



Université de Montréal
Faculté des arts et des sciences
Département de sciences économiques

CAHIER 9617

**ACTIFS FINANCIERS ET
THÉORIE DE LA CONSOMMATION**

Marie Allard¹, Camille Bronsard² et Christian Gouriéroux³

- ¹ École des Hautes Études Commerciales (HEC), Montréal
- ² Département de sciences économiques and Centre de recherche et développement en économique (C.R.D.E.), Université de Montréal
- ³ CREST-CEPREMAP, Paris

Juillet 1996

Les auteurs remercient Richard Guay, Robert Kast, Guy Laroque et Jean-Charles Rochet qui ont lu une première version de cet article et les ont fait profiter de critiques constructives. Ils remercient aussi le CRSH du Canada et le Fonds FCAR. Marie Allard a bénéficié de l'hospitalité de l'IDEI (Toulouse) pendant une bonne partie de la recherche.

Ce cahier a également été publié au Centre de recherche et développement en économique (C.R.D.E.) (publication no 2196).

Dépôt légal - 1996
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

ISSN 0709-9231

ABSTRACT

In this paper, the theory of consumers is extended to cover their choices of savings and financial investments. To do so, the standard theory, the quantitative rationing approach and the characteristics approach are simultaneously utilized. A complete system of demands involving physical goods and services, financial assets and virtual prices (of eventual elementary contingent assets) is derived. Its optimal portfolio formula is operational. This formula contains the one of Roy-Markowitz-Tobin and is reduced to this last formula under an assumption which is always sufficient and becomes necessary and sufficient if (financial) markets are complete. The local structure of the complete system is studied and compared with the Slutsky canonical structure. The internal structure of substitution-complementarity among goods and services and the internal structure of substitution-complementarity among financial assets are linked together. A convergence process toward the optimal portfolio is defined. An adjustment formula to the creation of new assets is given. A liquidity premium formula is derived. The Roy-Markowitz-Tobin formula is finally reinterpreted as an approximate step towards a convergence or an adjustment process.

Key words : goods and services, financial assets, virtual prices, characteristics, quantity rationing, optimal portfolio, substitution-complementarity, Slutsky local structure, convergence process, liquidity premium, adjustment, new assets

RÉSUMÉ

Dans cet article, pour étendre la théorie du consommateur à ses choix d'épargne et de placements, on utilise à la fois la théorie usuelle, celle des caractéristiques et celle du rationnement quantitatif. On en déduit un système complet de demandes comprenant simultanément les quantités de biens et de services physiques, les quantités d'actifs financiers et les prix virtuels des actifs contingents élémentaires éventuels. La formule du portefeuille optimal est opérationnelle, contient celle de Roy-Markowitz-Tobin et s'y réduit, moyennant une hypothèse qui est toujours suffisante et devient nécessaire et suffisante dans le cas où les marchés financiers sont complets. On étudie ensuite la structure locale du système complet et montre ses points de ressemblance et de dissemblance avec la structure canonique de Slutsky. Ceci permet, en particulier, de lier entre elles la structure interne de substitution-complémentarité des biens et services et celle des actifs financiers, de définir une procédure de convergence vers le portefeuille optimal, une formule d'ajustement à la création de nouveaux actifs, une formule de prime de liquidité. Enfin, la connaissance des structures locales permet de réinterpréter la formule de Roy-Markowitz-Tobin comme un pas approximatif dans une procédure de convergence ou d'ajustement.

Mots clés : biens et services, actifs financiers, prix virtuels, caractéristiques, rationnement quantitatif, portefeuille optimal, substitution-complémentarité, structure locale de Slutsky, procédure de convergence, prime de liquidité, ajustement, nouveaux actifs



1 Introduction

L'objectif de cet article est d'établir, entre la théorie des choix de portefeuille et celle des choix de consommation, une nouvelle synthèse qui respecte le caractère de simplicité et le niveau de généralité qui sont usuels quand chaque théorie est prise séparément. Pour y arriver, nous allons procéder en deux étapes.

Dans la première étape, nous étendrons au cas des actifs financiers la théorie des choix telle qu'elle apparaît dans les exposés classiques de Malinvaud (1989) et Barten et Bohm (1982) et celle des caractéristiques, telle qu'élaborée par Becker (1965), Lancaster (1966) et Rosen (1974). Ceci permettra de définir et de caractériser une structure intégrée des demandes de biens de consommation, d'offres des diverses qualités de travail, de demandes et d'offres d'actifs financiers (nominiaux ou réels). Cette façon de faire contiendra aisément la théorie usuelle de la demande, la réinterprétation qu'en donne Arrow dans son modèle de 1953, l'extension de ce dernier par Radner (1972) ainsi que d'autres représentations du consommateur apparues dans divers modèles d'équilibre général et d'optimalité contrainte [voir, e.g., Geanakoplos et Polemarchakis (1986), Balasko et Cass (1989), Geanakoplos et Mas-Colell (1989), Laffont (1991), Duffie (1992)].

De même, sa partie choix de portefeuille contiendra (mais moins aisément) le modèle canonique des placements financiers qu'il faut associer aux noms de Roy (1952), Markowitz (1952, 1959) et Tobin (1958). Cependant, si on en reste au point de vue *global* (celui du choix d'un portefeuille optimal en une seule fois), la condition suffisante de conciliation (qui devient aussi nécessaire si les marchés financiers sont complets) est trop particulière pour que ce modèle soit tenu pour naturel.

D'où la seconde étape qui conduit à une conciliation *locale* (celle qu'on peut concevoir quand le portefeuille optimal est choisi par une suite d'ajustements marginaux). Elle consiste à développer l'étude de la structure locale du modèle de synthèse jusqu'au point où le modèle de Roy, Markowitz et Tobin y prene place de façon naturelle. Cela est nécessaire si on se place d'un point de vue financier, parce que de façon presque indépendante des contributions citées plus haut, le modèle de Roy, Markowitz et Tobin a conduit au modèle d'évaluation des actifs financiers de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) et à ses diverses généralisations [depuis Merton (1972) jusqu'à Demange et Rochet (1992)] qui, elles-mêmes, conduisent aussi à un équilibre général financier. Cela est enrichissant du point de vue économique, parce que la démarche en question met en scène deux vedettes inattendues : la théorie

du rationnement quantitatif et celle des procédures de convergence vers un maximum.

Depuis Tobin et Houthakker (1951), la théorie du rationnement quantitatif a été utilisée à la fois pour étudier les fondements microéconomiques de la macroéconomie [Bénassy (1976), Laroque (1981)], ceux de la macroéconométrie [Gouriéroux, Laffont et Monfort (1980), Neary et Roberts (1980), Bronsard et Salvas-Bronsard (1980)], ceux de la structure interne des biens [Madden (1991), Barten et Bettendorf (1995)] et ceux des équilibres avec anticipations rationnelles [Bronsard, Salvas-Bronsard et Trognon (1995)]. Le fait que cette même structure se retrouve dans l'extension de la théorie de la demande au cas des actifs financiers contribue à unifier la microéconomie, la macroéconomie, la finance et l'économétrie et permet de concevoir une synthèse toujours plus vaste entre ces disciplines.

Depuis la fin des années 50 la dynamique est apparue en théorie économique à la fois en théorie de la croissance, dans celle de la stabilité de l'équilibre général et dans les procédures de détermination d'un optimum. C'est dans ce dernier sens qu'on l'utilisera ici. On insistera sur le fait qu'elle donne une représentation dynamique du comportement du consommateur, complétant ainsi la représentation statique qui fait l'objet principal de la synthèse. On remarquera les deux interprétations justifiant la procédure choisie : la première est classique en mathématique, la seconde s'appuie sur les procédures MDP de Malinvaud (voir la présentation qu'il en fait pour l'allocation des biens privés dans ses Leçons) et de Drèze-de la Vallée Poussin (1971).

Au terme de la seconde étape, c'est-à-dire après avoir développé la structure locale du modèle de synthèse en utilisant, entre autres, certains éléments de la théorie du rationnement quantitatif et y avoir trouvé le principe d'une procédure de convergence, la formule de Roy, Markowitz et Tobin apparaîtra comme un pas, d'ailleurs approximatif, dans une procédure de convergence vers le portefeuille optimal ou comme « le » pas permettant d'ajuster à la création de nouveaux actifs un portefeuille déjà optimisé.

Telle est la synthèse.

La raison de sa généralité tient à l'élimination des hypothèses habituelles quant à la séparabilité de la fonction d'utilité, le choix et la grandeur des unités de compte, la structure des actifs financiers, le nombre ou la nature des biens de consommation et des prestations de travail, le régime de propriété en vigueur dans l'économie. Mais en même temps, cette structure enrichie n'est plus seulement un instrument d'unification, elle devient instrument de découverte en ce qu'elle permet de jeter un regard nouveau sur la

nature et la portée des opérations fondamentales du consommateur : consommation, travail, épargne et placement. Par exemple, elle permettra d'explicitier une formule passablement générale de prime de liquidité.

En effet, les hypothèses habituelles sont autant de conventions qui limitent la structure de substitution-complémentarité. Or, certains résultats en dépendent de façon cruciale : un équilibre avec marchés financiers incomplets est un optimum contraint s'il ne comporte qu'un bien [Diamond (1967)], mais ne l'est plus s'il en comporte plusieurs [Geanakoplos et Polemarchakis (1986)]; il est localement unique avec des actifs réels [Geanakoplos et Polemarchakis (1986)] et indéterminé avec des actifs nominaux [Cass (1985), Geanakoplos et Polemarchakis (1986), Balasko et Cass (1989), Geanakoplos et Mas-Colell (1989), Geanakoplos (1990)]; l'effet sur le bien-être social de la création d'un actif financier peut être positif comme négatif [Duffie et Jackson (1989), Allen et Gale (1991), Cass et Citanna (1993)]. Ces mêmes hypothèses restreignent évidemment la portée empirique des résultats obtenus : en éliminant l'hypothèse de propriété privée, c'est-à-dire en revenant aux fonctions de demande marshalliennes, nous nous donnons des spécifications qui peuvent servir de restrictions en microéconométrie sans cesser d'être utiles en théorie.

Évidemment, l'objet d'une théorie de la demande, même généralisée aux actifs financiers, n'est pas de résoudre tous les problèmes qui peuvent être suggérés par ce qui précède, mais d'en éclairer certains fondements. Par exemple, le lecteur ne trouvera pas ici de résultats définitifs sur l'indétermination réelle de l'équilibre général avec actifs financiers, mais il trouvera les théorèmes fondamentaux sur l'homogénéité de l'équilibre physique et financier du consommateur. De même, la question de la volatilité des rendements financiers se trouvera plongée dans une structure comportant plus de variables explicatives que d'habitude. La stratégie du consommateur, quant à ses placements, se traduira en fonctions de comportement et ces dernières seront dotées d'une structure locale non arbitraire.

Le reste de l'article se divise en quatre autres sections. Dans la section 2, on va définir le problème du consommateur et montrer que, sous des hypothèses et conventions plus générales et plus réalistes que celles posées d'habitude, les fonctions de demande et d'offre de biens, de services et d'actifs existent et sont continûment dérivables. Dans la section 3, nous étudierons leur structure locale. Ces fonctions possèdent une matrice jacobienne dont le rang est égal à la dimension de l'espace des biens et services, tant physiques que financiers. Ce dernier point montre que la demande marshallienne peut s'inverser comme d'habitude. De même, les fonctions de

valorisation d'actifs contingents élémentaires existent même en l'absence de ceux-ci, sont continûment dérivables et du rang de la dimension de leur espace d'arrivée, ce qui est fondamental en finance. L'accent est mis, dans cette section, sur la structure de substitution-complémentarité entre biens et actifs : la structure interne des actifs dépend de celle des biens. Dans la section 4, on reprend ces caractérisations en décomposant par la théorie du rationnement quantitatif et on établit l'effet de la présence d'actifs sur l'utilité. C'est dans cette section qu'on retrouvera une procédure de détermination du portefeuille optimal et une formule de prime de liquidité. On revient sur ces questions plus en détail à la section 5, en centrant l'exposé sur la création de nouveaux actifs dans un contexte où il en existe déjà un certain nombre. On applique ensuite ces résultats à la conciliation locale dont on a parlé plus haut et ce point sert aussi de conclusion. Enfin, les démonstrations utiles à la compréhension du texte en font partie, les autres font l'objet de deux annexes.

2 Le modèle

2.1 Description du modèle

De façon à simplifier la présentation, nous considérons un modèle à deux périodes 0 et 1. À la période 0, il y a incertitude sur l'état s , $s = 1, \dots, S$ de l'économie, qui se réalisera à la période 1. L'individu va choisir au mieux ses consommations de biens, celles de la période 0, résumées par un vecteur de consommation x_0 , de taille L_0 , et celles de la période 1 dans chaque état possible, notées x_{1s} , $s = 1, \dots, S$, de taille L_s . Nous désignons par p_0 les prix des biens à la période 0 et par p_{1s} leur prix à la période 1 dans l'état s . L'individu dispose de revenus w_0 et w_{1s} respectivement. Prix et revenus sont exprimés en unités monétaires courantes. Cette hypothèse correspond à la pratique des applications et aux données disponibles. Elle diffère de la présentation économique traditionnelle où prix et revenus sont exprimés dans une même unité monétaire (par exemple, celle de l'état 0). Nous verrons par la suite comment passer d'une présentation à l'autre.

L'individu peut transférer du revenu entre les périodes en se constituant un portefeuille d'actifs financiers. Dans le cas général, il existe sur le marché N actifs. Ils ont un prix q_0 à la période 0, et des valeurs q_{1s} à la période suivante dans les états s . Ces prix sont également exprimés en unité monétaire courante. Nous notons y la composition du portefeuille constitué par l'individu à la date 0.

Les contraintes budgétaires sont :

$$(2.1) \quad p'_0 x_0 + q'_0 y = w_0, \text{ pour la période } 0,$$

$$(2.2) \quad p'_{1s} x_{1s} = q'_{1s} y + w_{1s}, \text{ pour la période } 1 \text{ et l'état } s.$$

Considérons une fonction d'utilité intertemporelle U définie sur un ensemble de consommation χ supposé ouvert, convexe, borné inférieurement et non vide. On suppose que U est fortement croissante (les dérivées premières existent partout et sont strictement positives) et fortement concave (les dérivées secondes existent partout et leur matrice est définie négative). L'individu est supposé maximiser U sous les contraintes budgétaires précédentes. On a donc le problème :

$$(2.3) \quad \underset{x_0, x_{1s}, y}{Max} (x_0, x_{1s}, \quad s = 1, \dots, S),$$

sous (2.1), (2.2).

Nous n'avons pas introduit de contraintes de positivité sur les quantités demandées. Pour ce qui concerne les demandes de biens, de telles contraintes sont souvent automatiquement satisfaites pour les formes usuelles de fonctions d'utilité. Pour ce qui concerne les actifs financiers, ceci suppose la possibilité d'achat à découvert au même prix. Par ailleurs, la fonction d'utilité a été prise sous une forme générale permettant en particulier à l'utilité de la consommation de dépendre de l'état qui se réalise.

