

Université de Montréal

Sur les solutions d'équations différentielles de Stieltjes du
premier et du deuxième ordre

par

François Larivière

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Octobre 2018

Sommaire

La dérivée de Stieltjes, ou g -dérivée, a été introduite par Pouso et Rodríguez [PR] afin d'obtenir un équivalent du théorème fondamental du calcul pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Cette dérivée permet aussi de généraliser différents types d'équations différentielles. Ce mémoire introduit la g -dérivée et expose le travail effectué jusqu'à présent dans la démonstration de généralisations de résultats connus pour les équations différentielles ; notamment la définition d'une exponentielle comme solution d'une équation linéaire homogène du premier ordre et des résultats d'existence et d'unicité de solutions à des systèmes d'équations différentielles de Stieltjes du premier ordre. Nous poursuivons en généralisant certains résultats, par exemple l'existence d'un intervalle maximal d'existence pour les solutions et la dépendance continue aux conditions initiales. Nous introduisons ensuite l'équation linéaire du deuxième ordre et nous présentons des résultats sur l'existence et l'unicité de solution, ainsi que la forme de celle-ci. Ces équations permettent aussi d'introduire des équivalents des fonctions hyperboliques et trigonométriques. Finalement, nous démontrons la pertinence de cette nouvelle dérivée en montrant comment elle généralise les anciennes tentatives d'unification des calculs différentiels continu et discret, et en appliquant la théorie développée à la modélisation d'une population de drosophiles.

Mots-clés : Équations différentielles ordinaires, équations aux différences finies, intégration de Stieltjes, lemme de Grönwall, modélisation mathématique

Summary

The Stieltjes derivative, or g -derivative, was introduced by Pouso and Rodríguez [PR] to obtain an equivalent of the fundamental theorem of calculus for the Lebesgue-Stieltjes integral. This derivative also allows the generalization of different types of differential equations. This thesis introduces the g -derivative and exposes work done until now in the demonstration of generalizations of results known for differential equations; namely the definition of an exponential function as the solution of a first order linear homogeneous equation and existence and uniqueness results for first-order systems of Stieltjes differential equations. We proceed by generalizing some results, for example the existence of a maximal interval of existence for solutions and the continuous dependence on initial conditions. We introduce the second order linear equation and present results on the existence and uniqueness of solutions, as well as their form. These equations allow us to introduce equivalents of the trigonometric and hyperbolic functions. Finally, we emphasize the pertinence of this new derivative, by showing how it generalizes previous attempts at unifying discrete and continuous calculus and by applying the theory of Stieltjes differential equations to the modeling of a population of *Drosophila*.

Keywords: Ordinary differential equations, difference equations, Stieltjes integration, Grönwall lemma, mathematical modeling.

Table des matières

Sommaire	iii
Summary	v
Liste des tableaux	xi
Table des figures	xiii
Remerciements	xv
Introduction	1
Chapitre 1. Définitions et résultats préliminaires	3
1.1. La g -topologie	3
1.2. La g -mesure et l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes	6
1.3. La g -dérivée	8
Chapitre 2. Résultats d'existence et d'unicité de solutions aux g-équations différentielles de premier ordre	15
2.1. Équation différentielle linéaire du premier ordre	15
2.1.1. Équation linéaire homogène	16
2.1.2. Équation linéaire non-homogène	20
2.2. Propriétés supplémentaires de l'exponentielle	22
2.2.1. Fonctions régressives	22
2.2.2. Propriétés de l'exponentielle	24
2.3. Équations différentielles non-linéaires du premier ordre	27

2.3.1.	Théorème d'existence et d'unicité globale	30
2.3.2.	Résultat local d'existence et d'unicité	31
2.3.3.	Résultat d'existence locale	32
Chapitre 3.	Utilité des équations différentielles de Stieltjes	35
3.1.	Généralisation de plusieurs types d'équations différentielles	35
3.1.1.	La dérivée classique	36
3.1.2.	Les équations aux différences finies	36
3.1.3.	Équations différentielles sur les échelles de temps	37
3.1.4.	Équations différentielles avec impulsions	40
3.2.	Modélisation d'une population de drosophiles à l'aide d'équations différentielles de Stieltjes	41
3.2.1.	Le modèle de base	41
3.2.2.	Un modèle tenant compte de mortalités dues à l'hiver	42
3.2.3.	Variation des paramètres et impacts sur la solution	46
Chapitre 4.	Propriétés de solutions aux équations différentielles de Stieltjes	51
4.1.	Généralisation du lemme de Grönwall	51
4.1.1.	Lemme de Grönwall dans le cas classique	51
4.1.2.	Généralisation du lemme de Grönwall	52
4.2.	Solution saturée	55
4.2.1.	Prolongement à droite de solutions	56
4.2.2.	Existence et unicité de l'intervalle maximal d'existence	61
4.3.	Dépendance aux conditions initiales	64
Chapitre 5.	Équations de Stieltjes linéaires du deuxième ordre	71
5.1.	Un résultat d'existence et d'unicité globale de solution	71

5.2. Le g -Wronskien et la solution générale de l'équation linéaire homogène du deuxième ordre	74
5.3. Les fonctions hyperboliques et trigonométriques	79
5.3.1. L'équation linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants...	79
5.3.2. Fonctions hyperboliques	81
5.3.3. Fonctions trigonométriques	84
Conclusion	87
Bibliographie	89
Annexe A. Exemples divers	A-i
A.1. Fonction croissante discontinue sur les rationnels	A-i
A.2. Fonction g -continue et non bornée sur un intervalle compact.	A-ii
A.3. g -Équation différentielle dont la solution ne peut être prolongée à gauche ...	A-iii
A.4. Fonction g pour laquelle $\sin_c^2(t, t_0) + \cos_c^2(t, t_0) \neq 1$	A-iv

Liste des tableaux

Table des figures

3.1	Fonction g pour le modèle de base de la modélisation de population de drosophiles.	42
3.2	Solution de l'équation (3.2.2) avec $c(t) = 1/2$.	43
3.3	Fonction g pour le modèle de base de la modélisation de population de drosophile.	44
3.4	Solution de l'équation (3.2.4) avec la fonction c définie en (3.2.5).	46
3.5	Solution de l'équation (3.2.4) avec la fonction c définie en (3.2.8).	47
3.6	Comportement asymptotique de $1 - g(t)/\max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k < t\}$.	48
3.7	Comportement de la solution (3.2.10) avec $\eta = 1$ et $p = 0.9$, $1 - e^{-1}$ et 0.5 respectivement.	49
3.8	Diagramme de bifurcation de l'équation (3.2.4) selon p et η .	49
A.1	Graphique des fonctions, pour $c = 1$, $\cos_c(t, 0)$, $\sin_c(t, 0)$ et $e_{\mu_g c^2}(t, 0)$.	A-v

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier ma directrice de recherche Marlène Frigon. Bien que son support financier ait été indispensable à l'élaboration de ce mémoire, il n'est rien par rapport à l'immense aide qu'elle m'a apportée, la patience dont elle a fait preuve face à ma présence quelque peu discontinue, et la foi qu'elle a mise en moi. Sans elle ce mémoire n'existerait tout simplement pas.

J'aimerais ensuite remercier Alexis Langlois-Rémillard pour ses multiples lectures de ce mémoire. Sans lui, Stieltjes n'aurait pas son S majuscule, et le lecteur ou la lectrice grincerait sûrement des dents à la lecture de mes multiples erreurs.

Il me serait impossible de ne pas remercier ma copine Lory-Ann, qui m'a supporté moi et mes multiples tentatives d'incendier ce mémoire. Bien qu'elle m'encourageait plutôt à le faire, sa simple présence m'en empêchait. Sans elle, ce mémoire serait en feu.

Je voudrais aussi remercier Jean Lagacé, qui m'a indiqué certaines pistes de réflexions. Sans lui, ce mémoire serait moins intéressant.

Finalement, je voudrais remercier ma famille pour ses incessants rappels à l'ordre, que ce soit à l'oral ou par courriel. Sans eux, qui sait quand j'aurais fini l'écriture de ce mémoire.

Introduction

[C]omprendre c'est avant tout unifier.¹

Albert Camus

Le développement des équations aux différences finies tout au long du 20e siècle amène les mathématiciens à se poser des questions sur les liens existant entre celles-ci et les équations différentielles ordinaires. En effet, comme la théorie entourant les équations différentielles est très riche, on s'intéresse donc à une façon d'unifier ces deux types d'équations pour pouvoir faire profiter les équations aux différences finies des travaux déjà effectués. Dans sa thèse doctorale [H], Stefan Hilger introduit les échelles de temps et le calcul sur celles-ci. C'est un premier effort d'unification, qui sera longtemps poursuivi, jusqu'en 2014, où Rodrigo López Pouso et Adrián Rodríguez introduisent dans [PR] la dérivée de Stieltjes, faisant référence à l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Ce mémoire a un objectif double. Premièrement, on veut introduire le lecteur ou la lectrice à cette nouvelle dérivée et ce nouveau calcul différentiel. Deuxièmement, on veut poursuivre les travaux de Rodrigo López Pouso et Marlène Frigon dans [FP], en poussant plus loin les recherches sur les équations différentielles faisant intervenir des dérivées de Stieltjes. Ce mémoire est donc ainsi découpé : le chapitre 1 est une introduction au langage et aux diverses notions de base de la dérivée de Stieltjes. Le chapitre 2 met au premier plan l'exponentielle obtenue en résolvant une équation linéaire homogène du premier ordre, et présente certains résultats d'existence et d'unicité de solutions aux équations différentielles de Stieltjes. Le chapitre 3 présente la pertinence de cette nouvelle notion, d'abord en montrant que cette notion généralise les précédentes tentatives d'unification des calculs différentiels continu et discret, ensuite en appliquant les équations différentielles de Stieltjes à la modélisation d'une population de drosophiles. Le chapitre 4 s'intéresse ensuite

1. A. CAMUS, (2003, c1942). *Le mythe de Sisyphe : essai sur l'absurde*, GALLIMARD, PARIS, FRANCE, P.32

à poursuivre le travail sur les équations du premier ordre, en présentant diverses généralisations de propriétés bien connues pour les solutions d'équations différentielles ordinaires. Finalement, le chapitre 5 débute le travail sur les équations différentielles de Stieltjes d'ordre supérieur en s'intéressant d'abord aux équations linéaires du deuxième ordre.

Chapitre 1

Définitions et résultats préalables

Ce chapitre présente les définitions de la g -topologie, la g -mesure, l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et la g -dérivée ainsi que certains résultats à leur propos.

Dans tout ce qui suit, on utilisera une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone croissante et continue à gauche partout. C'est à partir de cette fonction que sont définies une nouvelle topologie sur \mathbb{R} et une nouvelle dérivée qui permettent de considérer une toute nouvelle classe d'équations différentielles. Pour faciliter l'étude de ces équations, on introduit deux ensembles qui jouent un rôle primordial :

$$C_g = \{t \in \mathbb{R} \mid g \text{ est constante sur l'intervalle }]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\text{ pour un certain } \varepsilon > 0\} \quad (1.0.1)$$

et

$$\mathcal{D}_g = \{t \in \mathbb{R} \mid g(t^+) - g(t) > 0\}, \quad (1.0.2)$$

où $g(t^+)$ est la limite à droite de g en t .

Ces définitions et résultats sont tous connus, et sont tirés de [PR] et [FP].

1.1. La g -topologie

Cette fonction g permet d'induire une pseudométrie sur \mathbb{R} en définissant pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\rho(s, t) = |g(s) - g(t)|. \quad (1.1.1)$$

Cette fonction n'est pas une métrique, car on peut avoir $\rho(s, t) = 0$ pour $s \neq t$. Ceci implique que la topologie τ_g , engendrée par cette pseudométrie peut ne pas être Hausdorff.

C'est ce qui arrive lorsque $C_g \neq \emptyset$. On peut maintenant définir une boule ouverte, centrée en t et de rayon $\varepsilon > 0$, par

$$\mathcal{B}(t, \varepsilon) = \{s \in \mathbb{R} \mid \rho(s, t) < \varepsilon\} = \{s \in \mathbb{R} \mid |g(s) - g(t)| < \varepsilon\}. \quad (1.1.2)$$

La description de ces boules permet de trouver une base utile pour la g -topologie.

Proposition 1.1.1. *Les intervalles de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et ceux de la forme $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathcal{D}_g$, $a < b$, forment une base pour la g -topologie.*

Démonstration. On rapporte ici la démonstration de la proposition 2.1 de [FP].

Tout ensemble ouvert dans la g -topologie peut être écrit comme une union de boules ouvertes définies dans (1.1.2). Chacune de ces boules ouvertes est en fait

$$g^{-1}(] \alpha, \beta]) = \{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < g(t) < \beta\}, \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta. \quad (1.1.3)$$

Comme g est croissante, $g^{-1}(] \alpha, \beta])$ est un intervalle dont on note les extrémités par

$$a = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \alpha < g(t)\} \in [-\infty, \infty[\quad (1.1.4)$$

et

$$b = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid g(t) < \beta\} \in]-\infty, \infty]. \quad (1.1.5)$$

Il est facile de voir que $g^{-1}(] \alpha, \beta]) =]a, b]$ si $b \in \mathcal{D}_g$ et $g(b) < \beta \leq g(b^+)$; sinon $g^{-1}(] \alpha, \beta]) =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Si a ou b sont infinis, on peut alors écrire ces intervalles comme l'union d'intervalles ouverts de plus en plus grands, ce qui complète la preuve. \square

On peut donc maintenant s'intéresser à la classe des fonctions continues par rapport à cette topologie.

Définition 1.1.2. *Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite g -continue en un point $t_0 \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|g(t) - g(t_0)| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon. \quad (1.1.6)$$

La g -continuité permet d'assurer quelques propriétés de la continuité usuelle. En effet, comme l'énonce la proposition 3.2 de [FP] :

Proposition 1.1.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est g -continue sur $[a, b]$, alors :*

- (1) f est continue à gauche pour tout $t_0 \in]a, b]$.

(2) Si g est continue en $t_0 \in [a, b[$, alors f l'est aussi.

(3) Si g est constante sur un intervalle $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, alors f l'est aussi.

Démonstration. On rapporte ici la preuve de la proposition 3.2 de [FP].

(1) Soit $t_0 \in]a, b]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\delta > 0$ tel que (1.1.6) soit satisfaite. Comme la fonction g est continue à gauche, on peut trouver $\delta' > 0$ tel que

$$0 \leq t_0 - t < \delta' \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| < \delta,$$

et alors (1.1.6) implique que $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$, tant que $t \in [a, b]$. On a donc trouvé $\delta' > 0$ tel que, pour $t \in [a, b]$,

$$0 \leq t_0 - t < \delta' \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue à gauche en t_0 .

(2) Si g est continue à droite en un $t_0 \in [a, b[$, alors on peut prouver que f est continue à droite en t_0 par un argument semblable à l'argument précédent. Ainsi, en combinant cela avec la première partie, on obtient que f est continue en t_0 .

(3) Finalement, si g est constante sur $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, alors, pour $\varepsilon > 0$, la condition (1.1.6) pour $t_0 = \alpha$ garantit que $\|f(t) - f(\alpha)\| < \varepsilon$, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit donc que $f(t) = f(\alpha)$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.

□

On note $\mathcal{C}_g([a, b])$ l'ensemble des fonctions g -continues sur l'intervalle $[a, b]$. Bien que dans le cas classique $\mathcal{C}([a, b])$ forme un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme usuelle, il est important de noter que celle-ci ne définit pas une norme sur $\mathcal{C}_g([a, b])$. En effet, une fonction g -continue peut ne pas être bornée sur un ensemble compact. Un exemple d'une telle fonction est donnée dans l'annexe A. Il faut donc considérer l'ensemble $\mathcal{BC}_g([a, b])$, des fonctions g -continues et bornées sur l'intervalle $[a, b]$, équipé de la norme

$$\|f\|_0 = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|. \quad (1.1.7)$$

Théorème 1.1.4. La paire $(\mathcal{BC}_g([a, b]), \|\cdot\|_0)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Voir la preuve du théorème 3.4 dans [FP].

□

1.2. La g -mesure et l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

La fonction g permet aussi d'induire une mesure sur \mathbb{R} . En effet, on construit cette mesure comme il est fait dans [PR] en considérant d'abord la formule de base pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,

$$\mu_g([a, b[) = g(b) - g(a). \quad (1.2.1)$$

Ceci permet de définir une mesure extérieure, pour $A \subseteq \mathbb{R}$, par

$$\mu_g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g([a_n, b_n[) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n[\right\}. \quad (1.2.2)$$

Cette fonction est bien une mesure extérieure. En effet, on a évidemment $\mu_g^*(\emptyset) = 0$. De plus, pour $A \subset B \subset \mathbb{R}$, on a que $\mu_g^*(A) \leq \mu_g^*(B)$, car un recouvrement de B est aussi un recouvrement de A . Comme l'infimum est pris sur un ensemble plus grand pour A , ceci montre que $\mu_g^*(A) \leq \mu_g^*(B)$.

Finalement, pour montrer que cette fonction est sous-additive, considérons, $E_n \subset \mathbb{R}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $\mu_g^*(E_n)$, pour $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement par des intervalles $\{I_k^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$\mu_g^*(E_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(I_k^n) \leq \mu_g^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (1.2.3)$$

Par conséquent,

$$\mu_g^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(I_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(E_n) + \varepsilon. \quad (1.2.4)$$

Comme l'inégalité (1.2.4) est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors

$$\mu_g^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(E_n). \quad (1.2.5)$$

Le théorème d'extension de Carathéodory qu'on peut retrouver dans [St], garantit donc qu'il existe une unique mesure de Borel qui satisfait (1.2.1). C'est cette mesure que nous utiliserons et que nous appellerons la g -mesure. Elle est définie sur la σ -algèbre \mathcal{M}_g , constitué de tous les ensembles $E \subset \mathbb{R}$ tels que, pour tout $F \subset \mathbb{R}$, on a

$$\mu_g^*(F) = \mu_g^*(F \cap E) + \mu_g^*(F \setminus E). \quad (1.2.6)$$

La principale différence entre cette mesure et la mesure de Lebesgue est la possibilité pour μ_g d'avoir des atomes, c'est-à-dire des points pour lesquels la mesure est non-nulle. En effet, si $x \in \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned} \mu_g(\{x\}) &= \mu_g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [x, x + 1/n[\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_g([x, x + 1/n[) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(x + 1/n) - g(x) \\ &= g(x^+) - g(x) > 0. \end{aligned}$$

On dira donc d'une propriété qu'elle est vraie *g -presque partout* s'il existe un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu_g(N) = 0$ et que la propriété est vraie sur $\mathbb{R} \setminus N$. En particulier, l'ensemble \mathcal{C}_g est de g -mesure nulle.

Proposition 1.2.1. *On a $\mu_g(\mathcal{C}_g) = 0$.*

Démonstration. On rapporte ici la preuve de la proposition 2.5 de [PR].

L'ensemble \mathcal{C}_g est ouvert, on peut donc l'écrire comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Comme μ_g est dénombrablement additive, il suffit donc de montrer que si $]a, b[$ est l'un de ces intervalles ouverts, on a $\mu_g(]a, b[) = 0$. Comme g est constante sur $]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} \mu_g(]a, b[) &= \mu_g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b[\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_g([a + 1/n, b[) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(b) - g(a + 1/n) = 0. \end{aligned}$$

□

On dira d'une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur un ensemble $E \in \mathcal{M}_g$ qu'elle est *g -mesurable* si elle est mesurable par rapport à la mesure μ_g .

Cette mesure permet de définir une intégrale de Lebesgue-Stieltjes. En effet, pour $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction g -mesurable et non-négative, il suffit de prendre le supremum de l'intégrale des fonctions simples g -mesurables plus petites ou égales à f . Cette intégrale sur un ensemble

$E \in \mathcal{M}_g$ par rapport à la g -mesure sera notée :

$$\int_E f(x) d\mu_g(x). \quad (1.2.7)$$

Pour une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on définit son intégrale par

$$\int_E f(x) d\mu_g(x) = \int_E f^+(x) d\mu_g(x) - \int_E f^-(x) d\mu_g(x), \quad (1.2.8)$$

où

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ et } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Comme il est habituel de le faire, nous noterons l'ensemble des fonctions intégrables par rapport à g sur l'intervalle $[a, b[$ par $\mathcal{L}_g([a, b[$). Plus généralement, l'ensemble des fonctions dont la p -ème puissance est intégrable sur l'intervalle $[a, b[$ sera noté $\mathcal{L}_g^p([a, b[$.

1.3. La g -dérivée

L'objectif est maintenant de trouver une dérivée qui permettra d'obtenir un équivalent du théorème fondamental du calcul pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Les auteurs de [PR] ont proposé la définition suivante :

Définition 1.3.1. *La dérivée par rapport à g , ou g -dérivée, d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un point $x \in \text{int}(E) \setminus C_g$ est définie de la façon suivante :*

$$f'_g(x) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} & \text{si } x \notin \mathcal{D}_g, \\ \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} & \text{si } x \in \mathcal{D}_g, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

lorsque ces limites existent.

Remarquons deux choses. Premièrement, en vertu de la proposition 1.2.1, cette définition est valide pour g -presque tout $x \in E$. Deuxièmement, lorsque $x \in \mathcal{D}_g$, on remarque que la g -dérivée existe si et seulement si $f(x^+)$ existe auquel cas on a

$$f'_g(x) = \frac{f(x^+) - f(x)}{g(x^+) - g(x)}. \quad (1.3.2)$$

Ceci donne une formule pratique pour calculer la g -dérivée pour les points dans \mathcal{D}_g .

Voici maintenant quelques propriétés de cette g -dérivée :

Proposition 1.3.2. *Soient $f_1, f_2 : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \text{int}(E)$ pour lequel il existe un ouvert de la g -topologie contenant x tel que pour tout y dans cet ouvert, $y \neq x$, on a $g(x) \neq g(y)$. Si f_1 et f_2 sont g -différentiables en x , alors :*

(1) la fonction $c_1f_1 + c_2f_2$ est g -différentiable en x peu importe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, et

$$(c_1f_1 + c_2f_2)'_g(x) = c_1(f_1)'_g(x) + c_2(f_2)'_g(x). \quad (1.3.3)$$

(2) La fonction f_1f_2 est g -différentiable en x et

$$(f_1f_2)'_g(x) = f_1(x^+)(f_2)'_g(x) + f_2(x)(f_1)'_g(x) = f_1(x)(f_2)'_g(x) + f_2(x^+)(f_1)'_g(x) \quad (1.3.4)$$

(3) Si $f_1(x)f_2(x^+) \neq 0$, alors f_1/f_2 est g -différentiable en x et

$$(f_2/f_2)'_g(x) = \frac{(f_1)'_g(x)f_2(x) - f_1(x)(f_2)'_g(x)}{f_2(x)f_2(x^+)}. \quad (1.3.5)$$

Démonstration. (1) (a) Si $x \notin \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{(c_1f_1 + c_2f_2)(y) - (c_1f_1 + c_2f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{c_1f_1(y) + c_2f_2(y) - (c_1f_1(x) + c_2f_2(x))}{g(y) - g(x)} \\ &= c_1 \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} + c_2 \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= c_1(f_1)'_g(x) + c_2(f_2)'_g(x). \end{aligned}$$

(b) Si $x \in D_g$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{(c_1f_1 + c_2f_2)(y) - (c_1f_1 + c_2f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{c_1f_1(y) + c_2f_2(y) - (c_1f_1(x) + c_2f_2(x))}{g(y) - g(x)} \\ &= c_1 \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} + c_2 \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= c_1(f_1)'_g(x) + c_2(f_2)'_g(x). \end{aligned}$$

(2) (a) Si $x \notin D_g$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{(f_1f_2)(y) - (f_1f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_1(y)f_2(y) - f_1(x)f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_1(y)f_2(y) - f_1(y)f_2(x) + f_1(y)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f_1(y) \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} + \lim_{y \rightarrow x} f_2(x) \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= f_1(x)(f_2)'_g(x) + f_2(x)(f_1)'_g(x) \\ &= f_1(x^+)(f_2)'_g(x) + f_2(x)(f_1)'_g(x) \\ &= f_1(x)(f_2)'_g(x) + f_2(x^+)(f_1)'_g(x), \end{aligned}$$

puisque f est continue en x .

