

Université de Montréal

« Sur la figure des colonnes » de Lagrange revisité

par

Francis Huot-Chantal

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
orientation mathématiques appliquées

10 janvier 2018

© Francis Huot-Chantal, 2018

SOMMAIRE

Le problème du flambage de la colonne a été formulé par Lagrange vers 1770 et sa résolution a fait l'objet de nombreux travaux. Plusieurs solutions ont été proposées, mais toutes comportaient des erreurs. Lagrange, lui-même, avait trouvé que la colonne optimale était un cylindre droit, ce qui fut démontré sous-optimal par la suite. Les solutions erronées et publiées étaient principalement dues au fait que le problème n'est pas différentiable à l'optimum. En 1992, Cox et Overton ont revisité des variantes de ce problème et ont montré l'existence d'une solution pour des profils bornés inférieurement et supérieurement par des constantes strictement positives en utilisant la dualité d'Auchmuty et le gradient généralisé de Clarke. Pour Egorov, les hypothèses *a priori* de Cox et d'Overton ne permettent pas d'affirmer l'existence de solutions, car elles éliminent la possibilité de profils dégénérés.

Dans ce mémoire, on étudiera la forme optimale sans imposer de bornes *a priori* et l'on cherchera à extraire toute l'information. Dans un premier temps, on a étudié la version discrétisée du problème qui permet de travailler avec des espaces de dimension finie et d'obtenir l'existence d'une colonne optimale dans tous les cas. Le problème conserve cependant ses caractéristiques et demeure non différentiable. Essentiellement, on maximise la première valeur propre généralisée par rapport à des ensembles de volume constant. Comme la plus petite valeur propre est Hadamard semi-différentiable, il est possible de caractériser l'optimalité et de faire des calculs. Dans un deuxième temps, on a élargi l'espace de Sobolev des flexions pour permettre l'étude de la maximisation par rapport à des profils possiblement dégénérés. Ces nouveaux espaces « sur mesure » introduisent de nouveaux défis mathématiques.

Le problème du flambage de la colonne est un cas particulier des problèmes impliquant l'optimisation de la plus petite valeur propre lorsqu'elle n'est pas simple. Ceci donne à ce travail une portée mathématique et numérique beaucoup plus grande.

Mots clés : Lagrange, colonne encastrée, problème aux valeurs propres, multiplicité, conditions nécessaires d'optimalité, opérateur dégénéré, approximation par éléments finis, méthode de points intérieurs

SUMMARY

The column's bucking load problem was formulated by Lagrange around 1770. There were many solutions proposed, but all contained some errors. Lagrange himself claimed the solution had a straight cylinder section, which was found to be suboptimal later. False solutions were mainly caused by the non-differentiability of the problem. In 1992, Cox and Overton revisited the problem using Auchmuty's dual principle and Clarke's generalized gradient. They established the existence of a solution by only considering columns whose profile is bounded above and below by some positive constants. According to Egorov, Cox and Overton's a priori hypothesis excluded possibly degenerated column's profiles and, as a consequence, they cannot justify and claim the existence of solutions.

In this Master's thesis, we will study the optimal shape/profile problem and look for all the available information without assuming the existence of a priori bounds. Firstly, we will study the discrete form of the problem which will allow us to restrict the problem in finite dimension and guarantee the existence. Nonetheless, the problem will still be non-differentiable as it will keep his important characteristics. Essentially, in both continuous and discrete versions, we want to maximize the first generalized eigenvalue under a constant volume constraint. Since the problem is Hadamard semidifferentiable, a necessary optimality condition can be obtained. But in this work we rather concentrated on including possibly degenerate profiles by enlarging the Sobolev space of inflections for the minimization problem. Those new "custom-made" spaces are better suited for our purpose but, at the same time, they introduce new mathematical challenges.

The column's bucking load problem can be viewed as a generic problem of optimizing the least non-simple eigenvalue. Therefore, this work is relevant in a broader perspective for mathematical and numerical purposes.

Keywords : Lagrange, clamped-clamped column, eigenvalue problem, multiplicity, necessary optimality conditions, degenerate operator, finite element approximation, interior point method

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|------|
| Sommaire | iii |
| Summary | v |
| Liste des tableaux | xi |
| Liste des figures | xiii |
| Remerciements | xv |
| Introduction | xvii |
| Chapitre 1. Colonnes admissibles bornées : existence de solutions | 1 |
| 1.1. Le problème de maximisation de la charge critique..... | 1 |
| 1.1.1. La colonne pleine..... | 1 |
| 1.1.2. La colonne creuse..... | 3 |
| 1.1.3. Généralisation à $0 < p < \infty$ | 5 |
| 1.2. Existence et propriétés des profils maximisants pour la colonne encastrée..... | 5 |
| 1.2.1. Choix de l'espace V et de l'ensemble des profils $A(x)$ | 5 |
| 1.2.2. Propriétés de l'application $A \mapsto \lambda_p(A)$ | 7 |
| 1.2.3. Famille des A paires..... | 8 |
| 1.2.4. Existence de profil maximisant..... | 9 |
| 1.2.5. Croissance du supremum par rapport à l'exposant $p \geq 0$ | 12 |
| 1.3. La minimisation pour le cas non dégénéré : $0 < \alpha \leq A(x)$ | 13 |
| 1.3.1. Existence de solutions minimisantes..... | 13 |
| 1.3.2. Problème aux valeurs propres associé au problème de minimisation.... | 13 |
| 1.3.3. Multiplicité des valeurs propres..... | 15 |
| 1.3.4. Formulation de E. Kamke [24] pour $p = 1$ | 16 |
| 1.4. La colonne uniforme..... | 18 |
| 1.4.1. Borne inférieure pour le supremum..... | 18 |
| 1.4.2. Borne supérieure sur le problème dual?..... | 22 |

| | | |
|--------------------|---|-----------|
| 1.5. | La colonne creuse ou plus généralement $0 < p \leq 1$ | 24 |
| 1.5.1. | Une meilleure borne supérieure pour le problème dual..... | 24 |
| 1.5.2. | Construction d'un A à partir d'une fonction propre | 28 |
| Chapitre 2. | Problème en dimension finie..... | 31 |
| 2.1. | Orientation..... | 31 |
| 2.2. | Le problème discrétisé..... | 31 |
| 2.2.1. | Les espaces d'approximation de V et de \mathcal{A} | 31 |
| 2.2.2. | Fonctions de base pour L_h | 32 |
| 2.2.3. | Fonctions de base pour V_h | 33 |
| 2.2.4. | Existence de solution et propriétés de la fonction $A_h \mapsto \lambda_p(A_h)$ | 35 |
| 2.3. | Expressions des matrices $M(A_h)$ et N | 39 |
| 2.3.1. | Cas $p = 1$ | 39 |
| 2.3.2. | Du cas $p = 1$ au cas $0 < p < \infty$ | 41 |
| 2.4. | Multiplicité des valeurs propres pour $p = 1$ | 45 |
| 2.5. | Mise en œuvre des calculs | 47 |
| 2.6. | Résultats numériques | 48 |
| 2.6.1. | La colonne creuse maximisante pour $p = 1$ | 48 |
| 2.6.2. | La colonne pleine maximisante pour $p = 2$ | 50 |
| 2.6.3. | Autres calculs pour $p = 1$ | 51 |
| 2.6.4. | Observations par rapport à la colonne optimale en fonction de p | 53 |
| 2.6.5. | Profil maximisant pour $p = 0, 1$ et $p = 3$ | 54 |
| Chapitre 3. | Nouvel espace de fonctions propres..... | 55 |
| 3.1. | Orientation..... | 55 |
| 3.2. | Les espaces $V^p(A)$ pour l'infimum $\lambda_p(A)$ | 56 |
| 3.2.1. | Les espaces $V^p(A)$, $0 < p < +\infty$, pour $A \in \mathcal{A}^\infty$ | 56 |
| 3.2.2. | Les espaces $V^p(A)$ pour $A^{p/2}$ et A dans $W^{1,\infty}(0, 1)$ | 58 |
| 3.2.3. | Problème aux valeurs propres associé..... | 64 |
| 3.3. | Borne inférieure sur le profil maximisant..... | 65 |
| 3.3.1. | Profils lipschitziens et $p > 2$ | 65 |
| 3.3.2. | Conjecture pour le cas $0 < p \leq 1$ | 67 |

| | |
|---|--------|
| 3.4. Résultats et conjectures pour le cas $p = 1$ | 70 |
| 3.4.1. La fonction d'Olhoff-Niordson pour $p = 1$ | 71 |
| 3.4.2. $\lambda = 48$ est-il l'infimum par rapport à $V^1(A)$? | 74 |
| 3.4.3. Un autre exemple qui donne 48 | 75 |
| Conclusion | 77 |
| Bibliographie | 81 |
| Annexe A. Notions d'analyse fonctionnelle | A-i |
| A.1. Forme bilinéaire et théorème de Lax-Milgram | A-i |
| A.2. Opérateurs compacts | A-i |
| A.3. Espaces de Sobolev | A-ii |
| A.4. Topologie faible étoile, compacité, semi-continuité, convexité, séparabilité | A-iii |
| Annexe B. Formulation Matricielle | B-i |
| B.1. Outils pour matrice tridiagonale par bloc | B-i |
| B.2. Calculs des matrices du problème discrétisé | B-iii |
| B.2.1. Calcul des $M_{i,i-1,k}$ et $N_{i,i-1,k}$ | B-iii |
| B.2.2. Calcul des $M_{i,i,k}$ et $N_{i,i,k}$ | B-iv |
| B.2.3. Calcul des $M_{i,i+1,k}$ et $N_{i,i+1,k}$ | B-vi |
| B.2.4. Calcul de $N_{i,i}$, $N_{i,i-1}$ et $N_{i,i+1}$ | B-vi |
| B.2.5. Assemblage des sous-matrices matrices | B-vii |
| B.3. Implémentation numérique | B-viii |
| B.4. Résultats numériques résumés | B-x |

LISTE DES TABLEAUX

| | | |
|--------|--|------|
| 2. I | Les fonctions de base et leurs translations..... | 44 |
| 2. II | Comparaison des résultats numériques pour $n = 2000$ et $p = 1$ avec Cox et Overton..... | 49 |
| 2. III | Comparaison des résultats numériques pour $n = 2000$ et $p = 2$ avec différents auteurs..... | 50 |
| 2. IV | Les valeurs propres pour chaque fonction pour $n = 2000$ et $p = 1$ | 51 |
| B. I | Les valeurs propres et les hauteurs en fonction de p pour $n = 2000$ | B-xi |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|------|---|----|
| 1.3 | Résultats numériques tels que présentés dans [9]..... | 11 |
| 1.4 | Deux premières fonctions propres correspondant à $\lambda^{(1)} = (2\pi)^2 \cong 39,4784$ (en bleu) et $\lambda^{(2)} \cong 80,7629$ pour $\omega \cong 8,9868$ (en rouge)..... | 19 |
| 2.1 | Fonctions de base $(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_{n+1})$ de L_h | 33 |
| 2.2 | Les fonctions α et β et leurs dérivées..... | 34 |
| 2.3 | Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$ et $p = 1$ | 49 |
| 2.4 | Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$ et $p = 2$ | 50 |
| 2.5 | Comparaison entre A_{poly} et A_{optim} | 52 |
| 2.6 | Comparaison entre A_{trigo} et A_{optim} | 52 |
| 2.7 | Hauteur en $x = 1/4$ en fonction de p | 53 |
| 2.8 | Hauteur en $x = 0$ (bleue) et en $x = 1/2$ (rouge) en fonction de p | 53 |
| 2.9 | Première (bleue) et deuxième (rouge) valeurs propres en fonction de p | 54 |
| 2.10 | Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$ | 54 |
| 3.1 | Solution impaire et $f_1(u, A) = 48$ | 76 |

REMERCIEMENTS

J'aimerais commencer par remercier M. Michel Delfour, non pas par courtoisie, mais plutôt par profonde gratitude pour toute l'aide qu'il m'a apportée. Je suis énormément reconnaissant de tout le temps précieux qu'il m'a accordé depuis le tout premier courriel que je lui ai envoyé. Sa connaissance et sa passion des mathématiques m'ont donné les outils et la motivation nécessaires pour réaliser ce mémoire. Plus personnellement, ses conseils par rapport à mon avenir m'ont été précieux, tout comme ses encouragements et sa constante bonne humeur.

Pour l'enseignement exceptionnel que j'ai reçu au département de mathématiques et de statistique, j'exprime ma gratitude envers Mme Anne Bourlioux, Mme Marlène Frigon et M. Iosif Polterovich. Chacun des cours que j'ai suivis avec ces professeurs passionnés fut très formateur.

Un remerciement spécial à deux étudiants pour leur aide : Arthur Bawin pour les éléments finis et Nicolas Dupuis-Sandoval pour la traduction d'un article. Merci énormément à Alexis Langlois-Rémillard et à Ariane Ledoux d'avoir lu attentivement toutes les pages qui suivent. Évidemment, mon parcours a été marqué par les amis que je me suis faits à l'Université de Montréal : Florence, Léonard, Julie, Justin, Marie-Christine, Michaël et Vincent. Merci à ceux qui étaient avec moi lorsque j'en avais besoin. Je pense surtout à Sooraya, mais aussi à Alexandre, Antoine, Benjamin, François, Fred, Joseph, Patrice, Patrick et Philip-Emmanuel. Je vous remercie tous sincèrement de votre présence. J'aimerais terminer en remerciant mon père de tout mon cœur.

INTRODUCTION

En mécanique, le *flambage* est un phénomène d’instabilité d’une structure qui, soumise à un effort normal de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à l’axe de compression (passage d’un état de compression à un état de flexion). Vers 1770, Lagrange souhaitait trouver le profil de la colonne verticale de volume et de hauteur donnés qui puisse maximiser l’effort de compression (charge verticale) avant qu’il n’y ait flambage. Il propose de traiter le problème différemment de ce qui avait été fait par les autres auteurs de l’époque, notamment par Euler [21] en 1757 [28, pp. 126–127]. Mais Lagrange ne trouve pas la bonne réponse :

« D’où l’on doit conclure que la figure cylindrique est celle qui donne le *maximum maximorum* de la force. (Lagrange, 1770-1773 [28, p. 169]) ».

Plusieurs experts en mécanique et en mathématiques ont depuis travaillé sur le problème et certains, comme Yu. V. Egorov [19], y travaillent encore en 2017. Des solutions ont été proposées pour des variantes du problème : certaines justes, certaines partielles, certaines erronées.

Comme on le verra plus loin, ce problème est, en fait, un problème de maximisation de la plus petite valeur propre d’un opérateur différentiel d’ordre quatre. Le premier aspect singulier de ce problème est la possibilité que l’aire transversale $A(x)$ à la hauteur x le long de l’axe vertical de la colonne (en particulier pour une colonne creuse) puisse être nulle en un ou plusieurs points. L’opérateur différentiel d’ordre quatre devient alors dégénéré et les résultats classiques pour une colonne dont l’aire transversale $A(x)$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive ne s’appliquent plus : l’opérateur différentiel n’est pas coercif, ni même V - H coercif. La seconde difficulté réside dans le fait que pour le profil maximisant la valeur propre puisse être de multiplicité deux. Ceci est confirmé numériquement pour la colonne pleine. Cette multiplicité crée une non-différentiabilité de la valeur propre par rapport au profil A . C’est dans ce contexte non différentiable que s’inscriront les travaux de Cox et d’Overton [9] en 1992 pour une colonne dont l’aire transversale sera bornée inférieurement par une constante strictement positive et bornée supérieurement pour obtenir la compacité de l’ensemble des profils par rapport auxquels on maximise.

En 1962, Tadjbakhsh et Keller [36] proposent une solution analytique au problème de la colonne pleine. La forme obtenue était surprenante et contre-intuitive, car il s'agissait d'une colonne ayant une aire transversale nulle aux points $1/4$ et $3/4$ de la colonne de hauteur un. Ils se réfèrent à Clausen [8] qui a obtenu une solution analytique pour la colonne articulée et libre. Pour ces deux derniers types de conditions aux extrémités, la plus petite valeur propre est simple et le problème devient donc différentiable. Ceci explique pourquoi ce sont les deux cas pour lesquels les résultats n'ont pas été critiqués. En 1977, Olhoff et Rasmussen [31] conjecturent que la multiplicité de la valeur propre pourrait être double en introduisant une formulation bimodale du problème pour la colonne pleine. Comme beaucoup d'auteurs par la suite, ils critiquèrent Tadjbakhsh et Keller [36] pour ne pas avoir considéré la possibilité d'une valeur propre double ce qui entraîne la non-différentiabilité du problème.

En 1979, Olhoff et Niordson [30] introduisent une famille de problèmes caractérisés par le fait que le moment quadratique $I(x)$ de la section transversale est proportionnel à la puissance $p > 0$ de l'aire de la section transversale $A(x)$. Ceci inclut la colonne pleine pour $p = 2$ et la colonne creuse pour $p = 1$. Ils introduisent, pour une colonne creuse, une fonction quadratique par morceaux qui s'annule en $1/4$ et en $3/4$. Ils la classifient sous-optimale après avoir trouvé une charge critique plus faible que celle de la colonne creuse uniforme. En 1984, Seiranyan [35, eq. 5.9, p. 110] utilise des conditions d'optimalité pour obtenir la même forme polynomiale que [30] pour la colonne creuse ($p = 1$). Il conclut qu'on ne peut pas affirmer que cette colonne est sous-optimale comme l'ont fait les auteurs précédents, car les déformations proposées ne sont pas différentiables et qu'il faut alors utiliser la théorie des distributions [35, p. 110]. On reviendra sur cette question qui semble encore ouverte dans ce mémoire.

Dans la première partie de leur article de 1992, Cox et Overton [9] reprennent plusieurs variantes du problème de la forme optimale de la colonne. Le problème est normalisé de façon à considérer une colonne de hauteur un et de volume un dont l'aire transversale est représentée par une fonction $A(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Ils supposent que $A(x)$ est *bornée inférieurement par une constante strictement positive et bornée supérieurement par une autre constante*. Ceci élimine *a priori* la possibilité que l'aire transversale s'annule en un point. Sous ces hypothèses, ils obtiennent l'existence d'un profil maximisant dans tous les cas incluant la colonne pleine et la colonne creuse. Ils critiquent beaucoup d'auteurs qui les ont précédés, dont Olhoff et Rasmussen [31], pour leur manque de rigueur [9, p. 289]. Dans la seconde partie, ils présentent des résultats numériques pour le calcul du profil maximisant et des fonctions propres qui lui sont associées. Les essais numériques confirment que, pour la colonne pleine ($p = 2$), le profil maximal A a une borne inférieure strictement positive et que la fonction A est Lipschitz continue et symétrique par rapport à $1/2$. Pour la colonne creuse ($p=1$), les

auteurs [9, p. 303] obtiennent numériquement une fonction qui est étonnamment proche de celle obtenue par Olhoff et Niordson [30] : nulle en $1/4$ et $3/4$. Comme ils le font remarquer :

« *Indeed, the fact that A vanishes at $1/4$ and $3/4$ introduces computational difficulties* ». (Cox et Overton, 1992 [9, p. 289])

Bien que numériquement ils n’obtiennent pas exactement zéro en ces deux points, ceci remet en question leur hypothèse que l’aire du profil maximisant soit bornée inférieurement par une constante strictement positive pour la colonne creuse. Sans preuve de l’existence de telles bornes, il n’y a pas de preuve de l’existence d’un profil maximisant :

« *Cox and Overton proved in [9] the existence theorem under some supplementary conditions which does not imply the existence theorem for the Lagrange problem* ». (Egorov, 2002 [17])

Egorov propose une nouvelle approche pour le problème de la colonne pleine [12, 15] en 2002-2003 et pour le problème de la colonne creuse [13, 16] en 2003-2005. Son argumentation est plus mécanique que mathématique et vise à incorporer la valeur propre double et les deux fonctions propres directement dans une *formulation bimodale* du problème. Il reprend ses anciens résultats dans son plus récent article de 2017 [19] avec une méthode qu’il qualifie de plus simple. En particulier, dans cet article de 2017, Egorov reprend les calculs numériques de [13, 16] qui, en 2003-2005, étaient incorrects, car il obtenait le profil maximisant de la colonne pleine. Il y obtient une nouvelle charge maximale de 41.48, alors que Cox et Overton obtiennent numériquement autour de 48. Son nouveau calcul donne aussi un profil maximisant qui est borné inférieurement par une constante strictement positive 0.1754 aux points 0.22152 et 0.77848. Comme l’approche d’Egorov est difficile à suivre, les questions fondamentales qu’il a soulevées restent ouvertes.

L’objectif de ce mémoire est de revisiter numériquement et théoriquement le problème de Lagrange sans écarter *a priori* des profils dégénérés. Comme les cas génériques des colonnes pleine et creuse ont été généralisés dans la littérature à une plus vaste famille de colonnes dont l’intérêt est peut-être plus mathématique que pratique, les résultats seront présentés dans ce cadre général. Par ailleurs, le type d’appui influe sur les conditions au bord des déformations admissibles à l’extrémité de la colonne. Bien que l’on puisse considérer trois façons dont la colonne est soutenue aux deux extrémités (encastrée, rotulée ou libre), on se limitera au cas de la colonne encastrée aux deux bouts.

Dans un premier chapitre, on donnera la formulation mathématique du problème général et on rappellera et complétera les résultats importants sous l’hypothèse d’une borne inférieure strictement positive sur l’aire transversale. Dans le second chapitre, on procédera à

la discrétisation du problème continu. On utilisera une méthode de points intérieurs pour la maximisation de la première valeur propre plutôt que de passer par la condition nécessaire d'optimalité qui est plus compliquée dans le cas non différentiable. L'expérimentation numérique permettra d'acquérir une meilleure compréhension des différentes facettes du problème de Lagrange et de développer une meilleure intuition pour la suite du mémoire. Au troisième chapitre, on reviendra sur les différents aspects de la formulation du problème de Lagrange pour inclure des profils dégénérés qui pourront être nuls en certains points. Ceci va permettre des discontinuités de la dérivée première des fonctions propres aux points où l'aire de la colonne s'annule. Olhoff et Niordson [30] ainsi que Seiranyan [35] avaient déjà considéré un tel profil pour la colonne creuse et les résultats numériques n'excluent pas une telle possibilité. On introduira pour les fonctions propres des espaces plus grands que $H_0^2(0,1)$. Ceci permettra de démontrer un certain nombre de résultats nouveaux et d'avancer des conjectures intéressantes.

Chapitre 1

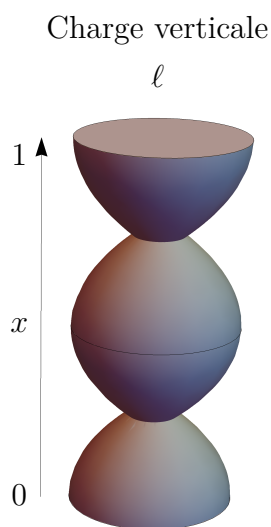
COLONNES ADMISSIBLES BORNÉES : EXISTENCE DE SOLUTIONS

1.1. LE PROBLÈME DE MAXIMISATION DE LA CHARGE CRITIQUE

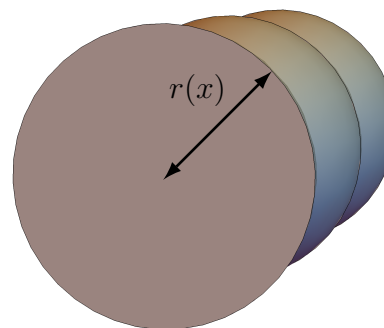
1.1.1. La colonne pleine

On considère une colonne verticale axisymétrique de hauteur 1 obtenue par rotation de la fonction $r(x)$, $0 \leq x \leq 1$, autour de son axe vertical

$$\left\{ (x, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq r(x) \right\}.$$



(A) Une colonne pleine vue de côté.



(B) Une colonne pleine vue de face.

Sa section circulaire $S(x)$, son moment quadratique $I(x)$ et son volume $V(r)$ sont donnés par

$$S(x) = \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq r(x) \right\}, \quad \int_0^{r(x)} 2\pi\rho \, d\rho = \pi r(x)^2,$$

$$I(x) = \int_0^{r(x)} y^2 2\pi y \, dy = \frac{2\pi}{4} r(x)^4, \quad V(r) = \int_0^1 \pi r^2(x) \, dx.$$

Soient ℓ la charge axiale et v la déformation transversale. On suppose que l'énergie potentielle est la somme des énergies de flexion et de compression

$$\int_0^1 E I |v''|^2 \, dx - \ell \int_0^1 |v'|^2 \, dx,$$

où I est le moment quadratique (second moment) de l'aire de la section transversale de la colonne par rapport à l'axe vertical et E est le module de Young que l'on suppose constant. Tant que ℓ est assez petit, l'énergie potentielle demeure positive. La charge critique est donnée par

$$\ell_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in V} \frac{\int_0^1 E I |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx},$$

où V est un espace de fonctions définies sur $[0,1]$ qui précise les conditions aux deux bouts de la colonne. Par exemple, dans le cas de la colonne encastree, V pourrait être l'espace des fonctions $v \in H_0^2(0,1)$ pour lesquelles $v(0) = v(1) = 0$ et $v'(0) = v'(1) = 0$. Pour tout $0 < \ell \leq \ell_2$, l'énergie potentielle demeure positive ou nulle.

En substituant l'expression de $I(x)$,

$$g_2(r, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_0^1 E \frac{2\pi}{4} r(x)^4 |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx} = \frac{E}{2\pi} \frac{\int_0^1 (\pi r(x)^2)^2 |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx}. \quad (1.1.1)$$

En introduisant la fonction normalisée

$$A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\pi r(x)^2}{\int_0^1 \pi r(x)^2 \, dx}, \quad \int_0^1 A(x) \, dx = 1,$$

l'expression devient

$$\begin{aligned} g_2(r, v) &= \frac{E}{2\pi} \left(\int_0^1 \pi r(x)^2 \, dx \right)^2 \frac{\int_0^1 (A(x))^2 |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx} \\ &= \frac{E}{2\pi} V(r)^2 \frac{\int_0^1 (A(x))^2 |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx} \\ &\implies \frac{\int_0^1 (A(x))^2 |v''|^2 \, dx}{\int_0^1 |v'|^2 \, dx} = g_2(r, v) \frac{2\pi}{EV(r)^2}. \end{aligned}$$

On peut maintenant travailler avec le problème normalisé

$$f_2(A,v) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\int_0^1 A^2 |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}, \quad \lambda_2(A) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf_{0 \neq v \in V} f_2(A,v), \quad \int_0^1 A(x) dx = 1,$$

et l'on voit que l'infimum est la premi\u00e8re valeur propre de l'op\u00e9rateur diff\u00e9rentiel d'ordre 4 du num\u00e9rateur dont les quatre conditions limites sont donn\u00e9es par l'espace V . Finalement, le supremum par rapport \u00e0 tous les profils maximisants pour la colonne pleine est donn\u00e9 par

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \lambda_2(A), \quad \mathcal{A} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ A \in L^1(0,1) : \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \\ \text{et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \end{array} \right\}.$$

Il reste \u00e0 d\u00e9terminer s'il existe un $\hat{A} \in \mathcal{A}^\infty$ qui r\u00e9alise le supremum.

1.1.2. La colonne creuse

On consid\u00e8re une colonne verticale axisym\u00e9trique creuse de hauteur 1 obtenue par rotation des fonctions $R + r(x)/2$ et $R - r(x)/2$, $0 \leq x \leq 1$, autour de son axe vertical

$$\left\{ (x, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } R - r(x)/2 \leq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq R + r(x)/2 \right\},$$

o\u00f9 $R > 0$ est une constante et l'\u00e9paisseur de la paroi de la colonne $0 \leq r(x) \ll R$ est beaucoup plus petite que R . Sa section circulaire $S(x)$, son moment quadratique $I(x)$ et son volume $V(r)$ sont donn\u00e9s par

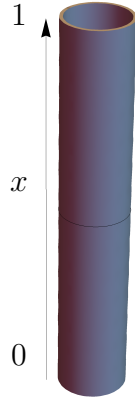
$$\begin{aligned} S(x) &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : R - r(x)/2 \leq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq R + r(x)/2 \right\}, \\ \int_{R-r(x)/2}^{R+r(x)/2} 2\pi \rho d\rho &= 2\pi R r(x), \quad V(r) = \int_0^1 2\pi R r(x) dx, \\ I(x) &= \int_{R-r(x)/2}^{R+r(x)/2} y^2 2\pi y dy = \frac{2\pi}{4} \left[(R + r(x)/2)^4 - (R - r(x)/2)^4 \right] \\ &\approx 2\pi R^3 r(x), \text{ pour } 0 \leq r(x) \ll R. \end{aligned}$$

Comme pour la colonne pleine, la charge critique est donn\u00e9e par

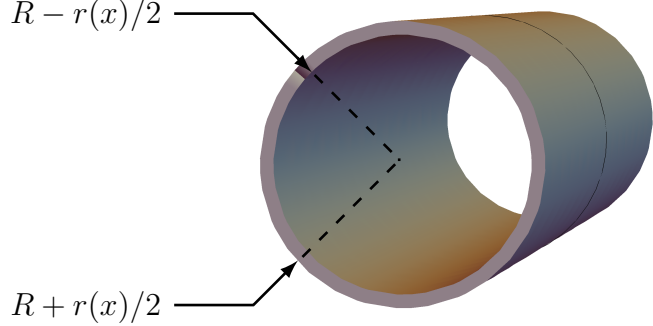
$$\ell_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf_{0 \neq v \in V} \frac{\int_0^1 E I |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}.$$

Charge verticale

ℓ



(A) Une colonne creuse vue de côté.



(B) Une colonne creuse d'épaisseur $r(x)$ autour de la surface moyenne de rayon R .

En substituant l'expression de $I(x)$, on obtient

$$g_1(r,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_0^1 E 2\pi R^3 r(x) |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} = ER^2 \frac{\int_0^1 2\pi R r(x) |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}. \quad (1.1.2)$$

En introduisant la fonction normalisée

$$A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2\pi R r(x)}{\int_0^1 2\pi R r(x) dx}, \quad \int_0^1 A(x) dx = 1,$$

l'expression devient

$$\begin{aligned} g_1(r,v) &= ER^2 V(r) \frac{\int_0^1 A(x) |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \\ \implies \frac{\int_0^1 A(x) |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} &= g_1(r,v) \frac{1}{ER^2 V(r)}. \end{aligned}$$

On peut maintenant travailler avec le problème normalisé

$$f_1(A,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_0^1 A |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}, \quad \lambda_1(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in V} f_1(A,v), \quad \int_0^1 A(x) dx = 1,$$

et l'on voit que l'infimum est la première valeur propre de l'opérateur différentiel d'ordre 4 du numérateur dont les quatre conditions limites sont données par l'espace V . Finalement, le supremum par rapport à tous les profils maximisants pour la colonne creuse est donné par

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \lambda_1(A), \quad \mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^1(0,1) : \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \\ \text{et } \int_0^1 A(x) dx = 1, \end{array} \right\}.$$

1.1.3. Généralisation à $0 < p < \infty$

Comme mentionné dans l'introduction, Olhoff et Niordson [30] introduisirent en 1979 une famille de problèmes caractérisés par le fait que le moment quadratique $I(x)$ de la section transversale $A(x)$ est proportionnel à la puissance $p > 0$ de la section $A(x) \geq 0$:

$$\lambda_p(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in V} f_p(A, v), \quad f_p(A, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}, \quad \int_0^1 A(x) dx = 1, \quad (1.1.3)$$

où $V \subset H_0^2(0,1)$. Ceci généralise les deux cas précédents pour $p = 2$ et $p = 1$. Par convention, on considérera le cas $p = 0$ comme celui de la colonne cylindrique de section uniforme $A(x) = 1$ pour lequel $\lambda_p(1) = (2\pi)^2$ est indépendant de p comme on le verra plus loin au théorème 1.4.1.

La *charge critique* est donnée par

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \lambda_p(A), \quad \mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^1(0,1) : A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\}.$$

Le supremum de la charge critique $\lambda_p(A)$ par rapport à $A \in \mathcal{A}$ est nécessairement plus grand que la charge critique de la colonne uniforme d'une aire de coupe constante, c'est-à-dire $A \equiv 1$. Il suffira donc de maximiser sur le sous-ensemble plus petit

$$\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \{A \in \mathcal{A} : \lambda_p(A) \geq \lambda_p(1)\}. \quad (1.1.4)$$

1.2. EXISTENCE ET PROPRIÉTÉS DES PROFILS MAXIMISANTS POUR LA COLONNE ENCASTRÉE

1.2.1. Choix de l'espace V et de l'ensemble des profils $A(x)$

Si l'on se rapporte aux publications passées, la colonne encastrée aux deux bouts semble être le cas mathématiquement le plus intéressant. On choisit donc ce cas pour le reste de ce mémoire. Pour le reste du chapitre, ce choix revient à prendre $V = H_0^2(0,1)$.