Remarque 1 : Il faut noter que la formulation précédente recouvre le cas usuel, où l'utilité s'écrirait sous la forme :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} U(x_0, x_{1s}, \quad s = 1, \dots, S) &= u(x_0) + \rho \frac{E}{\Pi} u(x_{1s}) \\ &= u(x_0) + \rho \sum_s \pi(s) u(x_{1s}), \end{aligned}$$

où Π reflète les probabilités subjectives des états pour l'individu et où ρ est un coefficient d'escompte psychologique. Une telle forme apparaît cependant très restrictive, puisqu'elle suppose à la fois une décomposition additive entre périodes et entre états. Par ailleurs, la dépendance de l'utilité dans l'état s passe de façon ad hoc par l'intermédiaire de la probabilité $\pi(s)$.

Remarque 2 : La formulation précédente suppose implicitement que les prix et les revenus sont donnés pour l'individu dans chaque état s . Il faut cependant se garder

d'identifier l'état avec les valeurs possibles de ces prix et revenus. En effet, si nous plaçons ce comportement individuel à l'intérieur d'un modèle d'équilibre, les prix et revenus peuvent s'ajuster alors que les états doivent être définis ex-ante. Une façon usuelle de contourner cette difficulté consiste à se placer dans une économie d'échange où chaque individu disposerait d'allocations initiales pour chaque période et chaque état \bar{x}_0, \bar{x}_{1s} , son revenu étant alors : $w_0 = p'_0 \bar{x}_0, w_{1s} = p'_{1s} \bar{x}_{1s}$. L'état peut alors être assimilé à l'ensemble des dotations initiales possibles de tous les individus, dotations dont dépendront a posteriori les prix d'équilibre, prix qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement uniques. La distinction entre états et prix possibles dans un état est alors claire, du moins en principe, mais même alors, il faut se garder de les identifier. Cette remarque est importante, car les approches financières usuelles identifient état à évolution de prix [voir, par exemple, la technique de valorisation d'options proposée par Black et Scholes (1973)], et, ce faisant, commettent des erreurs sur le degré d'incomplétude du marché.

Dans la suite, nous emploierons des notations matricielles.

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{11} \\ \vdots \\ x_{1S} \end{pmatrix}$ est le vecteur de taille $L = L_0 + \sum_{s=1}^S L_s$ des consommations;

$P = \begin{pmatrix} p_0 & & & 0 \\ & p_{11} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_{1S} \end{pmatrix}$ est la matrice $L \times (S + 1)$ des prix;

$Q = (+q_0, -q_{11}, \dots, -q_{1S})$ est la matrice $(N, S + 1)$ des prix des actifs financiers;

$w = (w_0, w_{11}, \dots, w_{1S})'$ le vecteur $(S + 1, 1)$ des revenus.

Avec ces notations, le problème d'optimisation s'écrit :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{Max}_{x,y} & U(x) \\ \text{sous} & P'x = -Q'y + w. \end{cases}$$

2.2 Conditions du premier ordre

La définition même de la matrice P (où les prix sont strictement positifs) montre que les contraintes sont linéairement indépendantes. Le problème peut donc être résolu en

introduisant un lagrangien :

$$L = U(x) - \lambda' (P'x + Q'y - w) ,$$

où $\lambda = (\lambda_0, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1S})' = (\lambda_0, \lambda_1)'$ est un vecteur de $S + 1$ multiplicateurs. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$(2.6) \quad \begin{cases} U_x - P\lambda = 0 , \\ -Q\lambda = 0 , \\ -P'x - Q'y + w = 0 . \end{cases}$$

Sous cette forme, elles se prêtent bien à une dérivation par rapport à x, y, λ . Nous serons aussi amenés à les dériver par rapport aux prix et aux revenus, et il est utile de faire apparaître les linéarités dans ces variables.

Nous les écrivons alors sous la forme :

$$(2.7) \quad \begin{cases} U_x - \Lambda p = 0 , \\ -\Lambda^* q = 0 , \\ -X'p - Y'q + w = 0 , \end{cases}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_{L_0} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_{1S} I_{L_S} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_{11} \\ \vdots \\ p_{1S} \end{bmatrix},$$

avec

$$\Lambda^* = [\lambda_0 I_N, \lambda_{11} I_N, \dots, \lambda_{1S} I_N], \quad q = \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_{11} \\ \vdots \\ -q_{1S} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & & 0 \\ & x_{11} & \\ & & \dots \\ 0 & & & x_{1S} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y & & 0 \\ & y & \\ & & \dots \\ 0 & & & y \end{pmatrix}.$$

Les relations (2.6) et (2.7) montrent qu'à l'optimum il existe des multiplicateurs $\lambda_0, \lambda_{1s}, s = 1, 2, \dots, S$ tels que : a) les vecteurs d'utilités marginales $U_{x_0}, U_{x_{1s}}, s = 1, 2, \dots, S$ sont respectivement proportionnels aux prix courants de la période 0 p_0 et de la période 1 dans l'état s $p_{1s}, s = 1, 2, \dots, S$; b) l'utilité marginale

d'un réaménagement du portefeuille est nulle (on peut « lire » $\lambda'Q' = 0$ comme $\frac{\partial U^*}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$). Ces deux interprétations sont délicates. La première parce qu'elle suppose implicitement que les multiplicateurs de Lagrange contiennent des facteurs de conversion (coefficients d'escompte, prix d'Arrow ou d'état), la seconde parce qu'elle devient plus explicite si on considère une décomposition séquentielle de la maximisation. Pour les approfondir, nous allons d'abord fractionner notre problème d'optimisation, ce qui possède un intérêt propre comme nous le verrons dans les sections 4 et 5.

2.3 Une optimisation séquentielle

Comme nous souhaitons mettre en évidence les effets spécifiques dus à la présence des actifs financiers, il est utile d'introduire comme intermédiaire le problème d'optimisation en absence de tels actifs, c'est-à-dire le problème :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{Max}_x & U(x) \\ \text{sous} & P'x = R, \end{cases}$$

où $R = (R_0, R_{11}, \dots, R_{1S})$ est un vecteur de revenus. Ce problème diffère du problème classique du consommateur par le nombre de contraintes budgétaires, ici $S + 1$, devant être prises en compte.

Le problème (2.8) peut se résoudre à l'aide d'un lagrangien

$$L_0 = U(x) - \lambda'_0 [P'x - R]$$

où λ_0 est un vecteur de $S+1$ multiplicateurs. Les conditions du premier ordre s'écrivent:

$$\begin{cases} U_x - P\lambda_0 = 0 \\ -P'x + R = 0 \end{cases}$$

A cause des hypothèses faites sur la fonction U et l'ensemble de consommation χ , ce problème admet une solution pour peu que la variété linéaire $P'x = R$ intersecte l'ensemble χ , ce qu'on peut interpréter comme une condition (de survivance) sur R . En effet, si x^0 est un point appartenant à la fois à χ et à $\{x \mid P'x = R\}$, il existe alors une surface d'indifférence $U(x) \leq U(x^0)$ telle que le problème de maximisation soit défini sur un compact, et cela précisément parce que χ est un ouvert [pour plus de détails, voir Balasko (1988) et Mas-Colell (1985)]. Le problème (2.8) possède donc une solution; elle est unique par la concavité de U et se caractérise par les conditions

du premier ordre précédentes. Nous notons :

$$(2.9) \quad \begin{cases} f_0(p, R) & \text{le système de demande correspondant,} \\ \lambda_0(p, R) & \text{le système de multiplicateurs,} \\ v_0(p, R) = U[f_0(p, R)] & \text{la fonction d'utilité indirecte.} \end{cases}$$

Lemme 1 : La matrice $\frac{\partial \lambda_0}{\partial R}$ est symétrique et définie négative.

Preuve : Comme pour le problème classique du consommateur, si on substitue (2.9) dans les conditions du premier ordre du problème (2.8), ces dernières deviennent des identités et sont différentiables. En différentiant par rapport à R , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \frac{\partial x}{\partial R} - P \frac{\partial \lambda_0}{\partial R} &= 0 \\ -P' \frac{\partial x}{\partial R} + I_{S+1} &= 0 \end{aligned}$$

où \mathcal{U} est la matrice hessienne de U . Dès lors :

$$\frac{\partial x'}{\partial R} \mathcal{U} \frac{\partial x}{\partial R} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R}$$

où $\frac{\partial x'}{\partial R}$ est de rang $S+1$ et \mathcal{U} définie négative. Le résultat sur $\frac{\partial \lambda_0}{\partial R}$ est donc immédiat. \square

La fonction d'utilité indirecte définie en (2.9) satisfait, quant à elle, le lemme suivant :

Lemme 2 : La fonction d'utilité indirecte v_0 est strictement croissante et strictement concave en R .

Preuve : Par le théorème de l'enveloppe, les dérivées de v_0 coïncident avec celles du lagrangien L_0 . Ainsi, différentiant par rapport à R , on a $\frac{\partial v_0}{\partial R} = \lambda'_0$. Puisque $\lambda'_0 > 0$ par les conditions du premier ordre du problème (2.8), v_0 est fortement croissante en R , a fortiori strictement croissante en ces variables. De plus, $\frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R}$ et v_0 est fortement concave en R par le lemme 1, à fortiori strictement concave en ces variables. \square

Le modèle d'optimisation (2.5) peut être résolu en deux étapes : une première maximisation est effectuée par rapport aux consommations x à composition y du

portefeuille donnée, puis on effectue une seconde optimisation par rapport à y après concentration de la fonction critère. Cette seconde optimisation s'écrit directement à l'aide de la fonction d'utilité indirecte v_0 introduite en (2.9) :

$$(2.10) \quad \underset{y}{\text{Max}} v_0(p, w - Q'y) .$$

Nous déduisons alors de cette remarque les résultats ci-dessous.

Propriété 1 : Si U est fortement croissante et fortement concave sur l'ensemble de consommation χ et que, dans les contraintes budgétaires, P , Q et w sont tels que :

- a) $\chi \cap \{x \mid P'x = w - Q'y\} \neq \emptyset$ pour au moins un y (survivance),
- b) $Q'y \not\geq 0$ pour tout y (absence d'opportunité d'arbitrage),
- c) $\text{rang } Q = N \leq S$, (non-redondance)

alors le problème d'optimisation (2.5) admet une solution unique (à la fois en x et en y).

On reviendra sur l'interprétation des conditions a), b) et c) en 2.4.4.

Preuve : Cette propriété d'existence et d'unicité de solution étant satisfaite pour la solution du problème (2.8), il nous suffit de la regarder pour celle du problème (2.10). Elle résulte de ce que les contraintes budgétaires vont borner l'ensemble de consommation par la condition b), et de ce que la stricte concavité de $y \mapsto v_0(p, w - Q'y)$ est assurée par la condition c) et la stricte concavité de v_0 .

□

Nous désignons par :

$$(2.11) \quad \begin{cases} x = f(p, q, w) , \\ y = g(p, q, w) , \\ \lambda = \lambda(p, q, w) , \end{cases}$$

les fonctions solutions de (2.5) : demande et offre de biens, demande et offre d'actifs, évaluations marginales (ou prix virtuels). On obtient alors immédiatement la propriété ci-dessous.

Propriété 2 :

$$\begin{aligned} f(p, q, w) &= f_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] , \\ \lambda(p, q, w) &= \lambda_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] , \\ v(p, q, w) &= \text{Max} [U(x) \text{ sous } P'x = -Q'y + w] , \\ &= v_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] . \end{aligned}$$

Ces liaisons précises entre les solutions des problèmes avec et sans actifs financiers seront évidemment utiles au niveau des interprétations. Par exemple, à l'optimum de la seconde optimisation $\text{Max}_y v_0(p, w - Q'y)$, on aura $\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial R'} (-Q') = -\lambda'_0 Q' = 0$, i.e., l'utilité marginale du réaménagement du portefeuille est nulle. Comme à l'optimum $\lambda = \lambda_0$, $\lambda'Q' = 0$ [condition du premier ordre de (2.5)] s'interprète de la même façon, d'où l'interprétation annoncée à la suite de (2.6) et (2.7). Elles seront aussi utiles quand on se donnera une représentation dynamique du comportement financier du consommateur et pour étudier l'effet de la création de nouveaux actifs financiers.

2.4 Quelques commentaires concernant les actifs financiers

2.4.1 Marchés complets - marchés incomplets

La condition de rang sur Q signifie qu'aucun actif ne doit apparaître redondant au sens où il s'interpréterait comme un portefeuille construit à partir des autres actifs (et donc, conduirait à une forme d'indétermination nominale). Elle implique en particulier que le nombre d'actifs N est inférieur ou égal au nombre d'états S . Lorsque $N = S$, le marché financier est suffisamment large pour permettre de couvrir l'incertitude sur l'état : le marché est complet. Dans le cas contraire, il ne peut y avoir couverture parfaite, le marché est incomplet avec une dimension d'incomplétude égale à $S - N$.

2.4.2 Assouplissement des contraintes

Mathématiquement, l'introduction d'actifs financiers dans le programme du consommateur permet de diminuer le nombre de contraintes budgétaires : le système de contraintes

$$P'x = w - Q'y ,$$

peut, après élimination de la composition y du portefeuille, se ramener à un système de dimension égale à la dimension d'incomplétude plus un : $S - N + 1$, dès que la

matrice Q est de plein rang N . En effet, si Q' est de rang maximal N , elle possède une inverse à gauche Q^- . Par exemple, $Q^- = [QQ']^{-1}Q$. Le système des contraintes budgétaires implique donc que

$$(2.12) \quad y = Q^- [w - P'x] .$$

Substituant dans le système initial, on a $P'x = w - Q'Q^- [w - P'x]$ donc

$$(2.13) \quad [I - Q'Q^-] [w - P'x] = 0 ,$$

où $[I - Q'Q^-]$ est une matrice $(S + 1, S + 1)$, mais de rang $S - N + 1$. Les deux cas extrêmes ($N = 0$ et $N = S$) correspondent à l'absence de marchés financiers et au cas de marchés financiers complets.

En l'absence de marchés financiers, le consommateur doit tenir compte de façon effective de toutes les contraintes :

$$p'_0 x_0 = w_0 \quad , \quad p'_{1s} x_{1s} = w_{1s} \quad , \quad s = 1, \dots, S ,$$

puisqu'alors $Q'Q^- = 0$ implique $P'x = w$.

Lorsque les marchés sont complets (la matrice Q est alors de rang S et $[I - Q'Q^-]$ de la forme $\theta \alpha'$ où θ est un vecteur non nul de taille $S + 1$), toutes les contraintes peuvent être agrégées en une seule, puisqu'alors $\alpha' [w - P'x] = 0$. Plus précisément, posons $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1S})$, tel que : $\alpha' Q' = 0$ ou après transposition $-\alpha_0 q_0 + \sum_{s=1}^S \alpha_{1s} q_{1s} = 0$; alors, la contrainte restante est :

$$\alpha_0 p'_0 x_0 + \sum_{s=1}^S \alpha_{1s} p'_{1s} x_{1s} = \alpha_0 w_0 + \sum_{s=1}^S \alpha_{1s} w_{1s} .$$

Il s'agit d'une contrainte globale : dépense totale égale revenu total, où les poids déduits des valeurs des actifs financiers donnent les taux de conversion entre les divers numéraires, définis de façon unique dans ce cadre de marchés complets.

