

Université de Montréal

**Sur la structure cellulaire et la théorie de la représentation
des algèbres de Temperley-Lieb à couture**

par

Alexis Langlois-Rémillard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

07 décembre 2018

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé

Sur la structure cellulaire et la théorie de la représentation des algèbres de Temperley-Lieb à couture

présenté par

Alexis Langlois-Rémillard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer

(président-rapporteur)

Yvan Saint-Aubin

(directeur de recherche)

Franco V. Saliola

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

29 janvier 2019

Sommaire

Ce mémoire étudie la théorie de la représentation des algèbres à couture $B_{n,k}(\beta)$, introduites par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [21]. Elles sont paramétrisées par deux nombres entiers positifs n, k et un nombre complexe β qui est exprimé souvent à l'aide d'un autre paramètre $q \in \mathbb{C}^\times$ comme $\beta = q + q^{-1}$. Ces algèbres unifères, associatives et de dimension finie admettent une définition diagrammatique ainsi qu'une réalisation de type $P_k^{(k)} TL_{n+k} P_k^{(k)}$ pour une famille d'idempotents $P_k^{(k)}$ issue des algèbres de Temperley-Lieb originales : les projecteurs de Wenzl-Jones. L'objectif est de caractériser les modules simples, projectifs et cellulaires. Un résultat majeur à cet effet est la preuve de la cellularité de cette famille d'algèbres pour la plupart des valeurs de β . Ce résultat est nouveau et facilite grandement l'étude. En résumé, le comportement dépend de la valeur de q : lorsque q est générique, l'algèbre $B_{n,k}(\beta)$ est connue semi-simple ; le cas q racine de l'unité est plus riche et son étude occupe la grande partie de ce mémoire.

Le chapitre 1 présente la théorie de base des algèbres de Temperley-Lieb dans une optique pédagogique. Le chapitre 2 utilise l'exemple des algèbres de Temperley-Lieb pour introduire les algèbres cellulaires. Dans le chapitre 3, les algèbres à couture sont introduites de trois façons : par générateurs et relations, diagrammatiquement et par les projecteurs de Wenzl-Jones ; l'isomorphisme entre les trois présentations est ensuite montré, sauf dans le cas où $q^{2k} = 1$. La cellularité et la théorie de la représentation sont ensuite étudiées pour q générique. Finalement, le chapitre 4 présente en trois étapes les résultats nouveaux en q racine de l'unité : la dimension des radicaux et des modules simples, la construction des morphismes non-triviaux entre les modules cellulaires et la caractérisation des modules indécomposables principaux.

Mots clefs : Théorie de la représentation des algèbres ; algèbres cellulaires ; modules simples ; modules principaux ; algèbres de Temperley-Lieb ; algèbres à couture.

Summary

This master's thesis considers the representation theory of boundary seam algebras $B_{n,k}(\beta)$, introduced by Morin-Duchesne, Rasmussen and Ridout [21]. Those unitary and associative algebras of finite dimension are parametrised by two positive integers n, k and a complex number β , expressed with $q \in \mathbb{C}^\times$ as $\beta = q + q^{-1}$. They admit a diagrammatic definition and a realization of type $P_k^{(k)} TL_{n+k} P_k^{(k)}$ using the Temperley-Lieb algebra TL_{n+k} and a family of idempotents $P_k^{(k)}$: the Wenzl-Jones projectors. We prove the cellularity in the sense of Graham and Lehrer [10] of this family of algebras for most values of β and use it to construct the simple, projective and cellular modules. Expressing $\beta = q + q^{-1}$ for $q \in \mathbb{C}^\times$, we get that the behaviour depends on the value of q : when it is generic, $B_{n,k}(\beta)$ is semisimple; the case of q being a root of unity is richer and is studied in depth in chapter 4.

Chapter 1 pedagogically presents the theory of Temperley-Lieb algebras. Chapter 2 uses Temperley-Lieb algebras as examples to introduce cellular algebras. In chapter 3, boundary seam algebras are introduced in three different ways: by generators and relations, diagrammatically and by Wenzl-Jones projectors; the isomorphism between the three presentations is then shown except for the case $q^{2k} = 1$. The chapter finishes with the proof of the cellularity of $B_{n,k}(\beta)$ and some of the representation theory results for q generic. Finally, chapter 4 presents in three steps the new results when q is a root of unity: the dimension of the radicals and of simple modules, the construction of the non-trivial morphisms between cellular modules and the characterisation of the principal indecomposable modules.

Keywords: Representation theory of algebras; cellular algebras; simple modules; principal modules; Temperley-Lieb algebras; boundary seam algebras.

Table des matières

Sommaire	v
Summary	vii
Remerciements	xi
Introduction	1
Chapitre 1. Algèbres de Temperley-Lieb	5
1.1. Définitions	5
1.2. Forme bilinéaire, matrice de Gram et radical	11
1.3. Représentations aux valeurs critiques	18
1.3.1. Diagrammes de Bratteli	18
1.3.2. Modules indécomposables principaux	20
Chapitre 2. Algèbres cellulaires	23
2.1. Définition et résultats généraux	23
2.1.1. Définition	23
2.1.2. Cellularité des algèbres de Temperley-Lieb	24
2.1.3. Résultats généraux sur les algèbres cellulaires	27
2.2. Algèbres cellulaires sur un corps	31
Chapitre 3. Algèbres à couture	37
3.1. Constructions et équivalences	37
3.1.1. Projecteurs de Wenzl-Jones	38

3.1.2.	Définition algébrique.....	40
3.1.3.	Définition diagrammatique	40
3.1.4.	Définition par les projecteurs.....	45
3.1.5.	Équivalences aux valeurs formelles.....	47
3.1.6.	Équivalences aux valeurs complexes	50
3.2.	Cellularité et modules cellulaires.....	54
3.2.1.	Cellularité	55
3.2.2.	Modules cellulaires	56
3.3.	Représentations pour q générique.....	60
3.3.1.	Forme bilinéaire et matrices de Gram.....	60
3.3.2.	Déterminant de la matrice de Gram	62
3.3.3.	Radical et semi-simplicité	65
Chapitre 4.	Représentations aux valeurs critiques	67
4.1.	Dimensions des radicaux et des modules simples	67
4.1.1.	Exemple	67
4.1.2.	Formules de récurrence	74
4.2.	Morphismes entre les modules cellulaires	75
4.2.1.	Un exemple.....	76
4.2.2.	Morphismes entre modules cellulaires de l'algèbre de Temperley-Lieb ...	77
4.2.3.	Généralisation de la preuve	79
4.3.	Modules projectifs et indécomposables.....	87
4.3.1.	Algèbres cellulaires, suite et fin.....	88
4.3.2.	Situation pour l'algèbre à couture	92
Bibliographie	97

Remerciements

Une rétrospective de ces deux dernières années s'ouvre ici. Si la réflexion a surtout été académique, la faire m'a aussi permis de constater que le cadre dans lequel mes recherches se sont effectuées a toujours été animé par une panoplie de personnes qui ont su m'épauler et participer à l'amalgame de facteurs qui a fait de mon séjour à l'Université de Montréal une expérience enrichissante et inoubliable. Il me fait grand plaisir de prendre ce moment pour cerner leurs contributions, malheureusement sans pouvoir être exhaustif. Difficile d'exprimer la pleine ampleur de ma reconnaissance en quelques mots ; pour contourner cette embûche, je me suis permis de suggérer certains livres qui me sont venus à l'esprit en pensant à vous.

Il serait impensable de ne pas commencer par mon superviseur : l'encadrement que tu m'as offert, Yvan, n'a pas son pareil. La qualité de nos échanges et le temps que tu m'as consacré ne s'oublieront pas. Je n'ai peut-être pas toujours semblé retenir les leçons, celle souvent répétée, sur la concision par exemple, mais sache qu'elles me furent indispensables et que l'impact de ton exemple a marqué ma personne académique. Par ta rigueur et ton esprit analytique, je n'ai pu m'empêcher de voir un lien avec *Le Docteur Pascal* d'Émile Zola que tu pourras apprécier. Encore une fois, merci et au plaisir de retravailler avec toi!

Un grand merci aussi aux deux professeurs qui ont corrigé et commenté mon mémoire. Je vous conseille, Franco et Bram, respectivement ces livres : *Nikolski* de Nicolas Dickner, qui regorge de liens à découvrir et d'histoires à recoller, et *La foi du braconnier* de Marc Séguin, un livre dur et beau.

L'environnement de travail durant ma maîtrise fut merveilleux et ce ne fut pas peu grâce à vous, mes formidables camarades ! À mes amis et amies du baccalauréat, Victoire, Vanessa, Marc-Antoine et Gabriel, je vous recommande *L'Oeuvre au noir* de Marguerite

Yourcenar ; puissent les aventures de Zénon vous divertir autant que nos soirées ! Jonathan, merci pour la vie que tu insuffles au département et j'espère que tu comprendras que je ne peux te recommander autre chose que *L'odeur du café* de Dany Laferrière. Raphaël, j'espère que nous pourrons terminer *La recherche du temps perdu* de Marcel Proust sous peu ! Rosalie, nous n'avons pas eu assez de temps pour parler, j'espère que *Les belles images* de Simone de Beauvoir pourra continuer nos discussions ! Jean, tu m'as fait grandir sur plusieurs aspects, j'espère que *Ubu roi* d'Alfred Jarry te siéra ! Aux membres de l'équipe, Alexis, Théo, Amir, Léonard, Florence et Philippe, vous avez été formidables et je me remémorerai de nos discussions avec joie. Je pense que la lecture de *L'île du jour d'avant* d'Umberto Eco pourrait vous intéresser. Aux autres membres de l'exécutif, Abdoul, Dominique, Alexandre, Nicolas, Camille et Fabrice, merci de vous impliquer, c'est parfois ingrat, mais cette tâche jamais achevée est indispensable ; dans cette idée, je vous recommande *Le château* de Franz Kafka. À mes amis physiciens, Julien, Jean-Michel et Geoffroy, je vous recommande les *Nouvelles de Petersbourg* de Nicolas Gogol. À Antoine, Jean-Pascal, Thomas, Lory-Ann, Marie-Christine, Camille, Francis, Pascale, Olivier, il m'a toujours été plaisant de vous voir, j'espère que *Ne vous fâchez pas, Imogène !* de Charles Exbrayat pourra vous rappeler un peu de ce plaisir !

Pour paraphraser Napoléon, toutes et tous mes collègues eurent un impact égal dans mon parcours, mais certains en eurent un plus égal que les autres ! J'ai pour ceux-ci, des mercis tout particuliers.

Jean-Philippe, merci d'avoir lu et commenté la totalité de mon mémoire de ta plume amusante, parfois dure, mais toujours pertinente. Ton support continu au courant de ces dernières années m'aida énormément, j'ai trouvé en toi un véritable ami. Je te suggère *Les oiseaux* de Tarjei Vesaas qui me fait penser à toi.

Loïc, il me fit grand plaisir de vous rencontrer, bien que j'eusse aimé le faire plus tôt ! Votre lecture attentive de mon mémoire fut un très beau cadeau, surtout considérant la difficulté de lire et commenter sur un sujet complètement hors de votre champ d'expertise. À cet effet, j'ose croire que vous pourriez apprendre d'un livre à la jonction de nos domaines : le *Manga Guide to Linear Algebra* de Shin Takahashi et Iroha Inoue.

Pierre-Alexandre, ton optimisme inébranlable et ta joie de vivre m'ont beaucoup apporté. Tu es toujours prêt à aider et ce texte te doit beaucoup : tous les diagrammes ont été réalisés grâce à ta création : TLDiagrams ! Je pense que tu aimeras beaucoup le recueil *Comment voyager avec un saumon* d'Umberto Eco.

François, merci d'avoir affronté la partie la plus algébrique du mémoire, savoir que tu allais la lire m'a beaucoup motivé à en faire un traitement pédagogique. Je pense que *Le Vieux Chagrin* de Jacques Poulin te plaira.

Je serais bien ingrat de ne pas mentionner le support de ma famille qui a enduré mes horaires étranges, mes passages en coup de vent à la maison et les semaines où j'oubliais de donner des nouvelles. Ce que je fais vous semblait un peu extraterrestre, mais vous avez toujours voulu que je vous tienne au courant : je pense que vous apprécierez *L'histoire de ta vie* de Ted Chiang.

Pour terminer, je suis extrêmement reconnaissant pour le financement que j'ai reçu de la part du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et du Fonds de recherche : Nature et technologies Québec (FRQNT). Il serait présomptueux de ma part de vous suggérer une lecture, mais je vous invite tout de même à lire ou relire le rapport Naylor (2017) sur le financement de la recherche fondamentale, plus d'étudiantes et d'étudiants devraient se voir offrir la chance que j'ai eu afin de soutenir les talents que nous avons.

Introduction

Que la physique inspire le développement des mathématiques n'étonne plus. Du calcul différentiel aux groupes quantiques, l'intuition physique oriente la recherche et pousse les chercheuses et les chercheurs à explorer des avenues qui pourraient mener à de nouveaux concepts et des connexions inattendues. Un exemple intéressant de tels développements sont les algèbres de Temperley-Lieb. Introduites en 1971 par Elliott Lieb et Neville Temperley afin de formaliser des problèmes de mécanique statistique sur réseaux [24], elles n'ont pas échappé à l'œil de la communauté de physique mathématique, qui en a exploité les propriétés dans maints contextes, par exemple pour le modèle de Potts [18] ou le modèle à six vertex (ice-type) [3].

Par un hasard qui a mené à la jonction de deux communautés de recherches, Jones a aussi retrouvé ces algèbres de façon indépendante en 1983 en cherchant des invariants en théorie des nœuds [12]. Cela a mené à plusieurs développements exploitant les propriétés combinatoires de ces algèbres. Dès les années 90, la définition maintenant classique par générateurs et relations entre dans l'usage.

Définition 0.0.1 (Générateurs et relations). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $TL_n(\beta)$ est l'algèbre associative engendrée par une unité $\mathbb{1}$ et $n - 1$ générateurs e_1, \dots, e_{n-1} assujettis aux relations*

$$\begin{cases} e_i^2 = \beta e_i, & \text{pour tout } i; \\ e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i, & \text{pour tout } i; \\ e_i e_j = e_j e_i, & \text{lorsque } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Ces algèbres se réalisent aussi en tant que quotient d'algèbres de Hecke [20], mais c'est dans le contexte de théorie des nœuds que leur riche définition diagrammatique a été introduite par Kauffman [15] en 1993. C'est dans ces années que se déroulèrent les avancées

en la matière : les premières études de la théorie de la représentation par Goodman et Wenzl [9], Martin [18] et Westbury [26] ; l'introduction d'une approche cellulaire par Graham et Lehrer [10] et aussi l'application aux théories conformes des champs, par exemple dans le travail de Koo et Saleur [16].

À partir de là, le sujet étant assez bien connu, la communauté chercha plutôt à étudier d'autres modèles provenant de généralisations des algèbres de Temperley-Lieb. Par exemple : les algèbres de blob de Martin et Saleur [19] ; l'algèbre affine étudiée par plusieurs dont Graham et Lehrer [11] ; et plus récemment, l'algèbre diluée par Belletête et Saint-Aubin [4] et l'algèbre à couture $B_{n,k}(\beta)$ étudiée dans [21] par Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout ont toutes augmenté le champ d'application à divers modèles physiques différents.

Cette dernière famille d'algèbres a été introduite afin d'étudier des théories conformes des champs logarithmiques. En exprimant le paramètre β comme $\beta = q + q^{-1}$, pour un nombre complexe q non-nul, la division devient claire : lorsque $q \in \mathbb{C}^\times$ est une racine de l'unité, les théories physiques liées sont intéressantes et le comportement est difficile ; tandis qu'en q générique, l'algèbre est semi-simple et les théories physiques rattachées se comprennent mieux. Dans leur article, Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout ne distinguent pas les valeurs q et font plutôt la théorie pour formaliser le passage à la limite continue afin de trouver le comportement de la théorie conforme des champs à partir de celui du réseau discret.

Dans ce mémoire, nous nous proposons de construire un ensemble complet de modules simples non-isomorphes en travaillant sur une classe de modules particulière, les modules cellulaires. Ils admettent une définition diagrammatique très intuitive. Cela mènera aussi à caractériser les projectifs que nous classifions à l'aide d'outils cellulaires portant sur les modules principaux : les modules indécomposables apparaissant dans la décomposition de l'algèbre, vue comme module sur elle-même, en somme directe d'indécomposables.

Le premier chapitre offre une introduction inspirée du travail de David Ridout et d'Yvan Saint-Aubin [22] aux algèbres de Temperley-Lieb. Les résultats sont réécrits avec les conventions et les notations du mémoire.

Le deuxième chapitre présente les bases de la théorie des algèbres cellulaires de Graham et Lehrer [10] et utilise comme exemple les algèbres de Temperley-Lieb. Les résultats du chapitre 1 s'éclairent avec cette vision et le chapitre pave la voie que nous emploierons dans l'étude qui suit. Il est à noter que certains résultats sur les modules projectifs ne sont présentés qu'au chapitre 4 dans une optique pédagogique.

Les chapitres précédents ont introduit le sujet; les subséquents constituent notre contribution au domaine. Plus précisément, les propositions 3.2.1; 4.1.2; 4.1.4; le corollaire 4.2.5 et le théorème 4.3.10 sont le fruit de notre recherche et sont, à notre connaissance, nouveaux.

Le troisième chapitre expose les définitions des algèbres à couture $B_{n,k}(\beta)$ en suivant le travail de Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout [21] et montre les conditions pour qu'il y ait équivalence entre les diverses façons de définir l'algèbre. Une section prouve la cellularité de l'algèbre à partir des résultats du chapitre 2 et le reste du chapitre utilise ceci afin de présenter de façon rapide les résultats connus sur la théorie de la représentation en q générique.

Le dernier chapitre spécialise l'étude de la théorie de la représentation au cas où q est une racine de l'unité. Il donne les formules de récurrence pour les dimensions des modules simples et des radicaux des modules cellulaires; construit les morphismes non-triviaux entre modules cellulaires et caractérise les modules projectifs. Les derniers résultats plus poussés sur les algèbres cellulaires employés y sont présentés.

Chapitre 1

Algèbres de Temperley-Lieb

Analyser le comportement global issu d'interactions locales, voilà ce qui résume en une phrase l'intérêt de l'approche algébrique aux algèbres de Temperley-Lieb. Les relations fondamentales de l'algèbre ne font intervenir que les générateurs et leurs plus proches voisins, mais cela suffit pour influencer le comportement global de l'algèbre. La généralité introduite par cette approche contraste avec les résultats analytiques obtenus aux débuts de ce chapitre de la physique mathématique par Temperley et Lieb [24]. Bien que la définition 0.0.1 par générateurs et relations soit suffisante à plusieurs de nos buts, il est plus aisé de travailler avec une interprétation graphique équivalente : les (n,n) -diagrammes.

Ce chapitre introduira les algèbres de Temperley-Lieb et les résultats connus ; ils permettent de justifier la direction de la recherche que nous effectuons plus tard dans le mémoire. La source principale que nous suivons est l'article pédagogique de Ridout et Saint-Aubin [22]. L'approche que nous désirons employer pour la recherche subséquente est cellulaire, ce qu'évite leur article ; ainsi nous laisserons plusieurs résultats sans preuve, mais le chapitre 2 les démontre.

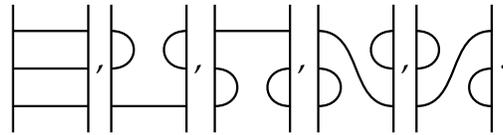
1.1. Définitions

Cette section donne les définitions des concepts de base : les (n,n) -digrammes, la catégorie de Temperley-Lieb \mathcal{T} , l'algèbre de Temperley-Lieb TL_n et ses modules cellulaires.

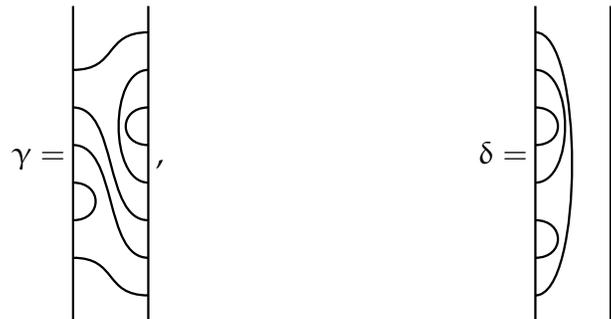
Définition 1.1.1. Soient n et m deux nombres naturels, potentiellement nuls. Un (n, m) -diagramme α , noté $\alpha : n \leftarrow m$, est composé de deux droites avec n points sur celle de gauche et m points sur celle de droite, tous reliés deux à deux par des courbes ne s'intersectant pas.

Il est à noter que si n et m n'ont pas même parité, il est impossible d'avoir un (n, m) -diagramme.

Exemple 1.1.2. Les cinq $(3, 3)$ -diagrammes sont

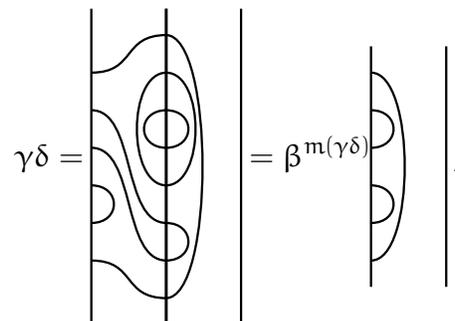

(1.1.1)

De plus, voici deux diagrammes $\gamma : 6 \leftarrow 8$ et $\delta : 8 \leftarrow 0$:


(1.1.2)

Cette approche a été développée par Kauffman dans son magnifique article [14]. Nous la présentons de façon plus contemporaine en utilisant une structure catégorique attribuable à Graham et Lehrer [11] plutôt que de nous contenter de la structure de monoïde comme Kauffman le fait.

Il y a une façon naturelle de « multiplier » deux diagrammes : les coller ensemble. Bien entendu, pour ce faire, il faut que les nombres de points soient compatibles et il faut gérer les boucles fermées créées. Par exemple, pour les deux derniers diagrammes donnés, $\gamma : 6 \leftarrow 8$ et $\delta : 8 \leftarrow 0$, le diagramme $\gamma\delta : 6 \leftarrow 0$ existe, mais $\delta\gamma$ n'a pas de sens. Le nombre $m(\gamma\delta)$ de boucles fermées créées par la concaténation sera conservé grâce à un facteur $\beta \in \mathbb{C}$. La simplification donne



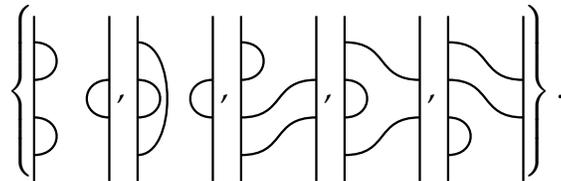
avec dans ce cas, $m(\gamma\delta) = 2$.

Avant d'énoncer la définition, notons que nous nous sommes restreint à prendre β dans les nombres complexes, il est tout à fait possible de faire la même démarche pour un anneau commutatif, associatif et unifié.

Définition 1.1.3. Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ un nombre complexe non-nul. Pour $\beta := q + q^{-1}$, la *catégorie de Temperley-Lieb* $\mathcal{T}(\beta)$ est la catégorie dont

- (1) les objets sont $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$;
- (2) pour n et m des nombres naturels, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(m, n)$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par les diagrammes $n \leftarrow m$ de source m et de but n ;
- (3) la composition $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{T}}(m, n) \times \text{Hom}_{\mathcal{T}}(p, m) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{T}}(p, n)$ qui associe à la paire (x, y) la concaténation $\beta^{m(x,y)} xy$ dûment multipliée par autant de β qu'il y a de boucles fermées créées.

Exemple 1.1.4. Pour $n = 4$ et $m = 2$, la base de $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(2, 4)$ est donnée par



Il y a une opération $*$ sur les diagrammes qui envoie $\alpha : n \leftarrow m$ de $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(m, n)$ à un diagramme $\alpha^* : m \leftarrow n$ de $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(n, m)$: c'est la réflexion verticale. Par exemple :

$$\left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \quad (1.1.3)$$

Pour l'algèbre, posséder cette réflexion, une anti-involution, ajoute des symétries et des possibilités. Bien que son existence semble anecdotique à prime abord, elle intervient dans plusieurs preuves et constructions et sa présence cache une profondeur insoupçonnée dans la théorie de la représentation : c'est un point crucial dans la définition des algèbres cellulaires.

En analogie avec les morphismes, un diagramme de $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(m, n)$ qui lie tous les m points de droite à des points à gauche est appelé **mono**; un qui lie tous les points de gauche à des points de droites est appelé **épi**. Les monos admettent un inverse à gauche lorsque $\beta \neq 0$: si α est mono, alors α^{-1} est défini comme $\alpha^* / \beta^{m(\alpha^* \alpha)}$.

Par exemple, l'avant-dernier diagramme de la base de $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(2,4)$ est mono et son inverse est donné par

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\beta} \left[\text{diagram} \right].$$

Effectivement,

$$\alpha^{-1} \alpha = \frac{1}{\beta} \left[\text{diagram} \right] = \left[\text{diagram} \right].$$

Incluse dans les endomorphismes pour la structure catégorique, nous retrouvons la définition de l'algèbre.

Définition 1.1.5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. L'algèbre de Temperley-Lieb $\text{TL}_n(\beta)$ est $\text{End}_{\mathcal{T}}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(n,n)$ sur $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(\beta)$ avec la composition comme multiplication.

Par exemple, nous avons donné plus haut la base de l'algèbre TL_3 .

$$\left[\text{diagram 1} \right], \left[\text{diagram 2} \right], \left[\text{diagram 3} \right], \left[\text{diagram 4} \right], \left[\text{diagram 5} \right]. \tag{1.1.4}$$

Le premier diagramme est l'identité de l'algèbre et les deux suivants sont appelés E_1 et E_2 . Ces trois diagrammes génèrent l'algèbre puisque le quatrième est $E_1 E_2$ et le dernier est $E_2 E_1$. De façon plus générale, le (n,n) -diagramme avec deux boucles reliant les points i et $i+1$ à droite et à gauche sera noté E_i :

$$E_i = \left[\text{diagram} \right]. \tag{1.1.5}$$

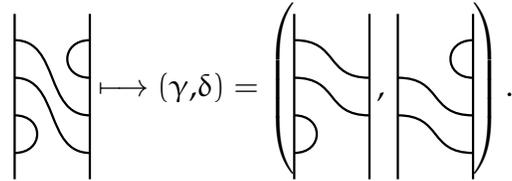
Les deux prochains résultats font le lien entre les définitions 0.0.1 et 1.1.5.

Proposition 1.1.6 (Théorème 2.4, [22]). L'algèbre de Temperley-Lieb définie par générateurs et relations est isomorphe à celle définie diagrammatiquement.

Corollaire 1.1.7 ([22]). La dimension de l'algèbre de Temperley-Lieb $\text{TL}_n(\beta)$ est le n -ième nombre de Catalan :

$$\dim \text{TL}_n = C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \tag{1.1.6}$$

Les (n, n) -diagrammes admettent une première classification par leur nombre de lignes transversales. Il est intéressant de noter qu'un diagramme possédant d lignes transversales se divise en deux diagrammes : un mono $\gamma : n \leftarrow d$ et $\delta : d \leftarrow n$, un épi. Par exemple :



Ce fait intéressant permet la définition d'une famille de modules qui admettent une action naturelle de TL_n à gauche.

Définition 1.1.8. L'ensemble \mathcal{V}_n^d des combinaisons \mathbb{C} -linéaires de diagrammes monos $n \leftarrow d$ est appelé **module cellulaire** avec l'action à gauche suivante : un (n, n) -diagramme de TL_n agit sur un (n, d) -diagramme de \mathcal{V}_n^d d'abord par concaténation à gauche, puis par multiplication par un facteur β pour chaque boucle fermée et l'envoi à zéro des diagrammes non-monos.

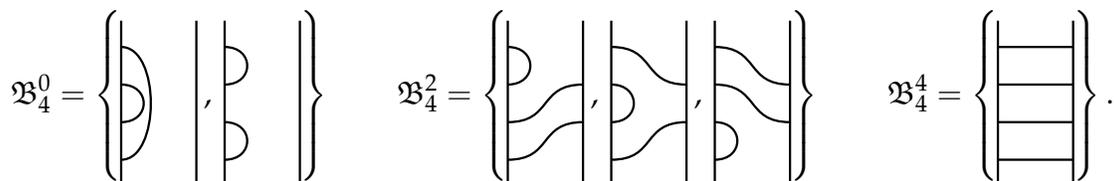
Cela vaut la peine de le répéter : l'ensemble sous-jacent est constitué seulement des sommes de diagrammes monos ; si la concaténation d'un diagramme $n \leftarrow n$ avec un $n \leftarrow d$ n'est plus mono, le résultat est nul. Il n'est pas difficile de vérifier que l'action proposée dans la définition fait bien de \mathcal{V}_n^d un $TL_n(\beta)$ -module gauche. Notons que les modules cellulaires sont indexés par le nombre de lignes transversales d , nous appellerons parfois ces lignes des **défauts** pour raccourcir.

Outre cette remarque, l'importance et la pertinence de l'anti-involution $*$ sont encore illustrées par le fait qu'elle puisse être utilisée afin de définir une famille de modules à droite.

