

Université de Montréal

**Automates cellulaires quantiques et relativité déformée**

par  
Alexandre Bibeau-Delisle

Département d'informatique et de recherche opérationnelle  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en informatique

Décembre, 2016

© Alexandre Bibeau-Delisle, 2016.

## RÉSUMÉ

Nous montrons qu'un modèle pour une théorie des champs à base d'automate cellulaire quantique est compatible avec une relativité restreinte déformée. En associant les lois de la physique à la règle d'évolution de l'automate, nous obtenons une version du principe de relativité où les états évoluant sur la grille de l'automate sont sujets à des transformations de Lorentz modifiées. Nous montrons ensuite que les déformations non-linéaires à l'espace des impulsions et des énergies mèneraient à une *relativité de la localité* et, dans des condition appropriées, produiraient un renversement de l'effet relativiste de contraction des longueurs. Nous considérons également les simulations de la physique sur calcul quantique d'un point de vue philosophique, demandant si notre monde pourrait faire partie d'une telle simulation et voyant comment des observations provenant de l'extérieur pourraient agir sur la simulation.

**Mots-clés:** informatique quantique, automate cellulaire, relativité restreinte déformée, univers simulé

## ABSTRACT

We show that a quantum field model based on a quantum cellular automaton requires a deformed special relativity. By associating the laws of physics with the automaton evolution rule, we obtain a version of the relativity principle where states evolving on the automaton must transform according to modified Lorentz transformations. We then show that a non-linear momentum and energy space gives rise to the phenomenon of *relative locality* and that, under appropriate conditions, the relativistic length contraction effect must be reversed. We also consider simulations of physics on a philosophical level, asking if we might live inside such a simulation and seeing how observers from outside might interact if they attempt to observe us in such a context.

**Keywords:** quantum information, cellular automaton, deformed special relativity, simulated universe

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>NOTATION</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 2: RELATIVITÉ RESTREINTE DÉFORMÉE</b> . . . . .	<b>6</b>
2.1 Les transformations de Lorentz . . . . .	8
2.2 Relativité doublement restreinte . . . . .	17
<b>CHAPITRE 3: THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1 Champs classiques . . . . .	24
3.2 Champ scalaire quantique . . . . .	28
3.3 Champ de Dirac . . . . .	34

<b>CHAPITRE 4: AUTOMATES CELLULAIRES . . . . .</b>	<b>43</b>
4.1 Automates cellulaires classiques . . . . .	44
4.2 Automates cellulaires quantiques . . . . .	52
<b>CHAPITRE 5: AUTOMATE QUANTIQUE RELATIVISTE . . . . .</b>	<b>58</b>
5.1 Règle d'évolution et relation de dispersion . . . . .	61
5.2 Changements de référentiel . . . . .	71
5.3 Conséquences des déformations . . . . .	81
<b>CHAPITRE 6: UNIVERS SIMULÉ PAR CALCUL QUANTIQUE . . . . .</b>	<b>92</b>
6.1 Évaluation de la proportion des êtres simulés . . . . .	93
6.2 Surveillance par les simulateurs . . . . .	104
<b>CHAPITRE 7: CONCLUSION . . . . .</b>	<b>114</b>
7.1 Sommaire des résultats . . . . .	114
7.2 Recherche future . . . . .	116
<b>ANNEXE A: INTÉGRALE DE CHEMIN . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>ANNEXE B: THÉORIE QUANTIQUE OPÉRATIONNELLE . . . . .</b>	<b>124</b>
B.1 Le modèle de circuit quantique . . . . .	124
B.2 Axiomes informatiques de la théorie quantique . . . . .	129
<b>ANNEXE C: DILATATION MODIFIÉE DU TEMPS . . . . .</b>	<b>138</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>	<b>142</b>

## LISTE DES FIGURES

2.1	Invariant quadratique modifié pour une théorie VSL . . . . .	22
4.1	Automate cellulaire élémentaire 110 . . . . .	46
4.2	Patron d'automate cellulaire sur une coquille . . . . .	48
4.3	Voisinages de Von Neumann et de Moore . . . . .	49
4.4	Structures simples du jeu de la vie . . . . .	50
4.5	Machine de Turing dans le jeu de la vie . . . . .	51
4.6	Structure en blocs de Margolus . . . . .	57
5.1	Relation de dispersion de l'automate de champ quantique . . . . .	72
5.2	Transformation de Lorentz modifiée pour l'impulsion . . . . .	74
5.3	Vitesse de groupe dans l'automate de champ quantique . . . . .	76
5.4	Transformation d'un paquet d'onde gaussien . . . . .	78
5.5	Transformation d'un état parfaitement localisé . . . . .	80
5.6	Intersections de trajectoires . . . . .	83
5.7	Exemple de relativité de la localité . . . . .	85
5.8	Déformation de l'effet de contraction des longueurs . . . . .	87
6.1	Hiérarchie de simulations . . . . .	101
6.2	Contournement d'un système encrypté . . . . .	112
C.1	Déformation de la dilatation du temps . . . . .	141

## NOTATION

---

$A^\mu B_\mu$	Sommation d'Einstein sur les valeurs de l'indice $\mu$
$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$	Facteur de Lorentz
$\varepsilon^{jkl}$	Symbole de Levi-Civita
$\sigma^j$	Matrices de Pauli
$[A, B] = AB - BA$	Commutateur de $A$ et $B$
$E^2 - \ \mathbf{p}\ ^2 = m^2$	Invariant quadratique
$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$	Dérivée temporelle de la coordonnée $q$
$\mathcal{L} = \int \mathcal{L} d^3x$	Lagrangien d'un système
$\mathcal{F}$	Transformée de Fourier
$s_G^t$	État d'un automate cellulaire au temps $t$
$T_G$	Règle globale d'évolution d'un automate cellulaire
$A(\Lambda) = \otimes_{i \in \Lambda} A_i$	Algèbre observable sur la région $\Lambda$
$U_G$	Règle unitaire d'évolution de l'automate de champ quantique
$\omega_m(k)$	Relation de dispersion de l'automate de champ quantique
$L^{\mathcal{D}} := \mathcal{D}^{-1} \circ L \circ \mathcal{D}$	Déformation des Transformation de Lorentz
$R_{Cal}$	Ratio entre les puissances de calcul de la matière et du cerveau
$f_{Sim}$	Fraction des êtres intelligents vivant dans une simulation
$f_{Re}$	Fraction des êtres intelligents ne vivant pas dans une simulation

## REMERCIEMENTS

Premièrement, un grand merci à Gilles non seulement pour son aide au niveau académique, mais aussi pour son hospitalité à Zurich, ses talents de cuisinier, ses anecdotes et son humour inépuisable. Merci à tous mes collègues du LITQ pour les discussions intéressantes et la compagnie agréable au labo. Dans cette catégorie, Dave, Louis, Fabio, Alain et Samuel m'ont été d'une aide précieuse en écoutant mes péripéties théoriques et en faisant de très inspirantes suggestions.

Merci à mes collègues de Pavia pour leur accueil formidable, leur contribution à mon apprentissage de l'italien et, bien sûr, leur travail passionné dans le domaine du «it from bit». Dans ce groupe, merci tout particulièrement à Alessandro Tosini et Alessandro Bisio pour leur camaraderie et leur aide au niveau scientifique et à Giulio Chiribella pour certaines modifications au module de circuits quantiques pour Latex et pour m'avoir intéressé à l'approche informationnelle de la physique fondamentale en premier lieu.

Merci à mon père Stéphane pour tout son support au fil des années. À mes grands-parents, mes oncles et tantes, mes amis, Manon et Catherine pour leurs encouragements. Et finalement, un immense merci à ma copine Rébecca pour son combat contre la procrastination et pour son amour.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Depuis les début de l'atomisme, la philosophie naturelle tente d'identifier ce qui est réellement fondamental dans la nature. La physique a démontré vers la fin du 19<sup>e</sup> siècle que les atomes eux-mêmes ne sont pas élémentaires, mais la recherche d'une réponse à cette question millénaire continue. Alors que la discipline de la physique existe sous une forme ou une autre depuis l'antiquité, l'informatique est une science très récente. En effet, bien que certaines machines à calculer aient été élaborées plus anciennement, ce n'est qu'au cours du dernier siècle que le traitement de l'information a commencé à être étudié en profondeur. Cette nouvelle science a eu des effets majeurs sur le cours de l'histoire du 20<sup>e</sup> siècle et a radicalement changé la manière dont nous accédons à l'information dans nos vies quotidiennes. Si ces impacts pratiques se sont fait sentir rapidement, les impacts conceptuels sur les autres branches de la science ont légèrement tardé à se manifester.

Au niveau théorique, il est difficile d'imaginer une notion plus fondamentale que celle de l'information. Est-ce que l'information et son traitement pourraient fournir une alternative à l'idée d'objets physiques comme étant à la base de toute la nature? Dans les années 1960, Konrad Zuse, un pionnier de l'informatique, a suggéré que l'univers pourrait en fait être un gigantesque automate cellulaire [75]. Une ving-

taine d'années plus tard, John Archibald Wheeler proposait que la physique quantique puisse découler de considérations informationnelles et a introduit la célèbre expression «it from bit» pour décrire l'idée de la physique basée sur l'information [71].

La physique quantique, malgré son immense succès expérimental, repose sur une série d'axiomes hétéroclites et purement mathématiques. L'idée que l'informatique quantique puisse donner une base opérationnelle (c'est-à-dire fondée sur des axiomes qui traitent de tâches réalisables) sur laquelle la mécanique quantique puisse reposer est donc très attrayante. Récemment, des réalisations d'une telle axiomatisation opérationnelle ont été dérivées [22, 46, 18]. L'un des buts imaginés par Wheeler est donc en grande partie atteint. Malgré leur élégance, les axiomatisations mentionnées sont limitées: elles s'appliquent uniquement à la formulation par l'espace de Hilbert de la théorie quantique, sans faire de lien avec la dynamique et sans analogue pour des concepts tels la masse, l'espace et le temps. Il n'est donc pas possible de reproduire les modèles de physique moderne comme la théorie des champs quantiques en se basant uniquement sur ces axiomes opérationnels.

D'un autre côté, le domaine des automates cellulaires quantiques commence à prendre de l'ampleur, avec généralement pour but des simulations de la physique, incluant la théorie des champs quantiques [10]. De récents développements initiés par nos collaborateurs [24, 13] poussent cette idée plus loin, en proposant d'utiliser les automates cellulaires quantiques comme base pour un modèle d'où la dynamique

de la théorie des champs quantiques émerge naturellement, faisant le lien avec l'approche d'axiomatisation mentionnée précédemment.

Notre recherche continue cette approche, montrant un lien entre non seulement les automates cellulaires quantiques et la théorie des champs quantiques, mais aussi avec les théories de relativités restreintes déformées. Ces théories, dont la première élaborée en profondeur fut la relativité doublement restreinte d'Amelino-Camelia [4], proposent d'ajouter à la relativité restreinte des échelles invariantes liées aux effets quantiques. Ceci pourrait permettre une plus grande compatibilité entre la relativité et l'idée d'un espace-temps discrétisé dans le cadre d'une théorie unifiée de la physique.

Avant de nous lancer dans notre modèle d'automate cellulaire quantique, nous considérons qu'il est crucial de présenter chacune des théories impliquées, de manière à rendre cette thèse un ouvrage suffisamment autonome. Étant donnée la nature pluridisciplinaire de nos travaux, nous demandons la patience de nos lecteurs qui sont déjà familiers avec une ou plusieurs sections de la matière présentée. Nous débutons avec la relativité restreinte et ses déformations (chapitre 2) et poursuivons avec la théorie des champs quantiques (chapitre 3) avant de nous intéresser à l'étude des automates cellulaires (chapitre 4).

Pour nous lancer dans la contribution originale du doctorat résumé dans cette thèse, ces trois théories sont combinées au chapitre 5, où nous montrons que l'application du principe de relativité à un automate cellulaire quantique simulant un champ quantique mène à une relativité restreinte déformée ayant des échelles invariantes

supplémentaires en impulsion et en énergie. Nous expliquons que ces déformations de la relativité restreinte peuvent être liées à la relation de dispersion engendrée par la propagation de l'information sur la grille discrète de l'automate.

Nous explorons ensuite certains phénomènes associés à nos déformations des transformations de Lorentz. Pour que le principe de relativité soit préservé, les transformations de référentiels doivent s'appliquer aux états évoluant sur l'automate plutôt qu'aux coordonnées des cellules de celui-ci. Nous démontrons qu'il est possible d'obtenir un espace-temps émergeant de l'automate où les déformations engendrent une *relativité de la localité*, c'est-à-dire que des observateurs distants et en mouvement relatif ont des visions différentes à propos de la coïncidence de certains événements. Nous présentons aussi le nouveau phénomène de *dilatation des longueurs*, un renversement de la contraction des longueurs observée en relativité restreinte qui se manifeste lorsque l'on s'approche d'une échelle invariante d'impulsion.

En considérant des simulations de la physique telle que nous la connaissons, ou en imaginant que cette physique peut être fondamentalement basée sur une forme de calcul quantique, on peut facilement en venir à se demander si notre monde lui-même ne pourrait être une simulation délibérée. Une telle idée semble ressortir plus de la science-fiction que de la science, mais nous l'abordons tout-de-même, traitant ce scénario hypothétique le plus sérieusement possible. Nous considérons au chapitre 6 des facteurs nous permettant d'estimer (à partir de suppositions assez fortes) la probabilité que nous résidions effectivement à l'intérieur d'une simulation

de la physique, raffinant dans certains cas des résultats publiés par Nick Bostrom en 2003 [14]. Entre autres, nous considérons des séries de simulations imbriquées les unes dans les autres, utilisant des considérations sur la puissance de calcul requise pour estimer la proportion des points de vue conscients existant à différents niveaux de ces hiérarchies de simulations. Nous nous penchons également sur les implications d'imperfections potentielles dans les systèmes simulateurs et considérons les effets de différents types d'observations de la part des détenteurs de tels systèmes.

Pour conclure, après un bref retour sur nos résultats, nous présentons des idées de recherche qui pourraient permettre d'agrandir la portée de notre modèle à base d'automate cellulaire quantique et certaines avenues de questionnement à propos des scénarios où notre univers s'avère être une simulation sur un système de calcul quantique.

## CHAPITRE 2

### RELATIVITÉ RESTREINTE DÉFORMÉE

Comme nous montrons au chapitre 5 que pour notre modèle à base d'automate cellulaire quantique la relativité restreinte est déformée, il est utile de faire un survol théorique rapide de la relativité restreinte et de la littérature touchant à ses déformations potentielles. Nous introduisons ici les transformations de Lorentz dont nous nous servons aux chapitres 3 et 5 et expliquons l'effet de contraction des longueurs pour lequel nous montrons une déformation significative à la section 5.3.

Introduite par Albert Einstein dans son *annus mirabilis* de 1905 [27], la relativité restreinte a révolutionné notre conception de l'espace et du temps. La relativité d'Einstein, incluant sa généralisation de 1915 [28], repose sur le postulat que les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs. C'est ce qu'on appelle *le principe de relativité*.

Le principe de relativité, dans sa version restreinte, se limite aux référentiels inertiels, évitant donc les pseudo-forces et les effets gravitationnels. Dans ce contexte, on peut même dire que les lois *apparentes* de la physique sont les mêmes dans tous ces référentiels. La vitesse de la lumière,  $c$ , fait partie de ces lois, puisque selon l'interprétation la plus simple des équations de Maxwell, la lumière est une onde électromagnétique qui se propage dans le vide et non pas dans un milieu spécifique.

La vitesse de la lumière doit donc être un invariant de la théorie et apparaître identique dans tous les référentiels (c'est même le cas dans les référentiels non-inertiels). Mentionnons que ce que nous décrivons comme l'interprétation la plus simple des équations de Maxwell n'était certainement pas l'interprétation la plus intuitive pour la grande majorité des scientifiques de l'époque. Toutes les ondes précédemment étudiées se propageant dans un milieu tangible, il était attendu qu'un tel milieu (appelé éther) existe également pour les ondes électromagnétiques. L'incapacité des expériences comme celle de Michelson-Morley à démontrer l'existence d'un éther fut l'une des principales motivations menant au développement de la relativité restreinte.

L'invariance de la vitesse de la lumière est incompatible avec la mécanique newtonienne et sa notion d'espace et de temps absolus. Nous devons donc remplacer les transformations de référentiels purement additives de la relativité galiléenne par les transformations de Lorentz. La mécanique newtonienne devient alors une approximation valide lorsque les vitesses impliquées sont beaucoup plus petites que  $c$ . La relativité restreinte déformée (parfois appelée relativité doublement restreinte) postule que la relativité restreinte pourrait n'être elle-même qu'une approximation qui devient invalide dans certains régimes (lorsque l'on s'approche d'une énergie critique par particule, par exemple).

## 2.1 Les transformations de Lorentz

Afin d'être en mesure de passer d'un référentiel inertiel à un autre tout en conservant la vitesse de la lumière, les transformations de Lorentz sont utilisées. Celles-ci consistent en des rotations dans l'espace et des boosts, qui correspondent à des rotations mélangeant l'espace et le temps. Un boost  $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$  permet de passer d'un référentiel inertiel à un autre, en mouvement à une vitesse de  $v$  par rapport au premier.

Avant de nous lancer plus en détail dans les transformations de Lorentz, présentons un peu de notation qui nous simplifiera la tâche, mathématiquement parlant. Nous pouvons choisir de travailler avec des unités pour lesquelles la vitesse de la lumière  $c = 1$ , ce qui permet de traiter l'espace et le temps comme ayant les mêmes unités. Dans ces unités naturelles, nous avons également  $\hbar = 1$  et  $G = 1$ . Nous notons aussi

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (2.1.1)$$

Ici,  $\mu$  (et les autres indices grecs) est un indice allant de 0 à  $d$  (le nombre de dimensions spatiales, 3 dans le cas présent). Un objet ayant ce genre d'indice pour nos 4 dimensions habituelles est appelé un quadrivecteur. En suivant nos références pour cette section (par exemple [16]), lorsque nous avons besoin d'un indice ne couvrant que les dimensions spatiales, nous utilisons un indice romain, tel  $i$ . Nous adoptons également la convention de la notation d'Einstein, selon laquelle la répétition d'un même indice dans un terme implique une sommation sur toutes les valeurs

possibles de cet indice. Aussi,  $\partial_\mu$  représente la dérivée partielle par rapport à  $x^\mu$ . Notons qu'afin d'harmoniser cette section avec le chapitre 3, nous suivons l'approche de la référence [52] pour généraliser les transformations de Lorentz à des objets graduellement plus complexes.

Considérons l'intervalle  $(\Delta s)^2$  entre deux événements dans l'espace temps

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (2.1.2)$$

Tous les observateurs doivent s'entendre sur le signe de  $(\Delta s)^2$ . En effet, deux événements sont séparés par  $(\Delta s)^2 = 0$  s'ils correspondent à deux points sur la trajectoire d'un signal lumineux. Dans ce cas, comme tous les observateurs s'entendent sur  $c$ , ils s'entendent également sur la distance parcourue en un temps  $t$ . Ils s'entendront aussi sur le fait que les deux événements peuvent être connectés causalement ( $(\Delta s)^2 \geq 0$ ) ou ne le peuvent pas ( $(\Delta s)^2 < 0$ ). En impliquant plusieurs observateurs ainsi que l'isotropie de l'espace-temps, on peut montrer que tous les observateurs doivent également s'entendre sur la grandeur de  $(\Delta s)^2$  et qu'il s'agit donc d'un invariant de la théorie de la relativité restreinte. On peut utiliser cette invariance pour obtenir les équations pour les boosts (les rotations sont les mêmes qu'en relativité galiléenne).

La transformation de Lorentz pour un boost dans la direction  $x^1$  d'une quantité  $\beta$  est

$$x^1 \rightarrow x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad x^0 \rightarrow x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1.3)$$

Les coordonnées  $x^2$  et  $x^3$  restent inchangées. On peut obtenir les boosts dans d'autres directions en combinant l'équation (2.1.3) avec les transformations de rotations.

On peut exprimer une transformation de Lorentz générale sous forme d'une matrice  $L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$  qui amène

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x} \quad (2.1.4)$$

où  $\boldsymbol{\beta}$  constitue un boost arbitraire et  $\boldsymbol{\theta}$  une rotation arbitraire. Trois composantes sont nécessaires pour définir chacune de ces quantités, donnant donc six degrés de liberté aux transformations de Lorentz. Afin d'alléger la notation, nous pouvons omettre l'argument  $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$  et écrire simplement  $L$  pour une transformation de Lorentz arbitraire.

Pour nous familiariser avec les conséquences des transformations de Lorentz, considérons ici un phénomène important pour notre modèle de relativité restreinte déformée à base d'automate cellulaire quantique (section 5.3): la contraction des longueurs. Dans cet effet, une distance est différente lorsque mesurée dans un référentiel en mouvement par rapport à celui où elle est initialement définie. Comme pour l'effet relié de dilatation du temps, la contraction des longueurs ne se manifeste qu'à des vitesses constituant des fractions significatives de la vitesse de la lumière. Si un bâton mesure  $A$  au repos dans le référentiel prime de l'équation (2.1.3) et qu'un observateur mesure simultanément (disons au temps  $t = 0$ , pour simplifier les choses) la position

de ses deux extrémités dans le référentiel non-prime, nous avons

$$A = \gamma(x_{fin}^1 - \beta \cdot 0) - \gamma(x_{début}^1 - \beta \cdot 0) \quad (2.1.5)$$

et donc cet observateur mesure une longueur de

$$x_{fin}^1 - x_{début}^1 = \frac{A}{\gamma} \quad (2.1.6)$$

Il est intéressant de noter que cet effet est symétrique et que les longueurs du référentiel non-prime sont contractées lorsque mesurées à partir du référentiel prime.

Maintenant que nous savons comment appliquer les transformations de Lorentz aux coordonnées de l'espace-temps, il est important de comprendre qu'elles ne s'appliquent pas de la même manière à tous les objets (nous utilisons ici le mot objet au sens mathématique et non pas pour désigner un objet physique comme le bâton de l'exemple précédent). Un objet, par exemple le champ  $\varphi(\mathbf{x})$ , est dit un scalaire de Lorentz s'il se transforme comme

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(L^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.1.7)$$

En fait, tout objet ayant une seule composante par point dans l'espace se transforme nécessairement de cette manière. Qu'en est-il d'un objet plus compliqué? Nous désirons explorer les propriétés de champs ayant plusieurs composantes, par exemple

un champ vecteur  $\varphi^\mu(\mathbf{x})$ . Pour un tel champ, l'équation de transformation sera

$$\varphi^\mu(\mathbf{x}) \rightarrow L^\mu_\nu \varphi^\nu(L^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.1.8)$$

On peut appliquer la même procédure pour des tenseurs de rang arbitraire, obtenant ainsi un facteur L par indice, utilisant au besoin la métrique

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

pour abaisser ou monter un indice (notons qu'il est également possible d'utiliser  $-g_{\mu\nu}$ ).

Utilisons cette occasion pour expliquer la différence entre un indice en haut et un indice en bas. Un indice en haut représente un objet *contravariant*, tel un vecteur. Sous une transformation de base, un tel objet subit une transformation correspondant à l'inverse de la transformation sur les éléments de la base. Par exemple, si on utilise des éléments de base deux fois plus petits, le vecteur transformé est deux fois plus grand. À l'inverse, un objet avec un indice en bas, tel un gradient, est dit *covariant* et se transforme avec la même transformation que les éléments de la base. Un changement d'échelle vers des éléments de base deux fois plus petits résulte en un *covecteur* qui est également deux fois plus petit. Un tenseur plus général peut avoir à

la fois des composantes contravariantes et covariantes (donc à la fois des indices en haut et en bas).

Définissons maintenant les transformations pour un objet ayant  $n$  composantes. Si on se restreint aux transformations linéaires, on obtient une transformation générale de la forme

$$\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{L})\varphi(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.1.10)$$

où  $\mathbf{R}(\mathbf{L})$  est une matrice  $n \times n$ .

Les transformations de Lorentz forment un groupe, appelé groupe de Lorentz. La composition de deux transformations de Lorentz  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{L}'$  doit également être une transformation de Lorentz que l'on dénote par  $\mathbf{L}''$ .

$$\mathbf{L}'' = \mathbf{L}'\mathbf{L} \quad (2.1.11)$$

Les matrices  $\mathbf{R}$  doivent donc se composer de la même façon, c'est-à-dire

$$\mathbf{R}(\mathbf{L}')\mathbf{R}(\mathbf{L})\varphi(\mathbf{L}'^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{L}'')\varphi(\mathbf{L}''^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.1.12)$$

Les matrices  $\mathbf{R}$  constituent ce qu'on appelle une *représentation* à  $n$  dimensions du groupe de Lorentz.

Afin de trouver une forme explicite pour ces représentations du groupe de Lorentz, partons avec les représentations du groupe de rotation. Les transformations

infinitésimales d'un groupe forment un espace vectoriel appelé algèbre de Lie du groupe. Une base vectorielle pour cet espace constitue les générateurs du groupe. Ces générateurs peuvent être exponentiés de manière à obtenir les éléments arbitraires du groupe.

Dans le cas du groupe de rotation, on utilise les opérateurs de moment angulaire  $J^j$  comme générateurs. Ces opérateurs ont les relations de commutation (ces relations sont expliquées en plus de détails à la section 3.2)

$$[J^j, J^k] = i\epsilon^{jkl} J^l \quad (2.1.13)$$

où  $[A, B] = AB - BA$  est le *commutateur* de  $A$  et  $B$  et  $\epsilon^{jkl}$  est le *symbole de Levi-Civita*. Ce symbole correspond aux éléments d'un objet complètement antisymétrique et vaut 1 dans le cas d'une permutation paire de 123 pour ses indices,  $-1$  dans le cas d'une permutation impaire et 0 si l'un des indices se répète. On obtient l'opérateur pour une rotation arbitraire

$$R(L(0, \boldsymbol{\theta})) = e^{i\boldsymbol{\theta}^j J^j} \quad (2.1.14)$$

Pour donner un exemple, considérons la représentation pour  $n = 2$ . Dans ce cas, les générateurs  $J^j$  sont simplement  $\frac{1}{2}\sigma^j$ , où les  $\sigma^j$  sont les matrices de Pauli  $2 \times 2$

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.15)$$

Pour  $n = 3$ , on peut choisir comme générateurs

$$J^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J^y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J^z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

Il peut aussi être utile de les représenter sous leur forme différentielle

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{x} \times -i\nabla \quad (2.1.17)$$

Il est également possible de réorganiser les générateurs  $J^j$  comme des tenseurs antisymétriques

$$J^{jk} = -i(x^j \nabla^k - x^k \nabla^j) \quad (2.1.18)$$

Rappelons-nous qu'en relativité restreinte, il existe une certaine symétrie entre le temps et l'espace. Un boost est en fait (à un signe près) une rotation dans l'espace à quatre dimensions impliquant la dimension temporelle. Ceci nous permet d'utiliser cette même équation et de simplement ajouter une dimension de temps pour obtenir les générateurs des transformations de Lorentz

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \quad (2.1.19)$$

Ces générateurs obéissent aux relations de commutation

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}) \quad (2.1.20)$$

Les générateurs pour  $n = 4$  sont

$$(J^{\mu\nu})_{\kappa\lambda} = i(\delta_{\kappa}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu} - \delta_{\lambda}^{\mu}\delta_{\kappa}^{\nu}) \quad (2.1.21)$$

Nous pouvons maintenant construire les matrices pour les transformations infinitésimales s'appliquant aux quadrivecteurs de Lorentz

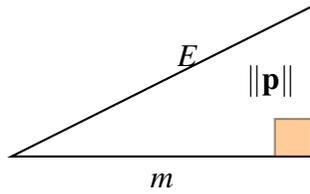
$$\varphi^{\kappa} \rightarrow \left( \delta_{\lambda}^{\kappa} - \frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})_{\lambda}^{\kappa} \right) \varphi^{\lambda} \quad (2.1.22)$$

où  $\Theta_{\mu\nu}$  est une matrice antisymétrique  $4 \times 4$  donnant le changement infinitésimal d'angle. Les éléments  $\Theta_{0i}$  donnent les boosts et les éléments  $\Theta_{ij}$  les rotations.

Avant de passer aux déformations de la relativité restreinte, notons un autre invariant de la théorie: la masse au repos, que nous notons simplement  $m$  (par opposition à la masse relativiste  $\gamma m$ ). En effet, comme la masse au repos implique que l'objet ne bouge pas par rapport à l'observateur, tous les référentiels doivent s'entendre à ce sujet. De plus,  $m$  est impliquée dans la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un objet (d'une particule fondamentale, par exemple) et ceci doit également être un invariant de Lorentz. Cette relation, qui joue un rôle crucial au chapitre 5, est

$$E^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + m^2 \quad (2.1.23)$$

et peut être visualisée comme un triangle à angle droit ayant l'énergie pour hypoténuse:



En réarrangeant l'ordre des termes de l'équation (2.1.23) comme

$$E^2 - \|\mathbf{p}\|^2 = m^2 \quad (2.1.24)$$

nous obtenons une équation dont chaque côté est invariant sous transformation de Lorentz (puisque ici  $m$  est la masse au repos). Cette équation est parfois appelée *invariant quadratique* dans la littérature.

