

Université de Montréal

Complexes de type Morse et leurs équivalences

par

Audrey Morin

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
orientation mathématiques fondamentales

18 avril 2017

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Complexes de type Morse et leurs équivalences

présenté par

Audrey Morin

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Octavian Cornea

(directeur de recherche)

Yvan Saint-Aubin

(membre du jury)

Mémoire accepté le

18 avril 2017

SOMMAIRE

Ce mémoire est une étude détaillée de certains aspects de la théorie de Morse et des complexes de chaînes qui en découlent : le complexe de Morse, le complexe de Milnor et le complexe de Barraud-Cornea. À l'aide de différentes techniques de la topologie différentielle et de la théorie de Morse, dont les bases forment les premiers chapitres de ce texte, nous ferons la construction détaillée de ces trois complexes avant de démontrer leurs équivalences deux à deux. Ce mémoire synthétise et met en parallèle trois branches de la théorie de Morse en ne supposant que des connaissances du niveau d'un étudiant de début maîtrise.

Mots clés : Théorie de Morse, complexe de Morse, points critiques, CW-complexes, variété connectante, éclatement d'une variété instable.

SUMMARY

In this thesis, we study aspects of Morse theory and the chain complexes that derive from it : the Morse complex, the Milnor complex and the Barraud-Cornea complex. Using different techniques from differential topology and Morse theory, which will be presented in the first chapters, we carefully build these complexes before proving their equivalence. This thesis synthesises and compares three points of view in Morse theory in a document accessible to beginning graduate students.

Keywords : Morse theory, Morse complex, critical points, CW-complexes, connecting manifold, blow-up of the unstable manifold.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Remerciements	1
Introduction	3
Chapitre 1. Topologie différentielle	5
1.1. Variétés différentielles.....	5
1.2. Dérivée.....	6
1.2.1. Théorèmes sur les valeurs régulières.....	7
1.3. Champs de vecteurs et gradient.....	8
1.4. Degré modulo 2.....	9
1.5. Sous-variétés.....	11
1.5.1. Framings.....	11
1.5.2. Transversalité.....	13
1.5.3. Cobordismes.....	14
1.6. Construction de Thom-Pontryagin.....	15
Chapitre 2. Théorie de Morse	21
2.1. Points critiques.....	21
2.2. Fonctions de Morse.....	22
2.2.1. Existence et généricité des fonctions de Morse.....	23
2.3. Pseudo-gradients et condition de Smale.....	24
2.3.1. Condition de Smale.....	27

2.3.2.	Topologie des sous-niveaux.....	31
2.3.3.	Déplacement et annulation de points critiques.....	35
2.4.	Le complexe de Morse.....	37
2.5.	Exemples.....	53
2.5.1.	La sphère.....	53
2.5.2.	L'espace projectif réel.....	54
2.5.3.	L'espace projectif complexe.....	57
Chapitre 3.	CW-complexes et homologie cellulaire.....	59
3.1.	CW-complexes.....	59
3.2.	Le complexe cellulaire.....	61
Chapitre 4.	Relations entre les CW-complexes et les flots.....	65
4.1.	Le CW-complexe associé au flot, suivant Milnor.....	66
4.1.1.	Construction du CW-complexe et homologie cellulaire.....	66
4.2.	Relation entre l'attachement des cellules et la variété connectante.....	68
4.2.1.	Définitions et constructions.....	69
4.2.2.	Résultat et démonstration.....	71
4.2.3.	Équivalence des complexes cellulaires de Morse et de Milnor....	75
4.3.	CW-complexe associé au flot, suivant Barraud-Cornea.....	77
4.3.1.	L'éclatement d'une variété instable.....	77
4.3.2.	CW-complexe et homologie cellulaire.....	81
4.3.3.	Équivalence des complexes cellulaires de Barraud-Cornea, de Morse et de Milnor.....	83
Bibliographie	87

LISTE DES FIGURES

1.1	Deux cartes compatibles	6
1.2	Une sous-variété framée	12
1.3	La sous-variété N du ruban de Möbius	12
1.4	Deux sous-variétés transverses	13
1.5	Un cobordisme	14
1.6	Un cobordisme framé	15
1.7	La variété de Thom-Pontryagin	16
1.8	Voisinage tubulaire trivial	17
2.1	Fonctions hauteur	22
2.2	Trois champs de vecteurs sur la sphère	25
2.3	Une carte de Morse	27
2.4	La variété stable	28
2.5	L'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore n'est pas Smale.	29
2.6	L'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore placé à la verticale et sur le tore penché	30
2.7	La rétraction de M_b sur M_a	31
2.8	Les régions C et D_p	32
2.9	La rétraction r'_t	33
2.10	La rétraction r''_t	34
2.11	Glissement des points critiques	35
2.12	Une légère modification du pseudo-gradient qui annule un minimum et un point de selle	36
2.13	La compactification de $M_f(p, q)$	38
2.14	Cartes de Morse et trajectoires	39
2.15	La sous-suite de trajectoires ℓ_{n_k}	41