On commence par considérer des profils dans

$$L_+^1(0,1) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^1(0,1) : A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \right\}. \quad (1.2.1)$$

La fonction $f_p(A, v)$ à minimiser par rapport à $H_0^2(0,1) \setminus \{0\}$ est bornée inférieurement par 0 pour $A \in L_+^1(0,1)$. Donc l'infimum,

$$\lambda_p(A) = \inf_{0 \neq v \in V} f_p(A, v), \quad f_p(A, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}, \quad (1.2.2)$$

existe et est fini si et seulement si il existe $0 \neq v \in H_0^2(0,1)$ tel que $f_p(A,v) < +\infty$. Autrement l'infimum serait $+\infty$. Cela est vrai si on choisit de maximiser par rapport à la plus petite famille $\mathcal{A} \cap L^p(0,1)$. Comme, pour $0 < p \leq 1$, $L^1(0,1) \subset L^p(0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap L^p(0,1)$ et la propriété est vérifiée. Cependant, pour $p > 1$, $L^p(0,1) \subset L^1(0,1)$, $\mathcal{A} \cap L^p(0,1) \subset \mathcal{A}$ et il n'est pas clair qu'il existe $0 \neq v \in H_0^2(0,1)$ tel que $f_p(A,v) < +\infty$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Pour que, pour tout p , $0 < p < \infty$, et $0 \neq v \in H_0^2(0,1)$, l'intégrale

$$\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx \quad (1.2.3)$$

soit finie, on est donc amené à prendre $A \in L^\infty(0,1)$ et à introduire l'espace

$$\mathcal{A}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^\infty(0,1) : A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\}. \quad (1.2.4)$$

Comme précédemment, le supremum de la charge critique $\lambda_p(A)$ par rapport à $A \in \mathcal{A}^\infty$ est nécessairement plus grand que la charge critique de la colonne uniforme d'une aire de coupe constante, $A \equiv 1$. Il suffira donc de maximiser sur le sous-ensemble plus petit

$$\mathcal{A}_1^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in \mathcal{A}^\infty : \lambda_p(A) \geq \lambda_p(1) = (2\pi)^2 \right\}. \quad (1.2.5)$$

De manière générale, il peut ne pas exister un $u \in H_0^1(0,1)$ qui réalise l'infimum $\lambda_p(A)$. Comme on le verra au chapitre 3, si A est nul en un point, le u minimisant pourrait appartenir à un espace plus grand que $H_0^2(0,1)$. Si l'on veut s'assurer de l'existence d'un minimisant $u \in H_0^2(0,1)$, on peut, par exemple supposer que

$$\exists \alpha > 0, \quad A(x) \geq \alpha \text{ p.p. dans } [0,1].$$

Ceci assure la coercivité de l'opérateur différentiel du quatrième ordre $(A^p v'')''$ associé au numérateur de la fonction $f_p(A,v)$.

On peut tout de suite faire l'observation suivante : si la fonction A est nulle presque partout sur un intervalle (a,b) ou $[a,b] \subset [0,1]$, avec $a < b$, on peut trouver une fonction $w \in H_0^2(a,b)$ telle que $\|w'\|_{L^2(a,b)} = 1$. En prolongeant w par zéro sur le reste de l'intervalle $[0,1]$, on obtient une fonction $v \in H_0^2(0,1)$ telle que $f_p(A,v) = 0$ et donc $\lambda_p(A) = 0$. Comme le supremum est plus grand que $\lambda_p(1) = (2\pi)^2$, on peut *a priori* éliminer les A qui sont nuls presque partout sur un intervalle non trivial. Mais ceci est équivalent à travailler avec des fonctions strictement positives presque partout dans $[0,1]$ pour lesquelles A^{-1} existe et est strictement positive presque partout.

1.2.2. Propriétés de l'application $A \mapsto \lambda_p(A)$

On aura besoin de l'espace

$$L_+^\infty(0,1) \stackrel{\text{déf}}{=} \{A \in L^\infty(0,1) : A(x) \geq 0 \text{ p.p. dans } [0,1]\}. \quad (1.2.6)$$

Théorème 1.2.1. (i) Pour $0 < p \leq 1$, l'application $A \mapsto \lambda_p(A) : L_+^\infty(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ est concave et p -höldérienne, c'est-à-dire,

$$\exists c \text{ tel que } \forall A_1, A_2 \in L_+^\infty(0,1), \quad |\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| \leq c \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p.$$

(ii) Pour $1 < p < +\infty$,

$$\forall A_1, A_2 \in L_+^\infty(0,1), \quad |\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| \leq c(A) \|A_2^p - A_1^p\|_{L^\infty(0,1)}.$$

et l'application $A \mapsto \lambda_p(A) : L_+^\infty(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne : pour chaque $A \in L_+^\infty(0,1)$, il existe $c(A)$ et un voisinage $W(A)$ de A tels que

$$\forall A_1, A_2 \in W(A), \quad |\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| \leq c(A) \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}.$$

DÉMONSTRATION. (i) Pour $0 < p \leq 1$, la fonction $y \mapsto y^p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est concave, Hölder continue et

$$|y_2^p - y_1^p| \leq |y_2 - y_1|^p.$$

Pour $\alpha \in [0,1]$ et $A_1, A_2 \in L_+^\infty(0,1)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\alpha A_1(x) + (1-\alpha)A_2(x))^p |v''(x)|^2 dx \\ & \geq \alpha \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx + (1-\alpha) \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx \\ & \geq \alpha \inf_{v \in E} \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx + (1-\alpha) \inf_{v \in E} \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx \\ & = \alpha \lambda_p(A_1) + (1-\alpha) \lambda_p(A_2) \\ & \Rightarrow \lambda_p(\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2) \geq \alpha \lambda_p(A_1) + (1-\alpha) \lambda_p(A_2). \end{aligned}$$

Pour $A_1, A_2 \in L_+^\infty(0,1)$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx - \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx \right| \\ & \leq \int_0^1 |A_2^p(x) - A_1^p(x)| |v''(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |A_2(x) - A_1(x)|^p |v''(x)|^2 dx \\ & \leq \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p \|v''\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Dans l'espace $H_0^2(0,1)$, les normes $\|v'\|_{L^2(0,1)}$ et $\|v''\|_{L^2(0,1)}$ sont équivalentes :

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in H_0^2(0,1), \quad \|v''\|_{L^2(0,1)} \leq c \|v'\|_{L^2(0,1)}.$$

Il vient donc, pour $v \in E = \{v \in H_0^2(0,1) : \|v'\|_{L^2(0,1)} = 1\}$,

$$\begin{aligned} f_p(A_2, v) &= f_p(A_1, v) + \int_0^1 (A_2^p - A_1^p) |v''|^2 dx \leq f_p(A_1, v) + c \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p \\ \inf_{v \in E} f_p(A_2, v) &\leq \inf_{v \in E} f_p(A_1, v) + c \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p \\ \Rightarrow \lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1) &\leq c \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p. \end{aligned}$$

En changeant l'ordre des indices, il s'ensuit que $\lambda_p(A_1) - \lambda_p(A_2) \leq c \|A_1 - A_2\|_{L^\infty(0,1)}^p$ et

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \quad |\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| \leq c \|A_2 - A_1\|_{L^\infty(0,1)}^p.$$

(ii) Pour $1 < p < +\infty$, l'application $A \mapsto \lambda_p(A) : L_+^\infty(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ est la composition de deux applications

$$f_p(A, v) = f_1(A^p, v) \quad \Rightarrow \quad \lambda_p(A) = \lambda_1(A^p).$$

De la partie (i), on a

$$|\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| = |\lambda_1(A_2^p) - \lambda_1(A_1^p)| \leq c \|A_2^p - A_1^p\|_{L^\infty(0,1)}$$

et $A \mapsto \lambda_p(A) : L_+^\infty(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne. □

1.2.3. Famille des A paires

On considère, pour $0 \leq \alpha \leq \beta$, la famille suivante de profils

$$\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^\infty(0,1) : \alpha \leq A(x) \leq \beta \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\}. \quad (1.2.7)$$

Pour le prochain théorème, on aura aussi besoin de la définition d'une fonction paire/impaire par rapport à $1/2$.

Définition 1.2.1. *On dira qu'une fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ est paire par rapport à $1/2$ si $f(1-x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. On dira qu'elle est impaire si $f(1-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Lorsque le contexte le permettra, on ne précisera pas que la parité est par rapport à $1/2$.*

Théorème 1.2.2. (i) Pour $0 < p \leq 1$,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_{\text{sym}}^\infty} \lambda_p(A) = \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A), \quad (1.2.8)$$

où

$$\mathcal{A}_{\text{sym}}^\infty \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{A \in \mathcal{A}^\infty : A(1-x) = A(x) \text{ p.p. dans } [0,1]\}. \quad (1.2.9)$$

(ii) Pour $p > 1$ et $0 < \alpha \leq \beta$,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\text{sym}}^\infty} \lambda_p(A) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^\infty} \lambda_p(A), \quad (1.2.10)$$

où

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\text{sym}}^\infty \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ A \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^\infty : A(1-x) = A(x) \text{ p.p. dans } [0,1] \right\}. \quad (1.2.11)$$

D\u00c9MONSTRATION. (i) Pour $0 < p \leq 1$, la preuve est simple puisque l'application $A \mapsto f_p(A,v) : \mathcal{A}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ est concave et continue. On associe \u00e0 $A \in \mathcal{A}^\infty$ sa sym\u00e9tris\u00e9e

$$A_s(x) = \frac{1}{2} [A(x) + A(1-x)] \quad (1.2.12)$$

$$f_p(A_s,v) \geq \frac{1}{2} [f_p(A,v) + f_p(A_-,v)], \quad A_-(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} A(1-x). \quad (1.2.13)$$

Ainsi, pour $A \in \mathcal{A}^\infty$ et $0 \neq v \in H_0^2(0,1)$,

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 A_s^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} &\geq \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} + \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(1-x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} + \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(1-x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(1-x)|^2 dx} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} + \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(1-x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(1-x)|^2 dx} \\ &\geq \frac{1}{2} \lambda_p(A) + \frac{1}{2} \lambda_p(A) = \lambda_p(A) \end{aligned}$$

d'o\u00f9 l'\u00e9galit\u00e9.

(ii) Voir [9, p. 294] $\lambda_p(A_s) \geq \lambda_p(A)$ lorsque $\sup_{A_s \in \mathcal{A}_{\text{sym}}^\infty} \lambda_p(A_s) \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A)$, \(\square\)

1.2.4. Existence de profil maximisant

On cite d'abord le th\u00e9or\u00e8me d'existence d\u00e9montr\u00e9 par Cox et Overton [9, p. 296].

Th\u00e9or\u00e8me 1.2.3. *Pour toute paire $0 < \alpha \leq \beta$, il existe une fonction $\hat{A} \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^\infty$ paire telle que $\lambda_p(A) \leq \lambda_p(\hat{A})$, pour tout $A \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^\infty$.*

D\u00c9MONSTRATION. Voir [9, p. 296]. \(\square\)

On peut améliorer leur résultat d'existence pour $0 < p \leq 1$.

Théorème 1.2.4. *Pour $0 < p \leq 1$ et $\beta > 0$, il existe une fonction paire $\hat{A} \in \mathcal{A}_{0,\beta}^\infty$ telle que*

$$\lambda_p(\hat{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{0,\beta}^\infty} \lambda_p(A).$$

DÉMONSTRATION. Comme $L^\infty(0,1) = (L^1(0,1))^*$, on peut équiper $(L^1(0,1))^*$ de sa topologie faible $\sigma((L^1(0,1))^*, L^1(0,1))^*$ aussi appelée *topologie faible ** (voir le paragraphe A.4 de l'annexe A).

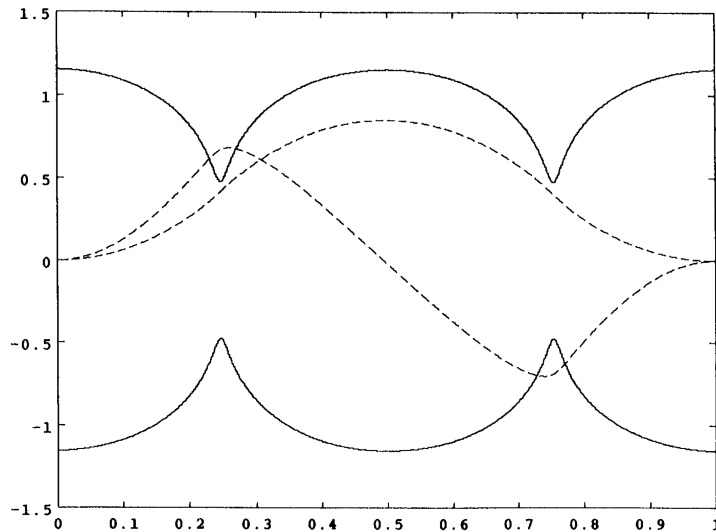
L'ensemble $\mathcal{A}_{0,\beta}^\infty$ est convexe, fermé et borné dans $(L^1(0,1))^*$. Il est donc compact pour la topologie faible * (par le théorème A.4.1 (iii) de l'annexe A). D'autre part, du théorème 1.2.1 (i), la fonction $A \mapsto \lambda_p(A)$ est concave et continue pour $0 < p \leq 1$. Elle est donc semi-continue supérieurement pour la topologie faible * par le théorème A.4.3 de l'annexe A. Il en résulte l'existence d'un élément maximisant dans le compact $\mathcal{A}_{0,\beta}^\infty$. \square

Corollaire 1.2.1. *Pour $0 < p \leq 1$ et $\beta > 0$, il existe une fonction paire $\hat{A} \in \mathcal{A}_{0,\beta} \cap C[0,1]$ telle que*

$$\lambda_p(\hat{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{0,\beta} \cap C[0,1]} \lambda_p(A).$$

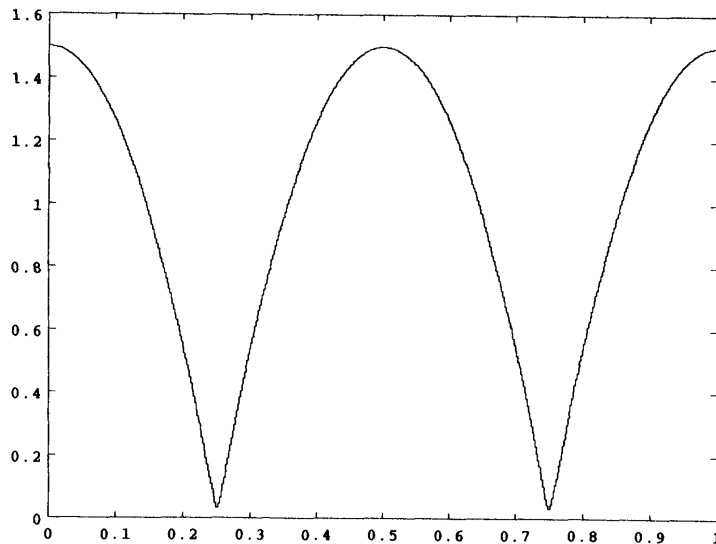
DÉMONSTRATION. L'ensemble $\mathcal{A}_{0,\beta} \cap C[0,1]$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{A}_{0,\beta}$ dans $L^\infty(0,1)$ -fort, car la norme $L^\infty(0,1)$ coïncide avec la norme du supremum dans $C[0,1]$. Il est donc lui aussi compact pour la topologie faible étoile de $L^\infty(0,1)$. \square

Remarque 1.2.1. Pour $p = 2$, les calculs numériques de Cox et Overton [9] (voir figure 1.3a) indiquent que le profil maximisant est borné inférieurement par une constante strictement positive α et supérieurement par une constante β .



(A) A maximisant pour $p = 2$ obtenu par Cox et Overton [9, Fig. 1, p. 314].

Pour $p = 1$, leurs calculs numériques (voir figure 1.3b) laissent à penser que ce α pourrait être zéro ce qui ne rendrait pas possible l'utilisation de leur théorème d'existence 1.2.3. Cependant, le nouveau théorème d'existence 1.2.4 n'écarte pas la possibilité d'un profil maximisant qui n'est pas borné inférieurement par une constante strictement positive.



(B) A maximisant pour $p = 1$ obtenu par Cox et Overton [9, Fig. 8, p. 317].

FIGURE 1.3. Résultats numériques tels que présentés dans [9]

1.2.5. Croissance du supremum par rapport à l'exposant $p \geq 0$

On s'intéresse maintenant à la fonction

$$p \mapsto \lambda(p) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.2.14)$$

où l'on prend $\lambda(0) = (2\pi)^2$ (voir le théorème 1.4.1) qui correspond à la colonne uniforme pour laquelle $A(x) = 1$. C'est donc une borne inférieure pour tous les $\lambda(p)$, $p > 0$. Comme on peut le voir sur le graphique de la figure 2.9 du chapitre 2, cette fonction est monotone croissante et possiblement concave.

Théorème 1.2.5. (i) Pour $A \in \mathcal{A}^\infty$, $0 \neq u \in H_0^2(0,1)$ et $0 < p \leq p' < +\infty$,

$$f_p(A, u) \leq f_{p'}(\tilde{A}, u), \quad \text{où} \quad \tilde{A} = \frac{A^{p/p'}}{\int_0^1 A^{p/p'} dx}.$$

(ii) La fonction $\lambda(p)$ est croissante, c.-à-d., pour toute paire $0 \leq p \leq p' < +\infty$,

$$\lambda(0) = (2\pi)^2 \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A) \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_{p'}(A).$$

D\u00c9MONSTRATION. (i) Soient $0 < p \leq p'$ et $A \in \mathcal{A}^\infty$. On a alors $p'/p \geq 1$, et

$$f_p(A, u) = \frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} = \left[\int_0^1 A^{p/p'} dx \right]^{p'} \frac{\int_0^1 \tilde{A}^{p'} |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} = \left[\int_0^1 A^{p/p'} dx \right]^{p'} f_{p'}(\tilde{A}, u)$$

où

$$\tilde{A} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{A^{p/p'}}{\int_0^1 A^{p/p'} dx} \geq 0, \quad \int_0^1 \tilde{A} dx = 1.$$

Mais pour $p'/p \geq 1$,

$$\int_0^1 A^{p/p'} dx \leq \left[\int_0^1 A dx \right]^{p/p'} = 1$$

ce qui donne l'in\u00e9galit\u00e9 voulue.

(ii) De la partie (i), pour $0 < p \leq p'$,

$$f_p(A, u) \leq f_{p'}(\tilde{A}, u).$$

En prenant l'infimum par rapport \u00e0 $u \in H_0^2(0,1)$,

$$\lambda_p(A) \leq \lambda_{p'}(\tilde{A}) \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_{p'}(A) \Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A) \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_{p'}(A).$$

□

1.3. LA MINIMISATION POUR LE CAS NON DÉGÉNÉRÉ : $0 < \alpha \leq A(x)$

1.3.1. Existence de solutions minimisantes

On introduit pour $\alpha \geq 0$ l'espace suivant :

$$L_\alpha^\infty(0,1) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{A \in L^\infty(0,1) : \alpha \leq A(x)\}. \quad (1.3.1)$$

Si $\alpha > 0$, cela signifie que A est inversible presque partout et que $0 < A^{-1}(x) \leq 1/\alpha$, p.p. x dans $[0,1]$ tel que A et A^{-1} appartiennent à $L^\infty(0,1)$.

Théorème 1.3.1. *Soient $0 < p < +\infty$ et $A \in L_\alpha^\infty(0,1)$ pour $\alpha > 0$. Alors, il existe $0 \neq u \in H_0^2(0,1)$ tel que*

$$\lambda_p(A) = \inf_{0 \neq v \in V} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \frac{\int_0^1 A(x)^p |u''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx}. \quad (1.3.2)$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $n \geq 1$, il existe $\{u_n\}$, $\|u_n'\|_{L^2(0,1)} = 1$, tel que

$$\lambda_p(A) \leq \int_0^1 A(x)^p |u_n''(x)|^2 dx < \lambda_p(A) + 1/n \quad \Rightarrow \quad \alpha^p \|u_n''\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \lambda_p(A) + 1/n.$$

Comme la suite $\{u_n''\}$ est bornée dans $L^2(0,1)$, il existe $w \in L^2(0,1)$ tel que $u_n'' \rightharpoonup w$ dans $L^2(0,1)$ -faible. Donc, il existe $u \in H_0^2(0,1)$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^2(0,1)$ -faible et $u'' = w$. La suite $\{u_n'\}$ converge vers u' dans $L^2(0,1)$ -fort et $\|u'\|_{L^2(0,1)} = 1$. Enfin, comme $A^p \in L^\infty(0,1)$ et que la fonction $u \mapsto \int_0^1 A(x)^p |u''(x)|^2 dx$ est convexe et continue, elle est faiblement semi-continue inférieurement. Donc

$$\lambda_p(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 A(x)^p |u_n''(x)|^2 dx \geq \int_0^1 A(x)^p |u''(x)|^2 dx = f_p(A,u)$$

et, de là, l'existence d'une fonction minimisante u dans $H_0^2(0,1)$. □

1.3.2. Problème aux valeurs propres associé au problème de minimisation

Le problème de minimisation (1.2.2) correspond à un problème aux valeurs propres pour l'opérateur différentiel du quatrième ordre que l'on peut écrire formellement $(A^p u'')''$. En effet, s'il y a existence d'un $u \in H_0^2(0,1)$ non nul minimisant, alors la différentielle de Fréchet doit être nulle, c'est-à-dire, qu'il doit exister $0 \neq u \in H_0^2(0,1)$ tel que, pour tout $v \in H_0^2(0,1)$,

$$0 = df_p(A,u;0,v) = \frac{2}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx} \int_0^1 A(x)^p u''(x) v''(x) - \lambda_p(A) u'(x) v'(x) dx \quad (1.3.3)$$

ou, de façon équivalente, en prenant des v dans $\mathcal{D}(0,1)$, l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact dans l'ouvert $(0,1)$,

$$A(x)^p u''(x) + \lambda_p(A) u(x) = q(x), \quad (1.3.4)$$

où $q \in P^1[0,1]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $[0,1]$. En différentiant deux fois, il vient

$$(A(x)^p u'')''(x) + \lambda_p(A) u''(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0. \quad (1.3.5)$$

$\lambda_p(A)$ est donc une valeur propre de l'opérateur différentiel du quatrième ordre $(A(x)^p u'')''$. Soit λ une autre valeur propre : il existe $0 \neq u_\lambda \in H_0^2(0,1)$ tel que

$$(A(x)^p u_\lambda'')''(x) + \lambda u_\lambda''(x) = 0, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0, \quad u_\lambda'(0) = u_\lambda'(1) = 0. \quad (1.3.6)$$

En multipliant chaque côté par $v \in H_0^2(0,1)$ et en intégrant le premier terme deux fois et le second une fois, il vient

$$\forall v \in H_0^2(0,1), \quad \int_0^1 A u_\lambda'' v'' dx = \lambda \int_0^1 u_\lambda' v' dx \quad \Rightarrow \quad f_p(A, u_\lambda) = \lambda. \quad (1.3.7)$$

On en conclut que la valeur propre $\lambda_p(A)$ est la plus petite pour cet opérateur.

On va maintenant faire appel au théorème 1.3.2 plus bas pour connaître le comportement et la multiplicité des valeurs propres. Comme $V = H_0^2(0,1)$ et $A \in L_\alpha^\infty(0,1)$ avec $\alpha > 0$, alors

$$0 < \alpha \leq A(x) \leq \|A\|_{L^\infty(0,1)} \quad (1.3.8)$$

et la forme bilinéaire symétrique

$$b(u, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 A^p u'' v'' dx, \quad (1.3.9)$$

est continue et coercive, car

$$\alpha^p \|u''\|_{L^2(0,1)}^2 \leq b(u, u) \leq \|A\|_{L^\infty(0,1)}^p \|u''\|_{L^2(0,1)}^2,$$

et $\|u''\|_{L^2}$ est une norme équivalente à la norme $\|v\|_{H^2}$ sur le sous-espace $H_0^2(0,1)$ de $H^2(0,1)$.

La forme bilinéaire b engendre l'opérateur

$$B : H_0^2(0,1) \rightarrow (H_0^2(0,1))', \quad \langle Bu, v \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} b(u, v).$$

Enfin, l'injection de $H_0^2(0,1)$ dans $H = L^2(0,1)$ est compacte (voir la définition A.2.1 d'un opérateur compact au paragraphe A.2 de l'annexe A).

Théorème 1.3.2. *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels qu'il existe une injection continue compacte de V dans H . On identifie les éléments du dual H' de H avec ceux de H . On suppose que $B : V \rightarrow V'$ est linéaire, continu, symétrique et V -coercif, c.-à-d., il existe*

$\alpha > 0$ tel que

$$\forall v \in V, \quad \langle Bv, v \rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Alors les valeurs propres de B sont toutes non nulles et sont de multiplicité finie. De plus, ou bien elles sont en nombre fini, ou bien elles sont dénombrables et forment une suite tendant vers l'infini.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, B possède un inverse continu et symétrique $B^{-1} : V' \rightarrow V$. Par compacité de l'injection de V dans H , l'opérateur B^{-1} est linéaire, continu et compact de H dans H et 0 n'est pas une valeur propre. Du théorème A.2.1 de l'annexe A, la multiplicité de ses valeurs propres est finie. De plus, ou bien leur nombre est fini, ou bien elles sont dénombrables et forment une suite tendant vers 0.

Si λ est une valeur propre de B , il existe $x \in H$, $x \neq 0$, tel que $(\lambda I + B)x = 0$. Donc,

$$\lambda x + Bx = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{\lambda} + B^{-1} \right] x = 0$$

et $1/\lambda$ est une valeur propre de B^{-1} . La réciproque est aussi vraie. En conséquence, les valeurs propres de A sont les inverses de celles de B^{-1} . Elles sont donc de multiplicité finie. Elles sont soit en nombre fini, soit en nombre dénombrable et forment une suite qui tend vers l'infini. \square

1.3.3. Multiplicité des valeurs propres

En fait, on peut compléter les résultats du Théorème 1.3.2.

Théorème 1.3.3. Soient $0 < p < +\infty$ et $A \in L_\alpha^\infty(0,1)$ avec $\alpha > 0$.

(i) S'il existe $\lambda \geq 0$ et $0 \neq u_\lambda \in H_0^2(0,1)$ tels que

$$\forall v \in H_0^2(0,1), \quad \int_0^1 A(x)^p u_\lambda''(x) v''(x) - \lambda u_\lambda'(x) v'(x) dx = 0, \quad (1.3.10)$$

alors la multiplicité de λ est au plus deux. De plus, ou bien les valeurs propres sont en nombre fini, ou bien elles sont dénombrables et forment une suite tendant vers l'infini.

(ii) Il existe une fonction propre positive et paire associée à la valeur propre $\lambda_p(A)$.

(iii) Soit $v \in H_0^2(0,1)$ positive et paire ayant exactement deux points d'inflexion. Si $u \in H_0^2(0,1)$ satisfait

$$\int_0^1 A u'' \phi'' dx = \int_0^1 v' \phi' dx, \quad \forall \phi \in H_0^2(0,1),$$

alors u est positif et possède exactement deux points d'inflexion.

DÉMONSTRATION. (i) En intégrant par parties le second terme de (1.3.3), on obtient

$$\forall v \in H_0^2(0,1), \quad \int_0^1 [A(x)^p u_\lambda''(x) + \lambda u_\lambda(x)] v''(x) dx = 0 \quad (1.3.11)$$

$$\Rightarrow A(x)^p u_\lambda''(x) + \lambda u_\lambda(x) \in P^1[0,1], \quad (1.3.12)$$

où $P^1[0,1]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $[0,1]$.

Soit $E(\lambda)$ l'espace linéaire des fonctions propres associées à λ . Si la dimension de $E(\lambda)$ est strictement plus grande que 2, alors on peut trouver trois fonctions propres u_1, u_2, u_3 linéairement indépendantes dans $E(\lambda)$ telles que

$$A(x)^p u_1''(x) + \lambda u_1(x) = a_1 x + b_1,$$

$$A(x)^p u_2''(x) + \lambda u_2(x) = a_2 x + b_2,$$

$$A(x)^p u_3''(x) + \lambda u_3(x) = a_3 x + b_3.$$

Il existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$ tels que

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En introduisant la combinaison linéaire $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, on obtient $u \in H_0^2(0,1)$ et

$$A(x)^p u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (1.3.13)$$

ou de manière équivalente,

$$\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda A^{-p}(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.14)$$

Ce problème du deuxième ordre à conditions initiales a pour seule solution $u = 0$. Ceci contredit le fait que u_1, u_2 , et u_3 soient linéairement indépendantes.

(ii) Voir Cox et Overton [9, p. 291].

(iii) Voir Cox et Overton [9, p. 292]. □

1.3.4. Formulation de E. Kamke [24] pour $p = 1$

On revient au problème aux valeurs propres. Soient $\lambda \geq 0$ et $0 \neq u_\lambda \in H_0^2(0,1)$ tels que

$$\forall v \in H_0^2(0,1), \quad \int_0^1 A u_\lambda'' v'' dx = \lambda \int_0^1 u_\lambda' v' dx. \quad (1.3.15)$$

En intégrant par parties le membre de droite de (1.3.15), il vient

$$\forall v \in H_0^2(0,1), \quad \int_0^1 [A u_\lambda'' + \lambda u_\lambda] v'' dx = 0 \quad \Rightarrow \quad A u_\lambda'' + \lambda u_\lambda \in P^1[0,1] \quad (1.3.16)$$

$$\Rightarrow A u_\lambda'' \in H^2(0,1) \subset C^1[0,1]. \quad (1.3.17)$$

On en déduit qu'il existe deux constantes a et b tels que

$$\forall x, \quad A u_\lambda'' + \lambda u_\lambda = ax + b \quad \text{et} \quad (A u_\lambda'')' + \lambda u_\lambda' = a,$$

$$(A u_\lambda'')(0) = b \quad \text{et} \quad (A u_\lambda'')(1) = a + b,$$

$$(A u_\lambda'')(1) = a + b \quad \text{et} \quad (A u_\lambda'')(0) = b,$$

$$\Rightarrow \forall x, \quad (A u_\lambda'')(x) = -\lambda u_\lambda(x) + ((A u_\lambda'')(1) - (A u_\lambda'')(0))x + (A u_\lambda'')(0).$$

Puisque $Au'' \in H^2(0,1)$ on a de (1.3.15) que

$$(Au'')'' + \lambda u'' = 0 \quad (1.3.18)$$

où tout est bien défini. On pose alors $w = Au''$ et on obtient la nouvelle équation

$$w \in H^2(0,1), \quad w'' + \frac{\lambda}{A} w = 0, \quad \begin{cases} w'(0) = w'(1), \\ w(1) - w(0) = w'(0), \end{cases} \quad (1.3.19)$$

avec des conditions aux bords non locales. À partir de cette formulation on pourrait faire appel aux travaux de E. Kamke [24] pour démontrer que l'espace des fonctions propres est de dimension au plus deux. Ce n'est cependant pas évident de mettre (1.3.19) sous la forme canonique de E. Kamke [24]. En effet, on a

$$\frac{d}{dx} \left((Au'')' + \lambda u' \right) = 0 \quad (1.3.20)$$

$$\Rightarrow (Au'')' + \lambda u' = c \text{ (une constante)}, \quad (1.3.21)$$

mais cette constante est nulle par les conditions (1.3.19). Alors, il suffit d'introduire la variable $y = u'$ pour obtenir

$$(Ay')' + \lambda y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = y(1) = 0, \\ (Ay')(1) - (Ay')(0) = y(0). \end{cases} \quad (1.3.22)$$

Aussi, en introduisant la variable $z = Ay'$, on obtient le système

$$\begin{cases} z' = -\lambda y, \\ y' = A^{-1} z, \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = y(1) = 0, \\ z(1) - z(0) = y(0), \end{cases} \quad (1.3.23)$$

ou sous sa forme canonique

$$\begin{cases} z' = -\lambda y \\ y' = A^{-1} z \end{cases} \quad \text{et les conditions non locales} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ z(1) \end{bmatrix}$$

pour laquelle

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

1.4. LA COLONNE UNIFORME

1.4.1. Borne inférieure pour le supremum

Si l'on prend $A(x) = 1$ sur tout $[0,1]$, c'est-à-dire, une colonne de section uniforme constante, il vient

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A) \geq \lambda_p(1) = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} f_p(1, v) = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\|v''\|_{L^2}^2}{\|v'\|_{L^2}^2}. \quad (1.4.1)$$

Cependant,

$$\begin{aligned} v'(x) = \int_0^x v''(y) dy &\Rightarrow |v'(x)| \leq \int_0^1 |v''(y)| dy \leq \|v''\|_{L^2} \Rightarrow \|v'\|_{L^2} \leq \|v''\|_{L^2} \\ &\Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \lambda_p(A) \geq \lambda_p(1) \geq 1 > 0. \end{aligned}$$

La colonne correspondant à $A = 1$ donne une borne inférieure strictement positive

$$1 \leq \lambda_p(1) \leq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ \|v'\|_{L^2(0,1)}=1}} f_p(A, v)$$

que l'on va maintenant estimer.

