

Université de Montréal

**Distribution de la valeur escomptée
de la réserve IBNR avec un modèle lognormal et
un taux d'intérêt aléatoire**

par

Li Huimei

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques
orientation actuariat

15 septembre 2017

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Distribution de la valeur escomptée
de la réserve IBNR avec un modèle lognormal et
un taux d'intérêt aléatoire**

présenté par

Li Huimei

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Manuel Morales

(président-rapporteur)

Professeur Louis Doray

(directeur de recherche)

Claudia Gagné

(membre du jury)

Nom de l'examineur externe

(examineur externe)

Mémoire accepté le

15 septembre 2017

SOMMAIRE

Le but de ce mémoire est de trouver la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR. On suppose que les montants de réclamations IBNR admettent des distributions lognormales et on suppose aussi que la force d'intérêt suit une loi *GNL* (distribution normale Laplace généralisée). On incorpore la force d'intérêt aux réclamations prédictives incrémentales pour trouver la valeur escomptée de la réserve.

Nous parlons d'abord de la définition de la distribution normale Laplace généralisée et présentons quelques propriétés de cette distribution basée sur les travaux de Reed (2007). Ensuite, nous parlons du modèle lognormal linéaire ainsi que du triangle de développement pour les sinistres. Finalement, nous simulons les valeurs escomptées de la réserve.

Mots-clés : Distribution *GNL*, Modèle lognormal linéaire, Triangle de développement, Réserves IBNR, Réclamations prédictives incrémentales, Valeur escomptée.

SUMMARY

The purpose of this thesis is to find the distribution of the discounted value of the IBNR reserve. It is assumed that IBNR claims follow lognormal distribution and we also assume the force of interest follows a *GNL* law (a general normalized Laplace distribution). The force of interest is incorporated into the incremental predictive claims to find the discounted value of the reserve.

We first discuss the definition of generalized normal Laplace distribution and present some properties of this distribution based on the work of Reed (2007). Then we talk about the lognormal linear model as well as the development triangle for claims. We simulate finally the expected value of the reserve.

Key words : GNL distribution, Lognormal linear model, Developmental triangle, Incremental predictive claims, IBNR reserves, Expected value.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Distribution GNL	4
1.1. Fonction génératrice et fonction caractéristique	4
1.2. La distribution normale Laplace généralisée	9
1.2.1. Les effets des paramètres	11
1.3. Propriétés de la distribution GNL	11
1.3.1. La distribution GNL est infiniment divisible	11
1.3.2. La distribution GNL est fermée sous la convolution	12
1.3.3. La distribution GNL est fermée sous la transformation linéaire	12
1.4. Estimation des paramètres	13
1.4.1. Méthode des moments	13
1.4.2. Méthode du Maximum de Vraisemblance	15
1.4.3. Méthode de la distance quadratique minimale	18
1.4.3.1. Propriétés du QDE	19
Chapitre 2. Distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR	21
2.1. Modèle lognormal linéaire pour la réserve IBNR	22
2.1.1. Modèle lognormal linéaire	23
2.2. Distribution de la valeur prédictive escomptée de la réserve IBNR	24

2.2.1.	Distribution du terme $-\delta(k + j - m - 1)$	25
2.2.2.	Distribution de X_{kj}	26
2.2.3.	Distribution de la variable aléatoire Y_{kj}^p	27
2.3.	Espérance de la valeur escomptée de la réserve	27
2.4.	Variance de la valeur escomptée de la réserve	28
Chapitre 3. Illustration numérique de la valeur escomptée de la réserve IBNR		31
3.1.	Estimation des paramètres du modèle lognormal linéaire	31
3.2.	Estimation des variances des réclamations prédictives incrémentales 35	
3.3.	Paramètres de la distribution GNL	38
3.3.1.	Valeurs des paramètres de la distribution <i>GNL</i> pour la force d'intérêt δ	40
3.3.2.	Estimateur de la distribution $-(k + j - m - 1)\delta^a$	42
3.4.	Simulation de la valeur escomptée de la réserve IBNR	43
Chapitre 4. Conclusion		46
Bibliographie		47
Annexe A.	Code R pour estimer les paramètres de la loi lognormale et les variances prédictives	A-i
Annexe B.	Code R pour simuler les réclamations prédictives incrémentales	B-i
Annexe C.	Code R pour simuler les valeurs escomptées de la réserve IBNR	C-i
Annexe D.	Code R pour la distribution GNL de la force d'intérêt	D-i

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude au professeur Louis G. Doray, mon directeur de recherche, pour ses conseils patients, l'encouragement enthousiaste et critiques utiles de ce travail. Mes remerciements vont également à tous les enseignants et au personnel du Département de mathématiques et de statistique pour leur travail extraordinaire qui m'a permis de terminer mes études. Je tiens également à remercier ma famille, mon mari et mes trois enfants pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de mes études.

INTRODUCTION

Le terme réserve est utilisé pour désigner le passif d'une compagnie d'assurance relié aux sinistres non-payés et aux dépenses associées à ces sinistres. La réserve IBNR (Incurred but not yet reported) désigne les sinistres survenus, mais non encore déclarés à la compagnie d'assurance. La compagnie d'assurance a besoin d'une estimation précise pour le niveau présent de la réserve IBNR, car la réserve IBNR affecte la politique administrative de la compagnie, par exemple, la politique d'investissement.

Reed (2007) a introduit la distribution GNL, la distribution normale Laplace généralisée ainsi que ses applications en finance, le processus du mouvement Brownien-Laplace. Le processus incrémental suit une distribution normale Laplace généralisée. Dans ce mémoire, nous supposons que le rendement logarithmique suit une loi GNL.

Basé sur le modèle de De Vylder (1978), Doray a introduit un modèle lognormal linéaire pour la réserve IBNR incrémentale, plus précisément, la réserve IBNR incrémentale dans le bas du triangle de développement suit une loi lognormale.

Dans cette thèse, nous avons l'intention d'étudier la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR, pour cette fin, nous supposons que la force d'intérêt suit une loi GNL et nous allons incorporer la force d'intérêt pour trouver la valeur présente de la réserve IBNR.

Nous organisons cette thèse comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons la loi GNL en détail, sa définition, ses propriétés, sa fonction caractéristique et les méthodes d'estimation des paramètres. Nous l'appliquons à la finance pour avoir les estimateurs des paramètres de GNL

dans le chapitre 3.

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle lognormal linéaire pour la réserve IBNR, en incorporant la force d'intérêt qui suit une distribution GNL, à la réserve IBNR prédictive, nous dérivons la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR prédictive. Cette valeur peut être exprimée comme une somme d'exponentielles de GNL. Cette distribution n'étant pas une distribution connue, nous étudions le comportement de cette distribution en simulant les données.

Dans le chapitre 3, nous ajustons les rendements logarithmiques illustratifs dans une distribution *GNL* afin d'estimer les paramètres de la force d'intérêt. Nous prenons des sinistres d'une ligne d'affaires d'une compagnie d'assurance, en appliquant le modèle lognormal linéaire sur les données incrémentales, nous estimons les paramètres de la distribution. Par la suite, nous combinons les deux distributions pour obtenir la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR prédictive

Nous faisons quelques conclusions dans le chapitre 4.

Chapitre 1

DISTRIBUTION GNL

Reed (2007) a introduit une nouvelle distribution, la distribution normale Laplace généralisée GNL ("generalized normal Laplace"). Cette distribution se définit comme la convolution de deux lois indépendantes, une loi normale et une loi Laplace généralisée. Elle a été utilisée pour modéliser le rendement logarithmique d'actifs.

1.1. FONCTION GÉNÉRATRICE ET FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Avant de définir la distribution GNL, nous donnons d'abord quelques notations importantes en statistique.

Définition 1.1.1. *La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire continue X avec la fonction de densité $f(x)$, si elle existe, est définie par*

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

pour toute valeur réelle de t pour laquelle l'intégrale converge absolument.

Notons que $M_X(0)$ existe toujours et est toujours égale à 1, car

$$M_X(0) = E(e^{0X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{0x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Pour un entier positif k , le $k^{\text{ième}}$ moment de X , $E(X^k)$, peut être calculé en dérivant k fois de la fonction génératrice des moments, puis en évaluant la dérivée à $t = 0$.

$$\begin{aligned} E(X^k) &= M_X^{(k)}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d^{(k)}}{dt^k} M_X(t)|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^{(k)}}{dt^k} E(e^{tx})|_{t=0} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{(k)}}{dt^k} e^{tx} f(x) dx \right) |_{t=0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{x \cdots x}^k f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X est définie par

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i\sin(tX))$$

avec $i = \sqrt{-1}$.

Le développement de Taylor de la fonction exponentielle autour de l'origine zéro s'écrit comme

$$e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Avec ce développement, $\phi_X(t)$ peut s'écrire comme

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} E(X^j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu_j,$$

où $\mu_j = E(X^j)$ est le $j^{\text{ième}}$ moment de X .

Contrairement à la fonction génératrice des moments, la fonction caractéristique existe toujours et elle détermine uniquement la loi de probabilité ou la fonction de densité d'une variable aléatoire. On remarque la relation entre la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique

$$\phi_X(t) = M_X(it), \text{ si } M_X(t) \text{ existe.}$$

Proposition 1.1.1. Propriétés de la fonction caractéristique

(1) Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)\cdots\phi_{X_n}(t)$$

(2) Pour deux nombres réels a et b , on a la relation suivante

$$\phi_{a+bX}(t) = \phi_X(bt)e^{ita}$$

DÉMONSTRATION. (1) soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes

$$\begin{aligned}\phi_{X_1+\dots+X_n}(t) &= E(e^{(X_1+\dots+X_n)it}) \\ &= E(e^{itX_1} \dots e^{itX_n}) \\ &= E(e^{itX_1}) \dots E(e^{itX_n}), \text{ par indépendance} \\ &= \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t)\end{aligned}$$

(2) soient a et b deux nombres réels

$$\phi_{(a+bX)}(t) = E[e^{it(a+bX)}] = E[e^{ita+itbX}] = E(e^{itbX})e^{ita} = \phi_X(tb)e^{ita}$$

□

Exemple 1.1.1. Chercher la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale de paramètres (μ, σ^2)

Soit Y une variable aléatoire normale d'espérance 0 et de variance 1 :

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) = E(e^{itY}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= e^{(it)^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y^2)-2ity+(it)^2}{2}} dy \\ &= e^{(it)^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-it)^2}{2}} dy}_1 \\ &= e^{-t^2/2}\end{aligned}$$

Notons $X = \sigma Y + \mu$, alors X suit une distribution normale de paramètres de μ et σ^2 , Y suit la distribution normale standard. La fonction caractéristique de X est

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \phi_{\sigma Y + \mu}(t) \\ &= \phi_Y(\sigma t) e^{it\mu} && \text{par la proposition 1.1.1(2)} \\ &= e^{-\sigma^2 t^2/2} e^{it\mu} = e^{it\mu - \sigma^2 t^2/2}\end{aligned}$$

Exemple 1.1.2. Chercher la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Gamma de paramètres (α, β) .

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi Gamma de paramètres (α, β) , avec fonction de densité de X $f(x)$; la fonction caractéristique $\phi_X(t)$ est égale à

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-x/\beta} e^{itx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-x/\beta + itx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\left(\frac{x - \beta itx}{\beta}\right)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\left(\frac{x}{\beta(1 - \beta it)}\right)} dx \\
&= \beta^{-\alpha} \left(\frac{\beta}{1 - \beta it}\right)^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta/(1 - it\beta))^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\left(\frac{x}{\beta(1 - \beta it)}\right)} dx \\
&= \left(\frac{1}{1 - \beta it}\right)^{\alpha} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta/(1 - it\beta))^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} e^{-\left(\frac{x}{\beta(1 - \beta it)}\right)} dx}_1 \\
&= \left(\frac{1}{1 - \beta it}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.1. (Abramowitz et Stegun, 1972, page 928) La fonction génératrice des cumulants est définie comme le logarithme de la fonction caractéristique. Le $n^{\text{ième}}$ cumulants d'une variable aléatoire X , noté par k_n , est défini comme le coefficient de l'expansion en série de Taylor de la fonction génératrice des cumulants.

Si on fait un développement de Taylor sur $\log(\phi_X(t))$, on obtient :

$$\log(\phi_X(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}$$

Proposition 1.1.2. Soit X une variable aléatoire, on a $k_1 = E(X)$ et $k_2 = \text{Var}(X)$.

DÉMONSTRATION. Avec le développement en série de Maclaurin, la fonction $\log(1 + x)$ s'écrit

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Nous savons que le développement de Taylor de la fonction exponentielle est

$$e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}.$$

Avec ce développement, $\phi_X(t)$ peut s'écrire comme

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} E(X^j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu_j,$$

où $u_j = E(X^j)$.

Avec ce développement de Taylor de la fonction exponentielle, on obtient pour $\log(\phi_X(t))$:

$$\log(\phi_X(t)) = \log \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu_j \right] = \log \left[1 + u_1(it) + u_2 \frac{(it)^2}{2!} + u_3 \frac{(it)^3}{3!} + \dots \right].$$

Supposons que $x = u_1(it) + u_2 \frac{(it)^2}{2!} + u_3 \frac{(it)^3}{3!} + \dots$, alors

$$x^2 = u_1^2(it)^2 + u_1 u_2 (it)^3 + \left(\frac{2u_3 u_1}{3!} + \frac{u_2^2}{4} \right) (it)^4 + \dots$$

$$x^3 = u_1^3(it)^3 + \frac{3u_2 u_1^2(it)^4}{2} + \dots$$

$$x^4 = u_1^4(it)^4 + \dots$$

⋮

Alors

$$\frac{x^2}{2} = \frac{u_1^2(it)^2 + u_1 u_2 (it)^3 + \left(\frac{2u_3 u_1}{3!} + \frac{u_2^2}{4} \right) (it)^4 + \dots}{2}$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{u_1^3(it)^3 + \frac{3u_2 u_1^2(it)^4}{2} + \dots}{3}$$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{u_1^4(it)^4 + \dots}{4}$$

⋮

Après réarrangement des termes, le développement en série de Maclaurin de $\log(\phi_X(t))$ devient

$$\begin{aligned} \log(\phi_X(t)) &= u_1(it) + [u_2 - u_1^2] \frac{(it)^2}{2} + [u_3 - 3u_1 u_2 + 2u_1^3] \frac{(it)^3}{3!} \\ &+ [u_4 - 4u_3 u_1 - 3u_2^2 + 12u_2 u_1^2 - 6u_1^4] \frac{(it)^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Comparant avec les termes de la fonction génératrice des cumulants $\log(\phi_X(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \frac{(it)^n}{n!}$, on a

$$\begin{aligned} k_1 &= u_1 = E(X) \\ k_2 &= u_2 - u_1^2 = \text{Var}(X) \\ k_3 &= u_3 - 3u_1u_2 + 2u_1^3 \\ k_4 &= u_4 - 4u_3u_1 - 3u_2^2 + 12u_2u_1^2 - 6u_1^4 \\ k_5 &= u_5 - 5u_4u_1 - 10u_3u_2 + 20u_3u_1^2 + 30u_2^2u_1 - 60u_2u_1^3 + 24u_1^5 \end{aligned}$$

où u_j dénote le $j^{\text{ième}}$ moment de X .

□

Définition 1.1.3. *La distribution d'une variable aléatoire X est n -divisible, s'il existe n variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) indépendantes identiquement distribuées telles que $X \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Elle est infiniment divisible, si elle est n -divisible pour tout n entier.*

1.2. LA DISTRIBUTION NORMALE LAPLACE GÉNÉRALISÉE

La distribution normale Laplace généralisée a été introduite par Reed (2007) et a été utilisée pour modéliser les rendements logarithmiques financiers des actifs. Une forme fermée de la fonction de densité de la GNL n'a pas encore été trouvée. Cependant, elle peut être obtenue à partir de la convolution de deux distributions indépendantes : la distribution normale et la distribution Laplace généralisée.