2.16	La fonction hauteur et l'opposé du gradient sur la sphère déformée ...	43
2.17	La fonction g	45
2.18	$\tilde{F} : M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$	46
2.19	La fonction $K_{s,t}$	50
3.1	Une structure de CW-complexe sur le tore	60
4.1	Illustration de la construction récursive d'un CW-complexe Y homotope au tore	68
4.2	Projection du framing de $S^s(q) \subset f^{-1}(a)$ restreint à N sur $S^u(p)$	70
4.3	Quelques courbes de niveau de la rétraction r'_t , avant et après la modification apportée par α	72
4.4	Le voisinage $U(W^s(q))$	74
4.5	Les applications S et o	78
4.6	Les éclatements des points critiques sur le tore	81
4.7	La rétraction ψ_k	85

LISTE DES TABLEAUX

REMERCIEMENTS

Je veux tout d'abord remercier Octav Cornea, pour son infinie sagesse et sa compréhension. Merci aussi à mon collègue Vincent Létourneau pour sa générosité.

Je tiens ensuite à remercier ma famille et à mes amis (mathématiciens ou non) de m'avoir soutenue et encouragée, avec un merci particulier à Olivier, qui m'a accompagnée à travers les vents et les marées de la rédaction d'un mémoire.

Je suis enfin très reconnaissante envers les organismes gouvernementaux du FRQNT et CRSNG pour avoir sérieusement allégé mes soucis financiers pendant la durée de mes études de maîtrise.

INTRODUCTION

Ce mémoire est une étude en profondeur de certains aspects de la théorie de Morse. Une attention particulière est portée à l'étude des complexes de chaînes qui en découlent, que nous nommons ici des «complexes de type Morse». Plus spécifiquement, nous étudions le complexe de Morse, le complexe de Milnor et le complexe de Barraud-Cornea. Nous décrivons non seulement leur construction, mais aussi, en démontrant leur équivalence deux à deux, nous explorons plus en profondeur les relations qui existent entre ces objets. Ces complexes de chaînes permettent de comprendre la topologie d'une variété via leur homologie.

Nous commençons au chapitre 1 par établir les bases de la topologie différentielle qui seront utilisées dans ce mémoire. Les sujets abordés sont la définition d'une variété différentielle, l'application dérivée, les champs de vecteurs et les gradients sur les variétés différentielles, le degré modulo deux d'une fonction entre deux variétés, et les sous-variétés ainsi que leur caractérisation à l'aide des notions de «framing», de transversalité et de cobordisme. Un lecteur plus averti pourra parcourir cette section assez rapidement, à l'exception peut-être de la dernière section qui aborde un sujet moins standard du domaine, soit la construction de Thom-Pontryagin. Cette construction, associée à une fonction entre une variété et une sphère, généralise l'utile notion du degré d'une fonction et fournit la clé d'une importante démonstration au chapitre 4.

Au second chapitre, nous présentons les bases de la théorie de Morse, en se basant sur l'ouvrage de synthèse de Audin et Damian [1] ainsi que sur les livres classiques de Milnor ([6] et [7]). Nous commençons par définir les fonctions de Morse, c'est-à-dire les fonctions réelles $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont le comportement autour des points critiques est le plus simple possible. Puis, nous décrivons des champs de vecteurs adaptés à f , appelés les pseudo-gradients de Smale, qui fournissent des ensembles de trajectoires reliant les points critiques de la fonction de Morse. Au cours de ces étapes, nous prenons soin de montrer l'existence et la multitude de ces constructions sur les variétés différentielles. Différents résultats fondamentaux classiques sont ensuite présentés, concernant la topologie relative des sous-niveaux

d'une variété munie d'une fonction de Morse et le déplacement et l'annulation de points critiques d'une fonction de Morse. Puis, nous utilisons les couples de Morse-Smale pour construire notre premier complexe de type Morse, nommé tout simplement le complexe de Morse. Nous devons enfin démontrer que l'homologie de ce complexe de chaînes ne dépend pas des constructions qui sont choisies sur la variété, mais seulement de la variété elle-même. Pour conclure ce chapitre, nous présentons trois exemples détaillés de calculs de l'homologie de Morse pour des variétés simples. Il est à noter que dans cet ouvrage, nous avons choisi de négliger les notions d'orientabilité. Les résultats de ce chapitre peuvent se généraliser à ces notions, avec plus ou moins de vérifications à faire selon le cas.