## 2.2 Relativité doublement restreinte

Formulée en 2002 par Giovanni Amelino-Camelia (référence [4]), la relativité doublement restreinte (DSR) propose un scénario où la relation entre l'énergie et l'impulsion (2.1.24) est déformée. De telles déformations avaient précédemment été proposées (voir les références [38, 60, 3]), mais en général avec la supposition que les symétries du groupe de Lorentz (ou de son extension, le groupe de Poincaré) seraient brisées, donnant lieu à un référentiel préféré où les lois de la physique sont décrites correctement. L'article d'Amelino-Camelia introduit plutôt des déformations qui préservent la symétrie et donc la relativité des référentiels. Il existe à la fois

des motivations théoriques et expérimentales pour chercher à modifier la relativité restreinte tout en conservant le principe de relativité.

Du côté théorique, il pourrait être souhaitable d'introduire un invariant supplémentaire. Par exemple, afin de construire une théorie unifiée de la physique, il pourrait s'avérer nécessaire d'avoir une échelle de distance (typiquement la longueur de Planck  $l_P$ ) invariante.

$$l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.62 \times 10^{-35} m \quad (2.2.1)$$

Les unités de Planck sont définies par les combinaisons appropriées des différentes constantes fondamentales caractérisant la physique moderne:  $\hbar$  pour la mécanique quantique,  $c$  pour la relativité restreinte et  $G$  pour la relativité générale (en travaillant avec les unités naturelles, les unités de Planck sont également normalisées à 1). De nouveaux phénomènes quantiques pourraient se manifester à l'approche de cette échelle et la présence de ces phénomènes dans un système ne devrait pas dépendre de la vitesse relative de l'observateur. Similairement, de nouveaux effets pourraient se manifester lorsque l'énergie d'une particule se rapproche de l'énergie de Planck  $E_P$ . Une particule ayant cette énergie pourrait, étant donnée la déformation appropriée de la relativité restreinte, la conserver dans tous les référentiels. De nombreux modèles de gravité quantique ayant été proposés depuis les années 1990 contiennent une échelle invariante venant s'ajouter à la vitesse de la lumière (voir par exemple les références [53, 8, 58, 59, 32]).

Au niveau expérimental, les violations de la limite GZK (pour Greisen, Zatsepin et Kuz'min [35, 73]) constituent la motivation la plus influente dans la littérature pour la recherche de déformations de la relativité restreinte.

$$E_{GZK} = 5 \times 10^{19} \text{eV} \quad (2.2.2)$$

Cette limite constitue l'énergie maximale des rayons cosmiques qui devraient pouvoir se rendre à nous à partir de sources suffisamment distantes (de l'ordre de  $10^8$  années-lumières). En effet, au delà de cette énergie, les interactions avec les micro-ondes du fond cosmique mènent à des pertes d'énergie à travers les interactions

$$\gamma_{MOC} + p \rightarrow \Delta^+ \rightarrow (p + \pi^0) \text{ ou } (n + \pi^+) \quad (2.2.3)$$

Notons qu'ici  $\gamma$  est le symbole pour un photon et non pas le facteur de Lorentz. Comme des particules d'énergies au-delà de cette limite on été observées entrer en collision avec la haute atmosphère sans pouvoir être expliquées par des sources moins distantes, différentes solutions ont été proposées, entre autre des déformations de (2.1.24), avec ou sans brisure de symétrie de Lorentz [2, 5]. Notons cependant que les déformations relativement simples initialement proposées pourraient plutôt avoir pour effet d'abaisser  $E_{GZK}$  plutôt que de l'augmenter et que des expériences plus précises seraient nécessaires, puisque les différentes études ne s'entendent pas sur le niveau de suppression mesuré au delà de  $E_{GZK}$

Mathématiquement, il est possible de modifier les générateurs du groupe de Lorentz (2.1.19) comme

$$K^{\mu\nu} = T^{-1}(E)J^{\mu\nu}T(E) \quad (2.2.4)$$

menant à la relation de dispersion modifiée

$$(E f_1)^2 = (\|\mathbf{p}\| f_2)^2 + m^2 \quad (2.2.5)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions de  $E$  et/ou  $\mathbf{p}$ . La transformation  $T$  envoie

$$(E, \mathbf{p}) \rightarrow T \circ (E, \mathbf{p}) = (E f_1, \mathbf{p} f_2) \quad (2.2.6)$$

Comme l'algèbre du groupe est préservée, les symétries restent intactes et la théorie obéit au principe de relativité. En choisissant  $T$  judicieusement, il est possible de créer des modèles variés, entre autres des théories où la vitesse de la lumière dépend de la fréquence (ces théories sont nommées *VSL* pour *Variable Speed of Light*). Par exemple,

$$T \circ (E, \mathbf{p}) = (E, (1 + \alpha E)\mathbf{p}) \quad (2.2.7)$$

restreint les impulsions à  $\|\mathbf{p}\| < \alpha^{-1}$  (voir la référence [45]) et mène à

$$c(E) = (1 + \alpha E)^2 \quad (2.2.8)$$

et une version déformée de l'invariant quadratique 2.1.24

$$E^2 - ((1 + \alpha E)\|\mathbf{p}\|)^2 = m^2 \quad (2.2.9)$$

En général, les phénomènes associés aux déformations se produisent à des énergies trop élevées pour être observées et pour un choix approprié de  $T$  la physique se réduit à celle de la relativité restreinte lorsque l'on reste suffisamment loin des nouveaux invariants. Par exemple, la figure 2.1 montre que les énergies dans la théorie VLS de l'équation 2.2.7 ne divergent de celles de la relativité restreinte habituelle que lorsque l'impulsion atteint une fraction appréciable de sa valeur invariante.

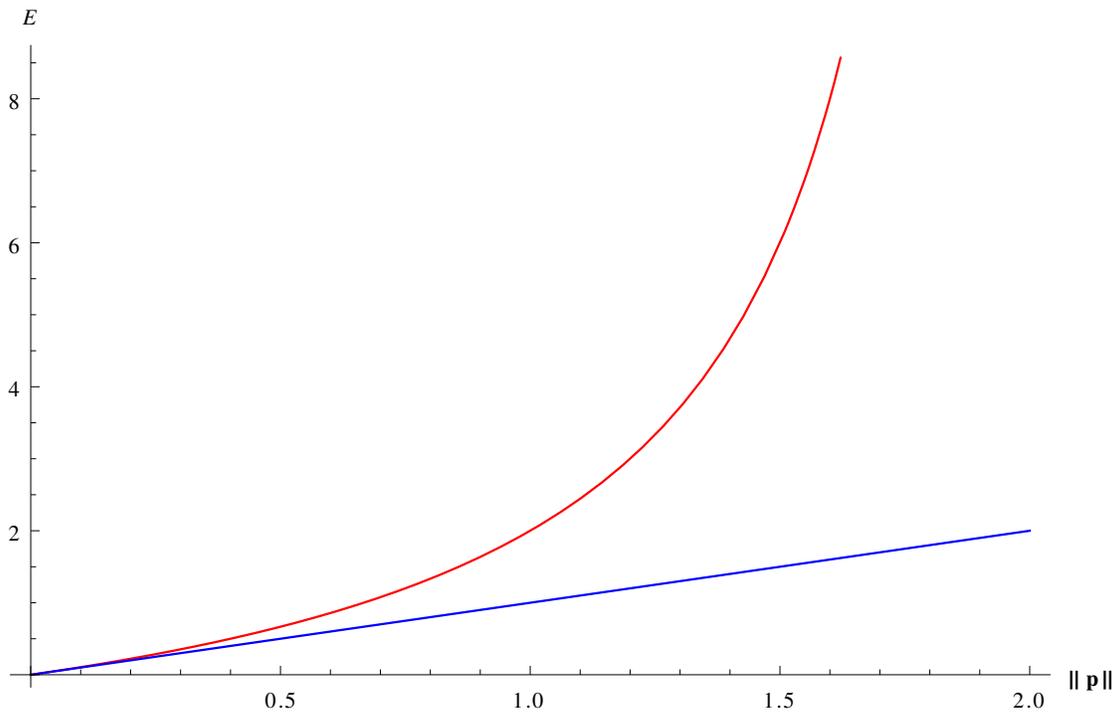


Figure 2.1 : Relation modifiée entre l'énergie et l'impulsion pour la théorie VSL de l'équation 2.2.7 pour  $m = 0$  et  $\alpha = 0.5$  (en rouge). On peut remarquer que dans le régime des faibles impulsions (relativement à l'échelle de Planck et à l'impulsion invariante de la théorie) l'énergie est approximativement celle prescrite par la relativité restreinte non-déformée (en bleu).

## CHAPITRE 3

### THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

Une grande partie de la physique théorique moderne, allant de la physique des particules jusqu'à la matière condensée, repose sur la théorie des champs quantiques. De plus, beaucoup de théories cherchant à unifier la physique en alliant la relativité générale à la mécanique quantique (la théorie des cordes, par exemple) sont à un certain niveau des théories de champs quantiques. Il est donc pertinent de tenter de modéliser des champs quantiques si l'on veut traiter de physique fondamentale basée sur des principes informationnels. Finalement, comme les simulations de champs quantiques pour la physique de la matière condensée sont souvent très coûteuses au niveau calculatoire [50], un tel modèle pourrait être utile même si la physique ne s'avère pas équivalente à un modèle de calcul quantique discret au niveau le plus microscopique.

La théorie des champs quantiques est en un certain sens une version plus complète de la mécanique quantique. Elle intègre la relativité restreinte (mais, de manière très publicisée, pas la gravité) et permet la création et l'annihilation de particules, alors qu'en mécanique quantique le nombre de particules est conservé. Il est aussi important de mentionner que la quantité, la qualité et la variété des preuves expérimentales de la théorie des champs quantiques sont pratiquement inégalées en

science moderne (notons par exemple les oscillations de neutrinos [54], la supraconductivité [1] et la structure fine ainsi que le décalage de Lamb dans le spectre de l'hydrogène [39]).

Pour pouvoir subséquemment discuter de champs quantiques simulés par un automate cellulaire quantique (chapitre 5), nous faisons ici un survol des bases de la théorie des champs quantiques. Développée depuis les années 1920, il s'agit maintenant d'une théorie solidement établie et il existe plusieurs manuels qui l'expliquent de manière détaillée. Pour notre introduction à cette matière, nous nous inspirons principalement du livre de Peskin et Schroeder [52], que les dérivations de cette section suivent d'assez près, tout en nous aidant également des manuels de Zee [74] et Srednicki [64]. Nous utilisons ici la quantification canonique pour nos dérivations des versions quantiques des champs classiques, mais une courte introduction à l'approche alternative de *l'intégrale de chemin* est faite à l'annexe A.

### 3.1 Champs classiques

Avant de passer à l'équivalent quantique, commençons avec une théorie de champ classique. Les champs gravitationnels et électromagnétiques, par exemple, peuvent être traités de cette manière dans certains régimes. Un champ est simplement un objet ayant une (ou plusieurs) valeur à chaque point de l'espace-temps. Un champ  $\varphi(x^\mu)$  est caractérisé par sa densité lagrangienne  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ . Le lagrangien  $\mathcal{L}$

est l'intégrale spatiale de  $\mathcal{L}$  et l'action  $\mathcal{S}$  est l'intégrale temporelle de  $\mathcal{L}$ . Les frontières précises d'intégration ne sont généralement pas importantes et pourront être considérées comme tendant vers l'infini.

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^4x \quad (3.1.1)$$

Généralement, le lagrangien correspond à la différence entre l'énergie cinétique et potentielle

$$\mathcal{L} = E_{kin} - E_{pot} \quad (3.1.2)$$

mais, dans le cadre d'une théorie relativiste, nous devons nous assurer que ceci est formulé de manière adéquate afin d'obtenir un scalaire de Lorentz (voir l'équation (2.1.7)).

Selon le principe de moindre action, le chemin emprunté par un système dans l'espace des configurations est celui pour lequel l'action  $\mathcal{S}$  est minimisée. En supposant que  $\mathcal{L}$  est une fonction raisonnablement lisse, de petites variations dans les arguments de  $\mathcal{L}$ , dénotées par  $\delta\varphi$  et  $\delta(\partial_\mu\varphi)$  devraient donc laisser  $\mathcal{S}$  inchangé, c'est-à-dire  $\delta\mathcal{S} = 0$ . En écrivant la variation de  $\mathcal{S}$  en fonction des variations  $\delta\varphi$  et  $\delta(\partial_\mu\varphi)$ , on obtient

$$\delta\mathcal{S} = \int \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\partial_\mu\varphi \right] d^4x \quad (3.1.3)$$

Par la règle du produit à l'intérieur d'une dérivée, on a

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\partial_\mu \varphi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi \quad (3.1.4)$$

L'équation (3.1.3) devient alors

$$\delta\mathcal{S} = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) \right] d^4x \quad (3.1.5)$$

Notons la forme du dernier terme de cette intégrale. Étant donnée la somme sur les dérivées  $\partial_\mu$ , nous pouvons remplacer son intégrale par un terme intégré sur la surface du volume d'intégration original (en utilisant le théorème de Stokes). En général, il est possible de considérer que ce terme est annulé par des conditions aux frontières bien choisies. D'une certaine manière, on peut dire que l'action est minimisée seulement à un terme de surface près. En nous rappelant que  $\delta\mathcal{S} = 0$ , nous obtenons donc

$$\int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \right] \delta\varphi d^4x = 0 \quad (3.1.6)$$

Comme l'intégrale doit être nulle pour un choix arbitraire de  $\delta\varphi$ , on peut conclure que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (3.1.7)$$

Ceci est l'équation d'Euler-Lagrange pour un champ classique.

On peut également utiliser la formulation hamiltonienne pour décrire un champ classique. Alors que la formulation Lagrangienne est parfois plus appropriée du fait

de son invariance sous les transformations de Lorentz, la formulation Hamiltonienne est plus directement reliée à l'énergie d'un système, ce qui simplifie son application à des systèmes quantiques. Considérons le cas d'un système sur des points spatiaux discrets (mais avec un temps continu), nous donnant des points dans l'espace-temps dénotés par  $\mathbf{x}$ . À chaque degré de liberté  $q(\mathbf{x})$ , on associe une impulsion conjuguée

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad (3.1.8)$$

où

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.1.9)$$

On peut alors définir l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  comme

$$\mathcal{H} = \sum p\dot{q} - \mathcal{L} \quad (3.1.10)$$

Dans le cas continu (à 3 dimensions spatiales), il est possible d'utiliser le même principe pour définir une densité d'impulsion  $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ , un hamiltonien  $\mathcal{H}$  et une densité hamiltonienne  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \mathcal{H} = \int [\mathcal{P}(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}] d^3x = \int \mathcal{H} d^3x \quad (3.1.11)$$

Considérons maintenant un champ classique réel ayant la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}(m\phi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}(m\phi)^2 \quad (3.1.12)$$

Ici  $m$  est techniquement un paramètre ajustable mais, comme le symbole choisi l'indique, il correspond à une masse. L'application de l'équation d'Euler-Lagrange pour cette densité lagrangienne nous donne l'équation de Klein-Gordon

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \varphi = 0 \quad (3.1.13)$$

où

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (3.1.14)$$

en utilisant la notation d'Einstein et la métrique  $g^{\mu\nu}$ . L'hamiltonien pour ce champ est facilement calculé à partir de sa densité lagrangienne

$$\mathcal{H} = \int \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} (m\varphi)^2 \right] d^3x \quad (3.1.15)$$

La quantification de ce champ nous permettra d'obtenir la théorie de champ quantique la plus simple: la théorie d'un champ scalaire libre.

### 3.2 Champ scalaire quantique

Comme son nom l'indique, un champ scalaire se transforme comme un scalaire sous l'action d'une transformation de Lorentz. Pour l'instant, le seul exemple de champ quantique scalaire ayant été observé dans la nature est le champ de Higgs. Pour commencer notre traitement du champ quantique scalaire libre, nous appliquons

une procédure de quantification à l'équation de Klein-Gordon. Notons que, comme pour la relativité restreinte, nous utilisons des unités naturelles où  $\hbar = 1$ . Pour un système quantique discret, les variables  $p$  et  $q$  deviennent des opérateurs et obéissent aux relations de commutation canoniques

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (3.2.1)$$

Notons que ces relations de commutation sont reliées au célèbre principe d'incertitude de Heisenberg. Les opérateurs qui commutent (c'est à dire dont le commutateur vaut 0) représentent des quantités dont les valeurs peuvent être simultanément connues jusqu'à une précision théoriquement arbitraire. Alors qu'en mécanique classique toutes les valeurs observables commutent, ce n'est pas toujours le cas en physique quantique. En informatique quantique, pensons à la base calculatoire versus la base de Hadamard: un état donnant un résultat certain dans l'une de ces bases engendre un résultat aléatoire dans l'autre. Les relations de commutation canoniques spécifient la relation d'incertitude entre une coordonnée généralisée et sa conjuguée canonique (impulsion généralisée dans le formalisme Hamiltonien). En général, ces variables sont reliées par une transformée de Fourier. Une forme de relation d'incertitude générale basée sur les commutateurs est celle de Robertson [57]

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \quad (3.2.2)$$

où  $\sigma$  représente la déviation standard et  $\langle \rangle$  la valeur moyenne

Nous désirons obtenir des relations similaires pour  $\varphi(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ . En passant du modèle discret au modèle continu, il suffit de remplacer le delta de Kronecker par le delta de Dirac et on obtient

$$[\varphi(\mathbf{x}), \mathcal{P}(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad [\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}')] = [\mathcal{P}(\mathbf{x}), \mathcal{P}(\mathbf{x}')] = 0 \quad (3.2.3)$$

Nous supposons ici que l'échelle où les champs pourraient être discrets est de l'ordre de l'échelle de Planck et que nous pouvons donc passer au régime continu sans rendre notre théorie inadéquate pour la modélisation d'expériences réalisables avec la technologie qui nous est disponible.

Nous désirons savoir quelles solutions sont possible pour l'équation de Klein-Gordon. Comme cette équation implique des dérivées spatiales, il est utile de prendre la transformée de Fourier de  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  et de passer ainsi dans le domaine des impulsions, où les dérivées spatiales ne font qu'introduire un facteur multiplicatif. En utilisant la transformée de Fourier, un champ s'exprime comme

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\varphi(\mathbf{p}, t)) = \int \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}, t) d^3p \quad (3.2.4)$$

En terme de  $\varphi(\mathbf{p}, t)$ , l'équation de Klein-Gordon nous donne

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|p|^2 + m^2) \right] \varphi(\mathbf{p}, t) = 0 \quad (3.2.5)$$

Ceci est simplement l'équation de mouvement pour un oscillateur harmonique avec une fréquence naturelle

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|p|^2 + m^2} \quad (3.2.6)$$

Le traitement d'un oscillateur harmonique quantifié est bien établi: l'hamiltonien pour un tel système est

$$\mathcal{H}_{Osc} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\varphi^2 \quad (3.2.7)$$

Comme expliqué en détails dans plusieurs manuels (par exemple celui de Griffiths [36]), les solutions peuvent être décrites en fonction des opérateurs  $a$  (l'opérateur d'annihilation) et  $a^\dagger$  (l'opérateur de création). Comme leurs noms l'indiquent, ces opérateurs permettent de détruire ou de créer une excitation dans le système. Par exemple, en partant de l'état fondamental  $|0\rangle$  (celui où il est impossible de détruire une excitation, c'est-à-dire  $a|0\rangle = 0$ ), il est possible d'obtenir l'état avec  $n$  excitations en appliquant  $n$  fois  $a^\dagger$ , c'est-à-dire  $(a^\dagger)^n|0\rangle \propto |n\rangle$ . En terme de ces opérateurs,  $\varphi$  et  $p$  sont

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (3.2.8)$$

Avec les relations de commutation

$$[\varphi, p] = i \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (3.2.9)$$

L'hamiltonien  $\mathcal{H}_{Osc}$  peut également être décrit en terme des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$

$$\mathcal{H}_{Osc} = \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (3.2.10)$$

Les états propres pour cet hamiltonien,  $|n\rangle$  ont comme énergies les valeurs propres

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (3.2.11)$$

En particulier, l'énergie de l'état fondamental est  $\omega/2$ , une caractéristique célèbre de l'oscillateur harmonique simple quantique.

Le traitement de l'hamiltonien de Klein-Gordon est similaire. Dans ce cas, chaque mode dans l'espace des impulsions peut être modélisé comme un oscillateur harmonique indépendant. On peut donc écrire  $\varphi(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{P}(\mathbf{x})$  en terme d'un opérateur d'annihilation  $a_{\mathbf{p}}$  et d'un opérateur de création  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  pour chaque mode d'impulsion  $\mathbf{p}$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left( a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) d^3 p \quad (3.2.12)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \int \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left( a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) d^3 p \quad (3.2.13)$$

Ces équations sont supplémentées par les relations de commutation

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad [\varphi(\mathbf{x}), \mathcal{P}(\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.2.14)$$

Il est ensuite possible d'utiliser ces expressions pour écrire l'hamiltonien du champ en fonction de  $a_{\mathbf{p}}$  et  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ .

$$\mathcal{H} = \int \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right) \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^3} d^3 p \quad (3.2.15)$$

Les lecteurs avertis pourront ici remarquer un problème: cette dernière intégrale ne converge pas. En effet, le commutateur de  $a_{\mathbf{p}}$  et  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  nous donne un terme en  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p})$ , ce qui explose. Cependant, comme ce terme est constant, il n'affecte pas la dynamique émergeant des équations. Dans un hamiltonien ou un lagrangien, un terme constant, même infini, peut donc être ignoré sans problème. En fait, il est évident que l'intégrale de l'équation (3.2.15) ne peut converger, puisque chaque oscillateur harmonique contribue une énergie du vide de  $\omega_{\mathbf{p}}/2$  et notre système comprend un nombre infini de ces oscillateurs.

À ce point, nous pouvons conclure que le champ scalaire libre est un champ bosonique. C'est-à-dire que, comme  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  et  $a_{\mathbf{p}'}$  commutent, l'ordre dans lequel les excitations (que l'on peut considérer comme des particules de spin entier) sont créés n'est pas important et chaque mode peut être excité un nombre arbitraire de fois.

Remarquons qu'afin de modéliser des phénomènes physiques plus complexes que la simple propagation libre (des collisions entre particules, par exemple), il faudra ajouter des termes d'interaction au lagrangien. Il sera ensuite possible de traiter les interactions comme de faibles perturbations à la théorie libre.

### 3.3 Champ de Dirac

Maintenant que nous avons vu un exemple de champ quantique bosonique, passons à un champ fermionique. Contrairement aux bosons, les fermions ont un spin demi-entier ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , etc.), acquièrent une phase négative sous l'échange de particules et obéissent au principe d'exclusion de Pauli [51]. Nous traitons d'abord l'équation de Dirac pour un champ classique relativiste et appliquons ensuite une procédure de quantification. L'équation est nommée en l'honneur de Paul Dirac, qui l'a dérivée en 1928 [25].

Introduisons premièrement l'algèbre de Dirac. Les matrices  $\gamma^\mu$  de dimension  $n \times n$  satisfaisant à

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \times \mathbf{1}_{n \times n} \quad (3.3.1)$$

où  $\{A, B\} = AB + BA$  est l'anticommutateur de  $A$  et  $B$ , nous permettent d'écrire les générateurs pour une représentation à  $n$  dimensions (voir l'équation (2.1.12)) du groupe de Lorentz

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.3.2)$$

Nous souhaitons travailler avec un champ (pour l'instant classique) à quatre composantes. Dans sa version quantique, il correspond à un champ de spin  $\frac{1}{2}$ . Lorsque nous étudions un champ fermionique, la convention veut que nous passions à la variable  $\psi$  pour représenter ce champ. Pour agir sur  $\psi$ , nous utilisons une

représentation explicite de l'algèbre de Dirac en matrices de blocs  $2 \times 2$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

où les  $\sigma^j$  sont à nouveau les matrices de Pauli  $2 \times 2$  ((2.1.16)). Cette représentation est celle de Weyl. Les générateurs de boost sont alors

$$S^{0j} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

et les générateurs de rotation sont

$$S^{jk} = \frac{\varepsilon^{jkl}}{2} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & -\sigma^l \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

De plus, les matrices  $\gamma$  et les générateurs  $S$  satisfont à

$$[\gamma^\mu, S^{\kappa\lambda}] = (J^{\kappa\lambda})^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.3.6)$$

où les générateurs  $J$  correspondent à ceux de l'équation (2.1.19). En utilisant cette relation de commutation et l'équation (2.1.22), on peut obtenir

$$\left(1 + \frac{i}{2} \Theta_{\kappa\lambda} S^{\kappa\lambda}\right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{2} \Theta_{\kappa\lambda} S^{\kappa\lambda}\right) = \left(1 - \frac{i}{2} \Theta_{\kappa\lambda} J^{\kappa\lambda}\right)^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.3.7)$$

Les termes entre parenthèses peuvent être interprétés comme des transformations infinitésimales de Lorentz sur les composantes d'un champ de spin  $\frac{1}{2}$ . En utilisant ces transformations, on peut généraliser pour des transformations finies

$$L_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu L_{\frac{1}{2}} = L^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (3.3.8)$$

où

$$L_{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i}{2} \Theta_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad (3.3.9)$$

À partir de ceci, nous observons que  $\gamma^\mu$  est bel et bien un quadrivecteur de Lorentz et que nous pouvons donc utiliser son produit scalaire avec  $\partial_\mu$  pour obtenir un opérateur différentiel invariant de Lorentz.

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour définir l'équation de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.10)$$

Notons que cette équation est en quelque sorte la racine carrée de l'équation de Klein-Gordon. En effet, il suffit de multiplier par  $(-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$  à gauche des deux côtés de l'équation de Dirac pour obtenir l'équation de Klein-Gordon.

Nous désirons maintenant construire une densité lagrangienne qui est un scalaire de Lorentz pour le spineur<sup>1</sup> de Dirac. À ce point, notons que les transformations

---

<sup>1</sup>Un spineur est un élément d'une représentation linéaire du groupe des rotations. Contrairement à un vecteur, un spineur se transforme en son opposé sous une rotation d'un tour complet et il est nécessaire d'effectuer un second tour pour retrouver l'état initial.

de Lorentz  $L_{\frac{1}{2}}$  pour les boosts ne sont pas unitaires (ceci est permis puisque  $\psi$  n'est pas ici une fonction d'onde mais bien un champ classique) et donc que  $L_{\frac{1}{2}}^\dagger \neq L_{\frac{1}{2}}^{-1}$ . On ne peut donc pas simplement utiliser des termes en  $\psi^\dagger \psi$  puisque sous un boost quelconque ceci devient  $\psi^\dagger L_{\frac{1}{2}}^\dagger L_{\frac{1}{2}} \psi$ , ce qui n'est pas équivalent à  $\psi^\dagger L_{\frac{1}{2}}^{-1} L_{\frac{1}{2}} \psi$ . On définit alors

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.3.11)$$

qui se trouve à avoir la règle de transformation recherchée

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} L_{\frac{1}{2}}^{-1} \quad (3.3.12)$$

La densité lagrangienne qui correspond à l'équation de Dirac est alors

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (3.3.13)$$

La prochaine étape est de quantifier la théorie des spineurs de Dirac. En examinant  $\mathcal{L}_D$ , on conclut que l'impulsion conjuguée de  $\psi$  est  $i\psi^\dagger$ . L'hamiltonien est donc

$$\mathcal{H} = \int \bar{\psi} (-i\gamma \cdot \nabla + m) \psi \quad (3.3.14)$$

En sortant le facteur  $\gamma^0$  contenu dans  $\bar{\psi}$ , le terme entre parenthèses devient

$$\mathcal{H}_{Par} = (-i\gamma^0 \gamma \cdot \nabla + m\gamma^0) \quad (3.3.15)$$

Ceci correspond à l'hamiltonien de Dirac pour une seule particule en mécanique quantique. À ce point, on pourrait être tenté d'employer la même stratégie que pour le champ de Klein-Gordon et d'imposer la relation de commutation

$$\left[ \psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{x}') \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ab} \quad (3.3.16)$$

Malheureusement, il s'avère que ceci ne fonctionne pas. En effet, une solution utilisant les commutateurs usuels mène à un système où il n'y a pas de niveau fondamental et qui souffre donc d'une instabilité catastrophique. Il est possible de corriger ce problème et plusieurs autres en remplaçant les commutateurs par des anticommutateurs. Donc, on utilise

$$\left\{ \psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{x}') \right\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ab} \quad (3.3.17)$$

En passant dans le domaine des impulsions et en utilisant les solutions connues pour l'hamiltonien  $\mathcal{H}_{Par}$ , on peut déterminer que pour chaque état quantique (donc pour chaque combinaison d'impulsion et de spin) on a un oscillateur fermionique, c'est-à-dire un oscillateur à seulement deux niveaux, vide et occupé. Pour chacun de ces oscillateurs, on a un opérateur d'annihilation  $a_{\mathbf{p}}^S$  et un opérateur de création  $a_{\mathbf{p}}^{S\dagger}$ . De plus, les solutions de fréquences négatives (dans le formalisme des fermions, ces solutions ont une énergie positive) sont également permises, avec leurs propres opérateurs équivalents  $b_{\mathbf{p}}^S$  et  $b_{\mathbf{p}}^{S\dagger}$ . En terme de ces opérateurs, on peut écrire  $\psi$  comme

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_S \left( a_{\mathbf{p}}^S c_{\mathbf{p}}^S e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^{S\dagger} d_{\mathbf{p}}^S e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) d^3 p \quad (3.3.18)$$

et  $\bar{\psi}$  comme

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_S \left( a_{\mathbf{p}}^{S\dagger} \bar{c}_{\mathbf{p}}^S e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^S \bar{d}_{\mathbf{p}}^S e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right) d^3 p \quad (3.3.19)$$

où

$$c_{\mathbf{p}}^S = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}B^S} \\ \sqrt{\mathbf{p}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}B^S} \end{pmatrix} \quad d_{\mathbf{p}}^S = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}B'^S} \\ -\sqrt{\mathbf{p}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}B'^S} \end{pmatrix} \quad (3.3.20)$$

Ici  $B^S$  et  $B'^S$  sont des bases vectorielles dans l'espace des spins.

