à k et supposons que le nombre chromatique du graphe \mathcal{M}_k^{l-1} soit $\chi(\mathcal{M}_k^{l-1}) = l - 1$. Considérons une coloration propre quelconque c de \mathcal{M}_k^l par un nombre minimum de couleurs. Soit c' la restriction de la coloration c sur le graphe \mathcal{M}_k^{l-1} . Alors, c' est une coloration propre de \mathcal{M}_k^{l-1} . Commençons par prouver que $\chi(\mathcal{M}_k^l) \geq l$. Si l couleurs sont utilisées par la coloration c' , alors nous avons fini. Donc, nous pouvons supposer qu'exactly $l - 1$ couleurs sont utilisées par la coloration c' . À la lumière de ce qui précède au premier chapitre, c' induit une partition des sommets de \mathcal{M}_k^{l-1} en $l - 1$ classes de couleurs $C'_1, C'_2, \dots, C'_{l-1}$. Dans chacune de ces classes, il doit exister un sommet qui est adjacent à au moins un sommet dans toutes les autres classes. Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe une classe de couleur (sans perte de généralité C'_1) qui vérifie la propriété suivante: $\forall v \in C'_1, \exists C' \in \{C'_2, C'_3, \dots, C'_{l-1}\} : N(v) \cap C' = \emptyset$. Dans ce cas, nous aurions pu redistribuer chaque sommet v de la classe C'_1 dans une des autres classes de couleurs C' qui ne contiennent aucun des voisins de v et obtenir une coloration propre de \mathcal{M}_k^{l-1} avec $l - 2$ couleurs, ce qui est absurde car $\chi(\mathcal{M}_k^{l-1}) = l - 1$. Réétiquetons les sommets de \mathcal{M}_k^{l-1} de sorte que pour tout $i \in [l-1]$, le sommet v_i soit un sommet de la classe C'_i qui est adjacent à au moins un sommet dans toutes les autres classes. Revenons maintenant à la coloration c de \mathcal{M}_k^l . S'il existe un entier $i \in [l-1]$ tel que le sommet v'_i est coloré par une couleur non utilisée dans la coloration c' , alors nous avons fini. Sinon, pour tout $i \in [l-1]$, v'_i ne peut pas être coloré par une couleur de c' différente de celle utilisée pour colorer v_i car il contient toutes les autres couleurs de c' dans son voisinage. Donc, toutes les couleurs de la coloration c' seront utilisées pour colorer les sommets $v'_1, v'_2, \dots, v'_{l-1}$. En conséquence, nous avons besoin d'une couleur supplémentaire pour colorer v'' . À présent, nous prouvons que $\chi(\mathcal{M}_k^l) \leq l$. Nous commençons par colorer tous les sommets de $V(\mathcal{M}_k^l) \setminus V(\mathcal{M}_k^{l-1})$ par une nouvelle couleur à l'exception du sommet v'' qui est coloré par l'une des couleurs utilisées dans la coloration c' . Puisque tous les sommets de l'ensemble $V(\mathcal{M}_k^l) \setminus (V(\mathcal{M}_k^{l-1}) \cup \{v''\})$ sont deux à deux non adjacents et le sommets v'' n'a aucun voisin dans \mathcal{M}_k^{l-1} , nous obtenons une coloration propre de \mathcal{M}_k^l avec exactement l couleurs. Ce qui termine la preuve. \square

Les graphes de la famille \mathcal{M}_2 sont connus sous le nom de **graphes de Mycielski**. Comme nous l'avons mentionné plus haut, la famille \mathcal{M} est une généralisation de la famille

des graphes de Mycielski. Ainsi, les graphes \mathcal{M}_k^l seront référés comme graphes de Mycielski \mathcal{M}_k^l dans le reste du mémoire. Le graphe à la figure 2.1, aussi appelé **graphe de Grötzsch** est le graphe de Mycielski \mathcal{M}_2^4 .

Corollaire 2.1.4. *Pour tout entier $k \geq 2$ et tout entier $l \geq k$, il existe un graphe dont le nombre de stabilité est k et dont la cardinalité d'une couverture minimum est l .*

DÉMONSTRATION. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et l un entier supérieur ou égal à k . Le graphe de Mycielski \mathcal{M}_k^l est un graphe qui satisfait les égalités $\omega(\mathcal{M}_k^l) = k$ et $\chi(\mathcal{M}_k^l) = l$. Puisque la cardinalité d'une clique maximum d'un graphe est égale au nombre de stabilité de son complémentaire et par la proposition 1.3.1 le nombre chromatique d'un graphe est égal à la cardinalité d'une couverture minimum de son complémentaire, le complémentaire du graphe de Mycielski \mathcal{M}_k^l est un graphe qui satisfait les égalités $\alpha(\overline{\mathcal{M}_k^l}) = k$ et $\theta(\overline{\mathcal{M}_k^l}) = l$. \square

Observons que les graphes de Mycielski \mathcal{M}_k^l définis dans cette section ainsi que leurs complémentaires $\overline{\mathcal{M}_k^l}$ sont tous des graphes connexes. À présent, rappelons brièvement que qu'un graphe G est un graphe sommet-critique si G satisfait la propriété suivante: $\forall v \in V$, $\chi(G - \{v\}) = \chi(G) - 1$. Les graphes de Mycielski ont aussi cette propriété et nous la prouvons au théorème suivant.

Théorème 2.1.5. *\mathcal{M}_k^l est un graphe sommet-critique.*

DÉMONSTRATION. Nous le prouvons par récurrence sur l . Le cas $l = k$ est clair car \mathcal{M}_k^k est un graphe complet à k sommets. Supposons que le graphe \mathcal{M}_k^{l-1} soit sommet-critique et considérons le graphe \mathcal{M}_k^l . D'abord nous montrons que le sommet v'' est critique; ceci suit du fait qu'en colorant proprement les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de \mathcal{M}_k^{l-1} avec $l - 1$ couleurs et, pour tout $i \in [n]$, en colorant le sommet v'_i par la même couleur que celle utilisée pour colorer v_i , nous obtenons une coloration propre du sous-graphe induit $\mathcal{M}_k^l - \{v''\}$ avec $l - 1$ couleurs. Nous avons ainsi une couleur supplémentaire pour colorer uniquement v'' . À présent, nous montrons que les sommets de l'ensemble $\bigcup_{i \in [n]} \{v'_i\}$ sont critiques. Soit $i \in [n]$ et c_i une coloration propre des sommets de \mathcal{M}_k^{l-1} où v_i est le seul sommet à être coloré par sa couleur. Pour tout $j \in [n]$, colorons le sommet v'_j par la même couleur que celle utilisée pour colorer v_j puis le sommet v'' par une couleur supplémentaire. En échangeant les couleurs de v'_i et

de v'' , nous obtenons une coloration propre de \mathcal{M}_k^l avec l couleurs où v'_i est le seul sommet à être coloré par sa couleur. Soit $i \in [n]$, pour prouver que v_i est un sommet critique, nous colorons les sommets du graphe \mathcal{M}_k^{l-1} avec $l-1$ couleurs où v_i est le seul sommet à être coloré par sa couleur. Ensuite, pour tout $j \in [n]$, le sommet v'_j est coloré par une nouvelle couleur puis le sommet v'' est coloré par la même couleur que celle de l'un des v_j pour un entier $j \neq i$. Puisque tous les sommets du graphe \mathcal{M}_k^l sont critiques, le graphe \mathcal{M}_k^l est un graphe sommet-critique. \square

2.1.2. Une borne supérieure sur γ^∞ en fonction du nombre d'indépendance

Nous avons vu à la page précédente que pour un nombre de stabilité fixé, il existe des graphes dont la cardinalité d'une couverture minimum est arbitrairement grand. Comme nous le voyons au travers des théorèmes qui suivent, ceci est loin d'être le cas pour le nombre de domination éternelle; en d'autres termes, le nombre de domination éternelle d'un graphe est borné par une fonction du nombre de stabilité de ce graphe.

Théorème 2.1.6. [13] *Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = 2$, alors $\gamma^\infty(G) \leq 3$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer qu'il est toujours possible de déplacer les gardes de façon à ce qu'ils n'occupent jamais les sommets d'un triangle car deux sommets non adjacents dans G forment un ensemble dominant de G . Considérons l'ensemble \mathcal{F} de tous les sous-ensembles de sommets de G à 3 éléments qui n'induisent pas un triangle dans G . Alors, chaque élément de \mathcal{F} est un ensemble dominant de G . Choisissons l'un d'entre eux (sans perte de généralité $\{x, y, z\}$ où $xy \notin E$) dans lequel nous plaçons 3 gardes. Supposons qu'il y ait une attaque sur un sommet w de G . Si $zw \in E$, alors le garde au sommet z peut être utilisé pour défendre l'attaque sur w et la nouvelle position des gardes $\{x, y, w\}$ est encore un élément de \mathcal{F} car $xy \notin E$. Si $zw \notin E$, alors sans perte de généralité $xw \in E$ car $\{x, y\}$ est un ensemble dominant. Ainsi, le garde au sommet x peut être utilisé pour défendre l'attaque et la nouvelle position des gardes $\{y, z, w\}$ est encore un élément de \mathcal{F} car $zw \notin E$. Par conséquent, \mathcal{F} est une famille dominante de G . \square

Théorème 2.1.7. [13] *Il existe des graphes G tel que $\gamma^\infty(G) < \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit G le complémentaire du graphe de Mycielski \mathcal{M}_2^4 qui est aussi connu sous le nom de graphe de Grötzsch. Nous avons vu au corollaire 2.1.4 que G satisfait les égalités $\alpha(G) = 2$ et $\theta(G) = 4$. Ainsi, d'après le théorème 2.1.6, $\gamma^\infty(G) \leq 3 < \theta(G)$. En fait, en considérant le complémentaire du graphe à la figure 2.1, nous voyons bien que les sommets $\{v_1, v_3, v_4, v'_2, v'_5\}$ induisent un cycle de longueur 5 dans G . Alors, par le lemme 2.0.4, $\gamma^\infty(G) \geq 3$ et en conséquence $\gamma^\infty(G) = 3$. \square

Nous pouvons maintenant passer au théorème suivant qui est un résultat plus général.

Théorème 2.1.8. [21] *Pour tout graphe G , $\gamma^\infty(G) \leq \binom{\alpha(G)+1}{2}$.*

DÉMONSTRATION. Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = a$. Nous pouvons supposer que $|V| > \binom{a+1}{2}$; sinon, il n'y a rien à démontrer. Considérons la collection de tous les stables de G . Choisissons a stables disjoints $\{S_1, S_2, \dots, S_{a-1}, S_a\}$ dans cette collection de manière à ce que $|S_i| \in \{0, i\}$ pour tout $i \in [a]$ et que $|S|$ soit maximum (où $S = \bigcup_{i=1}^a S_i$). Nous avons ainsi $|S| = \sum_{i=1}^a |S_i| \leq \sum_{i=1}^a i = \binom{a+1}{2}$; en conséquence, $V \setminus S \neq \emptyset$. Puisque $|S|$ est maximum, $V \setminus S \neq \emptyset \implies S_1 \neq \emptyset$; sinon, nous aurions pu ajouter un élément de $V \setminus S$ à S_1 et obtenir une plus grande valeur de $|S|$. Donc, nous pouvons supposer que S_1 n'est pas vide. Aussi, S doit être un ensemble dominant de G car sinon, S_a serait vide et $|S|$ ne serait pas maximum. Plaçons un garde sur chacun des sommets de S et supposons qu'il y ait une attaque sur un sommet $w \notin S$. Soit j le plus petit entier positif tel que $w \in N_G[S_j]$ et supposons que le garde qui répond à l'attaque sur w soit précédemment placé sur un sommet u de S_j . Notons qu'un tel j existe toujours car S est un ensemble dominant de G . Nous allons montrer qu'après la réponse à l'attaque sur le sommet w , les gardes sont maintenant placés sur les sommets d'un ensemble S' qui peut aussi être partitionné en a stables disjoints $S'_1, S'_2, \dots, S'_{a-1}, S'_a$ de sorte que $|S'_i| \in \{0, i\}$ pour tout $i \in [a]$ et que $|S'| = |S|$ (où $S' = \bigcup_{i=1}^a S'_i$). D'une part, si $(S_j \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ est un stable, alors nous pouvons remplacer u par w dans S_j pour trouver S'_j tout en gardant les autres stables et la nouvelle collection obtenue satisfait les conditions. D'autre part, si w a au moins 2 voisins dans S_j , soit l le plus grand entier strictement inférieur à j tel que S_l soit non-vide. Si $l \leq j - 2$, alors $S_l \cup \{w\}$ est un stable et S_{l+1} est vide, ce qui contredit le fait que $|S|$ soit maximum. Nous pouvons dans ce cas supposer que $l = j - 1$.

Ainsi, en posant $S'_j = S_{j-1} \cup \{w\}$ et $S'_{j-1} = S_j \setminus \{u\}$ nous obtenons une nouvelle collection de stables qui satisfont les conditions de la partition. En répondant de cette manière à chaque attaque, il s'ensuit que $\binom{a+1}{2}$ gardes suffisent pour protéger le graphe G . \square

Théorème 2.1.9. *Pour tout entier $a \geq 2$, il existe une infinité de graphes G tels que $\alpha(G) = a$ et $\gamma^\infty(G) < \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit a un entier supérieur ou égal à 2. La famille des graphes de Mycielski $\{\mathcal{M}_a^l\}_{l > \binom{a+1}{2}}$ introduite à la section 2.1.1 contient une infinité de graphes dont la cardinalité d'une clique maximum est a et dont le nombre chromatique est strictement supérieur à $\binom{a+1}{2}$. Alors, la famille $\{\overline{\mathcal{M}_a^l}\}_{l > \binom{a+1}{2}}$ contient une infinité de graphes dont le nombre de stabilité est a et dont la cardinalité d'une couverture minimum est strictement supérieure à $\binom{a+1}{2}$. Ainsi, par le théorème 2.1.8, pour un nombre de stabilité fixé a , il existe une infinité de graphes dont le nombre de domination éternelle est strictement inférieur à la cardinalité d'une couverture minimum. \square

Théorème 2.1.10. [15] *Pour tout entier $a \geq 2$, il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = a$ et $\gamma^\infty(G) = \binom{a+1}{2}$.*

2.1.3. Une conjecture de Goddard

Cette section est motivée par la conjecture 2.1.11 de Wayne Goddard, Sandra M. Hedetniemi et de Stephen T. Hedetniemi. Les résultats suivants visent à réfuter cette conjecture et sont de Klostermeyer et de MacGillivray.

Conjecture 2.1.11. [13] *Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G)$, alors $\alpha(G) = \theta(G)$.*

Proposition 2.1.12. *Soit n un entier supérieur ou égal à 5, alors $\gamma^\infty(\overline{C_n}) = 3$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que $\overline{C_n}$ est un graphe isomorphe au graphe qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}_n et ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| \neq 1$. D'après le théorème 2.1.6, nous avons $\gamma^\infty(\overline{C_n}) \leq 3$ car $\alpha(\overline{C_n}) = 2$ par définition. Supposons que $\gamma^\infty(\overline{C_n}) = 2$, pour une contradiction, nous montrons qu'il existe une stratégie qui consiste à forcer deux gardes à se positionner sur les sommets i et $i + 2$ où $i \in \mathbb{Z}_n$. Dans

ce cas, le sommet $i + 1$ ne serait pas protégé et nécessiterait la présence d'un nouveau garde pour le défendre. Nous pouvons commencer par placer deux gardes sur les sommets $n - 1$ et 0 car ils ne sont pas adjacents. Si le garde au sommet $n - 1$ est déplacé pour répondre à une attaque sur le sommet 2 , alors les deux gardes seront placés sur les sommets 0 et 2 et dans ce cas nous avons fini. Supposons que le garde au sommet 0 soit celui qui répond à l'attaque sur le sommet 2 de sorte que les deux gardes soient placés sur les sommets $n - 1$ et 2 après la réponse à l'attaque. Maintenant, si le garde au sommet $n - 1$ est déplacé pour répondre à une attaque sur le sommet 4 , alors les deux gardes seront placés sur les sommets 2 et 4 et dans ce cas, nous avons fini. Supposons que le garde au sommet 2 soit celui qui répond à l'attaque sur le sommet 4 de sorte que les deux gardes soient placés sur les sommets $n - 1$ et 4 après la réponse à l'attaque. Ainsi, le garde au sommet $n - 1$ ne pourra jamais être déplacé pour répondre à la suite d'attaques sur les sommets $2, 4, 6, \dots, n - 3$. Les gardes seront alors placés sur les sommets $n - 3$ et $n - 1$ après la réponse aux attaques; dans ce cas, le sommet $n - 2$ n'est pas protégé. \square

Théorème 2.1.13. [20] *Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = 2$, alors $\theta(G) = 2$.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, alors il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = 2$ et $\theta(G) > 2$. D'après le corollaire 2.0.2, G n'est pas parfait et d'après le théorème fort des graphes parfaits (Théorème 1.3.4), G contient un sous-graphe induit qui est un cycle d'ordre impair supérieur ou égal à 5 ou le complémentaire d'un cycle d'ordre impair supérieur ou égal à 5 . Si le cycle d'ordre impair est C_{2k+1} pour $k \geq 2$, alors par l'observation 2.0.3 et le lemme 2.0.4 nous avons $\gamma^\infty(G) \geq k + 1 \geq 3$. Si le complémentaire du cycle d'ordre impair est $\overline{C_{2k+1}}$ où $k \geq 2$, alors d'après le lemme 2.0.4 et la proposition 2.1.12, nous avons $\gamma^\infty(G) \geq 3$. Ceci termine la preuve. \square

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, la réunion disjointe complète de deux graphes G et G' , notée $G \vee G'$, est le graphe qui a pour ensemble de sommets $V \sqcup V'$ et ensemble d'arêtes $E \sqcup E' \sqcup \{vv' : v \in V, v' \in V'\}$. Le graphe $G \vee G'$ possède une propriété intéressante par rapport aux graphes G et G' que nous exploitons dans la présente section et dans la prochaine. Cette propriété est prouvée au théorème 2.1.14, nous proposons ensuite une généralisation au lemme 2.2.2 et au corollaire 2.2.3.

Théorème 2.1.14. [20] *Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = a$, $\gamma^\infty(G) = g$, $\theta(G) = t$. Supposons que p soit un entier naturel strictement positif et $\mathcal{G} = G \vee \overline{K_p}$. Alors, $\alpha(\mathcal{G}) = \max\{a, p\}$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}) = \max\{g, p\}$, $\theta(\mathcal{G}) = \max\{t, p\}$.*

DÉMONSTRATION.

D'abord, nous prouvons que $\alpha(\mathcal{G}) = \max\{a, p\}$. Soit S un stable maximum de \mathcal{G} . Si S contient un sommet de $\overline{K_p}$, alors S ne contient pas de sommets de G car tous les sommets de $\overline{K_p}$ sont adjacents à tous les sommets de G ; ainsi, $|S| \leq \alpha(\overline{K_p}) = p$. Sinon, S contient un sommet de G et ne contient pas de sommets de $\overline{K_p}$; dans ce cas, $|S| \leq \alpha(G) = a$. Ainsi, $\alpha(\mathcal{G}) \leq \max\{a, p\}$. Puisque G et $\overline{K_p}$ sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} , nous avons $\alpha(\mathcal{G}) \geq \alpha(G) = a$ et $\alpha(\mathcal{G}) \geq \alpha(\overline{K_p}) = p$. D'où, l'égalité suit.

Ensuite, nous prouvons que $\gamma^\infty(\mathcal{G}) = \max\{g, p\}$. Supposons que $p \leq g$ et considérons une famille dominante $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in [k]} \{D_{i1}\}$ de G . Pour tout $i \in [k]$, soit \mathcal{F}_i la collection de sous-ensembles de sommets de $G \vee \overline{K_p}$ qui contient D_{i1} et tous les sous-ensembles de sommets de $G \vee \overline{K_p}$ obtenus en remplaçant un sous-ensemble à q sommets de D_{i1} par un sous-ensemble à q sommets de $\overline{K_p}$ pour tout $q \in [p]$. Les sous-ensembles de sommets dans \mathcal{F}_i sont tous des ensembles dominants de $G \vee \overline{K_p}$ car trois cas peuvent se présenter. (1) Soit que le sous-ensemble de sommets contient tous les sommets de $\overline{K_p}$, dans un tel cas il domine tous les sommets de $\overline{K_p}$ et tous les sommets de G car ces derniers sont tous adjacents à tous les sommets de $\overline{K_p}$. (2) Soit que le sous-ensemble de sommets est un ensemble dominant de G dans la famille dominante \mathcal{F} , dans un tel cas il domine tous les sommets de $\overline{K_p}$ aussi car ces derniers sont tous adjacents à tous les sommets de G . (3) Soit que le sous-ensemble de sommets contient au moins un sommet de $\overline{K_p}$ (qui domine tous les sommets de G) et au moins un sommet de G (qui domine tous les sommets de $\overline{K_p}$). Sans perte de généralité, supposons que $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j \in [l]} \{D_{ij}\}$ et soit $\mathcal{F}' = \bigcup_{i \in [k]} \mathcal{F}_i$. Par construction, $\forall D_{ij} \in \mathcal{F}'$, $\forall v' \notin D_{ij}$, $\exists v \in D_{ij}$ tel que $\{v'\} \cup D_{ij} \setminus \{v\} \in \mathcal{F}'$. Ainsi, \mathcal{F}' est une famille dominante de $G \vee \overline{K_p}$ dont les ensembles dominants sont de cardinalité g . Si $p > g$, alors $p - g$ gardes peuvent occuper éternellement $p - g$ sommets de $\overline{K_p}$ et les g gardes restants pourront protéger éternellement les sommets restants dans le sous-graphe induit $G \vee \overline{K_p}$. Dans un tel cas, p gardes suffisent pour protéger éternellement le graphe $G \vee \overline{K_p}$. D'où, $\gamma^\infty(\mathcal{G}) \leq \max\{g, p\}$. Observons aussi que $\gamma^\infty(\mathcal{G}) \geq \max\{g, p\}$ par le lemme 2.0.4 car G et $\overline{K_p}$ sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} . Alors, l'égalité suit.