Comme $\lambda_p(1)$ est indépendant de $p \geq 1$, on l'écrira simplement $\lambda(1)$.

Théorème 1.4.1. *Pour $A(x) = 1$, toutes les valeurs propres incluant $\lambda(1)$, la plus petite, sont simples. Il y a deux familles de fonctions propres dans $H_0^2(0,1)$:*

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &= (\omega)^2, \quad \tan \frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2}, \quad \omega > 0, \quad u_\omega(x) = a_\omega \left(1 - 2x + 2 \frac{\sin(\omega x)}{\omega} - \cos(\omega x) \right), \\ \lambda_k &= (2k\pi)^2, \quad k \geq 1, \quad u_k(x) = b_k (1 - \cos(k2\pi x)), \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

où a_ω et b_k sont des constantes arbitraires non nulles. La première valeur propre est $(2\pi)^2 \cong 39,4784$, associée à la fonction propre normalisée

$$u_1(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [1 - \cos(2\pi x)]. \quad (1.4.3)$$

La deuxième valeur propre est environ 80,7629, associée à la fonction propre normalisée

$$u_\omega(x) = \pm a_\omega \left(1 - 2x + 2 \frac{\sin(\omega x)}{\omega} - \cos(\omega x) \right), \quad (1.4.4)$$

avec $\omega = 8,9868\dots$ et $a_\omega = 0,1573\dots$ (voir Figure 1.4).

Corollaire 1.4.1. Pour tout $p \geq 1$,

$$\sup_{\substack{A \in L^\infty(0,1) \\ A(x) \geq 0, \int_0^1 A(x) dx = 1}} \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \geq (2\pi)^2 \approx 39,4784. \quad (1.4.5)$$

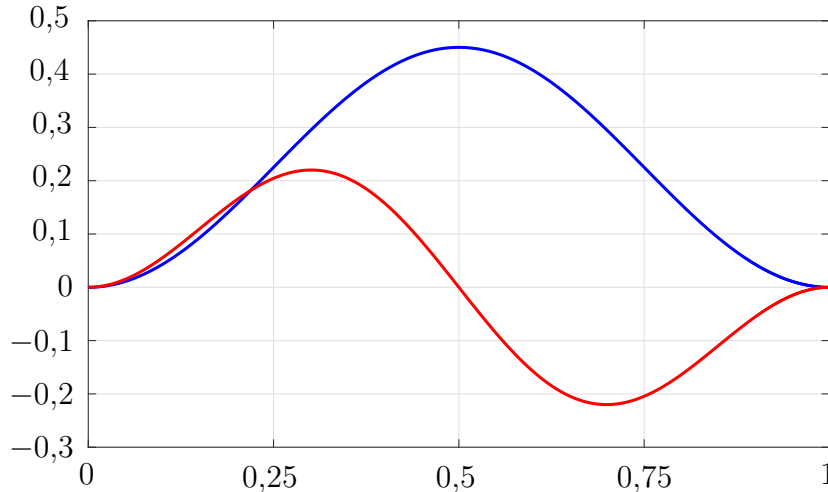


FIGURE 1.4. Deux premières fonctions propres correspondant à $\lambda^{(1)} = (2\pi)^2 \approx 39,4784$ (en bleu) et $\lambda^{(2)} \approx 80,7629$ pour $\omega \approx 8,9868$ (en rouge).

Remarque 1.4.1. On peut donc considérer la plus petite famille

$$\left\{ A \in \mathcal{A}^\infty : \begin{array}{l} A(x) > 0 \text{ p.p. dans } [0,1] \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \\ \forall v \in H_0^2(0,1), \quad (2\pi)^2 \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \int_0^1 A^p \|v''\|^2 dx \end{array} \right\}. \quad (1.4.6)$$

DÉMONSTRATION. (i) Il y a existence d'un élément minimisant, car il existe une suite $\{u_n\} \subset H_0^2(0,1)$ telle que $\|u_n'\|_{L^2(0,1)} = 1$ et $\|u_n''\|_{L^2(0,1)}^2 \rightarrow \lambda(1)$. Comme la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $H_0^2(0,1)$, il existe $u \in H_0^2(0,1)$ et une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ tels que $u_{n_k} \rightarrow u$ dans $H_0^2(0,1)$ -faible.

Donc, $u'_{n_k} \rightarrow u'$ dans $L^2(0,1)$ -fort et $\|u'\|_{L^2(0,1)} = 1$. De plus, comme $v \mapsto \|v''\|^2$ est convexe et continue dans $H_0^2(0,1)$ -fort, elle est semi-continue inférieurement dans $H_0^2(0,1)$ -faible et

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ \|v'\|_{L^2(0,1)}=1}} \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u''_{n_k}\|_{L^2(0,1)}^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u''_{n_k}\|_{L^2(0,1)}^2 \geq \|u''\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\Rightarrow \lambda(1) = \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ \|v'\|_{L^2(0,1)}=1}} \|v''\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u''\|_{L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

et il y a existence.

(ii) On caractérise maintenant la fonction propre u et la valeur propre $\lambda(1)$ qui sont solution de l'équation de valeurs propres suivante

$$\exists u \in H_0^2(0,1) \text{ tel que } u \neq 0 \text{ et } \int_0^1 u'' v'' - \lambda u' v' dx = 0, \quad \forall v \in H_0^2(0,1).$$

Sous forme forte,

$$u^{(4)} + \lambda u'' = 0, \quad u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0.$$

On peut vérifier que $\lambda = \omega^2$ et que les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} u(x) &= ax + b + c \sin(\omega x) + d \cos(\omega x), \\ u'(x) &= a + \omega c \cos(\omega x) - \omega d \sin(\omega x). \end{aligned}$$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} 0 &= u(0) = b + d, \\ 0 &= u(1) = a + b + c \sin(\omega) + d \cos(\omega), \\ 0 &= u'(0) = a + \omega c, \\ 0 &= u'(1) = a + \omega [c \cos(\omega) - d \sin(\omega)], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$0 = a + b - \frac{a}{\omega} \sin(\omega) - b \cos(\omega), \quad 0 = a + \omega \left[-\frac{a}{\omega} \cos(\omega) + b \sin(\omega) \right] \quad (1.4.7)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\sin \omega}{\omega}\right) & (1 - \cos \omega) \\ (1 - \cos \omega) & \omega \sin \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4.8)$$

$$u(x) = a \left(x - \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right) + b(1 - \cos(\omega x)). \quad (1.4.9)$$

Il existe une solution non nulle si et seulement si

$$\det \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\sin \omega}{\omega}\right) & (1 - \cos \omega) \\ (1 - \cos \omega) & \omega \sin \omega \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega \sin \omega - 2(1 - \cos \omega) = 0.} \quad (1.4.10)$$

En passant aux demi-angles, cette dernière condition devient

$$2 \sin(\omega/2) [\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2)] = 0 \\ \Rightarrow \text{ou bien } \boxed{\sin(\omega/2) = 0,} \quad \text{ou bien } \boxed{\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2) = 0.}$$

(iii) Dans le premier cas, $\sin(\omega/2) = 0$ si et seulement si $\omega/2 = k\pi$. La solution $\omega = 0$ n'est pas acceptable, car

$$u(x) = ax + b + c \sin(0x) + d \cos(0x) = ax + b + d$$

satisfait les conditions au bord que si $u = 0$. Pour $\omega = 2k\pi$, $k \neq 0$, (1.4.8) se réduit à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = b(1 - \cos(2\pi x)). \quad (1.4.11)$$

Les valeurs propres $\lambda = (2k\pi)^2$ sont donc simples.

(iv) Le second cas est $\omega \cos(\omega/2) - 2 \sin(\omega/2) = 0$ pour $\omega \neq 2k\pi$:

$$\omega \neq 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega/2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \cos(\omega/2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega/2) \neq 0 \\ \Rightarrow \quad \boxed{\tan \frac{\omega}{2} = \frac{\omega}{2}, \quad \omega \neq 0.}$$

En utilisant (1.4.10), le système (1.4.8) devient

$$(1 - \cos \omega) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -2b \quad (1.4.12)$$

$$u(x) = b \left[1 - 2x + 2 \frac{\sin(\omega x)}{\omega} - \cos(\omega x) \right]. \quad (1.4.13)$$

L'espace des fonctions propres est donc de dimension un et la valeur propre est simple.

(v) En conclusion, toutes les valeurs propres sont simples. Quelle est la plus petite? On sait que la première intersection non nulle de la droite $y = x$ et de la tangente $y = \tan x$ se trouve entre $\pi/2$ et $3\pi/2$ pour $x > 0$. Donc, $\pi < \omega < 3\pi$. Cette première intersection se trouve à $\omega/2 = 4,4934\dots$, c'est-à-dire, à $\omega = 8,9868\dots > 2\pi = 6,2831\dots$. Donc, la plus petite valeur propre est $\lambda(1) = (2\pi)^2$ qui correspond aux fonctions propres qui sont générées par $u(x) = 1 - \cos(2\pi x)$ ([9, pp. 291-292]).

(vi) La fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda(1) = (2\pi)^2$ est

$$u(x) = b(1 - \cos(2\pi x)), \quad u'(x) = b 2\pi \sin(2\pi x), \quad u''(x) = -b(2\pi)^2 \cos(2\pi x)$$

et peut être normalisée en choisissant b tel que $\|b u'\|_{L^2(0,1)} = 1$:

$$1 = b^2 (2\pi)^2 \int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx = b^2 (2\pi) \int_0^1 \sin^2(2\pi x) d(2\pi x) = b^2 (2\pi) \int_0^{2\pi} \sin^2(y) dy$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2y) dy = \frac{y}{2} - \frac{\sin(2y)}{4} \Big|_{y=0}^{2\pi} = \pi \quad \Rightarrow \quad b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u(x) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}\pi} [1 - \cos(2\pi x)], & \lambda(1) &= \|u''\|_{L^2(0,1)}^2 = (2\pi)^2 \\ \|u''\|_{L^\infty(0,1)} &= |b| (2\pi)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} (2\pi)^2 = 2\pi\sqrt{2}. \end{aligned}} \quad (1.4.14)$$

On fait la même chose pour la fonction propre associée à la deuxième valeur propre soit environ 80,4784. \square

1.4.2. Borne supérieure sur le problème dual ?

Pour cette section, on s'intéresse à l'inégalité $\sup \inf \leq \inf \sup$

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}. \quad (1.4.15)$$

L'inf sup, qui est une borne supérieure sur le sup inf, est borné pour $0 < p \leq 1$, mais est $+\infty$ pour $p > 1$. Il y a donc un changement important en $p = 1$.

On introduit la famille des profils lipschitziens

$$\mathcal{A}^{1,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in W^{1,\infty}(0,1) : A(x) \geq 0 \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\} \quad (1.4.16)$$

et la maximisation sur une famille plus petite que \mathcal{A}^∞ :

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \lambda_p(A). \quad (1.4.17)$$

Théorème 1.4.2. (i) Pour $0 < p \leq 1$,

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq 2(2\pi)^2. \quad (1.4.18)$$

(ii) Pour $p > 1$,

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \geq \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \frac{\int_0^1 A(x)^p |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = +\infty. \quad (1.4.19)$$

DÉMONSTRATION. (i) Pour $0 < p \leq 1$, $\int_0^1 A^p dx \leq [\int_0^1 A dx]^p = 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} &\leq \int_0^1 A^p(x) dx \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \\ &\leq \int_0^1 A(x) dx \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} = \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \leq \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}.$$

En utilisant la fonction propre u de (1.4.14) pour $A = 1$, on obtient une borne supérieure finie

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \leq (2\pi\sqrt{2})^2 = 2(2\pi)^2$$

où $2(2\pi)^2 \approx 78,95683521$.

(ii) La preuve est une conséquence de la partie (ii) du lemme 1.4.1 puisque $0 \neq v \in H_0^1(0,1)$ implique que $0 \neq v'' \in L^2(0,1)$. \square

Lemme 1.4.1. Pour $p > 1$ et $0 \neq f \in L^2(0,1)$,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \int_0^1 A^p f^2 dx = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Si $f \neq 0$, il existe un point a de Lebesgue de f^2 dans $(0,1)$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f^2 dx = f(a)^2 > 0.$$

Pour $p > 1$ et $0 < 1/n < \min\{a, 1 - a\}$, on considère la suite de fonctions suivante

$$A_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2}{3} \left\{ \begin{array}{ll} 2n^2 \left(x + \frac{1}{n} - a \right), & \text{si } a - \frac{1}{n} < x < a - \frac{1}{2n}, \\ n, & \text{si } a - \frac{1}{2n} < x < a + \frac{1}{2n}, \\ 2n^2 \left(a + \frac{1}{n} - x \right), & \text{si } a + \frac{1}{2n} < x < a + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \int_0^1 A_n dx = 1, \\ \|A_n\|_\infty = n, \\ \|A'_n\|_\infty = \frac{4}{3}n^2, \\ \|A_n\|_p \leq \frac{2}{3}n^{1/p}\frac{2}{n}. \end{array}$$

Ainsi $\{A_n\} \subset \mathcal{A}^{1,\infty}$ et on évalue l'intégrale pour $p > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 A^p f^2 dx &\geq \int_{a-1/(2n)}^{a+1/(2n)} A^p f^2 dx \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^p n^p \int_{a-1/(2n)}^{a+1/(2n)} f^2 dx \\ &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^p n^{p-1} \underbrace{\frac{1}{n} \int_{a-1/(2n)}^{a+1/(2n)} f^2 dx}_{\rightarrow f^2(a) > 0} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \\ &\quad \downarrow \\ &\quad +\infty \end{aligned}$$

On conclut que pour, $p > 1$ et $0 \neq f \in L^2(0,1)$,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \int_0^1 A^p f^2 dx = +\infty.$$

□

1.5. LA COLONNE CREUSE OU PLUS GÉNÉRALEMENT $0 < p \leq 1$

1.5.1. Une meilleure borne supérieure pour le problème dual

Théorème 1.5.1. (i) Pour $0 < p \leq 1$,

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (1.5.1)$$

et, pour $p = 1$,

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (1.5.2)$$

(ii) Il existe $0 \neq u \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ tel que

$$\frac{\|u''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|u'\|_{L^2(0,1)}^2} = \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (1.5.3)$$

(iii) De plus, il existe $0 \neq u_1 \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ tel que $0 \neq \|u_1''\|_{L^\infty(0,1)} \leq 1$ et $0 \neq u_2 \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ tel que $|u_2''(x)| = 1$ p.p. dans $[0,1]$ tels que

$$\inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \leq \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ |v''(x)|=1}} \frac{1}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} = \frac{1}{\|u_1'\|_{L^2(0,1)}^2} \leq \frac{1}{\|u_2'\|_{L^2(0,1)}^2} = 48, \quad (1.5.4)$$

où

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1/8 - (x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ (x - 1)^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

(iv)

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq 48.$$

DÉMONSTRATION. (i) De la démonstration du Théorème 1.4.2, on sait que, pour $0 < p \leq 1$,

$$\forall v \in W_0^{2,p}(0,1), \quad \frac{\int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \leq \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}.$$

Pour $p = 1$, on considère les fonctions $v \in H_0^2(0,1)$ telles que $\|v'\|_2 = 1$. Pour $v \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ tel que $|v''(x)| = \|v''\|_\infty$ et $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A}^\infty, \quad & \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \\ \Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} & \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \end{aligned}$$

Pour $v \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ tel que $|v''(x)| < \|v''\|_\infty$ sur un sous-ensemble E de mesure non nulle, on choisit $A \in \mathcal{A}^\infty$ tel que $A = 0$ sur E et $\int_{[0,1] \setminus E} A dx = 1$. Alors,

$$\frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \frac{\int_{[0,1] \setminus E} A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} \geq \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}.$$

Pour $v \in H_0^2(0,1)$ tel que $\|v''\|_\infty = \infty$, alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $E_n \subset [0,1]$ de mesure non nulle tel que $|v''|^2(x) \geq n\|v'\|_{L^2(0,1)}^2$ sur E_n . On choisit $A_n \in \mathcal{A}^\infty$ tel que $A_n = 0$ sur $[0,1] \setminus E_n$ et $\int_{E_n} A_n dx = 1$ de sorte que

$$\frac{\int_0^1 A_n(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \geq \frac{\int_{E_n} A_n(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} \geq n \Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = +\infty.$$

Donc,

$$\inf_{\substack{v \in H_0^2(0,1) \\ v \neq 0}} \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty} \frac{\int_0^1 A(x) |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in W^{2,\infty}(0,1)} \frac{\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}.$$

(ii) Puisque la fonction $\|v''\|_{L^\infty(0,1)}^2 / \|v'\|_{L^2(0,1)}^2$ est bornée inférieurement par 0, l'infimum m est fini et il existe $\{v_n\} \subset H_0^2(0,1)$ tel que

$$\begin{aligned} & \|v'_n\|_{L^2(0,1)} = 1 \text{ et } \|v''_n\|_{L^\infty(0,1)}^2 \rightarrow m \\ \Rightarrow & \{v_n\} \subset W_0^{2,\infty}(0,1) \subset H_0^2(0,1) \text{ et } \{v_n\} \text{ est bornée dans } H_0^2(0,1). \end{aligned}$$

Alors, il existe $u \in H_0^2(0,1)$ tel que $v_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^2(0,1)$ -faible, $v'_n \rightarrow u'$ dans $L^2(0,1)$ -fort, $v''_n \rightharpoonup u''$ dans $L^2(0,1)$ -faible et dans $L^\infty(0,1)$ -faible*. Donc, $\|u''\|_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v''_n\|_\infty$,

$$\frac{\|u''\|_\infty^2}{\|u'\|_2^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|v''_n\|_\infty^2}{\|v'_n\|_2^2} = m$$

et u réalise l'infimum.

(iii) Puisque $|v''(x)| = 1$ p.p., la suite minimisante v_n est telle que $\|v''_n\|_{L^2(0,1)} = 1$. Alors, il existe une sous-suite $\{v_n\}$ dans $H_0^2(0,1)$ qui converge vers un u_1 dans $H_0^2(0,1)$ -faible, et v'_n converge vers u'_1 dans $L^2(0,1)$ -fort. Puisque la convergence de v''_n est aussi vraie dans la topologie faible-* de L^∞ , $u_1 \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ et $0 \neq \|u''_1\|_{L^\infty(0,1)} \leq 1$. Donc, on sait que $\|u''_1\|_\infty^2 \geq 1/48$, on ne sait pas cependant si $|u''_1(x)| = 1$.

(iv) On obtient 48, la nouvelle borne supérieure. □

Pour le second infimum de la partie (iii) du théorème 1.5.1, on n'a pas l'existence d'un élément minimisant tel que $|u''_1(x)| = 1$ p.p., bien que

$$48 \geq \inf_{\substack{v \in W_0^{2,\infty}(0,1) \\ |v''(x)|=1}} \frac{1}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2} = \frac{1}{\|u'_1\|_{L^2(0,1)}^2} \geq \frac{\|u''_1\|_{L^\infty(0,1)}^2}{\|u'_1\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (1.5.6)$$

Cependant, cet infimum doit être bien près de 48. En effet, pour les fonctions $v \in H_0^2(0,1)$ telles que $|v''(x)| = 1$, alors $v''(x) = \pm 1$ presque partout.

Alors, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle,

$$U \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{x \in [0,1] : v''(x) = 1\} \quad \text{et} \quad [0,1] \setminus U = \{x \in [0,1] : v''(x) = -1\}. \quad (1.5.7)$$

En introduisant la fonction caract\u00e9ristique suivante

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in U, \\ 0, & \text{si } x \notin U \end{cases}, \quad (1.5.8)$$

la d\u00e9riv\u00e9e seconde est donn\u00e9e par

$$v'' = \chi_U - [1 - \chi_U] = 2\chi_U - 1 \text{ p.p. dans } [0,1]. \quad (1.5.9)$$

Pour que v soit dans $H_0^2(0,1)$, il est \u00e9quivalent de v\u00e9rifier que v'' est orthogonal \u00e0 $P^1[0,1]$

$$\int_0^1 [2\chi_U - 1] dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 x [2\chi_U - 1] dx = 0$$

ou

$$\boxed{\int_0^1 \chi_U dx = 1/2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 (x - 1/2) \chi_U dx = 0.} \quad (1.5.10)$$

Si U est l'union d'un nombre fini d'intervalles, la fonction u doit \u00eatre un polyn\u00f4me par morceaux de degr\u00e9 2 sur chaque intervalle.

Par exemple, on choisit $U = [0,a] \cup [1-a,1]$, $0 \leq a \leq 1/2$:

$$\begin{aligned} 1/2 &= \int_0^a dx + \int_{1-a}^1 dx = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 1/4, \\ 0 &= \int_0^{1/4} (x - 1/2) dx + \int_{3/4}^1 (x - 1/2) dx = 0. \end{aligned}$$

La fonction $H_0^2(0,1)$ associ\u00e9e est

$$u(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1/8 - (x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ (x - 1)^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad u'(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1/2 - x, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ x - 1, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.5.11)$$

ce qui est exactement la fonction u_2 d\u00e9finie dans la partie (iii) du th\u00e9or\u00e8me 1.5.1. De plus,

$$\begin{aligned} \|u'\|^2 &= \int_0^{1/4} x^2 dx + \int_{1/4}^{3/4} (1/2 - x)^2 dx + \int_{3/4}^1 (x - 1)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4^3} + 2\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} \right] = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Remarque 1.5.1. La fonction u_2 est symétrique par rapport à $1/2$. La borne supérieure ne peut pas être améliorée en divisant chaque sous-intervalle en deux comme ceci

$$U = [0, 1/8] \cup [2/8, 3/8] \cup [5/8, 6/8] \cup [7/8, 8/8]$$

puisque $|u''(x)| = 1$ reste constant, mais la norme $\|u'\|_{L^2}$ tend vers zéro lorsque l'on subdivise les sous-intervalles.

1.5.2. Construction d'un A à partir d'une fonction propre

On suppose qu'il existe un $u \in W_0^2(0,1)$ qui minimise

$$\inf_{\substack{v \in W_0^2(0,1) \\ |v''(x)|=1}} \frac{1}{\|v'\|_{L^2(0,1)}^2}. \quad (1.5.12)$$

La dérivée seconde est donnée par $u'' = 2\chi_U - 1$ et χ_U doit vérifier les conditions (1.5.10) pour U défini par

$$U \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in [0,1] : u''(x) = 1\}.$$

On désire que cette fonction u soit une fonction propre. Pour ce faire, on doit construire un $A \in \mathcal{A}$. Puisque le A maximisant doit être symétrique par rapport à $1/2$ et que $\lambda \geq (2\pi)^2$, on a qu'il existe $c, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda > 0$ et

$$A(x)u''(x) + \lambda u(x) = c \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{c - \lambda u(x)}{u''(x)} = \begin{cases} c - \lambda u(x), & \text{si } x \in U, \\ \lambda u(x) - c, & \text{si } x \notin U. \end{cases} \quad (1.5.13)$$

Par la continuité de A , $c = \lambda u(x_0)$ pour tous les points x_0 du bord ∂U de U , c'est-à-dire,

$$\forall x_0 \in \partial U, \quad u(x_0) = c/\lambda \text{ et } A(x_0) = 0, \quad A(x) = \lambda |u(x_0) - u(x)|. \quad (1.5.14)$$

Finalement, puisque la mesure de U et de son complément est de $1/2$,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 A(x) dx = \lambda \left[\int_U u(x_0) - u(x) dx + \int_{[0,1] \setminus U} u(x) - u(x_0) dx \right] \\ &= \lambda \left[\int_{[0,1] \setminus U} u(x) dx - \int_U u(x) dx \right] \\ \lambda &= \frac{1}{\int_{[0,1] \setminus U} u(x) dx - \int_U u(x) dx}, \quad c = \frac{u(x_0)}{\int_{[0,1] \setminus U} u(x) dx - \int_U u(x) dx} \end{aligned}$$

et on obtient une expression explicite de A

$$A(x) = \frac{|u(x_0) - u(x)|}{\int_{[0,1] \setminus U} u(x) dx - \int_U u(x) dx}. \quad (1.5.15)$$

Dans l'exemple précédent, avec $x_0 = 1/4$,

$$\lambda = \frac{\int_0^1 A |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx} = \int_0^1 A dx \frac{1}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx} = 48, \quad u(1/4) = u(3/4) = 1/32$$

et le A est défini par

$$A(x) = \lambda |u(x) - 1/32| = 24 \begin{cases} |x^2 - 1/16|, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ |1/8 - (x - 1/2)^2 - 1/16|, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ |(x - 1)^2 - 1/16|, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$= \frac{3}{2} \begin{cases} 1 - 16x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 1 - 16(x - 1/2)^2, & \text{si } 1/4 < x < \frac{3}{4}, \\ 1 - 16(x - 1)^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

De sorte que, $\lambda = 48$ est une valeur propre de A , mais on n'a pas nécessairement qu'elle est la plus petite valeur propre de A . En fait, cette fonction A est précisément la fonction donnée par Olhof et Niordson [30] ainsi que Seiranyan [35] :

$$A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{2} \begin{cases} (1 - 16x^2), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ (16x - 16x^2 - 3), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ (32x - 16x^2 - 15), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.5.16)$$

Chapitre 2

PROBLÈME EN DIMENSION FINIE

2.1. ORIENTATION

Dans ce chapitre, on procèdera à la discrétisation du problème continu au paragraphe 2.2. Le fait que le problème discrétisé soit de dimension finie simplifie de manière importante les considérations théoriques. Par exemple, l'ensemble des profils admissibles est maintenant un ensemble convexe et compact, alors que Cox et Overton [9] doivent utiliser des bornes supérieure et inférieure uniformes $0 < \alpha \leq A(x) \leq \beta$ sur A pour obtenir la compacité faible étoile dans $L^\infty(0,1) = (L^1(0,1))^*$.

Les calculs de matrices de et vecteurs seront initiés au paragraphe 2.3 puis complétés, pour $p = 1$, au paragraphe B.2 de l'annexe B. On étudiera quelques aspects théoriques du problème discrétisé au paragraphe 2.4 par rapport aux propriétés du problème continu.

Pour les calculs numériques, on utilisera les routines de MATLAB. Pour le calcul des valeurs et des vecteurs propres, au paragraphe 2.5, on utilisera des méthodes itératives standard qui approximent une quantité prédéterminée de valeurs propres pour une matrice creuse. Pour la maximisation de la première valeur propre on utilisera, audacieusement et sans étude de convergence préalable, une méthode de points intérieurs avec contrainte linéaire plutôt que de passer par la condition nécessaire d'optimalité qui est plus compliquée dans le cas non différentiable. L'intuition derrière cette approche est que la fonction est différentiable presque partout et donc numériquement il est peu probable de buter sur un point non différentiable.

L'expérimentation numérique au paragraphe 2.6 permettra de développer une meilleure intuition des différentes facettes du problème de Lagrange pour la suite du mémoire.

2.2. LE PROBLÈME DISCRÉTISÉ

2.2.1. Les espaces d'approximation de V et de \mathcal{A}

On approxime les fonctions v de $H_0^2(0,1)$ par des fonctions polynomiales par morceaux. Soit $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = 1$ une partition de l'intervalle $[0,1]$ en sous-intervalles

$$I_i \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} [x_i, x_{i+1}], \quad 1 \leq i \leq n, \quad h \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|. \quad (2.2.1)$$

Supposons que la partition soit uniforme, c.-\u00e0-d.,

$$x_{i+1} - x_i = h = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.2.2)$$

Comme l'espace $H_0^2(0,1)$ est un sous-espace de $C^1[0,1]$, l'espace des fonctions continues avec d\u00e9riv\u00e9e continue, il va nous falloir des polyn\u00f4mes d'ordre au moins 3 pour assurer la double continuit\u00e9 aux n\u00f4uds de la partition. On choisit donc

$$V_h \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ v_h \in C_0^1[0,1] : v_h|_{I_i} \in P^3(I_i), \quad 1 \leq i \leq n \right\}, \quad (2.2.3)$$

o\u00f9 $P^k(a,b)$ est l'ensemble des polyn\u00f4mes de degr\u00e9 inf\u00e9rieur ou \u00e9gal \u00e0 $k \geq 0$ sur l'intervalle $[a,b]$. On v\u00e9rifie que V_h est bien un sous-espace lin\u00e9aire de $H_0^2(0,1)$. Il y a donc 2 degr\u00e9s de libert\u00e9 en chaque n\u00f4ud $\{x_i : 2 \leq i \leq n\}$. C'est donc un espace de dimension $2(n-1)$.

Pour \mathcal{A} , on choisit des fonctions continues lin\u00e9aires par morceaux :

$$L_h \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ v_h \in C^0[0,1] : v_h|_{I_i} \in P^1(I_i), \quad 1 \leq i \leq n \right\}. \quad (2.2.4)$$

Il y a 1 degr\u00e9 de libert\u00e9 en chaque n\u00f4ud $\{x_i : 1 \leq i \leq n+1\}$. C'est donc un espace de dimension $n+1$. On aura aussi besoin du sous-ensemble convexe

$$L_h^+ \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ B_h \in C^0[0,1] : B_h|_{I_i} \in P^1(I_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{et } B_h(x) \geq 0 \right\}. \quad (2.2.5)$$

L'espace d'approximation de \mathcal{A} sera donc

$$\mathcal{A}_h \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ A_h \in L_h : A_h(x) \geq 0 \text{ dans } [0,1] \text{ et } \int_0^1 A_h(x) dx = 1 \right\}. \quad (2.2.6)$$

2.2.2. Fonctions de base pour L_h

On d\u00e9finit la *fonction de base de r\u00e9f\u00e9rence* γ sur $[-1,1]$ par

$$\gamma(\xi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} 1 + \xi, & \text{si } \xi \in [-1,0], \\ 1 - \xi, & \text{si } \xi \in [0,1]. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

On associe à chaque nœud les $n + 1$ fonctions de base suivantes (voir Figure 2.1)

$$\gamma_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \gamma\left(\frac{x-x_i}{h}\right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$\gamma_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \gamma\left(\frac{x-x_1}{h}\right), & \text{si } x \in I_1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \gamma_{n+1}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \gamma\left(\frac{x-x_{n+1}}{h}\right), & \text{si } x \in I_n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$
(2.2.8)

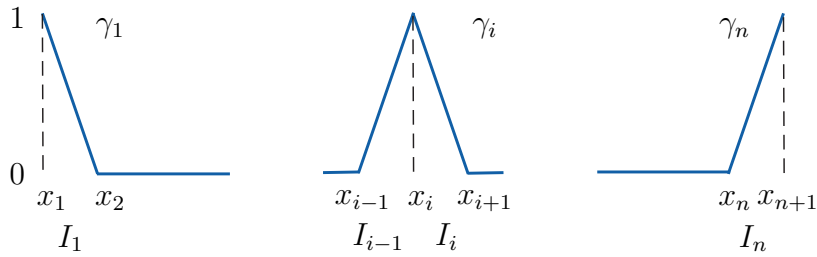


FIGURE 2.1. Fonctions de base $(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_{n+1})$ de L_h .

Toute fonction $A_h \in \mathcal{A}_h$ est de la forme

$$A_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i \gamma_i(x), \tag{2.2.9}$$

où $A_i = A_h(x_i) \geq 0$ est la valeur de A_h au point x_i . La contrainte sur le volume devient

$$1 = \int_0^1 A_h dx = \sum_{i=1}^{n+1} A_i \int_0^1 \gamma_i(x) dx = \frac{h}{2} A_1 + h \sum_{i=2}^n A_i + \frac{h}{2} A_{n+1} \tag{2.2.10}$$

$$\Rightarrow 0 \leq A_i \leq \frac{2}{h}, \quad 1 \leq i \leq n+1 \tag{2.2.11}$$

et \mathcal{A}_h est un sous-ensemble convexe et compact de L_h , alors que la question de compacité est moins évidente pour \mathcal{A} .

