Université de Montréal

Solutions à courbure constante de modèles sigma supersymétriques

par

Marie Lafrance

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
orientation mathématiques appliquées

7 décembre 2017

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Solutions à courbure constante de modèles sigma supersymétriques

présenté par

Marie Lafrance

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Alfred Michel Grundland
(président-rapporteur)

Véronique Hussin
(directeur de recherche)

Yvan Saint-Aubin
(membre du jury)

Mémoire accepté le
7 décembre 2017

SOMMAIRE

Ce mémoire porte sur les solutions holomorphes à courbure constante des modèles sigma $G(M,N)$ supersymétriques. Une présentation générale du modèle dans sa version bosonique est d'abord faite. Par la suite, après une introduction au concept de supersymétrie $\mathcal{N}$, le modèle est étendu en incluant des variables de Grassmann. L'invariance de jauge de cette version supersymétrique est développée en détails.

Un critère pour obtenir des solutions supersymétriques à courbure constante à partir des solutions bosoniques est établi. À partir de ce critère, l'existence d'une solution supersymétrique à courbure constante est obtenue pour les modèles $G(M,N)$. Elle est basée sur le résultat obtenu récemment dans la littérature [**15**] pour le modèle $\mathbb{C}P^{N-1}= G(1,N)$. Nous revenons sur les développement ayant mené à ce dernier résultat en expliquant comment l'invariance de jauge est utilisée pour démontrer l'unicité de la solution.

Notre contribution majeure à ce travail consiste à déterminer les solutions holomorphes à courbure constante du modèle $G(2,4)$ à partir des solutions bosoniques correspondantes, en utilisant notamment l'invariance de jauge.

Mots clés : Modèles sigma, invariance de jauge, supersymétrie, courbure gaussienne, fonctions holomorphes.

SUMMARY

This master's thesis is about constant curvature holomorphic solutions of the supersymmetric $G(M,N)$ sigma models. We begin with a general presentation of the $G(M,N)$ bosonic model. Then, after an introduction to supersymmetry, we construct a $\mathcal{N}=2$ supersymmetric extension of the model. We develop the gauge invariance of the SUSY model in details.

Afterwards, we find a condition to obtain constant curvature solutions. We use this condition to obtain the existence of a supersymmetric constant curvature solution for all $G(M,N)$ models. It is based on a result recently obtained in the litterature [**15**] for the $\mathbb{C}P^{N-1}$= $G(1,N)$ model. We go back on the developments that lead to this last result and explain how to use the gauge invariance to show the uniqueness of the solution.

Our main contribution to this work was to determine holomorphic constant curvature solutions of the SUSY $G(2,4)$ model from the corresponding bosonic solutions, using the gauge invariance.

Keywords : sigma models, gauge invariance, supersymmetry, Gaussian curvature, holomorphic functions.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de recherche Véronique Hussin pour son aide exceptionnelle à la réalisation de ce projet. Merci pour ta collaboration tout au long de ma maîtrise et, surtout, merci pour ton enthousiasme, ta patience et tes encouragements. Merci aussi pour le soutien financier qui m'a permis de me concentrer sur mes recherches.

J'aimerais remercier İsmet Yurdusen pour sa collaboration aux calculs, ainsi que Laurent Delisle dont la thèse de doctorat a initié les recherches présentées dans ce mémoire.

Merci à tous ceux, collègues, amis et professeurs, qui m'ont encouragée durant mes années d'études. Merci à mes parents pour leur appui inconditionnel et merci à mon amoureux d'avoir été là pour moi.

INTRODUCTION

Les modèles sigma trouvent leur pertinence notamment en physique car ils partagent plusieurs propriétés importantes avec les théories de Yang-Mills [**1**] qui décrivent le modèle standard de la physique des particules. Ils sont toutefois plus simple à résoudre. Parmi leurs propriétés, on retrouve l'existence de solutions de la forme des solitons topologiques appelées instantons [**2, 3**]. Ces solutions seront des fonctions holomorphes. Il existe d'autres types de solutions, appelées non-holomorphes et anti-holomorphes, mais nous nous intéresserons dans ce texte principalement aux solutions dites holomorphes. Au-delà de leur intérêt physique, elles sont simples à étudier et permettent dans certains cas de déduire par la suite les solutions non-holomorphes et anti-holomorphes.

La formule d'immersion de Weierstrass [**4**] permet de construire des surfaces à partir des solutions des modèles sigma. De telles surfaces ont des propriétés géométriques intéressantes qui ont été largement explorées par le passé (par exemple [**5, 6, 7**]). Plusieurs auteurs se sont penchés sur les solutions des modèles sigma qui sont associés par la formule d'immersion de Weierstrass à une surface de courbure gaussienne constante [**8, 9, 10, 11**]. Nous survolerons leurs résultats dans le premier chapitre.

Les modèles sigma sont à la base définis uniquement pour les bosons. Une supersymétrisation du modèle, c'est-à-dire l'ajout de fermions, a par la suite été faite [**12**]. Mathématiquement, ceci est modélisé par l'ajout de variables de Grassmann [**13**] qui sont définies par la propriété d'anticommutation. Une brève description de ces concepts ainsi que la reformulation du modèle en version supersymétrique sera faite au chapitre 2. À partir de cette nouvelle formulation, il est intéressant de généraliser la recherche de surfaces à courbure constante associées aux solutions. Ce sera le sujet principal de ce mémoire. Nous chercherons les conditions nécessaires sur les solutions supersymétriques de ces modèles pour obtenir des surfaces de courbure constante. Étant donné Z, une solution holomorphe du modèle sigma appelé $G(M,N)$ d'après la variété grassmannienne $G(M,N)$ qui est l'espace d'arrivée de la fonction Z, alors, par la condition d'holomorphie étendue au cas supersymétrique, la solution supersymétrique W associée à Z sera définie par

$$W(x_+, \theta_+) = Z(x_+) + i\theta_+ \eta(x_+) A(x_+), \tag{0.0.1}$$

où θ_+ est une variable de Grassmann, η est une fonction quelconque ayant les propriétés des nombres de Grassmann et A est une matrice à déterminer. Notre but est de trouver les conditions sur la matrice A pour que W ait une courbure constante. Certains résultats sont connus sur ce sujet, principalement pour la version la plus simple du modèle, appelée $\mathbb{C}P^{N-1}$. Ceux-ci sont décrits dans la section 2.5.

Les théories de jauge sont des théories de champs invariantes sous certains groupes dépendant du modèle [**14**]. Les modèles sigma sont invariants de jauge selon le groupe $U(N)$ [**3**]. Ceci permet de simplifier la résolution, car il est possible de former des classes d'équivalence de solutions. Très peu développée dans la littérature, l'invariance de jauge des modèles sigma supersymétriques est plus riche que celle de leur version bosonique. Nous en avons donc fait une présentation détaillée et complètement nouvelle. En effet, nous avons remarqué que la définition de l'unitarité appliquée à des matrices qui contiennent des nombres de Grassmann apporte de nouvelles contraintes sur les solutions. Nous démontrerons que la partie fermionique des solutions, qui peut être décomposée en sous-matrices

$$A(x_+) = \begin{bmatrix} \alpha(x_+) \\ \beta(x_+) \end{bmatrix}, \tag{0.0.2}$$

où A est de format $N \times M$ et α est de format $M \times M$, peut être telle que $\alpha = 0$ par invariance de jauge. Ce choix permettra de simplifier nos calculs par la suite. La preuve est donnée dans la section 2.4.

Une solution importante à courbure constante du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$est présentée dans la littérature [**15**]. Elle sera appelée SUSY-invariante et est donnée par :

$$W(x_+) = u(x_+) + i\theta_+ \eta(x_+) \partial_+ u(x_+), \tag{0.0.3}$$

où u est la suite de Veronese définie dans $\mathbb{C}^N$ par

$$u(x_+) = \left[\ 1,\ \ \sqrt{\binom{N-1}{1}} x_+,\ \ \dots\ \ ,\sqrt{\binom{N-1}{r}} x_+^r,\ \ \dots\ \ , x_+^{N-1}\ \right]^T. \tag{0.0.4}$$

Nous avons d'abord généralisé cette solution au modèle $G(M, N)$, pour M et N quelconques. La démonstration est faite à la section 2.8.

Nous nous sommes intéressées ensuite à l'unicité de cette solution. Nous avons choisi de traiter les deux exemples les plus simples, $\mathbb{C}P^{N-1}$et $G(2,4)$.

En ce qui concerne le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$SUSY, l'unicité de la solution (0.0.3) a été démontrée en supposant notamment que la sous-matrice α, qui est de format 1×1, soit égale à zéro. D'autres hypothèses étaient aussi imposées à la matrice $A(x_+)$. Elle devrait être une combinaison linéaire des dérivées successives de la suite de Veronese $u(x_+)$ =(0.0.4). Nous avons repris la construction de la solution $W(x_+)$ sans faire de telles hypothèses sur $A(x_+)$. Cela nous a permis de montrer que les conditions pour obtenir une courbure constante combinées à l'invariance de jauge nous donne bien la solution unique trouvée. Le chapitre 3 décrit en détails notre approche.

Dans le chapitre 4, nous nous inspirons de notre approche précédente afin de construire les solutions holomorphes du modèle $G(2,4)$ supersymétriques. Les solutions purement bosoniques à courbure constante sont connues [**11**]. Nous avons, dans un premier temps, donné les conditions à satisfaire afin d'obtenir des solutions supersymétriques à courbure constante pour la solution la plus simple de $G(2,4)$ nommée Z_1. Nous avons ensuite utilisé l'invariance de jauge SUSY qui est développée à la section 2.4 afin de ramener cette solution a une forme plus simple. Dans un second temps, nous avons, grâce à l'invariance de jauge du système, déterminé les solutions SUSY associées aux autres solutions purement bosoniques de $G(2,4)$. Nous obtenons que la solution supersymétrique (0.0.3) n'est pas unique pour Z_1 et Z_2 mais l'est pour les autres.

Chapitre 1

MODÈLE SIGMA PUREMENT BOSONIQUE $G(M, N)$

Dans un premier temps, ce chapitre présente le modèle $G(M, N)$ purement bosonique de façon générale. Nous insistons notamment sur la propriété d'invariance de jauge de ce modèle. Par la suite, quelques solutions du modèle représentées par des surfaces à courbure constante connues dans la littérature sont présentées [**9, 11, 22**].

1.1. Le modèle

Les premiers modèles sigma ont été introduits initialement par Gellmann et Lévy [**16**] dans le but de décrire le rôle des pions dans les désintégrations β. Ils décrivent des champs scalaires sans masse ayant pour espace de départ $\mathbb{R}^2$ et pour espace d'arrivée une variété qui dépend du modèle considéré [**14**]. Ce texte portera sur le cas particulier où la variété d'arrivée est définie par la variété suivante [**3**] :

$$G(M, N) = \frac{U(N)}{U(M) \times U(N - M)}, \quad M < N. \tag{1.1.1}$$

Cette variété représente les hyperplans de dimension M dans l'espace $\mathbb{C}^N$. Pour construire le modèle, on considère $\{\phi_i\}$, une base orthonormée de $\mathbb{C}^N$. Elle peut être vue comme une matrice $\mathcal{U} \in U(N)$. Le modèle $G(M, N)$ est défini en sélectionnant, un sous-ensemble des ϕ_i, disons ϕ_1 jusqu'à ϕ_M. On définit alors un élément de $G(M, N)$ comme

$$\phi = \left[\begin{array}{ccc} \phi_1, & \dots & , \phi_M \end{array} \right]. \tag{1.1.2}$$

Notons que ϕ est alors dans $\mathbb{C}^{N \times M}$. Il est également dans la variété définie en (1.1.1) car l'action d'un élément de $U(M)$ change chacun des ϕ_i, $1 \leq i \leq M$ en une combinaison linéaire de ceux-ci, mais les ϕ_i transformés engendrent le même espace. De plus, l'action d'un élément de $U(N - M)$ laisse ϕ invariant. On a donc bien que $\phi \in G(M,N)$. Nous allons utiliser l'immersion dans $\mathbb{C}^{N\times M}$ dans l'ensemble du texte. Notons pour terminer que ϕ doit être normalisée, c'est-à-dire que

$$\phi^\dagger \phi = \mathbb{I}_M. \tag{1.1.3}$$

Dans le cas particulier où $M = 1$, $G(M,N)$ est alors isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{N-1}$[**3**]. Ce cas sera abordé à plusieurs reprises dans ce texte et sera notamment le sujet du chapitre 3.

Le champ est une fonction de deux variables réelles x et y. Nous serons intéressés par la suite à des fonctions holomorphes. Dans ce but, il sera plus simple d'utiliser des variables complexes au lieu des variables réelles. Nous définirons donc

$$\begin{aligned} x_+ &= x + iy, \\ x_- &= x - iy, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

qui seront utilisés dans l'ensemble du texte. Notons que x_+ et x_- sont conjuguées l'une de l'autre.

Une dernière condition sera ajoutée sur l'espace de départ pour s'assurer que le modèle mathématique respecte la physique du problème. Il faut pour cela que l'action, qui sera définie plus en détails plus tard, soit finie. Cela revient à imposer que l'espace de départ soit compact [**9**]. Pour cela, un point à l'infini est ajouté à l'espace $\mathbb{R}^2$ pour obtenir $\mathbb{R}^2 \cup \infty$, qui est homéomorphe à la sphère S^2 par la projection stéréographique. Le champ ϕ sera donc finalement défini comme

$$\phi : S^2 \to G(M,N). \tag{1.1.5}$$

1.2. Équations d'Euler-Lagrange

La champ Φ, tel que défini dans la dernière section, est décrit par la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[(D_+\phi)^\dagger (D_+\phi) + (D_-\phi)^\dagger (D_-\phi)\right], \tag{1.2.1}$$

où les dérivées covariantes sont définies [**9, 17**] par

$$D_\pm \Lambda = \partial_\pm \Lambda - \Lambda\left(\phi^\dagger \partial_\pm \phi\right). \tag{1.2.2}$$

avec $\partial_\pm := \partial_{x_\pm}$. Notons que les dérivées $\partial_\pm$ sont conjuguées complexes l'une de l'autre. Pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange qui décrivent le système, il faut trouver, à partir du calcul des variations (e.g.[**18, 19**]), les points stationnaires de la fonctionnelle d'action définie par

$$S = \int \mathcal{L}\, dx_+ dx_-. \tag{1.2.3}$$

On obtient alors les équations d'Euler-Lagrange [**9**]

$$D_+D_-\phi + \phi\,(D_-\phi)^\dagger\, D_-\phi = 0, \tag{1.2.4}$$

où l'on ajoute la condition de normalisation pour que $\phi(x_+, x_-)$ soit restreint à $G(M, N)$.

1.3. Invariance de jauge

Une transformation de jauge est une transformation qui laisse les équations d'Euler-Lagrange d'un système inchangées [**14**]. Les modèles sigma sont invariants [**3**] sous

$$\phi \to \phi'(x_+, x_-) = V\phi(x_+, x_-)U(x_+, x_-), \tag{1.3.1}$$

où V est une matrice unitaire et constante de format $N \times N$ et U est une matrice unitaire de format $M \times M$ dont les éléments peuvent dépendre des coordonnées x_+ et x_-. Ceci est assuré par la présence des dérivées covariantes $D_\pm$ définies en (1.2.2) qui ont la propriété suivante :

$$\begin{aligned} D_\pm(V\phi U) &= \partial_\pm(V\phi U) - V\phi U\,(V\phi U)^\dagger\,\partial_\pm\,(V\phi U) \\ &= V\left(\partial_\pm\phi - \phi\phi^\dagger\partial_\pm\phi\right)U \\ &= V\,(D_\pm\phi)\,U. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

La densité lagrangienne donnée par (1.2.1) appliquée à $V\phi U$ devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\,(V\phi U) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[(VD_+\phi\,U)^\dagger\,(VD_+\phi\,U) + (VD_-\phi\,U)^\dagger\,(VD_-\phi\,U)\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[U^\dagger\,(D_+\phi)^\dagger\,(D_+\phi)\,U + U^\dagger\,(D_-\phi)^\dagger\,(D_-\phi)\,U\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[(D_+\phi)^\dagger\,(D_+\phi) + (D_-\phi)^\dagger\,(D_-\phi)\right] \\ &= \mathcal{L}\,(\phi)\,. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

La transformation définie en (1.3.1) ne change pas la densité larangienne et par conséquent ne changera pas les équations d'Euler-Lagrange.

1.3.1. Solutions holomorphes et paramétrisation de MacFarlane

La paramétrisation de MacFarlane [**17**] consiste à réécrire les matrices $\phi(x_\pm) \in G(M, N)$ dans une forme qui permettra de simplifier les calculs par la suite. Il s'agit d'un choix standard dans la littérature (e.g. [**9**]) qui sera utilisé dans l'ensemble du texte.

Soit $\phi \in G(M, N)$, une solution des équations d'Euler-Lagrange (1.2.4) qui respecte la condition de normalisation (1.1.3).

Alors, il existe P, une matrice de format $M \times M$, et Q, une matrice de format $(N-M) \times M$ telle que

$$\phi = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}. \tag{1.3.4}$$

On peut alors, dans le but de simplifier la solution, factoriser les matrices P et Q par la factorisation dite QR [**20**] à l'aide d'une matrice unitaire $U_0 \in U(M)$. On obtient alors

$$\phi = \begin{bmatrix} LU_0 \\ MU_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} U_0. \tag{1.3.5}$$

Or, par un choix de jauge (1.3.1), le champ $\phi =$(1.3.5) est équivalent à

$$\phi = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}. \tag{1.3.6}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\phi = ZL, \tag{1.3.7}$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_M \\ K \end{bmatrix}, \tag{1.3.8}$$

où la matrice K est définie comme $M = KL$. Le choix d'un tel Z est appelé la paramétrisation de MacFarlane [**17**]. Dans le précédent développement, nous avons supposé que L est inversible. Cette inversibilité implique que le choix de Z est unique [**20**]. Nous allons dans ce texte considérer uniquement les solutions telles qu'il est possible de trouver une matrice L inversible telle que $\phi = ZL$.

Notons pour terminer que $Z =$(1.3.8) ne respecte pas la condition de normalisation (1.1.3). Sa norme est, en effet, donnée par

$$Z^\dagger Z = \mathbb{I} + K^\dagger K. \tag{1.3.9}$$

Ceci implique que la condition (1.1.3) est équivalente à :

$$\mathbb{I} + K^\dagger K = \left(LL^\dagger\right)^{-1}. \tag{1.3.10}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} &\phi^\dagger \phi = \mathbb{I} \\ &\Leftrightarrow (ZL)^\dagger (ZL) = \mathbb{I} \\ &\Leftrightarrow L^\dagger Z^\dagger Z L = \mathbb{I} \\ &\Leftrightarrow Z^\dagger Z = \left(LL^\dagger\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Les solutions présentées dans ce texte seront écrites dans la paramétrisation de MacFarlane (1.3.8) sauf indication contraire.