Définition 1.2.1. *(Reed 2007) La distribution normale Laplace généralisée (GNL) est définie comme la distribution d'une variable aléatoire X qui admet la fonction caractéristique suivante*

$$\phi_X(s) \stackrel{\text{définition}}{=} E[\exp(isX)] = \left[\frac{\alpha\beta \exp(uis - \frac{\sigma^2 s^2}{2})}{(\alpha - is)(\beta + is)} \right]^\rho \quad (1.2.1)$$

où α , β , ρ et σ sont des paramètres positifs et $-\infty < \mu < +\infty$, s est un nombre réel.

À partir de la fonction caractéristique de la distribution GNL, lorsque $is = t$, on a la fonction génératrice des moments de la distribution GNL

$$M_X(t) \stackrel{\text{définition}}{=} E[\exp(tX)] = \left[\frac{\alpha\beta \exp(ut + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{(\alpha - t)(\beta + t)} \right]^\rho$$

où α , β , ρ et σ sont des paramètres positifs et $-\infty < \mu < +\infty$, $-\beta < t < \alpha$.

On dénote

$$X \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho),$$

pour la variable aléatoire X d'une distribution GNL.

La fonction caractéristique d'une loi GNL peut être écrite aussi de la façon suivante

$$\phi_X(t) = \exp(\rho\mu it - \rho\sigma^2 t^2/2) \left[\frac{\alpha}{\alpha - it} \right]^\rho \left[\frac{\beta}{\beta + it} \right]^\rho \quad (1.2.2)$$

Nous remarquons ici que la fonction caractéristique de la distribution GNL est le produit des fonctions caractéristiques d'une distribution normale et de deux distributions gammas; alors le premier point de la proposition 1.1.1 nous permet d'écrire

$$X \stackrel{d}{=} \rho\mu + \sigma\sqrt{\rho}Z + \frac{1}{\alpha}G_1 - \frac{1}{\beta}G_2$$

où Z , G_1 et G_2 sont des variables aléatoires indépendantes avec $Z \sim N(0, 1)$, G_1 et G_2 des variables aléatoires de Gamma de paramètres ρ et 1.

Cette représentation d'une loi GNL fournit une façon directe pour générer des variables aléatoires suivant une distribution GNL.

On note que la loi Variance-gamma (voir Augustyniak et Doray (2011)) est un cas particulier de loi GNL avec les paramètres $\mu = 0$, $\sigma^2 = 0$, $\rho = 1/\lambda$ et $\alpha = \beta = 1/\sqrt{\lambda\theta}$; sa fonction caractéristique est

$$\phi_X(t) = \left(\frac{1}{1 - it\sqrt{\lambda\theta}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{1 + it\sqrt{\lambda\theta}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (1.2.3)$$

La distribution GNL ne possède pas une fonction de densité de forme fermée sauf pour le cas $\rho = 1$. C'est un cas important pour la distribution GNL et dans ce cas, la distribution porte le nom NL, i. e. la distribution normale Laplace (Reed et Jorgensen, 2004).

Reed (2004) a montré que la distribution NL peut être définie comme la convolution d'une distribution normale (N) et d'une distribution Laplace(L). La fonction de densité de la distribution est de la forme suivante

$$f(y) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \left[R\left(\alpha\sigma - \frac{y - \mu}{\sigma}\right) + R\left(\beta\sigma + \frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

où $\phi(z)$ est la fonction de densité de la variable aléatoire normale standard et R est le rapport de Mill qui est défini par

$$R(z) = \frac{\Phi^c(z)}{\Phi(z)} = \frac{1 - \Phi(z)}{\Phi(z)},$$

où $\Phi^c(z)$ représente la fonction de répartition complémentaire de la variable aléatoire normale standard.

1.2.1. Les effets des paramètres

Reed (2007) a analysé les effets des paramètres de la distribution GNL. Les paramètres μ et σ^2 affectent la localisation et la dispersion de la distribution ; α et β affectent la symmétrie de la distribution. En effet, si $\alpha > \beta$, la distribution sera asymétrique vers la gauche et vice versa. Lorsque $\alpha = \beta$, la distribution est symétrique, et si $\alpha = \beta = \infty$, la distribution se réduit à la distribution normale. Le paramètre ρ affecte la queue de la distribution. Selon Doetsch (1970, p. 231ff), pour $\rho < 1$, les deux queues sont plus longues que celle de la loi exponentielle, pour $\rho = 1$, les deux queues sont exponentielles et pour $\rho > 1$, les deux queues sont moins courtes que celle d'une loi exponentielle.

1.3. PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION GNL

Reed (2007) et Groparu-Cojocaru et Doray (2013) ont introduit quelques propriétés de la distribution GNL que nous allons présenter ici.

1.3.1. La distribution GNL est infiniment divisible

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées qui suivent la loi *GNL* de paramètres $\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho$, alors la fonction caractéristique de $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ devient :

$$\begin{aligned} \phi_S(t) &= \phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) \\ &= E(e^{(X_1+X_2+\dots+X_n)it}) \\ &= E(e^{itX_1})E(e^{itX_2})\dots E(e^{itX_n}) \\ &= [\phi_X(t)]^n \\ &= \left[\frac{\alpha\beta \exp(iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{(\alpha - it)(\beta + it)} \right]^{n\rho} \end{aligned}$$

On a donc $S \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, n\rho)$, qu'on peut aussi écrire :

$$S \stackrel{d}{=} n\rho\mu + \sigma\sqrt{n\rho}Z + \frac{1}{\alpha}G_1 - \frac{1}{\beta}G_2$$

où $Z \sim N(0, 1)$, G_1 et $G_2 \sim Gamma(n\rho, 1)$. Cette expression nous permet d'écrire que pour tout n entier

$$S \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Ceci prouve que la distribution GNL est infiniment divisible ; elle est donc fermée sous une transformation linéaire (Groparu-Cojocar et Doray (2013)).

1.3.2. La distribution GNL est fermée sous la convolution

La distribution GNL est fermée sous l'opération de convolution parce que la somme des variables aléatoires indépendantes GNL avec des paramètres communs α et β suit encore une distribution GNL (see Groparu and Doray (2012)). C'est à dire si $X_i, i = 1, \dots, n$ sont indépendantes de loi GNL $(\mu_i, \sigma_i^2, \alpha, \beta, \rho_i)$ avec des paramètres communs α et β et soit $S = X_1 + \dots + X_n$, alors

$$\phi_S(t) = \exp \left[\left(\sum_{k=1}^n \rho_k \mu_k \right) it - \left(\sum_{k=1}^n \rho_k \sigma_k^2 \right) \frac{t^2}{2} \right] \left[\frac{\alpha}{\alpha - it} \right]^{\sum_{k=1}^n \rho_k} \left[\frac{\beta}{\beta + it} \right]^{\sum_{k=1}^n \rho_k}.$$

Ainsi, S suit une loi GNL $(\frac{\rho_1 \mu_1 + \dots + \rho_n \mu_n}{\rho_1 + \dots + \rho_n}, \frac{\rho_1 \sigma_1^2 + \dots + \rho_n \sigma_n^2}{\rho_1 + \dots + \rho_n}, \alpha, \beta, \rho_1 + \dots + \rho_n)$.

1.3.3. La distribution GNL est fermée sous la transformation linéaire

Si $X \sim \text{GNL}(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$, pour deux constantes a et b avec $b > 0$, alors la fonction caractéristique de $a + bX$ est

$$\begin{aligned} \phi_{(a+bX)}(t) &= E(e^{ita+itbX}) \\ &= e^{ita} E(e^{itbX}) \\ &= e^{ita} \phi_X(bt) \\ &= \exp(iat + \rho \mu i b t - \rho b^2 \sigma^2 t^2 / 2) \left[\frac{\alpha}{\alpha - i b t} \right]^\rho \left[\frac{\beta}{\beta + i b t} \right]^\rho \\ &= \exp \left[\rho \left(\frac{a}{\rho} + \mu b \right) it - \rho b^2 \sigma^2 t^2 / 2 \right] \left[\frac{\alpha/b}{\alpha/b - it} \right]^\rho \left[\frac{\beta/b}{\beta/b + it} \right]^\rho \end{aligned}$$

$a + bX \sim \text{GNL}(\frac{a}{\rho} + \mu b, b^2 \sigma^2, \alpha/b, \beta/b, \rho)$ et la distribution GNL est fermée sous la transformation linéaire.

Pour une constante b avec $b < 0$, afin d'assurer que les paramètres α et β sont positifs, la fonction caractéristique est réécrite

$$\begin{aligned} \phi_{(a+bX)}(t) &= e^{ita} E(e^{itbx}) \\ &= \exp(\rho \left(\frac{a}{\rho} + \mu b \right) it - \rho b^2 \sigma^2 t^2 / 2) \left[\frac{\alpha/b}{\alpha/b - it} \right]^\rho \left[\frac{\beta/b}{\beta/b + it} \right]^\rho \\ &= \exp(\rho \left(\frac{a}{\rho} + \mu b \right) it - \rho b^2 \sigma^2 t^2 / 2) \left[\frac{-\alpha/b}{-\alpha/b + it} \right]^\rho \left[\frac{-\beta/b}{-\beta/b - it} \right]^\rho \end{aligned}$$

$$= \exp(\rho(\frac{a}{\rho} + \mu b)it - \rho b^2 \sigma^2 t^2 / 2) \left[\frac{-\beta/b}{-\beta/b - it} \right]^\rho \left[\frac{-\alpha/b}{-\alpha/b + it} \right]^\rho$$

Dans ce cas, $a + bX \sim \text{GNL}(\frac{a}{\rho} + \mu b, b^2 \sigma^2, -\beta/b, -\alpha/b, \rho)$ et la distribution GNL est fermée sous la transformation linéaire.

1.4. ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Pour estimer les paramètres de la distribution GNL, on propose en général trois méthodes : la Méthode des Moments (*MME*), la Méthode du Maximum de Vraisemblance (*MLE*) et la Méthode du Minimum de Distance quadratique (*QDE*)

1.4.1. Méthode des moments

La méthode des moments est moins efficace que les autres méthodes, mais le calcul est souvent plus simple. Cette méthode consiste à résoudre un système d'équations en égalant les moments empiriques et les moments théoriques. Supposons qu'on dispose n observations indépendantes qui proviennent de la même distribution GNL ayant les mêmes paramètres. Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire X est $E(X^k)$, et ce terme doit être exprimé comme une fonction des paramètres du modèle.

Kendall and Stuart (1987) ont montré que la $k^{\text{ème}}$ cumulant peut être exprimé en fonction des moments.

$$\begin{aligned} k_1 &= u_1 = E(X) \\ k_2 &= u_2 - u_1^2 = \text{Var}(X) \\ k_3 &= u_3 - 3u_1u_2 + 2u_1^3 \\ k_4 &= u_4 - 4u_3u_1 - 3u_2^2 + 12u_2u_1^2 - 6u_1^4 \\ k_5 &= u_5 - 5u_4u_1 - 10u_3u_2 + 20u_3u_1^2 + 30u_2^2u_1 - 60u_2u_1^3 + 24u_1^5, \end{aligned}$$

où $u_j = E(X^j)$ représente le $j^{\text{ème}}$ moment de la variable aléatoire X , s'il existe. Le $j^{\text{ème}}$ moment empirique peut être obtenu par

$$u_j = E(X^j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i^j,$$

d'où l'on peut déduire les cumulants empiriques.

On voit bien que les premiers cumulants empiriques peuvent être obtenus à partir de l'échantillon. On peut aussi exprimer les cumulants en termes des

paramètres. Encore selon le théorème 1.1.1 et la définition de la fonction caractéristique, soit X une variable aléatoire suivant une loi GNL.

Selon le théorème 1.1.1

$$\log(\phi_X(s)) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n \frac{(is)^n}{n!}$$

et selon la définition de la fonction caractéristique pour la loi GNL

$$\begin{aligned} \log(\phi_X(s)) &= \log\left(\exp(\rho\mu is - \rho\sigma^2 s^2/2) \left[\frac{\alpha}{\alpha - is}\right]^\rho \left[\frac{\beta}{\beta + is}\right]^\rho\right) \\ &= \rho\mu is - \frac{\rho\sigma^2 s^2}{2} + \rho \log\left(\frac{\alpha}{\alpha - is}\right) + \rho \log\left(\frac{\beta}{\beta + is}\right) \\ &= \rho\mu is + \frac{\rho\sigma^2 (is)^2}{2} + \rho \log\left(\frac{\alpha}{\alpha - is}\right) + \rho \log\left(\frac{\beta}{\beta + is}\right), \text{ car } i^2 = -1 \\ &= \rho\mu is + \frac{\rho\sigma^2 (is)^2}{2!} + \rho \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{(is)^2}{\alpha^2 2!} + \frac{2(is)^3}{\alpha^3 3!} + \dots \right] + \rho \left[-\frac{1}{\beta} + \frac{(is)^2}{\beta^2 2!} - \frac{2(is)^3}{\beta^3 3!} + \dots \right] \\ &= \rho is \left(\mu + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) + \rho(is)^2 \frac{1}{2!} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + \rho(is)^3 \frac{1}{3!} \left(\left(\frac{2}{\alpha^3} - \frac{2}{\beta^3}\right)\right) + \dots \end{aligned}$$

En comparant terme par terme, on a alors

$$k_1 = \rho\left(\mu + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$k_2 = \rho\left(\sigma^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

pour les cumulants d'ordre élevé ($r > 2$)

$$k_r = \rho(r-1)! \left(\frac{1}{\alpha^r} + (-1)^r \frac{1}{\beta^r} \right).$$

Pour trouver les cinq paramètres des MME de GNL, il s'agit de résoudre les cinq équations simultanément,

$$k_1(\text{empirique}) = k_1(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_1(\text{empirique}) = \rho\left(\mu + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$k_2(\text{empirique}) = k_2(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_2(\text{empirique}) = \rho\left(\sigma^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$k_3(\text{empirique}) = k_3(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_3(\text{empirique}) = \rho(3-1)! \left(\frac{1}{\alpha^3} + (-1)^3 \frac{1}{\beta^3} \right)$$

$$k_4(\text{empirique}) = k_4(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_4(\text{empirique}) = \rho(4-1)! \left(\frac{1}{\alpha^4} + (-1)^4 \frac{1}{\beta^4} \right)$$

$$k_5(\text{empirique}) = k_5(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_5(\text{empirique}) = \rho(3-1)! \left(\frac{1}{\alpha^5} + (-1)^5 \frac{1}{\beta^5} \right).$$

Après quelques opérations algébriques, ce système se réduit à deux paires d'équations nonlinéaires de deux paramètres (α, β) . Reed(2007) a montré les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 12k_3\left(\frac{1}{\alpha^5} - \frac{1}{\beta^5}\right) &= k_5\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\right) \\ 3k_3\left(\frac{1}{\alpha^4} - \frac{1}{\beta^4}\right) &= k_4\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\right), \end{aligned}$$

à partir desquelles les autres estimateurs des paramètres peuvent être obtenus.