(b) Si $x \in D_g$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{(f_1 f_2)(y) - (f_1 f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_1(y) f_2(y) - f_1(x) f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_1(y) f_2(y) - f_1(y) f_2(x) + f_1(y) f_2(x) - f_1(x) f_2(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= \lim_{y \rightarrow x^+} f_1(y) \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} + \lim_{y \rightarrow x^+} f_2(x) \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= f_1(x^+) (f_2)'_g(x) + f_2(x) (f_1)'_g(x).
\end{aligned}$$

En inversant les rôles de f_1 et f_2 , on obtient alors

$$\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{(f_1 f_2)(y) - (f_1 f_2)(x)}{g(y) - g(x)} = f_1(x) (f_2)g(x) + f_2(x^+) (f_1)'_g(x).$$

(3) (a) Si $x \notin \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow x} \frac{(f_1/f_2)(y) - (f_1/f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_1(y) f_2(x) - f_1(x) f_2(y)}{(f_2(x) f_2(y)(g(y) - g(x)))} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f_1(y) f_2(x) - f_1(x) f_2(x) + f_1(x) f_2(x) - f_1(x) f_2(y)}{(f_2(x) f_2(y)(g(y) - g(x)))} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{f_2(x) f_2(y)} \left(f_2(x) \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} - f_1(x) \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} \right) \\
&= \frac{(f_1)'_g(x) f_2(x) + f_1(x) (f_2)'_g(x)}{f_2(x)^2} \\
&= \frac{(f_1)'_g(x) f_2(x) + f_1(x) (f_2)'_g(x)}{f_2(x) f_2(x^+)},
\end{aligned}$$

car f est continue en x .

(b) Si $x \in \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{(f_1/f_2)(y) - (f_1/f_2)(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_1(y) f_2(x) - f_1(x) f_2(y)}{(f_2(x) f_2(y)(g(y) - g(x)))} \\
&= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f_1(y) f_2(x) - f_1(x) f_2(x) + f_1(x) f_2(x) - f_1(x) f_2(y)}{(f_2(x) f_2(y)(g(y) - g(x)))} \\
&= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{1}{f_2(x) f_2(y)} \left(f_2(x) \frac{f_1(y) - f_1(x)}{g(y) - g(x)} - f_1(x) \frac{f_2(y) - f_2(x)}{g(y) - g(x)} \right) \\
&= \frac{(f_1)'_g(x) f_2(x) + f_1(x) (f_2)'_g(x)}{f_2(x) f_2(x^+)}.
\end{aligned}$$

□

Cette g -dérivée admet aussi une formule de dérivation en chaîne.

Proposition 1.3.3. Soient $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \text{int}(E)$ et $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) \in \text{int}(F)$.

(1) Si $x \notin \mathcal{D}_g$, $h'(f(x))$ et $f'_g(x)$ existent, alors, $h \circ f$ est g -différentiable en x et

$$(h \circ f)'_g(x) = h'(f(x))f'_g(x). \quad (1.3.6)$$

(2) Si $x \in \mathcal{D}_g$, $h(f(x^+))$ et $f'_g(x)$ existent, alors, $h \circ f$ est g -différentiable en x et

$$(h \circ f)'_g(x) = \frac{h(f(x^+)) - h(f(x))}{f(x^+) - f(x)} f'_g(x). \quad (1.3.7)$$

(3) Si $x \notin D_g$ et $h'_g(x)$, $g'(f(x))$ et $f'_g(x)$ existent, alors, $h \circ f$ est g -différentiable en x et

$$(h \circ f)'_g(x) = h'_g(f(x))g'(f(x))f'_g(x). \quad (1.3.8)$$

Démonstration. (1) On a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{h \circ f(y) - h \circ f(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{h(f(y)) - h(f(x))}{g(y) - g(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \left(\frac{h(f(y)) - h(f(x))}{f(y) - f(x)} \right) \left(\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \right) \\ &= h'(f(x))f'_g(x). \end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned} \frac{h \circ f(x^+) - h \circ f(x)}{g(x^+) - g(x)} &= \left(\frac{h(f(x^+)) - h(f(x))}{f(x^+) - f(x)} \right) \left(\frac{f(x^+) - f(x)}{g(x^+) - g(x)} \right) \\ &= \frac{h(f(x^+)) - h(f(x))}{f(x^+) - f(x)} f'_g(x). \end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{h \circ f(y) - h \circ f(x)}{g(y) - g(x)} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{h(f(y)) - h(f(x))}{g(y) - g(x)} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{h(f(y)) - h(f(x))}{g(f(y)) - g(f(x))} \frac{g(f(y)) - g(f(x))}{f(y) - f(x)} \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \\ &= h'_g(f(x))g'(f(x))f'_g(x). \end{aligned}$$

□

Afin d'obtenir un équivalent du théorème fondamental du calcul pour la g -dérivée et l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, il faut introduire la notion de g -continuité absolue.

Définition 1.3.4. Une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue par rapport à g (ou g -absolument continue) si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour n'importe quelle famille $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^m$ de sous-intervalles de $[a, b]$ disjoints deux à deux satisfaisant

$$\sum_{n=1}^m (g(b_n) - g(a_n)) < \delta,$$

on ait

$$\sum_{n=1}^m |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon.$$

Il sera pertinent plus tard de savoir que la composition d'une fonction g -absolument continue et d'une fonction satisfaisant une condition de Lipschitz est aussi g -absolument continue. On présente donc ce résultat, la proposition 5.3, tirée de [FP] :

Proposition 1.3.5. Soit $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction g -absolument continue. Supposons que $f_1([a, b]) \subset [c, d]$ pour $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ et que $f_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfasse une condition de Lipschitz sur $[c, d]$. Alors, $f_2 \circ f_1$ est g -absolument continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit $L > 0$ la constante de Lipschitz pour f_2 . Soient $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ tels que si $\{]a_n, b_n[\}$ est une famille de sous-intervalles disjoints de $[a, b]$, l'inégalité

$$\sum_{n=1}^m g(b_n) - g(a_n) < \delta$$

implique

$$\sum_{n=1}^m |f_1(b_n) - f_1(a_n)| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Ainsi, si $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^m$ est une famille de sous-intervalles disjoints de $[a, b]$ tels que

$$\sum_{n=1}^m g(b_n) - g(a_n) < \delta,$$

on a

$$\sum_{n=1}^m |f_2(f_1(b_n)) - f_2(f_1(a_n))| \leq L \sum_{n=1}^m |f_1(b_n) - f_1(a_n)| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

□

Il sera aussi pertinent de noter que le produit de deux fonctions g -absolument continues est g -absolument continu.

Proposition 1.3.6. Soient $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions g -absolument continues sur $[a, b]$. Alors, leur produit $f_1 f_2$ est g -absolument continu sur $[a, b]$.

Démonstration. On peut écrire le produit comme

$$f_1 f_2 = \frac{1}{2} ((f_1 - f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2),$$

et, comme la fonction $r \rightarrow r^2$ est localement lipschitzienne, on a, en vertu de la proposition 1.3.5, que $(f_1 - f_2)^2$, f_1^2 et f_2^2 sont toutes des fonctions g -absolument continues. Ceci montre donc que le produit $f_1 f_2$ est g -absolument continu sur $[a, b]$. \square

Cette définition nous permet donc d'introduire le résultat le plus intéressant par rapport à la g -dérivée : le théorème fondamental du calcul pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes, qui est montré dans [PR].

Théorème 1.3.7. *Une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est g -absolument continue sur $[a, b]$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) $F'_g(x)$ existe pour g -presque tout $x \in [a, b]$;

(2) $F'_g(x) \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$;

(3) pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$F(x) = F(a) + \int_{[a, x[} F'_g(x) d\mu_g(x). \quad (1.3.9)$$

Démonstration. Voir la preuve du théorème 5.4 dans [PR]. \square

Chapitre 2

Résultats d'existence et d'unicité de solutions aux g -équations différentielles de premier ordre

La première section de ce chapitre s'intéresse à la résolution de systèmes d'équations différentielles de Stieltjes du premier ordre. Les résultats présentés dans cette section sont connus et peuvent être trouvés dans [FP]. On peut aussi se référer au chapitre 2 de [BP] pour le développement des mêmes idées dans le contexte des échelles de temps.

La deuxième section quant à elle présente diverses propriétés de la fonction exponentielle introduite dans la section 2.1. On présente donc de nouveaux résultats, qui sont la généralisation d'idées connues que l'on peut retrouver dans la section 2.2 de [BP],

Finalement, la troisième section présente différents résultats d'existence et d'unicité connus de solutions aux systèmes d'équations différentielles de Stieltjes, que l'on peut trouver dans [FP]. Le lecteur ou la lectrice peut se référer à [LO] pour l'équivalent de ces résultats dans le cas des équations différentielles ordinaires.

2.1. Équation différentielle linéaire du premier ordre

L'objectif est maintenant de trouver la solution au problème

$$\begin{cases} x'_g(t) + d(t)x(t) = k(t) & \text{pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b[, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $d, k \in \mathcal{L}^1_g([a, b[)$. On présente ici la démarche suivie par les auteurs de [FP].

2.1.1. Équation linéaire homogène

Pour ce faire, il faudra d'abord résoudre l'équation homogène

$$\begin{cases} x'_g(t) = c(t)x(t), \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b[, \\ x(a) = 1, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

où c est élément de $\mathcal{L}_g^1([a, b[)$ et satisfait

$$\begin{aligned} c(t)(g(t^+) - g(t)) &> -1, \\ \sum_{t \in [a, b[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))|| &< \infty. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Tel que montré dans [FP], la solution de (2.1.2) est donnée par l'exponentielle $e_c(\cdot, a)$ que l'on définit à l'instant.

Définition 2.1.1. Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b[)$ satisfaisant (2.1.3). On définit l'exponentielle $e_c(\cdot, a) : [a, b] \rightarrow]0, \infty[$ par

$$e_c(t, a) = \exp \left(\int_{[a, t[} \tilde{c}(s) d\mu_g(s) \right), \quad (2.1.4)$$

où

$$\tilde{c}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{si } t \notin \mathcal{D}_g, \\ \frac{\log(1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))}{g(t^+) - g(t)} & \text{si } t \in \mathcal{D}_g. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

On remarque d'abord que cette exponentielle est bien définie.

Lemme 2.1.2. Soit \tilde{c} définie comme dans la définition 2.1.1, alors $\tilde{c} \in \mathcal{L}_g^1([a, b[)$.

Démonstration. Il est évident que \tilde{c} est mesurable puisque $\tilde{c} = c$ sur $[a, b[\setminus \mathcal{D}_g$ et que \mathcal{D}_g est dénombrable. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{[a, b[} |\tilde{c}(s)| d\mu_g &= \int_{[a, b[\setminus \mathcal{D}_g} |\tilde{c}(s)| d\mu_g + \int_{[a, b[\cap \mathcal{D}_g} |\tilde{c}(s)| d\mu_g \\ &= \int_{[a, b[\setminus \mathcal{D}_g} |c(s)| d\mu_g + \sum_{[a, b[\cap \mathcal{D}_g} |\tilde{c}(s)|(g(s^+) - g(s))| \\ &= \int_{[a, b[\setminus \mathcal{D}_g} |c(s)| d\mu_g + \sum_{[a, b[\cap \mathcal{D}_g} |\log(1 + c(s)(g(s^+) - g(s)))| < \infty, \end{aligned}$$

car $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b[)$ et satisfait (2.1.3). □

On peut maintenant montrer que cette exponentielle est bien une solution de l'équation (2.1.2).

Proposition 2.1.3. Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ satisfaisant (2.1.3), alors $e_c(\cdot, a)$ est g -absolument continue et est l'unique solution de l'équation (2.1.2). De façon équivalente :

$$e_c(t, a) = 1 + \int_{[a, t[} c(s)e_c(s, a)d\mu_g(s), \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Démonstration. Le lemme 2.1.2 et le théorème 1.3.7 assurent que la fonction $t \rightarrow \int_{[a, t[} \tilde{c}(s)d\mu_g$ est g -absolument continue sur $[a, b]$ et que

$$\left(\int_{[a, t[} \tilde{c}(s)d\mu_g \right)'_g = \tilde{c}(t) \text{ } g\text{-presque partout sur } [a, b].$$

La proposition 1.3.5 assure alors que $e_c(\cdot, a)$ est g -absolument continue sur $[a, b]$, et la règle de dérivation en chaîne de la proposition 1.3.3 donne alors, pour g -presque tout $t \notin \mathcal{D}_g$,

$$(e_c(t, a))'_g = e_c(t, a) \left(\int_{[a, t[} \tilde{c}(s)d\mu_g \right)'_g = e_c(t, a)\tilde{c}(t) = c(t)e_c(t, a).$$

Maintenant, pour $t \in \mathcal{D}_g$, on calcule directement :

$$\begin{aligned} (e_c(t, a))'_g &= \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{e_c(s, a) - e_c(t, a)}{g(s) - g(t)} \\ &= \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{\exp\left(\int_{[a, s[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) - \exp\left(\int_{[a, t[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right)}{g(s) - g(t)} \\ &= \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{e_c(t, a) \left(\exp\left(\int_{\{t\}} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) \exp\left(\int_{]s, t[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) - 1 \right)}{g(s) - g(t)} \\ &= \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{e_c(t, a) \left(\exp(\tilde{c}(t)(g(t^+) - g(t))) \exp\left(\int_{]s, t[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) - 1 \right)}{g(s) - g(t)} \\ &= \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{e_c(t, a) \left((1 + c(t)(g(t^+) - g(t))) \exp\left(\int_{]s, t[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) - 1 \right)}{g(s) - g(t)} \\ &= \lim_{s \rightarrow t^+} e_c(t, a) \left(\frac{\left((c(t)(g(t^+) - g(t))) \exp\left(\int_{]s, t[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) \right)}{g(s) - g(t)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\exp\left(\int_{]t, s[} \tilde{c}(r)d\mu_g(r)\right) - 1}{g(s) - g(t)} \right) \\ &= c(t)e_c(t, a), \end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{s \rightarrow t^+} \exp \left(\int_{]t, s[} \tilde{c}(r) d\mu_g(r) \right) = 1.$$

On déduit donc du fait que $e_c(\cdot, a)$ est g -absolument continue que

$$e_c(t, a) = e_c(a, a) + \int_{[a, t[} c(s) e_c(s, a) d\mu_g, \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

□

On s'intéresse maintenant au cas où l'on relaxe les conditions (2.1.3). En effet, on étudie maintenant le cas où

$$\begin{aligned} c(t)(g(t^+) - g(t)) &\neq -1, \\ \sum_{t \in [a, b[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))|| &< \infty. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

On remarque alors que si x est une solution de (2.1.2), on aura

$$x(t^+) = (1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))x(t), \tag{2.1.7}$$

pour tous les t dans

$$T_c^- = \{t \in [a, b[\cap \mathcal{D}_g \mid 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) < 0\}.$$

Ainsi, si $t \in T_c^-$ et $x(t) \neq 0$, on aura alors une discontinuité en t où x change de signe.

Heureusement, on montre qu'il peut seulement exister un nombre fini de tels points.

Lemme 2.1.4. *Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$. L'ensemble T_c^- est de cardinalité finie.*

Démonstration. Comme $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$, on a

$$\infty > \int_{[a, b[} |c(t)| d\mu_g \geq \sum_{t \in T_c^-} |c(t)(g(t^+) - g(t))| > \sum_{t \in T_c^-} 1.$$

□

On peut donc redéfinir l'exponentielle de la façon suivante :

Définition 2.1.5. *Si $T_c^- = \{t_1, \dots, t_k\}$ avec $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, on définit donc $\hat{e}_c(\cdot, a) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par*

$$\hat{e}_c(t, a) = \begin{cases} e^{\int_{[a, t[} \hat{c}(s) d\mu_g(s)} & \text{si } a \leq t_i, \\ (-1)^i e^{\int_{[a, t[} \hat{c}(s) d\mu_g(s)} & \text{si } t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k, \end{cases} \tag{2.1.8}$$

où $t_{k+1} = b$ et

$$\hat{c}(t) = \begin{cases} c(t) & \text{si } t \in [a, b] \setminus \mathcal{D}_g, \\ \frac{\log |1+c(t)(g(t^+) - g(t))|}{g(t^+) - g(t)} & \text{si } t \in [a, b] \cap \mathcal{D}_g. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Lemme 2.1.6. *Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ satisfaisant (2.1.6). Alors, la fonction $\hat{c}(\cdot, a)$ est g -absolument continue et elle est l'unique solution de (2.1.2). De façon équivalente,*

$$\hat{c}_c(t, a) = 1 + \int_{[a, b[} c(s) \hat{c}_c(s, a) d\mu_g(s), \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

De plus, $\hat{c}_c(t, a) \hat{c}_c(t^+, a) < 0$ si et seulement si $t \in T_c^-$.

Démonstration. Le lemme 2.1.4 assure que l'on peut décomposer l'intervalle $[a, b]$ en un nombre fini de sous-intervalles où la fonction c satisfait (2.1.3). Pour ces intervalles, la solution est alors donnée par la proposition 2.1.3, avec une condition initiale déterminée par l'équation (2.1.7).

Il reste alors à montrer que cette solution est unique. Soit y une solution de (2.1.2). On a, comme $\hat{c}_c(t, t_0) \hat{c}_c(t^+, t_0) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{D}_g$, en utilisant le règle de dérivation du quotient de la proposition 1.3.2,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{\hat{c}_c(\cdot, t_0)} \right)'_g(t) &= \frac{y'_g(t) \hat{c}_c(t, t_0) - y(t) (\hat{c}_c)'_g(t, t_0)}{\hat{c}_c(t, t_0) \hat{c}_c(t^+, t_0)} \\ &= \frac{c(t) y(t) \hat{c}_c(t, t_0) - y(t) c(t) \hat{c}_c(t, t_0)}{\hat{c}_c(t, t_0) \hat{c}_c(t^+, t_0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le quotient $y/\hat{c}_c(\cdot, t_0)$ est constant et on a donc

$$\frac{y(t)}{\hat{c}_c(t, t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{\hat{c}_c(t, t_0)} = 1,$$

donc $y = \hat{c}_c(\cdot, t_0)$. □

Il est bon de remarquer que toutes les définitions précédentes sont aussi valides si c est une fonction à valeurs complexes satisfaisant (2.1.6). En effet, cette condition nous permet de prendre la branche principale du logarithme et de préserver toutes les propriétés utilisées.

Finalement, si l'on ne demande pas de c que $c(t)(g(t^+) - g(t)) \neq -1$ en tout $t \in [a, b]$, on aura que s'il existe t tel que $c(t)(g(t^+) - g(t)) = -1$, une solution x de (2.1.2) devra respecter

$$x(t^+) = 0.$$

Ainsi, si on note $T_c^0 = \{t \in [a, b[\cap \mathcal{D}_g \mid 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) = 0\}$, on peut énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.1.7. *Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$. L'ensemble T_c^0 est de cardinalité finie.*

Démonstration. La preuve est la même que celle du lemme 2.1.4. □

Lemme 2.1.8. *Soit $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$. Si $T_c^0 \neq \emptyset$, soit $t_0 \geq a$ son minimum et assumons que*

$$\sum_{t \in [a, t_0[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))|| < \infty.$$

Alors, $x_c(\cdot, a) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x_c(t, a) = \begin{cases} \hat{e}_c(t, a) & \text{si } t \leq t_0, \\ 0 & \text{si } t > t_0, \end{cases}$$

est g -absolument continue et une solution de (2.1.2). De façon équivalente,

$$x_c(t, a) = 1 + \int_{[a, t[} c(s)x_c(s, a)d\mu_g(s), \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Démonstration. La preuve découle directement du lemme précédent et du lemme 2.1.6. □

2.1.2. Équation linéaire non-homogène

La prochaine étape est de considérer une première version non homogène de (2.1.2) :

$$\begin{cases} x'_g(t) + c(t)x(t^+) = h(t) & \text{pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b], \\ x(a) = x_0, \end{cases} \quad (2.1.10)$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ ainsi que $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ qui satisfait à (2.1.6).

La proposition suivante, donne la solution de ce problème :

Proposition 2.1.9. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ ainsi que $c \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ qui satisfait à (2.1.6). Alors si x est une fonction g -absolument continue, elle est une solution de (2.1.10) si et seulement si*

$$x(t) = \hat{e}_c^{-1}(t, a) \left(x_0 + \int_{[a, t[} \hat{e}_c(s, a)h(s)d\mu_g(s) \right), \quad (2.1.11)$$

où

$$\hat{e}_c^{-1}(t, a) = \frac{1}{\hat{e}_c(t, a)}.$$

Démonstration. Puisque x est g -absolument continue, la proposition 1.3.6 et le lemme 2.1.6 garantissent que $x(\cdot)\hat{e}_c(\cdot, a)$ est g -absolument continue sur $[a, b]$. De plus, la proposition 1.3.2 donne

$$(x(t)\hat{e}_c(t, a))'_g = \hat{e}_c(t, a)x'_g(t) + x(t^+)c(t)\hat{e}_c(t, a), \quad (2.1.12)$$

puisque, en vertu de la proposition 2.1.6 et du théorème 1.3.7, on a

$$(\hat{e}_c(t, a))'_g = c(t)\hat{e}_c(t, a),$$

pour g -presque tout $t \in [a, b]$. En effet, si $t \in D_g$ l'équation (2.1.12) découle directement de la proposition 1.3.2, et si $t \notin D_g$, on obtient, en utilisant la proposition 1.3.2

$$(x(t)\hat{e}_c(t, a))'_g = \hat{e}_c(t, a)x'_g(t) + x(t)c(t)\hat{e}_c(t, a) = \hat{e}_c(t, a)x'_g(t) + x(t^+)c(t)\hat{e}_c(t, a).$$

Ainsi, on a donc, comme x est une solution de (2.1.10),

$$(x(t)\hat{e}_c(t, a))'_g = \hat{e}_c(t, a)h(t),$$

pour g -presque tout $t \in [a, b]$. Le résultat découle alors du théorème 1.3.7. \square

Cette proposition nous permettra de résoudre (2.1.1), lorsque $d, h \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ et d satisfait (2.1.6). En effet on a

Proposition 2.1.10. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ et soit $d \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ satisfaisant (2.1.6).*

Alors, l'équation (2.1.1) a une unique solution g -absolument continue, donnée par

$$x(t) = \hat{e}_c^{-1}(t, a) \left(x_0 + \int_{[a, t[} \hat{e}_c(s, a)\bar{h}(s)d\mu_g(s) \right), \quad (2.1.13)$$

où

$$c(t) = \frac{d(t)}{1 - d(t)(g(t^+) - g(t))},$$

et

$$\bar{h}(t) = \frac{h(t)}{1 - d(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

Démonstration. Pour trouver la solution de cette équation, on ramène l'équation (2.1.1) à une équation du type (2.1.10). Pour ce faire, on remarque que

$$\begin{aligned} x'_g(t) + d(t)x(t) &= x'_g(t) + d(t)x(t^+) + d(t)(x(t) - x(t^+)) \\ &= (1 - d(t)(g(t^+) - g(t)))x'_g(t) + d(t)x(t^+). \end{aligned}$$

Donc, x est une solution de (2.1.1) si et seulement si x est une solution de l'équation (2.1.10) avec

$$c(t) = \frac{d(t)}{1 - d(t)(g(t^+) - g(t))} \quad \text{et} \quad \bar{h}(t) = \frac{h(t)}{1 - d(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

Il reste alors seulement à montrer que c et \bar{h} satisfont les conditions de la proposition 2.1.9. On montre tout d'abord que $c, \bar{h} \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$. Pour ce faire, on montre d'abord qu'il existe seulement un nombre fini de points dans l'ensemble $A = \{t \in \mathcal{D}_g \mid d(t)(g(t^+) - g(t)) > 1/2\}$. En effet, comme $d \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$, on a

$$\infty > \|d\|_{\mathcal{L}_g^1} \geq \sum_{t \in A} |d(t)(g(t^+) - g(t))| > \sum_{t \in A} \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$|c(t)| \leq 2|d(t)| \quad \text{et} \quad |\bar{h}(t)| \leq 2|h(t)|,$$

pour tout $t \in [a, b] \setminus A$, ce qui montre que $c, \bar{h} \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$. Il reste maintenant à montrer que c satisfait (2.1.6). Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) &= 1 + \frac{d(t)}{1 - d(t)(g(t^+) - g(t))}(g(t^+) - g(t)) \\ &= \frac{1}{1 - d(t)g(t^+) - g(t)} \neq 0, \end{aligned}$$

et, grâce au calcul précédent, on a

$$\sum_{t \in [a, b] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))|| = \sum_{t \in [a, b] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 - d(t)(g(t^+) - g(t))|| < \infty.$$

La proposition 2.1.9 donne donc la forme de l'unique solution g -absolument continue à l'équation (2.1.1). □

2.2. Propriétés supplémentaires de l'exponentielle

En suivant l'exemple des auteurs de [BP], on développe dans cette section de nouveaux résultats pour la fonction exponentielle qui seront d'une grande utilité dans le chapitre 5.