Comme les champs, les opérateurs d'annihilation et de création satisfont à des relations d'anticommutation

$$\{a_{\mathbf{p}}^S, a_{\mathbf{p}'}^{S'\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^S, b_{\mathbf{p}'}^{S'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{SS'} \quad (3.3.21)$$

On peut exprimer l'hamiltonien du champ en termes de ces opérateurs

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_S E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^{S\dagger} a_{\mathbf{p}}^S + b_{\mathbf{p}}^{S\dagger} b_{\mathbf{p}}^S \right) d^3 p \quad (3.3.22)$$

Notons que cet hamiltonien est obtenu à l'aide d'une stratégie similaire à celle que nous avons employée pour traiter l'hamiltonien de Klein-Gordon, c'est-à-dire qu'une infinité constante dans la densité hamiltonienne a été ignorée. L'état fondamental pour

ce système  $|0\rangle$  est celui pour lequel

$$a_{\mathbf{p}}^S|0\rangle = b_{\mathbf{p}}^S|0\rangle = 0 \quad (3.3.23)$$

Les états créés par  $a_{\mathbf{p}}^{S\dagger}$  peuvent être interprétés comme correspondant aux particules, par exemple les électrons, alors que ceux créés par  $b_{\mathbf{p}}^{S\dagger}$  correspondent aux antiparticules, comme les positrons (notons que ce choix est arbitraire, on pourrait dire que l'électron est l'antiparticule et vice versa). Les particules et leurs antiparticules se distinguent entre autres par l'inversion de leurs spins pour une même description dans une base  $B^S$ . Par exemple, si l'état  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond à un électron spin «up», alors un positron décrit par cet état dans la même base est spin «down».

À ce point, nous pourrions nous lancer dans le traitement de cette théorie avec une densité lagrangienne modifiée de manière à tenir compte des interactions et ensuite calculer les sections efficaces pour différents phénomènes. Cependant, ceci serait long et technique et ce que nous avons fait devrait être adéquat pour comprendre le genre de théories que nous désirons modéliser dans le cadre d'une théorie à base d'automate cellulaire quantique. Avant de délaissier l'équation de Dirac cependant, nous devons considérer une représentation alternative de groupe de Lorentz pour un champ fermionique, celle de Weyl (d'après le physicien Hermann Weyl). En effet, cette représentation est plus proche de l'état d'une cellule de l'automate cellulaire quantique que nous utilisons au chapitre 5.

Comme les matrices  $\gamma^\mu$  viennent en blocs  $2 \times 2$ , il est possible de séparer  $\psi$  en deux composantes qui sont généralement dénotées  $\psi_G$  (champ gaucher) et  $\psi_D$  (champ droitier)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_G \\ \psi_D \end{pmatrix} \quad (3.3.24)$$

Ces champs à deux composantes sont également appelés spineurs de Weyl. Pour une rotation infinitésimale vectorielle  $\theta$  et un boost infinitésimal vectoriel  $\beta$ , ces spineurs se transforment comme

$$\begin{aligned} \psi_G &\rightarrow \left(1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} - \beta \cdot \frac{\sigma}{2}\right) \psi_G \\ \psi_D &\rightarrow \left(1 - i\theta \cdot \frac{\sigma}{2} + \beta \cdot \frac{\sigma}{2}\right) \psi_D \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

Il est relativement simple de réécrire l'équation de Dirac en terme des spineurs de Weyl

$$\begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_G \\ \psi_D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.26)$$

Ceci peut également être noté comme

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_G \\ \psi_D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.27)$$

où

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \sigma) \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, -\sigma) \quad (3.3.28)$$

De plus, notons que pour un champ de masse nul, l'équation pour  $\psi_G$  devient découplée de celle pour  $\psi_D$ , ce qui nous donne les équations de Weyl

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_G &= 0 \\ \sigma^\mu \partial_\mu \psi_D &= 0\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

Par exemple, le comportement des neutrinos, qui ont une masse très faible et un spin  $\frac{1}{2}$ , peut être approximé en traitant ces équations. Un neutrino correspond à un champ gaucher (son spin est dans la direction opposée à son impulsion) et un antineutrino correspond à un champ droitier (son spin est dans la même direction que son impulsion). Cependant, ceci n'est qu'une approximation puisque les neutrinos ont en fait une masse (comme démontré par leurs oscillations de saveurs). En effet, comme ils se propagent strictement plus lentement que la vitesse de la lumière, le signe de la projection de leur spin sur leur impulsion n'est pas un invariant de Lorentz.

## CHAPITRE 4

### AUTOMATES CELLULAIRES

Depuis les débuts de l'informatique, cette science nous a permis de nous poser de meilleures questions sur comment l'information est traitée dans la nature. L'un des pionniers des automates cellulaires dans les années 1950, John Von Neumann, était fasciné par les analogies entre l'ordinateur et le cerveau biologique [68]. Avec le réseau de neurones artificiels, l'automate cellulaire est l'un des plus célèbres modèles de calcul qui tente d'émuler la nature quant au traitement de l'information.

Contrairement aux architectures de calcul artificielles les plus répandues, la plupart des systèmes biologiques (tels les cerveaux, les hordes d'animaux et les systèmes immunitaires) traitent l'information beaucoup plus en parallèle qu'en série, et ce de manière très décentralisée, où les composantes individuelles communiquent uniquement avec leurs voisines les plus rapprochées. En ce sens, l'automate cellulaire se rapproche plus d'un système naturel que presque tous les autres modèles de calcul. Malgré la simplicité relative des règles qui régissent les automates cellulaires, les phénomènes pouvant émerger à l'intérieur de ceux-ci peuvent être d'une complexité impressionnante. Par exemple, certains sont universels, beaucoup sont chaotiques et quelques-uns sont mêmes très élégants au niveau visuel.

Dans les années 1980, Stephen Wolfram a étudié les automates cellulaires d'un point de vue mathématiquement plus formel [72], ouvrant les portes sur les aspects statistiques et les diverses applications du modèle de calcul. Aussi, c'est autour de ce moment que Richard Feynman a proposé l'idée de différents modèles de calcul quantique visant à simuler la physique. Lors de son célèbre discours à Caltech [30], il mentionne entre autres l'automate cellulaire dans cette optique.

#### **4.1 Automates cellulaires classiques**

Commençons par le modèle le plus simple: l'automate cellulaire classique à une dimension spatiale. Un tel automate est constitué d'un ensemble de cellules identiques. Les cellules sont disposées en rangée et chacune est identiquement (du moins au niveau topologique) connectée de manière locale à d'autres cellules. La rangée peut être infinie, mais dans le cas fini, nous aurons  $N$  cellules et les frontières pourront être périodiques (la rangée de cellules revient sur elle-même) ou définies autrement, tant que les cellules aux frontières  $y$  sont connectées comme à d'autres cellules.

Chaque cellule, dénotée par l'indice  $i$  représentant sa position dans la rangée, est une machine à état fini. Nous notons par  $\Sigma$  l'ensemble des états possibles d'une cellule (dans le cas le plus simple et le plus commun,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ) et nous disons que la cardinalité  $d_c = |\Sigma|$  est la dimension de la cellule. L'état d'une cellule spécifique

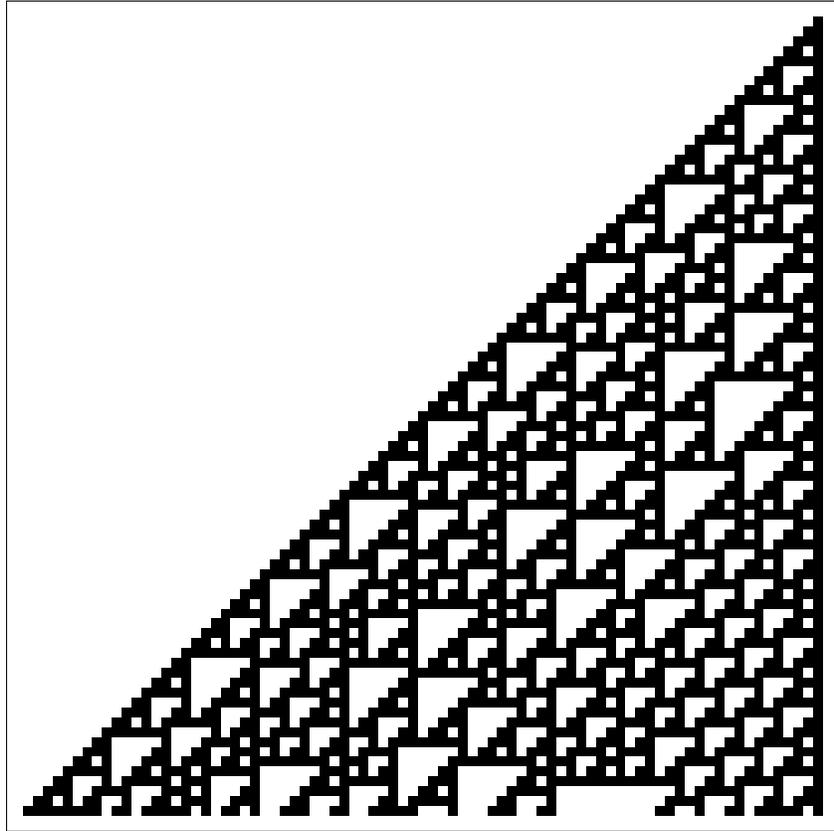
au temps  $t$  est dénoté par  $s_i^t$ , avec bien sûr  $s_i^t \in \Sigma$ . La cellule  $i$  ainsi que l'ensemble des cellules qui lui sont connectées s'appelle le voisinage de  $i$ , noté  $v_i$ . L'état de  $v_i$  au temps (discret)  $t$  est  $\eta_i^t$ . Les voisinages les plus simples sont spécifiés par leur rayon  $r$ . Dans ce cas,  $v_i = i - r, \dots, i, \dots, i + r$ . Lorsque nous parlons des voisines d'une cellule, la cellule elle-même est exclue bien qu'elle fasse partie de son propre voisinage. Seul le voisinage d'une cellule peut influencer son prochain état. La règle de transition locale pour une cellule en fonction de l'état de son voisinage est représentée par une fonction  $T$  et on aura

$$s_i^{t+1} = T(\eta_i^t) \quad (4.1.1)$$

L'automate est dit *synchronisé* (c'est presque toujours le cas pour les systèmes étudiés) si l'ensemble des cellules se mettent à jour au même moment. Notons que ceci n'aura plus nécessairement de sens lorsque nous parlerons d'un automate de champ quantique compatible avec le principe de relativité, mais le concept sera remplacé par l'équivalent du cône de lumière, où l'influence causale est limitée par la vitesse maximale de propagation d'un signal dans l'automate.

L'état complet de l'automate au temps  $t$  est noté  $s_G^t$

$$s_G^t = s_0^t s_1^t \dots s_{N-1}^t \quad (4.1.2)$$



$$T_{110} = \frac{\begin{array}{cccccccc} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}}{\quad}$$

Figure 4.1 : **Figure du haut:** Évolution de l'automate cellulaire élémentaire de la règle 110. La première ligne du graphique donne l'état initial (un seul 1 à l'extrême droite) et chaque ligne subséquente vers le bas incrémente l'état de l'automate d'un pas de temps. **Table du bas:** La rangée du haut donne l'état du voisinage au temps  $t$  et la rangée du bas l'état de la cellule centrale du voisinage au temps  $t + 1$ . Nous avons choisi cette règle parce que, malgré sa simplicité, elle permet de simuler une machine de Turing arbitraire.

Notons que pour un automate infini, il est bien sûr impossible d'écrire explicitement un état global arbitraire. L'ensemble de l'automate effectue une transformation globale  $T_G$

$$s_G^{t+1} = T_G(s_G^t) \quad (4.1.3)$$

Un automate est dit réversible si la transformation  $T_G$  est elle-même réversible et est dit *structurellement réversible* si  $T_G^{-1}$  peut être implémentée par une transformation locale (dans ce cas la transformation inverse constituera aussi un automate cellulaire).

Un automate à une dimension spatiale avec  $d_c = 2$  et  $r = 1$  est appelé *automate cellulaire élémentaire*. Au nombre de  $2^8 = 256$ , ils sont numérotés en ordre lexicographique, chaque bit du numéro correspondant au bit de sortie pour l'état du voisinage correspondant à la position du bit. La figure 4.1 donne comme exemple la règle 110, règle particulièrement significative puisqu'il a été démontré que l'automate qu'elle engendre est calculatoirement universel [21]. En effet, en spécifiant l'état initial de manière adéquate, on peut retrouver le résultat d'un calcul (résoluble sur une machine de Turing) arbitraire dans l'état «final» de l'automate.

Bien sûr, les automates cellulaires peuvent avoir plus d'une dimension spatiale. Les définitions s'étendent naturellement, chaque cellule ayant un nombre d'indices correspondant à la dimension de l'automate  $d$ . Dans le cas de deux dimensions spatiales, les voisinages les plus courants sont le voisinage de Von Neumann et celui de Moore, illustrés à la figure 4.3.



Figure 4.2 : Des exemples d'automates cellulaires se retrouvent dans la nature. Le patron sur la coquille de ce mollusque (*Conus textile*, photographié par Richard Ling [40]) peut être approximativement reproduit par le schéma bidimensionnel généré par l'évolution dans le temps de l'automate cellulaire élémentaire de la règle 30. Ce gastéropode étant hautement venimeux, même les passionnés d'automates cellulaires devraient s'abstenir de le toucher.

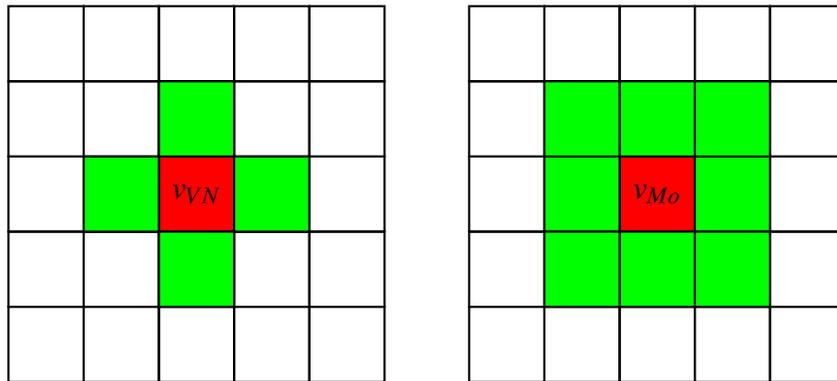


Figure 4.3 : Les deux voisinages les plus utilisés pour les automates cellulaires à deux dimensions spatiales: le voisinage de Von Neumann (à gauche) et le voisinage de Moore (à droite).

L'automate cellulaire le plus célèbre est sans conteste le jeu de la vie. Inventé en 1970 par John Conway [20], il s'agit d'un automate cellulaire à deux dimensions spatiales avec des règles très simples. Fidèlement au thème du jeu, nous disons qu'une cellule contenant un 1 est vivante et qu'une cellule contenant un 0 est morte ( $d_c = 2$ , donc ce sont les seuls états possibles). Le voisinage est celui de Moore et les règles sont comme suit:

1. Une cellule vivante reste en vie si elle a 2 ou 3 voisines vivantes, sinon elle meurt.
2. Une cellule morte ayant exactement 3 voisines vivantes devient vivante, sinon elle reste morte.

Le jeu ainsi défini est dit à *zéro joueur*, puisqu'une fois l'état global initial établi, il se joue lui-même. Malgré la simplicité des règles, une grande variété de

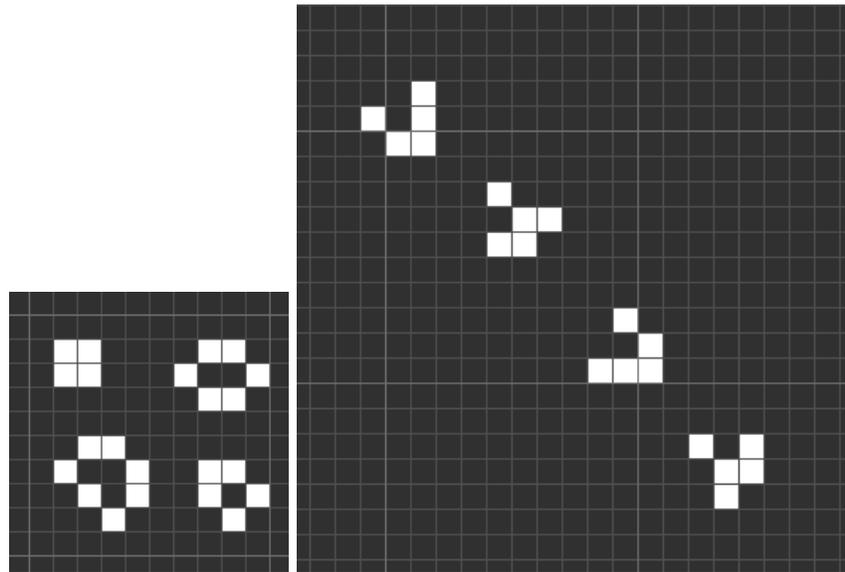


Figure 4.4 : Quelques structures fixes du jeu de la vie (à gauche) ainsi que les quatre étapes de l'évolution d'un *glider*, une structure se propageant en diagonale (à droite).

comportements existe dans cet automate. Certaines structures sont fixes, ne changeant que si leur environnement immédiat change, d'autres oscillent en place ou encore en se propageant (voir la figure 4.4). L'automate constitue un système chaotique, au sens où une petite variation dans l'état initial (l'inversion de l'état d'une seule cellule, par exemple) peut produire des changements imprévisibles à grande échelle après une évolution suffisamment longue.

Le jeu de la vie est calculatoirement universel et il est possible de construire explicitement une machine de Turing à l'intérieur (voir la figure 4.5). De plus, il a été démontré (référence [9]) qu'il est possible d'avoir un *constructeur universel* dans le jeu de la vie et qu'en le couplant à une machine de calcul universelle, il serait possible d'obtenir une machine capable de s'auto-répliquer à l'intérieur de

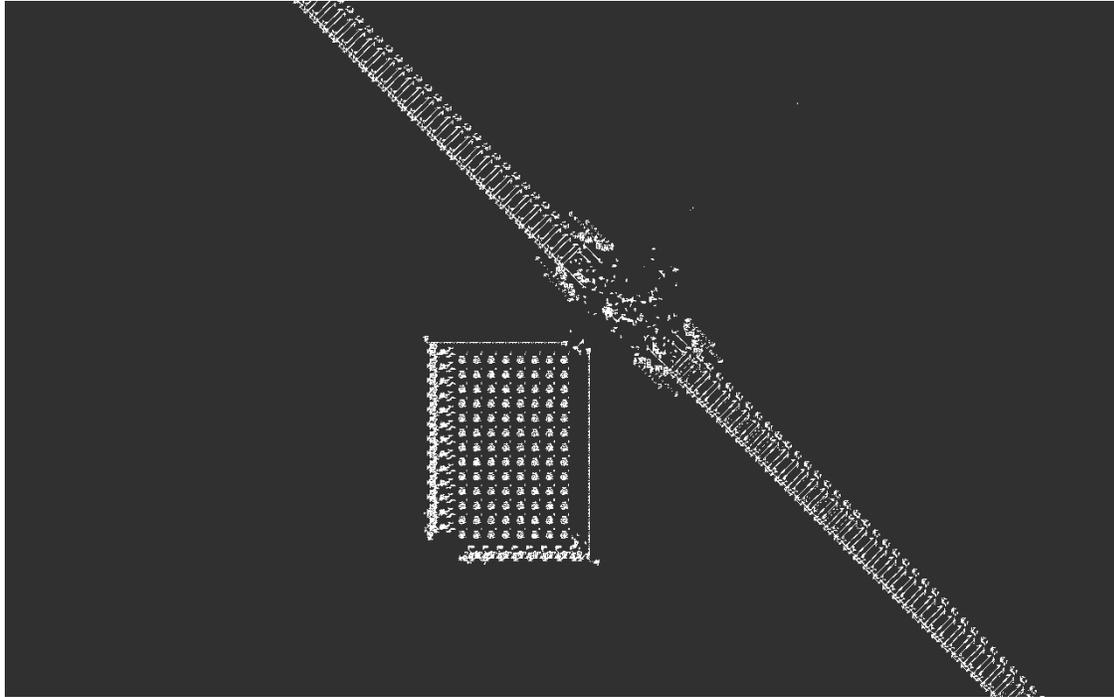


Figure 4.5 : Une machine de Turing universelle implémentée dans le jeu de la vie. Nous avons utilisé le design de Paul Rendell [55] pour la machine et l'algorithme Hashlife [33] pour l'évolution de l'automate. La tête de lecture de la machine (la composante rectangulaire) est fixe sur la grille de l'automate et le ruban de la machine est implémenté par deux piles (les longues structures diagonales). Celles-ci ne sont pas infinies, mais peuvent être construites graduellement de manière à ce que la taille du ruban ne soit pas limitée.

l'automate cellulaire. Une construction explicite d'une machine auto-répliquante plus simple a été donnée par Dave Green en 2013 [34]. Ces machines nécessitent un état initial très précis, mais en supposant un jeu de la vie sur une grille gigantesque évoluant pendant un temps très long (à partir d'un état initial aléatoire), nous pouvons envisager un processus évolutif d'où des systèmes auto-répliquants émergent. Après une évolution encore plus longue, ces systèmes pourraient s'organiser de manière à créer une véritable «vie» à l'intérieur du jeu. Il est donc envisageable qu'un jeu de la vie suffisamment grand et laissé à lui-même pendant suffisamment longtemps pourrait mener à l'évolution d'êtres intelligents et capables de se questionner sur la nature de leur univers.

## 4.2 Automates cellulaires quantiques

Alors que la définition d'un automate cellulaire classique présentée à la section 4.1 est utilisée de manière pratiquement universelle, il n'y a malheureusement pas une seule définition d'un automate cellulaire quantique sur laquelle tous les chercheurs s'entendent. Certaines caractéristiques sont cependant généralement requises (ou du moins désirées). Au temps  $t$ , l'état global d'un automate cellulaire quantique doit être un état quantique représenté par  $|s_G^t\rangle$ . La règle d'évolution globale devient donc

$$|s_G^{t+1}\rangle = U_G |s_G^t\rangle \quad (4.2.1)$$

L'unitarité de la transformation globale prend alors la forme

$$U_G U_G^\dagger = U_G^\dagger U_G = I \quad (4.2.2)$$

Historiquement, le premier traitement mathématique d'un automate cellulaire quantique est probablement celui de Grossing et Zeilinger [37]. Dans leur modèle,  $|s_G\rangle$  se décompose comme

$$|s_G\rangle = \sum_i c_i |b_i\rangle \quad (4.2.3)$$

où les  $|b_i\rangle$  constituent les bases de l'espace de Hilbert de l'automate (à une dimension spatiale) et l'information contenue dans chaque cellule  $i$  est simplement le coefficient  $c_i$ . Si la règle d'évolution est locale, ce genre d'automate ne donne lieu qu'à des translations. Cependant, comme nous le montrons au chapitre 5, un automate similaire avec certaines restrictions et modifications (un plus grand nombre de degrés de liberté par cellule, entre autres) peut donner lieu à une plus grande diversité de comportements.

Un modèle subséquent d'automate cellulaire quantique dont les propriétés informatiques ont été étudiées plus en détail est celui qui fut introduit par John Watrous en 1995 [69]. Il s'agit d'une quantification assez directe d'un automate cellulaire infini à une dimensions spatiale. Chaque cellule possède un ensemble fini d'états possibles  $\Sigma$  et un voisinage  $v$  également fini. La transition pour une cellule est spécifiée par une

fonction  $T$

$$T : \Sigma^V \rightarrow H_\Sigma \quad (4.2.4)$$

Chaque configuration classique du voisinage  $\Sigma^V$  est ainsi amenée vers un état dans l'espace de Hilbert sur  $\Sigma$  et l'évolution d'une superposition quantique d'états du voisinage est évaluée de manière linéaire. Une variante également introduite par Watrous en 1995, l'automate cellulaire quantique à partition, fut le premier à être démontré comme pouvant simuler avec un facteur de ralentissement constant toute machine de Turing quantique.

Ce premier modèle d'automate de Watrous n'est pas le plus pratique cependant, puisque la localité de la fonction de transition ne suffit pas à garantir une fonction de transition globale ayant un comportement adéquat pour un système physique. En effet, la fonction de transition globale d'un tel automate peut être non-réversible, ne pas préserver la normalisation des états et même permettre la transmission de signaux plus rapide que la vitesse de la «lumière» (un rayon de voisinage par pas de temps) dans l'automate. Voir par exemple la référence [61] pour un traitement plus détaillé.

Un modèle plus récent qui évite les problèmes comportementaux de certains automates de Watrous est celui de l'*automate cellulaire quantique réversible*, développé dans les références [56] et [61]. Dans ce modèle, à chaque cellule  $i$  ayant un espace de Hilbert de dimension  $n$  est associé une algèbre observable  $A_i$ . Ces algèbres sont isomorphes à l'algèbre des matrices complexes  $n \times n$ . Sur une région finie de l'automate  $\Lambda$ , nous avons une algèbre correspondant au produit tensoriel des algèbres

des cellules de la région

$$A(\Lambda) = \bigotimes_{i \in \Lambda} A_i \quad (4.2.5)$$

Nous pouvons prendre la limite inductive pour étendre  $\Lambda$  à tout l'automate ( $\mathbb{Z}^d$  pour un automate infini à  $d$  dimensions). Si  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  et que  $M$  est un opérateur sur  $A(\Lambda_1)$ , sur  $A(\Lambda_2)$  on l'identifie à l'opérateur  $M \otimes I$  qui n'affecte pas les cellules dans  $\Lambda_2 - \Lambda_1$ . Ceci nous permet d'obtenir une algèbre dite *quasi-locale* sur  $\mathbb{Z}^d$

$$A(\mathbb{Z}^d) = \varinjlim_{\Lambda} A(\Lambda) \quad (4.2.6)$$

La règle de transition globale d'un tel automate avec un voisinage fini  $\nu$  est un homomorphisme  $T_G$

$$T_G : A(\mathbb{Z}^d) \rightarrow A(\mathbb{Z}^d) \quad (4.2.7)$$

qui doit commuter avec les translations sur la grille de l'automate et satisfaire à la *condition de localité*: pour toute région finie  $\Lambda$ ,

$$T_G A(\Lambda) \subset A(\Lambda + \nu) \quad (4.2.8)$$

La fonction de transition locale est

$$T_0 : A_0 \rightarrow A(\nu) \quad (4.2.9)$$

ce qui détermine la règle de transition globale de manière unique

$$T_G \left( \bigotimes_{i \in \Lambda} A_i \right) = \prod_{i \in \Lambda} T_i(A_i) \quad (4.2.10)$$

Cette définition d'un automate cellulaire quantique est très utile. En effet, elle garantit que l'inverse d'un automate quantique réversible avec des interactions limitées aux plus proches voisins est également un automate partageant les mêmes caractéristiques. De plus, tous les automates quantiques réversibles peuvent être implémentés par un circuit homogène de profondeur constante, et ceci pour toute dimension  $d$  si l'on permet l'utilisation de systèmes ancillaires locaux dans le circuit. Une telle construction forme une structure en blocs de Margolus [67]. Les cellules sont alors divisées localement de deux manières différentes qui s'enchevêtrent comme illustré à la figure 4.6. Chacune de ces deux partitions de l'automate correspond à une couche dans le circuit utilisé pour évaluer l'évolution.

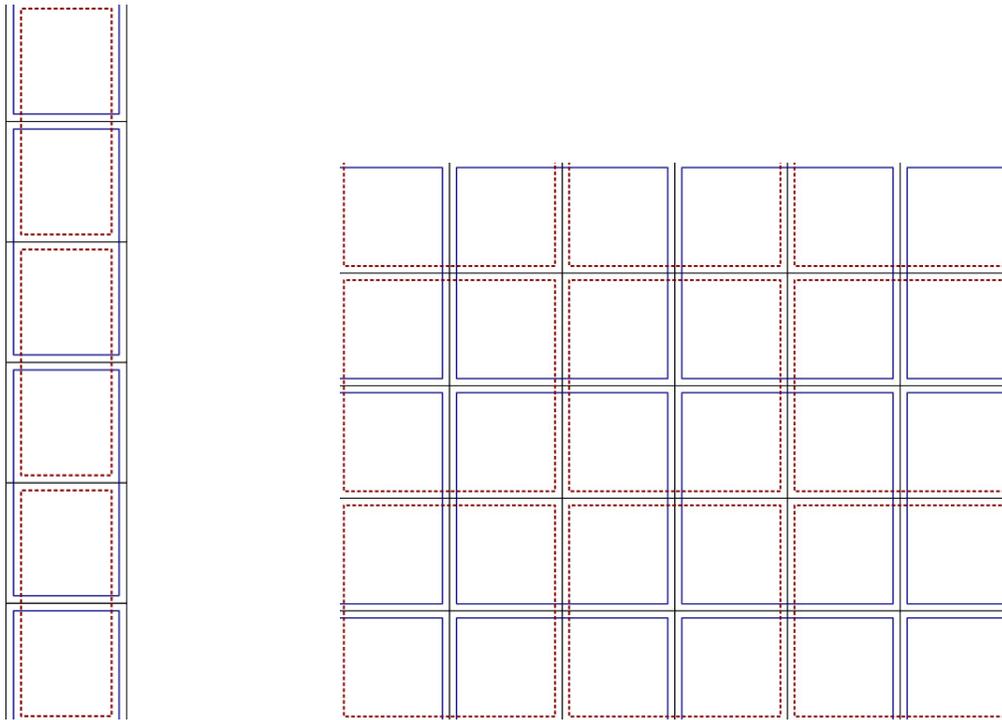


Figure 4.6 : Structures en bloc de Margolus en une dimension (à gauche) et deux dimensions (à droite). Un circuit faisant évoluer ces automates applique d'abord une transformation unitaire à chaque bloc bleu et ensuite une seconde transformation unitaire à chaque bloc rouge.