2.2.3. Fonctions de base pour V_h

Comme la dimension de V_h est $2(n-1)$, on choisit comme degrés de liberté les $(n-1)$ paires $(v_h(x_i), v'_h(x_i))$ en chaque nœud intérieur x_i , $2 \leq i \leq n$, de la partition. Les deux

fonctions de base en chaque nœud sont obtenues à partir des deux fonctions α et β définies sur l'élément de référence $[-1,1]$ (voir la figure 2.2)

$$\alpha(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} -2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, & \text{si } \xi \in [-1,0], \\ 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, & \text{si } \xi \in [0,1]. \end{cases} \quad \beta(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \xi^3 + 2\xi^2 + \xi, & \text{si } \xi \in [-1,0], \\ \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, & \text{si } \xi \in [0,1]. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

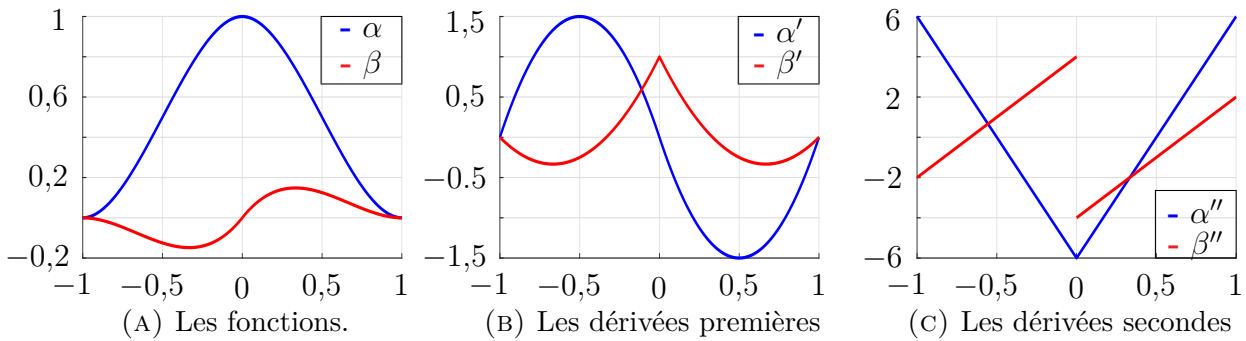


FIGURE 2.2. Les fonctions α et β et leurs dérivées.

On voit qu'elles appartiennent à $H_0^2(-1,1)$ et l'on observe sur la Figure 2.2c que $\alpha''(x)$ ainsi que $|\alpha''(x)|$ et $|\beta''(x)|$ sont continues, mais pas $\beta''(x)$.

À partir de α et β on définit les deux fonctions de base suivantes dans $H_0^2(0,1)$ au nœud x_i , $2 \leq i \leq n$, dont le support est $I_{i-1} \cup I_i$

$$\alpha_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \alpha\left(\frac{x-x_i}{h}\right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad \beta_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \beta\left(\frac{x-x_i}{h}\right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.13)$$

On a donc, pour tout $v_h \in V_h$,

$$v_h(x) = \sum_{i=2}^n [v_h(x_i) \alpha_i(x) + v'_h(x_i) \beta_i(x)], \quad v'_h(x) = \sum_{i=2}^n [v_h(x_i) \alpha'_i(x) + v'_h(x_i) \beta'_i(x)]. \quad (2.2.14)$$

Il est préférable, pour la programmation, de réécrire l'expression de la dérivée non pas en termes des $\alpha'_i(x)$ et des $\beta'_i(x)$, mais plutôt en termes de $\alpha'(\xi)$ et $\beta'(\xi)$:

$$\alpha'_i(x) = \frac{1}{h}(\alpha')_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \quad (\alpha')_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \alpha' \left(\frac{x - x_i}{h} \right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\beta'_i(x) = \frac{1}{h}(\beta')_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \quad (\beta')_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \beta' \left(\frac{x - x_i}{h} \right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.16)$$

La formule pour la dérivée devient

$$v'_h(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=2}^n [v_h(x_i) (\alpha')_i(x) + v'_h(x_i) (\beta')_i(x)]. \quad (2.2.17)$$

De la même façon, pour la dérivée seconde,

$$v''_h(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=2}^n [v_h(x_i) (\alpha'')_i(x) + v'_h(x_i) (\beta'')_i(x)] \quad (2.2.18)$$

avec

$$\alpha''_i(x) = \frac{1}{h^2}(\alpha'')_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \quad (\alpha'')_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \alpha'' \left(\frac{x - x_i}{h} \right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

$$\beta''_i(x) = \frac{1}{h}(\beta'')_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \quad (\beta'')_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \beta'' \left(\frac{x - x_i}{h} \right), & \text{si } x \in I_{i-1} \cup I_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.20)$$

2.2.4. Existence de solution et propriétés de la fonction $A_h \mapsto \lambda_p(A_h)$

L'application

$$v_h \mapsto f_p(A_h, v_h) = \frac{\int_0^1 A_h^p |v''_h|^2 dx}{\int_0^1 |v'_h|^2 dx} : V_h \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.21)$$

est continue. Si on normalise les éléments de V_h en introduisant l'ensemble compact

$$E_h \stackrel{\text{déf}}{=} \{v_h \in V_h : \|v'_h\|_{L^2(0,1)} = 1\}, \quad (2.2.22)$$

alors, pour $0 < p < +\infty$ et $A_h \in L_h^+$,

$$\lambda_p^h(A_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v_h \in V_h} f_p(A_h, v_h) = \inf_{v_h \in E_h} f_p(A_h, v_h) = \inf_{v_h \in E_h} \int_0^1 A_h^p(x) |v''_h(x)|^2 dx. \quad (2.2.23)$$

Il existe donc $u_h \in E_h$ qui réalise l'infimum et l'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie. De plus, $u_h \neq 0$, u_h est solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_0^1 A_h^p u_h'' v_h'' dx - \lambda_p^h(A_h) \int_0^1 u_h' v_h' dx = 0, \quad (2.2.24)$$

où $\lambda_p^h(A_h)$ est la plus petite valeur propre et u_h est une fonction propre. En utilisant les fonctions de base précédentes, l'équation (2.2.24) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\det (M(A_h^p) - \lambda_p(A_h)N) = 0, \quad (2.2.25)$$

où $M(A_h^p)$ et N sont des matrices symétriques de dimension $(2n-2) \times (2n-2)$ qui seront explicitées au paragraphe 2.3. On verra aussi que, pour $p=1$, l'application $A_h \mapsto M(A_h)$ est linéaire. Bien entendu, l'équation (2.2.25) donne non seulement la plus petite valeur propre $\lambda_p(A_h)$, mais aussi toutes les valeurs propres généralisées λ du couple $(M(A_h^p), N)$:

$$\det (M(A_h^p) - \lambda N) = 0. \quad (2.2.26)$$

Théorème 2.2.1. (i) *Pour $0 < p \leq 1$, l'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est concave et p -höldérienne, c'est-à-dire,*

$$\exists c \text{ tel que } \forall A_1, A_2 \in L_h^+, \quad |\lambda_p^h(A_2) - \lambda_p^h(A_1)| \leq c \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p.$$

Il existe donc $\hat{A}_h \in \mathcal{A}_h$ tel que

$$\lambda_p^h(\hat{A}_h) = \sup_{A_h \in \mathcal{A}_h} \lambda_p^h(A_h). \quad (2.2.27)$$

(ii) *Pour $p=1$, l'application $A_h \mapsto \lambda_1^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est concave, uniformément Lipschitz continue, Hadamard semi-différentiable et*

$$d_H \lambda_1^h(A_h; B_h) = \inf_{v_h \in E(A_h)} \int_0^1 B_h(x) |v_h''(x)|^2 dx, \quad (2.2.28)$$

où

$$E(A_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u_h \in E_h : \int_0^1 A_h(x) |u_h''(x)|^2 dx = \lambda_1^h(A) \right\}. \quad (2.2.29)$$

(iii) *Pour $1 < p < +\infty$, l'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, Hadamard semi-différentiable et*

$$d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = \inf_{v_h \in E_p(A_h)} \int_0^1 p A_h^{p-1}(x) B_h(x) |v_h''(x)|^2 dx, \quad (2.2.30)$$

où

$$E_p(A_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u_h \in E_h : \int_0^1 A_h^p(x) |u_h''(x)|^2 dx = \lambda_p^h(A) \right\}. \quad (2.2.31)$$

Il existe donc $\hat{A}_h \in \mathcal{A}_h$ tel que

$$\lambda_p^h(\hat{A}_h) = \sup_{A_h \in \mathcal{A}_h} \lambda_p^h(A_h). \quad (2.2.32)$$

est

(iv) Pour $0 < p < 1$, si A_h est strictement positive, l'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est Hadamard semi-différentiable et

$$d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = \inf_{v_h \in E_p(A_h)} \int_0^1 p A_h^{p-1}(x) B_h(x) |v_h''(x)|^2 dx, \quad (2.2.33)$$

où

$$E_p(A_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u_h \in E_h : \int_0^1 A_h^p(x) |u_h''(x)|^2 dx = \lambda_p^h(A_h) \right\}. \quad (2.2.34)$$

Remarque 2.2.1. (i) Pour $p \geq 1$, lorsque la valeur propre $\lambda_p^h(A_h)$ est simple, l'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en A_h et, pour tout $v_h \in E_p(A_h)$,

$$\forall B_h \in \mathcal{A}_h, \quad d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = \int_0^1 p A_h^{p-1}(x) B_h(x) |v_h''(x)|^2 dx.$$

On a alors un gradient pour $\lambda_p^h(A_h)$.

(ii) Il faut se rappeler que si A_h est nulle en trois nœuds consécutifs, alors $\lambda_p(A_h) = 0$. C'est une situation qu'un algorithme de maximisation cherchera à éviter. Si, en plus, $\lambda_p^h(A_h)$ est simple, alors λ_p^h sera différentiable en A_h .

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, on laisse tomber l'indice h de v_h et de A_h .

(i) (*Concavité.*) Pour $0 < p \leq 1$, l'application $(A, v) \mapsto \int_0^1 A^p(x) |v''(x)|^2 dx : \mathcal{A}_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ est concave et continue par rapport à A . Pour $\alpha \in [0, 1]$ et $A_1, A_2 \in L_h^+$,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x))^p |v''(x)|^2 dx \\ & \geq \alpha \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx + (1 - \alpha) \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx \\ & \geq \alpha \inf_{v \in E_h} \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx + (1 - \alpha) \inf_{v \in E_h} \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx \\ & = \alpha \lambda_p(A_1) + (1 - \alpha) \lambda_p(A_2) \\ & \Rightarrow \lambda_p(\alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2) \geq \alpha \lambda_p(A_1) + (1 - \alpha) \lambda_p(A_2). \end{aligned}$$

(*Hölder continuité.*) Pour $0 < p \leq 1$, la fonction $y \mapsto y^p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est Hölder continue et

$$|y_2^p - y_1^p| \leq |y_2 - y_1|^p.$$

Alors, pour $A_1, A_2 \in L_h^+$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 A_2^p(x) |v''(x)|^2 dx - \int_0^1 A_1^p(x) |v''(x)|^2 dx \right| \\ & \leq \int_0^1 |A_2^p(x) - A_1^p(x)| |v''(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |A_2(x) - A_1(x)|^p |v''(x)|^2 dx \\ & \leq \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p \|v''\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Dans un espace de dimension finie comme V_h , toutes les normes sur V_h sont équivalentes. Comme $\|v'\|_{L^2(0,1)}$ et $\|v''\|_{L^2(0,1)}$ sont des normes sur $H_0^2(0,1)$, et *a fortiori* sur le sous-espace V_h , alors

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in V_h, \quad \|v''\|_{L^2(0,1)} \leq c \|v'\|_{L^2(0,1)}.$$

Il s'ensuit que, pour $v \in E_h$ ($\|v'\|_{L^2(0,1)} = 1$),

$$\begin{aligned} f_p(A_2, v) &= f_p(A_1, v) + \int_0^1 (A_2^p - A_1^p) |v''|^2 dx \leq f_p(A_1, v) + c \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p \\ \inf_{v \in E_h} f_p(A_2, v) &\leq \inf_{v \in E_h} f_p(A_1, v) + c \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p \\ &\Rightarrow \lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1) \leq c \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p. \end{aligned}$$

En changeant l'ordre des indices, il s'ensuit que $\lambda_p(A_1) - \lambda_p(A_2) \leq c \|A_1 - A_2\|_{C[0,1]}^p$ et

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}_h, \quad |\lambda_p(A_2) - \lambda_p(A_1)| \leq c \|A_2 - A_1\|_{C[0,1]}^p.$$

(*Existence.*) Comme \mathcal{A}_h est compact et λ_p est continue, il y a existence (voir [10, Théorème 2.1, p. 14]). C'est aussi vrai sous l'hypothèse plus faible que λ soit semi-continue supérieurement (voir [10, Théorème 5.1 (ii), p. 24]).

(ii) De la partie (i), il ne reste qu'à montrer que λ_p est Hadamard semi-différentiable. Comme l'application est Lipschitzienne pour $p = 1$, il suffit de montrer qu'elle est Gateaux semi-différentiable (voir [10, Théorème 3.5, p. 110]). Pour démontrer la Gateaux semi-différentiabilité, utiliser, par exemple, la technique de [10, Théorème 5.2, pp. 153–154] et le fait que l'infimum possède toujours au moins une solution pour tout $A_h \in \mathcal{A}_h$.

(iii) L'application $A_h \mapsto \lambda_p^h(A_h) : L_h^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la composition de deux applications

$$\lambda_p^h(A_h) = \lambda_1^h(A_h^p).$$

Comme l'application $A_h \mapsto A_h^p : L_h^+ \rightarrow L_h^+$ est différentiable pour $p > 1$ et que $A_h \mapsto \lambda_1^h(A_h)$ est Hadamard semi-différentiable, la composition est Hadamard semi-différentiable et continue. L'existence est une conséquence de la continuité.

(iv) L'application $A_h \mapsto A_h^p : L_h^+ \rightarrow L_h^+$ est différentiable si A_h est bornée inférieurement par une constante strictement positive. \square

2.3. EXPRESSIONS DES MATRICES $M(A_h)$ ET N

2.3.1. Cas $p = 1$

Les calculs des différentes matrices et vecteurs associés au problème discrétisé se trouvent dans le paragraphe B.2 de l'annexe B. Cependant, comme on aura besoin de quelques caractéristiques de ces matrices dans le paragraphe suivant, on les introduit tout de suite.

On revient à la solution u_h du problème aux valeurs propres suivant pour $p = 1$:

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_0^1 A_h u_h'' v_h'' dx - \lambda_1(A_h) \int_0^1 u_h' v_h' dx = 0, \quad (2.3.1)$$

où $u_h \neq 0$ et $\lambda_1(A_h)$ est la plus petite valeur propre associée à u_h que l'on peut normaliser

$$\hat{u}_h = \frac{u_h}{\|u_h'\|_{L^2(0,1)}} \in E_h(A_h) \quad \Rightarrow \quad \|\hat{u}_h'\|_{L^2(0,1)} = 1, \quad (2.3.2)$$

$$\Rightarrow \exists \hat{u}_h \in E_h(A_h), \forall v \in V_h, \quad \int_0^1 A_h \hat{u}_h'' v'' dx - \lambda(A_h) \int_0^1 \hat{u}_h' v' dx = 0. \quad (2.3.3)$$

L'équation (2.3.1) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\det(M(A_h) - \lambda(A_h)N) = 0, \quad (2.3.4)$$

où $M(A_h)$ et N sont des matrices symétriques de dimension $(2n-2) \times (2n-2)$ et $A_h \mapsto M(A_h)$ est linéaire. Cette équation donne non seulement la plus petite valeur propre $\lambda(A_h)$, mais aussi toutes les valeurs propres λ .

On calcule maintenant les matrices $M(A_h)$ et N . On part de (2.3.1) avec

$$\begin{aligned} A_h(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} A_k \gamma_k(x), & v_h(x) &= \sum_{i=2}^n [v_i \alpha_i(x) + v_i' \beta_i(x)], \\ & & u_h(x) &= \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j(x) + u_j' \beta_j(x)]. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

L'inconnue est le vecteur $((u_2, u_2'), \dots, (u_n, u_n')) \in (\mathbb{R}^2)^{n-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_h u_h'' v_h'' dx &= \int_0^1 A_h \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] [v_i \alpha_i'' + v_i' \beta_i''] dx \\ &= \int_0^1 A_h \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] \alpha_i'' v_i + [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] \beta_i'' v_i' dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'_h v'_h dx &= \int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] [v_i \alpha'_i + v'_i \beta'_i] dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \alpha'_i v_i + [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \beta'_i v'_i dx. \end{aligned}$$

L'équation (2.3.1) devient

$$\int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \begin{bmatrix} A_h[u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \alpha''_i - \lambda[u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \alpha'_i \\ A_h[u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \beta''_i - \lambda[u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \beta'_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ v'_i \end{bmatrix} dx = 0.$$

Comme il s'agit d'un produit scalaire,

$$\int_0^1 \sum_{j=2}^n \begin{bmatrix} A_h[u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \alpha''_i - \lambda[u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \alpha'_i \\ A_h[u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \beta''_i - \lambda[u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \beta'_i \end{bmatrix} dx = 0$$

ou, pour chaque i ,

$$\sum_{j=2}^n \left(\int_0^1 A_h \begin{bmatrix} \alpha''_i \alpha''_j & \alpha''_i \beta''_j \\ \beta''_i \alpha''_j & \beta''_i \beta''_j \end{bmatrix} dx - \lambda \int_0^1 \begin{bmatrix} \alpha'_i \alpha'_j & \alpha'_i \beta'_j \\ \beta'_i \alpha'_j & \beta'_i \beta'_j \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} dx = 0.$$

En utilisant le fait que

$$A_h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \gamma_k(x) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k(x) = 1,$$

on obtient de (2.3.1) le système de $2(n-1)$ équations suivant : pour $2 \leq i \leq n$,

$$\sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{n+1} \left(\int_0^1 A_k \gamma_k \begin{bmatrix} \alpha''_i \alpha''_j & \alpha''_i \beta''_j \\ \beta''_i \alpha''_j & \beta''_i \beta''_j \end{bmatrix} dx - \lambda \int_0^1 \gamma_k \begin{bmatrix} \alpha'_i \alpha'_j & \alpha'_i \beta'_j \\ \beta'_i \alpha'_j & \beta'_i \beta'_j \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} dx = 0,$$

$$\sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{n+1} \left(A_k \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \alpha''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \alpha''_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \beta''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \beta''_i dx \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \alpha'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \alpha'_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \beta'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \beta'_i dx \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

À chaque triplet (i, j, k) correspond une matrice 2×2

$$M_{ijk} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \alpha''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \alpha''_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \beta''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \beta''_i dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix}, \quad (2.3.6)$$

$$N_{ijk} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \alpha'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \alpha'_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \beta'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \beta'_i dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

On utilisera aussi la notation

$$M(A_h)_{ij} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} A_k \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \alpha''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \alpha''_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha''_j \beta''_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta''_j \beta''_i dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix}, \quad (2.3.8)$$

$$N_{ij} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \alpha'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \alpha'_i dx \\ \int_0^1 \gamma_k \alpha'_j \beta'_i dx & \int_0^1 \gamma_k \beta'_j \beta'_i dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u'_j \end{bmatrix}. \quad (2.3.9)$$

On voit que

$$M(A_h) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k M_k, \quad (M_k)_{ij} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} M_{ijk} \quad \text{et} \quad N_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} N_{ijk}. \quad (2.3.10)$$

Les matrices $M(A_h)$ et N sont sym\u00e9triques, N est d\u00e9finie positive et $M(A_h)$ est semi-d\u00e9finie positive si $A_h \geq 0$. Elles sont form\u00e9es \u00e0 partir de petits blocs 2×2 . La suite des calculs pour les matrices se trouve au paragraphe B.2 de l'annexe B.

2.3.2. Du cas $p = 1$ au cas $0 < p < \infty$

On calcule maintenant les matrices $M(A_h^p)$ et N pour $p \neq 1$. On part de (2.3.1) avec

$$A_h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \gamma_k(x), \quad \begin{aligned} v_h(x) &= \sum_{i=2}^n [v_i \alpha_i(x) + v'_i \beta_i(x)], \\ u_h(x) &= \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j(x) + u'_j \beta_j(x)]. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

L'inconnue est le vecteur $((u_2, u'_2), \dots, (u_n, u'_n)) \in (\mathbb{R}^2)^{n-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_h^p u''_h v''_h dx &= \int_0^1 A_h^p \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] [v_i \alpha''_i + v'_i \beta''_i] dx \\ &= \int_0^1 A_h^p \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \alpha''_i v_i + [u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \beta''_i v'_i dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'_h v'_h dx &= \int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] [v_i \alpha'_i + v'_i \beta'_i] dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \alpha'_i v_i + [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \beta'_i v'_i dx. \end{aligned}$$

L'\u00e9quation (2.3.1) devient

$$\int_0^1 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \begin{bmatrix} A_h^p [u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \alpha''_i - \lambda [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \alpha'_i \\ A_h^p [u_j \alpha''_j + u'_j \beta''_j] \beta''_i - \lambda [u_j \alpha'_j + u'_j \beta'_j] \beta'_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ v'_i \end{bmatrix} dx = 0.$$

Comme il s'agit d'un produit scalaire,

$$\int_0^1 \sum_{j=2}^n \left[A_h^p [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] \alpha_i'' - \lambda [u_j \alpha_j' + u_j' \beta_j'] \alpha_i' \right] dx = 0$$

ou, pour chaque i ,

$$\sum_{j=2}^n \left(\int_0^1 A_h^p \begin{bmatrix} \alpha_i'' \alpha_j'' & \alpha_i'' \beta_j'' \\ \beta_i'' \alpha_j'' & \beta_i'' \beta_j'' \end{bmatrix} dx - \lambda \int_0^1 \begin{bmatrix} \alpha_i' \alpha_j' & \alpha_i' \beta_j' \\ \beta_i' \alpha_j' & \beta_i' \beta_j' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u_j' \end{bmatrix} dx = 0$$

et en explicitant le terme non linéaire A_h^p

$$\sum_{j=2}^n \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n+1} A_k \gamma_k \right)^p \begin{bmatrix} \alpha_i'' \alpha_j'' & \alpha_i'' \beta_j'' \\ \beta_i'' \alpha_j'' & \beta_i'' \beta_j'' \end{bmatrix} dx - \lambda \int_0^1 \begin{bmatrix} \alpha_i' \alpha_j' & \alpha_i' \beta_j' \\ \beta_i' \alpha_j' & \beta_i' \beta_j' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u_j' \end{bmatrix} dx = 0.$$

Puisque $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, où $1 \leq i \leq n$, on a par construction que

$$\text{supp } \alpha_i = \text{supp } \beta_i = I_{i-1} \cup I_i, \quad 2 \leq i \leq n,$$

$$\text{supp } \gamma_k = \begin{cases} I_1, & \text{si } k = 1, \\ I_{k-1} \cup I_k, & \text{si } 2 \leq k \leq n, \\ I_n, & \text{si } k = n + 1. \end{cases}$$

On a une structure tridiagonale par blocs de 2×2 de largeur de bande 5

$$\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M_{43} & M_{44} & M_{45} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{54} & M_{455} & M_{56} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{n-1,n-2} & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{n,n-1} & M_{nn} & \end{bmatrix}.$$

On peut encore préciser

$$\sum_{j=2}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{k=i-1}^{i+1} A_k \gamma_k \right)^p \begin{bmatrix} \alpha_i'' \alpha_j'' & \alpha_i'' \beta_j'' \\ \beta_i'' \alpha_j'' & \beta_i'' \beta_j'' \end{bmatrix} dx - \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \alpha_i' \alpha_j' & \alpha_i' \beta_j' \\ \beta_i' \alpha_j' & \beta_i' \beta_j' \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_j \\ u_j' \end{bmatrix} dx = 0.$$

On utilisera la notation suivante pour les matrices 2×2

$$M(A_h^p)_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\sum_{k=i-1}^{i+1} A_k \gamma_k \right)^p \begin{bmatrix} \alpha_i'' \alpha_j'' & \alpha_i'' \beta_j'' \\ \beta_i'' \alpha_j'' & \beta_i'' \beta_j'' \end{bmatrix} dx, \quad N_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \alpha_i' \alpha_j' & \alpha_i' \beta_j' \\ \beta_i' \alpha_j' & \beta_i' \beta_j' \end{bmatrix} dx. \quad (2.3.12)$$

Les matrices $M(A_h^p)$ et N sont symétriques, N est définie positive et $M(A_h^p)$ est semi-définie positive si $A_h \geq 0$. Elles sont formées à partir de petits blocs 2×2 .

On peut ramener les définitions de ces matrices sur l'intervalle de référence $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} N_{ij} &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'_i(x_i + h\xi) \alpha'_j(x_i + h\xi) & \alpha'_i(x_i + h\xi) \beta'_j(x_i + h\xi) \\ \beta'_i(x_i + h\xi) \alpha'_j(x_i + h\xi) & \beta'_i(x_i + h\xi) \beta'_j(x_i + h\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) \alpha'((x_i - x_j)/h + \xi) & \alpha'(\xi) \beta'(x_i + h\xi) \\ \beta'(\xi) \alpha'((x_i - x_j)/h + \xi) & \beta'(\xi) \beta'((x_i - x_j)/h + \xi) \end{bmatrix} d\xi. \end{aligned}$$

On voit que $N_{ij} = 0$ pour $j < i_1$ et $j > i + 1$. Il ne reste donc que trois matrices

$$N_{i,i-1} = \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) \alpha'(1 + \xi) & \alpha'(\xi) \beta'(1 + \xi) \\ \beta'(\xi) \alpha'(1 + \xi) & \beta'(\xi) \beta'(1 + \xi) \end{bmatrix} d\xi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

$$N_{ii} = \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) \alpha'(\xi) & \alpha'(\xi) \beta'(\xi) \\ \beta'(\xi) \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

$$N_{i,i+1} = \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) \alpha'(\xi - 1) & \alpha'(\xi) \beta'(\xi - 1) \\ \beta'(\xi) \alpha'(\xi - 1) & \beta'(\xi) \beta'(\xi - 1) \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}.$$

Dans le calcul ci-haut au nœud x_i , pour passer de I_{i-1} à $[-1,0]$ et de I_i à $[0,1]$, on a eu besoin des dérivées premières et secondes des fonctions de base α et β et de leurs translations. Le tout est compilé dans le tableau qui suit.

| ξ | $\alpha'(\xi)$ | $\alpha'(\xi + 1)$ | $\alpha''(\xi - 1)$ | $\alpha''(\xi)$ | $\alpha''(\xi + 1)$ | $\alpha''(\xi - 1)$ |
|----------|------------------|--------------------|---------------------|-----------------|---------------------|---------------------|
| $[-1,0]$ | $-6\xi^2 - 6\xi$ | $6\xi^2 + 6\xi$ | 0 | $-12\xi - 6$ | $12\xi + 6$ | 0 |
| $[0,1]$ | $6\xi^2 - 6\xi$ | 0 | $6\xi^2 - 6\xi$ | $12\xi - 6$ | 0 | $-12\xi + 6$ |

(A) Les fonctions α' et α'' et leurs translations.

| ξ | $\beta'(\xi)$ | $\beta'(\xi + 1)$ | $\beta'(\xi - 1)$ | $\beta''(\xi)$ | $\beta''(\xi + 1)$ | $\beta''(\xi - 1)$ |
|----------|---------------------|-------------------|-------------------|----------------|--------------------|--------------------|
| $[-1,0]$ | $3\xi^2 + 4\xi + 1$ | $3\xi^2 + 2\xi$ | 0 | $6\xi + 4$ | $6\xi + 2$ | 0 |
| $[0,1]$ | $3\xi^2 - 4\xi + 1$ | 0 | $3\xi^2 - 2\xi$ | $6\xi - 4$ | 0 | $6\xi - 2$ |

(B) Les fonctions β' et β'' et leurs translations.

| ξ | $\gamma(\xi)$ | $\gamma(\xi + 1)$ | $\gamma(\xi - 1)$ |
|----------|---------------|-------------------|-------------------|
| $[-1,0]$ | $1 + \xi$ | $-\xi$ | 0 |
| $[0,1]$ | $1 - \xi$ | 0 | ξ |

(C) La fonction γ et ses translations.

TABLEAU 2. I. Les fonctions de base et leurs translations.

Remarque 2.3.1. *Il est utile de noter que*

$$\int_0^1 \beta''(\xi - 1) d\xi = 1, \quad \int_0^1 (1 - \xi) \beta''(\xi - 1) d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \alpha''(\xi - 1) d\xi = 0, \quad \int_0^1 (1 - \xi) \alpha''(\xi - 1) d\xi = 1.$$

De la même façon, $M(A_h^p)_{ij} = 0$ pour $j < i - 1$ et $j > i + 1$ et on peut se ramener sur l'intervalle de référence $[-1,1]$

$$M(A_h^p)_{ij} = \frac{1}{h^3} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^p \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''((i-j) + \xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j + \xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j + \xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j + \xi) \end{bmatrix} d\xi$$

et pour tenir compte de $i = 1$ et $i = n + 1$, on a besoin de la fonction γ sur $[-2,0]$ et $[0,2]$ respectivement. La définition de γ est étendue par zéro à $[-2,2]$

$$\gamma(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 + \xi, & \text{si } \xi \in [-1,0], \\ 1 - \xi, & \text{si } \xi \in [0,1], \\ 0, & \text{si } \xi \in [-2, -1) \cup (1,2]. \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Il ne reste donc que trois matrices 2×2

$$M(A_h^p)_{i,1-1} = \frac{1}{h^3} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^0 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^p \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(1 + \xi) & \alpha''(\xi) \beta''(1 + \xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(1 + \xi) & \beta''(\xi) \beta''(1 + \xi) \end{bmatrix} d\xi,$$

$$M(A_h^p)_{ii} = \frac{1}{h^3} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^p \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \quad \text{et}$$

$$M(A_h^p)_{i,i+1} = \frac{1}{h^3} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^p \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(\xi - 1) & \alpha''(\xi) \beta''(\xi - 1) \\ \beta''(\xi) \alpha''(\xi - 1) & \beta''(\xi) \beta'(\xi - 1) \end{bmatrix} d\xi$$

qu'il faudra évaluer numériquement.

En notation matricielle, on a

$$f_p(A_h, v_h) = \frac{M(A_h^p) \vec{v}_h \cdot \vec{v}_h}{N \vec{v}_h \cdot \vec{v}_h}, \quad (2.3.14)$$

où $\vec{v}_h = ((v_h(x_1), v_h'(x_1)), \dots, (v_h(x_n), v_h'(x_n)))$ est le vecteur construit à partir de v_h . S'il existe $u_h \in E_h(A_h)$ minimisant, alors

$$\lambda_p^h(A_h) = \frac{M(A_h^p) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}{N \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h} \quad (2.3.15)$$

et la dérivée directionnelle de $\lambda_p^h(A_h)$ en A_h dans la direction B_h est donnée par

$$d\lambda_p^h(A_h; B_h) = \frac{M(p A_h^{p-1} B_h) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}{N \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}. \quad (2.3.16)$$

2.4. MULTIPLICITÉ DES VALEURS PROPRES POUR $p = 1$

On établit maintenant un certain nombre de résultats pour les valeurs propres du problème discrétisé. Ils ne sont cependant pas aussi précis que pour le problème continu.

Théorème 2.4.1. *Soient $A \in L_h$ tel que $A \neq 0$ et λ tel que $\det(M(A) - \lambda N) = 0$, c'est-à-dire, λ est une valeur propre généralisée. Si*

$$\forall i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad A_{i-1} + (2 \pm \sqrt{3})A_i \neq 0, \quad (2.4.1)$$

alors, pour $h > 0$ assez petit, λ est au plus de multiplicité 2 et l'espace E_λ des vecteurs propres est au plus de dimension 2. En particulier, si $A \geq 0$, la condition devient

$$\forall i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad A_{i-1} + A_i > 0 \quad (2.4.2)$$

et elle est indépendante de la taille de h .