2.2.1. Fonctions régressives

Dans la section précédente, on a vu que l'exponentielle \hat{e}_c est bien définie lorsque c satisfait les conditions (2.1.6).

Définition 2.2.1. On dit qu'une fonction $c : [t_0, t_0 + T[\rightarrow \mathbb{R}$ est régressive par rapport à g , où g -régressive, si elle satisfait les conditions (2.1.6). On notera l'ensemble des fonctions régressives sur $[t_0, t_0 + T[$ par $\mathcal{R}_g([t_0, t_0 + T[)$ ou simplement \mathcal{R}_g .

Définition 2.2.2. Soient $c, d \in \mathcal{R}_g$, on définit une addition et une soustraction sur \mathcal{R}_g par

$$c \oplus d = c(t) + d(t) + (g(t^+) - g(t))c(t)d(t) \quad (2.2.1)$$

et

$$c \ominus d = (c \oplus (\ominus d))(t), \quad (2.2.2)$$

où

$$(\ominus d)(t) = -\frac{d(t)}{1 + d(t)(g(t^+) - g(t))}. \quad (2.2.3)$$

Le lemme suivant montre que \mathcal{R}_g est bien fermé sous les opérations \oplus et \ominus .

Lemme 2.2.3. L'addition \oplus et la soustraction \ominus sont fermées sur \mathcal{R}_g .

Démonstration. Soient $c, d \in \mathcal{R}_g$.

$$\begin{aligned} 1 + (c \oplus d)(t)(g(t^+) - g(t)) &= 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) + d(t)(g(t^+) - g(t)) \\ &\quad + c(t)d(t)(g(t^+) - g(t))^2 \\ &= 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) \\ &\quad + d(t)(g(t^+) - g(t)) (1 + c(t)(g(t^+) - g(t))) \\ &= (1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))(1 + d(t)(g(t^+) - g(t))), \end{aligned}$$

qui est non nul puisque $c, d \in \mathcal{R}_g$. Ensuite, en utilisant l'égalité précédente

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + (c \oplus d)(t)(g(t^+) - g(t))|| &\leq \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))|| \\ &\quad + \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + d(t)(g(t^+) - g(t))||, \end{aligned}$$

qui est fini puisque $c, d \in \mathcal{R}_g$.

Pour \ominus , il suffit en fait de montrer que si $c \in \mathcal{R}_g$, alors $\ominus c \in \mathcal{R}_g$. On a

$$\begin{aligned} 1 + ((\ominus c)(t))(g(t^+) - g(t)) &= 1 + \frac{-c(t)(g(t^+) - g(t))}{1 + c(t)(g(t^+) - g(t))} \\ &= \frac{1}{1 + c(t)(g(t^+) - g(t))} \neq 0. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'égalité précédente,

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in [t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + (\ominus c)(t)(g(t^+) - g(t))|| \\ & \leq \sum_{t \in [t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + c(t)(g(t^+) - g(t))||, \end{aligned}$$

qui est fini, car $c \in \mathcal{R}_g$. □

Ces opérations admettent plusieurs propriétés qui découlent de la proposition suivante.

Proposition 2.2.4. *La paire (\mathcal{R}_g, \oplus) forme un groupe abélien.*

Démonstration. Le lemme précédent garantit que \mathcal{R}_g est fermé sous \oplus . Le fait que \oplus est associative et commutative découle directement de la définition de \oplus . On montre que 0 est l'élément neutre de (\mathcal{R}_g, \oplus) . Soit $c \in \mathcal{R}_g$, on a

$$(c \oplus 0)(t) = c(t) + 0 + c(t) \cdot 0 \cdot (g(t^+) - g(t)) = c(t).$$

Finalement, on montre que l'inverse de $c \in \mathcal{R}_g$ est $\ominus c$.

$$\begin{aligned} c \oplus (\ominus c)(t) &= c(t) + \frac{-c(t)}{1 + c(t)(g(t^+) - g(t))} + \frac{-c(t)^2(g(t^+) - g(t))}{1 + c(t)(g(t^+) - g(t))} \\ &= \frac{c(t) + c(t)^2(g(t^+) - g(t)) - c(t) - c(t)^2(g(t^+) - g(t))}{1 - c(t)(g(t^+) - g(t))} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.5. *Soient $c, d \in \mathcal{R}_g$, on a*

- (1) $\ominus(\ominus c) = c$;
- (2) $\ominus(c \oplus d) = (\ominus c) \oplus (\ominus d)$;
- (3) $\ominus(c \ominus d) = d \ominus c$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que (\mathcal{R}_g, \oplus) est un groupe. □

2.2.2. Propriétés de l'exponentielle

On peut maintenant, grâce à ces nouvelles notations, introduire certaines opérations de l'exponentielle définie dans la définition 2.1.5.

Théorème 2.2.6. Soient $c, d \in \mathcal{R}_g(I)$, où I est un intervalle contenant r, s et $t \in \text{int}(I)$, avec $r \leq s \leq t$. On a alors

$$(1) \hat{e}_0(t, s) \equiv 1;$$

$$(2) \hat{e}_c(t^+, s) = (1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))\hat{e}_c(t, s);$$

$$(3) \frac{1}{\hat{e}_c(t, s)} = \hat{e}_{\ominus c}(t, s);$$

$$(4) \hat{e}_c(t, s)\hat{e}_c(s, r) = \hat{e}_c(t, r);$$

$$(5) \hat{e}_c(t, s)\hat{e}_d(t, s) = \hat{e}_{c \oplus d}(t, s);$$

$$(6) \frac{\hat{e}_c(t, s)}{\hat{e}_d(t, s)} = \hat{e}_{c \ominus d}(t, s).$$

Démonstration. (1) La fonction $x(t) \equiv 1$ est évidemment une solution de $x'_g(t) = 0x(t)$, $x(s) = 1$ et comme la solution de cette équation est unique, en vertu du lemme 2.1.6, on a

$$\hat{e}_0(t, s) \equiv 1.$$

(2) Pour $t \notin \mathcal{D}_g$, cette égalité est trivialement vérifiée. Soit donc $t \in \mathcal{D}_g$, on a

$$\begin{aligned} \hat{e}_c(t^+, s) &= \hat{e}_c(t, s) + (g(t^+) - g(t))(\hat{e}_c)'_g(t, s) \\ &= \hat{e}_c(t, s) + c(t)(g(t^+) - g(t))\hat{e}_c(t, s) \\ &= (1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))\hat{e}_c(t, s). \end{aligned}$$

(3) Considérons l'équation

$$\begin{cases} x'_g(t) &= (\ominus c)(t)x(t); \\ x(s) &= 1. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

On montre que $x(t) = 1/\hat{e}_c(t, s)$ est une solution de (2.2.4). On a évidemment $x(s) = 1$.
Maintenant, en utilisant la règle du quotient, on obtient

$$\begin{aligned}
x'_g(t) &= \left(\frac{1}{\hat{e}_c(\cdot, s)} \right)'_g(t) \\
&= -\frac{(\hat{e}_c)'_g(t, s)}{\hat{e}_c(t, s)\hat{e}_c(t^+, s)} \\
&= -\frac{c(t)\hat{e}_c(t, s)}{\hat{e}_c(t, s)\hat{e}_c(t^+, s)} \\
&= \frac{-c(t)}{\hat{e}_c(t^+, s)} \\
&= \frac{-c(t)}{(1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))\hat{e}_c(t, s)} \\
&= (\ominus c)(t)x(t),
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle de la partie (2). Par l'unicité de la solution de (2.2.4), on a donc

$$\hat{e}_{\ominus c}(t, s) = \frac{1}{\hat{e}_c(t, s)}.$$

(4) Observons d'abord que

$$\begin{aligned}
e^{\int_{[s, t]} \hat{c}(u) d\mu_g(u)} e^{\int_{[r, s]} \hat{c}(u) d\mu_g(u)} \\
&= e^{\int_{[s, t]} \hat{c}(u) d\mu_g(u) + \int_{[r, s]} \hat{c}(u) d\mu_g(u)} \\
&= e^{\int_{[r, t]} \hat{c}(u) d\mu_g(u)}.
\end{aligned}$$

Soient $T_c^- = \{t \in I \cap \mathcal{D}_g \mid 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) < 0\} = \{t_1, \dots, t_k\}$ et

$$n(t, s) = \#\{t_i \in T_c^- \mid s \leq t_i < t\}.$$

On peut alors réécrire

$$\hat{e}_c(t, s) = (-1)^{n(t, s)} e^{\int_{[s, t]} \hat{c}(u) d\mu_g(u)}.$$

De plus, n satisfait

$$n(t, s) + n(s, r) = n(t, r).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\hat{e}_c(t, s)\hat{e}_c(s, r) &= (-1)^{n(t,s)}e^{\int_{[s,t[}\hat{c}(u)d\mu_g(u)}(-1)^{n(s,r)}e^{\int_{[r,s[}\hat{c}(u)d\mu_g(u)} \\
&= (-1)^{n(t,s)+n(s,r)}e^{\int_{[s,t[}\hat{c}(u)d\mu_g(u)}e^{\int_{[r,s[}\hat{c}(u)d\mu_g(u)} \\
&= (-1)^{n(t,r)}e^{\int_{[r,t[}\hat{c}(u)d\mu_g(u)} \\
&= \hat{e}_c(t, r).
\end{aligned}$$

(5) Considérons l'équation

$$\begin{cases} x'_g(t) &= (c \oplus d)x(t) \\ x(s) &= 1. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

On montre que $x(t) = \hat{e}_c(t, s)\hat{e}_d(t, s)$ est une solution de (2.2.5). On a évidemment $\hat{e}_c(s, s)\hat{e}_d(s, s) = 1$. En vertu de la règle de dérivation du produit, on a ensuite

$$\begin{aligned}
x'_g(t) &= (\hat{e}_c(\cdot, s)\hat{e}_d(\cdot, s))'_g(t) \\
&= c(t)\hat{e}_c(t, s)\hat{e}_d(t^+, s) + \hat{e}_c(t, s)d(t)\hat{e}_d(t, s) \\
&= c(t)\hat{e}_c(t, s)(1 + d(t)(g(t^+) - g(t)))\hat{e}_d(t, s) + \hat{e}_c(t, s)d(t)\hat{e}_d(t, s) \\
&= (c(t)(1 + d(t)(g(t^+) - g(t))) + d(t))\hat{e}_c(t, s)\hat{e}_d(t, s) \\
&= (c \oplus d)x(t).
\end{aligned}$$

Le résultat découle de l'unicité de la solution à (2.2.5).

(6) C'est une conséquence immédiate des parties (3) et (5). □

2.3. Équations différentielles non-linéaires du premier ordre

On rapporte dans cette section les travaux présentés dans [FP] afin de montrer les généralisations des théorèmes d'existence de solutions de Picard et de Peano.

On s'intéresse donc maintenant au problème non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'_g(t) &= f(t, x(t)) \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + \tau[, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où f est une fonction g -Carathéodory satisfaisant une certaine condition de type Lipschitz.

Définition 2.3.1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide. On dit que $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est g -Carathéodory si elle satisfait les trois conditions suivantes.

- (1) Pour tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est g -mesurable.
- (2) Pour g -presque tout $t \in [a, b[$, $f(t, \cdot)$ est continue sur X .
- (3) Pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in \mathcal{L}_g^1([a, b[)$ telle que

$$\|f(t, x)\| \leq h_r(t) \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b[\text{ et pour tout } x \in X, \|x\| \leq r.$$

Une propriété importante de ces fonctions est le fait que la composition avec une fonction g -continue et bornée est g -intégrable.

Lemme 2.3.2. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide et $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction g -Carathéodory. Alors, pour tout $x \in \mathcal{BC}_g([a, b])$, la fonction $f(\cdot, x(\cdot))$ est dans $\mathcal{L}_g^1([a, b])$.

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{BC}_g([a, b])$. Ceci implique que x est mesurable au sens de Broel. Elle peut donc être exprimée comme une limite de fonctions simples mesurables au sens de Borel, notées $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$. Comme X est séparable, on peut assumer sans perdre de généralité que $\alpha_n(t) \in X$ pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la composition $f(\cdot, \alpha_n(\cdot))$ est g -mesurable, en vertu de la condition (1) de la définition 2.3.1 et du fait que α_n est constante par morceaux sur une famille finie de sous-ensembles mesurables au sens de Borel de $[a, b]$.

Comme $\alpha_n \rightarrow x$ simplement sur $[a, b]$, on déduit de la condition (2) que

$$f(t, x(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, \alpha_n(t)) \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b],$$

ce qui prouve que $f(\cdot, x(\cdot))$ est g -mesurable comme étant la limite simple g -presque partout d'une suite de fonctions g -mesurables.

Finalement, on déduit que $f \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ de la condition (3). □

Remarque 2.3.3. Afin de faciliter le travail, on montre que l'on peut considérer, sans perdre de généralité, que g est continue en t_0 . En effet, si g n'est pas continue en t_0 , on considère alors $\tilde{g} : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t_0^+) & \text{si } t = t_0, \\ g(t) & \text{si } t > t_0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que \tilde{g} est croissante et continue à gauche. De plus, les g -dérivée et \tilde{g} -dérivée coïncident pour $t > t_0$. On rappelle aussi que pour n'importe quelle fonction g -différentiable h en $t_0 \in \mathcal{D}_g$, on a

$$h'_g(t_0) = \frac{h(t_0^+) - h(t_0)}{g(t_0^+) - g(t_0)}.$$

Ainsi, si y est une solution de

$$\begin{cases} y'_g(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } \tilde{g}\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + \tau[, \\ y(t_0) = x_0 + f(t_0, x_0)(g(t_0^+) - g(t_0)), \end{cases} \quad (2.3.2)$$

alors $x(t) = y(t)$ pour $t > t_0$, $x(t_0) = x_0$ est une solution de (2.3.1). Inversement, toute solution x de (2.3.1) donne une solution à (2.3.2) définie par $y(t) = x(t)$, pour tout $t \in]t_0, t_0 + \tau[$ et $y(t_0) = x(t_0^+) = x_0 + f(t_0, x_0)(g(t_0^+) - g(t_0))$.

Les résultats d'existence et d'unicité de solution présentés dans cette section reposent sur des résultats de points fixes que l'on énonce ici sans preuve. Le lecteur pourra se référer à [GD] pour les énoncés ainsi que les démonstrations.

Théorème 2.3.4 (Principe de contraction de Banach). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $F : X \rightarrow X$ une contraction, c'est-à-dire qu'il existe $0 < k < 1$ tel que*

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Alors, F possède un unique point fixe.

Théorème 2.3.5 (Théorème de point fixe de Schauder). *Soit $C \subset E$ un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé. Si $F : C \rightarrow C$ est une fonction compacte, c'est-à-dire une fonction continue et telle que $F(C)$ est relativement compact (donc contenu dans un ensemble compact), alors F possède un point fixe.*

Les auteurs de [FP], dans l'objectif de pouvoir utiliser le théorème 2.3.5, ont aussi montré ce résultat donnant une condition nécessaire pour qu'un ensemble de fonctions g -absolument continues soit relativement compact.

Proposition 2.3.6. *Soit \mathcal{F} un ensemble de fonctions g -absolument continues sur $[a, b]$ telles que l'ensemble $\{F(a) \mid F \in \mathcal{F}\}$ est borné. Supposons qu'il existe $h \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ telle que*

$$\|F'_g(t)\| \leq h(t), \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [a, b[\text{ et pour tout } F \in \mathcal{F}.$$

Alors, \mathcal{F} est relativement compact dans $\mathcal{BC}_g([a, b])$.

Démonstration. Voir la preuve de la proposition 5.5 dans [FP]. □

2.3.1. Théorème d'existence et d'unicité globale

Le théorème 2.3.7 permet d'abord de montrer un résultat d'existence et d'unicité globale pour les g -équations différentielles.

Théorème 2.3.7. *Soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes.*

- (1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot, x)$ est g -mesurable.*
- (2) *La fonction $f(\cdot, x_0)$ est dans $\mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$.*
- (3) *Il existe $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[, [0, \infty[)$ telle que, pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|.$$

Alors, l'équation (2.3.1) possède une solution unique définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Démonstration. On montre d'abord que sous ces conditions, f est g -Carathéodory. En effet, la première condition est énoncée telle que dans la définition. La condition de Lipschitz sur f garantit alors que f est continue en x . Finalement, pour tout $r > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \|f(t, x) - f(t, x_0)\| + \|f(t, x_0)\| \\ &\leq L(t)\|x - x_0\| + \|f(t, x_0)\| \\ &\leq L(t)(r + \|x_0\|) + \|f(t, x_0)\| = h_r(t). \end{aligned}$$

Comme f est g -Carathéodory, on peut donc définir l'opérateur $F : \mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T]) \rightarrow \mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T])$ par

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{[t_0, t[} f(s, x(s)) d\mu_g.$$

On munit $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T])$ de la norme

$$\|x\|_L = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} \|x(t)\| e_L^{-1}(t, t_0). \quad (2.3.3)$$

Pour ce faire, il faut s'assurer que L respecte les conditions (2.1.3). Tout d'abord, puisque $L(t) \geq 0$, on a directement

$$L(t)(g(t^+) - g(t)) > -1.$$

Ensuite, puisque $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T])$, on a, comme $\log(1 + x) \leq x$ pour $x \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + L(t)(g(t^+) - g(t))|| &\leq \sum_{t \in \mathcal{B}[t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} L(t)(g(t^+) - g(t)) \\ &\leq \int_{[t_0, t_0 + T[} L(t) d\mu_g < \infty. \end{aligned}$$

La fonction $e_L(t, t_0)$ est donc bien définie. Il est facile de voir que la norme définie en (2.3.3) est équivalente à la norme sup sur $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T])$. Ainsi, $(\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T]), \|\cdot\|_L)$ est aussi un espace de Banach.

On montre maintenant que F est une contraction. En effet, selon la proposition 2.1.1, comme g est continue en t_0 , on déduit que pour tout $x, y \in \mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + T])$, on a

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_L &= \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} e_L^{-1}(t, t_0) \left\| \int_{[t_0, t[} (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) d\mu_g(s) \right\| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} e_L^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} L(s) e_L(s, t_0) e_L^{-1}(s, t_0) \|x(s) - y(s)\| d\mu_g(s) \\ &\leq \|x - y\|_L \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} e_L^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} L(s) e_L(s, t_0) d\mu_g \\ &= \|x - y\|_L \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} e_L^{-1}(t, t_0) (e_L(t, t_0) - 1) \\ &= (1 - e_L^{-1}(t_0 + T, t_0)) \|x - y\|_L. \end{aligned}$$

Le théorème 2.3.4 garantit donc l'existence d'un unique point fixe à l'opérateur F , et donc l'existence d'une unique solution à (2.3.1). \square

2.3.2. Résultat local d'existence et d'unicité

On s'intéresse maintenant à une version locale du théorème précédent, qui est une généralisation du théorème de Picard.

Théorème 2.3.8. *Soit $r > 0$, et $f : [t_0, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

- (1) *Pour tout $x \in \overline{B(x_0, r)}$, $f(\cdot, x)$ est g -mesurable.*
- (2) *$f(\cdot, x_0) \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T])$.*
- (3) *Il existe $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T], [0, \infty[)$ telle que, pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et tout $x, y \in \overline{B(x_0, r)}$, on a*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\|.$$

Alors, il existe $\tau \in]0, T]$ tel que (2.3.1) a une solution unique définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$.

Démonstration. Encore une fois, les conditions sur f garantissent que celle-ci est g -Carathéodory. Ainsi, comme g est continue en t_0 , posons $\tau \in]0, T]$ tel que

$$\int_{[t_0, t_0 + \tau[} h_r(s) d\mu_g \leq r.$$

On définit

$$X = \{x \in \mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + \tau]) \mid \|x(t) - x_0\| \leq r \text{ pour tout } t \in [t_0, t_0 + \tau]\},$$

un sous-ensemble fermé de $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + \tau])$, et $F : X \rightarrow X$ par

$$F(x)(t) = x_0 + \int_{[t_0, t_0 + t[} f(s, x(s)) d\mu_g(s).$$

Comme il est fait dans la preuve du théorème précédent, on munit $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + \tau])$ de la norme équivalente $\|\cdot\|_L$, et on peut alors montrer que F est une contraction. Le résultat découle alors du théorème 2.3.4. \square

2.3.3. Résultat d'existence locale

Finalement, on peut obtenir une généralisation du théorème d'existence locale de solution de Peano.

Théorème 2.3.9. Soit $r > 0$ et $f : [t_0, t_0 + T] \times \overline{B(x_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction g -Carathéodory. Alors, il existe $\tau \in]0, T[$ tel que l'équation (2.3.1) possède au moins une solution sur $[t_0, t_0 + \tau]$.

Démonstration. Comme f est g -Carathéodory, il existe $h_k \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T])$ avec $k = \|x_0\| + r$ telle que

$$\|f(t, x)\| \leq h_k(t),$$

pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et pour tout $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Comme g est continue en t_0 , on peut fixer $\tau \in]0, T[$ tel que

$$\int_{[t_0, t_0 + \tau[} h_k(s) d\mu_g \leq r. \tag{2.3.4}$$

On définit alors X et $F : X \rightarrow X$ de la même façon que dans la preuve du théorème précédent. L'ensemble $\{x(t_0) \mid x \in F(X)\}$ est en fait simplement l'ensemble $\{x_0\}$ qui est

évidemment borné. De plus, pour $x \in F(x)$, on a,

$$\|x'_g(t)\| \leq \|f(t, x(t))\| \leq h_k(t),$$

selon (2.3.4). Ainsi, par le théorème 2.3.6, l'ensemble $F(X)$ est relativement compact dans $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + \tau])$. Comme l'ensemble X est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathcal{BC}_g([t_0, t_0 + \tau])$, le théorème 2.3.5 garantit alors l'existence d'un point fixe à F et donc de l'existence d'une solution locale à (2.3.1). \square

Chapitre 3

Utilité des équations différentielles de Stieltjes

La première section de ce chapitre a pour but de démontrer que la théorie des équations différentielles de Stieltjes est une généralisation des tentatives précédentes d'unification des calculs différentiels discret et continu. Les résultats démontrés dans cette première section sont tous connus, et tirés de [PR]. On présente ici certaines références pour le lecteur intéressé à se familiariser avec ces divers concepts. Tout d'abord, [C] offre une bonne introduction à la théorie des équations différentielles ordinaires, alors que le chapitre 4 de [M] introduit bien la théorie des équations aux différences finies. Ensuite, la théorie entourant les équations différentielles avec impulsions peut être trouvée dans [BHN]. Finalement, les équations différentielles sur les échelles de temps sont introduites de main de maître dans [BP].

La deuxième section de ce chapitre donne un nouvel exemple d'application des équations différentielles de Stieltjes à un problème de dynamique des populations. Dans cette section, on présente différents modèles permettant de modéliser la taille d'une population de drosophiles à travers les années. Le fait qu'une grande partie de la population de drosophiles meurt à l'arrivée de l'hiver fait en sorte que les équations différentielles de Stieltjes, permettant facilement l'étude de phénomènes discontinus, sont l'outil tout indiqué pour modéliser cette situation.

3.1. Généralisation de plusieurs types d'équations différentielles

Comme mentionné dans l'introduction, la force de la g -dérivée est de permettre l'unification des calculs différentiels discrets et continus. En fait, les g -équations différentielles sont aussi des généralisations de systèmes dynamiques sur les échelles de temps et d'équations différentielles à impulsions. On montrera donc dans cette section comment les équations

g -différentielles généralisent et unifient les différents types d'équations mentionnées précédemment.

3.1.1. La dérivée classique

Il est évident que pour que la g -dérivée soit la dérivée usuelle, il suffit de choisir $g(x) = x$. En effet, ce choix donne directement la définition usuelle de la dérivée, puisque que $\mathcal{D}_g = \emptyset$. Ceci, avec le fait que $C_g = \emptyset$, implique aussi que la g -topologie sur \mathbb{R} est tout simplement la topologie usuelle engendrée par la valeur absolue. Ainsi, toute équation différentielle ordinaire est en particulier une équation différentielle de Stieltjes, avec $g(x) = x$.

