

Al.1

9

909

**Université de Montréal**

**« COMPARAISON DES PERFORMANCES RELATIVES  
DE DIFFÉRENTS MODÈLES D'ESTIMATION DE LA  
VALEUR À RISQUE »**

Par  
**Jérôme Gagné**

**Centre de Documentation  
Dép. de sciences économiques  
Université de Montréal  
C. P. 6128, Succ. "A"  
Montréal, Qué., Canada, H3C 3J7**

**Département de sciences économiques, Université de Montréal  
Faculté des lettres et sciences humaines**

**Rapport de recherche présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de maître  
en sciences économiques  
option économie financière**

**Juin, 2003**

**© Jérôme Gagné, 2003**

C

C

## **Sommaire**

Il est primordial pour un gestionnaire de portefeuille de bien évaluer le risque de marché. Une des méthodes les plus populaires pour faire l'évaluation du risque de marché d'un portefeuille est l'utilisation de modèles de Valeur à Risque. La Valeur à Risque synthétise l'exposition au risque de marché en un seul nombre. Dans ce rapport de recherche, nous comparons les performances relatives de treize méthodes différentes de calculs de la Valeur à Risque pour 1000 portefeuilles dont les rendements ont été simulés. Nous avons simulé les rendements à partir d'une  $N(0,1)$  et par la suite à partir d'un  $GARCH(1,1)$ . Nous avons utilisé sept critères de performances pour faire la comparaison des performances relatives des méthodes de calcul de la Valeur à Risque. En général, nous obtenons une Valeur à Risque relativement semblable pour l'ensemble des méthodes et ces dernières offrent en général le niveau de couverture requis. De plus, la méthode d'évaluation de la Valeur à Risque par simulations historiques filtrées donne en moyenne des résultats qui sont égaux ou supérieurs à l'ensemble des autres méthodes.

## **Abstract**

A portfolio manager must be able to evaluate the market risks. One of the most popular method is called the Value at Risk. This method synthesizes the exposure to those market risks under one number. In this Master thesis, the results of thirteen different methods of Value at Risk experienced on 1000 portfolios are compared on the basis of seven different criteria. The simulations outcomes are based on a  $N(0,1)$  and a  $GARCH(1,1)$ . In general, we have obtained similar Value at Risk for all of the thirteen methods. Nevertheless, we shall mention that the results of the Filtered Historical Simulations have been equal or higher than the other methods.

## Table des Matières

Sommaire .....	i
Abstract .....	i
Table des Matières .....	ii
Section 1 - Introduction.....	1
Section 2 - Revue de littérature.....	3
2.1 - Rendement du portefeuille .....	3
2.2 – Concept de Valeur à Risque .....	3
2.3 - Concept de Valeur à Risque pour une distribution normale des rendements .....	4
2.3.1 - Calcul de la volatilité sous l'hypothèse de normalité des rendements.....	4
2.3.2 - Avantages du calcul de la VaR par méthode paramétrique.....	5
2.3.3 - Désavantage du calcul de la VaR par méthode paramétrique .....	5
2.4 - Valeur à Risque par simulations historiques ( SH ).....	5
2.4.1 - Avantages du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques .....	6
2.4.2 - Désavantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques..	6
2.5 - Valeur à Risque par simulations historiques filtrées ( SHF ).....	7
2.5.1 - Avantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques filtrées .....	9
2.5.2 - Désavantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques filtrées .....	10
Section 3 – Méthodologie .....	11
3.1 - Objectif et Méthodologie .....	11
3.2 - Données utilisées pour faire les simulations .....	11
3.3 - Méthodologie de la simulation des rendements du portefeuille .....	12
3.3.1 - Simulation des rendements de portefeuille - $N(0,1)$ .....	12
3.3.2 - Simulation des rendements de portefeuille - GARCH(1,1).....	12
Section 4 - Calcul de la Valeur à Risque.....	14
4.1 - Approche de la moyenne mobile à pondération égale (EWMA).....	14
4.2 - Approche de la moyenne mobile à pondération exponentielle (XWMA) .....	15
4.3 - Approche par simulations historiques (SH) .....	16
4.4 - Approche par simulations historiques filtrées.....	16

4.5 - Méthodologie pour le calcul des différents critères de comparaison.....	17
4.5.1 - Biais relatif à la moyenne (Critère 1) .....	17
4.5.2 - Racine du carré du biais relatif à la moyenne (Critère 2).....	18
4.5.3 - Volatilité annualisée exprimée en pourcentage (Critère 3) .....	18
4.5.4 - Fraction des observations couvertes (Critère 4).....	19
4.5.5 - Multiple requis pour obtenir une couverture parfaite (Critère 5).....	19
4.5.6 - Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 6).....	19
4.5.7 - Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 7).....	20
Section 5 – Résultats .....	21
5.1 - Biais relatif à la moyenne ( Critère 1 ).....	21
5.2 - Racine du carré du biais relatif à la moyenne ( Critère 2 ) .....	23
5.3 - Volatilité annualisée exprimée en pourcentage (Critère 3).....	24
5.4 - Fraction des observations couvertes (Critère 4).....	26
5.5 - Multiple requis pour obtenir une couverture parfaite (Critère 5).....	28
5.6 - Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 6).....	29
5.7 - Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 7) .	31
Conclusion .....	34
Bibliographie.....	36

## Section 1 - Introduction

De nos jours, la gestion des risques est primordiale pour les entreprises financières et les gestionnaires de portefeuilles. Ces derniers sont exposés à une foule de risques différents qui peuvent influencer les rendements de leurs portefeuilles, dont le risque de marché. On définit le risque de marché comme étant le mouvement ou la volatilité dans le niveau des prix du marché soit les variations du prix des actions, des taux d'intérêt et des taux de change qui ne sont pas anticipés. Il est primordial pour les entreprises financières et les gestionnaires de portefeuille de bien évaluer le risque de leur portefeuille.

Une des techniques pour évaluer le risque est l'utilisation de modèles d'évaluation de la Valeur à Risque. La Valeur à Risque est une mesure du risque d'un portefeuille. Selon Jorion (2001), on définit la Valeur à Risque (VaR) comme la mesure de la pire perte anticipée pour un certain horizon de temps sous des conditions normales de marché à un certain niveau de confiance. C'est un concept important qui peut être appliqué pour résumer le risque de positions individuelles ou de grandes multinationales financières ou d'intermédiaires financiers pour les marchés dérivés.

Ce présent rapport de recherche porte sur la comparaison de méthodes de calcul de la VaR pour un même portefeuille et pour la même journée. Nous désirons comparer treize méthodes de calcul de la VaR entre elles et leurs performances relatives. Pour faire la comparaison des différentes méthodes de calcul de la VaR, nous allons suivre la démarche présentée par Hendricks (1996). Nous allons faire la comparaison entre les différents estimés de la Valeur à Risque par l'utilisation de sept critères utilisés par Hendricks (1996). Les critères de comparaison servent à établir les performances relatives des différents calculs de la Valeur à Risque.

Toutefois, nous ajouterons à la démarche d'Hendricks (1996) une comparaison avec la méthode de calcul de la VaR par simulations historiques filtrées. Cette méthode est un mélange de méthode paramétrique et non paramétrique. L'estimation de la VaR par simulation historique filtré est basée sur la combinaison d'un modèle paramétrique de type GARCH (Engle (1982), Bollerslev (1986)) pour la volatilité des rendements et non paramétrique, c'est à dire de l'historique des rendements du portefeuille. Notre objectif

pour ce rapport de recherche sera de vérifier « **Quelle est la performance relative de la méthode de simulations historiques filtrées comparativement aux autres méthodes de calcul de la Valeur à Risque pour un portefeuille fait par Hendricks (1996)?** ».

## Section 2 - Revue de littérature

### 2.1 - Rendement du portefeuille

Dans ce rapport de recherche, nous allons utiliser une approche par portefeuille pour les rendements. Nous utiliserons le rendement d'un portefeuille pour une période donnée. Pour ce rapport, les rendements qui ont été simulés sont ceux d'un portefeuille. Notons que notre portefeuille ne contient pas d'option ou de produits dérivés.

Considérons  $P_{i,t}$  la valeur du portefeuille  $i$  au moment  $t$ . Nous pouvons définir le rendement d'un de ces portefeuilles au temps  $t$  comme:

$$R_{i,t} = \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) - 1$$

Dans la situation présente, nous allons définir la période de temps pour laquelle nous avons obtenu les rendements de notre portefeuille ou de notre titre comme étant :  $t = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ .

### 2.2 – Concept de Valeur à Risque

Comme nous l'avons définie plus haut, la Valeur à Risque est une mesure qui résume le risque d'un titre, d'un portefeuille, d'une position financière ou d'une banque. La Valeur à Risque (VaR) donne une mesure quantitative et synthétique du risque associée à un portefeuille ou à une position financière.

Prenons un horizon d'une journée,  $h = 1$ , pour faire l'évaluation de la VaR. On peut définir la VaR au temps  $t + 1$  évaluée en  $t$  avec un niveau  $\alpha$  comme étant :

$VaR_{t+1|t}^{\alpha}$  et telle que :

$$\text{Prob}\left(R_{t+1} \leq VaR_{t+1|t}^{\alpha} \mid I_t\right) = \alpha$$

où  $\alpha$  est le niveau de confiance et  $I_t$  l'information disponible en  $t$ .

## 2.3 - Concept de Valeur à Risque pour une distribution normale des rendements

### 2.3.1 - Calcul de la volatilité sous l'hypothèse de normalité des rendements

Dans le cas des méthodes paramétriques de calcul de la VaR, nous devons faire une hypothèse sur les rendements de notre portefeuille. Ici, nous faisons l'hypothèse de la normalité conditionnelle des rendements. De plus, nous reprendrons l'hypothèse d'Hendricks (1996, p.41) selon laquelle la moyenne des ces rendements journaliers est nulle.

