

Université de Montréal

**Transfert d'information quantique et intrication sur
réseaux photoniques**

par

Éric-Olivier Bossé

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

31 août 2017

SOMMAIRE

Les solutions analytiques de réseaux photoniques avec revitalisation fractionnelle (FR) et transfert parfait (PST) d'état quantique sont examinées dans ce mémoire. L'approche utilisée pour les concevoir, basée sur les polynômes orthogonaux, est soulignée. Un catalogue de modèles analytiques avec PST est offert et de nouveaux résultats sur leurs propriétés de FR sont également inclus. L'approximation d'interaction aux plus proches voisins est utilisée le plus souvent. Deux solutions analytiques avec des interactions aux deuxièmes voisins sont également présentées. Un chapitre d'introduction portant sur la description du modèle selon le point de vue d'une chaîne de spins ainsi que sur la dérivation du modèle dans les réseaux photoniques à partir des équations de Maxwell précèdent l'article. Le deuxième système avec interactions jusqu'aux deuxièmes voisins est présenté dans l'appendice.

Mots clés : Transfert d'état quantique, Revitalisation fractionnelle, Intrication, Information quantique, Ordinateur quantique, Fil quantique, Chaîne de spin XX, Réseaux optiques, Problème spectral inverse, Polynômes orthogonaux

SUMMARY

The analytic specifications of photonic lattices with fractional revival (FR) and perfect state transfer (PST) are reviewed in this master's thesis. The approach to their design which is based on orthogonal polynomials is highlighted. A compendium of analytic models with PST is offered. New results on their FR properties are included. The nearest-neighbour approximation is adopted in most of the review ; two analytic examples with next-to-nearest neighbour interactions are also presented. An introductory chapter on the description of the model for the spin chain point of view and the derivation of the model in photonic lattices precedes the article. The second system with next-to-nearest neighbour interactions will be presented in the appendix.

Keywords : Perfect State Transfer, Fractional Revival, entanglement, Quantum information, Quantum computer, Quantum wire, XX spin chains, Photonic lattices, Inverse spectrum problem, Orthogonal polynomials

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	ii
Summary	iii
Liste des figures	vi
Liste des sigles et des abréviations	vii
Dédicaces	viii
Remerciements	ix
Introduction	1
Contribution de l’auteur.....	2
Chapitre 1. Modèle et réalisation d’une chaîne de spins de type XX Heisenberg	3
1.1. Modèle décrivant la dynamique d’une chaîne de spin.....	3
1.2. Résolution d’une onde électromagnétique dans un cylindre diélectrique infini uniforme.....	5
1.3. Théorie des modes couplés.....	7
Chapitre 2. Coherent transport in photonic lattices : A survey of recent analytic results	10
Abstract.....	10
Introduction.....	10
2.1. Transport in waveguide arrays and orthogonal polynomials.....	12
2.2. Fractional Revival (FR) and Perfect State Transfer (PST) in the nearest-neighbour approximation.....	15
2.3. Engineering waveguide arrays with FR and PST.....	17

2.4. A review of analytic models with of FR and PST	18
2.4.1. Krawtchouk	19
2.4.1.1. FR	19
2.4.2. para-Krawtchouk	20
2.4.2.1. FR	20
2.4.2.2. PST	21
2.4.3. dual-Hahn	22
2.4.3.1. FR	22
2.4.3.2. PST	23
2.4.4. Special q-Racah	23
2.4.4.1. FR	24
2.4.4.2. PST	25
2.4.5. para-Racah	25
2.4.5.1. FR	26
2.4.5.2. PST	27
2.5. A model with next-to-nearest neighbour interaction	27
2.5.1. A NNN model based on Krawtchouk couplings	28
2.5.1.1. FR	28
2.5.1.2. PST	29
2.5.2. Other NNN models	30
2.6. Conclusion	30
Acknowledgements	31
Conclusion	32
Références	33
Annexe A. Système des duaux de Hahn avec interactions jusqu'aux deuxièmes voisins	A-1
A.1. FR	A-1
A.2. Vérification du modèle	A-2

LISTE DES FIGURES

2.1	Probability of finding a single photon at each site of a 10-waveguide array ($N = 9$) of q-Racah type with parameters $\beta = (K - 2)^{-1/2}$ and $K = 6$ for various distances. (a) The photon is initially inserted at site 0, (b) after some distance $Z = \frac{\pi}{8}$ the photon spreads out through the lattice and (c) Fractional Revival is observed at $Z_{FR} = \frac{\pi}{4}$ and (d) Perfect State Transfer observed at distance $Z_{PST} = \frac{\pi}{2} = 2Z_{FR}$	25
A.1	Probabilité de trouver un photon à chacun des sites d'un réseau de 10 guides ($N = 9$) de type duaux de Hahn ayant les paramètres $\beta = 100$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 1/2$ pour différentes distances. (a) Après une distance $Z_{FR} = \frac{\pi}{12}$ le photon effectue de la FR avec l'angle $\theta = \frac{\pi}{8}$, (b) de la FR balancée ($\theta = \frac{\pi}{4}$) est ensuite observé à $Z_{FR} = \frac{\pi}{6}$, (c) après une distance $Z_{FR} = \frac{\pi}{4}$ on observe de la FR avec $\theta = \frac{3\pi}{8}$ et (d) du PST est observé à $Z_{PST} = \frac{\pi}{3}$, ce qui représente le double de la distance pour de la FR balancée.	A-3

LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

PST	Transfert parfait d'un état quantique, de l'anglais <i>Perfect State Transfer</i>
FR	Revitalisation fractionnelle d'un état quantique, de l'anglais <i>Fractional Revival</i>

DÉDICACES

À ma famille

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Luc Vinet, pour l'ambiance de recherche propice à l'avancement et à l'apprentissage. Ses commentaires ont toujours été d'une grande pertinence et m'ont permis d'achever cette maîtrise dans de bref délais.

Je tiens également à remercier mes collègues de recherche et de bureau : Julien Gaboriaud, Geoffroy Bergeron, Jean-Michel Lemay et Félix Fournier sans qui cette expérience n'aurait pas été la même.

Je tiens finalement à remercier ma famille et ma conjointe Delphine Yassa Roy pour tout le soutien apporté durant cet accomplissement.

INTRODUCTION

Le présent mémoire porte sur une méthode générale basée sur les polynômes orthogonaux pour déterminer si un réseau de fibres optiques effectue du transport parfait d'état quantique et de l'intrication. Il est clair que ces propriétés sont au coeur de l'informatique quantique. En effet, l'intrication est à la base de plusieurs protocoles cryptographiques ainsi que de plusieurs algorithmes. Le transport d'état quantique est également inévitable lorsqu'on effectue plusieurs transformations sur un même état lors d'un algorithme. Il est donc primordial de trouver un système physique qui effectue ces opérations. Un bon système ne nécessiterait aucune interaction externe lors du processus pour éviter le plus possible la décohérence de celui-ci. Un tel système a été proposé par Bose [1] en 2003. Il proposa qu'une chaîne de spins avec couplage uniforme pourrait effectuer un transfert d'état quantique entre son premier et son dernier site. Ce transfert serait effectué par la seule dynamique de la chaîne. Ses travaux ont été infructueux étant donné que le transfert parfait n'était plus possible pour des chaînes avec plus de 4 spins. Par contre, une grande vague d'intérêt a mené les recherches vers un autre type de chaîne de spins de Heisenberg de type XX avec couplages non-uniformes. De nombreux travaux ont montré la possibilité d'effectuer un tel transfert dans ces chaînes et récemment Vinet et al. [2] ont montré qu'elle pouvait générer de l'intrication. Un désavantage de ce modèle est qu'il est ardu de construire un matériau ayant les couplages permettant d'effectuer ces propriétés. Les expérimentateurs se sont donc tournés vers un modèle équivalent, celui des réseaux de guides d'onde couplés de manière évanescente. Dans ce cas, les couplages sont déterminés par la distance entre les fibres dans le réseau et peuvent donc être ajustés assez facilement sur le plan expérimental. Un premier chapitre introduit le modèle des chaînes de spins de type XX ainsi qu'une réalisation de ce type de système dans un réseau de guides d'onde. Une fois le cadre théorique décrivant l'interaction entre les guides d'onde dérivé, l'article central est présenté. Une brève revue présentant une méthode basée sur les polynômes orthogonaux pour des interactions aux plus proches ainsi qu'aux deuxièmes voisins et un catalogue uniforme comprenant de nouveaux résultats et ceux déjà connus est présenté. Ce mémoire se termine par une brève conclusion sur les avancements dans le domaine et sur des sujets connexes suivi d'une annexe comportant de nouveaux résultats sur

le système basé sur les polynômes duaux de Hahn avec interactions jusqu'aux deuxièmes voisins.

CONTRIBUTION DE L'AUTEUR

Ce projet a été initié sous la supervision de Luc Vinet dans le cadre du cours PHY3030. L'idée originale était d'obtenir de nouveaux résultats sur des systèmes ayant du PST et de la FR avec des interactions jusqu'aux deuxièmes voisins. Un programme Mathematica pour simuler et valider les solutions du modèle a été développé par l'auteur. Ces résultats sont présentés en annexe. Dans la foulée de la conférence internationale SIDE12, le journal SIGMA a décidé de faire une édition spéciale portant sur les thèmes de ces conférences. Les éditeurs de ce numéro ont demandé à Luc Vinet d'écrire un article de revue basé sur sa conférence. L'auteur du présent mémoire a mis au point une méthode de résolution pour déterminer si un réseau de guides d'ondes couplés, caractérisé par un spectre polynomial général, effectue du transfert d'information quantique et de l'intrication. Cette méthode utilise la théorie des polynômes à valeurs entières ainsi que les différences entre deux valeurs propres successives du spectre. Elle a été utilisée pour démontrer l'existence de PST et de FR dans le système des duaux de Hahn avec interactions jusqu'aux deuxièmes voisins. L'auteur a également démontré l'existence de FR dans le système des q -Racah. La première version de l'article ainsi que tous les calculs nécessaires à l'obtention d'un catalogue uniforme de nouveaux résultats et d'anciens ont été effectués par l'auteur du présent mémoire. L'article a ensuite été retravaillé par Luc Vinet qui s'est assuré de la qualité de celui-ci. Les évaluateurs consultés par SIGMA ont offert des suggestions utiles qui ont été intégrées. La version révisée a été acceptée pour publication.

Chapitre 1

MODÈLE ET RÉALISATION D'UNE CHAÎNE DE SPINS DE TYPE XX HEISENBERG

Ce chapitre porte sur la description et une réalisation du modèle mathématique décrivant la dynamique d'une chaîne de spins. Ce modèle possède de nombreuses applications en informatique quantique. En effet, une chaîne de spins est un système en une dimension qui comporte à chaque site un spin (qui peut représenter un qubit dans le cas particulier d'un spin $1/2$) ce qui est donc une bonne représentation d'un fil quantique. En effet, un spin $1/2$ «up» $|\uparrow\rangle$ ou $-1/2$ «down» $|\downarrow\rangle$ vit dans un espace vectoriel en 2 dimensions sur le corps des complexes (\mathbb{C}^2), tout comme un qubit. Plus concrètement, l'état $|0\rangle$ est associé à l'état de spin «down» $|\downarrow\rangle$ et l'état $|1\rangle$ est associé au spin «up» $|\uparrow\rangle$; un qubit est donc complètement réalisé par l'état

$$\alpha |\downarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle, \quad \text{où} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.0.1)$$

Par contre, la réalisation physique d'un tel système n'est pas très malléable. En effet, une réalisation d'une telle chaîne ne permet pas de modifier les couplages entre les spins étant donné que cette propriété est liée au matériau utilisé. Il serait donc pertinent d'avoir une réalisation physique du modèle qui permet cette liberté. Les réseaux de fibres optiques ont été proposés comme solution à ce problème [3] étant donné que le couplage entre les fibres provient de l'onde évanescente du photon. L'interaction entre les fibres est donc complètement déterminée par la distance entre chacune d'entre elles, ce qui est facilement réalisable en laboratoire. Une fois que le modèle des chaînes de spins aura été présenté, son implantation dans les fibres optiques sera dérivée.