## CHAPITRE 5

### AUTOMATE QUANTIQUE RELATIVISTE

Comme cela avait été imaginé par Feynman, les automates cellulaires quantiques dont le formalisme est décrit à la section 4.2 ont été étudiés dans le contexte de simulations de la physique quantique. Les premiers modèles d'automates visant à intégrer les aspects relativistes sont apparus dans les années 1990 [10, 48]. Dans ces modèles, les automates visent à simuler une approximation discrète de champs quantiques continus (certains comportements émergeant seulement en prenant la limite vers un espace-temps continu). À l'inverse, serait-il possible que l'univers soit un automate cellulaire quantique au niveau le plus fondamental et que les théories que nous connaissons en soient une approximation à plus grande échelle? L'univers pourrait-il être un immense ordinateur, comme imaginé par Zuse [75] et puis, dans sa version quantique, Lloyd [43]?

En un sens, puisque l'état des systèmes physiques évolue dans le temps, nous pouvons dire qu'il est nécessaire que ces états futurs soient calculés. Peu importe les détails microscopiques de la physique, l'univers peut donc effectivement être vu comme un gigantesque ordinateur qui est constamment en train de calculer son évolution dans le temps. Même en adoptant ce point de vue, plusieurs questions demeurent. Par exemple, la physique est-elle discrète ou continue? Certains modèles

théoriques (comme il en a été question à la section 2.2) anticipent une discrétisation de l'espace et du temps. Un espace-temps fondamentalement discret est en quelque sorte naturellement suggéré par l'idée d'une gravité quantique [32], et cette approche pourrait potentiellement éliminer les problèmes de renormalisation qui surviennent lors de l'application de la théorie des champs quantiques à la gravité. De plus, si l'univers est discret, une densité (en espace) de puissance de calcul finie pourra lui permettre de calculer son évolution. Pour une physique continue, nous faisons face à une densité infinie d'information et donc à une densité infinie de puissance de calcul qui permet de traiter cette information. Dans ce cas, l'univers pourrait tout de même être considéré comme un ordinateur analogique, mais l'application des principes d'informatique à la physique serait probablement plus ardue.

Supposant une physique discrète à son niveau le plus fondamental, le calcul quantique suffit-il à évaluer son évolution? Ou bien est-ce qu'une classe de calcul plus grande est nécessaire pour tenir compte de tous les phénomènes physiques (pensons à nouveau à la gravité quantique, par exemple)? Il s'est écoulé plus de 60 ans entre les débuts de la mécanique quantique et l'idée du calcul quantique, alors il est difficile de prédire ce que l'éventuelle découverte d'une théorie unifiée de la physique pourrait amener comme nouveau modèle de traitement de l'information.

Nous avons choisi d'explorer une version de la physique basée sur le calcul quantique discret. De telles limites sur le modèle sont désirables, non seulement parce qu'elles nous simplifient la tâche, mais également parce qu'elles nous permettent

d'explorer ce que nous pourrions simuler sur un système de calcul quantique, même si la réalité s'avère être continue ou calculatoirement plus difficile.

Après avoir travaillé sur une dérivation opérationnelle de la théorie quantique, nos collaborateurs de l'université de Pavia se sont lancés à la recherche d'une manière de faire émerger la dynamique de la théorie des champs quantiques à partir d'un système discret correspondant à l'axiomatisation de la référence [18]. Comme cette axiomatisation constitue une inspiration importante pour nos travaux et que notre modèle en est en quelque sorte une extension plus concrète, nous en faisons un survol à l'annexe B.

Comme nous en avons discuté à la section 4.2, un automate cellulaire quantique structurellement réversible peut être implémenté en utilisant un circuit homogène de profondeur constante, ce qui correspond tout à fait à un système de portes et de fils répondant au formalisme de la section B.1. La règle d'évolution que nous utilisons dans nos travaux a été introduite pour la première fois dans la référence [23] avec pour but la modélisation d'un champ libre de Dirac à une dimension spatiale. Le modèle s'étend à deux et trois dimensions spatiales, mais nous considérons qu'il est plus illuminant (et mathématiquement moins lourd) d'utiliser la version unidimensionnelle pour étudier les effets relativistes et les transformations de référentiels. Le modèle de relativité restreinte déformée basée sur l'automate cellulaire quantique a été développé en majorité par l'auteur de cette thèse et une portion des résultats ici présentés ont été publiés dans l'article [11].

## 5.1 Règle d'évolution et relation de dispersion

Pour notre automate de champ quantique, partons avec l'unitarité locale et globale et des interactions limitées à  $r = 1$ , c'est-à-dire aux plus proches voisins (un voisinage plus grand pourrait être pris en compte en diminuant la résolution spatiale de l'automate et en ajoutant des degrés de liberté supplémentaires à chaque cellule). Comme l'indice  $i$  d'une cellule correspond à une position discrète dans l'espace, nous le remplaçons par  $x$ . L'information quantique vivant sur chaque cellule représente l'opérateur de champ quantique  $\psi_x$  dans la représentation des positions.

Aussi, plutôt que d'utiliser un automate quantique plus général (tel que ceux présentés à la section 4.2), nous utilisons un automate cellulaire quantique linéaire. En effet, comme le champ quantique que nous désirons modéliser est un champ libre, il n'est pas nécessaire de traiter les règles d'évolution qui représentent des interactions non-linéaires. Nous ne parlons pas ici de linéarité sur les superpositions quantiques d'états (condition automatiquement satisfaite par tous les automates cellulaires quantiques), mais bien de linéarité sur l'évolution de chaque état dans une telle superposition. Par exemple, l'évolution d'un état représentant deux particules se réduit à une combinaison linéaire des évolutions de deux états à une particule. Par analogie, dans l'évolution linéaire d'une table de billard où les boules sont soumises à une théorie libre, les boules passent les unes au travers des autres, ce qui est également le cas pour les particules d'un champ libre.

La restriction aux automates linéaires en ce sens nous permet d'écrire la matrice d'évolution comme une combinaison linéaire de matrices unitaires appliquées aux valeurs du voisinage

$$U_G = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} S_x \otimes U_x \quad (5.1.1)$$

où  $S_x$  est la matrice correspondant à l'opération de translation

$$S_x s_y^t = s_{x+y}^t \quad (5.1.2)$$

Plus explicitement, l'équation (5.1.1) nous donne une matrice à bande diagonale s'appliquant sur un vecteur (de vecteurs) contenant l'état de l'automate à un temps donné

$$U_G = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & U_{-1} & U_0 & U_1 & & & \\ & & U_{-1} & U_0 & U_1 & & \\ & & & U_{-1} & U_0 & U_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

Notons que ceci est généralement une matrice de matrices, puisque chaque  $U_x$  est une matrice agissant sur les degrés de liberté internes des cellules de l'automate.

Afin d'obtenir des expressions plus explicites pour les  $U_x$ , nous pouvons utiliser différentes contraintes. Pour commencer, la forme matricielle (5.1.3) pour la règle de

transition, couplée à l'équation (4.2.2), nous donne

$$U_1 U_1^\dagger + U_{-1} U_{-1}^\dagger + U_0 U_0^\dagger = I \quad U_0 U_1^\dagger + U_{-1} U_0^\dagger = 0, \quad U_{-1} U_1^\dagger = 0 \quad (5.1.4)$$

Dans le modèle relativement simple de champ libre que nous désirons développer, il n'y a pas de brisure de symétrie pour la parité et la direction du temps, c'est-à-dire que les transformations  $x \rightarrow -x$  et  $t \rightarrow -t$  doivent laisser l'automate inchangé. L'invariance sous parité nous indique que  $\psi_x$  doit avoir au moins deux degrés de liberté internes afin d'avoir une évolution non triviale. En effet, si  $\psi_x$  n'a qu'un seul degré de liberté, pour préserver sa norme les opérations locales de transition  $U_x$  doivent être de simples changements de phase. Ceci, couplé aux équations (5.1.4), nous laisse avec trois possibilités:

$$U_1 = e^{i\phi}, U_0 = U_{-1} = 0, \quad U_{-1} = e^{i\phi}, U_0 = U_1 = 0, \quad U_0 = e^{i\phi}, U_1 = U_{-1} = 0 \quad (5.1.5)$$

La seule des ces options qui est invariante sous parité est celle où  $U_G = e^{i\phi} I$ . Comme un changement de phase global est indétectable, un automate cellulaire quantique ayant dans chaque cellule la valeur d'un champ scalaire libre, comme celui de Klein-Gordon, a une évolution triviale (du moins en une dimension spatiale). Il faut donc ajouter un degré de liberté à  $\psi_x$  pour obtenir un comportement plus intéressant. Similairement au cas pour les spineurs de Weyl (voir l'équation (3.3.24)), nous notons

$$\psi(x) := \begin{pmatrix} \psi_G(x) \\ \psi_D(x) \end{pmatrix} \quad (5.1.6)$$

où  $\psi_G(x)$  et  $\psi_D(x)$  sont des objets à une composante. De manière générale, les transformations unitaires pour un  $\psi(x)$  à deux composantes sont des matrices  $2 \times 2$  de la forme

$$U_1 = \begin{pmatrix} n & l \\ p & q \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} n' & l' \\ p' & q' \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

Le traitement de l'automate à deux degrés de liberté est simplifié en l'examinant dans l'espace des impulsions. De plus, comme nous désirons ultimement travailler avec l'impulsion dans le cadre d'une théorie de relativité restreinte déformée, la représentation dans cet espace est plus naturelle. Similairement à ce que nous faisons à la section 3.2, nous utilisons la transformée de Fourier pour faire la transition (notons que puisqu'ici la dimension spatiale est discrète, l'intégrale de l'équation (3.2.4) est remplacée par une somme)

$$\psi(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ikx} \psi(x) \quad k \in [-\pi, \pi] \quad (5.1.8)$$

Nous pouvons faire de même pour les matrices de transition

$$U(k) = \sum_{x \in \{-1, 0, 1\}} U_x e^{-ikx} \quad (5.1.9)$$

Si l'automate est invariant sous une symétrie correspondant au groupe  $G$  dont les opérations sont représentées par  $\{O_g\}$ , on aura

$$U = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} O_g U_x O_g^\dagger S_{g(x)}, \quad \forall g \in G \quad (5.1.10)$$

Pour la parité, ceci nous donne

$$U = O_p U_1 O_p^\dagger S_{-1} + O_p U_{-1} O_p^\dagger S_1 + O_p U_0 O_p^\dagger I \quad (5.1.11)$$

et pour la direction du temps

$$U = (O_t I) U^\dagger (O_t^\dagger I) = O_t U_1^\dagger O_t^\dagger S_{-1} + O_t U_{-1}^\dagger O_t^\dagger S_1 + O_t U_0^\dagger O_t^\dagger I \quad (5.1.12)$$

On choisit une base où  $O_p$  et  $O_t$  sont

$$O_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_t = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.13)$$

où  $C$  est l'opération de conjugaison complexe (dénotée par  $*$  sur une variable), nécessaire pour maintenir l'ordre correct des opérations sous renversement de la direction du temps. L'application de l'équation (5.1.11) à la forme générale (5.1.7) nous donne alors

$$U_1 = \begin{pmatrix} n & l \\ p & q \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} q & p \\ l & n \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (5.1.14)$$

Nous pouvons utiliser la même procédure avec l'équation (5.1.12) pour obtenir une équation comparable

$$U_1 = \begin{pmatrix} n & l \\ l & q \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} q & l \\ l & n \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (5.1.15)$$

Pour réconcilier ces deux équations ainsi que (5.1.4), nous devons avoir

$$U_1 = \begin{pmatrix} n & l \\ \alpha n & \alpha l \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} \alpha l & \alpha n \\ l & n \end{pmatrix} \quad (5.1.16)$$

À ce point, on peut choisir entre la solution avec  $\alpha = 0$  et la solution avec  $\alpha \neq 0$ . Après analyse, il est apparent que les deux solutions sont unitairement équivalentes et mènent donc au même automate, alors nous choisissons ici de poursuivre avec  $\alpha = 0$ . Il nous reste quatre paramètres:  $a, b, n, l$ . On peut utiliser la partie  $O_t U_1 O_t^\dagger = U_{-1}^\dagger$  de l'équation (5.1.12) pour constater que  $l$  doit être nul. Rappelons-nous ensuite que nous avons  $U_0 U_1^\dagger + U_{-1} U_0^\dagger = 0$  à l'équation (5.1.4) pour voir que  $a$  et la partie réelle de  $nb^*$  sont également nuls. Sans perte de généralité, nous pouvons choisir  $n$  réel positif et noter  $b = -im$  (où  $m$  est également réel positif) en raison de leur rôle dans la forme finale de nos équations. Tout ceci nous donne finalement les formes des  $U_x$ :

$$U_1 = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0 & -im \\ -im & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.17)$$

L'équation (5.1.9) nous donne  $U(k)$

$$U(k) = \begin{pmatrix} ne^{ik} & -im \\ -im & ne^{-ik} \end{pmatrix} \quad (5.1.18)$$

avec  $n^2 + m^2 = 1$  donné par l'unitarité. La matrice  $U(k)$  peut être diagonalisée comme toute matrice unitaire  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} e^{i\omega(k)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega(k)} \end{pmatrix} \quad (5.1.19)$$

avec les valeurs propres

$$\lambda(k) = e^{\pm i\omega_m(k)} \quad (5.1.20)$$

Afin d'obtenir la relation de dispersion de l'automate, nous pouvons utiliser le fait que la trace de la matrice  $U(k)$  doit être la somme de ses valeurs propres

$$e^{i\omega(k)} + e^{-i\omega(k)} = ne^{ik} + ne^{-ik} \quad (5.1.21)$$

donc, comme  $n = \sqrt{1 - m^2}$ , on a

$$\omega_m(k) = \arccos(\sqrt{1 - m^2} \cos(k)) \quad (5.1.22)$$

Notons que le nom *relation de dispersion* provient du fait qu'un paquet aura tendance à se disperser dans un milieu où la relation entre sa fréquence temporelle  $\omega$  et sa fréquence spatiale  $k$  est non-linéaire. En effet, ceci correspond à un milieu où la vitesse de propagation dépend de la fréquence.

L'hamiltonien correspondant à l'interpolation sur un temps continu de l'évolution de notre automate peut être obtenu à partir de la forme diagonale (5.1.19) et de la relation de dispersion (5.1.22)

$$\mathcal{H}(k) = \frac{\omega_m(k)}{\sin(\omega_m(k))} \begin{pmatrix} -n \sin(k) & m \\ m & n \sin(k) \end{pmatrix} \quad (5.1.23)$$

L'évolution de l'automate se produit sur des pas de temps discrets et il n'y a pas de réel sens physique à ce qui se passe entre ces pas de temps. L'équation (5.1.23) constitue donc une construction purement mathématique, mais elle nous est utile pour comparer notre modèle à des modèles à temps continu.

Dans le domaine des positions, l'équation (5.1.1) combinée aux formes (5.1.17) des  $U_x$  nous donne

$$U_G = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} S_x \otimes U_x = \begin{pmatrix} nS_{-1} & -im \\ -im & nS_1 \end{pmatrix} \quad (5.1.24)$$

Notons que ceci est compatible avec l'équation (5.1.3), puisque l'invariance sous translation nous garantit que les matrices d'évolutions commutent avec les opérations de translation

$$[U_x, S_y] = 0 \quad (5.1.25)$$

ce qui nous laisse libre de représenter directement soit la dépendance sur la position dans l'automate (comme à l'équation (5.1.3)), soit la dépendance sur les degrés de liberté internes (équation (5.1.24)).

En associant  $m$  avec le paramètre de masse dans l'équation de Dirac, nous désirons vérifier que l'automate a l'évolution dans le temps désirée pour simuler celle-ci dans le régime approprié ( $k \ll 1$ ,  $m \ll 1$ ). Rappelons-nous que nous travaillons en unités naturelles où  $m = 1$  est la masse de Planck

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.18 \times 10^{-8} \text{kg} \quad (5.1.26)$$

et  $k = 1$  est l'impulsion de Planck

$$k_P = m_P c \approx 6.52 \text{kg} \frac{m}{s} \quad (5.1.27)$$

À l'échelle humaine ces valeurs ne sont pas particulièrement grandes (par exemple, il suffit dans lancer un objet pesant  $1 \text{kg}$  à environ  $24 \frac{km}{h}$  pour atteindre l'impulsion de Planck), mais dans le contexte de la physique des particules elles sont immensément plus grande que tout ce que l'on a jamais observé. En une dimension spatiale, l'analogie de l'hamiltonien (5.1.23) pour l'équation de Dirac est

$$\mathcal{H}_{Dir}(k) = \begin{pmatrix} -k & m \\ m & k \end{pmatrix} \quad (5.1.28)$$

ce à quoi se réduit effectivement (5.1.23) pour les très petites masses et impulsions (et donc les très petits  $\omega_m(k)$ ). À la lumière de cette correspondance dans le régime approprié, nous constatons que notre association du paramètre  $m$  introduit en (5.1.17) à une masse est justifiée. À ce point, mentionnons qu'il est assez remarquable qu'en imposant simplement la réversibilité structurelle, les interactions aux voisines les plus proches, la linéarité et l'unitarité de l'évolution et les symétries sur l'espace et le temps nous ayons obtenu un automate capable de simuler un champ de Dirac libre. Notons que les statistiques de Fermi-Dirac n'émergent pas directement du modèle d'automate, mais que la référence [23] montre comment les imposer de manière à simuler un champ fermionique tout en gardant l'évolution purement locale.

Dans le contexte de l'automate de champ quantique, on identifie l'énergie  $E$  à la fréquence temporelle  $\omega$  et la quantité de mouvement à la fréquence spatiale  $k$ . L'équation (2.1.24) nous donne alors la relation de dispersion pour la relativité restreinte

$$\omega_{RR} = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (5.1.29)$$

où il est facile de voir que  $\omega_{RR}$  croît de manière monotone en fonction de  $k$ . Pour les  $m$  et  $k$  correspondant à des fractions appréciables de  $m_P$  et  $k_P$ , les équations (5.1.22) et (5.1.29) divergent donc significativement.

Profitions de cette divergence pour expliquer de manière intuitive pourquoi la relativité restreinte non-déformée est incompatible non seulement avec l'automate spécifique que nous utilisons pour modéliser un champ de Dirac, mais aussi avec tout

autre modèle où l'information se propage sur une grille spatiale discrète régulière. Comme l'opération permettant de passer au domaine des impulsions est la transformée de Fourier, nous pouvons utiliser le fait qu'une fonction discrète a une transformée périodique. La fonction  $\omega_m(k)$  devra alors être également périodique. Au delà d'une fréquence spatiale critique  $k_{crit}$ , l'augmentation de l'énergie devra se renverser. L'impulsion  $k_{crit}$  est analogue à la fréquence de Nyquist en traitement de signal [63]. Les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist sont sous-échantillonnées et souffrent donc de *repliement de spectre*.

## 5.2 Changements de référentiel

Nous désirons déformer l'équation (2.1.24), ici notée

$$\omega_{RR}^2 - k^2 = m^2 \tag{5.2.1}$$

de manière à la rendre compatible avec notre automate. Pour rendre la similarité de la relation de dispersion de notre automate à cette équation plus apparente, notons que (5.1.22) peut être formulée comme

$$\cos^2 \omega = (1 - m^2) \cos^2 k, \tag{5.2.2}$$

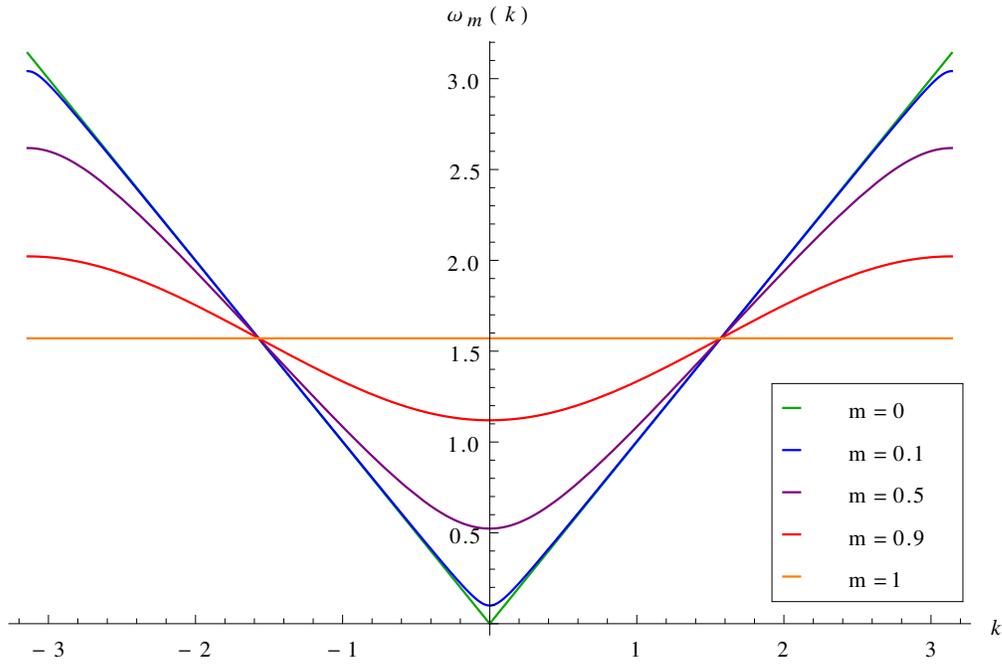


Figure 5.1 : La relation de dispersion de l'automate  $\omega_m(k)$ . Cette relation correspond à l'invariant quadratique déformé (5.2.3). Les points où les courbes pour toutes les masses se rencontrent correspondent aux échelles invariantes d'impulsion  $k_{inv} = \pm\pi/2$  et d'énergie  $\omega_{inv} = \pi/2$ .

On utilise ensuite l'identité  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  pour obtenir l'analogue de l'invariant quadratique pour notre automate

$$\frac{\sin^2 \omega}{\cos^2 k} - \tan^2 k = m^2 \quad (5.2.3)$$

Adoptant le même formalisme qu'aux équations (2.2.5) et (2.2.6),

$$(\omega f_1(\omega, k))^2 - (k f_2(k))^2 = m^2 \quad (5.2.4)$$

la dépendance de  $f_1$  sur  $\omega$  peut aussi être ignorée en faveur d'une dépendance sur  $m$  de la déformation. Nous pouvons concentrer la déformation de la relativité restreinte que nous obtenons dans une transformation non-linéaire  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} : (\omega, k) \mapsto \mathcal{D}(\omega, k) = (\sin \omega / \cos k, \tan k). \quad (5.2.5)$$

nous donnant une représentation non-linéaire du groupe de Lorentz (la structure du groupe est préservée malgré les déformations non-linéaires appliquées à l'énergie et à l'impulsion), qui en une dimension spatiale est constitué uniquement des boosts.

$$\mathbf{L}^{\mathcal{D}} := \mathcal{D}^{-1} \circ \mathbf{L} \circ \mathcal{D} \quad (5.2.6)$$

où les boosts  $\mathbf{L}$  sont ceux de la relativité restreinte habituelle

$$\mathbf{L}(\beta) : (\omega, k) \mapsto (\omega', k') = \gamma(\omega - \beta k, k - \beta \omega), \quad (5.2.7)$$

Comme mentionné dans la référence [45], de manière à générer une relativité doublement restreinte, la transformation non-linéaire  $\mathcal{D}$  doit satisfaire aux conditions suivantes:

1. Le jacobien  $J_{\mathcal{D}}(k, \omega)$  de  $\mathcal{D}$  évalué à  $k = \omega = 0$  doit correspondre à l'identité, garantissant que les transformations non-linéaires  $\mathbf{L}^{\mathcal{D}}$  donnent les boosts de

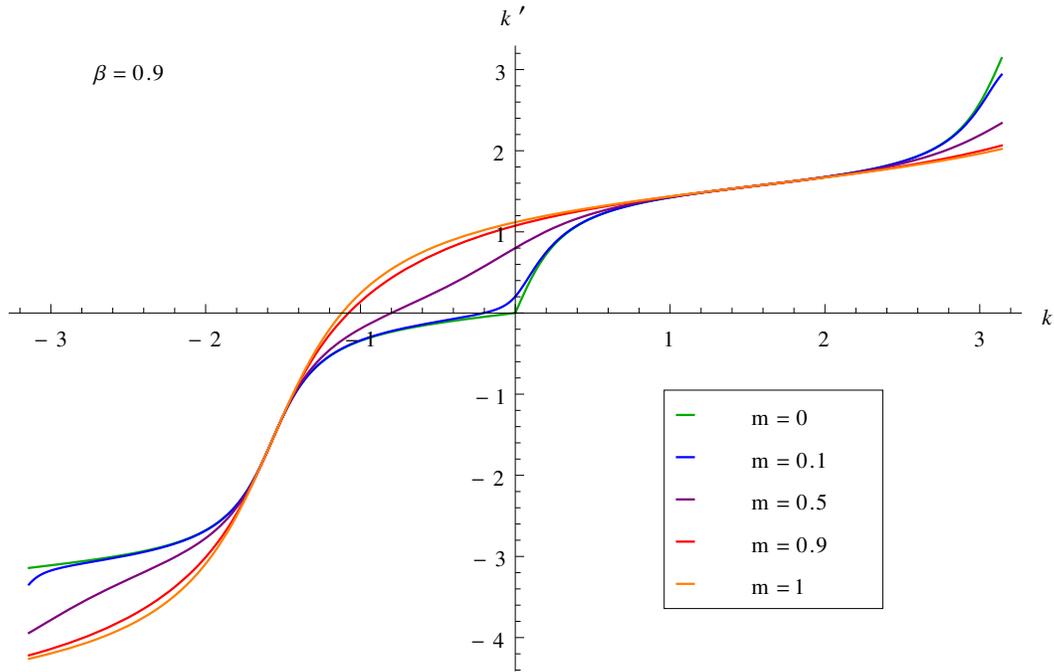


Figure 5.2 : Transformation de l'impulsion  $k$  obtenue en combinant la transformation de Lorentz et la déformation de l'espace des énergies et impulsions. À nouveau, les courbes se recoupent aux échelles invariantes du modèle.

Lorentz habituels dans le régime des impulsions et des énergies très petites par rapport à l'échelle de Planck.

2. Les transformations doivent être inversibles sur tout l'intervalle couvert par  $L$ .
3. Afin d'avoir une échelle invariante d'énergie, la transformation  $\mathcal{D}$  doit posséder une singularité, c'est-à-dire une énergie  $\omega_{inv}$  qui est envoyée à  $\infty$ .

Notre  $\mathcal{D}$  satisfait à toute ces conditions avec l'énergie invariante  $\omega_{inv} = \pi/2$ .  
 Insérant (5.2.5) et (5.2.7) dans l'équation (5.2.6), nous obtenons les formes explicites

de  $L^{\mathcal{D}}$

$$\begin{aligned} k' &= \arctan \left( \frac{\tan k - \beta \frac{\sin \omega}{\cos k}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ \omega' &= \arcsin \left( \frac{\frac{\sin \omega}{\cos k} - \beta \tan k}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos k' \right) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

qui préservent l'invariant quadratique (5.2.3) de l'automate. Ces transformations modifiées (la figure 5.2 illustre la transformation de  $k$  à  $k'$ , par exemple) ont deux impulsions invariantes symétriques  $k_{inv} = \pm\pi/2$  correspondant à l'énergie invariante  $\omega_{inv} = \pi/2$ , et ce indépendamment de  $m$ . Ces points fixes divisent le domaine des impulsions de l'automate  $B = [-\pi, \pi]$  en deux régions

$$B = B_1 \cup B_2 \quad B_1 = [-\pi/2, \pi/2] \quad B_2 = [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \quad (5.2.9)$$

Ces régions restent séparées sous tous les boosts possibles. Les impulsions invariantes  $k = \pm\pi/2$  coïncident avec les maximums de la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = \frac{\sqrt{1 - m^2} \sin k}{\sqrt{1 - (1 - m^2) \cos^2 k}} \quad (5.2.10)$$

La vitesse de groupe  $v_g$  (voir la figure 5.3) correspond à la vitesse de propagation d'un paquet d'onde (qui peut être identifié à une particule). Alors que dans la région  $B_1$  une augmentation de  $k$  produit une augmentation de cette vitesse, dans la région  $B_2$  cette propriété est renversée. Cependant, sous l'application des équations (5.2.8), un observateur pour qui un boost produit une augmentation dans la

vitesse observée d'un paquet d'onde dans  $B_1$  observera aussi une augmentation pour une vitesse dans  $B_2$ . Ceci est le cas parce que dans les deux cas un  $k$  observé est envoyé plus près du point invariant à la frontière entre  $B_1$  et  $B_2$ . Puisque les deux régions séparées sont caractérisées par la même cinématique, elles sont indistinguables dans le cadre d'une théorie de champ libre. Notons aussi que pour les particules sans masse, la relation de dispersion (5.2.2) adhère exactement à la relation de dispersion non-déformée de la relativité restreinte (du moins dans la région  $B_1$ ) et que dans ce cas la vitesse de groupe ne dépend plus de  $k$ . Notre modèle ne correspond donc pas à une théorie où la vitesse de la lumière dépend de sa fréquence (et donc de son énergie).