Posons :

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{où } \varepsilon_t | I_t \sim \text{iid } N(0,1)$$

Plusieurs méthodes de calcul de  $\sigma_t$  existent. Une méthode consiste à estimer  $\sigma_t$  en accordant un poids identique à toutes les observations passées :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} R_{t-s}^2 \quad \text{et} \quad \text{VaR}_{t+1}^\alpha = \hat{\sigma}_{t+1} \Phi^{-1}(\alpha)$$

où  $m$  est le nombre d'observations passées utilisées dans le calcul. Par exemple,  $m = 250$  signifie que nous avons utilisé les deux cent cinquante observations précédentes à  $t$  pour faire le calcul de  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ . Nous nommerons cette méthode : méthode de moyenne mobile équipondérée (EWMA)

Une deuxième méthode consiste à accorder différents poids aux observations passées, où la somme des poids est égale à 1. Si  $\lambda$  est le poids que nous accordons à l'observation en  $s$ , alors nous avons :

$$\sum_{s=1}^m \lambda_s = 1$$

Nous obtenons alors la volatilité estimée de la période  $t$  suivante :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sum_{s=0}^{m-1} \lambda_s R_{t-s}^2$$

Dans le cas où les poids associés diminuent exponentiellement dans le temps, nous nommerons cette méthode : méthode de moyenne mobile exponentielle (XWMA), nous obtenons que la prévision de la volatilité sera :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{s=0}^{m-1} \lambda^{s-1} R_{t-s}^2$$

### **2.3.2 - Avantages du calcul de la VaR par méthode paramétrique**

L'avantage le plus marqué de l'utilisation de cette méthode est sa rapidité de calcul. En effet, il est très facile d'obtenir l'estimé de la VaR puisqu'il ne requiert que le calcul de l'écart-type des rendements conditionnels à la période de temps. En effet, Hendricks (1996) explique que la normalité des rendements et leur indépendance simplifient les calculs puisqu'on suppose que tous les quantiles de la distribution des rendements sont des multiples connus de l'écart-type des rendements.

### **2.3.3 - Désavantage du calcul de la VaR par méthode paramétrique**

Une des conséquences de l'utilisation d'une distribution normale pour faire l'approximation des rendements du portefeuille est que l'on perd de l'information sur les queues de la véritable distribution des rendements du portefeuille. Une des particularités des séries financières est que les queues de distribution sont plus épaisses que dans le cas d'une loi normale. Une telle situation signifie que les événements rares sont plus fréquemment observés dans une série de données représentant les rendements d'un actif que dans le cas d'une série de rendements distribués selon une loi normale. Ainsi, Frain et Meegan (1996) affirment que la distribution normale n'est pas adéquate pour capturer l'information provenant des queues de distribution. La raison est que la loi normale attribue une probabilité moindre que celle observée en réalité pour ces événements.

## **2.4 - Valeur à Risque par simulations historiques ( SH )**

Lorsque nous calculons la VaR comme dans la situation présentée plus haut, nous devons faire une hypothèse sur la distribution des rendements du portefeuille. Par cela, nous imposons une restriction sur la distribution des rendements de notre portefeuille.

Dans l'optique de faire l'approximation la plus exacte de la vraie distribution des rendements de notre portefeuille, on peut utiliser l'historique des rendements du portefeuille pour une période de temps donnée. Cette méthode d'évaluation est la Valeur à Risque par simulations historiques.

Le principe sous-jacent à cette méthode est d'utiliser la distribution historique des rendements du portefeuille pour estimer la VaR du portefeuille. La VaR correspond alors au quantile de la distribution des rendements relié au niveau de confiance choisi

( par exemple 95 % ). Selon Boudoukh et al. (1998), cette approche estime directement le quantile en utilisant les quantiles de la distribution empirique de l'historique des rendements du portefeuille pour obtenir la VaR. Pour obtenir la VaR d'un actif à un niveau de confiance de 95 %, on doit prendre la valeur qui correspond au cinquième centile de la distribution des rendements pour un horizon donné de temps.

Pour calculer la VaR par la méthode de simulations historiques, nous devons utiliser les rendements passés du portefeuille<sup>1</sup>. Ainsi, il faut construire la distribution cumulative des rendements du portefeuille comme présenté précédemment. Ensuite, il nous est possible d'obtenir la VaR à partir de cette distribution de rendements hypothétiques.

#### **2.4.1 - Avantages du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques**

Le premier avantage du calcul de la VaR par simulations historiques est que cette méthode est simple et facilement applicable à un portefeuille. Pour le responsable de la gestion du risque, les données nécessaires à la construction de la simulation historique sont accessibles sans grand problème puisqu'elles sont directement observables à faible coût (par exemple, rendement journalier d'un titre).

L'utilisation de la VaR historique n'impose pas de paramètres à estimer. Il n'y a donc pas de risque d'erreur quant à l'estimation de ceux-ci. De plus, la simulation historique ne rend pas nécessaire l'estimation d'une matrice variance-covariance pour le portefeuille.

Le principal avantage de la simulation historique comparativement au calcul de la VaR, pour une distribution normale des rendements, est que nous ne faisons pas d'hypothèse quant à la distribution des rendements des actifs du portefeuille. Nous n'imposons pas de restriction, comme une distribution normale<sup>2</sup>, à la distribution des rendements de notre portefeuille.

#### **2.4.2 - Désavantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques**

Les données qui sont utilisées pour les rendements du portefeuille sont les rendements passés de ce portefeuille. Indirectement, il faut faire l'hypothèse que les rendements

---

<sup>1</sup> Pour une approche par actifs voir Jorion (2001).

passés de ce portefeuille sont semblables aux rendements futurs de ce même portefeuille. La SH implique que les risques futurs doivent être semblables à ceux passés. En ce sens, cette dernière hypothèse constitue une restriction quant à la distribution des rendements de notre portefeuille.

Cette méthode implique qu'il faut assumer que nous avons assez de données dans notre échantillon pour répliquer le comportement des rendements de notre portefeuille et faire le calcul de notre VaR. De plus, Jorion ( 2001 ) indique que puisqu'un seul échantillon est utilisé, il se peut que des événements rares ne soient pas assez représentés ou à l'inverse, qu'un événement qui ne se reproduira pas soit dans l'échantillon.

La distribution est composée des rendements passés du portefeuille pour une certaine période de temps. Si un choc survient, par exemple une forte baisse ou une forte hausse, il sera reflété dans le calcul de la Valeur à Risque pendant une période égale à celle utilisée dans le calcul de la VaR par SH. Selon Pritsker (2001), l'ajustement de la VaR pour la méthode de SH suite aux changements de risque est faible, donc que les changements sont lents. La méthode par SH n'estime pas avec précision la véritable VaR. Pritsker (2001) calcule la à l'aide d'un Monte Carlo de 100 000 simulations la véritable valeur de la VaR.

Le problème provient de la persistance de l'impact de ces rendements. Supposons une forte variation positive ou négative et qu'il n'y aura plus de grandes variations positives ou négatives pour une journée au cours de la prochaine année. Nous conserverons tout de même le rendement de forte ampleur pour effectuer le calcul des 252 prochaines VaR du portefeuille. Ainsi, la SH ne permet donc pas d'incorporer rapidement les changements de risque puisque toutes les données doivent avoir changé pour refléter le changement de situation.

## **2.5 - Valeur à Risque par simulations historiques filtrées ( SHF )**

Les résultats de Hendricks (1996) montrent que la volatilité change dans le temps, donc que la volatilité est conditionnelle. L'auteur montre aussi que les méthodes

---

<sup>2</sup> Nous avons vu dans la partie sur la VaR pour une distribution normale que nous imposons aux rendements la normalité ce qui est une restriction forte.

paramétriques de moyenne mobile exponentielle offrent de meilleurs résultats pour anticiper les changements de risque dans le temps. Toutefois, c'est la méthode par SH utilisant 1250 observations qui offre la couverture la plus précise pour les deux niveaux de confiance étudiés soient 95 % et 99 %.

La méthode SHF ressemble à la méthode par SH puisqu'elle utilise l'historique des rendements. Pour surmonter le problème causé par la méthode SH, on peut filtrer les données pour qu'elles reflètent l'information actuelle du risque du portefeuille (Barone-Adesi & al. (2000)).

Contrairement à la méthode SH, plutôt que d'utiliser directement le quantile provenant des rendements passés du portefeuille pour obtenir la VaR, nous allons estimer la volatilité des rendements du portefeuille. L'estimation de la VaR est basée sur la combinaison d'un modèle paramétrique de type GARCH (Engle (1982), Bollerslev (1986)) et de l'historique des rendements du portefeuille. Les rendements du portefeuille sont adaptés aux conditions de marché actuelles en les standardisant (Barone-Adesi & al. (2000)). Nous standardisons le rendement observé en  $t$  en le divisant par la volatilité estimée pour cette même journée. Nous obtiendrons alors la VaR en prenant le centile correspondant au niveau de confiance désiré de la nouvelle distribution de rendements filtrés. Il est à noter qu'à l'instar d'Hendricks (1996, p.41), nous posons la moyenne des rendements du portefeuille comme nulle.

Selon un modèle GARCH(1,1), les rendements sont générés selon le modèle suivant :

$$R_{t+1} = \hat{\sigma}_{t+1} \varepsilon_{t+1}$$

avec

$$\varepsilon_{t+1} \sim N(0,1)$$

où

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} R_t^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_t^2$$

Mais puisqu'en  $t$ ,  $R_t$  et  $\hat{\sigma}_t$  sont connus pour les périodes précédentes, nous pouvons calculer une série de chocs pour les  $m$  observations passées. Ainsi, nous calculons les rendements standardisés de la manière suivante :

$$\hat{\varepsilon}_{t+1-s} = \frac{R_{t+1-s}}{\hat{\sigma}_{t+1-s}}$$

pour  $s = \{1, 2, \dots, m\}$  avec  $m$  égal au nombre d'observations passées utilisées dans le calcul. Par exemple,  $m = 250$  jours. L'objectif de la SHF est de faire l'approximation du centile de la distribution de  $\varepsilon_t$  en prenant le centile de la distribution empirique de  $\hat{\varepsilon}_t$  pour faire l'approximation de la VaR en  $t+1$ . Ainsi, la VaR selon la méthode de SHF consiste à prendre :

$$\text{VaR}_{t+1|\alpha}^{\alpha} = \hat{\sigma}_{t+1} * \hat{\varepsilon}_{\text{SHF},t+1}$$

où

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}R_t^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_t^2$$

et

$\hat{\varepsilon}_{\text{SHF},t+1}$  est le  $\alpha^{\text{ième}}$  centile de  $\hat{\varepsilon}_t$ .

### **2.5.1 - Avantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques filtrées**

Le premier avantage est que la méthode tient compte de la volatilité estimée au temps  $t+1$  pour faire le calcul de la VaR au temps  $t+1$ . De plus, cette méthode d'évaluation de la VaR prend rapidement en considération les changements de volatilité. Nous devons utiliser l'historique des rendements passés que nous avons filtrés pour faire le calcul de la VaR par SHF.

Pritsker évalue la précision de l'estimateur de la VaR par la méthode SHF en supposant que les rendements au temps  $t$  suivent un processus de type GARCH(1,1). Il fait une simulation de type Monte-Carlo pour calculer la VaR pour 10 jours. Il obtient qu'en général, la méthode SHF donne de bons résultats pour évaluer la VaR.

Barone-Adesi et Giannopoulos (2000) ont trouvé que la méthode par SHF est plus précise que celle par SH pour le calcul de la VaR à tous les niveaux de confiance. Les auteurs montrent que la méthode de simulations historiques ne conditionne pas les prévisions de la VaR sur les particularités du marché actuel.