Le troisième chapitre, assez concis, aborde les bases de la théorie des CW-complexes qui seront nécessaires pour décrire deux nouveaux complexes de type Morse au chapitre 4. Ces complexes proviennent directement d'une structure de CW-complexe homotope à la variété M . Des exemples choisis sont présentés de façon à aider le lecteur à faire des liens avec les constructions du chapitre précédent.

Le dernier chapitre constitue le cœur de ce mémoire. C'est là que nous décrivons les deux autres complexes de type Morse et démontrons que les trois complexes sont isomorphes entre eux. Pour commencer, nous faisons la construction classique du complexe de Milnor : c'est le complexe cellulaire d'un CW-complexe homotope à M qui sera construit par induction en suivant de près la fonction de Morse et le flot du pseudo-gradient. Puis, nous montrons que ce complexe est identique au complexe de Morse décrit au chapitre 2, en utilisant un résultat de Franks [3] qui met en lumière une forte relation entre les attachements relatifs des cellules dans le complexe de Milnor et les interactions entre les variétés instables du flot de Morse-Smale. Nous décrivons ensuite le dernier complexe de type Morse, suivant les travaux de Barraud et Cornea [2], à partir de nouvelles constructions appelées les éclatements des variétés instables. Cette fois, on attribue directement à M une structure de CW-complexe via ces éclatements, fournissant ainsi un complexe cellulaire appelé ici le complexe de Barraud-Cornea. Nous faisons ensuite deux démonstrations : d'abord que le complexe de Barraud-Cornea est identique au complexe de Morse, puis qu'il est identique au complexe de Milnor. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de faire les deux démonstrations, elles sont faites en détail dans le but d'obtenir une meilleure compréhension des liens qui unissent ces complexes de chaînes. À notre connaissance, ces deux démonstrations n'ont pas été publiées dans la littérature à ce jour, bien qu'elles soient tenues pour vraies dans le «folklore» du domaine.

Chapitre 1

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE

La topologie différentielle est le sous-domaine de la topologie qui étudie les variétés lisses à l'aide des fonctions différentiables qui y sont définies. Dans ce chapitre, nous survolerons les bases de la topologie différentielle qui seront essentielles à l'énonciation et la démonstration des résultats de ce mémoire. Nous référons le lecteur à un ouvrage de topologie différentielle, par exemple celui de Milnor [8] ou de Hirsch [5], pour plus de détails. Exceptionnellement, nous aborderons en profondeur la construction de Thom-Pontryagin, puisqu'elle sort du cadre traditionnel des bases du domaine.

1.1. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

Une **variété** topologique M de dimension m est un espace topologique paracompact et Hausdorff dans lequel tout point $x \in M$ est inclus dans un ouvert $U \subset M$ homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m . Une telle paire (U, h) où h est l'homéomorphisme entre U et son image est appelée une **carte** de la variété M . Un ensemble de cartes $\{U_\lambda, h_\lambda\}$ tel que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$ est appelé un **atlas** de M . Deux cartes $(U_\alpha, h_\alpha), (U_\beta, h_\beta)$ d'un atlas sont dites **C^r -compatibles** si

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est différentiable de classe C^r . Un atlas est de classe C^r si ses cartes sont toutes C^r -compatibles entre elles.

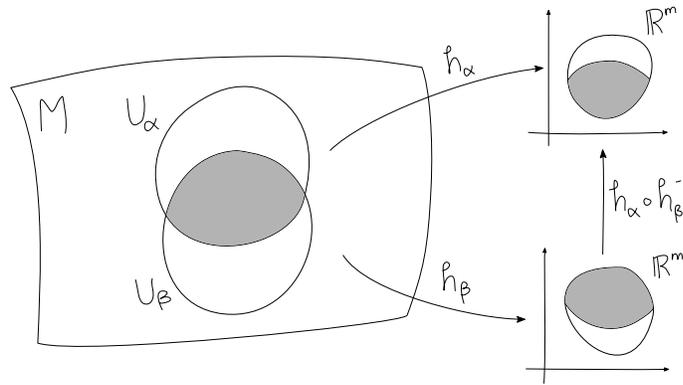


FIGURE 1.1. Deux cartes compatibles

Définition 1.1.1. Une **variété différentielle** (ou lisse, ou de classe C^∞) est une variété topologique munie d'un atlas maximal de classe C^∞ .