DÉMONSTRATION. On utilise la même idée que le lemme B.1.1. On a vu que la matrice $B = M - \lambda N$ est une matrice composée de matrices 2×2 avec une structure tridiagonale

$$\begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{54} & B_{455} & B_{56} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B_{n-1,n-2} & B_{n-1,n-1} & B_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & B_{n,n-1} & B_{nn} \end{bmatrix}.$$

On enlève la première rangée et la dernière colonne de blocs

$$B' \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{54} & B_{455} & B_{56} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & B_{n-1,n-2} & B_{n-1,n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & B_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

et on cherche les conditions sur A pour que le déterminant soit non nul. Il n'y a maintenant plus de diagonale inférieure. Par le Lemme B.1.2 de l'annexe B, le déterminant de cette matrice est donné par le produit des matrices diagonales de B' qui sont les matrices sous-diagonales de la matrice initiale B :

$$\det B' = \prod_{i=2}^n \det B_{i,i-1}.$$

Pour que la matrice B' soit inversible, il faut que ce déterminant soit non nul, ce qui donne la condition

$$\prod_{i=2}^n \det (M - \lambda N)_{i,i-1} \neq 0. \quad (2.4.3)$$

Ces matrices 2×2 sont toutes de la même forme

$$(M - \lambda N)_{i,i-1} = \frac{A_{i-1}}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{A_i}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{h} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

ce qui simplifie le calcul

$$\begin{aligned} h^3 \det (M - \lambda N)_{i,i-1} &= \begin{bmatrix} -6(A_{i-1} + A_i) + \frac{6}{5} \lambda h^2 & -(4A_{i-1} + 2A_i) + \frac{1}{10} \lambda h^2 \\ 2A_{i-1} + 4A_i - \frac{1}{10} \lambda h^2 & (A_{i-1} + A_i) + \frac{1}{30} \lambda h^2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \left((A_{i-1} + 2A_i)^2 - 3A_i^2 \right) + \lambda h^2 \frac{2}{5} (A_{i-1} + A_i) + \frac{(\lambda h^2)^2}{20}. \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, le terme dominant est $((A_{i-1} + 2A_i)^2 - 3A_i^2)$ et la condition de déterminant non nul (2.4.3) nécessite que

$$\forall i, \quad A_{i-1} + (2 \pm \sqrt{3})A_i \neq 0.$$

Si $A \geq 0$, alors la condition se simplifie : $A_{i-1} + A_i > 0$. □

2.5. MISE EN ŒUVRE DES CALCULS

Tous les calculs sont présentés pour $n = 2000$. Pour commencer, on doit construire les matrices. Évidemment, en mémoire on exploitera leur forme creuse. Pour construire les matrices, on doit évaluer numériquement des intégrales. Pour ce faire, on utilise la méthode « *integral* » de MATLAB qui respectera une tolérance absolue ou bien relative — la première à être satisfaite — qui sont, respectivement, de 10^{-10} et 10^{-14} .

Ensuite, pour le calcul des valeurs et des vecteurs propres, on utilise la fonction « *eigs* » de MATLAB qui est implémentée pour les matrices creuses. Cette fonction sera utilisée pour approximer la plus petite valeur propre avec une tolérance de 10^{-14} . Pour la maximisation de cette première valeur propre, on utilisera une méthode de points intérieurs avec les tolérances suivantes :

- tolérance des contraintes : 10^{-6}
- tolérance des conditions de premier ordre : 10^{-6}
- tolérance du pas : 10^{-10} .

Contrairement au calcul d'intégrales et de valeurs propres, varier les tolérances pour la maximisation ne modifie pas significativement l'optimum.

Finalement, on obtient des résultats numériques qui sont très similaires à ce que l'on trouve dans la littérature où il est usuel d'implémenter les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas non différentiable qui sont beaucoup plus compliquées. Comme mentionné plus tôt, il n'y a aucune garantie de convergence, tout comme dans les résultats des différents auteurs.

Le seul point négatif est la présence d'oscillations qui se produisent sur quelques éléments proches du bord du domaine de calcul (en 0 et en 1) lorsque n devient grand. Il n'y a pas

d'explications définitives à ce phénomène, mais plusieurs explications semblent être plausibles. Les oscillations peuvent être expliquées par l'utilisation d'un algorithme qui cherche à maximiser la fonction en ne prenant pas en considération les nombreuses erreurs d'arrondi lorsque n devient grand. En effet, lors de l'approximation des valeurs propres, on peut voir expérimentalement que ces oscillations ont un impact très faible sur la valeur de la fonction objective. En d'autres termes, si on ajuste artificiellement la colonne pour qu'elle n'ait plus d'oscillations, les valeurs propres sont très similaires.

2.6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

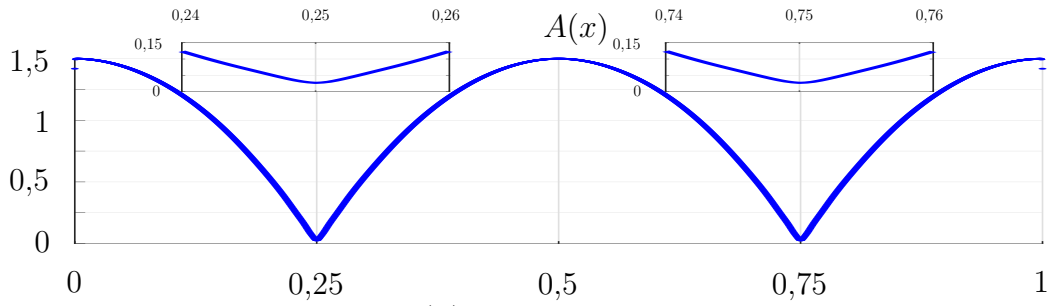
On présente ici quelques résultats numériques importants qui serviront d'intuition pour la suite. Pour tracer les graphiques des colonnes optimales, seules les valeurs ponctuelles aux nœuds seront tracées plutôt que d'utiliser une fonction linéaire par morceaux

2.6.1. La colonne creuse maximisante pour $p = 1$

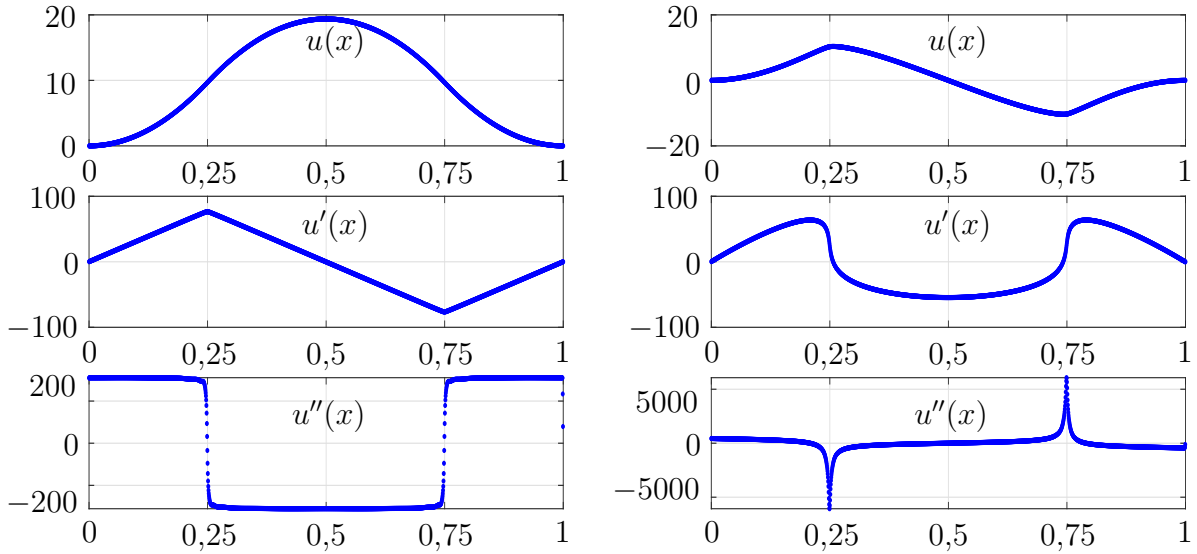
On donne au tableau 2. II les quatre premières valeurs propres $\lambda_1^{(i)}$, $1 \leq i \leq 4$, de la colonne optimisée. Le profil A_h , les fonctions propres et leurs dérivées sont présentées en Figure 2.10. Cox et Overton trouvent 47,9898. Les deux résultats sont très proches du profil quadratique par morceaux (1.5.16) proposé par Olhoff et Niordson [30] avec $\lambda_1(A) = 48$.

| Valeurs propres | Résultats numériques | Cox-Overton |
|-------------------|----------------------|-------------|
| $\lambda_2^{(1)}$ | 47,9920 | 47,9898 |
| $\lambda_2^{(2)}$ | 47,9927 | nd |
| $\lambda_2^{(3)}$ | 86,8541 | nd |
| $\lambda_2^{(4)}$ | 175,7007 | nd |

TABLEAU 2. II. Comparaison des résultats numériques pour $n = 2000$ et $p = 1$ avec Cox et Overton



(A) La colonne A.



(B) Première fonction propre et ses dérivées.

(C) Deuxième fonction propre et ses dérivées.

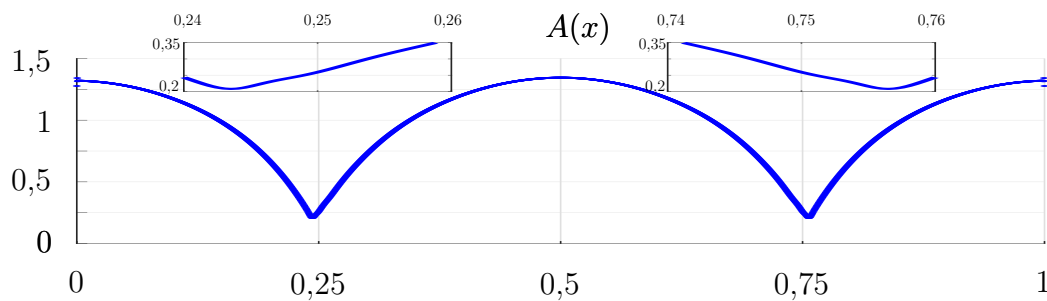
FIGURE 2.3. Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$ et $p = 1$.

2.6.2. La colonne pleine maximisante pour $p = 2$

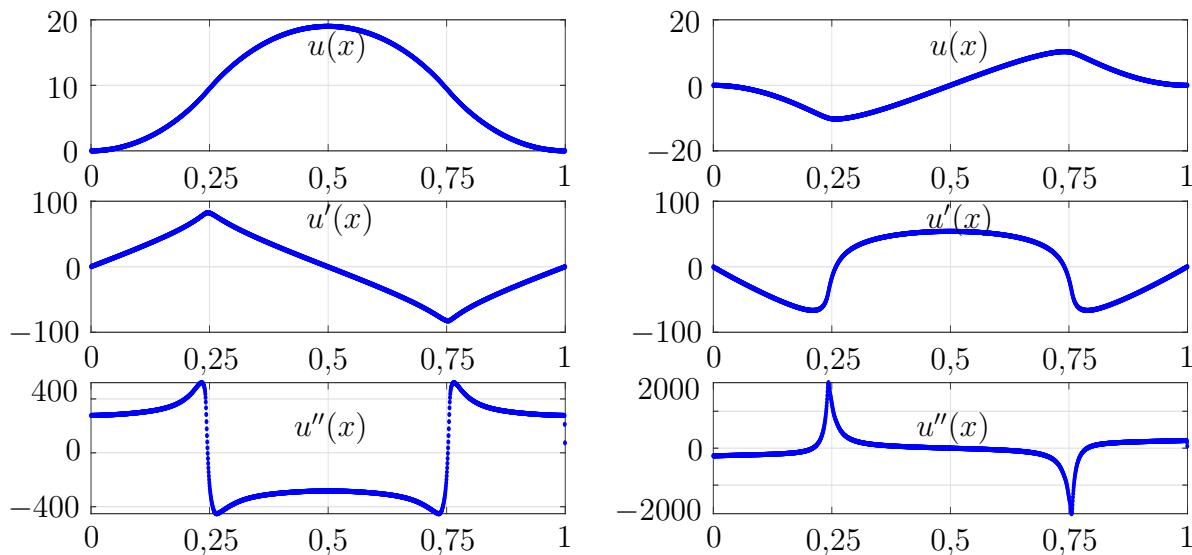
On donne au tableau 2. III les quatre premières valeurs propres $\lambda_2^{(i)}$, $1 \leq i \leq 4$, de la colonne pleine optimisée. On donne le profil optimal et les deux premières fonctions propres en figure 2.4. Cox et Overton [9], N. Olhoff et S. Rasmussen [31], E. F. Masur [29] et A. P. Seiranyan [35] obtiennent des valeurs très proches.

| Valeurs propres | Résultats numériques | Cox-Overton | Olhoff-Rasmussen | Egorov |
|-------------------|----------------------|-------------|------------------|---------|
| $\lambda_2^{(1)}$ | 52,3450 | 52,3533 | 52,3563 | 52,3562 |
| $\lambda_2^{(2)}$ | 52,3458 | nd | 52,3563 | nd |
| $\lambda_2^{(3)}$ | 95,4251 | nd | nd | nd |
| $\lambda_2^{(4)}$ | 174,281 | nd | nd | nd |

TABLEAU 2. III. Comparaison des résultats numériques pour $n = 2000$ et $p = 2$ avec différents auteurs



(A) La colonne A.



(B) Première fonction propre et ses dérivées. (C) Deuxième fonction propre et ses dérivées.

FIGURE 2.4. Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$ et $p = 2$.

2.6.3. Autres calculs pour $p = 1$

Il y a plusieurs profils de colonnes, pour $p = 1$, que l'on retrouve dans la littérature. Dans cette section, On s'intéressera à quatre profils de colonnes :

1. La colonne uniforme (A_{unif}) : identiquement égale à 1 pour tout x entre 0 et 1.
2. L'approximation trigonométrique (A_{trigo}) : $A(x) = \frac{\pi}{2} |\cos(2\pi x)|$
3. L'approximation polynomiale (A_{poly}) : polynôme de degré deux par morceaux d'Olhoff-Niordson [30] donné par l'équation 1.5.16.
4. La colonne optimale (A_{optim}) : Obtenue numériquement, elle respecte la condition de premier ordre. Cependant, il n'y a pas de garantie théorique que cette fonction soit l'optimum du problème.

On observe aussi que la fonction A_{poly} n'est pas très loin de la fonction

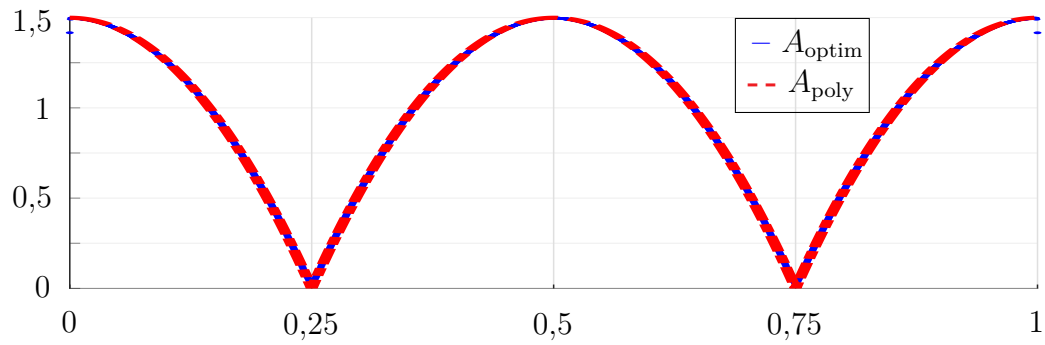
$$A_{\text{trigo}}(x) = \frac{\pi}{2} |\cos(2\pi x)|.$$

qui passe aussi par zéro en $1/4$ et $3/4$ avec des sauts de sa dérivée en ces points. On résume les résultats pour ces différentes fonctions dans le tableau qui suit.

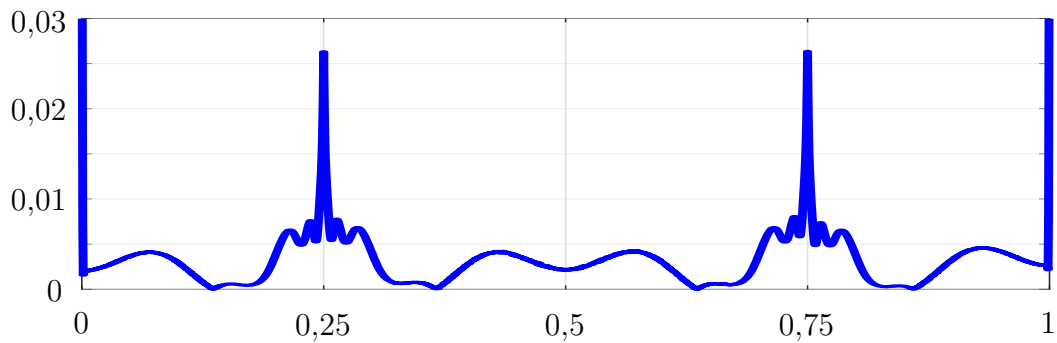
| | A_{unif} | A_{trigo} | A_{poly} | A_{optim} |
|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| $\lambda_1^{(1)}$ | 39,4784 | 38,2837 | 37,0610 | 47,9920 |
| $\lambda_1^{(2)}$ | 80,7629 | 47,9996 | 47,8482 | 47,9927 |
| $\lambda_1^{(3)}$ | 157,9137 | 67,4372 | 65,4485 | 86,8541 |
| $\lambda_1^{(4)}$ | 238,7181 | 160,2313 | 150,9216 | 175,7007 |

TABLEAU 2. IV. Les valeurs propres pour chaque fonction pour $n = 2000$ et $p = 1$.

Voici quelques graphiques de comparaison pour $n = 2000$:

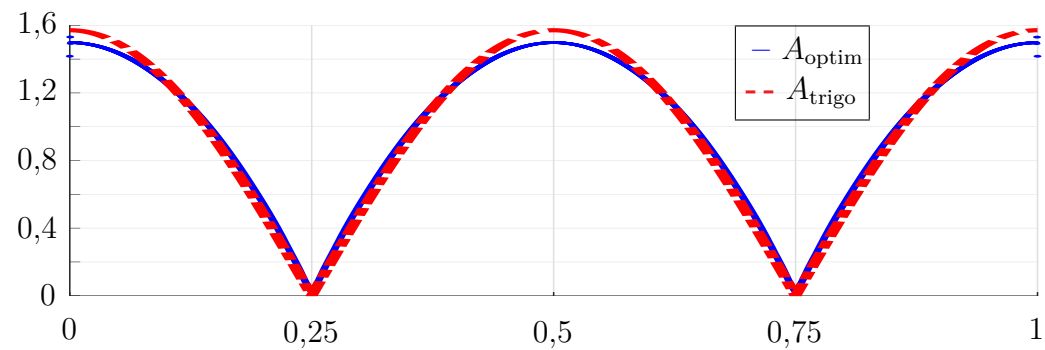


(A) Les colonne A_{poly} et A_{optim} .

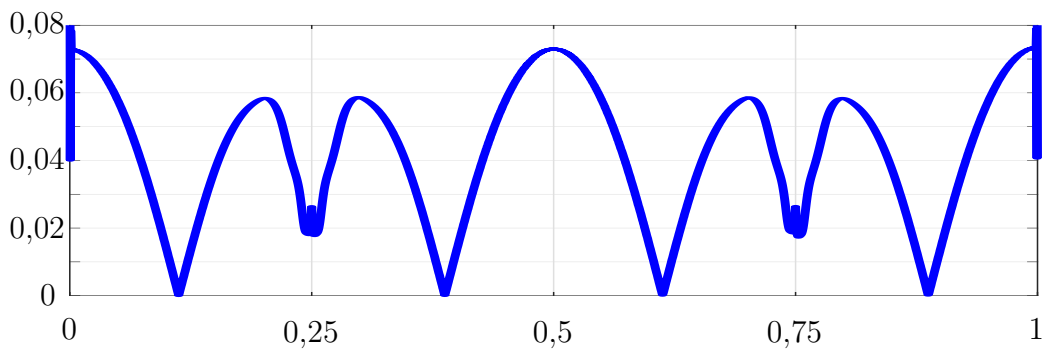


(B) $|A_{\text{poly}} - A_{\text{optim}}|$.

FIGURE 2.5. Comparaison entre A_{poly} et A_{optim} .



(A) Les colonne A_{trigo} et A_{optim} .



(B) $|A_{\text{trigo}} - A_{\text{optim}}|$.

FIGURE 2.6. Comparaison entre A_{trigo} et A_{optim} .

2.6.4. Observations par rapport à la colonne optimale en fonction de p

Le graphique 2.9 représente la variation des deux premières valeurs propres $\lambda_p^{(1)}$ et $\lambda_p^{(2)}$ de la colonne optimale en fonction de p , $0 < p < +\infty$. On remarque que lorsque p tend vers zéro, on obtient exactement les valeurs propres de la colonne uniforme. Les résultats détaillés se trouvent au paragraphe B.4 de l'annexe B sous forme d'un tableau B. I.

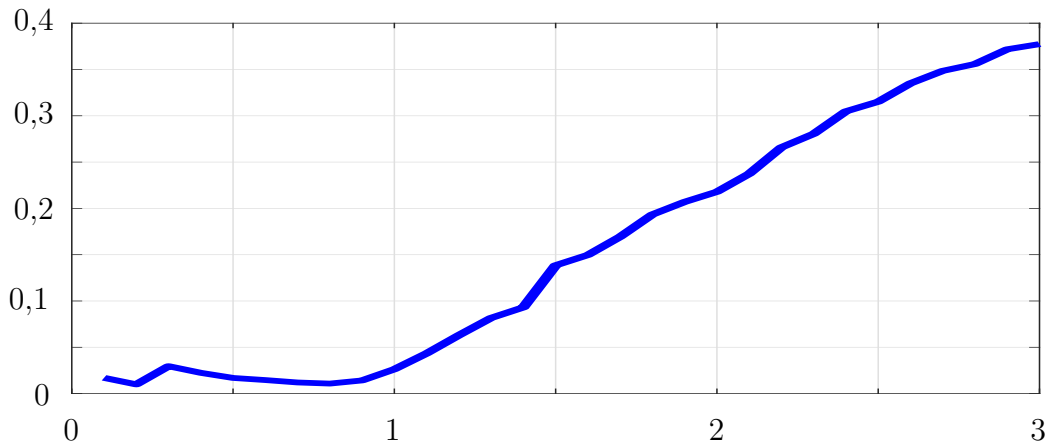


FIGURE 2.7. Hauteur en $x = 1/4$ en fonction de p .

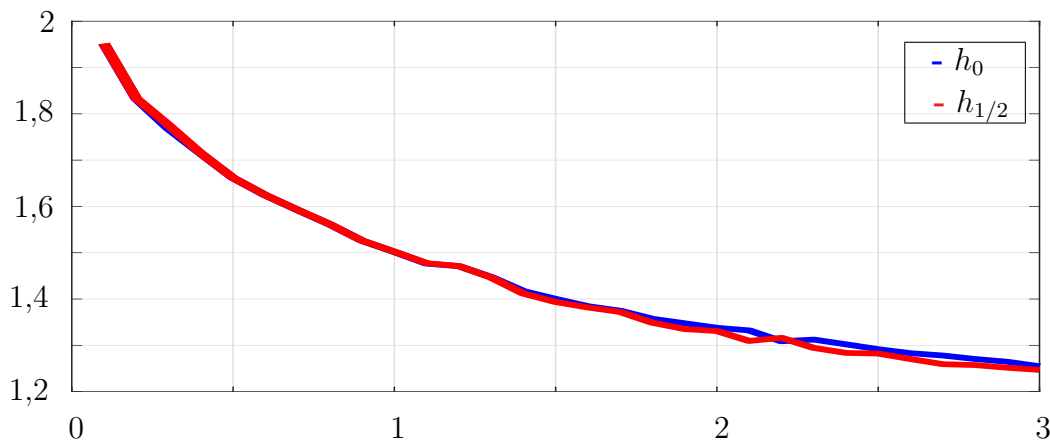


FIGURE 2.8. Hauteur en $x = 0$ (bleue) et en $x = 1/2$ (rouge) en fonction de p .

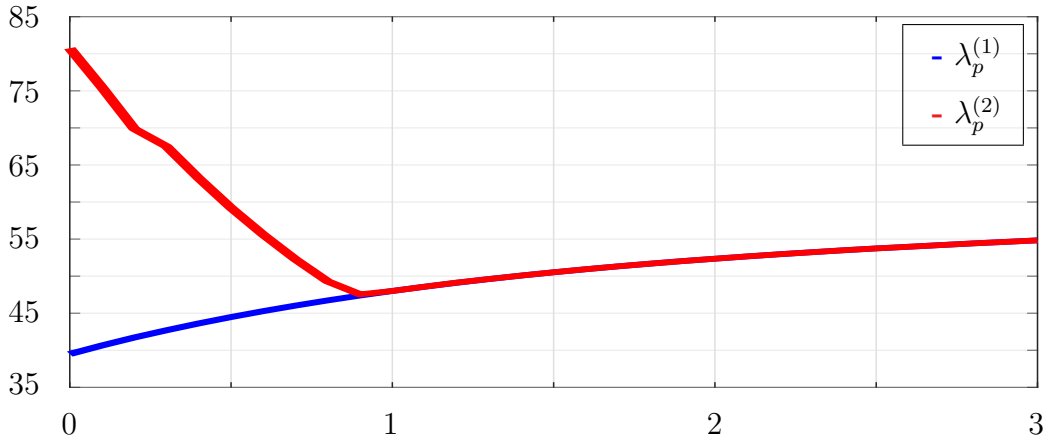


FIGURE 2.9. Première (bleue) et deuxième (rouge) valeurs propres en fonction de p .

2.6.5. Profil maximisant pour $p = 0,1$ et $p = 3$

On présente les graphiques des colonnes pour les deux p les plus extrêmes calculés. Lorsque p est trop grand où trop petit, il en résulte des instabilités de la solution, c'est pourquoi on s'est limité à ces valeurs.

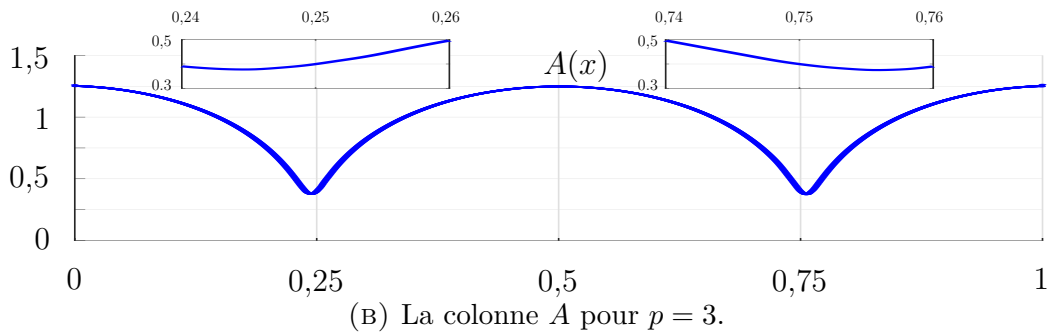
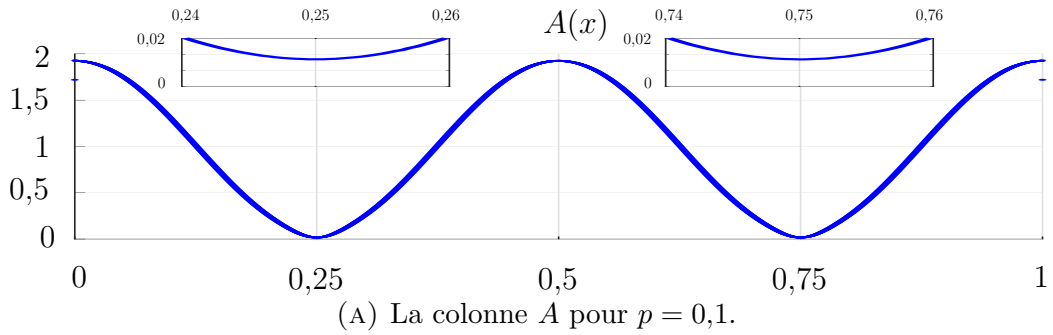


FIGURE 2.10. Résultats d'optimisation numérique pour $n = 2000$.

Chapitre 3

NOUVEL ESPACE DE FONCTIONS PROPRES

3.1. ORIENTATION

Lorsque le profil A de la colonne n'est pas borné inférieurement par une constante strictement positive, on obtient un opérateur dégénéré. Cette situation se présente pour le profil (1.5.16) au chapitre 1 proposé par Olhoff et Niordson [30] de la colonne creuse (cas $p = 1$) qui s'annule en $1/4$ et $3/4$ et que Seiranyan [35] qualifie d'optimal selon son analyse. Les calculs numériques de Cox et Overton [9] et les nôtres donnent une fonction très semblable

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)}(A) &= 47,9920 \text{ et } \lambda_1^{(2)}(A) = 47,9927 \\ A(0) &= 1,4984, A(1) = 1,4979 \quad \max_{[0,1]} A(x) = 1,4984 = A(0), \\ \text{minima locaux } A(0,25) &= 0,0263 \text{ et } A(0,75) = 0,0264 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

avec une valeur minimale de 0,0263 très proche de 0. D'autre part, les calculs numériques d'Egorov [19] en 2017 donnent

$$\begin{aligned} \lambda_1(A) &= 41,48 \text{ (numériquement double),} \\ A(0) &= 1,5, A(1) = 1,5; \quad \max_{[0,1]} A(x) = 1,5655 = A(1/2), \\ \text{minima locaux } A(0,22152) &= 0,1754 \text{ et } A(0,77848) = 0,1754 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

avec une valeur minimale de 0,1754 très nettement supérieure à 0,0263.

Son approche et ses méthodes aboutissent à des équations pour le profil de la colonne de charge critique maximale. Cependant, ses articles qui font appel à une bonne intuition mécanique ne sont pas faciles à suivre. Un des points fondamentaux est qu'en mécanique, les auteurs travaillent avec l'équation de fonctions propres qui n'est qu'une *condition nécessaire* que doit vérifier la solution du problème de minimisation qui donne la plus petite valeur propre $\lambda_p(A)$. Cette équation est vérifiée par toutes les valeurs propres et fonctions propres. Mais dans le contexte de problèmes dégénérés, il y a potentiellement un problème beaucoup plus grave : certaines fonctions propres obtenues à partir de l'équation de fonctions propres

peuvent se retrouver dans un espace strictement plus gros que l'espace de Hilbert naturellement associé au problème de minimisation. On obtiendrait ainsi une *solution parasite* qui donnerait un infimum strictement plus petit que celui du problème de minimisation initial.

Dans la perspective d'éclaircir ce problème, on introduit dans ce chapitre les espaces naturels dans lesquelles se trouvent les fonctions minimisantes – si elles existent – lorsque le profil A de la colonne est dégénéré comme celui obtenu par Olhoff et Niordson [30]. C'est une approche originale qui permet de revoir des résultats passés sous un nouvel éclairage et de remettre en question certains exemples.

3.2. LES ESPACES $V^p(A)$ POUR L'INFIMUM $\lambda_p(A)$

3.2.1. Les espaces $V^p(A)$, $0 < p < +\infty$, pour $A \in \mathcal{A}^\infty$

Pour $A \in L^\infty(0,1)$, $A(x) \geq 0$, il est possible d'élargir l'espace $H_0^2(0,1)$ des fonctions propres admissibles à un espace de Hilbert plus grand en introduisant, pour $0 < p < +\infty$, le produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle_{V^p} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 u' v' + A^p u'' v'' dx, \quad \|u\|_{V^p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle u, u \rangle_{V^p}}. \quad (3.2.1)$$

Muni de ce produit scalaire, $H_0^2(0,1)$ est un espace pré-hilbertien.

Définition 3.2.1. Pour $A \in \mathcal{A}^\infty$ et $0 < p < +\infty$, on notera par $V^p(A)$ le complété de $H_0^2(0,1)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{V^p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle u, u \rangle_{V^p}}. \quad (3.2.2)$$

Par définition $V^p(A)$ est un espace de Hilbert et $H_0^2(0,1)$ est dense dans $V^p(A)$. Noter que l'espace $V^0(A)$ ne serait pas bien défini, car il faudrait préciser la signification de $A(x)^0$ en un point où $A(x) = 0$.

De même, $V^\infty(A)$ ne serait pas bien défini. Enfin, pour $p > 0$, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $A(x) \geq \alpha$ presque partout dans $[0,1]$, alors $V^p(A) = H_0^2(0,1)$. Comme

$$\|v'\|_{L^2}^2 \leq \|v'\|_{L^2}^2 + \|A^{p/2}v''\|_{L^2}^2 \leq \max\{1, \|A\|_{L^\infty}^p\} \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2,$$

alors les injections $H_0^2(0,1) \subset V^p(A) \subset H_0^1(0,1)$ sont continues. De plus, pour $0 < p < p'$,

$$\|v'\|_{L^2}^2 + \|A^{p'/2}v''\|_{L^2}^2 \leq \max\{1, \|A\|_{L^\infty}^{p'-p}\} \|v'\|_{L^2}^2 + \|A^{p/2}v''\|_{L^2}^2$$

et ainsi les injections $H_0^2(0,1) \subset V^p(A) \subset V^{p'}(A) \subset H_0^1(0,1)$ sont aussi continues pour $0 < p < p' < \infty$.

Remarque 3.2.1. Cannarsa et al. [4] ont étudié des équations paraboliques dégénérées de la forme

$$u_t - (a(x)u_x)_x = f, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$$

dans le cadre de problèmes de contrôle. Ils utilisent des espaces à poids de la forme $\{u \in W_0^{1,1}(0,1) : a_\alpha^{1/2}u_x \in L^2(0,1)\}$ pour la fonction $a_\alpha(x) = x^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$ ([7]) avec comme condition au bord soit $u(0) = 0$ ou soit $u(1) = 0$. Pour $1 \leq \alpha < 2$, les solutions u sont des fonctions de Bessel ([6]). Le cas $0 \leq \alpha \leq 1$ se trouve dans Gueye [22].