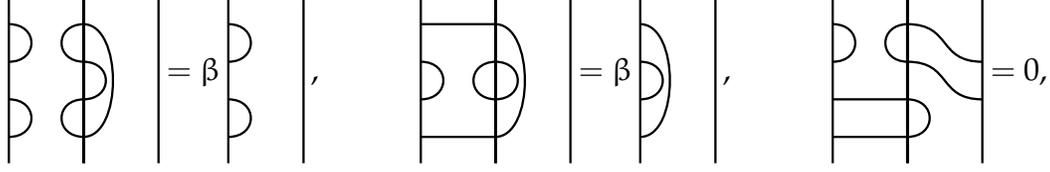
Remarque 1.1.9. Soit \mathcal{V}_n^{d*} l'espace vectoriel libre des $d \leftarrow n$ diagrammes épis. C'est en fait un TL_n -module droit pour l'action

$$v \cdot a = (a^* v^*)^* \tag{1.1.7}$$

Exemple 1.1.10. Sur TL_4 , il y a seulement trois familles de modules cellulaires : \mathcal{V}_4^0 , \mathcal{V}_4^2 et \mathcal{V}_4^4 . Leurs bases respectives \mathfrak{B}_4^0 , \mathfrak{B}_4^2 et \mathfrak{B}_4^4 sont :



Quelques exemples de l'action de TL_4 sont présentés ci-dessous :



où la dernière action est nulle puisque le résultat n'est pas un diagramme mono. Des modules cellulaires, il est bien entendu possible de former des représentations. Dans les bases \mathfrak{B}_4^0 , \mathfrak{B}_4^2 et \mathfrak{B}_4^4 ci-dessus :

$$\begin{aligned} \rho_0 : TL_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^0) \\ I &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad E_2 \mapsto \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 : TL_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^2) \\ I &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 \mapsto \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_4 : TL_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathcal{V}_4^4) \\ I &\mapsto (1), \quad E_1 \mapsto (0), \quad E_2 \mapsto (0), \quad E_3 \mapsto (0). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

De façon intuitive, il faut voir les éléments de \mathcal{V}_n^d comme la moitié gauche des diagrammes à d lignes transversales. En y appliquant la réflexion $*$, il devient possible de retrouver les moitiés droites de ces diagrammes. Ainsi, la base de ces modules peut être utilisée afin de définir une fonction qui crée tous les éléments à d lignes transversales de TL_n . Formellement, cela donne une application définie sur les éléments de la base \mathfrak{B}_n^d de \mathcal{V}_n^d :

$$\begin{aligned} C^d : \mathfrak{B}_n^d \times \mathfrak{B}_n^d &\longrightarrow TL_n \\ (v, w) &\longmapsto v \cdot w^*. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

En prenant une fonction définie sur l'union des paires de modules cellulaires, toutes ces applications forment une fonction

$$C : \bigcup_d \mathfrak{B}_n^d \times \mathfrak{B}_n^d \longrightarrow TL_n. \quad (1.1.12)$$

qui couvre tous les éléments de la base de TL_n . Même, la fonction est en fait injective. En combinant cela au calcul combinatoire des dimensions des modules, la pertinence de la famille des modules cellulaires comme agent encodant de l'information fondamentale sur l'algèbre apparaît.

Proposition 1.1.11 ([22]). *Soit un module cellulaire \mathcal{V}_n^d non-trivial de TL_n . Sa dimension est*

$$\dim \mathcal{V}_n^d = \binom{n}{\frac{n-d}{2}} - \binom{n}{\frac{n-d-2}{2}}. \quad (1.1.13)$$

Des propriétés des nombres de Catalan, il est possible de lier les dimensions des modules avec celle de l'algèbre.

Corollaire 1.1.12. *La dimension de TL_n est la somme des carrés des dimensions de ses modules cellulaires :*

$$\dim \text{TL}_n = \sum_{\substack{0 \leq d \leq n \\ d \equiv n \pmod{2}}} (\dim \mathcal{V}_n^d)^2. \quad (1.1.14)$$

1.2. Forme bilinéaire, matrice de Gram et radical

Les modules cellulaires ont ceci de particulier que leur radical peut être trouvé à l'aide d'une forme bilinéaire définie de façon diagrammatique; un problème complexe d'algèbre se résume alors à des manipulations d'algèbre linéaire.

Définition 1.2.1. *Soient v et w des éléments de la base du module cellulaire \mathcal{V}_n^d . La forme bilinéaire $\phi_n^d : \mathcal{V}_n^d \times \mathcal{V}_n^d \rightarrow \mathbb{C}$ est définie comme*

$$\phi_n^d(v, w) = \begin{cases} \beta^{m(v^*w)}, & \text{si } v^*w \text{ est mono;} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

et étendue linéairement.

Les propriétés suivantes sont assez directes et très utiles.

Proposition 1.2.2 (Propositions 3.1 et 3.2 de [22]). *La forme bilinéaire $\phi_n^d : \mathcal{V}_n^d \times \mathcal{V}_n^d \rightarrow \mathbb{C}$ est*

(1) *invariante, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \text{TL}_n$ et toute paire v et w de \mathcal{V}_n^d ,*

$$\phi_n^d(\alpha v, w) = \phi_n^d(v, \alpha^* w); \quad (1.2.2)$$

(2) *respectueuse de l'équation suivante pour $x, y, z \in \mathcal{V}_n^d$*

$$\mathbb{C}^d(x, y)z = \phi_n^d(y, z)x. \quad (1.2.3)$$

Exemple 1.2.3. Vérifions ces deux propriétés sur un exemple. Soient

$$a = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 1} \\ \hline \end{array}, \quad v = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 2} \\ \hline \end{array}, \quad w = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 3} \\ \hline \end{array}.$$

Avec ceci,

$$av = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 4} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 5} \\ \hline \end{array}, \quad a^*w = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 6} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 7} \\ \hline \end{array}$$

et donc, la première propriété est respectée :

$$\phi(av, w) = 1 = \phi_3^1(v, a^*w).$$

Pour la deuxième propriété, soient

$$x = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 8} \\ \hline \end{array}, \quad y = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 9} \\ \hline \end{array}, \quad z = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 10} \\ \hline \end{array}.$$

De cela,

$$C^2(x, y) = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 11} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad C^2(x, y)z = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 12} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 13} \\ \hline \end{array} = x.$$

Comme $\phi_4^2(y, z) = 1$, la deuxième égalité tient.

Ces propriétés seront utiles pour étudier le radical de Jacobson, l'intersection des sous-modules maximaux, à l'aide d'un ensemble d'éléments liés à la forme bilinéaire.

Définition 1.2.4. L'ensemble $\mathcal{R}_n^d = \{v \in \mathcal{V}_n^d \mid \phi_n^d(v, w) = 0, \forall w \in \mathcal{V}_n^d\}$ est appelé le radical de la forme bilinéaire ϕ_n^d .

L'invariance de la forme bilinéaire donne tout de suite que \mathcal{R}_n^d est un sous-module de \mathcal{V}_n^d . En utilisant l'autre propriété de la proposition 1.2.2, il est possible de montrer que \mathcal{V}_n^d est cyclique et indécomposable lorsque ϕ_n^d n'est pas identiquement nulle. À partir de cela, prouver que la simplicité du quotient $\mathcal{V}_n^d/\mathcal{R}_n^d$ montrera que le radical de la forme bilinéaire est en fait le radical de Jacobson.

Proposition 1.2.5. Si ϕ_n^d n'est pas identiquement nulle, alors \mathcal{V}_n^d est cyclique et indécomposable. De plus, le quotient $\mathcal{V}_n^d/\mathcal{R}_n^d$ est simple.

La preuve de cet énoncé se retrouve dans un contexte plus général au chapitre 2 (les propositions 2.2.3 et 2.2.4). La personne pressée peut sauter tout de suite à la preuve générale, mais il est pertinent à la compréhension de voir l'usage des méthodes dans l'exemple de Temperley-Lieb pour comprendre la motivation et la force de l'approche cellulaire.

Démonstration. Comme la forme n 'est pas identiquement nulle et que \mathbb{C} est un corps, il existe une paire $v, w \in \mathcal{V}_n^d$ telle que $\phi_n^d(v, w) = 1$. Cela indique que pour tout $z \in \mathcal{V}_n^d$,

$$C^d(z, v)w = \phi_n^d(v, w)z = z.$$

Ainsi, w engendre \mathcal{V}_n^d et cela prouve la cyclicité du module cellulaire.

Bien entendu, la seule condition pour qu'un tel w engendre le module est qu'il ne soit pas dans le radical de la forme bilinéaire; tout élément non-nul du quotient $\mathcal{V}_n^d/\mathcal{R}_n^d$ est donc un générateur, ce qui veut dire que le quotient est simple.

Reste l'indécomposabilité : si le module \mathcal{V}_n^d admettait une décomposition en deux sous-modules A et B , alors pour w un générateur de \mathcal{V}_n^d , il existerait $w_A \in A$ et $w_B \in B$ tels que $w = w_A + w_B$. Agir sur w avec TL_n engendre tout le module. Il en résulte que w_A et w_B ne peuvent être tous les deux dans \mathcal{R}_n^d puisque sinon

$$\mathcal{V}_n^d = TL_n w = TL_n w_A + TL_n w_B \subset \mathcal{R}_n^d,$$

une contradiction; le radical n'est pas tout \mathcal{V}_n^d puisque la forme n'est pas identiquement nulle. Il y a donc au moins un des w_A, w_B qui n'est pas dans \mathcal{R}_n^d . Or si $w_A \notin \mathcal{R}_n^d$, alors $TL_n w_A = \mathcal{V}_n \subset A$, ce qui implique que $B = 0$. Le raisonnement s'applique de façon similaire si $w_B \notin \mathcal{R}_n^d$ et donc, si une décomposition en somme directe du module \mathcal{V}_n^d existait, un des deux facteurs directs serait trivial; l'indécomposabilité en découle. \square

Cet argument s'utilise aussi pour montrer une contrainte sur les morphismes possibles entre modules.

Proposition 1.2.6. Soient \mathcal{V}_n^d et $\mathcal{V}_n^{d'}$ deux modules cellulaires avec $d < d'$ et $M \subset \mathcal{V}_n^d$ et $M' \subset \mathcal{V}_n^{d'}$ deux sous-modules. Si la forme bilinéaire ϕ_n^d n'est pas identiquement nulle alors le seul morphisme de modules $\theta : \mathcal{V}_n^d/M \rightarrow \mathcal{V}_n^{d'}/M'$ est le morphisme nul.

Démonstration. Soit la projection canonique $\mathcal{V}_n^d \xrightarrow{\pi} \mathcal{V}_n^d/M \rightarrow 0$. Nous allons montrer que $\theta\pi$ est nul, ce qui montrera que θ l'est comme π est un épimorphisme. En diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}_n^d & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{V}_n^d/M & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{V}_n^{d'}/M' \\ & & \searrow \theta\pi & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

Soient $y, z \in \mathcal{V}_n^d$ tels que $\phi_n^d(y, z) = 1$. Pour $x \in \mathcal{V}_n^d$,

$$C^d(x, y)\theta\pi(z) = \theta(\pi(C^d(x, y)z)) = \theta(\phi_n^d(y, z)\pi(x)) = \theta\pi(x).$$

Or, $C^d(x, y)$ a d lignes transversales et comme $d < d'$ cela veut dire que le terme de gauche $C^d(x, y)\theta\pi(z) = 0$ puisque forcément des lignes transversales seront closes. Ainsi, $\theta\pi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{V}_n^d$. \square

Directement, cela entraîne que lorsque la forme bilinéaire n'est pas identiquement nulle, les modules cellulaires associés à des d et d' distincts ne sont pas isomorphes entre eux.

Notons \mathcal{L}_n^d le quotient $\mathcal{V}_n^d/\mathcal{R}_n^d$.

Corollaire 1.2.7. Soient \mathcal{V}_n^d et $\mathcal{V}_n^{d'}$ tels que ϕ_n^d et $\phi_n^{d'}$ ne soient pas identiquement nulles. S'il existe un isomorphisme $\mathcal{V}_n^d \simeq \mathcal{V}_n^{d'}$, alors $d = d'$ et si $\mathcal{L}_n^d \simeq \mathcal{L}_n^{d'}$, alors $d = d'$.

La simplicité de \mathcal{V}_n^d se résume donc à montrer la trivialité de \mathcal{R}_n^d lorsque la forme n'est pas totalement nulle. De cela, il devient clair que la voie à emprunter passe par l'étude d'une matrice : la **matrice de Gram** définie sur les éléments de la base \mathfrak{B}_n^d de \mathcal{V}_n^d par

$$\mathcal{G}_n^d = \left(\phi_n^d(v, w) \right)_{v, w \in \mathfrak{B}_n^d}. \quad (1.2.4)$$

L'inversibilité de la matrice entraîne alors la simplicité du module.

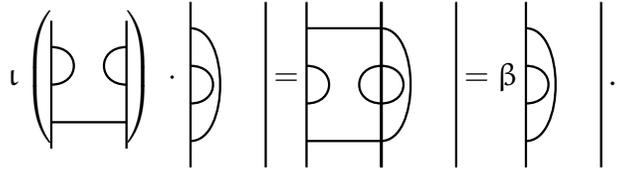
Exemple 1.2.8. Pour TL_4 , les trois matrices de Gram liées à ses modules cellulaires sont :

$$\mathcal{G}_4^0 = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_4^2 = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_4^4 = (1).$$

La démarche pour calculer le déterminant de la matrice de Gram sera de passer par un changement de base qui rend la matrice bloc-diagonale. La façon de faire : restreindre \mathcal{V}_n^d à un TL_{n-1} -module et procéder par induction.

Définition 1.2.9. Le foncteur \downarrow envoie un module de TL_n sur le module de TL_{n-1} pour l'inclusion $\iota: \text{TL}_{n-1} \rightarrow \text{TL}_n$ où $\iota(E_j) = E_{j+1}$ et $1 \leq j \leq n-2$.

Exemple 1.2.10. *Un exemple d'action est :*

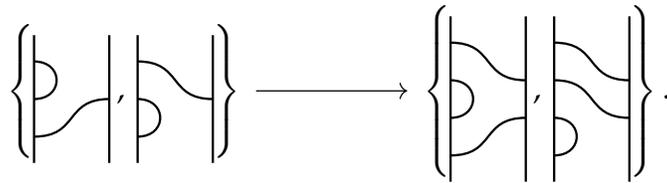


Proposition 1.2.11. *Il y a une suite exacte courte de TL_{n-1} -modules*

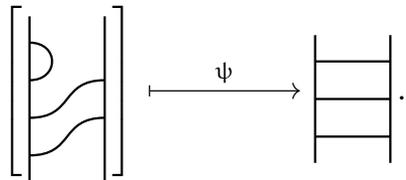
$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{n-1}^{d-1} \longrightarrow \mathcal{V}_n^d \downarrow \longrightarrow \mathcal{V}_{n-1}^{d+1} \longrightarrow 0. \quad (1.2.5)$$

De plus, lorsque $q^{2(d+1)} \neq 1$, la suite se scinde.

Démonstration. Le morphisme $\mathcal{V}_{n-1}^{d-1} \rightarrow \mathcal{V}_n^d \downarrow$ est défini en ajoutant une ligne transversale à la première position du module. Par exemple pour $n = 4$ et $d = 2$, cela donne

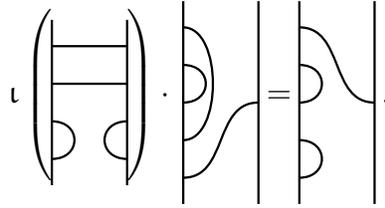


Le quotient $\mathcal{V}_n^d \downarrow / \mathcal{V}_{n-1}^{d-1}$ admet une base représentée par les diagrammes $n \leftarrow d$ où le premier point à gauche est dans un arc. Un isomorphisme ψ d'espaces vectoriels est défini entre $\mathcal{V}_n^d \downarrow / \mathcal{V}_{n-1}^{d-1}$ et \mathcal{V}_{n-1}^{d+1} en transformant l'arc reliant le premier point de gauche en lien transversal, passant par le fait même d'un diagramme $n \leftarrow d$ à un diagramme $(n-1) \leftarrow (d+1)$. Sur l'exemple en passant de $\mathcal{V}_4^2 \downarrow / \mathcal{V}_3^1$ à \mathcal{V}_3^3 cela donne :

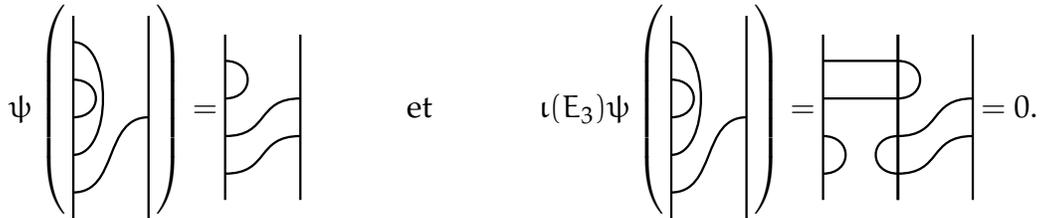


Afin de montrer que c'est un isomorphisme de TL_{n-1} -modules, il faut agir avec les générateurs de TL_{n-1} . En notant m le point lié au premier point de gauche, agir avec un E_j pour $1 \leq j \leq m-2$ ou $m \leq j \leq n-2$ veut dire que le premier point est toujours partie d'un arc puisque l'arc $j, j+1$ ne touche pas l'arc $(1, m)$. Si $j \neq m-1$ ou que le point $m-1$ est lié par un arc, alors $\iota(E_j)\psi(v) = \psi(E_j v)$ puisque couper le lien avant ou après l'application de E_j ne change pas le résultat. Cependant, si $j = m-1$ et que $m-1$ n'est

pas dans un arc pour l'élément v , alors appliquer $\iota(E_{m-1})$ met le premier point dans un lien transversal, par exemple :



Ce diagramme est envoyé à 0 dans le quotient et donc, $\psi(E_{m-1}v) = 0$. Toutefois, appliquer ψ à un tel v indique qu'il y aura un défaut en m en plus du défaut en $m - 1$; agir avec E_{m-1} les transformera en arc, ce qui veut dire que $\iota(E_{m-1})\psi(v) = 0$. Par exemple,



Cela montre que ψ est un morphisme de TL_{n-1} -modules.

La preuve pour montrer que la suite se scinde lorsque $q^{2(d+1)} = 1$ se trouve dans [22] (Corollaire 4.2) et utilise les espaces propres d'un élément central; comme nous évitons ces méthodes, nous laissons l'affirmation sans preuve. \square

Lorsque la suite exacte (1.2.5) se scinde, l'isomorphisme $\mathcal{V}_n^d \downarrow \xrightarrow{\psi} \mathcal{V}_{n-1}^{d-1} \oplus \mathcal{V}_{n-1}^{d+1}$ induit sur la somme directe une forme bilinéaire par

$${}^a\phi_n^d(x + x', y + y') = \phi_n^d(\psi^{-1}(x + x'), \psi^{-1}(y + y')), \quad (1.2.6)$$

où $x, y \in \mathcal{V}_{n-1}^{d-1}$ et $x', y' \in \mathcal{V}_{n-1}^{d+1}$. Cette nouvelle forme bilinéaire s'exprime en fait avec les formes bilinéaires de \mathcal{V}_{n-1}^{d-1} et \mathcal{V}_{n-1}^{d+1} .

Proposition 1.2.12 (Lemme 4.3 [22]). *Soient $x, y \in \mathcal{V}_{n-1}^{d-1}$ et $x', y' \in \mathcal{V}_{n-1}^{d+1}$. Il existe une constante α_n^d telle que*

$${}^a\phi_n^d(x + x', y + y') = \phi_{n-1}^{d-1}(x, y) + \alpha_n^d \phi_{n-1}^{d+1}(x', y'). \quad (1.2.7)$$

Lorsqu'une suite courte exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ se scinde, cela veut dire que les morphismes f et g qui la constituent sont respectivement une section et une rétraction. Ceci veut dire qu'il existe une certaine matrice W_n^d qui encode l'information de la section

$\mathcal{V}_{n-1}^{d+1} \rightarrow \mathcal{V}_n^d \downarrow$ associée au morphisme $\mathcal{V}_n^d \downarrow \rightarrow \mathcal{V}_{n-1}^{d+1}$ et qui s'étend à un changement de base de la forme

$$U_n^d = \begin{pmatrix} 1 & W_n^d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.8)$$

de sorte que

$$\mathcal{G}_n^d = (U_n^d)^T \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{n-1}^{d-1} & 0 \\ 0 & \alpha_n^d \mathcal{G}_{n-1}^{d+1} \end{pmatrix} U_n^d. \quad (1.2.9)$$

Trouver la valeur de α_n^d donne ensuite le déterminant en procédant par induction. La façon employée dans [22] est de trouver une formule de récurrence et de vérifier que la valeur de α_n^d conjecturée fonctionne. La définition fait intervenir les **q-nombres** :

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}. \quad (1.2.10)$$

Proposition 1.2.13 (4.4 [22]). *Lorsque $[d+1]_q \neq 0$,*

$$\alpha_n^d = \frac{[d+2]_q}{[d+1]_q}. \quad (1.2.11)$$

En corollaire, la forme du déterminant de Gram est obtenue.

Corollaire 1.2.14 (Théorème 4.7 [22]). *Soient n et d des nombres naturels. Pour tout $q \in \mathbb{C}^\times$, le déterminant de la matrice de Gram de \mathcal{V}_n^d est*

$$\det(\mathcal{G}_n^d) = \prod_{j=1}^{\frac{n-k}{2}} \left(\frac{[d+1+j]_q}{[j]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_n^{d+2j}}. \quad (1.2.12)$$

Si le déterminant $\det \mathcal{G}_n^d$ est non-nul, cela indique que le radical est trivial et donc que le module cellulaire \mathcal{V}_n^d est simple. Le théorème de Wedderburn donne que l'algèbre est semi-simple lorsque tous les modules cellulaires sont simples.

Théorème 1.2.15 (Wedderburn). *Soit A une algèbre associative de dimension finie sur un corps. L'algèbre A est semi-simple si et seulement s'il existe un ensemble complet de A -modules simples non-isomorphes $\{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r\}$ tel que l'algèbre admette une décomposition en tant que A -module de la forme*

$${}_A A \simeq \bigoplus_{i=1}^r (\dim \mathcal{L}_i) \mathcal{L}_i. \quad (1.2.13)$$

Immédiatement, une grande classe de cas est couverte puisque pour q générique

$$\mathrm{TL}_n \simeq \bigoplus_{\substack{d=0 \\ d \equiv n \pmod{2}}} (\dim \mathcal{V}_n^d) \mathcal{V}_n^d. \quad (1.2.14)$$

Théorème 1.2.16 (4.6 [22]). *Lorsque q est n'est pas une racine de l'unité, l'algèbre de Temperley-Lieb est semi-simple. De plus, les modules cellulaires \mathcal{V}_n^d forment un ensemble complet de modules simples non-isomorphes.*

1.3. Représentations aux valeurs critiques

Il faut maintenant passer aux cas où q est une racine de l'unité. La discussion complète est longue et pour éviter une redite dans les chapitres 3 et 4, nous conseillons à la personne intéressée de voir les dernières sections de [22] pour plus de détails et d'exemples.

Dans cette courte section, nous présenterons une façon intéressante de présenter l'information disponible sur les modules cellulaires, les diagrammes de Bratteli et un résultat sur les modules indécomposables principaux.

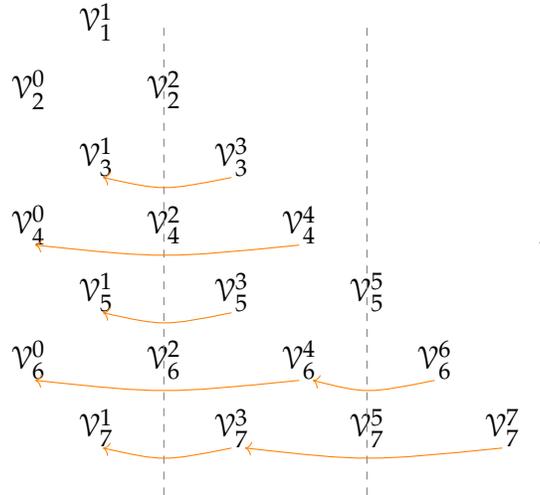
1.3.1. Diagrammes de Bratteli

Outils combinatoires intéressants, les diagrammes de Bratteli ont une histoire qui leur est propre ; nous ne leur rendrons pas justice et les verrons simplement comme un graphe de nombres naturels lié aux modules cellulaires sur lequel des informations sur les dimensions des radicaux et des modules simples sont capturées.

La base d'un diagramme de Bratteli est un tableau qui répète à chaque ligne la suite des nombres naturels $0, 1, 2, \dots$. Ensuite, à la ligne j les éléments sont considérés comme les modules cellulaires \mathcal{V}_j^d en enlevant les modules triviaux. Cela donne

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \mathcal{V}_1^1 \\ & & & & & & \mathcal{V}_2^0 & \mathcal{V}_2^2 \\ & & & & & & \mathcal{V}_3^1 & \mathcal{V}_3^3 \\ & & & & & & \mathcal{V}_4^0 & \mathcal{V}_4^2 & \mathcal{V}_4^4 \\ & & & & & & \mathcal{V}_5^1 & \mathcal{V}_5^3 & \mathcal{V}_5^5 \\ & & & & & & \mathcal{V}_6^0 & \mathcal{V}_6^2 & \mathcal{V}_6^4 & \mathcal{V}_6^6 \\ & & & & & & \mathcal{V}_7^1 & \mathcal{V}_7^3 & \mathcal{V}_7^5 & \mathcal{V}_7^7 \end{array}$$

le mémoire montre qu'il y a dans ce cas un morphisme de $\mathcal{V}_n^{d'}$ vers \mathcal{V}_n^d qui envoie la coiffe du premier dans le radical du second :



1.3.2. Modules indécomposables principaux

Cette sous-section présente des résultats connus de théorie de représentation des algèbres à dimension finie. Dans [22], les modules principaux sont aussi étudiés et leur démarche passe par l'induction; la nôtre par les algèbres cellulaires, mais il est tout de même intéressant de voir une construction explicite en action.

Définition 1.3.1. Soit A une algèbre de dimension finie. Si

$${}_A A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \tag{1.3.3}$$

est une décomposition en modules indécomposables, alors les A_i sont appelés les **modules principaux**.

Il est connu, par exemple voir [5], qu'un module \mathcal{P} est un module (indécomposable) principal si et seulement si $\mathcal{P} = eA$ pour un idempotent primitif $e \in A$. Le radical du module principal $\mathcal{P} = eA$ est donné par $e \text{rad}(A)$. Le prochain résultat classique donne une autre façon de caractériser ces indécomposables.

Proposition 1.3.2 (Corollaire 54.14, [5]). Il y a une correspondance biunivoque entre les classes sous isomorphisme des A -modules principaux et des A -modules simples, donnée par $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}/\text{rad}(\mathcal{P})$.

Cela veut dire qu'à chaque module simple est associé un module principal. Dans le cas de l'algèbre de Temperley-Lieb, pour un module cellulaire \mathcal{V}_n^d , il y a un module indécomposable principal \mathcal{P}_n^d qui est associé par la condition

$$\mathcal{P}_n^d / \text{rad } \mathcal{P}_n^d \simeq \mathcal{V}_n^d / \mathcal{R}_n^d. \quad (1.3.4)$$

Avec ceci, nous pouvons passer au résultat qui utilise les modules induits. Ce résultat utilise un élément central F_n dont les valeurs propres sur les \mathcal{V}_n^d sont connues.

Définition 1.3.3. *Le TL_{n+1} -module induit d'un TL_n -module M est donné par*

$$\mathcal{V}_n^d \uparrow := \text{TL}_{n+1} \otimes_{\text{TL}_n} M. \quad (1.3.5)$$

Théorème 1.3.4 (8.1 [22]). *Soient q une racine de l'unité et ℓ le nombre positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, \dots, \ell\}$ issus de la division euclidienne : $d + 1 = k\ell + r$. Les modules indécomposables principaux \mathcal{P}_n^d de TL_n sont identifiés ainsi :*

- si $r = \ell$, alors $\mathcal{P}_n^d \simeq \mathcal{V}_n^d$;
- si $k = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $\mathcal{P}_n^d \simeq \mathcal{V}_n^d$;
- si $k > 0$ et $r \neq \ell$, alors \mathcal{P}_n^d est le facteur direct du module r -induit

$$\mathcal{V}_{n-r}^{d-r} \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_{r \text{ fois}} \quad (1.3.6)$$

qui consiste en la sous-espace caractéristique sous l'action d'un élément central F_n dont la valeur propre généralisée est $q^{d+1} - q^{-d-1}$. De plus, il existe une suite exacte qui ne se scinde pas

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_n^{d-2r} \longrightarrow \mathcal{P}_n^d \longrightarrow \mathcal{V}_n^d \longrightarrow 0. \quad (1.3.7)$$

Enfinement, l'ensemble des quotients \mathcal{L}_n^d forme un ensemble complet de modules simples non-isomorphes sauf dans le cas où n est pair et $\beta = 0$, auquel cas il faut exclure $d = 0$ des valeurs possibles.

Connaître les modules principaux offre une façon de caractériser les modules projectifs. En effet, une des caractérisation des modules projectifs est qu'ils sont la somme de modules principaux.

Théorème 1.3.5. *Soit P un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) le foncteur $\text{Hom}_A(P, -)$ est exact ;
- (2) le module P est un facteur direct d'un A -module libre ;

(3) le module P est une somme directe de modules principaux de A ;

(4) pour tout épimorphisme $M \xrightarrow{f} N$ et tout morphisme $P \xrightarrow{\mu} N$, il existe un morphisme $P \xrightarrow{\eta} M$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \eta \swarrow \cdots & \downarrow \mu & \\
 M & \xrightarrow{f} N & \longrightarrow 0
 \end{array} . \tag{1.3.8}$$

Un module satisfaisant ces propriétés est un module **projectif**.

Tout module est un quotient de projectifs; tous les connaître ouvre donc une fenêtre sur la théorie complète de la représentation d'une algèbre.

Chapitre 2

Algèbres cellulaires

En 1996, Graham et Lehrer [10] introduisirent une notion inspirée des bases de Kazhdan-Lusztig pour les algèbres d'Iwahori-Hecke [20] dans le but de tirer profit des propriétés permettant l'étude aisée des représentations de ces algèbres. Ce qui transparaît de l'abstraction de Graham et Lehrer est l'explicitation d'une base particulière, dite cellulaire, qui induit une famille de modules, nommés cellulaires, auxquels est associée une forme bilinéaire qui permet d'en étudier la structure.

Les algèbres de Temperley-Lieb sont des exemples d'algèbres cellulaires. Les résultats non-prouvés du chapitre 1 trouvent ici leur justification et preuve. Comme la définition est assez complexe, l'algèbre de Temperley-Lieb sera utilisée en exemple afin de créer une intuition utile pour les preuves.

Notre principale source sera l'article original de Graham et Lehrer [10], mais des emprunts à des sources plus récentes, notamment Mathas [20], Xi [27] et Deng, Du, Parshall et Wang [6] seront faits afin de moderniser l'approche.

2.1. Définition et résultats généraux

Cette section présente la définition d'algèbre cellulaire, une preuve que les algèbres de Temperley-Lieb sont cellulaires et quelques conséquences immédiates de la définition.