Enfin, nous montrons que $\theta(\mathcal{G}) = \max\{t, p\}$. C'est clair que $\theta(\mathcal{G}) \geq \max\{t, p\}$ car G et $\overline{K_p}$ sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} . Si $p \leq t$, alors en ajoutant chacun des sommets de $\overline{K_p}$ dans une clique différente d'une couverture minimum de G , nous obtenons une couverture de cardinalité t de \mathcal{G} . Sinon, $p > \theta(G)$; alors, en ajoutant les sommets de chacune des cliques d'une couverture minimum de G dans une clique différente d'une couverture de $\overline{K_p}$, nous obtenons une couverture de cardinalité p de \mathcal{G} . \square

Rappelons que la roue à n sommets, notée W_n , est le graphe $C_n \vee \overline{K_1}$. D'où le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.15. *Pour tout entier $n \geq 4$:*

- a. $\alpha(C_n) = \alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- b. $\gamma^\infty(C_n) = \gamma^\infty(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- c. $\theta(C_n) = \theta(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Corollaire 2.1.16. [20] *Pour tout entier $k \geq 3$, il existe une infinité de graphes G tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = k < \theta(G)$.*

DÉMONSTRATION. La famille $\{\overline{\mathcal{M}_2^l}\}_{l>k}$ contient une infinité de graphes dont le nombre de stabilité est 2, le nombre de domination éternelle est 3 et dont la cardinalité d'une couverture minimum est strictement supérieur à k . Donc, il s'ensuit du théorème 2.1.14 que la famille $\{\overline{\mathcal{M}_2^l \vee \overline{K_k}}\}_{l>k}$ contient une infinité de graphes G tels que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = k < \theta(G) = l$. \square

Nous concluons la section par deux questions de Klostermeyer et de Mynhardt.

Question 2.1.17. [25] *Existe-t-il un graphe G tel que $\gamma(G) = \gamma^\infty(G) < \theta(G)$?*

Question 2.1.18. [25] *Existe-t-il un graphe sans triangle G tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) < \theta(G)$?*

2.2. Triplets réalisables

Un triplet d'entiers strictement positifs (a, g, t) est dit **réalisable** s'il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = a$, $\gamma^\infty(G) = g$ et $\theta(G) = t$. D'après le théorème 2.1.8, pour tout entiers $a \geq 1$, $g > \binom{a+1}{2}$ et $t \geq g$, le triplet (a, g, t) n'est pas réalisable. D'autres triplets non réalisables triviaux sont aussi connus par la proposition 2.0.1. En revanche, nous avons vu auparavant qu'il existe des constructions de graphes G satisfaisant $\alpha(G) = a$, $\gamma^\infty(G) = g$ et $\theta(G) = t$ pour certaines valeurs de (a, g, t) tels que $a \geq 1$, $g \leq \binom{a+1}{2}$ et $t \geq g$. Le théorème 2.1.13 nous dit que $a = g = 2 \implies t = 2$, ce qui signifie que les triplets $(2, 2, t)$ ne sont pas réalisables pour tout entier $t \geq 3$. À ce jour, les triplets précédents sont les seuls triplets non réalisables (a, g, t) connus tels que $a \leq g \leq \binom{a+1}{2}$ et $g \leq t$. Nos résultats principaux dans cette section sont le théorème 2.2.5 et le corollaire 2.2.9. D'une part, nous allons prouver que pour tout entiers $3 \leq a \leq g \leq \binom{a+1}{2}$ et tout entier t suffisamment grand il existe un graphe $\mathcal{G}_{a,g,t}$ tel que $\alpha(\mathcal{G}_{a,g,t}) = a$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{a,g,t}) = g$ et $\theta(\mathcal{G}_{a,g,t}) = t$. D'autre part, nous montrons que pour tout entiers $2 \leq a \leq g < 2a$ et tout entier $t \geq g$ il existe un graphe $\mathcal{G}_{a,g,t}$ tel que $\alpha(\mathcal{G}_{a,g,t}) = a$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{a,g,t}) = g$ et $\theta(\mathcal{G}_{a,g,t}) = t$.

Théorème 2.2.1. [22] *Pour tout triplet d'entiers strictement positifs (a, g, t) tel que $3 \leq a \leq g \leq \frac{3}{2}a$ et $g \leq t$, il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = a$, $\gamma^\infty(G) = g$ et $\theta(G) = t$.*

Le lemme qui suit est notre généralisation du théorème 2.1.14.

Lemme 2.2.2. *Soient G_1 et G_2 deux graphes tels que $\alpha(G_i) = a_i$, $\gamma^\infty(G_i) = g_i$, $\theta(G_i) = t_i$ pour tout $i \in [2]$ et $\mathcal{G} = G_1 \vee G_2$. Alors, $\alpha(\mathcal{G}) = \max\{a_1, a_2\}$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}) = \max\{g_1, g_2\}$, $\theta(\mathcal{G}) = \max\{t_1, t_2\}$.*

DÉMONSTRATION.

D'abord, nous prouvons que $\alpha(\mathcal{G}) = \max\{a_1, a_2\}$. Soit S un stable maximum de \mathcal{G} . Si S contient un sommet de G_1 , alors S ne contient pas de sommets de G_2 car tous les sommets de G_1 sont adjacents à tous les sommets de G_2 ; ainsi, $|S| \leq \alpha(G_1) = a_1$. Sinon, S contient un sommet de G_2 et ne contient pas de sommets de G_1 ; dans ce cas, $|S| \leq \alpha(G_2) = a_2$. Ainsi, $\alpha(\mathcal{G}) \leq \max\{a_1, a_2\}$. Puisque G_1 et G_2 sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} , nous avons $\alpha(\mathcal{G}) \geq \alpha(G_1) = a_1$ et $\alpha(\mathcal{G}) \geq \alpha(G_2) = a_2$. D'où, l'égalité suit.

Ensuite, nous prouvons que $\gamma^\infty(\mathcal{G}) = \max\{g_1, g_2\}$. Sans perte de généralité, supposons que $g_1 \geq g_2$ et considérons deux familles dominantes $\mathcal{F}_1 = \bigcup_{i \in [k_1]} \{D_{i1}\}$ de G_1 et $\mathcal{F}_2 = \bigcup_{i \in [k_2]} \{D'_{i1}\}$ de G_2 . Pour tout $i \in [k_1]$, soit \mathcal{F}_i la collection de sous-ensembles de sommets de $G_1 \vee G_2$ qui contient D_{i1} et tous les sous-ensembles de sommets de $G_1 \vee G_2$ obtenus en remplaçant un sous-ensemble à q sommets de D_{i1} par un sous-ensemble à q sommets d'un ensemble dominant dans \mathcal{F}' pour tout $q \in [g_2]$. Les sous-ensembles de sommets dans \mathcal{F}_i sont tous des ensembles dominants de $G_1 \vee G_2$ car trois cas peuvent se présenter. (1) Soit que le sous-ensemble de sommets contient tous les sommets d'un ensemble dominant dans \mathcal{F}' , dans un tel cas il domine tous les sommets de G_2 et tous les sommets de G_1 car ces derniers sont tous adjacents à tous les sommets de G_2 . (2) Soit que le sous-ensemble de sommets est un ensemble dominant de G_1 dans la famille dominante \mathcal{F} , dans un tel cas il domine tous les sommets de G_2 aussi car ces derniers sont tous adjacents à tous les sommets de G_1 . (3) Soit que le sous-ensemble de sommets contient au moins un sommet de G_1 (qui domine tous les sommets de G_2) et au moins un sommet de G_2 (qui domine tous les sommets de G_1). Sans perte de généralité, supposons que $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j \in [l]} \{D_{ij}\}$ et soit $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in [k_1]} \mathcal{F}_i$. Par construction, $\forall D_{ij} \in \mathcal{F}, \forall v' \notin D_{ij}, \exists v \in D_{ij}$ tel que $\{v'\} \cup D_{ij} \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$. Ainsi, \mathcal{F} est une famille dominante de $G_1 \vee G_2$ dont les ensembles dominants sont de cardinalité g_1 . D'où, $\gamma^\infty(\mathcal{G}) \leq \max\{g_1, g_2\}$. Observons aussi que $\gamma^\infty(\mathcal{G}) \geq \max\{g_1, g_2\}$ car G_1 et G_2 sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} . Alors, l'égalité suit.

Enfin, nous montrons que $\theta(\mathcal{G}) = \max\{t_1, t_2\}$. C'est clair que $\theta(\mathcal{G}) \geq \max\{t_1, t_2\}$ car G_1 et G_2 sont des sous-graphes induits de \mathcal{G} . Sans perte de généralité, supposons que $t_1 \geq t_2$ et soient $\{C_1, C_2, \dots, C_{t_1}\}, \{C'_1, C'_2, \dots, C'_{t_2}\}$ deux couvertures minimum de G_1 et de G_2 respectivement. Alors, $\{C_1 \cup C'_1, C_2 \cup C'_2, \dots, C_{t_2} \cup C'_{t_2}, C_{t_2+1}, \dots, C_{t_1}\}$ est une couverture de cardinalité t_1 de $\mathcal{G} = G_1 \vee G_2$. D'où, $\theta(\mathcal{G}) \leq \max\{t_1, t_2\}$ et en conséquence $\theta(\mathcal{G}) = \max\{t_1, t_2\}$. \square

Corollaire 2.2.3. *Soit $\{G_i\}_{i \in [n]}$ une famille de graphes tel que $\alpha(G_i) = a_i$, $\gamma^\infty(G_i) = g_i$, $\theta(G_i) = t_i$ et soit $\mathcal{G}_n = G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_n$. Alors, $\alpha(\mathcal{G}_n) = \max_{i \in [n]} \{a_i\}$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_n) = \max_{i \in [n]} \{g_i\}$ et $\theta(\mathcal{G}_n) = \max_{i \in [n]} \{t_i\}$.*

Théorème 2.2.4. [23] *Soit G un graphe et v un sommet de G . Alors, $\gamma^\infty(G) - 1 \leq \gamma^\infty(G - \{v\}) \leq \gamma^\infty(G)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $G - \{v\}$ est un sous-graphe induit de G , nous avons par le lemme 2.0.4 $\gamma^\infty(G - \{v\}) \leq \gamma^\infty(G)$. Soit \mathcal{F} une famille dominante de $G - \{v\}$. Observons que la famille $\mathcal{F}' = \{D \cup \{v\} : D \in \mathcal{F}\}$ est une famille dominante de G . Si $\gamma^\infty(G - \{v\}) < \gamma^\infty(G) - 1$, alors $\gamma^\infty(G) < \gamma^\infty(G) - 1 + 1 = \gamma^\infty(G)$, ce qui est absurde. \square

Théorème 2.2.5. *Soient a et g deux entiers tels que $3 \leq a \leq g \leq \binom{a+1}{2}$. Pour tout entier t suffisamment grand, il existe un graphe $\mathcal{G}_{a,g,t}$ tel que $\alpha(\mathcal{G}_{a,g,t}) = a$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{a,g,t}) = g$ et $\theta(\mathcal{G}_{a,g,t}) = t$.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème 2.1.10, il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = a$, $\gamma^\infty(G) = \binom{a+1}{2}$ et $\theta(G) = t(a) \geq \binom{a+1}{2}$. Maintenant, la proposition 1.1.2 et le théorème 2.2.4 nous disent qu'il existe un sous-ensemble S de sommets de G tel que $\alpha(G - S) = a$ et $\gamma^\infty(G - S) = g$. Pour trouver l'ensemble S , nous fixons un stable de cardinalité maximum dans le graphe G et nous supprimons successivement un sommet du graphe qui n'appartient pas au stable fixé jusqu'à ce que le nombre de domination éternelle soit réduit à g . Soit $G_1 = (G - S) \vee K_1$, alors G_1 est un graphe connexe qui satisfait $\alpha(G_1) = a$, $\gamma^\infty(G_1) = g$ et $\theta(G_1) \leq \theta(G)$. Soit G_2 le complémentaire du graphe de Mycielski \mathcal{M}_2^t pour un entier $t \geq t(a)$. Ainsi, $\mathcal{G}_{a,g,t} = G_1 \vee G_2$ est un graphe qui a pour nombre de stabilité a , nombre de domination éternelle g et dont la cardinalité minimum d'une couverture par cliques est t . \square

2.2.1. Famille \mathcal{G}

Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et soit $\mathcal{G}_k = \{\mathcal{G}_i^k\}_{0 \leq i < k}$ la famille de graphes définis récursivement comme suit:

- (1) $\mathcal{G}_0^k = (V_0^k, E_0^k)$ est le stable à k sommets.
- (2) Étant donné le graphe $\mathcal{G}_{i-1}^k = (V_{i-1}^k, E_{i-1}^k)$ pour un entier i tel que $0 < i < k$, le graphe \mathcal{G}_i^k est celui qui a pour ensemble de sommets V_i^k et ensemble d'arêtes E_i^k où:
 - (a) $V_i^k = V_{i-1}^k \sqcup S_i^k \sqcup P_i^k$
 - (i) S_i^k est un ensemble de sommets de cardinalité i tel que $S_i^k \cap V_{i-1}^k = \emptyset$.
 - (ii) P_i^k est un nouvel ensemble de sommets de cardinalité $|V_{i-1}^k|$ dont les sommets sont en bijection avec les sommets de V_{i-1}^k . Ainsi, nous notons:
$$P_i^k = \{v_i : v \in V_{i-1}^k\}, P_i^k \cap V_{i-1}^k = \emptyset \text{ et } P_i^k \cap S_i^k = \emptyset.$$

- (b) $E_i^k = E_{i-1}^k \sqcup A_i^k \sqcup B_i^k \sqcup C_i^k$
- (i) $A_i^k = \{sv : s \in S_i^k, v \in V_{i-1}^k\}$
- (ii) $B_i^k = \{u_i v_i : u_i, v_i \in P_i^k\}$
- (iii) $C_i^k = \{uv_i : v \in V_{i-1}^k, v_i \in P_i^k, u \in N_{\mathcal{G}_{i-1}^k}[v] \cap (V_0^k \cup P_1^k \cup P_2^k \cup \dots \cup P_{i-1}^k)\}$.
 $N_{\mathcal{G}_{i-1}^k}[v]$ étant le voisinage fermé du sommet v dans le graphe \mathcal{G}_{i-1}^k .

Posons $\mathcal{G} = \bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{G}_k$. Les graphes de la famille \mathcal{G} satisfont des propriétés que nous allons voir dans les deux prochaines propositions.

Observation 2.2.6. Soient i, j et k trois entiers tels que $0 \leq j < i < k$, alors le graphe \mathcal{G}_j^k est un sous-graphe induit du graphe \mathcal{G}_i^k .

DÉMONSTRATION. Par construction, le graphe \mathcal{G}_i^k contient tous les sommets du graphe \mathcal{G}_j^k . Observons que nous n'avons ni ajouté ni supprimé d'arêtes entre les paires de sommets du graphe \mathcal{G}_j^k pour obtenir le graphe \mathcal{G}_i^k . \square

Proposition 2.2.7. $\alpha(\mathcal{G}_i^k) = k$.

DÉMONSTRATION. Nous le prouvons par récurrence sur i . Le cas $i = 0$ est clair car le graphe \mathcal{G}_0^k est un stable à k sommets. Supposons que la proposition soit vraie pour le graphe \mathcal{G}_{i-1}^k avec $0 < i < k$, c'est-à-dire $\alpha(\mathcal{G}_{i-1}^k) = k$ et soit S un stable maximum de \mathcal{G}_i^k . Étant donné un entier $j \in [i]$, si S contient un sommet de S_j^k , alors S ne contient pas de sommets de V_{j-1}^k , S ne contient pas de sommets de S_l^k pour tout entier $l \in \{j+1, j+2, \dots, i\}$ et S peut contenir au plus un sommet de P_l^k pour tout entier $l \in \{j, j+1, \dots, i\}$. Dans ce cas, la plus grande cardinalité que S puisse avoir est $j + (i - j + 1) = i + 1 \leq k$ car $i \leq k - 1$, S a cette cardinalité quand il contient tous les sommets de S_j^k et un sommet de P_l^k pour tout entier $l \in \{j, j+1, \dots, i\}$. Nous pouvons alors supposer sans perte de généralité que S ne contient pas de sommets de S_j^k pour tout entier $j \in [i]$. Étant donné un sommet $v \in V_{i-1}^k$, si S contient le sommet $v_i \in P_i^k$, alors S ne peut pas contenir le sommet v car il est soit adjacent à v_i soit dans S_j^k pour un $j \in [i-1]$; de même, S ne peut pas contenir les autres sommets de P_i^k non plus car ils sont tous des voisins de v_i . Observons aussi que tous les voisins de v dans $V_0^k \cup (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j^k)$ sont aussi des voisins de v_i . Alors, en remplaçant v_i par v dans S nous obtenons un nouveau stable S' de même cardinalité que S dans \mathcal{G}_{i-1}^k . Par conséquent, S est

de cardinalité au plus k . Enfin, si S ne contient pas de sommets de S_i^k ni de sommets de P_i^k , alors S est un stable de \mathcal{G}_{i-1}^k et est de cardinalité au plus k . D'où, $\alpha(\mathcal{G}_i^k) \leq k$. Puisque \mathcal{G}_{i-1}^k est un sous-graphe induit de \mathcal{G}_i^k , nous avons $\alpha(\mathcal{G}_i^k) \geq k$. En conséquence, l'égalité suit. \square

Proposition 2.2.8. $\gamma^\infty(\mathcal{G}_i^k) = \theta(\mathcal{G}_i^k) = k + i$

DÉMONSTRATION. Nous le prouvons par récurrence sur i . Le cas $i = 0$ est clair car \mathcal{G}_0^k est un stable à k sommets. Supposons que la proposition soit vraie pour le graphe \mathcal{G}_{i-1}^k (avec $0 < i < k$), c'est-à-dire $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{i-1}^k) = \theta(\mathcal{G}_{i-1}^k) = k + i - 1$. Considérons maintenant le graphe \mathcal{G}_i^k . D'abord, nous prouvons que $\theta(\mathcal{G}_i^k) \leq k + i$. Observons que les sommets de P_i^k sont deux à deux adjacents; dans ce cas, ils peuvent tous être couverts par une clique. Aussi, nous remarquons que chaque sommet de S_i^k peut être ajouté dans une clique différente d'une couverture minimum de \mathcal{G}_{i-1}^k puisque les sommets de S_i^k sont tous adjacents à tous les sommets de \mathcal{G}_{i-1}^k . Ainsi, $\theta(\mathcal{G}_i^k) \leq \theta(\mathcal{G}_{i-1}^k) + 1 = (k + i - 1) + 1 = k + i$. Il ne nous reste plus qu'à prouver que $\gamma^\infty(\mathcal{G}_i^k) \geq k + i$ car nous savons déjà que $\gamma^\infty(\mathcal{G}_i^k) \leq \theta(\mathcal{G}_i^k)$. Supposons que les sommets de l'ensemble V_{i-1}^k soient attaqués de façon à ce que nous soyons dans l'obligation de placer $k + i - 1$ gardes dans le sous-graphe induit \mathcal{G}_{i-1}^k . Maintenant, si les i sommets de l'ensemble S_i^k sont successivement attaqués, alors i parmi les $k + i - 1$ gardes dans V_{i-1}^k vont être déplacés pour répondre aux attaques. Il en restera alors $k - 1$ gardes dans V_{i-1}^k . Nous montrons alors qu'il existe un sommet de P_i^k qui n'a aucun garde placé dans son voisinage. Considérons l'ensemble des sommets $\mathcal{E} = \{v_i : v_i \in V_0^k, v_i \in P_i^k\}$. Par construction du graphe \mathcal{G}_i^k , les voisinages des sommets de l'ensemble \mathcal{E} dans \mathcal{G}_{i-1}^k sont tous disjoints et \mathcal{E} n'intersectent pas l'ensemble S_i^k . Puisque \mathcal{E} est de cardinalité k et il n'existe que $k - 1$ gardes dans V_{i-1}^k , \mathcal{E} contient un sommet qui n'a pas de garde dans son voisinage. \square

Corollaire 2.2.9. *Pour tout triplet d'entiers (a, g, t) tel que $3 \leq a \leq g < 2a$ et $t \geq g$ il existe un graphe $\mathcal{G}_{a,g,t}$ tel que $\alpha(\mathcal{G}_{a,g,t}) = a$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{a,g,t}) = g$ et $\theta(\mathcal{G}_{a,g,t}) = t$.*

DÉMONSTRATION. Soit G_1 le complémentaire du graphe de Mycielski \mathcal{M}_2^t et G_2 un graphe de la famille \mathcal{G} introduite dans la présente section tel que $\alpha(G_2) = a$ et $\gamma^\infty(G_2) = \theta(G_2) = g$. Supposons que $\mathcal{G}_{a,g,t} = G_1 \vee G_2$. Alors, d'après le lemme 2.2.2, $\alpha(\mathcal{G}_{a,g,t}) = a$, $\gamma^\infty(\mathcal{G}_{a,g,t}) = g$ et $\theta(\mathcal{G}_{a,g,t}) = t$. \square

2.3. Produit cartésien de graphes

2.3.1. Produit cartésien d'un graphe par K_2

Cette section est motivée par la conjecture 2.3.1 de Klostermeyer et de Mynhardt. Nous réfutons la conjecture en présentant au théorème 2.3.3 une classe infinie de contre-exemples. Bien avant, nous présentons notre premier résultat de la section au lemme 2.3.2.