Bien qu'il s'agisse d'un opérateur du second ordre plutôt que du quatrième, l'idée est la même (voir aussi leur livre [5] sur ce sujet dans le cadre de la théorie du contrôle). Dans leur cas, c'est une fonction plus simple qui revient à prendre $A(x) = x$ dans nos équations.

$V^p(A)$ est l'espace naturel associé au problème de minimisation. En effet,

$$\inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \leq \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}. \quad (3.2.3)$$

Comme le numérateur et le dénominateur de la fonction

$$f_p(A, v) = \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}$$

sont continus par rapport à la norme de $V^p(A)$, il s'ensuit que $f_p(A, v)$ est continue en tout point $0 \neq v \in V^p(A)$.

Théorème 3.2.1. Soient $0 < p < +\infty$ et $A \in \mathcal{A}^\infty$, alors

$$\lambda_p(A) = \inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}. \quad (3.2.4)$$

DÉMONSTRATION. L'infimum par rapport à $H_0^2(0,1)$ existe et est fini, car le quotient est borné inférieurement par 0. On procède par l'absurde. On suppose que

$$\inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} < m \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}.$$

Par définition de l'infimum, il existe $0 \neq u \in V^p(A)$ tel que

$$\inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \leq \frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} < m \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}.$$

Par la densité de $H_0^2(0,1)$ dans $V^p(A)$, il existe une suite $\{u_n\}$, $u_n \neq 0$, dans $H_0^2(0,1)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $V^p(A)$ et

$$\frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} < m \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \leq \frac{\int_0^1 A^p |u_n''|^2 dx}{\int_0^1 |u_n'|^2 dx} \rightarrow \frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx},$$

d'où la contradiction. \square

3.2.2. Les espaces $V^p(A)$ pour $A^{p/2}$ et A dans $W^{1,\infty}(0,1)$

Les espaces $V^p(A)$ que l'on vient de définir peuvent être très gros et perdre les conditions $v'(0) = v'(1) = 0$ de $H_0^2(0,1)$. Il n'y a qu'à penser à $A = 0$ pour lequel $V^p(0) = H_0^1(0,1)$. Si l'on se reporte à l'article d'Egorov [19], il cherche des profils maximisants continus, c.-à-d. $A \in C[0,1]$.

Quant à celui de Cox et Overton [9], où ils font l'hypothèse qu'il existe des constantes $0 < \alpha \leq \beta$ telles que $\alpha \leq A(x) \leq \beta$ presque partout dans $[0,1]$, on constate que, pour tous les exemples numériques, ils obtiennent des A continus et donc beaucoup mieux que $L^\infty(0,1)$. Pourrait-on montrer que leurs solutions sont en fait dans $C[0,1]$ ou $W^{1,\infty}(0,1)$?

Avec les espaces $V^p(A)$, une fonction continue A qui est nulle en un point x_0 peut compenser une discontinuité de saut fini de la dérivée v' de v en ce point. En d'autres termes, Av' peut être plus régulière que v' . Malheureusement, une suite faiblement convergente dans $V^p(A)$ n'est pas nécessairement fortement convergente dans $H_0^1(0,1)$ et on ne peut pas reproduire la preuve d'existence du théorème 1.3.1 du chapitre 1.

Plus concrètement, on introduit les colonnes avec un profil un peu mieux que continu

$$\mathcal{A}^{p/2,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in L^\infty(0,1) : A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1), A(x) \geq 0 \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\}. \quad (3.2.5)$$

Par définition, $\mathcal{A}^{p/2,\infty} \subset C[0,1]$ et l'on pourrait réécrire la définition comme suit

$$\mathcal{A}^{p/2,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ A \in C[0,1] : A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1), A(x) \geq 0 \text{ et } \int_0^1 A(x) dx = 1 \right\}. \quad (3.2.6)$$

Toujours par définition,

$$0 < p < p' < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}^{p/2,\infty} \subset \mathcal{A}^{p'/2,\infty}. \quad (3.2.7)$$

On conclut que, si $0 < p < 2$ et $A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)$, cela entraîne que $A \in W^{1,\infty}(0,1)$, mais si $2 \leq p < +\infty$ et $A \in W^{1,\infty}(0,1)$, cela entraîne que $A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)$.

Le problème de maximisation associé devient

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^{p/2,\infty}} \lambda_p(A). \quad (3.2.8)$$

Théorème 3.2.2. *Pour $0 < p < +\infty$,*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^\infty \cap C[0,1]} \lambda_p(A) = \sup_{A \in \mathcal{A}^{p/2, \infty}} \lambda_p(A). \quad (3.2.9)$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $p > 0$, $\mathcal{D}(0,1) \subset \{A : A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)\} \subset C[0,1]$. Comme $\mathcal{D}(0,1)$ est dense dans $C[0,1]$, $\{A : A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)\}$ est dense dans $C[0,1]$. Par le théorème 1.2.1 du chapitre 1, les fonctions $A \mapsto \lambda_p(A) : L_+^\infty(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues. Comme la norme $L^\infty(0,1)$ coïncide avec la norme uniforme sur $C[0,1]$, les fonctions $A \mapsto \lambda_p(A) : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues. Les deux suprema sont donc égaux. \square

Théorème 3.2.3. (i) *Pour $0 < p < \infty$ et $A \in \mathcal{A}^{p/2, \infty}$,*

$$V^p(A) \subset \{v \in H_0^1(0,1) : A^{p/2}v' \in H_0^1(0,1)\} \quad (3.2.10)$$

$$\text{et } A^{p/2}v'' = (A^{p/2}v')' - (A^{p/2})'v' \in L^2(0,1).$$

(ii) *Pour $0 < p < +\infty$ et $A \in \mathcal{A}^{p/2, \infty}$ tels que $A > 0$ presque partout dans $[0,1]$,*

$$V^p(A) = \{v \in H_0^1(0,1) : A^{p/2}v' \in H_0^1(0,1)\}. \quad (3.2.11)$$

(iii) *Pour $0 < p < 2$ et $A \in \mathcal{A}^{1, \infty}$,*

$$V^p(A) \subset \hat{V}^p(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in V^2(A) : A^{-(1-p/2)} [(Av')' - A'v'] \in L^2(0,1)\} \quad (3.2.12)$$

$$\text{et } A^{p/2}v'' = A^{-(1-p/2)} [(Av')' - A'v'] \in L^2(0,1).$$

Remarque 3.2.2. *Pour $0 < p < 2$, si $A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)$, alors $A \in W^{1,\infty}(0,1)$. Mais pour $A \in \mathcal{A}^{1, \infty}$ tel que $A > 0$ presque partout dans $[0,1]$, la question de savoir si $V^p(A)$ est égal à $\hat{V}^p(A)$ reste ouverte. Pour la fonction $A(x) = x^2$, $A^{1/2} \in W^{1,\infty}(0,1)$, mais pour $A = x$, $A^{1/2} \notin W^{1,\infty}(0,1)$.*

On verra plus loin, à partir d'exemples pour le cas $p = 1$, que s'il y a égalité entre $V^1(A)$ et $\hat{V}^1(A)$, alors un A maximisant dans $\mathcal{A}^{1, \infty}$ doit être borné inférieurement par une constante strictement positive. Cela justifierait aussi l'utilisation de la fonction (3.4.13) par Olhoff et Niordson [30], qui appartient à $\hat{V}^p(A)$, pour éliminer le profil (1.5.16) du chapitre 1. Par contre, s'il n'y a pas égalité, il faudrait alors montrer que cette fonction est dans $V^p(A)$ pour que le contre-exemple tienne. Sinon, le profil (1.5.16) du chapitre 1 serait alors possiblement maximisant comme l'affirme Seiranyan [35] et comme le laisserait croire l'aspect du profil obtenu par les calculs numériques de Cox et Overton [9] ainsi que ceux du chapitre 2.

DÉMONSTRATION. (i) Un élément $v \in V^p(A)$ est la $V^p(A)$ -limite d'une suite de Cauchy $\{v_n\} \subset H_0^2(0,1)$. Alors, il existe $v \in H_0^1(0,1)$ et $w \in L^2(0,1)$ tels que $v_n \rightarrow v$ dans $H_0^1(0,1)$ et $A^{p/2}v_n'' \rightarrow w$ dans $L^2(0,1)$. Puisque $A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1)$ est continue,

$$A^{p/2}v_n' \rightarrow A^{p/2}v' \text{ dans } L^2(0,1).$$

D'autre part, comme $(A^{p/2})' \in L^\infty(0,1)$, il s'ensuit que

$$(A^{p/2}v_n')' = (A^{p/2})'v_n' + A^{p/2}v_n'' \rightarrow (A^{p/2})'v' + w \text{ dans } L^2(0,1).$$

On en conclut que $A^{p/2}v' \in H^1(0,1)$. De plus, puisque $H^1(0,1) \subset C[0,1]$,

$$0 = A^{p/2}(0)v_n'(0) = (A^{p/2}v_n')(0) \rightarrow (A^{p/2}v')(0),$$

$$0 = A^{p/2}(1)v_n'(1) = (A^{p/2}v_n')(1) \rightarrow (A^{p/2}v')(1)$$

et $A^{p/2}v' \in H_0^1(0,1)$. Donc, $V^p(A) \subset \{v \in H_0^1(0,1) : A^{p/2}v' \in H_0^1(0,1)\}$.

(ii) Étant donné $\varepsilon > 0$ et $u \in V^p(A)$, on construit une approximation $u_\varepsilon \in H_0^2(0,1)$ telle que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $V^p(A)$ lorsque ε tend vers zéro. Pour commencer, on définit

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(x) \right)'. \quad (3.2.13)$$

De ce f_ε qui appartient à $L^2(0,1)$, on construit un $u_\varepsilon \in H_0^2(0,1)$ tel que

$$u_\varepsilon''(x) = f_\varepsilon(x) + ax + b,$$

où les constantes a et b sont à déterminer pour que $u_\varepsilon \in H_0^2(0,1)$. Il vient

$$u_\varepsilon'(x) = \int_0^x f_\varepsilon dy + a \frac{x^2}{2} + bx, \quad u_\varepsilon(x) = \int_0^x \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy + a \frac{x^3}{6} + b \frac{x^2}{2}.$$

Pour que u_ε soit dans $H_0^2(0,1)$, il faut donc résoudre les deux équations suivantes

$$\boxed{0 = u_\varepsilon'(1) = \int_0^1 f_\varepsilon dy + \frac{a}{2} + b,} \quad \boxed{0 = u_\varepsilon(1) = \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy + \frac{a}{6} + \frac{b}{2}.}$$

On peut montrer que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \int_0^1 f_\varepsilon dy + 12 \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(y) dz dy \\ 2 \int_0^1 f_\varepsilon dy - 6 \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy \end{bmatrix}.$$

En substituant, on obtient

$$u_\varepsilon''(x) = f_\varepsilon(x) + 2(-3x + 1) \int_0^1 f_\varepsilon dy + 6(2x - 1) \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy,$$

$$u'_\varepsilon(x) = \int_0^x f_\varepsilon dy + (-3x + 2)x \int_0^1 f_\varepsilon dy + (6x - 1)x \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy,$$

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy + x^2(1-x) \int_0^1 f_\varepsilon dy + x^2(2x-3) \int_0^1 \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy.$$

Comme $A^{p/2}u' \in H_0^1(0,1)$ pour $u \in V^p(A)$, alors $(A^{p/2}u')(0) = 0 = (A^{p/2}u')(1)$ et donc

$$f_\varepsilon(x) = \left(\left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(x) \right)', \quad \int_0^x f_\varepsilon dy = \left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(x)$$

$$\text{et } \int_0^1 f_\varepsilon dy = \left(\frac{A(1)}{A(1) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(1) = 0.$$

Pour l'intégrale double,

$$\int_0^x \int_0^y f_\varepsilon(z) dz dy = \int_0^x \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(y) dy.$$

Puisque $A > 0$ presque partout, alors

$$\left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(y) \rightarrow u'(y) \text{ p.p. } [0,1], \quad \left(1 - \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} \right) u'(y) \rightarrow 0 \text{ p.p. } [0,1].$$

Comme

$$0 \leq \left(1 - \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} \right) \leq 1 \text{ p.p. } [0,1] \text{ et } \left| \left(1 - \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} \right) u'(y) \right| \leq |u'(y)|,$$

par la convergence dominée de Lebesgue, $\left(1 - \left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} \right) u' \rightarrow 0$ dans $L^2(0,1)$ -fort.

On procède maintenant aux estimés suivants

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^x \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(y) dy + x^2(2x-3) \int_0^1 \left(\frac{A(y)}{A(y) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(y) dy,$$

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_0^x \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy + x^2(2x-3) \int_0^1 \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy \rightarrow 0,$$

pour tout $x \in [0,1]$. De plus,

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)|$$

$$= \left| \int_0^x \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy + x^2(2x-3) \int_0^1 \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy \right| \leq 6 \|u'\|_{L^1}$$

$$\Rightarrow |u_\varepsilon(x) - u(x)|^2 \leq 36 \|u'\|_{L^2}^2.$$

Par la convergence dominée de Lebesgue, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(0,1)$ -fort. On passe à la dérivée

$$u'_\varepsilon(x) = \left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(x) + (6x - 1)x \int_0^1 \left(\frac{A}{A + \varepsilon} \right)^{p/2} u' dy,$$

$$u'_\varepsilon(x) - u'(x) = \left(\left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u'(x) + (6x - 1)x \int_0^1 \left(\left(\frac{A}{A + \varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy.$$

Par le même argument, $u'_\varepsilon \rightarrow u'$ dans $L^2(0,1)$ -fort. On a donc $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H_0^1(0,1)$ -fort.

Comme $A^{p/2} \in W^{1,\infty}(0,1) \subset C[0,1]$, on a aussi $A^{p/2}u'_\varepsilon \rightarrow A^{p/2}u'$ dans $L^2(0,1)$ -fort. Il reste à montrer que $(A^{p/2}u'_\varepsilon)' \rightarrow (A^{p/2}u)'$ dans $L^2(0,1)$ -fort pour conclure. On réécrit f_ε comme suit

$$f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{p/2} u'(x) \right)' = \left(\frac{1}{(A(x) + \varepsilon)^{p/2}} (A^{p/2}u')(x) \right)'. \quad (3.2.14)$$

Pour alléger l'écriture, on laisse tomber la variable x et ainsi

$$f_\varepsilon = \frac{1}{(A + \varepsilon)^{p/2}} (A^{p/2}u')' - \frac{p}{2} \frac{A'}{(A + \varepsilon)^{1+p/2}} (A^{p/2}u') \in L^2(0,1), \quad (3.2.15)$$

puisque $A^{p/2}u' \in H_0^1(0,1)$. En utilisant le fait que $(A^{p/2}u'_\varepsilon)' = A^{p/2}u''_\varepsilon + (A^{p/2})'u'_\varepsilon$, on écrit

$$(A^{p/2}u'_\varepsilon)' - (A^{p/2}u')' = [A^{p/2}u''_\varepsilon - ((A^{p/2}u')' - (A^{p/2})'u')] + (A^{p/2})' [u'_\varepsilon - u'].$$

Comme le second terme tend vers 0, il reste à montrer que $(A^{p/2})u''_\varepsilon \rightarrow [(A^{p/2})u']' - (A^{p/2})'u'$ dans $L^2(0,1)$. On connaît l'expression de u''_ε :

$$u''_\varepsilon(x) = \left(\frac{1}{(A(x) + \varepsilon)^{p/2}} A(x)^{p/2} u'(x) \right)' + 6(2x - 1) \int_0^1 \left(\frac{A}{A + \varepsilon} \right)^{p/2} u' dy$$

$$= \frac{1}{(A(x) + \varepsilon)^{p/2}} (A^{p/2}u')'(x) - \left(\frac{A(x)}{A(x) + \varepsilon} \right)^{1+p/2} \frac{p}{2} \frac{A'(x)}{A(x)^{1+p/2}} A(x)^{p/2} u'(x)$$

$$+ 6(2x - 1) \int_0^1 \left(\left(\frac{A}{A + \varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy.$$

On multiplie par $A^{p/2}$:

$$\begin{aligned}
A^{p/2} u_\varepsilon'' &= \left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} (A^{p/2} u')' - \left(\frac{A(x)}{A(x)+\varepsilon} \right)^{1+p/2} \frac{p}{2} A'(x) A(x)^{p/2-1} u'(x) \\
&\quad + 6(2x-1) A^p(x) \int_0^1 \left(\frac{A}{A+\varepsilon} - 1 \right) u' dy \\
&= \left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} (A^{p/2} u')' - \left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{1+p/2} (A^{p/2})' u' \\
&\quad + 6(2x-1) A^p(x) \int_0^1 \left(\frac{A}{A+\varepsilon} - 1 \right) u' dy.
\end{aligned}$$

Finalemment,

$$\begin{aligned}
&A^{p/2} u_\varepsilon'' - \left((A^{p/2} u')' - (A^{p/2})' u' \right) \\
&= \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) (A^{p/2} u')' - \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{1+p/2} - 1 \right) (A^{p/2})' u' \\
&\quad + 6(2x-1) A^p(x) \int_0^1 \left(\left(\frac{A}{A+\varepsilon} \right)^{p/2} - 1 \right) u' dy.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Par la même technique utilisée précédemment avec la convergence dominée de Lebesgue, on obtient que $A^{p/2} u_\varepsilon'' \rightarrow (A^{p/2} u')' - (A^{p/2})' u'$ dans $L^2(0,1)$ -fort. Donc, $(A^{p/2} u_\varepsilon')' \rightarrow (A^{p/2} u')'$ dans $L^2(0,1)$ -fort et $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $V^p(A)$. Ceci donne le résultat pour $0 < p < +\infty$.

(iii) Pour $0 < p \leq 1$ et $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$, on sait que $V^p(A) \subset V^2(A)$ et que $Av' \in H_0^1(0,1)$. Pour la suite $V^p(A)$ -convergente $\{v_n\} \subset H_0^2(0,1)$, on réécrit

$$A^p v_n'' v_n'' = A^{-(2-p)} Av_n'' Av_n''.$$

Il existe $v \in H_0^1(0,1)$ et $w \in L^2(0,1)$ tels que

$$v_n \rightarrow v \text{ dans } H_0^1(0,1) \text{ et } A^{p/2} v_n'' \rightarrow w \text{ dans } L^2(0,1).$$

Puisque $A \in W^{1,\infty}(0,1)$ et $A^{1-p/2} \in L^\infty(0,1)$ pour $0 < p < 2$,

$$\begin{aligned}
Av_n' &\rightarrow Av' \text{ dans } L^2(0,1) \text{ et } (Av_n') = A^{1-p/2} A^{p/2} v_n'' + A' v_n' \rightarrow A^{1-p/2} w + A' v' \text{ dans } L^2(0,1) \\
&\Rightarrow Av' \in H^1(0,1) \text{ et } w = A^{-(1-p/2)} [(Av')' - A' v'] \in L^2(0,1).
\end{aligned}$$

Puisque $Av' \in H^1(0,1) \subset C[0,1]$,

$$0 = A(0)v_n'(0) = (Av_n')(0) \rightarrow (Av')(0) \text{ et } 0 = A(1)v_n'(1) = (Av_n')(1) \rightarrow (Av')(1),$$

et $Av' \in H_0^1(0,1)$. Donc, $V^p(A) \subset \{v \in V^2 : A^{-(1-p/2)} [(Av')' - A' v'] \in L^2(0,1)\}$. \square

Revenons à la fonction (3.4.13) d'Olhoff-Niordson [30] donné par (1.5.16) au chapitre 1. En factorisant chacun des polynômes dans l'expression de A on obtient

$$A(x) = 24 \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4} - x\right) \left(\frac{1}{4} + x\right), \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4} - x\right), \quad \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ \left(x - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{4} - x\right), \quad \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{array} \right\}, \quad A'(x) = 48 \left\{ \begin{array}{l} -x, \quad 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \left(\frac{1}{2} - x\right), \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ -(x-1), \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{array} \right\},$$

et ainsi $A \in W^{1,\infty}(0,1)$. Par contre, on voit bien que $(A^{1/2})' = 1/2 A' A^{-1/2} \notin L^2(0,1)$. En effet, les zéros de chaque polynôme de A et de A' sont simples et distincts, mais les zéros de A' ne peuvent annuler ceux de A et encore moins ceux de $A^{1/2}$, donc $(A^{1/2})' \notin L^2(0,1)$. En effet, dans l'intervalle $[0,1/4]$,

$$\int_0^{1/4} |A^{-1/2}|^2 dx = \int_0^{1/4} A^{-1} dx = \int_0^{1/4} \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - x\right) \left(\frac{1}{4} + x\right)} dx \geq 2 \int_0^{1/4} \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - x\right)} dx = +\infty.$$

On peut vérifier que

$$A^{-1/2} \in L^1(0,1), \quad A^{-1/2} \notin L^2(0,1) \quad \text{et} \quad A^{1/2} \notin W^{1,\infty}(0,1),$$

puisque, par exemple, dans l'intervalle $[0,1/4]$,

$$\int_0^{1/4} A^{-1/2} dx = \int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - x\right) \left(\frac{1}{4} + x\right)}} dx \leq 2 \int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - x\right)}} dx = 2.$$

3.2.3. Problème aux valeurs propres associé

Le problème de minimisation

$$\lambda_p(A) = \inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} = \frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} \quad (3.2.17)$$

correspond à un problème de valeur propre pour l'opérateur différentiel du quatrième ordre que l'on peut écrire formellement $(A^p u'')''$. En effet, s'il y a existence d'un $u \in V^p(A)$ non nul minimisant, alors la différentielle de Fréchet doit être nulle, c'est-à-dire, il existe $0 \neq u \in V^p(A)$ tel que

$$\forall v \in V^p(A), \quad \int_0^1 A(x)^p u''(x) v''(x) - \lambda_p(A) u'(x) v'(x) dx = 0. \quad (3.2.18)$$

C'est une condition nécessaire, mais pas suffisante.

De façon équivalente, en prenant des v dans $\mathcal{D}(0,1)$, l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact dans l'ouvert $(0,1)$,

$$\begin{aligned} \exists u \in V^p(A), \quad A(x)^p u''(x) + \lambda_p(A) u(x) &= q(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

où $q \in P^1[0,1]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur $[0,1]$. Comme $u \in H_0^1(0,1)$, on peut différentier une fois. En prenant $q(x) = ax + b$, il vient

$$(A(x)^p u'')'(x) + \lambda_p(A) u'(x) = a, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0. \quad (3.2.20)$$

Si u' était différentiable, on pourrait différentier une fois de plus, mais dans le cas général on ne peut aller plus loin. $\lambda_p(A)$ est donc une valeur propre de l'opérateur différentiel du quatrième ordre $(A(x)^p u'')$. Soit λ une autre valeur propre : il existe $0 \neq u_\lambda \in H_0^2(0,1)$ tel que

$$(A(x)^p u_\lambda'')''(x) + \lambda u_\lambda''(x) = 0, \quad u_\lambda(0) = u_\lambda(1) = 0, \quad u_\lambda'(0) = u_\lambda'(1) = 0. \quad (3.2.21)$$

En multipliant chaque côté par $v \in H_0^2(0,1)$ et en intégrant le premier terme deux fois et le second une fois, il vient

$$\forall v \in V^p(A), \quad \int_0^1 A u_\lambda'' v'' dx = \lambda \int_0^1 u_\lambda' v' dx \quad \Rightarrow \quad f_p(A, u_\lambda) = \lambda. \quad (3.2.22)$$

On en conclut que la valeur propre $\lambda_p(A)$ est la plus petite pour cet opérateur. Attention, la condition $u \in V^p(A)$ est importante, car cette équation pourrait avoir des *solutions parasites* dans un espace plus gros que $V^p(A)$.

3.3. BORNE INFÉRIEURE SUR LE PROFIL MAXIMISANT

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'existence possible d'une borne inférieure sur un profil maximisant. On a vu numériquement que ce serait vrai pour $p = 2$, mais l'observation n'est pas aussi nette pour $p = 1$. On n'a rien obtenu pour $1 < p \leq 2$. On reviendra de façon plus détaillée sur le cas $p = 1$ et le profil (3.4.2) d'Olhoff-Niordson [30, p. 25] dans le paragraphe suivant.

3.3.1. Profils lipschitziens et $p > 2$

Théorème 3.3.1. *Pour $2 < p < +\infty$ et $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$ tel que $A(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in [0,1]$, on a $\lambda_p(A) = 0$.*

Corollaire 3.3.1. *Soit $2 < p < +\infty$. Pour $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$ tel que $\lambda_p(A) \geq (2\pi)^2$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $A(x) \geq \alpha$ sur $[0,1]$. Par conséquent, $V^p(A) = H_0^2(0,1)$ et il existe*

$0 \neq u \in H_0^2(0,1)$ tel que

$$\frac{\int_0^1 A(x)^2 |u''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A(x)^2 |v''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |v'(x)|^2 dx}$$

et

$$\sup_{\substack{A \in \mathcal{A}^{1,\infty} \\ \max_{x \in [0,1]} A(x) > 0}} \lambda_p(A) = \sup_{A \in \mathcal{A}^{1,\infty}} \lambda_p(A) = \sup_{A \in \mathcal{A}^\infty \cap C[0,1]} \lambda_p(A).$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.3.1. Puisque $A \in W^{1,\infty}(0,1)$, il existe une constante c telle que

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |A(y) - A(x)| \leq c|y - x|.$$

Soit $\phi \in H_0^2(-1,1)$ une fonction non nulle. Si $x_0 \in (0,1)$, on considère la fonction $\phi_\varepsilon \in H_0^2((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset H_0^2(0,1)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit définie comme suit

$$\phi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi((x - x_0)/\varepsilon) \text{ sur } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ et } 0 \text{ ailleurs.} \quad (3.3.1)$$

On peut facilement montrer que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_\varepsilon}{dx}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \phi'((x - x_0)/\varepsilon), & \frac{d^2\phi_\varepsilon}{dx^2}(x) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \phi''((x - x_0)/\varepsilon) \\ \lambda_p(A) \leq f_p(\phi_\varepsilon, A) &= \frac{\int_0^1 A^p |\phi_\varepsilon''|^2 dx}{\int_0^1 |\phi_\varepsilon'|^2 dx} \leq (c\varepsilon)^p \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\int_{-1}^1 |\phi''|^2 d\xi}{\int_{-1}^1 |\phi'|^2 d\xi} \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et $\lambda_p(A) = 0$, pour $p > 2$.

Pour $x_0 = 0$, on considère la fonction $\phi_\varepsilon \in H_0^2((0, 2\varepsilon) \subset H_0^2(0,1)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit définie comme suit

$$\phi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi((x - \varepsilon)/\varepsilon) \text{ sur } [0, 2\varepsilon] \text{ et } 0 \text{ ailleurs.} \quad (3.3.2)$$

Pour $x_0 = 1$, on prend la symétrique $\phi_\varepsilon(1 - x)$ par rapport à $1/2$. □

PREUVE DU COROLLAIRE 3.3.1. La première partie de la preuve est une conséquence du théorème. La seconde partie utilise la continuité au sens de Lipschitz de A . Puisque A est continue et strictement positive sur $[0,1]$,

$$\exists a \in [0,1], \quad \inf_{[0,1]} A(x) = A(a) > 0.$$

Pour $\alpha = A(a)$, $A(x) \geq \alpha$ sur $[0,1]$. □

3.3.2. Conjecture pour le cas $0 < p \leq 1$

On a vu au théorème 3.2.1 que pour tout $p > 0$ et $A \in \mathcal{A}^\infty$

$$\inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}. \quad (3.3.3)$$

On a aussi vu que pour maximiser, il suffit de chercher des $A \in \mathcal{A}^\infty$ tel que $\lambda_p(A) \geq (2\pi)^2$ puisque pour la colonne uniforme $A = 1$ on a $\lambda_p(1) = (2\pi)^2$

$$(2\pi)^2 \leq \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}^{1,\infty} \\ \lambda_p(A) \geq (2\pi)^2}} \lambda_p(A) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}^\infty \\ \lambda_p(A) \geq (2\pi)^2}} \lambda_p(A).$$

Dans le théorème suivant, on construit des fonctions dans $\hat{V}^p(A)$, mais on n'a pas pu montrer qu'elles sont dans $V^p(A)$. On va donc le conjecturer.

Théorème 3.3.2. *Soit $0 < p \leq 1$. On fait l'hypothèse que $\hat{V}^p(A) = V^p(A)$ pour $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$ paire tel que $A > 0$ presque partout dans $[0,1]$ et $\lambda_p(A) \geq (2\pi)^2$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $A(x) \geq \alpha$ sur $[0,1]$, $V^p(A) = H_0^2(0,1)$ et il existe $0 \neq u \in H_0^2(0,1)$ tel que*

$$\frac{\int_0^1 A^p |u''|^2 dx}{\int_0^1 |u'|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} = \inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \geq (2\pi)^2. \quad (3.3.4)$$

Corollaire 3.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.3.2, pour $0 < p \leq 1$, ou bien il existe un $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$ paire maximisant tel que $A(x) \geq \alpha > 0$ sur $[0,1]$, ou bien il n'y a pas de maximisant dans $\mathcal{A}^{1,\infty}$.*

DÉMONSTRATION. De l'identité (3.3.3), la condition $\lambda_p(A) \geq (2\pi)^2$ implique que

$$\inf_{0 \neq v \in V^p(A)} \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \geq (2\pi)^2 \quad \Rightarrow \quad \forall 0 \neq v \in V^p(A), \quad \frac{\int_0^1 A^p |v''|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx} \geq (2\pi)^2.$$

On suppose qu'il existe $z \in [0,1]$ tel que $A(z) = 0$. On sait, par le théorème 1.2.2 du chapitre 1, que l'on peut prendre A paire. On a donc aussi $A(1-z) = 0$. On va donc se limiter au $z \in [0, 1/2]$.

Si $z = 1/2$, on prend

$$v(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (1-x)^2, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que $Av' \in H_0^1(0,1)$, que $v \in \hat{V}^1(A)$ et on calcule

$$\lambda_p(A) \leq f_p(A,v) = \frac{4 \int_0^1 A^p dx}{1/6} \leq \frac{4 \int_0^1 A dx}{1/6} = 24 < (2\pi)^2.$$

On en conclut que si $z = 1/2$, alors $A \notin \mathcal{A}_1^{1,\infty}$.

Si $z = 0$, on prend

$$v(x) = x(1-x), \quad v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

On peut vérifier que $Av' \in H_0^1(0,1)$ et que $v \in \hat{V}^1(A)$ et on calcule

$$\lambda_p(A) \leq f_p(A,v) = \frac{4 \int_0^1 A^p dx}{1/3} \leq \frac{4 \int_0^1 A dx}{1/3} = 12 < (2\pi)^2.$$

On en conclut que si $z = 0$, alors $A \notin \mathcal{A}_1^{1,\infty}$.

On peut donc supposer qu'il existe $z \in (0,1/2)$ tel que $A(z) = 0$. On va maintenant construire deux $v \in V^p(A)$ qui produiront une contradiction.

(i) On considère z et son symétrique $1-z$ avec $0 < z < 1/2$.

Soit

$$u_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq z, \\ z^2 \frac{1-z-x}{1-2z} - z^2 \frac{x-z}{1-2z}, & \text{si } z \leq x \leq 1-z, \\ -(1-x)^2, & \text{si } 1-z \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq z, \\ \frac{z^2}{1-2z}(1-2x), & \text{si } z \leq x \leq 1-z, \\ -(1-x)^2, & \text{si } 1-z \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que $Av' \in H_0^1(0,1)$ et que $v \in \hat{V}^p(A)$. Il vient

$$u_1'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq z, \\ -\frac{2z^2}{1-2z}, & \text{si } z \leq x \leq 1-z, \\ -2(x-1), & \text{si } 1-z \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On calcule

$$\int_0^1 A^p(x) |u_1''|^2 dx = 4 \int_0^z A^p(x) dx + 4 \int_{1-z}^1 A^p(x) dx,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u_1'(x)|^2 dx &= 4 \int_0^z x^2 dx + \left(\frac{2z^2}{1-2z} \right)^2 (1-2z) + 4 \int_{1-z}^1 (x-1)^2 dx \\
&= 2 \frac{4}{3} z^3 + \left(\frac{2z^2}{1-2z} \right)^2 (1-2z) \\
&= \frac{8}{3} z^3 + \frac{4z^4}{1-2z} = 4 \left(\frac{2}{3} z^3 + \frac{z^4}{1-2z} \right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$f_p(A, u_1) = \frac{\int_0^z A^p(x) dx + \int_{1-z}^1 A^p(x) dx}{\frac{2}{3} z^3 + \frac{z^4}{1-2z}} \geq (2\pi)^2$$

$$\int_0^z A^p(x) dx + \int_{1-z}^1 A^p(x) dx \geq (2\pi)^2 \frac{z^3(2-z)}{3(1-2z)}.$$

(3.3.5)

(ii) On considère z et son symétrique $1-z$ avec $0 < z < 1/2$.