Ainsi

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{k_3}{2!(\alpha^{-3} - \beta^{-3})} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{k_2}{\hat{\rho}} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \\ \hat{\mu} &= \frac{k_1}{\hat{\rho}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $\rho = 1$, la distribution GNL devient la distribution NL (la distribution normale Laplace), on a alors seulement quatre paramètres à estimer, on résout deux paires d'équations pour les paramètres α et β ,

$$\begin{aligned} k_3(\text{empirique}) &= k_3(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_3(\text{empirique}) = \rho(3-1)! \left(\frac{1}{\alpha^3} + (-1)^3 \frac{1}{\beta^3} \right) \\ k_4(\text{empirique}) &= k_4(\text{théorique}) \Leftrightarrow k_4(\text{empirique}) = \rho(4-1)! \left(\frac{1}{\alpha^4} + (-1)^4 \frac{1}{\beta^4} \right). \end{aligned}$$

$\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ deviennent [Reed(2007)]

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= k_1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\ \hat{\sigma}^2 &= k_2 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}. \end{aligned}$$

1.4.2. Méthode du Maximum de Vraisemblance

L'estimation par la méthode des moments est souvent facile à faire, mais ces estimateurs performant mal parce qu'ils utilisent seulement quelques caractéristiques des données et non l'ensemble des observations. Il est important d'utiliser autant d'informations que possible lorsque la population a une queue lourde à droite.

Il existe une variété d'estimateurs basées sur les points individuels de données. Ils sont tous calculés en définissant une fonction objective et puis en déterminant

la valeur des paramètres qui permettent d'optimiser cette fonction. On utilise souvent la fonction de vraisemblance comme fonction objective.

La fonction de vraisemblance est définie comme le produit de la fonction de densité $f(x; \underline{\theta})$ évaluée à la valeur de chaque observation (Klugman et al. 2008)

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \underline{\theta})$$

On utilise souvent le logarithme de la fonction de vraisemblance dénoté $l(\underline{\theta})$ pour faciliter les calculs et la fonction de log-vraisemblance est égale à

$$l(\underline{\theta}) = \log(L(\underline{\theta})) = \sum_{i=1}^{i=n} \log(f(x_i; \underline{\theta}))$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance peut exister et être unique, ou ne pas être unique, ou ne pas exister. Il est souvent impossible de maximiser analytiquement la fonction de vraisemblance en posant la dérivée partielle égalant zéro. L'approche numérique est souvent exigée.

Il n'y a pas d'expression sous forme fermée pour la fonction de densité de la distribution GNL, donc on ne peut pas obtenir une formule analytique pour la fonction de vraisemblance ou la fonction de log-vraisemblance.

Dans le cas $\rho = 1$, on sait que $X \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho = 1)$ aussi $X \sim NL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta)$, et pour la distribution NL, on a la fonction de densité sous forme fermée. On pourrait écrire la fonction de vraisemblance sous forme fermée ainsi que la fonction de log-vraisemblance.

Étant donné n observations indépendantes identiquement distribuées x_1, x_2, \dots, x_n provenant de la distribution $NL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta)$, la fonction de densité de la distribution NL est (Reed and Jorgensen, 2004)

$$f(x) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \left[R\left(\alpha\sigma - \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) + R\left(\beta\sigma + \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

La fonction de vraisemblance est

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \left[R\left(\alpha\sigma - \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) + R\left(\beta\sigma + \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right]$$

et la fonction de log-vraisemblance

$$\begin{aligned} l(\underline{\theta}) &= n \log(\alpha) + n \log(\beta) - n \log(\alpha + \beta) + \sum_{i=1}^{i=n} \log\left(\phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n} \log\left[R\left(\alpha\sigma - \frac{y_i - \mu}{\sigma}\right) + R\left(\beta\sigma + \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \end{aligned}$$

Notez que R est le rapport de Mill.

Ceci est une fonction complexe, on pourra la maximiser numériquement en appliquant l'estimation par la méthode des moments (par exemple avec les quatre premiers cumulants NL) pour obtenir des valeurs de départ.

En général, il est difficile de déterminer la variance d'estimateurs complexes tels que l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cependant, il est possible d'approximer la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance en utilisant la matrice de l'information observée.

Klugman et al. (2008) ont donné deux propriétés attrayantes majeures des estimateurs du maximum de vraisemblance : la convergence et la normalité asymptotique.

(a) Convergence.

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la probabilité que la fonction $[L'(\theta) = 0]$ égale 1.

(b) Normalité.

Lorsque $n \rightarrow \infty$, la distribution de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance converge vers une distribution normale avec une moyenne θ et variance satisfaisant $I(\theta)var(\theta) \rightarrow 1$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\theta) &= -nE \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(f(x; \theta)) \right] = -n \int f(x; \theta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(f(x; \theta)) dx \\ &= nE \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log(f(x; \theta)) \right)^2 \right] = n \int f(x; \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x; \theta) \right)^2 dx \end{aligned}$$

Par conséquent, le terme $i(\theta)^{-1}$ est utile pour l'approximation de $var(\theta)$; on appelle $I(\theta)$ l'information de Fisher. Une version plus générale du résultat utilisé est avec le logarithme de la fonction de vraisemblance

$$\mathcal{I}(\theta) = -nE \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} l(\theta) \right) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta^2} l(\theta) \right)^2 \right]$$

Dans le cas où il y a plus d'un paramètre, le vecteur des estimateurs du maximum de vraisemblance a une distribution asymptotique multivariée normale. La matrice de covariance de cette distribution est obtenue à partir de l'inverse de la matrice d'information avec (r, s) ième élément

$$\mathcal{I}(\theta)_{rs} = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_s \partial \theta_r} l(\theta) \right] = -nE \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_s \partial \theta_r} \log(f(X; \theta)) \right]$$

Cette expression est toujours vraie. Sous l'hypothèse d'indépendance, $I(\theta)_{rs}$ peut être exprimée de la façon suivante

$$\mathcal{I}(\theta)_{rs} = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_r} l(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_s} l(\theta) \right] = nE \left[\frac{\partial}{\partial \theta_r} \log(f(x; \theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_s} \log(f(x; \theta)) \right]$$

Cette matrice s'appelle matrice d'information. Pour obtenir cette matrice, il est nécessaire de prendre la dérivée et aussi l'espérance, c'est qui n'est pas toujours possible à faire. En remplaçant la fonction de densité par sa version empirique, on pourra approximativement avoir la matrice d'information

$$I(\theta)_{rs} = \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} l(\theta) \right]$$

Ceci est une information observée; en pratique, puisque la vraie valeur θ est inconnue, on utilise l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance pour estimer la matrice d'information.

1.4.3. Méthode de la distance quadratique minimale

Pour estimer les paramètres de la distribution GNL, Groparu-Cojocaru et Doray (2013) ont présenté la méthode de la distance quadratique minimale.

L'estimation de méthode de la distance quadratique minimale vise à minimiser la distance quadratique entre les parties réelle et imaginaire des fonctions caractéristiques théorique et empirique.

Puisque $1/(1-iz) = (1+z^2)^{-1/2} e^{i\theta}$, avec $\theta = \arctan z$, la fonction caractéristique de la distribution GNL peut être écrite comme

$$\exp(-\rho\sigma^2 t^2/2) \left(1 + t^2/\alpha^2\right)^{-\rho/2} \left(1 + t^2/\beta^2\right)^{-\rho/2} \exp[i\rho(\mu t + \theta_1 + \theta_2)]$$

où $\theta_1 = \arctan(t/\alpha)$ et $\theta_2 = \arctan(-t/\beta)$, et on obtient

$$\operatorname{Re}\phi(t) = \exp(-\rho\sigma^2 t^2/2) \left(1 + t^2/\alpha^2\right)^{-\rho/2} \left(1 + t^2/\beta^2\right)^{-\rho/2} \cos \rho(\mu t + \theta_1 + \theta_2)$$

$$\operatorname{Im}\phi(t) = \exp(-\rho\sigma^2 t^2/2) \left(1 + t^2/\alpha^2\right)^{-\rho/2} \left(1 + t^2/\beta^2\right)^{-\rho/2} \sin \rho(\mu t + \theta_1 + \theta_2)$$

Soient x_1, \dots, x_n n observations indépendantes identiquement distribuées provenant d'une variable aléatoire X avec une distribution GNL et fonction caractéristique $\phi(t)$ donnée par la formule (1.2.2). La fonction caractéristique empirique basée sur l'échantion aléatoire x_1, \dots, x_n égale à

$$\phi_n(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \exp(it_j x_l), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

où k et les points t_1, \dots, t_k sont fixés et indépendants de n .

On définit les vecteurs suivants de dimensions $2k$

$$\mathbf{Z}_n = [\operatorname{Re}\phi_n(t_1), \dots, \operatorname{Re}\phi_n(t_k), \operatorname{Im}\phi_n(t_1), \dots, \operatorname{Im}\phi_n(t_k)]'$$

$$\mathbf{Z}(\theta) = [\operatorname{Re}\phi(t_1), \dots, \operatorname{Re}\phi(t_k), \operatorname{Im}\phi(t_1), \dots, \operatorname{Im}\phi(t_k)]',$$

où θ est le vecteur de paramètres $[\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho]$,

$$\operatorname{Re}\phi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \cos(tx_l) \text{ et } \operatorname{Im}\phi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sin(tx_l).$$

L'estimateur de distance quadratique (QDE) basée sur la fonction caractéristique dénoté par $\hat{\theta}$, est défini comme la valeur de θ qui minimise la distance

$$d(\theta) = [\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}(\theta)]' Q(\theta) [\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}(\theta)], \quad (1.4.1)$$

où $Q(\theta)$ est une matrice définie positive de dimension $2k \times 2k$, qui pourra dépendre de θ . On dénote la matrice variance-covariance $\Sigma(\theta)$ du vecteur $\sqrt{n}[\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}(\theta)]'$ par $\Sigma(\theta)$

Proposition 1.4.1 (Groparu-Cojocaru et Doray(2013)). *Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires i.i.d. avec fonction caractéristique $\phi(t)$ et fonction caractéristique empirique $\phi_n(t)$. Alors,*

$$\mathbb{E}(\operatorname{Re}\phi_n(t), \operatorname{Im}\phi_n(t)) = (\operatorname{Re}\phi(t), \operatorname{Im}\phi(t))$$

$$\operatorname{Cov}(\operatorname{Re}\phi_n(t), \operatorname{Re}\phi_n(s)) = [\operatorname{Re}\phi(t+s) + \operatorname{Re}\phi(t-s) - 2\operatorname{Re}\phi(t)\operatorname{Re}\phi(s)]/2n$$

$$\operatorname{Cov}(\operatorname{Im}\phi_n(t), \operatorname{Im}\phi_n(s)) = [\operatorname{Re}\phi(t-s) - \operatorname{Re}\phi(t+s) - 2\operatorname{Im}\phi(t)\operatorname{Im}\phi(s)]/2n$$

$$\operatorname{Cov}(\operatorname{Re}\phi_n(t), \operatorname{Im}\phi_n(s)) = [\operatorname{Im}\phi(t+s) - \operatorname{Im}\phi(t-s) - 2\operatorname{Re}\phi(t)\operatorname{Im}\phi(s)]/2n.$$

Pour la preuve, voir Thaler (1974) ou Groparu (2007).

1.4.3.1. Propriétés du QDE

Deux propriétés importantes du QDE. Soit θ_0 la vraie valeur du paramètre θ et $\hat{\theta}$ un estimateur du minimum de la distance quadratique. Luong et Thompson (1987) ont travaillé sur les estimateurs basés sur la distance transformée quadratique et ont conclu que

a) $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$, où \xrightarrow{P} dénote la convergence en probabilité i.e. l'estimateur $\hat{\theta}$ ODE est un estimateur convergent du paramètre θ .

b) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma_1)$ où $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ dénote la convergence en loi, avec $\Sigma_1 = (S'QS)^{-1}S'Q\Sigma QS(S'QS)^{-1}$, où $Q = Q(\theta_0)$, $\Sigma = \Sigma(\theta_0)$ est la matrice variance-covariance de $\sqrt{n}[\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}(\theta_0)]'$, et $S = S(\theta_0)$

Pour la distribution GNL, la matrice $S(\theta) = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}(\theta)}{\partial \theta} \right)$ de dimension $2k \times 5$ a le rang 5 pour $\theta = \theta_0$. $Q(\theta)$ peut être remplacé par un estimateur \widehat{Q} et si $\widehat{Q} \xrightarrow{P} Q(\theta_0) = Q$, on a un estimateur équivalent asymptotiquement. Feuerverger et McDunnough (1981) ont montré qu'en utilisant une grille suffisamment étendue, $(S'\Sigma^{-1}S)^{-1}$ peut être arbitrairement proche de la borne de Cramér-Rao, de sorte que le QDE peut atteindre une efficacité asymptotique aussi élevée que désiré.

Le comportement des processus stochastiques $\text{Re}\phi_n(t)$ et $\text{Im}\phi_n(t)$ donnent des indications sur le choix des points $t_j, j = 1, \dots, k$. Puisque $\text{Re}\phi(0) = 1$ and $\text{Im}\phi(0) = 0$, on a selon la Proposition 1.4.1,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\text{Re}\phi_n(t)) &= [\text{Re}\phi(2t) + 1 - 2(\text{Re}\phi(t))^2] / 2n \\ \text{Var}(\text{Im}\phi_n(t)) &= [1 - \text{Re}\phi(2t) - 2(\text{Im}\phi(t))^2] / 2n \\ \text{Cov}(\text{Re}\phi_n(t), \text{Im}\phi_n(t)) &= [\text{Im}\phi(2t) - 2\text{Re}\phi(t)\text{Im}\phi(t)] / 2n, \end{aligned}$$

et on obtient comme $t \rightarrow 0$, pour tous les n , $E(\text{Re}\phi_n(t), \text{Im}\phi_n(t)) \rightarrow (1, 0)$, $(\text{Var}(\text{Re}\phi_n(t)), \text{Var}(\text{Im}\phi_n(t))) \rightarrow (0, 0)$ et $\text{Cov}(\text{Re}\phi_n(t), \text{Im}\phi_n(t)) \rightarrow 0$. Quand $t \rightarrow 0$, les deux processus $\text{Re}\phi_n(t)$ et $\text{Im}\phi_n(t)$ sont non corrélés et $(\text{Re}\phi_n(t), \text{Im}\phi_n(t))$ devient un bon estimateur pour $(\text{Re}\phi(t), \text{Im}\phi(t))$. Par conséquent, les valeurs de t devraient être choisies près de 0. Groparu-Cojocar et Doray (2013) ont montré que le QDE basé sur la fonction caractéristique est robuste .

Dans le chapitre 2, on va étudier la distribution de la valeur escomptée de la réserve en IBNR, si la force d'intérêt a une distribution GNL.

Chapitre 2

DISTRIBUTION DE LA VALEUR ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE IBNR

Un problème important en assurance dommage est de déterminer la provision pour les sinistres déjà survenus mais non encore déclarés (IBNR en anglais : incurred but not reported), ou non entièrement payés à la fin d'une période d'assurance. Le problème pour la réserve IBNR sera la détermination de la valeur présente du montant de paiements futurs aléatoires. La première approche statistique au problème IBNR remonte à Verbeek (1972). Taylor (1977) a présenté la méthode de développement de triangle.

On utilise souvent des triangles de développement pour désigner les données historiques. Un triangle de développement est une table affichant l'évolution des sinistres à travers le temps. Avec des triangles de développement, on peut analyser l'information selon trois dimensions différentes : les lignes horizontales, chaque ligne représente généralement une année d'accident différente (ou une année de police, de déclaration...); les colonnes, chaque colonne représente un âge différent des sinistres; les diagonales, chaque diagonale représente l'activité d'une année comptable différente. L'information à l'intérieur d'un triangle peut être incrémentale ou cumulative, car cela affectera comment les données seront traitées.