3.1.2. Les équations aux différences finies

Tout d'abord, il est bon de rappeler qu'une équation aux différences finies est une équation de la forme

$$\begin{cases} \Delta y_n &= f(n, y_n), \quad n \in \mathbb{N}, \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où l'opérateur Δ est l'opérateur de différence défini par

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n.$$

On remarque donc que les seuls points de changements de y sont les naturels, et qu'en ces points on devra avoir

$$g(n^+) - g(n) = 1.$$

Un choix naturel de fonction g est donc

$$g(x) = \begin{cases} [x] & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

où $[x]$ est défini comme le plus petit entier plus grand ou égal à x .

En effet, dans ce cas, on a alors $\mathcal{C}_g = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{N}$. Ainsi, les seuls ensembles qui ne sont pas de g -mesure nulle sont les sous-ensembles contenant des naturels. Être une solution g -presque partout veut donc dire, en particulier être valide sur les naturels. On a aussi que la g -dérivée de y sera seulement définie pour $t = n \in \mathbb{N}$, auquel cas on a

$$y'_g(n) = \frac{y(n^+) - y(n)}{g(n+1) - g(n)} = y(n^+) - y(n).$$

Or, puisque g est constante sur $]n, n + 1]$, si y est g -continue sur $[n, n + 1]$, on aura alors que y sera constante sur $]n, n + 1]$,

$$y(n^+) = y(n + 1),$$

et donc

$$y'_g(n) = \Delta y_n.$$

Ceci montre donc qu'une équation aux différences finies est simplement une équation différentielle de Stieltjes, avec la fonction g définie en (3.1.2).

3.1.3. Équations différentielles sur les échelles de temps

Afin de montrer que les équations différentielles de Stieltjes sont bien une généralisation des équations différentielles sur les échelles de temps, il est nécessaire d'introduire la notion d'échelle de temps. Le lecteur intéressé pourra se référer à [BP] pour une introduction plus complète.

Soit \mathbb{T} une échelle de temps, c'est-à-dire un ensemble non-vide et fermé de \mathbb{R} muni de la topologie induite par celle usuelle sur \mathbb{R} . Sur cet ensemble, on définit l'opérateur de saut avant σ , pour $t \in \mathbb{T}$, par

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}. \quad (3.1.3)$$

Par convention, on a que si $\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\} = \emptyset$, alors $\sigma(t) = \sup \mathbb{T}$.

On dira d'un point $t \in \mathbb{T}$ qu'il est *dispersé à droite* si $\sigma(t) > t$. Un point $t \in \mathbb{T}$ tel que $\sigma(t) = t$ sera appelé *dense à droite*.

On peut alors définir la delta-dérivée.

Définition 3.1.1. Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T} \setminus \sup \mathbb{T}$. On définit la delta-dérivée de f en t , notée $f^\Delta(t)$, comme étant le nombre réel, s'il existe, satisfaisant à la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in]t - \delta, t + \delta[\cap \mathbb{T}$, on a

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Le théorème suivant, tiré de [BP] donne des formules plus pratiques afin de calculer la delta-dérivée.

Théorème 3.1.2. Soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T} \setminus \sup \mathbb{T}$. Alors :

(1) Si f est continue en t et t est dispersé à droite, alors f est delta-différentiable en t et

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

(2) Si t est dense à droite, alors f est delta-différentiable en t si et seulement si la limite

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe.

On peut alors introduire la fonction g qui permettra d'écrire la delta-dérivée comme une dérivée de Stieltjes. On définit, pour une échelle de temps \mathbb{T} , la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, définie par

$$g(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}, \quad (3.1.4)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note que la fonction g est légèrement différente de l'opérateur de saut avant σ . Il est facile de voir que g est croissante et continue à gauche. Maintenant, pour une fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit son *extension de Slavík* comme étant la fonction $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\bar{f}(t) = f(g(t)). \quad (3.1.5)$$

On peut donc maintenant montrer le théorème suivant, tiré de [PR].

Théorème 3.1.3. *Soit \mathbb{T} une échelle de temps, et soit $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à gauche en tout point dispersé à droite. Soient g et \bar{f} définies comme en (3.1.4) et en (3.1.5) respectivement. La fonction f est delta-différentiable en $t_0 \in \mathbb{T}$ si et seulement si \bar{f} est g -différentiable en t_0 , et*

$$\bar{f}'_g(t_0) = f^\Delta(t_0). \quad (3.1.6)$$

Démonstration. La preuve se fait en considérant séparément les deux cas suivants :

(1) Supposons que t_0 est dispersé à droite.

Selon nos hypothèses, la fonction f est continue à gauche en t_0 , et le théorème 3.1.2 garantit alors que la delta-dérivée de f existe en t_0 et est donnée par

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}.$$

D'un autre côté, pour tout $t \in]t_0, \sigma(t_0)[$, on a $g(t) = \sigma(t_0)$, et g est discontinue en t_0 .

Ainsi,

$$\bar{f}(t_0^+) = f(\sigma(t_0)).$$

Ceci garantit que la g -dérivée de \bar{f} existe en t_0 et vaut

$$\bar{f}'_g(t_0) = \frac{\bar{f}(t_0^+) - \bar{f}(t_0)}{g(t_0^+) - g(t_0)} = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} = f^\Delta(t_0).$$

(2) Supposons que t_0 est dense à droite.

Dans ce cas, le théorème 3.1.2 garantit que la delta-dérivée de f en t_0 existe si et seulement si la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0, t \in \mathbb{T}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (3.1.7)$$

existe, auquel cas elle vaut $f^\Delta(t_0)$.

Comme g est continue en t_0 et que $g(t_0) = t_0$, la g -dérivée de \bar{f} en t_0 existe si et seulement si la limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(g(t)) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)} \quad (3.1.8)$$

existe, auquel cas elle vaut $\bar{f}'_g(t_0)$.

On suppose maintenant que (3.1.7) existe et l'on veut montrer que (3.1.8) existe aussi et a la même valeur. Soit $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ une suite convergeant vers t_0 telle que $g(t_n) \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une telle suite existe puisque, comme t_0 est dense à droite, on a $t_0 = g(t_0) < g(t)$ pour tout $t > t_0$. On a alors $g(t_n) \rightarrow g(t_0)$ et $g(t_n) \in \mathbb{T} \setminus \{t_0\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, l'existence de (3.1.7) garantit l'existence de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(g(t_n)) - f(t_0)}{g(t_n) - g(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0, t \in \mathbb{T}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Puisque la suite est arbitraire, la limite (3.1.8) existe et vaut (3.1.7).

Pour prouver l'affirmation inverse, soit $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ une suite dans $\mathbb{T} \setminus \{t_0\}$ qui converge vers t_0 . Si on admet que (3.1.8) existe, alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t_n) - f(t_0)}{g(t_n) - g(t_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(g(t_n)) - f(t_0)}{g(t_n) - g(t_0)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(g(t)) - f(t_0)}{g(t) - g(t_0)}.$$

Comme la suite est arbitraire, la limite (3.1.7) existe et vaut (3.1.8).

□

Le théorème précédent traite seulement des points de \mathbb{T} . Qu'en est-il alors des points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$? On remarque que pour la fonction g définie en (3.1.4), on a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T} = C_g$. Ainsi, cet ensemble est de g -mesure nulle et peut donc être ignoré.

3.1.4. Équations différentielles avec impulsions

Une équation différentielle avec impulsions est une équation différentielle ordinaire du type suivant, pour $t_0, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < \dots < t_m$, :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t > t_0, t \neq t_k, k \in \{1, \dots, m\}, \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), & t = t_k, \end{cases} \quad (3.1.9)$$

où $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$ et $I_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données pour $k \in \{1, \dots, m\}$. Par une solution de (3.1.9), on veut dire une fonction $x : [t_0, t_m + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, satisfaisant à l'équation différentielle partout sur $[t_0, t_m + \varepsilon] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, et telle que pour chaque $k \in \{1, \dots, m\}$, $x(t_k^-) = x(t_k)$ et $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k))$.

La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à considérer pour ce type de problème est simplement

$$g(t) = t + \sum_{k=1}^m \chi_{]t_k, \infty[}(t), \quad (3.1.10)$$

où χ_A est la fonction caractéristique de $A \subset \mathbb{R}$. On montre maintenant que l'on peut écrire une équation différentielle avec impulsions comme une équation différentielle de Stieltjes.

Théorème 3.1.4. *Une fonction bornée $x : [t_0, t_m + \varepsilon]$ est une solution de (3.1.9) si et seulement si elle est une solution de*

$$x'_g(t) = \tilde{f}(t, x(t)), \text{ pour tout } t \in [t_0, t_m + \varepsilon], \quad (3.1.11)$$

où \tilde{f} est définie, pour $(t, x) \in [t_0, t_m + \varepsilon] \times \mathbb{R}$, par

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & \text{si } t \neq t_k, \\ I_k(x), & \text{si } t = t_k. \end{cases} \quad (3.1.12)$$

Démonstration. Supposons que x est une solution de (3.1.11). Par définition de g , on a $\mathcal{D}_g = \{t_1, \dots, t_m\}$, et g est différentiable sur $[t_0, t_m + \varepsilon] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$ avec $g'(t) = 1$. Ainsi, pour tout $t \in [t_0, t_m + \varepsilon] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$, on a

$$f(t, x(t)) = \tilde{f}(t, x(t)) = x'_g(t) = \frac{x'(t)}{g'(t)} = x'(t).$$

Maintenant, comme $\mathcal{D}_g = \{t_1, \dots, t_m\}$, pour $t \in \mathcal{D}_g$, on a $g(t^+) - g(t) = 1$, et

$$I_k(x(t)) = \tilde{f}(t, x(t)) = \frac{x(t^+) - x(t)}{g(t^+) - g(t)} = x(t^+) - x(t) = \Delta x(t).$$

Supposons maintenant que x est une solution de (3.1.9). Ceci implique tout d'abord que, pour $t \in [t_0, t_m + \varepsilon] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$,

$$\tilde{f}(t, x(t)) = f(t, x(t)) = x'(t) = \frac{x'(t)}{g'(t)} = x'_g(t).$$

Ensuite, comme x est une solution de (3.1.9), la limite $x(t_k^+)$ existe pour $k \in \{1, \dots, m\}$ et donc x est g -différentiable en t_k avec

$$x'_g(t_k) = \frac{x(t_k^+) - x(t_k)}{g(t_k^+) - g(t_k)} = x(t_k^+) - x(t_k) = \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)) = \tilde{f}(t_k, x(t_k)).$$

□

3.2. Modélisation d'une population de drosophiles à l'aide d'équations différentielles de Stieltjes

Le but de cette section est d'exploiter la richesse de la théorie des équations différentielles de Stieltjes pour présenter une nouvelle modélisation de la taille d'une population de drosophiles dans l'année. Deux modèles seront présentés : tout d'abord un modèle qui suppose que la population de drosophiles ne varie pas pendant l'hiver. Ensuite un modèle tenant compte de la mort de plusieurs drosophiles pendant l'hiver. Finalement, on fera varier certains paramètres afin de déterminer quand la population de drosophile explose, se stabilise ou s'éteint.

3.2.1. Le modèle de base

Afin d'établir le modèle, il faut d'abord choisir la fonction g adéquate qui permettra de modéliser cette situation. Une année sera représentée par les intervalles $[k, k + 2[$, pour k pair. L'été sera la première moitié de cet intervalle, et l'hiver la deuxième. Comme la population de drosophiles ne varie pas en hiver, on voudra que g soit constante sur les intervalles $[k + 1, k + 2[$, pour k pair. Un choix naturel pour g peut donc être

$$g(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{2} & \text{si } x \in [k, k + 1[, k \text{ pair ;} \\ \frac{k}{2} + 1 & \text{si } x \in [k + 1, k + 2[, k \text{ pair .} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

On peut voir le graphique de la fonction g dans la figure 3.1.

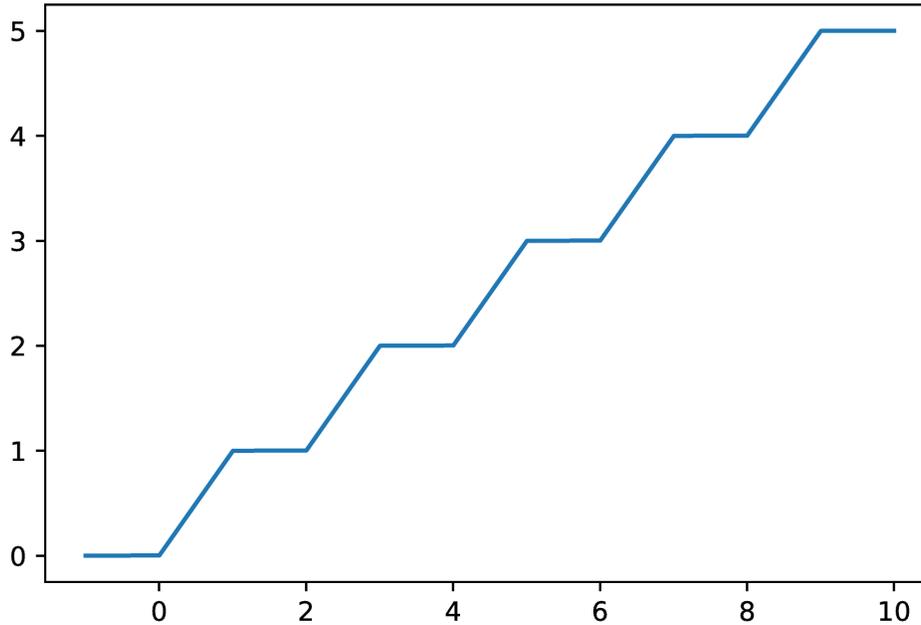


FIGURE 3.1. Fonction g pour le modèle de base de la modélisation de population de drosophiles.

L'équation permettant de modéliser cette situation est, pour un certain choix de fonction $c(t) \geq 0$,

$$\begin{cases} x'_g(t) &= c(t)x(t); \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

La solution de cette équation est donc donnée par (2.1.1)

$$x(t) = x_0 e_c(t, 0) = x_0 \exp \left(\int_{[0,t[} \tilde{c}(s) d\mu_g \right) = x_0 \exp \left(\int_{[0,t[} c(s) d\mu_g \right),$$

puisque g est continue, et donc $\mathcal{D}_g = \emptyset$. En particulier, si $c(t) = k > 0$, on a

$$x(t) = x_0 e^{kg(t)}.$$

On présente le graphique de cette solution dans la figure 3.2.

3.2.2. Un modèle tenant compte de mortalités dues à l'hiver

Le climat peu clément du Québec est dur pour les populations de drosophiles. En effet, comme on peut le voir dans [LAN], à des températures plus froides, les drosophiles ne

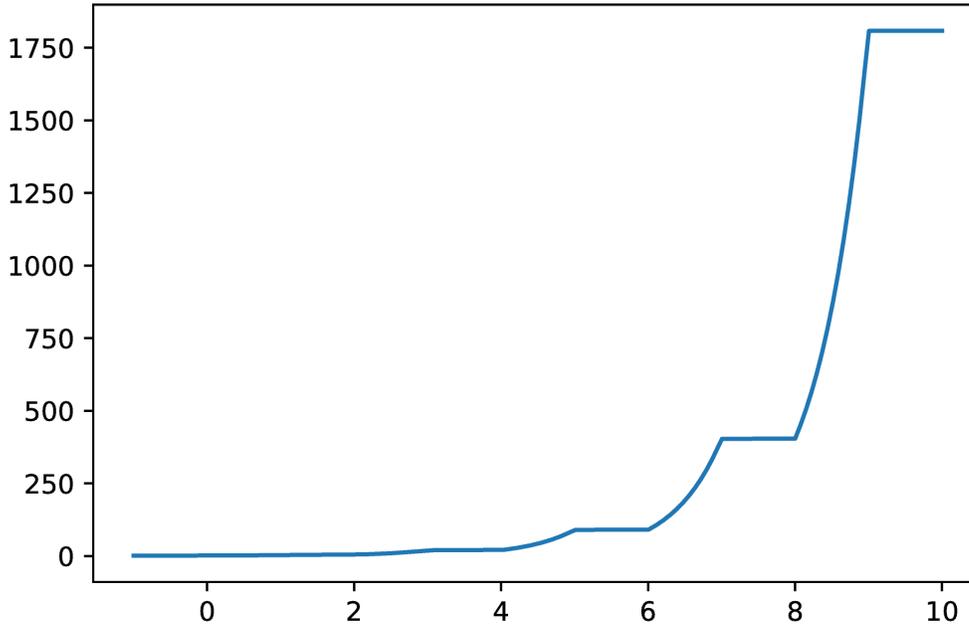


FIGURE 3.2. Solution de l'équation (3.2.2) avec $c(t) = 1/2$.

peuvent survivre. On remarque que la population chute massivement à l'arrivée de l'hiver et reprend au printemps. La théorie des équations différentielles de Stieltjes permet de modéliser une telle situation; en effet, il suffit d'imposer une discontinuité aux points représentant le début de l'hiver. Dans notre cas, on veut donc introduire une discontinuité aux entiers impairs. On considère donc une nouvelle fonction g , définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [k, k + 1], k \text{ pair;} \\ k + 2 & \text{si } x \in]k + 1, k + 2[, k \text{ pair.} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

On peut voir le graphique de la fonction g à la figure 3.3.

L'équation à résoudre est encore

$$\begin{cases} x'_g(t) & = c(t)x(t); \\ x(0) & = 1; \end{cases} \quad (3.2.4)$$

toutefois la fonction c sera modifiée. La valeur de $c(t)$ aux points de continuité de g représente encore le taux de naissance des drosophiles, que l'on supposera pour les calculs à $1/5$, alors que la valeur aux points de discontinuité doit représenter la proportion de la population qui

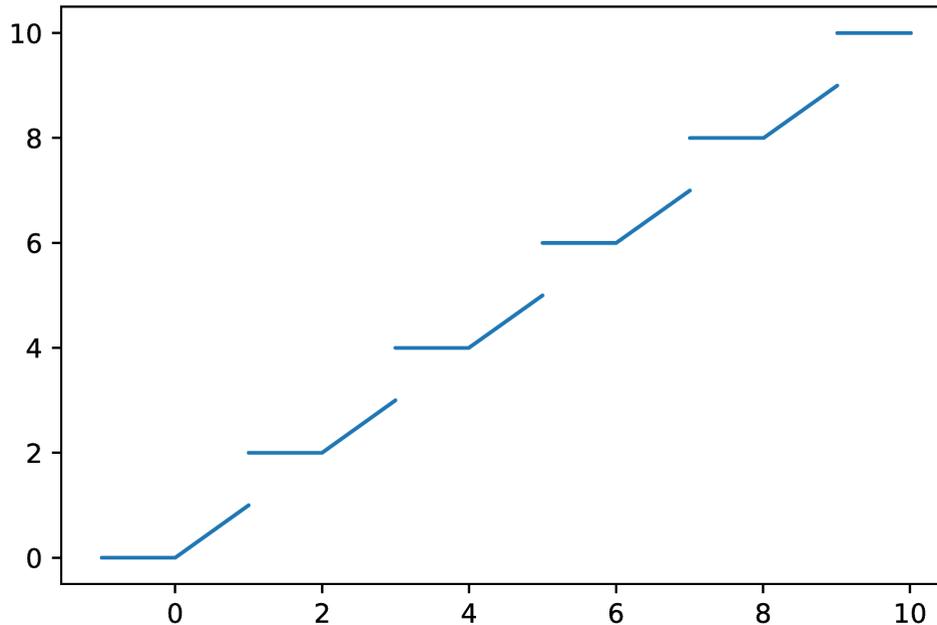


FIGURE 3.3. Fonction g pour le modèle de base de la modélisation de population de drosophile.

meurt. En effet, pour $t \in \mathcal{D}_g$, et $c(t) < 0$, on a

$$x'_g(t) = \frac{x(t^+) - x(t)}{g(t^+) - g(t)} = c(t)x(t),$$

et donc

$$x(t^+) = x(t) + c(t)x(t).$$

Par exemple, $c(t) = -1$ implique que la population s'éteint au premier hiver. On disait que la population chutait massivement au début de l'hiver, mais ce n'est pas tout à fait vrai : en fait la population de drosophiles vivant à l'extérieur s'éteint. En effet, tel qu'il est montré dans [CM], les drosophiles adultes sont celles résistant le mieux au froid. Aussi, les auteurs de [CM] montrent que la probabilité de survie à -10° après plus d'une semaine est presque nulle. On voit clairement que pour une période étendue, comme l'hiver, une drosophile adulte ne peut survivre. Ainsi, seules celles qui parviennent à se réfugier pour l'hiver survivent.

Afin de calculer la solution, supposons que la moitié des drosophiles parviennent à trouver un refuge, et donc que la moitié survit. La fonction c devient donc

$$c(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & \text{si } t = 2k - 1, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{5} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

La solution à (3.2.4) est donc donnée par

$$x(t) = x_0 e_c(t, 0) = x_0 \exp \left(\int_{[0, t[} \tilde{c}(s) d\mu_g \right), \quad (3.2.6)$$

avec

$$\tilde{c}(t) = \begin{cases} \log \left(\frac{1}{2} \right) & \text{si } t = 2k + 1, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{5} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut calculer cette solution de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{[0, t[} \tilde{c}(s) d\mu_g &= \int_{[0, t[\setminus \mathcal{D}_g} \tilde{c}(s) d\mu_g + \int_{[0, t[\cap \mathcal{D}_g} \tilde{c}(s) d\mu_g \\ &= \frac{1}{5} \mu_g([0, t[\setminus \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}) \\ &\quad + \sum_{2k-1 < t} \log(1 + c(2k - 1)(g((2k - 1)^+) - g(2k - 1))) \\ &= \frac{1}{5} (g(t) - \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\}) + \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\} \log \left(1 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle, on obtient donc la solution de (3.2.4) :

$$x(t) = e^{\frac{1}{5}(g(t) - \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\})} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{\max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\}}, \quad (3.2.7)$$

dont on peut voir le graphique dans la figure 3.4

On remarque que sous ces hypothèses la population de drosophiles s'éteindra éventuellement. En utilisant une autre fonction, par exemple

$$c(t) = \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{si } t \neq 2k + 1, k \in \mathbb{N}; \\ \frac{-1}{2} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

on obtient la solution suivante :

$$x(t) = e^{\frac{7}{8}(g(t) - \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\})} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{\max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\}},$$

dont le graphe est présenté dans la figure 3.5. On remarque que cette fois la population semble exploser.

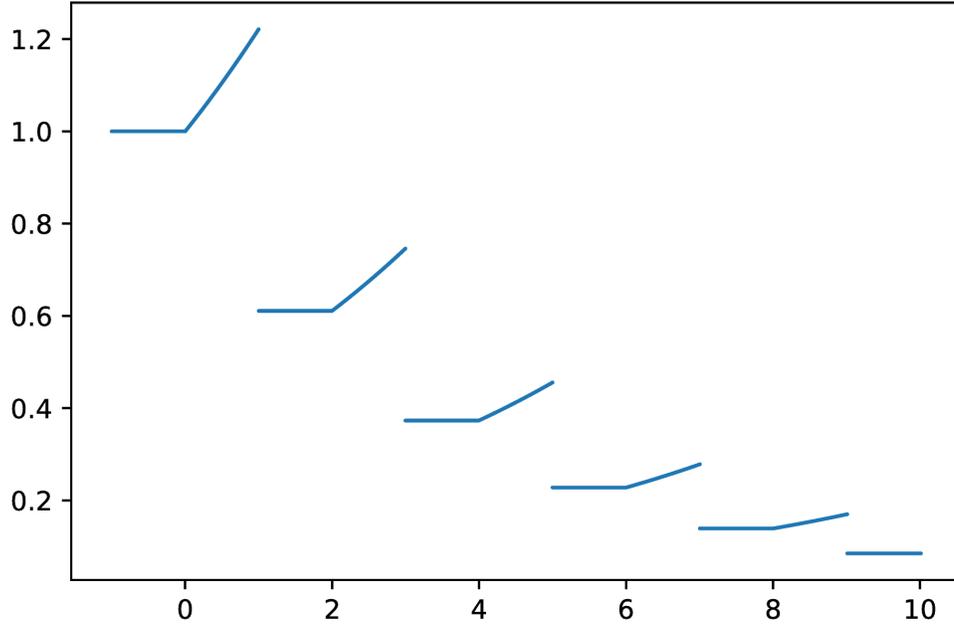


FIGURE 3.4. Solution de l'équation (3.2.4) avec la fonction c définie en (3.2.5).