Conjecture 2.3.1. [25] *Soit G un graphe tel que $\gamma^\infty(G) = \theta(G)$, alors $\gamma^\infty(G \square K_2) = \theta(G \square K_2)$.*

Lemme 2.3.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et soit q_c le nombre de cliques de cardinalité 1 dans une couverture minimum c du graphe G . Si $q = \max\{q_c : c \text{ est une couverture minimum de } G\}$, alors nous avons $\theta(G \square K_2) = 2\theta(G) - q$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ une couverture minimum de G et supposons que l'ensemble des sommets de K_2 soit $\{1, 2\}$. Pour tout $i \in [2]$ et tout $j \in [k]$ posons $C_j^i = \{(v, i) : i \in [2], v \in C_j\}$. Alors, pour tout $i \in [2]$, $\{C_1^i, C_2^i, \dots, C_k^i\}$ est une couverture minimum du sous-graphe G_i isomorphe à G induit par les sommets de l'ensemble $V(G) \times \{i\}$. Pour tout $j \in [k]$, si $C_j = \{v\}$, alors $\overline{C}_j = \{v\} \times \{1, 2\}$ est une clique de $G \square K_2$ et couvre les sommets $(v, 1)$ et $(v, 2)$. Supposons, sans perte de généralité, que les cliques C_1, C_2, \dots, C_q ne couvrent qu'un seul sommet de G et que les cliques $C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_k$ ont chacune au moins 2 sommets. Alors, l'ensemble $\{\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_q\} \cup \{C_j^i : i \in \{1, 2\}, q+1 \leq j \leq k\}$ couvre $G \square K_2$ et donc $\theta(G \square K_2) \leq 2\theta(G) - q$. Observons qu'une clique de $G \square K_2$ est soit contenue dans G_i ($i \in [2]$), soit de la forme $\overline{C} = \{(v, 1)(v, 2)\}$. Les cliques contenue dans G_i avec les sommets (v, i) de \overline{C} couvrent G_i . Nous avons donc l'inégalité inverse. \square

Théorème 2.3.3. *Pour tout entier $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = \theta(G) = \binom{k+1}{2} + 1$ et $\alpha(G \square K_2) = \gamma^\infty(G \square K_2) < \theta(G \square K_2)$.*

DÉMONSTRATION. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et H le graphe de Mycielski $\mathcal{M}_k^{\binom{k+1}{2}+1}$. Alors, d'après le corollaire 2.1.4, la cardinalité d'une couverture minimum du complémentaire de H est $\theta(\overline{H}) = \binom{k+1}{2} + 1$ et la cardinalité d'un stable maximum du complémentaire de H est $\alpha(\overline{H}) = k$. Puisque H est un graphe sommet-critique (d'après le

théorème 2.1.5), étant donné un sommet $w \in V(H)$ il existe une coloration propre de H par un nombre minimum de couleurs où w est le seul sommet à être coloré par sa couleur. En conséquence, étant donné un sommet $w \in V(\overline{H})$, il existe une couverture minimum de \overline{H} où l'une des cliques contient uniquement le sommet w (car nous avons précédemment vu qu'une coloration propre de H induit une partition des sommets de \overline{H} en cliques). Posons $H^* = \overline{H} \vee \overline{K}_{\binom{k+1}{2}}$. D'après le théorème 2.1.14, $\alpha(H^*) = \gamma^\infty(H^*) = \binom{k+1}{2}$ et $\theta(H^*) = \binom{k+1}{2} + 1$. Notons aussi qu'étant donné un sommet $w \in V(H^*) \cap V(\overline{H})$, il existe une couverture minimum de H^* où l'une des cliques contient uniquement le sommet w . Ceci résulte du fait que c'était le cas pour \overline{H} et que chaque sommet de $\overline{K}_{\binom{k+1}{2}}$ peut être ajouté dans une clique différente (qui ne contient pas le sommet w) d'une couverture de \overline{H} pour obtenir une couverture de H^* . Soit G le nouveau graphe obtenu en ajoutant un voisin privé x à w . Alors, $\alpha(G) = \gamma^\infty(G) = \theta(G) = \binom{k+1}{2} + 1$ car le nombre de stabilité augmente de 1 (le nouveau sommet ajouté n'est pas dans le voisinage du stable maximum de H^*). En contrepartie, la cardinalité d'une couverture minimum ne varie pas car x peut être ajouté dans l'unique clique de H^* de cardinalité 1 qui contenait le sommet w pour former une clique de cardinalité 2. Remarquons à présent que $\theta(G \square K_2) = 2\theta(G)$ par le lemme 2.3.2 car toutes les cliques d'une couverture minimum quelconque de G contiennent au moins 2 sommets tandis que $\gamma^\infty(G \square K_2) \leq 2\gamma^\infty(G) - 1$. Cette dernière inégalité suit de la stratégie suivante: D'une part, $\gamma^\infty(H^*)$ gardes protègent le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble $\{(v : 1) : 1 \in V(K_2), v \in V(H^*)\}$; d'autre part, $\gamma^\infty(H^*)$ gardes protègent le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble $\{(v : 2) : 2 \in V(K_2), v \in V(H^*)\}$. Un dernier garde peut alors être utilisé pour protéger uniquement les sommets $(x,1)$ et $(x,2)$. \square

2.3.2. Une conjecture de type Vizing

La conjecture de Vizing (Conjecture 2.3.4) concerne la relation entre le nombre de domination du produit cartésien de deux graphes et le produit des nombres de domination de ces deux graphes. Bien que formulée en 1968, cette conjecture reste encore un problème ouvert en théorie des graphes. Plusieurs résultats partiels sont connus. En ce qui concerne la relation entre le nombre de domination éternelle du produit cartésien de deux graphes et le produit des nombres de domination éternelle de ces deux graphes, une conjecture de type Vizing (Conjecture 2.3.5) a été formulée par Klostermeyer et Mynhardt dans [25]. Nous

présentons ici quelques résultats partiels concernant cette conjecture.

Conjecture 2.3.4. [37] *Pour tout graphes G et H , $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$.*

Conjecture 2.3.5. [25] *Pour tout graphes G et H , $\gamma^\infty(G \square H) \geq \gamma^\infty(G)\gamma^\infty(H)$.*

Un graphe G **satisfait la conjecture 2.3.5** si pour tout graphe H , $\gamma^\infty(G \square H) \geq \gamma^\infty(G)\gamma^\infty(H)$.

Lemme 2.3.6. *Soit G un graphe tel que $\alpha(G) = \gamma^\infty(G)$, alors G satisfait la conjecture 2.3.5.*

DÉMONSTRATION. Soit $S = \{v_1, v_2, \dots, v_a\}$ un stable maximum de G de cardinalité a . Par définition du produit cartésien de graphes, pour tout $i \in [a]$, le sous-graphe de $G \square H$ induit par les sommets de l'ensemble $\{(v_i, v) : v \in V(H)\}$ est isomorphe au graphe H . Notons ce sous-graphe H_i . Puisque les sommets de l'ensemble S sont deux à deux non adjacents, les sous-graphes de l'ensemble $\{H_i : i \in [a]\}$ n'ont aucun sommet ni aucune arête en commun. Maintenant, les a sous-graphes induits H_1, H_2, \dots, H_a peuvent tous être attaqués de façon à forcer $\gamma^\infty(H)$ gardes à se positionner dans chacun d'eux car ils sont deux à deux disjoints. Dans ce cas, nous avons besoin d'au moins $a\gamma^\infty(H) = \gamma^\infty(G)\gamma^\infty(H)$ gardes pour défendre $G \square H$. \square

Corollaire 2.3.7. *Soit G un graphe parfait, alors G satisfait la conjecture 2.3.5.*

Corollaire 2.3.8. *Tout cycle d'ordre pair satisfait la conjecture 2.3.5.*

Corollaire 2.3.9. *Toute roue d'ordre impair satisfait la conjecture 2.3.5.*

Proposition 2.3.10. *Pour tout entiers impairs $m, n \geq 5$.*

- (1) $\gamma^\infty(C_n \square C_m) \geq \gamma^\infty(C_n)\gamma^\infty(C_m)$
- (2) $\gamma^\infty(C_n \square \overline{C_m}) \geq \gamma^\infty(C_n)\gamma^\infty(\overline{C_m})$
- (3) $\gamma^\infty(\overline{C_n} \square \overline{C_m}) \geq \gamma^\infty(\overline{C_n})\gamma^\infty(\overline{C_m})$
- (4) $\gamma^\infty(C_m \square W_n) \geq \gamma^\infty(C_m)\gamma^\infty(W_n)$
- (5) $\gamma^\infty(\overline{C_m} \square W_n) \geq \gamma^\infty(\overline{C_m})\gamma^\infty(W_n)$
- (6) $\gamma^\infty(W_n \square W_m) \geq \gamma^\infty(W_n)\gamma^\infty(W_m)$

DÉMONSTRATION. Rappelons que C_n est un graphe qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}_n et ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$. La définition de $\overline{C_n}$ est claire à partir de la définition de C_n .

- (1) Puisque $\gamma^\infty(C_m) = \frac{m+1}{2}$ et $\gamma^\infty(C_n) = \frac{n+1}{2}$, il suffit de montrer que $C_m \square C_n$ contient un stable de cardinalité supérieure ou égale à $\frac{(m+1)(n+1)}{4}$. Considérons les sous-ensembles de sommets S_1 et S_2 suivants de $C_m \square C_n$:

$$S_1 = \{(2i, 2j) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}, j \in \{0, 1, \dots, \frac{m-3}{2}\}\} \sqcup \{(n-1, m-1)\}.$$

$$S_2 = \{(2i+1, 2j+1) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}, j \in \{0, 1, \dots, \frac{m-3}{2}\}\}.$$

Par définition du produit cartésien de graphes, les sommets de $S_1 \sqcup S_2$ sont deux à deux non adjacents. Puisque $|S_1| = \frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2} + 1$ et $|S_2| = \frac{m-1}{2} \frac{n-1}{2}$, $S_1 \sqcup S_2$ est un stable de cardinalité $\frac{(m-1)(n-1)}{2} + 1 \geq \frac{(m+1)(n+1)}{4}$ car $m, n \geq 5$.

- (2) Puisque $\gamma^\infty(C_n) = \frac{n+1}{2}$ et $\gamma^\infty(\overline{C_m}) = 3$, il suffit de montrer qu'il existe un stable de cardinalité supérieure ou égale à $\frac{3n+3}{2}$. Considérons les sous-ensembles de sommets S_0, S_1, S_2 et S_3 suivants de $C_n \square \overline{C_m}$:

$$S_0 = \{(0, 2i) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}\}$$

$$S_1 = \{(1, 2i) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}\}$$

$$S_2 = \{(2, 2i+1) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}\}$$

$$S_3 = \{(3, 2i+1) : i \in \{0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\}\}$$

L'ensemble $S_0 \sqcup S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3 \sqcup \{(n-1, 4)\}$ est un stable de cardinalité $\frac{4n-4}{2} + 1 \geq \frac{3n+3}{2} = \gamma^\infty(C_n) \square \gamma^\infty(\overline{C_m})$ car $m, n \geq 5$.

- (3) Il suffit de prouver que le graphe $\overline{C_n} \square \overline{C_m}$ a un stable de cardinalité 9 car $\gamma^\infty(\overline{C_n}) = \gamma^\infty(\overline{C_m}) = 3$. Par définition de $\overline{C_n}$, de $\overline{C_m}$ et du produit cartésien $C_n \square C_m$, les sommets de l'ensemble $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)\}$ sont deux à deux non adjacents. Ainsi, l'inégalité suit.

- (4) Puisque C_n est un sous-graphe induit de W_n , $C_m \square C_n$ est aussi un sous-graphe induit de $C_m \square W_n$. Sachant que $\gamma^\infty(C_n) = \gamma^\infty(W_n)$ (par le corollaire 2.1.15), le résultat prouvé en (1) a pour conséquence: $\gamma^\infty(C_m \square W_n) \geq \gamma^\infty(C_m) \gamma^\infty(W_n)$.

- (5) Par le résultat prouvé en (2) et en appliquant le même raisonnement que celui utilisé en (4), nous avons: $\gamma^\infty(\overline{C_m} \square W_n) \geq \gamma^\infty(\overline{C_m}) \gamma^\infty(W_n)$.

- (6) Ceci est une conséquence de (1).

□

Chapitre 3

Modèle des gardes

Ce chapitre est divisé en deux sections dans lesquelles nous étudions le modèle des gardes. Tout comme dans le modèle du garde, notre objectif est de protéger un graphe par un nombre minimum de gardes contre une suite infinie d'attaques sur ses sommets. Le modèle des gardes se distingue du modèle du garde en un seul point qui est le suivant. Après que le garde choisi pour défendre l'attaque est déplacé vers le sommet attaqué, nous avons le choix de déplacer chacun des autres gardes vers un sommet de son voisinage selon qu'il existe une meilleure position que les gardes qui ne répondent pas à l'attaque puissent occuper quand celui qui répond à l'attaque est sur le sommet attaqué. De même qu'au chapitre précédent, les gardes doivent en tout temps occuper les sommets d'un ensemble dominant du graphe pour pouvoir être en mesure de répondre à toutes les attaques. La collection de tous les ensembles dominants utilisés pour défendre le graphe est appelée une **famille m-dominante** du graphe.

Puisque les gardes placés sur les sommets d'une composante connexe d'un graphe ne peuvent pas participer à la défense des sommets d'une autre composante connexe de ce graphe, nous ne considérons que les graphes connexes. Le nombre de domination éternelle d'un graphe G dans le modèle des gardes, noté $\gamma_m^\infty(G)$, est le nombre de gardes nécessaires pour protéger G dans ce modèle. Dans le cas d'un graphe non connexe, le nombre de domination éternelle est égal à la somme des nombres de domination éternelle de chacune de ses composantes connexes. Ce modèle fut étudié pour la première fois par Goddard et *al.* dans [13].

Notons que la différence entre le nombre de domination éternelle dans le modèle du garde et le nombre de domination éternelle dans le modèle des gardes peut être arbitrairement grand car si tous les gardes sont autorisés à être déplacés pour répondre à chaque attaque, nous pouvons réduire considérablement le nombre de gardes nécessaires. Prenons l'exemple du graphe $K_{1,n}$ ($n \geq 2$) qui a pour nombre de domination éternelle n dans le modèle du garde mais 2 dans le modèle des gardes. En effet, si nous plaçons un garde sur le sommet universel de $K_{1,n}$ et l'autre garde sur l'une de ses feuilles, le garde placé sur le sommet universel peut répondre à toute attaque sur un sommet du graphe pendant que l'autre garde prend sa place après qu'il est déplacé. En répondant de cette manière à chaque fois, nous voyons que deux gardes sont suffisantes pour protéger le graphe. Le fait que deux gardes sont nécessaires est clair car un seul garde ne peut pas répondre à deux attaques consécutives sur deux sommets non adjacents.

3.1. Résultats préliminaires

Nous commençons par présenter quelques résultats connus dans le modèle des gardes que nous utiliserons au chapitre suivant quand nous introduirons le modèle fractionnaire.

Lemme 3.1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $V_1 \sqcup V_2$ une partition de V . Alors, $\gamma_m^\infty(G) \leq \gamma_m^\infty(G[V_1]) + \gamma_m^\infty(G[V_2])$.*

DÉMONSTRATION. Si nous plaçons $\gamma_m^\infty(G[V_1])$ gardes sur les sommets de V_1 pour défendre uniquement le sous-graphe induit par ces sommets et $\gamma_m^\infty(G[V_2])$ gardes sur les sommets de V_2 pour défendre uniquement le sous-graphe induit par ces sommets, alors nous pouvons protéger tous les sommets de G contre toute suite d'attaques. \square

Corollaire 3.1.2. $\gamma_m^\infty(G) \leq \min_{V_1 \sqcup V_2} \gamma_m^\infty(G[V_1]) + \gamma_m^\infty(G[V_2])$.

Théorème 3.1.3. [13] *Pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq \gamma_m^\infty(G) \leq \alpha(G)$.*

DÉMONSTRATION. La première inégalité est évidente car les gardes doivent occuper les sommets d'un ensemble dominant de G en tout temps. Nous prouvons la seconde par récurrence sur le nombre de stabilité du graphe. Si $\alpha(G) = 1$, alors G est un graphe complet et tout est clair. Soit k un entier strictement supérieur à 1 et supposons que le théorème soit vrai pour

tout graphe ayant un nombre de stabilité strictement inférieur à k . Considérons un graphe G à nombre de stabilité k et les deux cas suivants: (1) G contient un sommet v tel que $\alpha(G - N[v]) \leq k - 2$. Dans ce cas, d'après l'hypothèse de récurrence $\gamma_m^\infty(G - N[v]) \leq k - 2$ et $\gamma_m^\infty(N[v]) \leq 2$. En conséquence, $\gamma_m^\infty(G) \leq k$. (2) Sinon, G ne contient pas de sommet v tel que $\alpha(G - N[v]) \leq k - 2$. Dans ce cas, pour tout $v \in V(G)$, nous avons $\alpha(G - N[v]) \geq k - 1$. Puisque v n'est pas adjacent à aucun sommet de $G - N[v]$, en ajoutant v dans un stable maximum de $G - N[v]$ nous obtenons un nouveau stable de cardinalité $\alpha(G - N[v]) + 1$. Ainsi, $\alpha(G - N[v]) = k - 1$ et il existe un stable maximum de G qui contient v . En conséquence, la stratégie à utiliser est de placer k gardes sur les sommets d'un stable maximum S_1 de G ; pour répondre à une attaque sur un sommet $v \notin S_1$, nous déplaçons les gardes de façon à ce qu'ils occupent les sommets d'un nouveau stable maximum S_2 qui contient v après la réponse à l'attaque. Prouvons maintenant qu'une telle stratégie est toujours possible. Il suffit de montrer que si S_1 et S_2 sont deux stables maximum quelconques de G , alors il existe un couplage parfait dans le sous-graphe induit par les sommets de $S_1 \setminus S_2$ et de $S_2 \setminus S_1$. Supposons le contraire, d'après le théorème de Hall (Théorème 1.2.1) il existe un sous-ensemble de sommets S de $S_1 \setminus S_2$ (sans perte de généralité) qui a plus de voisins dans $S_2 \setminus S_1$ que de sommets dans S . Ce qui signifie qu'aucun des deux stables n'est maximum car en remplaçant S par ses voisins dans $S_2 \setminus S_1$ nous aurions pu trouver un autre stable de plus grande cardinalité que S_1 . \square

Observation 3.1.4. [13] *Pour tout entier $n \geq 1$:*

- i.* $\gamma_m^\infty(K_n) = 1$
- ii.* $\gamma_m^\infty(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- iii.* $\gamma_m^\infty(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, $n \geq 3$
- iv.* $\gamma_m^\infty(K_{1,n}) = 2$

Rappelons brièvement qu'un graphe G est un graphe sommet-transitif si pour toute paire de sommets $u, v \in V$ il existe un automorphisme $\phi : G \rightarrow G$ tel que $\phi(u) = v$. Cette propriété des graphes sommets-transitifs nous donne l'impression qu'ils ont un nombre de domination éternelle égal à leur nombre de domination. C'est ce qui explique la conjecture 3.1.5 de Goddard et *al.* dans [13] qui a plus tard été réfutée par Klostermeyer et MacGillivray dans [22] au théorème 3.1.7.