Les données historiques utilisées pour estimer les paiements futurs consistent en un triangle de développement dont chaque cellule représente la réclamation incrémentale y_{kj} , comme dans la figure suivante :

Année d'accident k	âge des sinistres j						
	1	2	\dots	j	\dots	$m-1$	m
1	y_{11}	y_{12}	\dots	y_{1j}	\dots	$y_{1,m-1}$	y_{1m}
2	y_{21}	y_{22}	\dots	y_{2j}	\dots	$y_{2,m-1}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
k	y_{k1}	y_{k2}	\dots	y_{kj}			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
n	y_{n1}						

C'est la forme la plus simple des données qu'on peut obtenir. Les données historiques y_{kj} désignent les réclamations incrémentales pour l'année d'origine k et l'année de développement j , ce qui signifie que les réclamations ont été payées dans l'année civile $k + j - 1$. Année d'accident, année de développement et année comptable agissent comme les variables explicatives pour l'observation y_{kj} . Pour (k, j) les réclamations avec $k + j \leq m + 1$, y_{kj} ont déjà été observées, sinon c'est une observation future ; m représente ici l'année comptable.

Le but des techniques de réserve est de compléter le triangle de développement en un carré. À cette fin, l'actuaire peut utiliser une variété de techniques. La réserve traite de la détermination de la valeur présente incertaine de paiements futurs non connus. L'incertitude inhérente est décrite par la distribution des résultats possibles, et interviendra pour arriver à la meilleure estimation de la réserve.

Pour analyser la valeur escomptée de réserve IBNR, on considère ici un modèle statistique lognormal linéaire simple pour décrire les paiements passés et futurs. Pour obtenir la valeur escomptée de la réserve IBNR, nous devons incorporer un facteur pour la valeur de l'argent dans le temps. Dans ce mémoire, nous considérons le modèle lognormal linéaire pour les paiements historiques et futurs et considérons la force d'intérêt avec la distribution GNL pour la valeur de l'argent dans le temps.

2.1. MODÈLE LOGNORMAL LINÉAIRE POUR LA RÉSERVE IBNR

Taylor (1977) a présenté la méthode de séparation et a souligné le caractère particulier de la « troisième dimension » dans un triangle de développement, à savoir la direction de l'année de calendrier. De Vylder et Goovaerts (1979) ont suggéré le traitement simultané des trois directions du triangle : année d'accident (horizontal), année de développement (vertical) et année comptable (en diagonale). Le reste de cette section mettra l'accent sur le modèle lognormal linéaire.

2.1.1. Modèle lognormal linéaire

On considère le modèle lognormal linéaire suivant, présenté par Kremer (1982),

$$Z_{kj} = \ln(Y_{kj}) = \alpha_k + \beta_j + \epsilon_{kj},$$

où les ϵ_{kj} sont des variables aléatoires i.i.d. et de distribution $N(0, \sigma^2)$, le paramètre α_k désigne l'effet de ligne pour l'année d'accident k et le paramètre β_j désigne l'effet de colonne pour l'année de développement j . En notation matricielle, le modèle peut être écrit :

$$Z = \ln \mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

où $\epsilon \sim MN(0, \sigma^2)$

$$Y' = (Y_{11}, \dots, Y_{1m}, Y_{21}, \dots, Y_{2,m-1}, \dots, Y_{m,1})$$

$$Z' = (Z_{11}, \dots, Z_{1m}, Z_{21}, \dots, Z_{2,m-1}, \dots, Z_{m,1})$$

$$\epsilon' = (\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1m}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2,m-1}, \dots, \epsilon_{m,1})$$

$$\beta' = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

et \mathbf{X} est la matrice de régression. Notons que l'on fixe $\beta_1 = 0$ pour garantir que la matrice de régression soit une matrice non singulière.

La méthode du maximum de vraisemblance fournit des estimateurs des paramètres inconnus de régression. Les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour le modèle de régression linéaire simple, on peut facilement trouver les estimateurs de β et de σ^2 :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Z$$

et

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(Z - X\hat{\beta})'(Z - X\hat{\beta})$$

Cet estimateur de $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 , tandis que l'estimateur suivant est un estimateur nonbiaisé de σ^2 :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}(Z - X\hat{\beta})'(Z - X\hat{\beta})$$

où n est la dimension du vecteur Z et p est la dimension du vecteur β . Notons que $\hat{\beta}$ a une distribution multinormale telle que

$$\hat{\beta} \sim MN(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

Les formules ci-dessus peuvent être trouvées dans tous les livres standard sur le modèle de régression, par exemple Régression(Cornillon et Matzner-Lober 2007).

Le problème d'estimer les réclamations IBNR consiste à prédire la valeur de Y_{kj} pour tous les (k, j) qui se trouvent dans le coin droit inférieur du triangle de développement, pour $k = 2, 3, \dots, m$ et $j = m + 2 - k, \dots, m$.

Soit \mathbf{B} la matrice prédictive qui est analogue à la matrice \mathbf{X} . On note $b_{(u)}$ l'élément de la $u^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{B} . Selon notre modèle, la variable Z_{kj} prédictive est donnée par :

$$Z_{kj} = \ln(Y_{kj}) = b_{(u)}\hat{\beta} + \epsilon_{kj}.$$

La variable Z_{kj} suit une distribution normale de moyenne et de variance

$$E(Z_{kj}) = E(b_{(u)}\hat{\beta} + \epsilon_{kj}) = b_{(u)}\beta,$$

$$Var(Z_{kj}) = Var(b_{(u)}\hat{\beta}) + Var(\epsilon_{kj}) = \sigma^2(b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}) + \sigma^2 = \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]$$

et donc

$$Z_{kj} \sim N\left(b_{(u)}\beta, \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]\right)$$

et la variable Y_{kj} suit une loi lognormale de paramètres

$$Y_{kj} \sim \text{lognormal}\left(b_{(u)}\beta, \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]\right)$$

avec moyenne

$$E(Y_{kj}) = e^{b_{(u)}\beta + \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]}$$

et variance

$$Var(Y_{kj}) = e^{2b_{(u)}\beta + \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]} \left(e^{\sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]} - 1 \right).$$

Suivant Doray (1996), la réserve totale prédictive suit une distribution qui est une somme de lois lognormales, notée par S

$$S = \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_{(u)}\hat{\beta} + \epsilon_{kj}}.$$

Cette expression de la réserve prédictive ne tient pas compte de la valeur de l'argent dans le temps.

2.2. DISTRIBUTION DE LA VALEUR PRÉDICTIONNELLE ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE IBNR

Basé sur la présentation de la réserve totale prédictive de la section précédente, on incorpore le facteur d'escompte pour exprimer la valeur escomptée de la réserve. On considère la force d'intérêt δ comme le facteur d'escompte. Nous savons que les incréments du processus suivent une distribution normale Laplace généralisée (GNL) dont la kurtose est positive et qui peut être symétrique ou asymétrique. La kurtose augmente à mesure que le temps entre les observations

diminue. Ceci justifie le choix de la loi *GNL* pour rendements logarithmiques de l'intérêt. Supposons donc que la force d'intérêt suive une distribution GNL de paramètres $(\mu, \sigma_1^2, \alpha, \beta_0, \rho)$. Après avoir intégré ce facteur de risque dans la réserve totale prédictive, la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} S^p &= \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj}} e^{-\delta(k+j-m-1)} \\ &= \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)} \end{aligned}$$

On remarque que la valeur escomptée de la réserve prédictive S est la somme de la valeur escomptée des réclamations prédictives incrémentales. Soit Y_{kj} la réclamation prédictive située à la droite inférieure du triangle de développement estimée par le modèle lognormal linéaire ; on escompte toutes les réclamations prédictives au début de l'année comptable (l'année dans la diagonale du triangle de développement). Soit Y_{kj}^p la valeur escomptée de Y_{kj} . On a

$$Y_{kj}^p = Y_{kj} e^{-\delta(k+j-m-1)} = e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}$$

Pour voir le comportement de la valeur escomptée de la réserve, on commence par analyser la distribution de la valeur escomptée des réclamations prédictives incrémentales Y_{kj}^p . On a Y_{kj}^p qui égale $e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}$.

Notons

$$X_{kj} = b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k + j - m - 1)$$

alors

$$Y_{kj}^p = e^{X_{kj}}.$$

2.2.1. Distribution du terme $-\delta(k + j - m - 1)$

Selon l'hypothèse qu'on a faite, la force d'intérêt δ suit une distribution GNL et une caractéristique de la distribution GNL est qu'elle est fermée sous une transformation linéaire. C'est-à-dire, si une variable aléatoire $W \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$, pour les constantes $a, b > 0$, on a $a + bW \sim GNL(b\mu + \frac{a}{b}, b^2\sigma^2, \alpha/b, \beta/b, \rho)$, et pour les constantes $a, b < 0$, on a $a + bW \sim GNL(b\mu + \frac{a}{b}, b^2\sigma^2, -\beta/b, -\alpha/b, \rho)$. Dans notre cas $-\delta(k+j-m-1)$, le terme $-(k+j-m-1)$ est une constante quelconque négative et la force d'intérêt δ suit une distribution $GNL(\mu, \sigma_1^2, \alpha, \beta_0, \rho)$, on a alors que $-\delta(k+j-m-1)$ suit encore une distribution GNL. On a donc $-\delta(k+j-m-1) \sim GNL\left(-(k+j-m-1)\mu, (k+j-m-1)^2\sigma_1^2, \frac{\beta_0}{k+j-m-1}, \frac{\alpha}{k+j-m-1}, \rho\right)$.

On utilise l'indice 0 dans β_0 pour distinguer que ce β est le paramètre de la force d'intérêt.

2.2.2. Distribution de X_{kj}

Les termes $Z_{kj} = b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj}$ ont une distribution normale de paramètres $(b_u \beta, \sigma_{kj}^2)$, où $\sigma_{kj}^2 = \sigma^2 [1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]$. L'estimateur sans biais de Doray (1996) de σ_{kj}^2 est égal à $\tilde{\sigma}^2 [1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]$

Selon la proposition 1.1.1 (premier point), la fonction caractéristique de la somme de variables aléatoires indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques de toutes les variables aléatoires indépendantes. Alors, la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_{kj} peut être écrite comme suit

$$\phi_{X_{kj}}(t) = \phi_{[b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)]}(t) = \phi_{[b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj}]}(t) \phi_{[-\delta(k+j-m-1)]}(t)$$

qui est égale à

$$\left[\frac{\left(\frac{\alpha}{k+j-m-1}\right) \left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1}\right) \exp \left[-(k+j-m-1)uit - \frac{(k+j-m-1)^2 \sigma_1^2 t^2}{2} \right]}{\left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1} - it\right) \left(\frac{\alpha}{k+j-m-1} + it\right)} \right]^\rho \exp\left(b_u \beta it - \frac{\sigma_{kj}^2 t^2}{2}\right)$$

Après réarrangement des termes, on obtient

$$\left[\frac{\left(\frac{\alpha}{k+j-m-1}\right) \left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1}\right) \exp \left[-(k+j-m-1)uit + \frac{b_u \beta it}{\rho} - \frac{t^2}{2} \left((k+j-m-1)\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{kj}^2}{\rho} \right) \right]}{\left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1} - it\right) \left(\frac{\alpha}{k+j-m-1} + it\right)} \right]^\rho$$

et finalement, on peut écrire la fonction caractéristique de X_{kj} comme

$$\left[\frac{\left(\frac{\alpha}{k+j-m-1}\right) \left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1}\right) \exp \left[\left(-(k+j-m-1)u + \frac{b_u \beta}{\rho} \right) it - \frac{t^2}{2} \left((k+j-m-1)\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{kj}^2}{\rho} \right) \right]}{\left(\frac{\beta_0}{k+j-m-1} - it\right) \left(\frac{\alpha}{k+j-m-1} + it\right)} \right]^\rho$$

notons que $i^2 = -1$ (le symbole du nombre complexe). L'indice k et j dans la formule en haut dénotent respectivement la ligne et la colonne du triangle de développement pour la réserve IBNR.

La fonction caractéristique ci-dessus montre que la distribution de X_{kj} suit aussi une distribution GNL dont les cinq paramètres sont $(\mu^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \rho^*)$, où

$$\mu^* = -(k+j-m-1)\mu + \frac{b_u \beta}{\rho}$$

$$\sigma^{*2} = (k+j-m-1)\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{kj}^2}{\rho}$$

$$\alpha^* = \beta_0 / (k+j-m-1)$$

$$\beta^* = \alpha / (k + j - m - 1)$$

$$\rho^* = \rho$$

On note $X_{kj} \sim GNL^*(\mu^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \rho^*)$.

2.2.3. Distribution de la variable aléatoire Y_{kj}^p

En début de cette section, on a noté que $Y_{kj}^p = e^{X_{kj}}$. On peut écrire aussi

$$Y_{kj}^p \stackrel{D}{=} \exp(GNL^*), \text{ où } \stackrel{D}{=} \text{ dénote égalité en distribution}$$

Cette représentation de la distribution n'est pas une distribution connue. La valeur escomptée de la réserve S^p est la somme de tous les Y_{kj}^p ,

$$S^p = \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}$$

qu'on peut écrire

$$S^p \stackrel{D}{=} \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{GNL^*}$$

Où GNL^* est une distribution GNL dont les paramètres sont les $\mu^*, \sigma^*, \alpha^*, \beta^*, \rho^*$ qui sont définis dans la section 2.2.2. De même, cette distribution est aussi une distribution non-connue.

2.3. ESPÉRANCE DE LA VALEUR ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE

Le caractère linéaire de l'espérance permet d'écrire l'espérance de la valeur escomptée de la réserve comme suit :

$$\begin{aligned} E(S^p) &= E\left(\sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}\right) \\ &= \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m E(e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}) \\ &= \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m E(e^{GNL^*}) \end{aligned}$$

Pour trouver l'espérance de la valeur escomptée de la réserve, on commence à chercher l'espérance du terme e^{GNL^*} , i.e $E(e^{GNL^*})$.

Pour arriver à cette fin, supposons que X est une variable aléatoire provenant d'une distribution $GNL(\mu, \sigma, \alpha, \beta, \rho)$ où $-\beta < 1 < \alpha$, alors la fonction génératrice des moments de X est

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \left[\frac{\alpha \beta \exp(ut + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{(\alpha - t)(\beta + t)} \right]^\rho$$

On peut en déduire que

$$E(e^X) = E(e^{tX})|_{t=1} = \left[\frac{\alpha\beta \exp(ut + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}{(\alpha - t)(\beta + t)} \right]_{t=1}^{\rho} = \left[\frac{\alpha\beta \exp(u + \frac{\sigma^2}{2})}{(\alpha - 1)(\beta + 1)} \right]^{\rho}.$$

Par conséquent, dans le cas d'une distribution GNL de paramètres $\mu^*, \sigma^{*2}, \alpha^*, \beta^*, \rho^*$ où $-\beta^* < 1 < \alpha^*$,

$$E(e^{b_{kj}\hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}) = \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(u^* + \frac{\sigma^{*2}}{2})}{(\alpha^* - 1)(\beta^* + 1)} \right]^{\rho^*}$$

où

$$\begin{aligned} \mu^* &= -(k + j - m - 1)\mu + \frac{b_u \beta}{\rho} \\ \sigma^{*2} &= (k + j - m - 1)\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{kj}^2}{\rho} \\ \alpha^* &= -\beta_0 / (k + j - m - 1) \\ \beta^* &= -\alpha / (k + j - m - 1) \\ \rho^* &= \rho \end{aligned}$$

Finalement, si toutes les distributions de la valeur présente prédictive des réclamations incrémentales satisfont la condition que $-\beta^* < 1 < \alpha^*$, l'espérance de la valeur escomptée de la réserve S^p peut être exprimée comme

$$E(S^p) = \sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(u^* + \frac{\sigma^{*2}}{2})}{(\alpha^* - 1)(\beta^* + 1)} \right]^{\rho^*}$$

2.4. VARIANCE DE LA VALEUR ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE

Toutes les valeurs escomptées des réclamations qui se situent au coin droit inférieur du triangle du développement sont des variables aléatoires qui sont exposés au même environnement économique; elles sont donc des variables aléatoires dépendantes. Et celles qui sont dans la même ligne ou dans la même colonne dépendent aussi des mêmes facteurs α_k ou β_j , elles ont de fortes dépendances.