Ce type d'agrégation directe peut aussi se produire de façon partielle. Ainsi, supposons que l'un des actifs, disons le premier, soit un actif contingent élémentaire (ou option digitale, ou actif Arrow-Debreu) d'un prix q_{01} à la date 0, rapportant une

unité de numéraire 1 à la date 1 si l'état s_0 se réalise, et 0 s'il ne se réalise pas. Nous aurions :

$$p'_0 x_0 + q_{01} y_1 + \sum_{j=2}^N q_{0j} y_j = w_0 ,$$

$$p'_{s_0} x_{1,s_0} = w_{1s_0} + y_1 + \sum_{j=2}^N q_{1,s_0,j} y_j .$$

Par combinaison, on voit qu'on peut immédiatement assimiler la période 0 à la période 1 avec état s_0 , et remplacer ces deux contraintes par :

$$p'_0 x_0 + q_{01} p'_{s_0} x_{1,s_0} = w_0 + q_{01} w_{1s_0} + \sum_{j=2}^N (-q_{0j} + q_{01} q_{1,s_0,j}) y_j .$$

Le prix de cet actif contingent élémentaire sert directement de taux de conversion entre ces deux numéraires. La relation (2.13) permet de multiplier les exemples. Pour préciser l'importance de ces commentaires, notons que

- i) la demande de portefeuille peut s'exprimer sous la forme (2.12). Après substitution de (2.11) en (2.12), on a

$$(2.14) \quad y = g(p, q, w) = Q^- [w - P' f(p, q, w)] ,$$

et c'est bien cette représentation qui, d'une part, conduira à généraliser les formules à la Roy-Markowitz-Tobin et, d'autre part, expliquera la forme particulière de la substitution complémentarité;

- ii) la « forme réduite » (2.13) conduit par agrégation sur les individus à $S - N + 1$ lois de Walras. Les deux premiers exemples qui précèdent peuvent suggérer qu'à ces $S - N + 1$ lois de Walras correspondent $S - N + 1$ sortes d'homogénéité. Pareille interprétation serait fautive. De manière générique, on a « moins d'homogénéités que de lois de Walras », ce qui conduit au problème de l'indétermination réelle de l'équilibre [voir, en particulier, Balasko et Cass (1989)].

2.4.3 Prix des actifs contingents

La fonction objectif de la seconde optimisation (2.10) dépend de la composition y à travers les combinaisons linéaires $Q'y$. Cette forme spécifique de fonction objectif est celle de l'approche par caractéristiques [Becker (1965), Lancaster (1966), Rosen (1974)].

Chaque actif financier est ici vu comme un portefeuille composé d'unités monétaires des diverses dates et états, seuls les montants globaux de ces unités intervenant dans la fonction d'utilité de seconde étape. Ce sont ces $S+1$ dates \times états qui jouent le rôle des caractéristiques. Il n'est donc pas étonnant que le problème conduise naturellement à définir des prix implicites (ou hédoniques) pour ces caractéristiques. Plus précisément, considérons la relation $Q\lambda = 0$ intervenant dans les conditions du premier ordre.

Propriété 3 : Les prix des actifs à la date 0 s'écrivent comme une espérance des flux futurs actualisés : $q_0 = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^S \mu_{1s} q_{1s}$, où : $\mu_{1s} = \lambda_{1s} \left[\sum_{s=1}^S \lambda_{1s} \right]^{-1}$ définit une mesure de probabilité subjective sur l'ensemble des états, et où $\frac{1}{1+r_f} = \frac{\sum_{s=1}^S \lambda_{1s}}{\lambda_0}$ est un facteur d'actualisation subjectif.

La mesure de probabilité et le facteur d'actualisation sont subjectifs au sens où ils dépendent de l'individu via ses préférences, ses revenus... dès que le marché est incomplet. Certaines de ces notions ne deviennent objectives que s'il existe des actifs particuliers échangeables sur le marché. Ainsi, si l'ensemble des actifs échangeables comporte un actif contingent élémentaire associé à l'état s , on voit immédiatement que son prix coïncide avec λ_{1s}/λ_0 . De même, s'il existe un zéro-coupon, actif versant un flux certain de 1 dans tous les états [$q_{1s} = 1, \forall s$], son prix à la date initiale est

$\frac{1}{1+r_f} = \frac{\sum_{s=1}^S \lambda_{1s}}{\lambda_0}$. ($\lambda_{1s}/\lambda_0, s = 1, \dots, S$) apparaît bien comme une mesure subjective de prix d'actifs contingents, $\mu_1 = (\mu_{1s}, s = 1, \dots, S)$ comme une probabilité subjective risque-neutre associée [Harrison et Kreps (1979), Duffie (1992)], $\frac{\sum_{s=1}^S \lambda_{1s}}{\lambda_0}$ comme une évaluation subjective du prix du zéro-coupon.

Considérons maintenant la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage sur les actifs échangeables sur le marché, c'est-à-dire l'impossibilité d'avoir à la période 1 un gain positif sans mise initiale : « il n'existe pas de portefeuille y tel que simultanément $q'_0 y = 0$ et $q'_{1s} y \geq 0, \forall s$ avec au moins une inégalité stricte ».

On sait que cette condition équivaut à l'existence d'un vecteur de composantes positives ou nulles $\alpha_{1s} \geq 0, s = 1, \dots, S$ tel que $q_0 = \sum_{s=1}^S \alpha_{1s} q_{1s}$. Dans le cas de marché incomplet, un tel vecteur n'est pas forcément unique, mais il en existe un cône positif de dimension égale à celle $S - N$ d'incomplétude [Ross (1978),

Breeden et Litzenberger (1978), Varian (1988)]. Chacun de ces vecteurs est souvent vu comme un ensemble de prix implicites d'actifs contingents élémentaires, compatible avec les prix des actifs échangeables. Les contraintes $Q\lambda = 0$ et la positivité des rapports $\frac{\lambda_{1s}}{\lambda_0}$ traduisent l'absence d'opportunité d'arbitrage. Comme nous l'avons vu dans la proposition 1, chaque individu retient, dans cette multiplicité de prix implicites d'actifs contingents élémentaires, un jeu de prix, et des jeux différents sont retenus par les individus en fonction de leurs préférences, de leurs revenus et des prix de marché.

2.4.4 Portefeuille optimal et portefeuille au sens de Roy-Markowitz-Tobin

Supposons qu'un titre zéro-coupon existe et introduisons-le comme premier actif financier.

Nous obtenons les partitions suivantes :

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} p'_0 & 0 \\ 0 & P'_1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} b \\ z \end{bmatrix}, \quad Q' = \begin{bmatrix} \beta & r'_0 \\ -e & -R'_1 \end{bmatrix}.$$

Dans les deux dernières partitions, b est la quantité de zéro-coupon (actif à rendement nominal certain) et β son prix; z est un vecteur $(N-1, 1)$ de quantités d'actifs risqués dont les prix sont désignés par le vecteur r'_0 de taille $N-1$ et les valeurs prises à la période 1 dans les divers états $s = 1, \dots, S$ par la matrice R'_1 de dimension $(S, N-1)$ [$R_1 = (r_{11}, \dots, r_{1S})$]. Les contraintes budgétaires peuvent s'écrire :

$$(2.15) \quad \begin{bmatrix} \beta & r'_0 \\ -e & -R'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 - p'_0 x_0 \\ w_1 - P'_1 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$$

où le dernier membre de droite est un vecteur représentant les épargnes aux diverses périodes et divers états.

On sait déjà que la matrice $Q' = \begin{bmatrix} \beta & r'_0 \\ -e & -R'_1 \end{bmatrix}$ possède une inverse à gauche Q^- . On peut construire :

$$(2.16) \quad Q^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{r'_0 R_1^-}{\beta} \\ 0 & -R_1^- \end{bmatrix}$$

où

$$(2.17) \quad R_1^- = \{[R_1 - \bar{r}_1 e'] \bar{\pi} [R'_1 - e \bar{r}'_1]\}^{-1} [R_1 - \bar{r}_1 e'] \bar{\pi} [I_S - e \pi']$$

où $\bar{r}_1 = \frac{E}{\pi} r_1$, π étant une distribution de probabilité donnée et où $\hat{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \pi_S \end{bmatrix}$ est la matrice diagonale associée.

La résolution de (2.15) est alors immédiate :

$$(2.18) \quad b = \frac{1}{\beta} \zeta_0 + \frac{r'_0}{\beta} R_1^- \zeta_1$$

$$(2.19) \quad z = -R_1^- \zeta_1$$

Propriété 4 :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} z &= - \{ [R_1 - \bar{r}_1 e'] \hat{\pi} [R_1' - e \bar{r}'_1] \}^{-1} [R_1 - \bar{r}_1 e'] \hat{\pi} [\zeta_1 - e \bar{\zeta}'_1] \\ &= -Var^{-1}(r_1, r_1) Cov(r_1, \zeta_1) \end{aligned}$$

est un portefeuille

- respectueux des contraintes budgétaires (mimétisme de z),
- efficace au sens de l'utilité si $\zeta_1 = \zeta_1^* = w_1 - P_1' x_1^*$, c'est-à-dire si x_1^* est maximal par rapport à U (U -efficacité),
- efficace au sens de la moyenne-variance associée à la loi π , c'est-à-dire que

$$z = \alpha \{ [R_1 - \bar{r}_1 e'] \hat{\pi} [R_1' - e \bar{r}'_1] \}^{-1} [\beta \bar{r}_1 - r_0],$$

si $\hat{\pi}_1 [\zeta_1 - e \bar{\zeta}'_1] = \alpha \beta [\mu_1 - \pi]$ (MV -efficace), α étant un scalaire positif et où $\mu = \frac{\lambda_1}{e' \lambda_1}$ a été défini en (2.4.9). Enfin, la condition de réconciliation (entre U -efficacité et MV -efficacité) est nécessaire et suffisante si $N = S$.

Preuve :

- Évident par (2.19) et (2.17), si on remarque que $R_1^- e = 0$.
- Évident par le développement qui précède la proposition 4.
- (*) Supposons que $\hat{\pi} [\zeta_1 - e \bar{\zeta}'_1] = \alpha \beta [\mu_1 - \pi]$. L'équation (2.20) s'écrit alors :

$$(2.21) \quad z = -\alpha \beta \{ [R_1 - \bar{r}_1 e'] \hat{\pi} [R_1' - e \bar{r}'_1] \}^{-1} [R_1 - \bar{r}_1 e'] [\mu_1 - \pi].$$

Or, les conditions du premier ordre (2.6) impliquent $\beta [R_1 - \bar{r}_1 e'] [\mu_1 - \pi] = r_0 - \beta \bar{r}_1$ que l'on reporte en (2.21).

Ainsi, la condition entraîne la réconciliation.

(**) Inversement, supposons la réconciliation. Alors

$$\begin{aligned} [R_1 - \bar{r}_1 e'] \hat{\pi} [\zeta_1 - e \bar{\zeta}_1] &= -\alpha [\beta \bar{r}_1 - r_0] \\ &= \alpha \beta [R_1 - \bar{r}_1 e'] [\mu_1 - \pi] \end{aligned}$$

toujours en utilisant les conditions du premier ordre. Cette dernière expression peut aussi s'écrire :

$$R_1 [\hat{\pi} (\zeta_1 - e \bar{\zeta}_1) - \alpha \beta (\mu_1 - \pi)] = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \beta & -e' \\ r_0 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\pi} (\zeta_1 - e \bar{\zeta}_1) - \alpha \beta (\mu_1 - \pi) \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\pi} (\zeta_1 - e \bar{\zeta}_1) - \alpha \beta (\mu_1 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons toujours $Q\lambda = 0$ (avec $\lambda > 0$) de sorte que si $N = S$, le noyau de Q est engendré par $\theta\lambda$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Dès lors, il existe θ tel que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\pi} (\zeta_1 - e \bar{\zeta}_1) - \alpha \beta (\mu_1 - \pi) \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix},$$

ce qui n'est possible que si $\theta = 0$. Ainsi, si $N = S$, la condition est aussi nécessaire à la réconciliation. \square

3 Forme différentielle du système de demande

3.1 L'équation fondamentale

Après avoir substitué le système complet (2.11) dans les conditions du premier ordre (2.6), on dispose d'identités continûment dérivables. Les dérivées des demandes et des prix virtuels par rapport aux prix et aux revenus satisfont :

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} U & 0 & -P \\ 0 & 0 & -Q \\ -P' & -Q' & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p'} & \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial w'} \\ \frac{\partial y}{\partial p'} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial w'} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p'} & \frac{\partial \lambda}{\partial q} & \frac{\partial \lambda}{\partial w'} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^* & 0 \\ X' & Y' & -I_{S+1} \end{pmatrix}.$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie de la demande étendue au cas des actifs financiers. Elle permet de décomposer l'effet-prix en un effet de substitution et un effet de revenu. Désignons par :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 & -P \\ 0 & 0 & -Q \\ -P' & -Q' & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

l'inverse de la matrice bordée.

Propriété 5 : Nous avons :

$$\begin{aligned} A_{11} &= U^{-1} + U^{-1} P A_{33} P' U^{-1}, \\ A_{13} &= U^{-1} P A_{33} = A'_{31}, \\ A_{12} &= -U^{-1} P [P' U^{-1} P]^{-1} Q' A_{22} = A'_{21}, \\ A_{23} &= -A_{22} Q [P' U^{-1} P]^{-1} = A'_{32}, \\ A_{22} &= [Q [P' U^{-1} P]^{-1} Q']^{-1} \\ A_{33} &= A_{33}^0 - A_{33}^1 \\ \text{avec : } A_{33}^0 &= -[P' U^{-1} P]^{-1} \\ A_{33}^1 &= -[P' U^{-1} P]^{-1} Q' [Q [P' U^{-1} P]^{-1} Q']^{-1} Q [P' U^{-1} P]^{-1} \end{aligned}$$

Preuve : Voir annexe 1.

Nous en déduisons alors les expressions des dérivées :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p'} = A_{11} \Lambda + A_{13} X', & \frac{\partial x}{\partial q'} = A_{12} \Lambda^* + A_{13} Y', & \frac{\partial x}{\partial w'} = -A_{13}, \\ \frac{\partial y}{\partial p'} = A_{21} \Lambda + A_{23} X', & \frac{\partial y}{\partial q'} = A_{22} \Lambda^* + A_{23} Y', & \frac{\partial y}{\partial w'} = -A_{23}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p'} = A_{31} \Lambda + A_{33} X', & \frac{\partial \lambda}{\partial q'} = A_{32} \Lambda^* + A_{33} Y', & \frac{\partial \lambda}{\partial w'} = -A_{33}. \end{cases}$$

C'est la décomposition recherchée. Nous allons y consacrer le reste de cette section.

3.2 Effet des unités monétaires

Nous avons expliqué dans la présentation générale du modèle de comportement que les prix et revenus de chaque état \times période étaient exprimés en unités

monétaires courantes. Que se passe-t-il si on effectue un changement des unités dans lesquelles sont exprimés ces prix? La fonction d'utilité et ses dérivées, fonctions des quantités, sont non modifiées. En revanche les prix p et q le sont de façon cohérente. On voit alors immédiatement que certains des éléments de la matrice A sont invariants par ces changements. En effet, un tel changement a sur les matrices P et Q un impact du type :

$$(3.3) \quad \begin{cases} P \mapsto P \text{ diag } \alpha, \\ Q \mapsto Q \text{ diag } \alpha, \end{cases}$$

où $\text{diag } \alpha$ est une matrice diagonale $(S+1, S+1)$ dont les éléments diagonaux fournissent les changements d'unité.