Définition 1.1.2. Une **sous-variété** de dimension n d'une variété différentielle M de dimension m est un sous-espace $N \subset M$ qui est lui-même une variété différentielle et tel que pour tout $x \in N$, il existe une carte (U, h) de M telle que

$$h(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_m) \in h(U) \mid x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}.$$

Définition 1.1.3. Une fonction entre deux variétés différentielles $f : M \rightarrow N$ est dite **lisse** si pour toutes les cartes (U, h) de M et (V, g) de N la composition

$$h(U) \xrightarrow{h^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} g(V)$$

est de classe C^∞ .

Le terme «lisse» sera utilisé de façon interchangeable avec le terme «différentiable» pour signifier de classe C^∞ . À moins de mention contraire, toutes les variétés rencontrées dans ce mémoire seront différentielles, sans bord et connexes, et les fonctions seront lisses.

Nous pouvons maintenant spécifier l'objet d'étude du domaine de la topologie différentielle : on y étudie les propriétés des variétés différentielles qui demeurent invariantes par rapport aux difféomorphismes (c'est-à-dire, les fonctions lisses qui possèdent un inverse lisse).

1.2. DÉRIVÉE

Le fait qu'une variété M soit différentielle permettra de décrire la dérivée, ou application tangente, de fonctions $f : M \rightarrow N$.

D'abord, l'**espace tangent** à M en x , noté $T_x M$, est l'espace vectoriel formé des classes d'équivalence des courbes

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \text{ telles que } \gamma(0) = x$$

où la relation d'équivalence est, pour une carte (U, h) centrée en x ,

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ si } (h \circ \gamma_1)'(0) = (h \circ \gamma_2)'(0).$$

Définition 1.2.1. *L'application tangente d'une fonction lisse entre deux variétés $f : M \rightarrow N$ est définie par*

$$\begin{aligned} (df)_x : T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. *Soit $f : M \rightarrow N$ une fonction lisse entre deux variétés. On dit que $x \in M$ est un **point régulier** de f si $(df)_x$ est une application linéaire surjective. Dans le cas contraire, x est appelé un **point critique** de f .*

*Si $x \in M$ est un point critique, alors $y = f(x)$ est appelée une **valeur critique** de f . Si, pour un $y \in N$,*

$$f^{-1}(y) = \{x \in M \mid f(x) = y\}$$

*ne contient aucun point critique, alors y est une **valeur régulière** de f .*

Remarque 1.2.3. *Si $y \notin \text{Im } f$, alors y est une valeur régulière de f .*

1.2.1. Théorèmes sur les valeurs régulières

Les valeurs régulières sont très utiles puisqu'elles permettent de définir des sous-variétés. En effet, à l'aide du théorème de la fonction implicite, on peut montrer le théorème suivant, un des premiers résultats en topologie différentielle.

Théorème 1.2.4 (Théorème de la valeur régulière). *Soit $f : M \rightarrow N$ une fonction lisse entre deux variétés de dimensions m et n respectivement, et soit y une valeur régulière de f . Alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de M . Si $y \in \text{Im } f$, alors $f^{-1}(y)$ est de dimension $m-n$. De plus, si $x \in f^{-1}(y)$, $(df)_x$ envoie $T_x f^{-1}(y)$ sur $\mathbf{0}$ et un complémentaire de $T_x(f^{-1}(y))$, noté ici $(T_x(f^{-1}(y)))^\perp$, sur $T_y N$ de façon isomorphe.*

Le théorème suivant nous assure qu'il existe un très grand nombre de valeurs régulières, et qu'en fait il existe des valeurs régulières arbitrairement proches de n'importe quelle valeur critique.

Théorème 1.2.5 (Sard). *Soit $f : M \rightarrow N$ une fonction lisse. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans N .*

DÉMONSTRATION. Les preuves détaillées des théorèmes 1.2.4 et 1.2.5 se retrouvent dans le livre de Milnor [8]. □

Remarque 1.2.6. *Si $f : M \rightarrow N$ est lisse et M est compacte, alors l'ensemble des valeurs régulières de f est ouvert.*

1.3. CHAMPS DE VECTEURS ET GRADIENT

Un **champ de vecteurs** X sur M est une section du fibré tangent TM . Autrement dit, c'est un choix d'un vecteur X_x dans chaque espace tangent T_xM qui dépend de façon lisse du point x considéré.

Suivant les notations introduites, la dérivée de f le long de X est notée $(df)_x(X_x)$.