1.1. MODÈLE DÉCRIVANT LA DYNAMIQUE D'UNE CHAÎNE DE SPIN

Une chaîne de spins de type XX -Heisenberg est une chaîne contenant $N + 1$ spins vivant dans l'espace $(\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+1)}$. L'interaction entre les spins les plus rapprochés peut être représenté

par l'Hamiltonien H :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} J_{n+1} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N B_n (\sigma_n^z + 1) \quad (1.1.1)$$

Les constantes J_{n+1} sont les couplages entre les sites n et $n+1$ et sont définies positives ; les constantes B_n sont quant à elles le champ magnétique au site n . Les opérateurs σ_n^i sont de la forme

$$\sigma_n^i = \underbrace{\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \overbrace{\sigma^i}^{n^{\text{ième}} \text{ site}} \otimes \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}}_{N+1 \text{ sites}}, \quad i = x, y, z \quad (1.1.2)$$

et agissent sur le $n^{\text{ième}}$ espace (\mathbb{C}^2) de la chaîne. Les opérateurs σ^i sont les matrices de Pauli et agissent de cette façon sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$\begin{aligned} \sigma^x |0\rangle &= |1\rangle, & \sigma^y |0\rangle &= -i |1\rangle, & \sigma^z |0\rangle &= -|0\rangle \\ \sigma^x |1\rangle &= |0\rangle, & \sigma^y |1\rangle &= i |0\rangle, & \sigma^z |1\rangle &= |1\rangle \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Pour faire office de fil quantique, la chaîne considérée doit transporter un qubit du premier site au dernier. Une façon d'effectuer cette tâche est d'observer que le spin total d'une chaîne est conservé :

$$\left[H, \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (\sigma_l^z + 1) \right] = 0. \quad (1.1.4)$$

Il est donc possible d'étiqueter chacun des sous-espaces propres de l'Hamiltonien par le nombre de spin $|\uparrow\rangle$ qu'il contient. On peut donc insérer un qubit dans l'état $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ au premier site en ayant tous les autres dans l'état $|0\rangle$, puis laisser les interactions faire le transfert. Il est donc possible d'étiqueter les états du système à une excitation par la position du spin $|\uparrow\rangle$ dans la chaîne :

$$|n\rangle = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \quad (1.1.5)$$

$n = 0, \dots, N$ et possède un seul 1 en $n^{\text{ième}}$ position, ce qui correspond au $n^{\text{ième}}$ spin. L'action de l'Hamiltonien sur ces états est tridiagonale :

$$H |n\rangle = J_{n+1} |n+1\rangle + J_n |n-1\rangle + B_n |n\rangle \quad (1.1.6)$$

L'interaction entre les spins a donc pour effet de propager le spin entre les différents sites de la chaîne. Le transfert parfait d'un qubit constitue donc l'évolution cohérente de l'état initial $|0\rangle$ en l'état final $|N\rangle$ avec probabilité 1. Dans la prochaine section, une réalisation de ce modèle est implantée dans un réseau de fibres optiques. L'ajout d'un qubit au premier site correspond alors à l'insertion d'un photon dans la première fibre du réseau. Le rôle du champ magnétique de la chaîne est joué par la constante de propagation de la fibre et les couplages par les distances entre celles-ci. Pour bien comprendre l'évolution d'un photon

dans un réseau de fibres, il faut comprendre sa propagation dans une seule fibre puis observer comment l'onde évanescente se couple avec les fibres adjacentes.

1.2. RÉOLUTION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS UN CYLINDRE DIÉLECTRIQUE INFINI UNIFORME

La propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu assujéti à des conditions limites ne se comporte pas de la même façon qu'une onde dans le vide. En effet, l'application de conditions aux limites impose des restrictions que le champ doit respecter à l'interface des deux milieux : le matériau diélectrique et le vide (dans ce cas ci). Dans le cas d'un guide d'onde cylindrique infini, les nombres d'onde azimutal m et radial k_{\perp} sont quantifiés et non continus comme dans le vide. Cette quantification induit des modes de propagation dans ces directions. Ce sont ces modes qui vont se propager entre les fibres du réseau et qui vont induire la propagation, en z , dans le reste des fibres. Considérons un cylindre infini de rayon a et exprimons les équations de Maxwell d'une onde électromagnétique dans la matière :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathcal{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathcal{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ et } \mathcal{H} = \frac{1}{\mu} \mathcal{B}$$

On suppose qu'il n'y a aucune dissipation dans le matériau, donc ϵ et μ sont réel. Supposons une propagation temporelle de l'onde de la forme $e^{-i\omega t}$, où ω est la fréquence de l'onde. Les équations de Maxwell prennent cette forme :

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathcal{B},\tag{1.2.2}$$

$$\nabla \times \mathcal{B} = -i\omega \epsilon \mu \mathbf{E}\tag{1.2.3}$$

En appliquant le rotationnel $\nabla \times$ sur l'équation (1.2.2) on obtient une équation de type Helmholtz :

$$\begin{aligned}\underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})}_0 - \nabla^2 \mathbf{E} &= \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} \\ \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

où $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

Examinons plus précisément la composante z du champ \mathbf{E} en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r E_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi}^2 E_z + \partial_z^2 E_z + k^2 = 0.\tag{1.2.5}$$

Une équation semblable est obtenue pour la composante B_z , les solutions B_z auront donc la même forme que celles obtenues pour E_z . La présente équation peut se résoudre par séparation des variables. Posons alors une solution du type $E_z = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$, l'équation (1.2.5) devient donc

$$\frac{1}{rR}\partial_r(r\partial_r R) + \frac{1}{r^2\Phi}\partial_\phi^2\Phi + \frac{1}{Z}\partial_z^2 Z + k^2 = 0. \quad (1.2.6)$$

Étant donné que toutes les composantes en z , r et ϕ sont indépendantes dans l'équation (1.2.6), on peut poser la partie en z et en ϕ comme ceci

$$\frac{1}{Z}\partial_z^2 Z = -k_z^2, \quad (1.2.7)$$

$$\frac{1}{\Phi}\partial_\phi^2\Phi = -m^2. \quad (1.2.8)$$

Les solutions de ces équations sont les suivantes

$$Z = e^{-ik_z z}, \quad (1.2.9)$$

$$\Phi = e^{im\phi}. \quad (1.2.10)$$

Les signes des exponentielles sont choisis par convention. On a donc une onde qui se propage en z (dans l'axe de la fibre) et un mode azimutal régi par l'entier m . Il ne reste plus qu'à solutionner la partie radiale en substituant les autres parties par leur constante associée

$$\partial_r^2 R + \frac{1}{r}\partial_r R + \left(k^2 - \overbrace{k_z^2}^{k_\perp} - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0, \quad (1.2.11)$$

où k_\perp est le nombre d'onde radial.

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$r\partial_r^2 R + \partial_r R + \left(rk_\perp - \frac{m^2}{r}\right)R = 0. \quad (1.2.12)$$

Les solutions d'une telle équation sont bien connues, ce sont les fonctions de Bessel $J_m(k_\perp r)$ et $Y_m(k_\perp r)$, donc

$$R(r) = AJ_m(k_\perp r) + BY_m(k_\perp r). \quad (1.2.13)$$

Étant donné que nous regardons la solution à l'intérieur du guide, $r = 0$ fait partie du domaine. On doit donc rejeter la partie en Y_m , car elle diverge en ce point. Le champ E_z se propage donc de cette façon à l'intérieur du guide d'onde

$$E_z^{\text{int}} = AJ_m(k_\perp r)e^{im\phi}e^{-ik_z z}e^{-i\omega t}. \quad (1.2.14)$$

Il est important de noter que les modes du champ forment une base orthogonale étant donné que c'est le cas des fonctions de Bessel. À l'extérieur du guide, on s'intéressera aux solutions où $k_\perp = i\kappa_\perp$ est purement imaginaire. Cette particularité génère des solutions évanescentes

de la forme

$$E_z^{\text{ext}} = CK_m(\kappa_{\perp}r)e^{im\phi}e^{-ik_zz}e^{-i\omega t}, \quad (1.2.15)$$

où K_m est une fonction de Bessel modifiée de second espèce.

On peut obtenir la solution des champs pour les autres composantes en utilisant les équations (1.2.2). Il est également possible de séparer les champs en 2 modes, soit transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) qui correspondent à $E_z = 0$ et $B_z = 0$ respectivement. Le champ \mathbf{E} s'exprime donc de cette façon

$$\mathbf{E}^{\alpha} = \frac{-i}{k_{\perp}^2} \left[C_{TE}^{\alpha} \left(\frac{w}{r} \partial_{\phi} B_z^{\alpha} \hat{r} + w \partial_r B_z^{\alpha} \hat{\phi} \right) + C_{TM}^{\alpha} \left(k_z \partial_r E_z^{\alpha} \hat{r} - \frac{k_z}{r} \partial_{\phi} E_z^{\alpha} \hat{\phi} + ik_{\perp}^2 E_z^{\alpha} \hat{z} \right) \right] \quad (1.2.16)$$

où $\alpha = \{\text{intérieur, extérieur}\}$

Un choix judicieux des constantes C_{TE}^{int} , C_{TE}^{ext} , C_{TM}^{int} et C_{TM}^{ext} garantit la continuité du champ en ses conditions limites ($\mathbf{E}^{\text{int}}(a) = \mathbf{E}^{\text{ext}}(a)$).

Il est intéressant de remarquer le comportement de la propagation de l'onde à l'intérieur et à l'extérieur du guide. En effet, le comportement à l'intérieur est en $J_m(k_{\perp}r) \propto e^{ik_{\perp}r}$ qui est ondulatoire contrairement au comportement extérieur $K_m(\kappa_{\perp}r) \propto e^{-\kappa_{\perp}r}$, $\kappa_{\perp}r \gg 1$, qui est évanescent. On peut facilement concevoir qu'une autre fibre placée à proximité du champ évanescent peut le capter et donc se coupler avec l'autre fibre. La prochaine section illustre comment ce couplage s'effectue.

1.3. THÉORIE DES MODES COUPLÉS

Considérons un ensemble constitué de N guides d'onde. Traitons le guide d'onde n_0 comme étant non-perturbé et considérons le reste des fibres comme des perturbations. On peut donc représenter le champ dans un guide n perturbé et n_0 non-perturbé comme

$$\mathbf{E}_n = \mathcal{E}_n(z) \mathbf{e}_n(r, \phi) e^{-i\omega t} \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{E}_{n_0} = e^{i\beta z} \mathbf{e}_{n_0}(r, \phi) e^{-i\omega t} \quad (1.3.2)$$

Le vecteur $\mathbf{e}_i(r, \phi)$ constitue un des modes transverses orthonormaux de propagation dans le guide. La propagation en direction z du guide non-perturbé est semblable à celle dérivée à la section précédente et celle d'un guide perturbé est $\mathcal{E}(z)$. Pour obtenir un traitement complet, il faudra traiter un à un les guides comme étant non-perturbé. On peut introduire une perturbation dans une fibre par l'entremise des équations de Maxwell en ajoutant une

polarisation \mathbf{P} . Le nouveau système perturbé s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\epsilon_n \mathbf{E}_n + \mathbf{P}_n) &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{B}_n &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{E}_n &= iw \mathbf{B}_n, \\
\nabla \times \mathbf{H}_n &= -iw(\epsilon_n \mathbf{E}_n + \mathbf{P}_n)
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Notons que $\mathbf{P}_{n_0} = 0$ (dans le guide non-perturbé).

Le théorème de réciprocité de Lorentz stipule qu'entre deux sources de champ, les effets qu'une source a sur l'autre vont être identiques si les deux sources sont interverties. Dans notre cas, ceci implique que les effets entre une fibre perturbée et non-perturbée vont être identiques sous l'échange de leur position dans le réseau.

Mathématiquement, cette relation se traduit par

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \cdot [\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_{n_0}^* + \mathbf{E}_{n_0}^* \times \mathbf{H}_n] d\mathcal{S} = iw \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{E}_{n_0}^* d\mathcal{S}. \tag{1.3.4}$$

Il est possible de choisir une surface \mathcal{S} dans le plan transverse à la direction de propagation z tel que

$$\left(i \frac{d}{dz} + \beta \right) \mathcal{E}_n(z) \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_{n_0}^* + \mathbf{e}_{n_0}^* \times \mathbf{h}_n] \cdot \hat{z} d\mathcal{S} = -w \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{e}_{n_0}^* d\mathcal{S}. \tag{1.3.5}$$

En assumant que les différences entre les fibres du réseau sont petites (ce pourquoi il est possible de les traiter comme des perturbations), on peut conclure que leur mode de propagation transverse (r, ϕ) est le même. Cette supposition permet de tirer profit d'une variante de la relation d'orthogonalité entre ces modes, appelée orthogonalité de puissance :

$$\int_{\mathcal{S}} [\mathbf{e}(m_1) \times \mathbf{h}^*(m_2) + \mathbf{e}^*(m_2) \times \mathbf{h}(m_1)] \cdot \hat{z} d\mathcal{S} = 4P_0 \delta_{m_1, m_2}. \tag{1.3.6}$$

Il est donc possible d'exprimer (1.3.5) sous la forme

$$\left(i \frac{d}{dz} + \beta \right) \mathcal{E}_n(z) = \frac{-w}{4P_0} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{e}_{n_0}^* d\mathcal{S}. \tag{1.3.7}$$

Il ne reste qu'à analyser le côté droit de (1.3.7).