2.1.1. Définition

Définition 2.1.1 (Graham-Lehrer [10]). *Soit R un anneau commutatif unifié. Une algèbre cellulaire sur R est une R -algèbre associative unifiée A avec une **structure cellulaire** $(\Lambda, M, C, *)$, où*

C1) La donnée Λ est un ensemble ordonné¹ et, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, un ensemble $M(\lambda)$ fini est associé.

C2) L'application $C : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow A$ est injective et a comme image une base de A . Si $S, T \in M(\lambda)$, l'image $C(S, T)$ sera parfois notée $C_{S, T}^\lambda$.

C3) L'application $*$: $A \rightarrow A$ est une anti-involution telle que $(C_{S, T}^\lambda)^* = C_{T, S}^\lambda$.

C4) Si $S, T \in M(\lambda)$, alors pour tout élément $a \in A$:

$$a C_{S, T}^\lambda \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C_{S', T}^\lambda \pmod{A^{<\lambda}}, \quad (2.1.1)$$

où $r_a(S', S) \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de T et où $A^{<\lambda}$ est le \mathbb{R} -sous-module de A engendré par $\{C_{U, V}^\mu \mid \mu < \lambda, U, V \in M(\mu)\}$.

C4*) Si $S, T \in M(\lambda)$, alors pour tout élément $a \in A$:

$$C_{S, T}^\lambda a^* \equiv \sum_{T' \in M(\lambda)} r_a(T', T) C_{S, T'}^\lambda \pmod{A^{<\lambda}}. \quad (2.1.2)$$

La condition C4*) n'est qu'une conséquence de l'application de l'anti-involution $*$ (2.1.1), mais il est utile de l'expliciter comme elle est souvent utilisée.

La force des algèbres cellulaires est la structure donnée par la base cellulaire. Il est important de souligner que la définition dépend de la base et que c'est de cette base que proviennent les résultats. Plusieurs bases cellulaires peuvent coexister pour une même algèbre. Bien que souvent, nous appelions A une algèbre cellulaire, il faudrait sans abus dire que A admet une structure cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$.

Remarque 2.1.2. *Il existe une définition alternative n'employant pas de base qui a été construite par König et Xi [17]. Les liens avec les algèbres quasi-héréditaires et le travail homologique en sont facilités ; en compromis, le travail sur des exemples concrets est beaucoup plus difficile.*

2.1.2. Cellularité des algèbres de Temperley-Lieb

Proposition 2.1.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. L'algèbre $TL_n(\beta)$ admet une structure cellulaire.*

1. Rappelons qu'en français, un ensemble ordonné est un ensemble muni d'un ordre partiel. En raison de la confusion avec l'anglais où un *ordered set* est un ensemble totalement ordonné, nous allons parfois ajouter « partiellement » au risque de courir au pléonasme.

Démonstration. Il faut exhiber une structure cellulaire. Pour débiter, $TL_n(\beta)$ est bien une \mathbb{C} -algèbre associative et unifère. L'ensemble ordonné Λ est défini par

$$\Lambda = \begin{cases} \{n > n-2 > \dots > 2 > 0\} & \text{si } n \text{ pair;} \\ \{n > n-2 > \dots > 3 > 1\} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour $d \in \Lambda$, l'ensemble $M(d)$ est défini comme l'ensemble des $n \leftarrow d$ diagrammes monos. L'anti-involution $*$ est donnée par la réflexion verticale des diagrammes.

Pour $S, T \in M(d)$, l'image $C(S, T)$ est définie comme la concaténation du $n \leftarrow d$ diagramme S avec le $d \leftarrow n$ diagramme T^* . L'application C est injective puisque les diagrammes considérés sont monos et que les deux côtés restent donc inchangés lors de la concaténation. De plus, elle a pour image une base de l'algèbre puisque tous les (n, n) -diagrammes sont couverts. En effet, pour un diagramme $n \leftarrow n$ donné avec d lignes transversales, il suffit de rajouter graphiquement une ligne au centre pour retrouver la composition d'un diagrammes $n \leftarrow d$ avec un diagramme $d \leftarrow n$. Par exemple,

$$(2.1.3)$$

La condition (2.1.1) est respectée puisque la multiplication de deux diagrammes ne peut que faire diminuer le nombre de lignes transversales et donc, soit tomber dans le quotient $(TL_n(\beta))^{\leq \lambda}$ qui représente les diagrammes avec moins de λ lignes transversales, soit rester avec d lignes transversales. De plus, en travaillant seulement avec les éléments de base, la multiplication $C_{U, V}^k C_{S, T}^d$ donne un diagramme avec au plus $\min(d, k)$ lignes transversales et dont le coefficient ne dépend que de V et de S : c'est le facteur β issu des boucles fermées. \square

Exemple 2.1.4. Afin de bien illustrer la base cellulaire, voici TL_3 dans toute sa splendeur. Tout d'abord, l'ensemble Λ et ses tableaux :

$$\Lambda = \{3, 1\}, \text{ ordonnée par } 3 > 1; \quad M(3) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right\}; \quad M(1) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \text{Boucle} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \text{Boucle} \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Maintenant, l'action de la fonction C est donnée explicitement sur les éléments de $M(1)$ et de $M(3)$. Le résultat donne les cinq vecteurs de la base usuelle de $TL_3(\beta)$. La première famille,

$C(M(3) \times M(3))$, est assez simple :

$$c \left(\left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right) \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$

et donc

$$(\text{TL}_3(\beta))^{\leq 3} / (\text{TL}_3(\beta))^{< 3} = (\text{TL}_3(\beta))^3 = \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right\rangle_c .$$

La deuxième a plus de membres, mais reste assez conciliante :

$$\begin{aligned} c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \\ c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \\ c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \\ c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right) &= \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

et

$$(\text{TL}_3(\beta))^{\leq 1} / (\text{TL}_3(\beta))^{< 1} = (\text{TL}_3(\beta))^1 = \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right\rangle_c .$$

De ces deux ensemble, en effet, la base de TL_3 est obtenue :

$$(\text{TL}_3)^3 \cup (\text{TL}_3)^1 = \mathfrak{B}_3.$$

Ne reste qu'à illustrer l'anti-involution : l'exemple qui suit couvre le cas non-trivial pour l'axiome

(C3)

$$c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right)^* = \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right)^* = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = c \left(\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} \right).$$

Finalemment, il est clair que (2.1.1) est respectée puisque d'aucune façon le nombre de défauts n'augmente lorsque deux diagrammes sont multipliés ; les lignes transversales ne peuvent qu'être annihilées, jamais créées.

2.1.3. Résultats généraux sur les algèbres cellulaires

Les idempotents forment une pierre angulaire de la théorie de la représentation : ils permettent de généraliser des structures et ont des liens fort avec les projectifs. L'approche du chapitre 3 se base sur ces idées. Leur force se fait sentir dans les algèbres cellulaires ; justement König et Xi exploitèrent leurs propriétés afin de montrer qu'une généralisation naturelle d'une algèbre cellulaire à l'aide de ses idempotents est cellulaire. Nous reproduisons la preuve en utilisant les bases cellulaires afin de donner explicitement la construction.

Proposition 2.1.5 (Prop. 4.3, [17]). *Soit R un anneau commutatif, unifère et associatif. Soient A une R -algèbre munie d'une structure cellulaire $(\Lambda_A, M_A, C_A, *_A)$ et $e \in A$ un idempotent. L'algèbre $B = eAe$ est cellulaire.*

Il est à noter que n'est pas spécifiée la base cellulaire à utiliser. Ce n'est pas un oubli de notre part ; c'est que le résultat est issu du langage sans base de König et Xi. La clef ici est que la base dépend d'où est envoyé l'idempotent e par l'anti-involution $*$. Nous allons donner explicitement la base cellulaire dans le cas où $e^* = e$ puisque c'est ce cas qui nous intéressera par après.

Démonstration (dans le cas $e^* = e$). La preuve constructive ci-dessous donne la structure cellulaire $(\Lambda_B, M_B, C_B, *_B)$ associée. L'ensemble ordonné Λ_B est pris comme étant Λ_A . Pour $\lambda \in \Lambda_B$, l'ensemble $M_B(\lambda)$ est défini par

$$M_B(\lambda) = M_A(\lambda) \setminus U_B(\lambda),$$

avec

$$U_B(\lambda) = \left\{ S \in M_A(\lambda) \mid eC_A^\lambda(S, T) = 0, \forall T \in M_A(\lambda) \right\}.$$

Notons qu'en raison de l'axiome (2.1.1), dès que $eC_A^\lambda(S, T) = 0$ pour un $T \in M_A(\lambda)$ alors $eC_A^\lambda(S, -) \equiv 0$. De même, l'application de l'anti-involution (2.1.2) donne qu'il est aussi possible de définir de même façon pour l'action à droite de e la structure cellulaire sur B .

Ceci noté, la fonction C_B est donnée par

$$C_B : \bigcup_{\lambda \in \Lambda_B} M_B(\lambda) \times M_B(\lambda) \longrightarrow B$$

$$(S, T) \longmapsto eC_A^\lambda(S, T)e.$$

Il découle directement de la définition que tous les éléments forment une base de B puisque l'image de C_A est une base de A et l'ensemble U_B n'enlève que les éléments qui sont annihilés par l'idempotent.

L'involution $*_B$ est simplement la restriction de l'involution $*_A$ à eAe . Avec $e^* = e$, la compatibilité de l'anti-involution $*$ avec la fonction C est vérifiée

$$\left(C_B^\lambda(S, T)\right)^* = \left(eC_A^\lambda(S, T)e\right)^* = e^* \left(C_A^\lambda(S, T)\right)^* e^* = eC_A^\lambda(T, S)e = C_B^\lambda(T, S).$$

Il ne reste plus qu'à prouver que l'axiome (2.1.1) est vérifié. Soit $b \in eAe$ et soit $C_B^\lambda(S, T)$ pour des éléments S et T de $M(\lambda)$. Par distributivité, il est possible de se restreindre au cas où il existe un $a \in A$ tel que $eae = b$. L'action de b sur $C_B^\lambda(S, T)$ donne alors

$$bC_B^\lambda(S, T) = (eae)eC_A^\lambda(S, T)e$$

$$= e \left((eae)C_A^\lambda(S, T) \right) e,$$

parce que $e^2 = e$ est un idempotent, ce qui est maintenant équivalent par l'axiome (2.1.1) à

$$bC_B^\lambda(S, T) \equiv e \left(\sum_{S' \in M_A(\lambda)} r_{eae}(S', S) C_A^\lambda(S', T) \right) e \pmod{A^{<\lambda}}$$

$$\equiv \sum_{S' \in M_A(\lambda)} r_{eae}(S', S) eC_A^\lambda(S', T)e \pmod{A^{<\lambda}}$$

$$\equiv \sum_{S' \in M_B(\lambda)} r_b(S', S) C_B^\lambda(S', T) \pmod{B^{<\lambda}}.$$

Ceci donne explicitement la structure cellulaire de B . □

Définition 2.1.6. Soit $(A, \Lambda, M, C, *)$ une R -algèbre cellulaire. Soit $\Lambda' \subset \Lambda$. La sous-algèbre engendrée par les éléments de la base issue du sous-ensemble Λ' est

$$A(\Lambda') := \left\langle C_{S, T}^\lambda \mid \lambda \in \Lambda', S, T \in M(\lambda) \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Un sous-ensemble Φ de Λ tel que pour tout $\phi \in \Phi$, les éléments ψ plus petit que ϕ sont dans Φ , est nommé **idéal** de Λ .

L'ensemble $A(\{\lambda\}) = A^{\leq \lambda} / A^{< \lambda}$ sera noté A^λ .

Remarque 2.1.7. Si Φ est un idéal de Λ , alors les conditions (2.1.1) et (2.1.2) assurent que $A(\Phi)$ est un idéal bilatère de A . Quant à lui, A^λ est un $(A-A)$ -bimodule, mais pas nécessairement un idéal lorsque λ n'est pas minimal, c'est en fait la somme directe sur les $T \in M(\lambda)$ des A -modules $A_{-,T}^\lambda = \langle C_{S,T}^\lambda \mid S \in M(\lambda) \rangle$.

L'étude des algèbres cellulaires passe par les représentations. Par chance, la condition (2.1.1) donne une structure canonique de représentation.

Définition 2.1.8. Pour $\lambda \in \Lambda$, le A -module à gauche $W(\lambda)$ est défini comme le R -module libre de base² $\{c_S \mid S \in M(\lambda)\}$ avec l'action de A donnée par

$$ac_S = \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) c_{S'} \quad (2.1.4)$$

avec le coefficient $r_a(S', S)$ issu de l'équation (2.1.1). Ce module est appelé **module cellulaire**.

La présence d'une anti-involution $*$ préservant la structure permet de définir le module droit $W(\lambda)^*$ par l'action $c_S^\lambda \cdot a := a^* c_S^\lambda$. En effet,

$$c_S^\lambda \cdot (ab) = (ab)^* c_S^\lambda = (b^* a^*) c_S^\lambda = b^* (c_S^\lambda \cdot a) = (c_S^\lambda \cdot a) \cdot b.$$

Lemme 2.1.9. Il y a un isomorphisme naturel de R -modules

$$\begin{aligned} C^\lambda : W(\lambda) \otimes_R W(\lambda)^* &\longrightarrow A^\lambda \\ (c_S \otimes c_T) &\longmapsto C_{S,T}^\lambda + A^{< \lambda}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Démonstration. Le sous-module A^λ est engendré par les éléments $C_{S,T}^\lambda$. L'application est clairement surjective et l'injectivité de C induit celle de C^λ . \square

Ceci donne une identification entre le A -module $W(\lambda)$ et le A -module $A_{-,T}^\lambda$ par l'application envoyant c_S^λ à $C_{S,T}^\lambda + A^{< \lambda}$, et ce, peu importe le $T \in M(\lambda)$.

La présence de ces modules et des axiomes (2.1.1) et (2.1.2) inspire la définition d'une forme bilinéaire qui permettra d'obtenir des informations sur la structure en passant par

2. Les éléments c_S ne sont que des éléments formels.

l'algèbre linéaire. Soient $\lambda \in \Lambda$ et $S, T, P, Q \in M(\lambda)$. La multiplication de $C_{S,T}^\lambda$ et de $C_{P,Q}^\lambda$ donne par (2.1.1)

$$C_{S,T}^\lambda C_{P,Q}^\lambda \equiv \sum_{P' \in M(\lambda)} r_{C_{S,T}^\lambda}(P', P) C_{P',Q}^\lambda \pmod{A^{<\lambda}} \quad (2.1.6)$$

et par (2.1.2), en rappelant que $(C_{P,Q}^\lambda)^* = C_{Q,P}^\lambda$,

$$C_{S,T}^\lambda C_{P,Q}^\lambda \equiv \sum_{T' \in M(\lambda)} r_{C_{Q,P}^\lambda}(T', T) C_{S,T'}^\lambda \pmod{A^{<\lambda}}. \quad (2.1.7)$$

En soustrayant les deux, nous obtenons que les coefficients $r_{C_{S,T}^\lambda}(P', P) = r_{C_{Q,P}^\lambda}(T', T) = 0$ si $P' \neq Q$ ou $T' \neq S$ et que le reste des coefficients sont indépendants de S et Q . Bref, la somme ci-dessus devient

$$C_{S,T}^\lambda C_{P,Q}^\lambda \equiv r_\lambda(T, P) C_{S,Q}^\lambda \pmod{A^{<\lambda}}. \quad (2.1.8)$$

Il y a donc un élément de R qui est associé canoniquement à T et P par la base cellulaire.

Définition 2.1.10. *Sur $W(\lambda)$ est définie une forme bilinéaire*

$$\begin{aligned} \phi_\lambda : W(\lambda) \times W(\lambda) &\longrightarrow R \\ (c_T, c_P) &\longmapsto r_\lambda(T, P). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Comme annoncé, ce seront les propriétés de cette forme bilinéaire qui fourniront des informations primordiales sur les représentations cellulaires. Déjà, la forme est invariante et elle est liée avec l'isomorphisme (2.1.5) par le lemme suivant.

Lemme 2.1.11. *Soit $\lambda \in \Lambda$. La forme bilinéaire ϕ_λ respecte les trois conditions suivantes :*

(1) *pour $x, y \in W(\lambda)$,*

$$\phi_\lambda(x, y) = \phi_\lambda(y, x); \quad (2.1.10)$$

(2) *pour $a \in A$ et $x, y \in W(\lambda)$,*

$$\phi_\lambda(a^* x, y) = \phi_\lambda(x, ay). \quad (2.1.11)$$

(3) *pour $S, T \in M(\lambda)$ et $x \in W(\lambda)$,*

$$C_{S,T}^\lambda x = \phi_\lambda(x, c_S) c_T. \quad (2.1.12)$$

Démonstration. Pour toutes ces affirmations, la bilinéarité de la forme assure qu'il suffit de démontrer l'énoncé lorsque $x = c_P$ et $y = c_Q$ pour certains $P, Q \in M(\lambda)$ sans perte de généralité.

La première affirmation découle ensuite de la définition de ϕ_λ ainsi que de l'application de l'anti-involution $*$. Soient $U, V \in M(\lambda)$.

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(c_P, c_Q)C_{U,V}^\lambda &\equiv C_{U,P}^\lambda C_{Q,V}^\lambda \bmod A^{<\lambda} \equiv \left(C_{V,Q}^\lambda C_{P,U}^\lambda\right)^* \bmod A^{<\lambda} \\ &\equiv \left(\phi_\lambda(c_Q, c_P)C_{V,U}^\lambda\right)^* \bmod A^{<\lambda} \equiv \phi_\lambda(c_Q, c_P)C_{U,V}^\lambda \bmod A^{<\lambda},\end{aligned}$$

et donc $\phi_\lambda(c_Q, c_P) = \phi_\lambda(c_Q, c_P)$.

Pour la deuxième, il suffit de considérer les deux choix de parenthèses de l'expression $C_{U,P}^\lambda a C_{Q,V}^\lambda$:

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(a^* c_P, c_Q)C_{U,V}^\lambda &\equiv (C_{U,P}^\lambda a)C_{Q,V}^\lambda \bmod A^\lambda \\ &\equiv C_{U,P}^\lambda (a C_{Q,V}^\lambda) \bmod A^\lambda \\ &\equiv \phi_\lambda(c_P, a c_Q)C_{U,V}^\lambda \bmod A^\lambda.\end{aligned}$$

La dernière affirmation est immédiate lorsque $x = c_P$: la définition de ϕ_λ donne justement que

$$C_{S,T}^\lambda c_P = \phi_\lambda(c_P, C_S) c_T.$$

□

2.2. Algèbres cellulaires sur un corps

Passer d'un anneau R à un corps \mathbb{K} permet l'usage le plus riche des modules cellulaires. Dans cette section, l'argument typique passe tout d'abord par l'usage de la bilinéarité de la forme et de sa définition sur un corps pour obtenir deux vecteurs v et w du module cellulaire $W(\lambda)$ tels que $\phi^\lambda(v, w) = 1$ lorsque la forme est non-nulle, puis exploite les lemmes de la section précédente afin de lier les informations obtenues sur la forme avec la structure du module cellulaire.

Pour toute cette section, $(A, \wedge, M, C, *)$ sera une \mathbb{K} -algèbre cellulaire pour \mathbb{K} , un corps.

Définition 2.2.1. Soient \mathbb{K} un corps et A une \mathbb{K} -algèbre cellulaire avec structure cellulaire $(\wedge, M, C, *)$. Est nommée **radical de Jacobson** d'un A -module, l'intersection de ses sous-modules propres maximaux. Dans le cas d'un module cellulaire $W(\lambda)$, ce sous-module est noté $\text{Rad}(\lambda)$.

D'autre part, le sous-ensemble de $W(\lambda)$ contenant tous les vecteurs v rendant $\phi_\lambda(v, -)$ identiquement nulle est appelé **radical de la forme bilinéaire** et noté $\text{rad}(\lambda)$. Précisément,

$$\text{rad}(\lambda) = \{v \in W(\lambda) \mid \phi_\lambda(v, w) = 0, \forall w \in W(\lambda)\}. \quad (2.2.1)$$

Le but des propositions suivantes est de montrer que les deux notions coïncident pour un module cellulaire $W(\lambda)$.

Proposition 2.2.2. *Soit $\lambda \in \Lambda$. Le radical de la forme bilinéaire $\text{rad}(\lambda)$ est un sous-module de $W(\lambda)$.*

Démonstration. Si $v, w \in \text{rad}(\lambda)$, alors pour $z \in W(\lambda)$ la bilinéarité donne $\phi_\lambda(v + w, z) = \phi_\lambda(v, z) + \phi_\lambda(w, z) = 0$. Par la suite, pour $a \in A$ alors $av \in \text{rad}(\lambda)$ par l'invariance de la forme (2.1.11) puisque $\phi_\lambda(av, x) = \phi_\lambda(v, a^*x) = 0$. \square

Proposition 2.2.3. *Soit $\lambda \in \Lambda$. Si ϕ_λ n'est pas identiquement nulle, alors le quotient $W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ est simple.*

Démonstration. Soit $z \in W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ non-nul. Autrement dit, il existe $z_1 \in W(\lambda)$ tel que $z_1 \notin \text{rad}(\lambda)$ et que $z = z_1 + \text{rad}(\lambda)$. Par linéarité et comme la forme est définie sur un corps, il existe un élément $y \in W(\lambda)$ tel que $\phi_\lambda(y, z_1) = 1$. Soit $x \in W(\lambda)$. Le lemme 2.1.11 point (3) donne

$$x = x\phi_\lambda(y, z_1) = C^\lambda(x \otimes y)z_1 \in Az_1. \quad (2.2.2)$$

De cela, $W(\lambda) \subset Az_1$. Aussi, comme $W(\lambda)$ est un A -module, il est certain que $Az_1 \subset W(\lambda)$ et de là $W(\lambda) = Az_1$. Il suffit de quotienter des deux côtés de cette dernière égalité afin d'obtenir

$$W(\lambda)/\text{rad}(\lambda) = Az, \quad (2.2.3)$$

et ce, peu importe le z choisi tant que $z + \text{rad}(\lambda)$ ne soit pas nul; le quotient est donc simple. \square

Proposition 2.2.4. *Soit $\lambda \in \Lambda$. Si ϕ_λ n'est pas identiquement nulle, alors $\text{rad}(\lambda)$ est le radical de Jacobson du A -module $W(\lambda)$.*

Démonstration. Débutons par montrer l'inclusion du radical de Jacobson, $\text{Rad}(\lambda)$, dans le radical de la forme $\text{rad}(\lambda)$. Par l'argument précédent, il existe un $z \in W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ non-nul tel que $W(\lambda)/\text{rad}(\lambda) = Az$, donc le quotient est non-nul et simple ce qui entraîne

la maximalité du sous-module $\text{rad}(\lambda)$. Il contient donc $\text{Rad}(\lambda)$, l'intersection des sous-modules maximaux. Maintenant, montrons l'inclusion inverse. Pour ce faire, prouvons le fait que $\text{rad}(\lambda)$ est l'unique sous-module maximal. Soit un élément x non-nul de $W(\lambda)$ qui ne soit pas dans $\text{rad}(\lambda)$. Il existe $y \in W(\lambda)$ tel que $\phi_\lambda(y, x) = 1$. Cet élément s'écrit comme une combinaison \mathbb{K} -linéaire des éléments de la base du module cellulaire

$$y = \sum_{S \in M(\lambda)} r_S c_S. \quad (2.2.4)$$

Pour $T \in M(\lambda)$, posons

$$y(T) = \sum_{S \in M(\lambda)} r_S C_{T,S}^\lambda. \quad (2.2.5)$$

Du lemme 2.1.11 découle ensuite que l'action de x sur $y(T)$ donne :

$$xy(T) = \sum_{S \in M(\lambda)} r_S C_{S,T}^\lambda x = \sum_{S \in M(\lambda)} r_S \phi_\lambda(x, c_S) c_T = \phi_\lambda(x, y) c_T = c_T.$$

Ainsi, tout élément qui n'est pas dans $\text{rad}(\lambda)$ engendre tout $W(\lambda)$. Par conséquent, $\text{rad}(\lambda)$ est l'unique sous-module maximal ; c'est donc le radical de Jacobson de $W(\lambda)$. \square

Lorsque A est cellulaire et que $e^2 = e \in A$ est un idempotent, la proposition 2.1.5 a montré la cellularité de l'algèbre eAe . En raison de l'invariance de la forme bilinéaire ϕ , le radical des modules de l'algèbre eAe se trouve facilement.

Proposition 2.2.5. *Soient A une algèbre cellulaire muni d'une structure cellulaire $(\lambda, M, C, *)$ et $e \in A$, un idempotent tel que $e^* = e$. L'équivalence de eAe -modules gauches*

$$\text{rad}(e\mathcal{V}) = e \text{rad}(\mathcal{V}) \quad (2.2.6)$$

tient pour tout module cellulaire \mathcal{V} de A .

Démonstration. Soit $e\mathcal{V}$ un eAe -module cellulaire. De la preuve de la proposition 2.1.5, nous avons que la forme bilinéaire ϕ_e associée à $e\mathcal{V}$ est issue de la forme bilinéaire ϕ associée au A -module cellulaire \mathcal{V} par

$$\phi_e(v, w) = \phi(ev, ew). \quad (2.2.7)$$

Le radical $\text{rad}(e\mathcal{V})$ est le radical de la forme ϕ_e par la proposition 2.2.4. Un élément $w \in \text{rad}(e\mathcal{V})$ sera de la forme ev pour $v \in \mathcal{V}$; l'invariance de la forme, le lemme 2.1.11, donne

que $v \in \text{rad}(\mathcal{V})$. En effet, les deux ensembles sont en bijection. Si $ev \in \text{rad}(e\mathcal{V})$, alors pour $z \in \mathcal{V}$,

$$\phi(ev, z) = \phi(e^2v, z) = \phi(ev, ez) = 0,$$

et donc $ev \in \text{rad}(\mathcal{V})$. Soit $v \in \text{rad}(\mathcal{V})$ et alors pour $ew \in e\mathcal{V}$,

$$\phi(ev, ew) = \phi(v, ew) = 0,$$

et donc $ev \in \text{rad}(e\mathcal{V})$. □

Avant de continuer, seront notés $L_\lambda = W(\lambda)/\text{rad}(\lambda)$ et $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \mid \phi_\lambda \neq 0\}$ respectivement le module simple associé à λ et le sous-ensemble de Λ où la forme n'est pas dégénérée.

Proposition 2.2.6. *Si $\theta : W(\lambda) \rightarrow W(\mu)$ est un morphisme de A -modules, alors $\theta \equiv 0$ sauf si $\lambda \geq \mu$.*

Démonstration. La preuve n'est pas difficile, mais un peu longue (voir Prop. 2.12 dans [20]). □

Proposition 2.2.7. *L'ensemble des modules simples $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ forme un ensemble complet de A -modules simples non-isomorphes.*

Démonstration. Comme il vient d'être montré, les L_λ pour $\lambda \in \Lambda_0$ sont tous simples.

Par après, il faut montrer que l'ensemble à l'étude est constitué de modules non-isomorphes. Pour ce faire, soit $f : L_\lambda \rightarrow L_\mu$ un isomorphisme. Alors par la proposition précédente, il faut que $\mu \geq \lambda$ et $\lambda \geq \mu$ ce qui veut dire $\lambda = \mu$.

Avant de passer à la complétude, il y a une filtration donnée par un arrangement des $\lambda \in \Lambda$, par exemple : $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de sorte à ce que l'inégalité $\lambda_i < \lambda_j$ implique que $i < j$. En rappelant que l'idéal bilatère engendré par les $C_{S,T}^{\lambda_\ell}$ avec $\ell \leq i$ est noté $A^{\leq \lambda_i}$,

$$0 \subset A^{\leq \lambda_1} \subset \dots \subset A^{\leq \lambda_n} = A$$

et alors chaque quotient est $A^{\leq \lambda_i}/A^{\leq \lambda_{i-1}} \simeq A(\{\lambda_i\}) = A^{\lambda_i}$ en tant que A -modules.

Soit un module simple L . Il faut montrer qu'il existe un λ tel que $L \simeq L_\lambda$. Pour ce faire, soit le plus petit i tel que $A^{\leq \lambda_i}L \neq 0$. La minimalité de i donne que $A^{\lambda_i}L \neq 0$. La remarque 2.1.7 soulevait que le A -module A^{λ_i} est une somme directe des A -modules $A_{-,T}^{\lambda_i}$ pour les

$T' \in M(\lambda_i)$; comme $A^{\lambda_i}L \neq 0$, il suit qu'il y a un $T \in M(\lambda)$ tel que $A_{-,T}^{\lambda_i}L \neq 0$. Or, cela veut dire que L admet un A -sous-module non-nul, et donc pour un certain $v \in L$,

$$L \simeq A_{-,T}^{\lambda_i}L \simeq A_{-,T}^{\lambda_i}v.$$

De cela, il existe un épimorphisme de A -modules entre $A_{-,T}^{\lambda_i}$ et L donné par $a \mapsto av$. Il existe donc un $S \in M(\lambda_i)$ tel que $C_{S,T}^{\lambda_i}v \neq 0$. Par conséquent, $\lambda_i \in \Lambda_0$ puisque l'existence de l'épimorphisme implique l'existence d'au moins un $S' \in M(\lambda_i)$ tel que $C_{S,T}^{\lambda_i}C_{S',T}^{\lambda_i} \not\equiv 0 \pmod{A^{<\lambda_i}}$ et donc, ϕ_{λ_s} n'est pas identiquement nulle. En passant maintenant de $W(\lambda_i)/\text{rad}(\lambda_i)$ à un sous-ensemble de $A_{-,T}^{\lambda_i}$ par l'isomorphisme découlant de 2.1.9, le fait que $\lambda_i \in \Lambda_0$ indique qu'il y a au moins un élément a tel que $av \neq 0 \in L$. Cela donne donc un isomorphisme entre L et $W(\lambda_i)/\text{rad}(\lambda_i) = L_{\lambda_i}$.

De cela, nous avons la complétude de l'ensemble. □

Le prochain résultat est utile dans le cas où la forme bilinéaire a radical nul. Comme nos résultats nouveaux apparaissent dans le cas où q est une racine de l'unité telle que la forme bilinéaire a un radical non trivial et que la preuve du théorème utilise des notions dont l'introduction demanderait plus d'espace, nous le donnerons sans preuve.