Une solution $\phi = ZL$ sera dite holomorphe si Z ne dépend que de x_+, c'est-à-dire $\partial_- Z = 0$. Ceci implique que $\phi = ZL$ satisfait la condition

$$D_-\phi = 0. \tag{1.3.12}$$

En effet, si $\partial_- Z = 0$, alors

$$\begin{aligned} D_-\phi &= D_-(ZL) = \partial_-(ZL) - ZL(ZL)^\dagger \partial_-(ZL) \\ &= (\partial_- Z)L + Z(\partial_- L) - ZLL^\dagger Z^\dagger (\partial_- Z)L - ZLL^\dagger Z^\dagger Z(\partial_- L) \\ &= Z(\partial_- L) - ZLL^\dagger Z^\dagger Z(\partial_- L). \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Par (1.3.11), la norme de Z peut être écrite en termes des matrices L et $L^\dagger$

$$Z^\dagger Z = \left(LL^\dagger\right)^{-1}. \tag{1.3.14}$$

Nous voyons donc que (1.3.13) donne bien la condition $D_-\phi = 0$ et les équations d'Euler-Lagrange (1.2.4) sont trivialement satisfaites. Dans le texte qui suit, il est donc clair que Z holomorphe au sens $\partial_- Z = 0$ conduit à la solution ϕ du modèle qui sera aussi dite holomorphe, au sens $D_-\phi = 0$.

1.4. Propriétés géométriques des solutions

Une propriété intéressante des modèles sigma est que leurs solutions permetttent de construire des surfaces (e.g.[**6, 21**]) à partir de la formule d'immersion de Weiertrass [**4**]. Nous sommes intéressés à déterminer la métrique ainsi que la courbure de ces surfaces. Nous nous concentrerons sur le cas holomorphe.

Si ϕ est une solution holomorphe, alors $D_-\phi = 0$, ce qui permet d'écrire la densité lagrangienne comme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[(D_+Z)(D_+Z)\right]. \tag{1.4.1}$$

Or, en écrivant $\phi = ZL$ dans la paramétrisation de MacFarlane, on peut montrer [**9**] que cette expression peut être réécrite comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_+\partial_- \ln\left[\det\left(Z^\dagger Z\right)\right]. \tag{1.4.2}$$

Cette densité lagrangienne peut être associée à une métrique de la façon suivante [**9, 15**] :

$$g = \begin{bmatrix} g_{++} & g_{+-} \\ g_{-+} & g_{--} \end{bmatrix} \tag{1.4.3}$$

avec

$$g_{++} = g_{--} = 0 \quad g_{+-} = g_{-+}^\dagger = 2\mathcal{L}\ . \tag{1.4.4}$$

À partir de cette métrique, il est possible de calculer la courbure gaussienne de la surface associée à la solution ϕ. On obtient alors [**9**]

$$k = -\frac{1}{g}\partial_+\partial_- \ln g, \tag{1.4.5}$$

avec $g = g_{+-}$ donné par

$$g = \partial_+\partial_- \ln\left[\det\left(Z^\dagger Z\right)\right]. \tag{1.4.6}$$

La notion de courbure dans le reste du texte fera référence à la courbure gaussienne telle que définie en (1.4.5).

1.5. Solutions à courbure constante

Le but de cette section est de présenter les solutions de notre modèle qui sont associées à des surfaces de courbure constante. Ce problème est résolu complètement pour le modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$, mais reste, en général, un problème ouvert pour $G(M,N)$ avec $M > 1$. Cette section a pour but de survoler les résultats partiels connus sur ce sujet [**9, 11, 22**].

1.5.1. $\mathbb{C}P^{N-1}$ et courbe de Veronese

Soit u, une fonction holomorphe à valeurs dans le plan projectif $\mathbb{C}P^{N-1}$. Il a été démontré [**8**] que la seule fonction u holomorphe associée à une surface de courbure constante est, à transformation de jauge près, la courbe de Veronese définie par

$$u(x_+) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\binom{N-1}{1}}x_+ & \ldots & \sqrt{\binom{N-1}{r}}x_+^r & \ldots & x_+^{N-1} \end{bmatrix}^T. \tag{1.5.1}$$

Étant donné que

$$u^\dagger u = (1+|x|^2)^{N-1}, \tag{1.5.2}$$

la courbure est aisément calculée à partir de (1.4.6) et (1.4.5). Notons que nous écrirons $|x|^2 = x_+x_-$ tout au long du texte pour simplifier les écritures. La courbure prend la forme de :

$$k_0 = \frac{2}{N-1}. \tag{1.5.3}$$

De plus, il a également été démontré que toutes les solutions non-holomorphes et anti-holomorphes à courbure consante peuvent être construites à partir de la solution $u =$(1.5.1) par la méthode de Gram-Schmidt. En effet, si nous introduisons les vecteurs $P_+^i u$ tels que [**3**]

$$P_+^0 u = u, \quad P_+ u = \partial_+ u - \frac{u^\dagger \partial_+ u}{|u|^2}u, \quad P_+^i = P_+\left(P_+^{i-1}\right), 1 \le i \le N-2, \tag{1.5.4}$$

ceux-ci sont des solutions non-holomorphes à courbure constante. Donc, l'ensemble des solutions des équations d'Euler-Lagrange (1.2.4) avec $M = 1$ associées à des surfaces à courbure constante peut être construit à partir de la courbe Veronese (1.5.1) et l'opérateur d'orthogonalisation P_+ donné en (1.5.4). Elles s'écrivent

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{P_+^i u^\dagger P_+^i u}} P_+^i u. \tag{1.5.5}$$

1.5.2. Solutions du modèle $G(2,4)$

Le modèle $G(2,4)$ est le modèle le plus simple à considérer après $\mathbb{C}P^{N-1}$. En effet, il est aisé de montrer que $G(2,3) \simeq \mathbb{C}P^2$ [**9**].

Théorème 1.5.1. *Toute solution holomorphe à courbure constante du modèle $G(2,4)$ est équivalente, à transformation $U(4)$ près, à l'une ou l'autre des solutions suivantes* [**11**] *:*

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+^2 \cos 2t & \sqrt{2}x_+ \cos t \\ \sqrt{2}x_+ \sin t & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3}x_+^2 & \sqrt{8/3}x_+ \\ 0 & \sqrt{1/3}x_+ \end{bmatrix}, \quad Z_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_+^3 & \sqrt{3}x_+^2 \\ \sqrt{3}x_+^2 & 2x_+ \end{bmatrix}. \tag{1.5.6}$$

Les solutions sont représentées dans la paramétrisation de MacFarlane (1.3.8). Rappelons que sous cette forme, le déterminant de $Z^\dagger Z$ est donné par

$$\det Z^\dagger Z = (1 + |x|^2)^r, \tag{1.5.7}$$

où r est un entier positif et $|x|^2$ défini comme le produit $x_+ x_-$. Nous voyons donc qu'ici, les indices des solutions Z_i sont données par leurs valeurs respectives de r. Or, la courbure est donnée par

$$k = \frac{2}{r}. \tag{1.5.8}$$

Les courbures respectives de Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sont donc 2, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Théorème 1.5.2. *Toute solution non-holomorphe à courbure constante du modèle $G(2,4)$ est équivalente, à transformation $U(4)$ près, à l'une ou l'autre des* *solutions suivantes* [**11**] *:*

$$
\begin{aligned}
Z_A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_+ & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_- \end{bmatrix}, \quad Z_B = \begin{bmatrix} 1 & x_-^2 \\ \sqrt{2}x_+ & -\sqrt{2}x_- \\ x_+^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
Z_C &= \begin{bmatrix} 1 & x_-^3 \\ \sqrt{3}x_+ & -\sqrt{3}x_-^2 \\ \sqrt{3}x_+^2 & \sqrt{3}x_- \\ x_+^3 & -1 \end{bmatrix}, \; Z_D = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}x_-^2 \\ \sqrt{3}x_+ & x_-\left(|x|^2-2\right) \\ \sqrt{3}x_+^2 & 1-2|x|^2 \\ x_+^3 & \sqrt{3}x_+ \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.5.9}
$$

Le modèle $G(2,5)$ est également résolu complètement [**22**] mais ne sera pas utilisé dans ce texte.

Chapitre 2

MODÈLES SIGMA $G(M,N)$ SUPERSYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre, après avoir présenté de façon générale une supersymétrisation $\mathcal{N}=2$ du modèle décrit jusqu'à maintenant, nous développons l'invariance de jauge des modèles sigma supersymétriques. Même si l'invariance de jauge de ce dernier modèle est connue et généralise celle du cas bosonique, nous l'analysons en détails et montrons qu'elle est plus riche que dans la version bosonique. Cette analyse n'a pas été considérée dans la littérature jusqu'à présent. Celle-ci fait l'objet d'une contribution originale soumise récemment pour publication [**23**]. Par la suite, nous présentons quelques solutions à courbure constante connues. Finalement, nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une solution du modèle supersymétrique ait une courbure constante et nous utilisons ces conditions pour généraliser une solution présentée dans la littérature [**15**].

2.1. Introduction aux variables de Grassmann

Le but de ce mémoire est d'étendre la recherche de solutions à courbure constante aux modèles sigma supersymétriques, c'est-à-dire auxquels ont été ajouté ce qu'on appelle des variables de Grassmann. Celles-ci sont définies à partir de la propriété suivante : soient θ_i et θ_j, deux variables de Grassmann, alors [**13**]

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i. \tag{2.1.1}$$

De cette dernière propriété découle la suivante :

$$\theta_i^2 = 0, \tag{2.1.2}$$

car, par (2.1.1), $\theta_i^2 = -\theta_i^2$ et les variables de Grassmann sont des scalaires. Ce projet étudie une supersymétrisation de type $\mathcal{N}=2$, ce qui veut dire que nous allons ajouter deux variables de Grassmann θ_1 et θ_2 aux variables complexes x_+ et x_- du modèle. De façon équivalente au cas étudié dans les précédentes sections, qui sera appelé *purement bosonique* ou *non-supersymétrique* dans le reste du texte, les variables θ_1 et θ_2 seront complexifiées :

$$\begin{aligned}\theta_+ &= \theta_1 + i\theta_2 \\ \theta_- &= \theta_1 - i\theta_2.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Notons que θ_+ et θ_- sont des conjugués complexes. L'espace de départ de notre modèle sera donc formé par les coordonnées $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$ et appelé le superespace. Un superchamp dit bosonique sera défini comme

$$\Phi(x_\pm, \theta_\pm) = \phi(x_+, x_-) + i\theta_+\chi(x_+, x_-) + i\theta_-\chi^*(x_+, x_-) - \theta_+\theta_- F(x_+, x_-), \tag{2.1.4}$$

où ϕ et F sont des champs bosoniques (qui commutent) et χ et $\chi^\dagger$ sont des champs dit fermioniques, c'est-à-dire qui respectent la propriété d'anticommutation (2.1.1) des nombres de Grassmann. Le superchamp (2.1.4) est défini de façon à ce que à la limite

$$(\theta_+, \theta_-) \to (0, 0)\,, \tag{2.1.5}$$

il redonne le champ purement bosonique ϕ. De plus, la définition du superchamp $\Phi(x_\pm, \theta_\pm)$ repose sur le fait que toute puissance supérieure ou égale à deux des variables de Grassmann s'annule. Il reste à appliquer le développement de Taylor d'une fonction à deux variables $(\theta_+,\ \theta_-)$ pour obtenir (2.1.4).

2.2. Supersymétrisation du modèle $G(M, N)$

On peut à présent proposer une supersymétrisation des modèles sigma. Ceci est équivalent à considérer un superchamp Φ ayant pour espace de départ $\tilde{S}^2$, la sphère à laquelle on ajoute l'espace formé par (θ_+, θ_-), et pour espace d'arrivée la variété $G(M, N)$.

$$\Phi : \tilde{S}^2 \mapsto G(M, N). \tag{2.2.1}$$

Afin de pouvoir écrire les équations d'Euler-Lagrange décrivant les superchamps, on introduit les superdérivées

$$\check{\partial}_\pm = -i\partial_{\theta_\pm} + \theta_\pm\partial_\pm. \tag{2.2.2}$$

Elles ont la propriété [**15**] :

$$\check{\partial}_\pm^2 = -i\partial_\pm. \tag{2.2.3}$$

Le Lagrangien du modèle en version supersymétrique est donné par [**24**]

$$\mathcal{L} = 2\left(|\check{D}_+\Phi|^2 - |\check{D}_-\Phi|^2\right), \tag{2.2.4}$$

où les dérivées covariantes $\check{D}_\pm$ [**15**] permettent au système de respecter l'invariance de jauge du modèle comme dans le cas purement bosonique. Elles sont définies par :

$$\check{D}_{\pm}\Lambda = \check{\partial}_{\pm}\Lambda - \Lambda(\Phi^{\dagger}\check{\partial}_{\pm}\Phi). \tag{2.2.5}$$

De plus, nous définirons

$$|\check{D}_{\pm}\Lambda|^2 := (\check{D}_{\pm}\Lambda)^{\dagger}(D_{\pm}\Lambda). \tag{2.2.6}$$

Les équations d'Euler-Lagrange du modèle supersymétrique [**24**] sont alors

$$\check{D}_{+}\check{D}_{-}\Phi + |\check{D}_{-}\Phi|^2\Phi = 0, \tag{2.2.7}$$

avec la condition de normalisation

$$\Phi^{\dagger}\Phi = \mathbb{I}. \tag{2.2.8}$$

De façon similaire au cas purement bosonique, il est possible d'exprimer Φ dans la paramétrisation de MacFarlane en posant

$$\Phi = WL, \tag{2.2.9}$$

où L dépend des coordonnées $(x_{\pm}, \theta_{\pm})$.

Le superchamp Φ sera dit holomorphe si $\check{\partial}_{-}W = 0$, c'est-à-dire que

$$-i\left(\partial_{\theta_-}W\right) + \theta_{-}\left(\partial_{-}W\right) = 0. \tag{2.2.10}$$

Ceci implique, par les propriétés des nombres de Grassmann, que

$$\partial_{-}W = 0, \quad \partial_{\theta_-}W = 0, \tag{2.2.11}$$

et donc que W ne doit dépendre que de x_+ et θ_+. Dans ce cas, la fonction Φ sera alors nécessairement solution des équations d'Euler-Lagrange (2.2.7). En effet, tous les termes de ces équations contiennent un facteur $\check{D}_{-}\Phi$. Or, cette dérivée covariante est donnée par

$$\check{D}_{-}\Phi = \check{D}_{-}(WL) = \check{\partial}_{-}(W) - (WL)(WL)^{\dagger}\check{\partial}_{-}(WL). \tag{2.2.12}$$

Les superdérivées $\check{\partial}_{\pm}$ =(2.2.2) respectent la règle de Leibniz tel que démontré dans l'annexe A. La superdérivée covariante $\check{D}$ appliquée sur Φ peut être développée comme

$$\check{D}_{-}\Phi = (\check{\partial}_{-}W)L + W(\check{\partial}_{-}L) - WLL^{\dagger}W^{\dagger}\left[(\check{\partial}_{-}W)L + W(\check{\partial}_{-}L)\right]. \tag{2.2.13}$$

Puisque W est holomorphe, sa superdérivée $\check{\partial}_{-}$ s'annule. L'expression précédente peut donc être simplifiée :

$$\check{D}_{-}\Phi = W(\check{\partial}_{-}L) - WLL^{\dagger}W^{\dagger}W(\check{\partial}_{-}L). \tag{2.2.14}$$

Or, la définition des matrices L (2.2.9) donne

$$LL^\dagger = (W^\dagger W)^{-1}. \tag{2.2.15}$$

Par cette propriété, $D_-\Phi =$(2.2.14) s'annule identiquement. La fonction $\Phi = WL$ est donc bien une solution des équations d'Euler-Lagrange si W est holomorphe.

2.3. Invariance de jauge

Soit $\Phi \in G(M,N)$, une solution des équations d'Euler-Lagrange supersymétriques (2.2.7). Comme dans le cas purement bosonique, nous voulons montrer que l'invariance de jauge (1.3.1) s'étend au cas supersymétrique sous la forme :

$$\Phi' = V\Phi U(x_\pm, \theta_\pm), \tag{2.3.1}$$

où $V \in U(N)$ et $U \in U(M)$. Dans ce contexte, V sera une matrice à éléments constants purement bosoniques. Toutefois, comme U dépendera de $x_\pm$ et $\theta_\pm$, la condition d'unitarité donne a priori plus de liberté dans le choix de jauge.