La polarisation dans le guide d'onde n peut se diviser en deux contributions, c'est-à-dire sa contribution dite locale $\mathbf{P}_{n,\ell}$ et celle qui provient du couplage avec les autres guides $\mathbf{P}_{n,c}$. On a donc

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n,\ell} + \mathbf{P}_{n,c}, \tag{1.3.8}$$

avec

$$\mathbf{P}_{n,\ell} = \bar{\epsilon}_n \mathcal{E}_n(z) \mathbf{e}_n \tag{1.3.9}$$

$$\mathbf{P}_{n,c} = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\epsilon}_n \mathcal{E}_j(z) \mathbf{e}_j, \quad (1.3.10)$$

où $\bar{\epsilon}_n$ représente la déviation par rapport à la permittivité non-perturbée ϵ_n . L'équation (1.3.7) devient donc

$$\begin{aligned} \left(i \frac{d}{dz} + \beta \right) \mathcal{E}_n(z) &= \frac{-w}{4P_0} \left[\int_{\mathcal{S}} \bar{\epsilon}_n \mathcal{E}_n(z) \mathbf{e}_{n_0}^* \cdot \mathbf{e}_n + \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\epsilon}_n \mathcal{E}_j(z) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_{n_0}^* d\mathcal{S} \right] \\ &= -\mathcal{E}_n(z) \underbrace{\left(\frac{w}{2P_0} \right) \int_{\mathcal{S}} \bar{\epsilon}_n \mathbf{e}_{n_0}^* \cdot \mathbf{e}_n d\mathcal{S}}_{\alpha_n} \\ &\quad - \sum_{j=0, j \neq n}^{N-1} \mathcal{E}_j(z) \underbrace{\left(\frac{w}{4P_0} \right) \int_{\mathcal{S}} \bar{\epsilon}_n \mathbf{e}_{n_0}^* \cdot \mathbf{e}_j d\mathcal{S}}_{c_{n,j}} \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Le terme de polarisation local ainsi que le terme de couplage lorsque $j = n$ se combinent en α_n et le reste des termes de couplage sont les $c_{n,j}$. Si on restreint les couplages aux voisins les plus proches, on obtient

$$i \frac{d}{dz} \mathcal{E}_n(z) + (\beta + \alpha_n) \mathcal{E}_n(z) + c_{n,n-1} \mathcal{E}_{n-1}(z) + c_{n,n+1} \mathcal{E}_{n+1}(z) = 0. \quad (1.3.12)$$

On peut donc réécrire ceci sous la forme

$$i \frac{d}{dz} \mathcal{E}_n(z) = B_n \mathcal{E}_n + J_n \mathcal{E}_{n-1} + J_{n+1} \mathcal{E}_{n+1}, \quad (1.3.13)$$

où les B_n sont les constantes de propagation et les J_n sont les constantes de couplages. On constate donc que la description mathématique de la propagation en z d'états cohérents classiques dans un réseau de fibres optiques est identique à celle de la dynamique d'une excitation dans un chaîne de spins. Voilà pourquoi on peut réaliser un modèle à l'aide de l'autre. Le prochain chapitre offre une revue de la méthode de résolution d'un tel système dans une perspective de transfert parfait et de revitalisation fractionnelle. On y trouvera aussi un catalogue de systèmes exactement résolubles avec des couplages aux voisins les plus proches et également, dans certains cas, jusqu'aux deuxièmes voisins.

Chapitre 2

COHERENT TRANSPORT IN PHOTONIC LATTICES : A SURVEY OF RECENT ANALYTIC RESULTS

Ce chapitre est le résultat du travail de deux co-auteurs : l'auteur du présent mémoire et Luc Vinet.

ABSTRACT

The analytic specifications of photonic lattices with fractional revival (FR) and perfect state transfer (PST) are reviewed. The approach to their design which is based on orthogonal polynomials is highlighted. A compendium of analytic models with PST is offered. New results on their FR properties are included. The nearest-neighbour approximation is adopted in most of the review ; one analytic example with next-to-nearest neighbour interactions is also presented.

INTRODUCTION

This paper reviews recent analytic results on the perfect transfer and fractional revival of states or excitations in photonic lattices using a general method that also applies to spin chains, tight-binding Hamiltonians, etc. Controlling the evolution of quantum states in devices is of high relevance in areas such as quantum information. With an eye to offering a clean basis for experimental testing, it is also quite practical to look for exact analytical descriptions of such systems. Another objective is to minimize the need for external controls to achieve given tasks, in this respect a key idea is to construct devices whose dynamics will yield on its own the desired effect leaving only the input/output operations as external interactions.

A basic task is the transportation of quantum states from one location to another. Ideally one wishes to have Perfect State Transfer (PST) whereby a quantum state at

an initial position is found with probability 1 at the final destination. While there has been seminal work on optical Bloch oscillations in waveguide arrays, see for instance [4, 5, 6], this review focuses on coherent transport in spin-inspired photonic lattices. Since it has been suggested that spin chains [1] with properly modulated couplings [7, 8] could move a qubit from end-to-end with probability 1 in a given time, there has been enormous interest in this question and indeed various analytic models have been found ([9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]). See [17, 18, 19] for reviews. Remarkably experimental verifications have been offered [20, 21, 3] for the simplest (Krawtchouk) model with PST by using arrays of evanescently coupled waveguides [22, 23, 24]. These can be pictured as a set of optical fibers stacked side by side in a plane. The point is that in the nearest-neighbour approximation, the equations of coupled mode theory describing the propagation of a single photon in waveguide arrays are mathematically identical to those governing the one-excitation dynamics of a certain spin chain with non-uniform couplings. Each qubit is represented by a single waveguide and the presence or absence of a photon in a waveguide corresponds to the $|1\rangle$ or $|0\rangle$ state of the qubit at the corresponding site. The evolution time t of the spin chain is identified with the propagation distance z along the waveguides. Therefore PST is tantamount to finding in the last waveguide after a distance Z_{PST} , the photon initially inserted (at $z = 0$) in the first fiber of the array[†]. The required couplings between the waveguides are engineered by adjusting the distances so that they match the theoretical values. The analysis that underscores the design of the spin chains / photonic lattices with PST shows that the couplings and local magnetic fields / propagation constants correspond to the recurrence coefficients of orthogonal polynomials that are naturally associated to these systems. The analytic models in fact correspond to orthogonal polynomials that have been fully characterized [25] and they are thus referred to by the name of the polynomials that are attached to them. We have already hinted at that above when we mentioned the Krawtchouk model.

It has more recently been observed that spin chains and waveguide arrays can also exhibit another phenomenon called Fractional Revival (FR) which is of significant interest as it relates to entanglement generation. Fractional Revival [26, 18] occurs when an initial wavepacket evolves so as to reproduce itself periodically at certain locations[2, 27, 28, 29, 30, 31]. We shall here be interested in FR at two sites along a spin chain whereby a spin up initially at one end will evolve so as to have, after some FR time, a non-zero probability amplitude only at both ends of the chain. In the photonic picture, this means that the electromagnetic field amplitude is non-zero only in the first

[†]. Strictly speaking in the photonic lattice realizations, one is producing an excitation transfer. In a spin chain, a state i.e. an arbitrary combination of spin up and down will be transported. This is modeled in [21] in an optical settings by encoding a state in polarizations.

and last waveguide. Using the qubit correspondence, this means that after propagating a distance Z_{FR} the state $|10\dots 0\rangle$ has evolved into the entangled state $\alpha|10\dots 0\rangle + \beta|0\dots 01\rangle$.

Interestingly the exploration of the conditions for this FR at two sites has led to the discovery of a new family of orthogonal polynomials [9], named the para-Krawtchouk polynomials, that have been completely characterized and this has hence provided a model which is the paradigm example of a device with FR at the two ends [32]. The FR properties of other analytic models known to have PST have recently been examined; these results will be succinctly reported here. It would of course be quite interesting to realize FR experimentally in photonic lattices in a way similar to what was done for PST.

When using photonic lattices, the restriction to nearest-neighbour (NN) couplings is clearly an approximation. As a mean to explore the validity of this simplification and to determine if new phenomenology can arise when the approximation is improved [33, 34], an analytic model with next-to-nearest couplings and based on the simplest Krawtchouk model has been constructed [35]. It will be discussed towards the end.

In a nutshell the goal of this short review article is : 1. to summarize how orthogonal polynomials intervene in the characterization of photonic lattices with FR and PST ; 2. to go over a selection of recent results in this respect and 3. to offer a compact catalog of analytic models with these properties.

The outline of the paper is as follows. The connection between photon propagation in waveguide arrays and orthogonal polynomials is set up in section 2. The special conditions for FR and PST in these ensembles of waveguides when the NN approximation is made are given in section 3. How the specifications of the lattices are determined from these conditions using orthogonal polynomials is briefly indicated in section 4. Section 5 which is the bulk of the paper goes over a number of analytic models and discusses their FR and PST properties. Some material in this section is original. Section 6 describes one analytic model with next-to-nearest neighbour couplings and comments on extensions and generalizations. A short conclusion completes the paper.

2.1. TRANSPORT IN WAVEGUIDE ARRAYS AND ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Spin chains and photonic lattices are usefully analyzed with the help of orthogonal polynomials (see for instance [10, 18, 36, 37, 38]). Let us consider an array of $(N + 1)$ evanescently coupled optical waveguides. Denote by z the propagation distance and by E_n the modal field amplitude in the n^{th} waveguide. In the nearest-neighbour approximation of

coupled mode theory [39, 40], the propagation is governed by

$$i \frac{d}{dz} E_n(z) = J_{n+1} E_{n+1}(z) + B_n E_n(z) + J_n E_{n-1}(z) \quad (2.1.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, N \quad J_0 = J_{N+1} = 0,$$

B_n is the propagation constant in the n^{th} waveguide and J_{n+1} , a positive real number, is the evanescent coupling strength between the waveguides n and $n+1$. This J_{n+1} is (approximately) given by

$$J_{n+1} = A e^{-C d_{n,n+1}} \quad (2.1.2)$$

where $d_{n,n+1}$ is the distance between the n^{th} and $(n+1)^{\text{th}}$ waveguides and A, C are measurable quantities that specify the array. Upon introducing the natural basis of \mathbb{C}^{N+1} made out of the vectors

$$|n\rangle = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad n = 0, \dots, N \quad (2.1.3)$$

with 1 in the n^{th} position and positing

$$|E\rangle = \sum_{n=0}^N E_n(z) |n\rangle, \quad (2.1.4)$$

one can rewrite (2.1.1) in the form

$$i \frac{d}{dz} |E\rangle = J |E\rangle \quad (2.1.5)$$

where J is the operator defined by

$$J |n\rangle = J_{n+1} |n+1\rangle + B_n |n\rangle + J_n |n-1\rangle, \quad (2.1.6)$$

again with $J_0 = J_{N+1} = 0$. It thus follows that

$$|E(z)\rangle = e^{-izJ} |E(0)\rangle \quad (2.1.7)$$

where in the basis $\{|n\rangle\}$, J is the tridiagonal matrix

$$J = \begin{pmatrix} B_0 & J_1 & 0 & & & \\ J_1 & B_1 & J_2 & & & \\ 0 & J_2 & B_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & J_N & \\ & & & & J_N & B_N \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

The Jacobi matrix J is Hermitian and has non-degenerate eigenvalues λ_s , $s = 0, 1, \dots, N$ when its entries are non-negative. Let us denote the eigenvectors of J by $|\lambda_s\rangle$:

$$J |\lambda_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s\rangle. \quad (2.1.9)$$

We shall now indicate how orthogonal polynomials are naturally associated to the dynamics. This simply follows from the fact that Jacobi matrices are diagonalized by orthogonal

polynomials. Consider the expansion of the eigenbasis $\{|\lambda_s\rangle\}$ in term of the natural basis $\{|n\rangle\}$:

$$|\lambda_s\rangle = \sum_{n=0}^N W_{s,n} |n\rangle. \quad (2.1.10)$$

Acting on both sides with J , we get

$$\lambda_s \sum_{n=0}^N W_{s,n} |n\rangle = \sum_{n=0}^N W_{s,n} (J_{n+1} |n+1\rangle + B_n |n\rangle + J_n |n-1\rangle) \quad (2.1.11)$$

and since the natural basis is orthonormal, we have

$$\lambda_s W_{s,n} = J_{n+1} W_{s,n+1} + B_n W_{s,n} + J_n W_{s,n-1}. \quad (2.1.12)$$

Taking $W_{s,n}$ in the form

$$W_{s,n} = W_{s0} \chi_n(\lambda_s) \quad (2.1.13)$$

we see that the coefficients $\chi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N$, constitute an orthogonal polynomial set owing to the fact that they satisfy the three term recurrence relation

$$x\chi_n(x) = J_{n+1}\chi_{n+1}(x) + B_n\chi_n(x) + J_n\chi_{n-1}(x) \quad (2.1.14)$$

with the initial condition $\chi_{-1}(x) = 0$. Since both bases are orthonormal, $\langle s|s'\rangle = \delta_{ss'}$ and $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ it follows that the matrix $(W_{s,n})$ is orthogonal :

$$\sum_{n=0}^N W_{s,n} W_{s',n} = \delta_{ss'} \quad ; \quad \sum_{s=0}^N W_{s,n} W_{s,m} = \delta_{nm}. \quad (2.1.15)$$

The reverse expansion is thus given by

$$|n\rangle = \sum_{s=0}^N W_{s0} \chi_n(\lambda_s) |\lambda_s\rangle \quad (2.1.16)$$

and one explicitly recovers from $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ that the functions $\chi_n(\lambda_s)$ are normalized orthogonal polynomials in the discrete variable λ_s . The orthogonality relation reads

$$\sum_{s=0}^N w_s \chi_n(\lambda_s) \chi_m(\lambda_s) = \delta_{nm} \quad (2.1.17)$$

with $w_s = W_{s0}^2$ playing the role of the weight.