Théorème 2.2.8 (Graham-Lehrer [10]). *Soit A une \mathbb{K} -algèbre munie d'une structure cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

- (1) A est semi-simple;
- (2) les modules cellulaires $W(\lambda)$ sont simples et non-isomorphes;
- (3) la forme bilinéaire ϕ_λ est non-dégénérée pour tout $\lambda \in \Lambda$, c'est-à-dire que $\text{rad}(\lambda) = 0$.

Démonstration. Les preuves de (1) \Rightarrow (3) et de (3) \Rightarrow (2) sont faciles, celle de (2) \Rightarrow (1) est plus complexe (voir [10] Théorème 3.8 ou [20] Corollaire 2.21). □

La cellularité d'une algèbre permet le traitement de la structure des représentations cellulaires par l'étude d'une forme bilinéaire. Lorsque celle-ci n'a pas de radical non-nul, l'algèbre est semi-simple. Il est possible de tirer profit plus finement de la structure cellulaire; nous le verrons au chapitre 4.

Chapitre 3

Algèbres à couture

Dans ce chapitre, les définitions et propriétés des algèbres à couture $B_{n,k}(\beta)$ seront introduites ainsi que leur théorie de la représentation pour q générique. La discussion suit de près l'appendice C de [21] pour les définitions et les conventions de notation. La partie sur sa cellularité est, à notre connaissance, nouvelle.

Les algèbres à couture sont intuitivement une généralisation des algèbres de Temperley-Lieb où une condition frontière particulière est ajoutée. Une partie, la domestique, se comporte donc comme le cas classique, tandis que l'autre, la limitrophe, exhibe un comportement plus exotique.

La première section donne trois définitions de l'algèbre $B_{n,k}$, observe les moments où elles sont équivalentes et traite de ce qu'il faut faire dans les cas pathologiques. La deuxième section présente le résultat de cellularité et introduit les modules cellulaires. Finalement, la dernière section porte sur la théorie de la représentation de l'algèbre pour un paramètre q générique.

Ce chapitre sera abondamment utilisé dans le chapitre 4, il montre les bases connues sur lesquelles nous nous appuyons pour construire les résultats lorsque q prend une valeur critique.

3.1. Constructions et équivalences

Cette première section contient trois objets mathématiques : a - $B_{n,k}$, d - $B_{n,k}$ et $A_{n,k}$. Nous les distinguons pour le moment de l'algèbre $B_{n,k}$ le temps de montrer les conditions donnant l'équivalence entre ceux-ci dans le théorème 3.1.13, qui est suivi par la définition explicite de $B_{n,k}$ selon les valeurs de q , n et k .

3.1.1. Projecteurs de Wenzl-Jones

La première brique de la construction des algèbres à couture est la famille d'idempotents composée des projecteurs de Wenzl-Jones. Ces projecteurs ont été introduits presque simultanément par Wenzl [25] et Jones [13] afin d'exprimer des invariants en théorie des nœuds. Une source utile pour les propriétés de ces projecteurs est le livre de Kauffman et Lins [15].

Les projecteurs de Wenzl-Jones sont usuellement définis sur les premiers générateurs de TL_n en partant du haut. Toutefois, afin de préserver l'intuition nous allons plutôt travailler sur TL_{n+k} avec les générateurs qui agissent sur les points $n + 1$ à $n + k$. Ces projecteurs admettent une jolie interprétation diagrammatique qui conserve l'intuition développée lors du premier chapitre.

Définition 3.1.1. Soient n et k deux nombres naturels. Pour $TL_{n+k}(\beta)$, les **projecteurs de Wenzl-Jones** sont définis récursivement par

$$P_1^{(k)} = \mathbb{1},$$

$$P_i^{(k)} = P_{i-1}^{(k)} - \frac{[i-1]_q}{[i]_q} P_{i-1}^{(k)} E_{n+k-i+1} P_{i-1}^{(k)}.$$

Ainsi, $P_i^{(k)}$ agit sur les points $n + k - i + 1$ à $n + k$.

Ces éléments sont très importants dans l'étude qui suit. Nous les noterons par les diagramme suivant :

$$P_i^{(k)} := \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline n+k-i \\ \hline \text{■} \\ \hline n+k-i+1 \\ \hline \vdots \\ \hline n+k \\ \hline \end{array} . \quad (3.1.1)$$

Par exemple, si $n = 2$ et $k = 2$, le projecteur $P_2^{(2)}$ est :

$$P_2^{(2)} = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{■} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} - \frac{1}{[2]_q} \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{○} \\ \hline \text{○} \\ \hline \end{array} .$$

Proposition 3.1.2 ([21]). *Les projecteurs de Wenzl-Jones respectent*

$$(P_k^{(k)})^2 = P_k^{(k)}, \quad (P_k^{(k)})^* = P_k^{(k)};$$

$$\begin{cases} P_k^{(k)} E_j = E_j P_k^{(k)}, & \text{quand } (n+1 \leq j < n+k); \\ P_k^{(k)} E_j = P_k^{(k)} E_j, & \text{lorsque } j < n; \end{cases}$$

$$E_n P_k^{(k)} E_n = \frac{[k+1]_q}{[k]_q} E_n P_{k-1}^{(k)}.$$

De plus, ils respectent la relation donnée par :

$$P_k^{(k)} = \frac{1}{[k]_q} \left([k]_q P_{k-1}^{(k)} - [k-1]_q P_{k-1}^{(k)} E_{n+1} + [k-2]_q P_{k-1}^{(k)} E_{n+1} E_{n+2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k-1} [1]_q P_{k-1}^{(k)} E_{n+1} E_{n+2} \dots E_{n+k-1} \right), \quad (3.1.2)$$

qui se traduit diagrammatiquement par

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \frac{1}{[k]_q} \left([k]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - [k-1]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \dots + (-1)^{k-1} [1]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right). \quad (3.1.3)$$

De la dernière égalité, il est possible d'obtenir que j boucles fermées croisant un projecteur de Wenzl-Jones de taille k se simplifient pour donner un projecteur de Wenzl-Jones de taille $k-j$ multiplié par un coefficient

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \frac{[k+1]_q}{[k+1-j]_q} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}. \quad (3.1.4)$$

Exemple 3.1.3. Si dans l'équation 3.1.4, $j = 2$ et $k = 4$ le calcul explicite donne :

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \frac{1}{[4]_q} \left([4]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - [3]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + [2]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - [1]_q \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right) \\ = \left([2]_q - \frac{[3]_q}{[4]_q} \right) \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \left([2]_q - \frac{[3]_q}{[4]_q} \right) \left([2]_q - \frac{[2]_q}{[3]_q} \right) \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \frac{[5]_q}{[3]_q} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}.$$

3.1.2. Définition algébrique

La première définition de $B_{n,k}$ est purement algébrique ; elle est similaire à la définition 0.0.1 et offre, comme elle, une approche avec laquelle il est, certes, moins aisée de travailler, mais qui donne l'assurance d'être bien définie peu importe la valeur de q . Pour distinguer des diagrammes, les générateurs seront notés avec des minuscules.

Définition 3.1.4 (Algébrique). Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et $q + q^{-1} =: \beta \in \mathbb{C}$. L'algèbre à couture $a-B_{n,k}(\beta)$ est la \mathbb{C} -algèbre engendrée par les générateurs $\mathbb{1}, e_1^{(k)}, \dots, e_{n-1}^{(k)}, e_n^{(k)}$ assujettis aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}x = x\mathbb{1}, \quad \text{pour tout } x \in a-B_{n,k}(\beta); \\ (e_i^{(k)})^2 = \beta e_i^{(k)}, \quad \text{dès que } i < n; \\ e_i^{(k)} e_j^{(k)} = e_j^{(k)} e_i^{(k)}, \quad \text{dès que } |i - j| > 1; \\ e_i^{(k)} e_j^{(k)} e_i^{(k)} = e_i^{(k)}, \quad \text{lorsque } |i - j| = 1 \text{ et } (i, j) \neq (n-1, n); \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

$$(e_n^{(k)})^2 = [k+1]_q e_n^{(k)};$$

$$e_{n-1}^{(k)} e_n^{(k)} e_{n-1}^{(k)} = [k]_q e_{n-1}^{(k)};$$

ainsi qu'à la relation suivante lorsque $n > k$

$$\left(\prod_{j=0}^k e_{n-j}^{(k)} \right) y_k^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^k e_{n-j}^{(k)} \right) y_k^{(k)}, \quad (3.1.6)$$

où les $y_t^{(k)}$ sont construits récursivement par

$$y_0^{(k)} = [k]_q \mathbb{1}^{(k)}, \quad y_1^{(k)} = e_n^{(k)},$$

$$y_{t+1}^{(k)} [k-t]_q (-1)^t = \left(\left(\prod_{j=0}^t e_{n-j}^{(k)} \right) y_t^{(k)} + \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^t e_{n-j}^{(k)} \right) y_t^{(k)} \right). \quad (3.1.7)$$

De cette façon, l'algèbre est bien définie peu importe la valeur de β .

3.1.3. Définition diagrammatique

Ici, nous introduisons la définition diagrammatique de l'algèbre à couture. Ce sera la forme principale avec laquelle nous travaillerons. Toutefois, il faut faire preuve de prudence puisque certains q -nombres peuvent s'annuler. Il est donc possible que le projecteur $P_k^{(k)}$ ne soit pas défini pour certains q .

Nous débuterons par le cas où q est générique. Le traitement nécessaire lorsque q est critique sera seulement fait dans la sous-section 3.1.6.

Définition 3.1.5 (Diagrammatique). Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et q un paramètre formel où $\beta := q + q^{-1}$. La $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -algèbre $d\text{-}B_{n,k}(\beta)$ issue¹ de TL_{n+k} est engendrée par l'identité $I^{(k)}$ et les générateurs $E_1^{(k)} \dots E_n^{(k)}$ donnés par

$$I^{(k)} = P_k^{(k)} I = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{■} \\ \hline \vdots \\ \hline n+1 \\ \hline n+k \\ \hline \end{array}, \quad E_j^{(k)} = P_k^{(k)} e_j = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline j \\ \hline \text{○} \quad \text{○} \\ \hline j+1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \text{■} \\ \hline n+1 \\ \hline n+k \\ \hline \end{array},$$

$$E_n^{(k)} = [k]_q P_k^{(k)} e_n P_k^{(k)} = [k]_q \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{○} \quad \text{○} \\ \hline n+1 \\ \hline \vdots \\ \hline n+2 \\ \hline \vdots \\ \hline n+k \\ \hline \end{array}.$$

De la définition des projecteurs, l'algèbre accepte des éléments qui respectent une condition similaire à celle des $y_j^{(k)}$ de la définition algébrique. Diagrammatiquement, ils ressemblent à

$$Y_t^{(k)} := [k]_q \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \text{○} \quad \text{○} \\ \hline n-t+1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \vdots \\ \hline \text{○} \quad \text{○} \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array}, \quad (3.1.8)$$

1. Bien que les éléments de $d\text{-}B_{n,k}(\beta)$ fassent partie de $\text{TL}_{n+k}(\beta)$, $d\text{-}B_{n,k}(\beta)$ n'est pas une sous-algèbre de $\text{TL}_{n+k}(\beta)$ puisque l'unité n'est pas la même : pour $d\text{-}B_{n,k}$, l'unité est $P_k^{(k)}$; celle de TL_{n+k} est I . Néanmoins, elle est fermée sous les opérations de $\text{TL}_{n+k}(\beta)$.

respectent les relations

$$Y_0^{(k)} = [k]_q I^{(k)}, \quad Y_1^{(k)} = E_n^{(k)},$$

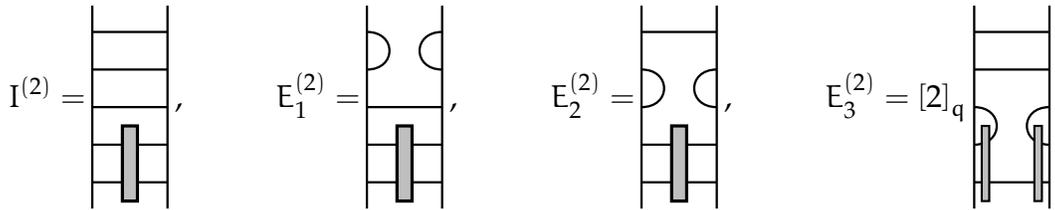
$$Y_{t+1}^{(k)} = \frac{(-1)^t}{[k-t]_q} \left(\left(\prod_{j=0}^t E_{n-j}^{(k)} \right) Y_t^{(k)} + \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^{i+1} [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^t E_{n-j}^{(k)} \right) Y_t^{(k)} \right), \quad (3.1.9)$$

et la relation supplémentaire

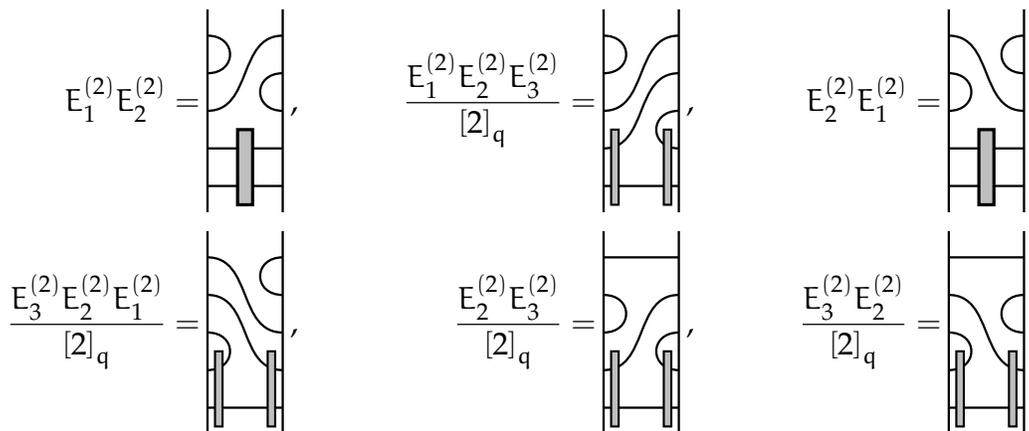
$$\left(\prod_{j=0}^k E_{n-j}^{(k)} \right) Y_k^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^k E_{n-j}^{(k)} \right) Y_k^{(k)}. \quad (3.1.10)$$

Exemple 3.1.6. Cet exemple assez complet sera utilisé tout au long du mémoire et présente toutes les subtilités du traitement de cette algèbre. Voici la vérification explicite des propriétés annoncées par la définition algébrique 3.1.4 pour le cas $d\text{-}B_{3,2}$.

Débutons par donner les générateurs $I^{(2)}$, $E_1^{(2)}$, $E_2^{(2)}$ et $E_3^{(2)}$:



Nous allons maintenant trouver tous les diagrammes avec un seul arc, ou alternativement, avec 3 défauts.



Il ne peut pas y avoir d'autre diagramme puisque cela forcerait un arc reliant deux point adjacents sur les projecteurs de Wenzl-Jones, ce qui donne zéro. Nous pouvons maintenant passer aux diagrammes avec deux arcs. Pour ceux-ci, il est possible de distinguer deux types. Le premier est aisé

puisque'il ne fait pas intervenir les diagrammes $Y_j^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \frac{E_1^{(2)} E_3^{(2)}}{[2]_q} &= \text{diagramme} \\ \frac{E_2^{(2)} E_1^{(2)} E_3^{(2)}}{[2]_q} &= \text{diagramme} \\ E_1^{(2)} E_3^{(2)} E_2^{(2)} &= \text{diagramme} \\ \frac{E_2^{(2)} E_1^{(2)} E_3^{(2)} E_2^{(2)}}{[2]_q} &= \text{diagramme} \end{aligned}$$

Les autres diagrammes qu'il faut débusquer sont plus ardues puisque, dans leur construction, entre le diagramme $Y_2^{(2)}$, l'équivalent du $y_2^{(2)}$ introduit à la section précédente. Débutons par le produit $E_3^{(2)} E_2^{(2)} E_3^{(2)}$, puis nous appliquons les propriétés des projecteurs, spécifiquement (3.1.2), pour avoir :

$$E_3^{(2)} E_2^{(2)} E_3^{(2)} = [2]_q^2 \text{diagramme} = [2]_q^2 \text{diagramme} - \frac{[2]_q^2 [1]_q}{[2]_q} \text{diagramme}$$

Il y a donc une expression de $Y_2^{(2)}$ par l'entremise d'une somme de générateurs :

$$Y_2^{(2)} = [2]_q \text{diagramme} = [2]_q E_3^{(2)} - E_3^{(2)} E_2^{(2)} E_3^{(2)}$$

À partir de cela, il est possible de trouver les derniers diagrammes en agissant à gauche et à droite de $Y_2^{(2)}$ par les générateurs.

$$\begin{array}{cc}
 Y_2^{(2)} E_1^{(2)} = \text{diagram} & Y_2^{(2)} E_1^{(2)} E_2^{(2)} = \text{diagram} \\
 E_1^{(2)} Y_2^{(2)} = \text{diagram} & E_2^{(2)} E_1^{(2)} Y_2^{(2)} = \text{diagram}
 \end{array}$$

Nous avons donc les 19 éléments. Petit fait arithmétique, notons qu'il y a un élément avec cinq lignes transversales, neuf avec trois et neuf avec une seule. Cela laisse présager une décomposition de $B_{n,k}$ similaire à celle de TL_n (1.2.14).

L'algèbre $d\text{-}B_{3,2}(\beta)$ vérifie les relations (3.1.5) définissant $a\text{-}B_{3,2}(\beta)$. La plupart sont issues de Temperley-Lieb et ne nécessitent pas de vérification, seules celles impliquant $E_3^{(2)}$ devront passer sous notre loupe. Débutons par $(E_3^{(2)})^2 = [3]_q E_3^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
 E_3^{(2)} E_3^{(2)} &= [2]_q^2 \text{diagram} = [2]_q^2 \left(\text{diagram} - \frac{1}{[2]_q} \text{diagram} \right) \\
 &= [2]_q^2 \left(\beta - \frac{1}{[2]_q} \right) \text{diagram} = [2]_q [3]_q \text{diagram} = [3]_q E_3^{(2)}.
 \end{aligned}$$

La dernière simplification provient de $\beta = [2]_q$ et de $([2]_q^2 - 1) = [3]_q$.

Nous pouvons maintenant passer à la prochaine identité : $E_2^{(2)} E_3^{(2)} E_2^{(2)} = [2]_q E_2^{(2)}$.

$$E_2^{(2)} E_3^{(2)} E_2^{(2)} = [2]_q \text{ (diagram with 3 strands and crossings)} = [2]_q \text{ (diagram with 2 strands and crossings)} = [2]_q E_2^{(2)}.$$

Il ne reste qu'à vérifier (3.1.6). L'équation effraie par sa taille, mais, dans le cas présent, elle se lit simplement :

$$(E_3^{(2)} E_2^{(2)} E_1^{(2)}) Y_2^{(2)} = [2]_q (E_1^{(2)}) Y_2^{(2)} - [1]_q (I^{(2)}) Y_2^{(2)}.$$

L'explicitation du terme de gauche retourne bien au terme de droite :

$$\begin{aligned} E_3^{(2)} E_2^{(2)} E_1^{(2)} Y_2^{(2)} &= [2]_q^2 \text{ (diagram with 4 strands)} \\ &= [2]_q^2 \text{ (diagram with 3 strands)} \\ &= [2]_q^2 \text{ (diagram with 2 strands)} - \frac{[2]_q^2}{[2]_q} \text{ (diagram with 2 strands)} \\ &= [2]_q [2]_q \text{ (diagram with 2 strands)} - [2]_q \text{ (diagram with 2 strands)} \\ &= [2]_q E_1^{(2)} Y_2^{(2)} - Y_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Avec cet exemple, nous avons vérifié pour $n = 3$ et $k = 2$ que l'algèbre de $d-B_{n,k}$ satisfait les propriétés (3.1.5) et (3.1.6) de $a-B_{n,k}$ en β formel.

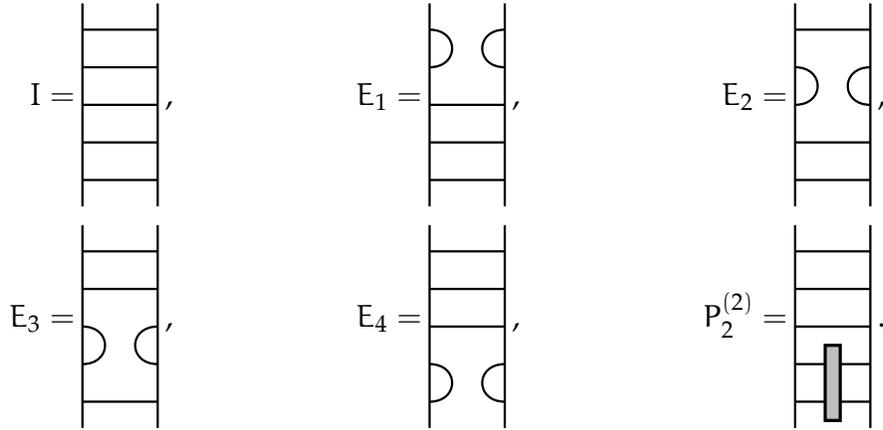
3.1.4. Définition par les projecteurs

Pour une algèbre quelconque A , si $e \in A$ est un idempotent, l'algèbre définie par eAe préserve certaines caractéristiques de l'algèbre originelle. Trouver une telle forme pour définir une algèbre isomorphe à $d-B_{n,k}$ en prenant comme base l'algèbre de Temperley-Lieb simplifierait l'étude en permettant de transposer des résultats.

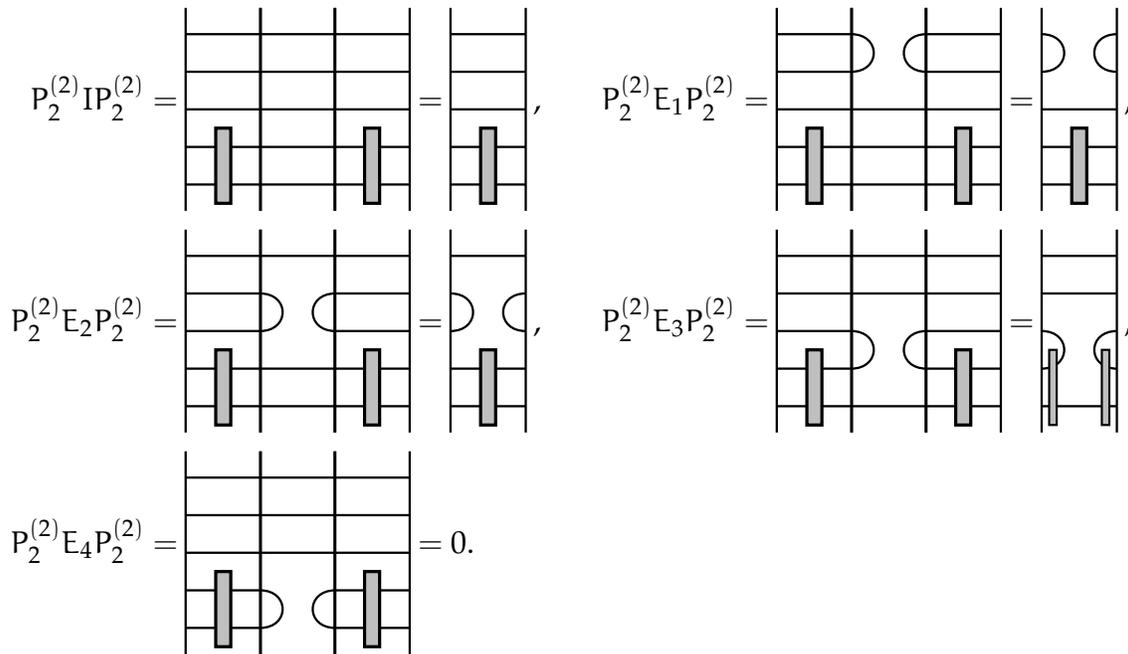
Définition 3.1.7. Soient n, k deux entiers et β un paramètre formel. L'algèbre $A_{n,k}$ est définie par

$$A_{n,k} = P_k^{(k)} TL_{n+k}(\beta) P_k^{(k)}. \quad (3.1.11)$$

Exemple 3.1.8. Par exemple, étudions $A_{3,2}$. Pour ce faire, il faut prendre les 42 éléments de TL_5 , puis les multiplier par les projecteurs des deux côtés. Voici explicitement le calcul pour les générateurs de TL_5 . Cette vérification a pour but de justifier l'équivalence de la prochaine section. Commençons par donner les participants :



Donnons ensuite les calculs en rappelant que les projecteurs de Wenzl-Jones respectent $(P_2^{(2)})^2 = P_2^{(2)}$ et qu'ils sont annulés dès qu'une boucle joint deux points limitrophes :



Par conséquent, il est possible d'identifier

$$\begin{aligned} I^{(2)} &= P_2^{(2)} I P_2^{(2)}, & E_1^{(2)} &= P_2^{(2)} E_1 P_2^{(2)}, \\ E_2^{(2)} &= P_2^{(2)} E_2 P_2^{(2)}, & E_3^{(2)} &= [2]_q P_2^{(2)} E_3 P_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Cela illustre qu'il est possible de voir $A_{n,k}$ comme l'algèbre engendrée par les éléments de TL_{n+k} qui n'ont aucune boucle reliant deux sites du projecteur de Wenzl-Jones $P_k^{(k)}$.

Cette dernière définition est très près de celle de l'algèbre $d-B_{n,k}$. Toutefois, il faut tout de même vérifier formellement l'isomorphisme : ce sera le but des deux prochaines sous-sections.

3.1.5. Équivalences aux valeurs formelles

Cette sous-section a pour but de montrer les équivalences entre les différentes définitions utilisées dans le cas β formel. Sans trop de surprise, nous verrons que les trois définitions sont équivalentes en ce cas, le problème se situant à la spécialisation de q . En effet, la définition des projecteurs de Wenzl-Jones utilise des fonctions rationnelles de q -nombres ce qui rend très sensible l'algèbre aux valeurs de q lorsque c'est une racine de l'unité, les valeurs les plus intéressantes d'un point de vue physique. Il sera donc important de bien saisir lorsqu'il sera possible de travailler avec la définition diagrammatique, plus aisée, et quand il faudra plutôt utiliser la définition algébrique.

Pour tout ce qui suit, nous poserons β comme un paramètre formel et fixerons $n, k \in \mathbb{N}$. Tout de suite, une proposition relie les définitions des sections 3.1.3 et 3.1.4.

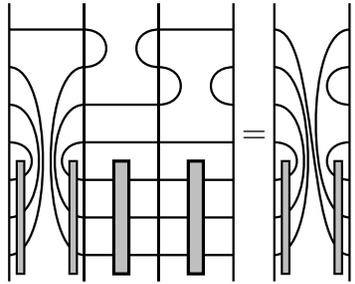
Proposition 3.1.9. *Lorsque β est formel, les $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -algèbres $A_{n,k}(\beta)$ et $d-B_{n,k}(\beta)$ sont isomorphes.*

Les éléments de $d-B_{n,k}(\beta)$, $I^{(k)}$ et $E_j^{(k)}$ sont des éléments de $A_{n,k}(\beta)$ puisqu'ils sont respectivement représentés par $P_k^{(k)} IP_k^{(k)}$ et $P_k^{(k)} E_j P_k^{(k)}$. Il en va de même pour les $Y_t^{(k)}$ définis par (3.1.9) : leur définition ne fait entrer que des générateurs $E_j^{(k)}$. Il suit de ce fait que $d-B_{n,k}(\beta)$ est une sous-algèbre de $A_{n,k}(\beta)$.

Afin de montrer que les deux algèbres sont isomorphes, il suffira donc de montrer que les $E_j^{(k)}$ et les $Y_t^{(k)}$ engendrent l'algèbre $A_{n,k}(\beta)$, sachant qu'une base de $A_{n,k}$ est donnée par les éléments $P_k^{(k)} a P_k^{(k)}$ pour les $a \in TL_{n+k}$ qui ne contiennent aucune boucle reliant deux points limitrophes.

L'idée de la preuve est de démontrer que si la sous-algèbre isomorphe à TL_n de $A_{n,k}(\beta)$ engendrée par les $E_j^{(k)}$, pour $1 \leq j \leq n-1$, agit sur les $Y_t^{(k)}$, alors il est possible de récupérer tous les $P_k^{(k)} a P_k^{(k)}$ de la base. La proposition 1.2.5, qui donne que tous les modules cellulaires \mathcal{V}_n^d de $TL_n(\beta)$ sont simples et cycliques lorsque β est formel, servira à cette fin.

Afin d'exemplifier ce que nous venons de dire, voici un exemple de procédure avec les générateurs $E_j^{(k)}$ et $Y_t^{(k)}$:

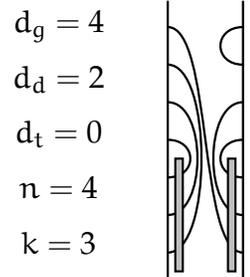
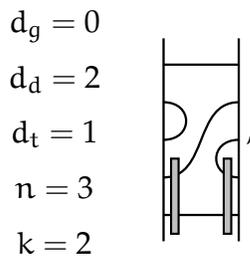


La preuve introduit un langage plus poussé pour caractériser ces diagrammes en fonction des lignes entre les points limitrophes et les points domestiques, respectivement les points $n + 1, \dots, n + k$ et les points $1, \dots, n$.

Démonstration. Soit $\alpha \in A_{n,k}(\beta)$ un diagramme. Les quantités suivantes sont utiles à la preuve :

- d_g : nombre de liens connectant un point domestique de gauche à un point limitrophe (à gauche ou à droite);
- d_d : nombre de liens connectant un point domestique de droite à un point limitrophe (à gauche ou à droite);
- d_t : nombre de liens connectant un point domestique de gauche à un point domestique de droite.