### **2.5.2 - Désavantage du calcul de la VaR par la méthode de simulations historiques filtrées**

Le principal inconvénient provient de l'imposition d'un modèle pour estimer la volatilité des rendements du portefeuille. Toutefois, nous posons que le modèle est bien spécifié.

## **Section 3 – Méthodologie**

La méthodologie utilisée repose principalement sur la méthodologie utilisée par Hendricks (1996) puisque notre objectif de refaire une partie de l'étude qu'il a présentée à l'aide de données différentes générées à l'aide de distributions connues et d'en vérifier l'impact. De plus, nous désirons observer de quelle manière la méthode par SHF fonctionne par comparaison aux méthodes évaluées par Hendricks (1996).

### **3.1 - Objectif et Méthodologie**

L'objectif de ce rapport de recherche consiste en la comparaison de quatre méthodes principales de calcul de la VaR, soient : par moyenne mobile, par moyenne mobile exponentielle, par simulations historiques et par simulations historiques filtrées. Nous reprendrons les différents calculs des trois premières méthodes en respectant les mêmes horizons pour le calcul des différentes VaR qu'Hendricks (1996). Les historiques sont de 50, 125, 250, 500 et 1250 jours pour la méthode EWMA, un historique de 1250 jours et des  $\lambda$  de 94, 97,5 et 99 centième pour la méthode XWMA et des historiques de 125, 250, 500 et 1250 jours pour la méthode SH. Nous allons donc obtenir douze estimations de la VaR pour chacune des journées dans l'échantillon.

Pour compléter, nous ajouterons à la comparaison des méthodes précédentes la méthode de simulations historiques filtrées (SHF) qui constituera une quatrième méthode de calcul de la VaR. Le calcul de la méthode SHF sera fait avec un historique de 1250 jours. Nous pourrons ensuite comparer les performances relatives de l'ensemble des méthodes selon les différents horizons.

### **3.2 - Données utilisées pour faire les simulations**

Hendricks (1996) utilise comme données les taux de change de 8 monnaies exprimées en dollars américains. La valeur pour chaque donnée correspond au "bid price" de 16h00, heure de New York, pour les huit monnaies suivantes : la livre sterling, le dollars canadien, le florin hollandais, le Franc français, le mark allemand, la lire italienne, le yen japonais et le franc suisse. L'historique des données couvre la période commençant le 1 janvier 1978 jusqu'au 18 janvier 1995. En tout, l'échantillon contient les données de 4255 jours d'activité sur le marché des devises pour les huit taux de change.

Contrairement à Hendricks (1996) qui utilise les prix relatifs de monnaies en dollars américains, nous avons simulé le rendement du portefeuille. Dans un premier temps, les rendements ont été simulés selon une loi  $N(0,1)$ . Dans un deuxième temps, les rendements ont été simulés de tel sorte que ces rendements suivent un GARCH(1,1). Finalement, les deux formes de rendements simulés ont été utilisées pour évaluer les VaR à l'aide des différents critères de comparaison.

### 3.3 - Méthodologie de la simulation des rendements du portefeuille

Nous avons simulé 1000 séries représentant les rendements de 1000 portefeuilles différents. Les séries simulées sont divisées en deux sous-groupes. Le premier de ceux-ci contient les 1250 premières observations de chacune des 1000 séries et sert de base pour le calcul des différentes VaR. Le deuxième groupe contient trente observations. Les différents critères des VaR seront calculés sur ce deuxième sous-groupe.

#### 3.3.1 - Simulation des rendements de portefeuille - $N(0,1)$

Nous avons fait la simulation des rendements de type  $N(0,1)$  pour chacun des 1000 portefeuilles différents pour 1280 journées en utilisant le modèle suivant :

$$R_{i,t} = \varepsilon_{i,t}$$

avec

$$\varepsilon_{i,t} \sim \text{iid } N(0,1).$$

#### 3.3.2 - Simulation des rendements de portefeuille - GARCH(1,1)

Nous avons fait la simulation des rendements de type GARCH(1,1) pour chacun des 1000 portefeuilles différents pour 1280 journées pour des rendements GARCH(1,1). La première observation de la série a été établie arbitrairement pour le rendement ( $R_0$ ) et la volatilité ( $h_0$ ) observés à la période  $t_0$ . Cependant, il est à noter que le rendement et la volatilité en  $t_0$  n'apparaissent pas dans la série simulée que nous avons utilisée pour faire les comparaisons. Nous avons gardé les 1280 observations suivantes.

Les valeurs correspondant à la période  $t_0$  des séries ont été établies et calculées de la manière suivante :

$$h_0 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

$$R_0 = \sqrt{h_0} * Z_0$$

où

$$\alpha = 0.1$$

$$\beta = 0.85$$

$$\omega = V^*(1 - \alpha - \beta)$$

$$V = \frac{(0.2)^2}{252} \text{ la variance de long terme}$$

$$\varepsilon_0 \sim \text{iid } N(0,1)$$

## Section 4 - Calcul de la Valeur à Risque

La méthodologie décrite et utilisée pour faire le calcul de la VaR par les méthodes EWMA, XWMA et SH est identique à celle proposée dans Hendricks (1996). Nous rapportons ici la même méthodologie puisque, pour ces trois méthodes de calcul de la VaR, nous voulons reproduire des résultats similaires aux siens.

### 4.1 - Approche de la moyenne mobile à pondération égale (EWMA)

Comme Hendricks (1996) nous avons fait le calcul de la VaR par la méthode EWMA en utilisant les données historiques de cinq horizons différents. Ces cinq horizons de données sont : 50, 125, 250, 500 et 1250 jours. Ces périodes sont équivalentes à dix semaines, six mois, un an, deux ans et cinq ans d'observations quotidiennes. Pour faire le calcul de la VaR par la méthode EWMA, il s'agit de calculer l'écart-type des rendements du portefeuille avec différents historiques de données.

Par exemple, pour calculer l'écart-type du portefeuille en utilisant l'approche de la méthode EWMA :

$$[ 1 ] \quad \hat{\sigma}_{t+1} = \sqrt{\frac{1}{(k-1)} \sum_{s=t-k+1}^t (R_s - \mu)^2}$$

où  $\hat{\sigma}_{t+1}$  représente l'estimé de l'écart-type du portefeuille au début de la journée  $t$  évalué en  $t-1$ . Dans ce cas,  $m$  représente le nombre de journées incluses dans le calcul de  $\hat{\sigma}_{t+1}$ .  $R_s$  représente le changement dans la valeur du portefeuille pour la journée  $s$  et  $\mu$  représente la moyenne des rendements du portefeuille. Il est toutefois à noter que, comme Hendricks (1996, p.41), nous posons la moyenne égale à zéro.

Par exemple, pour faire le calcul de  $\hat{\sigma}_{t+1}$  en utilisant l'équation [ 1 ], nous avons utilisé les 1250 observations précédentes à la période  $t+1$  ( $k = 1250$  pour cet exemple<sup>3</sup>). Nous avons obtenu une série de trente valeurs prédites de l'écart-type pour la journée  $t+1$ .

<sup>3</sup> La même procédure s'applique au calcul de la valeur prédite des écarts-types pour la journée  $t+1$  en  $t$  pour les différents horizons ( 50, 125, 250, 500 jours )

Finalement, nous avons multiplié chacun des  $\hat{\sigma}_{t+1}$  par  $\Phi^{-1}(\alpha)$  selon le niveau de confiance (1 % ou 5 %) choisi tel que décrit en page 3. Donc, la  $\text{VaR}_{i,t+1}^{\alpha} = \hat{\sigma}_{t+1} * \Phi^{-1}(\alpha)$  où  $i$  est le portefeuille.

#### 4.2 - Approche de la moyenne mobile à pondération exponentielle (XWMA)

Ici aussi, nous avons repris la méthodologie proposée par Hendricks (1996). Nous avons fait le calcul de la VaR par la méthode XWMA en utilisant les données historiques des 1250 journées précédentes. Le calcul de la VaR par la méthode XWMA consiste à mesurer l'écart-type des rendements du portefeuille des 1250 derniers jours précédant  $t$  en accordant un poids différent à chacune des observations.

À cette étape, nous avons calculé trois VaR qui diffèrent selon le poids  $\lambda$  que nous avons utilisé dans le calcul de  $\hat{\sigma}_{t+1}$ . Nous avons utilisé pour  $\lambda$  les valeurs suivantes :  $\lambda = 0.94$ ,  $\lambda = 0.975$  et  $\lambda = 0.99$ .

La formule que nous avons utilisée pour faire le calcul de l'écart-type, mesurée par la méthode XWMA, est la suivante :

$$[2] \quad \hat{\sigma}_{t+1} = \sqrt{(1-\lambda) \sum_{s=t-k}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (R_s - \mu)^2}$$

Où  $k = 1250$  jours

Comme pour le cas précédent, nous avons reconduit ce calcul de  $t = 1251$  jusqu'à 1280. Il est à noter qu'à nouveau et à l'instar d'Hendricks (1996, p.41), nous posons la moyenne des rendements du portefeuille comme nulle.

Finalement, nous avons fait le calcul de la VaR pour la méthode XWMA de manière semblable à celle décrite pour la méthode EWMA. Nous avons utilisé, selon le niveau de confiance la valeur de  $\Phi^{-1}(\alpha)$  correspondante.

$\text{VaR}_{i,t+1}^{\alpha} = \hat{\sigma}_{t+1} * \Phi^{-1}(\alpha)$  où  $i$  est le portefeuille

### 4.3 - Approche par simulations historiques (SH)

Pour faire le calcul de la VaR par SH nous avons utilisé 4 périodes de temps différentes. En effet, nous avons utilisé des historiques de 125, 250, 500 et 1250 journées pour faire le calcul de la VaR par la méthode SH.

Nous avons fait le calcul de la VaR tel que décrit à la section 2.2 pour les journées  $t = 1251$  jusqu'à 1280. Nous avons obtenu quatre VaR selon l'historique du nombre de jours utilisé soit pour  $m = [125, 250, 500 \text{ et } 1250]$  le nombre de journées utilisées pour faire le calcul de la VaR par SH. De plus, nous avons calculé la VaR pour les deux niveaux de confiance, 1 et 5 %, en prenant le centile correspondant à  $\alpha$  de la distribution des rendements en dollars pour chacun des portefeuilles.

### 4.4 - Approche par simulations historiques filtrées

Pour faire le calcul de la VaR par SHF nous avons utilisé 1250 journées pour estimer un modèle GARCH(1,1) pour la volatilité conditionnelle. Les étapes suivantes sont celles utilisées pour faire le calcul de la VaR selon la méthode SHF pour un portefeuille. Nous avons fait chacune de ces étapes pour les journées  $t = \{1251, 1252, \dots, T\}$  où  $T = 1280$  dans notre situation. Nous avons estimé un GARCH(1,1) pour chacune des journées pour lesquelles nous voulions obtenir la VaR. Nous avons obtenu une série correspondant à la volatilité conditionnelle pour les 1250 journées précédant l'estimation du modèle.