Pour définir le gradient d'une fonction réelle sur une variété, on aura d'abord besoin de définir un produit scalaire sur la variété. C'est ce que la définition suivante nous fournira.

Définition 1.3.1. Une **métrique riemannienne** g sur une variété différentielle M est un produit scalaire $g_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$ choisi lisse en x sur chacun des espaces tangents T_xM .

Autrement dit, pour tout $x \in M$, $g = g_x$ satisfait aux conditions suivantes :

- (1) $g(u, v) = g(v, u) \quad \forall u, v \in T_xM$
- (2) $g(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in T_xM$
- (3) $g(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$

De plus, pour deux champs de vecteurs lisses X, Y sur M quelconques, la fonction

$$x \mapsto g_x(X_x, Y_x)$$

est lisse.

Le résultat suivant, fondamental en topologie différentielle, nous permettra de supposer l'existence d'une métrique Riemannienne sur n'importe quelle variété.

Théorème 1.3.2. Toute variété différentielle possède une métrique Riemannienne.

DÉMONSTRATION. Soit $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ un atlas de M .

Sur chaque U_α , on considère la métrique g_α telle que $((g_\alpha)_{ij}) = \text{Id}$. Alors,

$$\begin{aligned} (g_\alpha)_p(u, v) &= (g_\alpha)_p \left(\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} u_i v_j (g_\alpha)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j} u_i v_j (g_\alpha)_{ij}(p) \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ij} u_i v_j \end{aligned}$$

Ensuite, soit une partition de l'unité $\{\eta_\alpha\}$, c'est-à-dire une famille de fonctions lisses $\eta_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ qui s'annulent toutes en dehors de l'ouvert correspondant

U_α , telle que pour tout $x \in M$ la somme $\sum_\alpha \eta_\alpha(x) = 1$ et possède un nombre fini de termes non-nuls.

Posons $g = \sum_\alpha \eta_\alpha g_\alpha$.

Comme le support des η_α est localement fini, la somme est localement finie, donc g est bien définie et lisse. Aussi, g est bilinéaire et symétrique. Enfin, puisque $\eta_\alpha \geq 0 \quad \forall \alpha$ et $\sum_\alpha \eta_\alpha(x) = 1 \quad \forall x$, il s'ensuit que g est définie positive.

D'où g est une métrique Riemannienne sur M . \square

Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, son gradient est un champ de vecteurs donné par

$$\begin{aligned} \text{grad } f &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{grad}_x f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right). \end{aligned}$$

De façon équivalente, on peut définir le gradient en choisissant pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ l'unique vecteur $\text{grad}_x f \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\langle \text{grad}_x f, v \rangle = (df)_x(v)$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^m$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^m .

À l'aide d'une métrique Riemannienne, on peut généraliser cette définition pour obtenir la notion de gradient d'une fonction réelle sur une variété quelconque.

Définition 1.3.3. *Le **gradient d'une fonction** $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété M de dimension m munie d'une métrique riemannienne g est un champ de vecteurs sur M défini par*

$$\begin{aligned} \text{grad } f &: M \rightarrow TM \\ x &\mapsto \text{grad}_x f \in T_x M \end{aligned}$$

où $\text{grad}_x f$ est l'unique élément de $T_x M$ tel que

$$g(\text{grad}_x f, v) = (df)_x(v)$$

pour tout $v \in T_x M$.

Intuitivement, le gradient au point x indique dans $T_x M$ la direction où f croît le plus rapidement.

1.4. DEGRÉ MODULO 2

Soit y une valeur régulière de $f : M \rightarrow N$ où M et N sont de même dimension $m = n$ et M est compacte. Par le théorème 1.2.4, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de

dimension $m - n = 0$, et puisque M est compacte, $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini de points. On note $\#f^{-1}(y)$ le nombre de points dans cet ensemble.

Par le théorème de la fonction inverse, on a aussi que f est un difféomorphisme localement autour des points de $f^{-1}(y)$. Il n'est donc pas difficile de voir que le nombre $\#f^{-1}(y)$ est localement constant : il existe un voisinage $V \subset N$ autour de y tel que $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$ pour tout $z \in V$. Un théorème énoncé plus tard nous donnera un résultat plus fort selon lequel le nombre $\#f^{-1}(y)$ ne dépend pas du tout du choix de la valeur régulière y . C'est ce qui nous permettra d'établir la définition suivante.