We can define the monic polynomials $P_n(x)$

$$P_n(x) = J_1 \dots J_n \chi_n(x). \quad (2.1.18)$$

Furthermore the characteristic polynomial $P_{N+1}(x)$

$$P_{N+1}(x) = (x - \lambda_0)(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_N) \quad (2.1.19)$$

is manifestly orthogonal to the polynomials $\chi_n(x)$, $n = 0, \dots, N$. From the general theory of orthogonal polynomials, it is known that [41] the discrete weights w_s can be written in the form

$$w_s = \frac{\sqrt{h_N}}{\chi_N(\lambda_s)P'_{N+1}(\lambda_s)} \quad s = 0, 1, \dots, N, \quad (2.1.20)$$

where

$$\sqrt{h_N} = J_1 J_2 \dots J_N \quad (2.1.21)$$

and where $P'_{N+1}(x)$ stands for the derivative of $P_{N+1}(x)$. If one takes the eigenvalues in increasing order,

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N, \quad (2.1.22)$$

it is easy to see that

$$P'_{N+1}(\lambda_s) = (-1)^{N+s} |P'_{N+1}(\lambda_s)|. \quad (2.1.23)$$

2.2. FRACTIONAL REVIVAL (FR) AND PERFECT STATE TRANSFER (PST) IN THE NEAREST-NEIGHBOUR APPROXIMATION

To achieve PST and FR, some conditions must be respected. These, in fact, will only depend on the spectrum of J . PST will be achieved if a photon initially in the waveguide 0 will be found in the waveguide N after a propagation distance Z_{PST} , in other words PST will be observed if

$$e^{-iZ_{PST}J} |0\rangle = e^{i\phi} |N\rangle \quad (2.2.1)$$

with ϕ an arbitrary phase.

Using the expansion (2.1.16) of the natural basis into the eigenbasis and remembering that $\chi_0(x) = 1$, one sees that (2.2.1) implies

$$e^{-iZ_{PST}\lambda_s} = e^{i\phi} \chi_N(\lambda_s). \quad (2.2.2)$$

This shows that $\chi_N(\lambda_s)$ is a phase, but since it is real we must have

$$\chi_N(\lambda_s) = \pm 1. \quad (2.2.3)$$

Owing to the fact that the zeros of $\chi_N(x)$ must interlace the zeros, λ_s , of $P_{N+1}(x)$, the sign of $\chi_N(\lambda_s)$ must alternate i.e., $\chi_N(\lambda_s) \propto (-1)^s$. Now since w_s as given by (2.1.20) must be positive, in view of (2.1.23), we see that

$$\chi_N(\lambda_s) = (-1)^{N+s}. \quad (2.2.4)$$

As shown in [18], this condition is tantamount to the matrix J being symmetric with respect to the anti-diagonal, i.e. to the relations :

$$B_{N-n} = B_n \quad J_{N-n+1} = J_n. \quad (2.2.5)$$

The condition (2.2.4) or equivalently (2.2.5) is thus necessary for the occurrence of PST. Making use of this necessary condition in (2.2.2) one finds that PST will take place if

$$e^{-i(Z_{PST}\lambda_s + \phi)} = e^{i\pi(N+s)}. \quad (2.2.6)$$

This will be satisfied if

$$Z_{PST}\lambda_s + \phi + \pi(N+s) = 2\pi L_s \quad (2.2.7)$$

where L_s is a sequence of integers that may depend on s .

It follows from (2.2.7) that the difference between 2 successive eigenvalues is given by

$$\lambda_s - \lambda_{s-1} = \frac{\pi}{Z_{PST}} M_s \quad (2.2.8)$$

where M_s is an odd integer.

Together (2.2.5) and (2.2.8) are necessary and sufficient for PST. As announced, these are conditions on the spectrum of J .

Let us now turn to FR in the two external waveguides. This will occur if there is a distance Z_{FR} at which the only non-zero amplitudes are $E_0(Z_{FR})$ and $E_N(Z_{FR})$. In this case we shall have

$$e^{-iZ_{FR}J} |0\rangle = \mu |0\rangle + \nu |N\rangle \quad (2.2.9)$$

with the normalization condition

$$|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1. \quad (2.2.10)$$

When this is so, the wavepacket initially localized in the waveguide 0 is revived in the waveguide 0 and N . In the special case

$$\mu = \nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.2.11)$$

we have an analog of the maximally entangled state $|E\rangle = \frac{E_0(0)}{\sqrt{2}} (|10\dots 0\rangle + |00\dots 1\rangle)$ where the vectors $|1\rangle$, $|0\rangle$ denote the presence ($|1\rangle$) or the absence ($|0\rangle$) of a photon in the waveguide. One also sees that PST is a special case of FR with

$$\mu = 0, \quad \nu = e^{i\phi}. \quad (2.2.12)$$

As for PST, the relation (2.2.9) can be translated into a spectral condition by using the expansion (2.1.16). This leads to

$$e^{-iZ_{FR}\lambda_s} = \mu + \chi_N(\lambda_s)\nu. \quad (2.2.13)$$

In the following we shall look for the occurrence of FR in systems with mirror symmetry (2.2.5). We shall thus assume that the necessary condition (2.2.4) for PST is satisfied. As a result (2.2.13) will read

$$e^{-iZ_{FR}\lambda_s} = e^{i\phi}(\mu' + (-1)^{N+s}\nu') \quad (2.2.14)$$

where we have factored out the phase $e^{i\phi}$ of μ implying that $\mu = e^{i\phi}\mu'$ with μ' real and $\nu = e^{i\phi}\nu'$. For consistency, the norm of $(\mu' + (-1)^{N+s}\nu')$ must be 1 and with μ' real this requires ν' to be purely imaginary. Since $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$, we may thus take the following parametrization

$$\mu' = \cos \theta, \quad \nu' = i \sin \theta. \quad (2.2.15)$$

Observe then that PST ($\mu = 0$) corresponds to $\theta = \frac{\pi}{2}$. As in the case for PST, condition (2.2.14) can be seen to imply restrictions on successive eigenvalues :

$$Z_{FR}(\lambda_{2s} - \lambda_{2s-1}) = -(-1)^N 2\theta + 2\pi L_s^{(0)} \quad (2.2.16)$$

$$Z_{FR}(\lambda_{2s+1} - \lambda_{2s}) = (-1)^N 2\theta + 2\pi L_s^{(1)} \quad (2.2.17)$$

where $L_s^{(i)}$ are arbitrary sequences of integers that depend on s .

FR will occur if those conditions are respected for all eigenvalues of the spectrum. Note that, as shown in [32], in this mirror-symmetric situation, FR also occurs between symmetrically positioned sites say between $|n\rangle$ and $|N - n\rangle$.

2.3. ENGINEERING WAVEGUIDE ARRAYS WITH FR AND PST

The engineering of photonic lattices with FR and PST involves an inverse spectral problem, as first discussed in [42]. Given a set of $\{\lambda_s\}$ that satisfy the FR/PST conditions, we must find the mirror-symmetric matrix J formed out of the coupling and propagation constants that has the $\{\lambda_s\}$ for eigenvalues. This is done by constructing the orthogonal polynomials associated to the problem whose recurrence coefficients will provide the characteristics of the array that we are looking for. Once these have been obtained, it is a matter of creating appropriately the waveguides and of choosing the distances between them to make the specifications of the lattice match those prescribed theoretically.

Let us briefly recall how this inverse spectral problem is solved from the construction of the associated orthogonal polynomials. First, observe that the condition $\chi_N(\lambda_s) = (-1)^{N+s}$ fixes the values of a polynomial of degree N at $N + 1$ points and thereby completely determines $\chi_N(x)$. This polynomial can be explicitly constructed using the Lagrange interpolation polynomials :

$$\chi_N(x) = \sum_{s=0}^N (-1)^{N+s} \mathcal{L}_s. \quad (2.3.1)$$

Here \mathcal{L}_s is the standard Lagrange polynomial

$$\mathcal{L}_s = \prod_{i=0, i \neq s}^N \frac{x - \lambda_i}{\lambda_s - \lambda_i} \quad (2.3.2)$$

where the ' stands for $i \neq s$.

The monic polynomial $P_N(x)$ is then obtained by dividing $\chi_N(x)$ by the coefficient of x^N . The spectral data $\{\lambda_s\}$ provides another member of the set of orthogonal polynomials, namely, the characteristic polynomial $P_{N+1}(x) = (x - \lambda_0) \dots (x - \lambda_N)$. The recurrence relation for the monic polynomials $P_n(x) = J_1 \dots J_n \chi_n(x)$ is

$$xP_n(x) = P_{n+1} + B_n P_n(x) + U_n P_{n-1}(x) \quad (2.3.3)$$

with $U_n = J_n^2$. For all these polynomials $P_n(x)$, the coefficients of the leading monomial x^n is 1.

We thus have

$$P_{N+1}(x) = (x - B_N)P_N(x) - J_N^2 P_{N-1}(x). \quad (2.3.4)$$

We know P_{N+1} and P_N . If we look at (2.3.4) degree by degree, we see that the terms in x^{N+1} are equal. Then the coefficient of x^N in P_{N+1} gives $-B_N$. Now the coefficients of x^{N-1} in $P_{N+1}(x) - (x - B_N)P_N(x)$ gives $-J_N^2$ and at this point we know B_N , J_N^2 and $P_{N-1}(x)$. We can then iterate to find B_{N-1} , J_{N-1}^2 and $P_{N-2}(x)$ and so on. In the end the mirror-symmetric matrix J is fully characterized and hence provides all the couplings J_n and propagation constants B_n for $n = 0, \dots, N$.

While the algorithm described above is conceptually straightforward it might not be the most efficient to obtain the parameters numerically. Another method is given in Gladwell [43]; the approach described in [44] based on persymmetric polynomials is also generally faster.

2.4. A REVIEW OF ANALYTIC MODELS WITH OF FR AND PST

In a number of cases, spectra that satisfy (2.2.8) and (2.2.16) have been found to correspond to orthogonal polynomials that can be fully characterized and this has therefore led to models that can be described analytically. These arrays are often referred to by the name of the orthogonal polynomials associated to them and turn out to be most useful. They have first been identified for their PST properties. In the following we shall go over many of these systems. We shall give in each case the corresponding spectrum $\{\lambda_s\}$ and provide the couplings J_n and propagation constants B_n given by the algorithm described in Section 4. We shall indicate what the FR and PST conditions entail. For FR we shall provide the mixing angles θ that are possible as well as the distances Z_{FR} at which this FR occurs. We shall also record the restrictions that must be imposed for PST to happen also. To allow for

an adjustment of the reference strength of the couplings we shall introduce a parameter β as a global factor in the spectra : $\lambda_s \rightarrow \beta\lambda_s$.

2.4.1. Krawtchouk

The Krawtchouk model is the simplest analytic model that has been designed [8]. For a fixed maximum coupling strength, it exhibits shortest state transfer time and thus minimizes [45] the risk of introducing noise. This in part explains why it has been favored in experimental validations [20, 21, 3]. As we shall see this system does not admit FR however. The Krawtchouk array emerges when the linear spectrum

$$\lambda_s = \beta\left(s - \frac{N}{2}\right) \quad (2.4.1)$$

is considered.