Nous avons calculé une série de 1250 rendements filtrés tel que décrit précédemment :

$$\hat{\varepsilon}_s = \frac{R_s}{\sqrt{\hat{\sigma}_s^2}} \text{ pour } s = \{t, t-1, t-2, \dots, t-(1250-1)\}$$

Nous avons alors estimé la VaR par SHF pour la journée  $t + 1$  de la manière suivante :

$$\hat{VaR}_{t+1} = \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2} * \text{centile} \{ \hat{\varepsilon}_s^{\text{FHS}}, \alpha \}$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} * R_t^2 + \hat{\beta} * \hat{\sigma}_t^2$$

et  $\alpha$  correspond selon le cas au cinquième centile ou au premier centile de la distribution. Finalement, nous avons répété ces étapes pour l'ensemble des portefeuilles.

## 4.5 - Méthodologie pour le calcul des différents critères de comparaison

### 4.5.1 - Biais relatif à la moyenne (Critère 1)

Le biais relatif à la moyenne est le premier critère de comparaison. Hendricks (1996) propose ce critère pour vérifier si les différentes approches de calcul de la VaR sont en moyenne de la même taille pour un même portefeuille et pour une même journée. La procédure qu'il utilise est décrite en quatre étapes:

- Premièrement, on fait le calcul des VaR pour chacune des journées dans l'échantillon pour chacun des portefeuilles que nous nommerons  $VaR_{i,t}$  où  $i$  est la VaR obtenue par la combinaison d'une méthode de calcul de la VaR (EWMA, XWMA, SH ou SHF) et d'un historique de données (ou d'un poids si la méthode est XWMA) comme expliqué à la section 3.1.
- Deuxièmement, nous devons prendre la moyenne des treize mesures de VaR pour obtenir la mesure moyenne de la VaR pour une journée pour un portefeuille donné.

$$\overline{VaR}_t = \frac{\sum_{i=1}^k VaR_{i,t}}{k}$$

où  $k$  est le nombre de VaR différentes que nous avons calculé,  $k = 13$ .

- Troisièmement, nous devons calculer la différence, mesurée en pourcentage, de chacune des treize VaR avec la moyenne journalière calculée à la deuxième étape pour chacune des journées de l'échantillon pour  $t = \{ 1251, \dots, T \}$ .

$$\left( \frac{VaR_{k,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \right)$$

- Quatrièmement, nous devons prendre la moyenne des biais relatifs à la moyenne journalière pour une mesure de VaR, en particulier, pour l'ensemble des journées de l'échantillon.

$$\text{Critère 1} = \frac{\sum_{t=1251}^T \left( \frac{VaR_{i,t} - \overline{VaR}_t}{\overline{VaR}_t} \right)}{N}$$

avec  $N = 30$  soit  $(T - 1250)$

Finalement, nous avons repris les calculs décrits lors des quatre étapes ci-haut pour chacun des 1000 portefeuilles individuellement.

#### 4.5.2 - Racine du carré du biais relatif à la moyenne (Critère 2)

Le deuxième critère mesure de l'ampleur de la variation de la mesure de risque VaR autour de la moyenne des VaR pour une date donnée. Pour ce critère, les variations sont les déviations en pourcentage des différentes VaR avec la moyenne des VaR pour une date donnée.

- On calcule le critère en prenant la racine carrée de la moyenne du carré des biais relatifs à la moyenne pour chacune des VaR pour toutes les dates de l'échantillon

$$\text{Critère 2} = \sqrt{\sum_{t=1251}^T \left( \frac{\text{VaR}_{i,t} - \overline{\text{VaR}_t}}{\text{VaR}_t} \right)^2}$$

On répète ensuite les étapes pour chacun des 1000 portefeuilles.

#### 4.5.3 - Volatilité annualisée exprimée en pourcentage (Critère 3)

Le troisième critère mesure le risque d'un portefeuille donné à fluctuer dans le temps. On peut calculer ce troisième critère en deux étapes :

- Premièrement, il faut prendre l'écart-type de la variation journalière de la  $\text{VaR}_i$  pour l'ensemble de la période. Dans notre cas, nous prenons pour  $t = 1251$  jusqu'à  $T$ .

$$\text{Variations}_{t+1} = \frac{\text{VaR}_{i,t+1} - \text{VaR}_{i,t}}{\text{VaR}_{i,t}}$$

- Deuxièmement, on multiplie l'écart-type mesuré à l'étape précédente par  $\sqrt{250}$ .

On répète ensuite les étapes pour chacun des 1000 portefeuilles et pour l'ensemble des méthodes de calcul de la VaR dont nous faisons la comparaison.

#### 4.5.4 - Fraction des observations couvertes (Critère 4)

Ce critère sert à vérifier l'efficacité de la VaR. En effet, le but de la valeur à risque est de nous dire, selon un niveau de confiance déterminé, quelle devrait être la perte maximale du portefeuille pour un horizon d'une journée. Nous avons calculé la fraction des observations couvertes par la VaR en pourcentage des résultats où la perte de valeur du portefeuille est moindre que la mesure de la VaR.

Pour le quatrième critère, nous avons vérifié pour chacun des portefeuilles si :

- $R_{i,t} > VaR_{i,t}$

Dans ce cas, nous avons pris la fraction où la condition précédente était vérifiée. Finalement, nous avons répété l'ensemble des étapes pour chacune des méthodes de calcul de la VaR.

#### 4.5.5 - Multiple requis pour obtenir une couverture parfaite (Critère 5)

Le cinquième critère met l'accent sur l'ajustement de la mesure de risque qui serait nécessaire pour obtenir une couverture parfaite au niveau  $\alpha$ . Le calcul de ce multiple est fait de manière ex-post. Pour faire le calcul de ce critère, nous avons utilisé les résultats du critère précédent et nous avons divisé par le niveau désiré de couverture par le critère 4. Nous avons repris les étapes pour l'ensemble des méthodes de calcul de la VaR.

#### 4.5.6 - Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 6)

Ce sixième critère mesure l'ampleur des rendements qui sont inférieurs à la VaR. Donc, c'est une mesure des rendements en dollars qui sont non couverts par la VaR. C'est une mesure de l'ampleur des éléments qui se retrouvent dans la queue de la distribution. Nous avons fait le calcul de ce critère d'évaluation de la VaR pour une méthode d'évaluation de la VaR de la manière suivante :

Premièrement, nous avons vérifié si  $R_{i,t} < VaR_{i,t}$ . Dans la situation où l'affirmation précédente est respectée, nous avons calculé le ratio suivant :

$$V_{i,k} = \frac{R_{i,t}}{VaR_{i,t}}$$

Finalement, nous avons calculé la moyenne de ces ratios pour le portefeuille. Nous avons ensuite répété les trois étapes précédentes pour l'ensemble des 1000 portefeuilles. Nous avons répété pour chacune des méthodes de calcul de la VaR.

#### **4.5.7 - Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 7)**

Pour obtenir le septième critère, nous pouvons reprendre la procédure décrite pour le critère 6. Toutefois, nous ne devons pas prendre la moyenne des multiples pour un portefeuille, mais plutôt le plus grand multiple pour chacune des méthodes. Ainsi, pour chacun des portefeuilles, nous avons conservé le plus grand multiple. Nous avons ensuite répété pour l'ensemble des 1000 portefeuilles. Finalement, nous avons refait pour chacune des méthodes de calcul de la VaR.

## Section 5 – Résultats

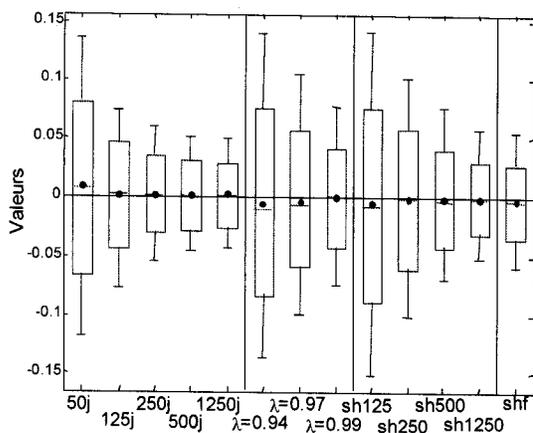
Les graphiques suivants présentent de bas en haut le cinquième, le vingt-cinquième, le cinquantième, le soixante-quinzième et le quatre-vingt-quinzième centile de la distribution des résultats pour l'ensemble des portefeuilles. Le point représente quant à lui la moyenne des résultats pour l'ensemble des portefeuilles.

### 5.1 - Biais relatif à la moyenne ( Critère 1 )

Ce critère a pour objectif de mesurer les différences relatives entre les estimés de la VaR pour chacune des méthodes d'évaluation de la VaR pour une même journée. Pour ce critère, un résultat de 0,1 pour une méthode en particulier implique que la VaR est 10 % plus élevée que la moyenne des treize approches.

Pour l'ensemble de nos portefeuilles dont les rendements sont iid  $N(0,1)$ , nous avons obtenu qu'en moyenne le biais de chacune des méthodes était nul. En effet, pour l'ensemble des méthodes, nous avons obtenu un résultat moyen inférieur à 0,01%. Dans cette situation, nous obtenons en moyenne le même estimé de la VaR. Pour les portefeuilles dont les rendements sont de type GARCH(1,1), nous avons obtenus qu'ils sont en moyenne très près de zéro. Toutefois, la méthode XWMA produit des estimés de la VaR qui sont en moyenne supérieurs à la moyenne des treize méthodes.