Soit

$$u_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq z, \\ (x-z)(1-z-x), & \text{si } z \leq x \leq 1-z, \\ 0, & \text{si } 1-z \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$u_2'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq z, \\ 1-2x, & \text{si } z \leq x \leq 1-z, \\ 0, & \text{si } 1-z \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que $Av' \in H_0^1(0,1)$ et que $v \in \hat{V}^p(A)$. On calcule

$$\int_0^1 A^p(x) |u_2''|^2 dx = 4 \int_z^{1-z} A^p(x) dx,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |u_2'(x)|^2 dx &= 4 \int_z^{1-z} (x-1/2)^2 dx \\
&= \frac{4}{3} \left((1-z-1/2)^3 - (z-1/2)^3 \right) \\
&= \frac{8}{3} (1/2-z)^3 \\
&= \frac{1}{3} (1-2z)^3.
\end{aligned}$$

Donc,

$$f_p(A, u_2) = \frac{4 \int_z^{1-z} A^p(x) dx}{\frac{1}{3}(1-2z)^3} \geq (2\pi)^2 \quad (3.3.6)$$

$$\boxed{\int_z^{1-z} A^p(x) dx \geq (2\pi)^2 \frac{(1-2z)^3}{12}} \quad (3.3.7)$$

(iii) *La contradiction.* Pour $A \in \mathcal{A}^{1,\infty}$ tel que $A(z) = A(1-z)$, $0 < z < 1/2$ et $\lambda_p(A) \geq (2\pi)^2$, on peut combiner (3.3.5) et (3.3.7) comme suit

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 A(x) dx \geq \int_0^1 A^p(x) dx = \int_0^z A^p(x) dx + \int_{1-z}^1 A^p(x) dx + \int_z^{1-z} A^p(x) dx \\ &\geq (2\pi)^2 \left[\frac{(1-2z)^3}{12} + \frac{z^3(2-z)}{3(1-2z)} \right] = (2\pi)^2 g(z), \quad 0 < z < 1/2 \\ \text{où } g(z) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (2\pi)^2 \left[\frac{(1-2z)^3}{12} + \frac{z^3(2-z)}{3(1-2z)} \right]. \end{aligned}$$

La fonction g possède un minimum sur $[0, 1/2]$ que l'on peut estimer num\u00e9riquement : $g(0,2113) \cong 0,0516$. On obtient alors

$$1 \geq 1,0178\dots$$

une contradiction ! Donc, $A(x) > 0$ dans $[0, 1]$ et il existe un $\alpha > 0$ tel que $A(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in [0, 1]$. \square

3.4. R\u00c9SULTATS ET CONJECTURES POUR LE CAS $p = 1$

On rappelle l'\u00e9quation de fonctions propres (3.2.19) dans le cas $p = 1$:

$$\begin{aligned} \exists u \in V^1(A), \quad A(x)u''(x) + \lambda_1(A)u(x) &= q(x), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u'(0) = u'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

o\u00f9 $q \in P^1[0, 1]$, l'ensemble des polyn\u00f4mes de degr\u00e9 inf\u00e9rieur ou \u00e9gal \u00e0 1 sur $[0, 1]$. Le point important dans ce qui suit est que l'on va construire des fonctions solutions de cette \u00e9quation qui sont dans $\hat{V}^1(A)$. Si $\hat{V}^1(A) \neq V^1(A)$, alors ces fonctions ne seraient pas des minimisantes de $f_1(A, v)$. Par contre, si l'on a l'\u00e9galit\u00e9 des deux espaces, on obtient plusieurs exemples et contre-exemples int\u00e9ressants.

3.4.1. La fonction d'Olhoff-Niordson pour $p = 1$

On revient au profil proposé par Olhoff et Niordson [30, p. 25] en 1979 et repris par Seiranyan [35] pour $p = 1$ (colonne creuse)

$$A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{2} \begin{cases} (1 - 16x^2), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ (16x - 16x^2 - 3), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ (32x - 16x^2 - 15), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

En changeant le signe de la partie centrale de la fonction A entre $1/4$ et $3/4$, on obtient une fonction qui appartient à $H_0^2(0,1)$:

$$\tilde{A}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{3}{2} \begin{cases} 1 - 16x^2, & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 16(x - 1/2)^2 - 1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ 1 - 16(x - 1)^2, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}, \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= |A|, \quad |\tilde{A}'| = |A'|, \\ \tilde{A} \tilde{A}' &= A A', \\ |\tilde{A}''| &= |A''|, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{A}'(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 48 \begin{cases} -x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -\left(\frac{1}{2} - x\right), & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ -(x - 1), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \|\tilde{A}'\|_2 = \sqrt{48}, \quad (3.4.4)$$

$$\tilde{A}''(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 48 \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ +1, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A \tilde{A}'' &= -48 \tilde{A} \\ \tilde{A} \tilde{A}'' &= -48 A. \end{aligned}} \quad (3.4.5)$$

On a le résultat suivant.

Théorème 3.4.1. *Pour $p = 1$ et la fonction A définie par (3.4.2), $\lambda = 48$ est une valeur propre qui correspond aux fonctions propres*

$$w_1 = \tilde{A} - 3/2 \in H_0^2(0,1) \quad \text{et} \quad w_2 = A - 3/2 \in \hat{V}^1(A), \quad (3.4.6)$$

$$Aw_i'' = -48w_i - 72 \in W^{1,\infty}(0,1), \quad w_i \in W_0^{1,\infty}(0,1), \quad Aw_i' \in W_0^{1,\infty}(0,1), \quad (3.4.7)$$

où \tilde{A} est donnée par (3.4.3). Dans les deux cas $|w_i''(x)|$ est constante presque partout dans $[0,1]$, mais $w_2''(x)$ a une masse de Dirac d'amplitude $+24$ en $1/4$ et en $3/4$:

$$w_2'' = -48 + 24\delta(1/4) + 24\delta(3/4) \Rightarrow \int_0^1 w_2'' dx = 0. \quad (3.4.8)$$

Remarque 3.4.1. Il faut noter que la fonction $w_2 \in \hat{V}^1(A)$, mais on n'a pas pu prouver qu'elle est dans $V^1(A)$. Dans ce dernier cas, w_2 serait une solution parasite qui n'appartient pas à l'ensemble des minimisants.

DÉMONSTRATION. (i) On commence par w_1 . À la lumière des identités (3.4.3)

$$A(x) [\tilde{A}(x) - 3/2]'' + 48 [\tilde{A}(x) - 3/2] = 48(-3/2) = -72. \quad (3.4.9)$$

On voit que $\tilde{A} \in W^{2,\infty}(0,1)$ et $\tilde{A}^2 \in W^{2,\infty}(0,1)$. La fonction $u = \tilde{A} - 3/2 \in H_0^2(0,1)$ que nous avons calculée est une fonction propre pour $\lambda = 48$.

(ii) Il y a une seconde fonction propre $w_2 = A - 3/2$ qui n'appartient pas à $H_0^2(0,1)$, mais à $\hat{V}^1(A)$. En effet, $Aw_2' = AA' = \tilde{A}\tilde{A}' \in H_0^1(0,1)$ et

$$\begin{aligned} (Aw_2')' - A'w_2' &= \tilde{A}'\tilde{A}' + \tilde{A}\tilde{A}'' - A'A' = \tilde{A}\tilde{A}'' = -48A \in W^{1,\infty}(0,1) \\ \Rightarrow A^{1/2} [(Aw_2')' - A'w_2'] &= -48A^{1/2} \in C[0,1] \subset L^2(0,1) \end{aligned}$$

et ainsi $w_2 \in \hat{V}^1(A)$ par le théorème 3.2.3 (iii).

En effet, comme $(A')^2 = (\tilde{A}')^2$

$$\begin{aligned} AA'' &= (AA')' - A'A' = 1/2(A^2)' - (A')^2 = 1/2(\tilde{A}^2)' - (\tilde{A}')^2 = \tilde{A}\tilde{A}'' = -48A \\ \Rightarrow A[A - 3/2]'' + 48[A - 3/2] &= 48 \times -3/2 = -72. \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer le résultat directement en substituant B dans l'expression

$$\frac{\int_0^1 A^{-1} |(Av')' - A'v'|^2 dx}{\int_0^1 |v'|^2 dx}. \quad (3.4.10)$$

En effet, on remarque que $w_2 = A - 3/2$, $w_2' = A'$, $|w_2'|^2 = |\tilde{A}'|^2$,

$$\begin{aligned} (Aw_2')' - A'w_2' &= (AA')' - (A')^2 = \frac{1}{2}(A^2)' - (\tilde{A}')^2 \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{A}^2)' - (\tilde{A}')^2 \\ &= \frac{1}{2}(2\tilde{A}\tilde{A}'' + 2(\tilde{A}')^2) - (\tilde{A}')^2 = \tilde{A}\tilde{A}''. \end{aligned}$$

Finalement,

$$A^{-1} |(Aw'_2)' - A'w'_2|^2 = A^{-1} |\tilde{A}\tilde{A}''|^2 = A^{-1}\tilde{A}^2 |\tilde{A}''|^2 = A |\tilde{A}''|^2$$

$$\frac{\int_0^1 A^{-1} |(Aw'_2)' - w'_2 v'|^2 dx}{\int_0^1 |w'_2|^2 dx} = \frac{\int_0^1 A |\tilde{A}''|^2 dx}{\int_0^1 |w'_2|^2 dx} = \frac{\int_0^1 A |\tilde{A}''|^2 dx}{\int_0^1 |\tilde{A}'|^2 dx} = 48.$$

Enfin, w_2 est une fonction propre pour 48. En effet,

$$(Aw'_2) - A'w'_2 + 48 w_2 = (AA')' - A'A' + 48 [A - 3/2] = (\tilde{A}\tilde{A}')' - \tilde{A}'\tilde{A}' + 48 [A - 3/2]$$

□

Remarque 3.4.2. *Le w_2 est l'expression donnée par Olhoff et Niordson [30, sec. 4, équation (49), p. 25] en 1979.*

Malheureusement, ils écartent cette solution après l'avoir substituée dans le quotient de Rayleigh, car ils n'obtiennent pas le 48 auquel ils s'attendaient. Seiranyan [35] en 1984 indique que ce calcul est erroné, car ils ont négligé les masses de Dirac en $x = 1/4$ et $x = 3/4$ dans la dérivée seconde.

En regardant de plus près la solution transcrite par Seiranyan [35, équation (5.9), p. 110], on voit qu'il y a une erreur de signe pour l'intervalle $(1/4, 3/4)$ par rapport à Olhoff et Niordson [30, équation (49), p. 25]. Ironiquement, cette transcription erronée est notre w_1 . Il semblerait donc que les auteurs n'aient pas vu que $w_1 \in W_0^{2,\infty}(0,1)$ était une fonction propre. Il y a deux fonctions propres associées à la valeur propre de 48 l'une dans $H_0^2(0,1)$ et l'autre dans $\hat{V}^1(A)$.

Remarque 3.4.3. *Ici, on ne peut pas affirmer que la valeur propre est au plus double. En effet, au théorème 1.3.3, on obtient $u \in H_0^2(0,1)$ et*

$$A(x)^p u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = 0, u'(0) = 0, \quad u(1) = 0, u'(1) = 0 \quad (3.4.11)$$

$$\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda A^{-p}(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

et on en conclut que $u = 0$. Si $u \in V^1$ et $p = 1$, le raisonnement n'est plus applicable. En effet, la fonction

$$u(x) = A(x) - \tilde{A}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 3 [1 - 16(x - 1/2)^2], & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

est une solution non nulle de (3.4.11) qui appartient à $\hat{V}^1(A)$, mais pas à $H_0^2(0,1)$.

3.4.2. $\lambda = 48$ est-il l'infimum par rapport à $V^1(A)$?

On utilise la fonction donnée par Olhoff et Niordson [30, Remark, p. 25] en 1979 divisée par 8 pour conclure que 48 n'est pas l'infimum par rapport à $\hat{V}^1(A)$:

$$u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1-2x}{8}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -(1-x)^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{array} \right\}, \quad u'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -1/4, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 2(1-x), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{array} \right\}. \quad (3.4.13)$$

Cette fonction appartient bien à $\hat{V}^1(A)$ (on ne sait pas si elle est dans $V^1(A)$). On calcule

$$\int_0^1 A(x)|u''|^2 dx = 4 \int_0^{1/4} \frac{3}{2}(1-16x^2) dx + 4 \int_{3/4}^1 \frac{3}{2}(1-16(x-1)^2) dx = 2,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx &= 4 \int_0^{1/4} x^2 dx + \frac{1}{16} \frac{1}{2} + 4 \int_{3/4}^1 (x-1)^2 dx \\ &= 2 \frac{4}{3} (1/4)^3 + \frac{1}{16} \frac{1}{2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{32} = \frac{1}{8} \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Donc,

$$f_1(A,u) = \frac{4}{7} 48 = 27.4285... < (2\pi)^2 = 39.4784... < 48.$$

C'est la valeur obtenue par Olhoff et Niordson [30, p. 25] qui écarte 48 :

« Substituting [(3.4.13)] into the well-known expression for the Rayleigh quotient, this quotient attains the value 27.43. [...] This result not only implies that $\hat{\lambda} = 48$ is not the fundamental eigenvalue of the design [(3.4.2)], but also shows that [this design] is not optimal ».

Mais cela présuppose que $V^1(A) = \hat{V}^1(A)$ ou que l'on puisse montrer que $u \in V^1(A)$. La question de savoir si 48 est le minimum par rapport à $V^1(A)$ reste donc ouverte.

On remarque aussi que ce $(4/7) 48$ n'est pas une valeur propre pour des fonctions dans $\hat{V}^1(A)$, car il n'existe pas de polynôme $c_0 + c_1x$ tel que

$$A u'' + \lambda(A)u = (A u')' - A' u' + \lambda(A)u = c_0 + c_1 x.$$

En effet, on ne peut trouver un λ et c_0 et c_1 :

$$A u'' + \lambda(A)u = \begin{cases} \frac{3}{2} (1 - 16x^2) 2 + \lambda x^2 = 3 - (\lambda - 48) x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{2} (1 - 16(x - 1/2)^2) 0 + \lambda \frac{1 - 2x}{8}, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{2} (1 - 16(x - 1)^2) 2 - \lambda (1 - x)^2 = 3(-\lambda - 48) (1 - x)^2, & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$

et λ ne peut être simultanément égal à ± 96 et il ne peut annuler le terme quadratique sur $(1/4, 3/4)$.

Le gradient n'est donc pas nul. En effet, pour $\phi \in H_0^1(0,1)$

$$df_1(u, A; \phi) = \int_0^1 (A u'' + f(A, u) u) \phi'' dx$$

en substituant $f_1(A, u) = \frac{4}{7} 48$ à la place de λ

$$A u'' + \lambda(A)u = \begin{cases} \frac{3}{2} (1 - 16x^2) 2 + \lambda x^2 = 3 \frac{48}{7} x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{2} (1 - 16(x - 1/2)^2) 0 + \frac{4}{7} 48 \frac{1 - 2x}{8} = \frac{24}{7} \frac{1 - 2x}{8}, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{2} (1 - 16(x - 1)^2) 2 - \frac{4}{7} 48 (1 - x)^2 = -\frac{33}{7} 48 (1 - x)^2, & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$

$$df_1(u, A; \phi) = \int_0^{1/4} 3 \frac{48}{7} x^2 \phi'' dx + \int_{1/4}^{3/4} \frac{24}{7} \frac{1 - 2x}{8} \phi'' dx + \int_{3/4}^1 -\frac{33}{7} 48 (1 - x)^2 \phi'' dx.$$

Il est clair que l'on peut choisir un $\phi \in H_0^2(0, 1/4)$ qui puisse faire décroître ou croître $f_1(u, A)$. Donc, $(4/7) 48$ n'est pas l'infimum.

3.4.3. Un autre exemple qui donne 48

Un autre exemple qui confirme que 48 est au mieux un minimum local par rapport à $\hat{V}^1(A)$ aux points $3/2 - A \in \hat{V}^1(A)$ et $3/2 - \tilde{A} \in H_0^2(0,1)$ est celui de la fonction suivante

$$u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ (x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}, \quad u'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 2(x - 1/2), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

qui appartient bien à $\hat{V}^1(A)$. On calcule

$$f_1(u, A) = \frac{\int_0^{1/4} \frac{3}{2}(1 - 16x^2) 2^2 dx + \int_{1/4}^{1/2} \frac{3}{2}(1 - 16(x - 1/2)^2) 2^2 dx}{\int_0^{1/4} 4x^2 dx + \int_{1/4}^{1/2} 4(x - 1/2)^2 dx} = \frac{2}{1/24} = 48.$$

On peut trouver un $\lambda = 48$ et $c_1 = 0$, mais pas de c_0 , car $c_0 = 3$ sur les deux premiers intervalles et 0 sur le dernier :

$$A u'' + \lambda(A)u = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - 16x^2) 2 + \lambda x^2 = 3 + (\lambda - 48)x^2, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{2}(1 - 16(x - 1/2)^2) 2 + \lambda(x - 1/2)^2 = 3 + (\lambda - 48)(x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Cette fonction u n'est donc pas un minimum local de $v \mapsto f_1(v, A)$. Un autre exemple d'une fonction impaire dans $\hat{V}^1(A)$ qui donne 48 (voir la figure 3.1), mais qui n'est pas une fonction propre serait

$$u(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ (x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -(x - 1/2)^2, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -(x - 1)^2, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}, \quad u'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 2(x - 1/2), & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2(x - 1/2), & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -2(x - 1), & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$

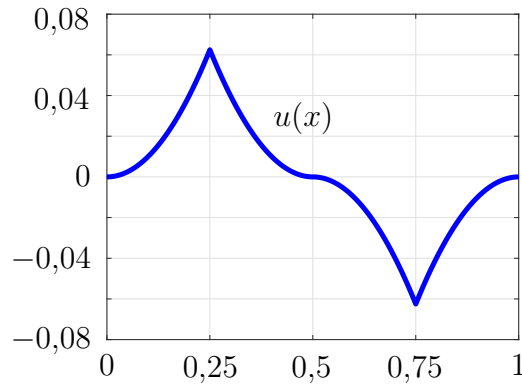


FIGURE 3.1. Solution impaire et $f_1(u, A) = 48$.

CONCLUSION

Le point de départ de ce mémoire a été d'étudier les calculs numériques réalisés par Cox et Overton [9], pour les cas $p = 1$ et $p = 2$, où ils n'imposent pas de contrainte de borne sur les profils. Dans le cas $p = 2$, cela vient confirmer la validité de leur hypothèse que l'on pouvait maximiser par rapport à des profils bornés inférieurement par une constante strictement positive et supérieurement par une autre constante. C'est sous ces conditions qu'ils obtiennent théoriquement l'existence d'un profil maximisant pour tout $0 < p < +\infty$. Cependant, pour le cas $p = 1$, le profil maximisant est très près de zéro en deux points ce qui laisse planer un doute sur la validité de leur hypothèse pour prouver l'existence de solution.

Le second élément a été la suite d'articles d'Egorov où il fait remarquer que, sans une démonstration de l'existence de telles constantes, Cox et Overton n'ont rien démontré (mathématiquement). En introduisant une méthode bimodale et en travaillant avec la condition nécessaire d'optimalité, il confirme l'existence de solution pour le cas $p = 2$ et affirme à partir de ses calculs numériques que le profil maximisant serait borné inférieurement par une constante strictement positive nettement supérieure à zéro.

L'objectif initial de ce mémoire était de revisiter le cas $p = 1$ pour lequel la fonction $A \mapsto \lambda_1(A)$ est concave et continue, donc lipschitzienne. Par le théorème de Rademacher, elle est donc différentiable presque partout. Ceci veut dire que le problème discrétisé l'est aussi et que la possibilité (probabilité) de tomber numériquement sur un point de non-différentiabilité est presque nulle. De là, l'idée d'utiliser une méthode impliquant l'utilisation d'un gradient pour la recherche du profil maximisant. De cette façon, la formulation discrète est utilisée dans une méthode de points intérieurs pour la maximisation de la première valeur propre que l'on suppose simple, et ainsi en ne tenant pas compte de la non-différentiabilité. Il convient de préciser que, par cette approche, on évite de travailler avec la condition d'optimalité qui est non-différentiable dans certains cas. Les résultats pour $p = 1$ et $p = 2$ ont été concluants et compétitifs par rapport à ce qu'obtiennent Cox et Overton [9]. On a donc audacieusement étendu la méthode à tout $0 < p < +\infty$ et obtenu pour la première fois dans la littérature les courbes de $\lambda^{(1)}(p)$ et $\lambda^{(2)}(p)$ en fonction de p pour les deux premières valeurs propres que l'on observe sur la figure 2.9 au chapitre 2. Malgré toutes les complications numériques sous-jacentes, ces graphiques sont très révélateurs. Pour $0 < p < 1$, la plus petite valeur

propre est simple et pour $1 < p < +\infty$ elle est double. Pour la première valeur propre la courbe est croissante et possiblement concave. Le cas frontière $p = 1$ demeure une énigme.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la non-différentiabilité du problème n'est pas la raison pour laquelle on observe une colonne qui s'annule ponctuellement. C'est plutôt la formulation du problème qui oblige implicitement à considérer de telles colonnes et par le fait même un espace de flexions plus grand que $H_0^2(0,1)$. D'autant plus que c'est cette particularité d'opérateur dégénéré qui cause des difficultés computationnelles. Considérer des profils dégénérés soulève des questions mathématiquement intéressantes. Or, l'étude de l'existence d'un profil maximisant pour le problème discrétisé a fourni des éléments d'analyse intéressants, mais limités. Il a fallu remonter au problème continu pour obtenir des nouveautés. On démontre au théorème 1.2.5 la croissance de la charge maximale $\lambda(p)$ en fonction de p mais on n'a pas réussi à démontrer la concavité. On n'a pas non plus réussi à démontrer l'existence d'une borne supérieure sur les profils admissibles. On a cependant réussi à se passer de la borne inférieure strictement positive pour le cas $0 < p \leq 1$ (théorème 1.2.4 au chapitre 1), mais pas pour le cas $p > 1$. Le point extrêmement intéressant est que ce théorème n'exclut pas *a priori* l'existence d'un profil maximisant qui pourrait s'annuler en un certain nombre de points. L'énigme du cas $p = 1$ reprend donc de la force.

C'est dans ce contexte qu'on introduit formellement au chapitre 3 le nouvel espace fonctionnel $V^p(A)$. L'observation importante est que, en présence d'un profil dégénéré, les fonctions propres du problème de minimisation peuvent se retrouver dans l'espace à poids $V^p(A)$ plus gros que $H_0^2(0,1)$ mais contenu dans $H_0^1(0,1)$. Intuitivement, les fonctions de cet espace peuvent être moins lisses que $H_0^2(0,1)$ dans les voisinages où la colonne s'annule. Cet espace est l'espace naturel des fonctions propres et si elles existent elles s'y retrouveront. Il est naturellement associé au problème puisque si l'on considère la minimisation par rapport à $H_0^2(0,1)$, on obtient implicitement la minimisation par rapport à l'espace $V^p(A)$ ce qu'aucun auteur n'a fait explicitement sauf un peu en théorie du contrôle pour la fonction très simple $A(x) = x$ avec un opérateur d'ordre deux. Ce formalisme donne un espace naturel dans lequel travailler et aide à mieux comprendre ces fonctions qui sont solutions de l'équation de fonctions propres et qui ne sont pas $H_0^2(0,1)$. On est arrivé à caractériser les fonctions de l'espace $V^p(A)$ pour certaines familles de A (théorème 3.2.3 du chapitre 3), mais pas totalement. Si bien que les contre-exemples au profil d'Olhoff-Niordson [30] pourraient être des solutions *parasites* hors de l'espace naturel de solution $V^1(A)$ pour $p = 1$ et que Seiranyan [35] aurait raison et que la valeur propre serait simple. La question est donc de savoir s'il y a égalité entre $V^p(A)$ et $\hat{V}^p(A)$ comme on le conjecture dans la preuve du théorème 3.3.2. S'il n'y a pas égalité, on aurait possiblement des profils dégénérés optimaux et, vraisemblablement, le

profil (1.5.16) de Olhoff et Niordson [30] en serait un exemple. Par contre, s'il y a égalité, le théorème 3.3.2 assure la non-optimalité de tous profils dégénérés. L'énigme persiste et signe.

Les considérations dans ce mémoire ont été majoritairement mathématiques. Par exemple, les théorèmes d'existence sont donnés pour des profils $A \in L^\infty(0,1)$ et on n'a pas trouvé de résultats de régularité dans la littérature, on peut critiquer un théorème dont le profil ne serait pas continu. De plus, la formulation de Lagrange ne tient pas compte de cette possibilité. Il faudrait alors revoir la mécanique du problème. Il serait donc physiquement réaliste de se limiter à des profils continus, mais dans ce contexte, l'utilisation du théorème de compacité d'Arzela-Ascoli exigerait une famille de profils uniformément équicontinus ce qui serait encore plus restrictif. Mathématiquement, il peut-être alors plus intéressant de considérer des espaces de fonctions plus grands que seulement celui des fonctions continues et possiblement réussir à montrer que le profil optimal doit être continu sans hypothèse *a priori*.

Évidemment, s'il existe une borne inférieure strictement positive pour les colonnes admissibles, on voudrait utiliser les résultats de Cox et d'Overton [9] et conclure directement de l'existence d'une colonne optimale. Cependant, le problème serait encore loin d'être résolu. D'abord, il resterait à montrer que la borne est uniforme pour utiliser la preuve d'existence [9, p. 296]. Ensuite, un autre problème est celui de l'existence d'une borne supérieure qui n'a toujours pas été démontrée dans ce mémoire ou ailleurs. Il y a encore beaucoup d'autres pistes de solutions. On en fait une énumération non exhaustive ici. Premièrement, le problème comme fonction de p n'a pas été beaucoup étudié par les différents auteurs. Le théorème 1.2.5 donne une façon de construire des bornes sur l'optimum pour p grâce à $p' > p$ ou $p' < p$. Ainsi, il y aurait certainement à gagner à étudier le problème comme une fonction de p . Il y a peut-être là une piste pour trouver une borne supérieure pour la colonne optimale. En regardant les résultats numériques B. I de l'annexe B, on énonce la conjecture suivante :

Conjecture 3.4.1. *Soient $0 \leq p \leq p'$ et $A_{p'}, A_p \in \mathcal{A}$ tels que $\lambda_p(A_p) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \lambda_p(A)$ et $\lambda_{p'}(A_{p'}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{p'}(A)$, alors $\|A_{p'}\|_\infty \leq \|A_p\|_\infty$.*

Deuxièmement, il serait intéressant de refaire les preuves d'existence en utilisant d'autres outils comme la formulation duale d'Auchmuty [3] et la semi-différentielle d'Hadamard au lieu de passer par le quotient de Rayleigh et le gradient généralisé de Clarke. Il y aurait peut-être d'autres résultats qui pourraient en ressortir. Troisièmement, il serait fondamental de bien choisir les espaces de fonctions utilisés. Pour les flexions, il faudrait savoir si $V^p(A)$ est égal à $\hat{V}^p(A)$. Aussi, on devrait vérifier s'il y a l'égalité ou non entre le supremum par rapport à $W^{1,\infty}(0,1)$ et celui par rapport à $L^\infty(0,1)$. Finalement, ce problème d'optimisation

en une dimension semble simple et pourtant on y retrouve des concepts avancés et des pièges difficiles à contourner. C'est ce qui rend le problème de la colonne de Lagrange si intéressant.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics volume 65, Academic Press, 1975.
- [2] R. A. Adams et J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics series volume 140, Academic Press, 2003.
- [3] G. Auchmuty, *Dual variational principles for eigenvalue problems*, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, F. Browder, ed., pp. 55–71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [4] O. Cannarsa, P. Martinez, et J. Vancostenoble, *Carleman Estimates for Degenerate Parabolic Operators*, SIAM J. Control Optim. **47** (2008), 1–19.
- [5] O. Cannarsa, P. Martinez, et J. Vancostenoble, *Global Carleman Estimates for Degenerate Parabolic Operators with Applications*, Mem. Amer. Math. Soc. 239 (2016), no. 1133.
- [6] O. Cannarsa, P. Martinez, et J. Vancostenoble, *The cost of controlling weakly degenerate parabolic equations by boundary controls*, Math. Control Related. Fields 7, no. 2 (2017). 171–211.
- [7] O. Cannarsa, P. Martinez, et J. Vancostenoble, *The cost of controlling strongly degenerate parabolic equations*,
- [8] T. Clausen, *Über die Form Architektonischer Säulen*, in “Mélanges mathématiques et astronomiques I”(1849-1853), pp. 279–284.
- [9] S. J. Cox et M. L. Overton, *On the optimal design of columns against buckling*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), no. 2, 287–325.
- [10] M. C. Delfour, *Introduction à l’optimisation et au calcul semi-différentiel*, Collection : Sciences Sup., Mathématiques appliqués pour le Master/SMIAI, Dunod, Paris, janvier 2012.
- [11] M. C. Delfour et J. P. Zolésio, *Shapes and Geometries : Metrics, Analysis, Differential Calculus and Optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2011.
- [12] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem about the strongest column*, Comptes Rendus Mathématiques **335**, (12) (2002). 997–1002.
- [13] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem about the optimal form for circular hollow columns*, Comptes Rendus Mécanique **331** (2003), 699–704.
- [14] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem about the optimal shape of a column*, Dokl. Ros. Akad. Nauk **392** (5) (2003), 598–602.

- [15] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem for the optimal shape of circular columns*, (Russian. Russian summary) *Sovrem. Mat. Prilozh.* No. 10 (2003), 57–76 ; translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)* 129 (2005), no. 1, 3573–3592.
- [16] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem of the optimal form for circular hollow columns*, *Russ. J. Math. Phys.* **10** (2003), no. 4, 411–421.
- [17] Yu. V. Egorov, *On the Lagrange problem about the strongest columns*, *Abstract and applied analysis*, 65–94, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [18] Yu. V. Egorov, *On a problem of Euler*, *Mat. Sbornik* **204** (2013), n.4, p. 79–102.
- [19] Yu. V. Egorov, *On an inverse spectral problem*, *Russ. J. Math. Phys.* **24** (2017), no. 2, 195–206.
- [20] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [21] L. Euler, *Sur la force des colonnes*, *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, Vol 13 (1757), E238, Berlin, 1757 (originalement publié dans *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin* 13, 1759, pp. 252–282).
- [22] M. Gueye, *Exact boundary controllability of 1-D parabolic and hyperbolic degenerate equations*, *SIAM J. Control Optim.* **52** (2014), no. 4, 2037–2054.
- [23] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
- [24] E. Kamke, *Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung*, *Math. Z.*, 44 (1938), 635–658.
- [25] E. Kamke, *Differentialgleichungen : Lösen methoden und Lösungen*, Band 1 : Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3rd edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.
- [26] E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Teil I : Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Aufl. ; Teil II : Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. 4. Aufl. (German) *Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik*. Reihe A. Bd. 18 Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig 1959.
- [27] E. Kamke, *Differentialgleichungen. (German) Lösungsmethoden und Lösungen*, I : Gewöhnliche Differentialgleichungen. Neunte Auflage. Mit einem Vorwort von Detlef Kamke. B. G. Teubner, Stuttgart, 1977
- [28] J. L. Lagrange, *Sur la figure des colonnes*, in “*Miscellanea Taurinensia V*” (1770-1773), 125–170.
- [29] E. F. Masur, *Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints*, *Internat. J. Solids and Structures* **20**, no. 3 (1984), 211–231.
- [30] N. Olhoff et F. I. Niordson, *Some problems concerning singularities of optimal beams and columns*, *Vorträge der Wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Teil I (Brussels, 1978). *Z. Angew. Math. Mech.* **59** (1979), no. 3, T16–T26.

- [31] N. Olhoff et S. Rasmussen, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Internat. J. Solids and Structures **13** (1977), 605–614.
- [32] B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1980.
- [33] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Leçon d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.
- [34] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1966
- [35] A. P. Seiranyan, *On a problem of Lagrange*, Inzh. Zh., Mekhanika Tverdogo Tela **19** (1984), 101–111; Mech. Solids **19** (1984), 100–111.
- [36] I. Tadjbakhsh et J. Keller, *Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues*, J. Appl. Mech. **29** (1962), 159–164.
- [37] R. L. Wheeden et A. Zygmund, *Measure and Integral; An introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, Basel 1977.