Supposons que $X_u = b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k + j - m - 1)$ avec u un indice qui lie les indices k et j quelconques

$$\begin{aligned} Var(S^p) &= Var\left(\sum_{k=2}^m \sum_{j=m+2-k}^m e^{b_u \hat{\beta} + \epsilon_{kj} - \delta(k+j-m-1)}\right) \\ &= Var \sum_u (e^{X_u}) \\ &= \sum_u Var(e^{X_u}) + 2 \sum_{u \neq u'} cov(e^{X_u}, e^{X_{u'}}) \end{aligned}$$

Si $-\beta^* < 2 < \alpha^*$ et $-\beta^* < 1 < \alpha^*$, le terme $Var(e^{X_u})$ s'exprime comme

$$\begin{aligned}
Var(e^{X_u}) &= E(e^{2X_u}) - (E(e^{X_u}))^2 \\
&= E(e^{(tX_u)})_{t=2} - (E(e^{(tX_u)})_{t=1})^2 \\
&= M_{X_u}(2) - (M_{X_u}(1))^2 \\
&= \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(u^*t + \frac{\sigma^{*2}t^2}{2})}{(\alpha^* - t)(\beta^* + t)} \right]_{t=2}^{\rho^*} - \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(u^*t + \frac{\sigma^{*2}t^2}{2})}{(\alpha^* - t)(\beta^* + t)} \right]_{t=1}^{2\rho^*} \\
&= \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(2\mu^* + \frac{\sigma^{*2}4}{2})}{(\alpha^* - 2)(\beta^* + 2)} \right]^{\rho^*} - \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(\mu^* + \frac{\sigma^{*2}}{2})}{(\alpha^* - 1)(\beta^* + 1)} \right]^{2\rho^*}
\end{aligned}$$

Pour chercher la covariance entre $e(X_u)$ et $e(X_{u'})$, on sait

$$\begin{aligned}
Cov(e^{X_u}, e^{X_{u'}}) &= E(e^{X_u} e^{X_{u'}}) - E(e^{X_u})E(e^{X_{u'}}) \\
&= E(e^{(X_u + X_{u'})}) - E(e^{X_u})E(e^{X_{u'}})
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires X_u et $X_{u'}$ sont dépendantes, on ne peut pas appliquer la propriété que la distribution GNL est fermée sous la convolution dont les variables aléatoires sont indépendantes.

On ne connaît pas la fonction de densité conditionnelle ni la fonction de densité conjointe, on peut seulement estimer la corrélation $\rho_{uu'}$ entre les deux variables aléatoires e^{X_u} et $e^{X_{u'}}$. Cette valeur $\rho_{uu'}$ est comprise entre -1 et 1. On peut estimer cette corrélation selon l'expérience qu'on a par exemple. On a donc $Cov(e^{x_u}, e^{x_{u'}})$ exprimée par la corrélation

$$Cov(e^{x_u}, e^{x_{u'}}) = \rho_{uu'} [Var(e^{X_u})Var(e^{X_{u'}})]^{1/2}.$$

Par conséquent, la variance de la valeur escomptée de la réserve S^p peut être exprimée comme

$$\begin{aligned}
Var(S^p) &= \sum_u Var(e^{X_u}) + 2 \sum_{u \neq u'} Cov(e^{X_u} e^{X_{u'}}) \\
&= \sum_u \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(2\mu^* + \frac{\sigma^{*2}4}{2})}{(\alpha^* - 2)(\beta^* + 2)} \right]^{\rho^*} - \left[\frac{\alpha^* \beta^* \exp(\mu^* + \frac{\sigma^{*2}}{2})}{(\alpha^* - 1)(\beta^* + 1)} \right]^{2\rho^*} \\
&\quad + 2 \sum_{u \neq u'} \rho_{uu'} [Var(e^{X_u})Var(e^{X_{u'}})]^{1/2}.
\end{aligned}$$

On a besoin de déterminer les corrélations de toutes les paires de réclamations incrémentales escomptées prédictives au coin inférieur droit du triangle de développement pour trouver la variance.

La distribution de la valeur escomptée de la réserve est la somme d'exponentielle de distributions GNL. C'est-à-dire une somme de distributions log-GNL.

Puisque ce n'est pas une distribution connue, on ne connaît pas son comportement théorique. Dans la chapitre 3, on va utiliser la méthode de simulation pour voir ses caractéristiques en l'appliquant sur des données historiques.

Chapitre 3

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE DE LA VALEUR ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE IBNR

Nous avons montré que la distribution de la valeur escomptée de la réserve est la somme de lois $\log - GNL$ et la somme d'une distribution de lois \log -GNL est une distribution de densité non connue, donc on ne peut pas analyser cette distribution analytiquement. Dans ce chapitre, on va simuler la valeur escomptée de la réserve pour analyser son comportement.

Pour simuler la valeur escomptée de la réserve, nous allons suivre les étapes suivantes : dans la première section, nous allons estimer les paramètres du modèle lognormal linéaire à partir des données historiques concernant les réclamations incrémentales d'une ligne d'affaire dans une compagnie d'assurance. Dans la deuxième section, nous allons estimer les paramètres de la distribution GNL à partir des données historiques sur les prix quotidiens des actions en supposant que le processus du logarithme du rendement quotidien d'une action suit une distribution GNL . Dans la troisième section, en se servant des paramètres obtenus dans les deux premières sections, nous allons simuler les données numériques pour chaque cellule au coin droit inférieur du triangle de développement pour la réserve IBNR.

3.1. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE LOGNORMAL LINÉAIRE

Les réclamations cumulatives d'une ligne d'affaire d'une compagnie d'assurance pour les années 2002-2011 se trouvent dans la table 3.1 (prises du cours ACT3284). Dans ce triangle de développement, on affiche l'évolution des sinistres à travers le temps ; les lignes horizontales représentent des années d'accident différentes et les colonnes représentent des âges différents des sinistres, par exemple,

Supposons que la réclamation incrémentale notée y_{kj} dans le tableau 3.2 provient d'une distribution lognormale, c'est-à-dire que $\ln(y_{kj})$ suit une loi normale pour $k = 1, 2, \dots, 10$ et $j = 1, 2, \dots, 9$, on dénote

$$\ln(y_{kj}) = \alpha_k + \beta_j + \epsilon_{kj}.$$

En notation matricielle, on a

$$\ln(Y) = X\beta + \epsilon.$$

Dans notre problème, les données observées Y composent un vecteur de taille 54

$$Y' = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, \dots, y_{19}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{29}, y_{31}, \dots, y_{10,1})'$$

numériquement,

$$Y' = (85295, 34785, 12710, 9428, 9329, 4574, \dots, 481, 95095, 37441, \dots, 421, 100065, \dots, 163740)'$$

La matrice de régression X est comme suit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \dots & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X est une matrice de dimension 54 lignes et 18 colonnes et β est un vecteur de paramètres du modèle de longueur 18

$$\beta' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9)'$$

où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ représentent les effets de lignes pour les années d'accident 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 respectivement. De même, les paramètres $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$ représentent les effets de colonnes pour les années de développement 2,3,4,5,6,7,8,9, respectivement. ϵ est un vecteur stochastique de longueur 54 dont les éléments suivent la loi normale $(0, \sigma^2)$.

À partir de ces données, on estime les paramètres β et σ^2 de la distribution log-normale. En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, les estimateurs sont présentés dans le tableau 3.3.

TABLEAU 3.3. Estimateurs β du maximum de vraisemblance et écart-types

Paramètre	Estimateurs	Ecart-type
α_1	11.515453	0.001285272
α_2	11.539903	0.001285272
α_3	11.538580	0.001323537
α_4	11.584652	0.001389134
α_5	11.658149	0.001487531
α_6	11.714089	0.001634469
α_7	11.758233	0.001864060
α_8	11.782155	0.002257644
α_9	11.855094	0.003061212
α_{10}	12.006035	0.005510182
β_2	-1.061939	0.001224485
β_3	-2.059815	0.001339280
β_4	-2.275338	0.001470475
β_5	-2.335436	0.001634469
β_6	-3.139396	0.001854876
β_7	-4.221241	0.002176303
β_8	-4.419148	0.002701083
β_9	-5.418428	0.003734242
σ^2	0.005510182	

Comme on a mentionné dans le chapitre 2, le but en étudiant les réclamations incrémentales est de compléter le triangle de développement en un carré en appliquant le modèle lognormal linéaire sur les données historiques. C'est-à-dire qu'on voudrait prédire les données au coin droit inférieur du triangle de développement selon le modèle lognormal linéaire.

Nous avons considéré le modèle lognormal (Kremer (1982)) pour décrire la valeur estimée de la réclamation incrémentale de la manière suivante,

$$Z_{kj} = \ln(Y_{kj}) \stackrel{D}{=} \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_j + \epsilon$$

où $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$; Z_{kj} suit une distribution normale $N(\alpha_k + \beta_j, \sigma_{kj}^2)$.

Nous allons simuler des réclamations prédictives incrémentales Y_{kj} qui se situent au coin droit inférieur du triangle de développement, où $k = 3, 4, \dots, 10$ et $j = 9 + 3 - k, \dots, 9$. Plus précisément, on va simuler les 36 données $Y_{39}, Y_{48}, Y_{49}, Y_{57}, \dots, Y_{10,9}$. Chacune a une distribution lognormale.

Donc, nous allons simuler chaque variable aléatoire selon l'expression suivante :

$$\ln(Y_{kj}) \stackrel{D}{=} \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_j + N(0, \hat{\sigma}^2) \stackrel{D}{=} N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_{kj}^2)$$

où $\hat{\mu} = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_j$ et $\hat{\sigma}_{kj}^2 = \hat{\sigma}^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]$.

Nous allons estimer les variances des réclamations prédictives incrémentales du coin droit inférieur du triangle de développement dans la prochaine section.

3.2. ESTIMATION DES VARIANCES DES RÉCLAMATIONS PRÉDICTIVES INCRÉMENTALES

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la variance de la réclamation incrémentale dans le coin droit inférieur du développement de triangle, notée par σ_{kj}^2 , peut être exprimée par

$$\sigma_{kj}^2 = \sigma^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}],$$

où $k = 2, 3, \dots, m$ et $j = m + 2 - k, \dots, m$.

L'estimateur sans biais de la variance est égal à

$$\hat{\sigma}_{kj}^2 = \tilde{\sigma}^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}],$$

où b_u représente la ligne u de la matrice prédictive B qui est analogue à la matrice X .

La matrice B prédictive est comme suit

$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \dots & & \\
 \vdots & & & & & & & \ddots & & & & & & & \dots & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

Les estimateurs des variances σ_{kj} sont dans le tableau 3.4.

Nous allons simuler les réclamations prédictives incrémentales en se servant des estimateurs des variances et de β selon l'expression

$$\ln(Y_{kj}) \stackrel{D}{=} N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_{kj}^2).$$

Après avoir simulé 1000 données pour chaque réclamation prédictive incrémentale, on a une description pour la réserve IBNR sans tenir compte du facteur d'escompte.

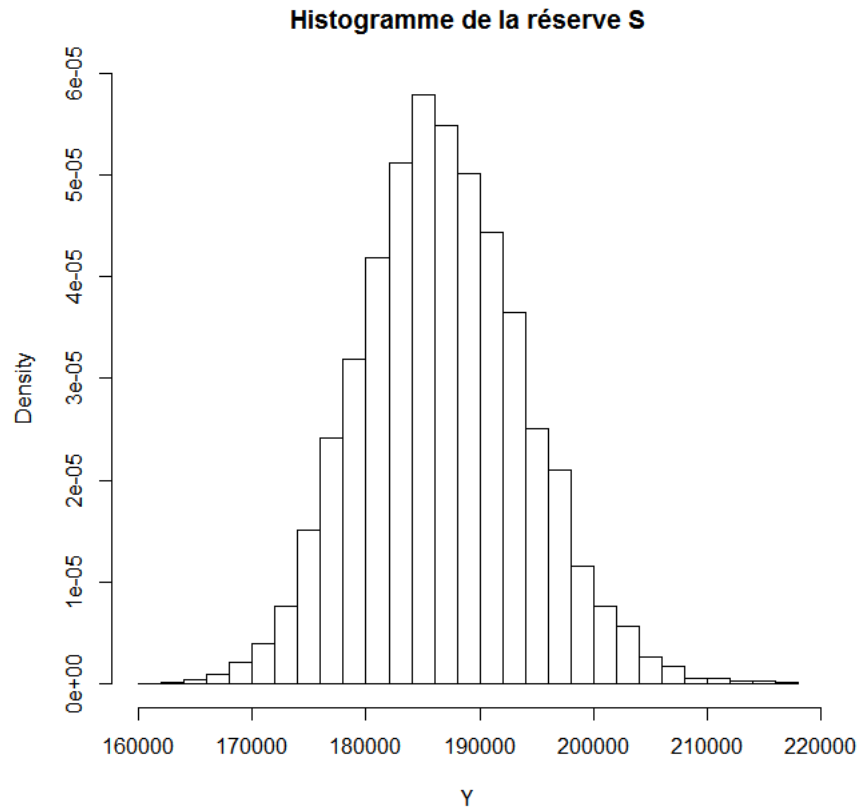
En analysant l'histogramme de réserve IBNR, on constate que la distribution de la réserve IBNR n'est pas symétrique.

TABLEAU 3.4. Estimateurs des variances σ_{kj}

paramètre	Estimateurs
σ_{39}^2	0.009298432
σ_{48}^2	0.008396468
σ_{49}^2	0.009429627
σ_{57}^2	0.008035682
σ_{58}^2	0.008560461
σ_{59}^2	0.009593620
σ_{66}^2	0.007934662
σ_{67}^2	0.008256089
σ_{68}^2	0.008780869
σ_{69}^2	0.009814028
σ_{75}^2	0.008035682
σ_{76}^2	0.008256089
σ_{77}^2	0.008577517
σ_{78}^2	0.009102296
σ_{79}^2	0.010135455
σ_{84}^2	0.008396468
σ_{85}^2	0.008560461
σ_{86}^2	0.008780869
σ_{87}^2	0.009102296
σ_{88}^2	0.009627075
σ_{89}^2	0.010660234
σ_{93}^2	0.009298432
σ_{94}^2	0.009429627
σ_{95}^2	0.009593620
σ_{96}^2	0.009814028
σ_{97}^2	0.010135455
σ_{98}^2	0.010660234
σ_{99}^2	0.011693393
$\sigma_{10,2}^2$	0.012244849
$\sigma_{10,3}^2$	0.012359644
$\sigma_{10,4}^2$	0.012490839
$\sigma_{10,5}^2$	0.012654833
$\sigma_{10,6}^2$	0.012875240
$\sigma_{10,7}^2$	0.013196667
$\sigma_{10,8}^2$	0.013721446
$\sigma_{10,9}^2$	0.014754606

TABLEAU 3.5. Descriptions de la réserve IBNR prédictive

1 ^{er} Qu.	Médiane	Moyenne	3 ^e Qu.
181900	186500	186700	191400



Pour simuler la valeur escomptée de la réserve IBNR, on a besoin de la force d'intérêt. Pour la force d'intérêt, on suppose qu'elle admet une distribution GNL. Dans la prochaine section, on va estimer les cinq paramètres de la distribution GNL.