3.2.3. Variation des paramètres et impacts sur la solution

Il est possible d'exprimer la solution de (3.2.4) selon le taux de reproduction, $\eta > 0$, des drosophiles et la proportion qui meurt à l'arrivée de l'hiver, $0 < p < 1$. En effet, dans ce cas la fonction c est définie par

$$c(t) = \begin{cases} \eta & \text{si } t \neq 2k + 1, k \in \mathbb{N}; \\ -p & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

On obtient alors

$$x(t) = e^{\eta(g(t) - \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k+1 < t\})} (1 - p)^{\max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k+1 < t\}}. \quad (3.2.10)$$

Si l'on veut contrôler la population de drosophiles, on veut donc trouver la valeur de p qui, pour un η donné fait en sorte que (3.2.10) soit bornée. Si l'on note

$$n(t) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\},$$

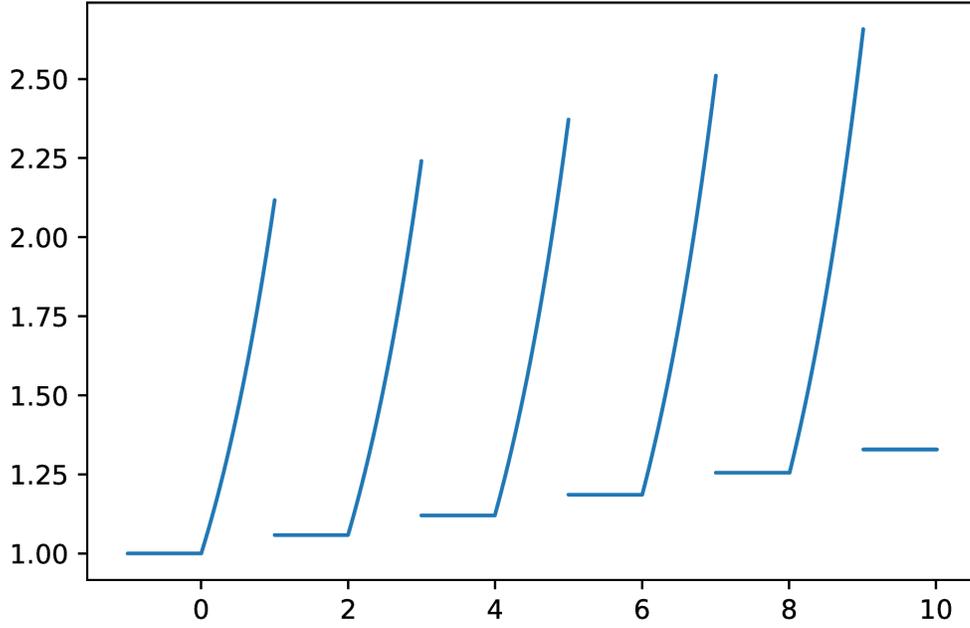


FIGURE 3.5. Solution de l'équation (3.2.4) avec la fonction c définie en (3.2.8).

on obtient

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{\eta(g(t)-n(t))} (1-p)^{n(t)} \\
 &= e^{\eta(g(t)-n(t))} e^{n \log(1-p)} \\
 &= e^{\eta g(t) - \eta n + n \log(1-p)} \\
 &= e^{\eta g(t) - n(\eta - \log(1-p))}.
 \end{aligned}$$

Pour que $x(t)$ soit bornée, il faut donc que

$$\eta g(t) < n(\eta - \log(1-p)),$$

ce qui revient à dire, en terme de p ,

$$p > 1 - e^{\eta(1 - \frac{g(t)}{n(t)})}. \quad (3.2.11)$$

Comme ce qui nous intéresse est le comportement asymptotique de cette solution, on l'observe à la figure 3.6.

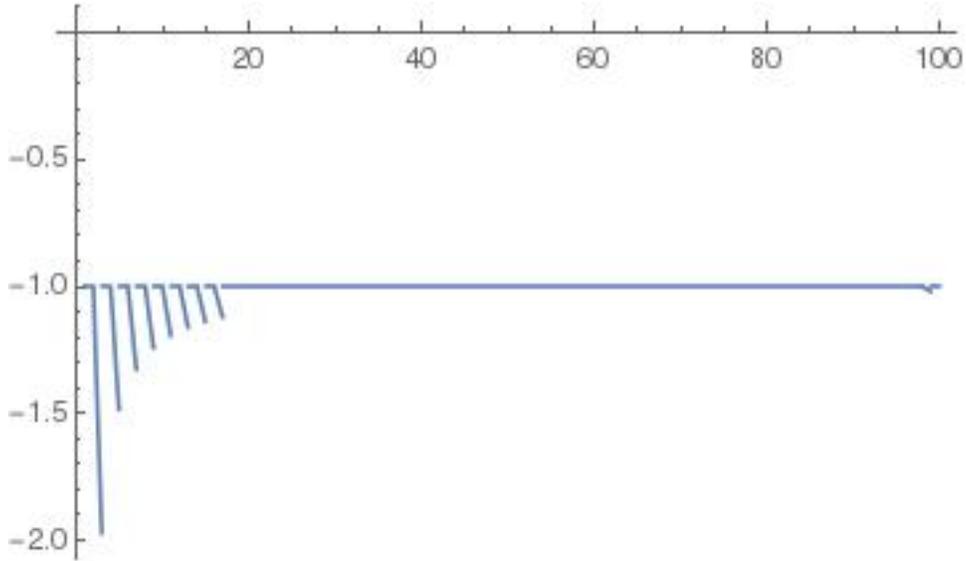


FIGURE 3.6. Comportement asymptotique de $1 - g(t) / \max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k < t\}$.

On a donc

$$1 - \frac{g(t)}{\max\{k \in \mathbb{N} \mid 2k - 1 < t\}} \sim -1,$$

ce qui n'est pas étonnant, car $n(t) \sim t/2$, et on veut donc

$$p > 1 - e^{-\eta}.$$

Dans la figure 3.7, on observe justement la solution avec $\eta = 1$ et en faisant varier p .

Le fait que, pour $p = 1 - e^{-\eta}$, on obtient une solution stable n'est pas étonnant. En effet, en vertu de la propriété (2) du théorème 2.2.6, on a

$$x(1^+) = (1 + c(t))x(1) = (1 - p)x(1).$$

Or, peu importe la valeur de p , on a

$$x(1) = e^{\eta(g(1) - n(1))} (1 - p)^{n(1)} = e^{\eta}.$$

Ainsi, pour obtenir une solution stable, on voudrait avoir

$$1 = x(0) = x(1^+) = (1 - p)e^{\eta},$$

et donc

$$p = 1 - e^{-\eta}.$$

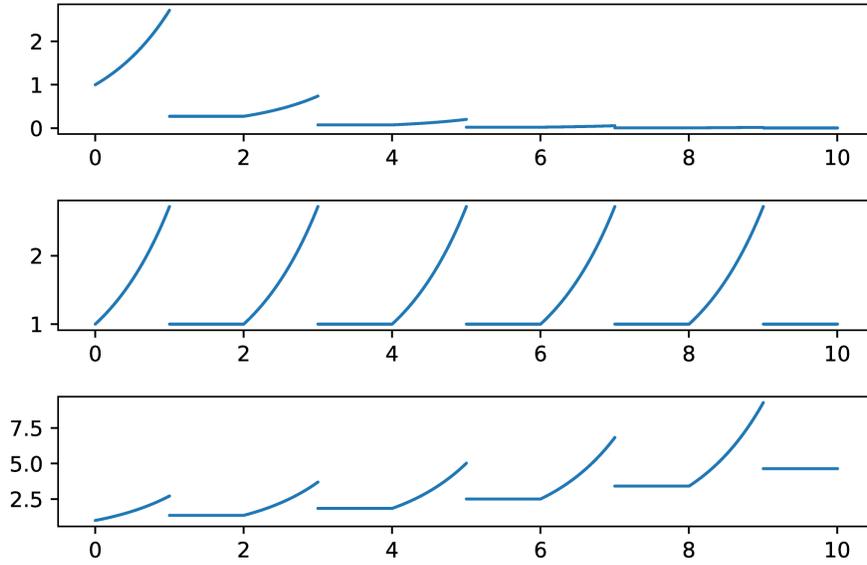


FIGURE 3.7. Comportement de la solution (3.2.10) avec $\eta = 1$ et $p = 0.9, 1 - e^{-1}$ et 0.5 respectivement.

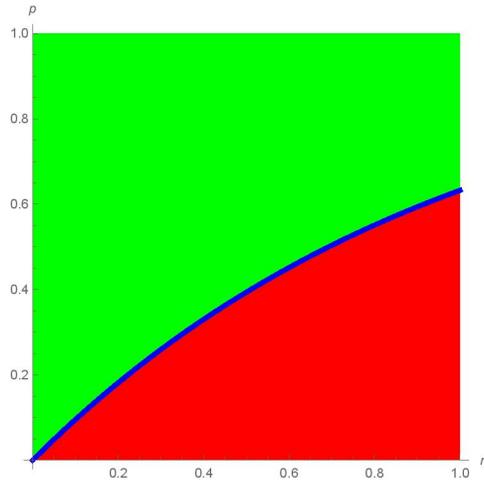


FIGURE 3.8. Diagramme de bifurcation de l'équation (3.2.4) selon p et η .

La figure 3.8 présente un diagramme de bifurcation exprimant les différents comportements de la solution (3.2.10) selon les valeurs de p et η . Pour les valeurs de paramètres dans la zone verte, la population tend à s'éteindre, dans la zone rouge la population explose, et le long de la courbe bleue, la solution est périodique.

Chapitre 4

Propriétés de solutions aux équations différentielles de Stieltjes

L'objectif de ce chapitre est de généraliser certaines propriétés connues pour les solutions d'équations différentielles ordinaires au contexte des équations différentielles de Stieltjes.

Pour ce faire, on présente dans la première section une généralisation du lemme de Grönwall pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Cette inégalité est déjà connue, et a été montrée dans [DS], mais on la prouve ici avec le langage de la g -dérivée.

Les deux dernières sections de ce chapitre sont consacrées à la démonstration de nouveaux résultats, soit l'existence d'une solution saturée et la dépendance continue aux conditions initiales. On adapte dans ces sections le développement du deuxième chapitre de [C], qui présente ces résultats dans le cas classique. On peut aussi trouver un développement intéressant de ces résultats dans [KP].

4.1. Généralisation du lemme de Grönwall

Le lemme de Grönwall est un résultat classique concernant le comportement de solutions à une inégalité différentielle. L'inégalité qui en résulte est la clef permettant de démontrer un grand nombre de propriétés des solutions d'équations différentielles ordinaires.

4.1.1. Lemme de Grönwall dans le cas classique

Voici la version classique du lemme de Grönwall, présenté dans [C] :

Lemme 4.1.1 (Lemme de Grönwall). *Soient h, k, x des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, T[$, avec $T \leq \infty$ et $k(t) \geq 0$, pour tout $t \in [t_0, T[$. Si l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds, \quad (4.1.1)$$

alors

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t h(s)k(s) \exp\left(\int_s^t k(u)du\right) ds. \quad (4.1.2)$$

Le lemme précédent est en fait équivalent au résultat suivant :

Lemme 4.1.2. *Soient y, a, b des fonctions continues sur un intervalle $[t_0, T[$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Si y satisfait*

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t) \quad (4.1.3)$$

et

$$y(0) \leq x_0, \quad (4.1.4)$$

alors

$$y(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \left(x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^u a(s)ds\right) b(u)du\right). \quad (4.1.5)$$

4.1.2. Généralisation du lemme de Grönwall

On présente tout d'abord le lemme suivant pour la dérivée de Stieltjes.

Lemme 4.1.3. *Soient $y : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction g -absolument continue, $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$ avec $L(t) \geq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et $k \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$. Si*

$$y'_g(t) \leq k(t) + L(t)y(t), \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T[, \quad (4.1.6)$$

alors,

$$y(t) \leq e_c^{-1}(t, t_0) \left(\int_{[t_0, t[} \frac{e_c(s, t_0)k(s)}{1 + L(s)(g(s^+) - g(s))} d\mu_g(s) + y(t_0) \right), \quad (4.1.7)$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, où

$$c(t) = \frac{-L(t)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} = (\ominus L)(t).$$

Démonstration. Vérifions d'abord que la fonction c satisfait bien les conditions (2.1.3), ce qui assure l'existence de la fonction e_c .

Puisque $L(t) \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} 1 + c(t)(g(t^+) - g(t)) &= 1 - \frac{L(t)(g(t^+) - g(t))}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} \\ &= \frac{1}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} > 0. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $L \in \mathcal{L}_g([t_0, t_0 + T[)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log(1 + c(t)(g(t^+) - g(t)))| &= \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} \left| \log \left(\frac{1}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} \right) \right| \\ &= \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} \log(1 + L(t)(g(t^+) - g(t))). \end{aligned}$$

Puisque $\log(x) \leq x - 1$, $\forall x \geq 1$, on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} \log(1 + L(t)(g(t^+) - g(t))) &\leq \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} L(t)(g(t^+) - g(t)) \\ &= \int_{[t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} L(t) d\mu_g \\ &\leq \int_{[t_0, t_0 + T[} L(t) d\mu_g < \infty. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} y'_g(t) - L(t)y(t) \leq k(t) &\Rightarrow y'_g(t) - L(t)y(t^+) + L(t)(y(t^+) - y(t)) \leq k(t) \\ &\Rightarrow (1 + L(t)(g(t^+) - g(t)))y'_g(t) - L(t)y(t^+) \leq k(t) \\ &\Rightarrow y'_g(t) + c(t)y(t^+) \leq \frac{k(t)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))}. \end{aligned}$$

On multiplie par le facteur intégrant pour obtenir

$$e_c(t, t_0)(y'_g(t) + c(t)y(t^+)) \leq \frac{k(t)e_c(t, t_0)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

En utilisant la règle de dérivation du produit de la proposition 1.3.2, l'inégalité précédente est équivalente à

$$(e_c(t, t_0)y(t))'_g \leq \frac{k(t)e_c(t, t_0)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

En intégrant chaque membre de l'inégalité sur l'intervalle $[t_0, t[$ et en utilisant le théorème 1.3.7, on obtient

$$e_c(t, t_0)y(t) - y(t_0) \leq \int_{[t_0, t[} \frac{k(s)e_c(s, t_0)}{1 + L(s)(g(s^+) - g(s))} d\mu_g(s).$$

Ceci donne donc que

$$y(t) \leq e_c^{-1}(t, t_0) \left(\int_{[t_0, t[} \frac{e_c(s, t_0)k(s)}{1 + L(s)(g(s^+) - g(s))} d\mu_g(s) + y(t_0) \right).$$

□

Ce résultat intermédiaire nous permet donc de formuler une première forme de l'inégalité de Grönwall pour la g -intégrale :

Proposition 4.1.4. *Soient $x : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction g -absolument continue, $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$ avec $L(t) \geq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et $h \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$. Si*

$$x(t) \leq h(t) + \int_{[t_0, t[} L(s)x(s)d\mu_g(s), \text{ pour tout } t \in [t_0, t_0 + T], \quad (4.1.8)$$

alors,

$$x(t) \leq h(t) + e_c^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} -c(s)e_c(s, t_0)h(x)d\mu_g(s), \quad (4.1.9)$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, où

$$c(t) = \frac{-L(t)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} = (\ominus L)(t).$$

Démonstration. Soit $y(t) = \int_{[t_0, t[} L(s)x(s)d\mu_g(s)$. On a, par le théorème 1.3.7,

$$y'_g(t) = L(t)x(t),$$

pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$. L'hypothèse (4.1.8) implique que

$$y'_g(t) \leq L(t)(h(t) + y(t)) = L(t)y(t) + L(t)h(t),$$

pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$.

En utilisant le lemme 4.1.3 on obtient alors

$$x(t) \leq h(t) + y(t) \leq h(t) + e_c^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} \frac{e_c(s, t_0)L(s)h(s)}{1 + L(s)(g(s^+) - g(s))} d\mu_g(s).$$

□

En imposant des conditions supplémentaires, on peut simplifier le lemme tel qu'énoncé. En effet, dans la plupart de nos applications, nous aurons que la fonction $h(t)$ sera constante. On peut donc raffiner l'inégalité de la façon suivante :

Lemme 4.1.5. Soient $x, L \in \mathcal{L}_g([t_0, t_0 + T[)$, avec $L(t) \geq 0$, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$, et $H \in \mathbb{R}$. Si

$$x(t) \leq H + \int_{[t_0, t[} L(s)x(s)d\mu_g(s), \quad (4.1.10)$$

alors,

$$x(t) \leq He_c^{-1}(t, t_0), \quad (4.1.11)$$

où

$$c(t) = \frac{-L(t)}{1 + L(t)(g(t^+) - g(t))} = (\ominus L)(t).$$

Démonstration. En utilisant le lemme 4.1.4, on obtient

$$x(t) \leq H + e_c^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} \frac{e_c(s, t_0)L(s)H}{1 + L(s)(g(s^+) - g(s))} d\mu_g(s). \quad (4.1.12)$$

On peut réécrire cette inégalité de la façon suivante :

$$x(t) \leq H \left(1 - e_c^{-1}(t, t_0) \int_{[t_0, t[} c(s)e_c(s, t_0)d\mu_g(s) \right). \quad (4.1.13)$$

Or, comme $e_c(s, t_0)$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} x'_g(t) &= c(t)x(t), \\ x(t_0) &= 1, \end{cases} \quad (4.1.14)$$

on peut calculer l'intégrale du membre de droite en utilisant le théorème 1.3.7 pour obtenir

$$x(t) \leq H (1 - e_c^{-1}(t, t_0) (e_c(t, t_0) - 1)) = He_c^{-1}(t, t_0). \quad (4.1.15)$$

□

4.2. Solution saturée

Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \cap ([a, \infty[\times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} x'_g(t) = f(t, x) & g\text{-presque partout} \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

sous certaines conditions sur Ω et f .

Pour énoncer ces conditions, on introduit d'abord la topologie $\hat{\tau}_g$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ qui est la topologie engendrée par les ouverts $U \times V$ où $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert dans la g -topologie introduite dans la section 1.1, et $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert dans \mathbb{R}^n au sens usuel.

On suppose que Ω satisfait aux conditions suivantes :

(C1) Ω est ouvert dans $\hat{\tau}_g$ et donc, pour tout $(t, x) \in \Omega$, une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(C1)(1) Il existe $\delta > 0$ tel que $]t - \delta, t + \delta[\times B(x, \delta) \subset \Omega$.

(C1)(2) Si pour tout $\delta > 0$, $]t - \delta, t + \delta[\times B(x, \delta) \not\subset \Omega$, alors $t \in \mathcal{D}_g$ et il existe $\delta > 0$ tel que $]t - \delta, t] \times B(x, \delta) \subset \Omega$.

(C2) Pour tout $(t, x) \in \Omega \cap (\mathcal{D}_g \times \mathbb{R}^n)$ tel que $(t, x_t^+) \in \Omega$, alors $(t, x_{f,t}^+)$ vérifie (C1)(1), où

$$x_{f,t}^+ = x + f(t, x)(g(t^+) - g(t)).$$

On suppose que f satisfait aux 3 conditions suivantes :

(H1) Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot, x) : A_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ est g -mesurable, où $A_x = \{t \geq a \mid (t, x) \in \Omega\}$.

(H2) La fonction f satisfait une condition de Lipschitz locale dans le sens suivant : pour tout $r > 0$, il existe $L_r : [a, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ g -mesurable telle que pour tout $b > a$, $L_r \in \mathcal{L}_g^1([a, b])$ et

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_r(t)\|x - y\|,$$

pour g -presque tout t et pour tout $x, y \in \overline{B(0, r)}$ tels que $(t, x), (t, y) \in \Omega$.

(H3) Il existe, pour tout $r > 0$, une fonction $h_r : [a, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ g -mesurable telle que pour tout $b > a$, $h_r \in \mathcal{L}_g([a, b])$ et $\|f(t, x)\| \leq h_r(t)$ pour g -presque tout t et pour tout x tel que $(t, x) \in \Omega$ et $\|x\| \leq r$.

Tel que mentionné dans la remarque 2.3.3, on peut considérer, sans perte de généralité, que g est continue en a .

4.2.1. Prolongement à droite de solutions

Le résultat d'existence, théorème 2.3.8, présenté dans la section 2.3 garantit seulement l'existence locale d'une solution à (4.2.1). Il existe donc un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert dans τ_g contenant a , avec $\sup I > a$, tel que (4.2.1) a une solution unique sur $I \cap [a, \infty[$. Comme les solutions seront définies sur un intervalle de ce type, on note

$$\mathcal{I}_a = \{I \mid I = J \cap [a, \infty[\text{ où } J \text{ est un intervalle ouvert dans } \tau_g \text{ contenant } a \text{ et } \sup J > a\}.$$

Il est important de noter que cette section ne traite que du prolongement à droite de solutions. Dans le cas classique, les résultats à propos d'un prolongement à droite d'une solution

permettent de construire un prolongement à gauche d'une solution à l'aide de la transformation $t \rightarrow -t$. Toutefois, ceci n'est pas possible dans le cas des g -équations différentielles. En effet, on montre un tel exemple dans l'annexe A.3.

Définition 4.2.1. Soient $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1). On dit que x est prolongeable à droite s'il existe $\hat{I} \in \mathcal{I}_a$ et $\hat{x} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1) sur \hat{I} tels que $I \subset \hat{I}$, $\sup \hat{I} > \sup I$ et $x(t) = \hat{x}(t)$ pour tout $t \in I$.

Définition 4.2.2. Soient $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1). On dit que x est saturée à droite si elle n'est pas prolongeable à droite. Dans ce cas, I est appelé un intervalle maximal d'existence.

On montre d'abord que tous les prolongements à droite coïncident sur l'intervalle commun de définition.

Théorème 4.2.3. Soient $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1) et soient $\hat{x} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux prolongements à droite de x . Alors, $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$ pour tout $t \in \hat{I} \cap \tilde{I}$.

On présentera deux preuves de ce résultat.

Première démonstration. Supposons que c'est faux. Soit $t_0 = \inf\{t \in \hat{I} \cap \tilde{I} \mid \hat{x}(t) \neq \tilde{x}(t)\} > a$. Puisque \hat{x} et \tilde{x} sont continues à gauche, $\hat{x}(t_0) = \tilde{x}(t_0)$. Aussi, $\hat{x}(t_0^+) = \tilde{x}(t_0^+)$. De plus, par définition de t_0 , $\exists \delta_0 > 0$ tel que $[t_0, t_0 + \delta_0] \subset \hat{I} \cap \tilde{I}$. Donc $(t_0, \hat{x}(t_0^+)) \in \Omega$.

On pose $\hat{g} : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} g(t_0^+) & \text{si } t = t_0 \\ g(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} y'_g(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } \hat{g}\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + \delta_0[, \\ y(t_0) = \hat{x}(t_0^+). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Le théorème 2.3.8 implique qu'il existe $\delta \in]0, \delta_0]$ et $y : [t_0, t_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution unique de (4.2.2). Soient

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} \hat{x}(t_0^+) & \text{si } t = t_0, \\ \hat{x}(t) & \text{si } t \in]t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

et

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t_0^+) & \text{si } t = t_0, \\ \tilde{x}(t) & \text{si } t \in]t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

Puisque \hat{x} et \tilde{x} sont des solutions de (4.2.1), et en tenant compte de la définition de \hat{g} , on voit aisément que \hat{y} et \tilde{y} sont des solutions de (4.2.2). Par unicité de cette solution, on a $y(t) = \hat{y}(t) = \tilde{y}(t)$, ce qui contredit la définition de t_0 . \square

Deuxième démonstration. Soit $b = \sup \hat{I} \cap \tilde{I}$ et $a < T < b$.

Comme \hat{x} et \tilde{x} sont des solutions de (4.2.1) sur $\hat{I} \cap \tilde{I}$, on a

$$\hat{x}(t) = x_0 + \int_{[a,t[} f(s, \hat{x}(s)) d\mu_g(s), \quad (4.2.3)$$

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_{[a,t[} f(s, \tilde{x}(s)) d\mu_g(s), \quad (4.2.4)$$

pour tous $t \in [a, T[$.

On a donc, pour tout $t \in [a, T[$,

$$\|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \int_{[a,t[} \|f(s, \hat{x}(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\| d\mu_g(s) \quad (4.2.5)$$

$$\leq \int_{[a,t[} L_r(s) \|\hat{x}(s) - \tilde{x}(s)\| d\mu_g(s), \quad (4.2.6)$$

puisque $\hat{x}, \tilde{x} \in \mathcal{BC}([a, T])$, et L_r est donnée par (H2) avec $r > \sup_{t \in [a, T]} \max\{\|\hat{x}(t)\|, \|\tilde{x}(t)\|\}$.