Annexe A

NOTIONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

A.1. FORME BILINÉAIRE ET THÉORÈME DE LAX-MILGRAM

Définition A.1.1. *On dit que B est une forme bilinéaire si*

- (i) $\forall u \in U, v \mapsto B(u,v)$ est linéaire,
- (ii) $\forall v \in U, u \mapsto B(u,v)$ est linéaire.

Proposition A.1.1. *La forme bilinéaire B est continue de $U \times V$ dans \mathbb{R} si et seulement si*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall u \in U, v \in V, |B(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|.$$

Proposition A.1.2. *Soit U un espace de Hilbert et B et une forme bilinéaire continue sur $U \times U$, alors*

$$\exists A \in \mathcal{L}(U,U) \text{ telle que } \forall u, v \in U, B(u,v) = \langle Au, v \rangle_U.$$

Proposition A.1.3 (Lax-Milgram). *Soit B une forme bilinéaire continue sur un Hilbert U . Supposons que B soit coercive c.-à-d. qu'il existe $m > 0$ tel que*

$$|Bv, v| \geq m \|v\|^2, \quad \forall v \in U.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R}) = U^$, alors il existe un élément unique a dans U tel que*

$$B(a, v) = f(v), \quad \forall v \in U.$$

A.2. OPÉRATEURS COMPACTS

Définition A.2.1. *Une application $f : V \rightarrow H$ entre deux espaces de Hilbert est dite compacte ou complètement continue si pour toute suite infinie bornée d'éléments $\{v_n\}$ dans V , il existe une sous-suite et un élément $h \in H$ tels que $Av_{n_k} \rightarrow h$ dans H .*

Théorème A.2.1 ([33, Théorème, Chap. VI, §93, p. 231]). *Soit B une transformation linéaire symétrique complètement continue dans un espace de Hilbert H . Les valeurs propres non nulles de B sont de multiplicité finie et*

- ou bien de nombre fini

- ou bien dénombrables ;

dans ce dernier cas, elles forment une suite tendant vers 0.

A.3. ESPACES DE SOBOLEV

Définition A.3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On notera par $D^\alpha u$ la dérivée partielle de u pour le multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(i) Pour un entier positif m , soit $C^m(\Omega)$, l'espace des fonctions m fois continûment différentiables. Soit $C^m(\overline{\Omega})$, l'espace des fonctions m fois uniformément continûment différentiables et bornées sur Ω qui coïncide avec l'espace des fonctions m fois continûment différentiables et bornées sur Ω .¹

(ii) Soit $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω .

On introduit les normes suivantes sur $C^m(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \quad \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty. \quad (\text{A.3.1})$$

Définition A.3.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.

(i) $W^{m,p}(\Omega)$ est le complété de Cauchy de $C^m(\overline{\Omega})$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{m,p}$.

(ii) $W_0^{m,p}(\Omega)$ est le complété de Cauchy de $\mathcal{D}(\Omega)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{m,p}$.

(iii) $H^m(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} W^{m,2}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} W_0^{m,2}(\Omega)$.

Th\u00e9or\u00e8me A.3.1. [2, p. 67]

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ o\u00f9 } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

o\u00f9 $D^\alpha u$ est la d\u00e9riv\u00e9e partielle de u au sens des distributions pour le multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

D\u00e9finition A.3.3. [2, p. 83] Soit l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on dit qu'il poss\u00e8de une fronti\u00e8re localement Lipschitz si en chaque point x de la fronti\u00e8re de Ω , il existe un voisinage U_x tel que l'intersection avec la fronti\u00e8re de Ω est un graphe d'une fonction continue au sens de Lipschitz.

Remarque A.3.1. Comme mentionn\u00e9 dans [2, p. 83], si l'ensemble Ω est born\u00e9, alors cette d\u00e9finition est \u00e9quivalente \u00e0 l'ensemble des conditions \u00e9nonc\u00e9es dans [2]. Ainsi, les r\u00e9sultats qui suivent ne seront pas donn\u00e9s dans leur plus grande g\u00e9n\u00e9ralit\u00e9, mais suffiront pour leur application au cas o\u00f9 $\Omega = (0,1)$.

Lemme A.3.1. [2, p. 99] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et born\u00e9 qui poss\u00e8de une fronti\u00e8re localement Lipschitz. Soient $K \in \mathbb{R}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$, o\u00f9 $n < p \leq \infty$. Si $0 \leq \lambda \leq 1 - (n/p)$, alors

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq K \|u\|_{1,p}.$$

1. Pour Ω born\u00e9, une fonction continue et born\u00e9e sur Ω est uniform\u00e9ment continue sur $\overline{\Omega}$.

Théorème A.3.2. [2, p. 168] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et bornée qui possède une frontière localement Lipschitz et $\Omega^k \subset \mathbb{R}^n$ l'intersection entre Ω et un plan de dimension k . Soient $j \geq 0$, $m \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$. Si $m p \leq n$, alors l'injection suivante est compacte

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega^k).$$

Remarque A.3.2. On prend $\Omega = \Omega^k = (0,1)$, $j = 0$ et $m = p = q = 2$ de sorte que l'injection $H_0^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ soit compacte.

A.4. TOPOLOGIE FAIBLE ÉTOILE, COMPACITÉ, SEMI-CONTINUITÉ, CONVEXITÉ, SÉPARABILITÉ

On réunit ici un certain nombre de résultats dont on aura besoin au chapitre 1 pour l'espace $L^1(0,1)$ qui est séparable et dont le dual est $(L^1(0,1))^* = L^\infty(0,1)$ ([1, Thm, 2.15, p. 28, Thm. 2.34, p. 41]).

La topologie faible * de l'espace dual X^* d'un espace de Banach X est la plus faible topologie telle que, pour tout $x \in X$, les applications linéaires $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ demeurent continues. On la dénote $\sigma(X^*, X)$.

Théorème A.4.1 ([23, Prop. 3, p. 198, Cor. p. 201]). Soit X un espace de Banach.

(i) ([23, Prop. 3, p. 198])

Les convexes fermés de X^ dans la topologie de la norme sont les mêmes que les convexes fermés pour la topologie $\sigma(X^*, X)$. De même, les bornés de X^* dans la topologie de la norme sont les mêmes bornés pour la topologie $\sigma(X^*, X)$.*

(ii) ([23, Prop. 3, p. 198, Cor. au théorème de Banach-Alaoglu p. 201]) *La boule unitaire fermée $B^*(0) = \{x^* \in X^* : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}$ est compacte pour la topologie $\sigma(X^*, X)$.*

(iii) *Soit K un convexe borné et fermé dans X^* pour la topologie de la norme, alors K est compact pour la topologie $\sigma(X^*, X)$.*

(iii) ([34, Thms. 3.1.6 et 3.1.7, p. 70]) *Si, en plus, X est séparable, alors $B^*(0)$ est métrisable et séquentiellement compact dans la topologie $\sigma(X^*, X)$. En particulier, si $K \subset X^*$ est compact dans la topologie $\sigma(X^*, X)$, alors K est métrisable et séquentiellement compact. Donc, si $\{x_n^*\}$ est une suite bornée dans X^* , alors il existe $x^* \in X^*$ et une sous-suite $\{x_{n_k}^*\}$ de $\{x_n^*\}$ tels que $x_{n_k}^* \rightarrow x^*$ dans la topologie $\sigma(X^*, X)$:*

$$\forall x \in X, \quad \langle x_{n_k}^*, x \rangle \rightarrow \langle x^*, x \rangle.$$

DÉMONSTRATION. (iii) Comme K est borné, il est contenu dans une boule fermée de rayon R . Cette boule est compacte dans la topologie $\sigma(X^*, X)$. Comme K est convexe et fermé pour la topologie de la norme, il est convexe et fermé pour la topologie $\sigma(X^*, X)$. Il est donc compact pour la topologie $\sigma(X^*, X)$ comme sous-ensemble fermé d'un compact. \square

Définition A.4.1. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe.

- (i) Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ d'un sous-ensemble convexe de E est convexe si pour tout $0 < \alpha < 1$ et tout $x, y \in U$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

La fonction f est concave sur U si $-f$ est convexe sur U .

- (ii) La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement en un point $a \in E$ si pour tout $h < f(a)$, il existe un voisinage $V(a)$ de a dans E tel que

$$\forall x \in V(a), \quad h < f(x).$$

- (iii) La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement en un point $a \in E$ si $-f$ est semi-continue inférieurement en un point $a \in E$.

Le prolongement par $+\infty$

$$f_U(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} f(x) \text{ si } x \in U \quad \text{et } +\infty \text{ si } x \notin U,$$

pour une fonction f semi-continue inférieurement définie sur un convexe fermé U de E , est semi-continu inférieurement sur E .

Théorème A.4.2 ([20, Prop. 3.1. p. 14]). Soit E un espace vectoriel localement convexe. Une fonction convexe semi-continue inférieurement sur E est l'enveloppe supérieure des fonctions affines continues a telles que $f(x) \geq a(x)$, $\forall x \in E$.

Par définition de la topologie $\sigma(X^*, X)$ sur X^* pour un Banach X , pour tout $x \in X$, $x^* \rightarrow \langle x^*, x \rangle : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue pour la topologie $\sigma(X^*, X)$. Il en est de même des fonctions affines.

Théorème A.4.3 ([20, Cor. 2.2, p. 10]). Soit X un espace de Banach. Si $f : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et semi-continue inférieurement pour la norme de X^* , alors f est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie $\sigma(X^*, X)$.

Annexe B

FORMULATION MATRICIELLE

B.1. OUTILS POUR MATRICE TRIDIAGONALE PAR BLOC

Lemme B.1.1 ([32, p. 134]). *Si A est tridiagonale, symétrique et ses éléments non diagonaux sont non nuls, alors les valeurs propres de A sont simples.*

DÉMONSTRATION. Soit

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

tel que

$$\begin{aligned} \det [(A - \lambda I)_{1,n}] &= \det \begin{bmatrix} b_1 & a_2 - \lambda & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 - \lambda & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & b_{n-4} & a_{n-3} - \lambda & b_{n-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} - \lambda & b_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= b_1 b_2 \dots b_{n-1} \neq 0. \end{aligned}$$

La dernière ligne a été obtenue puisque la matrice est triangulaire supérieure et que les éléments de sa diagonale sont non nuls par hypothèse. Donc,

$$\begin{aligned} \text{Rang} [(A - \lambda I)_{1,n}] &= n - 1 \\ \implies \text{Rang} [A - \lambda I] &\geq n - 1 \\ \implies \dim \ker [A - \lambda I] &= \begin{cases} 1 & , \text{ si } \lambda \text{ est une valeur propre,} \\ 0 & , \text{ si } \lambda \text{ n'est pas une valeur propre.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme A est symétrique, alors elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont simples. \square

Lemme B.1.2. Soit A une matrice triangulaire supérieure par bloc 2×2 . On dénote par A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, les blocs 2×2 sur la diagonale, $n \geq 2$. Alors, $\det A = \prod_{i=1}^n \det A_i$.

DÉMONSTRATION. Soit

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & & \bar{A} \\ 0 & \boxed{A_2} & & & \\ 0 & 0 & \boxed{A_3} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{bmatrix}, \quad A_i \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}.$$

On veut montrer que $\det A = \prod_{i=1}^n \det A_i$ en procédant par induction.

(i) Pour $n = 2$, une matrice triangulaire supérieure est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix}} & \bar{A} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Le calcul de $\det A$ par la première colonne donne

$$\begin{aligned} \det A &= a_1 \det A_{11} - c_1 \det A_{21} \\ &= a_1 d_1 \det A_{\{3,4\}} - c_1 b_1 \det A_{\{3,4\}} \\ &= (a_1 d_1 - c_1 b_1) \det A_2 = \det A_1 \det A_2. \end{aligned}$$

(ii) On suppose que pour A avec $n - 1$ blocs,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n-1} \det A_i.$$

On passe à une matrice à n blocs de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix}} & & & & & & \bar{A} \\ & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{matrix}} & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & & & \\ & \vdots & & & \boxed{\begin{matrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{matrix}} & & & & \\ & 0 & 0 & & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

Le calcul de $\det A$ par la première colonne donne

$$\begin{aligned} \det A &= a_1 \det A_{11} - c_1 \det_{21} \\ &= a_1 d_1 \det A_{\{3,4,\dots,n\}} - c_1 b_1 \det A_{\{3,4,\dots,n\}}. \end{aligned}$$

Comme $A_{\{3,4,\dots,n\}}$ est une matrice qui possède $n - 1$ blocs 2×2 , on applique l'hypothèse d'induction sur cette matrice de sorte que

$$\det A = (a_1 d_1 - c_1 b_1) \prod_{i=2}^n \det A_i = \prod_{i=1}^n \det A_i.$$

□

B.2. CALCULS DES MATRICES DU PROBLÈME DISCRÉTISÉ

B.2.1. Calcul des $M_{i,i-1,k}$ et $N_{i,i-1,k}$

Par définition,

$$\begin{aligned} M_{i,i-1,i-1} &= A_{i-1} \int_0^1 \gamma_{i-1} \begin{bmatrix} \alpha''_{i-1} \alpha''_i & \beta''_{i-1} \alpha''_i \\ \alpha''_{i-1} \beta''_i & \beta''_{i-1} \beta''_i \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^4} \int_0^1 \gamma \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right) \begin{bmatrix} \alpha'' \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \\ \alpha'' \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i-1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^3} \int_{-1}^0 \gamma(\xi + 1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi + 1) \alpha''(\xi) & \beta''(\xi + 1) \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi + 1) \beta''(\xi) & \beta''(\xi + 1) \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} M_{i,i-1,i} &= \frac{A_i}{h^3} \int_{-1}^0 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi+1) & \alpha''(\xi) & \beta''(\xi+1) & \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi+1) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi+1) & \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{A_i}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $N_{i,i-1,k}$,

$$\begin{aligned} N_{i,i-1,i-1} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \gamma(\xi+1) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi+1) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi+1) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}, \\ N_{i,i-1,i} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi+1) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi+1) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B.2.2. Calcul des $M_{i,i,k}$ et $N_{i,i,k}$

Par définition,

$$\begin{aligned} M_{i,i,i-1} &= A_{i-1} \int_0^1 \gamma_{i-1} \begin{bmatrix} \alpha''_i & \alpha''_i & \beta''_i & \alpha''_i \\ \alpha''_i & \beta''_i & \beta''_i & \beta''_i \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^4} \int_0^1 \gamma\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) \begin{bmatrix} \alpha''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \alpha''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \beta''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \alpha''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \\ \alpha''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \beta''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \beta''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & \beta''\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \end{bmatrix} dx \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^3} \int_{-1}^0 \gamma(\xi+1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) & \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{A_{i-1}}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
M_{i,i,i} &= A_i \int_0^1 \gamma_i \begin{bmatrix} \alpha_i'' & \alpha_i'' & \beta_i'' & \alpha_i'' \\ \alpha_i'' & \beta_i'' & \beta_i'' & \beta_i'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_i}{h^4} \int_0^1 \gamma \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \begin{bmatrix} \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \\ \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_i}{h^3} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) & \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{A_i}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_{i,i,i+1} &= A_{i+1} \int_0^1 \gamma_{i+1} \begin{bmatrix} \alpha_i'' & \alpha_i'' & \beta_i'' & \alpha_i'' \\ \alpha_i'' & \beta_i'' & \beta_i'' & \beta_i'' \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^4} \int_0^1 \gamma \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \begin{bmatrix} \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \\ \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^3} \int_0^1 \gamma(\xi-1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) & \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) & \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour $N_{i,i,k}$,

$$\begin{aligned}
N_{i,i,i-1} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \gamma(\xi+1) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}, \\
N_{i,i,i} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \\
N_{i,i,i+1} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \gamma(\xi-1) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{30} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

B.2.3. Calcul des $M_{i,i+1,k}$ et $N_{i,i+1,k}$

Par définition,

$$\begin{aligned}
M_{i,i+1,i} &= A_i \int_0^1 \gamma_i \begin{bmatrix} \alpha''_{i+1} \alpha''_i & \beta''_{i+1} \alpha''_i \\ \alpha''_{i+1} \beta''_i & \beta''_{i+1} \beta''_i \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_i}{h^4} \int_0^1 \gamma \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \begin{bmatrix} \alpha'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \\ \alpha'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_i}{h^3} \int_0^1 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi-1) \alpha''(\xi) & \beta''(\xi-1) \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi-1) \beta''(\xi) & \beta''(\xi-1) \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{A_i}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
M_{i,i+1,i+1} &= A_{i+1} \int_0^1 \gamma_{i+1} \begin{bmatrix} \alpha''_{i+1} \alpha''_i & \beta''_{i+1} \alpha''_i \\ \alpha''_{i+1} \beta''_i & \beta''_{i+1} \beta''_i \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^4} \int_0^1 \gamma \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \begin{bmatrix} \alpha'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \alpha'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \\ \alpha'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) & \beta'' \left(\frac{x-x_{i+1}}{h} \right) \beta'' \left(\frac{x-x_i}{h} \right) \end{bmatrix} dx \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^3} \int_0^1 \gamma(\xi-1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi-1) \alpha''(\xi) & \beta''(\xi-1) \alpha''(\xi) \\ \alpha''(\xi-1) \beta''(\xi) & \beta''(\xi-1) \beta''(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{A_{i+1}}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour $N_{i,i+1,k}$,

$$\begin{aligned}
N_{i,i+1,i} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi-1) \alpha'(\xi) & \beta'(\xi-1) \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi-1) \beta'(\xi) & \beta'(\xi-1) \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}, \\
N_{i,i+1,i+1} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \gamma(\xi-1) \begin{bmatrix} \alpha'(\xi-1) \alpha'(\xi) & \beta'(\xi-1) \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi-1) \beta'(\xi) & \beta'(\xi-1) \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{60} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

B.2.4. Calcul de $N_{i,i}$, $N_{i,i-1}$ et $N_{i,i+1}$

Par définition,

$$\begin{aligned}
N_{i,i-1} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^0 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi+1) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi+1) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi+1) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{i,i} &= \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{i,i+1} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \begin{bmatrix} \alpha'(\xi-1) & \alpha'(\xi) & \beta'(\xi-1) & \alpha'(\xi) \\ \alpha'(\xi-1) & \beta'(\xi) & \beta'(\xi-1) & \beta'(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

B.2.5. Assemblage des sous-matrices matrices

Puisque $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n$, on a par construction que

$$\begin{aligned}
\text{supp } \alpha_i &= \text{supp } \beta_i = I_{i-1} \cup I_i, \quad 2 \leq i \leq n, \\
\text{supp } \gamma_k &= \begin{cases} I_1, & \text{si } k = 1, \\ I_{k-1} \cup I_k, & \text{si } 2 \leq k \leq n, \\ I_n, & \text{si } k = n + 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, M_{22} et M_{23} , $M_{i,i-1}$, M_{ii} et $M_{i,i+1}$ pour $3 \leq i \leq n-1$, $M_{n-1,n-3}$ et $M_{n-1,n-1}$ sont non nulles et on a une structure tridiagonale par bloc de 2×2 et la matrice complète possède une largeur de bande 5

$$\begin{bmatrix}
M_{22} & M_{23} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & M_{43} & M_{44} & M_{45} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 0 & M_{54} & M_{455} & M_{56} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{n-1,n-2} & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & M_{n,n-1} & M_{nn}
\end{bmatrix}.$$

On connaît aussi le support des fonctions sous les intégrales de M_{ij} :

$$\begin{aligned} M_{iik} : \quad & \text{supp} = I_{i-1} \cup I_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad i-1 \leq k \leq i+1, \\ M_{i,i-1,k} : \quad & \text{supp} = I_{i-1}, \quad 3 \leq i \leq n, \quad i-1 \leq k \leq i, \\ M_{i,i+1,k} : \quad & \text{supp} = I_i, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad i \leq k \leq i+1. \end{aligned}$$

On peut raffiner le calcul du M_{ii} en le faisant en deux étapes :

$$M_{iik} = M_{iik}^- + M_{iik}^+ \quad (\text{B.2.1})$$

$$\begin{aligned} M_{iik}^- : \quad & \text{supp} = I_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n, \quad i-1 \leq k \leq i, \\ M_{iik}^+ : \quad & \text{supp} = I_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad i \leq k \leq i+1. \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

De cette façon, les fonctions de chaque matrice ont leur support dans un I_i . On résume :

$$\begin{aligned} M_{iik}^- : \quad & \text{supp} = I_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n, \quad i-1 \leq k \leq i, \\ M_{iik}^+ : \quad & \text{supp} = I_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad i \leq k \leq i+1, \\ M_{i,i-1,k} : \quad & \text{supp} = I_{i-1}, \quad 3 \leq i \leq n, \quad i-1 \leq k \leq i, \\ M_{i,i+1,k} : \quad & \text{supp} = I_i, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad i-1 \leq k \leq i. \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

Les mêmes considérations s'appliquent à la matrice N qui ne dépend pas de A .

B.3. IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE

Les calculs des sous-matrices N au paragraphe précédent sont indépendants de A_h . Cependant, ceux des sous-matrices M ont été faits pour le cas $p = 1$ pour lequel les matrices $M = M(A_h)$ dépendent linéairement de A_h . Pour le cas général, il faut revenir aux approximations du paragraphe 2.3.2 du chapitre 2

$$\lambda_p^h(A_h) = \inf_{v_h \in V_h} \int_0^1 A_h^p(x) |v_h''(x)|^2 dx. \quad (\text{B.3.1})$$

et on rappelle, du théorème 2.2.1 (iii) du chapitre 2, que

$$d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = \inf_{v_h \in E_p(A_h)} \int_0^1 p A_h^{p-1}(x) B_h(x) |v_h''(x)|^2 dx, \quad (\text{B.3.2})$$

où

$$E_p(A_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u_h \in E_h : \int_0^1 A_h^p(x) |u_h''(x)|^2 dx = \lambda_p^h(A) \right\}. \quad (\text{B.3.3})$$

S'il existe $u_h \in E_h(A_h)$ minimisant, en remplaçant la matrice $M(A)$ par la matrice $M(A_h^p)$, on obtient

$$\lambda_p^h(A_h) = \frac{M(A_h^p) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}{N \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}, \quad M(A_h^p) \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 A_h^p(x) u_h''(x) v_h''(x) dx, \quad (\text{B.3.4})$$

où $\vec{v}_h = ((v_h(x_1), v'_h(x_1)), \dots, (v_h(x_n), v'_h(x_n)))$ est le vecteur construit à partir de v_h et on notera $v_j \stackrel{\text{déf}}{=} (v_h(x_j), v'_h(x_j))$, pour $j = 2, \dots, n$. On a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_h^p u_h'' v_h'' dx &= \int_0^1 A_h^p \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] [v_i \alpha_i'' + v_i' \beta_i''] dx \\ &= \int_0^1 A_h^p \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] \alpha_i'' v_i + [u_j \alpha_j'' + u_j' \beta_j''] \beta_i'' v_i' dx. \end{aligned}$$

Si, en plus, la valeur propre est simple, alors la dérivée directionnelle de $\lambda_p^h(A_h)$ en A_h dans la direction B_h est donnée par

$$d\lambda_p^h(A_h; B_h) = \frac{M(p A_h^{p-1} B_h) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}{N \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h} = p \frac{M(A_h^{p-1} B_h) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h}{N \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h} \quad (\text{B.3.5})$$

(voir le théorème 2.2.1 (iii) et paragraphe 2.3.2 du chapitre 2).

Cependant, pour $p \neq 1$, on perd la décomposition linéaire par rapport aux A_i . Pour $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$,

$$M(A_h^p)_{i,j} = \frac{1}{h^3} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^p \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi.$$

Donc,

$$\begin{aligned} &M(A_h^{p-1} B_h)_{i,j} u_j \cdot u_i \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^{p-1} \left(\sum_{l=-1}^1 B_{i+l} \gamma(\xi - l) \right) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi u_j \cdot u_i \\ &= \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^{p-1} \gamma(\xi - 1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi u_j \cdot u_i \\ \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^{p-1} \gamma(\xi) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi u_j \cdot u_i \\ \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^{p-1} \gamma(\xi + 1) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi u_j \cdot u_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{i-1} \\ B_i \\ B_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $l = -1, 0, 1$, on note

$$M_{i,j,l} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=-1}^1 A_{i+k} \gamma(\xi - k) \right)^{p-1} \gamma(\xi - l) \begin{bmatrix} \alpha''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \alpha''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \\ \beta''(\xi) \alpha''(i-j+\xi) & \beta''(\xi) \beta''(i-j+\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

Pour implémenter la méthode de points intérieurs, on aura besoin du gradient $\nabla \lambda_p^h(A_h)$. On supposera qu'il existe $u_h \in E_h(A_h)$ minimisant. La méthode « eigs » de MATLAB sera utilisée pour trouver la fonction propre qui réalise l'infimum numérique. Cette méthode retournera effectivement $u_h \in E_h(A_h)$ puisque l'algorithme normalisera automatiquement le vecteur propre de sorte que $N\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$.

De plus,

$$d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = p M(A_h^{p-1} B_h) \vec{u}_h \cdot \vec{u}_h = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n p M(A_h^{p-1} B_h)_{i,j} u_j \cdot u_i \quad (\text{B.3.6})$$

et ainsi

$$d_H \lambda_p^h(A_h; B_h) = \nabla \lambda_p^h(A_h) \cdot B_h$$

où $\nabla \lambda_p^h(A_h)$ peut être écrit au long comme

$$\nabla \lambda_p^h(A_h) = \begin{bmatrix} M_{2,2,-1} u_2 \cdot u_2 \\ M_{2,2,0} u_2 \cdot u_2 + M_{2,3,0} u_3 \cdot u_2 + M_{3,2,-1} u_2 \cdot u_3 + M_{3,3,-1} u_3 \cdot u_3 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} M_{i-1,i-1,1} & M_{i-1,i,1} & 0 \\ M_{i,i-1,0} & M_{i,i,0} & M_{i+1,i,-1} \\ 0 & M_{i,i+1,0} & M_{i+1,i+1,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ M_{n-1,n-1,1} u_{n-1} \cdot u_{n-1} + M_{n,n-1,0} u_{n-1} \cdot u_n + M_{n-1,n,1} u_n \cdot u_{n-1} + M_{n,n,0} u_n \cdot u_n \\ M_{n,n,1} u_n \cdot u_n \end{bmatrix}, \text{ où } 3 \leq i \leq n-1.$$

B.4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES RÉSUMÉS

Pour ne pas fausser les hauteurs avec les oscillations, on calcule la hauteur de A en 0 et en 1 en évaluant au premier élément non oscillant. En général, c'est le troisième ou quatrième élément.

| p | x_1 | x_2 | x_3 | $A(0)$ | $A(x_1)$ | $A(x_2)$ | $A(x_3)$ | $A(1)$ | $\lambda_p^{(1)}$ | $\lambda_p^{(2)}$ |
|-----|--------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|--------|-------------------|-------------------|
| 0,1 | 0,2495 | 0,5000 | 0,7500 | 1,9243 | 0,0170 | 1,9246 | 0,0169 | 1,9243 | 40,6361 | 75,4709 |
| 0,2 | 0,2500 | 0,5000 | 0,7500 | 1,8392 | 0,0099 | 1,8394 | 0,0099 | 1,8392 | 41,7097 | 69,8850 |
| 0,3 | 0,2500 | 0,4995 | 0,7500 | 1,7670 | 0,0296 | 1,7672 | 0,0297 | 1,7671 | 42,6887 | 67,5042 |
| 0,4 | 0,2500 | 0,5005 | 0,7500 | 1,7056 | 0,0224 | 1,7053 | 0,0224 | 1,7056 | 43,6128 | 63,2074 |
| 0,5 | 0,2500 | 0,5005 | 0,7500 | 1,6663 | 0,0169 | 1,6663 | 0,0169 | 1,6663 | 44,4713 | 59,2142 |
| 0,6 | 0,2500 | 0,4995 | 0,7500 | 1,6225 | 0,0146 | 1,6222 | 0,0146 | 1,6225 | 45,2721 | 55,5904 |
| 0,7 | 0,2500 | 0,4995 | 0,7500 | 1,5883 | 0,0120 | 1,5881 | 0,0120 | 1,5883 | 46,0202 | 52,2602 |
| 0,8 | 0,2500 | 0,5000 | 0,7500 | 1,5547 | 0,0108 | 1,5543 | 0,0108 | 1,5547 | 46,7214 | 49,2774 |
| 0,9 | 0,2500 | 0,4995 | 0,7500 | 1,5264 | 0,0142 | 1,5263 | 0,0142 | 1,5264 | 47,3787 | 47,5350 |
| 1,0 | 0,2500 | 0,4995 | 0,7500 | 1,4984 | 0,0263 | 1,4979 | 0,0264 | 1,4978 | 47,9920 | 47,9927 |
| 1,1 | 0,2500 | 0,4985 | 0,7500 | 1,4764 | 0,0434 | 1,4744 | 0,0432 | 1,4757 | 48,5667 | 48,5685 |
| 1,2 | 0,2505 | 0,5005 | 0,7510 | 1,4520 | 0,0630 | 1,4497 | 0,0620 | 1,4508 | 49,1004 | 49,1264 |
| 1,3 | 0,2495 | 0,4985 | 0,7510 | 1,4319 | 0,0817 | 1,4289 | 0,0747 | 1,4276 | 49,6041 | 49,6042 |
| 1,4 | 0,2495 | 0,5015 | 0,7500 | 1,4163 | 0,0931 | 1,4102 | 0,1003 | 1,4163 | 50,0743 | 50,0744 |
| 1,5 | 0,2490 | 0,5000 | 0,7490 | 1,4046 | 0,1385 | 1,3936 | 0,1359 | 1,4027 | 50,5132 | 50,5167 |
| 1,6 | 0,2495 | 0,5010 | 0,7510 | 1,3873 | 0,1497 | 1,3773 | 0,1476 | 1,3871 | 50,9289 | 50,9295 |
| 1,7 | 0,2490 | 0,5005 | 0,7515 | 1,3726 | 0,1694 | 1,3665 | 0,1663 | 1,3725 | 51,3183 | 51,3192 |
| 1,8 | 0,2490 | 0,5005 | 0,7505 | 1,3659 | 0,1934 | 1,3471 | 0,1954 | 1,3649 | 51,6808 | 51,6809 |
| 1,9 | 0,2490 | 0,5025 | 0,7505 | 1,3478 | 0,2070 | 1,3385 | 0,2120 | 1,3484 | 52,0282 | 52,0290 |
| 2,0 | 0,2435 | 0,5015 | 0,7565 | 1,3209 | 0,2179 | 1,3441 | 0,1972 | 1,3188 | 52,3450 | 52,3458 |
| 2,1 | 0,2460 | 0,5020 | 0,7545 | 1,3151 | 0,2374 | 1,3214 | 0,2371 | 1,3175 | 52,6585 | 52,6592 |
| 2,2 | 0,2480 | 0,4995 | 0,7520 | 1,3156 | 0,2659 | 1,3067 | 0,2666 | 1,3179 | 52,9509 | 52,9512 |
| 2,3 | 0,2485 | 0,4990 | 0,7510 | 1,3137 | 0,2805 | 1,2957 | 0,2857 | 1,3060 | 53,2218 | 53,2221 |
| 2,4 | 0,2490 | 0,5000 | 0,7555 | 1,2961 | 0,3048 | 1,2882 | 0,2965 | 1,2959 | 53,4895 | 53,4920 |
| 2,5 | 0,2480 | 0,4995 | 0,7525 | 1,2911 | 0,3152 | 1,2782 | 0,3147 | 1,2910 | 53,7359 | 53,7360 |
| 2,6 | 0,2470 | 0,5000 | 0,7525 | 1,2954 | 0,3350 | 1,2627 | 0,3341 | 1,2886 | 53,9589 | 53,9591 |
| 2,7 | 0,2480 | 0,4975 | 0,7510 | 1,2800 | 0,3485 | 1,2585 | 0,3487 | 1,2799 | 54,1879 | 54,1880 |
| 2,8 | 0,2465 | 0,4995 | 0,7545 | 1,2703 | 0,3559 | 1,2596 | 0,3586 | 1,2691 | 54,4143 | 54,4143 |
| 2,9 | 0,2465 | 0,4980 | 0,7540 | 1,2635 | 0,3718 | 1,2491 | 0,3694 | 1,2630 | 54,6170 | 54,6172 |
| 3,0 | 0,2445 | 0,5020 | 0,7560 | 1,2516 | 0,3774 | 1,2482 | 0,3750 | 1,2506 | 54,8234 | 54,8234 |

TABLEAU B. I. Les valeurs propres et les hauteurs en fonction de p pour $n = 2000$