





**Université de Montréal**

**Le modèle GREM jumelé à un champ magnétique  
aléatoire**

par

**Roberto Persechino**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en mathématiques appliquées

28 juin 2018



# SOMMAIRE

---

Dans cette thèse, nous étudions les statistiques des valeurs extrêmes du modèle à énergies aléatoires généralisé (GREM) à deux niveaux en présence d'un champ magnétique aléatoire (CMA). Ce modèle généralise à la fois le modèle à énergies aléatoires (REM) avec un CMA dans [1, 10] et le modèle GREM avec un champ magnétique déterministe dans [6]. L'objectif du présent ouvrage consiste à déterminer les statistiques des valeurs extrêmes d'un point de vue de la mécanique statistique. Plus précisément, nous étudions le maximum, l'entropie et l'énergie libre du modèle GREM avec CMA à deux niveaux, généralisant le comportement obtenu en [1, 6]. Les résultats présentés dans cette thèse aident à éclaircir et à cerner l'influence du champ magnétique aléatoire sur l'ordre de grandeur du maximum, de l'entropie ainsi que de l'énergie libre. Les démonstrations du premier ordre du maximum et de l'entropie se base sur une application de la théorie des grandes déviations qui permet de réduire le problème à l'étude d'un GREM sans CMA sur un nombre diminué de configurations. Les techniques introduites dans cette thèse sont générales et s'étendent à l'étude du modèle GREM avec un CMA à plusieurs niveaux et de la marche aléatoire branchante (MAB) avec un CMA.

**Mots clés :** verre de spins, modèle à énergies aléatoires généralisées, grandes déviations, valeurs extrêmes, lois des grands nombres, transformée de Legendre-Fenchel.



# SUMMARY

---

In this doctoral thesis we study the extreme value statistics of the two level Generalized Random Energy Model (GREM) coupled with a random magnetic field. This model generalizes both the Random Energy Model (REM) combined with a random magnetic field in [1, 10] and that of the GREM in the presence of a uniform external field found in [6]. This dissertation aims to determine the extreme value statistics from a statistical mechanics perspective, specifically the maximum, entropy as well as free energy, generalizing the behavior found in [1, 6]. The results herein explain clearly the effects of the random magnetic field on the maximum's order of magnitude, as well as that of entropy and of free energy. The proofs for the maximum and for the entropy rely greatly on an application of large deviation theory which reduces the problem to that of a GREM in the absence of the random magnetic field on a lesser amount of configurations. The methods introduced in this thesis are general and extend to the  $k$ -level GREM in the presence of a random magnetic field and to the Branching Random Walk Model (BRM) coupled with a random magnetic field.

**Key words :** Spin Glasses, Generalized Random Energy Model , Large Deviations, Extreme Values, Law of Large Numbers, Legendre-Fenchel Transform.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	v
<b>Liste des figures</b> .....	ix
<b>Dédicaces</b> .....	xi
<b>Remerciements</b> .....	xiii
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	1
1.1. Théorie des valeurs extrêmes et théorie des verres de spins.....	1
1.1.1. Modèle REM.....	1
1.1.2. Définitions.....	3
1.2. Le modèle GREM avec CMA.....	4
1.2.1. Trois théorèmes principaux.....	6
1.3. Explications des résultats et stratégie de démonstration.....	7
1.3.1. Discussion des résultats antérieurs.....	7
1.3.2. Discussion de la recherche.....	8
1.3.3. Explications des résultats.....	10
1.3.4. Stratégie de démonstration.....	11
1.3.5. Nouveautés.....	11
1.4. Structure de la thèse.....	12
<b>Chapitre 2. Les grandes déviations</b> .....	13
2.1. Concepts et résultats utilisés.....	13
2.1.1. Concepts.....	13
2.1.2. Définitions et résultats utilisés.....	16
2.2. Principe de grandes déviations pour le modèle CMA.....	21
2.2.1. Résultats spécifiques.....	21

2.3. Application du PGD aux extrêmes du modèle CMA .....	28
<b>Chapitre 3. Le modèle GREM .....</b>	<b>33</b>
3.1. Le modèle GREM à deux niveaux et principaux résultats .....	33
3.2. Comparaison des modèles de verre de spins .....	36
<b>Chapitre 4. Le modèle GREM à deux niveaux jumelé au champ magnétique aléatoire .....</b>	<b>39</b>
4.1. Le modèle à deux niveaux .....	39
4.2. La fonction d'entropie .....	40
4.3. Démonstration du premier ordre du maximum (Théorème 1) .....	53
4.3.1. Explications des démonstrations des propositions 4.3.1 et 4.3.2 .....	54
4.3.2. Démonstration de la borne supérieure (Proposition 4.3.1) .....	55
4.3.3. Démonstration de la borne inférieure (Proposition 4.3.2) .....	60
4.4. Démonstration de l'entropie (Théorème 2) .....	64
4.4.1. Explications des démonstrations .....	64
4.4.2. Démonstration de la borne supérieure (Proposition 4.4.1) .....	65
4.4.3. Démonstration de la borne inférieure (Proposition 4.4.2) .....	68
4.5. Démonstration de la fonction d'énergie libre (Théorème 3) .....	71
<b>Chapitre 5. Autres résultats, discussion et conjectures .....</b>	<b>81</b>
5.1. Modèle GREM à $M$ niveaux .....	81
5.2. Modèle GREM à $M$ niveaux avec CMA .....	83
5.3. Marche aléatoire branchante (MAB) avec CMA .....	84
<b>Bibliographie .....</b>	<b>87</b>

# LISTE DES FIGURES

---

1.1	La suite $\{X_N(\sigma)   \sigma \in \{-1, 1\}^N\}$ lorsque $N = 4$ . . . . .	2
1.2	La suite $\{H_N(\sigma)   \sigma \in \Sigma_N\}$ lorsque $N = 4$ . . . . .	5
2.1	Fonction de taux $J(x)$ . . . . .	15
2.2	L'entropie du modèle CMA lorsque $\mathbf{P}(h_1 = 1) = \mathbf{P}(h_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . . . . .	31
2.3	L'énergie libre du modèle CMA où $\mathbf{P}(h_1 = 1) = \mathbf{P}(h_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . . . . .	31
3.1	La suite $\{H_N(\sigma)   \sigma \in \Sigma_N\}$ lorsque $N = 4$ . . . . .	34
3.2	Dépendance et indépendance de $H_N^{(G,2)}(\sigma)$ et $H_N^{(G,2)}(\hat{\sigma})$ . . . . .	35
5.1	Les fonctions $\mathcal{J}$ et $\overline{\mathcal{J}}$ avec $M = 7$ et $m = 4$ . . . . .	83
5.2	Marche aléatoire branchante avec CMA lorsque $M = 4$ . . . . .	85



# DÉDICACES

---

À Jésus, Marie et Joseph ainsi qu'à mon épouse Josée et mon fils David.



# REMERCIEMENTS

---

Ce beau parcours qu'est le doctorat s'est accompli par degrés et avec le concours de personnes qui me sont chères. Il est surprenant et amusant de percevoir le rapport entre celui-ci et les différents mouvements d'une composition musicale, le *Concerto italien* (BWV 971) de Johann Sebastian Bach, par exemple, divisé en trois mouvements afférents aux étapes parcourues. Le premier mouvement *Allegro* annonce une joie, une légèreté qui me rappelle le début du doctorat où je sentis prendre racine en moi le désir de connaître davantage, de découvrir une vérité cachée et d'être à nouveau témoin d'une recherche portée à terme. J'en remercie le Bon Dieu : Père, Jésus et Esprit-Saint dont je reconnais en être la source et la fin de cette belle randonnée scientifique. Je suis de même endetté envers la Sainte Vierge Marie, Saint Michel archange, mon ange gardien, Saint Joseph, Sainte Anne, Saint Jude, Saint Jean Bosco et le Saint Frère André.

Le second mouvement *Andante* au rythme plus lent évoque le travail constant, discipliné et ardu de la recherche. Il me rappelle ces jours de prospection et de fouille en quête d'idées et de méthodes pour cerner le problème et en dégager un sentier sûr et salutaire. Quant au dernier mouvement *Allegro vivace*, c'est cet instant où tout se place selon son rang et l'ordre règne. Je suis reconnaissant à mon directeur Dr Louis-Pierre Arguin d'avoir accepté de me diriger, d'avoir partagé son expérience et ses connaissances, et de s'être montré prévenant et généreux de son temps et de ses ressources. Je me compte choyé d'avoir partagé et échangé avec Dr Arguin sur plusieurs aspects des mathématiques. Je désire aussi remercier M. Frédéric Ouimet dont l'aide précieuse me permet de faire des avancées considérables dans ma recherche. De plus, je remercie Dr Anatole Joffe sans qui tout ceci n'aurait pu avoir lieu.

Finalement, je remercie mes parents Bruno et Ida Persechino, mon frère Luigi et ma sœur Lina, mon beau-frère Gino Valentini, le Père J. R. Bleau, l'abbé G. Huang, l'abbé P. Sabbath, Dr Josée Desrochers, Mme Anna Maria D'Avirro, zia Hélène Arnone, mes cousins Anthony et Andrew Beattie, et mon oncle Michel Arnone qui m'a initié aux plaisirs des mathématiques à un très jeune âge. Je désire exprimer ma gratitude à mon épouse et meilleure amie Josée Perrier qui a participé, entre autres, aux corrections de cette thèse ainsi qu'à mon fils David Giovanni Persechino qui semble avoir un faible pour la théorie de graphes!

Cette recherche a bénéficié du généreux soutien financier de Dr. Arguin et de l'ISM.



# Chapitre 1

---

## INTRODUCTION

Les verres de spins sont des systèmes physiques où les spins interagissent de manière ferromagnétique ou anti-ferromagnétique de façon relativement arbitraire. Ils peuvent être modélisés en considérant une interaction aléatoire. La nature désordonnée de celle-ci produit un effet marqué sur la physique du modèle de même que sur son comportement critique. D'un point de vue mathématique, l'étude de tels systèmes se fait à l'aide de processus stochastiques où les variables aléatoires sont les énergies aléatoires indexées par les différents états du système. Le comportement critique se révèle alors par les statistiques des valeurs extrêmes de ce processus. Cette thèse propose l'étude d'un modèle spécifique, celui du *modèle à énergies aléatoires généralisé* (GREM) en présence d'un *champ magnétique aléatoire* (CMA) à deux niveaux. L'objectif premier consiste à exposer et à établir rigoureusement les propriétés macroscopiques de celui-ci : le *premier ordre du maximum* (ou la densité d'énergie de l'état fondamental), l'*entropie* et l'*énergie libre*.

La section 1.1 commence par un bref survol historique des modèles désordonnés de spins et se termine avec le *modèle à énergies aléatoires* (REM) et ses propriétés. Le modèle de cette thèse est présenté à la section 1.2 suivi des trois théorèmes principaux dont les démonstrations feront l'objet du chapitre 4. Nous expliquons les résultats et nous exposons la stratégie des démonstrations à la section 1.3. Nous concluons ce premier chapitre par la section 1.4 qui donne un résumé sommaire de la structure de cette thèse.

### 1.1. THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES ET THÉORIE DES VERRS DE SPINS

Nous présentons un bref historique des modèles de verre de spins, nous énumérons les propriétés du modèle REM, et nous terminons avec des définitions générales.

#### 1.1.1. Modèle REM

Le *modèle à énergies aléatoires* (REM) fut introduit par B. Derrida [13, 14] en 1980 dans la perspective d'étudier les *verres de spins* où les spins des impuretés magnétiques disposées dans un alliage métallique présentent une distribution aléatoire. Un premier modèle, celui

d'Edwards-Anderson [17], élaboré en 1975, tenait compte des interactions entre les spins voisins les plus proches. Pour leur part, D. Sherrington et S. Kirkpatrick présentèrent au cours de la même année, dans leur article [29], un autre modèle, connu sous le nom de modèle SK, où toutes les interactions des paires de spins y figurent, et en particulier celles à grandes distances. Le modèle REM s'avère en fait un cas asymptotique de ce dernier lorsque les interactions entre les paires de spins deviennent nulles.

Le modèle REM comportant  $N$  éléments associe à chacune des  $2^N$  configurations de spins  $\sigma \in \{-1,1\}^N$  une variable aléatoire,  $X_N(\sigma)$ , de loi gaussienne centrée de variance  $N$  représentant son énergie. De plus, l'ensemble  $\{\sigma \in \{-1,1\}^N \mid X_N(\sigma)\}$  forme une suite de variables aléatoires indépendantes. Ce modèle réduit présente l'avantage d'être simple, résoluble, tout en retenant les caractéristiques fondamentales des modèles de verres de spin : transition de phases où le système fige à basse température. Ses propriétés macroscopiques principales se résument au *premier ordre du maximum*, à l'*entropie* et à l'*énergie libre*, tandis que le *processus ponctuel extrémal* révèle celles microscopiques. Les démonstrations de celles-ci se trouvent par exemple dans [4, 5, 16, 18, 20, 22]. Dans cette thèse, nous ne considérerons que les propriétés macroscopiques.

Le premier ordre du maximum est donné par la formule

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \{-1,1\}^N} X_N(\sigma) = \sqrt{2 \log 2}, \quad \text{presque sûrement.} \quad (1.1.1)$$

Afin de comprendre ce résultat, il faut considérer le nombre moyen des configurations de spins dont les énergies excèdent  $EN$ ,

$$\mathbf{E}[\#\{\sigma \mid X_N(\sigma) > EN\}], \quad (1.1.2)$$

pour toute valeur  $E > 0$ . L'approximation gaussienne,

$$\frac{1}{a + a^{-1}} e^{-\frac{a^2}{2}} \leq \int_a^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \leq \frac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}}, \quad (1.1.3)$$

lorsque  $a > 0$ , permet de déduire le comportement asymptotique de la quantité (1.1.2),

$$\mathbf{E}[\#\{\sigma \mid X_N(\sigma) > EN\}] \sim 2^N \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{E^2}{2} N\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(N\left(\log 2 - \frac{E^2}{2}\right)\right) \quad (1.1.4)$$

## LE MODÈLE REM



FIGURE 1.1. La suite  $\{X_N(\sigma) \mid \sigma \in \{-1,1\}^N\}$  lorsque  $N = 4$ .

où  $f(n) \sim g(n)$  signifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ . Il en découle que, pour  $N$  suffisamment grand, il n'y aura en moyenne aucune configuration telle que  $X_N(\sigma) > \sqrt{2 \log 2} N$ , tandis qu'il y aura un nombre exponentiel de configurations telle que  $X_N(\sigma) > EN$  pour  $0 < E < \sqrt{2 \log 2}$ . La valeur  $\sqrt{2 \log 2}$  se révèle être l'unique candidat pour le premier ordre du maximum.

Deuxièmement, l'entropie du modèle REM est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \# \{ \sigma \mid X_N(\sigma) > EN \} = \log 2 - \frac{E^2}{2}, \quad \text{presque sûrement,} \quad (1.1.5)$$

lorsque  $E > 0$ . Cette limite nous renseigne sur le nombre de configurations dont les énergies associées sont supérieures à  $EN$ , et elle nous paraît évidente à la lumière de l'expression (1.1.4).

Finalement, l'énergie libre est donnée par la limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^N} \exp(\beta X_N(\sigma)) = \begin{cases} \log 2 + \frac{\beta^2}{2} & , \beta \leq \sqrt{2 \log 2} \\ \beta \sqrt{2 \log 2} & , \beta \geq \sqrt{2 \log 2} \end{cases}, \quad \text{presque sûrement,} \quad (1.1.6)$$

où  $\beta > 0$ . Cette fonction témoigne d'un système désordonné de spins à deux phases dont la valeur critique est  $\beta_c = \sqrt{2 \log 2}$ . Cette valeur s'explique par le fait qu'au-delà de l'énergie maximale  $\sqrt{2 \log 2}$ , il ne s'y trouve aucune configuration, et donc le système fige dans l'état fondamental à une température non nulle. Notons qu'en physique la quantité  $\beta$  est remplacée par  $-\beta$  où  $\beta = \frac{1}{T}$  est l'inverse de la température. Pour le cas du REM, cela n'aura pas d'effet, car la densité de  $X_N(\sigma)$  est une fonction paire.

Au cours de cette thèse, nous allons déterminer et établir les résultats analogues pour le modèle à énergies aléatoires généralisé (GREM) en présence d'un *champ magnétique aléatoire* (CMA).

### 1.1.2. Définitions

Considérons  $N$  éléments où à chacun est associé une valeur de  $+1$  ou de  $-1$ , que l'on nomme le spin de l'élément. Nous obtenons un système désordonné de  $2^N$  configurations de spins données par l'ensemble  $\Sigma_N := \{-1,1\}^N$ . À chaque configuration  $\sigma \in \Sigma_N$  le système prend une valeur d'énergie  $H_N(\sigma)$ , une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , que l'on nomme l'hamiltonien du système.

Le premier ordre du maximum est donné par la valeur de la limite  $\mathbf{P}$ -presque sûre

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) = E_{\max}. \quad (1.1.7)$$

lorsque cette limite existe.

Pour  $E > 0$ , soit

$$\mathcal{N}_N(E) = \# \{ \sigma \mid H_N(\sigma) > EN \} \quad (1.1.8)$$

le nombre de configurations dont les énergies associées excèdent  $EN$ . L'entropie du modèle est donnée par la fonction limite  $\mathbf{P}$ -presque sûre

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E) = S(E). \quad (1.1.9)$$

Finalement, l'énergie libre est donnée par la fonction limite  $\mathbf{P}$ -presque sûre

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \quad (1.1.10)$$

pour  $\beta > 0$ , lorsque cette limite existe.

## 1.2. LE MODÈLE GREM AVEC CMA

Le modèle de verre de spins que nous étudions dans cette thèse est celui du *modèle d'énergies aléatoires généralisé* (GREM) à deux niveaux en présence d'un champ magnétique aléatoire (CMA), une extension naturelle du modèle GREM de Derrida [15]. Sans perte de généralité, supposons que  $N$  soit un entier positif pair. Sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  où l'espérance mathématique est notée  $\mathbf{E}$ , nous considérons l'hamiltonien d'un système désordonné de spins composé d'une part de l'hamiltonien du GREM et d'autre part de celui du CMA,

$$H_N(\sigma) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + X_N^{(2)}(\sigma) + Y_N(\sigma) \quad (1.2.1)$$

où

$$Y_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i \quad (1.2.2)$$

pour toute configuration de spins  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$  avec configuration partielle de spins  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N/2})$ . Nous supposons que

$$\mathbf{X}_N^{(1)} = \{ X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \mid \sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2} \}, \quad \mathbf{X}_N^{(2)} = \{ X_N^{(2)}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_N \}, \quad \mathbf{h} = \{ h_i \mid i \in \mathbb{N} \}, \quad (1.2.3)$$

sont des suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes telles que  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $X_N^{(2)}(\sigma)$  suivent des lois gaussiennes  $\mathcal{N}(0, s_1^2 N)$  et  $\mathcal{N}(0, s_2^2 N)$  avec  $s_1^2 + s_2^2 = 1$ , et  $h_1, h_2, \dots$  sont identiquement distribuées ayant un troisième moment fini,  $\mathbf{E}[|h_1|^3] < \infty$ , afin que la densité du champ magnétique aléatoire

$$y_{N, \mathbf{h}}(\sigma) = \frac{1}{N} Y_N(\sigma) \quad (1.2.4)$$

## LE MODÈLE GREM AVEC CMA

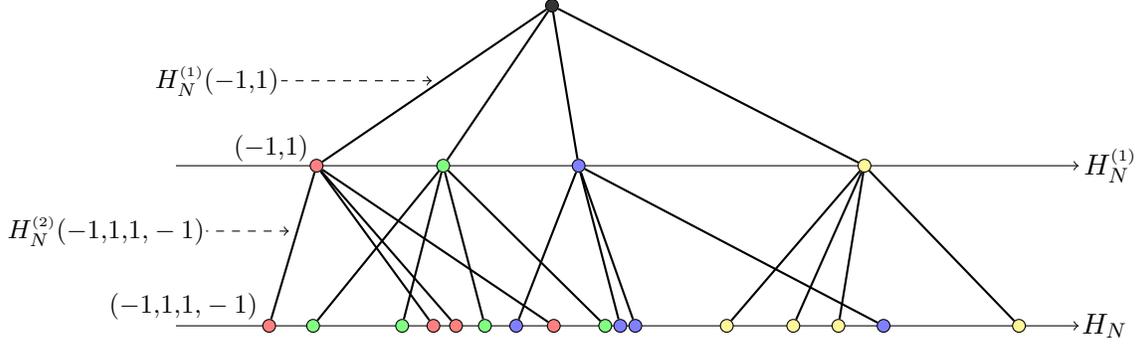


FIGURE 1.2. La suite  $\{H_N(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_N\}$  lorsque  $N = 4$ .

vérifie un principe de grandes déviations.

Le modèle GREM avec CMA possède une structure hiérarchique que nous pouvons représenter à l'aide d'un arbre dont la première génération possède  $2^{N/2}$  feuilles, indexées à l'aide des configurations partielles  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N/2})$ , qui se rattachent chacune à  $2^{N/2}$  autres feuilles de la seconde génération, indexées à l'aide des configurations  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ , pour un total de  $2^N$  feuilles. Nous associons aux arêtes de la première génération les variables aléatoires

$$H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \sigma_i \quad (1.2.5)$$

et à celles de la seconde génération les variables aléatoires

$$H_N^{(2)}(\sigma) = X_N^{(2)}(\sigma) + \sum_{i=1+N/2}^N h_i \sigma_i. \quad (1.2.6)$$

Voir la figure 1.2 où les couleurs des feuilles servent à identifier les liens de parenté.

La dépendance des variables aléatoires  $H_N(\sigma)$  et  $H_N(\hat{\sigma})$  provient d'une part de la structure hiérarchique et d'autre part du CMA, ce qui rend le GREM avec CMA un champ aléatoire corrélé dont la covariance est donnée par

$$\mathbf{Cov}(H_N(\sigma), H_N(\hat{\sigma})) = \begin{cases} \mathbf{Var}(h_1) \sum_{i=1}^N \sigma_i \hat{\sigma}_i & , \text{ si } \sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)} \\ s_1^2 N + \mathbf{Var}(h_1) \sum_{i=1}^N \sigma_i \hat{\sigma}_i & , \text{ si } \sigma^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)} \text{ mais } \sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)} \\ (1 + \mathbf{Var}(h_1))N & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (1.2.7)$$

où  $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ ,  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)})$  avec  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)} \in \Sigma_{N/2}$ .

La fonction d'entropie du modèle, qui est calculée à la proposition 4.2.5, donnée par

$$S(E) = \sup_{E_1 \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]} \{S_1(E_1) + S_2(E - E_1)\} \quad (1.2.8)$$

est un *principe de contraction* de  $S_1(E_1)$ , la fonction d'entropie du premier niveau,

$$S_1(E_1) = \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{(E_1 - \frac{1}{2}y)}{2s_1^2} - I_1(y) \right\}, \quad (1.2.9)$$

et de  $S_2(E_2)$ , celle au second niveau,

$$S_2(E_2) = \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{(E_2 - \frac{1}{2}y)}{2s_2^2} - I_1(y) \right\} \quad (1.2.10)$$

où

$$I_1(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ yt - \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(2th_1)] \right\} \quad (1.2.11)$$

est la fonction d'entropie des CMA partiels, et  $E_{\min}^{(1)}$  et  $E_{\max}^{(1)}$  sont les énergies minimales et maximales au premier niveau définies par les équations  $S_1(E_{\min}^{(1)}) = 0$  et  $S_1(E_{\max}^{(1)}) = 0$ .

### 1.2.1. Trois théorèmes principaux

Nous énonçons les trois théorèmes de cette thèse que nous démontrerons au chapitre 4. Le premier résultat porte sur le premier ordre du maximum.

**Théorème 1.**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) = E_{\max}, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement} \quad (1.2.12)$$

où  $E_{\max}$  est définie par l'équation  $S(E_{\max}) = 0$ . De plus, lorsque  $s_1 > s_2$  alors

$$E_{\max} = E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)} \quad (1.2.13)$$

où  $E_{\max}^{(1)} = \sup \{E_1 \in \mathbb{R} \mid S_1(E_1) > 0\}$  et  $E_{\max}^{(2)} = \sup \{E_2 \in \mathbb{R} \mid S_2(E_2) > 0\}$ .

Les quantités  $E_{\max}$ ,  $E_{\max}^{(1)}$  et  $E_{\max}^{(2)}$  représentent l'énergie maximale totale, l'énergie maximale du premier niveau et celle du second niveau. La caractérisation des deux dernières fera l'objet du corollaire 1.2.1.

Le second résultat caractérise l'entropie du modèle GREM avec CMA.

**Théorème 2.** Si  $0 < E < E_{\max}$  alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E) = S(E), \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (1.2.14)$$

où  $\mathcal{N}_N(E)$  est défini à l'équation (1.1.8).

Le dernier théorème détermine la fonction d'énergie libre du modèle.

**Théorème 3.** Soit  $\beta > 0$ . La fonction d'énergie libre est

$$f(\beta) = f_1(\beta) + f_2(\beta) \quad (1.2.15)$$

où

$$f_i(\beta) = \left( \frac{\log 2}{2} + \frac{\beta^2}{2} s_i^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(\beta h_1)] \right) \mathbf{1}_{[0, \beta_{c,i}]}(\beta) + \beta \nu_i \mathbf{1}_{(\beta_{c,i}, \infty)}(\beta) \quad (1.2.16)$$

avec la valeur critique

$$\beta_{c,i} = \begin{cases} \sqrt{2}(\log 2 - (\beta_{c,i} \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,i} h_1)] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_{c,i} h_1)]))^{1/2} & , s_1 \leq s_2 \\ s_i^{-1}(\log 2 - (\beta_{c,i} \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,i} h_1)] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_{c,i} h_1)]))^{1/2} & , s_1 > s_2 \end{cases} \quad (1.2.17)$$

et

$$\nu_i = \begin{cases} \frac{1}{2} E_{\max} & , s_1 \leq s_2, \\ E_{\max}^{(i)} & , s_1 > s_2. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

pour  $i = 1, 2$ .

Les équations (1.2.17) possèdent chacune une solution unique puisque chaque expression de droite est une fonction strictement décroissante de  $\beta_{c,i}$  dont la valeur à 0 est d'au moins  $\sqrt{2 \log 2}$ . Le théorème 3 permet d'obtenir une forme explicite pour l'expression de  $E_{\max}$  au théorème 1

**Corollaire 1.2.1.** Lorsque  $s_1 \leq s_2$  alors

$$E_{\max} = \beta_{c,1} + \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,1} h_1)] \quad (1.2.19)$$

où  $\beta_{c,1}$  vérifie l'équation (1.2.17). De plus, les énergies maximales  $E_{\max}^{(1)}$  et  $E_{\max}^{(2)}$  sont telles que

$$E_{\max}^{(i)} = s_i^2 \beta_{c,i} + \frac{1}{2} \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,i} h_1)] \quad (1.2.20)$$

où  $\beta_{c,i}$  vérifie l'équation (1.2.17) avec  $s_1 > s_2$ , pour  $i = 1, 2$ .

### 1.3. EXPLICATIONS DES RÉSULTATS ET STRATÉGIE DE DÉMONSTRATION

Nous présentons maintenant les résultats qui ont servi de point de départ à cette thèse, nous décrivons les étapes de la recherche, nous expliquons les énoncés des théorèmes 1, 2 et 3, et nous terminons avec la stratégie utilisée dans cette thèse.

#### 1.3.1. Discussion des résultats antérieurs

Le modèle GREM en présence d'un champ magnétique aléatoire est un prolongement naturel du modèle GREM conçu par B. Derrida dans son article [15]. Une première étape

décisive a été franchie par A. Bovier et A. Klimovsky dans leur article [6] où ils étudient, d'un point de vue rigoureux, le modèle GREM avec un champ magnétique déterministe. Ils obtiennent quatre résultats principaux dont deux sur les processus ponctuels extrémaux, un sur le comportement asymptotique de la fonction de partition du modèle et un dernier portant sur l'énergie libre. Leur approche consiste à tirer comme conséquence l'énergie libre à partir du résultat sur la fonction de partition. Une seconde étape concluante fut atteinte par L.-P. Arguin et N. Kistler dans leur article [1], où ils présentent trois résultats pour le modèle REM avec CMA : l'énergie libre, le processus ponctuel extrémal et les pondérations normalisées de Gibbs ; les méthodes de grandes déviations et la méthode du second moment conditionnel y jouent un rôle central. Nous présentons leur premier résultat dont la formule fut préalablement obtenue par Oliveira Filho, da Costa et Yokoi [10].

**Proposition 1.3.1** (Théorème 1 de l'article [1]). *Soit  $\beta > 0$ . La fonction d'énergie libre du modèle REM avec CMA est*

$$f(\beta) = \begin{cases} \log 2 + \frac{\beta^2}{2} + \mathbf{E} [\log \cosh(\beta h_1)] & , \beta \leq \beta_c \\ \beta E_{\max}^{(RC)} & , \beta \geq \beta_c \end{cases}, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement} \quad (1.3.1)$$

où  $\beta_c$  vérifie l'équation

$$\beta_c = \sqrt{2(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_c h_1)])} \quad (1.3.2)$$

et  $E_{\max}^{(RC)} = \beta_c + \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_c h_1)]$ .