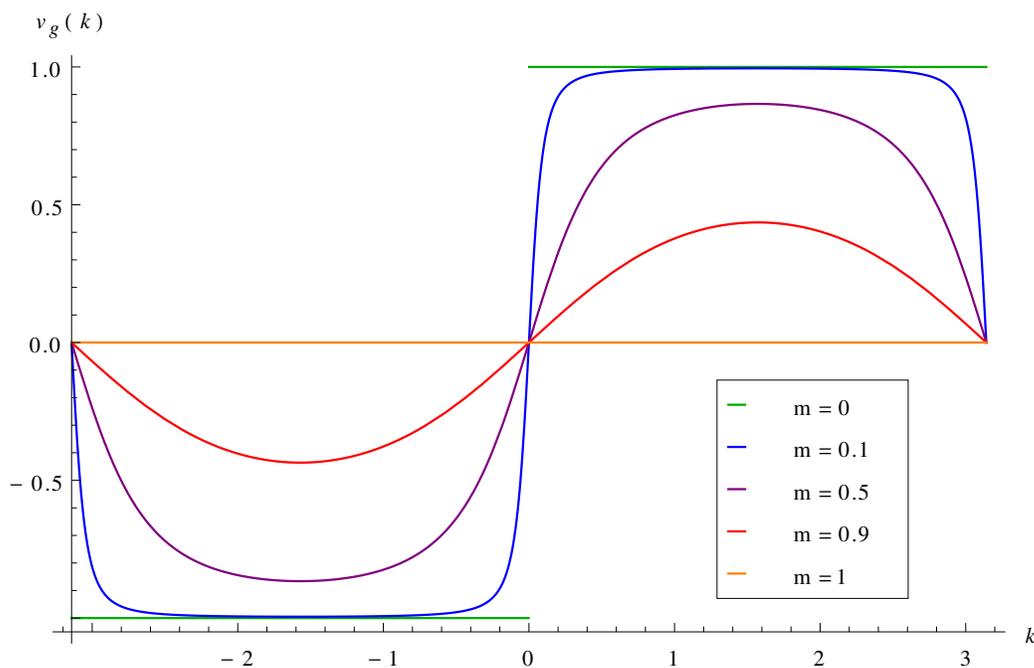


Figure 5.3 : La vitesse de groupe  $v_g = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$  d'un paquet d'onde dans l'automate. Ceci correspond à la vitesse de propagation d'un paquet d'onde avec une impulsion moyenne de  $k$ .

En examinant  $v_g(k)$ , on constate cependant que la vitesse de propagation maximale d'un paquet d'onde dépend de son paramètre de masse. En effet, la vitesse maximale se produit toujours à  $k_{inv}$ , mais diminue de manière monotone en fonction de  $m$ , jusqu'à atteindre 0 pour  $m = 1$ . Une particule ayant cette masse extrême aurait une énergie  $\omega_{inv}$ , indépendamment de  $k$  et serait figée en place dans l'automate. Notons que nous parlons bien ici d'une particule simple et non pas d'un objet ayant une masse combinée de  $m_P$ . En effet, comme noté dans la référence [45], dans les théories de relativités restreintes déformées, les règles de déformations ne peuvent s'appliquer directement aux systèmes combinés sans créer de contradiction. Le fait que la vitesse de propagation maximale d'un paquet d'onde puisse dépendre de sa masse suggère une catégorie de tests expérimentaux de ce type de théories. Malheureusement, toutes les particules que nous avons observées dans la nature ont une masse beaucoup trop faible par rapport à la masse de Planck pour que leur propagation subisse des corrections significatives. Nous donnons un exemple concret de cela à la section 7.2 dans le cadre d'une discussion de potentiels projets de recherche future.

Dans notre modèle, les lois de la physique sont encodées dans la règle d'évolution ((5.1.24) ou (5.1.18)) de l'automate cellulaire quantique. Le principe de relativité correspond donc ici à avoir la même règle d'évolution dans tous les référentiels inertiels. Lorsqu'on subit un boost par l'action des transformations (5.2.8), ce n'est donc pas l'automate lui-même qui change, mais bien les états  $|\psi\rangle$  qui évoluent dans celui-ci qui sont transformés. Utilisons la relation de dispersion (5.1.22) de manière à considérer les fonctions de  $k$  et  $\omega$  comme dépendant seulement de  $k$  (et le para-

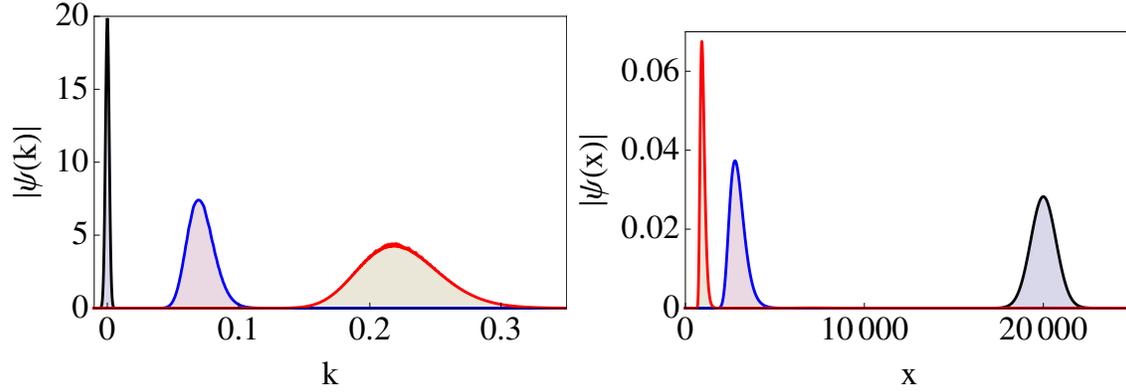


Figure 5.4 : Transformation d'un paquet d'onde gaussien sous un boost  $\beta = -.99$  (bleu) et  $\beta = -.999$  (rouge) avec  $m = .1$  dans la représentation des impulsions (gauche) et dans la représentation des positions (droite).

mètre  $m$ , qui est fixe pour un champs en particulier). L'action des transformations sur les états dans l'espace des impulsions (voir figure 5.4 pour l'effet sur un paquet d'onde gaussien) nous donne (en omettant les degrés de liberté internes)

$$|\psi\rangle = \int g(k)|k\rangle dk \xrightarrow{L^{\mathcal{D}}} \int g'(k')\mu(k')|k'\rangle dk' \quad (5.2.11)$$

où  $g(k)$  est la distribution sur les impulsions dans le référentiel initial et

$$g'(k') = \mu(k')g(k(k')) = \sqrt{\frac{dk}{dk'}}g(k(k')) \quad (5.2.12)$$

Le facteur  $\mu(k')$  est nécessaire pour maintenir la normalisation

$$\int |g'(k')|^2 dk' = \int |g(k)|^2 dk = 1 \quad (5.2.13)$$

Notons que la transformation (5.2.11) est unitaire. Afin d'obtenir le nouvel état dans l'espace des positions, il suffira de prendre la transformée de Fourier inverse (notée  $\mathcal{F}^{-1}$ ), menant à une transformation complète

$$\psi'(x') = \mathcal{F}^{-1} \circ L^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} \psi(x) \quad (5.2.14)$$

Sous cette transformation, même les caractéristiques qualitatives d'un état peuvent changer (pour un boost assez élevé). Par exemple, la figure 5.5 montre qu'un état parfaitement localisé (occupant une seule cellule de l'automate) dans un certain référentiel peut être délocalisé dans un second référentiel en mouvement par rapport au premier.

Comme les transformations définies sur l'espace des impulsions et des énergies (5.2.8) sont non-linéaires, elles ne s'appliquent pas telles quelles dans l'espace des positions et temps. En effet, bien qu'en relativité restreinte on puisse utiliser les transformations de Lorentz pour transformer les coordonnées  $x$  et  $t$ , ici notre solution est de conserver les transformations modifiées en  $k$  et  $\omega$  et d'utiliser à nouveau la transformée de Fourier pour passer à l'espace des  $x$  et  $t$  (comme fait en [62]). Nous utilisons maintenant la transformée de Fourier sur deux variables à la fois (passant de  $x$  à  $k$  et de  $t$  à  $\omega$  dans l'espace réciproque). Pour transformer une fonction  $f(x, t)$ , nous aurons

$$f'(x', t') = \mathcal{F}^{-1} \circ L^{\mathcal{D}} \circ \mathcal{F} f(x, t) \quad (5.2.15)$$

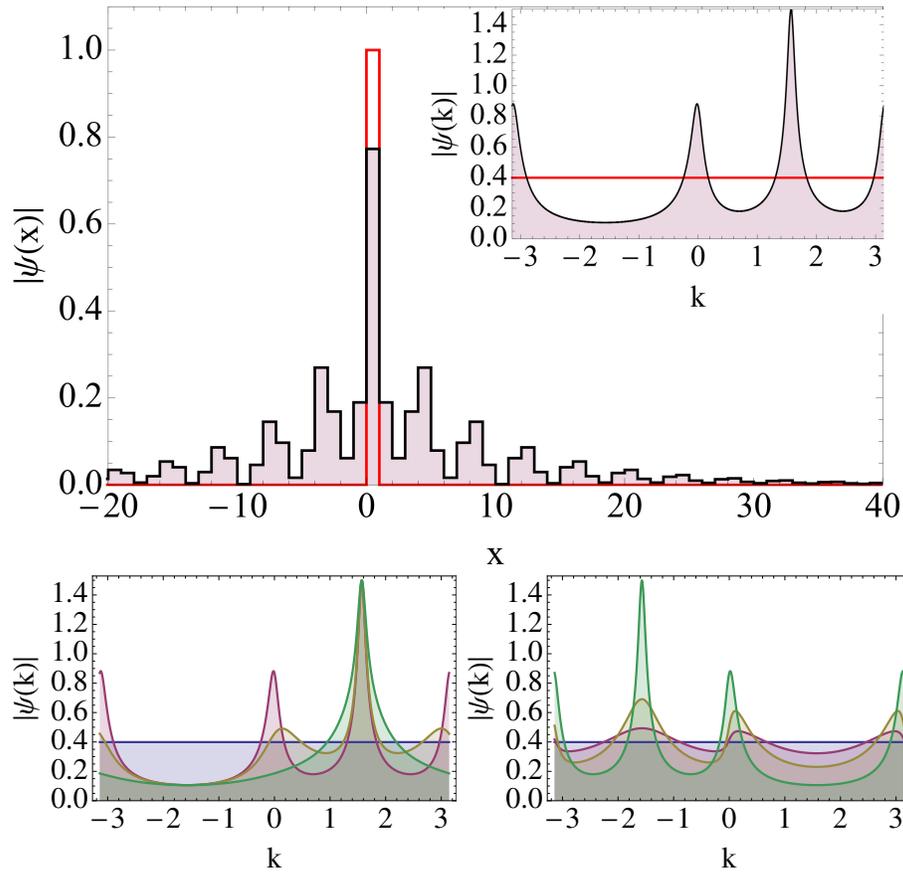


Figure 5.5 : **Figure du haut:** Transformation de référentiel pour un état parfaitement localisé à  $x = 0$  avec un boost  $\beta = -0.99$  et un paramètre de masse  $m = 0.1$ . **Figures du bas:** À gauche: représentation dans l'espace des impulsions de l'état localisé pour différentes valeurs de la masse  $m = 0.1$  (rouge) 0.3 (orange) 0.8 (vert) pour  $\beta = -0.99$ . À droite: représentation dans l'espace des impulsions de l'état localisé pour différentes valeurs du boost  $\beta = 0.4$  (rouge) 0.8 (orange) 0.99 (vert) avec  $m = 0.1$ .

Par exemple, pour un état  $\psi(x, t)$ , nous avons explicitement

$$\psi'(t', x') = \sum_{x, t \in \mathbb{Z}} \int d\omega' dk' e^{-i\chi(\omega', k', x, t, x', t')} \psi(x, t) \quad (5.2.16)$$

où

$$\chi(\omega', k', x, t, x', t') = k(\omega', k')x - k'x' - \omega(\omega', k')t + \omega't' \quad (5.2.17)$$

Comme ces dernières équations sont assez peu transparentes, nous devons faire des approximations afin d'analyser certains phénomènes qui surviennent lors d'un changement de référentiel sur l'automate.

### 5.3 Conséquences des déformations

Si l'on se restreint à une bande assez mince d'impulsions et d'énergies, il est possible d'obtenir une approximation correspondant à des transformations de Lorentz déformées pour l'espace et le temps malgré la non-linéarité des transformations (5.2.8). Nous considérons  $k := k(k', \omega')$  et  $\omega := \omega(k', \omega')$  et faisons une expansion linéaire de ces fonctions pour un paquet d'onde à bande mince avec  $k'$  proche de  $k'_0$  dans le référentiel  $(k', \omega')$ , ce qui correspond à un paquet d'onde lui aussi à bande mince autour de  $k_0$  dans le référentiel  $(k, \omega)$ .

$$\begin{aligned} k(k', \omega') &\approx k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial k'} \right|_{k'=k'_0} (k' - k'_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} (\omega' - \omega'_0) \\ \omega(k', \omega') &\approx \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k'} \right|_{k'=k'_0} (k' - k'_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} (\omega' - \omega'_0) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

On peut ainsi remplacer  $k$  et  $\omega$  dans la phase de l'exponentiel imaginaire de l'équation (5.2.16), et en faisant l'intégrale sur  $k'$  and  $\omega'$ , on obtient

$$\begin{aligned} x' &\approx \left. \frac{\partial k}{\partial k'} \right|_{k'=k'_0} x - \left. \frac{\partial \omega}{\partial k'} \right|_{k'=k'_0} t \\ t' &\approx \left. \frac{\partial \omega}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} t - \left. \frac{\partial k}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} x \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

ce qui peut être condensé en une seule équation matricielle utilisant le jacobien de la transformation évalué en  $k' = k'_0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \partial_{k'} k & -\partial_{\omega'} k \\ -\partial_{k'} \omega & \partial_{\omega'} \omega \end{pmatrix}_{k'=k'_0} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

Comme les équations (5.3.2) définissent une transformation linéaire des variables  $x$  and  $t$  et que les paquets d'ondes que nous avons utilisé pour les définir se propagent en ligne droite à la vitesse de groupe évaluée à leur impulsion moyenne, il est possible d'interpréter (5.3.2) comme la transformation des coordonnées d'un point dans l'espace-temps correspondant à l'intersection des trajectoire de deux de ces paquets d'ondes ayant des impulsions  $k$  proche d'une impulsion commune  $k_0$ .

Remarquons cependant que la dépendance sur  $k$  de la transformation linéaire (5.3.2) résulte en une géométrie de l'espace-temps qui est dépendante de l'observateur. En effet, considérons un point  $(x, t)$  donné par l'intersection de quatre paquets d'ondes: une première paire avec des impulsions proches de  $k_1$  et la deuxième avec

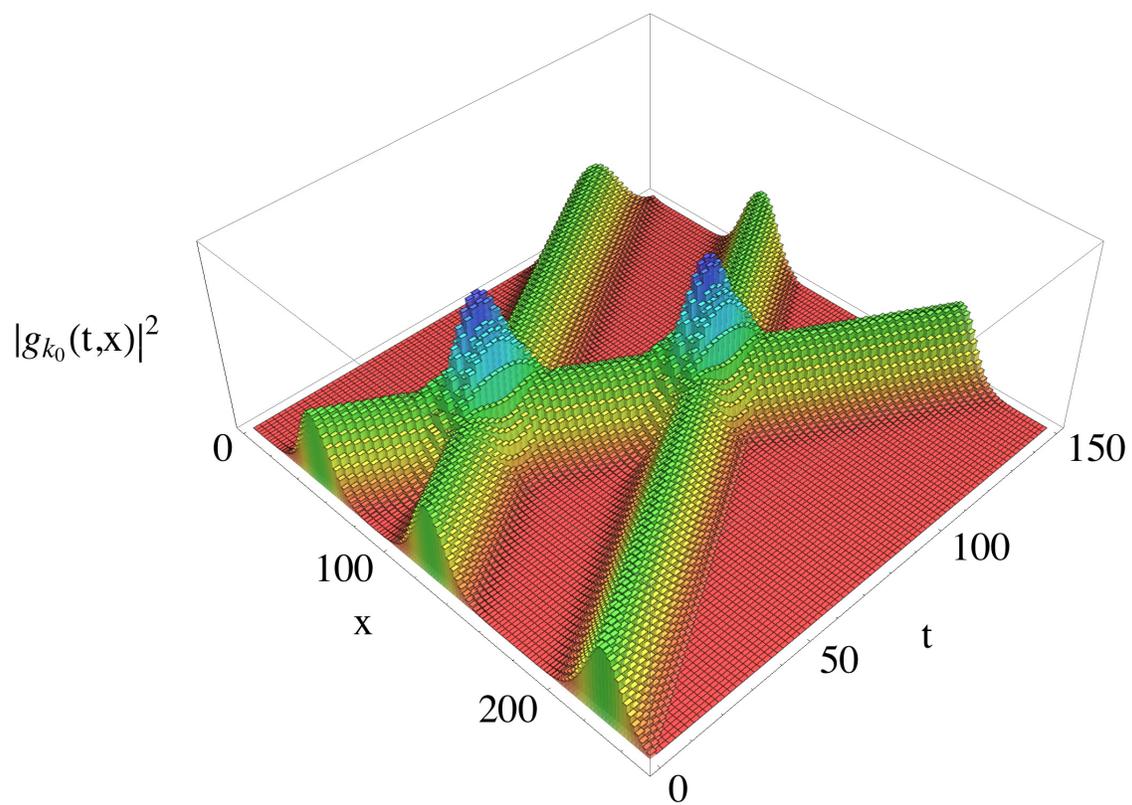


Figure 5.6 : Deux intersections de trajectoires de paquets d'ondes dans l'évolution de l'automate cellulaire quantique.

des impulsions proches de  $k_2$  (différente de  $k_1$ ). Un observateur suffisamment loin et en mouvement par rapport au référentiel dans lequel  $k_1$  et  $k_2$  sont définis verra plutôt l'intersection de la première paire à un point de son espace-temps différent du point d'intersection de la deuxième paire (voir la figure 5.7). Comme les coefficients dans la transformation 5.3.2 varient en fonction de  $k$ , même s'il y a un élargissement du paquet d'onde dans un certain référentiel boosté par rapport à celui où les intersections des deux paires de paquets d'ondes coïncident, il est toujours possible de choisir un observateur (et donc une origine au référentiel) assez distant pour que la différence dans les coefficients soit suffisante pour créer une séparation des événements d'intersection. En effet, pour un boost donné, le facteur d'élargissement d'un paquet d'onde est constant et la séparation entre les deux points d'intersection est proportionnelle à la distance par rapport à l'origine du référentiel.

Ce genre d'effet démontre que la relativité restreinte déformée de notre automate mène à la *relativité de la localité*. Ce phénomène a été décrit en détail par Giovanni Amelino-Camelia en 2011 [7, 6]. L'espace-temps généré par certains modèles (dont le nôtre) n'est pas objectif, dans le sens où des événements qui coïncident dans un référentiel peuvent être séparés lorsqu'observés à partir d'autres référentiels. Notre construction des espaces-temps à partir des transformations linéarisées (5.3.2) supporte la proposition de la référence [6] que la relativité de la localité est une propriété de tous les modèles ayant une géométrie non-plane dans l'espace réciproque  $k, \omega$ . Afin d'éviter cet effet, la transformation (5.3.2) ne doit pas dépendre de  $k_0$  et comme il est nécessaire qu'à  $k_0 = 0$  on ait les transformations de Lorentz de la

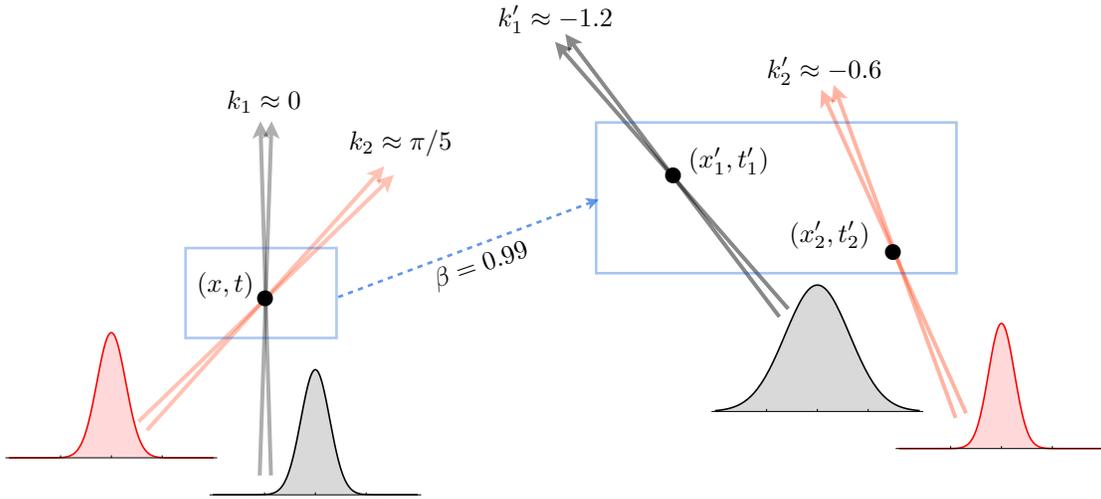


Figure 5.7 : Exemple d'effet de la relativité de la localité. Dans le premier référentiel (à gauche), une paire de paquets d'ondes avec des impulsions proches de 0 et une autre paire avec des impulsions proches de  $\pi/5$  s'intersectent tous au même point  $(x, t)$ . Dans un second référentiel (à droite) en mouvement par rapport au premier, il y a plutôt deux points d'intersection, un pour chaque paire.

relativité restreinte, on retrouve alors simplement la relativité restreinte pour tous les  $k$ .

Donnons un autre exemple de comment les déformations que nous avons appliquées à la relativité restreinte se manifestent lorsque des impulsions très grandes sont atteintes dans un des référentiels considérés. Nous avons découvert une déformation assez surprenante de l'effet de contraction des longueurs. Afin d'explorer celle-ci, utilisons d'abord les équations (5.3.2) pour obtenir  $x$  en fonction de  $x'$  et  $t'$

$$x = \left. \frac{\partial k'}{\partial k} \right|_{k=k_0} x' - \left. \frac{\partial \omega'}{\partial k} \right|_{k=k_0} t' \quad (5.3.4)$$

Notons que nous utilisons ici le signe d'égalité malgré l'approximation linéaire que nous effectuons. Nous sommes intéressés par le ratio

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} \quad (5.3.5)$$

Comme la mesure est simultanée dans le référentiel en mouvement par rapport à l'objet mesuré, nous avons  $t'_2 = t'_1$ . Ceci implique que les temps correspondant aux deux événements de cette mesure sont différents dans l'autre référentiel ( $t_2 \neq t_1$ ), mais comme l'objet est au repos ( $k_0 = 0$ ) dans celui-ci, cela ne change rien. L'équation (5.3.4) nous donne alors

$$x_2 - x_1 = \left. \frac{\partial k'}{\partial k} \right|_{k=0} (x'_2 - x'_1) \quad (5.3.6)$$

ce qui nous permet d'évaluer le facteur de contraction des longueurs

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \left( \left. \frac{\partial k'}{\partial k} \right|_{k=0} \right)^{-1} \quad (5.3.7)$$

en consultant l'équation (5.2.8), nous obtenons

$$\frac{\partial k'}{\partial k} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \beta \sin \omega \sin k)}{(1 - \beta^2)(\cos k)^2 + (\sin k - \beta \sin \omega)^2} \quad (5.3.8)$$

et donc

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \left( \left. \frac{(1 - \beta^2)(\cos k)^2 + (\sin k - \beta \sin \omega)^2}{\sqrt{1 - \beta^2}(1 - \beta \sin \omega \sin k)} \right|_{k=0} \right) \quad (5.3.9)$$

À  $k = 0$ , la relation de dispersion 5.1.22 nous donne  $\omega = \arcsin m$ , ce qui nous permet d'obtenir une expression relativement simple pour le facteur de contraction des longueurs

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \sqrt{1 - \beta^2} \left( 1 + \frac{\beta^2 m^2}{1 - \beta^2} \right) \quad (5.3.10)$$

Cette équation tend vers le facteur habituel de la relativité restreinte:  $\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \gamma^{-1}$  dans le régime approprié (où  $m$  tend vers 0), mais étonnamment, pour un boost qui amène  $k'_0$  près de l'impulsion invariante, l'effet habituel de la relativité restreinte est renversé et nous obtenons plutôt une dilatation des longueurs (voir la figure 5.8).

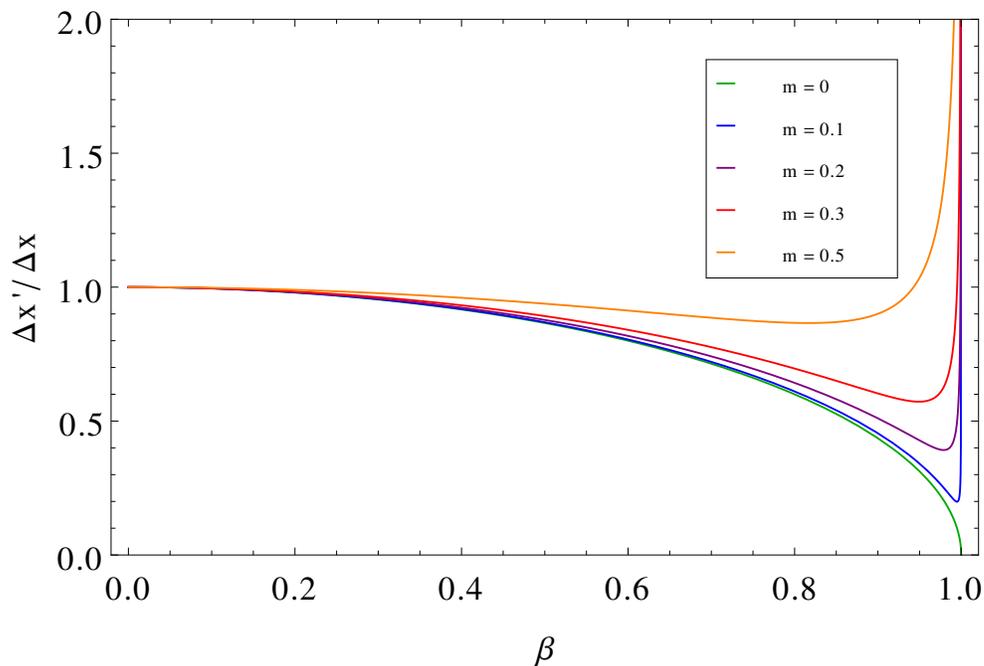


Figure 5.8 : La contraction des longueurs déformée pour différentes valeurs de la masse. Notons que pour toute masse non-nulle, il existe un boost suffisamment élevé pour passer dans le régime où la longueur se dilate plutôt que de se contracter.

Afin de comprendre plus intuitivement pourquoi les effets de la relativité restreinte sont renversés dans un régime où l'on s'approche des échelles invariantes, rappelons-nous qu'un paquet d'onde qui devient plus étroit dans l'espace des impulsions devient plus large dans l'espace des positions (ces variables étant reliées par une relation d'incertitude). En s'approchant de la valeur invariante d'impulsion, un paquet d'onde devient nécessairement plus condensé dans cet espace. En effet, des impulsions qui seraient énormément élevées sous l'effet d'une transformation de Lorentz standard ne peuvent qu'asymptotiquement s'approcher de  $k = \frac{\pi}{2}$ . La densité d'impulsion amenée vers un intervalle de largeur constante en  $k'$  diverge donc à l'approche de l'invariant. En quelque sorte, la distribution en  $k$  du paquet d'onde est écrasée contre l'invariant sous un boost suffisamment élevé. Tout ceci a l'effet inverse dans l'espace des positions, forçant le paquet d'onde à s'élargir.