Conjecture 3.1.5. [13] *Pour tout graphe sommet-transitif G , $\gamma(G) = \gamma_m(G)$.*

Théorème 3.1.6. [12] *Le graphe de Petersen $PG_{n,k}$ est un graphe sommet-transitif si et seulement si $n = 10$ et $k = 2$ ou $k^2 \equiv \pm 1 \pmod n$.*

Théorème 3.1.7. [22] *Il existe des graphes sommets-transitifs G tel que $\gamma(G) < \gamma_m^\infty(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit G le graphe de Petersen à la figure 3.1. Par symétrie, il existe un unique ensemble dominant de cardinalité 3 qui est l'ensemble $\{v_0, v'_2, v'_3\}$. Considérons une attaque sur le sommet v'_0 . Si le garde au sommet v_0 est déplacé pour répondre à cette attaque, alors le garde au sommet v'_2 et celui au sommet v'_3 ne pourront pas être déplacés de façon à maintenir la position d'un ensemble dominant. Sans perte de généralité supposons que le garde au sommet v'_3 soit celui que nous utilisons pour répondre à l'attaque. Puisqu'il n'existe aucun ensemble dominant de cardinalité 3 qui contient les sommets v_0, v'_0 , alors le garde au sommet v_0 doit être déplacé soit vers le sommet v_4 soit vers le sommet v_1 . Peu importe sa destination, le garde au sommet v'_2 ne pourra pas être déplacé vers un sommet qui permettra aux gardes de maintenir la position d'un ensemble dominant. \square

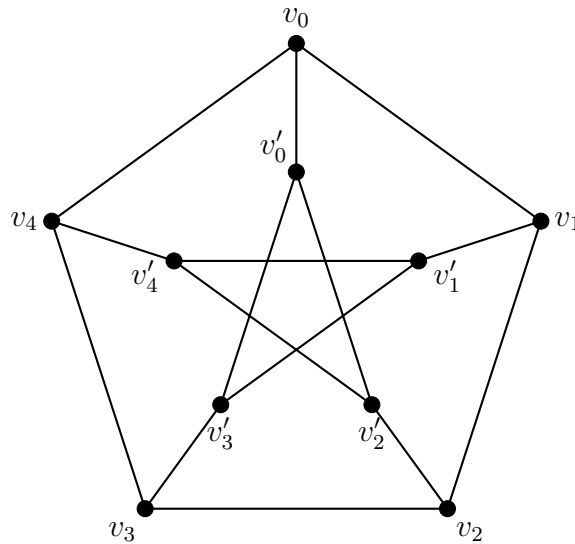


Fig. 3.1. Graphe de Petersen ($PG_{5,2}$)

Théorème 3.1.8. [26] *Pour tout graphe G , $\gamma_m^\infty(G) \leq 2\gamma(G)$.*

DÉMONSTRATION. Le théorème est trivialement clair quand G est isomorphe à K_1 . Supposons que G soit un graphe connexe d'ordre au moins 2. Il a été prouvé dans [6] que tout graphe connexe sans sommet isolé (sommet qui n'a aucun voisin) possède un ensemble dominant de cardinalité minimum dans lequel tout sommet a un voisin privé par rapport à cet ensemble dominant. Soit D un tel ensemble dominant de cardinalité minimum. Pour tout sommet $v \in D$, plaçons un garde sur v et un autre garde sur v' qui est le voisin privé de v par rapport à D . Pour répondre à une attaque sur un sommet x dans le graphe, le garde placé sur un sommet v de l'ensemble dominant D est déplacé vers x et le garde placé sur v' , le voisin privé de v , est déplacé vers v . Pour répondre à toute autre attaque, nous déplaçons les gardes d'une manière similaire. Notre but est d'avoir en tout temps un garde sur chacun des sommets de D et un garde différent dans le voisinage de chacun des sommets de D de sorte que si l'un des gardes placé sur un sommet de D est déplacé, le garde placé dans le voisinage de ce sommet puisse prendre sa place dans D . La configuration obtenue est clairement une famille m -dominante du graphe. \square

Observation 3.1.9. *Il existe des graphes G tels que $\gamma_m^\infty(G) = 2\gamma(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et considérons la chaîne P_{3k} . Soit G le graphe obtenu en ajoutant deux voisins privés aux sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$. D'une part, nous avons $\gamma(G) \geq k$ car les voisinages des sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ sont deux à deux disjoints et doivent contenir chacun un garde. D'autre part, nous avons $\gamma(G) \leq k$ car l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ est un ensemble dominant de G . Par contre, $\gamma_m^\infty(G) \geq 2k$ car les voisinages des sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ nécessitent chacun la présence d'au moins 2 gardes pour répondre à toute suite d'attaques sur les deux feuilles ajoutées à ces sommets. Ainsi, par le théorème précédent, nous avons $\gamma_m^\infty(G) = 2\gamma(G)$. \square

3.1.1. Dominer éternellement un arbre

Dans cette section, nous présentons un algorithme de Klostermeyer et de MacGillivray qui calcule le nombre de domination éternelle de tout arbre T .

Le lecteur sait déjà que les nombres de domination éternelle de K_2 et de $K_{1,n}$ sont respectivement $\gamma_m^\infty(K_2) = 1$ et $\gamma_m^\infty(K_{1,n}) = 2$ pour tout entier $n \geq 2$. Soit T un arbre qui n'est pas isomorphe à K_2 et qui n'est pas isomorphe à $K_{1,n}$ non plus pour tout $n \geq 2$. Rappelons que l'excentricité d'un sommet de T est la distance maximale de ce sommet aux autres sommets de T . Alors, l'ensemble \mathcal{E} des sommets de T qui ont au moins une feuille comme voisin et qui sont d'excentricité au moins 2 n'est pas vide; sinon, T serait soit K_1 soit $K_{1,n}$. Soit x un sommet de \mathcal{E} d'excentricité maximum et considérons les deux lemmes suivants:

Lemme 3.1.10. [22] *Si le degré de x dans T est supérieur ou égal à 3, alors le graphe T_1 obtenu après la suppression des feuilles adjacentes à x est un arbre et $\gamma_m^\infty(T_1) = \gamma_m^\infty(T) - 1$.*

DÉMONSTRATION. Avant tout, T_1 est un arbre car les feuilles supprimées ne créent pas de nouveaux cycles dans T et ne déconnectent pas l'arbre T non plus. Observons que x est adjacent à exactement un sommet y de degré au moins 2 car dans le cas contraire, il existerait un autre sommet de \mathcal{E} de plus grande excentricité que x . Ainsi, il existe au moins 2 feuilles adjacentes à x . Soient l_1, l_2, \dots, l_k les $k \geq 2$ feuilles adjacentes à x . Notons que pour protéger les sommets l_1, l_2, \dots, l_k , la présence de deux gardes dans le voisinage de x est nécessaire et suffisante en tout temps. En effet, s'il y a moins de deux gardes dans le voisinage de x à un moment donné, deux attaques consécutives sur les sommets l_1 et l_2 ne pourront pas être défendues. Deux gardes suffisent car le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble $N[x]$ est une étoile. Maintenant, pour défendre T_1 , la présence d'un garde dans le voisinage de x est nécessaire et suffisante en tout temps. À chaque étape, ce garde doit être placé soit sur le sommet x soit sur le sommet y et ne peut jamais quitter ces deux sommets. Du coup, si $\gamma_m^\infty(T)$ est le nombre de gardes nécessaires pour protéger l'arbre T , alors $\gamma_m^\infty(T) - 2$ est le nombre de gardes nécessaires pour protéger le graphe $T - N[x]$ et $\gamma_m^\infty(T) - 1$ est le nombre de gardes nécessaires pour protéger le graphe $T - (N(x) \setminus \{y\})$. \square

Lemme 3.1.11. [22] *Si le degré de x dans T est égal à 2, alors le graphe T_2 obtenu après la suppression de x et de la feuille y adjacente à x est un arbre et $\gamma_m^\infty(T_2) = \gamma_m^\infty(T) - 1$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, T_2 est un arbre car les sommets x et y supprimés ne créent pas de nouveaux cycles dans T et ne déconnectent pas non plus l'arbre T . Remarquons qu'il faut la présence d'un garde dans le voisinage du sommet y en tout temps pour le protéger contre toute attaque dans T . À chaque étape, ce garde doit être placé soit sur le sommet x soit sur le sommet y et ne peut jamais quitter ces deux sommets. Du coup, si $\gamma_m^\infty(T)$ est le nombre de gardes nécessaires pour protéger l'arbre T , alors $\gamma_m^\infty(T) - 1$ est le nombre de gardes nécessaires pour protéger le graphe $T_2 = T - \{x, y\}$. \square

3.1.1.1. Algorithme de Klostermeyer-MacGillivray

Soit T un arbre qui n'est pas isomorphe à K_2 et qui n'est pas isomorphe à $K_{1,n}$ non plus pour tout $n \geq 2$. Soit x un sommet d'excentricité maximum de T . Si le degré de x dans T est supérieur ou égal à 3, alors nous itérons la réduction R_1 décrite au lemme 3.1.10. Sinon, le degré de x dans T est égal à 2 et nous itérons la réduction R_2 décrite au lemme 3.1.11. Si le graphe T' obtenu est isomorphe à K_2 , alors le nombre de domination éternelle de T est égal au nombre d'itérations effectuées plus 1. Si le graphe T' obtenu est isomorphe à $K_{1,n}$ ($n \geq 2$), alors le nombre de domination éternelle de T est égal au nombre d'itérations effectuées plus 2. Sinon, nous réitérons l'une des réductions R_1, R_2 sur T' .

3.2. Dominer éternellement une grille forte

Le but de cette section est de montrer que $\frac{mn}{7} + O(m+n)$ gardes suffisent pour protéger éternellement la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ dans le modèle des gardes. Tout d'abord, il nous semble important de souligner que le nombre de domination de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ est $\frac{mn}{9} + O(m+n)$. Ceci résulte du fait que les sommets de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ peuvent être partitionnés en $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ sous-ensembles de sommets des sous-graphes induits $P_3 \boxtimes P_3$ de $P_m \boxtimes P_n$ plus un ensemble qui contient au plus $2m + 2n - 4$ sommets (ceux qui induisent les chaînes restants dans le contour du graphe si m ou $n \not\equiv 0 \pmod{3}$). Puisqu'un garde placé dans chacun des sous-graphes induits $P_3 \boxtimes P_3$ est nécessaire et suffisant pour dominer les sommets de chacun de ces sous-graphes, nous avons l'égalité. Rappelons aussi que notre résultat est une amélioration de la meilleure borne supérieure connue à l'époque

$(\frac{mn}{6} + O(m+n))$ par un résultat non publié de Finbow et *al.* communiqué au 6e congrès canadien de mathématiques discrètes et algorithmiques.

Soit $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un couple d'entiers et considérons les sous-ensembles de sommets \mathcal{D}_{ij} et \mathcal{D}'_{ij} de la grille forte infinie $P_\infty \boxtimes P_\infty$ (introduite au premier chapitre) définis de la manière suivante:

- \mathcal{D}_{ij} contient les sommets $(i + 2k + l, j + k + 4l)$ pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- \mathcal{D}'_{ij} contient les sommets $(i + k + 2l, j + 3k - l)$ pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Soit $\mathcal{F} = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \{\mathcal{D}_{ij}\}$, $\mathcal{F}' = \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \{\mathcal{D}'_{ij}\}$ et posons $\mathcal{D}_{00} = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'_{00} = \mathcal{D}'$ pour plus de commodité.

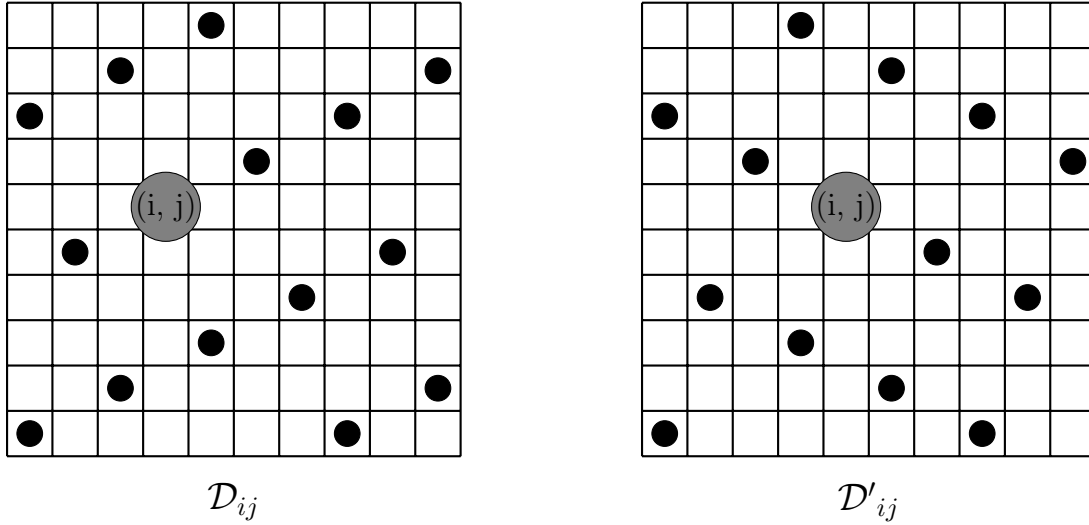


Fig. 3.2. Un ensemble dominant \mathcal{D}_{ij} de \mathcal{F} et un ensemble dominant \mathcal{D}'_{ij} de \mathcal{F}' dans deux sous-grilles fortes induites $P_{10} \boxtimes P_{10}$.

Proposition 3.2.1. \mathcal{D} est un ensemble dominant de $P_\infty \boxtimes P_\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit (i, j) un sommet de $P_\infty \boxtimes P_\infty$ et considérons le voisinage $N[(i, j)]$ de (i, j) . Nous allons montrer que $N[(i, j)]$ contient un sommet de \mathcal{D} . Supposons le contraire et soit (i', j') le sommet de \mathcal{D} le plus proche de (i, j) . Considérons les 4 cas suivants:

a) $i' \leq i - 1$ et $j' \leq j - 1$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i - 1, j - 1)\}$. Dans ce cas, $(i' + 2, j' + 1)$ est un autre sommet de \mathcal{D} plus proche de (i, j) que (i', j') .

b) $i' \leq i$ et $j' \geq j$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i-1, j+1), (i-1, j), (i, j), (i, j+1)\}$. Si $(i', j') = (i-2, j+1)$, alors $(i'+3, j'-2)$ est un autre sommet de \mathcal{D} plus proche de (i, j) que (i', j') ; sinon, $(i'+1, j'-3)$ est un autre sommet de \mathcal{D} plus proche de (i, j) que (i', j') .

c) $i' \geq i+1$ et $j' \geq j$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i+1, j), (i+1, j+1)\}$. Dans ce cas, $(i'-2, j'-1)$ est un autre sommet de \mathcal{D} plus proche de (i, j) que (i', j') .

d) $i' \geq i$ et $j' \leq j-1$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i, j-1), (i+1, j-1)\}$. Dans ce cas, $(i'-1, j'+3)$ est un autre sommet de \mathcal{D} plus proche de (i, j) que (i', j') .

Dans tous les cas, nous obtenons une contradiction; par conséquent, (i, j) est un sommet dominé par \mathcal{D} . \square

Proposition 3.2.2. \mathcal{D}'_{ij} est un ensemble dominant de $P_\infty \boxtimes P_\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit (i, j) un sommet de $P_\infty \boxtimes P_\infty$ et considérons le voisinage $N[(i, j)]$ de (i, j) . Nous allons montrer que $N[(i, j)]$ contient un sommet de \mathcal{D}' . Supposons le contraire et soit (i', j') le sommet de \mathcal{D}' le plus proche de (i, j) . Considérons les 4 cas suivants:

a) $i' \leq i-1$ et $j' \geq j$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i-1, j), (i-1, j+1)\}$. Dans ce cas, $(i'+2, j'-1)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') .

b) $i' \leq i$ et $j' \leq j-1$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i-1, j-1), (i, j-1)\}$. Si $(i', j') = (i-2, j-1)$, alors $(i'+3, j'+2)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') ; sinon, $(i'+1, j'+3)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') .

c) $i' \geq i+1$ et $j' \leq j-1$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i+1, j-1)\}$. Dans ce cas, $(i'-2, j'+1)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') .

d) $i' \geq i$ et $j' \geq j$:

Nous pouvons supposer que $(i', j') \notin \{(i, j), (i, j+1), (i+1, j), (i+1, j+1)\}$. Si $j' = j$, alors $(i'-2, j'+1)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') . Si $j' = j+1$, alors $(i'-3, j'-2)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j)

que (i', j') . Sinon, $(i' - 1, j' - 3)$ est un autre sommet de \mathcal{D}' plus proche de (i, j) que (i', j') .

Dans tous les cas, nous obtenons une contradiction; par conséquent, (i, j) est un sommet dominé par \mathcal{D}' . \square

Corollaire 3.2.3. *Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, \mathcal{D}_{ij} et \mathcal{D}'_{ij} sont des ensembles dominants de $P_\infty \boxtimes P_\infty$.*

3.2.1. La stratégie d'alternance

Maintenant, nous montrons que si les gardes sont placés sur les sommets d'un ensemble dominant \mathcal{D}_{ij} de $P_\infty \boxtimes P_\infty$ dans \mathcal{F} et si un sommet $(i', j') \notin \mathcal{D}_{ij}$ est attaqué, il existe une stratégie que nous pouvons utiliser pour déplacer les gardes vers un ensemble dominant $\mathcal{D}'_{i'j'}$ de \mathcal{F}' . La stratégie inverse pourra alors être utilisée pour répondre à une attaque sur un sommet n'appartenant pas à $\mathcal{D}'_{i'j'}$ quand les gardes sont placés sur les sommets de $\mathcal{D}'_{i'j'}$. Dans ce cas, nous serons en mesure de répondre à toute attaque sur un sommet de $P_\infty \boxtimes P_\infty$ en alternant les gardes entre les ensembles dominants de \mathcal{F} et de \mathcal{F}' . Ainsi, la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ sera une famille m-dominante de $P_\infty \boxtimes P_\infty$.

Considérons la position des gardes dans un ensemble dominant de \mathcal{F} . Rappelons que d'après la proposition 1.3.8 le graphe $P_\infty \boxtimes P_\infty$ est un graphe sommet-transitif. Nous pouvons alors réétiqueter ses sommets après chaque attaque de sorte que le garde qui répond à l'attaque soit déplacé du sommet $(0, 0)$ vers le sommet attaqué. Ainsi, nous supposons sans perte de généralité que le garde qui répond à l'attaque est déplacé du sommet $(0, 0)$ au sommet attaqué. De ce fait, nous allons uniquement analyser les 8 attaques possibles sur les sommets $(0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0)$ et $(-1, 1)$ adjacents à $(0, 0)$. Observons que si une attaque survient sur le sommet $(1, 0)$, alors nous pouvons aussi défendre l'attaque en utilisant le garde placé sur le sommet $(2, 1)$. Dans ce cas, en donnant une nouvelle étiquette $(i - 2, j - 1)$ à chaque sommet (i, j) de $P_\infty \boxtimes P_\infty$, nous revenons au cas où le garde placé au sommet $(0, 0)$ défend une attaque sur le sommet $(-1, -1)$. Ainsi, un seul parmi les attaques sur les sommets $(1, 0)$ et $(-1, -1)$ a besoin d'être considéré. De même, si une attaque survient sur le sommet $(-1, 0)$, alors nous

pouvons aussi défendre l'attaque en utilisant le garde placé sur le sommet $(-2, -1)$. Dans ce cas, en donnant une nouvelle étiquette $(i + 2, j + 1)$ à chaque sommet (i, j) de $P_\infty \boxtimes P_\infty$, nous revenons au cas où le garde placé sur le sommet $(0,0)$ défend une attaque sur le sommet $(1,1)$. Ainsi, un seul parmi les attaques sur les sommets $(-1,0)$ et $(1,1)$ a besoin d'être considéré. En conséquence, nous n'avons qu'à analyser 6 parmi les 8 cas possibles.