Propriété 6 : *Les matrices blocs invariantes par changement d'unités sont :*

$$A_{11}, A_{12} = A'_{21}, A_{22}.$$

En revanche, les autres blocs liés aux prix virtuels, eux aussi sensibles aux changements d'unités, ne sont pas invariants.

Une autre remarque concerne les interprétations des dérivées comme $\frac{\partial x}{\partial p^j}$. En effet, le vecteur p comporte des composantes associées à des prix d'état \times période différents. Il est de ce fait difficile de comparer directement $\frac{\partial x}{\partial p^0}$ et $\frac{\partial x}{\partial p^1}$ par exemple, puisque cette comparaison dépend des unités retenues. Une comparaison pertinente ne peut être menée qu'après avoir ramené ces diverses évaluations par rapport à une même unité de mesure de tous les prix. Ceci peut être effectué en tenant compte des valeurs relatives des unités monétaires telles qu'elles sont ressenties par l'individu, c'est-à-dire en calculant les effets normalisés correspondants :

$$\frac{\partial x}{\partial p^0} \frac{1}{\lambda_0}, \quad \frac{\partial x}{\partial p^1} \frac{1}{\lambda_1}, \quad \dots$$

Il faut noter que cette normalisation naturelle au niveau de l'individu, dépend de cet individu, de ses préférences, de ses niveaux de revenus... dans le cas général de marchés incomplets. Si elle permet d'effectuer les comparaisons des effets de variation de prix ou de revenus tels que les ressent l'individu, elle ne peut être utilisée directement pour

des comparaisons entre individus¹, ceux-ci ayant des visions différentes des prix virtuels servant à définir les taux de conversion entre unités monétaires. Nous parlerons dans la suite de normalisation hédonique et noterons $\frac{\partial x}{\partial p'_H}$, $\frac{\partial x}{\partial q'_H}$, $\frac{\partial x}{\partial w'_H}$... les dérivées prenant en compte cette normalisation.

3.3 Substitution hédonique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étendre les résultats classiques concernant les effets de substitution, c'est-à-dire les effets-prix dans le cas de variations compensées de revenus. L'approche est analogue à celle qui pourrait être développée dans des modèles avec rationnement.

La première difficulté pour définir ces effets est évidemment la question des unités monétaires. Elle peut être résolue en considérant une normalisation hédonique des prix. La seconde difficulté est dans une définition précise de la notion de variations compensées de revenus. Il y a en effet dans notre cas $S + 1$ variables revenus pour une seule fonction d'utilité globale.

Définition 1 : On appelle matrice de substitution hédonique la matrice :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p'_H} + \frac{\partial x}{\partial w'_H} X' & \frac{\partial x}{\partial q'_H} + \frac{\partial x}{\partial w'_H} Y' \\ \frac{\partial y}{\partial p'_H} + \frac{\partial y}{\partial w'_H} X' & \frac{\partial y}{\partial q'_H} + \frac{\partial y}{\partial w'_H} Y' \end{bmatrix}.$$

De la forme des dérivées hédoniques [voir (3.2) et la définition des dérivées hédoniques], nous déduisons immédiatement la propriété suivante :

Propriété 7 : La matrice de substitution hédonique est donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

¹Du fait de la cardinalité introduite par cette normalisation. Ceci n'est évidemment pas nécessaire, au vu de la propriété 3. Cependant, de même qu'au point de départ nous avons supposé l'utilité concave afin de faciliter les comparaisons avec certains résultats financiers, de même nous acceptons, ici et dans la suite, la cardinalité des prix virtuels. Ils permettent, par exemple, d'arriver plus naturellement à diverses mesures d'aversion au risque (qui, elles, seront indépendantes d'une transformation linéaire de l'utilité). On a commencé à généraliser le point de vue actuel dans « Fondements de la valorisation », communication présentée à Marseille et à Toulouse.

Il s'agit d'une matrice symétrique semi-définie négative. Elle est de rang $L+N-(S+1)$ et son noyau est engendré par les colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$.

Preuve : Considérons la forme quadratique associée à la matrice de Slutsky hédonique. Elle s'écrit :

$$(x', y') K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x' [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] x + [y + A_{22}^{-1}A_{21}x]' A_{22} [y + A_{22}^{-1}A_{21}x],$$

$$\text{où : } A_{22} = \{Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q'\}^{-1},$$

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= U^{-1} - U^{-1}P[P'U^{-1}P]^{-1}P'U^{-1}, \\ &= -(-U^{-1})^{1/2} [I - (-U^{-1})^{1/2}P[P'U^{-1}P]^{-1}P'(-U^{-1})^{1/2}] (-U^{-1})^{1/2} \end{aligned}$$

Comme $(-U^{-1})$ est une matrice symétrique définie positive, que $(-U^{-1})^{1/2}P[P'U^{-1}P]^{-1}P'(-U^{-1})^{1/2}$ est la matrice du projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les colonnes de $(-U^{-1})^{1/2}P$, nous en déduisons que :

(*) A_{22} et $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ sont des matrices symétriques semi-définies négatives, et donc d'après la décomposition de la forme quadratique associée à K , qu'il en est de même pour cette dernière;

(**) A_{22} est inversible, donc que :

$$\begin{aligned} \text{rg } K &= \text{rg} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}), \\ &= \text{rg} [I - (-U^{-1})^{1/2}P[P'(-U)^{-1}P]^{-1}P'(-U^{-1})^{1/2}], \\ &= L + N - \dim \{ \text{espace des colonnes de } P \}, \\ &= L + N - (S + 1). \end{aligned}$$

Comme, de plus, nous voyons que la forme quadratique est nulle si et seulement si $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x = 0$ et $y + A_{22}^{-1}A_{21}x = 0$, que de plus $[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]P = 0$, nous en déduisons que le noyau de K est engendré par les colonnes de la matrice : $\begin{bmatrix} P \\ -A_{22}^{-1}A_{21}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$. □

La propriété précédente est une généralisation directe de celle habituellement établie pour les effets de substitution. Ce cas usuel est dans notre contexte l'analogue du cas avec marché complet où $S = N$ et où le rang est alors égal au nombre de biens de consommation réels moins un.

La matrice de substitution hédonique a été introduite en tenant compte de tous les biens : biens de consommation réels et actifs financiers. Que se passe-t-il si les substitutions sont calculées de la façon usuelle en ne considérant que le bloc nord-ouest de la matrice K , c'est-à-dire A_{11} ?

Propriété 8 : La matrice de substitution hédonique partielle A_{11} est symétrique semi-définie négative. Elle est de rang $L + N - (S + 1)$ et son noyau est engendré par $P[\text{Ker}Q]$.

Preuve : Nous avons : $A_{11} = [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, où les deux matrices intervenant dans la décomposition sont semi-définies négatives. Un vecteur x du noyau doit donc simultanément satisfaire :

$$[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]x = 0 \quad \text{et} \quad A_{22}^{-1}A_{21}x = 0.$$

La première condition signifie que x est combinaison des colonnes de $P : \exists \alpha \in \mathfrak{R}^{S+1} : x = P\alpha$, et alors la seconde condition est :

$$A_{22}^{-1}A_{21}P\alpha = 0 \quad \iff \quad Q\alpha = 0.$$

Ceci fournit les résultats cherchés. □

La propriété précédente complète l'analogie avec le cas usuel. En effet, si le marché est complet, nous avons : $Q\lambda = 0$, et $\text{Ker}Q$ est engendré par le vecteur de multiplicateurs. Le noyau est alors engendré par $P\lambda$.

3.4 Propriétés complémentaires du système de demande

3.4.1 Relations d'additivité

Les matrices d'effets-prix et d'effets-revenus des relations (3.2) obéissent aux propriétés d'additivité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} P' \frac{\partial x}{\partial p'} + Q' \frac{\partial y}{\partial p'} = -X' \\ P' \frac{\partial x}{\partial q'} + Q' \frac{\partial y}{\partial q'} = -Y' \\ P' \frac{\partial x}{\partial w'} + Q' \frac{\partial y}{\partial w'} = I_{S+1} \\ Q' \frac{\partial x'}{\partial w} = 0 \quad , \quad Q' \frac{\partial y'}{\partial w} = I_N \end{array} \right.$$

Les trois premières identités sont immédiates par (3.1). Les deux dernières s'obtiennent par la propriété 4 et les relations (3.2). Les trois premières s'interprètent en considérant la différentielle $P'dx + Q'dy = dw - X'dp - Y'dq$ des contraintes budgétaires : le côté droit représente les écarts entre les variations de revenus nominaux et les variations des coûts de la vie, de sorte que le côté gauche représente des variations de revenus réels (celles-ci contiennent les actifs financiers). Les deux dernières donnent la structure des effets-revenus sur les biens de consommation et les actifs financiers. Par exemple, dans le cas où les marchés sont complets, les effets des divers revenus sur les biens de consommation sont proportionnels entre eux.

3.4.2 Relations d'homogénéité

Les propriétés classiques d'homogénéité se généralisent directement pour tenir compte de la présence des actifs financiers.

Propriété 9 : La demande de biens de consommation est homogène de degré zéro en (p, w) , alors que la demande d'actifs financiers est homogène de degré un en ces mêmes variables. La demande de biens de consommation est homogène de degré zéro en q , alors que la demande d'actifs financiers est homogène de degré moins un en ces mêmes variables.

Ces propriétés d'homogénéité se démontrent par inspection ou, de nouveau, par la propriété 4 et les relations (3.2). Elles sont valides quels que soient la structure et le nombre des actifs financiers. Elles ne sont cependant pas exhaustives, comme le montre la relation (2.13) qui peut contenir des formes spécifiques d'homogénéité sauf si la structure des actifs est spécifiée davantage [pour un exemple de pareilles spécifications, voir Balasko et Cass (1989), p. 151 et 153].

3.4.3 Interdépendance des structures de substitution-complémentarité

Du fait que $y = Q^-(w - P'x)$, on s'attend à ce que les effets des prix, les effets des divers revenus et les effets de substitution caractérisant les biens de consommation et les actifs financiers soient tous interdépendants. En 3.4.1, nous avons déjà étudié l'interdépendance des deux premiers types d'effets. Il reste à expliciter celle des effets de substitution.

Propriété 10 : La structure de substitution-complémentarité des actifs A_{22} et celle des biens de consommation A_{11} sont rigoureusement interdépendantes :

$$A_{22} = Q^- P^- A_{11} [Q^- P']'$$

Preuve : Les relations d'additivité vues en 3.4.1 et d'homogénéité vues en 3.4.2 conduisent à écrire la matrice de Slutsky sous la forme :

$$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_L \\ -Q^- P' \end{bmatrix} A_{11} \left[I_L - [Q^- P']' \right] ,$$

d'où le résultat. □

3.4.4 Disposition marginale à payer et valorisation financière

Revenons à l'équation fondamentale (3.1). Elle implique que l'application (2.11) (le système complet de demandes de biens, de demandes d'actifs et d'évaluations marginales) est une application de rang maximal, c'est-à-dire de rang $L + N + S + 1$. Elle est localement surjective. Puisque ceci est vrai en chaque point de son domaine, cela entraîne que (2.11) est une submersion et, par conséquent, une application ouverte. Cette propriété reste valide si l'on fixe les valeurs futures q_1 . On peut donc inverser (2.11) en considérant les q_1 comme des paramètres. Cette propriété d'inversion est fondamentale en économie où l'achat se complète par la disposition marginale à payer. Elle est tout aussi fondamentale en finance où le placement se complète par la valorisation des actifs. On affirme donc, ici, que la valorisation financière (privée) peut se concevoir comme une partie d'un système complet de dispositions marginales à payer.

3.5 Propriétés complémentaires du système de prix virtuels

Pour compléter la section 3, il nous reste à caractériser le système complet des prix virtuels. Ces caractérisations sont les suivantes :

$$(3.4) \quad \left[\frac{\partial \lambda}{\partial p'} + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} X' \right] \Lambda^{-1} = - \frac{\partial x'}{\partial w} , \quad (A_{31} = A'_{13})$$

$$(3.5) \quad \left[\frac{\partial \lambda}{\partial q'} + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} Y' \right] \Lambda^{*+} = - \frac{\partial y'}{\partial w} , \quad (A_{32} = A'_{23})$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda'}{\partial w} \cdot \zeta' \frac{\partial \lambda}{\partial w'} \zeta \leq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{s+1}, \quad (A_{33} = A'_{33}, \zeta' A_{33} \zeta \geq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{s+1})$$

$$(3.7) \quad Q \frac{\partial x'}{\partial w} = 0,$$

$$(3.8) \quad Q \frac{\partial y'}{\partial w} = I_N,$$

$$(3.9) \quad Q \frac{\partial \lambda}{\partial w'} = 0,$$

où Λ^{**} est une inverse à droite de Λ^* . En 3.4.1, nous avons démontré les propriétés (3.8) et (3.9). Les autres propriétés se démontrent de la même manière.

Pour voir comment ces propriétés spécifient la structure locale des fonctions de prix virtuels, considérons la différentielle de ceux-ci. Elle peut s'écrire :

$$d\lambda = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial p'} + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} X' \right] dp + \left[\frac{\partial \lambda}{\partial q'} + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} Y' \right] dq + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} [dw - X' dp - Y' dq].$$

Elle peut aussi s'écrire :

$$(3.10) \quad d\lambda = \frac{-\partial x'}{\partial w} \Lambda dp - \frac{\partial y'}{\partial w} \Lambda^* dq + \frac{\partial \lambda}{\partial w'} [dw - X' dp - Y' dq],$$

en utilisant les relations (3.2) et les propriétés (3.5) et (3.6). Cette différentielle est alors entièrement caractérisée par les propriétés (3.7) à (3.10). Contrairement à ce qui se passait pour les demandes de biens et d'actifs, ce sont maintenant les effets des divers revenus qui sont symétriques et non les effets-prix compensés. Les conditions (3.8), (3.9) et (3.10), qui caractérisent l'additivité des coefficients de (3.11), correspondent aux conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage $Q\lambda = 0$.

4 Propensions marginales avec et sans ajustements financiers

4.1 Introduction

Nous avons introduit en 2.3 les systèmes de demandes, de multiplicateurs, et la fonction d'utilité indirecte, et vu comment ces notions étaient reliées à celles de même type en présence d'actifs financiers. Cette liaison est [voir propriété 2] :

$$\begin{cases} f(p, q, w) = f_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] , \\ \lambda(p, q, w) = \lambda_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] , \\ v(p, q, w) = v_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] , \\ \quad \quad \quad = \underset{y}{Max} v_0 [p, w - Q'y] . \end{cases}$$

Dans l'annexe 2, nous redécrivons la forme différentielle du système global de façon à faire apparaître les dérivées des fonctions f, λ, v comme fonctions des dérivées des fonctions sous-jacentes f_0, λ_0, v_0 . Ici, nous allons utiliser ces divers éléments pour : a) montrer la liaison qu'ils impliquent avec la théorie du rationnement quantitatif; b) dériver une procédure de détermination du portefeuille optimal; c) dériver une formule d'ajustement du portefeuille optimal face à la création de nouveaux actifs; d) étudier l'effet sur l'utilité d'une modification des revenus, avec et sans réaménagement du portefeuille; e) dériver une formule de prime de liquidité.