### 1.3.2. Discussion de la recherche

Deux obstacles majeurs ont dû être surmontés afin de démontrer les trois théorèmes de cette thèse. Le premier concerne le champ magnétique aléatoire, et plus précisément son influence sur les énergies maximales au premier niveau et au second niveau. Le second se réfère à l'application du *lemme de Varadhan*, voir le lemme 2.2.4.

Les valeurs extrêmes du modèle REM avec CMA dans [1] s'obtiennent essentiellement en conditionnant sur la valeur typique de l'énergie provenant du champ magnétique aléatoire. Ceci permet de traiter le système comme un REM sans CMA sur un nombre restreint de configurations. Il semble a priori qu'une telle approche permettrait de calculer les valeurs extrêmes du modèle GREM avec CMA. Pourtant, cette manière d'aborder le problème n'a pu donner les résultats escomptés. La solution au premier problème fut alors de séparer le champ magnétique aléatoire en deux parties en regroupant la première partie avec le premier terme de l'hamiltonien et le restant au second,

$$H_N(\sigma) = \left( X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \sigma_i \right) + \left( X_N^{(2)}(\sigma) + \sum_{i=N/2+1}^N h_i \sigma_i \right). \quad (1.3.3)$$

En procédant ainsi, le champ magnétique aléatoire est divisé en deux parties dont chacune est proportionnelle au nombre de spins composant les configurations partielles  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\frac{N}{2}})$  et  $\sigma^{(2)} = (\sigma_{\frac{N}{2}+1}, \dots, \sigma_N)$ . Une conséquence évidente est que l'hamiltonien ressemble maintenant à celui d'un GREM, et qu'au lieu d'avoir une superposition de deux REM, nous obtenons une superposition de deux REM chacun doté d'un CMA. Une seconde conséquence est de percevoir l'action du champ magnétique aléatoire sur les deux niveaux.

Pour le deuxième obstacle, la solution a été d'invoquer le lemme de Varadhan dans la démonstration du lemme 4.3.3 qui est devenu la pierre angulaire des démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Voici le juste portrait du modèle GREM avec CMA. Par le théorème de Gärtner-Ellis, voir le lemme 2.2.4, la densité du champ magnétique aléatoire,

$$y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i, \quad (1.3.4)$$

conditionnellement à  $\mathbf{h}$ , vérifie un *principe de grandes déviations* (PGD) avec fonction de taux  $I$  où

$$I(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{yt - \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)]\}. \quad (1.3.5)$$

Cela signifie qu'à une énergie  $E$  donnée, la densité du champ magnétique aura une valeur privilégiée,  $y^* = y^*(E)$ , que nous nommerons valeur typique, et qu'approximativement  $\exp(N(\log 2 - I(y^*)))$  des configurations de spins  $\sigma$  seront dans un voisinage de  $y^*$ . Or, le champ magnétique aléatoire  $Y_N(\sigma)$  étant indépendant de l'hamiltonien du GREM,  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + X_N^{(2)}(\sigma)$ , il s'ensuit que le système se comporte comme un modèle GREM à énergie  $E - y^*$  ayant approximativement  $\exp(N(\log 2 - I(y^*)))$  variables aléatoires gaussiennes de variance  $N$ . Il suffit maintenant de préciser le nombre de variables au premier niveau et au second niveau.

Lorsque  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ , nous posons

$$y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} h_i \sigma_i, \quad y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)}) = \frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^{N/2} h_i \sigma_i \quad (1.3.6)$$

où  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\frac{N}{2}})$  et  $\sigma^{(2)} = (\sigma_{\frac{N}{2}+1}, \dots, \sigma_N)$ . Ce sont les densités du champ magnétique associées au premier niveau et au second niveau. Puisque

$$y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) = \frac{1}{2} y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}) + \frac{1}{2} y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)}) \quad (1.3.7)$$

et que, conditionnellement à  $\mathbf{h}$ ,  $y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}$  et  $y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}$  vérifient chacun un PGD avec fonction de taux  $I_1$ , voir le lemme 2.2.4, alors par le *principe de contraction*, voir le corollaire 2.2.5, la fonction

de taux  $I$  est la somme des fonctions de taux  $I_1$ ,

$$I(y^*) = I_1(y_1^*) + I_1(y_2^*) \quad (1.3.8)$$

où  $y^* = \frac{1}{2}y_1^* + \frac{1}{2}y_2^*$ . Il en découle que le système désordonné aura approximativement  $\exp\left(N\left(\frac{\log 2}{2} - I_1(y_1^*)\right)\right)$  variables gaussiennes de variances  $s_1^2 N$  au premier niveau et pour chacune de celles-ci, il y aura  $\exp\left(N\left(\frac{\log 2}{2} - I_1(y_2^*)\right)\right)$  variables gaussiennes de variances  $s_1^2 N$  au second niveau.

### 1.3.3. Explications des résultats

Le théorème 1 révèle que le maximum de l'hamiltonien varie suivant que les coefficients  $s_1$  et  $s_2$  vérifient l'inégalité  $s_1 \leq s_2$  ou non. Dans le premier cas, nous nous retrouvons dans la situation du modèle REM avec CMA où le maximum est divisé en une somme de deux termes, l'un provenant du REM et l'autre appartenant au champ magnétique aléatoire. Pour le second cas, le maximum est une somme de deux maximums, ce qui nous indique qu'il y a une superposition de deux REM avec CMA, où chacun est donné par la formule (1.2.20).

L'entropie du modèle, donnée par le théorème 2, nous informe, à la lumière de la proposition 4.2.5, qu'à faible énergie le modèle se comporte comme un REM avec CMA sur  $2^N$  configurations, tandis qu'à grande énergie le modèle se réduit à un REM avec CMA, similaire au précédent, sur  $2^{N/2}$  configurations puisqu'il ne s'y trouve qu'un nombre de configurations d'ordre 1 au premier niveau.

Le théorème 3 révèle que lorsque  $s_1 \leq s_2$ , l'énergie libre du modèle GREM avec CMA est identique au modèle REM avec CMA, en ce sens qu'il possède deux phases et que le système fige au-dessus de la valeur critique  $\beta_c$ . En effet, à partir de l'équation (1.2.15), nous obtenons la formule

$$f(\beta) = \begin{cases} \log 2 + \frac{\beta^2}{2} + \mathbf{E}[\log \cosh(\beta h_1)] & , \beta \leq \beta_c \\ \beta E_{\max} & , \beta \geq \beta_c \end{cases}, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement} \quad (1.3.9)$$

où  $\beta_c$  vérifie l'équation

$$\beta_c = \sqrt{2}(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)]))^{1/2}, \quad (1.3.10)$$

qui est la proposition 1.3.1. Par contre, si  $s_1 > s_2$ , le système présente une phase supplémentaire, donc trois phases, et il ne fige que lorsque l'énergie dépasse la seconde valeur critique  $\beta_{c,2}$ . Ceci s'explique par le fait qu'entre les valeurs  $\beta_{c,1}$  et  $\beta_{c,2}$ , le premier niveau a un nombre de configurations partielles d'ordre 1, tandis qu'au second, il en reste encore un nombre

d'ordre exponentiel. Nous obtenons

$$f(\beta) = \begin{cases} \log 2 + \frac{\beta^2}{2} + \mathbf{E} [\log \cosh \beta h_1] & , \beta \leq \beta_{c,1} \\ \beta E_{\max}^{(1)} + \frac{\log 2}{2} + \frac{s_2^2 \beta^2}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh \beta h_1] & , \beta_{c,1} \leq \beta \leq \beta_{c,2} \\ \beta E_{\max} & , \beta \geq \beta_{c,2} \end{cases} \quad (1.3.11)$$

où  $\beta_{c,i}$  vérifie l'équation

$$\beta_{c,i} = s_i^{-1} (\log 2 - (\beta_{c,i} \mathbf{E} [h_1 \tanh \beta_{c,i} h_1] - \mathbf{E} [\log \cosh \beta_{c,i} h_1]))^{1/2}. \quad (1.3.12)$$

pour  $i = 1, 2$ .

### 1.3.4. Stratégie de démonstration

Voici une des inégalités dont nous ferons usage au cours de cette thèse. Elle est à la base de la méthode du second moment (voir [5]).

**Proposition 1.3.2** (Inégalité de Paley-Zygmund). *Soit  $\gamma \in (0, 1)$  et  $X$  une variable aléatoire non négative, alors*

$$\mathbf{P}(X > \gamma \mathbf{E}[X]) \geq (1 - \gamma)^2 \frac{\mathbf{E}[X]^2}{\mathbf{E}[X^2]}. \quad (1.3.13)$$

La stratégie pour démontrer le théorème 1 partage plusieurs points communs avec celle du théorème 2 puisque déterminer le premier ordre du maximum revient à trouver l'unique valeur positive qui annule l'entropie du modèle. Nous avons choisi d'adapter l'approche de L-P. Arguin et F. Ouimet présentée dans [2] de sorte à diviser la convergence presque sûre en deux propositions : 1) à l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que la borne supérieure converge vers 0 à un taux exponentiel, et 2) démontrer que la borne inférieure converge elle aussi vers 0, avec le même taux, par la méthode du second moment à l'aide de l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13). C'est ainsi que nous avons procédé avec les propositions 4.3.1, 4.3.2, 4.4.1 et 4.4.2. Pour l'énergie libre, nous démontrons premièrement, à la proposition 4.5.1, que celle-ci vérifie un *principe variationnel de Gibbs*, qui n'est que la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction  $-S(E)$ , (définition 2.1.1), que nous calculons au théorème 3.

### 1.3.5. Nouveautés

La contribution inédite de l'auteur à l'étude des systèmes désordonnés de spins jumelés à un champ magnétique aléatoire se résume, d'une part, à diviser le champ magnétique aléatoire et à le regrouper tel que l'hamiltonien ne présente que deux termes, ce qui nous ramène en quelque sorte au modèle GREM sur un nombre réduit de configurations, et d'autre part, à invoquer le lemme de Varadhan, voir le lemme 2.2.4, dans la démonstration du lemme 4.3.3

pour majorer le nombre moyen de configurations dont les énergies associées atteignent une valeur déterminée. Cette approche peut se prolonger à d'autres modèles, en particulier à celui de la *marche aléatoire branchante* (MAB) avec CMA, voir les détails à la section 5.3.

## 1.4. STRUCTURE DE LA THÈSE

L'intérêt du présent travail se porte en tout premier lieu sur les grandes déviations, au chapitre 2, assises de tous les résultats de cette thèse. Les définitions et les principaux théorèmes composent la section 2.1. La section 2.2 expose les propriétés du champ magnétique aléatoire, sous forme de lemmes, qui découlent des résultats de la section précédente. Une application sur les valeurs extrêmes du modèle CMA, présentée à la section 2.3 vient clore cette première partie.

Le modèle GREM de Derrida [15], traité au chapitre 3, représente l'origine de cette thèse. La section 3.1 présente les principaux résultats du modèle GREM : premier ordre du maximum, entropie et énergie libre. Nous comparons le modèle de cette thèse et celui du GREM à la section 3.2.

Le chapitre 4 expose les propositions fondamentales à partir desquelles les théorèmes 1, 2 et 3 sont démontrés. La section 4.1 rappelle les définitions du modèle GREM à deux niveaux avec CMA. La fonction d'entropie de celui-ci est établie à la section 4.2. La démonstration du théorème 1 figure à la section 4.3 avec le concours de deux propositions, 4.3.1 et 4.3.2. La section 4.4 présente la démonstration du théorème 2, à l'aide des propositions 4.4.1 et 4.4.2. Enfin, l'énergie libre du modèle, le théorème 3, est établie grâce à la proposition 4.5.1.

Pour conclure, nous présentons au chapitre 5 une généralisation des théorèmes 1 et 3, en plus d'une conjecture pour les statistiques des valeurs extrêmes du modèle de la marche aléatoire branchante (MAB) en présence d'un champ magnétique aléatoire (CMA). La section 5.1 donne une extension du premier ordre du maximum, de l'entropie et de l'énergie libre du modèle GREM à  $M$  niveaux. Nous présentons une généralisation des mêmes statistiques pour le modèle GREM à  $M$  niveaux avec CMA à la section 5.2. La conjecture des valeurs du maximum, de l'entropie et de l'énergie libre du modèle de la MAB avec CMA, énoncée à la section 5.3, achève cette thèse.

# Chapitre 2

---

## LES GRANDES DÉVIATIONS

Le présent chapitre se veut un ensemble de résultats propres à calculer la probabilité des événements  $\{\max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) > (1 + \delta)E_{\max}N\}$  et  $\{\max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) < (1 - \delta)E_{\max}N\}$  du maximum de l'hamiltonien  $H_N(\sigma)$  du modèle GREM avec CMA, ainsi que des événements  $\{\mathcal{N}_N(E) > (1 + \delta)S(E)N\}$  et  $\{\mathcal{N}_N(E) < (1 - \delta)S(E)N\}$  pour le nombre de configurations  $\mathcal{N}_N(E)$  dont les énergies excèdent la quantité  $EN$ . Suivant les théorèmes 1 et 2, leur valeur décroît vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini, et ce, comme nous le verrons au chapitre 4, à un taux inférieur à celle d'une exponentielle à exposant négatif,  $e^{-Nf(\delta)}$  où  $f(\delta) > 0$ . De tels événements, qualifiés de *rare*, *exceptionnels* ou même *atypiques*, appartiennent au domaine des *grandes déviations* qui au cours des cinquantes dernières années, grâce, entre autres, aux efforts de S. R. S. Varadhan, a acquis une place de premier rang au sein des probabilités. Nous présenterons ici trois résultats propres à cette thèse.

Ce chapitre compte trois sections. La première, 2.1, énonce les définitions et expose les résultats généraux des grandes déviations. À la section 2.2, nous déduisons de la section précédente les lemmes que nous exploiterons pleinement au chapitre 4. La section 2.3 présente une application, le *modèle du champ magnétique aléatoire* (CMA), qui illustre la portée des résultats de la section précédente.

### 2.1. CONCEPTS ET RÉSULTATS UTILISÉS

Nous débutons par trois exemples qui préciseront la notion d'*événements rares* et celle de *fonction de taux*. Par la suite, nous définissons le *principe de grandes déviations*. Nous terminons avec les énoncés du *théorème de Gärtner-Ellis*, du *lemme de Varadhan* et de celui du *principe de contraction*.

#### 2.1.1. Concepts

Considérons la marche aléatoire sans biais  $\{\sum_{i=1}^n V_i\}$  où  $\{V_n\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi,  $\mathbf{P}(V_1 = -1) = \mathbf{P}(V_1 = 1) = 1/2$ . La loi forte des

grands nombres (LFGN) affirme que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \rightarrow 0 \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement} \quad (2.1.1)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , d'où il en découle que

$$\mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq an \right) \rightarrow 0 \quad (2.1.2)$$

pour  $a > 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Caractérisons cette convergence, c'est-à-dire précisons le taux auquel cette suite de probabilités se rapproche de la valeur 0. En se tournant vers le théorème limite central, nous n'obtenons guère la réponse souhaitée puisqu'il n'est sensible qu'à des variations de l'ordre  $O(\sqrt{n})$ ,

$$\mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq a\sqrt{n} \right) \rightarrow \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.1.3)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où la quantité de droite n'est clairement pas 0. Il s'ensuit que les *déviations normales* par rapport à la moyenne 0 sont d'ordre  $O(\sqrt{n})$ , tandis que  $O(n)$  semble être celui des *grandes déviations*.

Un calcul direct nous permettra d'évaluer la valeur de la probabilité en (2.1.2). La variable  $\frac{1}{2}(V_i + 1)$  étant de loi de Bernoulli de paramètre 1/2, il s'ensuit que

$$\mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq an \right) = \sum_{k=\lceil \frac{a+1}{2}n \rceil}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}, \quad (2.1.4)$$

où le coefficient binomiale atteint sa valeur maximale lorsque  $k = \lceil \frac{a+1}{2}n \rceil$  puisque  $\frac{a+1}{2}n > \frac{1}{2}n$ . Il en découle que la probabilité de (2.1.4) est majorée et minorée par les valeurs suivantes,

$$\frac{1}{2^n} \binom{n}{\lceil \frac{a+1}{2}n \rceil} \leq \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq an \right) \leq \frac{n+1}{2^n} \binom{n}{\lceil \frac{a+1}{2}n \rceil}. \quad (2.1.5)$$

À l'aide de la formule de Stirling,  $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(\frac{1}{n}))$ , nous obtenons le résultat asymptotique suivant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq an \right) = -J(a), \quad (2.1.6)$$

où

$$J(x) = \begin{cases} \log 2 + \frac{x+1}{2} \log \left( \frac{x+1}{2} \right) + \left( \frac{1-x}{2} \right) \log \left( \frac{1-x}{2} \right) & , x \in [-1, 1], \\ \infty & , \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

est appelée la *fonction de taux*. Par symétrie, nous obtenons le taux de décroissance de

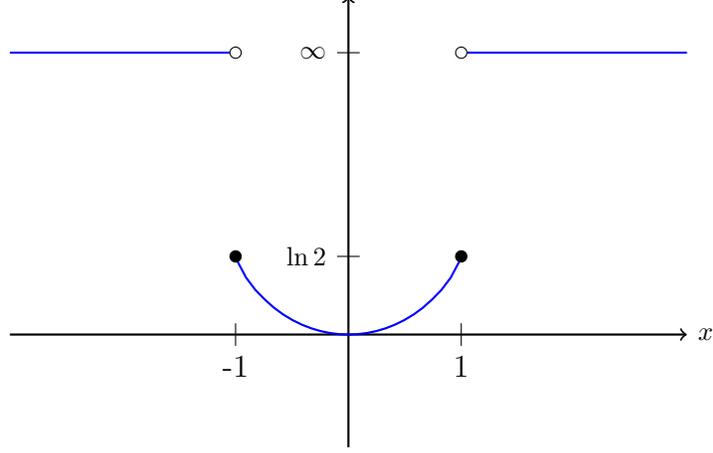


FIGURE 2.1. Fonction de taux  $J(x)$ .

l'événement rare  $\{\sum_{i=1}^n V_i \leq bn\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \leq bn \right) = -J(b) \quad (2.1.8)$$

lorsque  $b < 0$ .

Nous appelons  $J$  la *fonction de taux* de la *grande déviation*

$$\mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n V_i \geq an \right). \quad (2.1.9)$$

Il est à noter que  $J$  est une fonction non négative, strictement convexe et lisse sur l'intervalle  $(-1,1)$ , (voir la figure 2.1). De plus, son unique racine, qui minimise  $J(x)$ , vaut  $\mathbf{E}[V_1] = 0$  et correspond à la LFGN, car nous avons

$$\sum_{n \geq n_0} \mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right| > \delta \right) \leq 2 \sum_{n \geq n_0} e^{-\frac{1}{2} J(\delta)n} < \infty \quad (2.1.10)$$

pour  $n_0$  suffisamment grand, et le lemme de Borel-Cantelli nous permet de conclure à la convergence  $\mathbf{P}$ -presque sûre de  $\sum_{i=1}^n V_i$  vers 0 tel qu'énoncé en (2.1.1).

Qu'en est-il de la somme  $\sum_{i=1}^n W_i$ , où  $\{W_i\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi? Lorsque  $\mathbf{E}[|W_1|] < \infty$ , alors nous avons, pour  $a > \mathbf{E}[W_1]$  et  $s > 0$ ,

$$\mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n W_i \geq an \right) = \mathbf{P} \left( s \sum_{i=1}^n (W_i - a) \geq 0 \right) = \mathbf{P} \left( e^{s \sum_{i=1}^n (W_i - a)} \geq 1 \right) \leq \mathbf{E} \left[ e^{s(W_1 - a)} \right]^n \quad (2.1.11)$$

par l'indépendance des  $W_i$  et l'inégalité de Markov, en supposant que la fonction génératrice des moments est finie,  $\mathbf{E} \left[ e^{s(W_1 - a)} \right] < \infty$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, nous savons que

$\mathbf{E} \left[ e^{s(W_1-a)} \right]$  est strictement convexe, étant donné que

$$\frac{d^2 \mathbf{E} \left[ e^{s(W_1-a)} \right]}{ds^2} = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 e^{s(x-a)} dF_{W_1}(x) > 0. \quad (2.1.12)$$

En ajoutant l'hypothèse que  $\mathbf{P}(W_1 > a) > 0$  et  $\mathbf{P}(W_1 < a) > 0$ , il s'ensuit que  $\mathbf{E} \left[ e^{s(W_1-a)} \right]$  atteint sa valeur minimale en  $s_0 > 0$ , car  $\left. \frac{d\mathbf{E} \left[ e^{s(W_1-a)} \right]}{ds} \right|_{s=0} = \mathbf{E} [W_1] - a < 0$ . Il en découle que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n W_i \geq an \right) &\leq \exp \left( - \left( s_0 a - \log \mathbf{E} \left[ e^{s_0 W_1} \right] \right) n \right) \\ &= \exp \left( - \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ sa - \log \mathbf{E} \left[ e^{s W_1} \right] \right\} n \right). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Pour le cas  $W_1 = V_1$ , un calcul direct donne  $\sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ sa - \log \mathbf{E} \left[ e^{s V_1} \right] \right\} = J(a)$ .

En général, lorsque la fonction génératrice des moments de  $W_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , nous pouvons calculer la probabilité de l'événement rare  $\left\{ \sum_{i=1}^n W_i \geq an \right\}$ , où  $a > \mathbf{E} [W_1]$ , qui décroît au taux exponentiel,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n W_i \geq an \right) = - \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ sa - \log \mathbf{E} \left[ e^{s W_1} \right] \right\}. \quad (2.1.14)$$

Ce résultat fut démontré par H. Cramér dans son article [9]. Il a depuis été étendu pour des vecteurs aléatoires, pour des variables aléatoires de lois non identiques, et même pour celles présentant une faible dépendance.

### 2.1.2. Définitions et résultats utilisés

Les événements rares que nous avons jusqu'ici considérés s'expriment ainsi

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \in [a, \infty) \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \in (-\infty, b] \right\} \quad (2.1.15)$$

lorsque  $a > \mathbf{E} [W_1] > b$ . Ceux-ci donnent lieu à des considérations plus générales, tels les événements de la forme

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \in A \right\} \quad (2.1.16)$$

pour  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , les boréliens de  $\mathbb{R}$ . Une extension du théorème de Cramér fournit une réponse quant à leur probabilité asymptotique,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \in A \right) \leq - \inf_{a \in \bar{A}} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ sa - \log \mathbf{E} \left[ e^{s W_1} \right] \right\} \quad (2.1.17)$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \in A \right) \geq - \inf_{a \in \bar{A}} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ sa - \log \mathbf{E} \left[ e^{sW_1} \right] \right\}, \quad (2.1.18)$$

où  $\bar{A}$  et  $\overset{\circ}{A}$  représentent l'adhérence et l'intérieur de l'événement  $A$ . Dans le cas général, l'égalité des bornes supérieure et inférieure n'est pas assurée.

L'équation (2.1.14) et les inégalités précédentes partagent une fonction commune que nous définissons maintenant.

**Définition 2.1.1.** Soit  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe où  $\mathcal{I}$  est un intervalle. La transformée de Legendre-Fenchel de  $f$ , aussi appelée fonction conjuguée, est donnée par la formule

$$f^*(s) = \sup_{t \in \mathcal{I}} \{st - f(t)\}. \quad (2.1.19)$$

qui est définie pour tout  $s$  où  $f^*(s) \in \mathbb{R}$ .

Le lemme qui suit a pour objet les propriétés générales de la transformée de Legendre-Fenchel d'une fonction  $f$  strictement convexe différentiable d'ordre au moins deux. Ce lemme permettra de calculer l'entropie du champ magnétique aléatoire (CMA) au lemme 2.2.2 ainsi que la fonction d'énergie libre du modèle GREM avec CMA à la proposition 4.5.1.

**Lemme 2.1.2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction paire et différentiable d'ordre  $l \geq 2$  telle que  $f'' > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = \theta > 0$ . Alors :

a)  $(-\theta, \theta) \subset \text{Dom}(f^*) = [-\theta, \theta]$ ;

b) il existe une fonction  $\tau(s)$  strictement croissante et différentiable d'ordre  $l - 1$  sur  $(-\theta, \theta)$  telle que

$$f^*(s) = s\tau(s) - f(\tau(s)) \iff f'(\tau(s)) = s; \quad (2.1.20)$$

c) la fonction  $f^*$  est différentiable d'ordre  $l$  sur  $(-\theta, \theta)$  avec  $f^{*'}(s) = \tau(s)$  et  $f^{*''} > 0$ ;

d)  $f^{**} = f$  où  $f^{**} = (f^*)^*$ ;

e) si  $f \geq 0$  et  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ , alors  $f^* \geq 0$  et  $f^{*-1}(\{0\}) = \{0\}$ ;

f)  $f^*$  est une fonction paire.

DÉMONSTRATION.

a) Nous montrons l'inclusion  $\text{Dom}(f^*) \subseteq [-\theta, \theta]$ . Soit  $s \in \text{Dom}(f^*)$  et posons

$$g_s(t) = st - f(t). \quad (2.1.21)$$

Il y a deux cas à considérer :

$$f^*(s) = s\tau(s) - f(\tau(s)), \quad (2.1.22)$$

où  $\tau(s) \in \mathbb{R}$ , et

$$f^*(s) = M \quad \text{avec} \quad g_s(t) < M, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1.23)$$

Dans le premier cas,  $\tau(s)$  est l'unique point stationnaire de  $g_s(t)$  étant donné que  $g_s'' < 0$ . Alors  $g_s'(\tau(s)) = 0$ , c'est-à-dire  $f'(\tau(s)) = s$ . Puisque  $f'' > 0$ , alors  $f'$  est strictement croissante, d'où il s'ensuit que  $s \in [-\theta, \theta]$ .

Pour le second cas, la définition du supremum implique qu'il existe une suite  $\{t_n\}$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$M - \frac{1}{n} < g_s(t_n) < M. \quad (2.1.24)$$

Notons que toute suite extraite  $\{t_{n_k}\}$  ne peut converger, puisque si  $t_{n_k} \rightarrow v \in \mathbb{R}$  alors nous aurions  $g_s(v) = M$ , car  $g_s$  est continue, ce qui contredit (2.1.23).

Étant donné que nous pouvons toujours extraire une suite partielle croissante ou décroissante, il existe une suite extraite  $\{t_{n_k}\}$  telle que  $t_{n_k} \rightarrow -\infty$  ou  $t_{n_k} \rightarrow \infty$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Sans perte de généralité supposons que  $t_{n_k} \rightarrow \infty$ . La suite  $\{s_k\}$  définie par  $s_k = f'(t_{n_k})$  est telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \theta. \quad (2.1.25)$$

Or, par hypothèse et par (2.1.21), nous avons

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_s'(t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (s - f'(t_{n_k})) = s - \theta. \quad (2.1.26)$$

Par (2.1.24), la suite  $\{g_s(t_{n_k})\}$  converge vers  $M$ , d'où il en découle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_s'(t_{n_k}) = 0$ , ce qui implique que  $s = \theta_1 \in [-\theta, \theta]$ .

Nous montrons l'inclusion  $(-\theta, \theta) \subset \text{Dom}(f^*)$ . Supposons que  $s \in (-\theta, \theta)$ . Alors il existe  $u \in \mathbb{R}$  tel  $f'(u) = s$ . En effet, comme  $f'' > 0$  alors  $f'$  est strictement croissante, ce qui implique qu'il existe  $a < b$  avec  $f'(a) < s < f'(b)$ , et nous concluons par le théorème des valeurs intermédiaires. Alors, nous obtenons

$$g_s(u) = s - f'(u) = 0, \quad (2.1.27)$$

ce qui implique que  $f^*(s) = su - f(u)$ , c'est-à-dire  $s \in \text{Dom}(f^*)$ .