Pour répondre à une attaque, nous fixons quatre sommets contenant chacun un garde aux quatre coins d'une sous-grille forte induite $P_8 \boxtimes P_8$ contenant le sommet $(0,0)$ et le sommet attaqué. Ensuite, nous partitionnons les sommets restants en sous-grilles fortes induites $P_8 \boxtimes P_8$ et nous déplaçons les gardes dans chacune de ces sous-grilles fortes induites de la même manière que nous déplaçons les gardes dans celle qui contient le sommet $(0,0)$ et le sommet attaqué. Les tableaux 3.1 et 3.2 nous indiquent les sommets à fixer ainsi que le déplacement des gardes par rapport à ces sommets dans la sous-grille forte induite $P_8 \boxtimes P_8$ tandis que les figures 3.3 et 3.4 nous montrent la position des gardes avant et après la réponse aux 6 attaques possibles. Nous pouvons bien remarquer que les alternances entre les ensembles dominants de \mathcal{F} et les ensembles dominants de \mathcal{F}' sont toujours possibles et en conséquence, la stratégie d'alternance domine éternellement $P_\infty \boxtimes P_\infty$.

Le théorème suivant est notre résultat principal dans ce chapitre.

Théorème 3.2.4. *Pour tout entiers $m, n \geq 2$, $\gamma_m^\infty(P_m \boxtimes P_n) \leq \frac{mn}{7} + O(m + n)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que d'après la proposition 1.3.9, l'opération \boxtimes définie sur les graphes est une opération commutative. Nous pouvons ainsi supposer que $n \leq m$. Nous commençons par placer un garde sur chaque sommet du contour de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$. Les sommets restants induisent une sous-grille forte $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ dans laquelle nous plaçons des gardes selon la famille d'ensembles dominants \mathcal{F} qui a été décrite auparavant dans la grille forte infinie. Sans perte de généralité, supposons que l'un d'entre eux soit placé sur le sommet $(2,2)$ tel qu'indiqué dans la figure 3.5. Puisque chaque ligne de la sous-grille forte $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ contient au plus un total de $\lceil \frac{m-2}{7} \rceil$ gardes, cette sous-grille forte contient au plus $(n - 2) \times \lceil \frac{m-2}{7} \rceil \leq \frac{m-2+6}{7} = \frac{mn+4n-2m-8}{7}$ gardes. Ainsi, nous avons placé en tout (au plus) $\frac{mn+4n-2m-8}{7} + \frac{14m+14n-28}{7} = \frac{mn}{7} + \frac{12m+18n-36}{7}$ gardes dans la grille forte $P_m \boxtimes P_n$. Il ne nous

Le sommet attaqué	Les sommets fixés	Le déplacement des gardes
$(0, -1)$	$(-1, +3)$ $(+6, +3)$ $(-1, -4)$ $(+6, -4)$	$(0, 0) \rightarrow (0, -1)$ $(+2, +1) \rightarrow (+1, +2)$ $(+4, +2) \rightarrow (+3, +1)$ $(+1, -3) \rightarrow (+2, -2)$ $(+3, -2) \rightarrow (+4, -3)$ $(+5, -1) \rightarrow (+5, 0)$
$(1, -1)$	$(-4, +5)$ $(+3, +5)$ $(-4, -2)$ $(+3, -2)$	$(0, 0) \rightarrow (+1, -1)$ $(+2, +1) \rightarrow (+2, +2)$ $(-2, -1) \rightarrow (-1, 0)$ $(-3, +2) \rightarrow (-3, +1)$ $(-1, +3) \rightarrow (-2, +4)$ $(+1, +4) \rightarrow (0, +3)$
$(-1, 1)$	$(-3, +2)$ $(+4, +2)$ $(-3, -5)$ $(+4, -5)$	$(0, 0) \rightarrow (-1, +1)$ $(+2, +1) \rightarrow (+1, 0)$ $(-2, -1) \rightarrow (-2, -2)$ $(-1, -4) \rightarrow (0, -3)$ $(+1, -3) \rightarrow (+2, -4)$ $(+3, -2) \rightarrow (+3, -1)$

Tab. 3.1. Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans le sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques.

reste maintenant qu'à prouver que ces gardes peuvent défendre éternellement la grille forte contre toutes les attaques possibles. Observons que toute attaque dans le graphe ne peut survenir que sur l'un des sommets de la sous-grille forte induite $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ à l'intérieur. De ce fait, nous déplacerons les gardes de cette sous-grille selon la stratégie utilisée dans la grille forte infinie; en d'autres termes, les gardes à l'intérieur vont être déplacés de la même manière que nous l'aurions faite si l'un des sommets de la sous-grille forte induite $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ à l'intérieur était attaqué dans la grille forte infinie. Si la stratégie d'alternance ne nécessite pas la présence d'un nouveau garde dans la sous-grille forte induite $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ à l'intérieur à chaque attaque, alors nous avons fini; sinon, nous pouvons utiliser les gardes

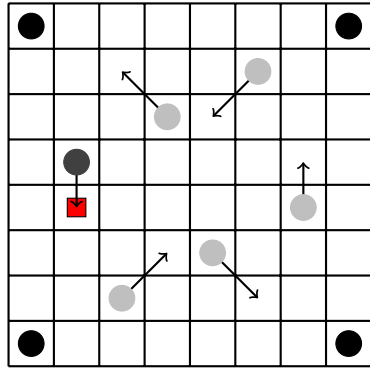
Le sommet attaqué	Les sommets fixés	Le déplacement des gardes
(1, 1)	$(-2, +6)$ $(+5, +6)$ $(-2, -1)$ $(+5, -1)$	$(0, 0) \rightarrow (+1, +1)$ $(+2, +1) \rightarrow (+3, 0)$ $(+4, +2) \rightarrow (+4, +3)$ $(-1, +3) \rightarrow (-1, +2)$ $(+1, +4) \rightarrow (0, +5)$ $(+3, +5) \rightarrow (+2, +4)$
(-1, -1)	$(-5, +1)$ $(+2, +1)$ $(-5, -6)$ $(+2, -6)$	$(0, 0) \rightarrow (-1, -1)$ $(-2, -1) \rightarrow (-3, 0)$ $(-4, -2) \rightarrow (-4, -3)$ $(-3, -5) \rightarrow (-2, -4)$ $(-1, -4) \rightarrow (0, -5)$ $(+1, -3) \rightarrow (+1, -2)$
(0, 1)	$(-6, +4)$ $(+1, +4)$ $(-6, -3)$ $(+1, -3)$	$(0, 0) \rightarrow (0, +1)$ $(-2, -1) \rightarrow (-1, -2)$ $(-4, -2) \rightarrow (-3, -1)$ $(-5, +1) \rightarrow (-5, 0)$ $(-3, +2) \rightarrow (-4, +3)$ $(-1, +3) \rightarrow (-2, +2)$

Tab. 3.2. Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans le sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques.

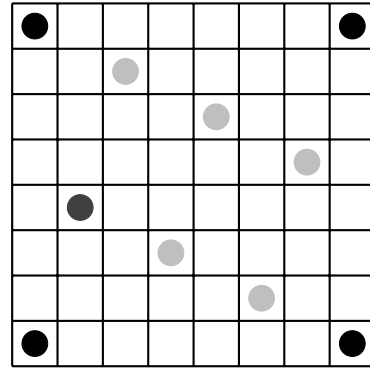
du contour de la grille forte pour remplacer les gardes manquants de la grille forte infinie. Observons dans les figures 3.3 et 3.4 qu'à chaque fois que la stratégie d'alternance oblige un garde à rentrer dans la sous-grille forte $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$, elle oblige aussi un garde à quitter cette dite sous-grille. Après que les sommets qui rentrent dans la sous-grille forte induite $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ soient déplacés, les autres sommets du contour peuvent être déplacés vers leur voisin au contour de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ de façon à laisser de la place aux sommets qui quittent la sous-grille $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ pour rejoindre ceux du contour de la grille $P_m \boxtimes P_n$ comme indiqués dans les figures 3.5 et 3.6. En conséquence, après chaque réponse à chaque attaque, les gardes seront placés sur chacun des sommets du contour de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ et dans

la sous-grille forte $P_{m-2} \boxtimes P_{n-2}$ dans une position similaire à la position de départ. Ainsi, nous obtenons une famille m -dominante de $P_m \boxtimes P_n$. \square

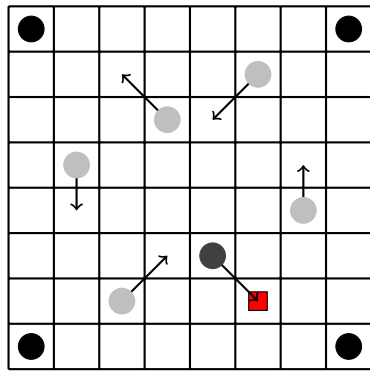
En conclusion, la stratégie d'alternance nous a permis de constater que le nombre de domination éternelle de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ est borné supérieurement par $\frac{mn}{7} + O(m+n)$. Rappelons aussi qu'une autre borne supérieure de $\frac{mn}{9} + O(m\sqrt{n})$ où $n \leq m$ sur le nombre de domination éternelle de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ vient d'être annoncé par Mc Inerney et *al.* dans [29]. En fait, la borne donnée dans [29] est $\lceil \frac{m}{k} \rceil (\lceil \frac{(n-2)(k-2)}{9} \rceil + 2(n+k) - 4) + 2(\frac{k-2}{3})(m+n-2)$ où k est l'entier le plus proche de \sqrt{n} tel que $k-2 \equiv 0 \pmod{3}$. Notons à présent que si l'une des deux valeurs de m, n est fixé (sans perte de généralité n), alors nous avons besoin d'un nombre linéaire en m de gardes pour défendre la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ dans les deux cas. Ainsi, le coefficient k dans $O(m)$ ne dépendra que de la valeur de n et notre résultat est bien meilleur pour de petites valeurs de n ($n \leq 6000$).



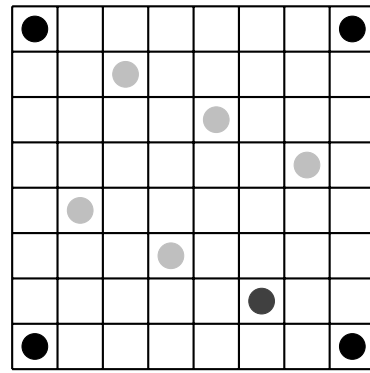
Sommet attaqué $\rightarrow (0, -1)$



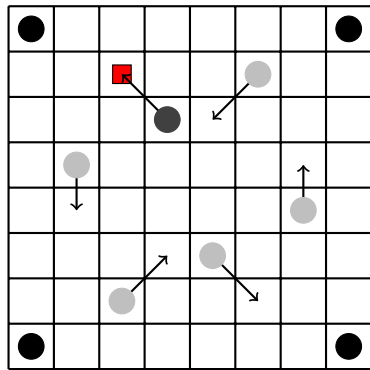
Réponse des gardes



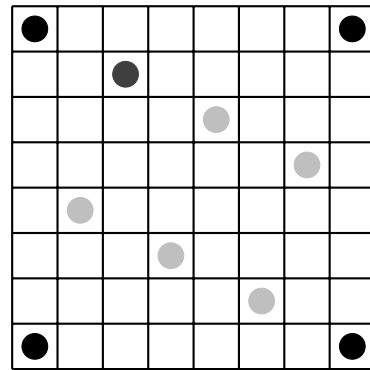
Sommet attaqué $\rightarrow (1, -1)$



Réponse des gardes

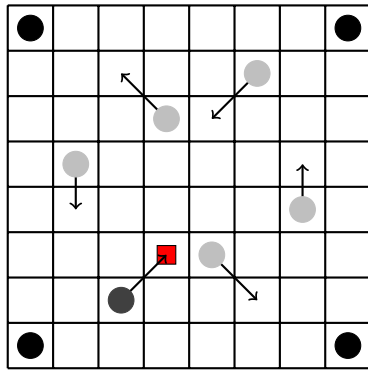


Sommet attaqué $\rightarrow (-1, 1)$

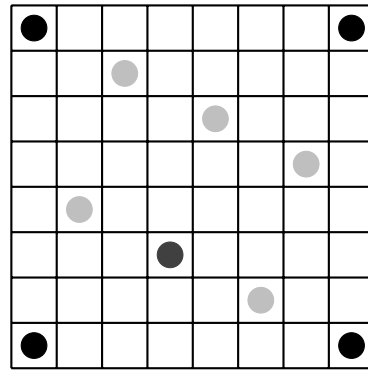


Réponse des gardes

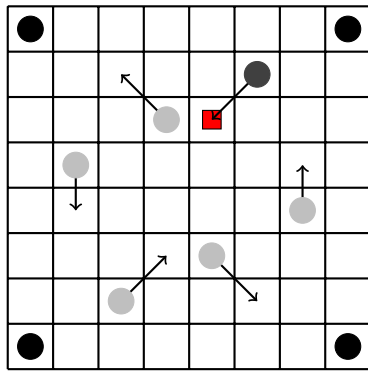
Fig. 3.3. Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans un sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques possibles. Le sommet coloré en rouge est le sommet attaqué et les gardes colorés en noir aux quatre coins sont ceux que nous avons fixés.



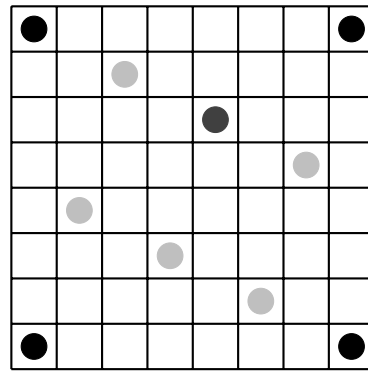
Sommet attaqué $\rightarrow (1, 1)$



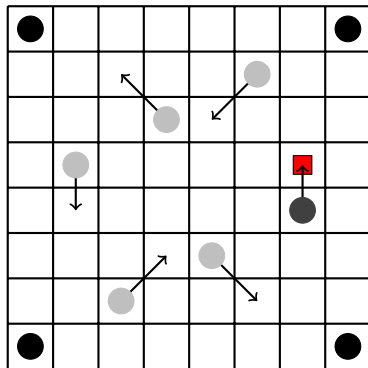
Réponse des gardes



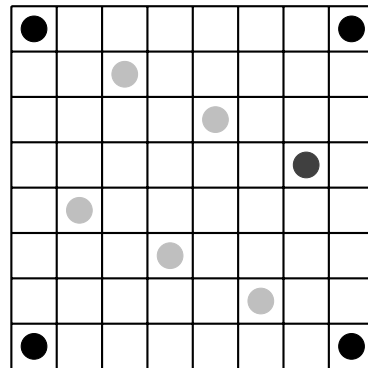
Sommet attaqué $\rightarrow (-1, -1)$



Réponse des gardes



Sommet attaqué $\rightarrow (0, 1)$



Réponse des gardes

Fig. 3.4. Déplacement des gardes d'un ensemble dominant \mathcal{D} à un ensemble dominant \mathcal{D}' dans un sous-graphe induit $(P_8 \boxtimes P_8)$ pour 3 parmi les 6 attaques possibles. Le sommet coloré en rouge est le sommet attaqué et les gardes colorés en noir aux quatre coins sont ceux que nous avons fixés.

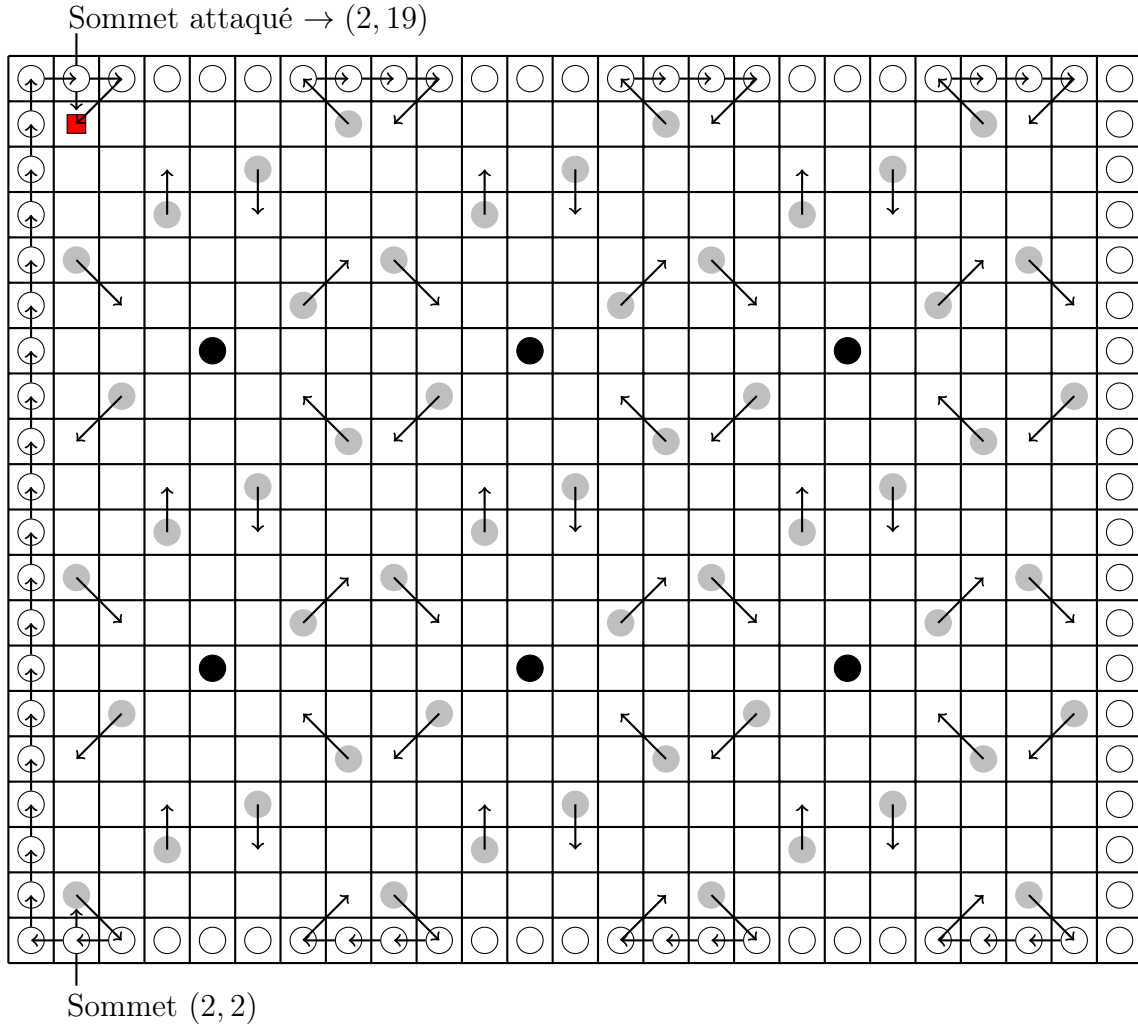


Fig. 3.5. Position initiale des gardes dans la grille forte $P_{25} \boxtimes P_{20}$ avant qu'une attaque survienne sur le sommet $(2, 19)$.

Chapitre 4

Modèle fractionnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons une analogue fractionnaire du problème de domination éternelle dans les graphes. À cette étape, il nous semble important de revenir sur la fonction poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ que nous avons définie au premier chapitre. Rappelons qu'une fonction poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ domine fractionnairement un graphe G si pour tout sommet $v \in V$, nous avons $\sum_{u \in N[v]} w(u) \geq 1$. Aussi, le nombre de domination fractionnaire de G , noté $\gamma_f(G)$, est la valeur $\gamma_f(G) = \min\{\sum_{v \in V} w(v) : w \text{ est une fonction poids qui domine fractionnairement } G\}$. Le modèle fractionnaire se distingue du modèle des gardes en un point. Au lieu de déplacer des gardes sur les sommets d'un graphe, nous allons déplacer des poids sur les sommets de ce graphe de sorte que le poids total sur le sommet attaqué soit supérieur ou égal à 1 après la réponse à l'attaque. Ainsi, il est raisonnable de parler de modèle fractionnaire car plutôt que de déplacer des poids entiers de 1 sur les sommets du graphe, nous pouvons également déplacer une fraction de poids à partir de chacun des sommets du graphe vers un sommet de son voisinage. Le sommet attaqué pourra alors recevoir de l'aide de plusieurs sommets dans son voisinage en même temps. La notation $\gamma_f^\infty(G)$ sera utilisée tout au long de ce chapitre pour désigner le poids total nécessaire pour protéger tout graphe G . Nous ne considérons que les graphes connexes dans ce chapitre.

4.1. Résultats préliminaires

Comme nous l'avons fait aux chapitres précédents, les premiers résultats de ce chapitre sont des bornes fondamentales sur le poids total nécessaire pour protéger un graphe en fonction des autres invariants de ce graphe. La valeur exacte du poids total nécessaire pour protéger les graphes de quelques familles bien spécifiques font aussi l'objet de cette section.