Par exemple, voici deux diagrammes ainsi que leurs constantes d_g , d_d et d_t respectives :

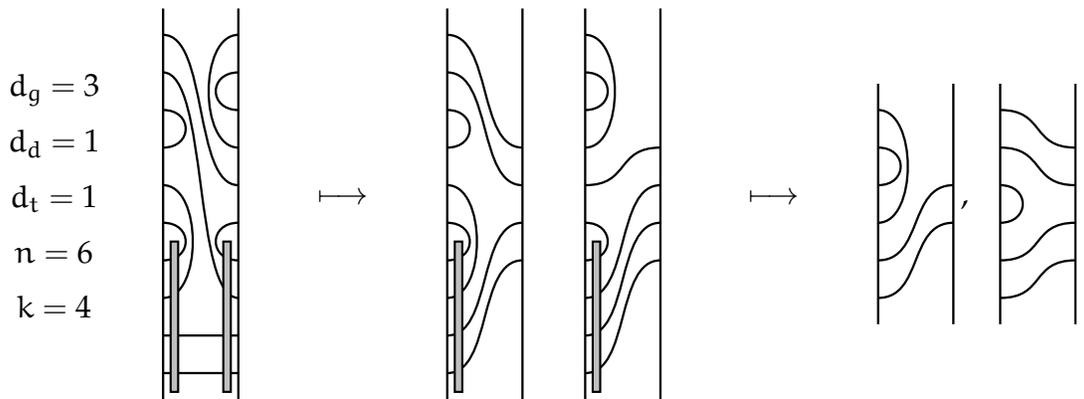


Il est à noter que $d_g + d_d \leq 2k$ et que la quantité $d_g + d_d$ doit être paire sous peine d'avoir un point limitrophe relié non rien.

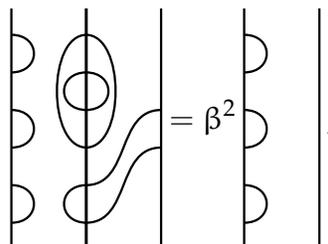
Lorsque $d_g > d_d$, comme dans le deuxième diagramme de l'exemple, il n'y a pas de point liant un point domestique à droite à un point limitrophe à gauche, sinon il y aurait croisement. Il y a donc $\frac{d_g + d_d}{2}$ liens entre domestiques et limitrophes de gauche et

$d_g - \frac{d_g + d_d}{2} = \frac{d_g - d_d}{2}$ liens entre domestiques de gauche et limitrophes de droite ainsi que d_d liens entre domestiques et limitrophes de droite. La discussion reste bien entendu la même lorsque $d_g < d_d$ en inversant d_g et d_d . Finalement, le cas $d_g = d_d$ indique que le diagramme est un des $Y_t^{(k)}$ et que donc, s'il y a un lien entre domestiques et limitrophes, ce sera du même côté.

Il est clair que si un diagramme a $d_g = 0 = d_d$, alors il est engendré par les $E_j^{(k)}$ pour $1 \leq j \leq n - 1$. Nous voulons montrer que, pour engendrer les autres diagrammes, il suffit de prendre un générateur par paire (d_g, d_d) . Pour ce faire, nous allons démontrer qu'il est possible de passer d'un diagramme α à deux éléments des modules cellulaires de TL_n , puis le résultat voulu découlera de la cyclicité de ces modules. Nous effectuons la construction en suivant un exemple. Pour un diagramme $\alpha \in A_{n,k}(\beta)$ avec $d_g > d_d$, un coupage est effectué au milieu afin de le transformer en deux diagrammes monos $n \leftarrow k - d_g + d_t$ comme à l'exemple de l'équation (2.1.3). Ensuite, les points limitrophes sont enlevés pour laisser deux éléments $n \leftarrow d_1$ et $n \leftarrow d_2$. Par exemple :



Toutes ces transformations sont inversibles en gardant en mémoire d_g et d_d . Maintenant, il suffit d'agir avec l'action naturelle de TL_n , c'est-à-dire l'action par concaténation sans envoyer les résultats non-monos à zéro, par exemple



et il sera possible d'obtenir tous les autres éléments à d_1 et d_2 défauts avec la cyclicité des modules cellulaires. Cela correspond à agir avec les $E_j^{(k)}$ lorsque les points limitrophes sont remis.

Cela a prouvé qu'un ensemble de générateurs est obtenu en prenant les $E_j^{(k)}$ et un élément $P_k^{(k)} a_{d_g, d_d} P_k^{(k)}$ pour chaque paire (d_g, d_d) . Pour $d_g = d_d$, il suffit de prendre $Y_{d_g}^{(k)}$. Lorsque $d_g > d_d$, il est possible de prendre $Y_{(d_g+d_d)/d}^{(k)}$ puis d'agir à gauche pour avoir le bon nombre de liens comme dans l'exemple avant la démonstration. Le cas $d_d > d_g$ est similaire. Comme un ensemble générateur est obtenu des $E_j^{(k)}$ et des $Y_t^{(k)}$ et que $d-B_{n,k}(\beta)$ est une sous-algèbre de $A_{n,k}(\beta)$, les deux algèbres sont isomorphes. \square

Il y a une autre façon de définir l'algèbre de Temperley-Lieb à couture : passer par l'algèbre à une frontière (ou algèbre de blob) définie par Martin et Saleur [19]. Cette façon facilite la démonstration de la prochaine proposition, mais nous avons choisi de ne pas la présenter et de seulement donner le résultat en raison de la taille croissante du document et du fait que nous n'utilisons que les approches diagrammatiques.

Proposition 3.1.10 (Proposition C.4 [21]). *Pour β formel, les algèbres $a-B_{n,k}(\beta)$ et $d-B_{n,k}(\beta)$ sont isomorphes.*

Ainsi, en β formel, les trois algèbres sont isomorphes et il est possible d'utiliser indifféremment une ou l'autre des définitions.

3.1.6. Équivalences aux valeurs complexes

La définition récursive des projecteurs $P_k^{(k)}$ fait intervenir les facteurs $\frac{1}{[j]_q}$ pour $j = 2, \dots, k$. Or, le q -nombre $[j]_q = \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}} = \frac{q^{-j}(q^{2j} - 1)}{q^{-1}(q^2 - 1)}$ s'annule aux racines $2j$ -ième de l'unité, sauf en $q = \pm 1$. La présente sous-section étudie les définitions de $B_{n,k}(q + q^{-1})$ lorsque q est une racine $2j$ -ième de l'unité avec $j < k$.

Dans cette section, nous supposons que $n > k$ sauf indication contraire.

Proposition 3.1.11 (Proposition C.1, [21]). *Lorsque q n'est pas une $2j$ -ième racine de l'unité pour $j < k$, les trois algèbres $d-B_{n,k}(\beta)$, $a-B_{n,k}(\beta)$ et $A_{n,k}(\beta)$ sont isomorphes, notées simplement $B_{n,k}(\beta)$ et leur dimension est*

$$\dim B_{n,k}(\beta) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-k-1}. \quad (3.1.12)$$

Démonstration. La preuve est exactement la même qu'en β formel puisque les projecteurs de Wenzl-Jones sont non-singuliers comme $[m]_q \neq 0$ pour tout m . La dimension est obtenue en faisant une bijection avec des marches sur les entiers et en dénombrant, les détails sont dans [21] au corollaire C.3 et à l'appendice B. \square

Notons que la formule fonctionne même lorsque $k \geq n$ en suivant la convention que $\binom{n}{m} = 0$ lorsque m est négatif.

Lorsque q est une $2j$ -ième racine de l'unité pour $j < k$, la définition diagrammatique et celle par les projecteurs sont mal définies, et les relations (3.1.5) donnent une définition légèrement différente de l'algèbre. Dans ce qui suit, nous montrons que, sauf dans le cas $q^{2k} = 1$, ce nouvel objet algébrique est isomorphe à $B_{n,k'}(\beta)$ pour un certain k' . Notons que pour ce k' , la définition utilisée est la diagrammatique.

Soit $q \in \mathbb{C}$. Sera noté ℓ le plus petit entier positif tel que $q^{2\ell} = 1$, avec la convention que $\ell = \infty$ si q n'est pas une racine de l'unité. La définition des q -nombres donne immédiatement que $[m\ell]_q = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ puisque le numérateur est alors $q^{m\ell} - q^{-m\ell} = 1 - 1 = 0$.

Cela veut dire que si $k \geq \ell$, il y aura des problèmes dans la définition des projecteurs de Wenzl-Jones puisqu'il y aura un terme $[\ell]_q$ au dénominateur. Il y a aussi des problèmes dans la définition algébrique puisque la définition des $y_t^{(k)}$ sera différente à un certain t et la relation de fermeture aura des termes en moins.

Plus précisément, soit k' le plus petit entier positif² satisfaisant $k' \equiv k \pmod{\ell}$. Comme $0 < k' \leq k < n$, l'élément $y_{k'+1}^{(k)}$ ne sera pas défini puisque son coefficient $[k - k']_q$ dans la formule (3.1.7) sera nul. Effectivement, par définition, $k - k' = m\ell$ pour un certain naturel m . La relation de fermeture (3.1.6) devient alors

$$\left(\prod_{j=0}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_{k'}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i [k - i]_q \left(\prod_{j=i+2}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_{k'}^{(k)}. \quad (3.1.13)$$

Ainsi, en q , une $2j$ -ième racine de l'unité pour $j < k$, l'algèbre $a\text{-}B_{n,k}(\beta)$ est l'algèbre engendrée par l'unité $\mathbb{1}^{(k)}$ et les générateurs $e_1^{(k)}, \dots, e_n^{(k)}$ soumis aux relations (3.1.5), à la construction des y_t^k pour $t \leq k'$ et à la relation de fermeture (3.1.13). Le but de la prochaine proposition est de démontrer qu'il est possible de se restreindre aux cas où $k < \ell$.

² C'est ici qu'il est possible d'entrevoir le cas à éviter. S'il était possible pour k' d'être nul, alors la proposition suivante serait fausse.

Proposition 3.1.12. Soient q une racine de l'unité, ℓ le plus petit entier positif tel que $q^{2\ell} = 1$, $n > k > 0$ deux entiers et k' le plus petit entier strictement positif tel que $k' \equiv k \pmod{\ell}$. L'algèbre $a\text{-}B_{n,k}(\beta)$ est isomorphe à l'algèbre $B_{n,k'}(\beta)$.

Démonstration. Supposons que $q = e^{i\pi\alpha/\ell}$. Soit m satisfaisant $k - k' = m\ell$. Il suit de la définition des q -nombres que

$$[k' + i]_q = [k - m\ell + i]_q = (-1)^{am} [k + i]_q, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.14)$$

La relation (3.1.13) inspire la définition d'un morphisme d'algèbres associatives

$$\begin{aligned} \psi : a\text{-}B_{n,k}(\beta) &\longrightarrow B_{n,k'}(\beta) \\ e_j^{(k)} &\longmapsto \begin{cases} E_j^{(k')} & 1 \leq j < n; \\ (-1)^{am} E_n^{(k')} & j = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Bien entendu, il faut vérifier que les relations de l'algèbre sont respectées par $\text{Im } \psi$. Toutefois, il est évident que ce ne sont que celles impliquant $e_n^{(k)}$ qui peuvent causer problème, et ce seront donc les seules qui seront vérifiées.

La première relation : $(e_n^{(k)})^2 = [k + 1]_q e_n^{(k)}$ devient dans $\text{Im } \psi$,

$$\begin{aligned} \psi \left((e_n^{(k)})^2 \right) &= ((-1)^{am})^2 (E_n^{(k')})^2 \\ &= [k' + 1]_q E_n^{(k')} \\ &= (-1)^{am} [k + 1]_q E_n^{(k')} \\ &= \psi \left([k + 1]_q e_n^{(k)} \right). \end{aligned}$$

La deuxième : $e_{n-1}^{(k)} e_n^{(k)} e_{n-1}^{(k)} = [k]_q e_{n-1}^{(k)}$, elle, devient

$$\begin{aligned} \psi \left(e_{n-1}^{(k)} e_n^{(k)} e_{n-1}^{(k)} \right) &= (-1)^{am} E_{n-1}^{(k')} E_n^{(k')} E_{n-1}^{(k')} \\ &= (-1)^{am} [k']_q E_{n-1}^{(k')} \\ &= \psi \left([k]_q e_{n-1}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

La troisième est plus difficile et fait intervenir les $y_t^{(k)}$. De prime abord, de la définition des $y_t^{(k)}$, nous avons $\psi \left(y_t^{(k)} \right) = (-1)^{am} Y_t^{(k')}$ lorsque $t \leq k'$. Pour les autres, ils ne sont

pas définis dans l'algèbre $a\text{-}B_{n,k}$ puisque $[k' + 1]_q = 0$. Il faut vérifier que le morphisme envoie (3.1.13) sur la relation correspondante en $B_{n,k'}(\beta)$, c'est-à-dire que

$$\psi \left(\left(\prod_{j=0}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_k^{(k)} \right) = \psi \left(\sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_{k'}^{(k)} \right).$$

Tout d'abord, le membre de gauche,

$$\psi \left(\left(\prod_{j=0}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_k^{(k)} \right) = ((-1)^{am})^2 \left(\prod_{j=0}^{k'} E_{n-j}^{(k')} \right) Y_{k'}^{k'}.$$

Ceci fait, au membre de droite,

$$\begin{aligned} \psi \left(\sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^{k'} e_{n-j}^{(k)} \right) y_{k'}^{(k)} \right) &= \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i [k-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^{k'} e_{n-j}^{(k')} \right) (-1)^{am} y_{k'}^{(k')} \\ &= \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i [k'-i]_q \left(\prod_{j=i+2}^{k'} E_{n-j}^{(k')} \right) Y_{k'}^{(k')}. \end{aligned}$$

Les relations sont respectées et donc, l'algèbre $a\text{-}B_{n,k}$ est un quotient de $B_{n,k'}$: l'inverse est donné par $E_j^{(k')} \mapsto e_j^{(k)}$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et $E_n^{(k')} \mapsto (-1)^m e_n^{(k)}$ sur les générateurs. \square

Il reste un cas problématique : $B_{n,m\ell}(\beta)$. Lorsque k est un multiple de ℓ , comme le k' de la proposition précédente est non-nul, cela donne l'équivalence entre $a\text{-}B_{n,k}(\beta)$ et $a\text{-}B_{n,\ell}(\beta)$, mais il n'y a pas de définition diagrammatique en raison des projecteurs de Wenzl-Jones qui restent mal définis. La démarche introduite précédemment ne permet pas de retrouver une interprétation diagrammatique évidente avec laquelle travailler. Ce ne sera pas un cas considéré dans le mémoire et il reste ouvert. Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout ont fait une étude numérique sommaire du comportement [21], mais ils en tirent peu de conclusion outre qu'il y a une différence marquée avec les autres valeurs.

Le prochain théorème rassemble les définitions et les équivalences démontrées au cours de cette section, ainsi que le cas problématique.

Théorème 3.1.13. *Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$.*

(1) *Si q est générique, alors*

$$d\text{-}B_{n,k}(\beta) \simeq a\text{-}B_{n,k}(\beta) \simeq A_{n,k}(\beta). \quad (3.1.16)$$

(2) Si q est une racine de l'unité telle que $q^{2\ell} = 1$ pour un certain ℓ minimal et que $k > \ell > k' > 0$ est tel que $k' \equiv k \pmod{\ell}$, alors

$$d-B_{n,k'}(\beta) \simeq A_{n,k'} \simeq a-B_{n,k'}(\beta) \simeq a-B_{n,k}(\beta). \quad (3.1.17)$$

(3) Si q est une racine de l'unité telle que $q^{2\ell} = 1$ pour un ℓ minimal et que $\ell \mid k$, alors

$$a-B_{n,k}(\beta) \simeq a-B_{n,\ell}(\beta). \quad (3.1.18)$$

De ce théorème, nous pouvons finalement expliciter la définition selon les différents cas de figure.

Définition 3.1.14. Soient n et k deux nombres naturels et q un nombre complexe. L'algèbre à couture $B_{n,k}(\beta)$ est définie selon les valeurs de q :

(1) si q est générique, alors

$$B_{n,k}(\beta) = d-B_{n,k}(\beta); \quad (3.1.19)$$

(2) si q est une racine de l'unité avec ℓ un entier positif minimal tel que $q^{2\ell} = 1$ et que $k' < k$ est un entier positif plus petit que ℓ tel que $k \equiv k' \pmod{\ell}$ sans que ℓ ne le divise, alors

$$B_{n,k}(\beta) = d-B_{n,k'}(\beta); \quad (3.1.20)$$

(3) si dans les conditions de (2), k' est divisible par ℓ , alors

$$B_{n,k}(\beta) = a-B_{n,\ell}(\beta). \quad (3.1.21)$$

3.2. Cellularité et modules cellulaires

Pour la suite des choses, nous désirons étudier la structure de l'algèbre $B_{n,k}(\beta)$ pour $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Le formalisme cellulaire est la voie naturelle à emprunter pour ce faire. Nous débutons en prouvant la cellularité à l'aide d'un résultat élégant de König et Xi [17], puis nous passerons à la définition des modules cellulaires et à l'exposition des résultats élémentaires qui en découlent.

3.2.1. Cellularité

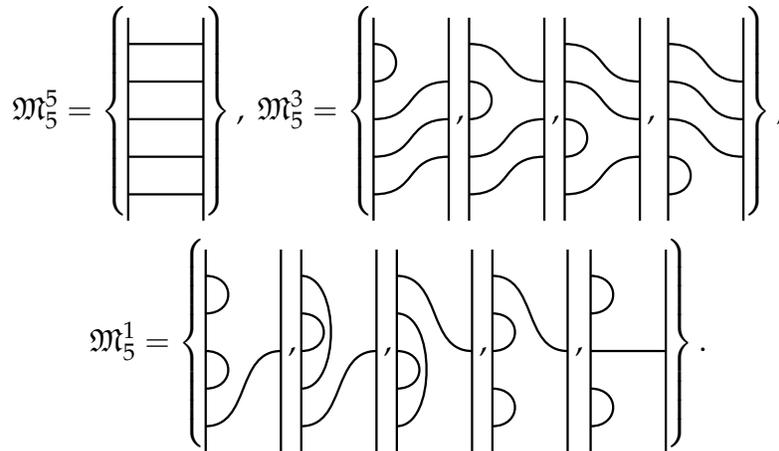
Cette sous-section, bien que courte, prouve un résultat essentiel du mémoire : la cellularité de $B_{n,k}(\beta)$. Avec ce résultat, les outils développés au chapitre 2 deviennent disponibles.

Proposition 3.2.1. *Soit $n > k > 0$ une paire de nombres naturels et $q \in \mathbb{C}^*$. Si $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$, l'algèbre $B_{n,k}(\beta)$ est cellulaire.*

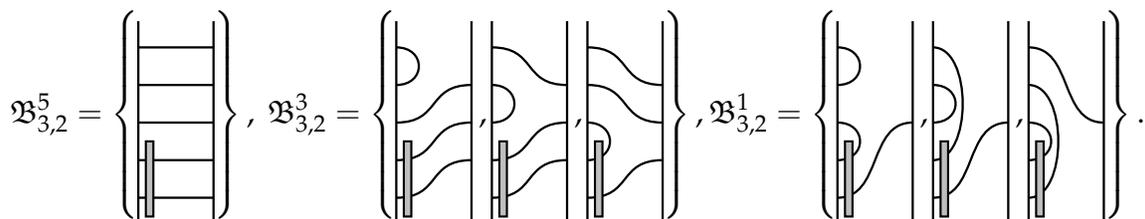
Démonstration. Le théorème 3.1.13 assure qu'il est permis de travailler avec $k < \ell$ sans perte de généralité. En ce cas, $B_{n,k}(\beta) \simeq A_{n,k} = P_k^{(k)} TL_{n+k} P_k^{(k)}$ où $P_k^{(k)}$ est un idempotent. La proposition 2.1.5 donne la cellularité de l'algèbre. \square

La preuve, bien que satisfaisante par sa petite taille, ne donne pas l'intuition de la base cellulaire. Voici un exemple sur $B_{3,2}$ qui en explicite une.

Exemple 3.2.2. *Dans le cas $n = 3, k = 2$, les ensembles cellulaires \mathfrak{M}_5^d de TL_5 sont indicés par $d \in \{1,3,5\}$ et sont composés des diagrammes monos $n + k \leftarrow d$ pour $d \in \{1,3,5\}$*



Agir avec $P_2^{(2)}$ envoie à zéro les vecteurs qui ont une boucle joignant des points limitrophes, ce qui donne les bases :



De plus, remarquons que la somme des carrés des dimensions des modules donne la dimension de l'algèbre, tout comme dans TL_n :

$$1^2 + 3^2 + 3^2 = 19,$$

qui est bien la dimension de $B_{3,2}(\beta)$ par la proposition 3.1.11 :

$$\dim B_{3,2}(\beta) = \binom{6}{3} - \binom{6}{0} = 19.$$

Avant de continuer, remarquons que ce résultat s'applique à une grande classe de généralisations de Temperley-Lieb. Par exemple, Flores et Peltola, dans leur article récent [8], étudient $TL_\sigma = P_\sigma TL_s P_\sigma$, pour un multi-index $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ et $s = s_1 + \dots + s_n$, où P_σ est le projecteur défini par la multiplication de n projecteurs de Wenzl-Jones P_{s_i} agissant sur les s_i points commençant après les $s_1 + s_2 + \dots + s_{i-1}$ premiers pour $i = 1, \dots, n$. Cette algèbre, tant que les P_{s_i} sont bien définis, est cellulaire par le même argument que pour $B_{n,k}$.

3.2.2. Modules cellulaires

Cette section définit une famille de modules, les modules cellulaires, et montre une définition équivalente qui permet de trouver aisément leur dimension. Pour conclure, il sera montré que la spécialisation à toute valeur de β donne une représentation bien définie et non-singulière. La première définition fonctionne peu importe la valeur de β et la seconde ne fonctionne que lorsque q est générique, mais dans les deux cas la représentation associée aux modules est non-singulière.

Définition 3.2.3 (Quotient). Soient n, k deux nombres naturels et d un nombre naturel plus petit ou égal à $n + k$ et de même parité. Soit \mathcal{V}_{n+k}^d le module cellulaire de TL_{n+k} à d défauts et soit $\mathcal{U}_{n,k}^d$ le sous-module engendré par les $n + k \leftarrow d$ diagrammes ayant deux points limitrophes liés parmi les $n + 1, \dots, n + k$. Le module cellulaire de $B_{n,k}$ à d défauts est donné par

$$\mathcal{V}_{n,k}^d = \frac{\mathcal{V}_{n+k}^d}{\mathcal{U}_{n,k}^d}. \quad (3.2.1)$$

L'action de $B_{n,k}$ sur ce module est la restriction de son action sur \mathcal{V}_{n+k}^d en voyant $B_{n,k}$ comme sous-ensemble fermé sur la multiplication et en enlevant par la suite les termes de $\mathcal{U}_{n,k}^d$.

Ce module est engendré par les classes d'équivalence des diagrammes monos $(n + k) \leftarrow d$ sans deux points limitrophes liés. Notons que $U_{n,k}^d$ est un module trivial sous l'action de $B_{n,k}$. Nous identifions, comme dans [21], la classe avec le lien de \mathcal{V}_{n+k}^d .

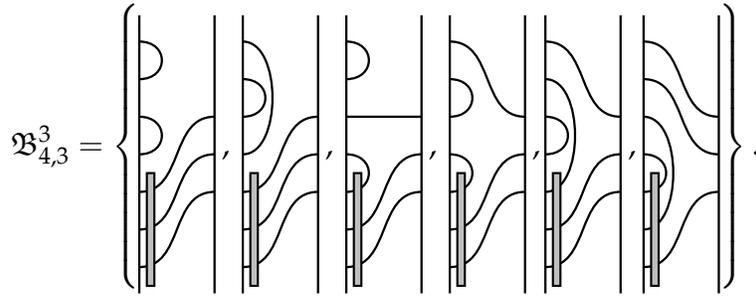
Définition 3.2.4 (Idempotent). Avec \mathcal{V}_{n+k}^d le module cellulaire à d défauts de Temperley-Lieb, le module cellulaire à d défauts de $B_{n,k}$ est donné par

$$\mathcal{V}_{n,k}^d = P_k^{(k)} \mathcal{V}_{n+k}^d. \quad (3.2.2)$$

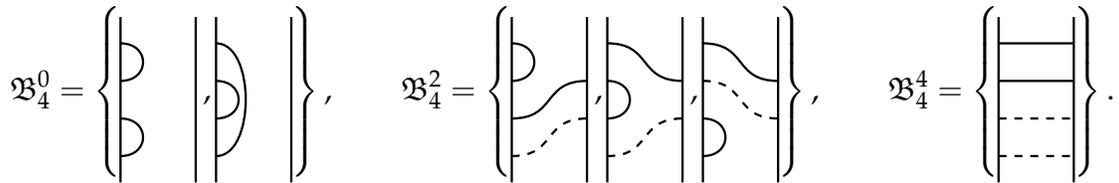
Dans le vocabulaire du chapitre quatre, cela veut dire que $\mathcal{V}_{n,k}^d$ est l'image de \mathcal{V}_{n+k}^d par le foncteur $\text{Res}_{P_k^{(k)}}$ de la proposition 4.2.4.

La prochaine proposition donne une façon plus aisée de travailler avec les modules en camouflant les projecteurs de Wenzl-Jones dans leur expression. Avant toute chose, un exemple de la méthode donnera une bonne idée de ce qui se passe.

Exemple 3.2.5. Étudions l'action de $B_{4,3}$ sur le module cellulaire $\mathcal{V}_{4,3}^3$, dont la base est donnée par les (classes d'équivalence des) 6 diagrammes monos $7 \leftarrow 3$



Cette base s'identifie avec l'union des bases de modules de TL_n suivantes en coupant les points limitrophes et en identifiant les nouveaux défauts créés par des pointillés.



Proposition 3.2.6. Il y a une bijection entre la base de $\mathcal{V}_{n,k}^d$ et l'union des bases de \mathcal{V}_n^e pour e entre $|k - d|$ et $\min(k + d, n)$ donnée en éliminant les k points limitrophes et en identifiant les défauts créés,

$$\mathcal{B}_{n,k}^d \xleftarrow{f} \bigcup_{e=|k-d|}^{\min(k+d,n)} \mathcal{B}_n^e \quad (3.2.3)$$

où le prime sur \bigcup indique que l'indice croît par bond de deux.

Démonstration. Nous débutons par démontrer que l'image de f est bien contenue dans une base \mathfrak{B}_n^e pour e entre $|k - d|$ et $\min(k + d, n)$ de bonne parité. Il restera ensuite à démontrer que f est inversible.

Soit $\alpha \in \mathfrak{B}_{n,k}^d$. Notons d' les défauts domestiques et d'' les défauts limitrophes. Il est bien certain que ces deux classes de défauts sont les seules présentes, et donc $d = d' + d''$. L'élément $f(\alpha)$ a e défauts. Plus précisément, il est certain que les défauts domestiques sont conservés et que ce sont les boucles, au nombre de $k - d''$, qui créent les défauts. Bref,

$$e = d' + k - d'' = d + k - 2d'' = 2d' + k - d, \quad (3.2.4)$$

où les deux dernières égalités sont obtenues simplement de $d = d' + d''$. On remarque que e est bornée par $|k - d|$ (lorsque $d' = 0$) et $\min(k + d, n)$ (lorsque $d'' = 0$).

L'opération est inversible puisque, sachant e , k et d , il est possible de retrouver d'' de $e = d + k - 2d''$. Du diagramme, les $k - d''$ derniers défauts domestiques sont liés aux premiers défauts limitrophes en comptant à partir du haut.

Comme l'opération est inversible et que son image gît dans le bon ensemble, la bijection est démontrée. \square

Remarque 3.2.7. La forme bilinéaire $\phi_{n,k}^d$ se calcule aisément après la bijection f en utilisant les règles suivantes

$$\begin{array}{c} \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \cap \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \cap \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \end{array} = \dots = \begin{array}{c} \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \cap \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \cap \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} \text{---} \cap \text{---} \\ \text{---} \cup \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \cup \text{---} \\ \text{---} \cap \text{---} \end{array} = 1, \quad (3.2.5)$$

ainsi que le produit de j liens pointillés qui donne :

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} = \frac{[k + 1]_q}{[k - j + 1]_q}. \quad (3.2.6)$$

Avec la bijection et la connaissance de la dimension des modules cellulaires de l'algèbre de Temperley-Lieb, la dimension de ceux de l'algèbre à couture est obtenue.

Corollaire 3.2.8. La dimension de $\mathcal{V}_{n,k}^d$ est

$$\dim \mathcal{V}_{n,k}^d = \binom{n}{\frac{n+k-d}{2}} - \binom{n}{\frac{n-k-d-2}{2}}. \quad (3.2.7)$$

Nous allons maintenant prouver que la représentation standard induite de ces modules est bien définie et non-singulière pour toute valeur de β .

Définition 3.2.9. La représentation standard de $B_{n,k}(\beta)$ associée aux modules $\mathcal{V}_{n,k}^d$ est donnée par l'action par concaténation des éléments de $B_{n,k}^d$ avec β formel, puis par l'évaluation en $\beta \in \mathbb{C}$. Cela donne

$$\rho_{n,k}^d : B_{n,k}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{End} \left(\mathcal{V}_{n,k}^d \right). \quad (3.2.8)$$

Proposition 3.2.10. La matrice $\rho_{n,k}^d(\alpha)$ est non-singulière en β pour tous les $\alpha \in B_{n,k}$. Ainsi, spécialiser $\rho_{n,k}^d(\alpha)$ à $\beta \in \mathbb{C}$ donne une représentation de $B_{n,k}(\beta)$.

Démonstration. Il faut et il suffit de démontrer que $\rho_{n,k}^d \left(E_j^{(k)} \right)$ est bien définie pour $0 \leq j \leq n$.

En suivant la définition par quotient, nous voyons qu'il faut tout d'abord évaluer avec ρ_{n+k}^d , puis effectuer le quotient. En évaluant la représentation du projecteur $P_k^{(k)}$ dans le quotient, nous aurons ensuite fait le gros du travail. Il est important de rappeler que la représentation est évaluée avant d'être spécialisée, sinon les singularités amovibles cachent la structure.

Le projecteur $P_k^{(k)}$ s'exprime par la formule (3.1.2) comme une combinaison de l'identité et de mots en E_j pour $n+1 \leq j < n+k$. Or, agir sur un élément quelconque de TL_{n+k} avec un de ces E_j donne soit 0, soit relie deux points limitrophes, et donc sera 0 dans le quotient $U_{n,k}^d$. Comme tous les termes q -singuliers sont associés aux mots en E_j , il suit que la représentation de $P_k^{(k)}$ est non-singulière.