The couplings between the waveguides take the form

$$J_n = \frac{\beta}{2}\sqrt{n(N-n+1)} \quad (2.4.2)$$

and the propagation constant in the n^{th} waveguide is

$$B_n = 0. \quad (2.4.3)$$

Of course the propagation constants can be shifted by a uniform value by adding a global term to the spectrum.

2.4.1.1. FR

For the spectrum (2.4.1), the sequences of integers do not depend on s , $L_s^{(i)} = c_i$ and the restrictions (2.2.16) amount to

$$Z_{FR}\beta = -(-1)^N 2\theta + 2\pi c_0 \quad (2.4.4)$$

$$Z_{FR}\beta = (-1)^N 2\theta + 2\pi c_1 \quad (2.4.5)$$

where c_0 and c_1 are integers. Solving for θ and Z_{FR} yields

$$\theta = (-1)^N \frac{\pi}{2}(c_0 - c_1) \quad (2.4.6)$$

and

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{\beta}(c_0 + c_1). \quad (2.4.7)$$

We thus observe that FR does not occur. Indeed θ must be a multiple of $\frac{\pi}{2}$ and as already observed this can only lead to PST or Perfect Return. Moreover, since $(c_0 - c_1)$ has the same parity as $(c_0 + c_1)$, PST will happen for $Z_{PST} = \frac{\pi q}{\beta}$ where q is an odd integer and Perfect Return will occur when q is even.

2.4.2. para-Krawtchouk

The para-Krawtchouk array is the prototype of systems with FR [32]. It involves a parameter δ that determines the mixing angle θ . The associated para-Krawtchouk polynomials are not conventional polynomials; they were discovered as a result of investigations of systems with FR and PST [9]. It is remarkable that a full characterization of the polynomials could be carried out.

The spectrum here is

$$\lambda_s = \beta \left(s - \frac{N-1+\delta}{2} + \frac{(\delta-1)}{2} (1 - (-1)^s) \right) \quad s = 0, 1, \dots, N \quad (2.4.8)$$

where $0 < \delta < 2$ is a real parameter. It is referred to as a bi-lattice spectrum as one observes that it is the superposition of two linear lattices shifted by δ . One notes also that the linear lattice (2.4.1) is recovered when $\delta = 1$.

The mirror symmetric couplings and propagation constants that are obtained by applying the Euclidian algorithm of Section 4 to this spectrum are the following :

$$J_n = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{n(N+1-n)[(N+1-2n)^2 - \delta^2]}{(N-2n)(N-2n+2)}}, \quad B_n = 0 \quad (2.4.9)$$

for N odd, and

$$J_n = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{n(N+1-n)[(2n-N-1)^2 - (\delta-1)^2]}{(2n-N-1)^2}}, \quad (2.4.10)$$

$$B_n = \frac{(\delta-1)(N+1)}{4} \left(\frac{1}{2n-N-1} - \frac{1}{2n+1-N} \right) \quad (2.4.11)$$

for N even.

Note that the propagation constants must vary from waveguide to waveguide when N is even. It is seen that J_n and B_n verify the mirror symmetry property (2.2.5) and that, as should be, the Krawtchouk coupling are retrieved when $\delta = 1$.

2.4.2.1. FR

When specialized to the para-Krawtchouk spectrum, the sequences of integers do not depend on s , $L_s^{(i)} = c_i$ and the conditions (2.2.16) and (2.2.17) become :

$$Z_{FR}\beta(2-\delta) = -2(-1)^N\theta + 2\pi c_0 \quad (2.4.12)$$

$$Z_{FR}\beta\delta = 2(-1)^N\theta + 2\pi c_1 \quad (2.4.13)$$

where c_0 and c_1 are integers.

Expressions for θ and Z_{FR} can be obtained from (2.4.12) and (2.4.13). One finds

$$\theta = (-1)^N \left[-\pi c_1 + \frac{\pi\delta}{2}(c_0 + c_1) \right] \quad (2.4.14)$$

showing that δ directly determines θ and for Z_{FR} one gets

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{\beta}(c_0 + c_1). \quad (2.4.15)$$

These results indicate that FR happens in this model and that the mixing angle θ is prescribed by the value of δ . The distances Z_{FR} are integer multiples of $\frac{\pi}{\beta}$.

2.4.2.2. PST

To investigate whether the para-Krawtchouk model admits PST in addition to FR, one examines the relation that the PST condition (2.2.8) further imposes. One finds here

$$\beta(1 - (\delta - 1)(-1)^s) = \frac{\pi}{Z_{PST}} M_\epsilon. \quad \epsilon = (-1)^s \quad (2.4.16)$$

The sequences M_ϵ of odd integers here only depend on the parity ϵ of s . We distinguish these two parities and write $M_{+1} = 2c_0 + 1$ and $M_{-1} = 2c_1 + 1$ with c_0 and c_1 integers. Equation (2.4.16) then translates into

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta} \frac{2c_0 + 1}{2 - \delta} \quad (2.4.17)$$

for s even, and

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta} \frac{2c_1 + 1}{\delta} \quad (2.4.18)$$

for s odd.

In order for the right hand sides of (2.4.17) and (2.4.18) to be equal one must have

$$\delta = \frac{(2c_1 + 1)}{(c_0 + c_1 + 1)}. \quad (2.4.19)$$

This says that for PST to occur in addition to FR in the para-Krawtchouk model, the parameter δ must be a rational number of the form $\delta = \frac{p}{q}$ where p and q are coprime and p is odd.

The minimal distance for PST is obtained when $c_1 = 0$ in which case $Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta\delta}$. In general the distance for PST is

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta}(c_0 + c_1 + 1). \quad (2.4.20)$$

This should be compared with the expression for Z_{FR} given in (2.4.15) : provided δ satisfies (2.4.19), if FR occurs at $Z_{FR} = \frac{\pi}{\beta}$, PST will happen at $Z_{PST} = 2Z_{FR}$.

2.4.3. dual-Hahn

The dual-Hahn system has been identified early on [7]. It is based on the quadratic spectrum

$$\lambda_s = \beta s(s + 2\gamma + 1) \quad (2.4.21)$$

with a parameter $\gamma > -1$.

Its coupling and propagation constants are given by

$$J_n = \beta \sqrt{(n+1)(N-n)(\gamma+N-n)(\gamma+n+1)} \quad (2.4.22)$$

$$B_n = 2n(N-n) + (\gamma+1)N. \quad (2.4.23)$$

2.4.3.1. FR

For s even, the FR conditions (2.2.16)-(2.2.17) require $L_s^{(0)} = c_1 s + c_0$ and yield

$$(2s + \gamma)\beta Z_{FR} = -(-1)^N \theta + \pi(c_1 s + c_0) \quad (2.4.24)$$

where c_1 and c_0 are an integers. This implies

$$(i) \quad \beta Z_{FR} = \frac{\pi}{2} c_1 \quad (2.4.25)$$

$$(ii) \quad \gamma \beta Z_{FR} = \pi c_0 - (-1)^N \theta. \quad (2.4.26)$$

For s odd, with $L_s^{(1)} = c'_1 s + c'_0$ one obtains

$$(2s + 1 + \gamma)\beta Z_{FR} = (-1)^N \theta + \pi(c'_1 s + c'_0) \quad (2.4.27)$$

where c'_1 and c'_0 are both integers. One has then

$$(i) \quad \beta Z_{FR} = \frac{\pi}{2} c'_1 \quad (2.4.28)$$

$$(ii) \quad \beta(1 + \gamma) Z_{FR} = (-1)^N \theta + \pi c'_0. \quad (2.4.29)$$

The compatibility of the equations (2.4.25)-(2.4.26) and (2.4.28)-(2.4.29) leads to

$$\theta = (-1)^N \left(\frac{\pi c_0(1 + \gamma) - \gamma \pi c'_0}{2\gamma + 1} \right). \quad (2.4.30)$$

One further finds

$$\gamma = \frac{2(c_0 + c'_0) - c_1}{2c_1} \quad (2.4.31)$$

and

$$\theta = (-1)^N \left(\frac{\pi c_1}{4} + \frac{\pi(c_0 - c'_0)}{2} \right). \quad (2.4.32)$$

The main features of this model are thus the following. Balanced FR may occur. By balanced FR we mean a situation where amplitudes in the first and last waveguides are equal in magnitude, this correspond to θ being equal to odd multiples of $\frac{\pi}{4}$. We indeed see that this is possible when $c_1 = q$ is odd. The FR distance Z_{FR} is given by

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{2\beta} q. \quad (2.4.33)$$

As we shall indicate below the dual-Hahn system is a special case of the para-Racah model that also admits FR.

2.4.3.2. PST

When λ_s is given by (2.4.21) the PST condition (2.2.8) requires $M_s = 2(c_1 s + c_0) + 1$ and becomes

$$\beta(s + \gamma) = \frac{\pi}{2Z_{PST}} (2(c_1 s + c_0) + 1) \quad (2.4.34)$$

where c_1 and c_0 are integers. Equating each power of s in (2.4.34) yields

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta} c_1 \quad (2.4.35)$$

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{2\beta\gamma} (2c_0 + 1). \quad (2.4.36)$$

The consistency of these two relations requires that

$$\gamma = \frac{2c_0 + 1}{2c_1}. \quad (2.4.37)$$

The minimal distance for PST is $Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta}$ with $\gamma = \frac{1}{2}$ ($c_0 = 0, c_1 = 1$)

PST will thus occur if the parameter γ is of the form $\frac{p}{2q}$ with p and q coprime integers and p odd. Note that then $Z_{PST} = 2Z_{FR}$.

2.4.4. Special q-Racah

We now consider an array associated to a special case of q-Racah polynomials [25]. Consider the set of eigenvalues given by the following exponential lattice :

$$\lambda_s = \beta(q^{-s+N/2} - q^{s-N/2}), \quad s = 0, \dots, N \quad (2.4.38)$$

where q is a real number between 0 and 1. This corresponds to a q-deformation of the Krawtchouk spectrum since $\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{-\lambda_s}{q - q^{-1}} = \beta(s - \frac{N}{2})$. Some restrictions will be added to allow for FR and PST [10]. It is observed that the λ_s defined by (2.4.38) obey the three-term

recurrence relation

$$\lambda_s = (q + q^{-1})\lambda_{s-1} - \lambda_{s-2}. \quad (2.4.39)$$

Take

$$q + q^{-1} = K \quad (2.4.40)$$

with K an integer. We shall assume that K is greater than 2 because for $K = 2$ we have $q = 1$ and we then recover the Krawtchouk spectrum. Relation (2.4.40) implies that

$$q = \frac{K}{2} - \sqrt{\frac{K^2}{4} - 1}. \quad (2.4.41)$$

The coupling and propagation constants are here given by

$$J_n = \beta \sqrt{\frac{(1 - q^{2n})(q^{2(n-N-1)} - 1)}{(1 + q^{2n-N-2})(1 + q^{2n-N})}}, \quad B_n = 0. \quad (2.4.42)$$

2.4.4.1. FR

With the help of (2.4.39), the spectral conditions (2.2.16) and (2.2.17) for FR can be rewritten as follows

$$Z_{FR}(K - 2)\lambda_{2s} = (-1)^N 4\theta + 2\pi L_s^{(0)} \quad (2.4.43)$$

$$Z_{FR}(K - 2)\lambda_{2s+1} = -(-1)^N 4\theta + 2\pi L_s^{(1)}. \quad (2.4.44)$$

For N even, observe that $\lambda_{\frac{N}{2}} = 0$. This leads to

$$\theta = \frac{\pi}{2} L_{\frac{N}{2}}. \quad (2.4.45)$$

Hence, for N even, only PST can be achieved.

For N odd, no restrictions of this type happen. Consider here an alternative way of writing (2.2.14) :

$$Z_{FR}\lambda_{2s} = -\phi - (-1)^N \theta + 2\pi L_s^{(2)} \quad (2.4.46)$$

$$Z_{FR}\lambda_{2s+1} = -\phi + (-1)^N \theta + 2\pi L_s^{(3)}. \quad (2.4.47)$$

From (2.4.43) and (2.4.46) one obtains for the mixing angle

$$\theta = (-1)^N \left(\frac{2\pi Q_s}{K + 2} - \phi \frac{K - 2}{K + 2} \right) \quad (2.4.48)$$

where Q_s is a sequence of integers that depend on s . This indicates that FR can happen in the special q-Racah array when N is odd for a variety of mixing angle θ related to K . This is a new observation as far as we know.