Proposition 4.1.1. *Pour tout graphe G , $\gamma_f(G) \leq \gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_m^\infty(G)$.*

DÉMONSTRATION. La première inégalité suit du fait que les poids doivent être placés sur les sommets de G de manière à dominer fractionnairement ce graphe en tout temps. Quant à la seconde, nous observons qu'une stratégie utilisée pour défendre G dans le modèle du garde peut aussi être utilisée pour défendre G dans le modèle fractionnaire. Dans ce cas, nous déplaçons des poids de 1 entre les sommets selon le déplacement des gardes dans le modèle des gardes. \square

Vu que nous notons que γ est aussi borné par γ_f et γ_m^∞ , la question de savoir si γ_f^∞ et γ sont comparables est tout à fait naturelle. Nous proposons une réponse à la question dans la section 4.3.

Proposition 4.1.2. *Pour tout entiers $m, n > 0$:*

- (1) $\gamma_f^\infty(K_n) = 1$.
- (2) $\gamma_f^\infty(P_n) = \alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
- (3) $\gamma_f^\infty(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ if $n \geq 3$.

DÉMONSTRATION. (1) C'est clair. (2) Rappelons brièvement que la chaîne P_n est le graphe qui a pour ensemble de sommets $[n]$ et pour ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$. Pour une borne inférieure sur $\gamma_f^\infty(P_n)$, remarquons que si $n \equiv 1 \pmod{2}$, alors une suite d'attaques sur les sommets $1, 3, 5, \dots, n$ nécessite un poids total de $\frac{n+1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour les défendre car aucune fraction de poids précédemment utilisée ne peut contribuer à la défense des nouveaux sommets attaqués. Sinon, $n \equiv 0 \pmod{2}$ et dans ce cas, une suite d'attaques sur les sommets $1, 3, 5, \dots, n - 1$ nécessite un poids total de $\frac{n}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour les défendre pour la même raison. La borne supérieure suit car $\gamma_m^\infty(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ par l'observation 3.1.4. Rappelons aussi que le cycle C_n est le graphe qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}_n et pour ensemble d'arêtes toutes les paires de sommets $\{i, j\}$ tels que $|i - j| = 1$. Ainsi, pour une borne inférieure sur $\gamma_f^\infty(C_n)$, nous observons qu'une suite d'attaques sur les sommets $0, 2, 4, \dots, 2(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)$ nécessite un poids total de $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour les défendre car aucune fraction de poids précédemment utilisée ne peut contribuer à la défense des nouveaux sommets attaqués. La borne supérieure suit car $\gamma_m^\infty(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ d'après l'observation 3.1.4. \square

Observation 4.1.3. Soient H_1 et H_2 respectivement un sous-graphe couvrant et un sous-graphe induit d'un graphe G . Alors, $\gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_f^\infty(H_1)$ mais $\gamma_f^\infty(G)$ et $\gamma_f^\infty(H_2)$ sont incomparables.

DÉMONSTRATION. Une stratégie pour défendre H_1 peut aussi être utilisée pour défendre G car G contient les mêmes sommets que H_1 et aussi toutes les arêtes de H_1 . Par contre, si H_2 est le sous-graphe induit par les sommets d'une clique maximum de G , alors $\gamma_f^\infty(H_2) = 1 \leq \gamma_f^\infty(G)$. Si H_2 est le sous-graphe induit par les sommets d'un stable maximum de G , alors $\gamma_f^\infty(H_2) = \alpha(G) \geq \gamma_m^\infty(G) \geq \gamma_f^\infty(G)$. \square

Observation 4.1.4. Soit G un graphe tel que $\alpha(G) \geq 2$, alors $\gamma_f^\infty(G) \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Soient x et y deux sommets non adjacents de G . Après une attaque sur le sommet x , un poids total de 1 doit être placé sur ce sommet. Si le sommet y est maintenant attaqué, alors un poids total de 1 doit être déplacé vers ce sommet et ne peut provenir du poids précédemment placé sur le sommet x . \square

Corollaire 4.1.5. Pour tout entier $n \geq 2$, $\gamma_f^\infty(K_{1,n}) = 2$.

DÉMONSTRATION. L'égalité suit car $\alpha(K_{1,n}) = n \implies \gamma_f^\infty(K_{1,n}) \geq 2$ et $\gamma_m^\infty(K_{1,n}) = 2 \implies \gamma_f^\infty(K_{1,n}) \leq 2$. \square

Observation 4.1.6. Si G contient un sommet universel, alors $\gamma_f^\infty(G) = \gamma_m^\infty(G) \in \{1, 2\}$.

DÉMONSTRATION. Si G est un graphe complet, alors $\gamma_f^\infty(G) = \gamma_m^\infty(G) = 1$. Sinon, $\alpha(G) \geq 2$ et il existe un entier n tel que $K_{1,n}$ est un sous-graphe couvrant de G . Donc, tout est clair. \square

Théorème 4.1.7. Pour tout graphe G , $\gamma_f^\infty(G) \leq 2\gamma_f(G)$.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par trouver une fonction poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui domine fractionnairement le graphe G . Si nous doublons le poids sur chaque sommet de G , alors toute attaque sur un sommet de ce graphe peut facilement être défendue où pas plus que la moitié du poids sur chaque sommet est déplacée. À la prochaine attaque, la fraction de poids restante sur chacun des sommets peut être utilisée pour répondre à l'attaque tandis que la fraction de poids précédemment déplacée sur chaque sommet retourne à sa position initiale. \square

Proposition 4.1.8. *Pour tout entier $k \geq 1$, il existe un graphe G tel que $\gamma_f^\infty(G) = 2\gamma_f(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit k un entier supérieur ou égal à 1 et considérons la chaîne P_{3k} . Soit G le graphe obtenu en ajoutant deux voisins privés aux sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$. D'une part, nous avons $\gamma_f(G) \geq k$ car les voisinages des sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ sont deux à deux disjoints et doivent contenir chacun un poids d'au moins 1. D'autre part, nous avons $\gamma_f(G) \leq k$ car $\gamma(G) \leq k$ puisque l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ est un ensemble dominant de G de cardinalité k . Par contre, $\gamma_f^\infty(G) \geq 2k$ car les voisinages des sommets de l'ensemble $\{2 + 3i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ nécessitent chacun la présence d'un poids d'au moins 2 pour répondre à toute suite d'attaques sur les deux feuilles adjacentes à ces sommets. \square

Nous avons vu au chapitre 1 qu'un 2-packing est un sous-ensemble de sommets dont les voisinages sont deux à deux disjoints. La proposition suivante nous donne une borne inférieure sur le nombre de domination fractionnaire d'un graphe à partir de la cardinalité maximum d'un 2-packing de ce graphe.

Proposition 4.1.9. *Soit P un 2-packing d'un graphe G , alors $\gamma_f(G) \geq |P|$.*

DÉMONSTRATION. Considérons une fonction poids $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui domine fractionnaire le graphe G . Puisque les voisinages des sommets de P sont deux à deux disjoints et la somme des poids dans le voisinage de chacun des sommets de P doit être supérieure ou égale à 1, nous avons $\gamma_f(G) \geq 1 \times |P|$. \square

Rappelons brièvement qu'un ensemble dominant efficace d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G qui est à la fois un ensemble dominant et un 2-packing de G . Ainsi, si G admet un ensemble dominant efficace, alors la proposition précédente a pour conséquence $\gamma_f^\infty(G) \geq \gamma_f(G) = \gamma(G)$.

Théorème 4.1.10. *Soit G un graphe séparé, alors $\gamma_f(G) \leq \gamma_f^\infty(G) \leq \gamma_f(G) + 1$.*

DÉMONSTRATION. La première inégalité est triviale. Soit $X \sqcup Y$ une partition des sommets de G de façon à ce que X soit une clique et Y soit un stable. Considérons une fonction poids de poids total minimum qui domine fractionnairement G où aucun poids strictement positif est placé sur un sommet de Y . Observons qu'une telle fonction poids existe toujours car il

n'y a aucun avantage à placer un poids strictement positif sur un sommet de Y puisqu'il existe un sommet dans X qui domine tout le voisinage de ce sommet y . Soit z un sommet quelconque de G qui reçoit un poids supplémentaire de 1. Il suffit de montrer qu'après chaque attaque, il est toujours possible de transférer le poids supplémentaire de 1 au sommet attaqué tout en gardant les mêmes poids sur les autres sommets. Supposons qu'un sommet $x \in X$ soit attaqué. Si $zx \in E$, alors nous déplaçons le poids supplémentaire de 1 du sommet z au sommet x . Sinon, $z \in Y$ et dans ce cas, nous déplaçons un poids total de 1 du voisinage ouvert de z (qui existe car $z \in Y$) à x et nous redistribuons le poids supplémentaire de 1 du sommet z à son voisinage ouvert de la même façon que les poids étaient placés avant. Supposons qu'un sommet $y \in Y$ soit attaqué. Si $zy \in E$, alors nous déplaçons le poids supplémentaire de 1 du sommet z au sommet y . Sinon, considérons les deux cas suivants: (1) Si $z \in X$, alors nous déplaçons un poids de 1 du voisinage ouvert de y (qui existe car $y \in Y$) à y et nous redistribuons le poids supplémentaire de 1 de z au voisinage de y dans X de la même façon que les poids étaient placés avant. (2) Si $z \in Y$, alors nous déplaçons un poids de 1 du voisinage ouvert de y à y puis un poids de 1 du voisinage ouvert de z au voisinage ouvert de y et enfin le poids supplémentaire de 1 de z à son voisinage ouvert. \square

Rappelons brièvement que le graphe de Kneser $KG_{n,k}$ est le graphe qui a pour ensemble de sommets $\binom{[n]}{k}$ où deux sommets X, Y sont adjacents si et seulement si $X \cap Y = \emptyset$. Si $k = 2$, alors nous avons une valeur exacte de $\gamma_f^\infty(KG_{n,k})$ comme nous le voyons bien dans le théorème suivant.

Théorème 4.1.11. *Pour tout entier $n \geq 5$, $\gamma_f^\infty(KG_{n,2}) = 3$.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, supposons qu'un poids de 1 soit placé sur le sommet $\{1, 2\}$. Observons que ce sommet a $\binom{n-2}{2}$ voisins et $2(n-2)$ non voisins. Aussi, chaque non voisin de $\{1, 2\}$ a $\binom{n-3}{2}$ voisins en commun avec $\{1, 2\}$. Soient N_1 l'ensemble des voisins de $\{1, 2\}$ et N_2 l'ensemble des non voisins de $\{1, 2\}$. Puisque la somme des poids dans le voisinage de chaque sommet de N_2 est supérieure ou égale à 1, en additionnant toutes ces sommes nous obtenons $\sum_{v \in N_2} \sum_{u \in N[v]} w(u) \geq 2(n-2)$. Puisque le poids sur chaque sommet de N_2 est répété $\binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{2} + 1 = n-2$ fois dans la somme menant à l'inégalité précédente, alors nous avons: $\sum_{v \in N_2} \sum_{u \in N[v]} w(u) + (n-2)w(\{1, 2\}) \geq 2(n-2) + (n-2) \implies (n-2) \sum_v w(v) \geq$

$3(n-2) \implies \sum_v w(v) \geq 3$. Maintenant, pour prouver que $\gamma_f^\infty(KG_{n,2}) \leq 3$, nous commençons par placer un poids de 1 (sans perte de généralité) sur le sommet $\{1, 2\}$ et un poids de $\frac{1}{n-2}$ sur chacun des sommets n'appartenant pas au voisinage de $\{1, 2\}$. Si l'un des sommets dans le voisinage ouvert de $\{1, 2\}$ est attaqué (sans perte de généralité le sommet $\{3, 4\}$), alors nous déplaçons le poids de 1 du sommet $\{1, 2\}$ au sommet $\{3, 4\}$ puis les poids de $\frac{1}{n-2}$ de chacun des sommets de $N(\{3, 4\}) \setminus N(\{1, 2\})$ vers chacun des sommets de $N(\{1, 2\}) \setminus N(\{3, 4\})$. Ceci peut se faire de la manière suivante: $\{1, 6\} \rightarrow \{3, 5\}$, $\{1, 7\} \rightarrow \{3, 6\}$, $\{1, 8\} \rightarrow \{3, 7\}$, \dots , $\{1, n\} \rightarrow \{3, n-1\}$, $\{1, 5\} \rightarrow \{3, n\}$ puis, $\{2, 6\} \rightarrow \{4, 5\}$, $\{2, 7\} \rightarrow \{4, 6\}$, $\{2, 8\} \rightarrow \{4, 7\}$, \dots , $\{2, n\} \rightarrow \{4, n-1\}$, $\{2, 5\} \rightarrow \{4, n\}$. Sinon, un des sommets n'appartenant pas au voisinage de $\{1, 2\}$ est attaqué (sans perte de généralité le sommet $\{1, 3\}$). Dans ce cas, les poids dans le voisinage du sommet $\{1, 3\}$ sont utilisés pour répondre à l'attaque et le poids de 1 sur le sommet $\{1, 2\}$ est redistribué parmi les sommets de l'ensemble $N[\{1, 2\}] \setminus N[\{1, 3\}]$. Ainsi, peu importe le sommet qui est attaqué, ce sommet peut toujours être défendu et après la réponse à l'attaque, nous aurons un poids de 1 placé sur ce sommet et un poids de 0 sur chacun des sommets dans le voisinage du sommet attaqué puis un poids de $\frac{1}{n-2}$ sur chacun des sommets restants. Par conséquent, $\gamma_f^\infty(KG_{n,2}) \leq 3$ car cette stratégie utilise un poids total de $2(n-2) \times \frac{1}{n-2} + 1$. Ceci termine la preuve. \square

Corollaire 4.1.12. $\gamma_f^\infty(PG_{5,2}) = 3$.

DÉMONSTRATION. Le graphe de Petersen est isomorphe au graphe de Kneser $KG_{5,2}$. \square

4.2. Dominer éternellement un arbre

Dans cette section, nous prouvons que l'algorithme introduit à la section 3.1.1 peut aussi être utilisé pour trouver la valeur de $\gamma_f^\infty(T)$ pour tout arbre T . En d'autres termes, nous montrons que $\gamma_f^\infty(T) = \gamma_m^\infty(T)$ pour tout arbre T .

Le lecteur sait déjà que $\gamma_f^\infty(K_2) = 1$ et que $\gamma_f^\infty(K_{1,n}) = 2$ pour tout entier $n \geq 2$. Soit T un arbre qui n'est pas isomorphe à K_2 et qui n'est pas isomorphe à $K_{1,n}$ non plus pour tout $n \geq 2$. Alors, l'ensemble \mathcal{E} des sommets de T qui ont au moins une feuille comme voisin et qui sont d'excentricité au moins 2 n'est pas vide; sinon, T serait soit K_1 soit $K_{1,n}$. Soit x un sommet de \mathcal{E} d'excentricité maximum et considérons les deux lemmes suivants:

Lemme 4.2.1. [22] *Si le degré de x dans T est supérieur ou égal à 3, alors le graphe T_1 obtenu après la suppression des feuilles adjacentes à x est un arbre et $\gamma_f^\infty(T_1) = \gamma_f^\infty(T) - 1$.*

DÉMONSTRATION. Avant tout, T_1 est un arbre car les feuilles supprimées ne créent pas de nouveaux cycles dans T et ne déconnectent pas l'arbre T non plus. Observons que x est adjacent à exactement un sommet y de degré au moins 2 car dans le cas contraire, il existerait un autre sommet de \mathcal{E} de plus grande excentricité que x . Ainsi, il existe au moins 2 feuilles adjacentes à x . Soient l_1, l_2, \dots, l_k les $k \geq 2$ feuilles adjacentes à x . Notons que pour protéger les sommets l_1, l_2, \dots, l_k , la présence d'un poids d'au moins 2 dans le voisinage de x est nécessaire et suffisante en tout temps. En effet, s'il y a un poids strictement inférieur à 2 dans le voisinage de x à un moment donné, deux attaques consécutives sur les sommets l_1 et l_2 ne pourront pas être défendues. Le poids de 2 est suffisante car le sous-graphe induit par les sommets de l'ensemble $N[x]$ est une étoile. Maintenant, pour défendre T_1 , la présence d'un poids de 1 dans le voisinage de x est nécessaire et suffisante en tout temps. À chaque étape, l'un des sommets x, y peut être attaqué. Si l'attaque survient sur le sommet x , alors le poids de 1 doit être placé sur le sommet x , si l'attaque survient sur le sommet y , alors le poids de 1 doit être placé sur le sommet y ; sinon il peut être divisé entre les sommets x et y . Du coup, si $\gamma_f^\infty(T)$ est le poids total nécessaire pour protéger l'arbre T , alors $\gamma_f^\infty(T) - 2$ est le poids total nécessaire pour protéger le graphe $T - N[x]$ et $\gamma_f^\infty(T) - 1$ est le poids total nécessaire pour protéger le graphe $T - (N(x) \setminus \{y\})$. \square

Lemme 4.2.2. [22] *Si le degré de x dans T est égal à 2, alors le graphe T_2 obtenu après la suppression de x et de la feuille y adjacente à x est un arbre et $\gamma_f^\infty(T_2) = \gamma_f^\infty(T) - 1$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, T_2 est un arbre car les sommets x et y supprimés ne créent pas de nouveaux cycles dans T et ne déconnectent pas non plus l'arbre T . Remarquons qu'il faut la présence d'un poids total d'au moins 1 dans le voisinage du sommet y en tout temps pour le protéger contre toute attaque dans T . À chaque étape, le poids de 1 doit être partagé entre les sommets x, y et ne peut jamais quitter ces deux sommets. Du coup, si $\gamma_f^\infty(T)$ est le poids total nécessaire pour protéger l'arbre T , alors $\gamma_f^\infty(T) - 1$ est le poids total nécessaire pour protéger le graphe $T_2 = T - \{x, y\}$. \square

Soit T un arbre qui n'est pas isomorphe à K_2 et qui n'est pas isomorphe à $K_{1,n}$ non plus pour tout $n \geq 2$. Soit x un sommet d'excentricité maximum de T . Si le degré de x dans T est supérieur ou égal à 3, alors nous itérons la réduction R_1 décrite au lemme 4.2.1. Sinon, le degré de x dans T est égal à 2 et nous itérons la réduction R_2 décrite au lemme 4.2.2. Si le graphe T' obtenu est isomorphe à K_2 , alors le poids total nécessaire pour protéger l'arbre T est égal au nombre d'itérations effectuées plus 1. Si le graphe T' obtenu est isomorphe à $K_{1,n}$ ($n \geq 2$), alors le poids total nécessaire pour protéger l'arbre T est égal au nombre d'itérations effectuées plus 2. Sinon, nous réitérons l'une des réductions R_1, R_2 sur T' .

Corollaire 4.2.3. *Pour tout arbre T , $\gamma_f^\infty(T) = \gamma_m^\infty(T)$.*

4.3. Famille $\mathcal{G}_{t,d}$

Dans la définition de γ_f^∞ , ce n'est pas clair que les inégalités de la proposition 4.1.1 peuvent être strictes, ni que γ_f^∞ peut ne pas être un entier. Comme nous le voyons bien dans cette section, la famille de graphes $\mathcal{G}_{t,d}$ contient une infinité de graphes G tels que $\gamma_f(G) < \gamma_f^\infty(G) < \gamma_m^\infty(G)$ et $\gamma_f^\infty(G) \notin \mathbb{N}$.

Soient t, d deux entiers positifs tels que $t \geq d$ et soient $X = [t], Y = \binom{[t]}{d}$. Soit Y' un ensemble qui contient une copie y' de chacun des éléments y de Y . Considérons le graphe $\mathcal{G}_{t,d}$ qui a pour ensemble de sommets $X \cup Y \cup Y'$ où deux sommets u, v sont adjacents si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite:

- (1) $u, v \in X$
- (2) $u \in X, v \in Y$ et $u \in v$
- (3) $u \in X, v' \in Y'$ et $u \in v'$

Proposition 4.3.1. $\gamma(\mathcal{G}_{t,d}) = t - d + 1$.

DÉMONSTRATION. Observons que pour dominer $\mathcal{G}_{t,d}$ il n'y a aucun avantage à placer un poids strictement positif sur un sommet y de Y (respectivement y' de Y') car il existe un voisin d'un tel sommet y (respectivement y') dans X qui domine tout le voisinage de y (respectivement y'). Ainsi nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'un ensemble dominant de $\mathcal{G}_{t,d}$ est $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, \gamma\}$. Le sommet 1 domine exactement $\binom{t-1}{d-1}$ sommets dans

Y et dans Y' , le sommet 2 domine exactement $\binom{t-2}{d-1}$ sommets parmi les sommets restants dans Y et dans Y' , ..., le sommet γ domine exactement $\binom{t-\gamma}{d-1}$ sommets parmi les sommets restants dans Y et dans Y' . Si $\gamma = t - d + 1$ alors $t - \gamma = d - 1$ et ainsi cet ensemble domine exactement $\binom{t-1}{d-1} + \binom{t-2}{d-1} + \dots + \binom{d-1}{d-1} = \binom{t}{d} = |Y|$ sommets dans Y et dans Y' . Si nous enlevons un sommet x de \mathcal{D} , alors l'ensemble $\mathcal{D} \setminus \{x\}$ obtenu n'est plus un ensemble dominant car $\mathcal{D} \setminus \{x\}$ domine moins de $\binom{t}{d}$ sommets dans Y et dans Y' . \square

Proposition 4.3.2. $\gamma_f(\mathcal{G}_{t,d}) = \frac{t}{d}$.