3.3. PARAMÈTRES DE LA DISTRIBUTION GNL

Supposons que la force d'intérêt suit une distribution GNL; on sait que la relation entre la force d'intérêt δ et le taux d'intérêt effectif annuel R est

$$\delta = \log(1 + R).$$

Soient i_j les rendements quotidiens et i le rendement quotidien composé sur n journées. Donc, nous avons

$$(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdots (1 + i_n) = (1 + i)^n$$

et

$$1 + i = \left[\prod_{j=1}^{j=n} (1 + i_j) \right]^{1/n}.$$

Prenons le logarithme des deux côtés,

$$\ln(1 + i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \ln(1 + i_j).$$

Supposons que les $\ln(1 + i_j)$ sont des variables aléatoires indépendantes de distribution normale Laplace NL (Zhang 2015) avec les paramètres communs α et β

$$\log(1 + i_j) \sim NL(\mu_j, \sigma_j^2, \alpha, \beta) \sim GNL(\mu_j, \sigma_j^2, \alpha, \beta, 1).$$

Dans le chapitre 1, on a introduit une propriété de la distribution GNL : la distribution GNL est fermée sous la convolution. On a montré que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distribution GNL avec les paramètres $(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$ suit également une distribution GNL (voir Groparu - Cojocaru et Doray, 2013) avec les paramètres $(\sum_{j=1}^{j=n} \mu_j/n, \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_j^2/n, \alpha, \beta, n\rho)$ à condition que les paramètres α, β, ρ soient les paramètres communs pour ces n variables aléatoires indépendantes.

Cette propriété de la distribution GNL nous permet d'écrire

$$\sum_{j=1}^{j=n} \log(1 + i_j) \sim GNL \left(\sum_{j=1}^{j=n} \mu_j/n, \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_j^2/n, \alpha, \beta, n \right).$$

Une autre propriété de la distribution GNL vue dans la chapitre 1 est la propriété de transformation linéaire. Si on a une constante b positive et une variable aléatoire X de la distribution $GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$, alors bX est aussi une loi GNL dont les paramètres deviennent $GNL(b\mu, b^2\sigma^2, \alpha/b, \beta/b, \rho)$.

En combinant deux propriétés avec $b = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\log(1 + i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \log(1 + i_j) \sim GNL \left(\sum_{j=1}^{j=n} \mu_j/n^2, \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_j^2/n^3, n\alpha, n\beta, n \right),$$

Soit i le taux d'intérêt journalier en moyenne géométrique et soit R le taux d'intérêt effectif annuel, donc on a l'expression suivante pour décrire la relation :

$$1 + R = (1 + i)^{365} \Rightarrow \delta = \log(1 + R) = 365 \log(1 + i).$$

En utilisant à nouveau la propriété de la transformation linéaire de la distribution GNL avec $b = 365$, on a

$$\delta \sim GNL \left(\sum_{j=1}^{j=n} 365\mu_j/n^2, \sum_{j=1}^{j=n} 365^2\sigma_j^2/n^3, n\alpha/365, n\beta/365, n \right).$$

Supposons que le rendement quotidien est indépendant d'un jour à l'autre, alors μ_j et σ_j^2 sont aussi des paramètres communs pour toutes les n variables

aléatoires, et on a

$$\delta \sim GNL\left(365\mu/n, 365^2\sigma^2/n^2, n\alpha/365, n\beta/365, n\right)$$

Le logarithme des rendements $r(j)$ en fonction du prix est défini comme

$$r(j) = \log(P_{j+1}) - \log(P_j) = \log\left(\frac{P_{j+1}}{P_j}\right),$$

où P_j est la valeur de l'indice à l'instant j . On considère l'unité de temps est une journée. Les données empiriques (voir Rydberg, 2000) montrent que les rendements logarithmiques (ici notés par $r(j)$) ont tendance à suivre une distribution avec une queue plus épaisse que celle d'une distribution normale. Par conséquent, la distribution normale-Laplace (NL) peut être une bonne alternative à la loi normale. Dans ce cas, on note

$$\log(1 + i_j) = \log\left(\frac{P_{j+1}}{P_j}\right) \sim GNL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, 1) \sim NL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta).$$

En appliquant la distribution GNL sur les rendements logarithmiques des prix journaliers historiques, on peut trouver les estimateurs $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ des paramètres de la distribution $NL(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta)$, c'est-à-dire les estimateurs $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, 1)$ des paramètres de la distribution GNL .

En remplaçant les paramètres dans l'expression

$$\delta \sim GNL\left(\sum_{j=1}^{j=n} 365\mu_j/n^2, \sum_{j=1}^{j=n} 365^2\sigma_j^2/n^3, n\alpha/365, n\beta/365, n\right)$$

par leurs estimateurs, on a donc

$$\delta \sim GNL\left(\frac{365}{n}\hat{\mu}, \frac{365^2}{n^2}\hat{\sigma}^2, \frac{n}{365}\hat{\alpha}, \frac{n}{365}\hat{\beta}, n\right).$$

3.3.1. Valeurs des paramètres de la distribution GNL pour la force d'intérêt δ

Nous prendrons les valeurs de paramètres illustratives suivantes :

$$\hat{\mu}_1 = 0,0023$$

$$\hat{\sigma}_1 = 0,0056$$

$$\hat{\alpha}_1 = 117,2474$$

$$\hat{\beta}_1 = 90,8765$$

Par conséquent, la force d'intérêt δ suit la distribution GNL avec les estimateurs des paramètres

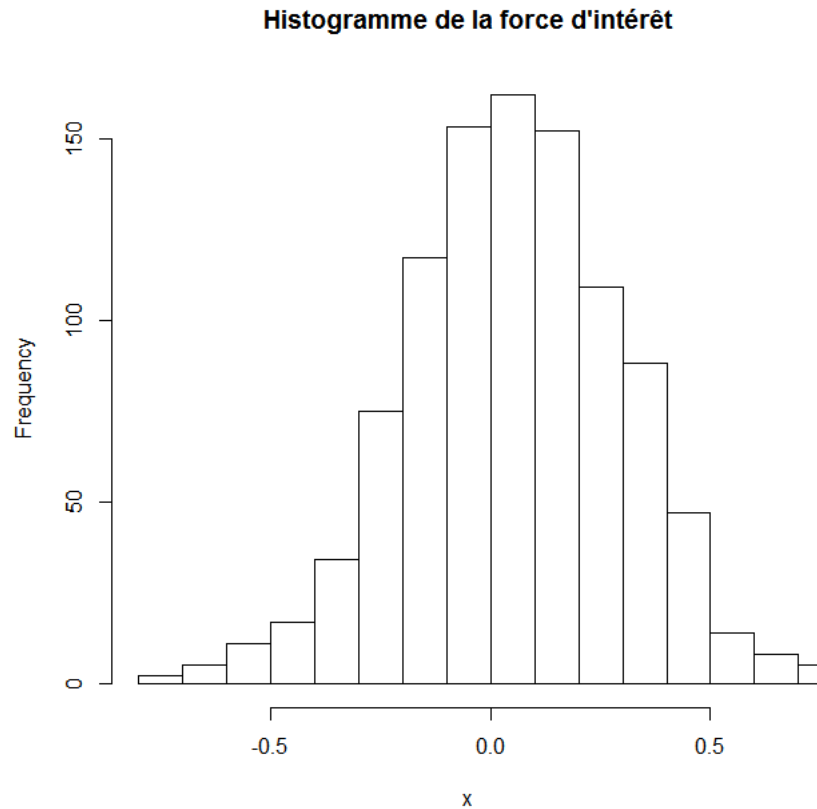
$$\hat{\mu} = \frac{365}{n}\hat{\mu}_1 = \frac{365}{482}0,0023 = 0,001742$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{365^2}{n^2} \hat{\sigma}_1^2 = \frac{365^2}{482^2} 0,0056^2 = 0,00002 \\ \hat{\alpha} &= \frac{n}{365} \hat{\alpha}_1 = \frac{482}{365} 117,2474 = 154,8308 \\ \hat{\beta} &= \frac{n}{365} \hat{\beta}_1 = \frac{482}{365} 90,8765 = 120,0068 \\ \hat{\rho} &= n = 482\end{aligned}$$

On dénote

$$\delta \sim GNL(0,001742, 0,00002, 154,8308, 120,0068, 482)$$

Pour visualiser cette distribution de la force d'intérêt, on va simuler 1000 données qui proviennent de la distribution GNL avec les paramètres ci-haut.



De l'histogramme de la force d'intérêt, on voit bien que la distribution n'est pas symétrique. Le tableau 3.6 nous donne des statistiques descriptives sur la force d'intérêt.

Le tableau 3.6 montre que la moyenne de taux d'intérêt est négative ; pour ajuster δ de sorte que la moyenne de force d'intérêt est 0,04, nous allons ajouter une constante $a=0,109$, nous avons donc $\delta^a = a + \delta$. Dans le chapitre 1, nous avons

TABLEAU 3.6. Statistiques de la force d'intérêt

force d'intérêt	Minimum	1 ^{er} quartile	médiane	moyenne	3 ^e quartile	Maximum
δ	-1.01000	-0.22150	-0.06314	-0.05427	0.12900	0.76680
δ^a	0.75130	-0.14320	0.05304	0.04137	0.22790	0.77500

montré que si une variable aléatoire X suit une distribution GNL de paramètres $(\mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$, alors pour une constante réelle a , $a + X$ suit encore une loi GNL de paramètres $(\frac{a}{\rho} + \mu, \sigma^2, \alpha, \beta, \rho)$. D'après cette propriété de transformation linéaire, δ^a suit une distribution GNL avec les paramètres

$$\hat{\mu} = \frac{a}{\rho} + 0,001742 = \frac{0,109}{482} + 0,001742 = 0,00197$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0,00002$$

$$\hat{\alpha} = 154,8308$$

$$\hat{\beta} = 120,0068$$

$$\hat{\rho} = 482$$

$$\delta^a \sim GNL(0,00197, 0,00002, 154,8308, 120,0068, 482).$$

Nous affichons les statistiques descriptives sur la force d'intérêt ajustée dans le tableau 3.6.

3.3.2. Estimateur de la distribution $-(k + j - m - 1)\delta^a$

Dans le chapitre 2, on a déjà mentionné que la variable aléatoire $-(k + j - m - 1)\delta^a$ suit encore une distribution GNL sachant que δ^a suit une distribution GNL et la constante $-(k + j - m - 1)$ est négative. Supposons les cinq paramètres de $(\mu, \sigma_1^2, \alpha, \beta_0, \rho)$ de δ^a et la constante $-(k + j - m - 1)$ négative, alors $-(k + j - m - 1)\delta^a$ suit encore une loi GNL ; les cinq paramètres $(\mu^*, \sigma^{*2}, \alpha^*, \beta^*, \rho^*)$ deviennent

$$\mu^* = -(k + j - m - 1)\mu$$

$$\sigma^{*2} = (k + j - m - 1)^2 \sigma_1^2$$

$$\alpha^* = \beta_0 / (k + j - m - 1)$$

$$\beta^* = \alpha / (k + j - m - 1)$$

$$\rho^* = \rho$$

et dans notre exemple, nous avons

$$\delta^a \sim GNL(0,00197, 0,00002, 154,8308, 120,0068, 482)$$

Donc la variable aléatoire $-(k + j - m - 1)\delta^a$ ademet aussi une loi *GNL* avec les paramètres suivants

$$\begin{aligned}\mu^* &= -(k + j - m - 1)0,00197 \\ \sigma^{*2} &= (k + j - m - 1)^2 0,00002 \\ \alpha^* &= 120,0068 / (k + j - m - 1) \\ \beta^* &= 154,8308 / (k + j - m - 1) \\ \rho^* &= 482.\end{aligned}$$

3.4. SIMULATION DE LA VALEUR ESCOMPTÉE DE LA RÉSERVE IBNR

Dans cette section, on va simuler 1000 données de la valeur escomptée de la réserve pour la ligne d'affaires de la compagnie d'assurance vue dans la section 3.1.

Dans la section 3.1, on a trouvé les paramètres pour le modèle lognormal linéaire en appliquant le modèle sur les données observées des réclamations IBNR.

Dans la section 3.2, on a trouvé les paramètres pour une distribution *GNL* en appliquant la distribution *GNL* sur les rendements logarithmiques historiques. C'est le temps d'illustrer la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p .

Comme on a vu dans le chapitre 2, la valeur escomptée de la réservée S^p est une somme des valeurs présentes de toutes réclamations incrémentales qui se situent au coin droit inférieur du triangle de développement. On va simuler S^p en quatre étapes suivantes.

Premièrement, on va simuler 1000 réserves prédictives $\ln(Y_{kj})$ pour chaque cellule droite inférieure du triangle de développement, pour k et j fixés. Notez qu'on commence à simuler par $\ln(Y_{39})$. La simulation est basée sur la formule suivante :

$$\ln(Y_{kj}) \stackrel{D}{=} N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_{kj}^2),$$

où $\hat{\mu} = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_j$ et $\hat{\sigma}_{kj}^2 = \hat{\sigma}^2[1 + b_{(u)}(X'X)^{-1}b'_{(u)}]$.

Deuxièmement, on va simuler 1000 forces d'intérêt $-\delta^a(k + j - 9 - 2)$ pour chaque cellule selon la distance entre la cellule et l'année de référence, ici l'année de référence est 2011. La simulation est basée sur les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\mu^* &= -(k + j - 9 - 2)0,00197 \\ \sigma^{*2} &= (k + j - 9 - 2)^2 0,00002 \\ \alpha^* &= 120,0068 / (k + j - 9 - 2)\end{aligned}$$

$$\beta^* = 154,8308/(k + j - 9 - 2)$$

$$\rho^* = 482.$$

Donc, nous simulons les données selon l'expression suivante

$$-\delta^a(k + j - 9 - 2) \stackrel{D}{=} \rho^* \mu^* + \sigma^* \sqrt{\rho^*} Z + \frac{1}{\alpha^*} G_1 - \frac{1}{\beta^*} G_2.$$

Troisièmement, on fait le produit du terme Y_{kj} et $\exp(-\delta(k + j - 9 - 2))$ afin d'obtenir la valeur escomptée de la réserve de la cellule (k, j) . On obtient un vecteur de taille 1000. La valeur escomptée de la réclamation incrémentale de la cellule (k, j) peut être obtenue selon l'expression suivante

$$\exp(Z_{kj}) \exp(-\delta(k + j - 9 - 2)),$$

où Z_{kj} est une variable aléatoire normale de paramètres $\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_j$ et $\hat{\sigma}_{kj}^2$.

Finalement, on somme les vecteurs des valeurs escomptées de la réserve de toutes les cellules au coin droit inférieur du triangle de développement pour obtenir un vecteur de taille 1000 représentant S^p .

Après avoir simulé les 1000 données de la valeur escomptée de la réserve, on obtient les données suivantes :

TABLEAU 3.7. Statistiques de la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p

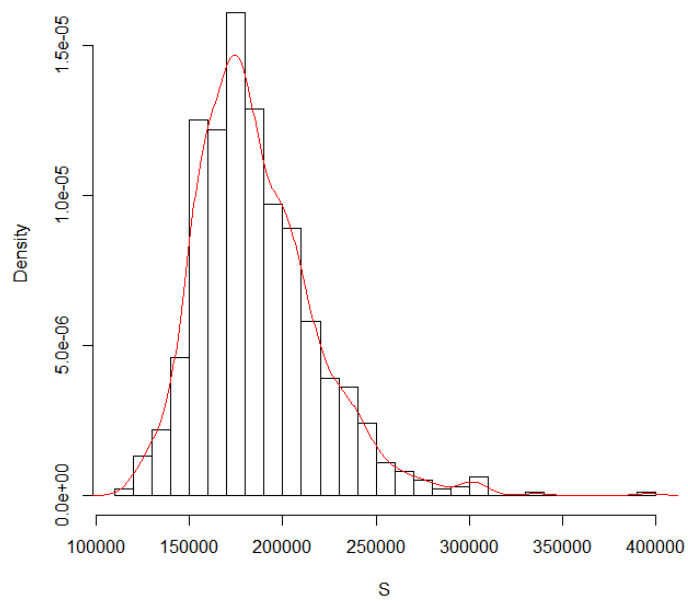
1 ^{er} quartile	médiane	moyenne	3 ^e quartile
165700	181700	185700	201000

On affiche l'histogramme de la réserve S^p . On constate que c'est une distribution non symétrique. On trace également la fonction de densité de la distribution en couleur rouge dans la même graphique. L'aire sous la courbe rouge est égale à 1.