Définition 1.4.1. *Le nombre $\#f^{-1}(y) \pmod{2}$ est appelé le **degré modulo 2** de l'application f et sera noté $\deg_2(f)$.*

Remarque 1.4.2. *Si on tient compte des orientations, on peut définir la notion plus générale de **degré** d'une fonction : pour $x \in f^{-1}(y)$, soit*

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } (df)_x \text{ préserve l'orientation de } TM_x \\ -1 & \text{si } (df)_x \text{ renverse l'orientation de } TM_x \end{cases},$$

alors $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(x)$. Dans ce mémoire, on ne se préoccupera pas des orientations, donc on s'en tiendra au degré modulo 2.

L'intérêt principal du degré est qu'il fournit un invariant homotopique. C'est ce qu'on montre ici.

Théorème 1.4.3. *Deux applications homotopes ont le même degré modulo 2.*

DÉMONSTRATION. Soit $f, g : M \rightarrow N$ deux applications et soit

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow N$$

une homotopie entre f et g . Comme les valeurs régulières sont denses dans N (1.2.5), il existe $y \in N$ qui soit une valeur régulière pour f et pour g . Si y est aussi une valeur régulière de H , alors $H^{-1}(y)$ est une variété de dimension 1 qui a pour bord

$$f^{-1}(y) \times \{0\} \cup g^{-1}(y) \times \{1\}.$$

Or le bord d'une variété de dimension 1 est un nombre pair de points [8, p. 55], donc

$$\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \equiv 0 \pmod{2},$$

d'où

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}.$$

Si y n'est pas une valeur régulière pour H , on n'a qu'à choisir un point $z \in N$ suffisamment proche de y qui soit une valeur régulière de f , de g et de H (encore

une fois, c'est possible par le théorème 1.2.5). Rappelons que pour z suffisamment proche de y , $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z)$. Alors

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y) \pmod{2},$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé plus tôt, selon lequel le degré est le même peu importe la valeur régulière choisie pour le calculer.

Théorème 1.4.4. *Si y et z sont deux valeurs régulières de f , alors*

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $h : N \rightarrow N$ un difféomorphisme isotope à l'identité tel que $h(y) = z$ (ce difféomorphisme existe par le lemme d'homogénéité [8, p. 22]). Alors on a que z est une valeur régulière de $h \circ f$, et que

$$\begin{aligned} \#f^{-1}(y) &= \#(f^{-1}(h^{-1}(z))) \\ &= \#(h \circ f)^{-1}(z) \\ &\equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2} \quad \text{car } h \circ f \simeq f \text{ (théorème 1.4.3)}. \end{aligned}$$

\square

1.5. SOUS-VARIÉTÉS

Cette section enrichira notre étude des sous-variétés. Nous introduirons d'abord le concept de «framing», qui décrit la façon dont une sous-variété est incluse dans la variété ambiante. Aussi, les concepts de transversalité et de cobordisme seront abordés, dans le but de caractériser les positions relatives des sous-variétés d'une même variété ambiante.

1.5.1. Framings

Soit M une variété différentielle riemannienne de dimension m et $N \subset M$ une sous-variété de dimension n .

Définition 1.5.1. *Un **framing** d'une sous-variété $N \subset M$ est une fonction lisse \mathbf{v} qui associe à chaque $x \in N$ une base*

$$\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{m-n}(x))$$

de l'espace normal à N dans M en x , noté $(T_x N)^\perp \subset T_x M$.

La différence entre les dimensions $m - n$ est appelée la **codimension** de $N \subset M$.

Une sous-variété munie d'un framing est appelée une **sous-variété framée** et est notée (N, \mathfrak{v}) .

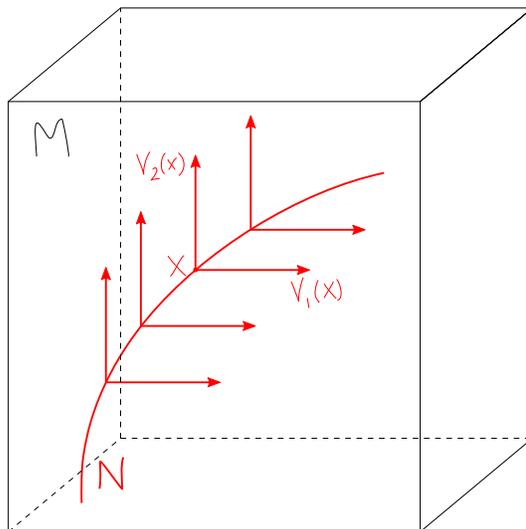


FIGURE 1.2. Une sous-variété framée

Remarque 1.5.2. Il n'existe pas de framing pour toutes les sous-variétés $N \subset M$. Par exemple, la sous-variété N indiquée dans la figure suivante sur un ruban de Möbius M ne possède pas de framing.