- b) Nous avons déjà montré l'équivalence (2.1.20) à la partie a). Étant donné que  $f'' > 0$ , alors  $f'$  est strictement croissante, d'où  $f'$  est bijective telle que

$$\tau(s) = f'^{-1}(s) \quad (2.1.28)$$

sur  $(\theta_1, \theta_2)$ . De plus  $\tau : (\theta_1, \theta_2) \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable d'ordre  $l - 1$  et sa dérivée est de la

forme

$$\tau'(s) = \frac{1}{f''(f'^{-1}(s))} = \frac{1}{f''(\tau(s))}, \quad (2.1.29)$$

où  $f''$  est différentiable d'ordre  $l - 2$ . Puisque  $f'' > 0$ , alors  $\tau$  est strictement croissante.

c) Soit  $s \in (-\theta, \theta)$ . Par l'équivalence (2.1.20), nous avons

$$f^*(s) = s\tau(s) - f(\tau(s)), \quad (2.1.30)$$

où chaque terme est différentiable, et donc nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{*'}(s) &= \tau(s) + (s - f'(\tau(s)))\tau'(s) \\ &= \tau(s). \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Il s'ensuit que  $f^*$  est différentiable d'ordre  $l$ . De plus, par l'équation (2.1.29), il en découle que  $f^{*''} > 0$ , c'est-à-dire  $f^*$  est strictement convexe.

d) Par définition, nous avons

$$f^{**}(t) = \sup_s \{ts - f^*(s)\}, \quad (2.1.32)$$

et par l'énoncé b), nous obtenons la caractérisation

$$f^{**}(t) = t\alpha(t) - f^*(\alpha(t)) \iff f^{*'}(\alpha(t)) = t. \quad (2.1.33)$$

Or, l'énoncé c) implique que  $\tau(\alpha(t)) = t$ , d'où, par l'énoncé b), il s'ensuit que

$$f^*(\alpha(t)) = \alpha(t)\tau(\alpha(t)) - f(\tau(\alpha(t))), \quad (2.1.34)$$

et par (2.1.33), nous avons

$$\begin{aligned} t\alpha(t) - f^{**}(t) &= t\alpha(t) - f(t), \\ f^{**}(t) &= f(t). \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

e) Par hypothèse, nous avons  $f^*(s) \geq s \cdot 0 - f(0) = 0$ . D'autre part,  $f^*(0) = 0 \cdot \tau(0) - f(\tau(0)) = -f(\tau(0)) \leq 0$  étant donné que  $f \geq 0$ . Donc, nous avons montré que  $f^*(0) = 0$ . Il s'ensuit que  $f^*$  atteint sa valeur minimale en  $s = 0$ , mais comme  $f^*$  est strictement convexe, alors ce minimum est unique.

f) Puisque  $f$  est une fonction paire, il en découle que la dérivée première,  $f'$ , est une fonction impaire. Comme  $\mathbb{R}$  est un ensemble symétrique par rapport à 0, alors nous avons

$$\begin{aligned}
f^*(-s) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-st - f(t)\} \\
&= \sup_{-t \in \mathbb{R}} \{s(-t) - f(-t)\} \\
&= \sup_{z \in \mathbb{R}} \{sz - f(z)\} \\
&= f^*(s).
\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Cela conclut la démonstration. □

Les inégalités (2.1.17) et (2.1.18) révèlent un principe sous-jacent aux grandes déviations ; celui-ci fut formulé pour la première fois par S. R. S. Varadhan dans son article [32] où il résout une équation aux dérivées partielles particulière à l'aide de la transformée de Legendre-Fenchel. Nous présentons ici le *principe de grandes déviations* selon la définition donnée dans les notes de conférence [33] de Varadhan.

**Définition 2.1.3.** Une suite de mesures de probabilité  $\{\mathbf{P}_n\}$  sur les boréliens  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  d'un espace métrique  $\mathcal{X}$  vérifie un principe de grandes déviations (PGD) avec la fonction de taux  $J : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  lorsque :

- i)  $J$  est semi-continue inférieurement ;
- ii) l'ensemble  $\{x \mid J(x) \leq l\}$  est un compact de  $\mathcal{X}$  si  $l < \infty$  ;
- iii) pour tout fermé  $F \subseteq \mathcal{X}$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}_n(F) \leq - \inf_{x \in F} J(x); \tag{2.1.37}$$

- iv) pour tout ouvert  $O \subseteq \mathcal{X}$ ,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}_n(O) \geq - \inf_{x \in O} J(x). \tag{2.1.38}$$

Les trois résultats suivants seront nécessaires pour démontrer les théorèmes 1 et 2. Le premier de ceux-ci, le théorème de Gärtner-Ellis, permet de montrer qu'une suite de mesures de probabilité vérifie un PGD (voir [12]).

**Proposition 2.1.4** (Théorème de Gärtner-Ellis). Soit  $\{Z_n\}$  une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbf{P})$ , et soit  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que :

1.  $\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{\Omega} \mathbf{P}(d\omega) e^{n\langle t, Z_n(\omega) \rangle}$  ;

2.  $\psi$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^d$ .

Alors la suite  $\{\mathbf{P}_n\}$ , telle que  $\mathbf{P}_n(\cdot) = \mathbf{P}(Z_n \in \cdot)$ , vérifie un principe de grandes déviations de taux  $\gamma_n = n$  et de fonction de taux

$$J(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}^d} \{\langle x, s \rangle - \psi(t)\}. \quad (2.1.39)$$

Le second résultat, le *principe de contraction*, affirme qu'une transformation continue  $T$  appliquée à une suite de mesures de probabilité, vérifiant un PGD avec fonction de taux  $J_1$ , génère une nouvelle suite de mesures de probabilité qui vérifie, elle aussi, un PGD avec une fonction de taux  $J_2$  dépendant à la fois de  $J_1$  et de  $T$  (voir [12]).

**Proposition 2.1.5** (Principe de contraction). *Soit  $\{\mathbf{P}_n\}$  une suite de mesures de probabilité sur  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$  vérifiant un PGD de taux  $n$  et de fonction de taux  $J_1$ . Si  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $\mathbf{Q}_n(\cdot) = \mathbf{P}_n(T^{-1}(\cdot))$ , alors  $\{\mathbf{Q}_n\}$  vérifie un PGD avec taux  $n$  et fonction de taux  $J_2$  telle que*

$$J_2(x) = \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^k: \\ T(y)=x}} J_1(y) \quad (2.1.40)$$

avec la convention  $\inf_{\emptyset} J_1(x) = \infty$ .

Le dernier résultat, le *lemme de Varadhan*, est une généralisation de la *méthode de Laplace* pour évaluer l'intégrale d'une fonction exponentielle (voir [12]).

**Proposition 2.1.6** (Lemme de Varadhan). *Soit  $\{\mathbf{P}_n\}$  une suite de mesures de probabilité sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$  vérifiant un PGD de taux  $n$  et de fonction de taux  $J$ . Si  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et majorée, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathcal{X}} \mathbf{P}_n(dx) \exp(nF(x)) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \{F(y) - J(y)\}. \quad (2.1.41)$$

## 2.2. PRINCIPE DE GRANDES DÉVIATIONS POUR LE MODÈLE CMA

Le but de cette section est d'établir le principe de grandes déviations pour la densité du champ magnétique aléatoire  $y_{N,\mathbf{h}}(\sigma)$ , définie à l'équation (1.3.4), ainsi que pour les densités partielles  $y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})$ , définies en (1.3.6). Les résultats qui en découlent formeront la base à partir de laquelle nous démontrerons les théorèmes 1 et 2.

### 2.2.1. Résultats spécifiques

Nous présentons les propriétés de la fonction  $\varphi(t) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]$  qui, comme nous le verrons, est une composante de l'énergie libre du CMA. Sa fonction conjuguée donnera l'entropie du CMA.

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $\varphi(t) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]$  telle que  $\mathbf{E}[|h_1|^3] < \infty$ . Alors :*

a)  $\text{Dom}(\varphi) = \mathbb{R}$  ;

b)  $\varphi$  est une fonction paire ;

c)  $\varphi$  est différentiable d'ordre 3 telle que

$$\varphi'(t) = \mathbf{E} [h_1 \tanh(th_1)], \quad (2.2.1)$$

$$\varphi''(t) = \mathbf{E} \left[ h_1^2 \frac{1}{\cosh^2(th_1)} \right]$$

et

$$\varphi'''(t) = \mathbf{E} \left[ h_1^3 \frac{\sin(th_1)}{\cosh^3(th_1)} \right] \quad (2.2.2)$$

telle que

$$\varphi'(\mathbb{R}) = (-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|), \quad \varphi''(\mathbb{R}) > 0; \quad (2.2.3)$$

d)  $\varphi \geq 0$  et  $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ .

DÉMONSTRATION. a) Puisque  $x \mapsto \log \cosh(x)$  vérifie les inégalités  $0 \leq \log \cosh(x) \leq |x|$ , nous obtenons  $0 \leq \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)] \leq |t| \mathbf{E}|h_1| < \infty$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

b) Cela découle de la parité de la fonction  $x \mapsto \log \cosh(x)$ .

c) Soit  $k \neq 0$ . Par le théorème des accroissements finis, il existe  $\theta$  entre  $th_1$  et  $(t+k)h_1$  tel que

$$\left| \frac{1}{k} (\log \cosh((t+k)h_1) - \log \cosh(th_1)) \right| = |h_1| |\tanh(\theta)| \leq |h_1| \quad (2.2.4)$$

étant donné que  $|\tanh(\theta)| \leq 1$ . Puisque  $\mathbf{E}|h_1| < \infty$ , nous invoquons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, et nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{E} \left[ \frac{1}{k} (\log \cosh((t+k)h_1) - \log \cosh(th_1)) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \log \cosh(th_1) \right] \\ &= \mathbf{E} [h_1 \tanh(th_1)]. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Les dérivées d'ordre deux et trois se traitent de la même façon.

Puisque  $h_1 > 0$ ,  $\mathbf{P}$ -presque sûrement, alors  $\varphi''(t) = \mathbf{E} \left[ \left( \frac{h_1}{\cosh(th_1)} \right)^2 \right] > 0$ . Par ce qui précède, nous savons que  $\varphi'$  est une fonction continue. De plus, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = \mathbf{E} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} h_1 \tanh(th_1) \right] = \mathbf{E}|h_1| \quad (2.2.6)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi'(t) = \mathbf{E} \left[ \lim_{t \rightarrow -\infty} h_1 \tanh(th_1) \right] = -\mathbf{E}|h_1|. \quad (2.2.7)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, nous obtenons  $\varphi'(\mathbb{R}) = (-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|)$ . □

Le lemme suivant donne les propriétés de l'entropie du CMA.

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction conjuguée de  $\varphi(t) = \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)]$ , c'est-à-dire*

$$I(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{yt - \varphi(t)\}. \quad (2.2.8)$$

Alors :

a)  $I$  est une fonction paire ;

b)  $\text{Dom}(I) = [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$  ;

c) il existe une fonction  $\tau(y)$  strictement croissante et différentiable d'ordre 2 telle que

$$I(y) = y\tau(y) - \varphi(\tau(y)) \iff \varphi'(\tau(y)) = y; \quad (2.2.9)$$

de plus, la fonction  $I$  vérifie l'équation

$$I'(y) = \tau(y); \quad (2.2.10)$$

d)  $I$  est une fonction strictement convexe et différentiable d'ordre 3 telle que

$$I''(y) > 0; \quad (2.2.11)$$

e)  $I(y) \in [0, \log 2]$  lorsque  $y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ ,  $I^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  et  $I'(0) = 0$  ;

f) la fonction  $I$  est continue sur  $[-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ .

**DÉMONSTRATION.** Les énoncés a) à e) découlent des lemmes 2.1.2 et 2.2.1. En particulier, pour b), nous montrons plus bas que  $I(\mathbf{E}|h_1|) = \log 2$ , d'où, par a),  $I(-\mathbf{E}|h_1|) = \log 2$ , ce qui implique que  $\text{Dom}(I) = [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ .

Pour l'équation (2.2.10), il suffit de dériver le côté gauche de l'équivalence (2.2.9) et d'utiliser l'expression du côté droit de celle-ci pour simplifier l'expression, d'où il en découle que

$$I'(y) = \tau(y) + (y - \varphi'(\tau(y))) \tau'(y) = \tau(y). \quad (2.2.12)$$

Pour l'énoncé f), nous savons que  $I$  est continue sur l'intervalle  $(-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|)$ . Il faut donc montrer la continuité en  $y = \mathbf{E}|h_1|$  et  $y = -\mathbf{E}|h_1|$ . Puisque la démonstration est identique pour les deux valeurs, nous ne le ferons que pour la première.

La fonction  $I(y)$  se réécrit sous la forme

$$I(y) = \log 2 - \inf_{t \in \mathbb{R}} \left\{ |t|(\mathbf{E}|h_1| - \operatorname{sgn}(t)y) + \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \right\}. \quad (2.2.13)$$

Il en découle que

$$I(\mathbf{E}|h_1|) = \log 2. \quad (2.2.14)$$

Considérons une suite  $\{a_k\}$  de  $(0, \mathbf{E}|h_1|)$  telle que  $a_k \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  et posons  $b_k = \mathbf{E}|h_1| - a_k$ . Nous allons montrer que  $I(b_k) \rightarrow \log 2$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} I(b_k) &= \log 2 - \inf_{t \in \mathbb{R}} \left\{ |t|(\mathbf{E}|h_1| - \operatorname{sgn}(t)b_k) + \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \right\} \\ &= \log 2 - \inf_{t > 0} \left\{ ta_k + \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \right\} \\ &= \log 2 + \sup_{t > 0} \left\{ -ta_k - \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

d'où il en découle que

$$I(b_k) \geq \log 2 - ta_k - \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \quad (2.2.16)$$

pour tout  $t > 0$ . Donc, nous obtenons

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} I(b_k) \geq \log 2 - \mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right], \quad (2.2.17)$$

d'où nous concluons que

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} I(b_k) \geq \log 2, \quad (2.2.18)$$

car par le théorème de la convergence dominée, nous avons  $\mathbf{E} \left[ \log(1 + e^{-2|h_1||t|}) \right] \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Par l'équation (2.2.13), nous voyons que  $I(y) \leq \log 2$  lorsque  $y \geq 0$ , et alors nous obtenons

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} I(b_k) \leq \log 2. \quad (2.2.19)$$

□

Les deux prochains résultats découlent du théorème de Gärtner-Ellis 2.1.4 et du lemme de Varadhan 2.1.6. Nous allons auparavant définir la notion d'événement  $\mathbf{h}$  de probabilité 1 dont nous aurons besoin.

**Lemme 2.2.3.** *Considérons l'événement  $B = B_1 \cap B_2$  où*

$$B_1 = \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \cosh(th_i(\omega)) = \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)] \right\} \quad (2.2.20)$$

et

$$B_2 = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h_i(\omega)| = \mathbf{E}|h_1| \right\}. \quad (2.2.21)$$

Alors  $\mathbf{P}(B) = 1$ .

DÉMONSTRATION. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , posons

$$B_{1,t} = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \cosh(th_i(\omega)) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)] \right\} \quad (2.2.22)$$

et  $C_t = B_{1,t} \cap B_2$ . Pour un  $t_0 \in \mathbb{R}$  fixé, la LFGN implique que  $\mathbf{P}(C_{t_0}) = 1$ , puisque

$$\mathbf{E}|\log \cosh(t_0 h_1)| \leq |t_0| \mathbf{E}|h_1| < \infty. \quad (2.2.23)$$

Soit  $\mathbb{Q} = \{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Il suffit de montrer que  $B \supseteq \bigcap_k C_{r_k}$ , puisqu'alors nous obtenons  $\mathbf{P}(B) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_{r_k}) = 1$ .

Fixons  $x \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \bigcap_k C_{r_k}$ . De plus, considérons une suite de nombres rationnels  $\{q_k\}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = x$ . Nous allons montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(x, \omega) = \varphi(x), \quad (2.2.24)$$

où les fonctions  $\varphi$  et  $\varphi_N$  sont définies par

$$\varphi(t) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)], \quad \varphi_N(t, \omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \cosh(th_i(\omega)). \quad (2.2.25)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous avons l'inégalité

$$|\varphi_N(x, \omega) - \varphi(x)| \leq |\varphi_N(x, \omega) - \varphi_N(q_k, \omega)| + |\varphi_N(q_k, \omega) - \varphi(q_k)| + |\varphi(q_k) - \varphi(x)| \quad (2.2.26)$$

en raison de l'inégalité du triangle utilisé par deux fois. Nous remarquons que la fonction  $\varphi_N$  est de Lipschitz, car

$$|\varphi'_N(t, \omega)| \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h_i(\omega) \tanh(th_i(\omega))| \leq L, \quad (2.2.27)$$

où  $L = \mathbf{E}|h_1| + 1$ , pour  $N = N_\omega$  suffisamment grand, étant donné que  $|\tanh(x)| \leq 1$ . Il s'ensuit que

$$|\varphi_N(x, \omega) - \varphi_N(q_k, \omega)| \leq L |x - q_k| \quad (2.2.28)$$

par le théorème des accroissement finis.

Puisque  $\varphi$  est une fonction continue, il existe  $K_\varepsilon > 0$  tel que  $|x - q_{K_\varepsilon}| < \varepsilon$  et  $|\varphi(q_{K_\varepsilon}) - \varphi(x)| < \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$ . De plus, pour ce rang  $K_\varepsilon$ , il existe  $M_\varepsilon > 0$  tel que

$$|\varphi_N(q_{K_\varepsilon}, \omega) - \varphi(q_{K_\varepsilon})| < \varepsilon \quad (2.2.29)$$

lorsque  $N \geq M_\varepsilon$ . Nous avons montré que

$$|\varphi_N(x, \omega) - \varphi(x)| < 3\varepsilon \quad (2.2.30)$$

lorsque  $N \geq M_\varepsilon$ , ce qui démontre (2.2.24).  $\square$

**Lemme 2.2.4.** *Soit  $(\Sigma_N, \mathcal{F}_N, \mu_N)$  un espace de probabilité où  $\mu_N$  est la mesure uniforme sur l'hypercube  $\Sigma_N$ . Conditionnellement à  $\mathbf{h}$  de probabilité 1, la suite de mesures de probabilité  $\{\mu_N(y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) \in \cdot)\}$  vérifie un PGD avec la fonction de taux*

$$I(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{yt - \varphi(t)\} \quad (2.2.31)$$

pour tout  $y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ , où  $\varphi(t) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]$ .

En particulier, lorsque  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et majorée, alors nous obtenons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp(NF(y_{N,\mathbf{h}}(\sigma))) = \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \{F(y) - I(y)\}. \quad (2.2.32)$$

DÉMONSTRATION. Premièrement, il suffit de montrer que la fonction

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp(Nty_{N,\mathbf{h}}(\sigma)) \quad (2.2.33)$$

vérifie les deux conditions du théorème de Gärtner-Ellis 2.1.4. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp(Nty_{N,\mathbf{h}}(\sigma)) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp\left(t \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i\right) \frac{1}{2^N} \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{\sigma_i \in \{-1,1\}} \frac{1}{2} \exp(th_i \sigma_i) \\ &= \prod_{i=1}^N \cosh(th_i), \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

et en prenant le logarithme de part et d'autre, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp(Nty_{N,\mathbf{h}}(\sigma)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \cosh(th_i) \\ &= \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Par le lemme 2.2.1 c), il en découle que la fonction  $\varphi(t) = \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]$  est différentiable. Nous concluons que la suite  $\{\mu_N\}$  vérifie un PGD de fonction de taux  $I$ .

Deuxièmement, par ce qui précède, nous évoquons le lemme de Varadhan 2.1.6.  $\square$

Le prochain lemme est le principe de contraction.

**Corollaire 2.2.5.** *Soit  $(\Sigma_N, \mathcal{F}_N, \mu_N)$  un espace de probabilité où  $\mu_N$  est la mesure uniforme sur l'hypercube  $\Sigma_N$ . Conditionnellement à  $\mathbf{h}$  de probabilité 1, la suite de mesures de probabilité  $\{\mu_N((y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}, y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}) \in \cdot)\}$  vérifie un PGD avec la fonction de taux*

$$I(y_1, y_2) = I_1(y_1) + I_1(y_2) \quad (2.2.36)$$

pour tout  $y_1, y_2 \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ .

De plus,  $\mu_N(y_{N,\mathbf{h}} \in \cdot)$  vérifie un PGD avec la fonction de taux

$$I(y) = \inf_{\substack{(y_1, y_2) \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = y}} I_1(y_1) + I_1(y_2). \quad (2.2.37)$$

DÉMONSTRATION. Cette démonstration imite celle du lemme précédent, puisque nous cherchons à montrer que la somme des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ,

$$\varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp\left(N \left\langle (t_1, t_2), (y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})) \right\rangle\right), \quad (2.2.38)$$

vérifie les deux conditions du théorème de Gärtner-Ellis 2.1.4. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp\left(N \left\langle (t_1, t_2), (y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})) \right\rangle\right) &= \sum_{\sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}} \exp\left(t_1 \sum_{i=1}^{N/2} h_i \sigma_i\right) \frac{1}{2^{N/2}} \\ &\quad \sum_{\sigma^{(2)} \in \Sigma_{N/2}} \exp\left(t_2 \sum_{i=N/2+1}^N h_i \sigma_i\right) \frac{1}{2^{N/2}} \\ &= \prod_{i=1}^{N/2} \cosh(t_1 h_i) \prod_{i=N/2+1}^N \cosh(t_2 h_i), \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \log \int_{\Sigma_N} d\mu_N(\sigma) \exp\left(N \left\langle (t_1, t_2), (y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})) \right\rangle\right) &= \frac{1}{2} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} \log \cosh(t_1 h_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{2}{N} \sum_{i=N/2+1}^N \log \cosh(t_2 h_i). \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

En prenant la limite de part et d'autre, nous obtenons

$$\varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2) = \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(2t_1 h_1)] + \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(2t_2 h_1)], \quad (2.2.41)$$

une fonction différentiable en vertu du lemme 2.2.1 c) appliqué à la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(2th_1)]$ . Nous concluons que la suite  $\{(\mu_N^{(1)}, \mu_N^{(2)})\}$  vérifie un PGD avec la fonction de taux suivant  $I(y_1, y_2)$  telle que

$$\begin{aligned} I(y_1, y_2) &= \sup_{y_1, y_2} \{ \langle (y_1, y_2), (t_1, t_2) \rangle - \varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_2) \} \\ &= \sup_{y_1} \{ y_1 t_1 - \varphi_1(t_1) \} + \sup_{y_2} \{ y_2 t_2 - \varphi_2(t_2) \} \\ &= I_1(y_1) + I_1(y_2). \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

Deuxièmement, par le principe de contraction 2.1.5, la suite  $\{(\mu_N^{(1)}, \mu_N^{(2)}) \circ T^{-1}\}$  telle que  $T(u, v) = u + v$ , vérifie un PGD avec la fonction de taux

$$J(y) = \inf_{\substack{(y_1, y_2): \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = y}} I_1(y_1) + I_1(y_2). \quad (2.2.43)$$

Or, nous avons

$$(\mu_N^{(1)}, \mu_N^{(2)}) \circ T^{-1}(E) = \mu_N \left( (y_{N, \mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), y_{N, \mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})) \in T^{-1}(E) \right) \quad (2.2.44)$$

et par la définition de la fonction  $T$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mu_N^{(1)}, \mu_N^{(2)}) \circ T^{-1}(E) &= \mu_N \left( \frac{1}{2} y_{N, \mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}) + \frac{1}{2} y_{N, \mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)}) \in E \right) \\ &= \mu_N(y_{N, \mathbf{h}}(\sigma) \in E). \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Nous concluons en invoquant le lemme 2.2.4 et l'unicité de la fonction de taux.  $\square$

### 2.3. APPLICATION DU PGD AUX EXTRÊMES DU MODÈLE CMA

Nous dérivons les résultats analogues aux théorèmes 1, 2 et 3 pour le modèle CMA. Cela permet d'illustrer l'utilité du principe de grandes géviations dans l'étude des valeurs extrêmes.

Le premier résultat montre que le premier ordre du maximum est  $\mathbf{E}|h_1|$ .

**Proposition 2.3.1.**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \max_{\sigma \in \Sigma_N} Y_N(\sigma) = \mathbf{E}|h_1|, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (2.3.1)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\omega \in B$ , où l'événement  $B$  est défini au lemme 2.2.3. Pour tout  $\sigma \in \Sigma_N$ , nous avons

$$Y_N(\sigma)(\omega) \leq \sum_{i=1}^N |h_i(\omega)|, \quad (2.3.2)$$

où l'égalité à lieu lorsque  $\sigma_i = \text{sgn}(h_i(\omega))$ . Il en découle que

$$\max_{\sigma \in \Sigma_N} Y_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N |h_i(\omega)|. \quad (2.3.3)$$

Par la définition de l'événement  $B$ , nous obtenons la limite (2.3.1).  $\square$

Le second résultat établit l'entropie du modèle.

**Proposition 2.3.2.** *Pour tout  $y \in [0, \mathbf{E}|h_1|]$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \# \{ \sigma \in \Sigma_N \mid Y_N(\sigma) \geq Ny \} = \log 2 - I(y), \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (2.3.4)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $y \in [0, \mathbf{E}|h_1|]$  et fixons  $\omega \in B$ . Par le lemme 2.2.4, sachant que la suite de mesures de probabilité  $\{ \mu_N(y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) \in \cdot) \}$  vérifie un PGD, nous obtenons

$$\begin{aligned} - \inf_{u \in (y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u) &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mu_N(Y_N(\sigma) \geq Ny) \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mu_N(Y_N(\sigma) \geq Ny) \leq - \inf_{u \in [y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Par le lemme 2.2.2, la fonction  $I$  est strictement croissante sur  $[0, \mathbf{E}|h_1|]$ , ce qui implique que  $\inf_{u \in [y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u) = I(y)$ . Il suffit donc de montrer que  $\inf_{u \in (y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u) = I(y)$ , car alors nous aurons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mu_N(Y_N(\sigma) \geq Ny) = -I(y), \quad (2.3.6)$$

ce qui est équivalent à (2.3.4).

Par 2.2.2 f),  $I$  est continue sur  $[-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ , d'où il en découle qu'il existe  $v > y$  tel que  $I(v) < I(y) + \varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$  fixé. Donc, nous obtenons

$$\inf_{u \in (y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u) < I(y) + \varepsilon, \quad (2.3.7)$$

et puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, nous avons

$$I(y) \leq \inf_{u \in (y, \mathbf{E}|h_1|]} I(u) \leq I(y). \quad (2.3.8)$$

$\square$

Le dernier résultat porte sur l'énergie libre du modèle CMA.

**Proposition 2.3.3.** *Lorsque  $\beta > 0$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta Y_N(\sigma)) = \log 2 + \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)], \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (2.3.9)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\beta > 0$  et fixons  $\omega \in B$ . Nous avons

$$\frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta Y_N(\sigma)) = \log 2 + \mu_N(\exp(N\beta y_{N,\mathbf{h}}(\sigma))), \quad (2.3.10)$$

où  $y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) = \frac{1}{N} Y_N(\sigma)$  est la densité du champ magnétique aléatoire. En invoquant le lemme 2.2.4, avec la fonction continue et bornée  $F : [-\mathbf{E}|h_1| - 1, \mathbf{E}|h_1| + 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F(y) = \beta y$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta Y_N(\sigma)) &= \log 2 + \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \{\beta y - I(y)\} \\ &= \log 2 + \mathbf{E} [\log \cosh(th_1)], \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

où la dernière égalité est une conséquence des lemmes 2.2.2 et 2.1.2 d).  $\square$

Remarquons que l'énergie libre du modèle CMA s'obtient par un calcul direct étant donné que la suite  $\mathbf{h} = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes. Nous avons préféré utiliser les résultats de la section précédente.

Considérons l'exemple où la suite de variables aléatoires  $\{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  est telle que  $\mathbf{P}(h_1 = 1) = \mathbf{P}(h_1 = -1) = \frac{1}{2}$ . Par les propositions 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3, nous obtenons que le premier ordre du maximum est 1, l'entropie est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \# \{\sigma \mid Y_N(\sigma) \geq Ny\} = \begin{cases} -\frac{y+1}{2} \log\left(\frac{y+1}{2}\right) - \left(\frac{1-y}{2}\right) \log\left(\frac{1-y}{2}\right) & , y \in [-1, 1], \\ -\infty & , \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

(voir la figure 2.2), et l'énergie libre est donnée par la formule

$$f(\beta) = \beta + \log(1 + e^{-2\beta}) \quad (2.3.13)$$

lorque  $\beta > 0$  (voir la figure 2.3).

MODÈLE CMA

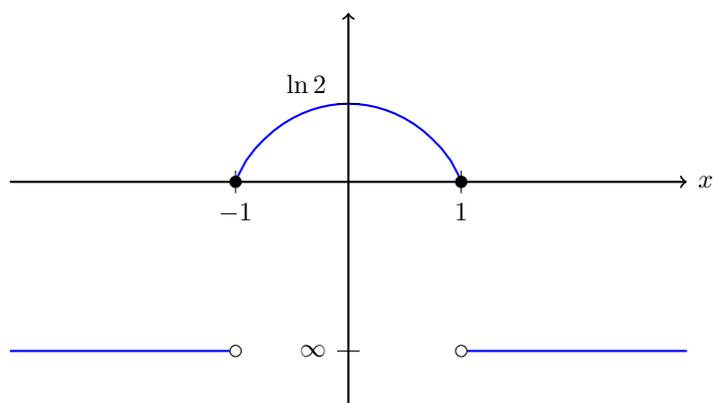


FIGURE 2.2. L'entropie du modèle CMA lorsque  $\mathbf{P}(h_1 = 1) = \mathbf{P}(h_1 = -1) = \frac{1}{2}$ .

MODÈLE CMA

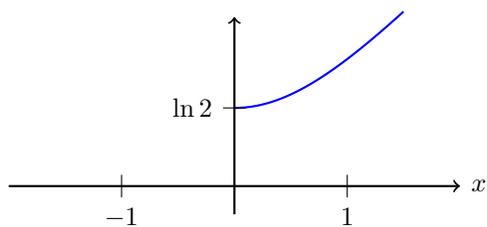


FIGURE 2.3. L'énergie libre du modèle CMA où  $\mathbf{P}(h_1 = 1) = \mathbf{P}(h_1 = -1) = \frac{1}{2}$ .