2.4.4.2. PST

In order to enforce the PST condition, one requires that all λ_s are integers with alternating parity. To achieve PST, K must be an even integer if N is even and $K = 6, 10, 14, \dots$ if N is odd. This is in keeping with (2.4.48).

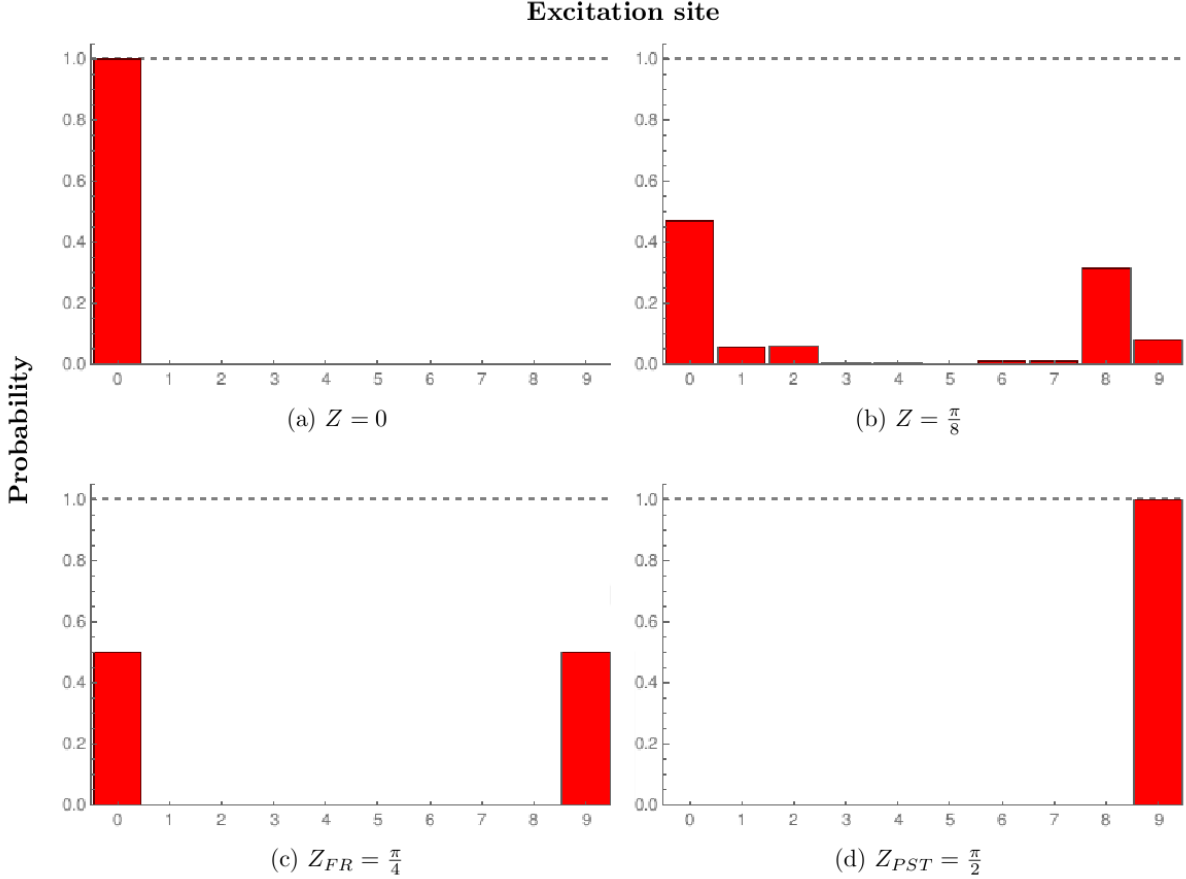


FIGURE 2.1. Probability of finding a single photon at each site of a 10-waveguide array ($N = 9$) of q-Racah type with parameters $\beta = (K - 2)^{-1/2}$ and $K = 6$ for various distances. (a) The photon is initially inserted at site 0, (b) after some distance $Z = \frac{\pi}{8}$ the photon spreads out through the lattice and (c) Fractional Revival is observed at $Z_{FR} = \frac{\pi}{4}$ and (d) Perfect State Transfer observed at distance $Z_{PST} = \frac{\pi}{2} = 2Z_{FR}$.

2.4.5. para-Racah

A novel family of orthogonal polynomials corresponding to an alternative truncation of the Wilson polynomials has been identified recently [46]. It is associated to the quadratic bi-lattice defined by

$$\lambda_{2s} = \beta(s + a)^2 \tag{2.4.49}$$

$$\lambda_{2s+1} = \beta(s + c)^2, \quad s = 0, \dots, N \tag{2.4.50}$$

where $a > -\frac{1}{2}$, $|a| < c < |a + 1|$ and both c and a are real.

Note that the set $\{\lambda_s\}$ can be viewed as the superposition of two quadratic lattices shifted by $c - a$. One observes also that an equivalent quadratic lattice of the form (2.4.21) is recovered if $c = a + \frac{1}{2}$.

The recurrence coefficients provide the following coupling and propagation constants :

$$B_n = \frac{1}{2} [a(a + j) + c(c + j) + n(N - n)],$$

$$J_n = \left[\frac{n(N + 1 - n)(N - n + a + c)(n - 1 + a + c)(n - j - 1)^2 - (a - c)^2}{4(N - 2n)(N - 2n + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.51)$$

for N odd, and

$$J_n = \left[\frac{n(N + 1 - n)(n - 1 + a + c)(N - n + a + c)(n - j + a - c)(n - j + c - a - 1)}{4(N - 2n + 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B_n = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 + n - n^2) + \frac{1}{4}(2n + a + c)(N - 1) + \frac{(n + 1)(n + a + c)(1 + 2a - 2c)}{4(1 + 2n - N)}$$

$$+ \frac{n(n - 1 + a + c)(1 + 2a - 2c)}{4(1 - 2n + N)} \quad (2.4.52)$$

for N even.

The array with these specifications has been shown to enact FR and PST [16].

2.4.5.1. FR

The conditions (2.2.16) and (2.2.17) when specialized to the para-Racah spectrum require $L_s^{(0)} = c_1 s + c_0$ and $L_s^{(1)} = c'_1 s + c'_0$ and read

$$\beta Z_{FR}(1 + a - c)(2s - 1 + a + c) = -(-1)^N 2\theta + 2\pi(c_1 s + c_0) \quad (2.4.53)$$

$$\beta Z_{FR}(c - a)(2s + c + a) = (-1)^N 2\theta + 2\pi(c'_1 s + c'_0) \quad (2.4.54)$$

where c_1, c_0, c'_1 and c'_0 are integers.

Relations for Z_{FR}, θ, a and c are obtained from (2.4.53) and (2.4.54). First one finds

$$a = \frac{2(c_0 + c'_0) + (c_1 - c'_1)}{2(c_1 + c'_1)} \quad (2.4.55)$$

$$c = \frac{2(c_0 + c'_0) + (c_1 + c'_1)}{2(c_1 + c'_1)} \quad (2.4.56)$$

showing that a and c must be rational numbers.

The formula for θ is

$$\theta = (-1)^{N+1} \frac{\pi}{2} \left(\frac{2(c_1 c'_0 - c_0 c'_1) - c_1 c'_1}{c_1 + c'_1} \right) \quad (2.4.57)$$

and the distances are given by

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{\beta} (c_1 + c'_1). \quad (2.4.58)$$

The para-Racah model thus exhibit FR when a and c are rational. If one wants to retrieve the mixing angle θ_{d-H} for the dual-Hahn model, it suffices to take the equivalent condition for $c = a + \frac{1}{2}$ which is $c_1 = c'_1$. One gets

$$\theta_{d-H} = (-1)^N \left(\frac{\pi}{4} c_1 + \frac{\pi}{2} (c_0 - c'_0) \right) \quad (2.4.59)$$

which is exactly the mixing angle of the dual-Hahn model.

2.4.5.2. PST

To investigate if the para-Racah model admits PST in addition to FR, we turn to condition (2.2.8) which becomes with $M_s^{(0)} = 2(c_1 s + c_0) + 1$ and $M_s^{(1)} = 2(c'_1 s + c'_0) + 1$:

$$\beta Z_{PST} (1 + a - c) (2s + a + c - 1) = \pi (2(c_1 s + c_0) + 1) \quad (2.4.60)$$

$$\beta Z_{PST} (c - a) (2s + a + c) = \pi (2(c'_1 s + c'_0) + 1). \quad (2.4.61)$$

Using (2.4.60) and (2.4.61) one obtains

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{2c_0 + 1}{c_1} + \frac{c_1}{c_1 + c'_1} \right) \quad (2.4.62)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{2c_0 + 1}{c_1} + \frac{c'_1}{c_1 + c'_1} + 1 \right) \quad (2.4.63)$$

and the PST distance can be written as follows

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta} (c_1 + c'_1). \quad (2.4.64)$$

This provides the details of the PST occurrences in the para-Racah array.

2.5. A MODEL WITH NEXT-TO-NEAREST NEIGHBOUR INTERACTION

In this last section, we wish to indicate how a class of analytic models with next-to-nearest neighbour (NNN) interactions can be constructed from those with NN couplings. The one based on the Krawtchouk recurrence coefficients will be presented in some details. As a rule, in settings of the type that have been used experimentally the NN approximation is very good ; interestingly however allowing for NNN interactions might show the occurrence of FR even if the restriction of the model to NN couplings does not permit it. Let J be a tridiagonal mirror-symmetric matrix with spectrum $\lambda_s, s = 0, \dots, N$, wich is thus such that

the necessary condition (2.2.4) for PST is satisfied. Let

$$\bar{J} = \alpha J^2 + \beta J. \quad (2.5.1)$$

It follows that \bar{J} is pentadiagonal. Take the light propagation in the array to be governed by

$$i \frac{d}{dz} |E\rangle = \bar{J} |E\rangle. \quad (2.5.2)$$

In terms of amplitudes we thus have the following system of equations with NNN interactions :

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dz} E_n = & \alpha(J_{n-1}J_n)E_{n-2} + J_n(\alpha(B_{n-1} + B_n) + \beta)E_{n-1} + \\ & (\alpha(J_n^2 + B_n^2 + J_{n+1}^2) + \beta B_n)E_n + J_{n+1}(\alpha(B_n + B_{n+1}) + \beta)E_{n+1} + \\ & \alpha(J_{n+1}J_{n+2})E_{n+2}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Here J_n and B_n are the same matrix elements of J as before. The parameters α and β determine respectively the strengths of the NNN and NN interactions. The coupling J_n will still be physically realized according to (2.1.2). In light of (2.5.3), the NNN couplings will hence be proportional to the distance between the next-to-nearest sites.

Since \bar{J} has the same eigenbasis as J , the condition for PST and FR remain the same except that the spectrum of \bar{J} , $\{\alpha\lambda_s^2 + \beta\lambda_s\}$ should now be used. The PST condition on the difference between two successive eigenvalues is therefore

$$(\lambda_s - \lambda_{s-1})(\alpha(\lambda_s + \lambda_{s-1}) + \beta) = \frac{\pi}{Z_{PST}} M_s \quad (2.5.4)$$

and the conditions for FR take the form

$$Z_{FR}(\lambda_{2s} - \lambda_{2s-1})(\alpha(\lambda_{2s} + \lambda_{2s-1}) + \beta) = -(-1)^N 2\theta + 2\pi L_s^{(0)} \quad (2.5.5)$$

$$Z_{FR}(\lambda_{2s+1} - \lambda_{2s})(\alpha(\lambda_{2s+1} + \lambda_{2s}) + \beta) = (-1)^N 2\theta + 2\pi L_s^{(1)}. \quad (2.5.6)$$

We shall now spell out what these conditions entail when J_n is given by (2.4.2) and $B_n = 0$, that is when J is the Jacobi matrix associated to the Krawtchouk polynomials.