Si la contraction des longueurs est déformée, qu'en est-il de la dilatation du temps? Est-il possible que l'effet soit également renversé et que l'on assiste à une contraction du temps à de très hautes énergies? En relativité restreinte, le facteur de dilatation du temps est exactement l'inverse de celui de contraction des longueurs. Pour comprendre ceci, considérons une horloge en mouvement relativiste par rapport à un ruban à mesurer. Les événements où l'horloge est respectivement au début et à la fin du ruban sont dénotés par  $x_1, t_1$  et  $x_2, t_2$  dans le référentiel de l'horloge et par  $x'_1, t'_1$  et  $x'_2, t'_2$  dans le référentiel du ruban. Comme le ruban est plus court par un facteur  $\gamma^{-1}$  dans le référentiel de l'horloge et que les vitesses relatives des deux référentiels

sont symétriques, nous avons

$$t_2 - t_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\beta\gamma} = \frac{t'_2 - t'_1}{\gamma} \quad (5.3.11)$$

et donc le facteur de dilatation du temps est

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma \quad (5.3.12)$$

Si ce raisonnement tenait tout aussi bien dans notre modèle, le renversement de la contraction des longueurs nous donnerait également un renversement de la dilatation du temps. Cependant, nous avons ici affaire à un excellent exemple d'un scénario où la relativité de la localité de notre modèle mène à une perte de coïncidence des événements. Si les événements où l'horloge affiche  $t_1$  et  $t_2$  coïncident avec le passage de l'horloge devant le début et la fin du ruban dans l'un des référentiels, ils pourront ne plus coïncider dans l'autre.

Comme le temps et l'énergie forment une paire de variables conjuguées, le raisonnement que nous avons utilisés pour la position et l'impulsion peut être utilisé à nouveau. En effet, lorsque la distribution en énergie d'un état est écrasée contre l'échelle invariante d'énergie  $\omega = \frac{\pi}{2}$  par un changement de référentiel, il en résulte nécessairement un élargissement de la distribution de l'état dans le temps. Il ne peut donc pas y avoir un effet de contraction du temps analogue au nouvel effet de dilatation des longueurs dans notre modèle.

Mathématiquement, nous pouvons utiliser une stratégie similaire à celle pour la contraction des longueurs. Malheureusement, les équations sont considérablement plus complexes et, comme expliqué par le raisonnement qualitatif de l'écrasement de l'état contre l'échelle invariante, nous n'obtenons pas de renversement de l'effet relativiste habituel. En fait, la modification de l'effet de dilatation du temps est négligeable, même lorsque le paramètre de masse du champ approche la masse de Planck (voir l'annexe C).

Notons finalement que la majorité de cette analyse s'applique assez directement pour un automate ayant plus d'une dimension spatiale, puisque les dimensions perpendiculaires au boost sont généralement facile à traiter. Cependant, il y a certaines difficultés au niveau des rotations, puisqu'un automate sur une grille régulière implique une certaine anisotropie de l'espace. Dans ce cas, la superposition quantique sur les chemins doit résoudre le problème d'empilement de Weyl (il est impossible d'obtenir une isotropie de la propagation dans l'espace à plus d'une dimension à partir d'une structure d'empilement discrète et régulière, au moins pour un système classique [70]). Ceci ne semble pas être un problème fondamental pour un automate quantique, puisque l'automate utilisé par la référence [10] produit un comportement adéquat en trois dimensions spatiales, du moins dans un certain régime. En effet, l'anisotropie ne serait en général manifeste que pour des états extrêmement localisés (de l'ordre de la longueur de Planck) dans l'espace. Ces distributions localisées impliquent des impulsions également de l'ordre de l'échelle de Planck et ne produisent donc pas de contradiction avec la physique expérimentale. La référence [23] argu-

mente que pour des états plus étendus dans l'espace tels ceux que nous observons dans la nature, la somme sur les chemins de calcul peut donner lieu à une propagation isotrope des champs, de manière similaire à l'émergence du chemin classique à partir de l'intégrale de chemin quantique (voir l'annexe A).

## CHAPITRE 6

### UNIVERS SIMULÉ PAR CALCUL QUANTIQUE

Maintenant que nous avons examiné quelques aspects d'une physique basée sur un automate cellulaire quantique, il est naturel de se demander si une telle physique pourrait être le résultat d'une simulation délibérée. Plutôt que de se restreindre aux modèles à base d'automates cellulaires, considérons tous les modèles de physique qui sont calculables de manière efficace sur un ordinateur quantique universel. La physique pourrait également être simulable sur un ordinateur classique, mais les processus quantiques dans notre monde pourraient causer un ralentissement exponentiel de ce genre de simulation (voir à nouveau [30]). Nous faisons donc l'hypothèse que notre compréhension des limites du calcul classique est correcte et qu'une simulation efficace de notre physique demande l'accès au calcul quantique.

À la section 4.1 nous avons mentionné l'hypothèse qu'un jeu de la vie suffisamment grand partant avec des conditions aléatoires et évoluant pendant un temps immense pourrait éventuellement permettre à des formes d'êtres intelligents de se développer. Similairement, lorsque nous aurons de puissants ordinateurs quantiques à notre disposition, nous pourrons les programmer pour simuler les lois de la physique de notre univers (que ce soit de manière approximative ou exacte, ce dernier scénario demandant que nous connaissions les lois et qu'elles soient effectivement limitées à

une complexité calculatoire simulable sur un ordinateur quantique). Dans une telle simulation d'ampleur suffisante, la vie intelligente pourrait aussi émerger, puisque notre existence prouve qu'elle l'a fait en accord avec les lois de la physique dans notre univers. Les formes de vie intelligentes à l'intérieur de la simulation ne seraient alors pas si folles de se demander si leur univers pourrait être simulé et si des intelligences externes pourraient les observer. Ne devrions-nous donc pas nous poser les mêmes questions?

## 6.1 Évaluation de la proportion des êtres simulés

La question de savoir si nous vivons dans une simulation ou non a engendré une grande quantité de fiction (mentionnons le roman *Simulacron-3* [31] et le film *The Matrix* [15]), mais (de manière peu surprenante) très peu de recherche sérieuse. Parmi les traitements plus lucides et quantitatifs, mentionnons celui de Nick Bostrom [14]. Cet article argue que si les sociétés n'ont pas tendance à s'auto-détruire avant d'obtenir la technologie nécessaire à l'exploitation d'une puissance de calcul relativement proche de ce que les lois de la physique permettent, la probabilité que nous vivions dans une simulation s'approche de 1.

La puissance de calcul disponible dans l'univers physique est immense. La référence [41] calcule que la limite physique sur la capacité calculatoire d'un kilogramme de matière est de l'ordre de  $10^{50}$  opérations par seconde (et que, de plus,

ces opérations pourraient être appliquées à des bits quantiques). Nous notons cette quantité  $P_{Mat}$ . Par comparaison, nos estimés de la puissance de calcul d'un cerveau humain sont entre  $10^{14}$  et  $10^{16}$  opérations par seconde [49, 47]. Nous utilisons ici  $P_{Cer} = 10^{16} \frac{op}{s}$ . Dans une civilisation possédant une technologie suffisante pour exploiter ne serait-ce qu'un millionième de la capacité de calcul de la matière, il est envisageable que chaque individu puisse donc avoir accès à un ordinateur assez puissant pour simuler en temps réel l'évolution de  $10^{28}$  cerveaux. Notons le ratio entre la puissance de calcul à la portée d'un tel individu et la complexité de calcul de son cerveau  $R_{Cal}$

$$R_{Cal} = \frac{P_{Mat}}{P_{Cer}} \quad (6.1.1)$$

Bien que nous soyons présentement très loin d'atteindre un niveau technologique où cette puissance de calcul est disponible, il s'agit ici d'un argument philosophique et, dans un contexte futuriste, cette éventualité n'est pas entièrement farfelue.

Nous appelons  $Civ$  les niveaux de technologie assez avancés pour simuler une grande quantité de cerveaux. Sur l'histoire d'une civilisation et de ses ancêtres, nous dénotons par  $f_{Civ}$  la fraction des individus ayant accès à  $Civ$  (tous les individus vivant avant l'avènement d'une telle technologie, des barbares comme nous, comptant dans  $1 - f_{Civ}$ ). Notons  $f_{Ded}$  la proportion de la puissance de calcul qui sera dédiée aux simulations, représentant l'intérêt des gens de  $f_{Civ}$  à simuler des intelligences sur leurs superordinateurs. À ce point, nous pouvons estimer (de manière très grossière)

la proportion des individus qui sont réels

$$f_{Re} = \frac{N_{Re}}{N_{Re} + N_{Sim}} = \frac{1}{1 + f_{Civ} f_{Ded} R_{Cal}} \quad (6.1.2)$$

Ceci se généralise pour l'ensemble des civilisations (chacune dénotée par l'indice  $j$ , ayant une population totale  $N_j$  et sa propre valeur de chaque variable dans l'équation (6.1.2)) sur la vie de l'univers. La proportion universelle des consciences réelles serait

$$f_{ReU} = \frac{\sum_j f_{Rej} N_j}{\sum_j N_j} \quad (6.1.3)$$

Notre formulation mathématique en (6.1.2) est plus générale que celle de la référence [14], mais l'idée est la même. Nous pouvons donc adapter l'argument principal de cette référence à notre scénario. Étant donné que  $R_{Cal}$  est gigantesque, l'une des proposition suivante doit être vraie:

1. Avec très grande probabilité, nous vivons dans une simulation.
2.  $f_{Civ} \approx 0$ .
3.  $f_{Ded} \approx 0$ .

Ceci dépend de la supposition que notre probabilité de vivre dans une simulation est effectivement de l'ordre de  $f_{Sim} = 1 - f_{Re}$ . C'est-à-dire que nous n'avons pas d'information supplémentaire nous permettant d'affirmer que nous ne vivons pas

dans une simulation. Entre autres, ceci suppose que les intelligences simulées sont aussi conscientes que les intelligences réelles, ce qui est logique dans le cas où les processus biologiques menant à l'intelligence sont complètement simulés, laissant l'intelligence en émerger de façon «naturelle», plutôt que d'utiliser des intelligences artificielles pré-programmées, aussi complexes soient-elles. De plus, comme nous l'argumentons plus loin dans la présente section, nous avons également de l'information sur la qualité et la persistance de notre éventuelle simulation. Quoiqu'il en soit, dans le modèle simplifié que nous venons de définir,  $R_{Cal}$  est suffisamment grand pour que  $f_{Sim}$  approche l'unité, à moins que le facteur  $f_{Civ}f_{Ded} \approx 0$ .

Prenons un petit moment pour explorer la possibilité que  $f_{Civ}f_{Ded}$  s'approche effectivement de 0. Si  $f_{Ded} \approx 0$ , cela signifie simplement que les civilisations avancées n'utilisent pas une proportion significative de leur puissance de calcul pour simuler des mondes comme le nôtre. Ceci pourrait être le cas pour une grande variété de raisons, allant du simple manque d'intérêt jusqu'au tabou social. Une société d'êtres nous ressemblant (mais possédant une technologie immensément plus avancée) pourrait juger qu'il est éthiquement douteux de simuler des intelligences avec une précision suffisante pour les rendre conscientes tout en les forçant à rester coupées du monde réel. Cependant, il serait étonnant que cet intérêt soit universellement manquant, puisque nous pouvons imaginer plusieurs raisons pour simuler un monde avec des êtres conscients: la recherche sociologique, les simulations stratégiques, et peut-être même une forme avancée de tourisme exotique. En effet, un être possédant la technologie pour générer une telle simulation pourrait également détenir

une technologie permettant de s'y projeter, de manière à explorer d'autres mondes et d'autres époques. Même si des lois ou des tabous interdisaient la simulation de consciences complètes, des infractions très peu fréquentes seraient suffisantes pour faire grimper  $f_{Ded}$ , et par conséquent  $f_{Sim}$ .

De l'autre côté, si  $f_{Civ} \approx 0$ , le message pourrait être plus inquiétant. Cela suggérerait que les sociétés d'êtres intelligents ne peuvent atteindre le niveau *Civ*. Il est effectivement possible qu'il soit technologiquement beaucoup plus facile de créer des armes capables d'éradiquer les civilisations dans le monde réel que d'obtenir la puissance de calcul permettant leur création dans un monde simulé. Considérant la montée fulgurante de la puissance de destruction à la portée des êtres humains dans le dernier siècle, cela semble assez raisonnable. Une technologie avancée qui n'est pas accompagnée par une maturité adéquate peut certainement permettre à une civilisation de s'autodétruire. De plus, même si la majorité de la population acquiert une telle maturité, à un certain point la technologie pourrait multiplier la capacité destructrice de chaque individu au même titre que sa capacité calculatoire. Quelques cas isolés de folie meurtrière pourraient alors suffire à condamner une civilisation à l'extinction.

L'équation (6.1.2) nous condamne-t-elle donc à une vision pessimiste du monde où nous sommes soit prisonniers d'une simulation, soit destinés à nous autodétruire? Comme cette équation est très simpliste et omet plusieurs facteurs, pas nécessairement. Premièrement, il ne suffit pas de simuler des cerveaux pour obtenir une simulation crédible d'un monde tel le nôtre: l'environnement doit également être simulé.

Si les lois de la physique sont similaires dans la simulation et dans la réalité (ce qui n'est pas nécessairement le cas, mais pour diverses applications il est important d'être le plus fidèle possible), une simulation complète (c'est-à-dire jusqu'au niveau le plus microscopique) de l'environnement est extrêmement coûteuse au niveau calculatoire. Définissons ici l'ampleur  $A_{Sim}$  d'une simulation comme

$$A_{Sim} = V \bar{E} T \quad (6.1.4)$$

où  $V$  est le volume simulé,  $\bar{E}$  la densité moyenne d'énergie et  $T$  le taux d'écoulement du temps. La quantité totale d'information traitée par un système est proportionnelle à son énergie [42] et, comme la densité d'énergie moyenne dans la simulation et à l'extérieur seraient semblables (pour créer un environnement similaire),  $A_{Sim}$  serait du même ordre que l'ampleur du système simulé (que nous notons  $A_{Ext}$ ) et  $f_{Sim}$  pourrait tomber près de  $\frac{1}{2}$ .

La simulation pourrait aussi avoir une physique simplifiée par rapport au monde extérieur. Cependant, une civilisation aurait probablement intérêt à simuler (entre autres) des sociétés qui lui sont similaires, dans des environnements similaires, puisque ce seraient les simulations les plus applicables au monde «réel». En effet, lorsque la civilisation simulée atteint un niveau d'avancement technologique similaire à  $Civ$  (ou si l'état initial de la simulation contient déjà ce niveau de technologie), une partie importante de sa dynamique doit être fortement liée à la science et la technologie. De plus, nous considérons ces éventualités dans l'optique d'évaluer si

notre univers pourrait être une simulation. S'il s'agissait d'une simulation avec une physique grandement simplifiée pour permettre de la simuler facilement, nous n'observerions probablement pas un potentiel de calcul de la matière aussi élevé que  $P_{Mat}$  par rapport à  $P_{Cer}$ .

Comme argumenté dans la référence [14], la simulation pourrait avoir une physique à complexité variable, coupant les coins ronds lorsqu'aucune intelligence ne porte attention, mais pouvant simuler toute la complexité de la physique originale lorsque nécessaire. Dans ce genre de simulation, nous forcerions le simulateur à utiliser temporairement plus de puissance de calcul pour notre environnement lorsque nous faisons des expériences visant à comprendre (ou exploiter) notre physique au niveau microscopique. Dans ce cas, lorsque les êtres simulés sont inattentifs à leur physique, la puissance requise pour simuler l'environnement pourrait ne pas être beaucoup plus grande que celle requise pour simuler les cerveaux évoluant à l'intérieur. Pour comptabiliser le coût calculatoire d'un tel environnement, nous introduisons le facteur  $C_{Env}$ , représentant le coût moyen de l'environnement pour chaque conscience dans la simulation. Aussi, comme aucun calcul ne peut être efficace à 100%, nous utilisons le facteur  $f_{Eff}$  pour représenter la proportion de la puissance calculatoire utilisée qui se retrouve dans la simulation. L'équation (6.1.2) devient alors

$$f_{Re} = \frac{1}{1 + \frac{f_{Civ} f_{Ded} R_{Cal} f_{Eff}}{1 + C_{Env}}} \quad (6.1.5)$$

ce qui devrait nous donner une chance considérablement plus élevée de faire partie de  $f_{Re}$  que notre estimation initiale.

Comme la civilisation simulée sera similaire à la civilisation simulatrice, lorsqu'elle atteindra *Civ*, il est très probable qu'elle se mette également à créer ses propres simulations. Si la physique de la simulation initiale est à complexité variable, ceci aura pour effet de ralentir cette simulation, puisqu'elle sera en train d'utiliser une grande quantité de puissance calculatoire pour créer ses propres mondes simulés. Bien sûr, les intelligences simulées n'auront aucun moyen de détecter ce ralentissement. En effet, nous ne pouvons comparer la vitesse de notre pensée qu'à des phénomènes faisant partie de notre environnement et un ralentissement uniforme de la vitesse de progression du temps par rapport à une référence externe à notre univers serait indétectable. Par contre, du point de vue des simulateurs initiaux, au fur et à mesure que les civilisations simulées se mettent à exploiter la puissance calculatoire de la physique, la simulation devient de plus en plus coûteuse (calculatoirement parlant) à supporter, ou simplement de plus en plus lente si la quantité de puissance qui lui est dédiée reste fixe.

Si le premier niveau simulé peut créer ses propres simulations, il en est de même pour le deuxième niveau, le troisième, et ainsi de suite. Ceci nous donnerait alors un scénario où les simulations de la physique sont imbriquées les unes dans les autres (voir la figure 6.1) et où, bien sûr, la puissance de calcul disponible dans un niveau est limitée par la puissance utilisée pour le simuler à partir du niveau supérieur. Pour analyser mathématiquement ce scénario, nous pouvons utiliser les mêmes facteurs qu'à l'équation (6.1.5) et considérer la puissance de calcul  $P_{i+1}$  générée dans

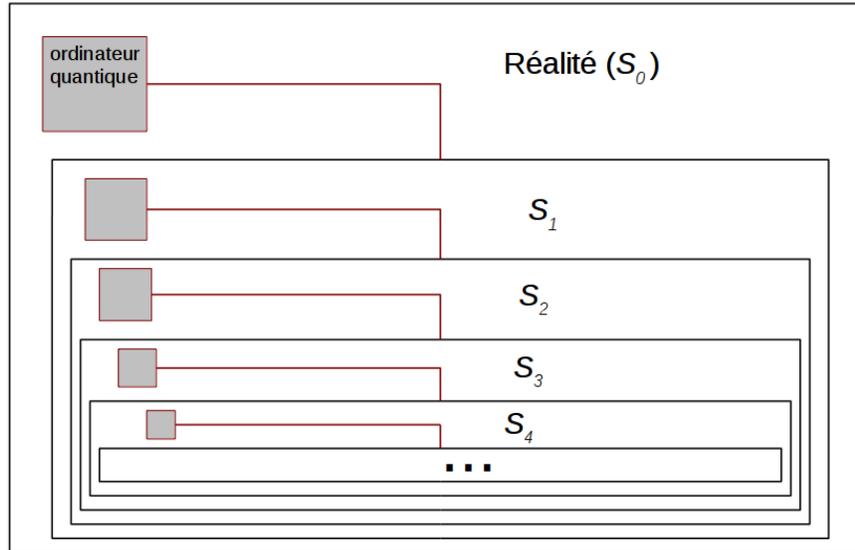


Figure 6.1 : Hiérarchie de simulations imbriquées les unes dans les autres. Le système de calcul permettant de simuler le niveau  $i+1$  se trouve dans le niveau  $i$ . La puissance de calcul totale utilisée pour simuler un niveau doit donc diminuer au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la réalité (niveau 0). Notons que nous n'avons illustré qu'une seule simulation par niveau, mais qu'il y en aurait généralement plusieurs fonctionnant en parallèle.

le niveau  $i$  afin de simuler le niveau  $i+1$ . Nous obtenons ainsi l'équation récursive

$$P_{i+1} = N_i f_{Civ} f_{Ded} R_{Cal} f_{Eff} = N_{i+1} (1 + C_{Env} + f_{Civ} R_{Cal}) \quad (6.1.6)$$

Bien sûr les paramètres peuvent varier d'un niveau à l'autre, mais nous pouvons utiliser des paramètres moyens pour analyser plus en détail ce qui se passe lorsque tous les niveaux sont similaires. Notons que nous avons sorti le terme  $f_{Civ} R_{Cal}$  pour le rendre explicite dans l'équation, mais qu'il pourrait être intégré dans  $C_{Env}$  puisque les ordinateurs font partie de l'environnement. L'équation (6.1.6) nous donne le ratio

moyen entre les populations de deux niveaux consécutifs

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{f_{Civ}f_{Ded}R_{Cal}f_{Eff}}{1 + C_{Env} + f_{Civ}R_{Cal}} \quad (6.1.7)$$

ceci nous donne une série géométrique comme approximation de la population totale du système

$$N_T = N_0 \sum_i \left( \frac{f_{Civ}f_{Ded}R_{Cal}f_{Eff}}{1 + C_{Env} + f_{Civ}R_{Cal}} \right)^i \quad (6.1.8)$$

où  $N_0 = N_{Re}$  est la population non-simulée. On peut évaluer la somme et obtenir une nouvelle version de l'équation (6.1.5)

$$f_{Re} = \frac{1}{\sum_i \left( \frac{f_{Civ}f_{Ded}R_{Cal}f_{Eff}}{1 + C_{Env} + f_{Civ}R_{Cal}} \right)^i} = 1 - \left( \frac{f_{Civ}f_{Ded}R_{Cal}f_{Eff}}{1 + C_{Env} + f_{Civ}R_{Cal}} \right) \quad (6.1.9)$$

Malheureusement, il est extrêmement difficile d'estimer les valeurs des facteurs apparaissant dans cette équation. Ceci nous rappelle en quelque sorte l'équation de Drake [26], qui contient trop de facteurs difficiles à évaluer pour réellement nous permettre de calculer la quantité de civilisations extraterrestres peuplant la galaxie. Notons cependant que  $f_{Sim}$  est bornée par  $f_{Ded}f_{Eff}$ , ce qui pourrait facilement être plus petit que 50%. Nous avons donc ici un scénario où la proportion d'individus simulés est relativement petite, malgré la grande valeur de  $R_{Cal}$ .

Remarquons que l'équation (6.1.7) prédit une probabilité de plus en plus faible d'exister à un niveau  $i$  de la hiérarchie de simulations au fur et à mesure que  $i$  augmente (ceci est une conséquence assez directe du fait que la puissance de calcul

totale doit diminuer de niveau en niveau). Nous pouvons nous réjouir de ce fait, puisque plus on s'enfonce profondément dans les niveaux, plus la probabilité que la simulation persiste suffisamment longtemps pour qu'un individu puisse vivre sa vie en paix est faible. En effet, il suffit que l'un seul des niveaux plus proches de la réalité subisse un cataclysme, une guerre, un changement de régime, ou simplement une perte d'intérêt, pour que l'existence de la simulation cesse.

Notons qu'il n'est pas nécessairement vrai qu'à un moment donné la population du niveau  $i + 1$  est plus petite que celle du niveau  $i$ . De manière alternative, la puissance de calcul plus limitée de la simulation  $i + 1$  pourrait supporter un plus grand nombre d'individus si le temps s'écoule plus lentement dans ce niveau. Cette possibilité résulte tout de même en une plus petite population totale du niveau  $i + 1$  si l'on accumule celle-ci sur un laps de temps (externe aux simulations) assez grand. Ceci augmente encore plus la probabilité que la simulation cesse durant la vie d'un individu à cause d'un problème dans un niveau moins profond. Heureusement, une simulation trop lente par rapport à la «réalité» est certainement moins utile et il est plus probable qu'à l'inverse les simulations évoluent plus rapidement et contiennent moins d'individus à un instant donné.

## 6.2 Surveillance par les simulateurs

Si jamais notre univers s'avère être une simulation, on peut s'inquiéter que les habitants du niveau supérieur qui détiennent le système sur lequel la simulation fonctionne soient en train de nous espionner. Comme mentionné à la section précédente, on peut également s'inquiéter qu'ils cessent de nous simuler, intentionnellement ou non, mais il n'y a pas grand chose à faire à ce propos, à part peut-être les laisser nous observer et nous efforcer d'être divertissants. Concentrons-nous donc sur une potentielle surveillance à partir de l'extérieur de la simulation.

Si la simulation est sans faute et fonctionne sur un système de calcul classique, aucune défense n'est possible contre l'espionnage. En effet, dans ce cas les phénomènes quantiques de notre univers sont aussi simulés par du calcul classique. Toute l'information peut donc être copiée au loisir du simulateur et ce sans affecter la simulation d'aucune manière. C'est d'ailleurs ce que nous faisons lorsque nous jouons à un jeu vidéo, ou lorsque nous analysons les résultats de la plupart de nos simulations de la physique. En plus de ne pouvoir se fier aux effets quantiques, si nous vivons dans un univers simulé nous ne pouvons même pas nous fier à la contrainte de non-signallement de la physique, puisque la distance entre deux points peut être complètement différente du point de vue du système simulant et qu'il est toujours possible que l'évolution dans le temps de la simulation soit suspendue afin de faire interagir des composantes éloignées du système.

Heureusement (pour une fois), la perfection est une chose extrêmement difficile à atteindre. Que se passe-t-il alors si la simulation est classique, mais imparfaite? Comme les amateurs de jeux vidéos le savent, des erreurs de calcul peuvent avoir un impact assez flagrant sur un monde simulé. Utilisons l'exemple des problèmes de détection des collisions, encore très fréquents malgré le réalisme croissant des jeux modernes, pour illustrer cet impact. Lorsque deux objets qui devraient entrer en collision passent l'un au travers de l'autre, un jeu vidéo souffre d'une erreur de «clipping» qui peut facilement diminuer le sentiment d'immersion du joueur. L'erreur inverse, où le chemin d'un objet est bloqué en l'absence d'obstacle peut s'avérer encore plus critique, arrêtant potentiellement la progression du jeu. De l'intérieur de la simulation, de telles erreurs menant à une physique incohérente pourraient être détectées et indiquer l'artificialité du monde. Même si les lois de la physique sont parfaitement programmées dans la simulation, tout système réel est imparfait et peut être affecté par son environnement. Pensons par exemple à la radiation pouvant inverser l'état d'un bit sur la mémoire d'un ordinateur. Ce genre d'erreur pourrait affecter certains processus physiques simulés si les stratégies de correction d'erreurs mises en place sont insuffisantes. De plus, si ces erreurs sont assez fréquentes et affectent le système simulé de manière non-uniforme (une partie du système pourrait être plus exposée à la source de radiation, par exemple), il pourrait même être possible d'obtenir de l'information sur le niveau simulé à partir du niveau simulé.

Si les effets quantiques sont aussi difficiles à simuler avec des systèmes classiques qu'on le croit, il est probable que la simulation soit plutôt intrinsèquement quantique. Les simulateurs ne sont probablement pas infiniment patients et le ralentissement nécessaire pour simuler les effets quantiques avec du calcul classique serait prohibitif dans le cadre d'une simulation de grande ampleur. Pouvons-nous alors compter sur les restrictions de la mécanique quantique pour limiter la surveillance par nos simulateurs? En un certain sens, oui. Premièrement, les simulateurs ne peuvent mesurer une trop grande quantité d'information quantique sans détruire la simulation. Par exemple, la structure des matériaux dépend de la superposition dans l'espace des états des électrons. Une mesure (même venant de l'extérieur) capable de déterminer leur position avec une grande précision leur donnerait (en accord avec le principe d'incertitude  $\sigma_{x_j} \sigma_{p_j} \geq \frac{1}{2}$ , à nouveau dans des unités où  $\hbar = 1$ ) assez d'impulsion pour détruire l'objet qui les contient. Il est donc impossible que les simulateurs soient complètement omniscients à propos de leur simulation. Ils pourraient par contre mesurer une petite portion de l'information quantique de la simulation sans la détruire. S'ils le font de manière aléatoire, il pourrait être possible pour les êtres simulés de détecter la surveillance. En effet, mesurer une partie de l'information quantique de manière aléatoire induirait des erreurs dans les corrélations quantiques à l'intérieur de la simulation et des expériences suffisamment précises pourraient révéler ces erreurs.

Si Alice et Bob sont des êtres simulés (à leur insu) qui testent un protocole de distribution quantique de clé et qu'ils découvrent un bruit sur leur canal quantique, ils devraient (en bons cryptographes) supposer que celui-ci est causé par de l'espionnage

sur le canal. Si le bruit ne peut être expliqué par le matériel qu'ils utilisent et qu'ils ne découvrent aucun espion ayant accès à leur canal, ils devraient (en bons scientifiques) se poser des questions. Si Alice, Bob et leurs collègues découvrent alors que la présence ce bruit est généralisée lorsque de l'équipement assez précis est utilisé pour le révéler, et ce malgré toute tentative d'isoler les expériences de l'environnement, ils devraient en conclure soit qu'ils ont mal compris les lois de leur physique, soit qu'ils sont la cible d'une surveillance provenant de l'extérieur de leur univers...

Les simulateurs ne seraient pas limités à une surveillance aléatoire et généralisée. Ils pourraient cibler leur surveillance sur l'information macroscopique et donc «classique» à l'intérieur de la simulation quantique. Malheureusement, la presque totalité de l'information qui nous concerne entre dans cette catégorie. Pour autant que l'on puisse déterminer, la conscience humaine traite l'information de manière classique. En effet, bien que certains avancent que le cerveau humain se comporte comme un ordinateur quantique (voir par exemple la référence [19]), aucune preuve convaincante de ce fait n'existe. Nous sommes relativement certains que nos cerveaux fonctionnent par calcul classique et nous présentons ici plusieurs arguments à ce propos.