# Chapitre 3

---

## LE MODÈLE GREM

Suite au modèle REM défini dans [13, 14], B. Derrida renchérit sur ce dernier en proposant dans [15] le modèle à énergies aléatoires généralisé (GREM) qui, tenant compte des corrélations présentes entre les énergies des paires de configurations, se rapproche du modèle SK présenté dans [29], le modèle de verre de spins cible. Le modèle GREM est étudié rigoureusement pour la première fois par D. Capocaccia, M. Cassandro et P. Picco dans [8] où ils établissent la formule de l'énergie libre. Par la suite, A. Bovier et I. Kurkova calculent et démontrent dans [7] le processus ponctuel extrémal de ce dernier. Quant au maximum et à l'entropie, les méthodes introduites par L.-P. Arguin et F. Ouimet dans [2] s'étendent à celui-ci et donnent les résultats escomptés. Nous présentons le modèle GREM afin de comparer les résultats homologues aux théorèmes 1, 2 et 3 de ce modèle, et en déduire l'action du CMA sur celui-ci. D'autre part, nous aurons recours à un résultat du modèle GREM pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

La section 3.1 présente la définition du modèle GREM et donne les résultats homologues aux théorèmes 1, 2 et 3. Nous comparons les résultats de la section précédente à ceux du modèle GREM avec CMA à la section 3.2.

### 3.1. LE MODÈLE GREM À DEUX NIVEAUX ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

Sans perte de généralité nous supposons que  $N$  est un entier positif pair. Nous considérons l'hamiltonien d'un système désordonné de spins formé d'une somme de deux termes,

$$H_N^{(\sigma,2)}(\sigma) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + X_N^{(2)}(\sigma) \quad (3.1.1)$$

pour toute configuration de spins  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) \in \Sigma_N = \{-1, 1\}^N$  avec la configuration partielle  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N/2})$ , où

$$\mathbf{X}_N^{(1)} = \{X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \mid \sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}\}, \quad \mathbf{X}_N^{(2)} = \{X_N^{(2)}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_N\} \quad (3.1.2)$$

sont des suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes et définies sur un espace

## LE MODÈLE GREM

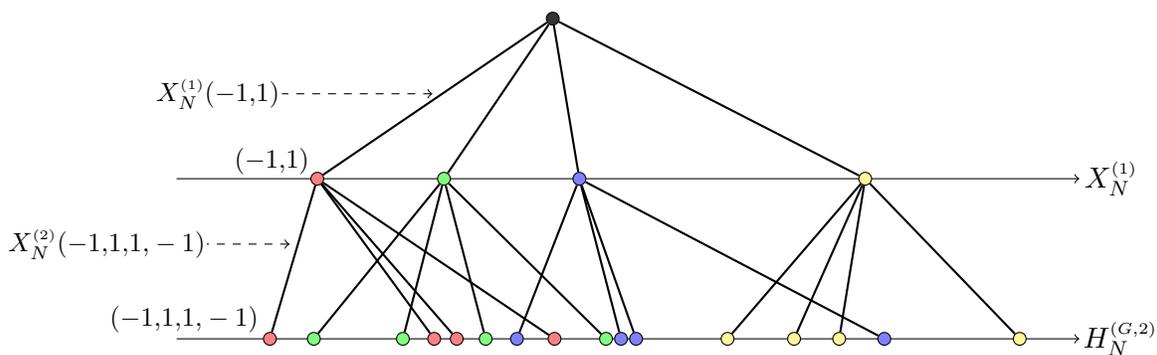


FIGURE 3.1. La suite  $\{H_N(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_N\}$  lorsque  $N = 4$ .

de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  telles que  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $X_N^{(2)}(\sigma)$  sont de lois gaussiennes  $\mathcal{N}(0, s_1^2 N)$  et  $\mathcal{N}(0, s_2^2 N)$  avec  $s_1^2 + s_2^2 = 1$ . Ce modèle présente une structure hiérarchique que l'on peut représenter sous forme d'arbre où la première génération possède  $2^{N/2}$  feuilles, indexées par les configurations partielles  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N/2})$ , qui se rattachent chacune à  $2^{N/2}$  autres feuilles de la seconde génération, indexées par les configurations  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ , pour un total de  $2^N$  feuilles. Voir la figure 3.1 où les couleurs des feuilles servent à identifier les liens de parenté.

Cette structure confère au modèle GREM une dépendance ou une indépendance entre les variables aléatoires  $H_N^{(G,2)}(\sigma)$  et  $H_N^{(G,2)}(\hat{\sigma})$  suivant que les configurations  $\sigma$  et  $\hat{\sigma}$  partagent les  $N/2$  premières coordonnées ou non. Les hamiltoniens associés aux configurations représentées par l'image de gauche et du centre la figure 3.2 sont dépendantes tandis que ceux associés à l'image de droite sont indépendantes car ils n'ont pas la même configuration partielle au premier niveau. Ce modèle de verre de spins, de covariance

$$\mathbf{E}\left[H_N^{(G,2)}(\sigma)H_N^{(G,2)}(\hat{\sigma})\right] = \begin{cases} 0 & , \text{si } \sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)}, \\ s_1^2 N & , \text{si } \sigma^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)} \text{ mais } \sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)}, \\ N & , \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

où  $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$ ,  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)})$  avec  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)} \in \Sigma_{N/2}$ , appartient à la classe des champs aléatoires corrélés au même titre que les modèles REM avec CMA et GREM avec CMA.

Nous énonçons maintenant les résultats principaux du modèle GREM. Le premier caractérise le maximum du modèle (voir [20]).

**Proposition 3.1.1.** *Pour le processus  $H_N^{(G,2)}$  défini à l'équation (3.1.1), nous avons*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N^{(G,2)}(\sigma) = E_{\max}^{(G,2)}, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement,} \quad (3.1.4)$$

MODÈLE GREM

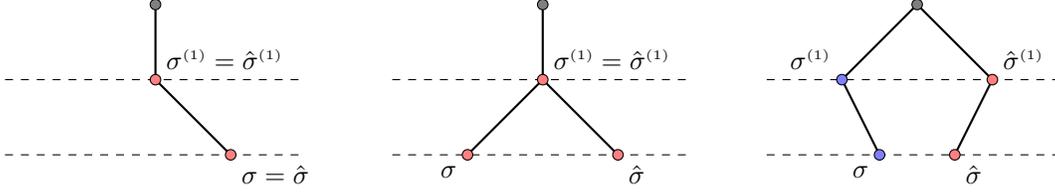


FIGURE 3.2. Dépendance et indépendance de  $H_N^{(G,2)}(\sigma)$  et  $H_N^{(G,2)}(\hat{\sigma})$ .

où

$$E_{\max}^{(G,2)} = \begin{cases} \sqrt{2 \log 2} & , s_1 \leq s_2, \\ (s_1 + s_2) \sqrt{\log 2} & , s_1 > s_2. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

La proposition suivante sera utile pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

**Proposition 3.1.2.** *Soient  $\delta > 0$  et  $M_N^{(G,2)} = \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N^{(G,2)}(\sigma)$ . Il existe  $C = C(\delta)$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( M_N^{(G,2)} > (1 + \delta) E_{\max}^{(G,2)} N \right) \leq e^{-CN} \quad (3.1.6)$$

pour  $N$  suffisamment grand.

Le second résultat porte sur l'entropie du modèle GREM (voir [20]).

**Proposition 3.1.3.** *Si  $0 < E < E_{\max}^{(G,2)}$ , alors  $\mathbf{P}$ -presque sûrement,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E) = \begin{cases} \log 2 - \frac{E^2}{2} & , 0 < E \leq \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}, \\ \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - s_1 \sqrt{\log 2})^2}{2s_2^2} & , \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1} \leq E < \sqrt{2 \log 2}. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Le dernier résultat précise l'énergie libre (voir [4]).

**Proposition 3.1.4.** *Soit  $\beta > 0$ . La fonction d'énergie libre est*

$$f(\beta) = f_1(\beta) + f_2(\beta), \quad (3.1.8)$$

où

$$f_i(\beta) = \left( \frac{\log 2}{2} + \frac{\beta^2}{2} s_i^2 \right) \mathbf{1}_{[0, \beta_{c,i}]}(\beta) + \beta \beta_{c,i} s_i^2 \mathbf{1}_{(\beta_{c,i}, \infty)}(\beta) \quad (3.1.9)$$

est la fonction d'énergie libre au niveau  $i$  avec la valeur critique

$$\beta_{c,i} = \begin{cases} \sqrt{2 \log 2} & , s_1 \leq s_2, \\ \frac{1}{s_i} \sqrt{\log 2} & , s_1 > s_2, \end{cases} \quad (3.1.10)$$

pour  $i = 1, 2$ .

### 3.2. COMPARAISON DES MODÈLES DE VERRE DE SPINS

Le maximum du modèle GREM et celui de cette thèse partagent la même forme dans la mesure où leurs valeurs varient en fonction des quantités  $s_1$  et  $s_2$ , et que chacune d'elle prend deux valeurs. Premièrement, remarquons qu'en imposant la condition  $h_1 = 0$  aux formules (1.2.19), (1.2.13) et (1.2.20), nous retrouvons celle du modèle GREM en (3.1.5). En considérant le cas  $s_1 \leq s_2$ , nous remarquons que l'énergie maximale du GREM,  $\sqrt{2 \log 2}$ , est identique à (1.1.1), l'énergie maximale du modèle REM sur  $2^N$  configurations. Lorsque  $s_1 > s_2$ , l'énergie maximale du GREM,  $(s_1 + s_2)\sqrt{\log 2}$ , est la somme du maximum du REM au premier niveau, sur  $2^{N/2}$  configurations, et du maximum d'un REM au second niveau, pour toute configuration partielle  $\sigma^{(1)}$  fixée, sur le même nombre de configurations. Nous en déduisons un fait important concernant le modèle REM et le modèle GREM : les corrélations entre les énergies des différentes configurations du modèle GREM n'affectent le maximum que lorsque la variance des variables au premier niveau,  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$ , excèdent celles au second niveau,  $X_N^{(2)}(\sigma)$ , pour tout  $\sigma^{(1)}$  fixée. En d'autres mots, l'ajout de corrélations n'est perceptible que dans le cas  $s_1 > s_2$ .

De façon similaire, l'entropie du modèle GREM et celle du GREM avec CMA se ressemblent en ce qu'elles changent de forme à partir d'une énergie critique. Notons que pour  $h_1 = 0$ , la formule (1.2.8) devient identique à (3.1.7) en raison de la proposition 4.2.5. Si  $s_1 \leq s_2$ , l'entropie du modèle GREM devient celle du REM,  $\log 2 - \frac{E^2}{2}$ , car l'énergie critique,  $\frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}$ , excédera toujours l'énergie maximale  $\sqrt{2 \log 2}$ . Par contre, dans le cas  $s_1 > s_2$ , l'entropie demeure celle du REM que pour de faibles énergies, c'est-à-dire pour des valeurs inférieures à l'énergie critique. En effet, à hautes énergies elle prend la forme

$$\frac{\log 2}{2} - \frac{(E - s_1 \sqrt{\log 2})^2}{2s_2^2}, \quad (3.2.1)$$

qui est l'entropie d'un REM au second niveau sur  $2^{N/2}$  configurations. Cette transition s'explique par le fait que lorsque  $E > \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}$ , seules les configurations dont les énergies associées au premier niveau atteignant l'énergie maximale au premier niveau,  $E_{\max}^{(1)} N$ , demeurent. Comme leur nombre est d'ordre 1, il ne reste que les  $2^{N/2}$  configurations au deuxième niveau rattachées à chacune d'elles.

Finalement, l'énergie libre du GREM se conforme elle aussi à celle du GREM avec CMA pour des raisons similaires à celles énoncées plus haut. En substituant  $h_1$  par 0 dans les formules (1.2.15), (1.2.16) et (1.2.17), nous obtenons (3.1.8), (3.1.9) et (3.1.10). Lorsque  $s_1 \leq s_2$ , l'énergie libre est identique à l'énergie libre du REM (1.1.6). Dans ce cas, la transition de phase a lieu à  $\beta = \sqrt{2 \log 2}$ , puisque cette valeur correspond à l'énergie maximale du

modèle au-delà de laquelle il n'existe aucune configuration avec une telle énergie associée. Pour le cas  $s_1 > s_2$ , nous obtenons la formule

$$f(\beta) = \begin{cases} \log 2 + \frac{\beta^2}{2} & , 0 < \beta \leq \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}, \\ \beta s_1 \sqrt{\log 2} + \frac{\sqrt{\log 2}}{2} + \frac{s_2^2 \beta^2}{2} & , \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1} \leq \beta \leq \frac{\sqrt{\log 2}}{s_2}, \\ \beta(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2} & , \beta \geq \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

qui présente deux transitions de phase. La première transition se produit lorsque  $\beta = \frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}$  et correspond au premier niveau atteignant l'énergie maximale, c'est-à-dire lorsque l'énergie totale du système atteint l'énergie critique,  $\frac{\sqrt{\log 2}}{s_1}$ . Comme nous avons expliqué plus haut, l'énergie libre est essentiellement celle d'un REM au second niveau sur  $2^{N/2}$  configurations. Lorsque  $\beta = \frac{\sqrt{\log 2}}{s_2}$ , le système passe à travers une seconde transition de phase où celui-ci n'a plus de configuration puisque l'énergie du système atteint l'énergie maximale, et donc le système fige.

Nous concluons que l'ajout d'un CMA au modèle GREM ne change par le comportement général des statistiques des valeurs extrêmes, mais modifie plutôt les valeurs où ont lieu les transitions.



# Chapitre 4

---

## LE MODÈLE GREM À DEUX NIVEAUX JUMELÉ AU CHAMP MAGNÉTIQUE ALÉATOIRE

Le modèle GREM à deux niveaux,  $H_N^{(G,2)}$ , jumelé au champ magnétique aléatoire,  $Y_N$ , comporte deux types de corrélation : celle intrinsèque au modèle GREM, présentée au chapitre 3, et celle provenant du champ magnétique aléatoire exposée à la section 2.3. Il présente un intérêt à la fois pour la théorie des valeurs extrêmes et pour l'étude des modèles de verre de spins. Pour le premier, son attrait découle de la nature même des variables aléatoires qui le caractérisent : dépendantes et de distributions distinctes. Pour le second, il se résume à comprendre l'effet d'un champ magnétique aléatoire appliqué au modèle GREM sur l'énergie maximale et sa partition (énergie provenant des deux niveaux du GREM et énergie du champ magnétique aléatoire), l'entropie et la fonction de l'énergie libre de celui-ci, dans le cadre d'un modèle de verre de spins soluble.

Ce chapitre se divise en quatre sections. La section 4.1 rappelle le modèle GREM jumelé au champ magnétique aléatoire. La fonction d'entropie du modèle ainsi que ses propriétés, qui seront essentielles pour établir les théorèmes 1, 2 et 3, figurent à la section 4.2. La section 4.3 présente la démonstration du théorème 1, et la section 4.4, celle du théorème 2. Nous terminons ce chapitre avec la section 4.5 qui établit la fonction d'énergie libre du théorème 3.

### 4.1. LE MODÈLE À DEUX NIVEAUX

Sans perte de généralité nous supposons que  $N$  est un entier positif pair. Nous rappelons que l'hamiltonien du système désordonné du modèle GREM avec CMA, défini en (1.2.1), est

$$H_N(\sigma) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + X_N^{(2)}(\sigma) + Y_N(\sigma), \quad (4.1.1)$$

où

$$Y_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i \quad (4.1.2)$$

est le champ magnétique aléatoire, avec  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma_N$  et  $\sigma^{(1)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{N/2}) \in \Sigma_{N/2}$ , tel que

$$\mathbf{X}_N^{(1)} = \left\{ X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \mid \sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2} \right\}, \quad \mathbf{X}_N^{(2)} = \left\{ X_N^{(2)}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma_N \right\}, \quad \mathbf{h} = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad (4.1.3)$$

sont des suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes et définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  avec l'espérance mathématique notée  $\mathbf{E}$ . De plus, pour toutes configurations  $\sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}$  et  $\sigma \in \Sigma_N$ , nous supposons que  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $X_N^{(2)}(\sigma)$  sont de loi gaussienne centrée de variances  $s_1^2 N$  et  $s_2^2 N$ , respectivement, avec  $s_1^2 + s_2^2 = 1$ . Quant à  $\mathbf{h}$ , où les  $h_i$  sont de même loi, nous imposons la condition  $\mathbf{E}[|h_1|^3] < \infty$  pour s'assurer que la densité du champ magnétique  $y_{N, \mathbf{h}}(\sigma) = \frac{1}{N} Y_N(\sigma)$  vérifie un principe de grandes déviations.

## 4.2. LA FONCTION D'ENTROPIE

Nous rappelons que la fonction d'entropie du modèle GREM avec CMA, définie à l'équation (1.2.8), est

$$S(E) = \sup_{E_1 \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]} \{S_1(E_1) + S_2(E - E_1)\}, \quad (4.2.1)$$

où  $S_1(E_1)$  et  $S_2(E_2)$  sont les fonctions d'entropie du modèle REM avec CMA sur  $2^{N/2}$  configurations partielles et dont les variances des variables gaussiennes sont respectivement  $s_1^2 N$  et  $s_2^2 N$ . Cette fonction est bien définie puisque le membre de droite possède une unique solution pour tout  $E \in \mathbb{R}$ . En effet, comme nous le verrons au lemme 4.2.1, la fonction  $E_1 \mapsto S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$  est continue et strictement concave, et donc elle atteint un maximum pour une unique valeur  $E_1^*$  appartenant à l'ensemble compact  $[E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]$ .

Afin d'établir les propriétés de la fonction  $S(E)$ , présentées à la proposition 4.2.5, nous aurons recours au lemme suivant qui en quelque sorte caractérise la fonction d'entropie du modèle REM avec CMA.

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $S_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction d'entropie entre les niveau  $i - 1$  et  $i$  telle que*

$$S_i(E) = \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{\left(E - \frac{1}{2}y\right)^2}{2s_i} - I_1(y) \right\} \quad (4.2.2)$$

pour  $i = 1, 2$ , où  $I_1(y)$  est la fonction de taux de la densité du champ magnétique partiel  $y_{N, \mathbf{h}}^{(i)}(\sigma^{(i)})$  définie à l'équation (1.3.6). Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

a)  $S_i$  est une fonction paire ;

b) il existe une fonction  $y_i^* : \mathbb{R} \rightarrow [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$  telle que

$$S_i(E) = \frac{\log 2}{2} - \frac{\left(E - \frac{1}{2}y_i^*(E)\right)^2}{2s_i} - I_1(y_i^*(E)) \quad (4.2.3)$$

et  $y_i^*(E) = 0$  si et seulement si  $E = 0$  ;

c) la fonction  $y_i^*$  est différentiable d'ordre 2 et strictement croissante avec

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial E} = \frac{2}{1 + 4s_i^2 I_1''(y_i^*(E))}; \quad (4.2.4)$$

d)  $S_i$  est différentiable d'ordre 3 et sa dérivée première est

$$S_i'(E) = -2I_1'(y_i^*(E)); \quad (4.2.5)$$

e)  $S_i(E)$  est strictement concave,  $S_i''(E) < 0$  ;

f) pour tout  $E > 0$ , la fonction d'entropie est décroissante,  $S_i'(E) < 0$  ;

g) l'énergie minimale,  $E_{\min}^{(i)}$ , et l'énergie maximale,  $E_{\max}^{(i)}$ , sont les seules valeurs qui annulent la fonction  $S_i(E)$  et vérifient  $E_{\min}^{(i)} = -E_{\max}^{(i)}$  ;

h) la fonction  $y_i^*$ , vue comme une fonction du paramètre  $s_i$ , est différentiable par rapport à  $s_i$ , et sa dérivée partielle est donnée par la formule

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial s_i} = -\frac{8s_i I_1'(y_i^*(E))}{1 + 4s_i^2 I_1''(y_i^*(E))}; \quad (4.2.6)$$

i) l'énergie maximale  $E_{\max}^{(1)}$ , vue comme une fonction du paramètre  $s_1$ , est strictement croissante et sa dérivée est

$$\frac{dE_{\max}^{(1)}}{ds_1} = 2s_1 I_1'(y_i^*(E_{\max}^{(1)})). \quad (4.2.7)$$

DÉMONSTRATION. a) Soit  $E \in \mathbb{R}$ . Puisque  $I_1$ , définie à (1.2.11), est une fonction paire, et par le lemme 2.2.2 a) appliqué à la fonction  $\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]$ , nous avons

$$\begin{aligned} S_i(-E) &= \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{(-E - \frac{1}{2}y)^2}{2s_i} - I_1(y) \right\} \\ &= \sup_{-y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{2}(-y))^2}{2s_i} - I_1(-y) \right\} \\ &= \sup_{z \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{2}z)^2}{2s_i} - I_1(z) \right\} \\ &= S_i(E). \end{aligned}$$

b) Par le lemme 2.2.2 d), la fonction  $y \mapsto \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{2}y)^2}{2s_i^2} - I_1(y)$  est strictement concave, d'où il existe une unique valeur  $y_i^*(E)$  qui maximise cette fonction sur le compact  $[-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ . La fonction  $y_i^* : \mathbb{R} \rightarrow [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$  vérifie donc l'équation (4.2.3). De plus, la définition de  $S_i(0)$  donnée en (4.2.2) implique

$$\frac{\log 2}{2} \geq S_i(0) \geq \frac{\log 2}{2} - \frac{(\frac{1}{2} \cdot 0)^2}{2s_i^2} - I_1(0) = \frac{\log 2}{2}, \quad (4.2.8)$$

et donc nous avons  $y_i^*(0) = 0$ . Remarquons que, comme  $y_i^*(E)$  est par définition un point critique de  $S_i(E)$  et  $I_1(y)$  est différentiable par le lemme 2.2.2 d), nous obtenons

$$\left. \frac{d}{dy} \left( \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{2}y)^2}{2s_i^2} - I_1(y) \right) \right|_{y_i^*(E)} = 0, \quad (4.2.9)$$

d'où  $y_i^*(E)$  est caractérisé par la condition stationnaire

$$f(y_i^*(E)) = E, \quad (4.2.10)$$

où  $f : [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction

$$f(y) = \frac{1}{2}y + 2s_i^2 I_1'(y). \quad (4.2.11)$$

Il s'ensuit que  $y_i^* = f^{-1}$ , car  $f$  est strictement croissante, par le lemme 2.2.2 d).

c) Puisque  $I_1'' > 0$ , par le lemme 2.2.2 d), la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ ,

$$f'(y) = 2s_i^2 I_1''(y) + \frac{1}{2} > 0. \quad (4.2.12)$$

Elle possède donc une réciproque strictement croissante et différentiable et nous devons avoir  $y_i^*(E) = f^{-1}(y_i^*(E))$  telle que

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial E} = \frac{1}{f'(y_i^*(E))} = \frac{2}{1 + 4s_i^2 I_1''(y_i^*(E))}. \quad (4.2.13)$$

Comme  $I_1$  est différentiable d'ordre 3, par le lemme 2.2.2 d), alors  $y_i^*$  l'est d'ordre 2.

d) Nous avons

$$\begin{aligned} S_i'(E) &= \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\log 2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{2}y_i^*(E))^2}{2s_i} - I_1(y_i^*(E)) \right) \\ &= -\frac{1}{s_i^2} \left( E - \frac{y_i^*(E)}{2} \right) + \left( E - \frac{1}{2}y_i^*(E) - 2s_i I_1'(y_i^*(E)) \right) \frac{y_i^{*'}(E)}{2s_i} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

et par l'équation (4.2.10), le second terme de la somme s'annule, ce qui donne

$$S'_i(E) = -\frac{1}{s_i^2} \left( E - \frac{y_i^*(E)}{2} \right). \quad (4.2.15)$$

En invoquant l'équation (4.2.10) à nouveau, nous obtenons la formule (4.2.5).

e) En dérivant  $S'_i(E)$  de nouveau, nous avons

$$S''_i(E) = -2I''_1(y_i^*(E)) \frac{\partial y_i^*}{\partial E}, \quad (4.2.16)$$

d'où il en découle que  $S'_i(E) < 0$  en raison du lemme 2.2.2 d) et de la partie (h) du présent lemme.

f) La fonction d'entropie  $S_i(E)$  atteint son unique maximum  $\frac{\log 2}{2}$  à  $E = 0$ , et donc  $S'_i(0) = 0$ . Comme  $S_i(E)$  est strictement concave, alors  $S'_i(E) < 0$  pour  $E > 0$ .

g) Nous avons montré que  $S_i(0) = \frac{\log 2}{2} > 0$ . Par le lemme 2.2.2 e), la fonction de taux  $I_1(y)$  est bornée sur l'intervalle  $[-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ , ce qui implique que pour  $E > 0$  suffisamment grand nous avons  $S_i(E) < 0$ . En invoquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $E_{\max}^{(i)} > 0$  tel que  $S_i(E_{\max}^{(i)}) = 0$ . De plus,  $E_{\max}^{(i)}$  est unique, car  $S_i(E)$  est strictement concave. Par la parité de  $S_i(E)$ ,  $E_{\min}^{(i)} = -E_{\max}^{(i)}$  tel que  $S_i(E_{\min}^{(i)}) = S_i(-E_{\max}^{(i)}) = 0$ .

h) Fixons  $E > 0$ . Lorsque

$$F(y, s_i) = 2s_i^2 I'_1(y) + \frac{1}{2}y - E, \quad (4.2.17)$$

alors, par l'équation (4.2.10), il s'ensuit que  $F(y_i^*(E), s_i) = 0$  où

$$\frac{\partial F}{\partial s_i} = 4s_i I'_1(y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2s_i^2 I''_1(y) + \frac{1}{2} > 0. \quad (4.2.18)$$

L'équation (4.2.6) est une conséquence du théorème des fonctions implicites puisque

$$\frac{\partial y_i^*}{\partial s_i} = -\frac{\partial F / \partial s_i |_{y=y_i^*(E)}}{\partial F / \partial y |_{y=y_i^*(E)}} = -\frac{8s_i I'_1(y_i^*(E))}{1 + 4s_i^2 I''_1(y_i^*(E))}. \quad (4.2.19)$$

i) Considérons la fonction

$$G(E, s_1) = S_1(E), \quad (4.2.20)$$

où  $S_1(E)$  dépend à la fois de  $E$  et  $s_1$ . Alors  $G(E_{\max}^{(1)}, s_1) = 0$ , où  $E_{\max}^{(1)}$  est vue comme une fonction de  $s_1$ . Par l'équation (4.2.5), nous obtenons

$$\frac{\partial G}{\partial E} = -2I'_1(y_1^*(E)). \quad (4.2.21)$$

De plus, en dérivant de chaque coté de l'équation (4.2.3) par rapport à  $s_1$  et en factorisant les termes pondérés par  $\frac{\partial y_1^*}{\partial s_1}$ , nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s_1} &= \frac{1}{2s_1^2} \left( E - \frac{1}{2}y_1^*(E) - 2s_1^2 I_1'(y_1^*(E)) \right) \frac{\partial y_1^*}{\partial s_1} + \frac{\left( E - \frac{1}{2}y_1^*(E) \right)^2}{s_1^3} \\ &= 4s_1 I_1'(y_1^*(E))^2,\end{aligned}\tag{4.2.22}$$

où la dernière égalité découle de l'identité (4.2.10) appliquée à chaque terme, ce qui annule le premier et donne la forme voulue au second. Notons que

$$\left. \frac{\partial G}{\partial s_1} \right|_{E=E_{\max}^{(1)}} = 4s_1 I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))^2 > 0,\tag{4.2.23}$$

car, par les lemmes 2.2.2 d), e) et 4.2.1 b), nous avons  $I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) > 0$ . Par conséquent, le théorème des fonctions implicites s'applique et nous avons

$$\frac{dE_{\max}^{(1)}}{ds_1} = - \frac{\partial G / \partial s_1 |_{E=E_{\max}^{(1)}}}{\partial G / \partial E |_{E=E_{\max}^{(1)}}} = 2s_1 I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})),\tag{4.2.24}$$

d'où il en découle que  $\frac{dE_{\max}^{(1)}}{ds_1} > 0$ .

□

Nous présentons maintenant le modèle REM avec CMA. L'hamiltonien de ce dernier est donné par

$$H_N^{(RC)}(\sigma) = X_N(\sigma) + Y_N(\sigma),\tag{4.2.25}$$

où  $\mathbf{X}_N = \{\sigma \in \Sigma_N \mid X_N(\sigma)\}$  et  $\mathbf{h} = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  sont des suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes telle que  $X_N(\sigma)$  suit un loi gaussienne centrée de variance  $N$ . La fonction d'entropie du modèle REM avec CMA est

$$S_{RC}(E) = \sup_{y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]} \left\{ \log 2 - \frac{(E-y)^2}{2} - I(y) \right\},\tag{4.2.26}$$

où

$$I(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{yt - \mathbf{E}[\log \cosh(th_1)]\}.\tag{4.2.27}$$

Celle-ci diffère de l'entropie (4.2.2) d'un facteur  $\frac{1}{2}$  pour le terme  $\log 2$  et ainsi que pour le terme  $y$  de l'expression  $-\frac{(E-y)^2}{2}$ , et d'un facteur  $s_i^2$  au dénominateur de cette même expression. Le premier facteur  $\frac{1}{2}$  fait référence au nombre de points considérés,  $2^{N/2}$  au lieu de  $2^N$  pour le modèle REM avec CMA. Le second facteur  $\frac{1}{2}$  se rapporte à la densité partielle  $y_{N,\mathbf{h}}^{(i)}(\sigma^{(i)})$ . Finalement, le facteur  $s_i^2$  est le coefficient de la variance des variables gaussiennes considérées,  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$ .