Dans un premier temps, nous voulons montrer que $\check{D}_\pm$ sont données par

$$\check{D}_\pm\Phi = \check{\partial}_\pm\Phi - \Phi\left(\Phi^\dagger\check{\partial}_\pm\Phi\right). \tag{2.3.2}$$

En appliquant les super-dérivées covariantes (2.3.2) sur le champ transformé $\Phi' =$(2.3.1), on obtient :

$$\check{D}_\pm\Phi' = \check{D}_\pm\left(V\Phi U\right) = \check{\partial}_\pm\left(V\Phi U\right) - \left(V\Phi U\right)\left[\left(V\Phi U\right)^\dagger\check{\partial}_\pm\left(V\Phi U\right)\right]. \tag{2.3.3}$$

Comme les superdérivées (2.2.2) respectent la loi de dérivation de Leibniz tel que démontré à l'annexe A, l'expression (2.3.3) s'écrit

$$\begin{aligned}\check{D}_\pm(V\Phi U) &= (\check{\partial}_\pm V)\Phi U + V(\check{\partial}_\pm\Phi)U + V\Phi(\check{\partial}_\pm U)\\ &\quad - V\Phi UU^\dagger\Phi^\dagger V^\dagger\left[(\check{\partial}_\pm V)\Phi U + V(\check{\partial}_\pm\Phi)U + V\Phi(\check{\partial}_\pm U)\right].\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

À ce stade, nous avons pris $V = V(x_\pm, \theta_\pm)$ et $U = U(x_\pm, \theta_\pm)$. Par unitarité des matrices U et V, nous obtenons

$$\begin{aligned}\check{D}_\pm(V\Phi U) &= V(\check{\partial}_\pm\Phi - \Phi\Phi^\dagger\check{\partial}_\pm\Phi)U + (\mathbb{I} - V\Phi\Phi^\dagger V^\dagger)(\check{\partial}_\pm V)\Phi U\\ &= V(\check{D}_\pm\Phi)U + (\mathbb{I} - V\Phi\Phi^\dagger V^\dagger)(\check{\partial}_\pm V)\Phi U.\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Pour que $\check{D}_\pm\Phi' = V\check{D}_\pm\Phi U$, nous devons imposer que

$$(\check{\partial}_\pm V)\Phi U = 0 \tag{2.3.6}$$

ou, de façon équivalente, que

$$\check{\partial}_+ V = 0 \quad \text{et} \quad \check{\partial}_- V = 0. \tag{2.3.7}$$

Comme la matrice V dépend a priori des variables $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$, elle peut être développée comme

$$V = V_0 + i\theta_+ V_1 + i\theta_- V_2 - \theta_+\theta_- V_3, \tag{2.3.8}$$

pour certaines matrices V_i. En appliquant les superdérivées $\check{\partial}_+$ et $\check{\partial}_-$ données en (2.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \check{\partial}_+ V &= V_1 + \theta_+\partial_+ V_0 + i\theta_- V_3 + i\theta_+\theta_-\partial_+ V_2, \\ \check{\partial}_- V &= V_2 - i\theta_+ V_3 + \theta_-\partial_- V_0 - i\theta_+\theta_-\partial_- V_1. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Par la condition (2.3.7), ces deux expressions doivent s'annuler identiquement. Cette condition est donc équivalente à :

$$\partial_+ V_0 = 0, \quad \partial_- V_0 = 0, \quad V_1 = V_2 = V_3 = 0. \tag{2.3.10}$$

Nous obtenons bien que la matrice $V \in U(N)$ est constante et purement bosonique comme attendu. En ce qui concerne la matrice U, elle peut dépendre des coordonnées mais doit satisfaire la condition d'unitarité. Pour exprimer cette condition, nous avons tout d'abord développé U et $U^\dagger$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + i\theta_+\eta U_1 + i\theta_-\eta^\dagger U_2 - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta U_3, \\ U^\dagger &= U_0^\dagger + i\theta_+\eta U_1^\dagger + i\theta_-\eta^\dagger U_2 - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta U_3^\dagger, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

où η est une fonction fermionique de x_+. Il est possible de montrer que la condition d'unitarité implique que cette dernière simplification est possible, c'est-à-dire que la partie fermionique du terme en θ_+ doit être le conjugué complexe de celle du terme en θ_-. Nous avons choisi pour allèger les calculs et sans perte de généralité d'utiliser cette simplifcation dès le début.

On a alors que U est unitaire si :

$$\begin{aligned} &U_0^\dagger U_0 + i\theta_+\eta\left(U_0^\dagger U_1 - U_2^\dagger U_0\right) + i\theta_-\eta^\dagger\left(U_0^\dagger U_2 - U_1^\dagger U_0\right) \\ &- \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta\left(U_0^\dagger U_3 + U_3^\dagger U_0 + U_1^\dagger U_1 - U_2^\dagger U_2\right) = \mathbb{I}. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Par les propriétés des nombres de Grassmann, l'équation (2.3.12) est équivalente au système suivant :

$$\begin{aligned} &U_0^\dagger U_0 = \mathbb{I}, \\ &U_0^\dagger U_1 + U_2^\dagger U_0 = 0, \\ &U_0^\dagger U_2 + U_1^\dagger U_0 = 0, \\ &U_0^\dagger U_3 + U_3^\dagger U_0 - U_1^\dagger U_1 + U_2^\dagger U_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Notons que si l'on pose la partie purement bosonique U_0 comme étant $\mathbb{I}$, on obtient alors que les matrices U_2 et U_3 peuvent être écrites en termes de la matrice U_1 :

$$\begin{aligned} &U_2 = -U_1^\dagger, \\ &U_3^\dagger + U_3 = U_1^\dagger U_1 + U_1 U_1^\dagger. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

2.4. Solutions holomorphes et paramétrisation de MacFarlane

Nous cherchons maintenant à utiliser la liberté de jauge donnée par (2.3.1) avec $V = V_0$ une matrice constante et U une matrice qui respectent les conditions (2.3.13) pour réduire le champ Φ vers une forme plus simple que nous appelerons Φ_R. Pour cela, écrivons d'abord Φ et Φ_R sous la paramétrisation de MacFarlane définie en (2.8.4) :

$$\Phi = WL, \quad \Phi_R = W_R L_R, \tag{2.4.1}$$

où L et L_R sont des matrices arbitraires et W et W_R sont des superchamps holomorphes respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} W(x_+, \theta_+) &= Z(x_+) + i\theta_+ \eta(x_+) A(x_+), \\ W_R(x_+, \theta_+) &= Z_R(x_+) + i\theta_+ \eta(x_+) A_R(x_+), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

où $\eta(x_+)$ est une fonction fermionique quelconque factorisée de façon à ce que A et A_R soient des matrices purement bosoniques. Le choix de jauge reviendra donc à trouver une matrice A_R plus simple que A pour laquelle les champs Φ et Φ_R associés à la même valeur de Z soient équivalents selon (2.3.1). Il convient donc de poser $Z_R = Z$. Ainsi, par (2.4.1) et (2.4.2),

$$\Phi_R = W_R L_R = (Z + i\theta_+ \eta A_R) L_R. \tag{2.4.3}$$

Or, la condition de jauge (2.3.1) avec $\Phi' = \Phi_R$ implique que :

$$\Phi_R = V_0 \Phi U \Leftrightarrow W_R L_R = V_0 W L U. \tag{2.4.4}$$

En rassemblant (2.4.3) et (2.4.4), on obtient l'équation suivante

$$(Z + i\theta_+ \eta A_R) L_R = V_0 (Z + i\theta_+ \eta A) L U. \tag{2.4.5}$$

Étant donné que la partie purement bosonique Z doit rester inchangée, nous pouvons poser

$$V_0 = \mathbb{I}_N \quad \text{et} \quad U_0 = \mathbb{I}_M, \tag{2.4.6}$$

où U_0 est la partie purement bosonique de U définie en (2.3.11). Ceci implique, par (2.4.5) que les parties purement bosoniques de L et L_R doivent être égales.

En développant L et L_R de la façon suivante

$$L(x_\pm,\theta_\pm) = L_0(x_\pm) + i\theta_+\eta L_1(x_\pm) + i\theta_-\eta^\dagger L_2(x_\pm) - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta L_3(x_\pm),$$
$$L_R(x_\pm,\theta_\pm) = (L_R)_0(x_\pm) + i\theta_+\eta(L_R)_1(x_\pm) + i\theta_-\eta^\dagger(L_R)_2(x_\pm) - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta(L_R)_3(x_\pm), \tag{2.4.7}$$

on obtient alors qu'il faut que $L_{R_0} = L_0$. De plus, L_0 est inversible puisque L l'est (1.3.8). aNotons également que la fonction fermionique arbitraire η est la même que celle dans la définition de W et W_R. Ceci est nécessaire pour que l'égalité (2.4.5) soit vérifiée. Celle-ci devient le système d'équation suivant en utilisant les conditions (2.3.14) sur U ainsi que les conditions (2.4.6) et (2.4.7).

$$ZL_2 - ZL_0U_1^\dagger = ZL_{R_2}, \tag{2.4.8}$$

$$ZL_1 + ZL_0U_1 + AL_0 = ZL_{R_1} + A_RL_0, \tag{2.4.9}$$

$$ZL_3 + \frac{1}{2}ZL_0(U_1^\dagger U_1 + U_1U_1^\dagger) + ZL_1U_ZL_2U_1 + AL_2 - AL_0U_1^\dagger = ZL_{R_3} + A_RL_{R_2}. \tag{2.4.10}$$

Notons que, pour simplifier les calculs, la matrice U_3 a été posée hermitienne.

Les équations (2.4.8) à (2.4.10) peuvent être développées en utilisant la paramétrisation de MacFarlane. En effet, chaque équation peut être séparée en deux équations, une pour chaque sous-matrice de Z =(1.3.8). Pour cela, il sera utile de développer de façon équivalente les matrices A et A_R en sous-matrices. Nous définissons alors α et α_R, deux matrices de format $M \times M$ et β et β_R, deux matrices de même dimension que K (définie en (1.3.8), soit $(N-M)\times M$, telles que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad A_R = \begin{bmatrix} \alpha_R \\ \beta_R \end{bmatrix}. \tag{2.4.11}$$

Les équations (2.4.8) à (2.4.10) peuvent donc être réduites au système suivant :

$$(L_R)_2 = L_2 - L_0U_1^\dagger, \tag{2.4.12}$$

$$(L_R)_1 = L_1 + L_0U_1 + (\alpha - \alpha_R)L_0, \tag{2.4.13}$$

$$\beta_R = \beta - K(\alpha - \alpha_R), \tag{2.4.14}$$

$$(L_R)_3 = L_3 + \frac{1}{2}L_0(U_1^\dagger U_1 + U_1U_1^\dagger) + L_2U_1 - L_1U_1^\dagger - (\alpha - \alpha_R)(L_2 - L_0U_1^\dagger), \tag{2.4.15}$$

où K est donné dans la paramétrisation de Macfarlane de la solution purement bosonique Z. Ce qu'il est important de noter est que, par (2.4.14), la matrice β_R est complètement déterminée par la matrice α_R et par le champ W. En effet, la seule liberté de jauge que nous avons est sur U_1, car la matrice U (2.3.1) peut être exprimée entièrement en fonction de U_1, en prenant les hypothèses que U_0 soit l'identité et que U_3 soit hermitienne.

Sans perte de généralité, nous pouvons poser $L_1 = 0$ et $L_{R_1} = 0$. On a alors, par (2.4.13), que la matrice U_1 s'exprime comme

$$U_1 = -L_0^{-1}(\alpha - \alpha_R)L_0. \tag{2.4.16}$$

Seule la matrice α_R peut donc être modifiée par un choix de jauge. Pour simplifier le plus possible notre problème, nous allons donc choisir

$$\alpha_R = 0. \tag{2.4.17}$$

Ceci implique par (2.4.14) que β_R est donné par

$$\beta_R = \beta - K\alpha. \tag{2.4.18}$$

En conclusion, le choix $\alpha_R = 0$ est cohérent avec les équations (2.4.12) à (2.4.15) car l'invariance dépend uniquement de U_1 =(2.4.16) dont la seule partie qu'il est possible de modifier est α_R. Toute solution holomorphe W_R des équations d'Euler-Lagrange (2.2.7) peut être écrite sous la forme

$$W_R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ K + i\theta_+\eta\beta_R \end{bmatrix}. \tag{2.4.19}$$

2.5. Solutions à courbure constante

De façon équivalente au cas purement bosonique, on peut associer les solutions W des équations d'Euler-Lagrange supersymétriques (2.2.7) à des surfaces [**24**]. La métrique est donnée similairement à (1.4.6) par [**15**] :

$$g = \partial_+\partial_- \ln\left(W^\dagger W\right). \tag{2.5.1}$$

La courbure gaussienne est donnée à partir de cette métrique par [**15**]

$$K = -\frac{1}{g}\partial_+\partial_- \ln g. \tag{2.5.2}$$

Des solutions supersymétriques représentées par des surfaces à courbure gaussienne constante sont obtenues dans la littérature uniquement pour le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$[**15**]. Il a notamment été démontré [**15**] que le superchamp $W \in\mathbb{C}P^{N-1}$ holomorphe suivant

$$W = u(x_+) + i\theta_+\eta(x_+)\partial_+u(x_+), \tag{2.5.3}$$

avec $u(x_+)$ la courbe de Veronese définie en (1.5.1) est une solution à courbure constante des équations d'Euler-Lagrange supersymétriques (2.2.7). Ce type de solution, appelée SUSY-invariante, sera le sujet de notre section 2.8. Il est également démontré dans [**15**] que cette solution est unique, c'est-à-dire qu'elle est la seule solution supersymétrique holomorphe à courbure constante des équations

(2.2.7). À partir de (2.5.3), des solutions non-holomorphes à courbure constante sont construites à l'aide d'une généralisation de l'opérateur d'orthogonalisation P_+ =(1.5.4) donnée par :

$$P_{y+}^k \omega = \left(1 + i\theta_+ \frac{\eta}{\sqrt{N-1}}\partial_+ + i\theta_- \frac{\eta^\dagger}{\sqrt{N-1}}\partial_- - \theta_+\theta_- \frac{|\eta|^2}{N-1}\partial_+\partial_-\right) P_+^k u, \quad (2.5.4)$$

de façon similaire à ce qui a été expliqué dans la section 1.5.1.

L'absence de résultats sur les solutions à courbure constante des modèles sigma supersymétriques dans le cas $G(M, N)$ avec $M \geq 2$ dans la littérature peut entre autres s'expliquer par le fait que, même dans le cas bosonique, il n'existe pas jusqu'à maintenant de théorème donnant l'ensemble des solutions à courbure constante pour N quelconque. Il n'existe d'ailleurs pas de méthode générale permettant de construire les solutions supersymétriques à courbure constante à partir des solutions bosoniques, comme il a été fait dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$[**9**].

2.6. Méthode de résolution

En nous inspirant de la résolution dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$, nous avons développé une méthode afin de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une solution supersymétrique à courbure constante.

Comme indiqué précemment (2.4.2), une solution holomorphe du modèle $G(M, N)$ s'écrit :

$$W(x_+, \theta_+) = Z(x_+) + i\theta_+ \eta(x_+) A(x_+), \quad (2.6.1)$$

où Z est une solution holomorphe du modèle purement bosonique, η est une fonction fermionique quelconque de x_+ et $A(x_+)$ est une matrice dont les éléments sont des fonctions bosoniques de x_+.

Notre but est de trouver les conditions sur la matrice A pour que la solution W ait une courbure constante. Pour simplifier les calculs, la fonction η sera considérée constante dans l'ensemble du texte. Dans l'annexe B, nous montrerons que les résultats de la présente section se généralisent pour η dépendant de x_+.

Étant donné la forme de la courbure (2.5.2) et celle de la métrique (2.5.1), la solution W sera de courbure constante s'il existe une constante bosonique K_0 telle que :

$$\partial_+\partial_- \ln \tilde{g}_{+-} + K_0\, \tilde{g}_{+-} = 0. \quad (2.6.2)$$

Notons ici que l'expression de $\tilde{g}_{+-}$ contient les nombres de Grassmann $\theta_\pm$.

2.7. Modèle $G(2, N)$

Soit $W(x_+, \theta_+)$, une solution holomorphe des équations d'Euler-Lagrange supersymétriques du modèle $G(2, N)$ définie par (2.6.1). On a alors :

$$W^\dagger W = A_0 + iT_1 A_1 + iT_2 A_2 - T_1 T_2 A_3, \tag{2.7.1}$$

où

$$A_0 = Z^\dagger Z \quad A_1 = Z^\dagger A \quad A_2 = A^\dagger Z \quad A_3 = A^\dagger A \tag{2.7.2}$$

et

$$T_1 = \theta_+ \eta \quad T_2 = \theta_- \eta^\dagger. \tag{2.7.3}$$

Il est à noter que comme T_1 et T_2 sont des produits de deux fonctions fermioniques, ils agissent comme des fonctions bosoniques, c'est-à-dire qu'ils commutent avec les autres quantités. Par contre, la présence de nombres de Grassmann implique que $T_1^2 = 0$ et $T_2^2 = 0$.

Comme $W^\dagger W$ est une matrice 2×2, son déterminant de $W^\dagger W$ est donné par :

$$\det\left(W^\dagger W\right) = R\left(1 + iT_1 X_1 + iT_2 X_2 - T_1 T_2 X_3\right) \tag{2.7.4}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&R = \det Z^\dagger Z = \det A_0, \\
&X_1 = \frac{1}{R}\left[(A_0)_{11}(A_1)_{22} + (A_0)_{22}(A_1)_{11} - (A_0)_{12}(A_1)_{21} - (A_1)_{12}(A_0)_{21}\right], \\
&X_2 = \frac{1}{R}\left[(A_0)_{11}(A_2)_{22} + (A_0)_{22}(A_2)_{11} - (A_0)_{12}(A_2)_{21} - (A_2)_{12}(A_0)_{21}\right], \\
&X_3 = \frac{1}{R}[(A_0)_{11}(A_3)_{22} + (A_3)_{11}(A_0)_{22} + (A_1)_{11}(A_2)_{22} + (A_2)_{11}(A_1)_{22} \\
&- (A_0)_{12}(A_3)_{21} - (A_3)_{12}(A_0)_{21} - (A_1)_{12}(A_2)_{21} - (A_2)_{12}(A_1)_{21}].
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

L'équation (2.7.4) est vraie peu importe les paramètres M et N de $G(M, N)$. Ce sont les valeurs des fonctions X_i qui seront différentes si $M \neq 2$.