4.2 Lien avec la théorie du rationnement quantitatif

Les dérivées de $f(p, q, w) = f_0 [p, w - Q'g(p, q, w)]$ s'écrivent

$$(4.1) \quad \frac{\partial f}{\partial p'} = \frac{\partial f_0}{\partial p'} - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial p'} ,$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial f}{\partial q'} = -\frac{\partial f_0}{\partial R'} \left[Q' \frac{\partial g}{\partial q'} + Y' \right] ,$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial f}{\partial w'} = \frac{\partial f_0}{\partial R'} \left[I - Q' \frac{\partial g}{\partial w'} \right] .$$

En (4.1), l'effet-prix (des prix à la consommation) se décompose en un effet-prix contraint (f_0 est contrainte comme nous le verrons plus loin) et un effet-revenu qui provient d'un réaménagement du portefeuille et que l'on peut, pour cela, appeler effet de portefeuille. En (4.2), l'effet d'une variation du prix des actifs se réduit à deux effets-revenus, l'un provenant du réaménagement du portefeuille et l'autre correspondant à sa plus-value. En (4.3), l'effet-revenu général est égal à l'effet-revenu contraint corrigé par un effet de portefeuille.

Ainsi la présence des actifs financiers conduit en général à introduire un terme correctif par rapport à la propension calculée en absence d'actifs risqués. Les équations (4.1), (4.2) et (4.3) sont évidemment une simple réécriture des trois premières égalités de (3.2).

Plus fondamentalement, on peut voir que l'effet de substitution se décompose en un effet contraint et un effet de portefeuille. En effet, post-multiplions (4.3) par X' et sommions cette nouvelle expression à (4.1). On obtient alors

$$\left[\frac{\partial f}{\partial p'} + \frac{\partial f}{\partial w'} X' \right] \Lambda^{-1} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial p'} + \frac{\partial f_0}{\partial R'} X' \right] \Lambda^{-1} - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \left[\frac{\partial g}{\partial p'} + \frac{\partial g}{\partial w'} X' \right] \Lambda^{-1},$$

que l'on peut écrire

$$(4.4) \quad A_{11} = A_{11}^0 - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' A_{21},$$

où $A_{11}^0 = \left[\frac{\partial f_0}{\partial p'} + \frac{\partial f_0}{\partial R'} X' \right] \Lambda^{-1}$. En procédant de façon similaire avec les expressions de $\frac{\partial f}{\partial q'}$ et $\frac{\partial f}{\partial w'}$, on a

$$\left[\frac{\partial f}{\partial q'} + \frac{\partial f}{\partial w'} Y' \right] \Lambda^{*+} = - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \left[\frac{\partial g}{\partial q'} + \frac{\partial g}{\partial w'} Y' \right] \Lambda^{*+},$$

que l'on peut écrire

$$(4.5) \quad A_{12} = - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' A_{22}.$$

Comme A_{22} est inversible, $- \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' = A_{12} A_{22}^{-1}$ et (4.4) peut s'écrire

$$(4.6) \quad A_{11} = A_{11}^0 + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}.$$

Notons enfin que (4.6) peut aussi s'écrire

$$(4.7) \quad A_{11} = A_{11}^0 + \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' A_{22} Q' \frac{\partial f_0'}{\partial R'},$$

en tenant compte de la symétrie de A_{12} .

En ce qui concerne l'effet-revenu, on a la relation suivante

$$(4.8) \quad \frac{\partial f}{\partial w'} = \frac{\partial f_0}{\partial R'} + A_{12} A_{22}^{-1} \frac{\partial g}{\partial w'}.$$

Les relations (4.6) et (4.8) se comprennent mieux si on les écrit d'abord sous la forme $A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = A_{11}^0$ et $\frac{\partial f}{\partial w'} - A_{12} A_{22}^{-1} \frac{\partial g}{\partial w'} = \frac{\partial f_0}{\partial R'}$ qui est familière en théorie du rationnement quantitatif (et que l'on peut appeler décomposition de Tobin-Houthakker). Pour définir A_{11}^0 , nous avons implicitement rationné les actifs financiers. L'effet de report ainsi induit est $A_{12} A_{22}^{-1}$. Il est transformé en un effet-prix

compensé par la matrice A_{21} . Le résultat final est $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = A_{11}^0$, c'est-à-dire la matrice observable en cas de R.Q. En (4.6), on procède à rebours. A_{11} est défini par A_{11}^0 auquel on ajoute l'effet de report converti. Un raisonnement similaire permet également d'obtenir une définition précise des effets-revenus.

Enfin, la relation (4.7) donne pour ainsi dire un corollaire à la propriété (10) (où A_{22} est exprimé en fonction de A_{11}). Cette propriété possède une réciproque faible : A_{11} est exprimé en fonction de A_{22} , ce qui précise l'interdépendance déjà obtenue.

4.3 Une procédure de détermination du portefeuille optimal

Nous avons vu en 2.3 que le problème d'optimisation du consommateur peut se concevoir en deux étapes : une première où il choisit ses consommations x à composition y du portefeuille donnée, et une seconde où il choisit la composition optimale de son portefeuille. Nous rappelons ici cette seconde optimisation, puisqu'elle peut être vue comme une procédure « directe » de détermination du portefeuille optimal et qu'elle nous sera utile dans ce qui suit. Elle revient à optimiser le programme suivant :

$$(4.9) \quad \underset{y}{\text{Max}} v_0(p, w - Q'y)$$

dont les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$(4.10) \quad \frac{\partial v_0}{\partial y^j} = -\frac{\partial v_0}{\partial R^j} Q^j = 0$$

On cherche une représentation dynamique du comportement financier du consommateur, i.e. comment, partant d'un portefeuille arbitraire, l'individu peut le modifier « convenablement » pour arriver au portefeuille optimal.

On se situe à l'étape k . L'individu dispose du portefeuille y_k et cherche Δy tel que : $y_{k+1} = y_k + \Delta y$. S'il se trouve à l'optimum, il n'y a plus rien à modifier. Sinon, il existe une dynamique individuelle pour s'y rendre. Posons, sans le justifier pour l'instant, que cette représentation dynamique s'écrit :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \Delta y &= \left[Q \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'} (p, w - Q'y_k) Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_0}{\partial R} (p, w - Q'y_k) \\ &= \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R} \end{aligned}$$

avec un petit changement de notation évident. Il est facile de vérifier que tout réaménagement de portefeuille de type (4.11) conduira, à l'étape k , à améliorer le

niveau d'utilité et, par itération, conduira donc à l'optimum. Considérons la variation d'utilité, entre l'étape k et l'étape $k + 1$. Elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta v_{0k} &= v_0(p, w - Q' y_{k+1}) - v_0(p, w - Q' y_k) \\ &\approx -\frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \Delta y + \frac{1}{2} \Delta y' Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \Delta y\end{aligned}$$

(si on s'en tient à un développement limité d'ordre 2). Pour Δy défini par (4.11), on aura :

$$\begin{aligned}\Delta v_{0k} &\approx -\frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R} \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R} \\ &> 0, \quad \text{si } \frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \neq 0.\end{aligned}$$

En particulier, si $y_k = 0$, alors $y_{k+1} = \Delta y$. Le raisonnement précédent tient toujours. Il montre l'intérêt que représente les actifs pour l'individu et justifie le fait qu'il les prenne en compte.

Il reste à se demander si la représentation dynamique du comportement financier du consommateur que l'on s'est donnée en (4.11) est naturelle. Pour le voir, considérons un investisseur pour qui le programme (4.9) est « trop compliqué » et qui préfère, parce qu'il a « habitude quadratique », faire successivement des approximations quadratiques. S'il procède ainsi, cet investisseur cherchera, à l'étape k , le Δy qui maximise une approximation quadratique de $v_0[p, w - Q'(y_k + \Delta y)]$ i.e. à résoudre le problème suivant :

$$\text{Max}_{\Delta y} \left\{ v_{0k} - \frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \Delta y + \frac{1}{2} \Delta y' Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \Delta y \right\}$$

Il trouvera alors $\Delta y = \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R'}$, soit (4.11).

En réalité, la procédure que nous venons de décrire est celle d'un individu appliquant l'algorithme de Gauss-Newton pour trouver récursivement l'optimum du programme (4.9). Dans le cas où la fonction v_0 serait quadratique, il suffirait d'une seule itération pour arriver à l'optimum.

Une autre façon de montrer que (4.11) est naturelle est de considérer le lagrangien :

$$L_k = -\frac{\partial v_{0k}}{\partial R'} Q' \Delta y + \varphi \left[\frac{1}{2} \Delta y' Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \Delta y - c \right]$$

où φ est un multiplicateur de Lagrange et c une constante.

Optimisant par rapport à Δy , on aura les conditions du premier ordre :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{\varphi} \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial v_{0k}}{\partial R} \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial v_{0k}}{\partial R_0} \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1} [\beta_k \bar{q}_{1k} - q_0] \end{aligned}$$

où \bar{q}_{1k} est l'espérance mathématique des q_{1k} , par rapport à la distribution de probabilité μ_{1k} (définie comme dans la propriété 3) et où $\beta_k = \frac{1}{1 + r_{fk}}$. Dans cette expression $[\beta_k \bar{q}_{1k} - q_0]$ est une espérance subjective de rendement net et $\frac{\partial v_{0k}}{\partial R_0} \left[Q \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial R \partial R'} Q' \right]^{-1}$ peut s'interpréter comme la réciproque d'une mesure subjective (multidimensionnelle) du risque associé au portefeuille. On verra, en effet, dans la section 5.4, ce que devient cette matrice, dans le cas où l'utilité est séparable par état et par période : elle se reliera directement à la mesure du risque qui apparaît dans la formule Roy-Markowitz-Tobin de sorte qu'elle y apparaîtra comme sa généralisation naturelle. Autrement dit, la formule 4.11 est naturelle parce qu'elle contient directement celle de Roy-Markowitz-Tobin, si on accepte de réinterpréter cette dernière comme un pas dans une procédure de convergence vers l'optimum financier. De même, la maximisation du lagrangien (L_k) posé plus haut rappelle l'idée d'un maximum vectoriel avec un terme pour représenter le rendement et un autre pour représenter le risque. Son corollaire, dans les procédures MDP, est de rendre maximum la partie linéaire de l'accroissement de l'utilité sous la contrainte que le pas ne soit pas trop grand.

Supposons maintenant que l'on ait convergé vers un maximum $y = g(p, q, w)$. Que se passe-t-il, en ce point, si de nouveaux actifs sont créés ? Essentiellement, on le verra plus en détail dans la section 5, il suffit d'ajouter une itération à la procédure dynamique qu'on vient d'étudier.

Soit z un vecteur de quantités de nouveaux actifs et \hat{R} la matrice de leurs valeurs par période et par état. Par hypothèse, le consommateur a atteint le niveau d'utilité $v(p, q, w)$. Mais alors $v(p, q, w - \hat{R}'z)$ est défini et continûment dérivable en $z = 0$. On peut donc définir la procédure :

$$\begin{aligned} dz &= \left[\hat{R} \frac{\partial \lambda}{\partial w} \hat{R}' \right]^{-1} \hat{R} \lambda \\ &= \left\{ \hat{R} \left[I_{S+1} - \frac{\partial y'}{\partial w} Q \right] \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \left[I_{S+1} - Q' \frac{\partial y}{\partial w'} \right] \hat{R}' \right\}^{-1} \hat{R} \lambda \end{aligned}$$

où les seules directions qui font strictement augmenter l'utilité sont celles qui satisfont $\frac{\partial y}{\partial w} \hat{R}' dz = 0$. Pour ne pas restreindre les dz , on peut supposer que \hat{R}' est telle que $\frac{\partial y}{\partial w} \hat{R}' = 0$ (condition que l'on peut aussi écrire $\hat{R} \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' = 0$ ou encore $\hat{R} A_{33}^0 Q' = 0$). On se ramène donc à :

$$(4.12) \quad dz = \left[\hat{R} \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \hat{R}' \right]^{-1} \hat{R} \lambda = \left[\hat{R} \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'} \hat{R}' \right]^{-1} \hat{R} \frac{\partial v}{\partial w}$$

où l'absence de l'indice k , par rapport à (4.11), signifie qu'on est réduit à une seule itération (puisque $v(p, q, w - \hat{R}' z)$ n'est défini que dans un voisinage ouvert de $z = 0$). On résume par la

Propriété 11 : *La détermination du portefeuille optimal et son ajustement à la création de nouveaux actifs financiers peuvent se faire au moyen de la procédure (4.11) et de l'ajustement (4.12). Ces relations permettent aussi de se donner une représentation dynamique du comportement financier du consommateur.*

4.4 Non-neutralité du portefeuille optimal et prime de liquidité

Le portefeuille optimal se caractérise d'abord par $Q \lambda_0 = 0$, relation qui conduit aux fonctions de demande et d'offre d'actifs $y = g(p, q, w)$ et donc aux relations $\lambda(p, q, w) = \lambda_0(p, w - Q'g(p, q, w))$, $v(p, q, w) = v_0(p, w - Q'g(p, q, w))$. Nous allons utiliser les propriétés de ces dernières pour montrer que, même une fois optimisé, le portefeuille reste encore utile en tant qu'instrument d'adaptation à diverses modifications des paramètres institutionnels et donc n'est pas neutre.

Pour ce faire, nous allons considérer une modification des revenus Δw et étudier son effet sur l'utilité autour de $y = g(p, q, w)$. Si une telle modification s'accompagne d'une mise à jour du portefeuille, son effet sera étudié à l'aide de $v(p, q, w)$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial w} \Delta w + \frac{1}{2} \Delta w' \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial w'} \Delta w + o(\Delta w^2) \\ &= \frac{\partial v}{\partial w} \Delta w + \frac{1}{2} \Delta w' \frac{\partial \lambda}{\partial w'} \Delta w + o(\Delta w^2). \end{aligned}$$

Si, au contraire, la modification des revenus se fait sans ajustement des allocations d'actifs financiers, son effet sera étudié à l'aide de $v_0(p, w - Q'y)$ où y est fixe.

(Dans ce qui suit, $\Delta v_0 = \Delta v$ | v -constante.) On aura :

$$\begin{aligned}\Delta v_0 &= \frac{\partial v_0}{\partial R'} \Delta w + \frac{1}{2} \Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R' \partial R'} \Delta w + o(\Delta w^2) \\ &= \frac{\partial v_0}{\partial R'} \Delta w + \frac{1}{2} \Delta w' \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \Delta w + o(\Delta w^2).\end{aligned}$$

Or, d'après l'annexe 2, nous savons que :

$$(4.13) \quad \frac{\partial v}{\partial w'} = \frac{\partial v_0}{\partial R'}$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'}$$

ce qui implique que Δv et Δv_0 ne peuvent différer qu'au niveau du second ordre. De plus, comme $\frac{\partial \lambda_0}{\partial R'}$ est définie négative, on voit immédiatement que :

$$\Delta v \geq \Delta v_0.$$

Ainsi, la présence des actifs financiers n'a qu'un effet de second ordre, mais cet effet est positif. [Pour Allais (1947), l'insertion à l'optimum de la monnaie n'impliquait qu'une perte de second ordre]. Pour bien comprendre ce résultat, il faut noter que, puisque $\frac{\partial v}{\partial w'} = \frac{\partial v_0}{\partial R'}$, on se place à l'optimum, c'est-à-dire en un point où les utilités marginales des divers revenus sont égales aux utilités marginales des diverses dépenses. Or, une modification des revenus Δw qui s'accompagne d'une mise à jour du portefeuille permet une variation des dépenses $\Delta R = \left[I - Q' \frac{\partial y}{\partial w'} \right] \Delta w$. En fait, la matrice $\left[I - Q' \frac{\partial y}{\partial w'} \right]$ projette les nouveaux revenus Δw dans le bon sous-espace des dépenses. Cet effet est positif car (4.14) peut aussi s'écrire $\frac{\partial \lambda}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \left[I - Q' \frac{\partial y}{\partial w'} \right]$.