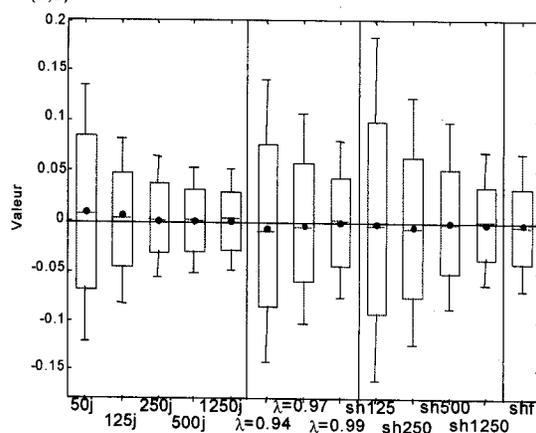
Graphique 1a  
Biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 95 %  
 $N(0,1)$



Source : calcul de l'auteur

Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 1b  
Biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 99 %  
 $N(0,1)$



Source : calcul de l'auteur

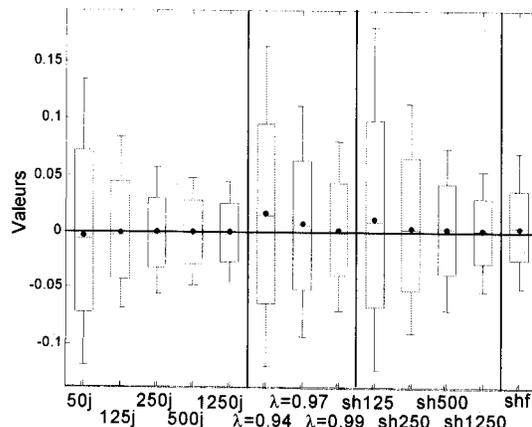
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Les méthodes de calcul de la VaR utilisant un historique de données plus court pour le calcul de la VaR ont tendance à avoir les déviations les plus prononcées par rapport à la moyenne des treize mesures de la VaR. Pour ce premier critère, nous avons obtenu les plus fortes déviations pour la méthode de simulations historiques de 125 jours. Le graphique 1d nous montre que pour cette méthode et un niveau de confiance de 95 %, nous avons des variations dont le cinquième centile et le 95<sup>ème</sup> centile sont respectivement de  $-0,1523$  et  $0,1935$ .

Lorsque nous comparons les résultats obtenus pour la méthode SHF avec l'ensemble des autres méthodes, nous obtenons que ceux-ci ne sont pas très différents de ceux obtenus pour la méthode de simulations historiques utilisant un historique de 1250 jours. En fait et pour ce critère, les deux méthodes semblent produire des résultats relativement semblables. Toutefois, pour les rendements de type GARCH(1,1), nous obtenons les 75<sup>ème</sup> et 95<sup>ème</sup> centiles de la méthode SHF supérieurs à ceux pour la méthode SH de 1250 jours. Ainsi, la méthode SHF aurait produit des estimés de la VaR dont les déviations relatives aux treize autres méthodes sont supérieures à ceux de la méthode SH de 1250 jours.

Contrairement à Hendricks (1996), nous avons obtenu que l'effet temps est relativement important. En effet, les méthodes utilisant un historique plus court des rendements pour

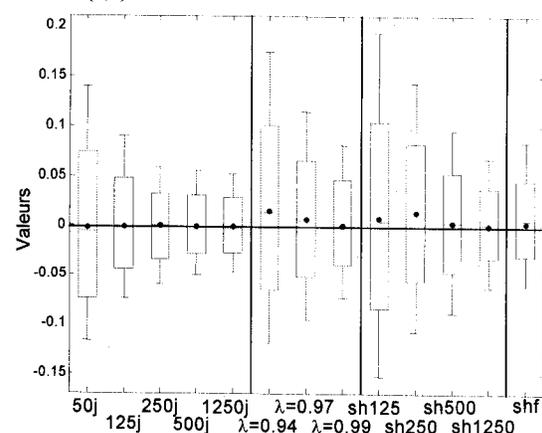
Graphique 1c  
Biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur

Notes : j=jours ; λ=moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 1d  
Biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur

Notes : j=jours ; λ=moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

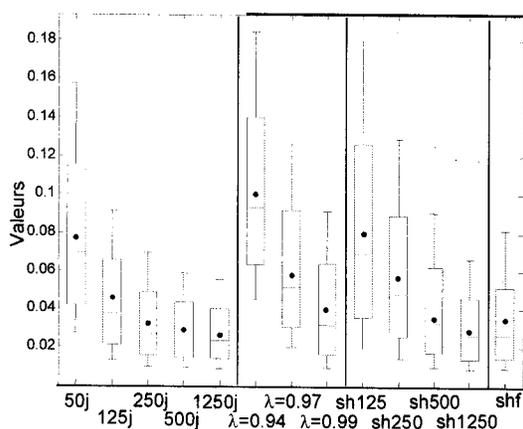
effectuer le calcul de la VaR produisent des résultats qui dévient en moyenne beaucoup plus de la moyenne de l'ensemble des méthodes que les méthodes utilisant un historique plus long. En effet, nos résultats montrent que l'utilisation d'un plus grand historique des rendements produit des estimés plus près de la moyenne de l'ensemble des méthodes. Nous retrouvons cette situation en raison du fait que nous avons simulé les rendements de notre portefeuille à partir d'aléas  $N(0,1)$ .

## 5.2 - Racine du carré du biais relatif à la moyenne ( Critère 2 )

Ce critère mesure la variation autour de la moyenne des VaR pour une même journée. On remarque, pour l'ensemble des méthodes, que la variation autour de la moyenne des VaR diminue lorsque l'horizon utilisé pour faire le calcul de la VaR augmente. Ce résultat suggère qu'un plus grand nombre d'observations utilisées pour faire le calcul de la VaR tend à faire une approximation plus précise de la moyenne des treize VaR. Cette situation s'applique pour les deux formes de simulations des rendements.

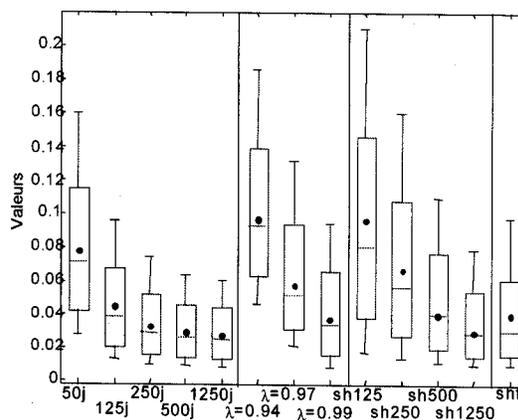
Les VaR avec un niveau de confiance de 99% (1<sup>er</sup> centile) ont tendance à être plus dispersées autour de la VaR moyenne pour une journée. Nous obtenons ce résultat pour l'ensemble des treize méthodes de calcul de la VaR que nous avons étudiées.

Graphique 2a  
Racine du carré du biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 95 %  
 $N(0,1)$



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 2b  
Racine du carré du biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 99 %  
 $N(0,1)$

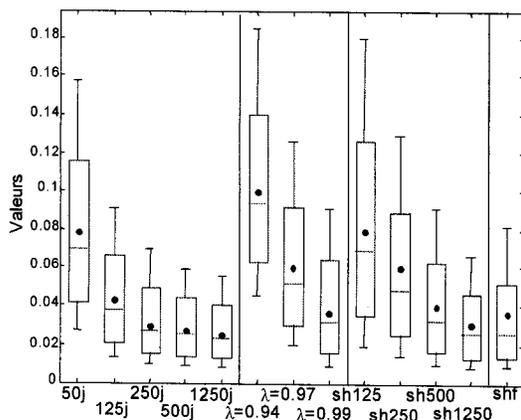


Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Les résultats obtenus pour la méthode EWMA semblent montrer que c'est cette méthode qui offre le moins de dispersion autour de la moyenne des treize VaR pour une journée donnée. De plus, on remarque que la méthode est moins dispersée autour de la moyenne des VaR lorsque l'horizon de données utilisées est grand (500 jours et 1250 Jours) pour faire le calcul de la VaR par cette méthode. Ce résultat semble être logique en raison de la méthode de simulation des rendements utilisés pour faire le calcul des différentes VaR pour chaque période. En effet, lorsqu'on simule les rendements à partir d'une iid  $N(0,1)$ , on respecte, par définition, l'ensemble des hypothèses sous-jacentes au calcul de la VaR par la méthode EWMA.

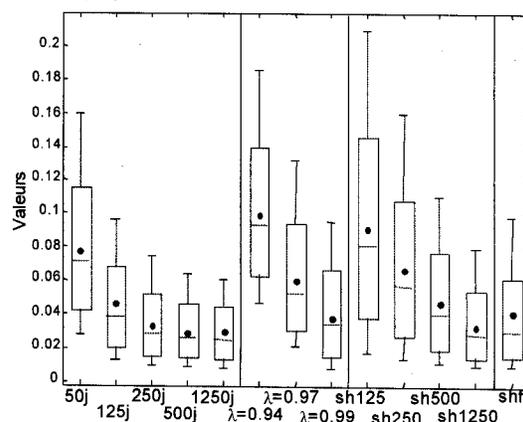
Les résultats obtenus pour la méthode SHF montrent que cette dernière varie plus autour de la moyenne des treize VaR que la méthode SH de 1250 jours et ce malgré des résultats moyens semblables (voir critère 1).

Graphique 2c  
Racine du carré du biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 2d  
Racine du carré du biais relatif à la moyenne  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

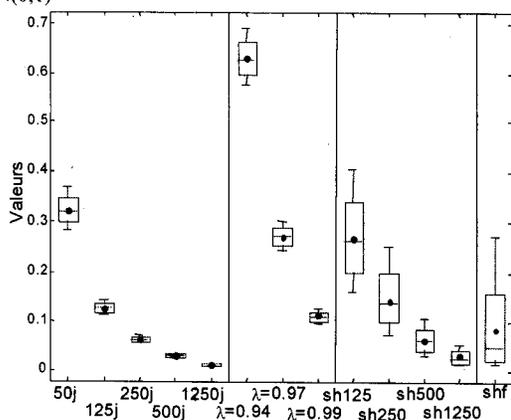
### 5.3 - Volatilité annualisée exprimée en pourcentage (Critère 3)

Ce troisième critère présenté par Hendricks (1996) mesure la tendance de la VaR d'un portefeuille à fluctuer dans le temps. Ainsi, la volatilité de la mesure de la VaR s'accroît selon l'utilisation d'un historique de données plus court ou lorsque observations récentes sont, de manière relative, plus fortement pondérée. Ce dernier point est observable pour les deux niveaux de confiance (95 et 99%) pour lesquels nous avons fait les calculs.

Nous observons aussi, à l'instar d'Hendricks (1996), que pour un même horizon de temps, la mesure de la VaR par SH est plus volatile que celle par EWMA. Notons que pour les données générées à partir d'une iid  $N(0,1)$ , la volatilité annualisée de la mesure de la VaR par EWMA pour un horizon de temps de 1250 jours est sensiblement la même pour tous les portefeuilles.