Pour commencer, bien que les systèmes physiques en fonction à l'intérieur de nos cerveaux soient quantiques à l'échelle microscopique et que des effets quantiques soient certainement impliqués dans la chimie du cerveau, les échelles de temps im-

pliquées dans la pensée humaine sont plus que suffisamment grandes pour que le maintien de cohérence (surtout à la température du corps humain) soit très improbable. En effet, la référence [65] calcule un temps de cohérence variant entre  $10^{-20}$  et  $10^{-13}s$ , alors que les phénomènes dynamiques les plus rapides dans nos neurones prennent plus de  $10^{-7}s$ . Les interactions entre les neurones sont encore plus lentes par plusieurs ordres de magnitude (généralement au dessus de  $10^{-3}s$ ) et il est donc pratiquement impensable qu'un calcul quantique puisse se produire à partir de celles-ci, même à l'intérieur d'une région restreinte du cerveau.

Même en faisant fi des problèmes physiques liés au calcul quantique dans nos cerveaux, il reste des problèmes purement évolutifs. Notamment, il est probable qu'une capacité de calcul quantique n'augmenterait pas vraiment le succès reproducteur de l'humain. Bien que l'oeil humain pourrait être capable de détecter les photons uniques [66], la presque totalité de l'information qui nous est accessible à travers nos sens est classique et tous les effets que nous pouvons avoir sur notre environnement sont également classiques. Bien sûr, ceci n'est plus strictement vrai depuis l'avènement des expériences de physique quantique, mais ce qui nous importe ici sont les conditions qui étaient présentes lors de notre histoire évolutive. L'avantage procuré par le calcul quantique devrait donc être un avantage algorithmique lors du traitement de l'information classique par le cerveau humain. Or il semble que le cerveau humain est très peu performant dans sa résolution des problèmes que nous savons bénéficier du calcul quantique (par exemple la factorisation, l'extraction du logarithme discret ou la recherche dans une base de donnée non-structurée). Si la capacité à résoudre

ces problèmes rapidement était importante pour le succès reproducteur humain, nos cerveaux seraient immensément mieux optimisés à ce niveau, qu'ils soient classiques ou quantiques. Il est vrai qu'il reste certainement à découvrir un grand nombre d'algorithmes quantiques plus performants que leurs homologues classiques, mais il est probable que le même raisonnement s'applique aussi aux problèmes résolus par ces algorithmes.

De plus, pour qu'un trait puisse se développer par sélection naturelle, il ne peut se trouver arbitrairement loin des configurations préexistantes dans l'espace de phase génétique. C'est pour cette raison que certaines structures qui peuvent facilement être conçues par l'intelligence (pensons aux roues pour la locomotion, par exemple) ne se retrouvent pas dans le règne animal. Une structure complexe peut se développer graduellement si les étapes y menant confèrent déjà un certain avantage. Ainsi, des membranes permettant de planer peuvent éventuellement progresser vers des ailes plus complexes, ou des régions de cellules photoréceptrices peuvent mener à la formation d'yeux. Il est probable qu'une structure cérébrale permettant le calcul quantique se trouverait très loin (de l'état de nos lointains ancêtres) dans l'espace des configurations génétiques, nécessitant potentiellement des matériaux différents de ceux habituellement synthétisés par les cellules vivantes. À moins que l'on puisse démontrer que des configurations intermédiaires menant graduellement à une telle structure aient pu conférer certains avantages évolutifs, il est donc très improbable que la sélection naturelle ait pu y mener.

L'information nécessaire pour décrire les pensées d'un humain doit alors être essentiellement classique et donc très redondante. Les actions externes que nous effectuons produisent des conséquences à une échelle encore plus grande et l'information permettant de les observer est généralement encore plus redondante. Nos simulateurs potentiels pourraient donc, s'ils sont suffisamment astucieux, mesurer une proportion infime de l'information totale de la simulation et néanmoins être capables de reconstruire nos actions et nos pensées. Ils pourraient alors probablement identifier nos expériences quantiques précises et éviter de générer des perturbations détectables sur les systèmes impliqués. L'échelle macroscopique et classique à laquelle nous vivons et pensons nous rend ainsi vulnérables à des formes d'espionnage qui ne mesurent qu'une partie infinitésimale des degrés de liberté qui existent au niveau microscopique. En fait, toutes les formes d'espionnage existant dans le monde réel (à part peut-être celles qui exploitent certaines failles dans des stratégies de cryptographie quantique mal implémentées) utilisent en un certain sens la redondance de l'information classique pour la copier sans pour autant la perturber.

Il serait assez difficile de cacher des choses à nos potentiels simulateurs, puisqu'ils pourraient probablement observer nos pensées. Nous pourrions envisager d'utiliser des systèmes purement quantiques pour les surprendre (tout en étant conscients que nous devrions alors être surpris nous mêmes). Par exemple, nous pourrions tenter de créer nos propres univers simulés, mais en utilisant une forme de calcul quantique encrypté pour s'assurer qu'ils ne sont pas espionnables à partir des niveaux plus proche de la réalité (incluant le nôtre). Si, comme abordé à la section 6.1, nous dé-

veloppons la technologie pour nous projeter dans les mondes simulés, nous pourrions ainsi espérer échapper au contrôle de nos propres simulateurs (à l'exception qu'ils pourraient toujours cesser de nous simuler).

Malheureusement, il existe une attaque assez générale pour contrer toute tentative de mettre de l'information hors de la portée des simulateurs. Comme ceux-ci possèdent les systèmes où toute l'information est réellement encodée, ils peuvent (après avoir pausé la simulation, si nécessaire) prendre une partie de l'information et la faire évoluer d'une manière différente du reste de la simulation. Si on modélise leur système de calcul quantique par le formalisme à boîtes et à fils de la section B.1, cela correspond à prendre une partie des fils de la simulation et à les connecter à de nouvelles boîtes. Ils peuvent ainsi traiter cette partie de l'information avec un circuit de leur choix. Ils peuvent aussi envoyer de l'information de leur choix dans les boîtes originales de la simulation (d'une manière qui peut dépendre du résultat de l'application de leur nouveau circuit à l'information originale). Cette attaque, représentée schématiquement à la figure 6.2, permet aux simulateurs de complètement contourner tout système de cryptographie quantique que nous pourrions utiliser, simplement en envoyant l'information dans un circuit qui n'implémente pas la solution cryptographique. La capacité de changer le branchement du circuit constitue donc un avantage extrêmement puissant.

Dans le scénario où nous tenterions de nous transporter dans nos propres simulations, nos simulateurs pourraient intercepter l'information qui nous contient

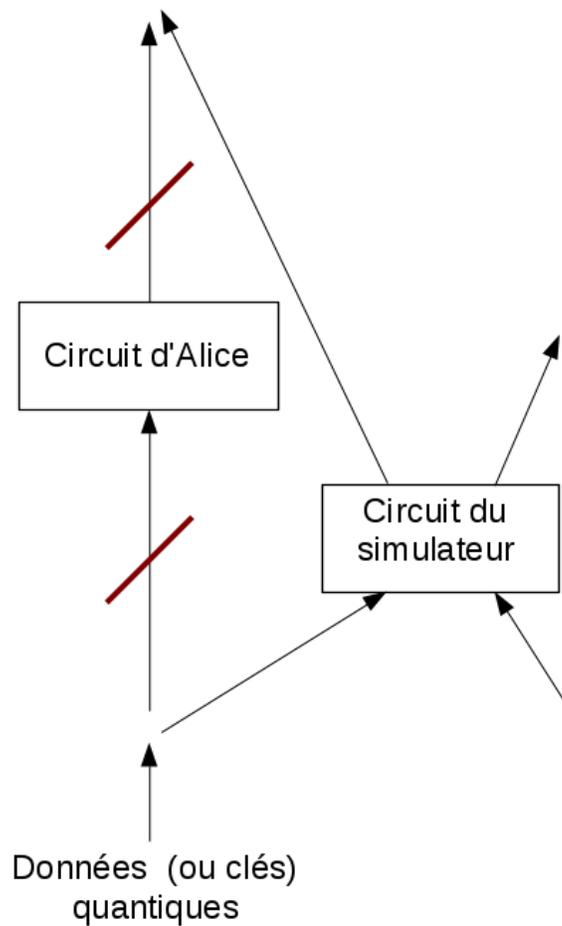


Figure 6.2 : Une scientifique simulée, Alice, peut tenter d'utiliser un système de calcul quantique encrypté pour garder de l'information quantique hors de portée d'un simulateur espionnant de manière ciblée l'information classique de la simulation (incluant les pensées des êtres simulés). Malheureusement, le simulateur peut contourner cette tentative en redirigeant l'information quantique vers un circuit de son choix. En effet, il peut temporairement interrompre l'évolution de la simulation, prendre les fils appropriés sur son système simulant et les connecter à un circuit différent. Il peut ainsi substituer ses circuits à ceux d'Alice, ses clés ou ses données à celles d'Alice, etc.

et la détruire, la modifier, ou encore la projeter dans un environnement différent.

Nous pourrions ainsi nous retrouver dans une nouvelle simulation sous leur contrôle,

tout en pensant évoluer à l'intérieur du système encrypté que nous avons développé. Si nos simulateurs sont particulièrement vexés par notre tentative d'évasion, ils pourraient aussi nous envoyer dans un enfer simulé, auquel cas nous aurions au moins la confirmation que nous sommes bel et bien des êtres simulés et que notre paranoïa n'était pas injustifiée...

## **CHAPITRE 7**

### **CONCLUSION**

Dans cette thèse et dans la recherche que nous avons effectuée en général, nous avons pour but de démontrer qu'un lien théorique solide existe entre l'informatique quantique (principalement sous sa forme d'automate cellulaire quantique) et deux domaines de la physique moderne: la relativité restreinte déformée et la théorie des champs quantiques. Nous avons fait une revue des concepts nécessaires à une compréhension adéquate de ces théories (chapitres 2 et 3) et avons également fait une introduction aux automates cellulaires classiques et quantiques (chapitre 4). Nous avons ensuite présenté nos résultats reliant ces différentes théories (chapitre 5) et des scénarios où des systèmes de calcul quantique (l'automate cellulaire quantique en étant un exemple) sont utilisés afin de délibérément simuler des univers ayant une physique similaire à la nôtre (chapitre 6).

#### **7.1 Sommaire des résultats**

Au chapitre 5, nous avons montré comment obtenir une relation de dispersion (équivalente à un invariant quadratique déformé) pour un automate cellulaire quantique simulant un champ de Dirac dans le régime des basses énergies et impulsions

(par rapport à l'échelle de Planck). La règle d'évolution de cet automate, plutôt que d'être choisie arbitrairement, découle de restrictions et de symétries constituant en quelque sorte les axiomes de notre modèle. Nous avons montré que celui-ci (ainsi que d'autres modèles où la physique évolue sur une grille discrète régulière) est incompatible avec la relativité restreinte habituelle, mais que le principe de relativité peut être récupéré en passant à une relativité restreinte déformée possédant une relativité de la localité. Nous avons également montré que les déformations des transformations de Lorentz mènent à une forme du phénomène de contraction des longueurs qui se renverse à l'approche de l'impulsion correspondant à une échelle invariante de la théorie ( $\|k\| = \omega = \frac{\pi}{2}$ ). Cette échelle invariante sous tout changement de référentiel divise l'espace des impulsions en deux régions qui restent distinctes sous l'effet des transformations de Lorentz modifiées.

Ensuite, au chapitre 6, considérant que la physique que nous observons pourrait non seulement être le résultat de l'évolution de l'information sur un système quantique à l'échelle de Planck, mais aussi d'un calcul quantique délibéré, nous avons estimé sous certaines suppositions la probabilité que cette éventualité soit à l'origine de notre univers. Cette probabilité semble tendre vers la certitude si la puissance de calcul de nos cerveaux est représentative de la puissance de calcul nécessaire au maintien de la simulation dans laquelle nous vivrions. Cependant, nous avons argumenté que la physique de notre environnement (surtout si elle est réellement quantique) est considérablement plus coûteuse à simuler, ce qui diminue considérablement la probabilité que notre univers soit une simulation. De plus, dans un

scénario où les univers simulés ont la possibilité d’engendrer de nouvelles simulations (d’une complexité adéquate), nous avons montré que la proportion totale des êtres simulés pourrait facilement être plus petite que 50%.

Finalement, dans le scénario où notre univers est une simulation délibérée fonctionnant sur un système de calcul quantique, nous avons expliqué comment nous pourrions détecter une surveillance par les simulateurs si celle-ci n’est pas suffisamment subtile. Par contre, nos chances de réussir un tel exploit seraient beaucoup plus faibles si les effets quantiques de notre physique sont simulés par du calcul classique. Même si notre physique était fondamentalement quantique, nous avons montré que des simulateurs astucieux pourraient utiliser le fait que nous vivons à une échelle fondamentalement macroscopique et donc classique pour nous espionner sans nous laisser la chance d’utiliser la nature quantique de la simulation pour nous défendre.

## **7.2 Recherche future**

Un problème assez important de la physique moderne est qu’il existe un grand nombre de théories qui poussent la physique au-delà de la relativité d’Einstein et du modèle standard, mais que très peu d’entre elles peuvent être testées expérimentalement. Malheureusement, notre modèle de relativité restreinte à base d’automate cellulaire quantique souffre de ce problème. En effet, les corrections apportées à la relativité restreinte non-déformée ne sont significatives que lorsque l’on s’approche

de l'échelle de Planck. Par exemple, nous pouvons utiliser l'équation (5.2.10) pour obtenir la différence maximale dans la vitesse de propagation pour une particule. Cette différence se produit quand l'impulsion tend vers  $\frac{\pi}{2}$

$$v_g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - m^2} \quad (7.2.1)$$

La différence prédite par notre théorie dans le temps de propagation sur une distance  $D$  est donc

$$T_{diff} = D \left( \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} - 1 \right) \approx D \frac{m^2}{2} \quad (7.2.2)$$

Pour les particules les plus massives que nous connaissons,  $m \approx 1.5 \times 10^{-17} m_p$ , alors même pour une distance de propagation de l'ordre d'un milliard d'années-lumière, le délai supplémentaire d'arrivée ne serait que de l'ordre de  $10^{-18} s$ . Une priorité dans la recherche future serait donc d'explorer le modèle plus en détail de manière à voir s'il pourrait exister un scénario plus favorable à la détection des corrections prédites par la théorie.

Même sans se soucier des considérations expérimentales, le modèle de champ quantique à base d'automate cellulaire est loin d'être complet. Malgré la plus grande simplicité du modèle à une dimension spatiale, il serait probablement utile pour modéliser des systèmes physiques plus complexes de passer à trois dimensions spatiales. Du progrès dans cette direction a été réalisé par nos collègues de l'université de Pavia à la référence [12]. Comme mentionné à la section 5.3, l'espace-temps émergeant d'un automate sur une grille régulière à trois dimensions spatiales n'est pas fonda-

mentalement isotrope. Bien que cela pourrait ne pas poser de problème à une échelle plus macroscopique, il nous semble que cela rend le modèle moins naturel. Une grille régulière anisotrope pourrait très bien être créée artificiellement dans le cadre d'une simulation de la physique (telle celles imaginées au chapitre 6), mais il serait plus surprenant que la physique fonctionne ainsi à son niveau le plus fondamental. Nous pourrions tenter de remplacer ce modèle par un automate sur un empilement plus aléatoire (analogue à un solide amorphe) de systèmes quantiques interagissant avec leurs voisins. Un tel modèle aurait l'avantage d'être fondamentalement isotrope et de limiter les transformations à effectuer sur les états microscopiques sous l'action d'une rotation dans l'espace.

En plus d'augmenter le nombre de dimensions du modèle, il serait important de permettre une relaxation de la contrainte de linéarité sur l'évolution de l'automate et ainsi de modéliser certaines interactions des champs quantiques. Il serait en effet intéressant d'explorer la relativité de la localité dans le cadre d'une théorie à base d'automate qui permet l'existence d'objets composés de plusieurs particules qui peuvent interagir. Une possibilité serait de partir avec la règle d'évolution de l'automate pour le champ libre et d'ajouter des perturbations correspondant aux interactions, de manière à ce que l'hamiltonien interpolé de l'automate se réduise à un hamiltonien incluant des termes d'interaction dans la limite des petites masses et impulsions.

Comme mentionné aux chapitres 2 et 5, une théorie des champs quantiques où l'espace et le temps sont fondamentalement discrets pourraient nous aider à élaborer une théorie de la gravité quantique. En effet, il est difficile d'intégrer la gravité (du moins comme elle est envisagée en relativité générale) parce qu'une théorie tentant de considérer les interactions gravitationnelles dans le cadre usuel de la théorie des champs quantiques est non-renormalisable, c'est-à-dire qu'elle donne lieu à des infinités qui ne peuvent être éliminées (contrairement aux infinités plus facilement traitables, telle celle rencontrée à l'équation (3.2.15)). Une théorie sur une grille discrète ne devrait pas être susceptible à ce problème, puisque toutes les intégrales sont remplacées par des sommes finies (notons que la densité d'information quantique est également finie, bien que la densité d'information classique pourrait rester infinie puisque les états possibles de chaque qubit sont continus). Si, comme discuté à la section 5.2, un automate cellulaire quantique peut mener à un espace-temps plat respectant une version du principe de relativité, peut-être en est-il de même pour une version discrète de l'espace-temps courbe de la relativité générale. Le fait que la masse soit un paramètre important affectant la dynamique de notre modèle (par exemple en restreignant la vitesse maximale de propagation) semble encourageant. Il serait donc intéressant de tenter de trouver un mécanisme à partir duquel la gravité pourrait émerger du modèle de champ quantique à base d'automate. De la même manière qu'une grande diversité de comportements peut émerger des lois très simples du jeu de la vie (voir la section 4.1), il se pourrait que, malgré son apparence

complexité, notre physique se réduit également à quelques lois simples à son niveau le plus microscopique.

Finalement, il reste plusieurs questions à explorer au niveau des univers simulés sur des systèmes de calcul quantique. Par exemple, il serait intéressant de voir ce qui se passe si la physique de la réalité est quantique et continue et que les simulateurs choisissent de simuler une physique quantique mais discrète. Serait-il possible de simuler ainsi une énorme quantité d'univers discrets, la densité d'information et donc la puissance de calcul demandée étant infiniment plus petite par rapport à la réalité? Nous pourrions également considérer en plus de détails des modèles où les univers simulés ont une physique à complexité variable.

## ANNEXE A

### INTÉGRALE DE CHEMIN

Il est utile d'introduire rapidement la notion d'intégrale de chemin afin de pouvoir la comparer à celle de la somme sur les chemins dans un circuit ou un automate quantique. Cette approche de la mécanique quantique, très utile pour traiter certains aspects de la théorie des champs quantiques, a été élaborée en détail par Richard Feynman dans les années 1940 [29]. Bien que mathématiquement équivalente à la formulation canonique, la formulation par intégrale de chemin se révèle parfois plus simple et intuitive pour résoudre un problème donné.

Une bonne manière d'avoir une intuition de ce que l'intégrale de chemin représente est de partir avec l'expérience des fentes de Young. L'amplitude d'une particule partant de l'origine **O** et se rendant à l'écran **E** est la somme des amplitudes des chemins passant respectivement par la fente **F**<sup>1</sup> et par la fente **F**<sup>2</sup>. Si on ajoute une troisième fente dans l'écran, on doit ajouter l'amplitude du chemin passant par cette fente également. Si on ajoute un nombre de fentes si grand que l'écran n'existe plus, on doit sommer sur les chemins passant par tous les points de l'écran. On peut ainsi s'imaginer que tout point de l'espace est occupé par une fente dans un écran inexistant et que tous ces points contribuent à l'amplitude de se rendre de **O** à **E** en l'absence d'écran. On peut généraliser les points **O** à **E** comme des points non

seulement dans l'espace physique, mais aussi dans l'espace des configurations d'un système quantique.

Mathématiquement, soit  $A(\mathbf{O}, \mathbf{E}, T)$  l'amplitude qu'un système passe de la configuration  $\mathbf{O}$  à la configuration  $\mathbf{E}$  en un temps  $T$ . Par le principe de superposition, cette amplitude est la somme des amplitudes des différents chemins menant de  $\mathbf{O}$  vers  $\mathbf{E}$  en un temps  $T$ . On parle ici de chemins généralisés dans l'espace de phase sur tous les degrés de libertés. Si on pousse les chemins dans leur limite la plus microscopique, tous les chemins auront une amplitude de norme égale, mais leur phase pourra varier. On obtient donc

$$A(\mathbf{O}, \mathbf{E}, T) = \int e^{i\phi(\mathbf{x}(t))} D\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.0.1})$$

Ici le symbole  $D\mathbf{x}(t)$  représente l'intégration sur toutes les fonctions de  $t$  sur tous les degrés de liberté correspondant à  $\mathbf{x}$  et  $\phi(\mathbf{x}(t))$  est la phase associée à chaque chemin sur ces degrés de liberté. On parle alors d'une intégrale fonctionnelle.

Nous désirons maintenant déterminer une expression plus explicite pour la phase. Rappelons-nous que dans la limite classique, le chemin suivi par un système (que nous noterons ici  $\mathbf{x}_{Cla}(t)$ ) est celui correspondant à une phase stationnaire, c'est-à-dire

$$\left. \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(t)} [\phi(\mathbf{x}(t))] \right|_{\mathbf{x}_{Cla}(t)} = 0 \quad (\text{A.0.2})$$

où l'on dit que  $\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(t)}$  est une dérivation fonctionnelle. En fait, ceci correspond à ce que nous avons fait pour dériver l'équation d'Euler-Lagrange

$$\left. \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(t)} [\mathcal{S}(\mathbf{x}(t))] \right|_{\mathbf{x}_{Cl}(t)} = 0 \quad (\text{A.0.3})$$

Il est donc possible d'associer la phase  $\phi$  à l'action  $\mathcal{S}$ , nous donnant

$$A(\mathbf{O}, \mathbf{E}, T) = \int e^{i\mathcal{S}(\mathbf{x}(t))} D\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.0.4})$$

Notons finalement que le formalisme de l'intégrale de chemin est très puissant et peut être utilisé pour construire une méthode alternative aux procédures de quantification que nous avons utilisées dans les sections 3.2 et 3.3. Pour les versions complètes des dérivations dans le formalisme de l'intégrale de chemin, nous recommandons les références [74, 44].

## ANNEXE B

### THÉORIE QUANTIQUE OPÉRATIONNELLE

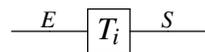
L'idée que la physique puisse découler de processus informationnels est très puissante. L'ensemble des théories basées sur ce concept est appelé *physique digitale*, ou encore *physique numérique théorique* pour inclure les versions analogiques. L'informatique quantique peut permettre une axiomatisation de la théorie quantique qui est opérationnelle plutôt que purement mathématique. Nous nous concentrerons ici sur la démarche et les axiomes présentés en [18], tout en gardant en tête qu'il existe d'autres ensembles équivalents d'axiomes ([22, 46]). Ces travaux constituent une partie importante de la motivation de notre recherche, fournissant une indication que les aspects quantiques de la physique pourraient découler de processus informationnels. De plus, les automates cellulaires quantiques de la section 5 sont reliés au modèle de circuit quantique présenté ci-dessous à travers une implémentation par structure de bloc de Margolus (voir figure 4.6).

#### B.1 Le modèle de circuit quantique

Afin de représenter les opérations possibles dans le cadre d'une théorie quantique, nous utilisons un modèle (une variante de théorie probabiliste appelée théorie

probabiliste opérationnelle [17]) dont les éléments sont des circuits composés de boîtes et de fils. De manière assez intuitive, les boîtes représentent des opérations effectuées dans le monde réel, qu'il s'agisse d'une interaction microscopique ou de l'utilisation d'un appareil de mesure complexe. Les fils sont simplement une manière de formaliser le transport des systèmes contenant l'information d'une opération à une autre.

Dans ce modèle, une boîte à un système (un ou plusieurs fils) d'entrée (ici dénoté  $E$ ) et système de sortie ( $S$ ). Entre l'entrée et la sortie, des *événements* (qui peuvent correspondre à des résultats classiques d'une interaction, chacun noté par  $i \in X$ ) peuvent se produire, convertissant l'information de  $E$  vers celle de  $S$ . Chaque résultat  $i$  est associée à un événement  $T_i$  que l'on peut représenter par le diagramme



Nous disons alors que la boîte entre  $E$  et  $S$  effectue un *test*. Le test  $T$ , correspondant à l'ensemble des résultats possibles  $i$  et de leurs événements  $T_i$  associés peut être illustré par le diagramme



L'ensemble de tous les événements entre  $E$  et  $S$  est noté  $T(E, S)$ , puisqu'ils effectuent une transformation du système  $E$  vers le système  $S$ . On peut composer deux tests en série si le système de sortie du premier correspond au système d'entrée

du deuxième. Voici un exemple d'événement de deux tests en série

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \boxed{T_i} \text{---} B \text{---} \boxed{V_j} \text{---} C \text{---} \\ = \\ \text{---} A \text{---} \boxed{V_j \circ T_i} \text{---} C \text{---} \end{array}$$

De la manière usuelle, l'ordre des opération sera renversé pour la notation de la composition en série (notée  $\circ$  lorsque l'on veut l'explicitier).

Les systèmes et les tests pourront également être composés en parallèle (ce type de composition sera noté  $\otimes$ ), par exemple

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \boxed{T_i} \text{---} B \text{---} \\ \text{---} C \text{---} \boxed{V_j} \text{---} D \text{---} \\ = \\ \text{---} A \otimes C \text{---} \boxed{T_i \otimes V_j} \text{---} B \otimes D \text{---} \end{array}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous pourrons omettre le symbole  $\otimes$  et écrire par exemple  $AB$  pour la composition des systèmes  $A$  et  $B$ .

L'identité sur un système  $A$  est un test (dans monde réel, ce test correspond à l'opération triviale de ne rien faire) avec un seul résultat possible (nous dirons donc qu'il s'agit un test déterministe, puisque son résultat est connu d'avance) est dénoté  $I_A$  (l'indice  $A$  sera généralement facultatif) et a les propriétés

$$\begin{array}{l} \text{---} A \text{---} \boxed{I_A} \text{---} A \text{---} \boxed{T_i} \text{---} B \text{---} = \text{---} A \text{---} \boxed{T_i} \text{---} B \text{---} \quad \forall T_i \in \mathbf{T}(A, B) \\ \text{---} B \text{---} \boxed{V_j} \text{---} A \text{---} \boxed{I_A} \text{---} A \text{---} = \text{---} B \text{---} \boxed{V_j} \text{---} A \text{---} \quad \forall V_j \in \mathbf{T}(B, A) \end{array} \tag{B.1.1}$$

L'identité  $I$  est également utilisée pour représenter le système trivial (ou nul) qui ne contient aucune information.

Lorsqu'une transformation a le système nul comme entrée ou sortie, on utilise une boîte avec un bord rond pour le représenter. Dans le cas où le système d'entrée est nul, on parle d'une préparation, notée par exemple  $|P_i\rangle_B$

$$\text{---} \overset{I}{\text{---}} \boxed{P_i} \text{---} \overset{A}{\text{---}} = \text{---} \textcircled{\boxed{P_i}} \text{---} \overset{B}{\text{---}}$$

Et dans le cas d'un système de sortie nul, on parle d'une observation, notée par exemple  $\langle O_j|_A$

$$\text{---} \overset{A}{\text{---}} \boxed{O_j} \text{---}$$

L'ensemble  $T(I,A)$  est noté  $\text{Eta}(A)$  et ses éléments sont les états du système  $A$  et  $T(A,I)$  est noté  $\text{Eff}(A)$  et ses éléments sont appelés les effets du système  $A$ . Lorsqu'il sera nécessaire que les états soient normalisés, nous noterons  $\text{Etn}(A)$ . Comme pour les systèmes et les tests, on peut combiner les états et les effets en parallèle, ce qui est généralement noté  $|P_i\rangle|Q_j\rangle = |P_i\rangle \otimes |Q_j\rangle$  et  $\langle P_i|\langle Q_j| = \langle P_i| \otimes \langle Q_j|$ .

Comme nous désirons associer une structure probabiliste au modèle de circuit, nous ferons correspondre une distribution de probabilité jointe à la composition en série d'une préparation et d'une observation.

$$\textcircled{\boxed{P_i}} \text{---} \overset{A}{\text{---}} \boxed{O_j} \text{---} = p(i, j) \tag{B.1.2}$$

De manière équivalente, on peut écrire  $p(i, j) = \langle O_j | P_i \rangle$ . Remarquons que, comme pour toute distribution de probabilité, nous avons  $p(i, j) \geq 0$  et  $\sum_{i,j} p(i, j) = 1$ .

Deux notions dont nous avons besoin, l'amalgamation et le raffinement, sont reliées, l'une étant l'inverse de l'autre. Pour un ensemble  $X$ , les sous-ensembles  $\{X_j\}_{j \in Y}$  forment une partition disjointe s'ils n'ont aucun élément en commun et couvrent conjointement la totalité de  $X$ . Pour les tests  $\{C_i\}_{i \in X}$  et  $\{D_j\}_{j \in Y}$ , s'il existe une telle partition  $\{X_j\}_{j \in Y}$  de manière à ce que  $D_j = \sum_{i \in X_j} C_i$ , nous dirons alors que  $\{C_i\}_{i \in X}$  est un raffinement de  $\{D_j\}_{j \in Y}$  et que  $\{D_j\}_{j \in Y}$  est une amalgamation de  $\{C_i\}_{i \in X}$ . Une amalgamation correspond donc à joindre plusieurs résultats du test en un même résultat moins précis et le raffinement correspond à sous-diviser un résultat d'un test en plusieurs résultats plus précis. Similairement, la transformation  $C$  est raffinée par un test  $\{C_i\}_{i \in X}$  et un sous-ensemble  $X_0$  tels que  $C = \sum_{i \in X_0} C_i$ . Dans ce cas, chaque transformation  $C_i$ ,  $i \in X_0$  est un raffinement de  $C$ .