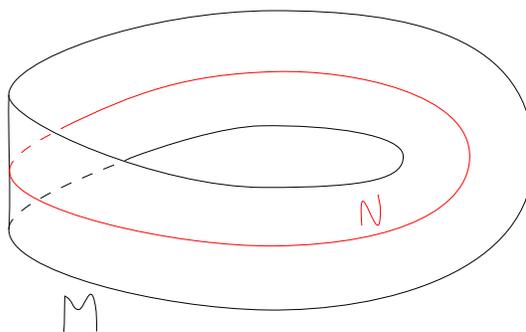


FIGURE 1.3. La sous-variété N du ruban de Möbius

Remarque 1.5.3. Si une sous-variété N possède un voisinage tubulaire trivial

$$U(N) \xrightarrow[\cong]{\nu} N \times D^{m-n}$$

alors ν^{-1} restreint à (x, e_1, \dots, e_{m-n}) où (e_1, \dots, e_{m-n}) correspond à la base canonique de \mathbb{R}^{m-n} induit un framing \mathfrak{v} de $N \subset M$.

1.5.2. Transversalité

La transversalité est une notion importante en topologie différentielle. Lorsque la condition de transversalité est respectée, la modélisation de l'intersection des sous-variétés dans la variété ambiante est grandement facilitée. Pour les démonstrations des résultats de cette section, nous référons le lecteur à l'ouvrage de Hirsch [5].

Définition 1.5.4. Deux sous-variétés N et N' de M sont dites **transverses** au point $x \in M$ si

$$\begin{cases} \text{soit } x \notin N \cap N' \\ \text{soit } x \in N \cap N' \text{ et } T_x N + T_x N' = T_x M. \end{cases}$$

Les sous-variétés N et N' sont dites **transverses** si elles sont transverses en tout point de M . On le note $N \pitchfork N'$.

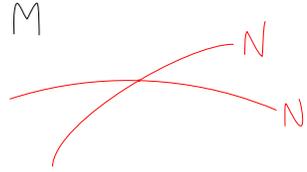


FIGURE 1.4. Deux sous-variétés transverses

Remarque 1.5.5. Si $N \pitchfork N'$, la propriété $T_x N + T_x N' = T_x M$ nous donne que

$$\dim N + \dim N' - \dim(N \cap N') = \dim M.$$

Remarque 1.5.6. La transversalité est une condition «générique», c'est-à-dire que si N et N' ne sont pas transverses, une petite déformation permettra d'assurer leur transversalité. C'est aussi une condition «stable», c'est-à-dire que si N et N' sont transverses, toute déformation apportée à N ou N' , si elle est suffisamment petite, conservera la transversalité.

Définition 1.5.7. Soit $f : P \rightarrow M$ quelconque (mais lisse) et soit N une sous-variété de M . On dit que la fonction f est **transverse** à N au point $q \in M$ si

$$\begin{cases} \text{soit } q \notin f(P) \cap N \\ \text{soit } q \in f(P) \cap N \text{ et } T_x f(T_x P) + T_q N = T_q M \quad \forall x \in f^{-1}(q). \end{cases}$$

Similairement, on dit que f est transverse à N si on a la transversalité en tout point de M et on le note $f \pitchfork N$.

Proposition 1.5.8. Si $f \pitchfork N$ et si $f^{-1}(N) = \{x \in P \mid f(x) \in N\}$ est non-vide, alors $f^{-1}(N)$ est une sous-variété de P .

1.5.3. Cobordismes

Une autre façon de décrire les relations entre les sous-variétés est de les classer selon la relation de cobordisme. Deux sous-variétés sont cobordantes si elles forment le bord d'une sous-variété dans $M \times [0, 1]$. Nous décrivons ces concepts plus en détail dans cette section.

Définition 1.5.9. Soit N et N' deux sous-variétés de M . Ces variétés sont dites **cobordantes** s'il existe une variété compacte à bord $X \subset M \times [0, 1]$ telle que

$$\partial X = N \times \{0\} \sqcup N' \times \{1\}$$

et telle que, pour un $\varepsilon > 0$, $X \cap (M \times \{t\})$ est égale à $N \times \{t\}$ pour $t \in [0, \varepsilon)$ et à $N' \times \{t\}$ pour $t \in (1 - \varepsilon, 1]$. On dit alors que X est constant près de ses bords. La variété X est appelée un **cobordisme** entre N et N' .

Exemple 1.5.10. Sur la figure suivante, M est le cercle S^2 , $N \subset M$ est un point et $N' \subset M$ est un ensemble de trois points. Le cobordisme X entre N et N' est une sous-variété du cylindre $M \times [0, 1]$ qui est constante près de ses bords $N \times \{0\}$ et $N' \times \{1\}$.