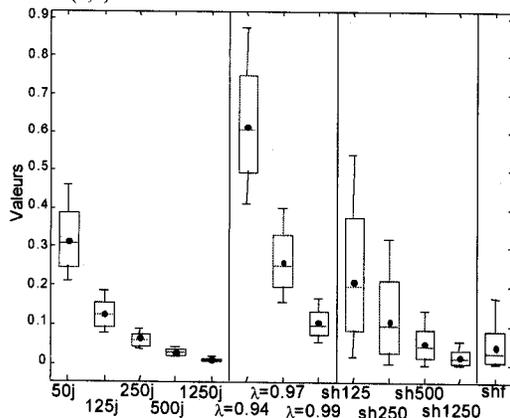
Nous remarquons que pour les rendements générés suivant un GARCH(1,1), les

Graphique 3a  
Volatilité annualisée exprimée en pourcentage  
Niveau de confiance de 95 %  
N(0,1)



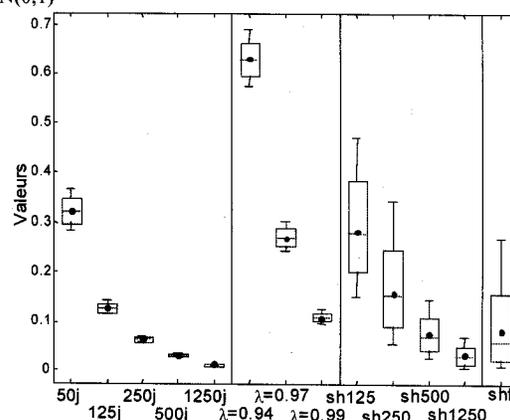
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 3c  
Volatilité annualisée exprimée en pourcentage  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



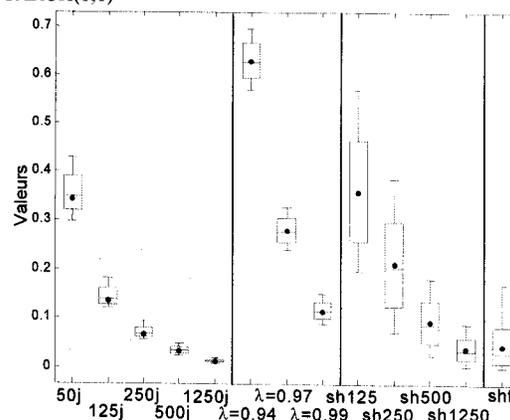
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 3b  
Volatilité annualisée exprimée en pourcentage  
Niveau de confiance de 99 %  
N(0,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 3d  
Volatilité annualisée exprimée en pourcentage  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

résultats sont semblables à ceux obtenus pour la iid  $N(0,1)$  (voir graphiques 3a, 3b, 3c et

3d). Toutefois, les résultats que nous avons obtenus sont moins centrés sur la moyenne de chacune des méthodes pour le cas GARCH que pour le cas iid  $N(0,1)$ .

De plus, les résultats obtenus pour la méthode SHF montre qu'il y a plus de variabilité entre les estimés de la VaR entre les périodes. Cette différence est relativement marquée en comparaison avec les autres méthodes utilisant le même horizon de temps pour faire le calcul (Voir graphiques 3). Ce dernier résultat suggère que la méthode s'ajuste plus rapidement aux variations de risques dans la série de rendements pour chacun des portefeuilles.

#### **5.4 - Fraction des observations couvertes (Critère 4)**

Ce critère est en fait un moyen d'évaluer la pertinence et la raison d'être de la VaR. En fait, le nombre de fois où on a observé un rendement inférieur à la VaR pour une méthode donnée et l'ensemble des portefeuilles. Si nous avons une couverture parfaite, le nombre de fois que l'on observera un rendement inférieur à la VaR sera égal " $1 - \alpha$ " (comme définit à la section 2.2). Par exemple dans le cas d'un niveau de confiance de 95%,  $1 - \alpha = 0,05$ ; ce qui correspond au cinquième centile de la distribution des rendements.

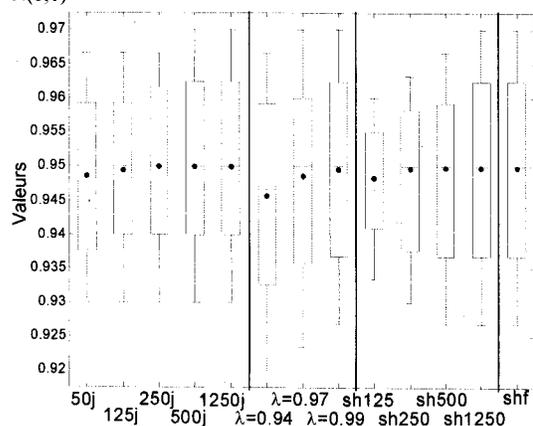
Pour les rendements iid  $N(0,1)$ , pour la majorité des méthodes, la couverture moyenne des observations correspond au niveau de confiance (95% et 99%). En fait, pour l'ensemble des portefeuilles, la couverture offerte par l'ensemble des méthodes est pratiquement parfaite. Pour le niveau de confiance égal à 99%, nous n'obtenons pas de couvertures moyennes parfaites pour une méthode en particulier. Toutefois, les couvertures moyennes sont très près de 99 %. L'ensemble des couvertures moyennes se situe entre 98,68% et 98,98%. Ce dernier résultats provient du nombre restreint d'observations composant notre échantillon.

Dans le cas des rendements de type GARCH, nous obtenons des résultats différents du cas iid  $N(0,1)$ . Pour un niveau de confiance de 95%, seules les méthodes EWMA de 500 jours, EWMA de 1250j, SH de 1250 jours et la méthode SHF ont une couverture des observations qui correspond en moyenne à 95% (voir graphique 4c). De plus, comme Hendricks (1996) nos résultats montrent que les méthodes utilisant moins de journées

dans le calcul de la VaR ont tendance à offrir des couvertures moyennes inférieures au niveau de confiance. De plus, ce sont les méthodes XWMA qui semblent offrir les résultats les plus décevants. Pour cause, la différence entre le 95<sup>ème</sup> et le 5<sup>ème</sup> centile de la distribution des résultats est plus élevée pour ces méthodes par rapport aux autres méthodes.

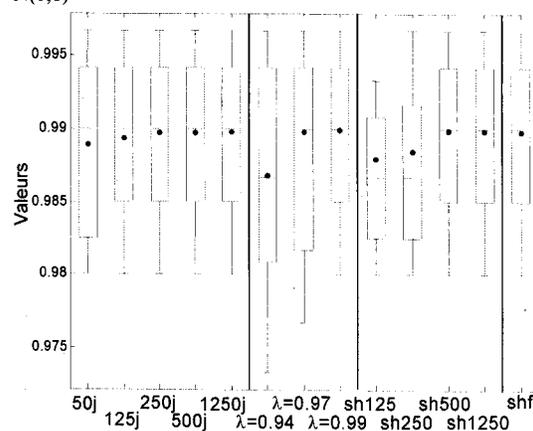
Notons que pour la méthode SHF nous avons observé une couverture moyenne parfaite pour l'ensemble des portefeuilles pour les deux niveaux de confiance et pour les deux

Graphique 4a  
Fraction des observations couvertes  
Niveau de confiance de 95 %  
N(0,1)



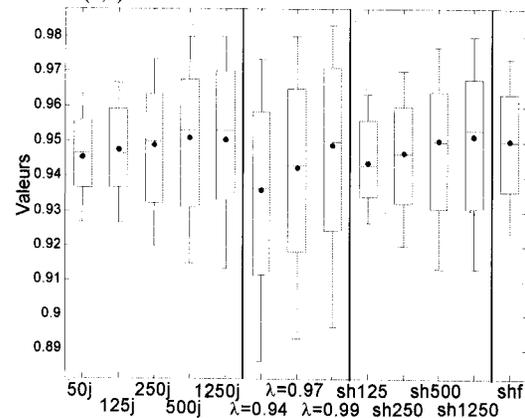
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 4b  
Fraction des observations couvertes  
Niveau de confiance de 99 %  
N(0,1)



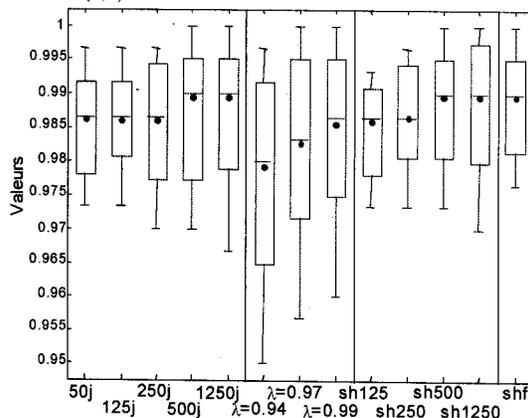
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 4c  
Fraction des observations couvertes  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 4d  
Fraction des observations couvertes  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

cas générateurs de données. La méthode SHF est la seule méthode pour laquelle nous avons obtenu un tel résultat. Hendricks (1996) obtenait que la méthode performant le mieux était la SH de 1250 jours. Cependant, nous obtenons pour le cas GARCH de meilleurs résultats pour la SHF comparativement à la SH de 1250 jours.

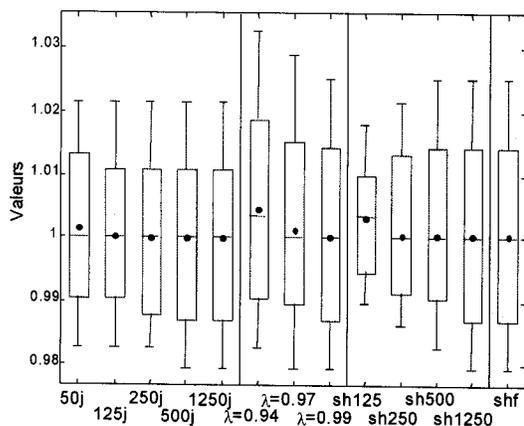
### 5.5 - Multiple requis pour obtenir une couverture parfaite (Critère 5)

Ce critère met l'accent sur la taille des ajustements nécessaires pour obtenir une couverture parfaite selon un niveau de confiance pour un portefeuille et une méthode de calcul de la VaR. Dans une situation où la couverture des observations est parfaite, nous obtenons un multiple d'ajustement égal à 1.

En moyenne, la méthode qui nécessite le plus grand multiple d'ajustement pour obtenir une couverture parfaite est la méthode de calcul XWMA, et ce, pour les deux niveaux de confiance. Ce résultat est différent de celui d'Hendricks (1996) puisque celui-ci obtenait ses pires résultats avec la méthode SH de 125 jours.