Le lemme suivant présente les propriétés de la fonction d'entropie du modèle REM avec CMA. Sa démonstration est identique à celle du lemme 4.2.1.

**Lemme 4.2.2.** *Nous avons :*

a)  $S_{RC}(0) = \log 2$ ;

b)  $S_{RC}(E)$  est une fonction paire ;

c) il existe une fonction  $y^*(E) : \mathbb{R} \rightarrow [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$  telle que

$$S_{RC}(E) = \log 2 - \frac{(E - y^*(E))^2}{2} - I(y^*(E)) \quad (4.2.28)$$

et  $y^*(E) = 0$  si et seulement si  $E = 0$  ;

d)  $S_{RC}$  est différentiable d'ordre 3 et sa dérivée première est

$$S'_{RC}(E) = -I'(y^*(E)) \quad (4.2.29)$$

avec

$$E - y^*(E) - I'(y^*(E)) = 0; \quad (4.2.30)$$

e)  $S''_{RC} < 0$  et  $S_{RC}$  atteint son maximum  $\log 2$  uniquement à  $E = 0$  ;

f) L'énergie minimum,  $E_{\min}^{(RC)}$ , et l'énergie maximum,  $E_{\max}^{(RC)}$ , sont les seules valeurs qui annulent la fonction  $S_{RC}$ .

Les deux propositions suivantes facilitent la démonstration du théorème 1 (nous référons à [1] pour leurs démonstrations puisque  $H_N^{(1)}$  diffère de peu de l'hamiltonien d'un REM avec CMA).

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $\delta > 1$ . Il existe  $C = C(\delta)$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}} H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > \delta E_{\max}^{(1)} N \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.2.31)$$

pour  $N$  suffisamment grand.

**Proposition 4.2.4.** *Soit  $0 < \delta < 1$ . Il existe  $C = C(\delta)$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}} H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) < \delta E_{\max}^{(1)} N \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.2.32)$$

pour  $N$  suffisamment grand.

La proposition 4.2.3 servira lors de la démonstration de la proposition 4.3.1, plus spécifiquement pour le cas  $s_1 > s_2$ . La proposition 4.2.4 sera utile lors de la démonstration de la proposition 4.3.2, lorsque nous considérerons le cas  $s_1 > s_2$ . Notons que des résultats plus faibles auraient suffi, mais nous avons préféré cette approche.

La proposition qui suit caractérise la fonction d'entropie  $S(E)$  dont la démonstration repose essentiellement sur le théorème des fonctions implicites.

**Proposition 4.2.5.** *La fonction d'entropie  $S : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \log 2]$ , définie à l'équation (4.2.1), est une fonction paire donnée par la formule*

$$S(E) = \begin{cases} S_{RC}(E) & , |E| \leq E_c, \\ S_2(E - E_{\max}^{(1)}) & , |E| \geq E_c, \end{cases} \quad (4.2.33)$$

où  $S_{RC}$  est la fonction d'entropie du modèle REM avec CMA, définie à l'équation (4.2.28),  $E_{\max}^{(1)}$  est l'énergie maximale au premier niveau, définie au lemme 4.2.1 g), et  $E_c$  est l'énergie critique vérifiant l'équation

$$E_c = 2I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) + y_1^*(E_{\max}^{(1)}) \quad (4.2.34)$$

tel que  $y_i^*$  est la valeur qui maximise la fonction d'entropie  $S_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Il existe exactement une valeur  $E_{\max} > 0$  telle que  $S(E_{\max}) = 0$ , où

$$E_{\max} = E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)} \quad (4.2.35)$$

lorsque  $s_1 > s_2$ .

De plus, l'énergie critique  $E_c$  vérifie les conditions

$$\begin{cases} E_c > E_{\max} & , s_1 < s_2, \\ E_c = E_{\max} & , s_1 = s_2, \\ E_c < E_{\max} & , s_1 > s_2, \end{cases} \quad (4.2.36)$$

ainsi que

$$E_c > E_{\max}^{(1)}. \quad (4.2.37)$$

La fonction d'entropie  $S(E)$  révèle un phénomène caractéristique du modèle GREM avec CMA : à faible énergie l'entropie du modèle correspond exactement à celle du REM avec CMA comme s'il n'y avait qu'un niveau de  $2^N$  configurations, tandis qu'à une énergie supérieure à l'énergie critique  $E_c$ , l'entropie se ramène à celle d'un REM jumelé au CMA sur  $2^{N/2}$  configurations, le premier niveau ayant atteint l'énergie maximal  $E_{\max}^{(1)}$ .

La formule (4.2.34) de l'énergie critique  $E_c$  laisse entrevoir la décomposition de l'énergie critique en énergie provenant du GREM, à savoir  $I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))$  au premier niveau et  $I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))$  au second niveau, et celle propre au CMA,  $y_1^*(E_{\max}^{(1)})$ . Cette décomposition familière nous rappelle celle des énergies maximales  $E_{\max}^{(1)}$  et  $E_{\max}^{(2)}$ , donnée à l'équation (1.2.20).

La démonstration de la proposition 4.2.5 se réalisera en sept étapes : 1) la parité de la fonction  $S(E)$ ; 2) l'existence de l'énergie critique  $E_c$  et sa décomposition (4.2.34); 3) l'inégalité (4.2.37); 4) la caractérisation (4.2.33); 5) l'existence du maximum  $E_{\max}$ ; 6) les conditions (4.2.36); et 7) la décomposition (4.2.35) de l'énergie maximale  $E_{\max}$  pour  $s_1 > s_2$ .

**DÉMONSTRATION. Étape 1 :**

Premièrement, la fonction  $S(E)$  est paire étant donnée que, par le lemme 4.2.1 a),  $S_1(E_1)$  et  $S_2(E_2)$  partagent cette même propriété. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
S(-E) &= \sup_{E_1 \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]} \{S_1(E_1) + S_2(-E - E_1)\} & (4.2.38) \\
&= \sup_{-E_1 \in [-E_{\max}^{(1)}, -E_{\min}^{(1)}]} \{S_1(-E_1) + S_2(E - (-E_1))\} \\
&= \sup_{A \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]} \{S_1(A) + S_2(E - A)\} \\
&= S(E).
\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $E \geq 0$ .

**Étape 2 :**

Nous allons montrer qu'à une énergie totale  $E$  correspond une unique énergie au premier niveau,  $\mathcal{E}_1(E)$ , pour laquelle  $S(E) = S_1(\mathcal{E}_1(E)) + S_2(E - \mathcal{E}_1(E))$  et qui croît lorsque l'énergie totale augmente. Il en résulte qu'il y aura une énergie critique,  $E_c$ , pour laquelle  $\mathcal{E}_1(E) = E_{\max}^{(1)}$  et telle que  $S(E) = S_2(E - E_{\max}^{(1)})$  pour toute énergie totale  $E$  qui dépasse  $E_c$ , puisque  $S_1(E_{\max}^{(1)}) = 0$ .

Par le lemme 4.2.1 d) et l'équation (4.2.10), la fonction  $E_1 \mapsto S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$  est différentiable et sa dérivée est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial E_1} (S_1(E_1) + S_2(E - E_1)) &= S_1'(E_1) - S_2'(E - E_1) & (4.2.39) \\
&= -\frac{E_1}{s_1^2} + \frac{y_1^*(E_1)}{2s_1^2} - \left( -\frac{E - E_1}{s_2^2} - \frac{y_2^*(E - E_1)}{2s_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{s_1^2 s_2^2} g(E, E_1),
\end{aligned}$$

où

$$g(E, E_1) = s_1^2 E - E_1 + s_2^2 \frac{y_1^*(E_1)}{2} - s_1^2 \frac{y_2^*(E - E_1)}{2}. \quad (4.2.40)$$

De plus, nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial E_1} < 0, \quad (4.2.41)$$

car par le lemme 4.2.1 e), la fonction  $E_1 \mapsto S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$  est strictement concave, puisque

$$\frac{\partial^2}{\partial E_1^2}(S_1(E_1) + S_2(E - E_1)) = S_1''(E_1) + S_2''(E - E_1) < 0. \quad (4.2.42)$$

Les quantités  $y_1^*(E_1)$  et  $y_2^*(E - E_1)$  étant bornées, nous pouvons exhiber des valeurs  $A < B$  telles que  $g(E, A) < 0 < g(E, B)$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une fonction  $\mathcal{E}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie l'équation

$$g(E, \mathcal{E}_1(E)) = 0, \quad (4.2.43)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_1(E) = s_1^2 E - s_2^2 \frac{y_1^*(\mathcal{E}_1(E))}{2} + s_1^2 \frac{y_2^*(E - \mathcal{E}_1(E))}{2}. \quad (4.2.44)$$

Notons que  $\mathcal{E}_1$  n'est pas une fonction bornée.

En invoquant le théorème des fonctions implicites, nous obtenons, à l'aide de la formule (4.2.4), la dérivée de  $\mathcal{E}_1(E)$ , à savoir

$$\mathcal{E}_1'(E) = \frac{a}{a + b} \quad (4.2.45)$$

où

$$a = s_1^2 - \frac{s_1^2}{1 + 4s_2^2 I_1''(y_2^*(E - E_1))}, \quad b = s_2^2 - \frac{s_2^2}{1 + 4s_1^2 I_1''(y_1^*(E_1))}. \quad (4.2.46)$$

Par l'inégalité (2.2.11),  $a > 0$  et  $b > 0$ , ce qui implique

$$0 < \mathcal{E}_1'(E) < 1. \quad (4.2.47)$$

Il en résulte que  $\mathcal{E}_1(E)$  est strictement croissante, et donc injective.

Notons que  $\mathcal{E}_1(E)$  ne s'annule que lorsque  $E = 0$ . Pour montrer cela, il suffit de voir que  $\mathcal{E}_1(0) = 0$ . Par (4.2.40), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= g(0, \mathcal{E}_1(0)) \\ &= -\mathcal{E}_1(0) + s_2^2 \frac{y_1^*(\mathcal{E}_1(0))}{2} - s_1^2 \frac{y_2^*(-\mathcal{E}_1(0))}{2} \\ \mathcal{E}_1(0) &= s_2^2 \frac{y_1^*(\mathcal{E}_1(0))}{2} - s_1^2 \frac{y_2^*(-\mathcal{E}_1(0))}{2}, \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

et alors il faut trouver les points fixes de la fonction  $f(t) = s_2^2 \frac{y_1^*(t)}{2} - s_1^2 \frac{y_2^*(-t)}{2}$ . Par le lemme 4.2.1 b),  $f(0) = 0$ . Supposons qu'il existe un point  $t > 0$  tel que  $f(t) = t$ . Alors, par le théorème des accroissements finis, il existerait  $\nu$  avec  $f'(\nu) = 1$ , mais, par 4.2.1 c),

(2.2.11) et (4.2.46), nous aurions

$$f'(t) = (s_1^2 - a) + (s_2^2 - b) = 1 - (a + b) < 1, \quad (4.2.49)$$

ce qui est impossible.

L'inégalité (4.2.47) et l'équation  $\mathcal{E}_1(0) = 0$  impliquent

$$0 < \mathcal{E}_1(E) < E \quad (4.2.50)$$

lorsque  $E > 0$ .

Par l'équation (4.2.39), la valeur  $\mathcal{E}_1(E)$  maximise la fonction  $E_1 \mapsto S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$ , c'est-à-dire

$$S(E) = S_1(\mathcal{E}_1(E)) + S_2(E - \mathcal{E}_1(E)) \quad (4.2.51)$$

où  $\mathcal{E}_1(E) \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]$ . Puisque  $\mathcal{E}_1(E)$  est strictement croissante et non bornée, il y a une valeur  $E_c > 0$  telle que

$$\mathcal{E}_1(E_c) = E_{\max}^{(1)}, \quad (4.2.52)$$

c'est-à-dire

$$E_c = \frac{E_{\max}^{(1)}}{s_1^2} + \frac{1}{2} \left[ y_2^*(E_c - E_{\max}^{(1)}) - \frac{s_2^2}{s_1^2} y_1^*(E_{\max}^{(1)}) \right]. \quad (4.2.53)$$

Par l'équation (4.2.10), nous avons les deux identités suivantes,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y_1^*(E_{\max}^{(1)}) = E_{\max}^{(1)} - 2s_1^2 I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})), \\ \frac{1}{2} y_2^*(E_c - E_{\max}^{(1)}) = E_c - E_{\max}^{(1)} - 2s_2^2 I_1'(y_2^*(E_c - E_{\max}^{(1)})). \end{cases} \quad (4.2.54)$$

En substituant celles-ci dans l'équation (4.2.53), nous obtenons

$$I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) = I_1'(y_2^*(E_c - E_{\max}^{(1)})), \quad (4.2.55)$$

et donc

$$y_1^*(E_{\max}^{(1)}) = y_2^*(E_c - E_{\max}^{(1)}), \quad (4.2.56)$$

car, par l'équation (2.2.11), la dérivée  $I_1'$  est injective. À l'aide de cette égalité et de l'équation (4.2.53), nous obtenons

$$E_c = \frac{E_{\max}^{(1)}}{s_1^2} + \left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2}\right) \frac{y_1^*(E_{\max}^{(1)})}{2}. \quad (4.2.57)$$

L'équation (4.2.34) s'obtient en remplaçant l'énergie maximale au premier niveau  $E_{\max}^{(1)}$  par

son expression provenant de la première identité de (4.2.54).

**Étape 3 :**

Pour l'inégalité (4.2.37), nous remarquons qu'elle découle de l'inégalité (4.2.50) et de l'équation (4.2.52).

**Étape 4 :**

Nous allons établir la formule (4.2.33) en majorant le membre de gauche par celui de droite et vice versa, à l'aide du principe de contraction présenté au corollaire 2.2.5.

Par l'étape précédente et le lemme 4.2.1 g), nous obtenons

$$S(E) = S_1(\mathcal{E}_1(E)) + S_2(E - \mathcal{E}_1(E)) \quad (4.2.58)$$

lorsque  $0 \leq E \leq E_c$  et

$$\begin{aligned} S(E) &= S_1(\mathcal{E}_1(E_c)) + S_2(E - \mathcal{E}_1(E_c)) \\ &= S_2(E - E_{\max}^{(1)}) \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

lorsque  $E \geq E_c$ , car  $S_1(\mathcal{E}_1(E_c)) = S_1(E_{\max}^{(1)}) = 0$ .

Le cas  $E \geq E_c$  est déjà établi par l'équation (4.2.59).

Considérons le cas  $0 \leq E < E_c$ . Par le lemme 4.2.1 b), nous avons

$$S(E) = \log 2 - \frac{(\mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_1^*)^2}{2s_1^2} - \frac{(E - \mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_2^*)^2}{2s_1^2} - I_1(y_1^*) - I_1(y_2^*) \quad (4.2.60)$$

où  $y_1^* = y_1^*(\mathcal{E}_1(E))$  et  $y_2^* = y_2^*(E - \mathcal{E}_1(E))$ . Posons  $y = \frac{1}{2}y_1^* + \frac{1}{2}y_2^*$ . De l'inégalité

$$\frac{a^2}{2s_1^2} + \frac{(b-a)^2}{2s_2^2} \geq \frac{b^2}{2}, \quad (4.2.61)$$

il découle que

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_1^*)^2}{2s_1^2} + \frac{(E - \mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_2^*)^2}{2s_1^2} &= \frac{(\mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_1^*)^2}{2s_1^2} + \frac{\left((E - y) - (\mathcal{E}_1(E) - \frac{1}{2}y_2^*)\right)^2}{2s_1^2} \\ &\geq \frac{(E - y)^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

Alors, nous obtenons la borne supérieure

$$\begin{aligned} S(E) &= \log 2 - \frac{(E - y)^2}{2} - I_1(y_1^*) - I_1(y_2^*) \\ &\leq \log 2 - \frac{(E - y)^2}{2} - \inf_{\substack{(u_1, u_2) \\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = y}} \{I_1(u_1) + I_1(u_2)\}, \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

et par l'équation (2.2.37) du principe de contraction, nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned} S(E) &\leq \log 2 - \frac{(E-y)^2}{2} - I(y) \\ &\leq S_{RC}(E) \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

par l'équation (4.2.26).

Pour l'inégalité inverse, posons

$$E(y_1, y_2) = s_1^2 E + s_2^2 \frac{y_1}{2} - s_1^2 \frac{y_2}{2}, \quad (4.2.65)$$

où  $y_1, y_2 \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$ . Si  $y = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$  alors nous obtenons

$$E(y_1, y_2) - \frac{y_1}{2} = s_1^2 (E - y) \quad (4.2.66)$$

et

$$E - E(y_1, y_2) - \frac{y_2}{2} = s_2^2 (E - y). \quad (4.2.67)$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} S(E) &\geq S_1(E(y_1, y_2)) + S_2(E - E(y_1, y_2)) \\ &\geq \log 2 - \frac{(E-y)^2}{2} - I_1(y_1) - I_1(y_2), \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

et puisque  $(y_1, y_2)$  est arbitraire, nous avons

$$\begin{aligned} S(E) &\geq \log 2 - \frac{(E-y)^2}{2} - \inf_{\substack{(y_1, y_2) \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = y}} \{I_1(y_1) + I_1(y_2)\} \\ &= \log 2 - \frac{(E-y)^2}{2} - I(y) \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

par l'équation (2.2.37) du principe de contraction. Puisque  $y \in [-\mathbf{E}|h_1|, \mathbf{E}|h_1|]$  est arbitraire, nous en concluons que  $S(E) \geq S_{RC}(E)$ .

### Étape 5 :

Montrons l'existence et l'unicité de  $E_{\max}$ .

Le cas  $s_1 \leq s_2$  découle du lemme 4.2.2 f). Considérons  $s_1 > s_2$ . Par le lemme 4.2.2 a), nous avons  $S(0) = S_{RC}(0) = \log 2 > 0$ . De plus, lorsque  $E > E_c$  et  $E > E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)}$ , alors

$$S(E) = S_2(E - E_{\max}^{(1)}) < S_2(E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)} - E_{\max}^{(1)}) = S_2(E_{\max}^{(1)}) = 0 \quad (4.2.70)$$

par le lemme 4.2.1 g). De plus, par les équations (4.2.58) et (4.2.59),  $S(E)$  est une fonction continue. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires,  $S(\hat{E}) = 0$  pour un certain  $\hat{E} > 0$ .

Notons que pour  $0 \leq E < E_c$ , nous avons

$$S'(E) = S'_1(\mathcal{E}_1(E)) \mathcal{E}'_1(E) + S'_2(E - \mathcal{E}_1(E))(1 - \mathcal{E}'_1(E)) < 0 \quad (4.2.71)$$

par le lemme 4.2.1 d) et l'équation (4.2.47). De même, lorsque  $E > E_c$ , alors

$$S'(E) = S'_2(E - E_{\max}^{(1)}) \mathcal{E}'_1(E) < 0. \quad (4.2.72)$$

Par conséquent, nous avons que  $E_{\max} := \hat{E}$  est l'unique valeur positive telle que  $S(E_{\max}) = 0$ .

### Étape 6 :

Nous allons montrer les relations (4.2.36) qui existent entre  $E_c$  et  $E_{\max}$  en considérant  $E_c$  comme une fonction de  $s_1$  et en remarquant que

$$\begin{cases} E_c > E_{\max} & , 0 < s_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_c = E_{\max} & , s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ E_c < E_{\max} & , \frac{\sqrt{2}}{2} < s_1 < 1, \end{cases} \quad (4.2.73)$$

est équivalent à (4.2.36).

Soit  $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Il s'ensuit que la valeur  $x = 2E_{\max}^{(1)}$  vérifie l'équation (4.2.44) avec  $E = x$  et  $\mathcal{E}_1(E) = E_{\max}^{(1)}$ , et donc

$$x = 2E_{\max}^{(1)} + \frac{y_1^*(x - E_{\max}^{(1)})}{2} - \frac{y_1^*(E_{\max}^{(1)})}{2}, \quad (4.2.74)$$

car  $y_1^* = y_2^*$ . Puisque  $y_1^*$  est strictement croissante, par le lemme 4.2.1 c), cette équation ne possède qu'une seule solution, d'où nous avons

$$E_c = 2E_{\max}^{(1)}. \quad (4.2.75)$$

Étant donné que  $E_c > 0$  annule la fonction d'entropie, c'est-à-dire

$$S(E_c) = S_2(2E_{\max}^{(1)} - E_{\max}^{(1)}) = S_1(E_{\max}^{(1)}) = 0, \quad (4.2.76)$$

il en découle que  $E_c = E_{\max}$ .

À la lumière de ce qui précède et des relations (4.2.73), il suffit de montrer que

$$\frac{dE_c}{ds_1} < 0. \quad (4.2.77)$$

Par la décomposition (4.2.34) de l'énergie critique  $E_c$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{ds_1} &= 2I_1''(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) \frac{\partial y_1^*}{\partial s_1} \Big|_{E=E_{\max}^{(1)}} + \frac{\partial y_1^*}{\partial s_1} \Big|_{E=E_{\max}^{(1)}} \\ &= \left( 2I_1''(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) + 1 \right) \frac{\partial y_1^*}{\partial s_1} \Big|_{E=E_{\max}^{(1)}}, \end{aligned} \quad (4.2.78)$$

où

$$\frac{\partial y_1^*}{\partial s_1} \Big|_{E=E_{\max}^{(1)}} = - \frac{8s_i I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))}{1 + 4s_i^2 I_1''(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))} \quad (4.2.79)$$

selon l'équation (4.2.6), et donc

$$\frac{dE_c}{ds_1} = - \frac{8s_i \left( 2I_1''(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) + 1 \right)}{1 + 4s_i^2 I_1''(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))} I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})). \quad (4.2.80)$$

En invoquant le lemme 2.2.2 d), e), et le lemme 4.2.1 b) et c), nous obtenons que  $\frac{dE_c}{ds_1} < 0$ , car  $y_1^*(E_{\max}^{(1)}) > 0$  et  $I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) > 0$ .

**Étape 7 :**

Nous allons montrer la décomposition (4.2.35) de l'énergie maximale  $E_{\max}$ .

Soit  $s_1 > s_2$ . Par la formule (4.2.33) et l'étape précédente, nous avons  $E_{\max} > E_c$  et par conséquent

$$0 = S(E_{\max}) = S_2(E_{\max} - E_{\max}^{(1)}). \quad (4.2.81)$$

En vertu du lemme 4.2.1 g), nous obtenons  $E_{\max} - E_{\max}^{(1)} = E_{\max}^{(2)}$ . □

### 4.3. DÉMONSTRATION DU PREMIER ORDRE DU MAXIMUM (THÉORÈME 1)

L'objectif de cette section est d'établir le théorème 1 qui se démontre à l'aide des deux propositions suivantes.

**Proposition 4.3.1.** *Lorsque  $\delta > 1$ , il existe  $C = C(\delta)$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.3.1)$$

*pour  $N$  suffisamment grand.*

**Proposition 4.3.2.** *Lorsque  $0 < \delta < 1$ , il existe  $C = C(\delta)$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) < \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.3.2)$$

*pour  $N$  suffisamment grand.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Par les propositions 4.3.1 et 4.3.2, il s'ensuit que

$$\sum_{N \geq N_0} \mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) - E_{\max} \right| > \gamma \mid \mathbf{h} \right) \leq \sum_{N \geq N_0} e^{-CN} < \infty \quad (4.3.3)$$

pour  $N_0$  suffisamment grand. En invoquant le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons la convergence presque sûre, conditionnelle sachant  $\mathbf{h}$ , de  $\frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma)$  vers  $E_{\max}$ .  $\square$

### 4.3.1. Explications des démonstrations des propositions 4.3.1 et 4.3.2

Comme nous avons vu à la démonstration du théorème 1, la convergence  $\mathbf{P}$ -presque sûre du maximum normalisé,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) = E_{\max}, \quad (4.3.4)$$

s'obtient par une convergence en probabilité à un taux exponentiel. Nous cherchons donc une fonction  $T$  telle que  $T(\delta, E_{\max}) = C(\delta)$  dans les inégalités (4.3.1) et (4.3.2). En particulier, nous obtenons un résultat de grandes déviations associé à l'événement rare  $\{\max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N\}$ , c'est-à-dire

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbf{P} \left( \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h} \right) = -T(\delta, E_{\max}), \quad (4.3.5)$$

dont  $T$  est la fonction de taux.

Nous montrerons que

$$T(\delta, E_{\max}) = S(\delta E_{\max}), \quad (4.3.6)$$

où  $S(E)$  est la fonction d'entropie du présent modèle, définie à l'équation (1.2.8). En effet, par l'inégalité de Markov, nous obtiendrons

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h} \right) \leq \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathbf{P} (H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h}), \quad (4.3.7)$$

et par l'inégalité (1.3.13) de Paley-Zygmund, nous aurons

$$\mathbf{P} \left( \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) < \delta E_{\max} N \mid \mathbf{h} \right) \leq 1 - \frac{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N \mid \mathbf{h}]^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N^2 \mid \mathbf{h}]}, \quad (4.3.8)$$

pour une variable aléatoire  $\mathcal{N}_N$  bien choisie, ce qui fera apparaître le facteur  $2^N$ , le nombre de points au niveau  $N$ .

La clef pour établir les propositions 4.3.1 et 4.3.2 consiste à scinder la densité d'énergie magnétique  $y_{N,\mathbf{h}}(\sigma)$  en deux densités partielles,  $y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})$ , dont chacune vérifie un PGD.

### 4.3.2. Démonstration de la borne supérieure (Proposition 4.3.1)

Le lemme 4.3.3, servant à alléger la démonstration des proposition 4.3.1 et 4.4.1, s'avère essentielle pour démontrer le premier ordre du maximum ainsi que l'entropie du modèle GREM avec CMA. Sa démonstration repose entièrement sur le lemme 2.2.4 de Varadhan appliqué aux densités partielles  $y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})$ .

**Lemme 4.3.3.** *Soit  $A, B, E \in \mathbb{R}$  tels que  $A < B$ . Alors :*

i) si  $E > 0$ , alors

$$\sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > EN \mid \mathbf{h} \right) = \frac{\sqrt{N}}{s_1 \sqrt{2\pi}} \int_E^\infty du_1 \exp([S_1(u_1) + o_{u_1}(1)] N) \quad (4.3.9)$$

et

$$\sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\sigma) > EN \mid \mathbf{h} \right) = \frac{\sqrt{N}}{s_2^2 \sqrt{2\pi}} \int_E^\infty du_2 \exp([S_2(u_2) + o_{u_2}(1)] N); \quad (4.3.10)$$

ii) si  $0 < E < \sqrt{2 \log 2} + \mathbf{E}|h_1|$  alors pour  $\delta > 1$ , alors

$$2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \mathbf{P} \left( H_N(\sigma) > EN, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta \sqrt{2 \log 2} \mid \mathbf{h} \right) \\ \ll \exp(o(1)N) \int_E^{\delta(\sqrt{2 \log 2} + \mathbf{E}|h_1|)} dv \exp(S(v)N), \quad (4.3.11)$$

où  $u(N) \ll v(N)$  signifie que  $u(N) \leq v(N)$  pour tout  $N$  suffisamment grand ;

iii) si  $0 < E < (s_1 + s_2)\sqrt{\log 2} + \mathbf{E}|h_1|$ , alors

$$2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \mathbf{P} \left( H_N(\sigma) > EN, AN \leq H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \leq BN, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta(s_1 + s_2)\sqrt{\log 2N} \mid \mathbf{h} \right) \\ \ll \exp(o(1)N) \int_A^B du_1 \int_E^{\delta[(s_1+s_2)\sqrt{\log 2} + \mathbf{E}|h_1|]} du_2 \exp([S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1)] N). \quad (4.3.12)$$

DÉMONSTRATION. Nous ne présenterons que la démonstration de l'inégalité 4.3.12 puisque les trois autres s'obtiennent de façon similaire. Nous rappelons que

$$H_N(\sigma) = H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + H_N^{(2)}(\sigma)$$

où

$$H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + \frac{N}{2} y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), \quad H_N^{(2)}(\sigma) = X_N^{(2)}(\sigma) + \frac{N}{2} y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)}).$$

De plus,

$$H_N^{(G,2)}(\sigma) = X_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) + X_N^{(2)}(\sigma)$$

où  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et  $X_N^{(2)}(\sigma)$  sont indépendantes et de lois normales centrées avec les variances  $s_1^2 N$  et  $s_2^2 N$ , respectivement.