Étant donné que Z est une solution à courbure constante, R sera donné par :

$$R = (1 + |x|^2)^r. \tag{2.7.6}$$

pour r un entier positif donné. À partir de l'expression (2.7.4), la métrique de la surface associée à $W^\dagger W$ peut être réécrite :

$$\tilde{g}_{+-} = \partial_+ \partial_- \ln(R) + \partial_+ \partial_- \ln\left(1 + iT_1 X_1 + iT_2 X_2 - T_1 T_2 X_3\right). \tag{2.7.7}$$

En utilisant le développement en séries de Taylor de la fonction logarithme

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3), \tag{2.7.8}$$

nous simplifions l'expression (2.7.7). En effet, puisque $T_1^2 = T_2^2 = 0$, les seuls termes restants sont :

$$\tilde{g}_{+-} = \partial_+\partial_- \ln(R) + \partial_+\partial_- \left[iT_1X_1 + iT_2X_2 - T_1T_2\left(X_3 - X_1X_2\right)\right]. \qquad (2.7.9)$$

Par le même processus, $\partial_+\partial_- \ln \tilde{g}_{+-}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_- \ln \tilde{g}_{+-} = \partial_+\partial_- \ln\left(\partial_+\partial_- \ln R\ \right) + iT_1\frac{1}{r}\partial_+\partial_- Y_1 + iT_2\frac{1}{r}\partial_+\partial_- Y_2 \\ - T_1T_2\partial_+\partial_-\left(\frac{1}{r}Y_3 - \frac{1}{r^2}Y_1Y_2\right),\end{aligned} \qquad (2.7.10)$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$\begin{aligned}Y_1 &:= \frac{\partial_+\partial_- X_1}{\partial_+\partial_- \ln R} r = (1+|x|^2)^2\partial_+\partial_- X_1,\\ Y_2 &:= \frac{\partial_+\partial_- X_2}{\partial_+\partial_- \ln R} r = (1+|x|^2)^2\partial_+\partial_- X_2,\\ Y_3 &:= \frac{\partial_+\partial_-(X_3 - X_1X_2)}{\partial_+\partial_- \ln R} r = (1+|x|^2)^2\partial_+\partial_-(X_3 - X_1X_2).\end{aligned} \qquad (2.7.11)$$

La condition de courbure constante (2.6.2) est alors équivalente à :

$$\begin{aligned}&\left[\partial_+\partial_- \ln\left(\partial_+\partial_- \ln R\right) + k_0\left(\partial_+\partial_- \ln R\right)\right]\\ &+ iT_1\left[\frac{1}{r}\partial_+\partial_- Y_1 + k_0\partial_+\partial_- X_1\right]\\ &+ iT_2\left[\frac{1}{r}\partial_+\partial_- Y_2 + k_0\partial_+\partial_- X_2\right]\\ &- T_1T_2\left[\frac{1}{r}\partial_+\partial_- Y_3 - \frac{1}{r^2}\partial_+\partial_- Y_1Y_2 + k_0\partial_+\partial_-\left(X_3 - X_1X_2\right)\right] = 0.\end{aligned} \qquad (2.7.12)$$

Étant donné que les quantités T_1 et T_2 contiennent des nombres de Grassmann, l'expression (2.7.12) sera vérifiée si les coefficients de T_1, T_2 , T_1T_2 ainsi que la partie purement bosonique s'annulent identiquement. La partie pûrement bosonique donne

$$\partial_+\partial_- \ln(\partial_+\partial_- \ln R) + k_0\partial_+\partial_- \ln R = 0, \qquad (2.7.13)$$

et donc que :

$$k_0 = \frac{2}{r}. \qquad (2.7.14)$$

En remplaçant la valeur de k_0 obtenue en (2.7.14) dans l'équation (2.7.12) et annulant chacun des termes, on obtient que cette dernière est équivalente aux trois équations suivantes :

$$\partial_+\partial_-(Y_1 + 2X_1) = 0, \qquad (2.7.15)$$

$$\partial_+\partial_-(Y_2 + 2X_2) = 0, \qquad (2.7.16)$$

$$\partial_+\partial_-((Y_3-\frac{1}{r}Y_1Y_2)+2(X_3-X_1X_2))=0. \tag{2.7.17}$$

Notons que les équations (2.7.15) et (2.7.16) sont équivalentes car elles sont conjuguées complexes l'une de l'autre. Trouver les solutions supersymétriques à courbure constante revient donc à résoudre le système d'équation formé par (2.7.15) et (2.7.17). Notons également que, comme attendu, une solution supersymétrique à courbure constante aura la même courbure que sa partie pûrement bosonique.

2.7.1. Retour sur $\mathbb{C}P^{N-1}$

Dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$, la matrice $W^\dagger W$ est de format 1×1. Les fonctions X_i sont donc simplement

$$X_1=\frac{u^\dagger A}{R},\quad X_2=\frac{A^\dagger u}{R},\quad X_3=\frac{A^\dagger A}{R}. \tag{2.7.18}$$

où u est la courbe de Veronese (1.5.1) et $A=A(x_+)$ est un vecteur à déterminer.

2.8. Solution SUSY-invariante

Tel qu'expliqué dans la section 2.5, il a été démontré dans la littérature [**15**] que si $u(x_+)$ est un vecteur de $\mathbb{C}P^{N-1}$ associé à une surface à courbure constante, alors l'extension supersymétrique holomorphe de $u(x_+)$, donnée par

$$\omega(x_+,\theta_+)=u(x_+)+i\theta_+\eta(x_+)\partial_+u(x_+), \tag{2.8.1}$$

est aussi associée à une surface à courbure constante. Cette solution est appelée SUSY-invariante. Un des objectifs de ce chapitre est de démontrer que ce résultat peut être généralisé au modèle $G(M,N)$.

Considérons d'abord le superchamp $W\in G(M,N)$ défini par

$$W(x_+,\theta_+)=Z(x_+)+i\theta_+\eta(x_+)\partial_+Z(x_+). \tag{2.8.2}$$

Il a été démontré dans la section 1.3.1 que toute solution ϕ holomorphe non-supersymétrique de $G(M,N)$ peut être écrite dans la paramétrisation de MacFarlane (1.3.8) comme $\phi=ZL$ avec

$$Z=\begin{bmatrix}\mathbb{I}\\ K\end{bmatrix}, \tag{2.8.3}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité de format $M\times M$ et K est une matrice de format $(N-M)\times M$ dont les éléments sont des fonctions holomorphes.

Dans cette paramétrisation, le superchamp $W=$(2.8.2) est donné par

$$W=\begin{bmatrix}\mathbb{I}\\ K+i\theta_+\eta\partial_+K\end{bmatrix}, \tag{2.8.4}$$

puisque, par un changement de jauge, le α_R peut être mis à 0 (voir la section 2.4). La métrique de la surface associée à W est donnée par

$$\tilde{g}_{+-} = \partial_+ \partial_- \ln \left(\det W^\dagger W \right). \tag{2.8.5}$$

Or, à partir de la paramétrisation (2.8.4), le déterminant peut être écrit :

$$\det W^\dagger W = \det \left[(1 + \mathcal{D}) \left(\mathbb{I} + K^\dagger K \right) \right], \tag{2.8.6}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ est défini comme

$$\mathcal{D} = i\theta_+ \eta \partial_+ + i\theta_- \eta^\dagger \partial_- - \theta_+ \theta_- |\eta|^2 \partial_+ \partial_-. \tag{2.8.7}$$

Le lemme qui suit permettra de simplifier davantage l'expression (2.8.6).

Lemme 2.8.1. *Soit l'opérateur $\mathcal{D}$ tel que défini en (2.8.7) et $B(x_+, x_-)$ une matrice de format $M \times M$ purement bosonique. Alors,*

$$\det \left[(1 + \mathcal{D})\, B(x_+, x_-) \right] = (1 + \mathcal{D}) \det \left[B(x_+, x_-) \right]. \tag{2.8.8}$$

Démonstration. Nous commençons par démontrer le lemme dans le cas $M = 2$ et généraliserons par la suite. Si $Z \in G(M, N)$, alors $Z^\dagger Z = I + K^\dagger K$ est une matrice de format $M \times M$. Dans le cas $M = 2$, la matrice B prend la forme

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.8.9}$$

Alors,

$$(1 + \mathcal{D})B = \begin{bmatrix} (1 + \mathcal{D})\, b_{11} & (1 + \mathcal{D})\, b_{12} \\ (1 + \mathcal{D})\, b_{21} & (1 + \mathcal{D})\, b_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.8.10}$$

Son déterminant est donc :

$$\det \left[(1 + \mathcal{D})\, B \right] = (1 + \mathcal{D}) b_{11} (1 + D) b_{22} - (1 + \mathcal{D}) b_{12} (1 + D) b_{21}. \tag{2.8.11}$$

Le but est de montrer que (2.8.11) est égal à

$$(1 + \mathcal{D})\left(b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \right). \tag{2.8.12}$$

Pour alléger les calculs, la preuve sera scindée en deux :

$$(1 + \mathcal{D})\, b_{11} \,(1 + \mathcal{D})\, b_{22} = (1 + \mathcal{D})\,(b_{11} b_{22}) \tag{2.8.13}$$

et

$$(1 + \mathcal{D}) b_{12} (1 + \mathcal{D}) b_{21} = (1 + \mathcal{D})\, b_{12} b_{21}. \tag{2.8.14}$$

La preuve de (2.8.13) est faite dans les lignes qui suivent. Dans le but de simplifier la preuve, il peut être utile de séparer l'opérateur différentiel $\mathcal{D}$ en sa partie d'ordre

1 et sa partie d'ordre 2 :

$$\mathcal{D}_1 = i\theta_+\eta\partial_+ + i\theta_-\eta^\dagger\partial_- \quad \mathcal{D}_2 = -\theta_+\theta_-|\eta|^2\partial_+\partial_-. \tag{2.8.15}$$

Le premier terme de (2.8.11) deviendra alors

$$\begin{aligned}(1+\mathcal{D})b_{11}(1+\mathcal{D})b_{22} &= (1+\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2)b_{11}(1+\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2)b_{22} \\ &= b_{11}b_{22} + b_{11}\mathcal{D}_1 b_{22} + b_{11}\mathcal{D}_2 b_{22} + (\mathcal{D}_1 b_{11})b_{22} + (\mathcal{D}_1 b_{11})\mathcal{D}_1 b_{22} \\ &+ (\mathcal{D}_1 b_{11})\mathcal{D}_2 b_{22} + (\mathcal{D}_2 b_{11})b_{22} + (\mathcal{D}_2 b_{11})\mathcal{D}_1 b_{22} + (\mathcal{D}_2 b_{11})\mathcal{D}_2 b_{22}.\end{aligned} \tag{2.8.16}$$

Or, l'opérateur $\mathcal{D}_2$ contient un facteur $\theta_+\theta_-$. Il s'annule donc lorsque multiplié à $\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$, par la propriété des nombres de Grassmann (2.1.2). De plus, $\mathcal{D}_1$ est un opérateur différentiel de premier ordre et a donc la propriété suivante :

$$\mathcal{D}_1\left(b_{11}b_{22}\right) = b_{11}\left(\mathcal{D}_1 b_{22}\right) + \left(\mathcal{D}_1 b_{11}\right)b_{22}. \tag{2.8.17}$$

En combinant ces deux dernières propriétés, le premier terme de (2.8.11) peut être réécrit :

$$b_{11}b_{22} + D_1(b_{11}b_{22}) + b_{11}(\mathcal{D}_2 b_{22}) + (\mathcal{D}_2 b_{11})b_{22} + (\mathcal{D}_1 b_{11})(\mathcal{D}_1 b_{22}). \tag{2.8.18}$$

Il reste à montrer que la dernière expression (2.8.18) est égale à la partie de droite de (2.8.13) donnée par :

$$(1+\mathcal{D})\, b_{11}b_{22} = b_{11}b_{22} + \mathcal{D}_1(b_{11}b_{22}) + \mathcal{D}_2(b_{11}b_{22}). \tag{2.8.19}$$

Or, en observant (2.8.18), on remarque que ceci est équivalent à montrer que

$$\mathcal{D}_2(b_{11}b_{22}) = b_{11}(\mathcal{D}_2 b_{22}) + (\mathcal{D}_2 b_{11})b_{22} + (\mathcal{D}_1 b_{11})(\mathcal{D}_1 b_{22}), \tag{2.8.20}$$

ce qui est simplement vérifié en remplaçant les opérateurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par leurs définitions respectives (2.8.15) et en appliquant la propriété des nombres de Grassmann (2.1.2). L'équation (2.8.13) est donc vraie. L'autre partie de la preuve (2.8.14) peut être faite de façon complètement analogue. Le lemme est ainsi prouvé pour $M = 2$.

Pour une valeur générale de $M > 2$, $(1+\mathcal{D})B$ sera de format $M \times M$ et son déterminant sera donné par

$$\det\left[(1+\mathcal{D})B\right] = \sum(-1)^{\mathrm{sg}(\nu_i)}(1+\mathcal{D})b_{1\nu_1}(1+\mathcal{D})b_{2\nu_2}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}}, \tag{2.8.21}$$

où la somme est faite sur les permutations ν_i. Or, les termes de cette somme peuvent être réécrits par (2.8.13) comme :

$$\begin{aligned}&(1+\mathcal{D})b_{1\nu_1}(1+\mathcal{D})b_{2\nu_2}(1+\mathcal{D})b_{3\nu_3}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}} \\ &\qquad = (1+\mathcal{D})(b_{1\nu_1}b_{2\nu_2})(1+\mathcal{D})b_{3\nu_3}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}}.\end{aligned} \tag{2.8.22}$$

Par le même argument, cette expression est égale à

$$\begin{aligned}(1+\mathcal{D})(b_{1\nu_1}b_{2\nu_2})(1+\mathcal{D})b_{3\nu_3}(1+\mathcal{D})b_{4\nu_4}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}}\\ =(1+\mathcal{D})(b_{1\nu_1}b_{2\nu_2}b_{3\nu_3})(1+\mathcal{D})b_{4\nu_4}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}}.\end{aligned} \tag{2.8.23}$$

En itérant, on obtient donc que

$$(1+\mathcal{D})b_{1\nu_1}(1+\mathcal{D})b_{2\nu_2}...(1+\mathcal{D})b_{N-1\nu_{N-1}}=(1+\mathcal{D})(b_{1\nu_1}b_{2\nu_2}b_{3\nu_3}...b_{N-1\nu_{N-1}}). \tag{2.8.24}$$

En applicant cet argument à tous les termes de la somme (2.8.21), on montre que, pour toute valeur de M,

$$\det\left[(1+\mathcal{D})B(x_+,x_-)\right]=(1+\mathcal{D})\det\left[B(x_+,x_-)\right]. \tag{2.8.25}$$

□

Par ce lemme, en posant $B=\mathbb{I}+K^\dagger K$, on peut réécrire $\det W^\dagger W=$(2.8.6) comme

$$\det W^\dagger W=(1+\mathcal{D})\det\left(\mathbb{I}+K^\dagger K\right). \tag{2.8.26}$$

Nous pouvons maintenant utiliser le lemme pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.8.1. *Soit $Z:S^2\to G(M,N)$, une solution bosonique holomorphe des équations d'Euler-Lagrange (1.2.4) associée à une surface à courbure constante. Soit son extension supersymétrique holomorphe*

$$W(x_+,\theta_+)=Z(x_+)+i\theta_+\eta(x_+)A(x_+), \tag{2.8.27}$$

où $A=\partial_+Z$. Alors, W est une solution de (2.2.7) associée à une surface de courbure constante.

Démonstration. Par hypothèse, Z est associé à une surface à courbure constante. Dans ce cas, il a été démontré [**9**] qu'il existe un entier r tel que

$$\det\left(Z^\dagger Z\right)=\det\left(I+K^\dagger K\right)=R=\left(1+|x|^2\right)^r. \tag{2.8.28}$$

Par le lemme et cette dernière propriété, la métrique (2.8.5) de la surface associée à W peut être écrite :

$$\tilde{g}_{+-}=\partial_+\partial_-\ln\left[(1+\mathcal{D})\,R\right]. \tag{2.8.29}$$

Cette expression peut être réécrite à l'aide du développement en séries de Taylor de la fonction logarithme (2.7.8) de façon équivalente à ce que nous avons fait à la section 2.6. En effet,

$$\begin{aligned}\ln\left[(1+\mathcal{D})\,R\right] &= \ln R + \ln\left(1+\frac{1}{R}\mathcal{D}R\right)\\ &= \ln R + \frac{i}{R}\theta_+\eta\partial_+R + \frac{i}{R}\theta_-\eta^\dagger\partial_-R - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta\left(\frac{1}{R}\partial_+\partial_-R - \frac{1}{2R^2}\partial_+R\partial_-R\right).\end{aligned} \tag{2.8.30}$$

La métrique (2.8.29) est donc donnée par le lemme 2.8.1 :

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{+-} &= \partial_+\partial_-\ln R + \partial_+\partial_-\mathcal{D}\ln R\\ &= g_0 + g_1.\end{aligned} \tag{2.8.31}$$

On peut à présent calculer la courbure associée à cette métrique. En effet, la courbure gaussienne peut être écrite en termes de la métrique sous la forme

$$\tilde{k} = -\frac{1}{\tilde{g}_{+-}}\partial_+\partial_-\ln\tilde{g}_{+-}. \tag{2.8.32}$$

Or, par (2.8.31),

$$\begin{aligned}\partial_+\partial_-\ln\tilde{g}_{+-} &= \partial_+\partial_-\ln\left(g_0+g_1\right)\\ &= \partial_+\partial_-\ln g_0 + \partial_+\partial_-\ln\left(1+\frac{g_1}{g_0}\right).\end{aligned} \tag{2.8.33}$$

Le deuxième terme peut être réécrit en utilisant comme plus tôt le développement de Taylor du logarithme. Ainsi, nous obtenons

$$\partial_+\partial_-\ln\tilde{g}_{+-} = \partial_+\partial_-\ln g_0 + \partial_+\partial_-\left[\frac{g_1}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2\right]. \tag{2.8.34}$$

Par (2.8.32), la courbure sera constante s'il existe une constante k_0 telle que :

$$\tilde{g}_{+-}k_0 = -\partial_+\partial_-\ln\tilde{g}_{+-}. \tag{2.8.35}$$

La constante sera donnée par la courbure de la solution bosonique (1.5.3), c'est-à-dire,

$$k_0 = \partial_+\partial_-\ln g_0 = \frac{2}{r}. \tag{2.8.36}$$

Il faut donc vérifier que

$$-k_0g_1 = \partial_+\partial_-\left[\frac{g_1}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2\right]. \tag{2.8.37}$$

Or, le côté droit de (2.8.37) donne

$$\partial_+\partial_- \ln g_0 + \partial_+\partial_- \left[\frac{i\theta_+\eta\partial_+^2\partial_- \ln R + i\theta_-\eta^\dagger\partial_+\partial_-^2 \ln R - \theta_-\eta^\dagger\eta - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta\partial_+^2\partial_-^2 \ln R}{\partial_+\partial_- \ln R} \right.$$
$$\left. - \frac{2\theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta\left(\partial_+^2\partial_- \ln R\right)\left(\partial_+\partial_-^2 \ln R\right)}{\partial_+\partial_- \ln R}\right]. \tag{2.8.38}$$

En simplifiant et en calculant la dérivée, on obtient

$$\partial_+\partial_- \left[\frac{g_1}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2\right] = \frac{4x_-}{r(1+|x|^2)^3}. \tag{2.8.39}$$

Par un calcul similaire, g_1 défini en (2.8.31) donne

$$g_1 = \frac{-2x_-}{(1+|x|^2)^3}. \tag{2.8.40}$$

La condition (2.8.37) est aisément vérifiée. La solution supersymétrique (2.8.2) a donc bien une courbure constante. De plus, notons que le raisonnement est indépendants des valeurs de M et N de $G(M,N)$. La solution est donc valide pour tout $Z \in G(M,N)$.

□

Chapitre 3

MODÈLE $\mathbb{C}P^{N-1}$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'unicité de la solution présentée dans la section 2.8 dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$supersymétrique. Il a été démontré dans [**15**] en utilisant l'hypothèse que la partie fermionique de la solution pouvait s'écrire comme

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} \partial_+^i u \tag{3.0.1}$$

où u =(1.5.1) est comme à l'habitude la courbe de Veronese, qu'elle est unique. Dans ce chapitre, nous déterminons la solution générale holomorphe à courbure constante du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$supersymétrique sans utiliser cette hypothèse. Par la suite, nous démontrons qu'avec un choix de jauge, notre solution peut être réduite à celle de l'article [**15**].