DÉMONSTRATION. Pour la même raison que dans la proposition précédente, il n'y a aucun avantage à placer un poids strictement positif sur un sommet de Y ou de Y' . Puisque le poids dans chaque sous-ensemble de X à d éléments doit s'additionner à au moins 1, la somme des poids placés sur les sommets dans X est au moins $\frac{\binom{t}{d}}{\binom{t-1}{d-1}} = \frac{t}{d}$ puisqu'il y a $\binom{t}{d}$ sous-ensembles à d éléments en tout et chaque sommet de X est répété dans $\binom{t-1}{d-1}$ parmi eux. En plaçant un poids de $\frac{1}{d}$ sur chaque sommet de X nous voyons bien que cette borne est atteinte et que cette fonction poids domine fractionnairement $\mathcal{G}_{t,d}$. \square

Proposition 4.3.3. $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) = \frac{t}{d} + 1$.

DÉMONSTRATION. D'une part, nous avons $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) \leq \frac{t}{d} + 1$ par le théorème 4.1.10 et la proposition précédente. D'autre part, pour prouver que $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) \geq \frac{t}{d} + 1$, nous supposons qu'il y ait une attaque sur un sommet $y \in Y$ peu importe la position initiale des poids. Après qu'un poids total de 1 soit placé sur le sommet y , la somme des poids dans le voisinage de chacun des sommets de Y' doit être au moins 1. Ainsi, la somme des poids dans tout sous-ensemble de sommets à d éléments de X doit totaliser au moins 1. Alors, par le même raisonnement dans la preuve de la proposition précédente nous savons que la somme des poids placés sur les sommets de X est au moins $\frac{t}{d}$. D'où, $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) \geq \frac{t}{d} + 1$. \square

Corollaire 4.3.4. Si t et d sont deux entiers premiers entre eux tel que $t \geq d$, alors le graphe $\mathcal{G}_{t,d}$ satisfait: $\gamma_f(\mathcal{G}_{t,d}) < \gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) < \gamma(\mathcal{G}_{t,d})$ et $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) \notin \mathbb{N}$.

Corollaire 4.3.5. Soit $\mathcal{G}'_{t,d}$ le graphe obtenu en remplaçant un sommet y de Y par un graphe quelconque H et en reliant chaque sommet de H à tous les voisins de y . Alors, $\gamma_f(\mathcal{G}'_{t,d}) = \gamma_f(\mathcal{G}_{t,d})$, $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}'_{t,d}) = \gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d})$ et $\gamma(\mathcal{G}'_{t,d}) = \gamma(\mathcal{G}_{t,d})$.

DÉMONSTRATION. La même stratégie utilisée dans les trois propositions précédentes peut aussi s'appliquer ici pour trouver les valeurs de $\gamma_f(\mathcal{G}'_{t,d})$, $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}'_{t,d})$ et $\gamma(\mathcal{G}'_{t,d})$. \square

Corollaire 4.3.6. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout graphe H , il existe un graphe G tel que H est un sous-graphe induit de G et $\gamma_f^\infty(G) < \epsilon\gamma(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel strictement positif et soient t, d deux entiers positifs tels que $t \geq d$ et $\frac{t+d}{(t-d+1)d} < \epsilon$. Le graphe $\mathcal{G}_{t,d}$ satisfait alors $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}_{t,d}) < \epsilon\gamma(\mathcal{G}_{t,d})$. En remplaçant un sommet y de Y dans $\mathcal{G}_{t,d}$ par H , nous obtenons un graphe $\mathcal{G}'_{t,d}$ tel que H est un sous-graphe induit de $\mathcal{G}'_{t,d}$ et $\gamma_f^\infty(\mathcal{G}'_{t,d}) < \epsilon\gamma(\mathcal{G}'_{t,d})$. \square

À partir du corollaire précédent, nous pouvons clairement remarquer que γ_f^∞ peut être arbitrairement petit comparé à γ car pour tout $\epsilon > 0$, il existe un graphe G tel que $\frac{\gamma_f^\infty(G)}{\gamma(G)} < \epsilon$.

Proposition 4.3.7. *Pour tout entier $k > 0$, il existe un graphe G tel que $\gamma_f^\infty(G) - \gamma(G) \geq k$.*

DÉMONSTRATION. Soit G le graphe de la preuve de la proposition 4.1.8. Alors, $\gamma_f^\infty(G) - \gamma(G) = k$. \square

Remarquons toutefois, bien que γ/γ_f^∞ peut être arbitrairement grand, ce n'est pas le cas pour γ_f^∞/γ car d'après le théorème 3.1.8 et la proposition 4.1.1 nous avons $\gamma_f^\infty \leq \gamma_m^\infty \leq 2\gamma$.

Question 4.3.8. *Existe-t-il un graphe G tel que $\gamma_f^\infty(G) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?*

4.4. Graphes k -connexes

Dans cette section, nous nous inspirons de quelques résultats de la théorie fractionnaire des graphes pour trouver des bornes assez efficaces sur $\gamma_f^\infty(G)$ pour un graphe quelconque G à n sommets.

Lemme 4.4.1. [10, 16] *Soit G un graphe d'ordre n tel que $\delta(G) = \delta$ et $\Delta(G) = \Delta$. Alors, $\frac{n}{\Delta+1} \leq \gamma_f(G) \leq \frac{n}{\delta+1}$.*

DÉMONSTRATION. Pour la seconde inégalité, observons qu'en plaçant un poids de $\frac{1}{\delta+1}$ sur chaque sommet de G nous pouvons ainsi dominer tous les sommets de G avec un poids total de $\frac{n}{\delta+1}$ car chaque sommet a au moins δ voisins et par conséquent un poids supérieur ou

égal à 1 dans son voisinage. Quant à la première inégalité, soit $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction poids qui domine fractionnairement le graphe G . En additionnant la somme des poids dans le voisinage de chaque sommet de G nous obtenons $n \leq \sum_{v \in V} \sum_{u \in N[v]} w(u)$. Remarquons que pour tout sommet $v \in V$, le poids $w(v)$ apparaît $d(v) + 1$ fois dans la somme (une fois pour v et les autres fois pour chaque voisin de v). Ainsi, $n \leq \sum_{v \in V} \sum_{u \in N[v]} w(u) = \sum_{v \in V} (1 + d(v))w(v) \leq \sum_{v \in V} (1 + \Delta)w(v) = (1 + \Delta) \sum_{v \in V} w(v)$. En conséquence, $\frac{n}{\Delta+1} \leq \sum_{x \in V} w(x)$ \square

Théorème 4.4.2. *Soit G un graphe k -connexe, alors $\gamma_f^\infty(G) \leq \frac{n+k}{k+1}$.*

DÉMONSTRATION. Commençons par placer un poids de 1 sur un sommet quelconque u de G et un poids de $\frac{1}{k+1}$ sur les sommets restants. C'est clair que pour tout sommet $v \in V$, nous avons $\sum_{u \in N[v]} w(u) \geq \frac{\delta+1}{k+1} \geq 1$. Supposons qu'un sommet v différent de u soit attaqué. Puisque G est k -connexe, il existe k chaînes élémentaires disjointes de u à v : $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ où $P_i = u - v_{i_1} - v_{i_2} - \dots - v$ d'après le théorème de Menger (Théorème 1.1.3). Pour chacune de ces chaînes, faisons passer un poids de $\frac{1}{k+1}$ du sommet u au sommet v_{i_1} , du sommet v_{i_1} au sommet v_{i_2} et ainsi de suite jusqu'à ce que v ait finalement reçu un poids de $\frac{1}{k+1}$ de chacune de ces chaînes, donc un poids total de 1. Après une telle réponse à l'attaque sur v , tous les sommets de G auront un poids de $\frac{1}{k+1}$ placé sur eux à l'exception du sommet v qui aura un poids de 1. Nous pouvons répondre d'une manière similaire à toute autre attaque sur G . \square

Corollaire 4.4.3. *Soit G un graphe d -régulier, d -connexe. Alors, $\frac{n}{d+1} \leq \gamma_f^\infty(G) \leq \frac{n+d}{d+1}$.*

DÉMONSTRATION. La borne inférieure provient du lemme 4.4.1 tandis que la borne supérieure est une conséquence du théorème précédent. \square

4.5. Graphes de Cayley

Dans cette section, nous étudions le problème dans les graphes connexes cubiques de Cayley d'un groupe abélien. Il importe de souligner que par le théorème 1.4.4, ces graphes ne sont que de quatre types: K_4 , Q_3 , $C_n \square K_2$ et $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ avec $n \geq 3$. Le lecteur sait déjà que $\gamma_f^\infty(K_4) = 1$; alors, nous ne considérons que les graphes Q_3 , $C_n \square K_2$ et $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$. À la lumière de ce qui précède au chapitre 1, le graphe $C_n \square K_2$ est le graphe qui a pour ensemble de sommets $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ où deux sommets (i, j) et (i', j') sont adjacents si $i = i'$ et $|j - j'| = 1$ ou $|i - i'| = 1$ et $j = j'$. Le graphe $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ quant à lui est le graphe qui a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}_{2n} où deux sommets (i, j) sont

adjacents si $|i - j| = 1$ ou $|i - j| = n$.

Proposition 4.5.1. $\gamma_f^\infty(Q_3) = \gamma_m^\infty(Q_3) = 2$.

DÉMONSTRATION. Il est important d'observer dans la définition de Q_d au chapitre 1 que Q_3 est un graphe qui représente un cube en trois dimensions. Puisque ce graphe c'est pas complet, nous avons $\gamma_f^\infty(Q_3) \geq 2$. Maintenant, pour prouver que $\gamma_f^\infty(Q_3) \leq 2$, nous allons juste prouver que $\gamma_m^\infty(Q_3) \leq 2$. Ceci suit de la simple observation que le graphe Q_3 contient un ensemble dominant efficace de cardinalité 2 et que deux gardes peuvent toujours être déplacés d'un ensemble dominant efficace de Q_3 vers un autre ensemble dominant efficace de Q_3 qui contient le sommet attaqué. \square

4.5.1. Dominer éternellement $C_n \square K_2$

Nous avons montré au corollaire 1.1.6 et au théorème 1.4.2 que $C_n \square K_2$ est un graphe 3-connexe. La proposition qui suit est une propriété particulière de $C_n \square K_2$ par rapport au nombre de domination éternelle dans le modèle des gardes.

Proposition 4.5.2. *Pour tout entier $n \geq 3$, $\gamma_m^\infty(C_n \square K_2) = \gamma(C_n \square K_2)$.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, supposons que les gardes soient placés sur les sommets d'un ensemble dominant \mathcal{D} de cardinalité minimum de $C_n \square K_2$ qui contient le sommet $(0,0)$ et que le garde placé sur le sommet $(0,0)$ soit celui qui répond à l'attaque. S'il est déplacé vers le sommet $(0,1)$, alors pour tout sommet (i,j) qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $(i,j+1)$. Si le garde placé sur le sommet $(0,0)$ est déplacé vers le sommet $(1,0)$, alors pour tout sommet (i,j) qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $(i+1,j)$. Si le garde placé sur le sommet $(0,0)$ est déplacé vers le sommet $(n-1,0)$, alors pour tout sommet (i,j) qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $(i-1,j)$. Dans les 3 cas, les gardes sont dans une position similaire à la position de départ après la réponse à l'attaque. En répondant de la sorte à chaque attaque, ces gardes pourront être utilisés pour défendre éternellement le graphe. \square

Nous considérons respectivement les cas $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ et $n \equiv 3 \pmod{4}$ dans les quatres propositions suivantes.

Proposition 4.5.3. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(C_{4k} \square K_2) = \gamma(C_{4k} \square K_2) = 2k$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.2 que $\gamma_f^\infty(C_{4k} \square K_2) \leq \gamma(C_{4k} \square K_2)$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(C_{4k} \square K_2) \geq \gamma(C_{4k} \square K_2)$. Pour y parvenir, remarquons que l'ensemble $S_0 = P_0 = \{(4i, 0) : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ est un ensemble dominant efficace de cardinalité $2k$ de $C_{4k} \square K_2$. Alors, $\gamma_f^\infty(C_{4k} \square K_2) \geq \gamma_f(C_{4k} \square K_2) \geq \gamma(C_{4k} \square K_2)$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(C_{4k} \square K_2) = \gamma(C_{4k} \square K_2) = 2k$. \square

Proposition 4.5.4. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(C_{4k+1} \square K_2) = \gamma(C_{4k+1} \square K_2) = 2k+1$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.2 que $\gamma_f^\infty(C_{4k+1} \square K_2) \leq \gamma(C_{4k+1} \square K_2)$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(C_{4k+1} \square K_2) \geq \gamma(C_{4k+1} \square K_2)$. Pour ce faire, remarquons que l'ensemble $P_1 = \{(4i, 0) : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$ est un 2-packing de cardinalité $2k$ qui ne contient pas dans son voisinage seulement les sommets $(4k, 1)$ et $(4k-1, 0)$. Donc, P_1 n'est pas un ensemble dominant et est un 2-packing de cardinalité maximum. Nous pouvons tout aussi bien remarquer que l'ensemble $S_1 = P_1 \cup (4k, 0)$ est un ensemble dominant de cardinalité $2k+1 = |P_1| + 1$. Alors, S_1 est un ensemble dominant de cardinalité minimum. Si le sommet $(4k, 1)$ est attaqué, alors un poids de 1 doit être placé non seulement sur ce sommet mais encore dans le voisinage de chacun des sommets de P_1 . Alors, $\gamma_f^\infty(C_{4k+1} \square K_2) \geq 1 + 2k = \gamma(C_{4k+1} \square K_2)$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(C_{4k+1} \square K_2) = \gamma(C_{4k+1} \square K_2) = 2k+1$. \square

Proposition 4.5.5. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(C_{4k+2} \square K_2) < \gamma(C_{4k+2} \square K_2)$.*

DÉMONSTRATION. Notons que $\gamma_f^\infty(C_{4k+2} \square K_2) \leq \frac{4k+4+3}{4} = \frac{4k+7}{4}$ par le corollaire 4.4.3 car $C_{4k+2} \square K_2$ est un graphe cubique et 3-connexe à $8k+4$ sommets; alors, il suffit de montrer que $\gamma(C_{4k+2} \square K_2) > \frac{4k+4+3}{4}$. Pour y parvenir, nous prouvons d'abord que $C_{4k+2} \square K_2$ ne contient pas d'ensemble dominant efficace. Supposons le contraire et soit $S_2 = P_2$ un ensemble dominant efficace de $C_{4k+2} \square K_2$. Sans perte de généralité, supposons que P_2 contienne le sommet $(0, 0)$. Alors, P_2 doit contenir le sommet $(2, 1)$ car aucun autre sommet de $C_{4k+2} \square K_2$ ne peut dominer le sommet $(1, 1)$ sans qu'il n'y ait de voisin en commun avec $(0, 0)$. Pour une raison similaire, P_2 doit contenir tous les sommets de l'ensemble $\{(4i, 0) : i \in \{0, 1, \dots, k\}\} \cup \{(4i+2, 1) : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$. Dans ce cas, les sommets $(0, 0)$ et $(4k, 0)$ de P_2 auraient le sommet $(4k+1, 0)$ en commun dans leur voisinage, ce qui est absurde. Puisque $C_{4k+2} \square K_2$ ne contient pas d'ensemble dominant efficace, la cardinalité minimum d'un ensemble dominant

de $C_{4k+2} \square K_2$ est strictement supérieure à $\frac{8k+4}{4}$ et donc est supérieure ou égale à $\frac{8k+4+4}{4} = 2k + 2$. \square

Proposition 4.5.6. *Pour tout entier $k \geq 0$, $\gamma_f^\infty(C_{4k+3} \square K_2) = \gamma(C_{4k+3} \square K_2) = 2k + 2$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.2 que $\gamma_f^\infty(C_{4k+3} \square K_2) \leq \gamma(C_{4k+3} \square K_2)$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(C_{4k+3} \square K_2) \geq \gamma(C_{4k+3} \square K_2)$. Pour ce faire, remarquons que l'ensemble $P_3 = \{(4i, 0) : i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}\} \cup \{(4i + 2, 1) : i \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}\}$ est un 2-packing de cardinalité $2k + 1$ qui ne contient pas dans son voisinage seulement les sommets $(4k + 2, 1)$ et $(4k + 1, 1)$. Donc P_3 n'est pas un ensemble dominant et est un 2-packing de cardinalité maximum. Nous pouvons tout aussi bien remarquer que l'ensemble $S_3 = P_3 \cup \{(4k + 2, 1)\}$ est un ensemble dominant de cardinalité $2k + 2 = |P_3| + 1$. Alors, S_3 est un ensemble dominant de cardinalité minimum. Si le sommet $(4k + 2, 1)$ est attaqué, alors un poids de 1 doit être placé non seulement sur ce sommet mais encore dans le voisinage de chacun des sommets de P_3 . Alors, $\gamma_f^\infty(C_{4k+3} \square K_2) \geq |P_3| + 1 = 2k + 2 = \gamma(C_{4k+3} \square K_2)$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(C_{4k+3} \square K_2) = \gamma(C_{4k+3} \square K_2) = 2k + 2$. \square

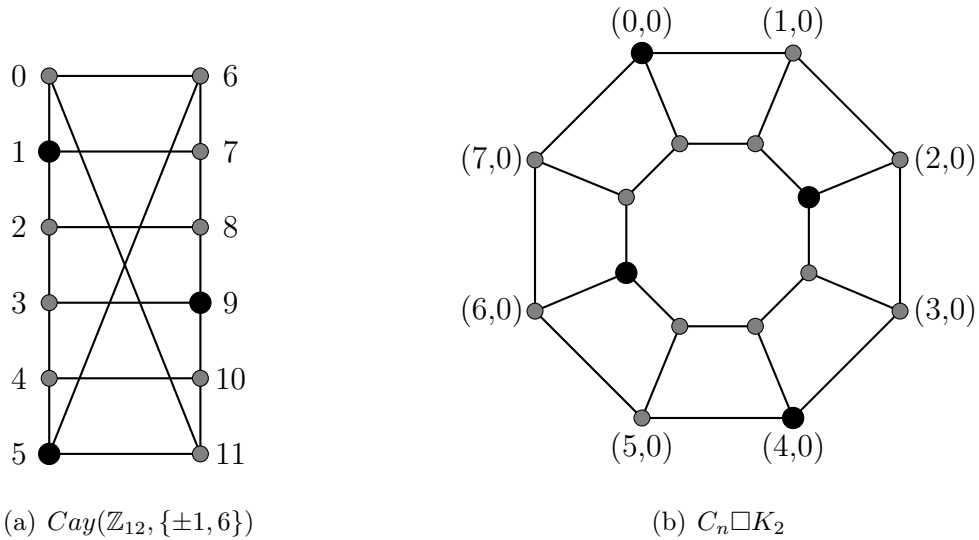


Fig. 4.1. Position des gardes (en noir) dans un ensemble dominant efficace de $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \{\pm 1, 6\})$ et dans un ensemble dominant efficace de $C_8 \square K_2$.

4.5.2. Dominer éternellement $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$

Nous avons montré au corollaire 1.1.6 et au théorème 1.4.2 que $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ est un graphe 3-connexe. La proposition qui suit est une propriété particulière de $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ par rapport au nombre de domination éternelle dans le modèle des gardes.

Proposition 4.5.7. *Pour tout entier $n \geq 3$, $\gamma_m^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})) = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\}))$.*

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, supposons que les gardes soient placés sur les sommets d'un ensemble dominant \mathcal{D} de cardinalité minimum de $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n\})$ qui contient le sommet 0 et que le garde placé sur le sommet 0 soit celui qui répond à l'attaque. S'il est déplacé vers le sommet 1, alors pour tout sommet i qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $i + 1$. Si le garde placé sur le sommet 0 est déplacé vers le sommet $n - 1$, alors pour tout sommet i qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $i - 1$. Sinon, le garde placé sur le sommet 0 est déplacé vers le sommet n et dans ce cas, pour tout sommet i qui contient un garde, nous déplaçons ce garde vers le sommet $i + n$. Dans les 3 cas, les gardes sont dans une position similaire à la position de départ après la réponse à l'attaque. En répondant de la sorte à chaque attaque, ces gardes suffisent pour défendre éternellement le graphe. \square

Nous considérons respectivement les cas $n \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ et $n \equiv 3 \pmod{4}$ dans les quatre propositions suivantes.