Directement, cela indique que les $E_j^{(k)}$, pour $0 \leq j < n$, sont non-singuliers : bien que

$$\rho_{n+k}^d \left(E_j^{(k)} \right) = \rho_{n+k}^d \left(P_k^{(k)} \right) \rho_{n+k}^d(E_j)$$

soit singulière, la spécialisation

$$\rho_{n,k}^d \left(E_j^{(k)} \right) = \rho_{n,k} \left(P_k^{(k)} \right) \rho_{n,k}(E_j)$$

ne l'est pas puisque $\rho_{n+k}^d(E_j) = \rho_{n,k}^d(E_j)$.

Définition 3.3.1. Soit $\mathcal{V}_{n,k}^d$ le module cellulaire à d défauts. La forme

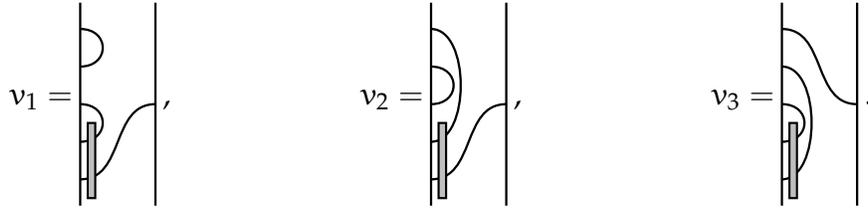
$$\Phi_{n,k}^d : \mathcal{V}_{n,k}^d \times \mathcal{V}_{n,k}^d \longrightarrow \mathbb{C} \quad (3.3.1)$$

donnée par

$$\Phi_{n,k}^d(v,w) = c(v^*w), \quad (3.3.2)$$

avec $c(v^*w)$, le coefficient associé au produit $C_{v,v^*}^d C_{w,w^*}^d$ modulo $B_{n,k}^{<d}$, comme dans (2.1.1), est appelée forme bilinéaire du module cellulaire.

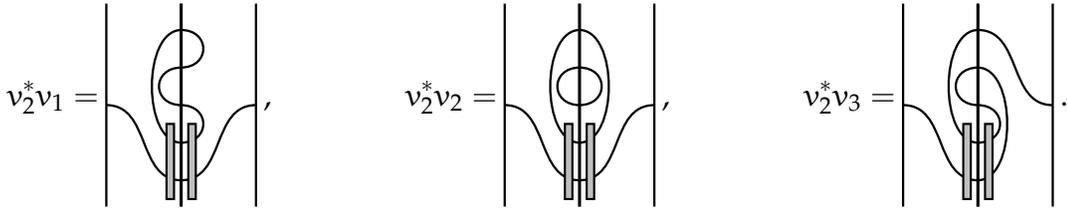
Exemple 3.3.2. Il ne faut pas se laisser intimider par le vocabulaire cellulaire. Voici le calcul de $\Phi_{3,2}^1$ dans la base



Les valeurs de $\Phi_{3,2}^1(v_2, -)$ sont

$$\Phi_{3,2}^1(v_2, v_1) = \frac{[3]_q}{[2]_q}, \quad \Phi_{3,2}^1(v_2, v_2) = \beta \frac{[3]_q}{[2]_q}, \quad \Phi_{3,2}^1(v_2, v_3) = 0,$$

puisque



Définition 3.3.3. La matrice de Gram associée à la forme bilinéaire $\Phi_{n,k}^d$ est la matrice dont les éléments sont les résultats des vecteurs de la base

$$\mathcal{G}_{n,k}^d = \left(\Phi_{n,k}^d(v,w) \right)_{v,w \in \mathfrak{B}_{n,k}^d}. \quad (3.3.3)$$

Exemple 3.3.4. Sur $B_{3,2}(\beta)$, les trois bases des modules cellulaires sont données dans l'exemple 3.2.2 et les matrices de Gram associées sont

$$\mathcal{G}_{3,2}^5 = (1), \quad \mathcal{G}_{3,2}^3 = \begin{pmatrix} [2]_q & 1 & 0 \\ 1 & [2]_q & 1 \\ 0 & 1 & \frac{[3]_q}{[2]_q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_{3,2}^1 = \begin{pmatrix} [3]_q & \frac{[3]_q}{[2]_q} & \frac{[3]_q}{[2]_q} \\ \frac{[3]_q}{[2]_q} & [3]_q & 0 \\ \frac{[3]_q}{[2]_q} & 0 & [3]_q \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

L'exemple 3.3.2 avait calculé la deuxième ligne de $\mathcal{G}_{3,2}^1$.

Notons que les éléments de la matrice de Gram seront toujours des q -nombres et, en q générique, elle sera donc toujours bien définie et non-identiquement nulle.

3.3.2. Déterminant de la matrice de Gram

Dans cette section, nous allons expliciter le changement de base permettant de calculer le déterminant des matrices de Gram à partir de celui des matrices de Temperley-Lieb. Une forme close attribuable à Morin-Duchesne, Rasmussen et Ridout sera donnée sans preuve.

Avant de débiter, rappelons que le déterminant de la matrice de Gram de \mathcal{V}_n^d en $\text{TL}_n(\beta)$ est

$$\det \mathcal{G}_n^d = \prod_{j=1}^{\frac{n-d}{2}} \left(\frac{[d+k+1]_q}{[j]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_n^{d+2j}}. \quad (3.3.5)$$

La prochaine proposition utilise la bijection (3.2.3) afin de passer par le cas du déterminant de la matrice de Gram en TL_n pour calculer le déterminant en $\mathcal{B}_{n,k}$.

Proposition 3.3.5. *En β générique, il existe une matrice de changement de base \mathcal{U} unitriangulaire supérieure telle que*

$$\mathcal{U}^T \mathcal{G}_{n,k}^d \mathcal{U} = \bigoplus'_{e=|k-d|}^{\min(k+d,n)} A_k^{1/2(e+d-k), 1/2(e-d+k)} \mathcal{G}_n^e, \quad (3.3.6)$$

où la notation \bigoplus' signifie que l'indice fait des bonds de deux et

$$A_k^{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} k+i+1 \\ j \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q}, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[m-n]_q! [n]_q!}, \quad [m]_q! = \prod_{j=1}^m [j]_q. \quad (3.3.7)$$

Démonstration. Le but de la preuve est d'expliciter le changement de base adéquat qui ordonne les éléments. De façon graphique, l'idée est claire et le clou de la preuve sera de trouver une relation de récurrence qui sera respectée par les $A_k^{i,j}$.

La première étape à faire est d'utiliser la bijection (3.2.3) pour transformer le vecteur de base $v \in \mathcal{B}_{n,k}^d$ en vecteur de $\mathcal{B}_{n'}^e$ puis agir à droite par le projecteur $P_e^{(e)}$. Par exemple,

sur $\mathcal{V}_{3,2}^1$, la base $\mathfrak{B}_{3,2}^1$ est envoyée par la bijection sur l'union de bases de TL_n :

$$\mathfrak{B}_{3,2}^1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right\} \mapsto \mathfrak{B}_3^3 \cup \mathfrak{B}_3^1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right\}.$$

Par la suite, les projecteurs adéquats agissent sur les bases pour donner :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_3^3 P_3^{(3)} \cup \mathfrak{B}_3^1 P_1^{(1)} &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Ceux qui ont le moins de défauts restent inchangés puisque $P_e^{(e)}$ agit comme l'identité plus des termes qui relient des défauts entre eux. Or, comme ils ont le nombre minimal de défauts, alors l'action de $P_e^{(e)}$ est simplement l'identité.

Pour les autres, $P_e^{(e)}$ agira comme l'identité plus des termes qui ferment des défauts. Par conséquent, la matrice \mathcal{U} définie sur $w \in \mathfrak{B}_n^e$ par $w P_e^{(e)}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, et elle a donc déterminant 1.

La matrice $\mathcal{U}^T \mathcal{G}_{n,k}^d \mathcal{U}$ est bloc-diagonale. En effet, si w et w' n'ont pas le même nombre de défauts, alors la forme bilinéaire après action de \mathcal{U} donne zéro puisque deux défauts doivent être liés.

Si w et w' ont le même nombre de défauts, alors par (3.2.4), ils ont le même nombre de défauts limitrophes j et domestiques i , ce qui donne

$$\phi_{n,k}(\mathcal{U}w, \mathcal{U}w') = A_k^{i,j} \phi_{n,k}(w, w') \tag{3.3.8}$$

avec

$$A_k^{i,j} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \cdot \quad (3.3.9)$$

Pour conclure la preuve, il suffira démontrer que les $A_k^{i,j}$ respectent la relation de récurrence suivante :

$$A_k^{i,j} = A_k^{i-1,j} - \frac{[j]_q^2}{[i+j]_q [i+j-1]_q} A_k^{i-1,j-1}, \quad A_k^{0,j} = \frac{[k+1]_q}{[k-j+1]_q}, \quad A_k^{i,0} = 1. \quad (3.3.10)$$

Pour cela, une saine utilisation de (3.1.2) est de mise. La représentation graphique est allégée par l'usage de $i = 2, j = 2$, mais la preuve fonctionne dans le cas général avec un usage adéquat de points de suspension. Afin de rendre cela aisé, nous isolerons le projecteur, puis le manipulerons.

$$A_k^{i,j} = \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} = \frac{1}{[i+j]_q} \left([i+j]_q \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} - [i+j-1]_q \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^j [j]_q \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} + \dots + (-1)^{i+j} [1]_q \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right).$$

De ceci, la remarque 3.2.7 donne les règles pour calculer avec les pointillés : tous les diagrammes, sauf le premier et le j -ième, s'annihilent. Sur ce dernier diagramme, nous allons

appliquer (3.1.2), mais à gauche plutôt qu'à droite :

$$\begin{aligned}
A_k^{i,j} &= A_k^{i-1,j} + (-1)^j \frac{[j]_q}{[i+j]_q} \text{Diagram 1} \\
&= A_k^{i-1,j} + \frac{(-1)^j}{[i+j-1]_q} \left([i+j-1]_q \text{Diagram 2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{j-1} [j]_q \text{Diagram 3} + \dots + (-1)^{i+j-1} [1]_q \text{Diagram 4} \right) \\
&= A_k^{i-1,j} - \frac{[j]_q^2}{[i+j]_q [i+j-1]_q} A_k^{i-1,j-1}.
\end{aligned}$$

Tout le reste s'annule puisque chacun d'eux a des arcs reliant des défauts de même type. Maintenant, les $A_k^{i,j}$ tels que décrits en (3.3.4) respectent la relation ci-haut qui détermine uniquement sa solution, ce qui conclut la preuve. \square

La proposition donne une façon d'exprimer le déterminant de la matrice de Gram à l'aide de seulement la théorie des algèbres de Temperley-Lieb.

Corollaire 3.3.6. *Avec le changement de base ci-haut pour la matrice Gram, nous obtenons que le déterminant de Gram de $\mathcal{V}_{n,k}^d$ respecte*

$$\det \mathcal{G}_{n,k}^d = \prod_{e=|k-d|}^{\min(k+d,n)} \det \mathcal{G}_n^e \left(A_k^{1/2(e+d-k), 1/2(e-d+k)} \right)^{\dim \mathcal{V}_n^e}. \quad (3.3.11)$$

Ce corollaire suffit pour calculer avec un ordinateur le déterminant, mais l'analyse est facilitée par la forme close suivante.

Théorème 3.3.7 (Proposition D.4, [21]). *Le déterminant de la matrice de Gram pour $\mathcal{V}_{n,k}^d$ est*

$$\det \mathcal{G}_{n,k}^d = \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\frac{[i]_q}{[k+1-i]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k-2i}^d} \prod_{j=1}^{\frac{n+k-d}{2}} \left(\frac{[d+j+1]_q}{[j]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k}^{d+2j}}. \quad (3.3.12)$$

3.3.3. Radical et semi-simplicité

Dans cette courte section, nous énoncerons ce qui est connu de l'étude des radicaux et des modules simples à partir de l'analyse sommaire du déterminant de Gram. La cellularité de l'algèbre permet d'énoncer plusieurs résultats avec des preuves plus courtes que celles présentes dans l'article [21].

Débutons par la définition des objets qui nous intéresserons dans cette section.

Définition 3.3.8. Soit $\mathcal{V}_{n,k}^d$ le module cellulaire de $B_{n,k}(\beta)$ à d défauts. Le radical de la forme bilinéaire est

$$\mathcal{R}_{n,k}^d := \left\{ v \in \mathcal{V}_{n,k}^d \mid \langle v, w \rangle_{n,k}^d = 0, \quad \forall w \in \mathcal{V}_{n,k}^d \right\}. \quad (3.3.13)$$

Le quotient

$$\mathcal{L}_{n,k}^d := \mathcal{V}_{n,k}^d / \mathcal{R}_{n,k}^d \quad (3.3.14)$$

est le module simple lié au module cellulaire.

La prochaine proposition provient directement de la cellularité de l'algèbre. Elle ne fonctionne donc qu'en $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$.

Proposition 3.3.9. Lorsque $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$:

- (1) le radical $\mathcal{R}_{n,k}^d$ de la forme bilinéaire est le radical de Jacobson de $\mathcal{V}_{n,k}^d$;
- (2) pour les d tels que $d \equiv n + k \pmod{2}$ et que $\phi_{n,k}^d$ ne soit pas identiquement nulle, les $\mathcal{L}_{n,k}^d$ forment une famille complète de modules simples non-isomorphes de $B_{n,k}$;
- (3) de plus, lorsque q est générique, l'algèbre $B_{n,k}(\beta)$ est semi-simple.

Démonstration. Le deux premiers points proviennent des propositions 2.2.3 et 2.2.4. Pour le dernier point, les termes du déterminant de Gram sont issus de q -nombres qui ne peuvent s'annuler qu'en des racines de l'unité. Cela indique que $\mathcal{L}_{n,k}^d = \mathcal{V}_{n,k}^d / \mathcal{R}_{n,k}^d$ forment une famille complète de modules simples non-isomorphes et que l'algèbre est semi-simple. \square

Ces propositions donnent toute la structure de l'algèbre en q générique; en q racine de l'unité, il faudra utiliser d'autres outils.

Chapitre 4

Représentations aux valeurs critiques

Ce chapitre s'intéresse à donner une partie de la structure de la théorie de la représentation des algèbres de Temperley-Lieb à couture dans le cas où le paramètre q est critique, donc lorsqu'il existe un entier minimal positif ℓ tel que $q^{2\ell} = 1$. Les résultats sont nouveaux, mais les méthodes de preuve utilisées proviennent en majorité des idées profondes de Graham et Lehrer [10], [11] et de Ridout et Saint-Aubin [22]. Trois étapes permettront cette étude : une étude de la dimension des radicaux par une relation de récurrence ; la construction des morphismes entre modules cellulaires et la caractérisation des modules principaux.

4.1. Dimensions des radicaux et des modules simples

Dans cette section, nous effectuerons une preuve similaire à celle pour TL_n en utilisant la restriction sur les modules afin de trouver la dimension du radical. L'idée est d'employer un changement de base suggéré par Alexi Morin-Duchesne. La formule obtenue n'est pas sous forme close, mais elle permet tout de même le calcul des dimensions aisément.

4.1.1. Exemple

Nous introduisons un changement de base qui permet de bloc-diagonaliser la matrice de Gram de la façon suivante :

$$\mathcal{G}_{n,k}^d = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{n-1,k}^{d-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{n,k}^d \mathcal{G}_{n-1,k}^{d+1} \end{pmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Nous débuterons par faire un exemple sur les modules cellulaires de $B_{4,2}$, qui couvrira tous les cas de figure.

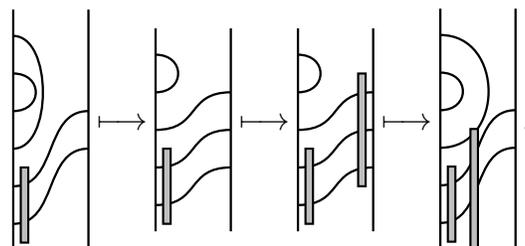
Exemple 4.1.1. *La base à changer est*

$$\mathfrak{B}_{4,2}^2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right\}.$$

La première étape est de diviser la base en deux familles : \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 . La première famille contient les diagrammes qui ont un défaut en première position et la deuxième ne contient que ceux qui ont un arc en première position :

$$\mathfrak{F}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{F}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right\}.$$

Il est possible de voir que la famille \mathfrak{F}_1 est en bijection avec la base $\mathfrak{B}_{3,2}^1$ simplement en enlevant le premier défaut : cette famille donnera les premiers vecteurs de la nouvelle base. De même, la famille \mathfrak{F}_2 est en bijection avec $\mathfrak{B}_{3,2}^3$ en transformant le premier arc en défaut. Par la suite, le changement de base est donné en agissant à droite sur $\mathfrak{B}_{3,2}^3$ par $P_3^{(3)}$ puis en fermant le premier défaut en un arc par la bijection introduite. Graphiquement :



Dans cette nouvelle base,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right\}, \quad (4.1.2)$$

la matrice de Gram devient

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathcal{G}_{4,2}^2 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} [3]_q & \frac{[3]_q}{[2]_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[3]_q}{[2]_q} & [3]_q & \frac{[3]_q}{[2]_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{[3]_q}{[2]_q} & [3]_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[3]_q}{[2]_q} \frac{[4]_q}{[3]_q} & \frac{[4]_q}{[3]_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[4]_q}{[3]_q} & [2]_q \frac{[4]_q}{[3]_q} & \frac{[4]_q}{[3]_q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[4]_q}{[3]_q} & [2]_q \frac{[4]_q}{[3]_q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{3,2}^1 & 0 \\ 0 & \frac{[4]_q}{[3]_q} \mathcal{G}_{3,2}^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant ce changement de base, nous obtenons une équation du type (4.1.1) avec $\alpha_{4,2}^2 = \frac{[4]_q}{[3]_q}$.

Cet exemple fait, nous pouvons passer à la preuve générale.

Proposition 4.1.2. Lorsque $[d+1]_q \neq 0$, il existe un changement de base unitriangulaire supérieur \mathbf{U} tel que

$$\mathbf{U}^T \mathcal{G}_{n,k}^d \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{n-1,k}^{d-1} & 0 \\ 0 & \frac{[d+2]_q}{[d+1]_q} \mathcal{G}_{n-1,k}^{d+1} \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{B}_{n,k}^d$ la base du module $\mathcal{V}_{n,k}^d$. La première étape est d'ordonner la base en débutant par les éléments ayant un défaut en première position, la famille \mathfrak{F}_1 , et en continuant avec les éléments ayant un arc en première position, la famille \mathfrak{F}_2 . Ensuite, il faut agir avec un projecteur de Wenzl-Jones de taille $d+1$ sur les d défauts et sur la branche inférieure du premier arc de \mathfrak{F}_2 , en notant \mathfrak{F}'_2 la nouvelle famille ainsi obtenue.

Ce changement est donnée par une matrice unitriangulaire supérieure. En effet, après avoir agit avec le projecteur de Wenzl-Jones, celui-ci se simplifie grâce à la formule (3.1.2)

en une somme de l'identité et de termes non monos ou avec un défaut dans la première ligne. Par exemple, le sixième vecteur de la nouvelle base (4.1.2) de l'exemple devient

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram} = \text{Diagram} - \frac{[2]_q}{[3]_q} \text{Diagram} + \frac{1}{[3]_q} \text{Diagram} \\
 & = \text{Diagram} - \frac{1}{[2]_q} \text{Diagram} - \frac{[2]_q}{[3]_q} \text{Diagram} + \frac{[2]_q}{[3]_q [2]_q} \text{Diagram}'
 \end{aligned}$$

et le dernier diagramme de la première ligne et le deuxième de la seconde sont nuls puisqu'ils ne sont pas monos.

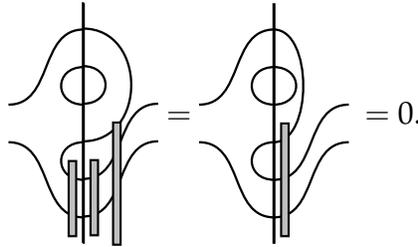
En règle générale pour \mathcal{V}_n^d après avoir ordonné la base en débutant par les termes possédant un défaut en première position, un élément de la famille \mathfrak{F}'_2 s'exprimera en somme de plusieurs termes après l'expression du projecteur de Wenzl-Jones par la proposition 3.1.2. Le premier terme sera le même diagramme sans que sa première boucle ne soit touchée par un projecteur et avec un projecteur de Wenzl-Jones de taille d sur tous les défauts. Il se divisera en l'identité et des termes qui ne sont pas monos et seront donc nuls : le projecteur n'agit que sur les défauts et donc il donne l'identité dans \mathcal{V}_n^d . Le deuxième terme aura un défaut en première position, donc fera partie de la première famille. Les autres termes ne seront pas monos puisque la division du projecteur de Wenzl-Jones sur les d défauts et la première boucle fait intervenir des boucles du côté droit, comme vu dans l'exemple ; ces termes sont non monos, donc nuls. Ce paragraphe conclut la preuve de l'unitriangularité de \mathcal{U} .

Ne restent que trois points à vérifier : (1) que la famille \mathfrak{F}_1 a même matrice de Gram que $\mathcal{G}_{n-1,k}^{d-1}$; (2) que les familles \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}'_2 sont orthogonales et (3) que la famille \mathfrak{F}'_2 a même matrice de Gram que $\mathcal{G}_{n-1,k}^{d+1}$ à un coefficient α près.

- (1) Le résultat de l'ajout d'un défaut à la dernière ligne pour tous les éléments de $\mathfrak{B}_{n-1,k}^{d-1}$ ne change rien à l'évaluation par la forme bilinéaire et donne la famille \mathfrak{F}_1 . La première vérification se voit donc faite.

- (2) Soient $v \in \mathfrak{F}_1$ et $w \in \mathfrak{F}'_2$. Supposons que $\phi_{n,k}^d(v,w) \neq 0$. À cette fin, le premier défaut de v est forcément lié à un défaut de w puisque, autrement, le résultat serait 0. Effectivement, en ce cas, v^*w ne serait pas mono. Comme le premier arc et tous les défauts de w sont reliés à un projecteur de Wenzl-Jones, il en suit nécessairement que deux défauts du projecteur de Wenzl-Jones sont reliés et donc que le résultat est 0.

Par exemple, sur $\mathcal{V}_{4,2}^2$, le produit des troisième et quatrième vecteurs de la base introduite à l'exemple 4.1.1 donne



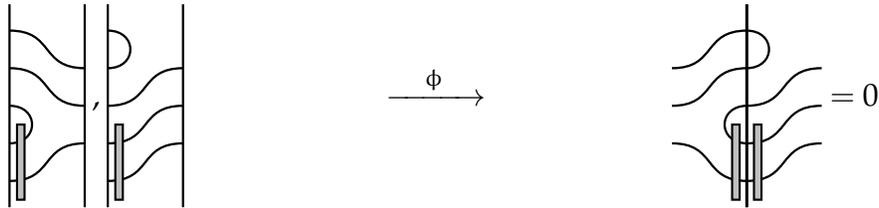
- (3) Finalement, chaque élément de $\mathfrak{B}_{n-1,k}^{d+1}$ correspond à un élément de \mathfrak{F}'_2 obtenu en reliant le point le plus haut avec le premier défaut, une bijection dont l'inverse est l'opération décrite à l'exemple précédent. Que cette bijection, notée ψ , préserve la forme bilinéaire à un scalaire près, c'est ce qui reste à montrer.

Pour que deux éléments v,w de la base $\mathfrak{B}_{n-1,k}^{d+1}$ soient tels que $\phi_{n-1,k}^{d+1}(v,w) = 0$, seules deux situations peuvent survenir. Il peut advenir que le produit fasse apparaître une fraction de q -nombres $[k+1]_q / [k-j+1]_q$ par l'équation (3.2.6) qui s'annule à cette valeur précise de q . Si c'est le cas, alors le résultat sera aussi nul après la bijection $\psi : \mathfrak{B}_{n-1,k}^{d+1} \rightarrow \mathfrak{F}'_2 \subset \mathfrak{B}_{n,k}^d$ puisque le numérateur ne dépend que de k et la bijection changera seulement le j .

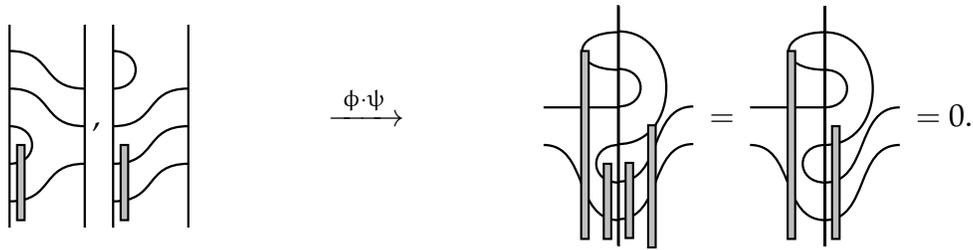
Dans l'autre situation, pour que le résultat s'annule, il faut que deux des défauts de v soient reliés, et par le fait même, que deux des défauts de w aussi le soient. En effet, les cas de figure de la remarque 3.2.7 indiquent que les seules possibilités pour annuler la forme sont qu'il y ait un facteur de q -nombre nul ou que deux défauts du même côté soient reliés. La bijection ne touchant que le premier défaut dans $\mathfrak{B}_{n-1,k}^{d+1}$, il est certain que si une des paires de défauts de w ou de v ne le contient pas, la paire sera aussi reliée après action de ψ et donc, donnera toujours un résultat nul.

Il faut donc seulement considérer le cas où une des paires de défauts liés implique le premier point. Puisqu'un projecteur relie tous les défauts de v et de w , il y aura forcément une boucle qui reliera deux défauts du même côté du projecteur, ce qui donne 0.

Par exemple, si nous prenons les deux diagrammes de $\mathcal{V}_{3,2}^3$



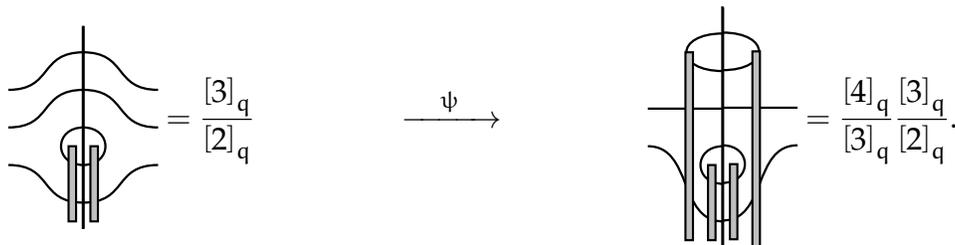
alors l'application de ψ garde la forme bilinéaire nulle sur $\mathcal{V}_{4,2}^2$ puisque leur concaténation contient un arc liant deux points sur un projecteur :



Ne reste qu'à vérifier ce qui se passe lorsque $\phi_{n-1,k}^{d+1}(v,w) \neq 0$. En ce cas, aucune paire de défauts du même côté n'est liée. En particulier, cela veut dire que les deux défauts les plus hauts sont liés. Après ψ , cela veut dire qu'il y a une bulle qui touche un projecteur de Wenzl-Jones de taille $d + 1$. La règle indique en ce cas qu'elle explose et donne un facteur $\frac{[d+2]_q}{[d+1]_q}$. Le reste demeure inchangé et donc

$$\phi_{n,k}^d(\psi(v), \psi(w)) = \frac{[d+2]_q}{[d+1]_q} \phi_{n-1,k}^{d+1}(v,w). \quad (4.1.4)$$

Par exemple,



Ceci donne explicitement la constante qu'il fallait trouver et prouve l'existence du changement de base. \square

La condition $[d+1]_q \neq 0$ s'apparente à la condition de non-criticalité présentée dans l'étude de TL_n . Tout comme dans [22], il faut traiter le cas critique séparément.

Proposition 4.1.3. *Lorsque (n,k,d) est critique, c'est-à-dire lorsque $[d+1]_q = 0$, le radical est nul.*

Démonstration. Afin de démontrer ce résultat, il faut travailler sur le déterminant de Gram : un argument similaire à [22] donnera la voie à emprunter. Avant de débiter, de l'équation $[d+1]_q = 0$ assure l'existence d'un entier m positif tel que $d+1 = m\ell$.

Le déterminant (3.3.12) est constitué de deux produits :

$$\det \mathcal{G}_{n,k}^d = \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\frac{[i]_q}{[k-i+1]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k-2i}^d} \prod_{j=1}^{\frac{n+k-d}{2}} \left(\frac{[d+1+j]_q}{[j]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k}^{d+2j}}. \quad (4.1.5)$$

La première partie,

$$\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\frac{[i]_q}{[k-i+1]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k-2i}^d}, \quad (4.1.6)$$

n'est jamais nulle par la supposition que $k < \ell$. Pour que la deuxième partie,

$$\prod_{j=1}^{\frac{n+k-d}{2}} \left(\frac{[d+1+j]_q}{[j]_q} \right)^{\dim \mathcal{V}_{n,k}^{d+2j}}, \quad (4.1.7)$$

soit nulle, il faudrait que $j = m'\ell$ pour un certain $m' \in \mathbb{N}$ pour que le numérateur $[d+1+j]_q$ s'annule. Or, lorsque cela arrive, le zéro ainsi créé est annihilé par l'existence d'un zéro de même ordre au dénominateur. Précisément,

$$\frac{[d+1+j]_q}{[j]_q} = \frac{[m\ell + m'\ell]_q}{[m'\ell]_q} = \frac{[(m+m')\ell]_q}{[m'\ell]_q} = \frac{[(m+m')]_{q^\ell} [\ell]_q}{[m']_{q^\ell} [\ell]_q}$$

puisque pour un $\hat{m} \in \mathbb{N}$ quelconque,

$$\begin{aligned} [\hat{m}\ell]_q &= \frac{q^{\hat{m}\ell} - q^{-\hat{m}\ell}}{q - q^{-1}} \\ &= \left(\frac{(q^\ell)^{\hat{m}} - (q^\ell)^{-\hat{m}}}{q - q^{-1}} \right) \left(\frac{q^\ell - q^{-\ell}}{q^\ell - q^{-\ell}} \right) \\ &= [\ell]_q [\hat{m}]_{q^\ell}. \end{aligned}$$

Comme $q^\ell = \pm 1$, alors $[m']_q$ et $[m + m']_q$ sont ± 1 . Le déterminant n'est donc pas nul et le radical, nul. \square

Avec cette proposition et la précédente, tout est en place pour avoir les conditions exactes d'une formule de récurrence sur la dimension du radical.