3.1. Solution générale du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$

Le but de cette section est de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que W, une solution holomorphe supersymétrique du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$, ait une courbure gaussienne (2.5.2) constante. Le théorème suivant décrit nos résultats.

Théorème 3.1.1. *Soit $u(x_+)$, une solution holomorphe du modèle sigma $\mathbb{C}P^{N-1}$, et W, son extension supersymétrique :*

$$W = u(x_+) + i\theta_+\eta(x_+)A(x_+), \tag{3.1.1}$$

où η, une fonction fermionique quelconque et A, un vecteur formé de fonctions holomorphes bosoniques. Alors, W sera associé à une surface de courbure constante si et seulement si u est la courbe de Veronese et les composantes a_n du vecteur

A, avec $0 \leq n \leq N-1$ sont données par :

$$a_n(x_+) = a_0(x_+) \left[-(n-1)\sqrt{\binom{N-1}{n}} \right] x_+^n + a_1(x_+) \left[\frac{n}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\binom{N-1}{n}} \right] x_+^{n-1}, \tag{3.1.2}$$

où a_0 et a_1 des fonctions quelconques de x_+.

Remarque 3.1.1. *L'expression (3.1.2) peut s'écrire en termes de la courbe de Veronese $u(x_+)$ =(1.5.1) :*

$$\begin{aligned} a_n(x_+) = -(n-1)u_n(x_+)a_0(x_+) + \frac{1}{\sqrt{N-1}}\partial_+ u_n(x_+)a_1(x_+), \\ 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Démonstration. Soit W =(3.1.1). Il a été démontré à la section 2.6 qu'alors W sera de courbure constante si et seulement si la partie bosonique u est de courbure constante et que u et A respectent les deux conditions suivantes :

$$\partial_+\partial_- \left(Y_1 + 2X_1\right) = 0, \tag{3.1.4}$$

$$\partial_+\partial_- \left(Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{N-1} + 2(X_3 - X_1X_2)\right) = 0, \tag{3.1.5}$$

où les X_i sont des fonctions de u et A définies en (2.7.18) et les Y_i sont des fonctions des X_i définies en (2.7.11). La courbe de Veronese donnée par (1.5.1) est la seule fonction holomorphe purement bosonique à courbure constante, à un choix de jauge près. La partie u de W =(3.1.1) doit donc être la courbe de Veronese pour avoir une courbure constante.

Notons également que l'équation (3.1.4) est équivalente à celle établie dans la littérature [**15**] :

$$\partial_+^2\partial_-^2 h(x_+, x_-) = 0, \tag{3.1.6}$$

où

$$h(x_+, x_-) = (1 + |x|^2)^{2-N} u^\dagger A. \tag{3.1.7}$$

On remarque en effet que notre fonction X_1 définie en (2.7.18) peut être écrite en termes de h =(3.1.7) comme

$$X_1 = \frac{h}{1+|x|^2}. \tag{3.1.8}$$

En remplaçant cette forme de X_1 dans notre condition (3.1.4), on obtient :

$$(1 + |x|^2)\partial_+^2\partial_-^2 h(x_+, x_-) = 0. \tag{3.1.9}$$

Pour que la courbure soit constante, il faut en particulier que (3.1.9) soit vraie pour toute valeur des coordonnées (x_+, x_-). Elle est équivalente à l'équation

(3.1.6). Dans le but de simplifier nos calculs, nous utiliserons cette condition (3.1.6) au lieu de (3.1.4) dans ce chapitre. Nous analysons l'équation (3.1.6) en tenant compte de la forme de $h =$(3.1.7).

Dans un premier temps, en intégrant (3.1.6), on obtient que la fonction h peut s'écrire :

$$h(x_+, x_-) = h_1(x_-)x_+ + h_2(x_+)x_- + h_3(x_-) + h_4(x_+), \tag{3.1.10}$$

pour certaines fonctions h_1, h_2, h_3, h_4 à déterminer.

Dans la suite du texte, x_+ sera renommé x et x_- sera renommé y pour alléger les notations. Sans perte de généralité, on pose :

$$h_1(0) = 0, \quad h_2(0) = 0. \tag{3.1.11}$$

En effet, si ces quantités ne sont pas nulles, $h_1(0)x$ et $h_2(0)y$ peuvent être incluses respectivement dans les fonctions h_4 et h_3.

Soit la fonction :

$$F(x, y, N) = (1 + |x|^2)^{N-2} h(x, y) - u^\dagger A. \tag{3.1.12}$$

Elle doit être identiquement nulle par la définition de $h = $ (3.1.7). Cet argument servira, dans un premier temps, à déterminer les fonctions h_1, h_2, h_3, h_4 en termes du vecteur A. Soit $a_k(x)$, la composante k de A évaluée en x_+. La fonction F est alors :

$$\begin{aligned} F(x, y, N) = (1 + |x|^2)^{N-2} \left(h_1(y)x + h_2(x)y + h_3(y) + h_4(x)\right) \\ - \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x) \sqrt{\binom{N-1}{k}} y^k. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Elle s'annule en particulier lorsque $y = 0$:

$$F(x, 0, N) = h_3(0) + h_4(x) - a_0(x) = 0, \tag{3.1.14}$$

ce qui donne h_4 :

$$h_4(x) = a_0(x) - h_3(0). \tag{3.1.15}$$

De façon équivalente, si $x = 0$, on obtient :

$$F(0, y, N) = h_3(y) - h_3(0) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k(0) \sqrt{\binom{N-1}{k}} y^k = 0. \tag{3.1.16}$$

La fonction h_3 prend donc la forme

$$h_3(y) = h_3(0) + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(0) \sqrt{\binom{N-1}{k}} y^k. \tag{3.1.17}$$

En remplaçant h_4 et h_3 dans $F(x,y,N) =$ (3.1.13), on obtient

$$\begin{aligned}F(x,y,N) =&(1+xy)^{N-2}\left[h_1(y)x + h_2(x)y + a_0(x) + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(0)\sqrt{\binom{N-1}{k}}y^k\right]\\ &- \sum_{k=1}^{N-1} a_k(x)\sqrt{\binom{N-1}{k}}y^k.\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Notons que tous les termes sont des polynômes en y, sauf éventuellement celui contenant $h_1(y)$. La puissance maximale du polynôme en y est $(N-2)+(N-1) = 2N-3$. Cela implique que $h_1(y)$ doit également être un polynôme en y de degré $N-1$. Étant donné les conditions initiales (3.1.11), il prend la forme

$$h_1(y) = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha(k)y^k, \tag{3.1.19}$$

où les $\alpha(k)$ sont des constantes arbitraires. Il reste à déterminer la forme de h_2 en remplaçant $h_1=$ (3.1.19) dans la fonction $F(x,y,N) =$ (3.1.18). On obtient, à présent,

$$\begin{aligned}F(x,y,N) = (1+xy)^{N-2}&\left[a_0(x) + h_2(x)y + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(0)\sqrt{\binom{N-1}{k}}y^k\right.\\ &\left.+\sum_{k=1}^{N-1}\alpha(k)y^k x\right] - \sum_{k=0}^{N-1} a_k(x)\sqrt{\binom{N-1}{k}}y^k.\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

L'expression de $h_2(x)$ s'obtient en identifiant les termes de degré 1 en y :

$$h_2(x) = -x\left[\alpha(1) + (N-2)a_0(x)\right] + \sqrt{N-1}\left[a_1(x) - a_1(0)\right]. \tag{3.1.21}$$

$F(x,y,N)$ ne dépend maintenant que des constantes $\alpha(k)$ et des fonctions $a_k(x)$. Comme le facteur $(1+xy)^{N-2}$ s'écrit explicitement :

$$(1+xy)^{N-2} = \sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}x^j y^j, \tag{3.1.22}$$

nous pouvons développer la forme de $F(x,y,N)$ comme suit :

$$\begin{aligned}F(x,y,N) &= \sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}a_0(x)x^jy^j - (N-2)a_0(x)\sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}x^{j+1}y^{j+1}\\ &+ \sum_{j=0}^{N-2}\sum_{k=2}^{N-1}\binom{N-2}{j}\alpha(k)x^{j+1}y^{j+k} + \sqrt{N-1}a_1(x)\sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}x^jy^{j+1}\\ &+ \sum_{j=0}^{N-2}\sum_{k=2}^{N-1}\binom{N-2}{j}\sqrt{\binom{N-1}{k}}a_k(0)x^jy^{j+k} - \sum_{k=0}^{N-1}a_k(x)\sqrt{\binom{N-1}{k}}y^k.\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Cette expression étant un polynôme en y de degré $2N-3$, la stratégie est d'annuler chacun des coefficients de y^n, $N \leq n < 2N-3$. Le terme en y^{2N-3} donne :

$$\alpha(N-1)x^{N-3} + a_{N-1}(0)x^{N-2} = 0, \tag{3.1.24}$$

ce qui implique

$$\alpha(N-1) = 0, \quad a_{N-1}(0) = 0. \tag{3.1.25}$$

De la même façon, en annulant chaque terme y^n avec $N \leq n < 2N-3$, on obtient que

$$\alpha(n) = 0 \quad a_n(0) = 0, \quad 2 \leq n \leq N-1. \tag{3.1.26}$$

Il reste finalement à évaluer les termes en y^n avec $2 \leq n \leq N-1$ dans la fonction $F(x,y,N)$. En tenant compte de (3.1.26), on obtient :

$$\begin{aligned}a_n(x) &= \binom{N-1}{n}^{3/2}\left[\binom{N-2}{n} - (N-2)\binom{N-2}{N-1}\right]a_0(x)x^n\\ &+ \sqrt{N-1}\binom{N-1}{n}^{3/2}\binom{N-2}{n-1}a_1(x)x^{n-1}.\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Par les propriétés des coefficients binomiaux, cette expression peut être simplifiée et on trouve finalement

$$\begin{aligned}a_n(x) = -(n-1)\sqrt{\binom{N-1}{n}}a_0(x)x^n + \frac{n}{\sqrt{N-1}}\sqrt{\binom{N-1}{n}}a_1(x)x^{n-1},\\ 2 \leq n \leq N-1.\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

qui correspond bien à l'expression (3.1.2). Les fonctions $a_0(x)$ et $a_1(x)$ sont arbitraires et seront renommées respectivement $a_0(x_+)$ et $a_1(x_+)$. Nous avons donc trouvé la solution générale de l'équation (3.1.4). De plus, nous obtenons une expression simple pour la fonction $h =$(3.1.7) :

$$h(x_+, x_-) = -a_0(x_+)\left[1 - (N-2)|x|^2\right] + a_1(x_+)\sqrt{N-1}x_-. \tag{3.1.29}$$

Il reste à vérifier si cette solution respecte aussi l'équation (3.1.5). La résolution de l'équation (3.1.4) nous permet d'écrire X_1 sous la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{u^\dagger A}{(1+xy)^{N-1}} \\ &= \frac{1}{(1+xy)^{N-1}}\left[a_0(x) + \sum_{k=1}^{N-1}\binom{N-1}{k}\left(-(k-1)a_0(x)x^k y^k + \frac{ka_1(x)x^{k-1}y^k}{\sqrt{N-1}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Or, par les propriétés du binôme de Newton, la somme peut être éliminée pour donner une expression beaucoup plus simple :

$$X_1 = \frac{1}{1+xy}\left[-a_0(x)(N-1)xy + a_0(x)(1+xy) + a_1(x)\sqrt{N-1}y\right]. \tag{3.1.31}$$

La fonction Y_1 définie en (2.7.11) peut alors être évaluée. On obtient :

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1+xy)^2\,\partial_+\partial_- X_1 \\ &= \frac{1}{1+xy}\left[(N-1)(-1+xy)a_0 - 2\sqrt{N-1}ya_1\right. \\ &\left.-(1+xy)(N-1)x\partial_+ a_0 - (1+xy)\sqrt{N-1}\partial_+ a_1\right]. \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

En particulier, notons que

$$Y_1 + 2X_1 = -(N-3)a_0 - x(N-1)\partial_+ a_0 + \sqrt{N-1}\partial_+ a_1 \tag{3.1.33}$$

ne dépend que de la variable x et l'équation (3.1.4) est bien vérifiée comme attendu.

On trouve aussi facilement X_2 (conjugué complexe de X_1) et Y_2 (conjugué complexe de Y_1). En utilisant (3.1.28), nous pouvons écrire X_3 comme :

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{A^\dagger A}{(1+xy)^{N-1}} \\ &= \frac{1}{(1+xy)^{N-1}}\left[a_0^*(y)a_0(x) + \sum_{k=1}^{N-1}\binom{N-1}{k}\left((k-1)^2 a_0^*(y)a_0(x)x^k y^k\right.\right. \\ &+ \frac{k^2}{N-1}a_1^*(y)a_1(x)x^{k-1}y^{k-1} - \frac{k(k-1)}{\sqrt{N-1}}a_0^*(y)a_1(x)x^{k-1}y^k \\ &\left.\left.-\frac{k(k-1)}{\sqrt{N-1}}a_1^*(y)a_0(x)x^k y^{k-1}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

L'expression peut, à nouveau, être simplifiée à cause de la présence de coefficients binomiaux. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} X_3 = \frac{1}{(1+xy)^2} &\Big[\Big(1-(N-3)xy+(N-2)^2x^2y^2\Big)\, a_0^*(y)a_0(x) \\ &+ \left(1+(N-1)\,xy\right) a_1^*(y)a_1(x) - (N-2)\sqrt{N-1}xy^2a_0^*(y)a_1(x) \\ &-(N-2)\sqrt{N-1}x^2ya_1^*(y)a_0(x)\Big]. \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Pour vérifier l'équation (3.1.5), il faut évaluer dans un premier temps $X_3 - X_1X_2$ à partir des expressions simplifiées des X_i, puis $Y_3 - (Y_1Y_2)/(N-1)$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_3 - X_1X_2 = \frac{1}{(1+xy)^2} &\Big[(N-1)xya_0^*(y)a_0(x) + a_1^*(y)a_1(x) - \sqrt{N-1}ya_0^*(y)a_1(x) \\ &-\sqrt{N-1}xa_1^*(y)a_0(x)\Big], \end{aligned} \tag{3.1.36}$$

$$\begin{aligned} Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{N-1} = \frac{1}{(1+xy)^2} &\left[-2(N-1)xya_0^*(y)a_0(x) - 2a_1^*(y)a_1(x)\right. \\ &\left.+2\sqrt{N-1}ya_0^*(y)a_1(x) + 2\sqrt{N-1}xa_1^*(y)a_0(x)\right]. \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

En comparant les deux expressions précédentes, on voit aisément que :

$$Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{N-1} + 2\left(X_3 - X_1X_2\right) = 0. \tag{3.1.38}$$

C'est une condition plus forte que l'équation (3.1.5) qui est donc bien vérifiée sans condition supplémentaire sur le vecteur A.

□

3.2. Équivalence de jauge

Nous cherchons maintenant à trouver le lien entre notre solution et celle trouvée dans la littérature [**15**]. Nous avons démontré à la section 2.4 que la sous-matrice α_R peut être posée égale à 0. Dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$, ceci implique que la première composante du vecteur A peut être posée égale à 0, comme il a été fait dans l'article [**15**]. Il reste à vérifier que l'on retrouve cette dernière solution en posant $\alpha_R = 0$ dans notre solution générale (3.1.2).

Soient $A_1 =$(3.1.2), la partie fermionique de notre solution et $A_0 = \partial_+ u$, celle de la solution établie dans la littérature, où $u =$(1.5.1) est la courbe de Veronese. Nous cherchons alors à vérifier s'il est possible de réduire

$$W(x_+) = u(x_+) + i\theta_+\eta A_1 \tag{3.2.1}$$

vers

$$W_0(x_+) = u(x_+) + i\theta_+\eta A_0. \tag{3.2.2}$$

Selon notre notation, les matrices α et α_R sont de format 1×1 et seraient respectivement égales à $a_0(x_+)$ et à 0. Nous allons donc calculer la matrice W_R associée à une valeur de $\alpha_R = 0$ pour vérifier s'il s'agit de W_0.

La matrice $U_1 =$(2.4.16) sur laquelle repose la liberté de jauge est donnée par

$$U_1 = L_0^{-1}(\alpha_R - \alpha)L_0. \tag{3.2.3}$$

Or, L_0 est une fonction scalaire dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$. Ainsi, U_1 devient :

$$U_1 = -\alpha = -a_0(x_+). \tag{3.2.4}$$

À partir de cette expression, la matrice $\beta_R =$(2.4.14) est

$$\beta_R = \beta - K\alpha = \beta - Ka_0. \tag{3.2.5}$$

Étant donné que les vecteurs K et β sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} k_n &= u_n, && 1 \leq n \leq N-1, \\ \beta_n &= -(n-1)u_n(x_+)a_0(x_+) + \frac{\partial_+ u_n(x_+)}{\sqrt{N-1}} a_1(x_+), && 1 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

où u est la courbe de Veronese telle que

$$u_n = \sqrt{\binom{N-1}{n}} x_+^n, \tag{3.2.7}$$

alors le vecteur A_R associé à un $\alpha_R = 0$ est donc donné par

$$a_{Rn}(x_+) = -nu_n(x_+)a_0(x_+) + \frac{\partial_+ u_n(x_+)}{\sqrt{N-1}} a_1(x_+). \tag{3.2.8}$$

Notons qu'à partir de la forme de $u_n =$(3.2.7) cette solution peut réécrite comme

$$a_{Rn}(x_+) = \left[\frac{1}{\sqrt{N-1}} a_1(x_+) - x_+ a_0(x_+)\right] \partial_+ u_n(x_+), \tag{3.2.9}$$

et donc comme

$$a_{Rn}(x_+) = f(x_+)\partial_+ u_n(x_+), \tag{3.2.10}$$

où $f(x_+)$ est une fonction arbitraire. La solution réduite est donc bel et bien celle donnée dans l'article [**15**].

Chapitre 4

SOLUTIONS HOLOMORPHES À COURBURE CONSTANTE DU MODÈLE $G(2,4)$ SUPERSYMÉTRIQUE

Ce modèle est accessible car toutes les solutions purement bosoniques holomorphes et non-holomorphes à courbure constante ont été classifiées [**11**]. Nous nous sommes donc concentrés sur ce modèle dans notre recherche de solutions supersymétriques à courbure constante. Les résultats de ce chapitre portent sur le cas holomorphe.