L'inégalité (4.2.6) permet d'affirmer que, peu importe $\varepsilon > 0$, on a

$$\|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon + \int_{[a,t[} L_r(s) \|\hat{x}(s) - \tilde{x}(s)\| d\mu_g(s). \quad (4.2.7)$$

L'inégalité précédente est de la forme du lemme 4.1.5, et on a donc

$$\|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon e_c(T, a), \quad (4.2.8)$$

où

$$c(t) = \frac{-L_r(t)}{1 + L_r(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

Comme l'inégalité est vraie peu importe $\varepsilon > 0$, on a

$$\|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\| = 0,$$

ce qui donne

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t),$$

pour tout $t \in [a, T[$. Puisque ceci est vrai pour tout $T < b$, on a

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t),$$

pour tout $t \in [a, b[= \hat{I} \cap \tilde{I}$. □

Le but étant de trouver une solution saturée, on présente maintenant des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence du prolongement à droite d'une solution.

Théorème 4.2.4. *Soient $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1). Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (1) x est prolongeable à droite.
- (2) (a) $\Gamma = \{(t, x(t)) \mid t \in I\}$ est borné;
- (b) $A \cup A^+ \subset \Omega$, où

$$A = \{(t_0, \xi) \mid \exists \{t_n\} \text{ dans } I \text{ telle que } t_n \nearrow t_0 \text{ et } \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n)\}$$

$$A^+ = \{(t_0, \xi_{f,t_0}^+) \mid (t_0, \xi) \in A\},$$

$$\text{avec } t_0 = \sup I \text{ et } \xi_{f,t_0}^+ = \xi + f(t_0, \xi)(g(t_0^+) - g(t_0)).$$

Démonstration. (1) \Rightarrow (2)

Soit $\hat{I} \in \mathcal{I}_a$ et $\hat{x} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un prolongement à droite de x . Soit $t_1 \in]t_0, \sup \hat{I}[$. Alors

$$\Gamma \subset \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in [a, t_1]\}$$

est borné, car $\hat{x}|_{[a, t_1]} \in \mathcal{BC}_g([a, t_1])$.

De plus, comme $\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) = \hat{x}(t_0)$, on a

$$A \cup A^+ = \{(t_0, \hat{x}(t_0)), (t_0, \hat{x}(t_0^+))\} \subset \Omega,$$

car le graphe de \hat{x} est dans Ω .

(2) \Rightarrow (1)

On montre d'abord que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t)$ existe. Puisque que Γ est borné, il existe $r > 0$ tel que

$$\bar{\Gamma} \subset \left([a, t_0] \times \overline{B(0, r)} \right) \cap \Omega.$$

Par (H3), il existe $h_r \in \mathcal{L}_g([a, t_0[)$ telle que

$$\|f(t, x(t))\| \leq h_r(t) \text{ pour } g - \text{presque tout } t \in [a, t_0[.$$

Donc, pour tout $a < \tau < t < t_0$, on a

$$\|x(t) - x(\tau)\| \leq \int_{[\tau, t]} \|f(s, x(s))\| d\mu_g(s) \leq \int_{[\tau, t_0]} h_r(s) d\mu_g(s).$$

Sachant que $h_r \in \mathcal{L}_g^1([\tau, t_0])$, cette inégalité permet de conclure que pour toute suite t_n dans I telle que $t_n \nearrow t_0$, la suite $\{x(t_n)\}$ est une suite de Cauchy et que ces suites convergent toutes vers la même limite.

Par conséquent, A est un singleton que l'on note $\{(t_0, x(t_0))\}$. Par hypothèse, $A^+ = \{(t_0, x_{f, t_0}^+)\} \subset \Omega$. On considère $\hat{g} : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} g(t_0^+) & \text{si } t = t_0 \\ g(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

et le problème différentiel en résultant :

$$\begin{cases} y'_g(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } \hat{g} - \text{presque tout } t \in [t_0, t_0 + \delta_0], \\ y(t_0) = x_{f, t_0}^+. \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Par les hypothèses (C1) et (C2) sur Ω , le point (t_0, x_{f, t_0}^+) vérifie (C1)(1). Le théorème 2.3.8 implique qu'il existe $\delta > 0$ et $y : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.9) dont le graphe est dans Ω .

On pose $\hat{I} = [a, t_0 + \delta[\in \mathcal{I}_a$ et $\hat{x} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in I, \\ x(t_0) & \text{si } t = t_0, \\ y(t) & \text{si } t \in]t_0, t_0 + \delta[. \end{cases}$$

On vérifie que \hat{x} est un prolongement à droite de x . En fait, il suffit de vérifier ce fait en $t = t_0$, car par définition de y , \hat{x} est une solution de (4.2.1) sur $]t_0, t_0 + \delta[$.

Si $t_0 \in \mathcal{D}_g$, par définition de $y(t_0) = x_{f, t_0}^+$, on a que

$$\hat{x}'_g(t_0) = \frac{x(t_0^+) - x(t_0)}{g(t_0^+) - g(t_0)} = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, \hat{x}(t_0)).$$

Si $t_0 \notin \mathcal{D}_g$, il n'est pas nécessaire que $x'_g(t) = f(t, x(t))$, puisque (4.2.1) doit seulement être vérifiée g -presque partout et $\mu_g(I \cup [t_0, t_0 + \delta]) = \mu_g(I \cup]t_0, t_0 + \delta[)$, car $\mu_g(\{t_0\}) = 0$, puisque g est continue en t_0 .

Ainsi \hat{x} est bien un prolongement à droite de x . □

4.2.2. Existence et unicité de l'intervalle maximal d'existence

Les deux théorèmes précédents permettent d'énoncer le théorème suivant sur l'existence et l'unicité d'une solution saturée à droite :

Théorème 4.2.5. *Soient $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (4.2.1). Alors, il existe $I_m \in \mathcal{I}_a$ et $\bar{x} : I_m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uniques tels que \bar{x} est une solution saturée à droite de (4.2.1) qui prolonge x .*

Démonstration. L'unicité de cette solution saturée à droite découle directement du théorème 4.2.3. Considérons

$$\mathcal{X} = \{y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n \mid I_y \in \mathcal{I}_a \text{ et } y \text{ est un prolongement à droite de } x\}.$$

On définit un ordre partiel sur \mathcal{X} , \preceq de la façon suivante. Pour $y, z \in \mathcal{X}$,

$$y \preceq z,$$

si z est un prolongement à droite de y . On note que l'ensemble \mathcal{X} est non vide, car $x \in \mathcal{X}$.

L'objectif étant d'appliquer le lemme de Zorn, on montre que chaque chaîne de \mathcal{X} possède un plus grand élément. En fait, il suffit de prendre l'union de tous les prolongements, qui est définie sur l'union des intervalles de définition comme élément maximal de la chaîne. Le lemme de Zorn garantit alors l'existence d'un élément maximal de \mathcal{X} . De par la définition de \preceq , un élément maximal de \mathcal{X} est en fait une solution saturée de (4.2.1) qui prolonge x . \square

Dans le cas classique, le comportement d'une solution saturée à droite est bien connu : l'intervalle maximal d'existence de la solution est infini, ou, s'il est fini, la limite de la solution est non bornée, ou $(t, x(t))$ approche la frontière du domaine de f . On présente maintenant le comportement d'une solution saturée à droite de (4.2.1) lorsque $t \rightarrow \sup I$, où I est l'intervalle maximal d'existence.

Théorème 4.2.6. *Soit $I \in \mathcal{I}_a$ et $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution saturée à droite de (4.2.1) et soit $\bar{t} = \sup I$. Alors, un des énoncés suivants est vrai :*

(1) $\bar{t} = \infty$.

(2) Si $\{t_n\}$ est une suite dans I telle que $t_n \nearrow \bar{t} < \infty$, alors $\{x(t_n)\}$ n'est pas bornée.

(3) Il existe $\{t_n\}$ dans I telle que $t_n \nearrow \bar{t}$ et $\{x(t_n)\}$ est bornée pour laquelle, pour toute sous-suite $\{t_{n_k}\}$ telle que $x(t_{n_k}) \rightarrow \xi$, on a $\{(\bar{t}, \xi), (\bar{t}, \xi + f(\bar{t}, \xi)(g(\bar{t}^+) - g(\bar{t}))\} \not\subset \Omega$.

Démonstration. On suppose que $\bar{t} < \infty$, que $\{t_n\}$ est une suite dans I pour laquelle la suite $\{x(t_n)\}$ est bornée et qu'il existe une sous-suite, encore notée $\{t_n\}$ telle que $x(t_n) \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^n$ avec $\{(\bar{t}, \xi), (\bar{t}, \xi + f(\bar{t}, \xi)(g(\bar{t}^+) - g(\bar{t})))\} \subset \Omega$.

Par les hypothèses (C1)(1) et (C2) sur Ω , il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t}] \times B(\xi, \varepsilon) \subset \Omega, \quad (4.2.10)$$

et

$$]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[\times B(\xi + f(\bar{t}, \xi)(g(\bar{t}^+) - g(\bar{t})), \varepsilon) \subset \Omega. \quad (4.2.11)$$

Soit $r > \|\xi\| + 2\varepsilon$ et soit $h_r \in \mathcal{L}_g([a, \bar{t}[)$ telle que

$$\|f(t, y)\| \leq h_r(t) \quad (4.2.12)$$

pour g -presque tout $t \in [a, \bar{t}[$ et pour $\|y\| \leq r$.

Remarquons d'abord que

$$x(t_n^+) \rightarrow \xi. \quad (4.2.13)$$

En effet, pour toute sous-suite $\{t_{n_k}\}$ telle que $t_{n_k} \notin \mathcal{D}_g$, on a

$$x(t_{n_k}^+) = x(t_{n_k}) \rightarrow \xi, \quad (4.2.14)$$

car x est continue au point t_{n_k} . D'autre part, pour toute sous-suite $\{t_{n_k}\}$ dans \mathcal{D}_g , le théorème 1.3.7 implique que

$$\begin{aligned} \|x(t_{n_k}^+) - x(t_{n_k})\| &= \left\| \int_{\{t_{n_k}\}} f(s, x(s)) d\mu_g(s) \right\| \\ &\leq \int_{\{t_{n_k}\}} h_r(s) d\mu_g(s) \\ &\leq \int_{[t_{n_k}, \bar{t}[} h_r(s) d\mu_g(s) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi,

$$x(t_n^+) \rightarrow \xi.$$

Considérons l'ensemble

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists t \in [t_n, t_{n+1}[\text{ tel que } x(t) \notin B(\xi, \varepsilon)\}. \quad (4.2.16)$$

Cet ensemble M est infini. En effet, sinon pour n assez grand, l'ensemble

$$\Gamma = \{(t, x(t)) \mid t \in [t_n, \bar{t}]\},$$

est borné, et, en procédant comme dans la preuve de théorème 4.2.4, on en déduit que x est prolongeable à droite, ce qui est une contradiction, car x est une solution saturée à droite.

Pour $n \in M$, on considère $\tau_n = \inf\{t \in [t_n, t_{n+1}[\mid \|x(t) - \xi\| > \varepsilon\}$. Par (4.2.13), on déduit que $\tau_n > t_n$ pour n assez grand. Ainsi, pour $n \in M$ assez grand, on a

$$\varepsilon \leq \|x(\tau_n^+) - \xi\| < 2\varepsilon. \quad (4.2.17)$$

En effet, si $\tau_n \notin \mathcal{D}_g$, x est continue au point τ_n . Donc,

$$\varepsilon \leq \|x(\tau_n^+) - \xi\| = \|x(\tau_n) - \xi\| = \|x(\tau_n^-) - \xi\| \leq \varepsilon.$$

Si $\tau_n \in \mathcal{D}_g$, $\|x(\tau_n) - \xi\| \leq \varepsilon$, car x est continue à gauche et $\|x(\tau_n^+) - \xi\| \geq \varepsilon$ par définition de l'infimum. Alors, par le même argument qu'en (4.2.15), on a

$$\|x(\tau_n^+) - x(\tau_n)\| \leq \int_{[\tau_n, \bar{t}[} h_r(s) d\mu_g(s) \rightarrow 0. \quad (4.2.18)$$

Donc, pour n assez grand,

$$\|x(\tau_n^+) - x(\tau_n)\| < \varepsilon, \quad (4.2.19)$$

et donc

$$\varepsilon \leq \|x(\tau_n^+) - \xi\| \leq \|x(\tau_n^+) - x(\tau_n)\| + \|x(\tau_n) - \xi\| < 2\varepsilon. \quad (4.2.20)$$

Finalement, pour $n \in M$ tel que (4.2.17) est vrai,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|x(\tau_n^+) - \xi\| \\ &\leq \|x(\tau_n^+) - x(t_n)\| + \|x(t_n) - \xi\| \\ &\leq \|x(t_n) - \xi\| + \left\| \int_{[t_n, \tau_n]} f(s, x(s)) d\mu_g(s) \right\| \\ &\leq \|x(t_n) - \xi\| + \int_{[t_n, \bar{t}[} h_r(s) d\mu_g(s) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. On arrive donc à une contradiction. \square

4.3. Dépendance aux conditions initiales

On veut d'abord montrer un équivalent de continuité par rapport aux conditions initiales pour les solutions de (4.2.1). Commençons par noter $x(t; a, x_0)$, la solution saturée à droite de

$$\begin{cases} x'_g(t) = f(t, x(t)) \text{ } g\text{-presque partout;} \\ x(a) = x_0. \end{cases} \quad (4.3.1_{a,x_0})$$

Théorème 4.3.1. *Soit $x(\cdot; a, x_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solution saturée de (4.3.1_{a,x₀}) où $I \in \mathcal{I}_a$ est l'intervalle maximal d'existence. Notons $\sup I = T$. Pour tout $\tilde{t} \in]a, T[$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\tau \geq a$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$|\tau - a| < \delta \text{ et } \|\xi - x_0\| < \delta \quad (4.3.2)$$

la solution $x(\cdot; \tau, \xi_{f,\tau})$ de l'équation

$$\begin{cases} x'_g(t) = f(t, x(t)) \text{ } g\text{-presque partout,} \\ x(\tau) = \xi_{f,\tau}^+, \end{cases} \quad (4.3.1_{\tau,\xi_{f,\tau}})$$

est définie sur $[\tau, \tilde{t}]$ et

$$\|x(t; \tau, \xi_{f,\tau}) - x(t; a, x_0)\| < \varepsilon,$$

pour tout $t \in [\tau, \tilde{t}[$, où

$$\xi_{f,\tau}^+ = \xi + f(\tau, \xi)(g(\tau^+) - g(\tau)).$$

Démonstration. Tout d'abord, on montre qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\bigcup_{t \in [a, \tilde{t}]} \{t\} \times B(x(t; a, x_0), r_0) \subset \Omega. \quad (4.3.4)$$

Si ce n'est pas le cas, on pourrait trouver $\{t_n\}$ dans $[a, \tilde{t}]$ et $x_n \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\|x_n - x(t_n; a, x_0)\| < \frac{1}{n} \text{ et } (t_n, x_n) \notin \Omega.$$

Puisque

$$(t_n, x_n) \in \overline{\bigcup_{t \in [a, \tilde{t}]} \{t\} \times \overline{B(x(t; a, x_0), 1)}},$$

est compact, on peut trouver une sous-suite $\{(t_{n_k}, x_{n_k})\}$ qui converge. Notons

$$t_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'un des deux cas suivants est vrai :

$$(1) \ t_{n_k} \leq t_0, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$(2) \ t_{n_k} > t_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si (1) est vrai, alors

$$\|x_{n_k} - x(t_0; a, x_0)\| \leq \|x_{n_k} - x(t_{n_k}; a, t_0)\| + \|x(t_{n_k}; a, x_0) - x(t_0; a, x_0)\| \rightarrow 0 \quad (4.3.5)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, par la définition de x_{n_k} et le fait que $x(\cdot; a, x_0)$ est continue à gauche. Selon l'hypothèse (C1), il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$]t_0 - \delta_1, t_0] \times B(x(t_0; a, x_0), \delta_1) \subset \Omega.$$

Par (4.3.5), pour n_k assez grand

$$(t_{n_k}, x_{n_k}) \in]t_0 - \delta_1, t_0] \times B(x(t_0; a, x_0), \delta_1) \subset \Omega,$$

ce qui est une contradiction.

Si (2) est vrai, alors

$$\|x_{n_k} - x(t_0^+; a, x_0)\| \leq \|x_{n_k} - x(t_{n_k}; a, t_0)\| + \|x(t_{n_k}; a, x_0) - x(t_0^+; a, x_0)\| \rightarrow 0, \quad (4.3.6)$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, par définition de x_{n_k} et $x(t_0^+; a, x_0)$.

Par (C1)(1) et (C2) on peut trouver $\delta_1 > 0$ tel que

$$[t_0, t_0 + \delta_1[\times B(x(t_0^+; a, x_0), \delta_1) \subset \Omega.$$

On obtient alors une contradiction de la même façon qu'en (1).

Puisque, pour tout $\tilde{t} < T$, on a $x(\cdot; a, x_0) \in \mathcal{BC}_g([a, \tilde{t}])$, on peut poser

$$k = r_0 + \sup_{t \in [a, \tilde{t}]} \|x(t; a, x_0)\|, \quad (4.3.7)$$

de sorte que

$$B(x(t; a, x_0), r_0) \subset \overline{B(0, k)}, \quad (4.3.8)$$

pour tout $t \in [a, \tilde{t}]$.

Soit $h_k \in \mathcal{L}_g^1([a, \tilde{t}])$ donnée par (H3). On pose ensuite

$$r_1 = k + \int_{[a, \tilde{t}]} h_k(t) d\mu_g. \quad (4.3.9)$$

Soient L_{r_1} et h_{r_1} données respectivement par (H2) et (H3).

On fixe $\hat{\varepsilon} \in]0, \min\{r_0/2, \varepsilon\}[$. Soit $\gamma_0 > 0$ tel que

$$\gamma_0 \hat{e}_c^{-1}(\tilde{t}, a) < \hat{\varepsilon}, \quad (4.3.10)$$

où

$$c(t) = \frac{-L_{r_1}(t)}{1 + L_{r_1}(t)(g(t^+) - g(t))}.$$

Puisque g est continue en a , on peut trouver $\gamma_1 > 0$ tel que

$$\int_{[a, a+\gamma_1[} h_{r_1}(t) d\mu_g < \hat{k} = \min\left\{\frac{r_0}{2}, \frac{\gamma_0}{2}\right\}. \quad (4.3.11)$$

Par (C1)(1), il existe $\gamma_2 \in]0, \hat{k}[$, tel que

$$[a, a + 2\gamma_2] \times \overline{B(x_0, 2\gamma_2)} \subset \Omega. \quad (4.3.12)$$

On montre maintenant que l'on peut trouver $\delta \in]0, \gamma_2[$ tel que, pour tout $(\tau, y) \in [a, a + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$, on ait $\|y_{f, \tau}^+ - x_0\| < \hat{k}$.

De (4.3.12), on a alors

$$[\tau, \tau + \delta] \times \overline{B(y_{f, \tau}^+, \hat{k})} \subset [a, a + 2\gamma_2] \times \overline{B(x_0, 2\gamma_2)} \subset \Omega, \quad (4.3.13)$$

pour tout $(\tau, y) \in [a, a + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$.

Supposons que c'est faux ; on pourrait alors trouver une suite $\{(t_n, y_n)\}$ telle que $t_n \searrow a$, $y_n \rightarrow x_0$ et

$$\|y_{f, t_n}^+ - x_0\| \geq \hat{k}.$$

Soit $\gamma_3 \in]0, \gamma_2]$ tel que

$$\int_{[a, a+\gamma_3[} L_{r_1}(t) d\mu_g < \sqrt{\frac{\hat{k}}{2}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|y_{f,t_n}^+ - x_0\| &= \|y_n + f(t_n, y_n)(g(t_n^+) - g(t_n)) - x_0\| \\
&\leq \|y_n - x_0\| + \|(f(t_n, y_n) - f(t_n, x(t_n; a, x_0)))(g(t_n^+) - g(t_n))\| \\
&\quad + \|f(t_n, x(t_n; a, x_0))(g(t_n^+) - g(t_n))\| \\
&\leq \|y_n - x_0\| + L_{r_1}(t_n)(g(t_n^+) - g(t_n))\|y_n - x(t_n; a, x_0)\| \\
&\quad + \|x(t_n^+; a, x_0) - x(t_n; a, x_0)\| \\
&\leq \|y_n - x_0\| + \left(\int_{[a, a+\gamma_3[} L_{r_1}(t) d\mu_g \right) \|y_n - x(t_n; a, x_0)\| \\
&\quad + \|x(t_n^+; a, x_0) - x(t_n; a, x_0)\|.
\end{aligned}$$

Puisque $x(\cdot; a, x_0)$ est continue en a et que $y_n \rightarrow x_0$, on a, pour n assez grand,

$$\|y_n - x_0\| + \|x(t_n^+; a, x_0) - x(t_n; a, x_0)\| < \frac{\hat{k}}{2},$$

et

$$\|y_n - x(t_n; a, x_0)\| < \sqrt{\frac{\hat{k}}{2}}.$$

Ceci donne donc, pour n assez grand,

$$\|y_{f,t_n}^+ - x_0\| < \hat{k},$$

ce qui est une contradiction.

En combinant (4.3.8) et (4.3.13), on a que, pour tout $(\tau, \xi) \in [a, a + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$, on peut considérer la restriction de f à $[\tau, \tau + \delta] \times B(\xi_{f,\tau}^+, \hat{k})$ qui vérifie

$$\|f(t, x)\| \leq h_{r_1}(t),$$

pour g -presque tout $t \in [\tau, \tau + \delta]$ et pour tout $x \in B(\xi_{f,\tau}^+, \hat{k})$. On peut donc considérer le problème

$$\begin{cases} y'_g(t) &= f(t, x(t)) \text{ } g\text{-presque partout,} \\ y(\tau) &= \xi_{f,\tau}^+. \end{cases} \quad (4.3.14_{\tau, \xi_{f,\tau}})$$

Or, par (4.3.11),

$$\int_{[\tau, \tau + \delta]} h_{r_1}(t) d\mu_g \leq \int_{[a, a + \gamma_1]} h_{r_1}(t) d\mu_g < \hat{k}.$$

De la démonstration du théorème 2.3.8 et de l'inégalité précédente, on déduit que (4.3.14 _{$\tau, \xi_{f, \tau}$}) a une unique solution $x(\cdot; \tau, \xi_{f, \tau}^+)$ définie sur $[\tau, \tau + \delta]$ telle que

$$\begin{aligned} \|x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x_0\| &\leq \|x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - \xi_{f, \tau}^+\| \|\xi_{f, \tau}^+ - x_0\| \\ &\leq \hat{k} + \hat{k} \leq r_0. \end{aligned}$$

Par (4.3.7),

$$\|x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+)\| \leq r_0 + \|x_0\| \leq k, \quad (4.3.15)$$

pour tout $t \in [\tau, \tau + \delta]$.

Donc pour tout $t \in [t, t + \delta]$, on a

$$x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+) = \xi_{f, \tau}^+ + \int_{[\tau, t[} f(s, x(s; \tau, \xi_{f, \tau}^+)) d\mu_g(s) \quad (4.3.16)$$

et

$$x(t; a, x_0) = x_0 + \int_{[a, \tau[} f(s, x(s; a, x_0)) d\mu_g + \int_{[\tau, t[} f(s, x(s; a, x_0)) d\mu_g. \quad (4.3.17)$$

Ainsi, par (4.3.11), (4.3.15), (4.3.16) et (4.3.17),

$$\begin{aligned} \|x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x(t; a, x_0)\| &\leq \|\xi_{f, \tau}^+ - x_0\| + \int_{[a, \tau[} \|f(s, x(s; a, x_0))\| d\mu_g(s) \\ &\quad + \int_{[\tau, t[} \|f(s, x(s; \tau, \xi_{f, \tau}^+)) - f(s, x(s; a, x_0))\| d\mu_g(s) \\ &\leq \|\xi_{f, \tau}^+ - x_0\| + \int_{[a, a+\gamma_1[} h_{r_1}(s) d\mu_g \\ &\quad + \int_{[\tau, t[} L_{r_1}(s) \|x(s; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x(s; a, x_0)\| d\mu_g(s) \\ &\leq \hat{k} + \hat{k} + \int_{[\tau, t[} L_{r_1}(s) \|x(s; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x(s; a, x_0)\| d\mu_g(s) \\ &\leq \gamma_0 + \int_{[a, \tilde{d}[} L_{r_1}(s) \|x(s; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x(s; a, x_0)\| d\mu_g(s). \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

On peut alors appliquer le lemme 4.1.5 à l'inégalité (4.3.18) pour obtenir, à l'aide de (4.3.7) et (4.3.10),

$$\begin{aligned} \|x(t; \tau, \xi_{f, \tau}^+) - x(t; a, x_0)\| &\leq \gamma_0 \hat{e}_c^{-1}(\tilde{t}, a) \\ &< \hat{e} < k. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Par (4.3.4), l'inégalité (4.3.19) et le théorème 4.2.4, $x(t, \tau, \xi_{f, \tau})$ peut être prolongée sur un intervalle maximal d'existence contenant $[\tau, \hat{T}]$.