TABLEAU 3.8. Comparaison des statistiques de la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p et la réserve prédictive S

Réserve IBNR	1 ^{er} quartile	médiane	moyenne	3 ^e quartile
S sans intérêt	181900	186500	186700	191400
S^p avec intérêt	165700	181700	185700	201000

En comparant la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p avec la réserve IBNR prédictive S , on trouve qu'il y a une grande différence entre tous les termes de description. Si on tient compte de la valeur de l'argent, la réserve IBNR S^p devient légèrement plus petite que la réserve IBNR prédictive S .

Histogramme de la valeur escomptée de la réserve

Chapitre 4

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la distribution GNL , sa fonction caractéristique, les effets de ses cinq paramètres sur la distribution. Lorsque le paramètre $\rho = 1$, la distribution devient une distribution normale Laplace qui admet une fonction de densité fermée. Nous appliquons la distribution GNL dont le paramètre $\rho = 1$ sur les rendements logarithmiques illustratifs. Nous avons fait quelques transformations de la distribution pour trouver les cinq paramètres de la loi GNL pour la force d'intérêt.

Nous avons étudié également le modèle lognormal linéaire et on applique ce modèle sur les réserves IBNR d'une ligne d'affaire d'une compagnie d'assurance. Nous estimons les facteurs des lignes et des colonnes du triangle de développement selon les données historiques. Nous estimons les réserves IBNR prédictives qui suivent des distributions lognormales.

Nous incorporons la force d'intérêt qui suit une distribution de GNL aux réserves IBNR prédictives qui ont des distributions lognormales pour avoir la valeur escomptée de la réserve IBNR. Nous avons simulé les 1000 valeurs escomptées de la réserve IBNR pour voir la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p . On constate une différence entre la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p et la somme des réserves prédictives qui ne tiennent pas compte la valeur de l'argent dans le temps. Cela montre l'importance de tenir compte du facteur de temps sur l'argent.

Pour avoir la distribution de la valeur escomptée de la réserve S^p plus adéquate, on pourrait faire d'autres hypothèses sur la force d'intérêt et sur la réserve IBNR incrémentale ; on pourrait aussi avoir différentes combinaisons sur la distribution de la valeur escomptée de la réserve IBNR S^p et comparer les distributions pour tester la plus appropriée. Ce serait intéressant d'explorer ces problèmes dans des recherches ultérieures.

Bibliographie

- [1] DORAY, L.G (1996), *UMVUE of the IBNR Reserve in a lognormal Linear Regression Model*, Insurance : Mathematics and Economics 18(1), 43-57.
- [2] MACIEJ AUGUSTYNIAK AND LOUIS G. DORAY, *Inference for a leptokurtic symmetric family of distributions represented by the difference of two gamma variates*, Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol. 82, No. 11, November 2012, 1621–1634
- [3] TOM HOEDEMAEKERS AND JAN BEIRLANT AND MARC GOOVAERTS AND JAN DHAENE., *Confidence Bounds for Discounted Loss Reserves*, Insurance : Mathematics and Economics Volume 33, Issue 2, 20 October 2003, Pages 297–316
- [4] KATRIEN ANTONIO, MARC GOOVAERTS AND TOM HOEDEMAEKERS., *On the Distribution of Discounted Loss Reserves*, Article : January 2004
- [5] GOLUB G.H. AND VAN LOAN C.F., *Matrix computations*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1989.
- [6] GROPARU I., *Quadratic distance methods applied to generalized normal Laplace distribution*, unpublished MSc. dissertation, University of Montreal, Dept. of Mathematics and Statistics, 2007.
- [7] IONICA GROPARU-COJOCARU AND LOUIS DORAY, *Inference for the Generalized Normal Laplace Distribution*, Communications in Statistics : Simulation and Computation, 42, 1989-1997, 2013.
- [8] ZHANG CHUANCHUAN., *The Double Pareto-Lognormal Distribution and its applications in actuarial science and finance*, unpublished MSc. dissertation, University of Montreal, Dept. of Mathematics and Statistics, 2015.
- [9] KNIGHT J.L. AND SATCHELL S.E., *The cumulant generating function estimation method*, Econometric Theory, **13**, 170-184, 1997.
- [10] WILLIAM J. REED, *Brownian–Laplace Motion and Its Use in Financial Modelling*, Communications in Statistics - Theory and Methods Volume 36, 2007 - Issue 3
- [11] REED, W. J., *The normal-Laplace distribution and its relatives.*, In Order Statistics and Inference, N. Balakrishna et al. (eds), Birkhäuser, 2004.
- [12] IVAN. LAVALLÉE, *LaTeX pas à pas*, Paris : Hermann c2009

- [13] KOTZ, S., KOZUBOWSKI, T. J. AND PODGÓRSKI, K.T, *he Laplace Distribution and Generalizations*, Birkhäuser, Boston, 2001
- [14] LUONG A. AND DORAY L.G., *General quadratic distance methods for discrete distributions definable recursively*, Insurance : Mathematics and Economics, **30**, 255-267, 2002.
- [15] LUONG A. AND THOMPSON M.E., *Minimum-distance methods based on quadratic distances for transforms*, The Canadian Journal of Statistics, Vol. 15, **3**, 239-251, 1987.
- [16] MEINTANIS S.G. AND TSIONAS E., *Testing for the generalized normal-Laplace distribution*, Comput. Statist. Data Anal., **54**, 3174-3180, 2010.
- [17] QUANDT R.E. AND RAMSEY J.B., *Estimating mixtures of normal distributions and switching regressions*, J. Am. Statist. Assoc., **73**, 730-738, 1978.
- [18] RYDBERG T.H., *Realistic statistical modelling of financial data*, Inter. Stat. Rev., **68**, 233-258, 2000.
- [19] YU J., *Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications*, Econometric Reviews, **23**, 93-123, 2004.

Annexe A

CODE R POUR ESTIMER LES PARAMÈTRES DE LA LOI LOGNORMALE ET LES VARIANCES PRÉDICTIVES

```
y1<-c(85295,34785,12710,9428,9329,4574,1643,1270,481)
y2<-c(95095,37441,13436,10225,9858,4653,1477,1360,421)
y3<-c(100065,37930,13947,10684,9916,4404,1561,1069)
y4<-c(107391,39639,14403,11187,10660,4524,1392)
y5<-c(115289,40682,14927,12007,11443,4717)
y6<-c(124852,41398,15255,12828,11849)
y7<-c(132763,41959,15507,13989)
y8<-c(146036,43787,15460)
y9<-c(155436,44102)
y10<-c(163740)
```

```
y<-c(y1, y2 ,y3 ,y4 ,y5 ,y6 ,y7, y8,y9,y10)
y
```

```
a11<-c(1, rep(0,17))
a12<-c(1, rep(0,9),1, rep(0,7))
a13<-c(1, rep(0,10),1, rep(0,6))
a14<-c(1, rep(0,11),1, rep(0,5))
a15<-c(1, rep(0,12),1, rep(0,4))
a16<-c(1, rep(0,13),1, rep(0,3))
a17<-c(1, rep(0,14),1, rep(0,2))
```

a18<-c(1,rep(0,15),1,rep(0,1))

a19<-c(1,rep(0,16),1)

a21<-c(0,1,rep(0,16))

a22<-c(0,1,rep(0,8),1,rep(0,7))

a23<-c(0,1,rep(0,9),1,rep(0,6))

a24<-c(0,1,rep(0,10),1,rep(0,5))

a25<-c(0,1,rep(0,11),1,rep(0,4))

a26<-c(0,1,rep(0,12),1,rep(0,3))

a27<-c(0,1,rep(0,13),1,rep(0,2))

a28<-c(0,1,rep(0,14),1,rep(0,1))

a29<-c(0,1,rep(0,15),1)

a31<-c(rep(0,2),1,rep(0,15))

a32<-c(rep(0,2),1,rep(0,7),1,rep(0,7))

a33<-c(rep(0,2),1,rep(0,8),1,rep(0,6))

a34<-c(rep(0,2),1,rep(0,9),1,rep(0,5))

a35<-c(rep(0,2),1,rep(0,10),1,rep(0,4))

a36<-c(rep(0,2),1,rep(0,11),1,rep(0,3))

a37<-c(rep(0,2),1,rep(0,12),1,rep(0,2))

a38<-c(rep(0,2),1,rep(0,13),1,rep(0,1))

a41<-c(rep(0,3),1,rep(0,14))

a42<-c(rep(0,3),1,rep(0,6),1,rep(0,7))

a43<-c(rep(0,3),1,rep(0,7),1,rep(0,6))

a44<-c(rep(0,3),1,rep(0,8),1,rep(0,5))

a45<-c(rep(0,3),1,rep(0,9),1,rep(0,4))

a46<-c(rep(0,3),1,rep(0,10),1,rep(0,3))

a47<-c(rep(0,3),1,rep(0,11),1,rep(0,2))

a51<-c(rep(0,4),1,rep(0,13))


```

a52<-c(rep(0,4),1,rep(0,5),1,rep(0,7))
a53<-c(rep(0,4),1,rep(0,6),1,rep(0,6))
a54<-c(rep(0,4),1,rep(0,7),1,rep(0,5))
a55<-c(rep(0,4),1,rep(0,8),1,rep(0,4))
a56<-c(rep(0,4),1,rep(0,9),1,rep(0,3))

```

```

a61<-c(rep(0,5),1,rep(0,12))
a62<-c(rep(0,5),1,rep(0,4),1,rep(0,7))
a63<-c(rep(0,5),1,rep(0,5),1,rep(0,6))
a64<-c(rep(0,5),1,rep(0,6),1,rep(0,5))
a65<-c(rep(0,5),1,rep(0,7),1,rep(0,4))

```

```

a71<-c(rep(0,6),1,rep(0,11))
a72<-c(rep(0,6),1,rep(0,3),1,rep(0,7))
a73<-c(rep(0,6),1,rep(0,4),1,rep(0,6))
a74<-c(rep(0,6),1,rep(0,5),1,rep(0,5))

```

```

a81<-c(rep(0,7),1,rep(0,10))
a82<-c(rep(0,7),1,rep(0,2),1,rep(0,7))
a83<-c(rep(0,7),1,rep(0,3),1,rep(0,6))

```

```

a91<-c(rep(0,8),1,rep(0,9))
a92<-c(rep(0,8),1,rep(0,1),1,rep(0,7))

```

```

a101<-c(rep(0,9),1,rep(0,8))

```

```

a<-c(a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,a19,a21,a22,a23,a24,a25,a26,a27,
a28,a29,a31,a32,a33,a34,a35,a36,a37,a38,a41,a42,a43,a44,a45,a46,a47,
a51,a52,a53,a54,a55,a56,a61,a62,a63,a64,a65,a71,a72,a73,a74,a81,a82,
a83,a91,a92,a101)
#construire la matrice x
x<-matrix(a,nrow=54,ncol=18,byrow=T)
z<-log(y)

```

```

c<-t(x)%*% x
#beta chapeau
beta_hat<-solve(t(x)%*%x)%*%t(x)%*%z
beta_hat

#sigma chapeau square
sigma_hat<-(t((z-x%*%beta_hat))%*%(z-x%*%beta_hat))/(54-18)
sigma_hat
#sqrt de b_hat
sigma_hat*diag(solve(t(x)%*%x))

#construire la matrice analogue B
b39<-c(rep(0,2),1,rep(0,14),1)

b48<-c(rep(0,3),1,rep(0,12),1,0)
b49<-c(rep(0,3),1,rep(0,13),1)

b57<-c(rep(0,4),1,rep(0,10),1,rep(0,2))
b58<-c(rep(0,4),1,rep(0,11),1,0)
b59<-c(rep(0,4),1,rep(0,12),1)

b66<-c(rep(0,5),1,rep(0,8),1,rep(0,3))
b67<-c(rep(0,5),1,rep(0,9),1,rep(0,2))
b68<-c(rep(0,5),1,rep(0,10),1,0)
b69<-c(rep(0,5),1,rep(0,11),1)

b75<-c(rep(0,6),1,rep(0,6),1,rep(0,4))
b76<-c(rep(0,6),1,rep(0,7),1,rep(0,3))
b77<-c(rep(0,6),1,rep(0,8),1,rep(0,2))
b78<-c(rep(0,6),1,rep(0,9),1,0)
b79<-c(rep(0,6),1,rep(0,10),1)

b84<-c(rep(0,7),1,rep(0,4),1,rep(0,5))
b85<-c(rep(0,7),1,rep(0,5),1,rep(0,4))
b86<-c(rep(0,7),1,rep(0,6),1,rep(0,3))

```

```

b87<-c(rep(0,7),1,rep(0,7),1,rep(0,2))
b88<-c(rep(0,7),1,rep(0,8),1,0)
b89<-c(rep(0,7),1,rep(0,9),1)

```

```

b93<-c(rep(0,8),1,rep(0,2),1,rep(0,6))
b94<-c(rep(0,8),1,rep(0,3),1,rep(0,5))
b95<-c(rep(0,8),1,rep(0,4),1,rep(0,4))
b96<-c(rep(0,8),1,rep(0,5),1,rep(0,3))
b97<-c(rep(0,8),1,rep(0,6),1,rep(0,2))
b98<-c(rep(0,8),1,rep(0,7),1,0)
b99<-c(rep(0,8),1,rep(0,8),1)

```

```

b102<-c(rep(0,9),1,1,rep(0,7))
b103<-c(rep(0,9),1,rep(0,1),1,rep(0,6))
b104<-c(rep(0,9),1,rep(0,2),1,rep(0,5))
b105<-c(rep(0,9),1,rep(0,3),1,rep(0,4))
b106<-c(rep(0,9),1,rep(0,4),1,rep(0,3))
b107<-c(rep(0,9),1,rep(0,5),1,rep(0,2))
b108<-c(rep(0,9),1,rep(0,6),1,0)
b109<-c(rep(0,9),1,rep(0,7),1)

```

```

b<-c(b39,b48,b49,b57,b58,b59,b66,b67,b68,b69,b75,b76,b77,b78,b79,b84,
b85,b86,b87,b88,b89,b93,b94,b95,b96,b97,b98,b99,b102,b103,b104,b105,
b106,b107,b108,b109)

```

```

B<-matrix(b,nrow=36,ncol=18,byrow=T)

```

```

#Les variances predictives

```

```

xx<-solve(t(x)%*%x)

```

```

sigmakjcarre<-sigmacarre*(1+diag(B%*%(xx)%*%(t(B))))

```

```

sigmakj<-sqrt(sigmacarre*(1+diag(B%*%(xx)%*%(t(B))))))

```

```

sigmakjcarre

```

```

# 0.009298432 0.008396468 0.009429627 0.008035682 0.008560461
# 0.009593620 0.007934662 0.008256089 0.008780869 0.009814028
# 0.008035682 0.008256089 0.008577517 0.009102296 0.010135455
# 0.008396468 0.008560461 0.008780869 0.009102296 0.009627075
# 0.010660234 0.009298432 0.009429627 0.009593620 0.009814028