Considérons maintenant l'écart entre Δv et Δv_0 . On a

$$\Delta v - \Delta v_0 = \frac{1}{2} \Delta w' \left[\frac{\partial \lambda}{\partial w'} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \right] \Delta w.$$

Puisque (4.14) prend aussi la forme $\frac{\partial \lambda}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} - \frac{\partial y'}{\partial w} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial y}{\partial w'}$, on peut également écrire :

$$\Delta v - \Delta v_0 = -\frac{1}{2} \Delta w' \frac{\partial y'}{\partial w} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial y}{\partial w'} \Delta w.$$

L'écart devient nul dès que le réaménagement du portefeuille est non coûteux, c'est-à-dire que $Q' \frac{\partial y}{\partial w} \Delta w = 0$.

Nous avons donc la propriété suivante :

Propriété 12 : *En général, l'impact sur l'utilité d'une modification des revenus Δw sera plus grand lorsqu'une telle modification s'accompagne d'une mise à jour du portefeuille que lorsqu'elle se fait sans ajustement des allocations d'actifs financiers, i.e.*

$$\Delta v - \Delta v_0 \geq 0 .$$

L'égalité sera obtenue lorsque $Q' \frac{\partial y}{\partial w} \Delta w = 0$.

Ainsi, l'individu préférera, en général, se retrouver dans une situation de parfaite liquidité (une situation où il peut utiliser son portefeuille pour s'adapter à des modifications de paramètres institutionnels). On peut donc facilement imaginer qu'il sera prêt à payer pour se retrouver dans une telle situation.

Considérons, à nouveau, une modification des revenus qui fait passer le vecteur de revenus de w_A à w_B , i.e. $\Delta w = w_B - w_A$. Puisque l'individu préfère la situation de parfaite liquidité, on peut déduire de son revenu w_B une « prime » pour obtenir un revenu qui lui procure, en situation de parfaite liquidité, le même niveau de satisfaction que le revenu w_B lui procure en situation d'illiquidité. Formellement, on peut écrire :

$$v[p, q, w_B(1 - \rho)] = v_0(p, w_B - Q'y)$$

où ρ peut être appelé le « taux de la prime de liquidité ».

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} v(p, q, w_B(1 - \rho)) &= v(p, q, w_A) + \frac{\partial v}{\partial w'}(p, q, w_A)[\Delta w - \rho w_B] \\ &+ \frac{1}{2}[\Delta w - \rho w_B]' \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial w'}(p, q, w_A)[\Delta w - \rho w_B] \\ &+ o[(\Delta w - \rho w_B)^2] \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$(4.15) \quad v[p, q, w_B(1 - \rho)] \simeq v(p, q, w_A) + \frac{\partial v}{\partial w'}(p, q, w_A)[\Delta w - \rho w_B]$$

si l'on s'en tient à l'approximation linéaire (ce que l'on peut faire ici puisque les termes du second ordre sont négligeables, à cause de la présence de ρ^2).

D'autre part, nous avons également :

$$\begin{aligned} v_0(p, w_B - Q'y) &= v_0(p, w_A - Q'y) + \frac{\partial v_0}{\partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w \\ &+ \frac{1}{2}\Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w - o(\Delta w^2) \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} v_0(p, w_B - Q'y) &\simeq v_0(p, w_A - Q'y) + \frac{\partial v_0}{\partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w \\ &+ \frac{1}{2}\Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w. \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, $v[p, q, w_B(1 - \rho)] = v_0(p, w_B - Q'y)$, nous déduisons la relation suivante, en tenant compte de (4.15) et (4.16) :

$$\begin{aligned} v(p, q, w_A) + \frac{\partial v}{\partial w'}(p, q, w_A)[\Delta w - \rho w_B] &\simeq v_0(p, w_A - Q'y) + \frac{\partial v_0}{\partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w \\ &+ \frac{1}{2}\Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w. \end{aligned}$$

Cette dernière relation peut encore se simplifier en utilisant la propriété 2 [$v(p, q, w_A) = v_0(p, w_A - Q'y)$], et $\frac{\partial v}{\partial w'}(p, q, w_A)\Delta w = \frac{\partial v_0}{\partial R'}(p, w_A - Q'y)\Delta w$. On a alors :

$$-\rho \frac{\partial v}{\partial w'} w_B \simeq \frac{1}{2}\Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'} \Delta w$$

ou encore

$$\rho \simeq -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial v_0}{\partial R'} w_B}{\frac{\partial v_0}{\partial R'} w_B} \Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'} \Delta w$$

qui nous donne une formule pour le taux de la prime de liquidité. Enfin, en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial R'} w_B &= \frac{\partial v_0}{\partial R'_0} \left[w_{0B} + \frac{\partial v_0 / \partial R'}{\partial v_0 / \partial R'_0} w_{1B} \right] \\ &= \frac{\partial v_0}{\partial R'_0} [w_{0B} + \beta \bar{w}_1] \end{aligned}$$

où \bar{w}_1 est l'espérance mathématique des w_{1s} , calculée avec la loi de probabilité subjective μ_1 , nous obtenons également une formule pour la prime de liquidité :

$$\rho(w_0 + \beta \bar{w}_1) \simeq -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial v_0}{\partial R'_0}}{\frac{\partial v_0}{\partial R'_0}} \Delta w' \frac{\partial^2 v_0}{\partial R \partial R'} \Delta w.$$

Dans cette expression, $-\frac{\partial^2 v_0 / \partial R \partial R'}{\partial v_0 / \partial R'_0}$ peut s'interpréter comme une mesure absolue d'aversion vis-à-vis de l'illiquidité.

5 Modification des demandes due à l'introduction de nouveaux actifs financiers

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons donc aux modifications de demande et d'utilité du consommateur, lorsque sont introduits sur le marché de nouveaux actifs financiers. Nous raisonnons à prix et revenus fixés, c'est-à-dire avant que l'impact de cette introduction ait eu le temps de se répercuter sur les niveaux des divers prix. Notre but n'est donc pas d'examiner comment les équilibres de prix et quantités dépendent des actifs introduits [Cass (1984), Werner (1985), Allen et Gale (1991), Cass et Citanna (1993)], mais plutôt de voir les modifications de « court terme » de la demande.

Nous considérons M nouveaux actifs avec $N + M \leq S$. Leurs prix sont résumés par la matrice de taille $[M, S+1]$, notée $R = [r_0, -r_{11}, \dots, -r_{1S}]$, et les quantités introduites dans le portefeuille par un vecteur z de taille M . En présence de ces $N + M$ actifs, les conditions du premier ordre sont modifiées et deviennent :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_x & -P\lambda = 0, \\ & -Q\lambda = 0, \\ & -R\lambda = 0, \\ -P'x & -Q'y - R'z + w = 0. \end{cases}$$

Elles admettent des solutions :

$$(5.2) \quad \begin{cases} x = f_1(p, q, r, w), \\ y = g_1(p, q, r, w), \\ z = h_1(p, q, r, w), \\ \lambda = \lambda_1(p, q, r, w). \end{cases}$$

5.1 Non-modification des demandes

Propriété 13 : Lorsque les nouveaux actifs introduits ont des prix compatibles avec la probabilité de valorisation $\lambda(p, q, w)$ ne tenant pas compte de ces actifs, c'est-à-dire lorsque : $R\lambda(p, q, w) = 0$, le système (5.1) admet la solution :

$$f_1(p, q, r, w) = f(p, q, w), g_1(p, q, r, w) = g(p, q, w), h_1(p, q, r, w) = 0,$$

$$\lambda_1(p, q, r, w) = \lambda(p, q, w).$$

Preuve : Le résultat est immédiat, la solution sans actifs additionnels satisfaisant clairement les conditions du premier ordre (5.1).

Ainsi, les nouveaux actifs ne sont introduits dans le portefeuille que s'ils conduisent l'individu à modifier ce qu'il pense des prix relatifs des états, et donc des transferts de revenus qu'il lui est préférable d'effectuer.

5.2 Introduction d'actifs non nécessairement compatibles avec probabilité de valorisation

On peut raisonnablement penser que l'introduction d'actifs supplémentaires, dont les prix ne sont pas compatibles avec les probabilités de valorisation, va s'accompagner d'une modification des demandes, mais que celle-ci restera faible si la relation $R\lambda(p, q, w) = 0$ est « presque satisfaite ». En fait cette intuition est erronée du fait d'un effet de levier possible sur les marchés financiers. C'est ce point que nous allons mettre en évidence dans ce paragraphe. De façon à simplifier les notations nous désignons par $\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{\lambda}$ la solution de la propriété 13 et nous nous proposons d'étudier localement autour de ce point le système des conditions du premier ordre (5.1). Nous avons localement :

$$(5.3) \quad \begin{cases} U\Delta x & -P\Delta\lambda = 0, \\ & -Q\Delta\lambda = 0, \\ & -R\Delta\lambda = R\bar{\lambda}, \\ -P'\Delta x & -Q'\Delta y - R'z = 0. \end{cases}$$

$$\text{avec : } \Delta x = x - \bar{x}, \quad \Delta y = y - \bar{y}, \quad \Delta\lambda = \lambda - \bar{\lambda}.$$

Avant de résoudre ce système, nous pouvons remarquer que sans perte de généralité les actifs additionnels peuvent être remplacés par des portefeuilles composés d'un actif de ce type et d'autres actifs préalablement existant. On peut par exemple faire en sorte qu'il y ait une orthogonalité entre les deux ensembles de prix Q et R :

$$(5.4) \quad QA_{33}^0 R' = 0 \iff Q\{P'U^{-1}P\}^{-1}R' = 0.$$

La résolution du système approché (5.3) peut alors être effectuée comme dans l'annexe 1.

Propriété 14 :

i) Pour des actifs additionnels orthogonaux aux actifs initiaux $QA_{33}^0 R' = 0$, la solution du système (5.3) est :

$$\begin{aligned}\Delta x &= -U^{-1} P A_{33}^0 R' [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda}, \\ \Delta y &= 0, \\ z &= -[R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda}, \\ \Delta \lambda &= -A_{33}^0 R' [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda}.\end{aligned}$$

ii) La modification correspondante de l'utilité indirecte est :

$$dv = \bar{\lambda}' R' [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda} = \Delta \lambda' A_{33}^0 \Delta \lambda.$$

Le développement (5.3) est en fait valable dès que Δx est petit, le reste du système (5.1) étant dès le départ linéaire dans les autres variables. Il l'est donc dès que :

$$(5.5) \quad \Delta \lambda = A_{33}^0 R' [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda} = o(1).$$

Cette condition donne la normalisation à effectuer vis-à-vis des prix R pour traduire le fait que la relation de valorisation $R \bar{\lambda} = 0$ est presque satisfaite. On a alors immédiatement la propriété suivante.

Corollaire 1 : Si $QA_{33}^0 R' = 0$ et $\Delta \lambda = o(1)$, alors :

$$\begin{aligned}\Delta x &= o(\Delta \lambda), \\ R' z &= o(\Delta \lambda), \\ \Delta v &= o[(\Delta \lambda)^2]\end{aligned}$$

L'effet sur l'utilité indirecte est évidemment d'ordre deux. Plus intéressant est le fait que les deux contraintes $QA_{33}^0 R' = 0$ et $\Delta \lambda = o(1)$ sont homogènes de degré 0 dans les prix R . Cette homogénéité est également satisfaite par la valeur du portefeuille additionnel $R' z$. Cependant elle ne l'est pas par la composition additionnelle z . Ainsi si les prix R sont faibles, le consommateur compensera cette faiblesse des prix par une demande z très forte. Il s'agit typiquement d'un effet de levier sur ces actifs afin d'atteindre la modification d'utilité souhaitée. Ceci met aussi en évidence une forte discontinuité au voisinage du point $\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{\lambda}$.

5.3 Actif additionnel optimal

Nous venons de voir que l'introduction d'actifs supplémentaires avait des impacts très différents sur les demandes individuelles selon les préférences et les revenus de ces individus. Nous pouvons prendre le problème en sens inverse et nous demander quel actif supplémentaire il vaudrait mieux introduire pour satisfaire au mieux un individu donné. Cette introduction peut évidemment être menée séquentiellement de sorte que nous poserons $M = 1$. Nous sommes alors conduit à résoudre le problème local :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \underset{R}{\text{Max}} \bar{\lambda}' R' [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda}, \\ \text{sous } Q A_{33}^0 R' = 0, \end{cases}$$

ou comme la solution de ce problème est clairement définie à une constante multiplicative près :

$$(5.7) \quad \begin{cases} \underset{R}{\text{Min}} \bar{\lambda}' R', \\ \text{sous } Q A_{33}^0 R' = 0, \\ R A_{33}^0 R' = 1. \end{cases}$$

Appelons α, β des multiplicateurs de Lagrange associés aux deux types de contraintes. Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} - A_{33}^0 Q' \alpha - A_{33}^0 R' \beta &= 0, \\ \Leftrightarrow R' &= \frac{1}{\beta} (A_{33}^0)^{-1} \bar{\lambda} - Q' \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Remplaçant R' par cette expression dans la première contrainte, nous obtenons :

$$\frac{1}{\beta} Q \bar{\lambda} - Q A_{33}^0 Q' \frac{\alpha}{\beta} = 0,$$

$$\text{d'où : } \alpha = [Q A_{33}^0 Q']^{-1} Q \bar{\lambda},$$

et :

$$(5.8) \quad R' = \frac{1}{\beta} \left\{ I - Q' [Q A_{33}^0 Q']^{-1} Q A_{33}^0 \right\} (A_{33}^0)^{-1} \bar{\lambda}.$$

Propriété 15 : *Un actif additionnel optimal est un portefeuille composé à partir des actifs initiaux associés aux colonnes de Q' et de l'actif $(A_{33}^0)^{-1} \bar{\lambda}$.*

Preuve : En effet ces actifs optimaux comportent des actifs initiaux (dès que nous levons la contrainte (5.4)) et de l'actif R' , donné en (5.8). Comme l'expression de R' comporte un portefeuille dans les actifs initiaux le résultat s'en déduit immédiatement.

Ce choix dépend des actifs déjà introduits à travers A_{33}^0 et $\bar{\lambda}$. Il est donc pertinent de poursuivre la démarche lorsque l'actif R' a été introduit. En effet l'individu est alors conduit à modifier sa vision des prix virtuels $\bar{\lambda}$ ainsi que A_{33}^0 , en tenant compte des prix R' . Il peut donc être intéressant en terme d'utilité de réintroduire alors un autre actif additionnel et ainsi de suite.

La valeur optimale du gain d'utilité se déduit immédiatement de la propriété 15.