Si $\hat{T} < \tilde{t}$, ou si (4.3.19) n'est pas vérifiée sur $[\tau, \tilde{t}]$, alors il existe t_1 avec $\tau < t_1 < \hat{T}$ tel qu'un des deux énoncés suivants est vrai :

- (1) $\|x(t; \tau, \xi_{f,\tau}^+) - x(t, a, x_0)\| < \hat{\varepsilon}$ sur $[\tau, t_1[$ et $\|x(t_1; \tau, \xi_{f,\tau}^+) - x(t_1; a, x_0)\| = \hat{\varepsilon}$.
- (2) $\|x(t_1; \tau, \xi_{f,\tau}^+) - x(t_1; a, x_0)\| < \hat{\varepsilon}$, $t_1 \in \mathcal{D}_g$ et $\|x(t_1^+; \tau, \xi_{f,\tau}^+) - x(t_1^+; a, x_0)\| \geq \hat{\varepsilon}$.

Alors, il existe $t_2 \in [t_1, \hat{T}[$ avec $t_2 = t_1$ dans le cas (1) et $t_2 > t_1$ dans le cas (2) et t_2 près de t_1 tel que, sur $[\tau, t_2]$, $\|x(t; \tau, \xi_{f,\tau}^+)\| \leq r_1$. En effet, cela découle de (4.3.9) et du fait que

$$\begin{aligned}
\|x(t_1^+; \tau, \xi_{f,\tau}^+)\| &= \|x(t_1; \tau, \xi_{f,t}^+) + x'_g(t_1)(g(t_1^+) - g(t_1))\| \\
&\leq \|x(t_1; \tau, \xi_{f,t}^+)\| + \int_{\{t_1\}} h_k(s) d\mu_g(s) \\
&< \hat{\varepsilon} + \int_{[a, \tilde{t}]} h_k(t) d\mu_g \\
&\leq r_1.
\end{aligned}$$

Donc (4.3.18) est vérifiée sur $[\tau, t_2[$ et, conséquemment, (4.3.19) est aussi vérifiée sur $[\tau, t_2[$, ce qui donne une contradiction.

En conclusion, on a donc trouvé $\delta > 0$ tel que pour tout $(\tau, \xi) \in [a, a + \delta[\times B(x_0, \delta)$ le problème (4.3.14 $_{\tau, \xi_{f,\tau}^+}$) ait une solution définie sur $[t, \tilde{t}]$ et vérifiant (4.3.19) pour tout $t \in [\tau, \tilde{t}]$. □

Chapitre 5

Équations de Stieltjes linéaires du deuxième ordre

On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation différentielle de Stieltjes du deuxième ordre suivante :

$$\begin{cases} x_g''(t) &= -p(t)x_g'(t) - q(t)x(t) + f(t), \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T]; \\ x(t_0) &= x_0; \\ x_g'(t_0) &= x'_0, \end{cases} \quad (5.0.1)$$

en supposant encore une fois, comme précisé dans la remarque 2.3.3, sans perdre de généralité que g est continue en t_0 . On adapte les méthodes présentées dans le chapitre 3 de [BP] afin de montrer de nouveaux résultats sur les équations différentielles de Stieltjes du deuxième ordre. On peut trouver des idées équivalentes dans le cas classique dans le chapitre 3 de [Si].

Dans ce chapitre, on définira, avec abus de notation, la fonction $\mu_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mu_g(t) = \mu_g(\{t\}) = g(t^+) - g(t).$$

5.1. Un résultat d'existence et d'unicité globale de solution

Le fait que l'équation (5.0.1) possède une unique solution globale est un corollaire du théorème suivant, qui montre plus généralement qu'une équation d'ordre n possède une unique solution globale sous certaines conditions.

Théorème 5.1.1. *Soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant*

- (1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f(\cdot, x)$ est g -mesurable.*
- (2) *La fonction $f(\cdot, x^0, \dots, x^{n-1})$ est g -intégrable sur $[t_0, t_0 + T[$.*

(3) Il existe $L \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[, [0, \infty[)$ telle que pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t) \|x - y\|.$$

Soient $x^0, x^1, \dots, x^{n-1} \in \mathbb{R}$. Sous ces hypothèses, l'équation

$$\begin{cases} x_g^{(n)}(t) = f\left(t, x_g'(t), x_g^{(2)}(t), \dots, x_g^{(n-1)}(t)\right), & \text{pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T[; \\ x_g^{(k)}(t_0) = x^k, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}; \end{cases} \quad (5.1.1)$$

possède une solution unique sur $[t_0, t_0 + T[$.

Démonstration. L'idée est de transformer cette équation en un système d'équations du premier ordre et d'appliquer le théorème 2.3.7.

Pour ce faire, on pose $x_1(t) = x(t)$, et, récursivement, $x_{k+1}(t) = (x_k)'_g(t)$, pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$. En posant $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\xi_0 = (x^0, \dots, x^{n-1})$, le système d'équations (5.0.1) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \xi'_g(t) = (x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t), f(t, \xi(t))), & \text{pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T[\\ \xi(t_0) = \xi_0. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Si l'on définit $\mathbf{f} : [t_0, t_0 + T[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\mathbf{f}(t, \xi) = (x_2, x_3, \dots, x_n, f(t, \xi)),$$

l'équation (5.1.2) devient alors

$$\begin{cases} \xi'_g(t) = \mathbf{f}(t, \xi), & \text{pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T[, \\ \xi(t_0) = \xi_0. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Il ne reste alors qu'à montrer que \mathbf{f} respecte les hypothèses du théorème 2.3.7.

(1) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. En écrivant $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, il suffit de montrer que f_i est g -mesurable pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Tout d'abord, pour $i < n$, il est évident que la fonction $t \rightarrow f_i(t, y)$ est mesurable puisque $f_i(t, y) = y_{i+1}$, ce qui est constant par rapport à t . Par hypothèse, $f(t, y)$ est g -mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) On a que $\mathbf{f}(t, \xi_0) = (x^1, \dots, x^{n-1}, f(t, \xi_0))$ est g -intégrable si et seulement si $f(t, \xi_0)$ est g -intégrable puisque toutes les autres composantes de \mathbf{f} le sont, étant des fonctions constantes sur un intervalle borné. Ainsi, $\mathbf{f}(\cdot, \xi_0) \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[, \mathbb{R}^n)$ par hypothèse.

(3) Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, y) - \mathbf{f}(t, z)\| &= \|(y_2, \dots, y_n, f(t, y)) - (z_2, \dots, z_n, f(t, z))\| \\ &\leq \|y - z\| + |f(t, y) - f(t, z)| \\ &\leq (1 + L(t))\|y - z\|, \end{aligned}$$

pour g -presque tout $t \in [t_0, t_0 + T[$.

Le théorème 2.3.7 garantit alors l'existence et l'unicité d'une solution globale à (5.1.3), ce qui est équivalent à l'existence d'une solution globale unique à (5.1.1). \square

Ce théorème permet alors de montrer aisément que l'équation (5.0.1) possède une solution globale unique.

Corollaire 5.1.2. *Soient p, q, f des fonctions de $\mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$ et $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}$. L'équation (5.0.1) possède une unique solution définie sur $[t_0, t_0 + T[$.*

Démonstration. Il suffit en fait de démontrer que $F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$|F(t, x_1, x_2)| = -p(t)x_2 - q(t)x_1 + f(t)$$

satisfait aux hypothèses du théorème précédent. Les deux premières hypothèses sont évidentes étant donné que p, q, f sont intégrables sur $[t_0, t_0 + T[$. Pour ce qui est de la troisième, on a, pour $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(t, x_1, x_2) - F(t, y_1, y_2)| \leq (p(t) + q(t))\|x - y\|.$$

\square

Pour conclure cette section, on introduit l'opérateur linéaire caractérisant l'équation (5.0.1).

Définition 5.1.3. *On définit $H_{n,g}([t_0, t_0 + T[)$ comme étant l'ensemble des fonctions n fois g -différentiables presque partout sur $[t_0, t_0 + T[$ et dont la n -ième g -dérivée est g -intégrable sur $[t_0, t_0 + T[$.*

Proposition 5.1.4. *Soit $L : H_{2,g}([t_0, t_0 + T[) \rightarrow \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$ l'opérateur défini par*

$$L(x)(t) = x_g''(t) + p(t)x_g'(t) + q(t)x(t).$$

Cet opérateur est linéaire.

Démonstration. La linéarité de L découle automatiquement de la linéarité de la g -dérivée montrée dans la proposition 1.3.2. □

5.2. Le g -Wronskien et la solution générale de l'équation linéaire homogène du deuxième ordre

Il nous importe maintenant de trouver la solution de la version homogène de (5.0.1), soit la solution du problème

$$\begin{cases} L(x)(t) &= 0, \text{ } g\text{-presque partout sur } [t_0, t_0 + T[; \\ x(t_0) &= x_0; \\ x'_g(t_0) &= x'_0. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Pour ce faire, on commence par introduire l'analogie du Wronskien dans le contexte des équations différentielles de Stieltjes.

Définition 5.2.1. Soient x_1, x_2 des fonctions g -différentiables. On définit le g -Wronskien de x_1 et x_2 comme étant la fonction

$$W = W(x_1, x_2)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix}.$$

On dira alors de x_1 et x_2 des solutions de $L(x) = 0$ qu'elles forment un système fondamental de solutions (ou simplement système fondamental) si $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[\setminus C_g$.

Dans le cas classique, la formule d'Abel permet de conclure que le Wronskien de deux solutions est non-nul pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$ si et seulement s'il est non-nul en un point quelconque $t \in [t_0, t_0 + t[$. Le lemme suivant nous permettra de montrer la formule d'Abel dans le contexte des équations différentielles de Stieltjes.

Lemme 5.2.2. Soient x_1, x_2 des fonctions deux fois g -différentiables.

(1) Le g -Wronskien vérifie

$$W(x_1, x_2)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix}.$$

(2) La dérivée du g -Wronskien vérifie

$$W(x_1, x_2)'_g(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} + (-p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t)))W(x_1, x_2)(t).$$

Démonstration. (1) Tout d'abord, on remarque qu'il suffit de montrer cette égalité pour $t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g$. Dans ce cas, on rappelle que

$$x'_g(t) = \frac{x(t^+) - x(t)}{g(t^+) - g(t)}.$$

et on a

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) - (x_1)'_g(t)(g(t^+) - g(t)) & x_2(t^+) - (x_2)'_g(t)(g(t^+) - g(t)) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) En utilisant la formule de dérivation du produit de la proposition 1.3.2, on obtient

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)'_g(t) &= (x_1(t)(x_2)'_g(t) - x_2(t)(x_1)'_g(t))'_g(t) \\ &= x_1(t^+)(x_2)''_g(t) + (x_1)'_g(t)(x_2)'_g(t) - x_2(t^+)(x_1)''_g(t) - (x_2)'_g(t)(x_1)'_g(t) \\ &= x_1(t^+)(x_2)''_g(t) - x_2(t^+)(x_1)''_g(t) \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ (x_1)''_g(t) & (x_2)''_g(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) - p(t)(x_1)'_g(t) - q(t)x_1(t) & L(x_2)(t) - p(t)(x_2)'_g(t) - q(t)x_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) - q(t)x_1(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) - q(t)x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $t \notin \mathcal{D}_g$, on a alors

$$\begin{aligned}
W(x_1, x_2)'_g(t) &= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) - q(t)x_1(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) - q(t)x_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} - p(t) \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} - (p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t)))W(x_1, x_2)(t),
\end{aligned}$$

car $g(t^+) - g(t) = 0$.

Si $t \in \mathcal{D}_g$, en notant $\mu_g(t) = g(t^+) - g(t)$, on a alors

$$\begin{aligned}
W(x_1, x_2)'_g(t) &= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) - q(t)x_1(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) - q(t)x_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ -q(t)x_1(t^+) & -q(t)x_2(t^+) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) + q(t)\mu_g(t)(x_1)'_g(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) + q(t)\mu_g(t)(x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ -p(t)(x_1)'_g(t) + q(t)\mu_g(t)(x_1)'_g(t) & -p(t)(x_2)'_g(t) + q(t)\mu_g(t)(x_2)'_g(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} + (-p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t))) \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ (x_1)'_g(t) & (x_2)'_g(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1(t^+) & x_2(t^+) \\ L(x_1)(t) & L(x_2)(t) \end{pmatrix} + (-p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t)))W(x_1, x_2)(t),$$

en utilisant la partie (1) pour la dernière égalité. □

Afin de pouvoir généraliser le théorème d'Abel, il faut imposer une condition sur p et q . En effet, comme la démonstration du théorème d'Abel revient essentiellement à résoudre une équation homogène du premier ordre, on impose des conditions semblables à (2.1.6) sur p et q . On demande donc que

$$1 + (-p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t)))(g(t^+) - g(t)) \neq 0, \forall t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g$$

$$\sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 + (-p + \mu_g q)(t)(g(t^+) - g(t))|| < \infty. \quad (5.2.2)$$

Théorème 5.2.3. *Soient $p, q \in \mathcal{L}_g^1([t_0, t_0 + T[)$ telles que (5.2.2) soit satisfaite. Si x_1, x_2 sont des solutions de $L(x) = 0$, alors, pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[$,*

$$W(x_1, x_2)(t) = \hat{e}_c(t, t_0)W(x_1, x_2)(t_0), \quad (5.2.3)$$

où

$$c(t) = -p(t) + \mu_g(t)q(t).$$

Démonstration. Puisque x_1 et x_2 sont des solutions de $L(x) = 0$, la deuxième partie du lemme précédent garantit que $W(x_1, x_2)(t)$ est une solution de l'équation

$$W'_g(t) = (-p(t) + q(t)(g(t^+) - g(t)))W(t),$$

munie de la condition initiale $W(t_0) = W(x_1, x_2)(t_0)$.

Ainsi, comme la fonction $c(t) = (-p + \mu_g q)$ satisfait aux conditions (5.2.2), le lemme 2.1.6 donne donc que

$$W(x_1, x_2)(t) = \hat{e}_c(t, t_0)W(x_1, x_2)(t_0).$$

□

On peut maintenant formuler le théorème donnant la forme de la solution générale de (5.2.1).

Théorème 5.2.4. *Si la paire de fonctions x_1, x_2 forme un système fondamental de solutions de $L(x) = 0$, alors la fonction*

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est la solution générale de $L(x) = 0$, dans le sens où toute fonction de cette forme est une solution de $L(x) = 0$ et toute solution de $L(x) = 0$ est de cette forme. En particulier, la solution de (5.0.1) est donnée par

$$x(t) = \frac{(x_2)'_g(t_0)x_0 - x_2(t_0)x'_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_1(t) + \frac{x_1(t_0)x'_0 - (x_1)'_g(t_0)x_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_2(t). \quad (5.2.4)$$

Démonstration. Supposons que x_1 et x_2 forment un système fondamental de solutions de $L(x) = 0$, c'est-à-dire que

$$W(x_1, x_2)(t) \neq 0,$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T[\setminus C_g$. La proposition 5.1.4 garantit alors que toute fonction de la forme

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

est une solution de $L(x) = 0$. Maintenant, soit y une fonction telle que $L(y) = 0$. Soit

$$u(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t).$$

On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$u(t_0) = \alpha x_1(t_0) + \beta x_2(t_0) = y(t_0),$$

et

$$u'_g(t_0) = \alpha(x_1)'_g(t_0) + \beta(x_2)'_g(t_0) = y'_g(t_0).$$

On veut donc résoudre le système d'équations

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ (x_1)'_g(t_0) & (x_2)'_g(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'_g(t_0) \end{pmatrix}. \quad (5.2.5)$$

Or, comme le déterminant de la matrice de l'équation (5.2.5) n'est nul autre que $W(x_1, x_2)(t_0)$, qui est non-nul par hypothèse, il existe donc d'uniques constantes α_0, β_0 telles que l'équation (5.2.5) est satisfaite. Ainsi,

$$u(t) = \alpha_0 x_1(t) + \beta_0 x_2(t)$$

est une solution de (5.2.1), avec $x_0 = y(t_0)$ et $x'_0 = y'_g(t_0)$. Par le corollaire 5.1.2, la solution de (5.2.1) est unique et on a donc

$$y(t) = u(t) = \alpha_0 x_1(t) + \beta_0 x_2(t).$$

La solution explicite (5.2.4) découle directement du calcul de α_0 et β_0 avec la règle de Cramer. \square

5.3. Les fonctions hyperboliques et trigonométriques

5.3.1. L'équation linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant au problème

$$x''_g(t) + \alpha x'_g(t) + \beta x(t) = 0, \text{ pour } g\text{-presque tout } t \in [t_0, t_0 + T[, \quad (5.3.1)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, les solutions de l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, satisfaisant à

$$\begin{aligned} 1 - \alpha(g(t^+) - g(t)) + \beta(g(t^+) - g(t))^2 &\neq 0, \\ \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 - \lambda_1(g(t^+) - g(t))|| &< \infty, \\ \sum_{t \in [t_0, t_0 + T[\cap \mathcal{D}_g} |\log |1 - \lambda_2(g(t^+) - g(t))|| &< \infty. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

On recherche, comme dans le cas classique, des solutions de la forme

$$x(t) = \hat{e}_\lambda(t, t_0).$$

Si on a une telle solution, on calcule

$$\begin{aligned} x''_g(t) + \alpha x'_g(t) + \beta x(t) &= \lambda^2 \hat{e}_\lambda(t, t_0) + \alpha \lambda \hat{e}_\lambda(t, t_0) + \beta \hat{e}_\lambda(t, t_0) \\ &= (\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta) \hat{e}_\lambda(t, t_0). \end{aligned}$$

Si $\hat{e}_\lambda(t, t_0)$ est bien définie et non-nulle sur $[t_0, t_0 + T[$, on aura alors trouvé une solution de (5.3.1) si et seulement si λ est une solution de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0. \quad (5.3.3)$$

On peut montrer que si la condition (5.3.2) est satisfaite, alors \hat{e}_λ est bien définie et ne s'annule jamais lorsque λ est une solution de (5.3.3).

Lemme 5.3.1. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, deux solutions distinctes de (5.3.3), où $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ satisfont (5.3.2). Dans ce cas, λ_1 et λ_2 satisfont aux conditions (2.1.6).

Démonstration. Puisque λ_1 et λ_2 sont des solutions de (5.3.3), on a

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_1(g(t^+) - g(t)))(1 + \lambda_2(g(t^+) - g(t))) &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)(g(t^+) - g(t)) \\ &\quad + \lambda_1\lambda_2(g(t^+) - g(t))^2 \\ &= 1 - \alpha(g(t^+) - g(t)) + \beta(g(t^+) - g(t))^2 \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

par l'hypothèse (5.3.2). De plus, l'hypothèse (5.3.2) donne directement

$$\begin{aligned} \sum_{t \in [t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 - \lambda_1(g(t^+) - g(t))|| &< \infty, \\ \sum_{t \in [t_0, t_0 + T] \cap \mathcal{D}_g} |\log |1 - \lambda_2(g(t^+) - g(t))|| &< \infty. \end{aligned}$$

□

Ce lemme garantit donc que si λ est une solution de (5.3.3), l'exponentielle est bien définie et ne s'annule jamais. On peut donc trouver la solution générale de (5.3.1).

Théorème 5.3.2. Supposons que $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$. Si (5.3.2) est satisfaite, alors la solution fondamentale de (5.3.1) est donnée par

$$\hat{e}_{\lambda_1}(\cdot, t_0) \text{ et } \hat{e}_{\lambda_2}(\cdot, t_0)$$

où λ_1, λ_2 sont les solutions distinctes de (5.3.3). La solution du problème (5.3.1) muni des conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $x'_g(t_0) = x'_0$ est donnée par

$$x(t) = x_0 \frac{\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) + \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)}{2} + \frac{\alpha x_0 + 2x'_0}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \frac{\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) - \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)}{2}.$$

Démonstration. Comme λ_1 et λ_2 sont des solutions de (5.3.3), le lemme précédent garantit que les exponentielles $\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0)$ et $\hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)$ sont bien définies et ne s'annulent jamais. Ainsi, $\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0)$ et $\hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)$ sont des solutions de (5.3.1). On calcule alors leur Wronskien

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) & \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0) \\ \lambda_1 \hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) & \lambda_2 \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0) \end{pmatrix} &= (\lambda_2 - \lambda_1) \hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0) \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \hat{e}_{\lambda_1 \oplus \lambda_2}(t, t_0), \end{aligned}$$

qui ne s'annule jamais, puisque $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}_g$ implique que $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \in \mathcal{R}_g$. Ceci montre donc que $x_1(t) = \hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0)$ et $x_2(t) = \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)$ forment un système fondamental de solutions.

Pour résoudre l'équation avec les conditions initiales, il suffit d'invoquer le théorème 5.2.4 pour trouver

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{(x_2)'_g(t_0)x_0 - x_2(t_0)x'_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_1(t) + \frac{x_1(t_0)x'_0 - (x_1)'_g(t_0)x_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_2(t) \\
&= \frac{x_0\lambda_2 - x'_0}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) + \frac{x'_0 - \lambda_1x_0}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0) \\
&= \left(\frac{x_0}{2} - \frac{\alpha x_0 + 2x'_0}{2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\right)\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{\alpha x_0 + 2x'_0}{2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\right)\hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0) \\
&= x_0\frac{\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) + \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)}{2} + \frac{\alpha x_0 + 2x'_0}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\frac{\hat{e}_{\lambda_1}(t, t_0) - \hat{e}_{\lambda_2}(t, t_0)}{2}.
\end{aligned}$$

□

5.3.2. Fonctions hyperboliques

On s'intéresse maintenant au cas où $\alpha = 0$ et $\beta = -\gamma^2 < 0$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$.

Définition 5.3.3. Soit $c : [t_0, t_0 + T[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $c, -c \in \mathcal{R}_g$, on définit les fonctions hyperboliques \cosh_c et \sinh_c par

$$\cosh_c(t, t_0) = \frac{\hat{e}_c(t, t_0) + \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2} \text{ et } \sinh_c(t, t_0) = \frac{\hat{e}_c(t, t_0) - \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2}.$$

Le lemme suivant donne les g -dérivées des fonctions \cosh_c et \sinh_c .