Hendricks (1996) obtenait que la VaR, pour un niveau de confiance de 99 %, était sous-estimée pour l'ensemble des méthodes. Ce qui contribuait à prouver que les rendements des portefeuilles qu'il utilisait n'étaient pas distribués selon une loi normale. Rappelons

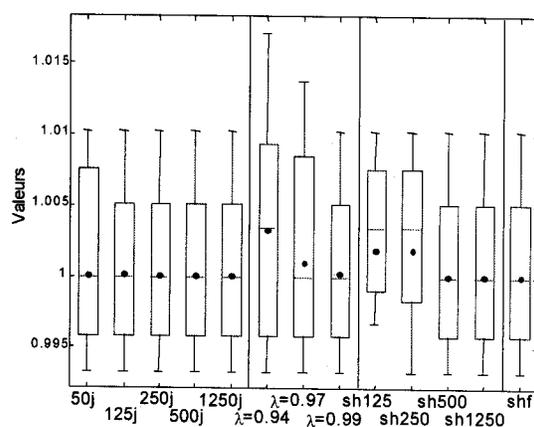
Graphique 5a  
Multiple requis pour obtenir une  
couverture parfaite  
Niveau de confiance de 95 %  
N(0,1)



Source : calcul de l'auteur

Notes : j=jours ; λ=moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 5b  
Multiple requis pour obtenir une  
couverture parfaite  
Niveau de confiance de 99 %  
N(0,1)



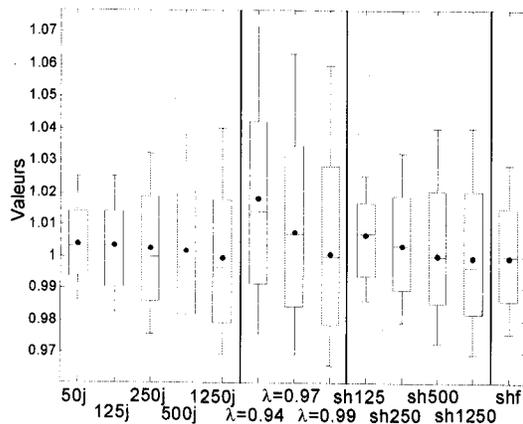
Source : calcul de l'auteur

Notes : j=jours ; λ=moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

qu'Hendricks (1996) utilise des rendements de portefeuille de devises alors que nous avons simulé nos données. Ainsi, comme nous avons généré des rendements normaux (iid  $N(0,1)$ ), nous avons observé que dans le cas où les rendements sont effectivement distribués selon une loi normale, nous obtenons de très bons résultats pour l'ensemble des méthodes, ce qui est logique. En effet, le facteur d'ajustement est de  $\pm 1,01$  pour l'ensemble des méthodes et la majorité des portefeuilles.

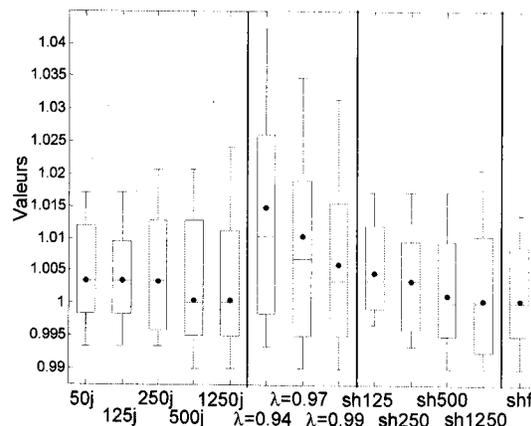
Pour les rendements GARCH(1,1), la méthode de calcul de la VaR par SHF nécessite des ajustements inférieurs à ceux de la SH à 1250 jours pour obtenir une couverture parfaite. Ce résultat est particulièrement intéressant puisque Hendricks (1996) obtenait ses meilleurs résultats pour la méthode SH à 1250 jours.

Graphique 5c  
Multiple requis pour obtenir une  
couverture parfaite  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 5d  
Multiple requis pour obtenir une  
couverture parfaite  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

## 5.6 - Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 6)

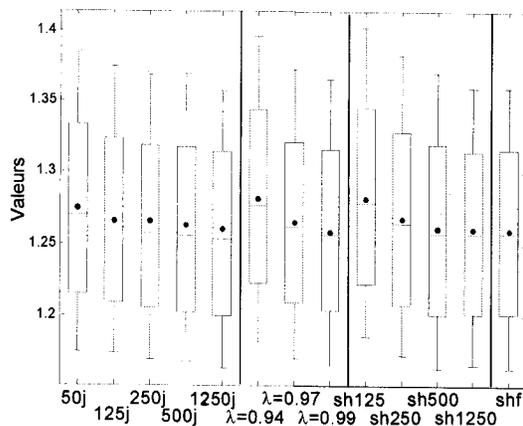
Ce sixième critère fait référence à l'ampleur des observations qui sont non couvertes par la VaR. Par exemple, ce sont les données qui font partie des cinq premiers centiles de la distribution dans le cas d'une VaR avec un niveau de confiance de 95%. Une des faiblesses de la VaR est de ne pas prendre en considération l'ampleur des rendements inférieurs à la VaR puisque ces rendements se retrouvent dans la queue de la distribution.

Notre première observation est que l'ampleur moyenne des rendements inférieurs à la  $VaR_{i,t}^{\alpha}$  est inférieure à celle observée par Hendricks (1996). La moyenne pour l'ensemble des méthodes des multiples moyens de l'ampleur des observations qui violent la VaR se situe entre 1,3 et 1,5 pour Hendricks (1996). Quant à nos résultats, ce multiple est toujours inférieur à 1,3 à l'exception des rendements de type GARCH pour un niveau de confiance de 95% (voir graphiques 6). Cette différence provient de la manière dont nous avons généré les données de notre portefeuille. Notons que la différence entre les résultats de Hendricks (1996) et les nôtres est particulièrement marquée dans le cas iid  $N(0,1)$ . Notons à nouveau qu'Hendricks (1996) utilisait des rendements non simulés d'un portefeuille de devises.

Dans le cas iid  $N(0,1)$ , le multiple maximum est de 1,4 pour la SH de 125 jours. En général, le multiple minimal est supérieur à 1,15 et l'ampleur moyenne des déviations pour chacune des méthodes d'évaluation de la VaR se situe entre 1,25 et 1,3. Pour les rendements GARCH le multiple moyen varie autour de 1,3.

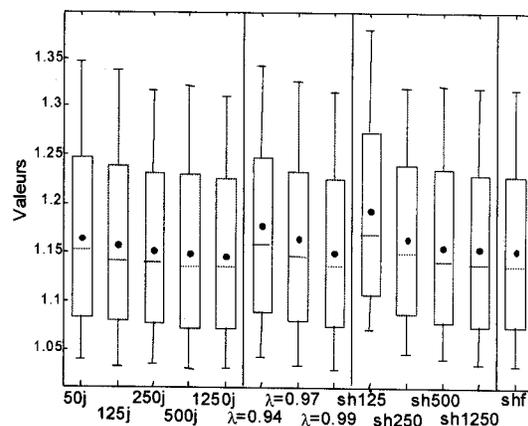
Contrairement au cas iid  $N(0,1)$  la méthode XWMA avec  $\lambda = 0,94$  a en général la plus grande ampleur des observations comparativement aux autres méthodes. De plus, on remarque que c'est la méthode SHF pour lequel l'ampleur des rendements inférieurs à la VaR mesurée par cette méthode est en moyenne la plus faible.

Graphique 6a  
Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR  
Niveau de confiance de 95 %  
N(0,1)



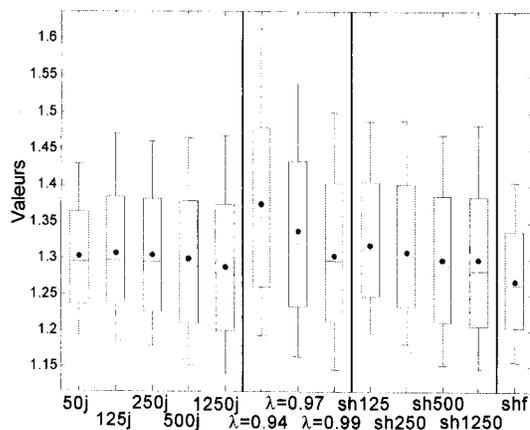
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 6b  
Multiple moyen de l'ampleur des observations qui violent la VaR  
Niveau de confiance de 99 %  
N(0,1)



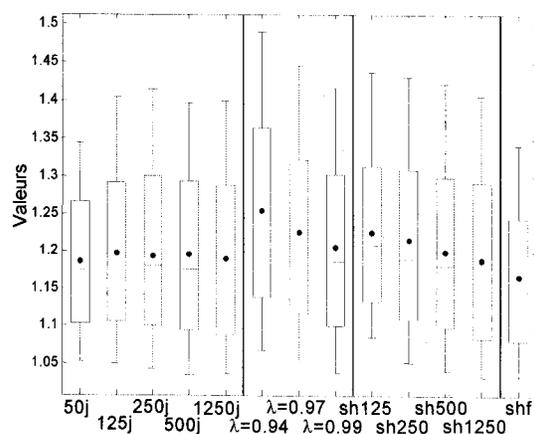
Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 6c  
Multiple moyen de l'ampleur des  
observations qui violent la VaR  
Niveau de confiance de 95 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération  
exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations  
historiques filtrées

Graphique 6d  
Multiple moyen de l'ampleur des  
observations qui violent la VaR  
Niveau de confiance de 99 %  
GARCH(1,1)



Source : calcul de l'auteur  
Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération  
exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations  
historiques filtrées

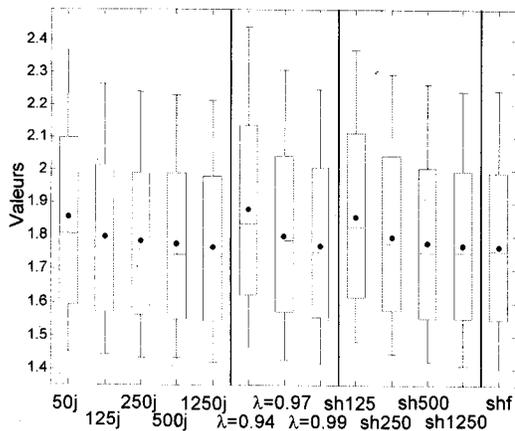
### 5.7 - Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR (Critère 7)

Ce septième critère évalue l'ampleur du plus important rendement négatif pour chacune des méthodes et pour un portefeuille. Puisque nous prenons le multiple maximal, le résultat est fortement dépendant du nombre de VaR mesurées pour un portefeuille.

Comparativement au critère 6, on remarque que les résultats pour une méthode sont plus variables entre eux. Le multiple moyen pour les rendements iid  $N(0,1)$ , est de 1,8 pour le niveau de confiance de 95 %. Un tel résultat implique que le multiple maximal observé est en moyenne 80 % plus grand que la VaR. Le multiple moyen pour les rendements iid  $N(0,1)$  est de 1,25 pour le niveau de confiance de 99 %. Pour les rendements de type GARCH(1,1), ces multiples sont de 1,97 et 1,33 respectivement pour les niveaux de confiances de 95 % et 99 %.