Corollaire 2 : Pour un choix optimal de l'actif additionnel, nous avons :

$$\Delta v = \bar{\lambda}' (A_{33}^0)^{-1} \bar{\lambda} - \bar{\lambda}' Q' [Q A_{33}^0 Q']^{-1} Q \bar{\lambda}.$$

5.4 Interprétation du portefeuille additionnel

Le portefeuille additionnel a une composition proportionnelle à : $z = [R A_{33}^0 R']^{-1} R \bar{\lambda}$ [voir Propriété 14].

Étudions celle-ci lorsque les prix des nouveaux actifs valent 1 à la date 0 : $r_0 = e$, que les N actifs initiaux comportent un actif sans risque (un zéro-coupon) de rendement r_f , et que la fonction d'utilité est de type additif :

$$U(x) = u(x_0) + \rho \sum_{s=1}^S \Pi(s) u(x_{1s}).$$

Dans ce cas la matrice A_{33}^0 vaut :

$$A_{33}^0 = \begin{bmatrix} -[p'_0 u''(\bar{x}_0)^{-1} p_0]^{-1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & -\rho \pi(S) [p'_{1S} u''(\bar{x}_{1S})^{-1} p_{1S}]^{-1} \end{bmatrix}.$$

La condition $Q A_{33}^0 R' = 0$ appliquée à la ligne de Q correspondant à l'actif sans risque est :

$$(5.9) \quad -\frac{e}{p'_0 u''(\bar{x}_0)^{-1} p_0} + \rho(1 + r_f) \sum_{s=1}^S \frac{\Pi(s) r_{1s}}{p'_{1s} u''(\bar{x}_{1s})^{-1} p_{1s}} = 0.$$

Nous en déduisons que le portefeuille additionnel admet la composition :

$$(5.10) \quad z = \left\{ -\frac{ee'}{p'_0 u''(\bar{x}_0)^{-1} p_0} + \rho \sum_{s=1}^S \frac{\Pi(s) r_{1s} r'_{1s}}{p'_{1s} u''(\bar{x}_{1s})^{-1} p_{1s}} \right\}^{-1} \left[-\bar{\lambda}_0 e + \sum_{s=1}^S \bar{\lambda}_{1s} r'_{1s} \right].$$

Introduisons alors la loi de probabilité définie par :

$$(5.11) \quad \tilde{\mu}(s) = \frac{\Pi(s)}{p'_{1s} u''(\bar{x}_{1s})^{-1} p_{1s}} \left[\sum_{s=1}^S \frac{\Pi(s)}{p'_{1s} u''(\bar{x}_{1s})^{-1} p_{1s}} \right]^{-1},$$

et notons :

$$(5.12) \quad \alpha_1 = \sum_{s=1}^S \frac{\Pi(s)}{p'_{1s} u''(\bar{x}_{1s})^{-1} p_{1s}}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{p'_0 u''(\bar{x}_0)^{-1} p_0}.$$

On déduit alors de (5.9) - (5.10) que :

$$z = \left\{ -\rho^2 (1+r_f)^2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0} E_{\tilde{\mu}} r_1 E_{\tilde{\mu}} r'_1 + \rho \alpha_1^2 E_{\tilde{\mu}} (r_1 r'_1) \right\}^{-1} \left(\sum_{s=1}^S \lambda_{1s} \right) E_{\tilde{\mu}} [r_1 - (1+r_f)e].$$

En introduisant des termes de variance-covariance relativement à $\tilde{\mu}$, nous obtenons le résultat ci-dessous.

Propriété 16 :

$$z = \frac{\sum_{s=1}^S \lambda_{1s}}{\rho \alpha_1^2} \left\{ V_{\tilde{\mu}} [r_1 - (1+r_f)e] - \left[\frac{\rho(1+r_f)^2}{\alpha_0} - 1 \right] E_{\tilde{\mu}} r_1 E_{\tilde{\mu}} r'_1 \right\}^{-1} E_{\tilde{\mu}} [r_1 - (1+r_f)e].$$

Cette expression est à comparer à celle classique du portefeuille efficient au sens de Roy-Markowitz-Tobin donnée par :

$$\hat{z} = \frac{1}{a} \left\{ V_{\Pi} [r_1 - (1+r_f)e] \right\}^{-1} E_{\Pi} [r_1 - (1+r_f)e],$$

où a désigne l'aversion vis-à-vis du risque. La formule de la propriété 16 en diffère à trois niveaux :

i) par l'introduction d'un terme de carré de moyenne $E_{\tilde{\mu}} r_1 E_{\tilde{\mu}} r'_1$ qui provient de la forme localement quadratique de l'utilité. Il ne disparaît que si $\rho(1+r_f)^2 = \alpha_0$.

Dans ce cas la formule devient :

$$z = \frac{\sum_{s=1}^S \lambda_{1s}}{\rho \alpha_1^2} \left\{ V_{\tilde{\mu}} [r_1 - (1+r_f)e] \right\}^{-1} E_{\tilde{\mu}} [r_1 - (1+r_f)e].$$

- ii) Une seconde différence vient des lois de probabilités non égales pour évaluer le risque et le rendement net anticipé.
- iii) Finalement on note que ces lois n'ont pas de raison d'être égales à la loi Π . Ainsi si l'individu est « rationnel », Π correspond à la véritable loi des états, alors que μ et $\tilde{\mu}$ sont des lois dépendant aussi des préférences, des revenus de l'individu...

ANNEXE 1 : Inversion de la matrice bordée

Cette inversion est effectuée par résolution récursive du système correspondant. Ce système s'écrit :

$$(A1) \quad \begin{pmatrix} U & 0 & -P \\ 0 & 0 & -Q \\ -P' & -Q' & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} Ux & -Pz = \alpha, \\ & -Qz = \beta, \\ -P'x & -Q'y = \gamma. \end{cases}$$

De la première équation de (A.1), nous tirons :

$$(A2) \quad x = U^{-1}\alpha + U^{-1}Pz,$$

et reportant dans la troisième équation, nous avons :

$$(A3) \quad -P'U^{-1}\alpha - P'U^{-1}Pz - Q'y = \gamma,$$

$$z = -[P'U^{-1}P]^{-1}Q'y - [P'U^{-1}P]^{-1}P'U^{-1}\alpha - [P'U^{-1}P]^{-1}\gamma.$$

Remplaçant z par cette expression dans la seconde équation du système (A.1), nous en déduisons :

$$(A4) \quad Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q'y + Q[P'U^{-1}P]^{-1}P'U^{-1}\alpha + Q[P'U^{-1}P]^{-1}\gamma = \beta,$$

$$y = -[Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q]^{-1}Q[P'U^{-1}P]^{-1}P'U^{-1}\alpha + [Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q]^{-1}Q[P'U^{-1}P]^{-1}\gamma - \beta.$$

D'où :

$$A_{22} = [Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q]^{-1},$$

$$A_{21} = -A_{22}Q[P'U^{-1}P]^{-1}P'U^{-1} = A'_{12},$$

$$A_{23} = -A_{22}Q[P'U^{-1}P]^{-1}.$$

Reportant dans (A.3) l'expression de y , nous obtenons :

$$(A5) \quad z = \left\{ -[P'U^{-1}P]^{-1} + [P'U^{-1}P]^{-1}Q' [Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q]^{-1} Q[P'U^{-1}P]^{-1} \right\} P'U^{-1}\alpha$$

$$+ A_{32}\beta$$

$$+ \left\{ -[P'U^{-1}P]^{-1} + [P'U^{-1}P]^{-1}Q' [Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q]^{-1} Q[P'U^{-1}P]^{-1} \right\} \gamma.$$

$$\text{D'où : } A_{33} = A_{33}^0 - A_{33}^1 ,$$

$$\text{avec : } A_{33}^0 = -[P'U^{-1}P]^{-1} ,$$

$$A_{33}^1 = -[P'U^{-1}P]^{-1}Q' [Q[P'U^{-1}P]^{-1}Q']^{-1}Q[P'U^{-1}P]^{-1} ,$$

$$A_{31} = A_{33}P'U^{-1} .$$

Le dernier bloc A_{11} s'obtient immédiatement en remplaçant z par son expression dans l'équation (A.2).

ANNEXE 2 : Propensions marginales avec et sans actifs

1. Condition du premier ordre.

Rappelons que le fait que $g(p, q, w)$ soit solution du problème d'optimisation

$\text{Max}_y v_0(p, w - Q'y)$ implique :

$$\frac{\partial v_0}{\partial R'} Q' = \lambda'_0 Q' = 0,$$

à l'optimum, c'est-à-dire au point $y = g(p, q, w)$.

2. Fonction d'utilité indirecte.

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial p'} = \frac{\partial v_0}{\partial p'} - \frac{\partial v_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial p'} = \frac{\partial v_0}{\partial p'}, \\ \frac{\partial v}{\partial v} = -\frac{\partial v_0}{\partial R'} Y' - \frac{\partial v_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial q'} = -\frac{\partial v_0}{\partial R'} Y', \\ \frac{\partial v}{\partial w'} = \frac{\partial v_0}{\partial R'} - \frac{\partial v_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial w'} = \frac{\partial v_0}{\partial R'}. \end{cases}$$

3. Expression des dérivées de g .

Des conditions du premier ordre :

$$Q \frac{\partial v_0}{\partial R} [p, w - Q'y] = 0 \iff Q \lambda_0 [p, w - Q'y] = 0,$$

satisfaites à l'optimum, nous déduisons en redérivant :

$$\begin{cases} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial p'} - Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial p'} = 0, \\ -Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Y' - Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial q'} + \Lambda^* = 0, \\ Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} - Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \frac{\partial g}{\partial w'} = 0. \end{cases}$$

D'où la forme des effets sur la composition du portefeuille :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial p'} = + \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial p'} , \\ \frac{\partial g}{\partial q'} = - \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Y' + \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} \Lambda^* , \\ \frac{\partial g}{\partial w'} = + \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} . \end{cases}$$

4. Dérivées des multiplicateurs.

Celles-ci s'obtiennent immédiatement en dérivant la relation :

$$\lambda(p, q, w) = \lambda_0 [p, w - Q'g(p, q, w)] ,$$

et en utilisant les expressions des dérivées de g exhibées en (A.3). Nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial p'} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial p'} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial p'} , \\ \frac{\partial \lambda}{\partial q'} = - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \left[I - Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \right] Y' , \\ \quad - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} \Lambda^* , \\ \frac{\partial \lambda}{\partial w'} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} - \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} . \end{cases}$$

5. Dérivées des demandes de biens.

Une démarche analogue conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial p'} = \frac{\partial f_0}{\partial p'} - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial p'} , \\ \frac{\partial f}{\partial q'} = - \frac{\partial f_0}{\partial R'} \left[I - Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} \right] Y' , \\ \quad - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} \Lambda^* , \\ \frac{\partial f}{\partial w'} = \frac{\partial f_0}{\partial R'} - \frac{\partial f_0}{\partial R'} Q' \left[Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} Q' \right]^{-1} Q \frac{\partial \lambda_0}{\partial R'} . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHY

- [1] Allais, M. (1947) : *Économie et intérêt*, Paris.
- [2] Allen, F., et D. Gale (1991) : « Arbitrage, Short Sales and Financial Innovation », *Econometrica* 59, 1041-1068.
- [3] Arrow, K.J. (1953) : « Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques », *Économétrie*, Colloques Internationaux du CNRS 11, 41-47.
- [4] Balasko, Y. (1988) : *Foundations of the Theory of General Equilibrium*, Academic Press.
- [5] Balasko, Y. et D. Cass (1989) : « The Structure of Financial Equilibria, I : Exogenous Yields and Unrestricted Participation », *Econometrica* 57(1), 135-182.
- [6] Barten, A.P. et V. Böhm (1982) : « Consumer Theory », *Handbook of Mathematical Economics* II, North Holland.
- [7] Barten, A.P. et L. Bettendorf (1995) : « Rationing in Demand Systems : Calculation of Virtual Prices », *Symposium in Honour of A.P. Barten*.
- [8] Becker, G. (1965) : « A Theory of the Allocation of Time », *Economic Journal* 75, 493-517.
- [9] Benassy, J.P. (1976) : « Théorie du déséquilibre et fondements microéconomiques de la macroéconomie », *Revue économique* 5, 755-805.
- [10] Black, F., et M. Scholes (1973) : « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- [11] Breeden, D., et R. Litzenberger (1978) : « Prices of State Contingent Claims Implicit in Option Prices », *Journal of Business* 51, 621-651.
- [12] Bronsard, C. et L. Salvas-Bronsard (1980) : « Sur les différentes formes structurelles engendrées par la théorie de la demande et leur utilisation en économétrie : systèmes direct, réciproque, mixte et système avec rationnement quantitatif », *Annales de l'INSEE* 40, 3-31.
- [13] Bronsard, C., L. Salvas-Bronsard et A. Trognon (1995) : « On the Residual Dynamics Implied by The Rational Expectations Hypothesis », cahier de recherche no 9522, Département de sciences économiques, Université de Montréal.
- [14] Cass, D. (1984) : « Competitive Equilibrium with Incomplete Financial Markets », University of Pennsylvania, CARESS DP.
- [15] Cass, D. (1985) : « On the Number of Equilibrium Allocations with Incomplete Financial Markets », mimeo.
- [16] Cass, D., et A. Citanna (1993) : « Pareto Improving Financial Innovation in Incomplete Markets », University of Pennsylvania, CARESS 93-27.
- [17] Demange, G. et J.C. Rochet (1992) : *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, Paris.

- [18] Diamond, P. (1967) : « The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty », *American Economic Review* 57, 759-776.
- [19] Drèze, J.H. et D. de la Vallée Poussin (1971) : « A Tatonnement Process for Public Goods », *Review of Economic Studies* 38, 133-150.
- [20] Duffie, D. (1992) : *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.
- [21] Duffie, D. et M. Jackson (1989) : « Optimal innovation of Futures Contracts », *Review of Financial Studies* 2, 275-296.
- [22] Geanakoplos, J.D. (1990) : « Special Issue on Equilibrium with Incomplete Markets », *Journal of Mathematical Economics* 17, North Holland.
- [23] Geanakoplos, J.D. et H.M. Polemarchakis (1986) : « Existence, Regularity and Constrained Suboptimality of Competitive Allocations When the Asset Market is Incomplete », in W.P. Heller, R.M. Starr and D. Starrett (eds.) *Uncertainty, Information and Communication : Essays in Honor of K.J. Arrow III*, Cambridge University Press, 65-96.
- [24] Geanakoplos, J.D. et A. Mas-Colell (1989) : « Real Indeterminacy with Financial Assets », *Journal of Economic Theory* 47(1), 22-39.
- [25] Gouriéroux, C., J.J. Laffont et A. Monfort (1980) : « Disequilibrium Econometrics in Simultaneous Equation Systems », *Econometrica* 48, 98-126.
- [26] Harrison, J.M., et K. Kreps (1979) : « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets », *Journal of Economic Theory* 20, 381-408.
- [27] Houthakker, H. (1951-2) : « Compensated Changes in Quantities and Qualities Consumed », *Review of Economic Studies* 19, 155-164.
- [28] Laffont, J.J. (1991) : *Cours de Théorie Microéconomique*, 2e édition, Economica, Paris.
- [29] Lancaster, K. (1966) : « A New Approach to Consumer Theory », *Journal of Political Economy* 74, 132-156.
- [30] Laroque, G. (1981) : « A Comment on Stable Spillovers among Substitutes », *Review of Economic Studies* 48, 355-361.
- [31] Lintner, J. (1965) : « Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in the Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics* 47, 13-37.
- [32] Madden, P. (1991) : « A Generalization of Hicksian q Substitutes and Complements with Application to Demand Rationing », *Econometrica* 59(5), 1497-1508.
- [33] Malinvaud, E. (1989) : *Leçons de théorie microéconomique*, 5e édition, Dunod.
- [34] Markowitz, H.M. (1952) : « Portfolio Selection », *Journal of Finance* 7, 77-91.
- [35] Markowitz, H.M. (1959) : *Portfolio Selection*, Yale University Press, New Haven et Londres.
- [36] Mas-Colell, A. (1985) : *The Theory of General Economic Equilibrium*, Cambridge University Press.
- [37] Merton, R. (1972) : « An Analytical Derivation of the efficient Portfolio Frontier », *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, 1851-1872.