2.5.1. A NNN model based on Krawtchouk couplings

2.5.1.1. FR

The FR conditions require $L_s^{(0)} = c_1 s + c_0$ and become, for s even,

$$Z_{FR}(\alpha(4s - (N + 1)) + \beta) = -(-1)^N 2\theta + 2\pi(c_1 s + c_0) \quad (2.5.7)$$

and for s odd with $L_s^{(1)} = c'_1 s + c'_0$,

$$Z_{FR}(\alpha(4s - (N - 1)) + \beta) = (-1)^N 2\theta + 2\pi(c'_1 s + c'_0). \quad (2.5.8)$$

These two relations yield the following set of equalities

$$\alpha Z_{FR} = \frac{\pi}{2} c_1, \quad \alpha Z_{FR} = \frac{\pi}{2} c'_1 \quad (2.5.9)$$

$$Z_{FR}(\beta - \alpha(N + 1)) = -(-1)^N 2\theta + 2\pi c_0 \quad (2.5.10)$$

$$Z_{FR}(\beta - \alpha(N - 1)) = (-1)^N 2\theta + 2\pi c'_0 \quad (2.5.11)$$

which in turn imply $c_1 = c'_1$ and

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-(-1)^N 2\theta + 2\pi c_0}{\pi c_1} + (N + 1) \quad (2.5.12)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{(-1)^N 2\theta + 2\pi c'_0}{\pi c_1} + (N - 1). \quad (2.5.13)$$

One then arrives at the following formula for the mixing angle θ :

$$\theta = (-1)^N \left(\frac{\pi}{4} c_1 + \frac{\pi}{2} (c_0 - c'_0) \right) \quad (2.5.14)$$

with the FR distance given by

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{2\beta} (c_1 N + 2\pi(c_0 + c'_0)). \quad (2.5.15)$$

One thus observes that for N odd, balanced FR will happen at distances $\frac{\pi q}{2\beta}$ where q is odd. For N even the FR distance will be $\frac{\pi p}{\beta}$ where p is an integer. This is in contradistinction with the situation in the NN Krawtchouk system where FR is not possible.

2.5.1.2. *PST*

Upon substituting $\lambda_s = (s - \frac{N}{2})$ in (2.5.4), with $M_s = 2(c_1 s + c_0) + 1$, one gets

$$\alpha(2s - (N + 1)) + \beta = \frac{\pi}{Z_{PST}} (2(c_1 s + c_0) + 1) \quad (2.5.16)$$

where c_1, c_0 are both integers.

Equating the terms with the same power of s , one obtains

$$\alpha Z_{PST} = \pi c_1 \quad (2.5.17)$$

$$Z_{PST}(\beta - \alpha(N + 1)) = \pi(2c_0 + 1). \quad (2.5.18)$$

From these conditions, we see that

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2c_0 + 1}{c_1} + (N + 1) \quad (2.5.19)$$

which indicates that $\frac{\beta}{\alpha}$ must be a rational number. One now finds for Z_{PST} :

$$Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta} (2c_0 + 1 + c_1(N + 1)). \quad (2.5.20)$$

Since c_0 and c_1 are integers, only two cases can occur

1. $Z_{PST} = \frac{2\pi j}{\beta}$
2. $Z_{PST} = \frac{\pi}{\beta}(2j + 1)$.

The first case only arises when N is even and the second case can materialize for both parities of N . Note that PST will occur at double the FR distance.

2.5.2. Other NNN models

The approach to the construction of NNN models using the recurrence coefficients of the Krawtchouk polynomials can obviously be extended by considering matrices J associated to other families of orthogonal polynomials. The spectral lattices will then be more involved than the linear one.

As observed, the analysis of the spectral conditions for FR and PST involves the study of integer-valued polynomials in the integer variable s . For cases beyond the linear one, it is useful to recall that any integer-valued polynomial $p(s)$ of degree N in s can be written in the form

$$p(s) = \sum_{n=0}^N c_n \frac{s!}{(n-s)!n!} \quad (2.5.21)$$

where all the coefficients c_n are integers.

This has proved of help in the examination of other analytic models with NNN couplings. The one based on the dual-Hahn couplings for instance has been confirmed in this way to exhibit FR and PST.

2.6. CONCLUSION

This paper has offered an overview of many analytic photonic lattices (equivalently of spin chains) with FR and PST and has described their main features. It has shed light on the role played by univariate orthogonal polynomials in the design of these devices. Novel results for an array based on a special case of q -Racah polynomials have been obtained, namely that FR can occur when N is odd with the mixing angle depending on the value of q .

It is to be expected that the burgeoning theory of multivariate orthogonal polynomials would be instrumental in the construction of higher dimensional simplexes with interesting transport properties. Work in this direction has been initiated [47, 48, 49]. PST in graphs has also been the object of much attention. The reviews [50, 51] give surveys of this extended body of work. An interesting question would be to study FR in this context. The results in [33] on next-to-nearest neighbour provide a good starting point for numerically determining coupling strengths when long range interactions are taken into account.

Finally, it should prove rewarding to explore evolutions that are more complex than PST and FR. See [52] for steps in this direction.

Acknowledgements

This survey is based in part on a talk given by one of us (L.V.) at SIDE 12. We are grateful to the Guest Editors of the Special Issue in Symmetries and Integrability of Difference Equations for their invitation to write a topical review. The authors wish to thank Jean-Michel Lemaître for his input on the para-Racah model as well as M. Christandl, V.X. Genest, H. Miki, S. Tsujimoto and A. Zhedanov for their collaboration on many of the advances presented here. É-O. B. gratefully acknowledges a scholarship from the Physics Department of Université de Montréal. The research of L.V. is supported in part by a grant from NSERC (Canada). We wish to acknowledge the elaborate and constructive reports of the referees that have helped improve the paper.

CONCLUSION

Les travaux présentés dans ce mémoire portent principalement sur les solutions analytiques de réseaux optiques effectuant du transfert parfait ainsi que de la revitalisation fractionnelle.

Le premier chapitre a introduit le modèle mathématique décrivant les interactions d'une chaîne de spins ainsi qu'une réalisation d'un tel système dans un réseau de guides d'onde couplés. Ce chapitre a permis de comprendre pourquoi le système à l'étude dans l'article est avantageux expérimentalement, on y a aussi établi le cadre théorique nécessaire pour étudier un tel système.

L'article central présente les conditions nécessaires à la présence de PST et de FR. Il fournit également un catalogue de modèles exactement résolubles. L'analyse du système basé sur les polynômes de Krawtchouk interagissant avec ses deux voisins les plus proches est aussi donnée ; ce système, contrairement à son analogue qui ne considère que les interactions aux premiers voisins, admet de la FR dans certain cas.

Cette particularité est également observée pour le système basé sur les polynômes duaux de Hahn avec interactions jusqu'aux deuxièmes voisins.

Une validation expérimentale du transfert parfait d'un photon intriqué dans un réseau de guides d'onde avec les couplages de Krawtchouk a été obtenue récemment [21]. Il serait extrêmement intéressant d'obtenir une telle vérification pour la revitalisation fractionnelle dans un réseau similaire.

Beaucoup de travaux ont été effectués récemment sur la propriété de transfert dans les graphes. L'analyse de tels systèmes est semblable, à cela près que la matrice d'adjacence joue le rôle de l'Hamiltonien. Il serait pertinent d'étudier la revitalisation fractionnelle sur ce type de système.

Références

- [1] Sougato BOSE : Quantum communication through an unmodulated spin chain. *Physical review letters*, 91(20) :207901, 2003.
- [2] Vincent X GENEST, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Exact fractional revival in spin chains. *Modern Physics Letters B*, 30(26) :1650315, 2016.
- [3] Armando PEREZ-LEIJA, Robert KEIL, Alastair KAY, Hector MOYA-CESSA, Stefan NOLTE, Leong-Chuan KWEK, Blas M RODRÍGUEZ-LARA, Alexander SZAMEIT et Demetrios N CHRISTODOULIDES : Coherent quantum transport in photonic lattices. *Physical Review A*, 87(1) :012309, 2013.
- [4] U PESCHEL, T PERTSCH et F LEDERER : Optical bloch oscillations in waveguide arrays. *Optics letters*, 23(21) :1701–1703, 1998.
- [5] Robert IWANOW, Daniel A MAY-ARRIOJA, Demetrios N CHRISTODOULIDES, George I STEGEMAN, Yoohong MIN et Wolfgang SOHLER : Discrete talbot effect in waveguide arrays. *Physical review letters*, 95(5) :053902, 2005.
- [6] Giacomo CORRIELLI, Andrea CRESPI, Giuseppe DELLA VALLE, Stefano LONGHI et Roberto OSELLAME : Fractional bloch oscillations in photonic lattices. *Nature communications*, 4 :1555, 2013.
- [7] Claudio ALBANESE, Matthias CHRISTANDL, Nilanjana DATTA et Artur EKERT : Mirror inversion of quantum states in linear registers. *Physical review letters*, 93(23) :230502, 2004.
- [8] Matthias CHRISTANDL, Nilanjana DATTA, Artur EKERT et Andrew J LANDAHL : Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical review letters*, 92(18) :187902, 2004.
- [9] Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Para-krawtchouk polynomials on a bi-lattice and a quantum spin chain with perfect state transfer. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(26) : 265304, 2012.
- [10] Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : How to construct spin chains with perfect state transfer. *Physical Review A*, 85(1) :012323, 2012.
- [11] EI JAFAROV et Joris Van der JEUGT : Quantum state transfer in spin chains with q-deformed interaction terms. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(40) :405301, 2010.
- [12] R CHAKRABARTI et Joris Van der JEUGT : Quantum communication through a spin chain with interaction determined by a jacobi matrix. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(8) :085302, 2010.
- [13] Neli I STOILOVA et Joris Van der JEUGT : An exactly solvable spin chain related to hahn polynomials. *SIGMA*, 7(33), 2011.

- [14] Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Dual-1 hahn polynomials and perfect state transfer. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 343, page 012125. IOP Publishing, 2012.
- [15] Tao SHI, Ying LI, Zhi SONG et Chang-Pu SUN : Quantum-state transfer via the ferromagnetic chain in a spatially modulated field. *Physical Review A*, 71(3) :032309, 2005.
- [16] Jean-Michel LEMAY, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : An analytic spin chain model with fractional revival. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 49(33) :335302, 2016.
- [17] Sougato BOSE : Quantum communication through spin chain dynamics : an introductory overview. *Contemporary Physics*, 48(1) :13–30, 2007.
- [18] Alastair KAY : Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool. *International Journal of Quantum Information*, 8(04) :641–676, 2010.
- [19] Georgios M NIKOLOPOULOS, Igor JEX *et al.* : *Quantum state transfer and network engineering*. Springer, 2014.
- [20] Matthieu BELLEC, Georgios M NIKOLOPOULOS et Stelios TZORTZAKIS : Faithful communication hamiltonian in photonic lattices. *Optics letters*, 37(21) :4504–4506, 2012.
- [21] Robert J CHAPMAN, Matteo SANTANDREA, Zixin HUANG, Giacomo CORRIELLI, Andrea CRESPI, Man-Hong YUNG, Roberto OSELLAME et Alberto PERUZZO : Experimental perfect state transfer of an entangled photonic qubit. *Nature communications*, 7, 2016.
- [22] Stefano LONGHI : Quantum-optical analogies using photonic structures. *Laser & Photonics Reviews*, 3(3) :243–261, 2009.
- [23] Demetrios N CHRISTODOULIDES, Falk LEDERER et Yaron SILBERBERG : Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature*, 424(6950) :817, 2003.
- [24] Falk LEDERER, George I STEGEMAN, Demetri N CHRISTODOULIDES, Gaetano ASSANTO, Moti SEGEV et Yaron SILBERBERG : Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1) :1–126, 2008.
- [25] Roelof KOEKOEK, Peter A LESKY et René F SWARTTOUW : *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [26] Li DAI, YP FENG et LC KWEK : Engineering quantum cloning through maximal entanglement between boundary qubits in an open spin chain. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(3) :035302, 2009.
- [27] Leonardo BANCHI, Enrico COMPAGNO et Sougato BOSE : Perfect wave-packet splitting and reconstruction in a one-dimensional lattice. *Physical Review A*, 91(5) :052323, 2015.
- [28] Alastair KAY : Tailoring spin chain dynamics for fractional revivals. *arXiv preprint arXiv :1609.01397*, 2016.
- [29] Gabriele DE CHIARA, Rosario FAZIO, Chiara MACCHIAVELLO, Simone MONTANGERO et G Massimo PALMA : Quantum cloning in spin networks. *Physical Review A*, 70(6) :062308, 2004.
- [30] Richard W ROBINETT : Quantum wave packet revivals. *Physics Reports*, 392(1) :1–119, 2004.
- [31] Bing CHEN, Z SONG et CP SUN : Fractional revivals of the quantum state in a tight-binding chain. *Physical Review A*, 75(1) :012113, 2007.