L'objectif est de déterminer les conditions sur les matrices A_r pour que les solutions holomorphes supersymétriques de la forme :

$$W_r(x_+) = Z_r(x_+) + i\theta_+\eta(x_+)A_r(x_+), \quad r = 1,2,3,4, \tag{4.0.1}$$

aient une courbure constante, si les Z_r sont les solutions holomorphes bosoniques à courbure constante du modèle $G(2,4)$ définies en (1.5.6). Ces matrices sont de format 4×2. L'invariance de jauge telle que décrite à la section 2.4 permet de choisir la matrice A_r sous la forme :

$$A(x_+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_{11}(x_+) & \beta_{12}(x_+) \\ \beta_{21}(x_+) & \beta_{22}(x_+) \end{bmatrix}, \tag{4.0.2}$$

où les β_{ij} sont des fonctions à déterminer pour chaque solution Z_r de $G(2,4)$. Ceci simplifiera grandement nos calculs pour la suite.

Nous avons démontré à la section 2.6 que W_r =(4.0.1) aura une courbure constante si et seulement si Z_r et A_r respectent les deux équations suivantes :

$$\partial_+\partial_-\left(Y_1 + 2X_1\right) = 0, \tag{4.0.3}$$

$$\partial_+\partial_-\left(Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{r} + 2\left(X_3 - X_1X_2\right)\right) = 0, \tag{4.0.4}$$

où les X_i, $i = 1, 2, 3$, sont des fonctions de Z et A définies en (2.7.5) telles que $X_2 = X_1^\dagger$ et Y_i, données en (2.7.11), sont des fonctions des X_i. Rappelons également que la constante r dépend de la solution Z choisie. Il s'agit de l'exposant de $(1 + |x|^2)$ dans l'expression du déterminant de $Z^\dagger Z$. Nous avons résolu les équations (4.0.3) et (4.0.4) pour chaque solution purement bosonique Z_r, et donc, obtenu les solutions $W_r(x_+, \theta_+)$ correspondantes, pour $r = 1, 2, 3, 4$. Nous avons obtenu que la solution SUSY-invariante (2.8.27) est l'unique solution holomorphe supersymétrique à courbure constante associée aux solutions Z_2, Z_3 et Z_4. La solution générale associée à Z_1 ne se réduit par contre pas à sa dérivée.

4.1. Solution Z_1

Ceci est la solution la plus simple de $G(2, 4)$. Sa norme est donnée par

$$Z_1^\dagger Z_1 = \begin{bmatrix} 1 + |x|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1.1}$$

et donc $\det(Z_1^\dagger Z_1) = (1 + |x|^2)$, ce qui implique que $r = 1$, comme attendu. Nous l'avons résolu dans un premier temps sans faire de choix de jauge. Nous avons donc posé que l'extension supersymétrique holomorphe de Z_1 a la forme suivante :

$$W_1(x_+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta(x_+) \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x_+) & \alpha_{12}(x_+) \\ \alpha_{21}(x_+) & \alpha_{22}(x_+) \\ \beta_{11}(x_+) & \beta_{12}(x_+) \\ \beta_{21}(x_+) & \beta_{22}(x_+) \end{bmatrix}, \tag{4.1.2}$$

où les α_{ij} et les β_{ij} sont des fonctions à déterminer. Les fonctions X_i définies en (2.7.5) sont alors données par

$$X_1 = \frac{\alpha_{11} + (1 + |x|^2)\alpha_{22} + x_-\beta_{11}}{1 + |x|^2}, \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned} X_3 = \frac{1}{1 + |x|^2} \Big[& |\alpha_{11}|^2 + |x|^2|\alpha_{12}|^2 + (1 + |x|^2)|\alpha_{22}|^2 + |\beta_{11}|^2 + |\beta_{12}|^2 + |\beta_{21}|^2 \\ & + (1 + |x|^2)|\beta_{22}|^2 + \alpha_{11}^*\alpha_{22} + \alpha_{22}^*\alpha_{11} + x_-\alpha_{22}^*\beta_{11} + x_+\beta_{11}^*\alpha_{22} \\ & - x_-\alpha_{12}^*\beta_{12} - x_+\beta_{12}^*\alpha_{12} \Big], \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

où $*$ indique le complexe conjugué. À partir de ces expressions, nous avons résolu (4.0.3) et (4.0.4).

La première condition (4.0.3) s'annule identiquement et n'apporte donc aucune contrainte sur les fonctions α_{ij} et β_{ij}.

La deuxième équation (4.0.4) peut être réécrite

$$|2(\partial_+\alpha_{12})+x_+(\partial_+^2\alpha_{12})-\partial_+^2\beta_{12}|^2+|2(\partial_+\beta_{22})+x_+(\partial_+^2\beta_{22})|^2+|\partial_+^2\beta_{21}|^2+|\partial_+^2\beta_{22}|^2=0. \tag{4.1.5}$$

Cette dernière expression ne fait pas intervenir les fonctions α_{11}, α_{21}, α_{22} et β_{11}, qui resteront donc arbitraires. De plus, étant donné que les fonctions β_{ij} sont supposées réelles par hypothèse, l'équation (4.1.5) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
&\partial_+^2\beta_{21}=0,\\
&2(\partial_+\alpha_{12})+x_+(\partial_+^2\alpha_{12})-(\partial_+^2\beta_{12})=0,\\
&2(\partial_+\beta_{22})+x_+(\partial_+^2\beta_{22})=0,\\
&\partial_+^2\beta_{22}=0.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Ceci implique que β_{21} doit être linéaire en x_+ et que β_{22} doit être une constante. De plus, β_{12} peut être exprimée en termes de α_{12} :

$$\beta_{12}=x_+\alpha_{12}+b_1x_++b_0, \tag{4.1.7}$$

où b_1 et b_0 sont des constantes arbitraires et α_{12} est une fonction arbitraire. On obtient alors que la solution générale W_1 holomorphe à courbure constante associée à Z_1 est donnée par :

$$W_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\x_+&0\\0&0\end{bmatrix}+i\theta_+\eta\begin{bmatrix}\alpha_{11}(x_+)&\alpha_{12}(x_+)\\\alpha_{21}(x_+)&\alpha_{22}(x_+)\\\beta_{11}(x_+)&x_+\alpha_{12}(x_+)+b_1x_++b_0\\c_1x_++c_0&d_0\end{bmatrix}, \tag{4.1.8}$$

où b_1, b_0, c_1, c_0 et d_0 sont des constantes arbitraires.

À partir de maintenant, il est intéressant de voir l'effet d'un choix de jauge sur cette solution. Rappelons que la matrice β_R sera complètement déterminée par le choix sur α_R par (2.4.14). En posant $\alpha_R=0$, la matrice β_R s'écrit

$$\beta_R=\beta-K_1\alpha=\begin{bmatrix}\beta_{11}(x_+)-x_+\alpha_{11}(x_+)&b_1x_++b_0\\c_1x_++c_0&d_0\end{bmatrix}. \tag{4.1.9}$$

Or, β_{11} et α_{11} sont des fonctions arbitraires de x_+ et donc on peut redéfinir une nouvelle fonction arbitraire

$$\beta_{11,R}(x_+):=\beta_{11}(x_+)-x_+\alpha_{11}(x_+). \tag{4.1.10}$$

À partir de (4.1.9) et (4.1.10), on conclut que W_1 est équivalent à

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_{11,R}(x_+) & b_1x_+ + b_0 \\ c_1x_+ + c_0 & d_0 \end{bmatrix}. \tag{4.1.11}$$

Il reste à vérifier que la nouvelle solution a bien une courbure constante comme attendu. C'est bien le cas car c'est un cas particulier de (4.1.8).

Nous avons montré à la section 2.8 que $A_1 = \partial_+ Z_1$ menait à une solution W_1 de courbure constante. Notons que si $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = d_0 = 0$, nous obtenons bien cette solution. En effet, $\beta_{11,R}$ peut alors être absorbé dans la fonction arbitraire η, ce qui mène à $W_1 = Z_1 + i\theta_+\eta\partial_+ Z_1$.

Un fait intéressant est que la solution W_1 =(4.1.11) peut être reliée à la résolution du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$supersymétrique. Rappelons que la solution générale de $\mathbb{C}P^{N-1}$donnée en (3.1.28) respectait la condition

$$Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{r} + 2(X_3 - X_1X_2) = 0, \tag{4.1.12}$$

qui est une condition plus forte que (4.0.4). Pour $Z_1 \in G(2,4)$, on a

$$Y_3 - \frac{Y_1Y_2}{r} + 2(X_3 - X_1X_2) = 2d_0^2 + b_0^2 + b_1^2 + c_0^2 + c_1^2. \tag{4.1.13}$$

où les b_i, c_i et d_i sont les constantes définies en (4.1.8). Si nous imposons cette condition pour la solution (4.1.11) obtenue précédemment, nous obtenons encore $A_1 = \partial_+ Z_1$.

Dans la suite de l'exposé, comme indiqué dans l'introduction, nous utiliserons l'invariance de jauge pour trouver les autres solutions à courbure constante. Cela signifie que toutes les matrices $A_r(x_+)$ seront de la forme (4.0.2).

4.2. Solution Z_3

La solution bosonique Z_3 est donnée par

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3}x_+^2 & \sqrt{8/3}x_+ \\ 0 & \sqrt{1/3}x_+ \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

et nous vérifions facilement que $\det(Z_3^\dagger Z_3) = (1+|x|^2)^3$ impliquant $r=3$. La fonction X_1 est

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}(1+|x|^2)^3}\left[(3+|x|^2)x_-^2\beta_{11} + 2\sqrt{2}x_-\beta_{12} \right. \\ \left. - 2\sqrt{2}|x|^2x_-^2\beta_{21} + \beta_{22}x_-(1+3|x|^4)\right]. \tag{4.2.2}$$

Analysons tout d'abord la condition (4.0.3). On obtient une fraction, dont le numérateur donne un polynôme en x_- de degré 3 et le dénominateur ne peut s'annuler. Elle est équivalente à la condition

$$Y_{1s}(x_+, x_-) = 0, \tag{4.2.3}$$

où Y_{1s}, défini par

$$Y_{1s}(x_+, x_-) = (1+|x|^2)^5\partial_+(Y_1 + 2X_1) \tag{4.2.4}$$

est un polynôme de degré 3 en x_-. L'équation (4.0.3) se ramène à résoudre le système suivant :

$$Y_{1s}(x_+, 0) = 0, \tag{4.2.5}$$

$$\partial_- Y_{1s}(x_+, x_-)|_{x_-=0} = 0, \tag{4.2.6}$$

$$\partial_-^2 Y_{1s}(x_+, x_-)|_{x_-=0} = 0, \tag{4.2.7}$$

$$\partial_-^3 Y_{1s}(x_+, x_-)|_{x_-=0} = 0. \tag{4.2.8}$$

Or, (4.2.5) est donné par

$$-8\sqrt{2}\partial_+\beta_{12} - 4\partial_+\beta_{22} + 3\partial_+^2\beta_{11} - 4\sqrt{2}x_+\partial_+^2\beta_{12} - 2x_+\partial_+^2\beta_{22} = 0. \tag{4.2.9}$$

En intégrant cette expression, on obtient une condition sur la fonction β_{11}

$$\beta_{11}(x_+) = \frac{4\sqrt{2}x_+}{3}\beta_{12}(x_+) + \frac{2}{3}x_+\beta_{22}(x_+) + c_1 + x_+c_2. \tag{4.2.10}$$

pour c_1 et c_2 des constantes. En remplaçant cette condition sur β_{11} dans (4.2.6), on obtient

$$2\sqrt{2}\beta_{12} - 8\beta_{22} + 4\sqrt{2}x_+\partial_+\beta_{12} + 6\sqrt{2}\partial_+\beta_{21} - 16x_+\partial_+\beta_{22} + \sqrt{2}x_+^2\partial_+^2\beta_{12} \\ + 3\sqrt{2}x_+\partial_+^2\beta_{21} - 4x_+^2\partial_+^2\beta_{22} + 15c_2 = 0. \tag{4.2.11}$$

En intégrant (4.2.11), on obtient que la fonction β_{21} doit s'écrire comme

$$\beta_{21}(x_+) = \frac{2\sqrt{2}x_+}{3}\beta_{22}(x_+) - \frac{x}{3}\beta_{12}(x_+) - \frac{5x_+c_2}{2\sqrt{2}} - \frac{c_3}{x_+} + c_4, \tag{4.2.12}$$

où c_3 et c_4 sont des constantes. Or, en remplaçant les conditions sur β_{11} et β_{21} obtenues en (4.2.10) et (4.2.12) dans les équations (4.2.7) et (4.2.8), on obtient comme seule autre condition que les constantes c_i doivent toutes s'annuler. On peut donc conclure que la condition (4.0.3) est équivalente à (4.2.10) et (4.2.12), avec $c_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$. Il reste maintenant à analyser l'équation (4.0.4).

La fonction X_3 est donnée par

$$X_3 = \frac{1}{3(1+|x|^2)^3} \left[(3+8|x|^2)|\beta_{12}|^2 + 2\sqrt{2}|x|^2\beta_{12}^*\beta_{22} + 2\sqrt{2}|x|^2\beta_{22}^*\beta_{12} \right. \\ \left. + (3+|x|^2)|\beta_{22}|^2 \right] \tag{4.2.13}$$

À partir de cette expression, on peut calculer la fonction Y que nous définissons comme

$$Y = Y_3 - \frac{Y_1 Y_2}{r} + 2(X_3 - X_1 X_2), \tag{4.2.14}$$

c'est-à-dire tel que la condition (4.0.4) devienne

$$\partial_+ \partial_- Y = 0. \tag{4.2.15}$$

Or, l'équation (4.2.15) est équivalente ce que la fonction Y s'écrive comme une somme d'une fonction quelconque de x_- et d'une fonction de x_+. En d'autres mots, W_3 sera de courbure constante si Y s'écrit comme

$$Y = f(x_+) + g(x_-) \tag{4.2.16}$$

pour des fonctions f et g arbitraires. On cherche à montrer qu'il faut pour cela que

$$\beta_{12}(x_+) = 2\sqrt{2}\beta_{22}(x_+). \tag{4.2.17}$$

Nous allons donc poser que

$$\beta_{12}(x_+) = 2\sqrt{2}\beta_{22}(x_+) + \gamma(x_+), \tag{4.2.18}$$

où γ est une fonction à déterminer. La fonction Y =(4.2.14) peut alors être calculée en remplaçant les conditions (4.2.10) et (4.2.12), ainsi que (4.2.17). On obtient

$$Y = \frac{|-2x_-\gamma(x_+) + (1+|x|^2)\partial_+\gamma(x_+))|^2}{9(1+|x|^2)^2} \tag{4.2.19}$$

Pour que la fonction Y ait la forme donnée en (4.2.16), il faut que la fonction suivante s'annule :

$$F_g(x_+, x_-) = |-2x_-\gamma(x_+) + (1+|x|^2)\partial_+\gamma(x_+)|^2 - (1+|x|^2)^2 \left[f(x_+) + g(x_-)\right] = 0. \tag{4.2.20}$$

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer que les fonctions β_{ij} sont réelles. Ceci implique que γ l'est aussi. Nous allons donc poser r, une fonction réelle telle que

$$r(x_+) := \gamma(x_+) \quad \text{et} \quad r(x_-) := \gamma^*(x_-). \tag{4.2.21}$$

La fonction F_g =(4.2.20) devient alors

$$\begin{aligned}F_g(x_+,x_-) = &\left[-2x_-r(x_+) + (1+|x|^2)r'(x_+)\right]\left[-2x_+r(x_+) + (1+|x|^2)r'(x_-)\right]\\ &- (1+|x|^2)^2\left[f(x_+) + g(x_-)\right] = 0.\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

En imposant $F_g(x_+,0) = 0$ et $F_g(0,x_-) = 0$, on peut obtenir la forme des fonctions f et g de (4.2.16) en terme de r et déduire que

$$f(x_+)+g(x_-) = -\left[r'(0)\right]^2+\left[-2x_+r(0) + r'(0)\right]r''(x_+)+\left[-2x_-r(0) + r'(0)\right]r'(x_-). \tag{4.2.23}$$

En remplaçant la condition (4.2.23) dans F_g =(4.2.22) et en imposant que $\partial_+F_g(x_+,x_-)|_{x_-} = 0$, nous obtenons une équation différentielle qui peut aisément être résolue pour donner la forme de $r(x_+)$:

$$r(x_+) = \frac{r(0)r''(0) + x_+r'(0)\left[-2r(0) + r''(0)\right]}{2x_+^2r(0) - 2x_+r'(0) + r''(0)}. \tag{4.2.24}$$

On remarque que l'on a bien que r évalué à 0 redonne $r(0)$, de même que ∂_+r qui redonne $r'(0)$. La deuxième dérivée évaluée à 0 devient quand à elle :

$$r''(0) = \frac{-4\left[r(0)^2 - r'(0)^2\right]}{r''(0)}, \tag{4.2.25}$$

ce qui donne la condition suivante sur la fonction r.

$$r''(0)^2 + 4r(0)^2 - 4r'(0)^2 = 0. \tag{4.2.26}$$

Rappelons que l'objectif est de montrer que $r(x_+)$ doit s'annuler. En remplaçant la forme obtenue pour r en (4.2.24) dans la fonction F_g =(4.2.22), nous obtenons un polynôme en $|x|^2$. Ceci implique, en posant $x_+ = x_-$ et en annulant ensuite chacune des dérivées successives de F_g, que

$$r(0) = 0 \quad \text{et} \quad r'(0) = 0. \tag{4.2.27}$$

Par (4.2.26), il faut alors aussi que

$$r''(0) = 0, \tag{4.2.28}$$

et , par (4.2.24), on obtient la condition

$$r(x_+) = 0. \tag{4.2.29}$$

La fonction $\gamma(x_+)$ s'annule donc, ce qui est équivalent à ce que :

$$\beta_{12}(x_+) = 2\sqrt{2}\beta_{22}(x_+). \tag{4.2.30}$$

En rassemblant toutes les conditions, on a que toutes les fonctions β_{ij} peuvent être exprimées en termes de la fonction arbitraire β_{22} :

$$\begin{aligned}
&\beta_{11}(x_+) = 6x_+\beta_{22}(x_+) \\
&\beta_{12}(x_+) = 2\sqrt{2}\beta_{22}(x_+) \\
&\beta_{21}(x_+) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

La solution holomorphe W_3 générale à courbure constante associée à Z_3 est donc

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3}x_+^2 & \sqrt{\frac{8}{3}}x_+ \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}}x_+ \end{bmatrix} + i\theta_+\eta(x_+)\beta_{22}(x_+)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6x_+ & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2.32}$$

où β_{22} est une fonction arbitraire. Il est possible de retrouver la solution trouvée à la section 2.8 en posant

$$\beta_{22}(x_+) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4.2.33}$$

Pour Z_3, la solution (2.8.27) est donc unique.