Proposition 4.5.8. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})) < \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\}))$.*

DÉMONSTRATION. Notons que $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})) \leq \frac{8k+3}{4}$ par le corollaire 4.4.3 car $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ est un graphe cubique et 3-connexe à $8k$ sommets; alors, il suffit de montrer que $\gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})) > \frac{8k+3}{4}$. Pour y parvenir, nous montrons d'abord que $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ ne contient pas d'ensemble dominant efficace. Supposons le contraire et soit $S_0 = P_0$ un ensemble dominant efficace de $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$. Sans perte de généralité, supposons que P_0 contienne le sommet 0. Alors, P_0 doit contenir le sommet $4k + 2$ car aucun autre sommet de $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ ne peut dominer le sommet $4k + 1$ sans qu'il n'y ait de voisin en commun avec le sommet 0. Pour une raison similaire, P_0 doit contenir tous les sommets de l'ensemble $\{4i : i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}\} \cup \{4i+4k+2 : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\}$. Dans un

tel cas, les sommets 0 et $8k-2$ de P_0 auraient le sommet $8k-1$ en commun dans leur voisinage, ce qui est absurde. Puisque $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ ne contient pas d'ensemble dominant efficace, la cardinalité d'un ensemble dominant de $Cay(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ est strictement supérieure à $\frac{8k}{4}$ et donc est supérieure ou égale à $\frac{8k+4}{4} = 2k + 1$. \square

Proposition 4.5.9. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) = 2k + 1$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.7 que $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) \leq \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\}))$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) \geq \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\}))$. Pour ce faire, remarquons que l'ensemble $P_1 = \{4i : i \in \{0, 1, \dots, k-1\}\} \cup \{4i + (4k + 1) + 2 : i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}\}$ est un 2-packing de cardinalité $2k$ qui ne contient pas dans son voisinage seulement les sommets $4k$ et $4k-1$. Donc, P_1 n'est pas un ensemble dominant et est un 2-packing de cardinalité maximum. Nous pouvons tout aussi bien remarquer que l'ensemble $S_1 = P_1 \cup \{4k\}$ est un ensemble dominant de cardinalité $2k + 1 = |P_1| + 1$. Alors, S_1 est un ensemble dominant de cardinalité minimum. Si le sommet $4k$ est attaqué, alors un poids de 1 doit être placé non seulement sur ce sommet mais encore dans le voisinage de chacun des sommets de P_1 . Alors, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) \geq |P_1| + 1 = 2k + 1 = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\}))$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+2}, \{\pm 1, 4k + 1\})) = 2k + 1$. \square

Proposition 4.5.10. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) = 2k + 1$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.7 que $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) \leq \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\}))$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) \geq \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\}))$. Pour y parvenir, remarquons que les sommets de l'ensemble $\{4i : i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}\} \cup \{4i + (4k + 2) + 2 : i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}\}$ forment un ensemble dominant efficace de cardinalité $2k + 1$ de $Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})$. Alors, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) \geq \gamma_f(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) \geq \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\}))$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) = \gamma(Cay(\mathbb{Z}_{8k+4}, \{\pm 1, 4k + 2\})) = 2k + 1$. \square

Proposition 4.5.11. *Pour tout entier $k \geq 1$, $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) = \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) = 2k+2$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons par la proposition 4.5.7 que $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) \leq \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\}))$; alors, il suffit de montrer que $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) \geq \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\}))$. Pour ce faire, remarquons que l'ensemble $P_3 = \{4i : i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}\} \cup \{4i + (4k+3) + 2 : i \in \{0, 1, 2, k-1\}\}$ est un 2-packing de cardinalité $2k+1$ qui ne contient pas dans son voisinage seulement les sommets $4k+2$ et $8k+4$. Donc, P_3 n'est pas un ensemble dominant et est un 2-packing de cardinalité maximum. Nous pouvons tout aussi bien remarquer que l'ensemble $S_3 = P_3 \cup \{8k+5\}$ est un ensemble dominant de cardinalité $2k+2 = |P_3| + 1$. Alors, S_3 est un ensemble dominant de cardinalité minimum. Si le sommet $4k+2$ est attaqué, alors un poids de 1 doit être placé non seulement sur ce sommet, mais encore dans le voisinage de chacun des sommets de P_3 . Alors, $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) \geq 2k+2 = |P_3| + 1 = \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\}))$. En conséquence, $\gamma_f^\infty(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) = \gamma(\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k+6}, \{\pm 1, 4k+3\})) = 2k+2$. \square

Corollaire 4.5.12. *Un graphe cubique de Cayley d'un groupe abélien G satisfait $\gamma_f^\infty(G) = \gamma(G)$ si et seulement si G n'est pas l'un des graphes suivants: $C_{4k+2} \square K_2$ ou $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{8k}, \{\pm 1, 4k\})$ pour $k \geq 1$.*

4.6. Produit de graphes

Rappelons brièvement que l'hypercube de dimension d est le graphe Q_d défini récursivement sur d de la manière suivante: Q_1 est le graphe K_2 et Q_d est le graphe $Q_{d-1} \square K_2$ pour tout entier $d \geq 2$.

Corollaire 4.6.1. *Soit d un entier positif et Q_d l'hypercube de dimension d , alors $\frac{2^d}{d+1} \leq \gamma_f^\infty(Q_d) \leq \frac{2^d+d}{d+1}$.*

DÉMONSTRATION. Ce résultat suit du théorème 4.4.3 et du théorème 1.3.7. \square

Le tableau suivant compare $\gamma_f^\infty(Q_d)$ et $\gamma(Q_d)$ pour quelques valeurs de $d \geq 1$. Les nombres de domination sont tirés de [4] et les autres du corollaire 4.6.1.

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma_m^\infty(Q_d) = \gamma(Q_d)$	1	2	2	4	7	12	16	32
$\gamma_f^\infty(Q_d)$	$[1, \frac{3}{2}]$	$[\frac{4}{3}, 2]$	$[2, \frac{11}{4}]$	$[\frac{16}{5}, 4]$	$[\frac{32}{6}, \frac{37}{6}]$	$[\frac{64}{7}, 10]$	$[16, \frac{135}{8}]$	$[\frac{256}{9}, \frac{264}{9}]$

À la lumière de ce qui précède au chapitre 1, le graphe $P_2 \square P_n$ a pour ensemble de sommets $\{(i,j) : i \in [2] \text{ et } j \in [n]\}$. Le théorème suivant nous donne le poids total nécessaire pour protéger ce graphe en fonction de n .

Théorème 4.6.2. *Pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma_f^\infty(P_2 \square P_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

DÉMONSTRATION. D'une part, par la proposition 4.1.2 et l'observation 4.1.3 nous avons $\gamma_f^\infty(P_2 \square P_n) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ car $\gamma_f^\infty(C_{2n}) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ et C_{2n} est un sous-graphe couvrant de $P_2 \square P_n$. D'autre part, pour prouver que $\gamma_f^\infty(P_2 \square P_n) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, considérons la suite d'attaques suivante sur les sommets de $P_2 \square P_n$:

- (1) $n \equiv 0 \pmod{3} : (1,1), (2,2), (1,4), (2,5), \dots, (1,3k-2), (2,3k-1), (1,3k+1), (2,3k+2)$.
- (2) $n \equiv 1 \pmod{3} : (1,1), (2,2), (1,4), (2,5), \dots, (1,3k-2), (2,3k-1), (1,3k+1)$.
- (3) $n \equiv 2 \pmod{3} : (1,1), (2,2), (1,4), (2,5), \dots, (1,3k-2), (2,3k-1), (1,3k+1), (2,3k+2)$.

Nous observons que peu importe la position initiale des poids, nous avons besoin de déplacer des poids précédemment non utilisés pour répondre à chacune des attaques dans les trois cas pour $k = \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Puisque les sous-ensembles de sommets sont tous de cardinalité $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$, l'égalité suit. \square

Théorème 4.6.3. $\gamma_f^\infty(P_m \square P_n) \leq \frac{mn}{5} + O(m+n)$.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par placer un poids de $\frac{3}{15}$ sur chacun des sommets de la grille $P_m \square P_n$. Ensuite, nous ajoutons un poids supplémentaire de $\frac{1}{15}$ sur les sommets du contour de cette grille. A présent, les seuls sommets non dominés dans le graphe sont ceux aux 4 coins de la grille; plaçons un poids supplémentaire de $\frac{3}{15}$ sur chacun d'eux. Nous allons ensuite placer des poids supplémentaires de $\frac{8}{15}$ sur l'un des sommets aux 4 coins de la grille, de $\frac{11}{15}$ sur l'un des sommets du contour de la grille qui n'est pas au coin et de $\frac{12}{15}$ sur l'un des sommets de la sous-grille $P_{m-2} \square P_{n-2}$ à l'intérieur. Si l'un des sommets aux coins est attaqué, alors le sommet qui a le poids supplémentaire de $\frac{8}{15}$ fait passer des poids de $\frac{4}{15}$ le long de chacune des chaînes élémentaires disjointes passant par le contour de la grille menant

au sommet attaqué. Si l'un des sommets du contour qui n'est pas au coin est attaqué, alors le sommet du contour de la grille qui a le poids supplémentaire de $\frac{11}{15}$ fait passer ce poids supplémentaire de la manière suivante: deux poids de $\frac{4}{11}$ le long de chacune des chaînes élémentaires disjointes passant par le contour menant au sommet attaqué puis un poids de $\frac{3}{11}$ le long de l'une des chaînes passant par la sous-grille $P_{m-2} \square P_{n-2}$ à l'intérieur. Sinon, si l'un des sommets à l'intérieur de la sous-grille $P_{m-2} \square P_{n-2}$ est attaqué, l'autre sommet peut facilement transférer son poids supplémentaire de $\frac{12}{15}$ à ce sommet en utilisant les 4 chaînes élémentaires disjointes menant du premier au second. Cette stratégie utilise un poids total de $\frac{mn}{5} + \frac{2}{15}(m+n-2) + \frac{12}{15} + \frac{31}{15} = \frac{mn}{5} + \frac{2}{15}(m+n) + \frac{39}{15}$. \square

Théorème 4.6.4. $\gamma_f^\infty(P_m \boxtimes P_n) \leq \frac{mn}{9} + O(m+n)$.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par placer un poids de $\frac{1}{9}$ sur chacun des sommets de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$. A l'exception des sommets du contour qui sont de degré 3 ou 5, tous les sommets du graphe sont dominés car ils sont de degré 8. Observons maintenant que dans la sous-grille forte $P_{m-8} \boxtimes P_{n-8}$ la plus intérieure, il existe 8 chaînes élémentaires disjointes entre chaque paire de sommets. Maintenant, plaçons un poids supplémentaire de $\frac{8}{9}$ sur un sommet quelconque u de cette sous-grille forte. Si un autre sommet v de cette sous-grille forte est attaqué, alors le poids supplémentaire de $\frac{8}{9}$ sur le sommet u peut être divisé en poids de $\frac{1}{9}$ et distribué le long de chacune des 8 chaînes élémentaires disjointes qui relient u à v . Ainsi, toute attaque sur un sommet de cette sous-grille forte peut être défendue de cette manière. Ajoutons ensuite un poids supplémentaire de $\frac{2}{9}$ sur tous les sommets de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$ qui n'appartiennent pas à la sous-grille forte $P_{m-8} \boxtimes P_{n-8}$ la plus intérieure puis un dernier poids supplémentaire de $\frac{6}{9}$ sur l'un des sommets aux 4 coins de la grille forte $P_m \boxtimes P_n$. Tous les sommets du graphe sont à présent dominés et entre chaque paire de sommets u, v qui n'appartiennent pas à la sous-grille forte $P_{m-8} \boxtimes P_{n-8}$ la plus intérieure, il existe au moins 3 chaînes élémentaires disjointes qui ne contiennent aucun sommet de la sous-grille forte. Ainsi, le poids supplémentaire de $\frac{6}{9}$ peut être divisé en poids de $\frac{2}{9}$ et redistribué le long des trois chaînes élémentaires qui relient le sommet qui le contient au sommet attaqué. Cette stratégie utilise un poids total de $\frac{(m-8)(n-8)}{9} + \frac{8}{9} + 8 \times \frac{3}{9} \times (m+n-8) + \frac{6}{9} = \frac{mn+16m+16n-178}{9}$. \square

Index

- étoile, 10
- 2-packing, 13

- adjacent, 5
- arête, 5
- arbre, 10
- automorphisme de graphe, 9

- chaîne, 10
- chaîne élémentaire, 8
- chaînes élémentaires disjointes, 8
- clique, 6
- clique maximale, 6
- clique maximum, 6
- coloration, 11
- coloration propre, 12
- complémentaire d'un graphe, 8
- composantes connexes, 8
- Conjecture de Vizing, 38
- couplage, 9
- couplage parfait, 9
- couverture, 6
- couverture minimum, 6
- couverture par cliques, 6

- cycle, 10

- degré, 6
- degré maximum, 6
- degré minimum, 6
- distance, 8
- double rayon, 10

- ensemble dominant, 13
- excentricité, 8
- extrémité d'un parcours, 8

- famille dominante, 19
- famille m -dominante, 41
- feuille, 10
- fonction coloration, 11
- fonction poids, 13

- graphe, 5
- graphe k -connexe, 8
- graphe k -sommet-connexe, 8
- graphe biparti, 11
- graphe biparti complet, 11
- graphe circulant, 17

graphe complet, 10
 graphe connexe, 8
 graphe cubique, 6
 graphe de Cayley, 16
 graphe de Grötzsch, 24
 graphe de Kneser, 11
 graphe de Petersen, 11
 graphe de Petersen généralisé, 11
 graphe parfait, 12
 graphe régulier, 6
 graphe séparé, 11
 graphe séparé complet, 11
 graphe sans triangle, 10
 graphe sommet-critique, 12
 graphes de Mycielski, 23
 graphes isomorphes, 9
 grille, 14
 grille forte, 15
 grille forte infinie, 15
 grille infinie, 14
 groupe, 16
 groupe abélien, 16
 groupe cyclique, 17

 homomorphisme de graphes, 9
 hypercube, 14

 incidente, 6
 isomorphisme de graphes, 9

 nombre chromatique, 12
 nombre de connexité, 8

 nombre de domination, 13
 nombre de domination éternelle, 19
 nombre de domination fractionnaire, 13
 nombre de stabilité, 6

 ordre, 5

 parcours, 8
 partie génératrice, 17
 partie génératrice minimale, 17
 produit cartésien de graphes, 14
 produit fort de graphes, 14

 réunion disjointe complète, 14
 roue, 10

 sature, 9
 sommet, 5
 sommet critique, 12
 sommet interne d'un parcours, 8
 sommet universel, 6
 sommet-transitif, 9
 sous-graphe, 5
 sous-graphe couvrant, 5
 sous-graphe induit, 5
 stable, 6
 stable maximal, 6
 stable maximum, 6
 symbole, 16

 Théorème de Hall, 11
 Théorème de Menger, 9
 Théorème faible des graphes parfaits, 13

Théorème fort des graphes parfaits, 13

triangle, 10

triplet réalisable, 31

voisin, 5

voisin privé, 5

voisinage, 6

voisinage fermé, 6

voisinage ouvert, 6

Bibliographie

- [1] B. ALSPACH et T. D. PARSONS : A construction for vertex-transitive graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 34(2):307–318, 1982.
- [2] M. ANDERSON, R. C. BRIGHAM, J. R. CARRINGTON, R. D. DUTTON, R. P. VITRAY et J. YELLEN : Graphs simultaneously achieving three vertex cover numbers. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 91:275–290, 2014.
- [3] J. ARQUILLA et H. FREDRICKSEN : "Graphing" an Optimal Grand Strategy. *Military Operations Research*, pages 3–17, 1995.
- [4] J. AZARIJA, M. A. HENNING et S. KLAVŽAR : (Total) Domination in Prisms. *arXiv preprint arXiv:1606.08143*, 2016.
- [5] M. L. BALINSKI : On the graph structure of convex polyhedra in n -space. *Pacific Journal of Mathematics*, 11(2):431–434, 1961.
- [6] B. BOLLOBÁS et E. J. COCKAYNE : Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *Journal of Graph Theory*, 3(3):241–249, 1979.
- [7] A. P. BURGER, E. J. COCKAYNE, W. R. GRUNDLINGH, C. M. MYNHARDT, J. H. VAN VUUREN et W. WINTERBACH : Infinite Order Domination in Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 50:179–194, 2004.
- [8] T. Y. CHANG : *Domination numbers of grid graphs*. Thèse de doctorat, University of South Florida, 1992.
- [9] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR et R. THOMAS : The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, pages 51–229, 2006.
- [10] G. S. DOMKE, S. T. HEDETNIEMI et R. C. LASKAR : Fractional packings, coverings and irredundance in graphs. *Congressus Numerantium*, 66:227–238, 1988.
- [11] F. V. FOMIN, S. GASPERS, P. A. GOLOVACH, D. KRATSCH et S. SAURABH : Parameterized algorithm for eternal vertex cover. *Information Processing Letters*, 110(16):702–706, 2010.
- [12] R. FRUCHT, J. E. GRAVER et M. E. WATKINS : The groups of the generalized Petersen graphs. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 70, pages 211–218. Cambridge University Press, 1971.

- [13] W. GODDARD, S. M. HEDETNIEMI et S. T. HEDETNIEMI : Eternal security in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 52:169–180, 2005.
- [14] C. GODSIL et G. ROYLE : Algebraic Graph Theory. *Graduate Text in Mathematics*, Springer, New York, 2001.
- [15] J. L. GOLDWASSER et W. F. KLOSTERMEYER : Tight bounds for eternal dominating sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 308(12):2589–2593, 2008.
- [16] D. L. GRINSTEAD et P. J. SLATER : Fractional domination and fractional packing in graphs. *Congressus Numerantium*, 71:153–172, 1990.
- [17] P. HALL : On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):26–30, 1935.
- [18] B. L. HARTNELL et C. M. MYNHARDT : Independent protection in graphs. *Discrete Mathematics*, 335:100–109, 2014.
- [19] W. F. KLOSTERMEYER, M. LAWRENCE et G. MACGILLIVRAY : Dynamic Dominating Sets: the Eviction Model for Eternal Domination. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 97:247–269, 2016.
- [20] W. F. KLOSTERMEYER et G. MACGILLIVRAY : Eternally secure sets, independence sets and cliques. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 2:119–122, 2005.
- [21] W. F. KLOSTERMEYER et G. MACGILLIVRAY : Eternal security in graphs of fixed independence number. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 63:97, 2007.
- [22] W. F. KLOSTERMEYER et G. MACGILLIVRAY : Eternal dominating sets in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 68:97–111, 2009.
- [23] W. F. KLOSTERMEYER et G. MACGILLIVRAY : Eternal Domination: Criticality and Reachability. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37(1):63–77, 2017.
- [24] W. F. KLOSTERMEYER et C. M. MYNHARDT : Eternal Total Domination in Graphs. *Ars Combinatoria*, 107:473–492, 2012.
- [25] W. F. KLOSTERMEYER et C. M. MYNHARDT : Domination, Eternal Domination, and Clique Covering. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 35(2):283–300, 2015.
- [26] W. F. KLOSTERMEYER et C. M. MYNHARDT : Protecting a graph with mobile guards. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 10(1):1–29, 2016.
- [27] I. LAMPROU, R. MARTIN et S. SCHEWE : Perpetually Dominating Large Grids. *In International Conference on Algorithms and Complexity*, pages 393–404. Springer, 2017.
- [28] L. LOVÁSZ : Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, 2(3):253–267, 1972.
- [29] F. MC INERNEY, N. NISSE et S. PÉRENNES : Eternal Domination in Grids. Rapport technique, [Research Report] Inria & Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, I3S, Sophia Antipolis, France, 2018.
- [30] K. MENGER : Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, 10(1):96–115, 1927.
- [31] J. MYCIELSKI : Sur le coloriage des graphes. *Colloquium Mathematicum*, 3:161–162, 1955.

- [32] F. REGAN : *Dynamic variants of domination and independence in graphs*. Thèse de doctorat, Rheinischen Friedrich-Wilhelems University, Bonn, 2007.
- [33] C. S. REVELLE : Can you protect the Roman Empire. *John Hopkins Magazine*, 49(2):40, 1997.
- [34] C. S. REVELLE et K. E. ROSING : Defendens Imperium Romanum: a Classical Problem in Military Strategy. *The American Mathematical Monthly*, 107(7):585–594, 2000.
- [35] W. C. SHIU : On 3-regular and 4-regular Cayley Graphs of Abelian Groups. Rapport technique, Hong Kong Baptist University, Department of Mathematics, 1995.
- [36] I. STEWART : Defend the Roman Empire! *Scientific American*, 281(6):136–138, 1999.
- [37] V. G. VIZING : The cartesian product of graphs. *Vysisl. Sistemy*, 9:30–43, 1963.