- [32] Vincent X GENEST, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Quantum spin chains with fractional revival. *Annals of Physics*, 371 :348–367, 2016.
- [33] Alastair KAY : Perfect state transfer : beyond nearest-neighbor couplings. *Physical Review A*, 73(3) :032306, 2006.
- [34] Alexander SZAMEIT, Thomas PERTSCH, Stefan NOLTE, Andreas TÜNNERMANN, Ulf PESCHEL et Falk LEDERER : Optical bloch oscillations in general waveguide lattices. *JOSA B*, 24(10) :2632–2639, 2007.
- [35] Matthias CHRISTANDL, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Analytic next-to-nearest neighbour xx models with perfect state transfer and fractional revival. *arXiv preprint arXiv :1607.02639*, 2016.
- [36] Nikolaos K EFREMIDIS et Demetrios N CHRISTODOULIDES : Revivals in engineered waveguide arrays. *Optics communications*, 246(4) :345–356, 2005.
- [37] BM RODRÍGUEZ-LARA : Exact dynamics of finite glauber-fock photonic lattices. *Physical Review A*, 84(5) :053845, 2011.
- [38] Jovana PETROVIC : Multiport waveguide couplers with periodic energy exchange. *Optics letters*, 40(2) :139–142, 2015.
- [39] Wei-Ping HUANG : Coupled-mode theory for optical waveguides : an overview. *JOSA A*, 11(3) :963–983, 1994.
- [40] BM RODRÍGUEZ-LARA, Francisco SOTO-EGUIBAR et Demetrios N CHRISTODOULIDES : Quantum optics as a tool for photonic lattice design. *Physica Scripta*, 90(6) :068014, 2015.
- [41] T. CHIHARA : *An introduction to orthogonal polynomials*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2011.
- [42] Peter KARBACH et Joachim STOLZE : Spin chains as perfect quantum state mirrors. *Physical Review A*, 72(3) :030301, 2005.
- [43] G. M. L. GLADWELL : *Inverse Problems in Vibration. Solid Mechanics and Its Application*. Springer, 2 édition, 2004.
- [44] Vincent X GENEST, Satoshi TSUJIMOTO, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Persymmetric jacobi matrices, isospectral deformations and orthogonal polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450(2) :915–928, 2017.
- [45] Man-Hong YUNG : Quantum speed limit for perfect state transfer in one dimension. *Physical Review A*, 74(3) :030303, 2006.
- [46] Jean-Michel LEMAY, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : The para-racah polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 438(2) :565–577, 2016.
- [47] Vincent X GENEST, Hiroshi MIKI, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Spin lattices, state transfer, and bivariate krawtchouk polynomials. *Canadian Journal of Physics*, 93(9) :979–984, 2015.
- [48] Hiroshi MIKI, Satoshi TSUJIMOTO, Luc VINET et Alexei ZHEDANOV : Quantum-state transfer in a two-dimensional regular spin lattice of triangular shape. *Physical Review A*, 85(6) :062306, 2012.
- [49] Sarah POST : Quantum perfect state transfer in a 2d lattice. *Acta Applicandae Mathematicae*, 135(1) :209–224, 2015.

- [50] Chris GODSIL : State transfer on graphs. *Discrete Mathematics*, 312(1) :129–147, 2012.
- [51] G. M. COUTINHO : *State transfer on graphs*. PhD dissertation, University of Waterloo, 2014.
- [52] Alastair KAY : Generating quantum states through spin chain dynamics. *New Journal of Physics*, 19(4) :043019, 2017.

Annexe A

SYSTÈME DES DUAUX DE HAHN AVEC INTERACTIONS JUSQU' AUX DEUXIÈMES VOISINS

A.1. FR

En substituant le spectre des polynômes duaux de Hahn dans les équations de FR, on obtient les conditions suivantes :

$$Z_{FR}(16\alpha s^3 + 24\gamma\alpha s^2 + (4\alpha\gamma(2\gamma - 1) + 2\beta)s + \gamma(\beta - 2\alpha\gamma)) = -(-1)^N\theta + \pi L_s \quad (\text{A.1.1})$$

$$Z_{FR}(16\alpha s^3 + 24(\gamma + 1)\alpha s^2 + (4\alpha(3 + 5\gamma + 2\gamma^2) + 2\beta)s + (\beta(1 + \gamma) + 2\alpha(1 + \gamma(2 + \gamma)))) = -(-1)^N\theta + \pi L'_s. \quad (\text{A.1.2})$$

Ces conditions restreignent $L_s^{(i)}$ à être un polynôme de degré 3 de la forme $L_s = c_0 + (c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3})s + (\frac{c_2}{2} - \frac{c_3}{2})s^2 + \frac{c_3}{6}s^3$, où les c_i sont des entiers. En égalant les facteurs devant chaque puissance de s , il est donc possible d'obtenir le système de 8 équations suivant

$$\begin{aligned} \alpha Z_{FR} &= \frac{\pi c_3}{96} & \alpha T &= \frac{\pi c'_3}{96} \\ \alpha Z_{FR} &= \frac{\pi(c_2 - c_3)}{48\gamma} & \alpha T &= \frac{\pi(c'_2 - c'_3)}{48(\gamma + 1)} \\ Z_{FR}(4\alpha\gamma(2\gamma - 1) + 2\beta) &= \pi \left(c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} \right) \\ Z_{FR}(4\alpha(3 + 5\gamma + 2\gamma^2) + 2\beta) &= \pi \left(c'_1 - \frac{c'_2}{2} + \frac{c'_3}{3} \right) \\ Z_{FR}\gamma(\beta - 2\alpha\gamma) &= -(-1)^N\theta + \pi c_0 \\ Z_{FR}(1 + \gamma)(\beta + 2\alpha(1 + \gamma)) &= -(-1)^N\theta + \pi c'_0. \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Ces équations permettent d'éliminer quelques paramètres

$$\begin{aligned}
c_3 &= c'_3 \\
c'_2 &= \frac{c_3}{2} + c_2 \\
\gamma &= \frac{2(c_2 - c_3)}{c_3} \\
c_2 &= \frac{c_3}{4} - 2(c_1 - c'_1) \\
(c_0 + c'_0) &= \frac{c_2(2c_1 + c_2)}{c_3} - \frac{c_2^3}{3c_3^2} - \frac{36c_1 + 11c_2}{24} + \frac{c_3}{16}.
\end{aligned} \tag{A.1.4}$$

On peut donc réduire le système à celui-ci

$$\begin{aligned}
\alpha Z_{FR} &= \frac{\pi c_3}{96} \\
\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{2}{c_3} \left(24c_1 + 6c_2 - \frac{8c_2^2}{c_3} - 2c_3 \right) \\
\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{2}{c_3} \left(24c'_1 - 6c_2 - \frac{8c_2^2}{c_3} + c_3 \right) \\
Z_{FR}(\gamma(\beta - 2\alpha\gamma)) &= -(-1)^N \theta + \pi c_0 \\
Z_{FR}((1 + \gamma)(\beta + 2\alpha(1 + \gamma))) &= (-1)^N \theta + \pi c'_0.
\end{aligned} \tag{A.1.5}$$

Il est maintenant possible d'obtenir une équation pour la distance du FR et les θ

$$Z_{FR} = \frac{\pi}{24\beta} \left(12c_1 + 3c_2 - 4\frac{c_2^2}{c_3} - c_3 \right) \tag{A.1.6}$$

$$\theta = (-1)^N \pi \left(\frac{c_2^2}{12c_3} - \frac{c_2}{8} + \frac{c_3}{24} + \frac{2(c_2 - c_3)(c_0 - c'_0) + c_0 c_3}{4c_2 - 3c_3} \right). \tag{A.1.7}$$

Le système est hautement non linéaire en ses coefficients. Par contre, il peut être grandement simplifié en spécifiant les constantes utilisées dans le modèle tel α, β et γ . Une spécification des ces paramètres sera illustré dans la prochaine section et les distances de transfert pour différents θ seront prédites par le modèle.

A.2. VÉRIFICATION DU MODÈLE

Prenons $\gamma = 1/2$, $\beta = 100$ et $\alpha = 1$. La différence entre β et α est choisie pour illustrer la différence entre la force des interactions aux plus proches voisins versus celle jusqu'aux deuxièmes voisins. Par les relations (A.1.4) et (A.1.5) on peut exprimer c_1 et c_2 en fonction de $c_3 = 4n$

$$c_2 = 5n, \quad c_1 = \frac{19n}{2}, \tag{A.2.1}$$

mais c_1 est entier, donc $n = 2m$. Les distances Z_{FR} possibles sont donc

$$Z_{FR} = \frac{m\pi}{12} \quad (\text{A.2.2})$$

et les angles θ possibles

$$\theta = \frac{m\pi}{8}. \quad (\text{A.2.3})$$

Il est possible de constater que les prédictions du modèle sont bien vérifiées dans la figure A.1. Il est également intéressant de constater que le système permet des angles θ qui n'étaient pas possible dans le modèle avec interactions aux premiers voisins.

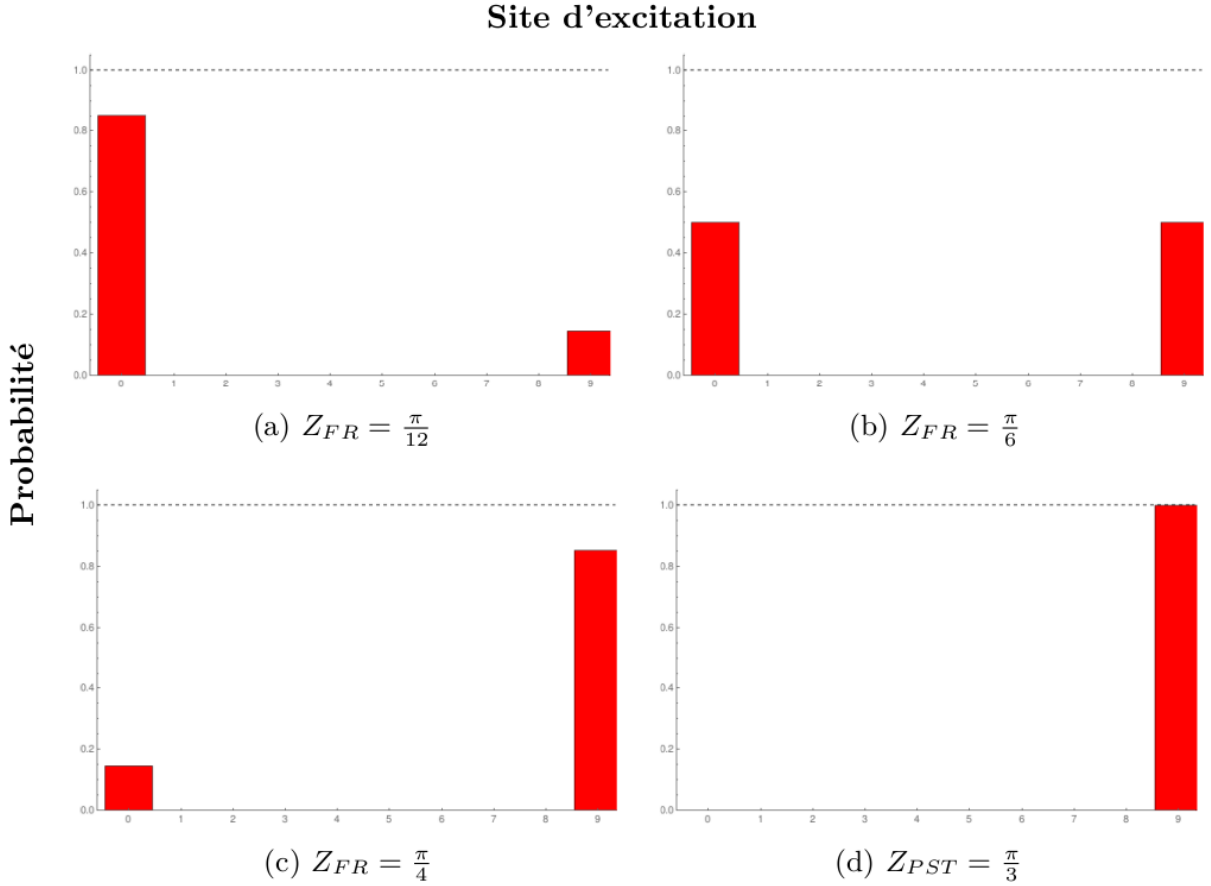


FIGURE A.1. Probabilité de trouver un photon à chacun des sites d'un réseau de 10 guides ($N = 9$) de type duals de Hahn ayant les paramètres $\beta = 100$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 1/2$ pour différentes distances. (a) Après une distance $Z_{FR} = \frac{\pi}{12}$ le photon effectue de la FR avec l'angle $\theta = \frac{\pi}{8}$, (b) de la FR balancée ($\theta = \frac{\pi}{4}$) est ensuite observé à $Z_{FR} = \frac{\pi}{6}$, (c) après une distance $Z_{FR} = \frac{\pi}{4}$ on observe de la FR avec $\theta = \frac{3\pi}{8}$ et (d) du PST est observé à $Z_{PST} = \frac{\pi}{3}$, ce qui représente le double de la distance pour de la FR balancée.