4.1.2. Formules de récurrence

Proposition 4.1.4. *La dimension du radical $\mathcal{R}_{n,k}^d$ du module cellulaire $\mathcal{V}_{n,k}^d$ respecte la relation*

$$\dim \mathcal{R}_{n,k}^d = \begin{cases} 0 & \text{si } [d+1]_q = 0; \\ \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{d-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q = 0; \\ \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{d-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q \neq 0. \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Notons que le cas $\dim \mathcal{R}_{n,k}^{-1} = 0$ est inclus dans la première condition puisque $[0]_q = 0$.

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 4.1.2; lorsque $[d+2]_q = 0$, la totalité de $\mathcal{V}_{n-1,k}^{d+1}$ contribue au radical et le cas critique est traité à la proposition 4.1.3. \square

Maintenant, en rappelant que $\dim \mathcal{L}_{n,k}^d = \dim \mathcal{V}_{n,k}^d - \dim \mathcal{R}_{n,k}^d$ et que

$$\dim \mathcal{V}_{n,k}^d = \dim \mathcal{V}_{n-1,k}^{d-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k'}^{d+1} \quad (4.1.9)$$

nous avons aussi prouvé la formule de récurrence suivante sur la dimension des modules simples.

Corollaire 4.1.5. *La dimension du module simple $\mathcal{L}_{n,k}^d$ associé au module cellulaire $\mathcal{V}_{n,k}^d$ respecte la relation*

$$\dim \mathcal{L}_{n,k}^d = \begin{cases} \dim \mathcal{V}_{n,k}^d & \text{si } [d+1]_q = 0; \\ \dim \mathcal{L}_{n-1,k}^{d-1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q = 0; \\ \dim \mathcal{L}_{n-1,k}^{d-1} + \dim \mathcal{L}_{n-1,k}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q \neq 0. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Afin de les avoir à disposition plus tard, notons qu'en prenant $k = 0$ dans les précédents résultats, nous avons montré les formules de récurrence des dimensions des radicaux et des modules simples sur TL_n .

Corollaire 4.1.6. *Les dimension du radical \mathcal{R}_n^d et de la coiffe \mathcal{L}_n^d liés au module cellulaire \mathcal{V}_n^d de TL_n respectent les relations*

$$\dim \mathcal{R}_n^d = \begin{cases} 0 & \text{si } [d+1]_q = 0; \\ \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q = 0; \\ \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q \neq 0, \end{cases} \quad (4.1.11)$$

$$\dim \mathcal{L}_n^d = \begin{cases} \dim \mathcal{V}_n^d & \text{si } [d+1]_q = 0; \\ \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d-1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q = 0; \\ \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d+1} & \text{si } [d+1]_q \neq 0 \text{ et } [d+2]_q \neq 0. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Ces résultats seront utiles afin de montrer que les radicaux sont simples.

4.2. Morphismes entre les modules cellulaires

Dans cette section, l'intérêt est porté sur les relations qui existent entre les modules cellulaires pour q critique. Au dernier chapitre, le cas de q générique a été traité et il s'est avéré assez simple : l'algèbre de Temperley-Lieb à couture est semi-simple et les modules cellulaires forment un ensemble complet de modules simples non-isomorphes.

Dès lors que q prend une valeur critique, la situation devient plus complexe : il y a des relations non-triviales entre les différents modules. Pour les expliciter, nous utiliserons un résultat de Graham-Lehrer [11] qui donne exactement tous les morphismes entre ces modules de l'algèbre $TL_n(\beta)$; leur formule, bien que compliquée à énoncer formellement, devient limpide à l'aide d'un exemple. Grâce au travail effectué précédemment, il sera simple de montrer que le résultat s'étend au cas des algèbres à couture.

La section débute avec un exemple sur TL_3 pour introduire les concepts et donner l'intuition. Ensuite, nous donnerons l'énoncé des propositions sur TL_n et la preuve que le morphisme subsiste pour $B_{n,k}$.

Dans cette section, nous supposons $k < \ell$ pour éviter le cas pathologique.

Les deux diagrammes ont deux liens, w_1 a une boucle isolée et un lien qui contient la boucle; w_2 a un lien qui ne contient pas de boucle et une boucle seule. Cela donne

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{[2]_q!}{[1]_q [2]_q} & \mathbf{b} &= \frac{[2]_q!}{[1]_q [1]_q} \\ &= 1, & &= [2]_q = 1. \end{aligned}$$

Toutefois, il faut choisir un signe. Pour ce faire, la méthode que nous emploierons plus tard passe par l'isomorphisme d'algèbres qui envoie $TL_n(\beta)$ vers $TL_n(-\beta)$ puisque le travail de Graham et Lehrer pour définir ces morphismes a été fait pour la convention $\beta = -q - q^{-1}$. Pour ce cas, postulons simplement un choix de signe que nous vérifierons par après :

$$\theta(v) = w_1 - w_2.$$

Ceci sera un morphisme si l'action des générateurs de TL_3 est préservée par θ . L'identité préserve trivialement l'action du morphisme; les deux générateurs E_1 et E_2 quant à eux envoient tout deux v à zéro puisqu'ils ferment deux lignes transversales, rendant ainsi le diagramme non-mono. Il faut donc voir si E_1 et E_2 envoient $w_1 - w_2$ à zéro. En rappelant que $\beta = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1$, l'action donne

$$\begin{aligned} E_1(w_1 - w_2) &= \left(\text{diagramme } w_1 \right) - \left(\text{diagramme } w_2 \right) \\ &= \left(\text{diagramme } w_1 \right) - \left(\text{diagramme } w_2 \right) = \beta \left(\text{diagramme } w_1 \right) - \left(\text{diagramme } w_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

La condition se vérifie similairement pour E_2 . Nous avons donc bien que $\theta(av) = a\theta(v)$ pour tout $a \in TL_3$, c'est-à-dire que c'est bien un morphisme de TL_3 -modules.

4.2.2. Morphismes entre modules cellulaires de l'algèbre de Temperley-Lieb

Tous les éléments nécessaires, ainsi que l'intuition utile, sont maintenant réunis pour passer aux définitions formelles pour le morphisme. Il est assez simple de le calculer algorithmiquement, comme la sous-section précédente le laisse voir. Toutefois, les preuves emploient une machinerie un peu plus sophistiquée.

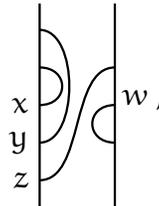
Nous utilisons les résultats de Graham-Lehrer dans [11], en gardant notre convention que $\beta := q + q^{-1}$ plutôt que la leur qui emploie $\beta = -q - q^{-1}$. Afin de pallier à ce changement, nous aurons donc souvent un signe qui apparaîtra dans nos formules.

Le signe provient de l'inverse de l'isomorphisme canonique d'algèbres entre $TL_n(\beta)$ et $TL_n(-\beta)$. Nous allons simplement garder en tête qu'il y a un signe en ajoutant $sg(\mu)$ aux endroits appropriés.

Pour énoncer la proposition sur les morphismes, quelques notions combinatoires sont nécessaires. Tout d'abord, nous introduisons un ordre partiel sur les lignes transversales et les arcs des diagrammes.

Définition 4.2.1. Soit un diagramme $\alpha : t \leftarrow s$. Un ordre partiel est mis sur l'ensemble des liens $F(\alpha)$ du diagramme α en prenant $x \leq y$ si x est dans l'enveloppe convexe de y .

L'enveloppe convexe est ce qui est contenu à l'intérieur d'un arc ou d'une ligne avec la convention que l'intérieur d'une ligne transversale est le haut. Par exemple, pour le diagramme suivant,



les liens x, y, z et w respectent les relations :

$$x \leq x, \quad x \leq y, \quad x \leq z, \quad y \leq y, \quad y \leq z, \quad z \leq z, \quad w \leq w.$$

Cet ensemble est une **forêt**, c'est-à-dire un ensemble ordonné tel que si $x \leq y$ et $x \leq z$ alors $y \leq z$ ou $z \leq y$. De cela, un résultat de Stanley assure que le morphisme est bien défini.

Proposition 4.2.2 (Stanley, [23]). Soit P une forêt de cardinalité n . Pour $y \in P$, soit h_y le nombre d'éléments de P qui sont plus petits ou égaux à y . La fonction rationnelle définie par

$$H_P(q) := \frac{[n]_q!}{\prod_{y \in P} [h_y]_q} \tag{4.2.2}$$

est un polynôme de Laurent à coefficients entiers.

Tous les éléments sont en place pour formuler la proposition donnant le morphisme entre les modules cellulaires.

Proposition 4.2.3 (Graham et Lehrer Corollaire 3.6 [11]). Soient $q \in \mathbb{C}$ d'ordre fini et $\ell > 1$ l'entier minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. Soit l'algèbre de Temperley-Lieb $TL_n(\beta)$. Si $t < s < t + 2\ell$ et $s + t \equiv -2 \pmod{2\ell}$, alors il y a un morphisme de modules cellulaires $\theta : \mathcal{V}_n^s \rightarrow \mathcal{V}_n^t$ donné par

$$\theta(v) = \sum_{\substack{\mu: s \leftarrow t \\ \text{mono}}} \text{sg}(\mu) H_{F(\mu)}(q) v \mu. \quad (4.2.3)$$

4.2.3. Généralisation de la preuve

Afin de généraliser le résultat, ce sera le caractère idempotent du projecteur $P_k^{(k)}$ qui servira.

Proposition 4.2.4. Soient A une \mathbb{K} -algèbre et $e \in A$ un idempotent. Si $B = eAe$, alors il existe un foncteur $\text{Res}_e : \text{Mod}A \rightarrow \text{Mod}B$ qui envoie un module gauche V sur un module gauche eV et un morphisme $f : V \rightarrow W$, sur le morphisme $\text{Res}_e(f) : eV \rightarrow eW$ défini par $ev \mapsto ef(v)$. De plus, le foncteur est exact.

Démonstration. Il est évident que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \text{Res}_e \downarrow & & \downarrow \text{Res}_e \\ eV & \xrightarrow{\text{Res}_e(f)} & eW \end{array} \quad (4.2.4)$$

commute pour tout $V \xrightarrow{f} W$. Finalement, pour des morphismes $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$, la composition est respectée par Res_e puisque, pour $v \in V$,

$$\text{Res}_e(gf)(ev) = egf(v)$$

et

$$\text{Res}_e(g)(\text{Res}_e(f)(ev)) = \text{Res}_e(g)(ef(v)) = eg(f(v)).$$

Le foncteur est exact puisque pour toute suite courte exacte de A -modules

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0,$$

la suite

$$0 \longrightarrow eM \xrightarrow{\text{Res}_e(f)} eN \xrightarrow{\text{Res}_e(g)} eP \longrightarrow 0,$$

l'est aussi. En effet, aux trois points pouvant causer problème, le noyau de la fonction est égal à l'image de la fonction précédente. Tout d'abord, si $\ker(g) = \text{Im}(f)$, alors forcément $e\ker(g) = e\text{Im}(f)$. Le morphisme $\text{Res}_e(f)$ est un monomorphisme puisque pour $em \in eM$,

$$\text{Res}_e(f)(em) = ef(em) = f(em)$$

et comme f est un monomorphisme, alors $em = 0$ si et seulement si $em = 0$. Le morphisme $\text{Res}_e(g)$ est un épimorphisme puisque pour $ep \in eP \subset P$, le fait que g soit un épimorphisme indique qu'il existe un $x \in N$ tel que $g(x) = ep$. En ce cas,

$$\text{Res}_e(g)(ex) = eg(ex) = eg(x) = ep.$$

□

Corollaire 4.2.5. *Soit $q \in \mathbb{C}$ d'ordre fini. Soit $\ell > 1$ l'entier minimal tel que $q^{2\ell} = 1$. Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n > k$ et $k \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Si $t < s < t + 2\ell$ et $s + t \equiv -2 \pmod{2\ell}$, il y a un $B_{n,k}$ -morphisme $\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta) : \mathcal{V}_{n,k}^s \rightarrow \mathcal{V}_{n,k}^t$ non nul issu du morphisme de Graham et Lehrer $\theta : \mathcal{V}_{n+k}^s \rightarrow \mathcal{V}_{n+k}^t$ de TL_{n+k} -modules et ce $B_{n,k}$ -morphisme est donné par*

$$\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)(v) = \sum_{\substack{\mu: s \leftarrow t \\ \text{mono}}} \text{sg}(\mu) H_{F(\mu)}(q) P_k^{(k)} v \mu. \quad (4.2.5)$$

Démonstration. La proposition précédente donne la functorialité de $\text{Res}_{P_k^{(k)}}$ et la proposition 4.2.3 donne que θ est un morphisme de TL_{n+k} -modules. Donc, $\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)$ est un $B_{n,k}$ -morphisme.

La seule chose à démontrer est que le morphisme est non nul. Tout d'abord, comme $n > k$, aucun des $P_k^{(k)} \mathcal{V}_{n+k}^d$ n'est nul puisque pour chacun des modules, il y a un élément dont aucune paire de points limitrophes n'est liée.

Si le morphisme $\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)$ est nul, alors $\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)(\mathcal{V}_{n+k}^s) = 0$ par définition de $\mathcal{V}_{n,k}^s$. Comme Graham et Lehrer l'ont démontré [11], il y a un isomorphisme de TL_{n+k} -modules $\theta(\mathcal{V}_{n+k}^s) = \mathcal{R}_{n+k}^t \simeq \mathcal{L}_{n+k}^s$. Cela veut dire

$$\text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)(\mathcal{V}_{n,k}^s) = \text{Res}_{P_k^{(k)}}(\theta)(\text{Res}_{P_k^{(k)}} \mathcal{V}_{n+k}^s) = \text{Res}_{P_k^{(k)}}(\mathcal{R}_{n+k}^t).$$

Or, la proposition 2.2.5 l'idempotent $P_k^{(k)}$ donne que

$$\text{Res}_{P_k^{(k)}} \mathcal{R}_{n+k}^t = P_k^{(k)} \mathcal{R}_{n+k}^t = P_k^{(k)} \text{rad } \mathcal{V}_{n+k}^t = \text{rad } P_k^{(k)} \mathcal{V}_{n+k}^t = \mathcal{R}_{n,k}^t.$$

Ainsi, par hypothèse de nullité sur le morphisme, cela veut dire que

$$\text{Res}_{\mathbb{P}_k^{(k)}}(\theta)(\mathcal{V}_{n,k}^s) = \mathcal{R}_{n,k}^t = 0. \quad (4.2.6)$$

De plus, le foncteur $\text{Res}_{\mathbb{P}_k^{(k)}}$ étant exact, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_{n+k}^t \longrightarrow \mathcal{V}_{n+k} \longrightarrow \mathcal{L}_{n+k}^t \longrightarrow 0 \quad (4.2.7)$$

donne lieu à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_{n,k}^t \longrightarrow \mathcal{V}_{n,k} \longrightarrow \text{Res}_{\mathbb{P}_k^{(k)}} \mathcal{L}_{n+k}^t \longrightarrow 0. \quad (4.2.8)$$

Cela donne donc

$$\text{Res}_{\mathbb{P}_k^{(k)}} \mathcal{L}_{n+k}^t = \mathbb{P}_k^{(k)} \mathcal{L}_{n+k} = \frac{\mathcal{V}_{n,k}^t}{\mathcal{R}_{n,k}^t}. \quad (4.2.9)$$

En utilisant la formule de récurrence (4.1.8) nous avons deux cas. Le premier, $[t+2]_q = 0$, indique

$$\dim \mathcal{R}_{n,k}^t = \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{t-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1,k}^{t+1} = 0.$$

C'est une contradiction, $\dim \mathcal{V}_{n-1,k}^{t+1} = 0$ seulement si $t+1 > n-1+k$; comme il y a un morphisme $\mathcal{V}_{n+k}^s \rightarrow \mathcal{V}_{n+k}^t$, alors nous avons $t < s-1 < n+k$.

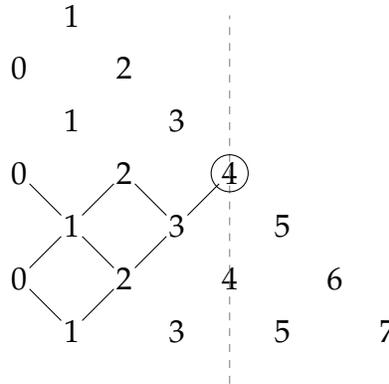
Le second, $[t+2]_q \neq 0$, indique

$$\dim \mathcal{R}_{n,k}^t = \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{t-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1,k}^{t+1} = 0.$$

Nous allons répéter le processus jusqu'à déboucher une contradiction. Pour illustrer, voici un exemple avec $n = 4, k = 3, \ell = 5, s = 7$ et $t = 1$: si le morphisme $\mathcal{V}_{4,3}^7 \rightarrow \mathcal{V}_{4,3}^1$ était nul, cela voudrait dire que le radical $\mathcal{R}_{4,3}^1$ est nul, mais en utilisant la formule de récurrence, on trouve que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}_{4,3}^1 &= \dim \mathcal{R}_{3,3}^0 + \dim \mathcal{R}_{3,3}^2 \\ &= \dim \mathcal{R}_{3,3}^0 + \dim \mathcal{R}_{2,3}^1 + \dim \mathcal{R}_{2,3}^3 \\ &= \dim \mathcal{R}_{3,3}^0 + \dim \mathcal{R}_{2,3}^1 + \dim \mathcal{R}_{1,3}^2 + \dim \mathcal{V}_{1,3}^4 \end{aligned}$$

une contradiction puisque $\dim \mathcal{V}_{1,3}^4 = 1$. Voici le processus représenté graphiquement sur le diagramme de Bratteli :



Bref, comme $\ell > k$, il existe un m tel que $[t + m + 2]_q = 0$ avec $t + m + 1 < n - m - 1 + k$, en ce cas

$$\dim \mathcal{R}_{n-m,k}^{t+m} = \dim \mathcal{R}_{n-m-1,k}^{t+m-1} + \dim \mathcal{V}_{n-m-1,k}^{t+m+1} = 0,$$

une contradiction puisque $\mathcal{V}_{n-m-1,k}^{t+m+1} \neq 0$ si $\mathcal{V}_{n,k}^t$ n'est pas nul.

Le morphisme n'est donc pas nul et le corollaire est montré. □

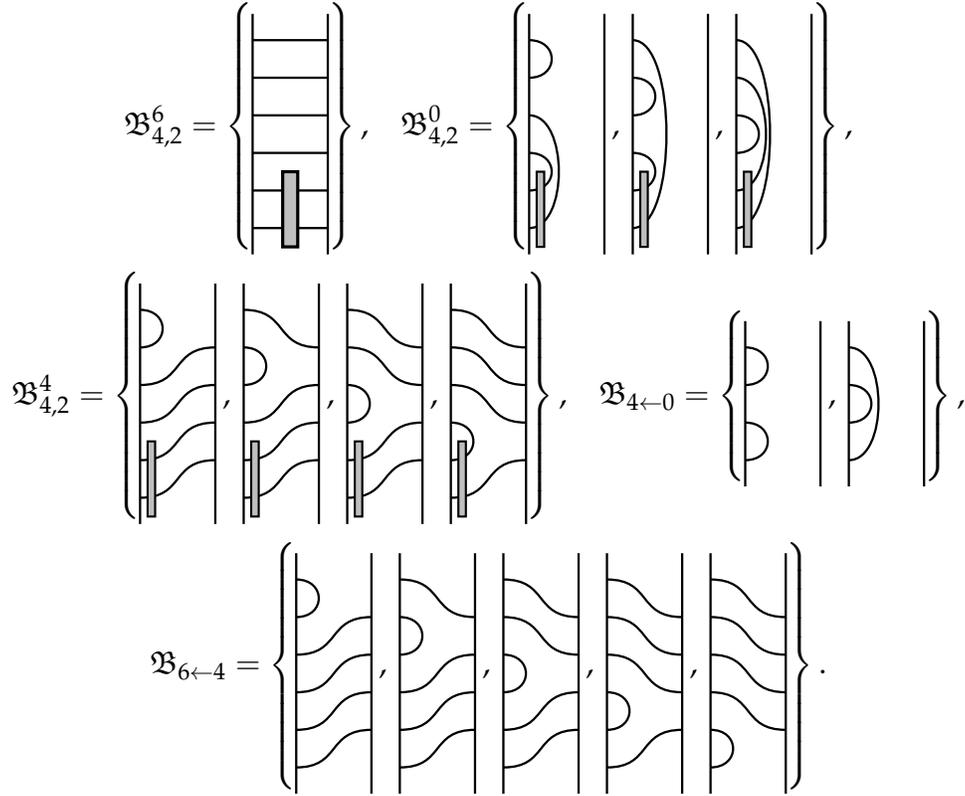
Ce qui suit couvre l'exemple non-trivial de $B_{4,2}$ en $\ell = 3$ des deux morphismes donnés par le corollaire 4.2.5. Le diagramme de Bratteli qui représente la situation est donné par

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \mathcal{V}_{4,2}^0 & & \mathcal{V}_{4,2}^2 & & \mathcal{V}_{4,2}^4 & & \mathcal{V}_{4,2}^6 & \cdot \\ & & \vdots & & \vdots & & & & & \end{array} \quad (4.2.10)$$

De cela, nous obtenons qu'il y a deux morphismes non-triviaux,

$$\begin{aligned} \theta_1 : \mathcal{V}_{4,2}^6 &\longrightarrow \mathcal{V}_{4,2}^4, \\ \theta_2 : \mathcal{V}_{4,2}^4 &\longrightarrow \mathcal{V}_{4,2}^0. \end{aligned}$$

Pour donner les morphismes, nous aurons besoin de la base des modules $\mathcal{V}_{4,2}^6$, $\mathcal{V}_{4,2}^4$ et $\mathcal{V}_{4,2}^0$ ainsi que des bases des diagrammes mono de types $6 \leftarrow 4$ et $4 \leftarrow 0$. Ceci donne :



L'action du morphisme θ_1 sur l'unique élément v de $\mathcal{B}_{4,2}^6$ est donnée par une somme sur les cinq éléments w_i de $\mathcal{B}_{6 \leftarrow 4}$:

$$\begin{aligned} \theta_1(v) &= \sum_{i=1}^5 \text{sg}(w_i) H_{F(w_i)}(q) v w_i \\ &= a_1 v w_1 + a_2 v w_2 + a_3 v w_3 + a_4 v w_4 + a_5 v w_5. \end{aligned}$$

Maintenant, le signe change lorsqu'il y a déplacement d'arc par rapport au premier élément, cela veut dire que les signes alternent. Le coefficient a_5 n'est pas à calculer, car $v w_5 = 0$ puisque le projecteur de Wenzl-Jones est annihilé par la dernière boucle. Pour les autres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^0 \frac{[5]_q!}{[1]_q [2]_q [3]_q [4]_q [5]_q} = 1, & a_2 &= (-1)^1 \frac{[5]_q!}{[1]_q [1]_q [3]_q [4]_q [5]_q} = -[2]_q, \\ a_3 &= (-1)^2 \frac{[5]_q!}{[1]_q [2]_q [1]_q [4]_q [5]_q} = [3]_q, & a_4 &= (-1)^3 \frac{[5]_q!}{[1]_q [2]_q [3]_q [1]_q [5]_q} = -[4]_q. \end{aligned}$$

Les valeurs des q -nombres avec $q = e^{\pi i/3}$: $[2]_q = 1$, $[3]_q = 0$ et $[4]_q = -1$ donnent la forme explicite du morphisme :

$$\theta_1(v) = \text{diagram 1} - \text{diagram 2} + \text{diagram 3} .$$

Le morphisme θ_2 est défini sur les quatre éléments v_i de $\mathfrak{B}_{4,2}^4$ par une somme sur les deux éléments z_1, z_2 de $\mathfrak{B}_{4 \leftarrow 0}$.

$$\theta_2(v_i) = \text{sg}(z_1)H_{F(z_1)}(q)v_i z_1 + \text{sg}(z_2)H_{F(z_2)}(q)v_i z_2$$

Ici, $H_{F(z_1)} = [2]_q$ et $H_{F(z_2)} = 1$. Il y a alternance des signes ; prenons la convention qu'à z_1 est associé le signe positif. Donc, les morphismes sont :

$$\theta_2(v_1) = [2]_q \text{diagram 1} - \text{diagram 2} = - \text{diagram 3} ,$$

$$\theta_2(v_2) = - \text{diagram 4} , \quad \theta_2(v_3) = - \text{diagram 5} , \quad \theta_2(v_4) = [2]_q \text{diagram 6} - \text{diagram 7} .$$

Notons une petite chose : le noyau du morphisme θ_2 contient la totalité de l'image de θ_1 puisque

$$\theta_2(\theta_1(v)) = \theta_2(v_1 - v_2 + v_4) = \theta_2(v_1) - \theta_2(v_2) + \theta_2(v_4) = 0.$$

La remarque faite plus haut n'est pas innocente : lorsqu'il y a un morphisme θ de $\mathcal{V}_{n,k}^d$ vers $\mathcal{V}_{n,k}^{d'}$, la coiffe $\mathcal{L}_{n,k}^{d+}$ de $\mathcal{V}_{n,k}^{d+}$ est isomorphe au radical $\mathcal{R}_{n,k}^d$. Pour prouver cela les résultats de la proposition 4.1.4 et du corollaire 4.1.5 sont tout ce qu'il nous faut.

Lemme 4.2.6. *Si d et d^+ forment une paire critique avec $d^+ > d$, alors la suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n,k}^{d^+} \longrightarrow \mathcal{V}_{n,k}^d \longrightarrow \mathcal{L}_{n,k}^d \longrightarrow 0. \quad (4.2.11)$$

Démonstration. Cette preuve débute par le cas de Temperley-Lieb classique. Bien que cela se retrouve dans (Corollaire 7.4 [22]), leur preuve emploie des stratégies que nous n'avons pas introduites. Une fois que le résultat est prouvé pour le cas de Temperley-Lieb, nous emploierons l'exactitude du foncteur Res_e de la proposition 4.2.4 et la relation des radicaux de la proposition 2.2.5 pour passer au cas à couture.

Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ tel que $q^{2\ell} = 1$ pour un ℓ minimal non-nul. Nous allons démontrer par récurrence sur n le résultat équivalent que, pour le morphisme $\mathcal{V}_n^{d^+} \xrightarrow{\theta} \mathcal{V}_n^d$, nous avons les relations $\theta(\mathcal{V}_n^{d^+}) = \mathcal{R}_n^d$ et $\ker(\theta) = \mathcal{R}_n^{d^+}$ et donc, que $\mathcal{L}_n^{d^+} \simeq \mathcal{R}_n^d$.

Le cas de base s'effectue en ℓ . Autrement dit, \mathcal{V}_ℓ^d est le premier module cellulaire à droite de la ligne critique. La partie d'intérêt du diagramme de Bratteli est alors

$$\begin{array}{ccc} & & \vdots \\ & & \mathcal{V}_{\ell-1}^{\ell-1} \\ & & \cdot \\ \dots & \mathcal{V}_\ell^{\ell-2} & \mathcal{V}_\ell^\ell \\ & & \vdots \end{array} \quad (4.2.12)$$

En effet, avant cela, tous les modules sont simples et il n'y a pas de morphisme à considérer. Ici toutefois, il y a un morphisme non-nul θ et ce morphisme envoie le module simple \mathcal{V}_ℓ^ℓ sur un sous-module de $\mathcal{V}_\ell^{\ell-2}$ et son image est comprise dans le radical; sinon, par l'argument de la proposition 2.2.3, un élément qui n'est pas dans le radical engendrerait tout le module, ce qui serait une contradiction. De plus, puisque $[\ell - 2 + 2]_q = 0$, la dimension du radical de $\mathcal{V}_\ell^{\ell-2}$ est $\dim \mathcal{R}_{\ell-1}^{\ell-3} + \dim \mathcal{V}_{\ell-1}^{\ell-1}$. Par hypothèse sur ℓ , le radical $\mathcal{R}_{\ell-1}^{\ell-3}$ est nul puisque son module est simple. Comme $\dim \mathcal{V}_\ell^\ell = \dim \mathcal{V}_{\ell-1}^{\ell-1}$, il suit que l'image de θ est le radical.

Sur la ligne $n = \ell$, il n'y a pas d'autre paire puisqu'il n'y a qu'une ligne critique en $d = \ell$ et un seul module à droite de cette ligne. Donc, le cas de base est prouvé.

Supposons que l'énoncé tienne pour tous les modules des lignes du diagramme de Bratteli étiquetées par un $m < n$. Soit une paire de modules \mathcal{V}_n^d et $\mathcal{V}_n^{d^+}$ liés par un morphisme non-nul $\theta : \mathcal{V}_n^{d^+} \rightarrow \mathcal{V}_n^d$. Débutons par étendre le diagramme de Bratteli afin d'admettre les modules triviaux pour $d^+ > n$. Il faut diviser maintenant l'étude en deux : pour $\ell = 2$ et $\ell > 2$. Nous débutons par cette dernière.

Trois situations peuvent survenir : dans la première, d^+ et d sont à distance 2 ; dans la deuxième, d^+ et d sont à distance arbitraire, et les modules $\mathcal{V}_{n-1}^{d^{\pm 1}}$, $\mathcal{V}_{n-1}^{d^{\pm 1}}$ ne sont pas critiques ; dans la dernière, d^+ et d sont à distance arbitraire et les modules \mathcal{V}_{n-1}^{d-1} ou $\mathcal{V}_{n-1}^{d^++1}$ sont critiques. En abrégant la notation à d pour le module \mathcal{V}_n^d sur la ligne n , les trois situations sont représentées par les diagrammes de Bratteli qui suivent.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} d-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} d^+-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array} & \begin{array}{c} d^++1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array} &
\begin{array}{c} d-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} d+1 \\ \circ \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} d^+-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array} & \begin{array}{c} d^++1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array} &
\begin{array}{c} d-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} d+1 \\ \circ \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} d^+-1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array} & \begin{array}{c} d^++1 \\ \circ \\ \vdots \\ d^+ \end{array}
\end{array} \quad (4.2.13)$$

Dans le premier cas, en notant que $[d^+ + 1]_q \neq 0$, $[d^+ + 2]_q \neq 0$ et $[d + 2]_q = 0$, les équations (4.1.11) et (4.1.12) donnent que

$$\dim \mathcal{L}_n^{d^+} = \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} + \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^++1} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{R}_n^d = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{V}_{n-1}^{d^+1}.$$

Maintenant, comme $\mathcal{V}_{n-1}^{d^+-1}$ est critique et que $d^+ = d + 2$, alors il suit que $\mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} = \mathcal{V}_{n-1}^{d^+-1}$. Finalement, par hypothèse d'induction, $\mathcal{L}_{n-1}^{d^++1} \simeq \mathcal{R}_{n-1}^{d-1}$ puisqu'ils sont symétriques par rapport à la ligne critique. Cela conclut et montre que $\mathcal{L}_n^{d^+} \simeq \mathcal{R}_n^d$ par le même argument que le cas de base.