On dit qu'une transformation  $C$  est atomique si elle n'a que des raffinements triviaux, c'est-à-dire que  $C_i$  raffine  $C$  seulement si  $C_i = pC$ , où  $p$  est une probabilité positive. Dans le cas des états, on dit qu'un état est pur s'il est atomique, et mixte s'il ne l'est pas. L'atomicité représente une précision maximale sur l'information du système. À l'inverse, un état  $\omega \in \text{Eta}(A)$  est dit complètement mixte si  $\forall \rho \in \text{Eta}(A)$  il y a une probabilité non-nulle  $p$  telle que  $p\rho$  est un raffinement de  $\omega$  (mentionnons que ceci diffère de la définition habituelle d'un état complètement mixte, qui requiert une probabilité égale pour toutes les préparations). Un état complètement mixte est

donc une combinaison de toutes les préparations possibles sur un système. Notons que par combinaison nous ne parlons pas ici de superposition quantique, mais bien de mélange statistique classique.

## B.2 Axiomes informatiques de la théorie quantique

Maintenant que nous avons défini le modèle des circuits, passons aux axiomes qui permettent d’obtenir la théorie quantique (ou encore l’ensemble des théories de probabilités classiques, qui répondent à tous les axiomes sauf celui de la purification) dans le cadre d’un formalisme opérationnel. La nature de ces axiomes contribuera à communiquer ce que nous entendons par le concept de dérivation opérationnelle. Notons que l’ordre des axiomes diffère de l’ordre présenté dans le matériel source [18], ce qui nous permet de présenter certains concepts de manière plus pédagogique.

### Axiome I. *La causalité*

Intuitivement, la notion de causalité spécifie que la cause doit précéder les effets. Dans le modèle de circuit, la distribution de probabilité sur les préparations doit être indépendante du choix des observations. Pour une préparation  $\{P_i\}_{i \in X}$  la probabilité d’obtenir l’état  $P_i$  pour une observation  $\{O_j\}_{j \in Y}$

$$p(i | \{O_j\}) := \sum_{j \in Y} \langle O_j | P_i \rangle \quad (\text{B.2.1})$$

est indépendante du choix de  $\{O_j\}_{j \in Y}$ . Autrement dit, si on a deux observations différentes  $\{O_j\}_{j \in Y}$  et  $\{N_k\}_{k \in Z}$ , alors

$$p(i | \{O_j\}) = p(i | \{N_k\}) \quad (\text{B.2.2})$$

Une théorie qui répond à cette condition est dite causale. Dans une telle théorie, la distribution de probabilité d'un ensemble de résultats à un certain moment ne peut dépendre des opérations effectuées de manière subséquente. Autrement dit, il est impossible de signaler à partir du futur dans une théorie causale. Dans le contexte du modèle de circuit, l'influence causale se propage le long des fils, de gauche à droite. La seule manière d'influencer la distribution de probabilité sur les résultats d'un test à un point  $x$  dans le circuit est d'agir sur un point  $y$  du circuit à partir duquel  $x$  peut être rejoint en voyageant toujours vers la droite sur les fils. Toute influence causale provenant d'un point du circuit ne pouvant être rejoint en empruntant les fils strictement vers la gauche à partir du point de l'effet) constituerait une violation du principe de *non-signalment*, principe respecté par la mécanique quantique et par toutes les autres théories physiques pour lesquelles nous avons des preuves expérimentales.

Pour le modèle de circuit, une formulation supplémentaire équivalente au principe de causalité nous donne l'opportunité de définir l'*effet déterministe* (ou *effet d'effacement*), concept dont nous aurons à nouveau besoin pour l'axiome de purification. Pour un système  $A$ , l'effet déterministe  $E_A$  est constitué de l'amalgamation de

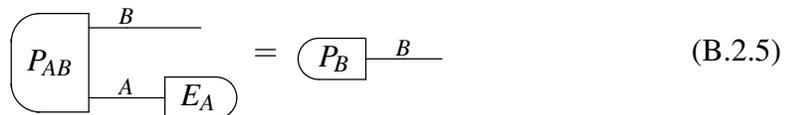
tous les résultats possibles d'une observation sur ce système. L'effet  $E_A$  effectue donc l'effacement de l'information contenue sur  $A$ . L'existence et l'unicité de cet effet pour tout système  $A$

$$E_A = \sum_{i \in X} O_i \quad \forall \{O_i\}_{i \in X} \in \text{Eff}A \quad (\text{B.2.3})$$

est équivalent à l'axiome de causalité. Autrement dit, pour un circuit tel



peu importe ce qui se passe sur  $A$ , la distribution de probabilité des résultats d'un test sur  $B$  doit rester inaltérée. C'est seulement en consultant l'information obtenue par un test non déterministe sur  $A$  qu'il serait possible d'obtenir une nouvelle distribution (conditionnelle) des résultats possible sur  $B$ . Dans le cas où l'effet d'effacement est appliqué à  $A$ , ceci devient impossible et on récupère la distribution marginale sur  $B$



Notons que l'effacement n'est pas strictement possible dans une théorie complètement réversible, mais l'effet peut être simulé par une interaction réversible avec un environnement qui est par la suite jeté.

## **Axiome II.** *La différentiabilité parfaite*

Par différentiabilité parfaite, on entend la possibilité de faire une observation donnant des résultats inmanquablement (du moins en théorie, en pratique une erreur est toujours possible) distincts pour deux états différents. Tout état qui n'est pas complètement mixte peut être différencié parfaitement d'au moins un autre état. Deux états qui sont parfaitement différentiables nous permettent d'encoder un bit d'information classique, et ce sans erreur.

En théorie quantique, par exemple, un état complètement mixte a une matrice densité de rang maximal (c'est-à-dire que toutes ses colonnes, ou toutes ses rangées, sont linéairement indépendantes). La matrice densité d'un état  $P_A$  qui n'est pas parfaitement mixte possède nécessairement un noyau (l'ensemble de vecteurs qui, multipliés par la matrice densité, donnent le vecteur nul). Un état  $P_B$  dont la matrice densité détient un noyau étant le complément orthogonal de celui de  $P_A$  en est donc parfaitement différentiable. Intuitivement, toutes les préparations (sur le système approprié) sont compatibles avec un état complètement mixte, ce qui nous empêche d'éliminer la possibilité que cet état ait engendré le résultat obtenu, indépendamment de celui-ci. Pour un état qui n'est pas complètement mixte, certaines préparations sont incompatibles et leur détection nous donne donc la certitude que nous n'avons pas affaire à cet état.

**Axiome III.** *La différentiabilité locale*

Deux états bipartis différents engendrent des distributions de probabilité différentes pour au moins une expérience consistant en un produit d'observations locales. Formellement, pour deux états différents  $P, Q \in \text{Etn}(AB)$  il existe au moins deux effets  $a \in \text{Eff}(A)$  et  $b \in \text{Eff}(B)$  tels que

$$\begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ | \\ \text{---} P \text{---} \\ | \\ \text{---} B \text{---} \\ | \\ \text{---} a \end{array} \neq \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ | \\ \text{---} Q \text{---} \\ | \\ \text{---} B \text{---} \\ | \\ \text{---} b \end{array} \quad (\text{B.2.6})$$

Autrement dit, si deux partis physiquement séparés détiennent respectivement les systèmes  $A$  et  $B$ , ils peuvent distinguer  $P$  et  $Q$  avec une probabilité strictement meilleure que  $\frac{1}{2}$  en utilisant seulement des opérations locales et de la communication classique. Il n'est donc heureusement pas nécessaire de ramener les systèmes  $A$  et  $B$  ensemble afin de pouvoir faire une mesure sur le système  $AB$ . De manière équivalente, on peut dire que la *tomographie locale* permet de reconstruire parfaitement (de manière asymptotique) un état, même s'il est intriqué, uniquement à partir de statistiques sur des mesures locales.

**Axiome IV.** *La compression idéale*

Intuitivement, la compression idéale nous dit que l'information est indépendante du système physique qui la contient et que celui-ci n'a, en théorie, pas besoin de plus de degrés de liberté que l'information encodée. Pour tout état, il existe une méthode

de compression idéale. Formellement, pour une préparation  $\{P_i\}_{i \in X}$  sur le système  $A$ , une méthode de compression comprend une opération d'encodage  $E$  de  $A$  vers un système  $C$  de plus petite dimension. La compression est dite sans perte pour la source  $\{P_i\}_{i \in X}$  s'il existe une opération de décodage  $D$  de  $C$  vers  $A$  telle que  $DE|P_i\rangle = |P_i\rangle$  pour tous les  $i \in X$ . De plus, une méthode de compression est sans perte pour l'état  $P$  si elle est sans perte pour chaque source  $\{P_i\}_{i \in X}$  telle que  $P = \sum_{i \in X} P_i$ . Une méthode de compression est maximale efficace lorsque le système  $C$  est de taille minimale, de manière à ce que tous ses états servent à encoder  $P$ . Une méthode de compression à la fois sans perte et maximale efficace est dite idéale. Dans le cas de la mécanique quantique, si un état  $P$  a une matrice densité de rang  $r$ , alors il est possible d'obtenir une compression idéale en encodant  $P$  dans un espace de Hilbert à  $r$  dimensions.

**Axiome V.** *La purification*

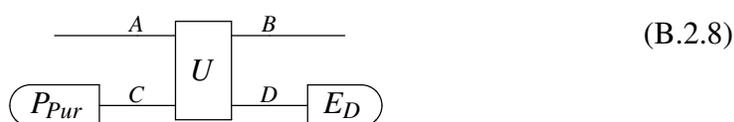
La purification permet d'obtenir un état mixte à partir d'un état pur et d'un système auxiliaire. Pour un état  $P \in \text{Etn}(A)$ , un état pur  $P_{Pur}$  sur un système composé  $AB$  est une *purification* de  $P$ , si

$$\boxed{P} \text{---}^A \text{---} = \boxed{P_{Pur}} \begin{array}{l} \text{---}^A \text{---} \\ \text{---}^B \text{---} \end{array} \boxed{E_B} \quad (\text{B.2.7})$$

où  $B$  est appelé *système purifiant*. Tout état a une purification. Pour un système purifiant fixe, deux purifications d'un même état sont reliées par une transforma-

tion réversible. Une transformation réversible prend ici son sens habituel, en tenant compte des systèmes d'entrée et de sortie: si la transformation  $T \in \mathcal{T}(A, B)$  est réversible, il existe une transformation  $T^{-1} \in \mathcal{T}(A, B)$  telle que  $T^{-1}T = I_A$  et  $TT^{-1} = I_B$ . On dira que les systèmes  $A$  et  $B$  sont opérationnellement équivalents si et seulement si il existe une transformation réversible de  $A$  vers  $B$ .

Similairement à l'idée présentée en I, où il est possible de simuler le processus irréversible d'effacement dans le cadre d'une théorie réversible, la purification permet de simuler tout effet déterministe irréversible par un circuit du type



ce qui nous permet d'adapter un grand nombre de constructions irréversibles à notre formalisme. Il est intéressant de noter que si on oublie la purification, la théorie des probabilités classiques satisfait à tous les autres axiomes. De plus, la référence [17] montre que plusieurs propriétés de la théorie quantique découlent directement de la purification. D'une certaine manière, la purification contient donc l'essence de ce qui est quantique à propos de la théorie.

**Axiome VI.** *Le conditionnement pur*

En un certain sens, le conditionnement pur est à la purification ce que le raffinement est à l'amalgamation. Si on peut faire apparaître un état mixte sur la

partie  $A$  d'un système biparti  $AB$  contenant un état pur en effaçant l'information de  $B$ , on peut à l'inverse faire apparaître un état pur sur  $A$  en obtenant la quantité maximale d'information sur  $B$ . Chaque résultat d'une mesure atomique sur  $B$  garanti un état pur sur  $A$ . En général, ce principe est impliqué par l'atomicité de la composition, un principe qui dit que la composition en série de deux opérations atomiques est également atomique. Il est démontré dans la référence [18] que dans le modèle de circuit le principe de conditionnement pur implique l'atomicité de la composition et donc qu'ici les deux formulations sont équivalentes, bien qu'elle soient à première vue différentes. Notons que cet axiome est évidemment satisfait par la théorie des probabilités classiques, puisque dans ce cas tout état pur sur un système composé  $AB$  est le produit d'états purs sur les systèmes  $A$  et  $B$  et donc l'état en  $B$  sera pur peu importe ce qui se produit en  $A$ .

Comme démontré formellement dans la référence [18], la seule théorie qui peut émerger de l'ensemble d'axiomes présenté est le formalisme d'espace de Hilbert de la théorie quantique. Cependant, les détails de la mécanique quantique ou de la théorie des champs quantiques n'émergent pas directement de ces axiomes. Comme il peut être complètement et efficacement simulé par un ordinateur quantique universel, notre modèle à base d'automate cellulaire quantique satisfait aux axiomes. De plus, comme nous l'expliquons à la section 5.1, certains aspects de la dynamique de la théorie des champs quantiques (le comportement de l'équation de Dirac dans un régime approprié, par exemple) émergent à partir de restrictions (qui sont en quelque sorte

des axiomes supplémentaires) très naturelles sur l'automate. Notre modèle est en ce sens une extension de celui que nous venons de présenter.

## ANNEXE C

### DILATATION MODIFIÉE DU TEMPS

La symétrie entre le temps et l'espace en relativité restreinte suggère qu'un renversement de l'effet de contraction des longueurs implique un similaire renversement de l'effet de dilatation du temps. Comme démontré par l'équation (5.3.11), le facteur de dilatation du temps est habituellement l'inverse du facteur de contraction des longueurs. Mais puisque le raisonnement menant à cette conclusion dépend de l'objectivité de la localité, il ne s'applique que dans un régime limité d'impulsions et d'énergies dans le cadre d'une relativité restreinte déformée.

Comme mentionné à la section 5.3, la dérivation mathématique du facteur de dilatation du temps dans notre modèle de relativité restreinte déformée est plus complexe que celle du facteur de contraction des longueurs. En effet, alors que pour la contraction des longueurs les mesures se produisent au même moment dans le référentiel en mouvement par rapport au ruban mesuré ( $t'_2 = t'_1$ ), ici c'est dans le référentiel au repos par rapport à l'horloge que la coordonnée qui ne nous intéresse pas est constante ( $x_2 = x_1$ ). Nous devons donc partir avec

$$t'_2 - t'_1 = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} (t_2 - t_1) \quad (\text{C.0.1})$$

En utilisant l'identité  $\cos(\arctan \theta) = (1 + \theta^2)^{-\frac{1}{2}}$ , la forme explicite de  $\omega(k', \omega')$  donnée par l'équation (5.2.8) est

$$\omega = \arcsin \left( \frac{\frac{\sin \omega'}{\cos k'} + \beta \tan k'}{\sqrt{(1 - \beta^2) + (\tan k' + \beta \frac{\sin \omega'}{\cos k'})^2}} \right) \quad (\text{C.0.2})$$

Notons que comme nous avons échangé les référentiels,  $\beta$  est remplacé par  $-\beta$ .

Prenant la dérivée partielle par rapport à  $\omega'$ , nous obtenons l'expression

$$\frac{\partial \omega}{\partial \omega'} = \frac{\frac{\cos \omega'}{\cos k'} - \frac{\beta \cos \omega'}{\cos k'} \left( \beta \frac{\sin \omega'}{\cos k'} + \tan k' \right) \left( \frac{\sin \omega'}{\cos k'} + \beta \tan k' \right)}{\sqrt{1 - \frac{\left( \frac{\sin \omega'}{\cos k'} + \beta \tan k' \right)^2}{\Xi^2}}} \quad (\text{C.0.3})$$

où

$$\Xi = \sqrt{(1 - \beta^2) + (\tan k' + \beta \frac{\sin \omega'}{\cos k'})^2}$$

D'une manière relativement similaire au cas pour la contraction des longueurs, nous avons

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \omega'} \right|_{\omega'=\omega'_0} \quad (\text{C.0.4})$$

Par contre, alors que dans le référentiel au repos par rapport à l'objet mesuré  $k_0$  et  $\omega_0$  sont simplement 0 et  $\arcsin m$ , nous avons ici affaire à

$$\begin{aligned} k'_0 &= \arctan \left( \frac{-\beta m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \\ \omega'_0 &= \arcsin \left( \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2 + \beta^2 m^2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

En remplaçant donc ces valeurs dans l'équation (C.0.3), nous obtenons le facteur de dilatation du temps

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\frac{\sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}} \sqrt{1-\frac{m^2}{1-\beta^2+\beta^2 m^2}}}{\Xi_0} - \beta \sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}} \sqrt{1-\frac{m^2}{1-\beta^2+\beta^2 m^2}} \left( \frac{-\beta m}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta m \sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \left( \frac{-\beta^2 m}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m \sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)}{\frac{\Xi_0^3}{\sqrt{1-\frac{\left( \frac{-\beta^2 m}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m \sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2}{\Xi_0^2}}}} \quad (\text{C.0.6})$$

où

$$\Xi_0 = \sqrt{(1-\beta^2) + \left( \frac{-\beta m}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta m \sqrt{1+\frac{\beta^2 m^2}{1-\beta^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2}$$

Malgré la complexité apparente de l'équation (C.0.6), il s'agit d'une correction négligeable (mais non-nulle, sauf lorsque  $m = 0$ ) au facteur de dilatation du temps relativiste donné par  $\gamma$ , même pour des valeurs de  $m$  relativement proche de 1 (voir la figure C.1).

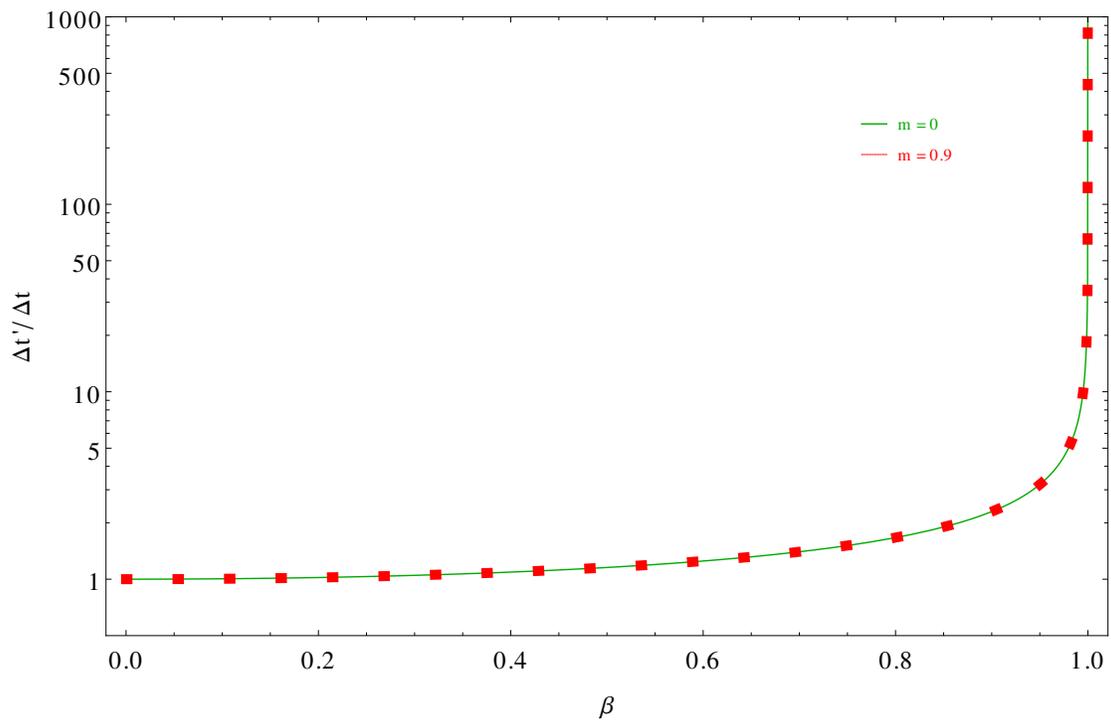


Figure C.1 : La dilatation du temps (très légèrement) modifiée par l'équation (C.0.6). Même pour une masse proche de la masse de Planck, la déformation est négligeable.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alekseï Alekseevich Abrikosov, Lev Petrovich Gorkov et Igor Ekhtievich Dzyaloshinski. *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*. Courier Corporation, 2012.
- [2] Jorge Alfaro. Quantum gravity induced lorentz invariance violation in the standard model: Hadrons. *Physical Review D*, 72(2):024027, 2005.
- [3] Jorge Alfaro, Hugo Morales-Tecotl et Luis Urrutia. Quantum gravity corrections to neutrino propagation. *Physical Review Letters*, 84(11):2318, 2000.
- [4] Giovanni Amelino-Camelia. Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (planckian) length scale. *International Journal of Modern Physics D*, 11(01):35–59, 2002.
- [5] Giovanni Amelino-Camelia. Kinematical solution of the UHE-cosmic-ray puzzle without a preferred class of inertial observers. *International Journal of Modern Physics D*, 12(07):1211–1226, 2003.
- [6] Giovanni Amelino-Camelia, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman et Lee Smolin. Principle of relative locality. *Phys. Rev. D*, 84:084010, Oct 2011.
- [7] Giovanni Amelino-Camelia, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman et Lee Smolin. Relative locality: a deepening of the relativity principle. *International Journal of Modern Physics D*, 20(14):2867–2873, 2011.

- [8] Abhay Ashtekar, Carlo Rovelli et Lee Smolin. Weaving a classical metric with quantum threads. *Physical Review Letters*, 69(2):237–240, 1992.
- [9] Elwyn Berlekamp, John Conway et Richard Guy. *Winning Ways, for Your Mathematical Plays: Games in Particular*, volume 2. Academic Pr, 1982.
- [10] Iwo Bialynicki-Birula. Weyl, Dirac, and Maxwell equations on a lattice as unitary cellular automata. *Physical Review D*, 49(12):6920, 1994.
- [11] Alexandre Bibeau-Delisle, Alessandro Bisio, Giacomo Mauro D’Ariano, Paolo Perinotti et Alessandro Tosini. Doubly special relativity from quantum cellular automata. *EPL (Europhysics Letters)*, 109(5):50003, 2015.
- [12] Alessandro Bisio, Giacomo Mauro D’Ariano et Paolo Perinotti. Lorentz symmetry for 3D quantum cellular automata. *arXiv preprint arXiv:1503.01017*, 2015.
- [13] Alessandro Bisio, Giacomo Mauro D’Ariano et Alessandro Tosini. Dirac quantum cellular automaton in one dimension: *Zitterbewegung* and scattering from potential. *Phys. Rev. A*, 88:032301, Sep 2013.
- [14] Nick Bostrom. Are we living in a computer simulation? *The Philosophical Quarterly*, 53(211):243–255, 2003.
- [15] The Wachowski Brothers. *The Matrix*, 1999.
- [16] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*, volume 1. 2004.

- [17] Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D’Ariano et Paolo Perinotti. Probabilistic theories with purification. *Physical Review A*, 81(6):062348, 2010.
- [18] Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D’Ariano et Paolo Perinotti. Informational derivation of quantum theory. *Physical Review A*, 84(1):012311, 2011.
- [19] Elio Conte. Testing quantum consciousness. *NeuroQuantology*, 6(2), 2008.
- [20] John Conway. The game of life. *Scientific American*, 223(4):4, 1970.
- [21] Matthew Cook. Universality in elementary cellular automata. *Complex systems*, 15(1):1–40, 2004.
- [22] Borivoje Dakic et Caslav Brukner. Quantum theory and beyond: is entanglement special? Dans *Deep Beauty: Understanding the Quantum World through Mathematical Innovation*.
- [23] Giacomo Mauro D’Ariano. Physics as quantum information processing: quantum fields as quantum automata. *arXiv preprint arXiv:1110.6725*, 2011.
- [24] Giacomo Mauro D’Ariano. The quantum field as a quantum computer. *Physics Letters A*, 376(5):697–702, 2012.
- [25] Paul Dirac. The quantum theory of the electron. Dans *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 117, pages 610–624. The Royal Society, 1928.
- [26] Frank Drake. Conference on extraterrestrial intelligent life. *National Academy of Sciences, Space Science Board*, 1961.

- [27] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322 (10):891–921, 1905.
- [28] Albert Einstein. The field equations of gravitation (translation). *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1915.
- [29] Richard Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 20(2):367, 1948.
- [30] Richard Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6):467–488, 1982.
- [31] Daniel Galouye. *Simulacron-3*. 1964.
- [32] Luis Garay. Quantum gravity and minimum length. *International Journal of Modern Physics A*, 10(02):145–165, 1995.
- [33] Bill Gosper. Exploiting regularities in large cellular spaces. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1):75–80, 1984.
- [34] Dave Greene. Geminoid challenge, 2013. URL <http://www.conwaylife.com/forums/download/file.php?id=234>.
- [35] Kenneth Greisen. End to the cosmic-ray spectrum? *Physical Review Letters*, 16 (17):748, 1966.
- [36] David Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson, 2005.

- [37] Gerhard Grossing et Anton Zeilinger. Quantum cellular automata. *Complex Systems*, 2(2):197–208, 1988.
- [38] Tadashi Kifune. Invariance violation extends the cosmic-ray horizon? *The Astrophysical Journal Letters*, 518(1):L21, 1999.
- [39] Willis Lamb Jr et Robert Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Physical Review*, 72(3):241, 1947.
- [40] Richard Ling. Conus textile, 2005, Wikimedia Commons.
- [41] Seth Lloyd. Ultimate physical limits to computation. *Nature*, 406(6799):1047–1054, 2000.
- [42] Seth Lloyd. Computational capacity of the universe. *Physical Review Letters*, 88(23):237901, 2002.
- [43] Seth Lloyd. *Programming the Universe: a Quantum Computer Scientist Takes on the Cosmos*. Vintage Books, 2006.
- [44] Richard MacKenzie. Path integral methods and applications. *arXiv preprint quant-ph/0004090*, 2000.
- [45] João Magueijo et Lee Smolin. Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale. *Physical Review D*, 67(4):044017, 2003.
- [46] Lluís Masanes et Markus Müller. A derivation of quantum theory from physical requirements. *New Journal of Physics*, 13(6):063001, 2011.

- [47] Ralph Merkle. Energy limits to the computational power of the human brain. *Foresight Update*, 6, 1989.
- [48] David Meyer. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *Journal of Statistical Physics*, 85(5):551–574, 1996.
- [49] Hans Moravec. When will computer hardware match the human brain. *Journal of evolution and technology*, 1(1):10, 1998.
- [50] Richard Muller et Robin Blume-Kohout. The promise of quantum simulation. *ACS Nano*, 9(8):7738–7741, 2015.
- [51] Wolfgang Pauli. Über den Einfluß der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 31(1):373–385, 1925.
- [52] Michael Peskin et Dan Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1995.
- [53] Joseph Polchinski. Tasi lectures on d-branes. *arXiv preprint hep-th/9611050*, 1996.
- [54] Bruno Pontecorvo. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 26: 984, 1968.
- [55] Paul Rendell. Universal Turing machine in Conway’s game of life, 2011. URL <http://rendell-attic.org/gol/fullutm/index.htm>.

- [56] Susanne Richter et Reinhard Werner. Ergodicity of quantum cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 82(3-4):963–998, 1996.
- [57] Howard Percy Robertson. The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1):163, 1929.
- [58] Carlo Rovelli et Lee Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B*, 8:80–152, 1990.
- [59] Carlo Rovelli et Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nuclear Physics B*, 442(3):593–619, 1995.
- [60] Bradley Schaefer. Severe limits on variations of the speed of light with frequency. *Physical Review Letters*, 82(25):4964, 1999.
- [61] Benjamin Schumacher et Reinhard Werner. Reversible quantum cellular automata. *arXiv preprint quant-ph/0405174*, 2004.
- [62] Ralf Schützhold et William Unruh. Large-scale nonlocality in doubly special relativity with an energy-dependent speed of light. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 78(7):431–435, 2003.
- [63] Claude Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21, 1949.
- [64] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [65] Max Tegmark. Importance of quantum decoherence in brain processes. *Physical Review E*, 61(4):4194, 2000.

- [66] Jonathan Tinsley, Maxim Molodtsov, Robert Prevedel, David Wartmann, Jofre Espigulé-Pons, Mattias Lauwers et Alipasha Vaziri. Direct detection of a single photon by humans. *Nature Communications*, 7, 2016.
- [67] Tommaso Toffoli et Norman Margolus. *Cellular Automata Machines: a New Environment for Modeling*. MIT press, 1987.
- [68] John Von Neumann. *The Computer and the Brain*. Yale Univ., 1958.
- [69] John Watrous. On one-dimensional quantum cellular automata. Dans *36th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, pages 528–537. IEEE, 1995.
- [70] Hermann Weyl. Dans *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press, 1949.
- [71] John Wheeler. Information, physics, quantum: The search for links. in (W. Zurek, ed.) *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*. CA: Addison-Wesley, 2(3):200–19, 1990.
- [72] Stephen Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 10(1):1–35, 1984.
- [73] Georgi Zatsepin et Vadem Kuz'min. Upper limit of the spectrum of cosmic rays. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 4:114, 1966.
- [74] Anthony Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton university press, 2010.

[75] Konrad Zuse. Rechnender Raum. calculating space (translation). *MIT Technical Translation AZT-70-164-GEMIT, Massachusetts Institute of Technology (Proj. MAC), Cambridge, Mass, 2139:1970, 1969.*