Lemme 5.3.4. Soit $c \in \mathcal{R}_g([t_0, t_0 + T[)$ telle que $-c \in \mathcal{R}_g$. On a alors

$$(\cosh_c)'_g(t, t_0) = c(t) \sinh_c(t, t_0) \text{ et } (\sinh_c)'_g(t, t_0) = c(t) \cosh_c(t, t_0),$$

et

$$\cosh_c^2(t, t_0) - \sinh_c^2(t, t_0) = \hat{e}_{-\mu_g c^2}(t, t_0).$$

Démonstration. À partir de la définition 5.3.3, on obtient facilement

$$\begin{aligned}
(\cosh_c)'_g(t, t_0) &= \frac{(\hat{e}_c)'_g(t, t_0) + (\hat{e}_{-c})'_g(t, t_0)}{2} \\
&= c(t) \frac{\hat{e}_c(t, t_0) - \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2} \\
&= c(t) \sinh_c(t, t_0)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\sinh_c)_g'(t, t_0) &= \frac{(\hat{e}_c)'_g(t, t_0) - (\hat{e}_{-c})'_g(t, t_0)}{2} \\
&= c(t) \frac{\hat{e}_c(t, t_0) + \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2} \\
&= c(t) \cosh_c(t, t_0).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\cosh_c^2(t, t_0) - \sinh_c^2(t, t_0) &= \left(\frac{\hat{e}_c(t, t_0) + \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2} \right)^2 - \left(\frac{\hat{e}_c(t, t_0) - \hat{e}_{-c}(t, t_0)}{2} \right)^2 \\
&= \frac{\hat{e}_c^2(t, t_0) + 2\hat{e}_c(t, t_0)\hat{e}_{-c}(t, t_0) + \hat{e}_{-c}^2(t, t_0)}{4} \\
&\quad - \frac{\hat{e}_c^2(t, t_0) - 2\hat{e}_c(t, t_0)\hat{e}_{-c}(t, t_0) + \hat{e}_{-c}^2(t, t_0)}{4} \\
&= \hat{e}_c(t, t_0)\hat{e}_{-c}(t, t_0) \\
&= \hat{e}_{c \oplus -c}(t, t_0).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $c \oplus -c$. On a

$$c \oplus -c = c - c + \mu_g(c)(-c) = -\mu_g c^2.$$

Ceci montre donc que

$$\cosh_c^2(t, t_0) - \sinh_c^2(t, t_0) = \hat{e}_{-\mu_g c^2}(t, t_0).$$

Remarquons que $-\mu_g c^2 \in \mathcal{R}_g$ puisque \mathcal{R}_g est un groupe. □

On peut donc montrer le résultat principal pour les fonctions hyperboliques relativement à l'équation

$$x_g''(t) - \gamma^2 x(t) = 0. \tag{5.3.4}$$

Théorème 5.3.5. *Si $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\gamma, -\gamma \in \mathcal{R}_g$, alors*

$$\cosh_\gamma \text{ et } \sinh_\gamma$$

forment un système fondamental de solutions pour l'équation (5.3.4). En particulier, la solution du problème (5.3.4) muni des conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $x'_g(t_0) = x'_0$ est donnée par

$$x(t) = x_0 \cosh_\gamma(t, t_0) + \frac{x'_0}{\gamma} \sinh_\gamma(t, t_0).$$

Démonstration. On vérifie tout d'abord que \cosh_γ et \sinh_γ sont des solutions de (5.3.4).
On utilise le lemme 5.3.4 pour trouver

$$(\cosh_\gamma)_g''(t) = (\gamma \sinh_\gamma)'_g(t) = \gamma^2 \cosh_\gamma(t, t_0)$$

et

$$(\sinh_\gamma)_g''(t) = (\gamma \cosh_\gamma)'_g(t) = \gamma^2 \sinh_\gamma(t, t_0).$$

Il reste alors seulement à vérifier que leur Wronskien est non-nul. On calcule donc

$$\begin{aligned} W(\cosh_\gamma(\cdot, t_0), \sinh_\gamma(\cdot, t_0))(t_0) &= \det \begin{pmatrix} \cosh_\gamma(t_0, t_0) & \sinh_\gamma(t_0, t_0) \\ \gamma \sinh_\gamma(t_0, t_0) & \gamma \cosh_\gamma(t_0, t_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \gamma \neq 0, \end{aligned}$$

car

$$\cosh_\gamma(t_0, t_0) = \frac{\hat{e}_\gamma(t_0, t_0) + \hat{e}_{-\gamma}(t_0, t_0)}{2} = 1$$

et

$$\sinh_\gamma(t_0, t_0) = \frac{\hat{e}_\gamma(t_0, t_0) - \hat{e}_{-\gamma}(t_0, t_0)}{2} = 0.$$

Ainsi, \cosh_γ et \sinh_γ forment bien un système fondamental de solutions pour (5.3.4). Pour trouver la solution générale avec les conditions $x(t_0) = x_0$ et $x'_g(t_0) = x'_0$, il suffit d'invoquer le théorème 5.2.4 pour obtenir

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(x_2)'_g(t_0)x_0 - x_2(t_0)x'_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_1(t) + \frac{x_1(t_0)x'_0 - (x_1)'_g(t_0)x_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_2(t) \\ &= \frac{\gamma \cosh_\gamma(t_0, t_0)x_0 - \sinh_\gamma(t_0, t_0)x'_0}{\gamma} \cosh_\gamma(t, t_0) \\ &\quad + \frac{\cosh_\gamma(t_0, t_0)x'_0 - \gamma \sinh_\gamma(t_0, t_0)x_0}{\gamma} \sinh_\gamma(t, t_0) \\ &= x_0 \cosh_\gamma(t, t_0) + \frac{x'_0}{\gamma} \sinh_\gamma(t, t_0). \end{aligned}$$

□

5.3.3. Fonctions trigonométriques

On reprend (5.3.1) cette fois avec $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma^2 > 0$.

Définition 5.3.6. Soit $c : [t_0, t_0 + T[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $ic, -ic \in \mathcal{R}_g$. On définit les fonctions trigonométriques \cos_c et \sin_c par

$$\cos_c(t, t_0) = \frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) + \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2} \quad \text{et} \quad \sin_c(t, t_0) = \frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) - \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2i}.$$

Le lemme suivant donne les dérivées des fonctions trigonométriques.

Lemme 5.3.7. Soit $c : [t_0, t_0 + T[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $ic, -ic \in \mathcal{R}_g$. On a alors

$$(\cos_c)'_g(t, t_0) = -c(t) \sin_c(t, t_0) \quad \text{et} \quad (\sin_c)'_g(t, t_0) = c(t) \cos_c(t, t_0),$$

et

$$\cos_c^2(t, t_0) + \sin_c^2(t, t_0) = \hat{e}_{\mu_g c^2}(t, t_0).$$

Démonstration. À partir de la définition 5.3.6, on obtient directement

$$\begin{aligned} (\cos_c)'_g(t, t_0) &= \frac{(\hat{e}_{ic})'_g(t, t_0) + (\hat{e}_{-ic})'_g(t, t_0)}{2} \\ &= ic(t) \frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) - \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2} \\ &= i^2 c(t) \sin_c(t, t_0) \\ &= -c(t) \sin_c(t, t_0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\sin_c)'_g(t, t_0) &= \frac{(\hat{e}_{ic})'_g(t, t_0) - (\hat{e}_{-ic})'_g(t, t_0)}{2i} \\ &= ic(t) \frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) + \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2i} \\ &= c(t) \cos_c(t, t_0). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\cos_c^2(t, t_0) + \sin_c^2(t, t_0) &= \left(\frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) + \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{e}_{ic}(t, t_0) - \hat{e}_{-ic}(t, t_0)}{2i} \right)^2 \\
&= \frac{\hat{e}_{ic}^2(t, t_0) + 2\hat{e}_{ic}(t, t_0)\hat{e}_{-ic}(t, t_0) + \hat{e}_{-ic}^2(t, t_0)}{4} \\
&\quad - \frac{\hat{e}_{ic}^2(t, t_0) - 2\hat{e}_{ic}(t, t_0)\hat{e}_{-ic}(t, t_0) + \hat{e}_{-ic}^2(t, t_0)}{4} \\
&= \hat{e}_{ic}(t, t_0)\hat{e}_{-ic}(t, t_0) \\
&= \hat{e}_{ic \oplus -ic}(t, t_0).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $ic \oplus -ic$. On a

$$ic \oplus -ic = ic - ic + \mu_g(ic)(-ic) = \mu_g c^2.$$

Encore une fois, comme \mathcal{R}_g est fermé sous \oplus , on a que $\mu_g c^2 \in \mathcal{R}_g$, et donc $\hat{e}_{\mu_g c^2}(t, t_0)$ est bien définie. \square

Il est intéressant de remarquer que, pour $\gamma \in \mathbb{R}$, on a toujours $i\gamma, -i\gamma \in \mathcal{R}_g$, et du même coup, $\mu_g \gamma^2 = i\gamma \oplus (-i\gamma) \in \mathcal{R}_g$.

On remarque aussi que, contrairement au cas classique, on n'a pas toujours

$$\sin_c^2(t, t_0) + \cos_c^2(t, t_0) = 1.$$

On présente un tel cas dans l'annexe A.4.

On peut maintenant présenter le résultat concernant ces fonctions trigonométriques et l'équation

$$x_g''(t) + \gamma^2 x(t) = 0. \tag{5.3.5}$$

Théorème 5.3.8. *Si $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors*

$$\cos_\gamma \text{ et } \sin_\gamma$$

forment un système fondamental de solutions pour l'équation (5.3.5). En particulier, la solution du problème (5.3.5) muni des conditions initiales $x(t_0) = x_0$ et $x'_g(t_0) = x'_0$ est donnée par

$$x(t) = x_0 \cos_\gamma(t, t_0) + \frac{x'_0}{\gamma} \sin_\gamma(t, t_0).$$

Démonstration. On vérifie tout d'abord que \cos_γ et \sin_γ sont des solutions de (5.3.5). On utilise le lemme 5.3.7 pour trouver

$$(\cos_\gamma)''_g(t) = (\gamma \sin_\gamma)'_g(t) = -\gamma^2 \cos_\gamma(t, t_0)$$

et

$$(\sin_\gamma)''_g(t) = (-\gamma \cos_\gamma)'_g(t) = -\gamma^2 \sin_\gamma(t, t_0).$$

Il reste alors seulement à vérifier que leur Wronskien est non nul. On calcule donc

$$\begin{aligned} W(\cos_\gamma(\cdot, t_0), \sin_\gamma(\cdot, t_0))(t_0) &= \det \begin{pmatrix} \cos_\gamma(t_0, t_0) & \sin_\gamma(t_0, t_0) \\ -\gamma \sin_\gamma(t_0, t_0) & \gamma \cos_\gamma(t_0, t_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \gamma \neq 0, \end{aligned}$$

car

$$\cos_\gamma(t, t_0) = \frac{\hat{e}_{i\gamma}(t_0, t_0) + \hat{e}_{-i\gamma}(t_0, t_0)}{2} = 1$$

et

$$\sin_\gamma(t, t_0) = \frac{\hat{e}_{i\gamma}(t_0, t_0) - \hat{e}_{-i\gamma}(t_0, t_0)}{2} = 0.$$

Ainsi, \cos_γ et \sin_γ forment bien un système fondamental de solutions pour (5.3.5). Pour trouver la solution générale avec les conditions $x(t_0) = x_0$ et $x'_g(t_0) = x'_0$, il suffit d'utiliser le théorème 5.2.4 pour obtenir

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(x_2)'_g(t_0)x_0 - x_2(t_0)x'_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_1(t) + \frac{x_1(t_0)x'_0 - (x_1)'_g(t_0)x_0}{W(x_1, x_2)(t_0)}x_2(t) \\ &= \frac{\gamma \cos_\gamma(t_0, t_0)x_0 - \sin_\gamma(t_0, t_0)x'_0}{\gamma} \cos_\gamma(t, t_0) \\ &\quad + \frac{\cos(t_0, t_0)x'_0 - \gamma \sin_\gamma(t_0, t_0)x_0}{\gamma} \sin_\gamma(t, t_0) \\ &= x_0 \cos_\gamma(t, t_0) + \frac{x'_0}{\gamma} \sin_\gamma(t, t_0). \end{aligned}$$

□

Conclusion

En conclusion, la dérivée de Stieltjes offre une excellente unification des calculs différentiels discret et continu. En effet, comme on a pu le voir, cette théorie généralise bien toutes les précédentes tentatives d'unification, et permet de conserver plusieurs résultats importants des équations différentielles ordinaires. De par la jeunesse de cette théorie, la littérature à son sujet est encore très maigre. On présente donc ici deux pistes intéressantes de réflexion.

Tout d'abord, l'introduction des équations différentielles linéaires du deuxième ordre ouvre naturellement la porte à la question du g -Laplacien et de son spectre. En effet, il serait très intéressant d'arriver à décrire le spectre du g -Laplacien en trouvant l'opérateur adjoint de la g -dérivée. Cette question permettrait possiblement de mettre en place une théorie des g -distributions et des équations aux g -dérivées partielles.

Ensuite, le choix pour g d'avoir une limite à droite et d'être continue à gauche peut sembler arbitraire. En effet, on remarque que dans la plupart des travaux effectués dans ce mémoire, la valeur de g en un point est peu importante, c'est plutôt la limite de chaque côté qui importe. Ainsi, il serait peut-être intéressant de généraliser encore plus et de considérer une fonction pour laquelle la valeur en chaque point est en fait une combinaison convexe de la limite à droite et de la limite à gauche. La dérivée correspondante pourrait alors être définie comme la même combinaison convexe de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite. Il serait alors intéressant de caractériser l'anti-dérivée d'un tel opérateur, selon la combinaison convexe choisie.

Bibliographie

- [BHN] M. BENCHORA, J. HENDERSON, S. NTOUYAS, (2006). *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, HINDAWI PUBLISHING CORPORATION, NEW YORK, NY.
- [BP] M. BOHNER, A. PETERSON, (2001). *Dynamic Equations on Time Scales*, BIRKHÄUSER, BOSTON, MA.
- [C] C. CORDUNEANU, (1977). *Principles of differential and integral equations*, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, PROVIDENCE, RI.
- [CM] D.W. CRUMPACKER, D. MARINKOVIC, (1967). *Preliminary Evidence of Cold Temperature Resistance in *Drosophila pseudoobscura**, THE AMERICAN NATURALIST, 101(922), PP. 505-514. [HTTPS://WWW.JSTOR.ORG/STABLE/2459276](https://www.jstor.org/stable/2459276).
- [DS] P.C. DAS, R.R. SHARMA, (1980). *Some Stieltjes integral inequalities*, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS, 73(2), PP. 423-433, [HTTPS://DOI.ORG/10.1016/0022-247X\(80\)90288-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(80)90288-7).
- [FP] M. FRIGON, R.L. POUSO, (2016). *Theory and applications of first-order systems of Stieltjes differential equations*. ADVANCES IN NONLINEAR ANALYSIS, 6(1), PP. 13-36. [HTTPS://DOI.ORG/10.1515/ANONA-2015-0158](https://doi.org/10.1515/ANONA-2015-0158).
- [GD] A. GRANAS, J. DUGUNDJI, (2003). *Fixed Point Theory*, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, NY.
- [H] S. HILGER, *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, THÈSE DOCTORALE, UNIVERSITÄT WÜRZBURG, 1988.
- [KP] W. G. KELLEY, A. C. PETERSON, (2010). *The Theory of Differential Equations Classical and Qualitative*, 2^e ÉD. SPRINGER, NEW YORK, NY.
- [LAN] A.B. LANGILLE, E.M. ARTECA, J.A. NEWMAN, (2017). *The impacts of climate change on the abundance and distribution of the Spotted Wing *Drosophila* (*Drosophila suzukii*) in the United States and Canada*. PEERJ. DOI :10.7717/PEERJ.3192.
- [LO] J. W. LEE, D. O'REGAN, (1995). *Existence principles for differential equations and systems of equations*. DANS : GRANAS A., FRIGON M., SABIDUSSI G. (DIR.) TOPOLOGICAL METHODS IN DIFFERENTIAL EQUATIONS AND INCLUSIONS. NATO ASI SERIES (SERIES C : MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES), VOL 472. SPRINGER, DORDRECHT

- [M] K. S. MILLER, (1960). *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK, NY.
- [PR] R.L. POUSO, A. RODRIGUEZ, (2014/2015). *A new unification of continuous, discrete, and impulsive calculus through Stieltjes derivatives*, REAL ANALYSIS EXCHANGE, 40(2), PP. 1-35.
- [SI] G. F. SIMMONS, (1991). *Differential Equations With Applications and Historical Notes*, 2^e ÉD. MCGRAW-HILL SCIENCE/ENGINEERING/MATH, NEW YORK, NY.
- [S] K. R. STROMBERG, (1981) *Introduction to Classical Real Analysis*, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, PROVIDENCE, RI.
- [ST] D.W. STROOCK, (2011). *Essentials of Integration Theory for Analysis*, SPRINGER, NEW YORK, NY., PP. 203-233.

Annexe A

Exemples divers

Le but de cette annexe est de présenter quelques exemples montrant la richesse et certaines difficultés qui viennent avec les concepts de g -continuité et de g -dérivée.

A.1. Fonction croissante discontinue sur les rationnels

Dans cette section, on introduit une fonction g strictement croissante, continue à gauche et discontinue sur les nombres rationnels. L'existence d'une telle fonction empêche donc de considérer un voisinage d'un point à l'extérieur de D_g pour lequel la fonction g serait continue.

Soit $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une énumération des nombres rationnels. On considère la fonction définie par

$$g(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n}$$

(1) La fonction g est croissante.

Ceci est évident à partir de la définition. En effet, soit $x < y$ et $q_j \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q_j < y$, on a

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= \sum_{q_n < y} \frac{1}{2^n} - \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{x \leq q_n < y} \frac{1}{2^n} \\ &\geq \frac{1}{2^j} > 0. \end{aligned}$$

(2) La fonction g est continue à gauche.

Soient $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x < x_0$, on a

$$g(x_0) - g(x) = \sum_{q_n < x_0} \frac{1}{2^n} - \sum_{q_n < x} \frac{1}{2^n} = \sum_{x \leq q_n < x_0} \frac{1}{2^n}. \quad (\text{A.1.1})$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n > N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad (\text{A.1.2})$$

et $\delta > 0$ tel que

$$\{q_0, \dots, q_N\} \cap]x_0 - \delta, x_0[= \emptyset. \quad (\text{A.1.3})$$

Si $|x - x_0| < \delta$, les équations (A.1.1), (A.1.2) et (A.1.3) donnent

$$g(x_0) - g(x) \leq \sum_{n > N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

(3) La fonction g est discontinue sur les rationnels.

En effet, soit $q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ et $\delta > 0$. Pour $x \in]q_{n_0}, q_{n_0} + \delta[$, on a

$$g(x) - g(q_{n_0}) = \sum_{q_{n_0} \leq q_n < x} \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{n_0}}.$$

A.2. Fonction g -continue et non bornée sur un intervalle compact.

L'existence de fonctions non bornées mais g -continues sur un intervalle compact oblige l'introduction de l'ensemble \mathcal{BC}_g , soit l'ensemble des fonctions g -continues et bornées, au lieu de simplement continues, afin de pouvoir obtenir une structure d'espace de Banach, nécessaire pour l'application de plusieurs théorèmes de points fixes.

On définit $g(t) = t$ pour $t \leq 0$, et $g(t) = t + 1$ pour $t > 0$. La fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1/t & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

est g -continue sur $[0, 1]$, bien qu'elle ne soit pas bornée sur ce même intervalle.

Montrons d'abord que f est g -continue en 0. Il suffit de prendre $\delta < 1$, car dans ce cas,

$$|g(t) - g(0)| < \delta$$

implique que $t \leq 0$, et donc que $f(t) = 0$. Dans ce cas on a alors

$$|f(t) - f(0)| = 0.$$

Prenons maintenant $t_0 > 0$, et montrons que f est g -continue en t_0 . Ce fait est évident et découle automatiquement de la continuité usuelle de la fonction $t \rightarrow 1/t$, car pour $s, t > 0$, on a $g(s) - g(t) = s - t$.

Ainsi, la fonction f est g -continue sur un compact, mais n'est pas bornée.

A.3. g -Équation différentielle dont la solution ne peut être prolongée à gauche

On considère tout d'abord la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivante :

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0; \\ t + 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On s'intéresse alors à l'équation

$$\begin{cases} x'_g(t) &= f(t, x(t))x(t), \\ x(0) &= 0, \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

avec

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En vertu de la remarque 2.3.3, on considère alors le problème équivalent à droite suivant :

$$\begin{cases} x'_g(t) &= x(t), \\ x(0) &= 0 + f(0, 0)(g(0^+) - g(0)) = 1, \end{cases} \quad (\text{A.3.2})$$

où $\tilde{g} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\tilde{g}(t) = t + 1.$$

L'équation (A.3.2) a évidemment comme unique solution

$$x(t) = e^t.$$

Ceci indique que la solution de (A.3.1) doit être donnée par

$$x(t) = e^t,$$

pour $t > 0$. Or, la solution de (A.3.1) est tout simplement

$$x(t) = 0.$$

Ceci montre donc qu'il serait impossible de prolonger la solution de (A.3.2) à gauche.

A.4. Fonction g pour laquelle $\sin_c^2(t, t_0) + \cos_c^2(t, t_0) \neq 1$

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1, \\ t + 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Soit $c \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$, on calcule alors $\hat{e}_c(t, t_0)$. Tout d'abord, on remarque que dans ce cas,

$$T_c^- = \{t \in \mathcal{D}_g = \{1\} \mid 1 + c(g(t^+) - g(t)) < 0\} = \emptyset,$$

car $1 + c$ est positif ou complexe. Ainsi, on a,

$$\begin{aligned} \hat{e}_c(t, 0) &= e^{\int_{[0, t[} \tilde{c}(s) d\mu_g(s)} \\ &= \begin{cases} e^{\int_{[0, t[} cd\mu_g}, & \text{si } t \leq 1; \\ e^{\int_{[0, 1[} cd\mu_g + \int_{\{1\}} \frac{\log |1 + c(s)(g(s^+) - g(s))|}{g(s^+) - g(s)} d\mu_g(s) + \int_{]1, t[} cd\mu_g}, & \text{si } t > 1; \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{ct} & \text{si } t \leq 1; \\ (1 + c)e^{ct} & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors calculer $\cos_1(t, 0)$ et $\sin_1(t, 0)$. On a

$$\cos_1(t, 0) = \frac{\hat{e}_i(t, 0) + \hat{e}_{-i}(t, 0)}{2} = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t \leq 1; \\ \cos(t) - \sin(t) & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

et

$$\sin_1(t, 0) = \frac{\hat{e}_i(t, 0) - \hat{e}_{-i}(t, 0)}{2i} = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \leq 1; \\ \sin(t) + \cos(t) & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

Ainsi, pour $t > 1$, on a

$$\cos_1^2(t, 0) + \sin_1^2(t, 0) = \cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) = 2 \neq 1.$$

On calcule \hat{e}_{μ_g} , pour vérifier que le lemme 5.3.7 est bien respecté. Tout d'abord, on a

$$\mu_g(t) = g(t^+) - g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on calcule aisément que

$$\hat{e}_{\mu_g}(t, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut voir dans la figure A.1 les graphiques de $\cos_1(t, 0)$, $\sin_1(t, 0)$ et $e_{\mu_g}(t, 0)$.

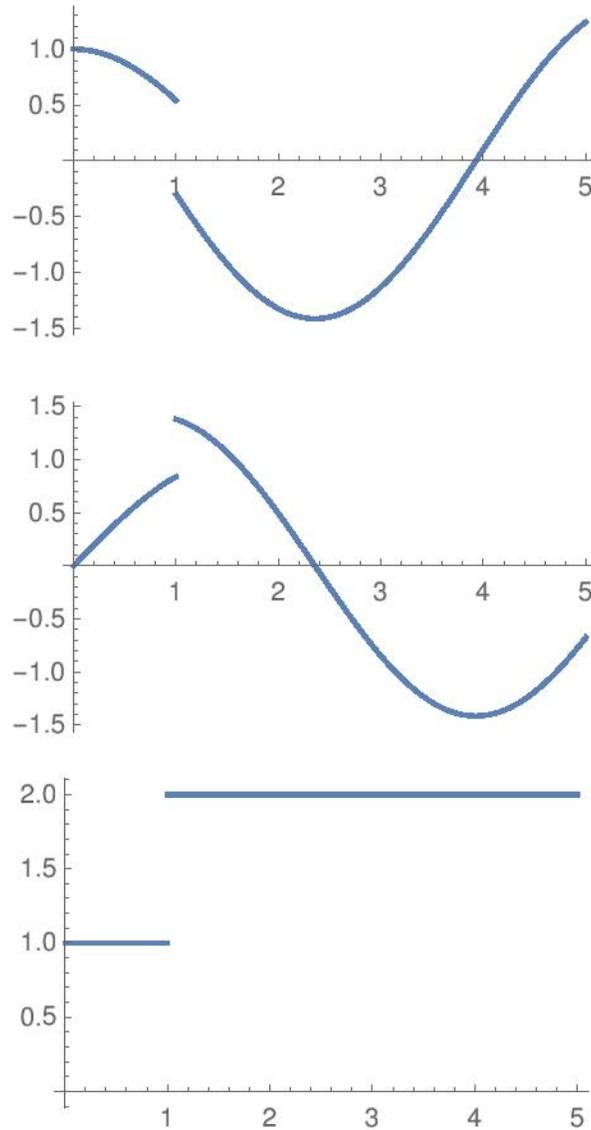


FIGURE A.1. Graphique des fonctions, pour $c = 1$, $\cos_c(t, 0)$, $\sin_c(t, 0)$ et $e_{\mu_g c^2}(t, 0)$.