Soit

$$J = 2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \mathbf{P} \left( H_N(\sigma) > E, AN \leq H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \leq BN, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2N} \mid \mathbf{h} \right). \quad (4.3.13)$$

Nous obtenons la borne supérieure suivante, en conditionnant sur  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et en utilisant les densités de  $X_N^{(1)}(\sigma^{(1)})$  et de  $X_N^{(2)}(\sigma)$  :

$$\begin{aligned} J &\ll 2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \int_{\left(A - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})\right)^N}^{\left(B - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})\right)^N} dx_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{2s_1^2 N}\right) \\ &\quad \cdot \mathbf{P} \left( (\delta E_{\max} - y_{N,\mathbf{h}}(\sigma)) N - x_1 < X_N^{(2)}(\sigma) \leq \delta(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2N} - x_1 \mid \mathbf{h} \right) \\ &\leq 2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \int_{\left(A - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})\right)^N}^{\left(B - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})\right)^N} dx_1 \int_{(E - y_{N,\mathbf{h}}(\sigma))N - x_1}^{\delta(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2N} - x_1} dx_2 \exp\left(-\left[\frac{x_1^2}{2s_1^2 N} + \frac{x_2^2}{2s_2^2 N}\right]\right). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

En effectuant la transformation

$$\begin{cases} u_1 = \frac{x_1}{N} + \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)}), \\ u_2 = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N} + y_{N,\mathbf{h}}(\sigma), \end{cases} \quad (4.3.15)$$

et en remarquant que, par le théorème de la loi forte des grand nombres,

$$y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h_1| \leq \delta \mathbf{E}[|h_1|] \quad (4.3.16)$$

pour  $N$  suffisamment grand ( $\mathbf{P}$ -presque sûrement) et  $\delta > 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} J &\ll \exp(N \log 2) \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \int_A^B du_1 \int_E^{\delta[(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2} + \mathbf{E}[|h_1|]]} du_2 \\ &\quad \cdot \exp\left(-\left[\frac{\left(u_1 - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(1)}(\sigma^{(1)})\right)^2}{2s_1^2} + \frac{\left(u_2 - u_1 - \frac{1}{2}y_{N,\mathbf{h}}^{(2)}(\sigma^{(2)})\right)^2}{2s_2^2}\right] N\right). \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Par le théorème de Fubini et le lemme 2.2.4 de Varadhan appliqué aux fonctions bornées et continues  $F_1(a) = -\frac{(u_1 - a^2)}{2s_1^2}$  et  $F_2(a) = -\frac{(u_2 - u_1 - a^2)}{2s_2^2}$ , il en découle que

$$\begin{aligned} J &\ll \int_A^B du_1 \int_E^{\delta[(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2} + \mathbf{E}[|h_1|]]} du_2 \exp([S_1(u_1) - S_2(u_2 - u_1) + o_{u_1, u_2}(1)] N) \\ &\leq \exp(o(1)N) \int_A^B du_1 \int_E^{\delta[(s_1 + s_2) \sqrt{\log 2} + \mathbf{E}[|h_1|]]} du_2 \exp([S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1)] N), \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

étant donnée que  $o_{u_1, u_2}(1) \leq o(1)$  sur le compact  $[A, B] \times [E, \delta((s_1 + s_2)\sqrt{\log 2} + \mathbf{E}[|h_1|])]$ .  $\square$

La démonstration de la proposition 4.3.1 se divise en deux cas,  $s_1 \leq s_2$  et  $s_1 > s_2$ , où dans chacun d'eux la probabilité de la borne supérieure (4.3.1) est majorée par l'inégalité de Markov. Elle se poursuit par une application du lemme de Varadhan via le lemme 4.3.3, et se termine en invoquant le théorème des accroissements finis aux fonctions d'entropie  $S_1(E_1)$  et  $S_2(E_2)$ .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.1. Posons

$$M_N = \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma), \quad M_N^{(1)} = \max_{\sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2}} H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}), \quad M_N^{(G,2)} = \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N^{(G,2)}(\sigma), \quad (4.3.19)$$

où  $M_N^{(1)}$  est le maximum de l'hamiltonien au premier niveau et  $M_N^{(G,2)}$ , le maximum du modèle GREM à deux niveaux.

**Cas**  $s_1 \leq s_2$ :

Afin de se placer sur un compact, nous remarquons que la quantité  $\mathbf{P}(M_N > \delta E_{\max} N | \mathbf{h})$  est majorée par l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_N > \delta E_{\max} N | \mathbf{h}) &\leq \mathbf{P}\left(M_N > \delta E_{\max} N, M_N^{(G,2)} \leq \delta \sqrt{2 \log 2N} \mid \mathbf{h}\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(M_N^{(G,2)} > \delta \sqrt{2 \log 2N}\right). \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Par l'inégalité (3.1.6), le second terme de la somme décroît à un taux exponentiel. À l'aide de l'inégalité de Markov, le premier terme de la somme, représenté par  $J$ , est majoré par l'expression

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathbf{P}\left(H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta \sqrt{2 \log 2N} \mid \mathbf{h}\right) \\ &= 2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \mathbf{P}\left(H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta \sqrt{2 \log 2N} \mid \mathbf{h}\right). \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Par l'inégalité (4.3.11) et par l'expression de  $S(E)$  donnée à la proposition 4.2.5, nous obtenons

$$J \ll \exp([S_{RC}(\delta E_{\max}) + o(1)] N) \int_{\delta E_{\max}}^{\delta(\sqrt{2 \log 2} + \mathbf{E}[|h_1|])} dv \exp([S_{RC}(v) - S_{RC}(\delta E_{\max})] N). \quad (4.3.22)$$

Puisque, par le lemme 4.2.2 e), la fonction  $S_{RC}(E)$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0, \infty)$ , il s'ensuit que  $S_{RC}(v) - S_{RC}(\delta E_{\max}) < 0$ , d'où nous concluons que

$$J \ll \exp([S_{RC}(\delta E_{\max}) + o(1)] N) = e^{-C_1 N}, \quad (4.3.23)$$

où  $C_1 = -\frac{1}{2}S_{RC}(\delta E_{\max}) > 0$ .

**Cas**  $s_1 > s_2$ :

Pour se placer sur un compact, nous notons que la quantité  $\mathbf{P}(M_N > \delta E_{\max} N | \mathbf{h})$  est majorée par une somme de trois termes, à savoir,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(M_N > \delta E_{\max} N | \mathbf{h}) \\ & \leq \mathbf{P}\left(M_N > \delta E_{\max} N, 0 \leq M_N^{(1)} \leq \delta E_{\max}^{(1)} N, M_N^{(G,2)} \leq \delta(s_1 + s_2)\sqrt{\log 2N} \mid \mathbf{h}\right) \\ & + \mathbf{P}\left(M_N^{(1)} < 0 \mid \mathbf{h}\right) + \mathbf{P}\left(M_N^{(1)} > \delta E_{\max}^{(1)} N \mid \mathbf{h}\right) + \mathbf{P}\left(M_N^{(G,2)} > \delta\sqrt{2\log 2N}\right). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Par les inégalités (4.2.31) et (3.1.2), le second et le dernier terme de la somme décroissent à un taux exponentiel. Le premier terme de cette même somme, représenté par  $\tilde{J}$ , est majoré à l'aide de l'inégalité de Markov, d'où il en découle que

$$\begin{aligned} & \tilde{J} \leq 2^N \int_{\Sigma_N} \mu_N(d\sigma) \\ & \mathbf{P}\left(H_N(\sigma) > \delta E_{\max} N, 0 \leq H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) \leq \delta E_{\max}^{(1)} N, H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta(s_1 + s_2)\sqrt{\log 2N} \mid \mathbf{h}\right) \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Par l'inégalité (4.3.12), il s'ensuit que

$$\tilde{J} \ll \exp(o(1)N) \int_0^{\delta E_{\max}^{(1)}} du_1 \int_{\delta E_{\max}}^{\delta[(s_1+s_2)\sqrt{\log 2} + \mathbf{E}[|h_1|]]} du_2 \exp([S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1)]N). \quad (4.3.26)$$

La prochaine étape consiste à majorer les fonctions d'entropie  $S_1(u_1)$  et  $S_2(u_2 - u_1)$  via le théorème des accroissements finis afin d'obtenir

$$S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1) < S_2(\delta E_{\max}^{(2)}) + [S_2'(\delta E_{\max}^{(2)}) - S_1'(\delta E_{\max}^{(1)})](\delta E_{\max}^{(1)} - u_1) \quad (4.3.27)$$

avec

$$S_2'(\delta E_{\max}^{(2)}) - S_1'(\delta E_{\max}^{(1)}) < 0. \quad (4.3.28)$$

Premièrement, par le théorème des accroissement finis, nous avons

$$\begin{aligned} S_1(u_1) &= S_1(u_1) - S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) + S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) \\ &= S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) - S_1'(\theta_{u_1})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1), \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

où  $u_1 < \theta_{u_1} < \delta E_{\max}^{(1)}$ . Comme  $S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) < 0$  et  $S_1'' < 0$ , nous obtenons

$$S_1(u_1) < -S_1'(\delta E_{\max}^{(1)})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1). \quad (4.3.30)$$

Deuxièmement, puisque l'énergie maximale  $E_{\max}$  se décompose selon l'équation (4.2.35), en appliquant une somme télescopique à la quantité  $S_2(u_2 - u_1)$ , il en découle que

$$S_2(u_2 - u_1) = S_2(u_2 - u_1) - S_2(\delta E_{\max} - u_1) + S_2(\delta E_{\max} - u_1) - S_2(\delta(E_{\max}^{(2)})) + S_2(\delta E_{\max}^{(2)}). \quad (4.3.31)$$

Par le théorème des accroissements finis, nous obtenons

$$S_2(u_2 - u_1) = S_2(\delta E_{\max}^{(2)}) + S_2'(\beta_{u_1})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1) + S_2'(\alpha_{u_1, u_2})(u_2 - \delta E_{\max}), \quad (4.3.32)$$

où  $\delta E_{\max}^{(1)} - u_1 < \beta_{u_1} < \delta(E_{\max} - E_{\max}^{(1)}) = \delta E_{\max}^{(2)}$  et  $\delta E_{\max} - u_1 < \alpha_{u_1, u_2} < u_2 - u_1 < \delta E_{\max}^{(2)}$ . Puisque, par le lemme 4.2.1 e), nous avons  $S_2'' < 0$  et  $S_2'(0) = 0$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_2(u_2 - u_1) &< S_2(\delta E_{\max}^{(2)}) + S_2'(\delta E_{\max}^{(2)})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1) + S_2'(\delta E_{\max}^{(2)})(u_2 - \delta E_{\max}) \\ &< S_2(\delta E_{\max}^{(2)}) + S_2'(\delta E_{\max}^{(2)})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1). \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Nous obtenons donc l'inégalité (4.3.27).

La dernière étape revient à montrer l'inégalité (4.3.28), car alors nous aurons

$$\tilde{J} \ll N \exp([S_2(\delta E_{\max}^{(2)}) + o(1)] N) \leq e^{-C_2 N}, \quad (4.3.34)$$

où  $C_2 = -\frac{1}{2} [S_2(\delta E_{\max}^{(2)})] > 0$  puisque, par le lemme 4.2.1 g), nous avons  $S_2(E) < 0$  lorsque  $E > E_{\max}^{(2)}$ .

Par la proposition 4.2.5,  $E_{\max} > E_c$ . Or, nous avons  $\mathcal{E}_1(E_{\max}) > \mathcal{E}_1(E_c) = E_{\max}^{(1)}$  où la fonction  $\mathcal{E}_1$ , définie à l'équation (4.2.44), est continue et strictement croissante. Considérons la fonction continue

$$w(\delta) = \delta E_{\max}^{(1)} - \mathcal{E}_1(\delta E_{\max}), \quad (4.3.35)$$

qui est telle que  $w(1) = E_{\max}^{(1)} - \mathcal{E}_1(E_{\max}) < 0$ . Il existe  $\delta > 1$  pour lequel

$$\delta E_{\max}^{(1)} - \mathcal{E}_1(\delta E_{\max}) < 0, \quad (4.3.36)$$

c'est-à-dire

$$\delta E_{\max}^{(1)} < \mathcal{E}_1(\delta E_{\max}). \quad (4.3.37)$$

Par l'inégalité (4.2.41), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial E_1} g(\delta E_{\max}, E_1) < 0, \quad (4.3.38)$$

où  $g$  est définie à l'équation (4.2.40), ce qui implique que  $E_1 \mapsto g(\delta E_{\max}, E_1)$  est décroissante. Comme  $g(\delta E_{\max}, \mathcal{E}_1(\delta E_{\max})) = 0$ , alors  $g(\delta E_{\max}, \delta E_{\max}^{(1)}) > 0$  par l'inégalité (4.3.37), ce qui implique

$$S'_1(\delta E_{\max}^{(1)}) - S'_2(\delta E_{\max} - \delta E_{\max}) = \frac{1}{s_1^2 s_2^2} g(\delta E_{\max}, \delta E_{\max}^{(1)}) > 0. \quad (4.3.39)$$

Cela démontre l'inégalité (4.3.28) et termine ainsi la démonstration de la proposition.  $\square$

### 4.3.3. Démonstration de la borne inférieure (Proposition 4.3.2)

La démonstration de la proposition 4.3.2 se résume à majorer la probabilité (4.3.2) par une quantité qui dépend de la probabilité de l'événement  $\{\mathcal{N}_N(E_1, \delta E_{\max}) \geq 1\}$ , où  $\mathcal{N}_N(E_1, \delta E_{\max})$  compte le nombre de configurations dont l'énergie au premier niveau et celle au second niveau excèdent respectivement les valeurs  $E_1 N$  et  $\delta E_{\max} N$ . Puisque cette dernière variable est non négative, l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13) s'applique. Il suffit alors d'approximer le premier et le second moment,  $\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(E_1, \delta E_{\max}) | \mathbf{h}]$  et  $\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(E_1, \delta E_{\max})^2 | \mathbf{h}]$ , puis d'utiliser le théorème des accroissements finis appliqué aux fonctions d'entropie  $S_1(E_1)$  et  $S_2(E_2)$  pour obtenir la décroissance exponentielle désirée.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.2. Soit  $E = \delta E_{\max}$  où  $0 < \delta < 1$ . Nous avons

$$\mathbf{P}(M_N \leq EN | \mathbf{h}) = 1 - \mathbf{P}(M_N > EN | \mathbf{h}). \quad (4.3.40)$$

Posons

$$\mathcal{N}_N(E_1, E) = \#\{\sigma \in \Sigma_N \mid H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1)N\}, \quad (4.3.41)$$

tel que  $0 < E_1 < E$ , qui est le nombre de configurations dont l'énergie au premier niveau excède  $E_1 N$  et l'énergie au second niveau excède  $(E - E_1)N$ . Il s'ensuit que

$$\mathbf{P}(M_N \leq EN | \mathbf{h}) \leq 1 - \mathbf{P}(\mathcal{N}_N(E_1, E) \geq 1 | \mathbf{h}), \quad (4.3.42)$$

car  $\{M_N > EN\} \supseteq \{\mathcal{N}_N(E_1, E) \geq 1\}$ , et par l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13), nous obtenons

$$\mathbf{P}(\mathcal{N}_N(E_1, E) \geq 1 | \mathbf{h}) \leq 1 - \frac{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2}{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(E_1, E)^2 | \mathbf{h}]}. \quad (4.3.43)$$

Le carré de  $\mathcal{N}_N(E_1, E)$  est une somme sur les paires  $(\sigma, \hat{\sigma}) \in \Sigma_N \times \Sigma_N$  qui se partitionne en une somme de trois termes, à savoir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_N(E_1, E)^2 &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \sum_{\hat{\sigma} \in \Sigma_N} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \\
&= \mathcal{N}_N(E_1, E) \\
&\quad + \sum_{\sigma^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \\
&\quad + \sum_{\sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}},
\end{aligned} \tag{4.3.44}$$

où  $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$  et  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)})$  avec  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(1)}, \hat{\sigma}^{(2)} \in \Sigma_{N/2}$ .

En appliquant l'espérance conditionnelle sachant  $\mathbf{h}$  au second terme de l'équation (4.3.44), il en découle par indépendance que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &\left[ \sum_{\sigma^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \\
&= \sum_{\sigma^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}} \sum_{\hat{\sigma}^{(2)} \neq \sigma^{(2)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N \middle| \mathbf{h} \right) \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N \middle| \mathbf{h} \right) \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N \middle| \mathbf{h} \right).
\end{aligned} \tag{4.3.45}$$

En supprimant la contrainte  $\sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)}$  dans la seconde sommation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &\left[ \sum_{\sigma^{(1)} = \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)} \neq \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \\
&\leq \sum_{\sigma^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}} \sum_{\hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N \middle| \mathbf{h} \right) \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N \middle| \mathbf{h} \right) \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N \middle| \mathbf{h} \right) \\
&\leq \sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N \middle| \mathbf{h} \right) \left( \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N \middle| \mathbf{h} \right) \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.3.46}$$

où chaque sommation sera traitée à l'aide de la proposition 4.3.3.

En faisant de même pour le dernier terme de l'équation (4.3.44), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &\left[ \sum_{\sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \\
&= \sum_{\sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right],
\end{aligned} \tag{4.3.47}$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \sum_{\sigma^{(1)} \neq \hat{\sigma}^{(1)}} \sum_{\sigma^{(2)}, \hat{\sigma}^{(2)}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \\
& \leq \sum_{\sigma} \sum_{\hat{\sigma}} \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N\}} \mathbf{1}_{\{H_N^{(1)}(\hat{\sigma}^{(1)}) > E_1 N, H_N^{(2)}(\hat{\sigma}) > (E - E_1) N\}} \middle| \mathbf{h} \right] \\
& = \mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2,
\end{aligned} \tag{4.3.48}$$

qui est égal au numérateur de la fraction apparaissant à (4.3.43).

Ainsi, par l'inégalité  $(1 + x)(1 - x) \leq 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E)^2 | \mathbf{h}]} \\
& \geq \left( 1 + \frac{1}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]} + \frac{\sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} (H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N | \mathbf{h}) \left( \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} (H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N | \mathbf{h}) \right)^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2} \right)^{-1} \\
& \geq 1 - \frac{1}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]} - \frac{\sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} (H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N | \mathbf{h}) \left( \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} (H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N | \mathbf{h}) \right)^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.49}$$

Le tout rassemblé, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} (M_N \leq EN | \mathbf{h}) & \leq \frac{1}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]} \\
& \quad + \frac{\sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} (H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N | \mathbf{h}) \left( \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} (H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N | \mathbf{h}) \right)^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}]^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.50}$$

Il suffit maintenant de majorer chaque terme de la partie droite de l'inégalité.

Pour le second terme, étant donné la linéarité de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) | \mathbf{h}] = \sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} (H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N | \mathbf{h}) \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} (H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N | \mathbf{h}), \tag{4.3.51}$$

et les équations (4.3.9) et (4.3.10), nous obtenons

$$\frac{\sum_{\sigma^{(1)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N \mid \mathbf{h} \right) \left( \sum_{\sigma^{(2)}} \mathbf{P} \left( H_N^{(2)}(\sigma) > (E - E_1) N \mid \mathbf{h} \right) \right)^2}{\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) \mid \mathbf{h}]^2} \ll \left( \int_{E_1}^{\infty} du_1 \exp([S_1(u_1) + o_{u_1}(1)] N) \right)^{-1}. \quad (4.3.52)$$

Afin de minorer l'intégrale au dénominateur, nous tronquons la borne supérieure de l'intégrale et nous appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction  $S_1(E_1)$ .

Ainsi, lorsque  $\varepsilon > E_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{E_1}^{\infty} du_1 \exp([S_1(u_1) + o_{u_1}(1)] N) \\ \geq \exp([S_1(E_1) + o(1)] N) \int_{E_1}^{\varepsilon} du_1 \exp([S_1(u_1) - S_1(E_1)] N), \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

et, par le théorème des accroissements finis, il existe  $E_1 < \alpha_{u_1} < \varepsilon$  tel que

$$\begin{aligned} S_1(u_1) - S_1(E_1) &= S_1'(\alpha_{u_1}) (u_1 - E_1) \\ &> S_1'(\varepsilon) (u_1 - E_1), \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

puisque  $E_1 > 0$  et  $S_1'' < 0$  par le lemme 4.2.1 e). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{E_1}^{\infty} du_1 \exp([S_1(u_1) + o_{u_1}(1)] N) &> \exp([S_1(E_1) + o(1)] N) \int_{E_1}^{\varepsilon} du_1 \exp(S_1'(\varepsilon) (u_1 - E_1) N) \\ &= \exp([S_1(E_1) + o(1)] N) \frac{1}{(-S_1'(\varepsilon))} \left( 1 - e^{S_1'(\varepsilon)(\varepsilon - E_1)N} \right). \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Pour  $N$  suffisamment grand, nous obtenons

$$\int_{E_1}^{\infty} dx \exp([S_1(x + E_1) + o(1)] N) \gg \exp([S_1(E_1) + o(1)] N). \quad (4.3.56)$$

Par un argument similaire, nous obtenons la borne inférieure

$$\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E_1, E) \mid \mathbf{h}] \gg \exp([S_1(E_1) + S_2(E - E_1) + o(1)] N). \quad (4.3.57)$$

Il en résulte l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathbf{P} (M_N \leq EN \mid \mathbf{h}) &\ll \exp(-[S_1(E_1) + S_2(E - E_1) + o(1)] N) + \exp(-[S_1(E_1) + o(1)] N) \\ &\leq e^{-C_3 N} \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

pour  $N$  suffisamment grand avec  $C_3 > 0$ , en choisissant  $0 < E_1 < E_{\max}^{(1)}$  et  $0 < E - E_1 < E_{\max}^{(2)}$ , car alors  $S_1(E_1) > 0$  et  $S_2(E - E_1) > 0$  par le lemme (4.2.1).  $\square$

#### 4.4. DÉMONSTRATION DE L'ENTROPIE (THÉORÈME 2)

L'objectif de cette section est d'établir le théorème 2 à l'aide des propositions suivantes. Nous rappelons la définition de  $\mathcal{N}_N(E)$ , à savoir,

$$\mathcal{N}_N(E) = \# \{ \sigma \in \Sigma_N \mid H_N(\sigma) > EN \}, \quad (4.4.1)$$

défini à l'équation (1.1.8), qui est le nombre de configurations pour lesquelles l'hamiltonien excède l'énergie  $EN$ .

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $E > 0$  et  $\delta > 1$ . Il existe  $C = C(E, s_1, \delta) > 0$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) > e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.4.2)$$

pour  $N$  suffisamment grand.

**Proposition 4.4.2.** *Soient  $E > 0$  et  $0 < \delta < 1$ . Il existe  $C = C(E, s_1, \delta) > 0$  tel que*

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) < e^{N[S(E) - \delta]} \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-CN} \quad (4.4.3)$$

pour  $N$  suffisamment grand et pour  $\hat{\delta} = f(\delta)$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Par les propositions 4.4.1 et 4.4.2, il s'ensuit que

$$\sum_{N \geq N_0} \mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E) - S(E) \right| > \gamma \mid \mathbf{h} \right) \leq \sum_{N \geq N_0} e^{-CN} < \infty \quad (4.4.4)$$

pour  $N_0$  suffisamment grand. En invoquant le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons la convergence presque sûre de  $\frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E)$ , conditionnelle sachant  $\mathbf{h}$ , vers  $S(E)$ .  $\square$

##### 4.4.1. Explications des démonstrations

Nous cherchons à établir la convergence  $\mathbf{P}$ -presque sûre, vers la fonction d'entropie  $S(E)$ , du *log-nombre* normalisé de configurations dont les énergies excèdent  $EN$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \# \{ \sigma \in \Sigma_N \mid H_N(\sigma) > EN \} = S(E). \quad (4.4.5)$$

Notons qu'en soustrayant  $\log 2$  de part et d'autre de l'égalité, nous montrons que l'événement  $\{ \sigma \in \Sigma_N \mid H_N(\sigma) > EN \}$  est un événement rare pour la mesure uniforme  $\mu_N$  sur l'hypercube avec fonction de taux  $S(E) - \log 2$ .

L'idée directrice que nous allons adoptée est celle de la section 4.3, à savoir diviser la tâche en deux étapes : établir l'inégalité (4.4.2) grâce à l'inégalité de Markov, puis obtenir l'inégalité (4.4.3) grâce à l'aide l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13).

#### 4.4.2. Démonstration de la borne supérieure (Proposition 4.4.1)

Nous démontrons la proposition 4.4.1 comme nous l'avons fait à la proposition 4.3.1. en la subdivisant en deux cas.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.4.1. Soient  $E > 0$  et  $\delta > 1$ .

**Cas**  $s_1 \leq s_2$  ou  $s_1 > s_2$  et  $E \leq E_c$ :

Par l'inégalité de Markov, nous avons la borne supérieure

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) > e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right) \leq \exp(-NS(E)\delta) \mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E) \mid \mathbf{h}], \quad (4.4.6)$$

où l'espérance  $\mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E) \mid \mathbf{h}]$  se scinde en deux comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\mathcal{N}_N(E) \mid \mathbf{h}] &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathbf{P} (H_N(\sigma) \geq EN \mid \mathbf{h}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathbf{P} \left( EN - y_{N,\mathbf{h}}(\sigma) \leq H_N^{(G,2)}(\sigma) \leq \delta E_{\max}^{(G,2)} N \mid \mathbf{h} \right) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \mathbf{P} \left( H_N^{(G,2)}(\sigma) > \delta E_{\max}^{(G,2)} N \mid \mathbf{h} \right), \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

où  $E_{\max}^{(G,2)}$  est l'énergie maximale du modèle GREM de la proposition 3.1.2. Par l'inégalité (3.1.6), le second terme de la somme ci-dessus décroît à un taux exponentiel, et alors celui-ci multiplié par le facteur  $\exp(-NS(E)\delta)$  décroît aussi à un taux exponentiel car  $S(E) > 0$ . Quant au premier terme de la somme, représenté par  $J$ , par l'inégalité (4.3.11), il est majoré par l'expression

$$J \ll \exp(o(1)N) \int_E^{\delta(E_{\max}^{(G,2)} + \mathbf{E}[\|h_1\|])} dv \exp(S(v)N). \quad (4.4.8)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \exp(-NS(E)\delta) J &\ll \exp(-NS(E)(\delta - 1) + o(1)N) \int_E^{(1+\delta)(E_{\max}^{(G,2)} + \mathbf{E}[\|h_1\|])} dv \\ &\quad \exp([S(v) - S(E)]N) \\ &\ll \exp\left(-\frac{N}{2}S(E)(\delta - 1)\right) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

pour  $N$  suffisamment grand, étant donné que  $S(v) - S(E) < 0$ , car  $S$  est strictement décroissant par (4.2.71). Alors, il existe  $C_4 > 0$  tel que

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) > e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-C_4N} \quad (4.4.10)$$

pour  $N$  suffisamment grand.

**Cas**  $s_1 > s_2$  et  $E > E_c$ :

Soit  $1 < \delta < \frac{3}{2}$  de sorte que  $E_c < (3 - 2\delta)E < E_{\max}$ .

Afin de se placer sur un compact, nous définissons les variables aléatoires à valeurs entières suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_N^{(1+)}(E_1) &= \# \left\{ \sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2} \mid H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > E_1 N \right\}, \\ \mathcal{N}_N^{(1-)}(E_1) &= \# \left\{ \sigma^{(1)} \in \Sigma_{N/2} \mid H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) < E_1 N \right\}, \\ \mathcal{N}_N^{(G,2)}(L) &= \# \left\{ \sigma \in \Sigma_N \mid H_N^{(G,2)}(\sigma) > LN \right\},\end{aligned}\tag{4.4.11}$$

où  $\mathcal{N}_N^{(1+)}(E_1)$  compte le nombre de configurations au premier niveau associées à des énergies excédant  $E_1 N$ ,  $\mathcal{N}_N^{(1-)}(E_1)$  dénombre celles dont les énergies associées n'atteignent pas  $E_1 N$ , et  $\mathcal{N}_N^{(G,2)}(L)$  donne le nombre de configurations telles que les énergies dépourvu du champ magnétique dépassent  $LN$ .

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) > e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right) \\ \leq \mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N^{(1+)}(\delta E_{\max}^{(1)}) \geq 1 \mid \mathbf{h} \right) + \mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N^{(1-)}(\delta E_{\min}^{(1)}) \geq 1 \mid \mathbf{h} \right) + \mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N^{(G,2)}(\delta E_{\max}^{(G,2)} N) \geq 1 \right) \\ + \mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) > e^{NS(E)\delta}, \mathcal{N}_N^{(1+)}(\delta E_{\max}^{(1)}) = 0, \mathcal{N}_N^{(1-)}(\delta E_{\min}^{(1)}) = 0, \mathcal{N}_N^{(G,2)}(\delta E_{\max}^{(G,2)} N) = 0 \mid \mathbf{h} \right).\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

Par les inégalités (4.2.31) et (3.1.6) et l'égalité  $E_{\min}^{(1)} = -E_{\max}^{(1)}$ , les trois premiers termes de la somme de droite décroissent à un taux exponentiel. Pour le dernier terme, représenté par  $\tilde{J}$ , nous le majorons par la probabilité

$$\tilde{J} \leq \mathbf{P} \left( \# \left\{ \sigma \mid E_{\min}^{(1)} N \leq \frac{H_N^{(1)}(\sigma^{(1)})}{\delta} \leq E_{\max}^{(1)} N, \left[ (3 - 2\delta)E - \frac{y_{N,\mathbf{h}}(\sigma)}{\delta} \right] N < \frac{H_N^{(G,2)}(\sigma)}{\delta} \leq E_{\max}^{(G,2)} N \right\} > e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right),\tag{4.4.13}$$

puisque  $0 < \delta(3 - 2\delta) < 1$  lorsque  $1 < \delta < \frac{3}{2}$ .