Dans le deuxième cas, les deux modules sont éloignés des lignes critiques : cela veut dire que $[d^+ + 1]_q$, $[d^+ + 2]_q$, $[d + 1]_q$ et $[d + 2]_q$ sont tous non-nuls, les dimensions des modules simples et des radicaux sont donc

$$\dim \mathcal{L}_n^{d^+} = \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} + \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^++1} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{R}_n^d = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d^+1}.$$

Les paires $(d^+ - 1, d + 1)$ et $(d^+ + 1, d - 1)$ sont symétriques et, par hypothèse d'induction, il suit que

$$\dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d^+1} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^++1} = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1},$$

d'où $\dim \mathcal{L}_n^{d^+} = \dim \mathcal{R}_n^d$. Cela est suffisant pour montrer l'isomorphisme.

Finalement, pour le dernier cas, nous avons que $[d^+ + 2]_q = 0$ et donc

$$\dim \mathcal{L}_n^{d^+} = \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{R}_n^d = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d+1}.$$

Or, comme $[d - 1 + 1]_q = 0$, alors le radical \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} est nul. En combinant avec l'hypothèse d'induction, il suit que $\dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d+1}$ et que les dimensions sont égales.

Avant de passer au cas à couture, il faut faire l'étude dans le cas où $\ell = 2$, donc $\beta = 0$. En ce cas, il y a une ligne critique à chaque deux bond et nous nous retrouvons donc dans une combinaison des premier et deuxième cas :

$$\begin{array}{ccccc} d^+ - 1 & d^+ - 1 & d^+ + 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & \circ & \circ & & \\ & d & d^+ & & \end{array} . \quad (4.2.14)$$

En ce cas, $[d]_q = [d + 2]_q = [d^+ + 2]_q = 0$. Ainsi,

$$\dim \mathcal{L}_n^{d^+} = \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d^+-1} \quad \dim \mathcal{R}_n^d = \dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} + \dim \mathcal{L}_{n-1}^{d+1}.$$

Comme $\dim \mathcal{R}_{n-1}^{d-1} = 0$ puisque $[d]_q = 0$ et que $d^+ - 1 = d + 1$, l'égalité des dimensions est prouvée.

L'étude de ces cas permet de prouver l'existence d'une suite exacte de TL_n -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{n+k}^{d^+} \longrightarrow \mathcal{V}_{n+k}^d \longrightarrow \mathcal{L}_{n+k}^d \longrightarrow 0. \quad (4.2.15)$$

L'application du foncteur exact $\text{Res}_{P_k^{(k)}}$ sur cette suite donne une suite exacte de $B_{n,k}$ -modules

$$0 \longrightarrow P_k^{(k)} \mathcal{L}_{n+k}^{d^+} \longrightarrow \mathcal{V}_{n,k}^d \longrightarrow P_k^{(k)} \mathcal{L}_{n+k}^d \longrightarrow 0. \quad (4.2.16)$$

Maintenant, la proposition 2.2.5 donne que

$$P_k^{(k)} \mathcal{L}_{n+k}^d \simeq P_k^{(k)} \mathcal{V}_{n+k}^d / P_k^{(k)} \mathcal{R}_{n+k}^d = \mathcal{V}_{n,k}^d / \mathcal{R}_{n,k}^d = \mathcal{L}_{n,k}^d,$$

et similairement pour d^+ . La suite (4.2.11) est donc exacte. \square

4.3. Modules projectifs et indécomposables

Dans cette section, il sera question de la structure des modules projectifs et des modules principaux lorsque q prend une valeur critique. Tel que vu au chapitre 1, connaître les modules principaux suffit pour obtenir l'information sur les projectifs. Afin de caractériser ces modules, nous nous affairerons à donner la matrice de Cartan de l'algèbre. Pour

ce faire, ce sera encore une fois la structure cellulaire qui dirigera la démarche. La spécialisation des résultats généraux se fera ensuite par l'exploitation du travail de la section précédente.

4.3.1. Algèbres cellulaires, suite et fin

Afin de formuler les résultats d'intérêt, il faut rappeler un peu le langage classique entourant la théorie de la représentation des modules sur une \mathbb{K} -algèbre associative de dimension finie A . Une

Définition 4.3.1. Soit M un A -module de dimension finie. Une **filtration de M** est une suite de A -sous-modules de M :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M. \quad (4.3.1)$$

Une filtration est appelée une **série de composition de M** si chaque facteur de composition M_i/M_{i-1} est un A -module simple.

Tout module de dimension finie admet une série de composition ; il suffit de passer par induction sur la dimension et de prendre un sous-module maximal comme premier terme dans la série de composition.

Théorème 4.3.2 (Jordan-Hölder). Soit M un A -module de dimension finie. Si

$$0 = M_1 < M_2 < \cdots < M_r < M_{r+1} = M \quad \text{et} \quad 0 = N_1 < N_2 < \cdots < N_s < N_{s+1} = M$$

sont deux séries de compositions de M , alors $r = s$ et pour tout A -module simple D , il y a égalité entre les cardinalités des ensembles

$$\{1 \leq i \leq r \mid D \simeq M_{i+1}/M_i\} = \{1 \leq i \leq s \mid D \simeq N_{i+1}/N_i\}. \quad (4.3.2)$$

La **multiplicité de composition** $[M : D]$ d'un A -module simple D sur un A -module M est donnée par le nombre de facteurs de composition isomorphes à D . Le théorème de Jordan-Hölder assure que ce nombre est bien défini.

Dernier des rappels : le lemme de Schur, un indispensable dans la boîte à outils des algébristes, qui jouera aussi un rôle dans l'étude.

Lemme 4.3.3 (Schur). Soient S et S' deux modules simples. S'il existe un morphisme non nul $S \xrightarrow{f} S'$, alors les deux modules S et S' sont isomorphes.

Il est temps de passer aux résultats issus de la cellularité. Dans ce contexte, les algèbres cellulaires A munies d'une structure cellulaire $(\Lambda, M, C, *)$ seront considérées sur un corps \mathbb{K} . Les résultats cités ci-dessous suivent la présentation de Mathas [20].

Définition 4.3.4. Soit $\mu \in \Lambda_0$ et $\lambda \in \Lambda$. Le nombre $d_{\lambda\mu} := [W(\lambda) : \mathcal{L}^\mu]$ est la multiplicité de composition de \mathcal{L}^μ dans $W(\lambda)$. La matrice $\mathbf{D} = (d_{\lambda\mu})$ pour $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Lambda_0$ est appelée la matrice de décomposition de A .

Proposition 4.3.5. La matrice de décomposition \mathbf{D} est unitriangulaire, c'est-à-dire que $d_{\mu\mu} = 1$ et $d_{\lambda\mu} \neq 0$ seulement si $\lambda \leq \mu$.

Démonstration. Cela découle de la proposition 2.2.6 sur les conditions pour qu'il y ait un morphisme entre module cellulaire et du fait que les \mathcal{L}_μ forment un ensemble complet de simples non-isomorphes, ce qui est la proposition 2.2.7. \square

Soient $\lambda \in \Lambda_0$ et \mathcal{L}^λ le module simple associé. Le module projectif indécomposable \mathcal{P}^λ tel que $\mathcal{P}^\lambda / \text{Rad } \mathcal{P}^\lambda \simeq \mathcal{L}^\lambda$ est le module principal associé à λ . Ce module est unique à isomorphisme près par la proposition 1.3.2. Le prochain corollaire du Lemme de Schur permet de calculer de façon différente la multiplicité de composition.

Corollaire 4.3.6. Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos. Soient A une \mathbb{K} -algèbre, M un A -module et \mathcal{P} un A -module principal. En notant $D = \mathcal{P} / \text{rad } \mathcal{P}$, la multiplicité de composition de D dans M est

$$[M : D] = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(\mathcal{P}, M). \quad (4.3.3)$$

Démonstration. Notons tout d'abord que $\text{Hom}_A(\mathcal{P}, D) \simeq \text{End}_A(D) = \mathbb{K}$ puisque D est la coiffe de \mathcal{P} . Si D' est un autre module simple, le lemme de Schur donne

$$\text{Hom}_A(\mathcal{P}, D') = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{si } D \simeq D'; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Si M est simple, le résultat est donc vrai. Si M n'est pas simple, alors il existe un sous-module M' de M dont le quotient $M/M' = D'$ est simple, ce qui donne une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow D' \longrightarrow 0,$$

et l'application du foncteur $\text{Hom}_A(\mathcal{P}, -)$ donne une autre suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{P}, M') \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{P}, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{P}, D') \longrightarrow 0,$$

puisque le module \mathcal{P} est projectif. Ceci indique que

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(\mathcal{P}, M) = \dim \text{Hom}_A(\mathcal{P}, M') + \dim \text{Hom}_A(\mathcal{P}, D'). \quad (4.3.5)$$

Le résultat en découle puisque tous les facteurs de composition isomorphes à D apparaîtront de ce procédé. \square

Lemme 4.3.7. *Si $\lambda \in \Lambda_0$ et $\nu \in \Lambda$, alors*

$$d_{\nu\lambda} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_A(\mathcal{P}^\lambda, W(\nu)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{P}^\lambda \otimes W(\nu)^*. \quad (4.3.6)$$

Démonstration. La première égalité provient du corollaire précédent. Pour montrer la deuxième, notons que

$$W(\nu) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W(\nu)^*, \mathbb{K}).$$

Donc, par adjonction entre $\text{Hom}_{\mathbb{R}}$ et \otimes_A ,

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*, \mathbb{K}) \simeq \text{Hom}_A(\mathcal{P}^\lambda, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W(\nu)^*, \mathbb{K})) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^\lambda, W(\nu)).$$

Mais comme $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*, \mathbb{K}) = (\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*)^*$, le lemme est prouvé. \square

La matrice de décomposition est en fait liée à la matrice de Cartan pour les algèbres cellulaires. Cette matrice est un objet important de la théorie de la représentation des algèbres associatives de dimension finie. Pour $\mu \in \Lambda_0$, notons $c_{\lambda\mu} := [\mathcal{P}^\lambda : \mathcal{L}^\mu]$ pour la multiplicité de décomposition de \mathcal{L}^μ dans \mathcal{P}^λ . La matrice de Cartan est alors $\mathbf{C} = (c_{\lambda\mu})_{\lambda, \mu \in \Lambda_0}$.

Un point important des modules principaux est qu'ils sont projectifs. Pour une algèbre cellulaire, les projectifs admettent une filtration dont les facteurs de composition sont des sommes directes de modules cellulaires.

Lemme 4.3.8. *Soit P un module projectif. Soit $k = |\Lambda|$. Le module P a une filtration de A -modules*

$$\emptyset = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_k = P, \quad (4.3.7)$$

dont les facteurs P_i/P_{i-1} sont isomorphes aux modules $P \otimes_A (W(\nu)^ \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu))$ avec chaque $\nu \in \Lambda$ n'apparaissant qu'une seule fois.*

Avant de faire la preuve, remarquons que

$$\mathcal{P}^\lambda \otimes_A (W(\nu)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu)) \simeq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*) W(\nu), \quad (4.3.8)$$

un isomorphisme étant donné sur les bases $\{p_1, \dots, p_r\}$, $\{w'_1, \dots, w'_s\}$ et $\{w_1, \dots, w_s\}$ de \mathcal{P}^λ , $W(\nu)^*$ et $W(\nu)$ par

$$p_i \otimes w'_j \otimes w_k \longmapsto (0, \dots, 0, \underbrace{w_k}_{(i,j)}, 0, \dots, 0). \quad (4.3.9)$$

Bref, le tenseur simple $p_i \otimes w'_j \otimes w_k$ est envoyé sur w_k dans la copie (i,j) de $W(\nu)$ avec la convention que les rs copies sont étiquetées $(1,1), (1,2), \dots, (1,s), (2,1) \dots, (i,j), \dots, (r,s)$.

Démonstration. Soit Γ un idéal de Λ tel que pour un certain $\nu \in \Lambda \setminus \Gamma$, l'ensemble $\Gamma \cup \{\nu\}$ soit aussi un idéal de Λ . La suite de A -bimodules

$$0 \longrightarrow A(\Gamma) \longrightarrow A(\Gamma \cup \{\nu\}) \longrightarrow A(\Gamma \cup \{\nu\})/A(\Gamma) \longrightarrow 0 \quad (4.3.10)$$

est exacte. De plus, le lemme 2.1.9 donne l'isomorphisme $A(\Gamma \cup \{\nu\})/A(\Gamma) \simeq A(\{\nu\})W(\nu)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu)$. Comme P est projectif, le foncteur $P \otimes_A -$ est exact et

$$0 \rightarrow P \otimes_A A(\Gamma) \rightarrow P \otimes_A A(\Gamma \cup \{\nu\}) \rightarrow P \otimes_A (A(\Gamma \cup \{\nu\})/A(\Gamma)) \rightarrow 0 \quad (4.3.11)$$

est donc exacte. De là,

$$P \otimes_A A(\Gamma \cup \{\nu\})/P \otimes_A A(\Gamma) \simeq P \otimes_A (W(\nu)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu)). \quad (4.3.12)$$

Comme Λ est fini, il existe une chaîne maximale d'idéaux de Λ

$$\emptyset \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \Lambda. \quad (4.3.13)$$

et la maximalité de la chaîne entraîne que la filtration

$$0 \subset A(\Gamma_1) \subset \dots \subset A(\Gamma_k) = A \quad (4.3.14)$$

a comme facteurs de composition $A(\Gamma_i)/A(\Gamma_{i-1}) \simeq W(\mu_i)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\mu_i)$. En appliquant le foncteur exact $P \otimes_A -$ à la dernière filtration, nous obtenons une filtration de $P = P \otimes_A A$ dont les facteurs de composition sont

$$P \otimes_A (W(\nu)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu)) \simeq \dim_{\mathbb{K}}(P \otimes_A W(\nu)^*)W(\nu). \quad (4.3.15)$$

□

Théorème 4.3.9. *La matrice de Cartan de la \mathbb{K} -algèbre cellulaire A avec Λ fini respecte $\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$.*

Démonstration. Soient $\lambda, \mu \in \Lambda_0$. Prenons $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\lambda$ dans le lemme 4.3.8, il suit que \mathcal{P}^λ admet une filtration dont les facteurs de composition non-nuls sont les modules

$$\mathcal{P}^\lambda \otimes_A (W(\nu)^* \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu)) \simeq \dim(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*) W(\nu), \quad (4.3.16)$$

où chaque $\nu \in \Lambda$ apparaît au plus une fois. De cela, le facteur de composition du module simple \mathcal{L}^μ dans l'indécomposable \mathcal{P}^λ est donné par

$$\begin{aligned} c_{\lambda\mu} = [\mathcal{P}^\lambda : \mathcal{L}^\mu] &= \sum_{\nu \in \Lambda} [(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*) \otimes_{\mathbb{K}} W(\nu) : \mathcal{L}^\mu] \\ &= \sum_{\nu \in \Lambda} \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^\lambda \otimes_A W(\nu)^*) [W(\nu) : \mathcal{L}^\mu] \end{aligned}$$

et en appliquant le lemme 4.3.7,

$$= \sum_{\nu \in \Lambda} d_{\nu\lambda} d_{\nu\mu}.$$

Ceci donne que $\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$. □

Avec ce résultat, il suit qu'il suffit de connaître la décomposition des modules cellulaires en simples pour connaître celle des principaux.

4.3.2. Situation pour l'algèbre à couture

Que nous disent ces résultats concrètement? Les morphismes de Graham et Lehrer et l'analyse des dimensions permettent de trouver aisément la matrice de décomposition \mathbf{D} , et de là, le théorème 4.3.9 exprime la façon de trouver la matrice de Cartan.

Dans cette section, nous présentons une caractérisation des modules \mathcal{P}^λ , le tout ponctué d'exemples. Le début de notre analyse est le cas semi-simple.

Si q n'est pas une racine de l'unité, alors les $\mathcal{V}_{n,k}^d$ forment un ensemble complet de modules simples non-isomorphes. Cela veut dire que la multiplicité de composition des simples est

$$d_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.17)$$

De cela, les matrices de décomposition et de Cartan sont toutes deux la matrice identité. Les modules cellulaires sont donc en fait les modules principaux.

La matrice de décomposition et la matrice de Cartan sont donc :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.21)$$

Ainsi, le module $\mathcal{V}_{4,2}^2$ est simple, indécomposable et projectif : il faut donc que $\mathcal{P}_{4,2}^2 \simeq \mathcal{V}_{4,2}^2$. L'indécomposable $\mathcal{P}_{4,2}^6$ est la couverture projective de $\mathcal{V}_{4,2}^6$ et ses facteurs de composition sont $\mathcal{L}_{4,2}^6$ deux fois et $\mathcal{L}_{4,2}^4$ une fois. Cela signifie qu'il y a une série de composition

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \mathcal{P}_{4,2}^6 \quad (4.3.22)$$

avec

$$\mathcal{P}_{4,2}^6/M_2 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^6, \quad M_2/M_1 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^4, \quad M_1 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^6.$$

De plus, le lemme 4.3.8 avec $P = \mathcal{P}_{4,2}^6$ donne qu'il y a une filtration $0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_r \subset \mathcal{P}_{4,2}^6$ dont les facteurs de composition sont isomorphes à des sommes directes de modules cellulaires. Comme $\mathcal{P}_{4,2}^6/\text{rad}(\mathcal{P}_{4,2}^6) \simeq \mathcal{L}_{4,2}^6 = \mathcal{V}_{4,2}^6$, alors il faut que le premier quotient $\mathcal{P}_{4,2}^6/N_r$ contienne $\mathcal{V}_{4,2}^6$. Le facteur de composition de ce module est $\mathcal{L}_{4,2}^6$; il reste donc à tenir compte de $\mathcal{L}_{4,2}^4$ et de $\mathcal{L}_{4,2}^6$. Justement, ce sont les facteurs de composition de $\mathcal{V}_{4,2}^4$. La série de composition est alors donnée par des modules isomorphes à

$$0 \subset \mathcal{R}_{4,2}^4 \subset \mathcal{V}_{4,2}^4 \subset \mathcal{P}_{4,2}^6, \quad (4.3.23)$$

et les quotients sont

$$\mathcal{P}_{4,2}^6/\mathcal{V}_{4,2}^4 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^6, \quad \mathcal{V}_{4,2}^4/\mathcal{R}_{4,2}^4 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^4, \quad \mathcal{R}_{4,2}^4 \simeq \mathcal{L}_{4,2}^6.$$

Bref, ces informations sont résumées par l'ajout d'une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{4,2}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_{4,2}^6 \longrightarrow \mathcal{V}_{4,2}^6 \longrightarrow 0. \quad (4.3.24)$$

La valeur de ℓ change de beaucoup la discussion. Par exemple, lorsque $\ell = 5$ sur $B_{4,2}$, le diagramme de Bratteli est



Cette fois-ci, $\Lambda_0 = \{0,2,4,6\}$ et les matrices de décomposition et de Cartan sont données par

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui veut dire que

$$\mathcal{P}_{4,2}^2 \simeq \mathcal{V}_{4,2}^2, \quad \mathcal{P}_{4,2}^4 \simeq \mathcal{V}_{4,2}^4 = \mathcal{L}_{4,2}^4, \quad \mathcal{P}_{4,2}^0 \simeq \mathcal{V}_{4,2}^0 = \mathcal{L}_{4,2}^0,$$

et que $\mathcal{P}_{4,2}^6$ a la série de composition $0 \subset \mathcal{R}_{4,2}^2 \subset \mathcal{V}_{4,2}^2 \subset \mathcal{P}_{4,2}^6$.

De cette discussion, le cas général apparaît. Pour le vocabulaire, rappelons que d et d^- sont dans une paire critique si $d^- < d$ et qu'il y a alors un morphisme de $\mathcal{V}_{n,k}^d$ à $\mathcal{V}_{n,k}^{d^-}$. Il sera parfois utile d'employer plutôt d et d^+ comme paire critique; en ce cas, il faut comprendre qu'il y a un morphisme non-trivial de $\mathcal{V}_{n,k}^{d^+}$ à $\mathcal{V}_{n,k}^d$.

Théorème 4.3.10. *L'ensemble $\{\mathcal{P}_{n,k}^d \mid d \in \Lambda_0\}$ forme un ensemble complet de modules indécomposables projectifs non-isomorphes. Lorsque d est critique ou qu'il n'existe pas de d^- formant une paire critique, alors $\mathcal{P}_{n,k}^d \simeq \mathcal{V}_{n,k}^d$; sinon $\mathcal{P}_{n,k}^d$ satisfait la suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{n,k}^{d^-} \longrightarrow \mathcal{P}_{n,k}^d \longrightarrow \mathcal{V}_{n,k}^d \longrightarrow 0. \quad (4.3.25)$$

Démonstration. Le cas où d est critique implique que $\mathcal{V}_{n,k}^d$ est simple et donc, indécomposable. En ce cas, il est clair que $\mathcal{P}_{n,k}^\lambda \simeq \mathcal{L}_{n,k}^d = \mathcal{V}_{n,k}^d$. Lorsque d n'est pas critique et qu'il n'existe pas de d^- formant une paire critique avec d , alors il faut chercher l'information sur la matrice de Cartan. Le théorème 4.3.9 dit que la multiplicité de composition de $\mathcal{L}_{n,k}^\mu$ dans $\mathcal{P}_{n,k}^d$ est donnée par

$$c_{d,\mu} = \sum_{j=0}^{\min(d,\mu)} d_{j,\mu} d_{j,d}. \quad (4.3.26)$$

Nous cherchons les μ pour lesquels $c_{d,\mu} = 1$. Il sont donnés par le lemme 4.2.6 qui affirme que $d_{\lambda,\mu} = 0$ sauf si $\lambda = \mu$ ou $\mu = \lambda^+$, auxquels cas, $d_{\lambda,\mu} = 1$.

Il est clair que $c_{d,d} = 1$ puisque comme il n'y a pas de d^- formant une paire critique et que $j < d$, alors il n'y aura pas de contribution autre que $d_{d,d}^2$. Sauf dans le cas où il y a moins de deux éléments dans Λ , il y a une dernière contribution en c_{d,d^+} puisque

$d_{d,d^+} = 1$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n,k}^d$ a deux facteurs de composition : $\mathcal{L}_{n,k}^d$ et $\mathcal{L}_{n,k}^{d^+}$. Ce sont exactement ceux de $\mathcal{V}_{n,k}^d$; la relation $\mathcal{P}_{n,k}^d / \text{rad}(\mathcal{P}_{n,k}^d) \simeq \mathcal{L}_{n,k}^d$ oblige l'isomorphisme $\mathcal{V}_{n,k}^d \simeq \mathcal{P}_{n,k}^d$.

Ne reste que le cas où d n'est pas critique et qu'il y a une paire (d^-, d) . L'analyse de (4.3.26) donne que $c_{d,d} = 2$ puisque $d_{d,d} = 1$ et $d_{d^-,d} = 1$. Il y a également une contribution $c_{d,d^+} = 1$. Si d^+ forme une paire critique avec d , alors il y aura aussi une contribution $c_{d,d^+} = 1$. Cela veut dire que $\mathcal{P}_{n,k}^d$ a entre trois et quatre facteurs de composition : $\mathcal{L}_{n,k}^{d^-}$, $\mathcal{L}_{n,k}^d$, $\mathcal{L}_{n,k}^d$ et $\mathcal{L}_{n,k}^{d^+}$; le dernier possiblement trivial.

En prenant $P = \mathcal{P}_{n,k}^d$ dans le lemme 4.3.8, il y a une filtration $0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r \subset \mathcal{P}_{n,k}^d$ dont le quotient $\mathcal{P}_{n,k}^d / M_r$ est isomorphe à une somme directe de modules cellulaires. Comme $\mathcal{P}_{n,k}^d$ est la couverture projective de $\mathcal{V}_{n,k}^d$, alors il faut que dans cette somme directe de modules cellulaires, il y ait au moins un $\mathcal{V}_{n,k}^d$. Les facteurs de composition de ce module cellulaire sont $\mathcal{L}_{n,k}^d$ et possiblement $\mathcal{L}_{n,k}^{d^+}$. Il ne reste qu'à considérer $\mathcal{L}_{n,k}^d$ et $\mathcal{L}_{n,k}^{d^-}$, qui sont justement ceux de $\mathcal{V}_{n,k}^{d^-}$. Il y a donc une filtration

$$0 \subset \mathcal{V}_{n,k}^{d^-} \subset \mathcal{P}_{n,k}^d,$$

dont le quotient $\mathcal{P}_{n,k}^d / \mathcal{V}_{n,k}^{d^-}$ est isomorphe à $\mathcal{V}_{n,k}^d$. La suite exacte voulue en découle. \square

Avec ce théorème, nous sommes en mesure de caractériser les modules projectifs de l'algèbre. La structure se dévoile et offre une grande similitude avec celle de l'algèbre de Temperley-Lieb. La discussion n'est pas terminée et il serait encore possible d'approfondir l'étude en utilisant les outils de l'algèbre homologique et de la théorie d'Auslander-Reiten, comme dans [4].

Une des différences qu'il sera intéressant d'approfondir est au niveau de la quasi-héréditarité. L'algèbre de Temperley-Lieb $TL(\beta)$ est quasi-héréditaire pour toutes les valeurs de β sauf $\beta = 0$ puisque sa forme bilinéaire n'est pas identiquement nulle : le résultat et un bon résumé succinct de la matière se retrouvent dans les appendices du livre de Deng, Du, Parshall et Wang [6]. Toutefois, nous avons vu que l'algèbre à couture $B_{n,k}(\beta)$ admet des modules cellulaires pour lesquels la forme bilinéaire est identiquement nulle pour d'autres valeurs de q . Savoir si cette différence se traduit par des changements significatifs dans la théorie de la représentation reste à voir.

Bibliographie

- [1] Ibrahim ASSEM : *Algèbres et modules*. Masson, Les Presses de l'Université d'Ottawa, Ottawa, Ontario, 1997.
- [2] Ibrahim ASSEM, Andrzej SKOWRONSKI et Daniel SIMSON : *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras : Volume 1 : Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006.
- [3] Rodney J. BAXTER : *Exactly solved models in statistical mechanics*. Elsevier, 2016.
- [4] Jonathan BELLETÈTE, David RIDOUT et Yvan SAINT-AUBIN : Restriction and induction of indecomposable modules over the Temperley–Lieb algebras. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 51(4):045201, 2018.
- [5] Charles W. CURTIS et Irving REINER : *Representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 356. American Mathematical Soc., 1966.
- [6] Bangming DENG, Jie DU, Brian PARSHALL et Jianpan WANG : *Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups*. Numéro 150 de Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2008.
- [7] Steven M. FLORES et Eveliina PELTOLA : Generators, projectors, and the Jones-Wenzl algebra. *arXiv e-prints*, page arXiv :1811.12364, novembre 2018.
- [8] Steven M. FLORES et Eveliina PELTOLA : Standard modules, radicals, and the valenced Temperley-Lieb algebra. *arXiv e-prints*, page arXiv :1801.10003, janvier 2018.
- [9] Frederick M. GOODMAN et Hans WENZL : The Temperley-Lieb algebra at roots of unity. *Pacific J. Math.*, 161(2):307–334, 1993.
- [10] John J. GRAHAM et Gus I. LEHRER : Cellular algebras. *Inventiones mathematicae*, 123(1):1–34, 1996.
- [11] John J. GRAHAM et Gus I. LEHRER : The representation theory of affine Temperley-Lieb algebras. *L'Enseignement Mathématique*, 44:173–218, 1998.
- [12] Vaughan F. R. JONES : Index for subfactors. *Inventiones mathematicae*, 72(1):1–25, 1983.
- [13] Vaughan F. R. JONES : A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12:103–111, 1985.

- [14] Louis H. KAUFFMAN : An invariant of regular isotopy. *Transactions of the American Mathematical Society*, 318(2):417–471, 1990.
- [15] Louis H. KAUFFMAN et Sóstenes LINS : *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*. Numéro 134. Princeton University Press, 1994.
- [16] W. M. KOO et H. SALEUR : Representations of the Virasoro algebra from lattice models. *Nuclear Physics B*, 426:459–504, septembre 1994.
- [17] Steffen KÖNIG et Changchang XI : On the structure of cellular algebras. Rapport technique, *Algebras and Modules II*, CMS Conference Proceedings, 1996.
- [18] Paul MARTIN : *Potts models and related problems in statistical mechanics*, volume 5. World Scientific, 1991.
- [19] Paul MARTIN et Hubert SALEUR : The blob algebra and the periodic Temperley-Lieb algebra. *Letters in mathematical physics*, 30(3):189–206, 1994.
- [20] Andrew MATHAS : *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, volume 15. American Mathematical Soc., 1999.
- [21] Alexi MORIN-DUCHESNE, Jørgen RASMUSSEN et David RIDOUT : Boundary algebras and Kac modules for logarithmic minimal models. *Nuclear Physics B*, 899:677–769, 2015.
- [22] David RIDOUT et Yvan SAINT-AUBIN : Standard Modules, Induction and the Structure of the Temperley-Lieb Algebra. *Advanced Theoretical Mathematics Physics*, 18(5):957–1041, 2014.
- [23] Richard P. STANLEY : *Ordered structures and partitions*, volume 119. American Mathematical Soc., 1972.
- [24] Harold N. V. TEMPERLEY et Elliott H. LIEB : Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 322(1549):251–280, 1971.
- [25] Hans WENZL : On sequences of projections. *CR Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 9(1):5–9, 1987.
- [26] B. W. WESTBURY : The representation theory of the Temperley-Lieb algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 219(1):539–565, 1995.
- [27] Changchang XI : Cellular algebras. *Advanced School and Conference on Representation Theory and Related Topics*, 2006.