4.3. Solution Z_4

La solution bosonique Z_4 est

$$Z_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_+^3 & \sqrt{3}x_+^2 \\ \sqrt{3}x_+^2 & 2x_+ \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

et $\det(Z_4^\dagger Z_4) = (1+|x|^2)^4$. La résolution de Z_4 est similaire à celle de Z_3. La fonction X_1 est donnée par

$$\begin{aligned}
X_1 = \frac{1}{(1+|x|^2)^3}\,[\,&2x_-^3\beta_{11} + \sqrt{3}(1-|x|^2)x_-^2\beta_{12} + \sqrt{3}(1-|x|^2)x_-^2\beta_{21} \\
&+ 2(1-|x|^2+|x|^4)x_-\beta_{22}\,],
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

L'équation (4.0.3) implique qu'une certaine fonction rationnelle s'annulle. Son numérateur sera, comme pour Z_3, un polynôme de degré 3 et son dénominateur sera donné par $(1+|x|^2)^5$. Elle peut donc être résolue de la même façon, c'est-à-dire à l'aide des équations (4.2.5) à (4.2.8) où Y_{1s} est défini en (4.2.4). L'équation (4.2.5) donne, dans ce cas :

$$-12\partial_+\beta_{22} + \sqrt{3}\partial_+^2\beta_{12} + \sqrt{3}\partial_+^2\beta_{21} - 6x_+\partial_+^2\beta_{22} = 0, \tag{4.3.3}$$

qui impose en intégrant que

$$\beta_{12}(x_+) = 2\sqrt{3}x_+\beta_{22}(x_+) - \beta_{21}(x_+) + c_1 + c_2x_+. \tag{4.3.4}$$

En remplaçant β_{12} par cette expression dans l'équation (4.2.6), cette dernière devient

$$-6\beta_{22} - 12x_+\partial_+\beta_{22} + \partial_+^2\beta_{11} - 3x_+^2\beta_{22} - 3\sqrt{3}c_2 = 0. \tag{4.3.5}$$

En intégrant, on obtient donc que β_{11} doit avoir la forme

$$\beta_{11}(x_+) = 3x_+^2\beta_{22}(x_+) + \frac{3\sqrt{3}x_+^2c_2}{2} + c_3 + c_4x_+, \tag{4.3.6}$$

où c_3 et c_4 sont des constantes arbitraires. Les équations (4.2.7) et (4.2.8) ajoutent comme condition que les constantes d'intégration doivent toutes s'annuler.

Il reste à analyser (4.0.4). Nous allons pour cela utiliser la même méthode que pour Z_3, en posant cette fois-ci que

$$\beta_{21}(x_+) = \sqrt{3}x_+\beta_{22}(x_+) + \gamma(x_+), \tag{4.3.7}$$

où γ est une fonction à déterminer. En remplaçant cette condition ainsi que celle obtenues plus tôt sur β_{11} et β_{12}, la fonction Y définie en (4.2.14) devient :

$$Y = \frac{|(1+|x|^2)\partial_+\gamma(x_+) - 4x_-\gamma(x_+)|^2 - 2|\gamma(x_+)|^2}{(1+|x|^2)^4}. \tag{4.3.8}$$

Pour que Y ait la forme donnée en (4.2.16), il faut, en procédant comme pour la solution Z_3, que la fonction suivante s'annule :

$$\begin{aligned} F_g(x_+, x_-) = &\Big[(1+|x|^2)r'(x_+) - 4x_-r(x_+)\Big]\Big[(1+|x|^2)r'(x_-) - 4x_+r(x_-)\Big] \\ &- 2r(x_+)r(x_-) - (1+|x|^2)^4\left[f(x_+) + g(x_-)\right] = 0, \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

où r est une fonction réelle définie par $r(x_+) = \gamma(x_+)$ et $r(x_-) = \gamma(x_-)$. En posant $F_g(x_+, 0) = F_g(0, x_-) = 0$, on obtient la valeur des fonctions $f(x_+)$ et $g(x_-)$. En remplaçant ces valeurs de f et g dans (4.3.9), on obtient la condition suivante sur r :

$$r(x_+) = \frac{r(0)r''(0) + x_+r'(0)\left[-6r(0) + r''(0)\right]}{12x_+^2r(0) - 6x_+r'(0) + r''(0)}. \tag{4.3.10}$$

qui implique

$$r''(0)^2 = 12\left[-2r(0)^2 + r'(0)\right]^2. \tag{4.3.11}$$

À partir de ces conditions, il peut être démontré de façon similaire au cas Z_3 que $r(0) = r'(0) = r''(0)$. Ceci implique, par (4.3.10), que la fonction r s'annule identiquement.

Nous avons donc, par (4.3.7) montré que la fonction β_{11} doit avoir la forme suivante :

$$\beta_{21}(x_+) = \sqrt{3}x_+\beta_{22}(x_+) \tag{4.3.12}$$

et qu'avec (4.3.4) et (4.3.6), elles sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que W_4 ait courbure constante. En rassemblant ces conditions, on obtient que les fonctions β_{ij} peuvent être exprimées en termes de la fonction arbitraire β_{22} :

$$\begin{aligned} \beta_{11}(x_+) &= 3x_+^2\beta_{22}(x_+), \\ \beta_{12}(x_+) &= \sqrt{3}x_+\beta_{22}(x_+), \\ \beta_{21}(x_+) &= \sqrt{3}x_+\beta_{22}(x_+). \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

La solution W_4 holomorphe générale à courbure constante associée à Z_4 est donc

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x_+^3 & \sqrt{3}x_+^2 \\ \sqrt{3}x_+^2 & 2x_+ \end{bmatrix} + i\theta_+\eta\beta_{22}(x_+) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3x_+^2 & \sqrt{3}x_+ \\ \sqrt{3}x_+ & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.3.14}$$

Il encore une fois possible de retrouver la solution (2.8.27) à partir de (4.3.14). Il suffit de poser

$$\beta_{22}(x_+) = 2. \tag{4.3.15}$$

Pour W_4, la solution (2.8.27) est donc unique.

4.4. Solution Z_2

Cette solution est plus complexe car elle dépend d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$. Sa partie purement bosonique est donnée par [**11**] :

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+^2 \cos 2t & \sqrt{2}x_+ \cos t \\ \sqrt{2}x_+ \sin t & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4.1}$$

Notons que, sans perte de généralité, le paramètre t peut être choisi dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. La fonction X_1 est donc donnée par :

$$\begin{aligned} X_1 =& \frac{1}{(1+|x|^2)^2} \Big[x_-^2 \cos 2t\, \beta_{11} + \sqrt{2} \left(1 + |x|^2 \sin^2 t\right) x_- \cos t\, \beta_{12} \\ &+ \sqrt{2} \left(1 + |x|^2 \cos^2 t\right) x_- \sin t\, \beta_{21} - 2|x|^4 \cos t \sin t \cos 2t\, \beta_{22} \Big]. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

La méthode de résolution utilisée ici nécessite de considérer que le paramètre t est tel que $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$ et $\sin 2t$ ne s'annulent pas. Ces cas singuliers devront être discutés séparément par la suite, dans la sous-section 4.4.1.

La condition (4.0.3) est maintenant un polynôme de degré 2 en x_-, avec un dénominateur de $(1+|x|^2)^4$. Elle est donc équivalente aux conditions (4.2.5) à (4.2.7) avec Y_{1s} cette fois-ci défini comme

$$Y_{1s} = (1+|x|^2)^4(Y_1 + 2X_1). \tag{4.4.3}$$

La condition (4.2.5) est donnée par :

$$\begin{aligned}2(\sin 2t)\beta_{22} + 2\sqrt{2}(\cos t)\partial_+\beta_{12} - 2\sqrt{2}(\sin t)\partial_+\beta_{21} + 4x_+(\sin 2t)\partial_+\beta_{22} - \partial_+^2\beta_{11}\\ + 2x_+(\cos t)\partial_+^2\beta_{12} - \sqrt{2}x_+(\sin t)\partial_+^2\beta_{21} + x_+^2(\sin 2t)\partial_+^2\beta_{22} = 0.\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

En intégrant, on obtient que

$$\beta_{11}(x_+) = \sqrt{2}(\cos t)x_+\beta_{12}(x_+) - \sqrt{2}(\sin t)x_+\beta_{21}(x_+) + (\sin 2t)x_+^2\beta_{22}(x_+) + c_1 + c_2x_+. \tag{4.4.5}$$

En remplaçant cette valeur dans (4.2.6), (4.2.7), on obtient qu'il faut que les constantes c_1 et c_2 s'annulent toutes. L'équation (4.0.3) est donc équivalente à (4.4.5) avec $c_1 = c_2 = 0$ pour Z_2.

La solution Z_2 étant plus complexe, notamment en raison du paramètre t mais également car la condition (4.0.3) ne donne de l'information que sur une des fonctions β_{ij}, nous avons fait l'hypothèse que les fonctions β_{ij} inconnues sont des polynômes de degré 2 en x_+. Nous avons donc posé

$$\begin{aligned}\beta_{12}(x_+) &= a_{12}x_+^2 + b_{12}x_+ + c_{12},\\ \beta_{21}(x_+) &= a_{21}x_+^2 + b_{21}x_+ + c_{21},\\ \beta_{22}(x_+) &= a_{22}x_+^2 + b_{22}x_+ + c_{22},\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes, et $\beta_{11}(x_+)$ donné par (4.4.5). Nous avons par la suite appliqué la condition (4.0.4) en utilisant la forme que nous venons de décrire pour les β_{ij}. Nous obtenons un polynôme en $x_+^m x_-^n$, avec $0 \leq m, n \leq 6$, qui doit s'annuler identiquement. Il faut donc que chacun des termes s'annule. Cette condition est équivalente à imposer que

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{12}\tan t, \\ c_{21} &= c_{12}\tan t, \\ a_{22} &= 0, \\ b_{22} &= 0, \\ c_{22} &= \frac{b_{21}\cos t - b_{12}\sin t}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

où a_{12}, b_{12}, b_{21} et c_{12} sont des constantes quelconques. En rassemblant ces conditions avec celle sur β_{11} donnée en (4.4.5), on obtient la solution générale W_2 associée à la solution Z_2, pour t, un paramètre tel que $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$ et $\sin 2t$ ne s'annulent pas, et en supposant que les fonctions β_{12}, β_{21} et β_{22} sont des polynômes de degré 2 ou moins :

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+^2\cos 2t & \sqrt{2}x_+\cos t \\ \sqrt{2}x_+\sin t & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_{11}(x_+) & a_{12}x_+^2 + b_{12}x_+ + c_{12} \\ a_{12}\tan t x_+^2 + b_{21} + c_{12}\tan t & \dfrac{b_{21}\cos t - b_{12}\sin t}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{4.4.8}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes quelconques et la fonction β_{11} est donnée par :

$$\sqrt{2}a_{12}x_+^3\cos 2t\sec t + \frac{x_+^2}{2\sqrt{2}}\left[(b_{12}(3\cos t + 3\cos 3t) - 4b_{21}\sin^3 t\right] + \sqrt{2}c_{12}\cos 2t\sec t x_+. \tag{4.4.9}$$

Pour retrouver la solution de la section (2.8), il faut poser $c_{12} = \sqrt{2}\cos t$ et les autres paramètres nuls. Celle-ci n'est donc pas unique.

4.4.1. Cas singuliers des solutions Z_2

Nous allons terminer en classifiant les sous-cas de Z_2 que nous avons mis de côté dans la précédente démonstration. En effet, nous avions initialement posé que le paramètre t est tel que $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$ et $\sin 2t$ ne s'annulent pas. Les cas singuliers correspondent donc à $t = \dfrac{k\pi}{4}$ où k est un entier. Rappelons que le paramètre t peut être pris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ sans perte de généralité. De plus, il est possible de montrer que les solutions avec $t = \dfrac{(2k-1)\pi}{4}$ sont équivalentes à une transformation de jauge de $U(4)$ près. La paire $t = 0$ et $t = \pi$ est également équivalente de jauge, tout comme la paire $t = \dfrac{\pi}{2}$ et $t = \dfrac{3\pi}{2}$. Il est donc suffisant de considérer uniquement les cas $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ et $t = \dfrac{\pi}{4}$. C'est ce qui est fait dans cette sous-section.

Si $t = 0$, la solution bosonique Z_2 a la forme

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+^2 & \sqrt{2}x_+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4.10}$$

La condition (4.2.5) devient alors

$$-2\sqrt{2}\partial_+\beta_{12} + \partial_+^2\beta_{11} - \sqrt{2}x_+\partial_+^2\beta_{12} = 0 \tag{4.4.11}$$

En intégrant, on obtient :

$$\beta_{11}(x_+) = \sqrt{2}x_+\beta_{12}(x_+) + c_1 + c_2x_+. \tag{4.4.12}$$

En remplaçant cette condition dans les équations (4.2.6) et (4.2.7), on obtient comme seule autre condition que les constantes c_1 et c_2 doivent s'annuler.

Pour appliquer la condition (4.0.4), nous avons, comme pour le cas t quelconque, posé que les autres fonctions β_{ij} sont des polynômes de degré 2 en x_+, avec la même notation qu'en (4.4.6). Nous obtenons de façon similaire un polynôme en $x_+^m x_-^n$, avec $0 \leq m, n \leq 6$, qui doit s'annuler identiquement. Il faut donc que chaque terme soit égal à zéro, ce qui est équivalent aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &a_{21} = c_{21} = a_{22} = b_{22} = 0, \\ &c_{22} = \frac{b_{21}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

où a_{12}, b_{12}, b_{21} et c_{12} sont des constantes quelconques. Nous obtenons donc la forme générale de la solution W_2 associée à la solution Z_2 pour $t = 0$ avec l'hypothèse des fonctions polynomiales :

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_+^2 & \sqrt{2}x_+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{2}(a_{12}x_+^3 + b_{12}x_+^2 + c_{12}x_+) & a_{12}x_+^2 + b_{12}x_+ + c_{12} \\ b_{21}x_+ & \dfrac{b_{21}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{4.4.14}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes arbitraires. On retrouve la solution de la section 2.8 en posant $c_{12} = \sqrt{2}$ et en annulant les autres paramètres. Cette solution n'est donc pas unique dans le cas $t = 0$.

Si $t = \dfrac{\pi}{2}$, la solution Z_2 est donnée par

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_+^2 & 0 \\ \sqrt{2}x_+ & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4.15}$$

La condition (4.2.5) est donnée par

$$2\sqrt{2}\partial_+\beta_{21} + \partial_+^2\beta_{11} + \sqrt{2}x_+\partial_+^2\beta_{21} = 0, \tag{4.4.16}$$

qui, en intégrant, donne une condition sur β_{11}

$$\beta_{11}(x_+) = -\sqrt{2}x_+\beta_{21}(x_+) + c_1 + c_2x_+. \tag{4.4.17}$$

Comme dans les autres cas, les conditions (4.2.6) et (4.2.7) imposent que c_1 et c_2 s'annulent si β_{11} est donnée par (4.4.17). Il ne reste qu'à analyser (4.0.4). Nous avons une fois de plus posé que les fonctions β_{ij} ont la forme donnée en (4.4.6). En annulant chaque terme du polynôme formé en appliquant la condition (4.0.4), on obtient que cette dernière est équivalente à imposer que :

$$\begin{aligned} &a_{12} = c_{12} = a_{22} = b_{22} = 0, \\ &c_{22} = -\frac{-b_{12}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

La solution W_2 avec $t = \frac{\pi}{2}$ est donc, en considérant notre hypothèse (4.4.6),

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_+^2 & 0 \\ \sqrt{2}x_+ & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sqrt{2}(a_{21}x_+^3 + b_{21}x_+^2 + c_{21}x_+) & b_{21}x_+ \\ a_{21}x_+^2 + b_{21}x_+ + c_{21} & \dfrac{b_{12}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{4.4.19}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes quelconques. Pour obtenir la solution de 2.8, on doit poser $c_{21} = \sqrt{2}$ et annuler les autres paramètres. Elle n'est donc encore une fois pas unique.

Si $t = \dfrac{\pi}{4}$, la solution Z_2 est donnée par

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_+ \\ x_+ & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4.20}$$

Dans ce cas, l'équation (4.0.3) s'annule identiquement et n'impose donc aucune contrainte sur les fonctions β_{ij}. Nous poserons donc, en plus de notre hypothèse

(4.4.6), que la fonction β_{11} est aussi un polynôme de degré 2 en x_+, c'est-à-dire qu'elle peut être écrite comme :

$$\beta_{11}(x_+) = a_{11}x_+^2 + b_{11}x_+ + c_{11}. \tag{4.4.21}$$

Nous obtenons alors que la condition (4.0.4) est un polynôme en $x_+^m x_-^n$ avec $0 \leq m, n \leq 2$ qui s'annule identiquement. Nous avons, de façon similaire aux autres cas, annulé un à un chaque terme. Ceci est équivalent aux deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &2a_{11}^2 + a_{12}^2 - 2a_{12}a_{21} + a_{21}^2 + 2a_{22}^2 - 2b_{11}^2 - b_{12}^2 - 2b_{12}b_{21} - b_{21}^2 - 2b_{22}^2 \\ &+ 2c_{11}^2 + c_{12}^2 - 2c_{12}c_{21} + c_{21}^2 + 2c_{22}^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

$$\begin{aligned} &- 2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} - a_{21}b_{21} - a_{12}b_{12} + a_{12}b_{21} - 2a_{22}b_{22} + 2b_{11}c_{11} \\ &+ b_{12}c_{12} - b_{21}c_{12} - b_{12}c_{12} + b_{21}c_{21} + 2b_{22}c_{22} = 0. \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

Il semble a priori y avoir beaucoup d'arbitraire. On peut aisément retouver la solution décrite à la section 2.8 en posant $c_{12} = c_{21} = 1$ et en annulant les autres paramètres. Cette solution n'est par contre pas unique. Par exemple, en posant $b_{11} = c_{22}$ et $c_{21} = c_{12}$, les conditions (4.4.22) et (4.4.23) sont respectées. Il s'agit donc d'un contre-exemple, c'est-à-dire une solution possible qui n'est pas équivalente à (5.0.4) :

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_+ \\ x_+ & 0 \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{11}x_+ & c_{12} \\ c_{12} & b_{11} \end{bmatrix}, \tag{4.4.24}$$

où b_{11} et c_{12} sont des constantes arbitraires. La forme générale de W_2 pour $t = \dfrac{\pi}{4}$ reste par contre à déterminer.