Par l'inégalité de Markov et l'inégalité (4.3.12), nous obtenons

$$J \ll \exp(-N(S_2(E - E_{\max}^{(1)})\delta + o(1))) \int_{\delta E_{\min}^{(1)}}^{\delta E_{\max}^{(1)}} du_1 \int_{\delta(3-2\delta)E}^{\delta E_{\max}^{(G,2)}} du_2 \exp([S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1)] N),\tag{4.4.14}$$

car  $S(E) = S_2(E - E_{\max}^{(1)})$  lorsque  $E > E_c$ .

Il ne reste qu'à majorer les fonctions d'entropie  $S_1(u_1)$  et  $S_2(u_2 - u_1)$  à l'aide du théorème des accroissements finis.

Premièrement, nous pouvons réécrire  $S_1(u_1)$  comme suit

$$S_1(u_1) = S_1(u_1) - S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) + S_1(\delta E_{\max}^{(1)}), \quad (4.4.15)$$

et par le théorème des accroissements finis, nous avons

$$S_1(u_1) = S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) - S_1'(\theta_{u_1})(\delta E_{\max}^{(1)} - u_1), \quad (4.4.16)$$

où  $u_1 < \theta_{u_1} < \delta E_{\max}^{(1)}$ . Puisque, par le lemme 4.2.1 e), nous avons  $S_1(\delta E_{\max}^{(1)}) < 0$  et  $S_1'' < 0$ , alors

$$S_1(u_1) < -S_1'(\delta E_{\max}^{(1)}) [\delta E_{\max}^{(1)} - u_1]. \quad (4.4.17)$$

Deuxièmement, par le moyen d'une somme télescopique appliquée à  $S_2(u_2 - u_1)$ , suivi du théorème des accroissements finis, nous obtenons

$$\begin{aligned} S_2(u_2 - u_1) &= S_2(u_2 - u_1) - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - u_1) + S_2(\delta(3 - 2\delta)E - u_1) \\ &\quad - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) \\ &= S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + S_2'(\alpha_{u_1, u_2}) [u_2 - \delta(3 - 2\delta)E] \\ &\quad + S_2'(\beta_{u_2}) [\delta E_{\max}^{(1)} - u_1] \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

où  $\delta(3 - 2\delta)E - u_1 < \alpha_{u_1, u_2} < u_2 - u_1$  et  $\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)} < \beta_{u_2} < \delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}$ .

Sachant que  $S_2'' < 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} S_2(u_2 - u_1) &< S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + S_2'(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) [\delta E_{\max}^{(1)} - u_1] \\ &\quad + S_2'(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) [u_2 - \delta(3 - 2\delta)E], \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

et comme  $(3 - 2\delta)E > E_c$ , alors

$$S_2(u_2 - u_1) < S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + S_2'(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) [\delta E_{\max}^{(1)} - u_1]. \quad (4.4.20)$$

En résumé, nous avons montré que

$$\begin{aligned} S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1) &< S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + \\ &\quad [S_2'(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) - S_1'(\delta E_{\max}^{(1)})] [\delta E_{\max}^{(1)} - u_1], \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

et par l'inégalité (4.3.28) avec  $(3 - 2\delta)E - E_{\max}^{(1)}$  au lieu de  $E_{\max}^{(2)}$ , nous obtenons

$$S_1(u_1) + S_2(u_2 - u_1) < S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}). \quad (4.4.22)$$

L'inégalité (4.4.14) se réduit à

$$J \ll \exp(-N(S_2(E - E_{\max}^{(1)})\delta - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) + o(1))). \quad (4.4.23)$$

Or, dans l'exposant de l'expression précédente, nous avons

$$\begin{aligned} S_2(E - E_{\max}^{(1)})\delta - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) &= [S_2(E - E_{\max}^{(1)}) - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)})] \delta \\ &\quad + (\delta - 1)S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) \\ &> [S_2(E - E_{\max}^{(1)}) - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)})] \delta, \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

puisque  $S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) > 0$  étant donné que  $\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)} < E_{\max}^{(2)}$  pour  $\delta > 1$  suffisamment près de 1.

En appliquant le théorème des accroissements finis, nous avons

$$\begin{aligned} S_2(E - E_{\max}^{(1)}) - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) &= S_2'(\theta) [E - E_{\max}^{(1)} - \delta(3 - 2\delta)E + \delta E_{\max}^{(1)}] \\ &= S_2'(\theta) (\delta - 1) [(2\delta - 1)E + E_{\max}^{(1)}], \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

où  $\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)} < \theta < E - E_{\max}^{(1)}$ , et puisque  $S_2'' < 0$ , alors nous obtenons

$$S_2(E - E_{\max}^{(1)}) - S_2(\delta(3 - 2\delta)E - \delta E_{\max}^{(1)}) > S_2'(E - E_{\max}^{(1)}) (\delta - 1) [(2\delta - 1)E + E_{\max}^{(1)}]. \quad (4.4.26)$$

Il en découle que

$$J \leq \exp(-C_5 N), \quad (4.4.27)$$

avec  $C_5 = -\frac{1}{2}S_2'(\theta) (\delta - 1) [(2\delta - 1)E + E_{\max}^{(1)}] > 0$ .  $\square$

#### 4.4.3. Démonstration de la borne inférieure (Proposition 4.4.2)

La démonstration de la proposition 4.4.2 est similaire à celle de la proposition 4.3.2. Elle s'effectue à l'aide de l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.4.2. Soient  $0 < E_1 < E$  et  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . Posons  $\gamma = (1 - \delta)(1 + 2\delta)$  de telle sorte que  $\gamma > 1$ .

Remarquons que

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) < e^{N[S(E) - \hat{\delta}]} \middle| \mathbf{h} \right) \leq 1 - \mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \geq e^{N[S(E) - \hat{\delta}]} \middle| \mathbf{h} \right), \quad (4.4.28)$$

puisque nous avons l'inclusion

$$\{\sigma \in \Sigma_N \mid H_N(\sigma) > EN\} \supseteq \left\{ \sigma \in \Sigma_N \mid H_N^{(1)}(\sigma^{(1)}) > \gamma E_1 N, H_N^{(2)}(\sigma) > \gamma(E - E_1)N \right\}. \quad (4.4.29)$$

Par l'inégalité de Paley-Zygmund (1.3.13), nous obtenons

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \geq e^{NS(E)\delta} \mid \mathbf{h} \right) \geq \left( 1 - \frac{e^{N[S(E)-\hat{\delta}]}}{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \mid \mathbf{h}]} \right) \frac{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \mid \mathbf{h}]^2}{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E)^2 \mid \mathbf{h}]}. \quad (4.4.30)$$

Premièrement, par l'inégalité (4.3.57), nous avons

$$\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \mid \mathbf{h}] \gg \exp([S_1(\gamma E_1) + S_2(\gamma(E - E_1)) + o(1)]N), \quad (4.4.31)$$

d'où nous obtenons

$$1 - \frac{e^{N[S(E)-\hat{\delta}]}}{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E)]} \gg 1 - \exp\left([S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) - \hat{\delta} + o(1)]N\right). \quad (4.4.32)$$

Deuxièmement, par les inégalités (4.3.49), (4.3.52) et (4.3.56), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E) \mid \mathbf{h}]^2}{\mathbf{E}[\mathcal{N}_N(\gamma E_1, \gamma E)^2 \mid \mathbf{h}]} &\gg 1 - 2 \exp([-S_1(\gamma E_1) + o(1)]N) - \exp(-S_2(\gamma(E - E_1) + o(1))N) \\ &\gg 1 \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

pour  $N$  suffisamment grand, puisque  $S_1(\gamma E_1) > 0$  et  $S_2(\gamma(E - E_1)) > 0$ .

Nous avons montré que

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) < e^{N[S(E)-\hat{\delta}]} \mid \mathbf{h} \right) \ll \exp\left([S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) - \hat{\delta} + o(1)]N\right). \quad (4.4.34)$$

Selon l'équation (4.2.58), la fonction d'entropie du modèle GREM avec CMA est donnée par

$$S(E) = S_1(\mathcal{E}_1(E)) + S_2(E - \mathcal{E}_1(E)). \quad (4.4.35)$$

où  $\mathcal{E}_1(E) \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]$ , définie à l'équation (4.2.44) et telle que  $0 < \mathcal{E}_1(E) < E$ , est l'unique

valeur qui maximise cette fonction. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) &= S_1(\mathcal{E}_1(E)) - S_1(\gamma E_1) \\ &\quad + S_2(E - \mathcal{E}_1(E)) - S_2(\gamma(E - E_1)), \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

et par le théorème des accroissements finis, nous obtenons

$$\begin{aligned} S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) &= -S'_1(\theta_1) [\gamma E_1 - \mathcal{E}_1(E)] \\ &\quad - S'_2(\theta_2) [\gamma(E - E_1) - E + \mathcal{E}_1(E)]. \end{aligned} \quad (4.4.37)$$

où  $\mathcal{E}_1(E) < \theta_1 < \gamma \mathcal{E}_1(E)$  et  $E - \mathcal{E}_1(E) < \theta_2 < \gamma(E - \mathcal{E}_1(E))$ . En choisissant  $E_1 = \mathcal{E}_1(E)$ , nous obtenons par le choix de  $\gamma$  que

$$\gamma E_1 - \mathcal{E}_1(E) = (\gamma - 1) \mathcal{E}_1(E) = \delta(1 - 2\delta) \mathcal{E}_1(E), \quad (4.4.38)$$

d'où il en découle que

$$\begin{aligned} \gamma(E - E_1) - E + \mathcal{E}_1(E) &= (\gamma - 1) E - (\gamma - 1) \mathcal{E}_1(E) \\ &= \delta(1 - 2\delta) [E - \mathcal{E}_1(E)]. \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) &= -S'_1(\theta_1) \delta(1 - 2\delta) \mathcal{E}_1(E) \\ &\quad - S'_2(\theta_2) \delta(1 - 2\delta) [E - \mathcal{E}_1(E)]. \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

Puisque  $S_1'' < 0$  et  $S_2'' < 0$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) &\leq -S'_1(\gamma E_1) \delta(1 - 2\delta) \mathcal{E}_1(E) \\ &\quad - S'_2(\gamma(E - \mathcal{E}_1(E))) \delta(1 - 2\delta) [E - \mathcal{E}_1(E)] \\ &\leq \max \{-S'_1(\gamma E_1), -S'_2(\gamma(E - \mathcal{E}_1(E)))\} \\ &\quad \cdot [\delta(1 - 2\delta) \mathcal{E}_1(E) + \delta(1 - 2\delta) [E - \mathcal{E}_1(E)]] \\ &= \max \{-S'_1(\gamma E_1), -S'_2(\gamma(E - \mathcal{E}_1(E)))\} \\ &\quad \cdot \delta(1 - 2\delta) E. \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

En posant,

$$\hat{\delta} = 2 \max \{-S'_1(\gamma E_1), -S'_2(\gamma(E - \mathcal{E}_1(E)))\} \delta(1 - 2\delta) E, \quad (4.4.42)$$

où chaque terme est positif en raison du lemme 4.2.1 f), puisque  $\gamma E_1 > 0$  et  $\gamma(E - \mathcal{E}_1(E)) > 0$ , nous obtenons

$$S(E) - S_1(\gamma E_1) - S_2(\gamma(E - E_1)) \leq -\frac{1}{2} \hat{\delta}, \quad (4.4.43)$$

ce qui implique finalement que

$$\mathbf{P} \left( \mathcal{N}_N(E) < e^{N[S(E)-\hat{\delta}]} \mid \mathbf{h} \right) \leq e^{-C_6 N}, \quad (4.4.44)$$

où  $C_6 = \frac{1}{3}\hat{\delta} > 0$ . □

## 4.5. DÉMONSTRATION DE LA FONCTION D'ÉNERGIE LIBRE (THÉORÈME 3)

Nous rappelons que la fonction d'énergie libre du modèle GREM avec CMA, définie à l'équation (1.1.10), est donnée par la limite  $\mathbf{P}$ -presque sûre

$$f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)), \quad (4.5.1)$$

lorsque celle-ci existe.

Nous allons démontrer la convergence presque sûre de la fonction d'énergie libre en établissant préalablement le *principe variationnel de Gibbs*, à la proposition 4.5.1, qui est la fonction conjuguée de la fonction  $-S(E)$ . La démonstration du théorème 3 consistera à résoudre l'expression de ce principe variationnel.

**Proposition 4.5.1.** *Lorsque  $\beta > 0$ ,*

$$f(\beta) = \sup_{E \in [E_{\min}, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\}, \quad \mathbf{P}\text{-presque sûrement.} \quad (4.5.2)$$

DÉMONSTRATION. La démonstration s'effectue en deux étapes : 1) la fonction conjuguée de  $-S(E)$  est une borne supérieure de la fonction d'énergie libre, et 2) cette même conjuguée est aussi une borne inférieure de la fonction d'énergie libre.

Premièrement, puisque  $\beta > 0$  et, par la proposition 4.2.5,  $S(E)$  est une fonction paire, alors

$$\sup_{E \in [E_{\min}, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\} = \sup_{E \in [0, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\}, \quad (4.5.3)$$

ce qui revient à dire que les configurations  $\sigma$  avec un hamiltonien  $H_N(\sigma)$  négatif ne contribuent aucunement à la fonction d'énergie libre. Choisissons un entier positif  $M > 1$  ainsi que  $0 < \varepsilon < \frac{E_{\max}}{M-1}$ , et considérons une partition  $\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_M\}$  de l'intervalle  $[0, E_{\max} + \varepsilon]$  où  $\nu_j = \frac{E_{\max} + \varepsilon}{M} j$  pour  $j = 0, 1, \dots, M$ . La borne supérieure de la quantité  $\varepsilon$  impose la condition  $\nu_{M-1} < E_{\max}$  à la partition dont nous aurons besoin plus bas.

Par le théorème 1, il existe un événement  $A$  sur lequel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_{\sigma \in \Sigma_N} H_N(\sigma) = E_{\max}, \quad (4.5.4)$$

avec  $\mathbf{P}(A \mid \mathbf{h}) = 1$ . Par le théorème 2, pour  $j \in \{1, \dots, M\}$ , il existe un événement  $D_j$  sur

lequel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(\nu_j) = S(\nu_j), \quad (4.5.5)$$

où  $\mathbf{P}(D_j | \mathbf{h}) = 1$  et  $\mathcal{N}_N(E) = \#\{\sigma \in \Sigma_N \mid H_N(\sigma) > EN\}$ , tel que défini à l'équation (1.1.8). Considérons  $\omega \in A \cap \left(\bigcap_{j=1}^M D_j\right)$ . Il existe  $N_\omega$  tel que pour tout  $N \geq N_\omega$ , nous avons

$$N(E_{\min} - \varepsilon) < H_N(\sigma) < N(E_{\max} + \varepsilon), \quad (4.5.6)$$

où  $H_N(\sigma) = H_N(\sigma)(\omega)$ . En définissant les ensembles  $U = \{\sigma \mid N(E_{\min} - \varepsilon) < H_N(\sigma) \leq 0\}$  et  $V_j = \{\sigma \mid N\nu_j < H_N(\sigma) \leq N\nu_{j+1}\}$ , il en découle que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) &= \sum_{\sigma \in U} \exp(\beta H_N(\sigma)) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\sigma \in V_j} \exp(\beta H_N(\sigma)) \\ &\leq 2^N + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\sigma \in V_j} \exp(\beta N\nu_{j+1}), \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

car  $\exp(\beta H_N(\sigma)) \leq 1$  lorsque  $H_N(\sigma) \leq 0$ . Notons que

$$\sum_{\sigma \in V_j} \exp(\beta N\nu_{j+1}) \leq \sum_{\sigma: H_N(\sigma) > N\nu_j} \exp(\beta N\nu_{j+1}) = \exp(\beta N\nu_{j+1}) \mathcal{N}_N(\nu_j), \quad (4.5.8)$$

et par la limite (4.5.5), nous obtenons alors

$$\sum_{\sigma \in V_j} \exp(\beta N\nu_{j+1}) \leq \exp((\beta\nu_{j+1} + S(\nu_j) + \varepsilon) N), \quad (4.5.9)$$

car  $\nu_{M-1} < E_{\max}$ . De plus, remarquons que, par la proposition 4.2.5, nous avons

$$2^N = \exp(S(0)) = \exp(\beta \cdot 0 + S(0)). \quad (4.5.10)$$

Il en découle que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \leq \exp(\beta \cdot 0 + S(0)) + \sum_{j=0}^{M-1} \exp((\beta\nu_{j+1} + S(\nu_j) + \varepsilon) N). \quad (4.5.11)$$

Puisque, par le lemme 4.2.5, la fonction  $S(E)$  est uniformément continue sur  $[0, E_{\max} + \varepsilon]$ , alors  $S(\nu_j) < S(\nu_{j+1}) + \varepsilon$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) &\leq \exp(\beta \cdot 0 + S(0)) + \sum_{j=0}^{M-1} \exp((\beta\nu_{j+1} + S(\nu_{j+1}) + 2\varepsilon) N) \\ &\leq M \exp\left(\sup_{0 \leq k \leq M} \{\beta\nu_k + S(\nu_k) + 2\varepsilon\} N\right). \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

En prenant le logarithme de part et d'autre de l'inégalité, nous obtenons

$$\frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \leq \frac{1}{N} \log M + \sup_{0 \leq k \leq M} \{\beta \nu_k + S(\nu_k)\} + 2\varepsilon, \quad (4.5.13)$$

d'où il en découle que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \leq \sup_{0 \leq k \leq M} \{\beta \nu_k + S(\nu_k)\} + 2\varepsilon. \quad (4.5.14)$$

En laissant  $\varepsilon$  tendre vers 0, nous avons

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \leq \sup_{0 \leq k \leq M} \{\beta \nu_k + S(\nu_k)\}, \quad (4.5.15)$$

où  $\nu_M = E_{\max}$ . Puisque l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\sup_{0 \leq k \leq M} \{\beta \nu_k + S(\nu_k)\} \leq \sup_{E \in [0, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\}, \quad (4.5.16)$$

nous obtenons

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \leq \sup_{E \in [E_{\min}, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\}. \quad (4.5.17)$$

Deuxièmement, puisque par la proposition 4.2.5,  $E \mapsto \beta E + S(E)$  est une fonction strictement concave et continue, elle atteint son maximum sur le compact  $[E_{\min}, E_{\max}]$  pour l'unique valeur  $E^*(\beta)$ , c'est-à-dire,

$$\sup_{E \in [E_{\min}, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\} = \beta E^*(\beta) + S(E^*(\beta)). \quad (4.5.18)$$

Par le théorème 2, il existe un événement  $D_{E^*(\beta)}$  sur lequel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E^*(\beta)) = S(E^*(\beta)), \quad (4.5.19)$$

où  $\mathbf{P}(D_{E^*(\beta)} | \mathbf{h}) = 1$ . Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) &\geq \sum_{\sigma: H_N(\sigma) \geq E^*(\beta)N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \\ &\geq \exp(\beta E^*(\beta)N) \mathcal{N}_N(E^*(\beta)) \\ &\geq \exp((\beta E^*(\beta) + S(E^*(\beta)) - \varepsilon)N) \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

pour  $N$  suffisamment grand. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{N} \log \mathcal{N}_N(E^*(\beta)) \geq \beta E^*(\beta) + S(E^*(\beta)) - \varepsilon, \quad (4.5.21)$$

et puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, nous avons

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \exp(\beta H_N(\sigma)) \geq \sup_{E \in [E_{\min}, E_{\max}]} \{\beta E + S(E)\}. \quad (4.5.22)$$

L'équation (4.5.2) est vérifiée sur l'événement certain  $A \cap \left(\bigcap_{j=1}^M D_j\right) \cap D_{E^*(\beta)}$ .  $\square$

Nous poursuivons avec la démonstration du théorème 4.5 où l'on considèrera les deux cas  $s_1 \leq s_2$  et  $s_1 > s_2$ . Le premier reprend la démonstration présentée dans l'article [1] de L. P. Arguin et N. Kistler, tandis que le second s'inspire de la méthode de cette démonstration. La première étape consiste à montrer que le principe variationnel (4.5.2) possède une unique solution et que le maximum est atteint à l'unique énergie  $\mathcal{E}(\beta) \in [E_{\min}, E_{\max}]$ , selon  $\beta > 0$ . Par la suite, cette énergie se décompose en énergie propre au GREM et en celle du CMA, dont chaque partie est résolue à l'aide des lemmes 4.2.2, 2.2.1, 2.2.2 et 4.2.1. Nous terminons en déterminant les valeurs critiques de l'énergie libre associées correspondant aux énergies de transition  $E = E_c$  et  $E = E_{\max}$ .

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.** Premièrement, nous allons montrer que

$$f(\beta) = \beta \mathcal{E}(\beta) + S(\mathcal{E}(\beta)), \quad (4.5.23)$$

où  $\mathcal{E}(\beta)$  est une fonction strictement croissante. Il suffit de montrer que  $S(E)$  est une fonction différentiable et strictement concave, car alors le lemme 2.1.2 nous assure que  $\mathcal{E}(\beta)$  vérifie les propriétés énoncées.

Les équations (4.2.71) et (4.2.72) montrent que  $S(E)$  est différentiable lorsque  $E \neq E_c$ . Puisque l'équation (4.2.71) se réécrit

$$\begin{aligned} S'(E) &= [S'_1(\mathcal{E}_1(E)) - S'_2(E - \mathcal{E}_1(E))] \mathcal{E}'_1(E) + S'_2(E - \mathcal{E}_1(E)) \\ &= S'_2(E - \mathcal{E}_1(E)), \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

en raison de (4.2.39) et (4.2.43), alors

$$\lim_{E \rightarrow E_c^-} S'(E) = S'_2(E_c - \mathcal{E}_1(E_c)) = S'_2(E_c - E_{\max}^{(1)}) = \lim_{E \rightarrow E_c^+} S'(E) \quad (4.5.25)$$

par (4.2.52), ce qui implique que  $S(E)$  est aussi différentiable en  $E = E_c$ .

Pour la seconde dérivée, lorsque  $E < E_c$ , nous avons

$$S''(E) = S''_2(E - \mathcal{E}_1(E)) (1 - \mathcal{E}'_1(E)), \quad (4.5.26)$$

et lorsque  $E > E_c$ , nous obtenons

$$S''(E) = S_2''(E - E_{\max}^{(1)}). \quad (4.5.27)$$

La dérivée seconde existe pour tout  $E$  sauf en  $E = E_c$ , car

$$\lim_{E \rightarrow E_c^-} S''(E) = S_2''(E_c - E_{\max}^{(1)}) (1 - \mathcal{E}'_1(E_c)) < S_2''(E - E_{\max}^{(1)}) = \lim_{E \rightarrow E_c^+} S''(E) \quad (4.5.28)$$

étant donné (4.2.47). Nous en concluons que  $S(E)$  est strictement concave et donc le lemme 2.1.2 s'applique pour la fonction  $-S(E)$ . Par conséquent, l'équation (4.5.23) et la propriété de croissance stricte de  $\mathcal{E}(\beta)$  sont vérifiées.

Notons que l'équation (2.1.20) implique

$$\beta = -S'(\mathcal{E}(\beta)). \quad (4.5.29)$$

Considérons le cas  $s_1 \leq s_2$ . Par la proposition 4.2.5, nous avons  $S(E) = S_{RC}(E)$ , d'où il en découle que

$$f(\beta) = \beta \mathcal{E}(\beta) + S_{RC}(\mathcal{E}(\beta)) \quad (4.5.30)$$

lorsque  $\mathcal{E}(\beta) \in (E_{\min}, E_{\max})$ , et

$$f(\beta) = \beta E_{\max} + S_{RC}(E_{\max}) = \beta E_{\max} \quad (4.5.31)$$

pour  $\mathcal{E}(\beta) = E_{\max}$ , par le lemme 4.2.2 f). Il existe donc une valeur critique  $\beta_c$  telle que  $\mathcal{E}(\beta_c) = E_{\max}$ . Par l'équation (4.2.28), nous avons

$$\begin{aligned} S_{RC}(\mathcal{E}(\beta_c)) &= \log 2 - \frac{(\mathcal{E}(\beta_c) - y^*(\mathcal{E}(\beta_c)))^2}{2} - I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))), \\ 0 &= \log 2 - \frac{(\mathcal{E}(\beta_c) - y^*(\mathcal{E}(\beta_c)))^2}{2} - I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))). \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

Pour déterminer  $\beta_c$ , nous devons calculer les quantités  $\mathcal{E}(\beta_c) - y^*(\mathcal{E}(\beta_c))$  et  $I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c)))$ .

Le lemme 4.2.2 d) et l'équation (4.5.29) nous donnent une décomposition de l'énergie  $\mathcal{E}(\beta)$ ,

$$\mathcal{E}(\beta) = \beta + y^*(\mathcal{E}(\beta)), \quad (4.5.33)$$

où  $\beta$  est l'énergie du REM et  $y^*(\mathcal{E}(\beta))$ , celle du CMA. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 0 &= \log 2 - \frac{\beta_c^2}{2} - I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))), \\ \beta_c &= \sqrt{2(\log 2 - I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))))}. \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

Par (2.2.9), nous avons

$$I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))) = y^*(\mathcal{E}(\beta_c))\tau(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))) - \varphi(\tau(y^*(\mathcal{E}(\beta_c)))). \quad (4.5.35)$$

Par les équations (4.2.30) et (2.2.10), lorsque  $\beta > 0$ , nous avons

$$\mathcal{E}(\beta) = \tau(y^*(\mathcal{E}(\beta))) + y^*(\mathcal{E}(\beta)), \quad (4.5.36)$$

ce qui implique que

$$\beta = \tau(y^*(\mathcal{E}(\beta))). \quad (4.5.37)$$

De plus, par (2.2.1) et (2.2.9), nous obtenons

$$y^*(\mathcal{E}(\beta)) = \varphi'(\tau(y^*(\mathcal{E}(\beta)))) = \varphi'(\beta) = \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1]. \quad (4.5.38)$$

Donc, pour  $\beta = \beta_c$ , le lemme 2.2.2 c) implique

$$\begin{aligned} I(y^*(\mathcal{E}(\beta_c))) &= \beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1] - \varphi(\beta_c) \\ &= \beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_c h_1] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)] \end{aligned} \quad (4.5.39)$$

ce qui nous donne, à l'aide de (4.5.35), l'équation (1.2.17) avec  $\beta_{c,1} = \beta_{c,2} = \beta_c$ .

Il suffit de caractériser la fonction  $f(\beta)$  lorsque  $\beta < \beta_c$ , c'est-à-dire  $\mathcal{E}(\beta) \in (E_{\min}, E_{\max})$ .

Par l'équation (4.2.28), nous avons

$$f(\beta) = \beta [\tau(y^*(\mathcal{E}(\beta))) + y^*(\mathcal{E}(\beta))] + \log 2 - \frac{(\mathcal{E}(\beta) - y^*(\mathcal{E}(\beta)))^2}{2} - I(y^*(\mathcal{E}(\beta))). \quad (4.5.40)$$

Par les équations (4.5.37), (4.5.38) et (4.5.39) nous obtenons bien

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta [\beta + \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1]] + \log 2 - \frac{\beta^2}{2} - \beta \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1] + \mathbf{E}[\log \cosh(\beta h_1)] \\ &= \log 2 + \frac{\beta^2}{2} + \mathbf{E}[\log \cosh(\beta h_1)]. \end{aligned} \quad (4.5.41)$$

Considérons le cas  $s_1 > s_2$ . Par la proposition 4.2.5, nous avons  $S(E) = S_{RC}(E)$  si  $0 < E < E_c$  et  $S(E) = S_2(E - E_{\max}^{(1)})$  lorsque  $E_c \leq E \leq E_{\max}$ . Il y aura donc deux valeurs critiques  $\beta_{c,1}$  et  $\beta_{c,2}$  telles que

$$\mathcal{E}(\beta_{c,1}) = E_c, \quad \mathcal{E}(\beta_{c,2}) = E_{\max}. \quad (4.5.42)$$

Lorsque  $0 < \beta < \beta_{c,1}$ , l'inégalité  $0 < \mathcal{E}(\beta) < E_c$ , est vérifiée, ce qui implique que

$$f(\beta) = \log 2 + \frac{\beta^2}{2} + \mathbf{E}[\log \cosh(\beta h_1)] \quad (4.5.43)$$

comme au cas précédent. Si  $\beta_{c,1} \leq \beta < \beta_{c,2}$ , alors  $E_c \leq \mathcal{E}(\beta) < E_{\max}$ , ce qui donne

$$f(\beta) = \beta \mathcal{E}(\beta) + S_2(\mathcal{E}(\beta) - E_{\max}^{(1)}). \quad (4.5.44)$$

Lorsque  $\beta \geq \beta_{c,2}$ , nous obtenons  $\mathcal{E}(\beta) = E_{\max}$ , d'où il s'ensuit que

$$f(\beta) = \beta E_{\max} + S_2(E_{\max} - E_{\max}^{(1)}) = \beta E_{\max} + S_2(E_{\max}^{(2)}) = \beta E_{\max} \quad (4.5.45)$$

par le lemme 4.2.1 g) et la décomposition de l'énergie maximale totale (4.2.35).