```

0.010135455 0.010660234 0.011693393 0.012244849 0.012359644
0.012490839 0.012654833 0.012875240 0.013196667 0.013721446
0.014754606

Annexe B

CODE R POUR SIMULER LES RÉCLAMATIONS PRÉDICTIVES INCRÉMENTALES

```
#Les estimateurs de Lognormal
alpha=c(alpha1 =11.515453, alpha2=11.539903, alpha3=11.538580,
alpha4=11.584652,alpha5=11.658149, alpha6=11.714089, alpha7=11.758233,
alpha8=11.782155, alpha9= 11.855094,alpha10=12.006035)

beta=c(beta1=0, beta2=-1.061939, beta3=-2.059815, beta4=-2.275338,
beta5= -2.335436, beta6=-3.139396, beta7=-4.221241, beta8=-4.419148,
beta9= -5.418428)
sigma1=0.005510182

sigmakj<-c( 0.09642838, 0.09163224, 0.09710627, 0.08964197,
0.09252276,0.09794703, 0.08907672, 0.09086303, 0.09370629,
0.09906577, 0.08964197, 0.09086303, 0.09261488, 0.09540595,
0.10067500,0.09163224, 0.09252276, 0.09370629, 0.09540595,
0.09811766, 0.10324841, 0.09642838, 0.09710627,0.09794703,
0.09906577, 0.10067500, 0.10324841, 0.10813599, 0.11065645,
0.11117394, 0.11176242, 0.11249370, 0.11346911, 0.11487675 ,
0.11713858, 0.12146854)

#simuler pour Yij
Y39<-exp(rnorm(1000,alpha[3]+beta[9],sigmakj[1]))
```

Y48<-exp(rnorm(1000, alpha[4]+beta[8], sigma[kj[2]]))

Y49<-exp(rnorm(1000, alpha[4]+beta[9], sigma[kj[3]]))

Y57<-exp(rnorm(1000, alpha[5]+beta[7], sigma[kj[4]]))

Y58<-exp(rnorm(1000, alpha[5]+beta[8], sigma[kj[5]]))

Y59<-exp(rnorm(1000, alpha[5]+beta[9], sigma[kj[6]]))

Y66<-exp(rnorm(1000, alpha[6]+beta[6], sigma[kj[7]]))

Y67<-exp(rnorm(1000, alpha[6]+beta[7], sigma[kj[8]]))

Y68<-exp(rnorm(1000, alpha[6]+beta[8], sigma[kj[9]]))

Y69<-exp(rnorm(1000, alpha[6]+beta[9], sigma[kj[10]]))

Y75<-exp(rnorm(1000, alpha[7]+beta[5], sigma[kj[11]]))

Y76<-exp(rnorm(1000, alpha[7]+beta[6], sigma[kj[12]]))

Y77<-exp(rnorm(1000, alpha[7]+beta[7], sigma[kj[13]]))

Y78<-exp(rnorm(1000, alpha[7]+beta[8], sigma[kj[14]]))

Y79<-exp(rnorm(1000, alpha[7]+beta[9], sigma[kj[15]]))

Y84<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[4], sigma[kj[16]]))

Y85<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[5], sigma[kj[17]]))

Y86<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[6], sigma[kj[18]]))

Y87<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[7], sigma[kj[19]]))

Y88<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[8], sigma[kj[20]]))

Y89<-exp(rnorm(1000, alpha[8]+beta[9], sigma[kj[21]]))

Y93<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[3], sigma[kj[22]]))

Y94<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[4], sigma[kj[23]]))

Y95<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[5], sigma[kj[24]]))

Y96<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[6], sigma[kj[25]]))

Y97<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[7], sigma[kj[26]]))

Y98<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[8], sigma[kj[27]]))

Y99<-exp(rnorm(1000, alpha[9]+beta[9], sigma[kj[28]]))

Y102<-exp(rnorm(1000, alpha[10]+beta[2], sigma[kj[29]]))

Y103<-exp(rnorm(1000, alpha[10]+beta[3], sigma[kj[30]]))

```
Y104<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[4],sigmakj[31]))
Y105<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[5],sigmakj[32]))
Y106<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[6],sigmakj[33]))
Y107<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[7],sigmakj[34]))
Y108<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[8],sigmakj[35]))
Y109<-exp(rnorm(1000,alpha[10]+beta[9],sigmakj[36]))

Y<-Y39+Y48+Y49+Y57+Y58+Y59+Y66+Y67+Y68+Y69+Y75+Y76+Y77+Y78+
Y79+Y84+Y85+Y86+Y87+Y88+Y89+Y93+Y94+Y95+Y96+Y97+Y98+Y99+Y102
+Y103+Y104+Y105+Y106+Y107+Y108+Y109

library(pastecs)
quantile(Y, c(0.0005,.25,.5,.75,.95,.99))
summary(Y)
hist(Y,main="histogramme de la reserve IBNR predictive",
breaks=20,prob=TRUE)
lines(density(Y),col=(4))
```

Annexe C

CODE R POUR SIMULER LES VALEURS ESCOMPTÉES DE LA RÉSERVE IBNR

```
#Estimateurs des lognormals et GNL
alpha=c(alpha1 =11.515453,alpha2=11.539903,alpha3=11.538580,
alpha4=11.584652, alpha5=11.658149,alpha6=11.714089,
alpha7=11.758233, alpha8=11.782155,alpha9= 11.855094,
alpha10=12.006035)

beta=c(beta1=0,beta2= -1.061939,beta3=-2.059815,beta4=-2.275338,
beta5= -2.335436,beta6=-3.139396,beta7= -4.221241,
beta8= -4.419148,beta9= -5.418428)

sigmakj<-c( 0.09642838, 0.09163224, 0.09710627, 0.08964197,
0.09252276,0.09794703, 0.08907672, 0.09086303, 0.09370629,
0.09906577, 0.08964197, 0.09086303, 0.09261488, 0.09540595,
0.10067500,0.09163224, 0.09252276, 0.09370629, 0.09540595,
0.09811766, 0.10324841, 0.09642838, 0.09710627,0.09794703,
0.09906577, 0.10067500, 0.10324841, 0.10813599, 0.11065645,
0.11117394, 0.11176242, 0.11249370, 0.11346911, 0.11487675 ,
0.11713858, 0.12146854)

mu=0.00197
sigma1=0.00002
sigma2=sqrt(sigma1)
alpha1=154.8308
beta1=120.0068
```



```

rho=482
n=1000

#simuler les reserves escomptee predictives incrementales
#simuler pour Yp39

Y39<-exp(rnorm(n, alpha[3]+beta[9], sigmakj[1]))
delta39 < -(3+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp39<-Y39*exp(delta39)

#simuler pour Yp48
Y48<-exp(rnorm(n, alpha[4]+beta[8], sigmakj[2]))
delta48 < -(4+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp48<-Y48*exp(delta48)

#simuler pour Yp49
Y49<-exp(rnorm(n, alpha[4]+beta[9], sigmakj[3]))
delta49 < -(4+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp49<-Y49*exp(delta49)

#simuler pour Yp57
Y57<-exp(rnorm(n, alpha[5]+beta[7], sigmakj[4]))
delta57 < -(5+7-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp57<-Y57*exp(delta57)

#simuler pour Yp58
Y58<-exp(rnorm(n, alpha[5]+beta[8], sigmakj[5]))
delta58 < -(5+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp58<-Y58*exp(delta58)

```

```
#simuler pour Yp59
Y59<-exp(rnorm(n, alpha[5]+beta[9], sigmakj[6]))
delta59 <- (5+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp59<-Y59*exp(delta59)
```

```
#simuler pour Yp66
Y66<-exp(rnorm(n, alpha[6]+beta[6], sigmakj[7]))
delta66 <- (6+6-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp66<-Y66*exp(delta66)
```

```
#simuler pour Yp67
Y67<-exp(rnorm(n, alpha[6]+beta[7], sigmakj[8]))
delta67 <- (6+7-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp67<-Y67*exp(delta67)
```

```
#simuler Yp68
Y68<-exp(rnorm(n, alpha[6]+beta[8], sigmakj[9]))
delta68 <- (6+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp68<-Y68*exp(delta68)
```

```
#simuler Yp69
Y69<-exp(rnorm(n, alpha[6]+beta[9], sigmakj[10]))
delta69 <- (6+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp69<-Y69*exp(delta69)
```

```
#simuler Yp75
Y75<-exp(rnorm(n, alpha[7]+beta[5], sigmakj[11]))
delta75 <- (7+5-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp75<-Y75*exp(delta75)
```

```
#simuler Yp76
Y76<-exp(rnorm(n, alpha[7]+beta[6], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta76 <-(7+6-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp76<-Y76*exp(delta76)
```

```
#simuler Yp77
Y77<-exp(rnorm(n, alpha[7]+beta[7], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta77 <-(7+7-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp77<-Y77*exp(delta77)
```

```
#simuler Yp78
Y78<-exp(rnorm(n, alpha[7]+beta[8], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta78 <-(7+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp78<-Y78*exp(delta78)
```

```
#simuler Yp79
Y79<-exp(rnorm(n, alpha[7]+beta[9], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta79 <-(7+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp79<-Y79*exp(delta79)
```

```
#simuler Yp84
Y84<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[4], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta84 <-(8+4-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp84<-Y84*exp(delta84)
```

```
#simuler Yp85
Y85<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[5], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
delta85 <-(8+5-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
```

```
Yp85<-Y85*exp(delta85)
```

```
#simuler Y86
```

```
Y86<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[6], sigmakj[18]))
delta86 <-(8+6-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp86<-Y86*exp(delta86)
```

```
#simuler Y87
```

```
Y87<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[7], sigmakj[19]))
delta87 <-(8+7-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp87<-Y87*exp(delta87)
```

```
#simuler Yp88
```

```
Y88<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[8], sigmakj[20]))
delta88 <-(8+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp88<-Y88*exp(delta88)
```

```
#simuler Yp89
```

```
Y89<-exp(rnorm(n, alpha[8]+beta[9], sigmakj[21]))
delta89 <-(8+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp89<-Y89*exp(delta89)
```

```
#simuler Yp93
```

```
Y93<-exp(rnorm(n, alpha[9]+beta[3], sigmakj[22]))
delta93 <-(9+3-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp93<-Y93*exp(delta93)
```

```
#simuler Yp94
```

```
Y94<-exp(rnorm(n, alpha[9]+beta[4], sigmakj[23]))
delta94 <-(9+4-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
```

```

+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / sigma1)
Yp94 <- Y94 * exp(delta94)

#simuler Yp95
Y95 <- exp(rnorm(n, alpha[9] + beta[5], sigmakj[24]))
delta95 <- -(9+5-9-2) * (-rho * mu + sigma2 * sqrt(rho) * rnorm(n, 0, 1)
+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / alpha1)
Yp95 <- Y95 * exp(delta95)

#simuler Yp96
Y96 <- exp(rnorm(n, alpha[9] + beta[6], sigmakj[25]))
delta96 <- -(9+6-9-2) * (-rho * mu + sigma2 * sqrt(rho) * rnorm(n, 0, 1)
+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / alpha1)
Yp96 <- Y96 * exp(delta96)

#simuler Yp97
Y97 <- exp(rnorm(n, alpha[9] + beta[7], sigmakj[26]))
delta97 <- -(9+7-9-2) * (-rho * mu + sigma2 * sqrt(rho) * rnorm(n, 0, 1)
+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / alpha1)
Yp97 <- Y97 * exp(delta97)

#simuler Yp98
Y98 <- exp(rnorm(n, alpha[9] + beta[8], sigmakj[27]))
delta98 <- -(9+8-9-2) * (-rho * mu + sigma2 * sqrt(rho) * rnorm(n, 0, 1)
+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / alpha1)
Yp98 <- Y98 * exp(delta98)

#simuler Yp99
Y99 <- exp(rnorm(n, alpha[9] + beta[9], sigmakj[28]))
delta99 <- -(9+9-9-2) * (-rho * mu + sigma2 * sqrt(rho) * rnorm(n, 0, 1)
+rgamma(n, rho, 1) / beta1 - rgamma(n, rho, 1) / alpha1)
Yp99 <- Y99 * exp(delta99)

#simuler Yp102

```

```

Y102<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[2], sigma[kj[29]]))
delta102 <-(10+2-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp102<-Y102*exp(delta102)

```

```
#simuler Yp103
```

```

Y103<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[3], sigma[kj[30]]))
delta103 <-(10+3-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp103<-Y103*exp(delta103)

```

```
#simuler Yp104
```

```

Y104<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[4], sigma[kj[31]]))
delta104 <-(10+4-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp104<-Y104*exp(delta104)

```

```
#simuler Yp105
```

```

Y105<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[5], sigma[kj[32]]))
delta105 <-(10+5-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp105<-Y105*exp(delta105)

```

```
#simuler Yp106
```

```

Y106<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[6], sigma[kj[33]]))
delta106 <-(10+6-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp106<-Y106*exp(delta106)

```

```
#simuler Yp107
```

```

Y107<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[7], sigma[kj[34]]))
delta107 <-(10+7-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho)*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n, rho, 1)/beta1-rgamma(n, rho, 1)/alpha1)
Yp107<-Y107*exp(delta107)

```

```
#simuler Yp108
```

```
Y108<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[8], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1))
delta108<-(10+8-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n,rho,1)/beta1-rgamma(n,rho,1)/alpha1)
Yp108<-Y108*exp(delta108)
```

```
#simuler Yp109
```

```
Y109<-exp(rnorm(n, alpha[10]+beta[9], sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1))
delta109<-(10+9-9-2)*(-rho*mu+sigma2*sqrt(rho))*rnorm(n,0,1)
+rgamma(n,rho,1)/beta1-rgamma(n,rho,1)/alpha1)
Yp109<-Y109*exp(delta109)
```

```
Y<-Y39+Y48+Y49+Y57+Y58+Y59+Y66+Y67+Y68+Y69+Y75+Y76+Y77+Y78+
Y79+Y84+Y85+Y86+Y87+Y88+Y89+Y93+Y94+Y95+Y96+Y97+Y98+Y99+Y102
+Y103+Y104+Y105+Y106+Y107+Y108+Y109
```

```
S<-Yp39+Yp48+Yp49+Yp57+Yp58+Yp59+Yp66+Yp67+Yp68+Yp69+Yp75+Yp76+Yp77+
Yp78+Yp79+Yp84+Yp85+Yp86+Yp87+Yp88+Yp89+Yp93+Yp94+Yp95+Yp96+Yp97+Yp98
+Yp99+Yp102+Yp103+Yp104+Yp105+Yp106+Yp107+Yp108+Yp109
```

```
# Statistical summary#
```

```
library(pastecs)
stat.desc(S)
quantile(S, c(0.0005, .25, .5, .75, .95, .99))
#as.S<-vector
hist(S, main="Histogramme de la reserve S", breaks=30, prob=TRUE)
summary(S)
lines(density(S), col=(2))
```

Annexe D

CODE R POUR LA DISTRIBUTION GNL DE LA FORCE D'INTÉRÊT

```
mu<- 0.001742
sigma<-0.00447
alpha<-154.8308
beta<-120.0068
rho<-482
x<-mu*rho+sigma*sqrt(rho)*rnorm(1000,0,1)+rgamma(1000,rho,1)/alpha-rga
summary(x)
summary(exp(x))
hist(x, breaks = 20,
freq = NULL,
density = NULL,
xlim =c(-0.8 ,0.7),
ylim = NULL,
main="Histogramme de la force d'interet")

#summary(x)
#  Min.  1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.  Max.
#-1.01000 -0.22150 -0.06314 -0.05427  0.12900  0.76680
#summary(exp(x))
#  Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.  Max.
#0.3643  0.8013  0.9388  0.9774  1.1380  2.1530
```