4.5. Retour à la solution Z_1

Pour terminer, cette section revient sur le cas Z_1 en redémontrant que la solution générale est bien (4.1.11), cette fois-ci à partir de la méthode utilisée pour les autres cas et en appliquant le choix de jauge dès le départ. Rappelons que la condition (4.0.3) s'annulait identiquement sans condition sur les fonctions β_{ij}. La fonction Y définie en (4.2.14) est alors

$$\begin{aligned} Y = 2|\beta_{22}|^2 + |\partial_+\beta_{12}|^2 + |\partial_+\beta_{21}|^2 + (1 + |x|^2)|\partial_+\beta_{22}|^2 + |\beta_{12} - x_+\partial_+\beta_{12}|^2 \\ + |\beta_{21} - x_+\partial_+\beta_{21}|^2. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Le premier terme indique que β_{22} doit être constant. Les deuxième et troisième termes indiquent que la dérivée des fonctions β_{12} et β_{21} doit être constante et donc que β_{12} et β_{21} doivent être linéaires. Or, si β_{12} et β_{21} sont linéaires, les deux derniers termes doivent être constants, comme attendu. Ce sont donc des conditions suffisantes, avec β_{22} constant. Nous obtenons bien la solution W_1 donnée en (4.1.11).

4.6. Sommaire des résultats pour $G(2,4)$

Nous avons donc déterminé les solutions générales supersymétriques associées aux solutions bosoniques Z_1, Z_3 et Z_4 du modèle $G(2,4)$. Celles-ci sont respectivement données par (4.1.11), (4.2.32) et (4.3.14). La solution bosonique Z_2 dépend d'un paramètre t. Son extension supersymétrique a été déterminée en considérant l'hypothèse que la partie fermionique est composée de polynômes de degré deux. La forme générale du cas où $t = \frac{\pi}{4}$ reste à déterminer. Les solutions supersymétriques générales trouvées incluaient toutes la forme de solution décrite dans la section 2.8. Cette dernière est l'unique forme des solutions W_3 et W_4 tandis que nous avons trouvé d'autres formes possibles pour W_1 et W_2.

Chapitre 5

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous avons étudié les solutions de modèles sigma supersymétriques associées à des surfaces de courbure constante. Dans le premier chapitre, après une présentation générale du modèle, nous avons développé de façon nouvelle son invariance de jauge. Nous avons alors découvert que toute solution supersymétrique holomorphe des modèles $G(M,N)$ peut être écrite comme $\Phi = WL$ où

$$W = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ K \end{bmatrix} + i\theta_+\eta \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \tag{5.0.1}$$

avec Φ et W, des matrices de format $N \times M$, et K et β, des matrices de format $(N-M) \times M$.

Par la suite, nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que W soit associé à une surface de courbure constante. Nous avions alors obtenu que (5.0.1) doit satisfaire les deux équations suivantes :

$$\partial_+\partial_-(Y_1 + 2X_1) = 0, \tag{5.0.2}$$

$$\partial_+\partial_-(Y_3 - \frac{1}{r}Y_1Y_2 + 2(X_3 - X_1X_2)) = 0, \tag{5.0.3}$$

où les X_i, $i, 1, 2, 3$ sont des fonctions qui dépendent de K et β, définies en (2.7.5) pour $G(2,N)$ et en (2.7.18) pour $\mathbb{C}P^{N-1}$. Les Y_i sont des fonctions des X_i définies en (2.7.11).

À partir de ces conditions, nous avons démontré que la fonction W suivante est toujours une solution à courbure constante des modèles $G(M,N)$, pour toute valeur de M et N :

$$W(x_+, \theta_+) = Z(x_+) + i\theta_+\eta(x_+)A(x_+), \tag{5.0.4}$$

lorsque $A = \partial_+Z$ et Z est une solution holomorphe à courbure constante du modèle bosonique.

Nous avons ensuite démontré que cette solution est unique dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$, toujours à partir de nos conditions (5.0.2) et (4.0.4). En effet, en ne faisant initialement aucun choix particulier de jauge, nous avons obtenu que l'unique vecteur A dans (5.0.4) menant à une solution holomorphe à courbure constante du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$supersymétrique est donnée par

$$a_n(x_+) = -(n-1)\sqrt{\binom{N-1}{n}}a_(x_+)x_+^n + \frac{n}{\sqrt{N-1}}\sqrt{\binom{N-1}{n}}a_1(x_+)x_+^{n-1}, \qquad 2 \leq n \leq N-1. \tag{5.0.5}$$

Or, en appliquant le choix de jauge décrit en (5.0.1), on obtient bien que ce vecteur peut être réduit à la solution (5.0.4), qui est donc bel et bien unique pour $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Nous cherchions ensuite à explorer l'unicité de la solution (5.0.4) pour le modèle $G(2,4)$. Celui-ci a trois solutions bosoniques holomorphes non-équivalentes de jauge, nommées Z_1, Z_3 et Z_4, ainsi qu'une famille de solutions holomorphes dépendant d'un paramètre t, nommée Z_2, qui ont une courbure constante. Nous avons trouvé les solutions générales supersymétriques à courbure constante associées aux solutions Z_1, Z_3 et Z_4. Les résultats sont respectivement donnés en (4.1.11), (4.2.32) et (4.3.14). La famille de solutions Z_2 a également été étendue au cas supersymétrique, en considérant des solutions polynomiales pour résoudre complètement le modèle. Il serait intéressant d'aller au-delà des solutions polynomiales pour décrire l'entièreté du modèle. Toutes les solutions générales supersymétriques avaient comme cas particulier celles données en (5.0.4). Cette dernière est unique pour Z_3 et Z_4, mais pas pour Z_1 et Z_2. En général, l'unicité de la solution (5.0.4) ne se généralise donc pas aux modèles $G(M,N)$ avec $M \geq 2$.

Il serait notamment intéressant de poursuivre la recherche de solutions à courbure constante pour des modèles plus complexes comme $G(2,5)$. En effet les solutions holomorphes à courbure constante ont été classifiées [**22**] en ce qui concerne la version bosonique.

Ce mémoire ne présente que les solutions holomorphes du modèle. Pour avoir une résolution complète, il serait intéressant de caractériser aussi les solutions non-holomorphes. Les principaux obstables à franchir pour trouver ces solutions sont l'invariance de jauge et la description adéquate de la métrique. Tout d'abord, notre développement de l'invariance de jauge utilise le fait que $\check{\partial}_- W = 0$. Sans cette condition, il y a trois matrices à déterminer au lieu d'une. En effet, W peut alors s'écrire

$$W(x_\pm, \theta_\pm) = Z(x_\pm) + i\theta_+\eta A_1(x_\pm) + i\theta_-\eta^\dagger A_2(x_\pm) - \theta_+\theta_-\eta^\dagger\eta A_3(x_\pm), \tag{5.0.6}$$

où A_1, A_2 et A_3 sont inconnues. Il faudrait alors redévelopper l'invariance de jauge du modèle pour savoir si les sous-matrices α_1, α_2 et α_3, définies de façon analogue à (2.4.11), peuvent toutes être prises égales à zéro, ou si d'autres conditions apparaissent.

De plus, nos équations de courbure constante (4.0.3) et (4.0.4) utilisent le fait que la solution W est holomorphe. En effet, elles se basent sur la forme de la métrique donnée en (1.4.6) qui nécessite que $\partial_- Z = 0$. Il faudrait donc adapter nos équations en conséquence.

Notons enfin que la construction des solutions non-holomorphes bosoniques, au moins dans le cas $G(2,4)$ est complètement différente de celle des solutions holomorphes. En effet, les solutions non-holomorphes sont construites à partir de la méthode de Gram-Schmidt et de la solution bosonique du modèle $\mathbb{C}P^{N-1}$(e.g. [**11**], [**10**]). Il serait intéressant de voir s'il est possible de généraliser cette méthode au cas supersymétrique pour obtenir les solutions non-holomorphes de $G(2,4)$. C'est d'ailleurs ce qui a été fait dans le cas $\mathbb{C}P^{N-1}$[**15**], où une généralisation de l'opérateur P_+ défini en (1.5.4) permet de trouver les solutions non-holomorphes supersymétriques.

Bibliographie

[1] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96, 1954.

[2] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North Holland, Amsterdam, 1ère édition, 1987.

[3] W. J. Zakrzewski. *Low-dimensional Sigma Models,* CRC Press, Bristol, England, 1989.

[4] B. G. Konopelchenko and G. Landolfi. Generalized Weierstrass representation for surfaces in multidimensional Riemann spaces. *Journal of Geometry and Physics*, 29, 1999.

[5] V. Hussin, İ Yurduşen, and W. J. Zakrzewski. Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models. *Journal of Mathematical Physics*, 51, 2010.

[6] A. M. Grundland, A. Strasburger, and W. J. Zakrzewski. Surfaces immersed in $su(N+1)$ Lie algebras obtained from the $\mathbb{C}P^N$ sigma models. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39, 2006.

[7] A. M. Grundland and W. J. Zakrzewski. The Weierstrass representation for surfaces immersed into $\mathbb{R}^8$ and $\mathbb{C}P^2$ maps. *Journal of Mathematical Physics*, 43, 2002.

[8] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigoli, and L. M. Woodward. On Conformal Minimal Immersions of S^2 into $\mathbb{C}P^n$. *Mathematische Annalen*, 279, 1998.

[9] L. Delisle, V. Hussin, and W. J. Zakrzewski. Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models : (1) Holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics*, 66, 2013.

[10] L. Delisle, V. Hussin, and W. J. Zakrzewski. Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models : (2) Non-holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics*, 71, 2013.

[11] Z. Li and Z. Yu. Constant curved minimal 2-spheres in $G(2,4)$. *Manuscripta Mathematica*, 100, 1998.

[12] E. Witten. Supersymmetric form of the nonlinear σ-model in two dimensions. *Physical Review D*, 16, 1977.

[13] B. DeWitt. *Supermanifolds*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2e edition, 1992.

[14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, Reading, MA, 1995.

[15] L. Delisle, V. Hussin, İ. Yurduşen, and W. J. Zakrzewski. Constant curvature surfaces of the supersymmetric $\mathbb{C}P^{N-1}$ sigma model. *Journal of Mathematical Physics*, 56, 2015.

[16] M. Gell-Mann and M. Lévy. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 16, 1960.

[17] A. J. MacFarlane. Generalizations of sigma models and CpN models, and instantons. *Physics Letters B*, 82, 1979.

[18] J. R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, Sausalito, Calif, 2005.

[19] H. Goldstein, C. Poole Jr, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Pearson, San Francisco, NJ, 3e édition, 2001.

[20] R. Horn. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[21] W. J. Zakrzewski. Surfaces in $\mathbb{R}^{N^2-1}$ based on harmonic maps $S^2 \mapsto \mathbb{C}P^{N-1}$. *Journal of Mathematical Physics*, 48, 2007.

[22] X. Jiao and J. Peng. Classification of holomorphic spheres of constant curvature in complex Grassmann manifold $G(2,5)$. *Differential Geometry and its Applications*, 20, 2004.

[23] V. Hussin, M. Lafrance, İ. Yurdusen, and W. J. Zakrzewski. Holomorphic solutions of the susy σ-model and gauge invariance. *arXiv :1711.08415*, November 2017.

[24] V. Hussin and W. J. Zakrzewski. Susy $\mathbb{C}P^{N-1}$ model and surfaces in R^{N^2-1}. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 39, 2006.

Annexe A

DÉMONSTRATION DE LA RÈGLE DE LEIBNIZ POUR LES SUPERDÉRIVÉES $\check{\partial}_{\pm}$

Soient deux quantités supersymétriques A et B dépendant des coordonnées $(x_{\pm}, \theta_{\pm})$. Elles peuvent alors être développées à partir des propriétés des variables de Grassmann (2.1.2)

$$A(x_{\pm}, \theta_{\pm}) = A_0(x_{\pm}) + i\theta_+ A_1(x_{\pm}) + i\theta_- A_2(x_{\pm}) - \theta_+\theta_- A_3(x_{\pm}), \tag{A.0.1}$$

$$B(x_{\pm}, \theta_{\pm}) = B_0(x_{\pm}) + i\theta_+ B_1(x_{\pm}) + i\theta_- B_2(x_{\pm}) - \theta_+\theta_- B_3(x_{\pm}), \tag{A.0.2}$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 sont des fonctions quelconques qui anticommutent entre elles (2.1.1) tandis que A_0, A_3, B_0 et B_3 sont des fonctions quelconques qui commutent. Le produit de A et B donne donc

$$\begin{aligned} AB = {} & A_0B_0 + i\theta_+ \left(A_0B_1 + A_1B_0\right) + i\theta_- \left(A_0B_2 + A_2B_0\right) \\ & - \theta_+\theta_- \left(A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 + A_3B_0\right). \end{aligned} \tag{A.0.3}$$

En appliquant la dérivée $\check{\partial}_+$, on obtient :

$$\begin{aligned} \check{\partial}_+(AB) = {} & A_0B_1 + A_1B_0 + \theta_+\partial_+ \left(A_0B_0\right) + i\theta_- \left(A_0B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 + A_3B_0\right) \\ & - i\theta_+\theta_-\partial_+ \left(A_0B_2 + A_2B_0\right). \end{aligned} \tag{A.0.4}$$

Si l'on applique la $\check{\partial}_+$ sur A seulement, cela donne

$$\check{\partial}_+ A = A_1 + \theta_+\partial_+ A_0 + i\theta_- A_3 + i\theta_+\theta_-\partial_+ A_2 \tag{A.0.5}$$

et similairement pour B. Par (A.0.5) et les propriétés d'anticommutation, on obtient alors

$$\begin{aligned} A(\check{\partial}_+ B) + (\check{\partial}_+ A)B = {} & A_0 B_1 + A_1 B_0 + \theta_+ \left[A_0(\partial_+ B_0) + (\partial_+ A_0) B_0 \right] \\ & + i\theta_- \left[A_0 B_3 + - A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_3 B_0 \right] \\ & + i\theta_+\theta_- \left[A_0(\partial_+ B_2) + (\partial_+ A_0) B_2 + A_2(\partial_+ B_0) + (\partial_+ A_2) B_0 \right]. \end{aligned} \tag{A.0.6}$$

En comparant (A.0.4) et (A.0.6), on obtient que la règle de leibniz est vérifiée

$$\check{\partial}_+(AB) = A(\check{\partial}_+ B) + (\check{\partial}_+ A)B, \tag{A.0.7}$$

étant donné que la dérivée régulière ∂_+ respecte la règle de Leibniz.

Annexe B

CALCUL AVEC η NON-CONSTANT

Pour faire un exemple de calcul avec $\eta = \eta(x_+)$, voici la preuve du théorème 2.8.1 sans utiliser l'hypothèse que η soit constant.
La métrique g est donnée par

$$g = \partial_+\partial_- \ln\left(\det W^\dagger W\right) \tag{B.0.1}$$

avec

$$\det W^\dagger W = (1+\mathcal{D})R, \tag{B.0.2}$$

où

$$\mathcal{D} = i\theta_+\eta(x_+)\partial_+ + i\theta_-\eta^\dagger(x_+)\partial_- - \theta_+\theta_-|\eta(x_+)|^\dagger\partial_+\partial_-. \tag{B.0.3}$$

Or, nous avons déjà montré que

$$\ln(1+\mathcal{D})R = (1+\mathcal{D})\ln R, \tag{B.0.4}$$

et donc que la métrique peut être réécrite

$$g = \partial_+\partial_-(1+\mathcal{D})\ln R. \tag{B.0.5}$$

Il reste maintenant à calculer (B.0.5) en considérant que η est une fonction de x_+. On obtient alors, en posant $\partial_+\partial_-\ln R = C$ pour simplifier les calculs plus tard,

$$\begin{aligned} g = [&1 + i\theta_+(\partial_+\eta + \eta\partial_+) + i\theta_-(\partial_-\eta^\dagger + \eta^\dagger\partial_-) \\ &- \theta_+\theta_-\left((\partial_-\eta^\dagger)(\partial_+\eta) + (\partial_-\eta^\dagger)\eta\partial_+ + \eta^\dagger(\partial_+\eta)\partial_- + \eta^\dagger\eta\partial_+\partial_-\right)]\, C. \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

La courbure sera constante s'il existe une constante k_0 telle que

$$-gk_0 = \partial_+\partial_- \ln g \tag{B.0.7}$$

Or, en utilisant le développement de Taylor du logarithme, on obtient

$$\begin{aligned}\ln g = & \ln C + i\theta_+ \left(\partial_+\eta + \frac{\eta}{C}\partial_+ C\right) + i\theta_- \left(\partial_-\eta^\dagger + \frac{\eta^\dagger}{C}\partial_- C\right) \\ & - \theta_+\theta_- \left[\frac{1}{C}\partial_+\partial_- \left(\eta^\dagger\eta C\right) - \frac{1}{C^2}\left(\partial_-\eta^\dagger C - \eta^\dagger\partial_- C\right)\left(\partial_+\eta C + C\eta\partial_+ C\right)\right].\end{aligned} \tag{B.0.8}$$

À partir de la dernière expression, analysons l'équation (B.0.7) terme à terme. Le terme indépendant de θ_+ et θ_- donne comme attendu

$$k_0 = \frac{2}{r}. \tag{B.0.9}$$

Le terme en θ_+ donne, du côté droit,

$$\partial_+\partial_- \left(\partial_+\eta + \frac{\eta}{C}\partial_+ C\right) = -2\left[(\partial_+\eta)C + \eta\partial_+ C\right]. \tag{B.0.10}$$

On obtient bien le coefficient de θ_+ dans la métrique (B.0.6) avec un facteur $-\frac{2}{r}$. Le terme en θ_- est complètement symétrique avec celui en θ_+ car ils sont conjugués complexes l'un de l'autre. Il ne reste qu'à évaluer le terme en $\theta_+\theta_-$. Le côté droit donne

$$\partial_+\partial_- \left[\eta^\dagger\eta\left(\frac{1}{C}\partial_+\partial_- C - \frac{1}{C^2}\partial_+ C\partial_- C\right)\right] = -2\partial_+\partial_- \left[\eta^\dagger\eta C\right] \tag{B.0.11}$$

qui peut aisément se réécrire comme le terme en $\theta_+\theta_-$ de (B.0.1). On a donc que l'équation (B.0.7) est vérifiée et donc que la solution présentée au théorème 2.8.27 a une courbure constante même si $\eta = \eta(x_+)$.