Nous déterminons maintenant  $\beta_{c,1}$ . Par l'équation (4.5.36), nous avons la décomposition

$$\mathcal{E}(\beta_{c,1}) = \tau(y^*(\beta_{c,1})) + y^*(\beta_{c,1}), \quad (4.5.46)$$

d'où il en découle que

$$E_c = \beta_{c,1} + \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_{c,1} h_1] \quad (4.5.47)$$

par (4.5.37) et (4.5.38). D'autre part, la proposition 4.2.5 nous donne la décomposition de l'énergie critique

$$E_c = 2I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)})) + y_1^*(E_{\max}^{(1)}). \quad (4.5.48)$$

Afin de déterminer les quantités  $I_1'(y_1^*(E_{\max}^{(1)}))$  et  $y_1^*(E_{\max}^{(1)})$ , il faut résoudre la fonction d'énergie libre au premier niveau, soit

$$f_1(\beta) = \sup_{E_1 \in [E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)}]} \{\beta E_1 + S_1(E_1)\}. \quad (4.5.49)$$

Nous avons

$$f_1(\beta) = \beta \mathcal{E}^{(1)}(\beta) + S_1(\mathcal{E}^{(1)}(\beta)) \quad (4.5.50)$$

tel que, par l'équation (2.1.20),

$$\beta = -S_1'(\mathcal{E}^{(1)}(\beta)), \quad (4.5.51)$$

où  $\mathcal{E}^{(1)}(\beta)$  est une fonction strictement croissante, par les lemmes 2.1.2 et 4.2.1. Lorsque  $\beta$  vérifie l'inégalité  $0 < \beta < \beta_c^{(1)}$  alors  $\mathcal{E}^{(1)}(\beta) \in (E_{\min}^{(1)}, E_{\max}^{(1)})$ , et lorsque  $\beta \geq \beta_c^{(1)}$ , alors  $\mathcal{E}^{(1)}(\beta) = E_{\max}^{(1)}$ , d'où nous obtenons par le lemme 4.2.1 g), l'égalité

$$f_1(\beta) = \beta E_{\max}^{(1)} + S_1(E_{\max}^{(1)}) = \beta E_{\max}^{(1)}. \quad (4.5.52)$$

Pour déterminer  $\beta_c^{(1)}$ , nous remarquons que, par l'équation (4.2.15),  $\beta_c^{(1)}$  vérifie l'égalité

$$\begin{aligned}\beta_c^{(1)} &= -\left(-\frac{1}{s_1^2}\left(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}) - \frac{y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})}{s_1^2} - \frac{y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))}{2s_1^2},\end{aligned}\quad (4.5.53)$$

d'où il découle que

$$\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}) = s_1^2\beta_c^{(1)} + \frac{y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))}{2}.\quad (4.5.54)$$

De plus, par (4.2.3), nous avons l'équation

$$\begin{aligned}S_1(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})) &= \frac{\log 2}{2} - \frac{\left(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}) - \frac{1}{2}y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))\right)^2}{2s_1^2} - I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) \\ 0 &= \frac{\log 2}{2} - \frac{(s_1^2\beta_c^{(1)})^2}{2s_1^2} - I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) \\ 0 &= \log 2 - s_1^2\beta_c^{(1)2} - 2I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))),\end{aligned}\quad (4.5.55)$$

et alors

$$\beta_c^{(1)} = \frac{1}{s_1}\sqrt{\log 2 - 2I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})))}.\quad (4.5.56)$$

Par le lemme 2.2.2 c) appliqué à la fonction  $\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}[\log \cosh(2t_1h_1)]$ , nous avons que la fonction  $I_1(y)$  vérifie l'équation

$$I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) = y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))\tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) - \varphi_1(\tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))))),\quad (4.5.57)$$

telle que

$$\varphi_1'(\tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})))) = y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})).\quad (4.5.58)$$

où, par (2.2.10), nous obtenons

$$I_1'(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) = \tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))),\quad (4.5.59)$$

Par l'identité (4.2.10), nous avons

$$\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}) = \frac{y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))}{2} + 2s_1^2\tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))),\quad (4.5.60)$$

et par l'identité (4.5.54), nous obtenons

$$\frac{\beta_c^{(1)}}{2} = \tau_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))). \quad (4.5.61)$$

De plus, par le lemme 2.2.1 appliqué à la fonction  $\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}[\log \cosh(2t_1 h_1)]$ , nous obtenons  $\varphi_1'(t) = \mathbf{E}[\tanh(2t_1 h_1)]$ , il en découle que

$$y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)})) = \varphi_1'\left(\frac{\beta_c^{(1)}}{2}\right) = \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_c^{(1)} h_1]. \quad (4.5.62)$$

Alors, par (4.5.57), nous obtenons

$$I_1(y_1^*(\mathcal{E}^{(1)}(\beta_c^{(1)}))) = \frac{\beta_c^{(1)}}{2}\mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_c^{(1)} h_1] - \frac{1}{2}\mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c^{(1)} h_1)], \quad (4.5.63)$$

d'où, par l'égalité (4.5.56), il s'ensuit que

$$\beta_c^{(1)} = \frac{1}{s_1} \sqrt{\log 2 - \left( \beta_c^{(1)} \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_c^{(1)} h_1] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c^{(1)} h_1)] \right)}. \quad (4.5.64)$$

Par (4.5.47) et (4.5.48), nous en déduisons que

$$\beta_{c,1} + \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_{c,1} h_1] = \beta_c^{(1)} + \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_c^{(1)} h_1], \quad (4.5.65)$$

c'est-à-dire

$$\beta_{c,1} = \beta_c^{(1)}, \quad (4.5.66)$$

étant donné que, par le lemme 2.2.1 c), la fonction  $x \mapsto x + \mathbf{E}[h_1 \tanh x h_1]$  est strictement croissante, et donc injective.

Pour  $\beta_{c,2}$ , remarquons que la fonction d'énergie libre (4.5.44) s'apparente à (4.5.52), et alors par un argument similaire, nous obtenons

$$\beta_{c,2} = \frac{1}{s_2} \sqrt{\log 2 - (\beta_{c,2} \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta_{c,2} h_1] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_{c,2} h_1)])}, \quad (4.5.67)$$

où

$$\mathcal{E}(\beta) - E_{\max}^{(1)} = s_2^2 \beta + \frac{y_2^*(\mathcal{E}(\beta))}{2}, \quad y_2^*(\mathcal{E}(\beta)) = \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1] \quad (4.5.68)$$

et

$$I_1(y_2^*(\mathcal{E}(\beta))) = \frac{\beta}{2} \mathbf{E}[h_1 \tanh \beta h_1] - \frac{1}{2} \mathbf{E}[\log \cosh(\beta h_1)]. \quad (4.5.69)$$

Il ne reste qu'à caractériser la fonction d'énergie libre lorsque  $\beta_{c,1} \leq \beta < \beta_{c,2}$ . À partir de l'équation (4.5.44), nous avons

$$f(\beta) = \beta \left( s_2^2 \beta + \frac{y_2^*(\mathcal{E}(\beta))}{2} + E_{\max}^{(1)} \right) + \frac{\log 2}{2} - \frac{(\mathcal{E}(\beta) - \frac{1}{2} y_2^*(\mathcal{E}(\beta)))^2}{2s_2^2} - I_1(y_2^*(\mathcal{E}(\beta))) \quad (4.5.70)$$

et donc

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta E_{\max}^{(1)} + \frac{\log 2}{2} + s_2^2 \beta^2 + \frac{\beta}{2} \mathbf{E} [h_1 \tanh \beta h_1] - \frac{(s_2^2 \beta)^2}{2s_2^2} \\ &\quad - \left( \frac{\beta}{2} \mathbf{E} [h_1 \tanh \beta h_1] - \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(\beta h_1)] \right) \\ &= \beta E_{\max}^{(1)} + \frac{\log 2}{2} + \frac{s_2^2 \beta^2}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{E} [\log \cosh(\beta h_1)]. \end{aligned} \quad (4.5.71)$$

□

Nous terminons cette section par la démonstration du corollaire 1.2.1.

**DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 1.2.1.** Lorsque  $s_1 \leq s_2$ , les équations (4.5.33) et (4.5.38) impliquent que

$$E_{\max} = \mathcal{E}(\beta_c) = \beta_c + \mathbf{E} [h_1 \tanh \beta_c h_1]. \quad (4.5.72)$$

Considérons le cas  $s_1 > s_2$ . Par les équation (4.5.64) et (4.5.65), nous obtenons l'équation implicite

$$\beta_{c,1} = \frac{1}{s_1} \sqrt{\log 2 - (\beta_{c,1} \mathbf{E} [h_1 \tanh \beta_{c,1} h_1] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_{c,1} h_1)])}. \quad (4.5.73)$$

De plus, par les équations (4.5.54) et (4.5.62) en remplaçant  $\beta$  par  $\beta_{c,1}$ , nous obtenons

$$E_{\max}^{(1)} = s_1^2 \beta_{c,1} + \frac{\mathbf{E} [h_1 \tanh \beta_{c,1} h_1]}{2}. \quad (4.5.74)$$

Par un argument similaire, nous avons obtenons la même égalité pour  $\beta_{c,2}$ , soit

$$E_{\max}^{(2)} = s_2^2 \beta_{c,2} + \frac{\mathbf{E} [h_1 \tanh \beta_{c,2} h_1]}{2}. \quad (4.5.75)$$

□

# Chapitre 5

---

## AUTRES RÉSULTATS, DISCUSSION ET CONJECTURES

Dans cette dernière partie de la thèse, nous présentons les résultats généraux propres aux modèles discutés aux chapitres 3 et 4, nommément le modèle GREM et le modèle GREM avec CMA. Pour conclure, nous formulons une conjecture à propos des statistiques des valeurs extrêmes d'un modèle connexe, celui de la marche aléatoire branchante (MAB) avec CMA. À la lumière des nouvelles techniques développées dans cet ouvrage, nous pouvons analyser les propriétés macroscopiques de ce modèle, et peut-être même celles microscopiques.

La section 5.1 porte sur les résultats du maximum, de l'entropie et de l'énergie libre du modèle GREM à  $M$  niveaux. Les statistiques analogues au modèle GREM à  $M$  niveaux avec CMA sont précisées à la section 5.2. Nous terminons, à la section 5.3, par une conjecture concernant les valeurs du maximum, de l'entropie et de l'énergie libre du modèle MAB avec CMA.

### 5.1. MODÈLE GREM À $M$ NIVEAUX

Le modèle GREM( $\mathbf{s}, \lambda$ ) à  $M$  niveaux est défini par les paramètres

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_M), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M), \quad (5.1.1)$$

où  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M = 1$  et  $s_j > 0$  pour  $1 \leq j \leq M$ . Sans perte de généralité, nous supposons que  $\lambda_j N$  est un entier pour tout  $j$ . L'espace des configurations  $\Sigma_N$  est divisé de telle sorte que  $\sigma \in \Sigma_N$  est donné par le  $M$ -tuple  $\sigma = (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(M)})$ , où  $\sigma^{(j)}$  est un vecteur de longueurs  $(\lambda_j - \lambda_{j-1})N$  dont les entrées sont  $+1$  ou  $-1$ . Il s'ensuit que pour chaque  $j$ , il y a  $2^{\lambda_j N}$  configurations partielles  $(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(j)})$  de longueur  $\lambda_j N$ . Le modèle sur  $\Sigma_N$  est donné par l'hamiltonien

$$H_N^{(G,M)}(\sigma) = \sum_{j=1}^M X_N^{(j)}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(j)}), \quad (5.1.2)$$

où les variables  $X_N^{(j)}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(j)})$  sont indépendantes (en  $j$  et pour chaque  $(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(j)})$ ) de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance  $s_j^2(\lambda_j - \lambda_{j-1})$ . (Notons ici que nous changeons légèrement la notation du chapitre 3 pour le GREM à deux niveaux. En fait, nous écrivons  $s_1^2\lambda_1$  et  $s_2^2(1 - \lambda_1)$  au lieu de  $s_1^2$  et  $s_2^2$  respectivement.)

Considérons la fonction étagée définie par

$$s(u) = s_1 \mathbf{1}_{[0, \lambda_1]}(u) + \sum_{j=2}^M s_j \mathbf{1}_{(\lambda_{j-1}, \lambda_j]}(u). \quad (5.1.3)$$

Les valeurs extrêmes sont contrôlées par la fonction linéaire par morceaux donnée par

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^t s(u)^2 du. \quad (5.1.4)$$

Plus précisément, comme nous pouvons le constater par les énoncés des théorèmes 1, 2 et 3, les statistiques définies en (1.1.7), (1.1.9) et (1.1.10) dépendent de l'enveloppe concave de  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire,

$$\bar{\mathcal{J}}(t) = \int_0^t \bar{s}(u)^2 du, \quad (5.1.5)$$

où  $\bar{s}$  est l'unique fonction étagée, prenant les valeurs  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_m$ , telle que  $m \leq M$  et

$$s(u) = \bar{s}_1 \mathbf{1}_{[0, \bar{\lambda}_1]}(u) + \sum_{j=2}^m \bar{s}_j \mathbf{1}_{(\bar{\lambda}_{j-1}, \bar{\lambda}_j]}(u). \quad (5.1.6)$$

Notons que les valeurs  $\bar{s}_1^2, \bar{s}_2^2, \dots, \bar{s}_m^2$  représentent les variances effectives du modèle, ce qui nous permet de considérer le système comme une superposition de  $m$  modèles REM avec les variances respectives  $\bar{s}_1^2, \bar{s}_2^2, \dots, \bar{s}_m^2$ . Comme  $\bar{\mathcal{J}}$  est l'enveloppe concave de  $\mathcal{J}$ , nous avons que  $\{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m\} \subseteq \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M\}$  (voir la figure 5.1).

Nous avons le théorème suivant (voir [8, 7, 2]).

**Théorème A.** *Soit le modèle  $\text{GREM}(\mathbf{s}, \lambda)$  à  $M$  niveaux sur  $\Sigma_N$  défini en (5.1.2). Alors le premier ordre du maximum, l'entropie et l'énergie libre se réduisent à ceux d'un GREM à  $m \leq M$  niveaux avec les paramètres  $\bar{\mathbf{s}} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m)$  et  $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$  tels que définis par la concavification  $\bar{\mathcal{J}}$  donné en (5.1.5).*

*En particulier, le modèle possède  $m$  transitions de phase aux températures inverses critiques*

$$\beta_{c,j} = \frac{1}{\bar{s}_j} \sqrt{2 \log 2}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (5.1.7)$$

*et le premier ordre du maximum est donné par*

$$E_{\max}^{(G,M)} = \sum_{j=1}^m \bar{s}_j \sqrt{2 \log 2} = \sum_{j=1}^m \beta_{c,j} \bar{s}_j^2 (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_{j-1}). \quad (5.1.8)$$

## MODÈLE GREM À $M$ NIVEAUX

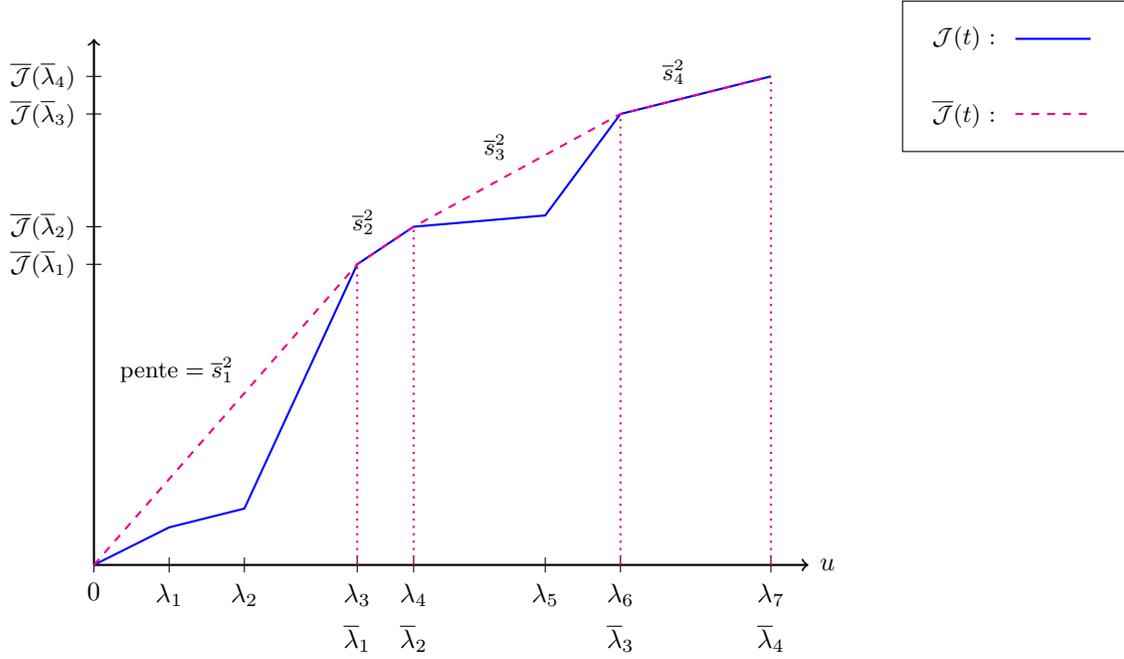


FIGURE 5.1. Les fonctions  $\mathcal{J}$  et  $\bar{\mathcal{J}}$  avec  $M = 7$  et  $m = 4$ .

### 5.2. MODÈLE GREM À $M$ NIVEAUX AVEC CMA

Les techniques développées au chapitre 4 à l'aide de la théorie des grandes déviations s'étendent au modèle GREM à  $M$  niveaux avec CMA. En effet, considérons l'hamiltonien

$$H_N^{(M)}(\sigma) = \sum_{j=1}^M X_N^{(j)}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(j)}) + Y_N(\sigma), \quad (5.2.1)$$

où le champ magnétique est donné par

$$Y_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i \quad (5.2.2)$$

tel que défini à l'équation (4.1.1) avec  $\mathbf{h} = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  étant une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont le troisième moment est fini,  $\mathbf{E}|h_1|^3 < \infty$ .

Rappelons que l'effet du CMA tel que constaté aux théorèmes 1, 2 et 3, consiste à réduire de manière effective l'espace des configurations. Le même effet se produit pour le modèle GREM à  $M$  niveaux avec CMA, et nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème B.** *Soit le modèle  $\text{GREM}(\mathbf{s}, \lambda)$  à  $M$  niveaux sur  $\Sigma_N$  avec CMA défini en (5.2.1). Alors le premier ordre du maximum, l'entropie et l'énergie libre se réduisent à ceux d'un GREM à  $m \leq M$  niveaux en présence d'un CMA avec les paramètres  $\bar{\mathbf{s}} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m)$  et  $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$  tels que définis par la concavification  $\bar{\mathcal{J}}$  donné en (5.1.5).*

En particulier, le modèle possède  $m$  transitions de phase aux températures inverses critiques définies par l'équation

$$\beta_{c,j} = \frac{\sqrt{2}}{\bar{s}_j} (\log 2 - (\beta_{c,j} \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,j} h_1)] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_{c,j} h_1)]))^{1/2}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (5.2.3)$$

et le premier ordre du maximum est donnée par

$$E_{\max}^{(G,M)} = \sum_{j=1}^m (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_{j-1}) \cdot (\bar{s}_j^2 \beta_{c,j} + \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,j} h_1)]). \quad (5.2.4)$$

Notons que comme pour le cas à deux niveaux, les températures inverses sont bien définies par l'équation, car la fonction

$$\beta_{c,j} \mapsto \log 2 - (\beta_{c,j} \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_{c,j} h_1)] - \mathbf{E} [\log \cosh(\beta_{c,j} h_1)]) \quad (5.2.5)$$

est décroissante. La démonstration du théorème B imite celle présentée au chapitre 4 pour le modèle GREM à deux niveaux avec CMA.

### 5.3. MARCHE ALÉATOIRE BRANCHANTE (MAB) AVEC CMA

Les techniques développées au chapitre 4 nous permettent fort probablement de comprendre un modèle plus complexe, la marche aléatoire branchante (MAB) avec CMA. Dans ce modèle, le nombre de niveaux,  $M$ , dépend de  $N$ , et en fait  $M = N$ . Son hamiltonien est donné par

$$H_N^{(MC)}(\sigma) = \sum_{j=1}^N X_N^{(j)}(\sigma_1, \dots, \sigma_j) + Y_N(\sigma). \quad (5.3.1)$$

Les variables  $X_N^{(j)}(\sigma_1, \dots, \sigma_j)$ ,  $1 \leq j \leq N$ , sont indépendantes et de même loi gaussienne centrée de variance 1. Nous pouvons représenter  $H_N^{(MC)}(\sigma)$  comme un champ gaussien indexé par les feuilles d'un arbre binaire à  $n$  générations où les variables  $X_N^{(j)}(\sigma_1, \dots, \sigma_j) + h_j \sigma_j$  se situent sur les arêtes. La marche aléatoire pour la feuille  $\sigma$  s'obtient en additionnant les variables aléatoires le long du chemin partant de la racine jusqu'à la feuille  $\sigma$ . Le CMA est défini à chaque génération et corrèle les différents accroissements à chaque niveau donné (voir la figure 5.2).

À la lumière des théorèmes 1, 2 et 3, ainsi que du théorème B, nous prévoyons que le premier ordre du maximum soit linéaire comme fonction des niveaux. De plus, comme la variance est constante pour la MAB, nous nous attendons à ce que le maximum soit de la forme

$$E_{\max}^{(CM)} = \beta_c + \mathbf{E} [h_1 \tanh(\beta_c h_1)], \quad (5.3.2)$$

MODÈLE MAB AVEC CMA

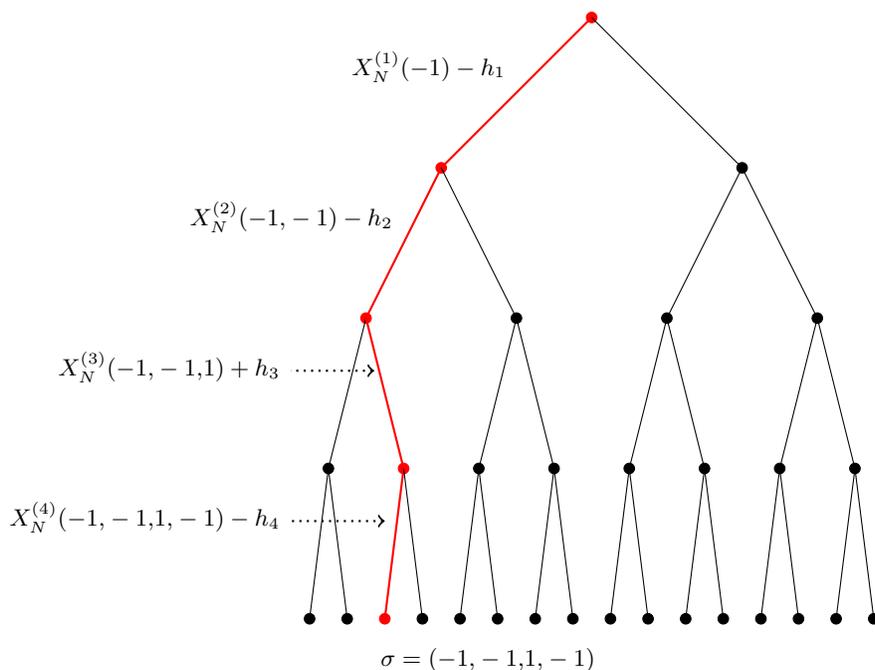


FIGURE 5.2. Marche aléatoire branchante avec CMA lorsque  $M = 4$ .

où la température inverse critique vérifie l'équation

$$\beta_c = \sqrt{2}(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)]))^{1/2}, \quad (5.3.3)$$

comme pour le cas du modèle REM avec CMA! (proposition 1.3.1). Cette équivalence demeure vraie entre le modèle REM et la MAB sans CMA. Nous nous attendons à ce que les techniques permettant d'établir ce résultat puissent s'étendre au cas avec un CMA. Cette fois la réduction de l'espace d'état mène à une interprétation intéressante. Le branchement dont le taux valait 2 se voit réduit de manière effective au nouveau taux

$$\exp(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)])) < 2. \quad (5.3.4)$$

(Il n'y a pas d'ambiguïté à considérer une marche aléatoire sur un arbre de Galton-Watson où le taux de branchement prend une valeur autre qu'un entier). Nous en arrivons à la conjecture suivante.

**Conjecture 1.** *Soit la marche aléatoire branchante (MAB) sur  $\Sigma_N$  avec CMA telle que définie en (5.3.1). Alors le premier ordre du maximum, l'entropie et l'énergie libre se réduisent à ceux d'une MAB sans CMA avec un taux de branchement*

$$\exp(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)])) < 2. \quad (5.3.5)$$

*En particulier, le premier ordre du maximum, l'entropie et l'énergie libre se réduisent à ceux du REM avec CMA dont la température critique inverse vérifie l'équation*

$$\beta_c = \sqrt{2}(\log 2 - (\beta_c \mathbf{E}[h_1 \tanh(\beta_c h_1)] - \mathbf{E}[\log \cosh(\beta_c h_1)]))^{1/2}. \quad (5.3.6)$$

Il est concevable que le principe de réduction de l'espace des configurations due à l'effet du CMA se propage aux statistiques extrêmes plus fines que celles macroscopiques considérées dans cette thèse.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Louis-Pierre Arguin and Nicola Kistler. Microcanonical Analysis of the Random Energy Model in a Random Magnetic Field. *J. Stat. Phys.*, 157(1) :1–16, 2014.
- [2] Louis-Pierre Arguin and Frederic Ouimet. Extremes of the two-dimensional gaussian free field with scale-dependent variance. *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, XIII(2) :779–808, 2016.
- [3] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.
- [4] Erwin Bolthausen and Alain-Sol Sznitman. *Ten lectures on random media*, volume 32 of *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [5] Anton Bovier. *Statistical mechanics of disordered systems*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. A mathematical perspective.
- [6] Anton Bovier and Anton Klimovsky. Fluctuations of the partition function in the generalized random energy model with external field. *J. Math. Phys.*, 49(12) :125202, 27, 2008.
- [7] Anton Bovier and Irina Kurkova. Derrida’s generalised random energy models. I. Models with finitely many hierarchies. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 40(4) :439–480, 2004.
- [8] D. Capocaccia, M. Cassandro, and P. Picco. On the existence of thermodynamics for the generalized random energy model. *J. Statist. Phys.*, 46(3-4) :493–505, 1987.
- [9] Harold Cramér. Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 736 :5–23, 1938.
- [10] Luiz O. de Oliveira Filho, Francisco Alexandre da Costa, and Carlos S. O. Yokoi. Random-energy model in random fields. *Phys. Rev. E*, 74 :031117, Sep 2006.
- [11] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Corrected reprint of the second (1998) edition.
- [12] Frank den Hollander. *Large deviations*, volume 14 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [13] Bernard Derrida. Random-energy model : Limit of a family of disordered models. *Phys. Rev. Lett.*, 45 :79–82, Jul 1980.
- [14] Bernard Derrida. Random-energy model : An exactly solvable model of disordered systems. *Phys. Rev. B*, 24 :2613–2626, Sep 1981.

- [15] Bernard Derrida. A generalization of the random energy model which includes correlations between energies. *J. Physique Lett*, 46 :401–407, May 1985.
- [16] T. C. Dorlas and J. R. Wedagedera. Large deviations and the random energy model. *Internat. J. Modern Phys. B*, 15(1) :1–15, 2001.
- [17] S F Edwards and P W Anderson. Theory of spin glasses. ii. *Journal of Physics F : Metal Physics*, 6(10) :1927, 1976.
- [18] Theodor Eisele. On a third-order phase transition. *Comm. Math. Phys.*, 90(1) :125–159, 1983.
- [19] G. H. Hardy. *A course of pure mathematics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, tenth edition, 1992.
- [20] Nicola Kistler. Derrida’s random energy models. From spin glasses to the extremes of correlated random fields. In *Correlated random systems : five different methods*, volume 2143 of *Lecture Notes in Math.*, pages 71–120. Springer, Cham, 2015.
- [21] Jacques Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1964.
- [22] Enzo Olivieri and Pierre Picco. On the existence of thermodynamics for the random energy model. *Communications in Mathematical Physics*, 96(1) :125–144, 1984.
- [23] Frédéric Ouimet. Geometry of the Gibbs measure for the discrete 2D Gaussian free field with scale-dependent variance. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 14(2) :851–902, 2017.
- [24] Frédéric Ouimet. Maxima of branching random walks with piecewise constant variance. 2017.
- [25] G. Polya. *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.
- [26] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. *A course on large deviations with an introduction to Gibbs measures*, volume 162 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [27] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [28] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [29] David Sherrington and Scott Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :1792–1796, Dec 1975.
- [30] Adam Shwartz and Alan Weiss. *Large deviations for performance analysis*. Stochastic Modeling Series. Chapman & Hall, London, 1995. Queues, communications, and computing, With an appendix by Robert J. Vanderbei.
- [31] N. E. Steenrod, P. R. Halmos, M. M. Schiffer, and J. A. Dieudonné. *How to Write Mathematics*. American Mathematical Society, 1983.
- [32] S. R. S. Varadhan. Asymptotic probabilities and differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 19 :261–286, 1966.

- [33] S. R. S. Varadhan. *Large deviations and applications*, volume 46 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1984.