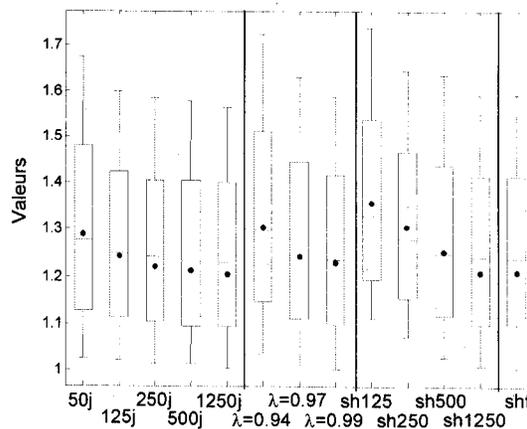
Pour les rendements iid  $N(0,1)$ , il n'y a pas de méthode qui soit véritablement meilleure qu'une autre (voir graphique 7a). Toutefois, les méthodes donnant un poids supérieur aux observations passées ont un multiple moyen maximal inférieur aux méthodes qui utilisent un historique d'observations plus court ou qui pondère moins les observations passées.

Graphique 7a  
**Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR**  
 Niveau de confiance de 95 %  
 $N(0,1)$



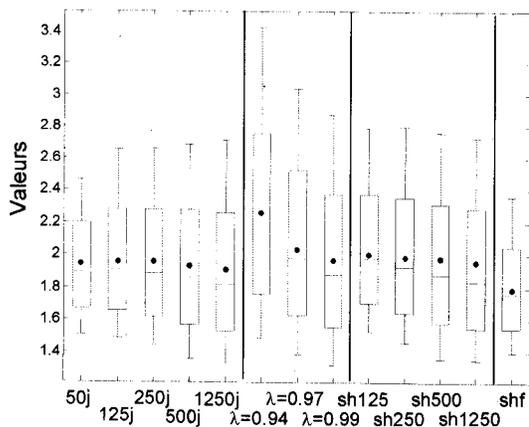
Source : calcul de l'auteur  
 Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 7b  
**Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR**  
 Niveau de confiance de 99 %  
 $N(0,1)$



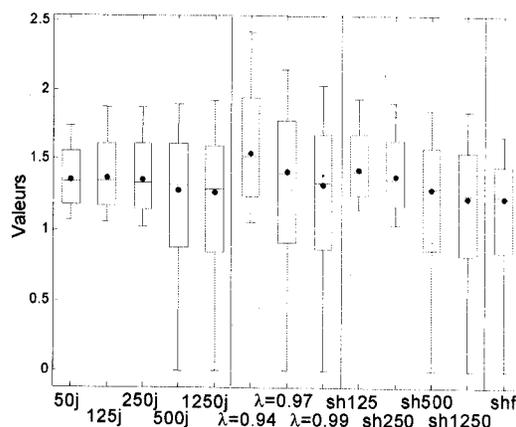
Source : calcul de l'auteur  
 Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 7c  
**Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR**  
 Niveau de confiance de 95 %  
 $GARCH(1,1)$



Source : calcul de l'auteur  
 Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Graphique 7d  
**Multiple maximal de l'ampleur des observations qui violent la VaR**  
 Niveau de confiance de 99 %  
 $GARCH(1,1)$



Source : calcul de l'auteur  
 Notes : j=jours ;  $\lambda$ =moyenne mobile à pondération exponentielle ; sh=simulations historiques ; shf=simulations historiques filtrées

Les résultats des méthodes lorsque les rendements sont de type  $GARCH(1,1)$  sont différents du cas précédent. En effet, ce sont les méthodes donnant plus de poids aux observations présentes qui offre les meilleurs résultats en moyenne. Se dernier résultat est semblable à ceux d'Hendricks (1996).

On remarque que pour un niveau de confiance de 95%, la méthode SHF donne les meilleurs résultats dans cette situation. En effet, l'ensemble de nos résultats montre que la VaR n'est pas un indicateur de la perte maximale que nous pouvons subir. Toutefois, les résultats obtenus pour la méthode SHF montre que c'est cette méthode qui donne le calcul de la VaR le plus près de la perte maximale pour chacun des portefeuilles.

Les résultats obtenus pour un niveau de confiance de 99% sont semblables à ceux obtenus précédemment. Toutefois, les résultats semblent plus variables pour les méthodes EWMA de 500 jours, EWMA de 1250 jours, XWMA avec  $\lambda = 0.94$  et  $0.99$ , SH de 500 jours, SH de 1250 jours et SHF. En fait, cette situation provient du fait que pour certains portefeuilles, nous n'avons pas observé de rendements inférieurs à la VaR.

## Conclusion

Dans ce rapport de recherche, nous avons fait la comparaison de quatre approches générales de calcul de la VaR. Pour trois des quatre approches nous avons utilisé différents historiques de données. Au total, nous avons donc fait la comparaison de treize méthodes de calcul de la Valeur à Risque. Nous avons fait les comparaisons pour deux types de données générées. Nous avons d'abord généré des rendements à partir d'une iid  $N(0,1)$  ensuite, nous avons généré des données de type GARCH(1,1).

Dans l'ensemble, nos résultats sont semblables à ceux présentés par Hendricks (1996). En effet, en général l'ensemble des méthodes utilisées pour faire le calcul de la VaR couvrent en moyenne le niveau de risque qu'elles doivent couvrir. C'est un résultat qui est identique à celui d'Hendricks (1996). À l'instar d'Hendricks (1996), nous avons obtenu que l'ensemble des méthodes utilisées pour faire le calcul de la VaR donnaient en moyenne la même mesure que la moyenne de l'ensemble des méthodes de calcul de la VaR. De plus, la majorité des méthodes ne diffère pas beaucoup de la moyenne de l'ensemble des VaR. Nos résultats indiquent que ce sont les méthodes utilisant un historique de rendement plus grand qui ont tendance à donner les résultats les moins variables à ce chapitre.

Comme Hendricks (1996), nos résultats montre que l'ensemble des méthodes de calcul de la VaR estime en moyenne la même valeur à risque. Toutefois, il existe des différences entre les méthodes pour un même portefeuille et une même date. Pour l'ensemble des méthodes que la variation autour de la moyenne des VaR diminue lorsque l'horizon utilisé pour faire le calcul de la VaR augmente. De plus, la variabilité annualisée montre que les méthodes de calcul de la VaR utilisant un historique de donnée plus grand ont tendance à produire un estimé de la VaR qui est moins variable dans le temps. À cet égard, nous avons obtenu un résultat très différent pour la méthode de simulations historiques filtrées. Comparativement aux méthodes utilisant le même nombre d'observations dans l'historique de données, la méthode SHF donne un résultat beaucoup plus variable dans le temps. Ce dernier résultat suggère que la méthode SHF s'adapte plus rapidement aux changements de risque des rendements du portefeuille.

Pour l'ensemble des méthodes d'évaluation de la VaR, la variation autour de la moyenne des VaR diminue si on utilise un historique de simulations plus grand. En général, pour l'ensemble des méthodes de calcul de la VaR nous obtenons une couverture équivalente au niveau requis lorsque les rendements sont iid  $N(0,1)$ . Cette situation est différente lorsque nous utilisons des rendements de type GARCH(1,1). En effet, dans cette situation les méthodes utilisant un nombre d'observations plus court ont tendance à produire une couverture inférieure au niveau requis, tandis que celles utilisant un nombre d'observations plus grand produisent une couverture supérieure ou égale au niveau requis. Notons que dans pour le 95ième centile, la méthodes SHF tend à produire le niveau de couverture requis. Pour le 99ième centile, elle produit une couverture qui est très près du niveau requis. Dans l'ensemble, les méthodes ont tendance à offrir un niveau de couverture inférieur au niveau requis pour le 99ième centile.

Les observations non couvertes sont en général beaucoup plus grandes que l'estimé de la VaR. En moyenne, les observations sont de 30 % inférieurs à la VaR. Le plus grand rendement négatif est quant à lui près de deux fois plus grand que la VaR avec un niveau de couverture de 95% et les rendements de type GARCH.

En résumé, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux de Hendricks (1996) pour l'ensemble des critères. Dans l'ensemble, nous avons obtenu les meilleurs résultats pour la méthode SHF. En effet, cette méthode tend à donner les niveaux de couverture les plus près en moyenne de ceux requis. De plus, elle s'ajuste plus rapidement que la méthode SH de 1250 jours aux changements de risque du portefeuille. C'est une méthode qui semble allier les meilleures qualités de chacune des méthodes des autres méthodes. Toutefois, ces résultats ont été obtenus avec un historique d'observations de 1250 jours. Peut-être seraient-ils différents si le nombre d'observations utilisées dans l'historique était différent. Il serait intéressant de vérifier cette hypothèse dans l'optique de travaux subséquents.

## Bibliographie

- Barone-Adesi, Giovanni, Kostas Giannopoulos et Les Vosper (2000) «Filtering Historical Simulation. Backtest Analysis», Working Paper, University of Westminster.
- Barone-Adesi, Giovanni, Kostas Giannopoulos (2000) «Non-Parametric VaR Techniques. Myths and Realities», *Economic notes*, 30 (2), pp 167-181.
- Barone-Adesi, Giovanni, Kostas Giannopoulos et Les Vosper (1999) «VaR Without Correlations for Portfolios of Derivative Securities», *the Journal of Futures Markets*, Vol 19, No 5, pp 583-602.
- Bollerslev, T. (1986) «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity», *journal of econometrics* 31, pp 307-327.
- Boudoukh, Jacob, Matthew Richardson et Robert F. Whitelaw (1998) «The Best of Both Worlds: A Hybrid Approach to Calculating Value at Risk», *Stern School of Business*. no. S-97-31.
- Campbell, John Y., Lo, Andrew W., Mackinlay, A. Craig (1997) «The Econometrics of Financial Markets», *Princeton University Press*, 612 pages.
- Dowd, Kevin (1998) «Beyond the Value at Risk, the New Science of Management», *John Wiley and Sons*, 286 pages.
- Engle R.F. (1982) «Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation.», *Econometrica*
- Frain, John, Conor Megan (1996) «Market Risk: An Introduction to the concept & Analytics of value-at-Risk», *Economic Analysis Research & Publications Department, Central Bank of Ireland*.
- Gourieroux, C., J.P. Laurent et O. Scaillet (2000) «Sensitivity Analysis of Value at Risk», *Journal of Empirical Finance*, vol 7, pp 225-245.
- Hendrick, Darryll (1996) «Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data», *Federal Reserve Bank of New York*, pp 39-70.
- Jorion, Philippe (2001). *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2<sup>nd</sup> ed., *McGraw-Hill*, 544 pages.
- Pritsker, Matthew (1997) «Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time», *Journal of Financial Services Research* (Oct/Dec), 201 - 241.
- Pritsker, Matthew (2001) «The Hidden Dangers of Historical Simulation», *Finance and Economics Discussion Series 2001-27*. Washington : Board of Governors of the Federal Reserve.



U

C