- [38] Mossin, J. (1966) : « Equilibrium in a Capital Asset Market », *Econometrica* 34, 768-783.
- [39] Neary, J.P. et K.W.S. Roberts (1980) : « The Theory of Household Behaviour under Rationing », *European Economic Review* 13, 1-18.
- [40] Radner, R. (1972) : « Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets », *Econometrica* 40, 289-303.
- [41] Rosen, S. (1974) : « Hedonic Prices and Implicit Markets : Product Differentiation in Pure Competition », *Journal of Political Economy* 82, 34-55.
- [42] Ross, S. (1978) : « A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams », *Journal of Business* 51, 453-475.
- [43] Roy, A.D. (1952) : « Safety First and the Holding of Assets », *Econometrica* XX, 431-449.
- [44] Sharpe, W. (1964) : « Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of risk », *The Journal of Finance* XIX, 425-442.
- [45] Tobin, J. (1958) : « Liquidity Preference as Behavior Towards Risk », *Review of Economic Studies* XXV, 65-86
- [46] Varian, H. (1988) : « Le Principe d'Arbitrage en Économie Financière », *Annales d'Économie et de Statistique* 10, 1-22. Traduit d'un article paru dans *Journal of Economic Perspectives* 1, Automne 1987.
- [47] Werner, J. (1985) : « Equilibrium in Economies with Incomplete Markets », *Journal of Economic Theory* 36, 110-119.

Université de Montréal
Département de sciences économiques
Centre de documentation
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3J7

Cahiers de recherche (Discussion papers)
1995 à aujourd'hui (1995 to date)

Si vous désirez obtenir un exemplaire, vous n'avez qu'à faire parvenir votre demande et votre paiement (\$ 5 l'unité) à l'adresse ci-haut mentionnée. / To obtain a copy (\$ 5 each), please send your request and prepayment to the above-mentioned address.

- 9501 : Boyer, Marcel et Jean-Jacques Laffont, "Environmental Risks and Bank Liability", janvier 1995, 46 pages.
- 9502 : Margolis, David. N., "Firm Heterogeneity and Worker Self-Selection Bias Estimated Returns to Seniority", décembre 1994, 29 pages.
- 9503 : Abowd, John M., Francis Kramarz et David N. Margolis, "High-Wage Workers and High-Wage Firms", janvier 1995, 73 pages
- 9504 : Cardia, Emanuela et Steve Ambler, "Indexation Lags and Heterodox Stabilization Programs", janvier 1995, 29 pages.
- 9505 : Garcia, René et Huntley Schaller, "Are the Effects of Monetary Policy Asymmetric?", février 1995, 42 pages.
- 9506 : Parent, Daniel, "Survol des contributions théoriques et empiriques liées au capital humain", février 1995, 70 pages.
- 9507 : Parent, Daniel, "Wages and Mobility : The Impact of Employer-Provided Training", février 1995, 34 pages.
- 9508 : Parent, Daniel, "Industry-Specific Capital and the Wage Profile : Evidence from the NLSY and the PSID", février 1995, 21 pages.
- 9509 : Parent, Daniel, "Matching, Human Capital, and the Covariance Structure of Earnings", février 1995, 54 pages.
- 9510 : Garcia, René, "Asymptotic Null Distribution of the Likelihood Ratio Test in Markov Switching Models", mars 1995, 50 pages.
- 9511 : Garcia, René, Annamaria Lusardi et Serena Ng, "Excess Sensitivity and Asymmetries in Consumption : An Empirical Investigation", mars 1995, 26 pages.
- 9512 : Sprumont, Yves, "An Axiomatization of the Pazner-Schmeidler Rules in Large Fair Division Problems", mars 1995, 26 pages.
- 9513 : Ghysels, Eric, Lynda Khalaf et Cosmé Vodounou, "Simulation Based Inference in Moving Average Models", mars 1995, 10 pages.
- 9514 : Ng, Serena, "Looking for Evidence of Speculative Stockholding in Commodity Markets", mars 1995, 25 pages.
- 9515 : Ng, Serena et Huntley Schaller, "The Risky Spread, Investment, and Monetary Policy Transmission : Evidence on the Role of Asymmetric Information", mars 1995, 26 pages.

- 9516 : Ng, Serena, "Testing for Homogeneity in Demand Systems when the Regressors are Non-Stationary", mars 1995, 26 pages.
- 9517 : Ghysels, Eric, Clive W.J. Granger et Pierre L. Sikdos, "Is Seasonal Adjustment a Linear or Nonlinear Data Filtering Process?", mars 1995, 34 pages.
- 9518 : Ghysels, Eric, Alastair Hall et Hahn S. Lee, "On Periodic Structures and Testing for Seasonal Unit Roots", mars 1995, 45 pages.
- 9519 : Sprumont, Yves, "On the Game-Theoretic Structure of Public-Good Economies", mars 1995, 21 pages.
- 9520 : Charles, Sandra, François Vaillancourt et Nicolas Marceau, "The Impact of Decentralization on Growth and Democracy : A Note", mars 1995, 13 pages.
- 9521 : Sprumont, Yves, "Balanced Egalitarian Redistribution of Income", mars 1995, 17 pages.
- 9522 : Bronsard, Camille, Lise Salvas-Bronsard et Alain Trognon, "On the Residual Dynamics Implied by the Rational Expectations Hypothesis", mars 1995, 18 pages.
- 9523 : Campbell, Bryan et Eric Ghysels, "An Empirical Analysis of the Canadian Budget Process", mars 1995, 30 pages.
- 9524 : Ghysels, Eric, Alain Guay et Alastair Hall, "Predictive Tests for Structural Change with Unknown Breakpoint", avril 1995, 29 pages.
- 9525 : Ghysels, Eric, "On Stable Factor Structures in the Pricing of Risk", avril 1995, 37 pages.
- 9526 : Kollmann, Robert, "Mark Up Fluctuations in U.S. Manufacturing and Trade : Empirical Evidence Based on A Model of Optimal Storage", avril 1995, 18 pages.
- 9527 : Laberge-Nadeau, Claire, Georges Dionne, Urs Maag, Denise Desjardins, Charles Vanasse et J.-M. Ékoé, "Medical Conditions and the Severity of Commercial Motor Vehicle (CMV) Drivers' Road Accidents", mai 1995, 26 pages.
- 9528 : Dionne, Georges, Manuel Artis et Montserrat Guillén, "On the Repayment of Personal Loans Under Asymmetrical Information : A Count Data Model Approach", mai 1995, 32 pages.
- 9529 : Ruge-Murcia, Francisco J., "Government Expenditure and the Dynamics of High Inflation", juin 1995, 45 pages.
- 9530 : Pesaran, M. Hashem et Francisco J. Ruge-Murcia, "A Discrete-Time Version of Target Zone Models with Jumps", juin 1995, 50 pages.
- 9531 : Dionne, Georges et N. Fombaron, "Non-Convexities and Efficiency of Equilibria in Insurance Markets with Asymmetric Information", juin 1995, 22 pages.
- 9532 : Bronsard, C., P. Michel et L. Salvas-Bronsard, "Singular Demand Systems as an Instrument of Scientific Discovery", juillet 1995, 17 pages.
- 9533 : Dionne, G. et C. Fluet, "Incentives in Multi-Period Regulation and Procurement : A Graphical Analysis", juillet 1995, 46 pages.
- 9534 : Ng, Serena et Pierre Perron, "Estimation and Inference in Nearly Unbalanced, Nearly Cointegrated Systems", août 1995, 38 pages.
- 9535 : Ng, Serena et Pierre Perron, "The Exact Error in Estimating the Spectral Density at the Origin", août 1995, 33 pages.
- 9536 : Ghysels, Eric, Christian Gouriéroux et Joanna Jasiak, "Market Time and Asset Price Movements : Theory and Estimation", septembre 1995, 61 pages.
- 9537 : Dionne, Georges, Robert Gagné et Charles Vanasse, "Inferring Technological Parameters from Incomplete Panel Data", septembre 1995, 40 pages.
- 9538 : Dufour, Jean-Marie et Eric Renault, "Short-Run and Long-Run Causality in Time Series : Theory", septembre 1995, 40 pages.

- 9539 : Dufour, Jean-Marie, "Some Impossibility Theorems in Econometrics with Applications to Instrumental Variables, Dynamic Models and Cointegration", septembre 1995, 42 pages.
- 9540 : Mercenier, Jean et Philippe Michel, "Temporal Aggregation in a Multi-Sector Economy with Endogenous Growth", septembre 1995, 17 pages.
- 9541 : Loranger, Jean-Guy, "Neoliberalism and the Overwhelming Influence of Financial Markets : a Comparative Analysis between NAFTA Countries and Other G-7 Countries", septembre 1995, 34 pages.
- 9542 : Proulx, Pierre-Paul, "La décentralisation : facteur de développement ou d'éclatement du Québec", août 1995, 26 pages.
- 9543 : Arcand, Jean-Louis, Ghazi Boulila et Christian Tritten, "Intergenerational Contracts, Remittances, and Growth", octobre 1995, 57 pages.
- 9544 : Kichian, Maral, René Garcia et Eric Ghysels, "On the Dynamic Specification of International Asset Pricing Models", octobre 1995, 29 pages.
- 9545 : Arcand, Jean-Louis, "Land Ownership, Working Capital, and Agricultural Output : Egypt, 1913-1958", octobre 1995, 93 pages.
- 9546 : Arcand, Jean-Louis et Marcel G. Dagenais, "The Empirics of Economic Growth in a Cross Section of Countries : Do Errors in Variables Really Not Matter?", octobre 1995, 65 pages.
- 9547 : Dufour, Jean-Marie et Jan F. Kiviet, "Exact Inference Methods for First-Order Autoregressive Distributed Lag Models", octobre 1995, 52 pages.
- 9548 : Dufour, Jean-Marie et Jan F. Kiviet, "Exact Tests for Structural Change in First-Order Dynamic Models", octobre 1995, 39 pages.
- 9549 : Kiviet, Jan F. et Jean-Marie Dufour, "Exact Tests in Single Equation Autoregressive Distributed Lag Models", octobre 1995, 38 pages.
- 9550 : Briys, Eric et Pascale Viala, "Optimal Insurance Design under Background Risk", octobre 1995, 14 pages.
- 9551 : Ng, Serena et Joris Pinkse, "Nonparametric Two-Step Estimation of Unknown Regression Functions when the Regressors and the Regression Error Are not Independent", octobre 1995, 22 pages.
- 9552 : Bai, Jushan et Pierre Perron, "Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes", octobre 1995, 58 pages.
- 9553 : de Lemos Grandmont, Renato, "Mexico's Financial Liberalization and Reform, A Critical Overview", octobre 1995, 66 pages.
- 9554 : de Lemos Grandmont, Renato, "Multivariate Cointegration in the Presence of Structural Breaks : The Case of Money Demand in Mexico", octobre 1995, 69 pages.
- 9555 : Boyer, Marcel, Philippe Mahenc et Michel Moreaux, "Entry Blockading Locations", octobre 1995, 37 pages.
- 9556 : Boyer, Marcel et Michel Moreaux, "Capacity Commitment versus Flexibility : The Technological Choice Nexus in a Strategic Context", octobre 1995, 37 pages.
- 9557 : Boyer, Marcel et Jean-Jacques Laffont, "Environmental Protection, Producer Insolvency and Lender Liability", octobre 1995, 38 pages.
- 9558 : Montmarquette, Claude, Sophie Mahseredjian et Rachel Houle, "The Determinants of University Dropouts : a Sequential Decision Model with Selectivity Bias", décembre 1995, 17 pages.
- 9559 : Margolis, David N., "Cohort Effects and Returns to Seniority in France", décembre 1995, 29 pages.

- 9560 : Dionne, Georges et Christian Gollier, "A Model of Comparative Statics for Changes in Stochastic Returns with Dependent Risky Assets", décembre 1995, 14 pages.
- 9601 : Deaton, Angus et Serena Ng, "Parametric and Nonparametric Approaches to Price and Tax Reform", janvier 1996, 28 pages.
- 9602 : Lévy-Garboua, Louis et Claude Montmarquette, "Cognition in Seemingly riskless Choices and Judgments", janvier 1996, 29 pages.
- 9603 : Gonzalo, Jesus et Serena Ng, "A Systematic Framework for Analyzing the Dynamic Effects of Permanent and Transitory Shocks", mars 1996, 42 pages.
- 9604 : Boyer, Marcel et Jean-Jacques Laffont, "Toward a Political Theory of Environmental Policy", avril 1996, 42 pages.
- 9605 : Ai, Chunrong, Jean-Louis Arcand et François Ethier, "Moral Hazard and Marshallian Inefficiency: Evidence from Tunisia", avril 1996, 38 pages.
- 9606 : Mercenier, Jean et Erinc Yeldan, "How Prescribed Policy can Mislead when Data are Defective: A Follow-up to Srinivasan (1994) Using General Equilibrium", avril 1996, 29 pages.
- 9607 : Fortin, Nicole M. et Thomas Lemieux, "Rank Regressions, Wage Distributions, and the Gender GAP", avril 1996, 45 pages.
- 9608 : Fortin, Nicole M. et Thomas Lemieux, "Labor Market Institutions and Gender Differences in Wage Inequality", avril 1996, 13 pages.
- 9609 : S. Hosken, Daniel et David N. Margolis, "The Efficiency of Collective Bargaining in Public Schools", mai 1996, 54 pages.
- 9610 : Dionne, Georges et Tahar Mounsi, "Investment Under Demand Uncertainty : the Newsboy Problem Revisited", mai 1996, 18 pages.
- 9611 : Perron, Pierre et Serena Ng, "An Autoregressive Spectral Density Estimator at Frequency Zero for Nonstationarity Tests", juin 1996, 44 pages.
- 9612 : Ghysels, Eric et Serena Ng, "A Semi-Parametric Factor Model for Interest Rates", juillet 1996, 29 pages.
- 9613 : Ghysels, Eric, Andrew Harvey et Eric Renault, "Stochastic Volatility", juillet 1996, 70 pages.
- 9614 : Kollmann, Robert, "The Exchange Rate in a Dynamic-Optimizing Current Account Model with Nominal Rigidities : A Quantitative Investigation", juillet 1996, 54 pages.
- 9615 : Bossaerts, Peter, Eric Ghysels et Christian Gouriéroux, "Arbitrage-Based Pricing when Volatility is Stochastic", juillet 1996, 58 pages.
- 9616 : À venir.
- 9617 : Allard, Marie, Camille Bronsard et Christian Gouriéroux, "Actifs financiers et théorie de la consommation", juillet 1996, 50 pages.