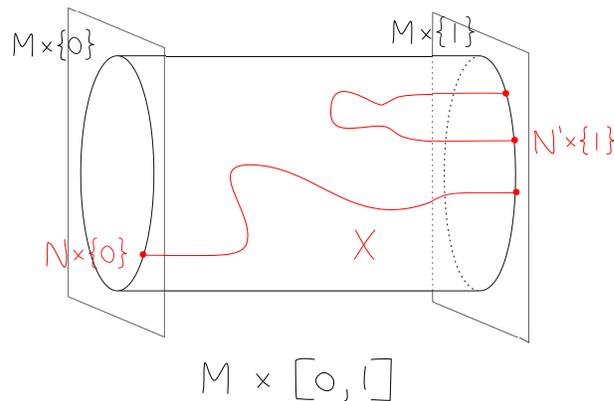


FIGURE 1.5. Un cobordisme

Comme les cobordismes sont constants près de leurs bords, il est possible de créer un nouveau cobordisme lisse en mettant bout à bout deux cobordismes entre N et N' et N' et N'' . La relation de cobordisme entre les sous-variétés de M forme donc une relation d'équivalence entre sous-variétés.

Définition 1.5.11. Un **cobordisme framé** entre deux sous-variétés framées (N, \mathbf{v}) et (N', \mathbf{v}') de M est une paire (X, \mathbf{w}) où X est un cobordisme entre N et N' et \mathbf{w} est un **framing** de $X \subset M \times [0, 1]$ tel que, pour un $\varepsilon > 0$, $\mathbf{w}((p, t))$ correspond à $\mathbf{v}(p)$ pour $p \in N, t \in [0, \varepsilon)$ et à $\mathbf{v}'(p)$ pour $p \in N', t \in (1 - \varepsilon, 1]$.

La relation de cobordisme framé est aussi une relation d'équivalence.

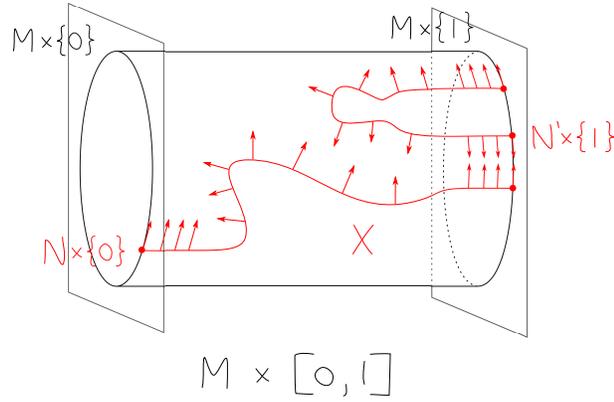


FIGURE 1.6. Un cobordisme framé

1.6. CONSTRUCTION DE THOM-PONTRYAGIN

La notion de degré modulo 2 définie précédemment n'est valide que pour les fonctions entre les variétés de même dimension. Cette notion fournit pourtant un invariant homotopique utile. Nous allons donc étudier une généralisation, due à Pontryagin et plus tard généralisée à nouveau par Thom, qui étend la notion de degré aux fonctions $f : M \rightarrow S^p$ entre une variété M compacte et sans bord de dimension m et une sphère de dimension p .

Remarque 1.6.1. Dans ce mémoire, le disque unitaire et la sphère unitaire seront notés

$$D^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1 \right\}$$

et

$$S^{n-1} = \partial D^n.$$

Soit $f : M \rightarrow S^p$ une application lisse et $y \in S^p$ une valeur régulière de f . Rappelons que le théorème 1.2.4 implique que $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de M , et que, pour $x \in f^{-1}(y)$, l'application dérivée

$$(df)_x : T_x M \rightarrow T_y S^p$$

transporte $T_x(f^{-1}(y))$ sur 0 et un complémentaire de $T_x(f^{-1}(y))$ selon une certaine métrique riemannienne, noté ici $(T_x(f^{-1}(y)))^\perp$, sur $T_y S^p$ de façon isomorphe. Donc, si on choisit une base \mathbf{v} orientée positivement pour $T_y S^p$, on peut définir un framing \mathbf{w} de $f^{-1}(y)$ en suivant l'inverse de cet isomorphisme. On note ce framing $\mathbf{w} = f^*\mathbf{v}$.

Définition 1.6.2. La variété framée $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ est la **variété de Pontryagin** associée à f , y et \mathbf{v} .

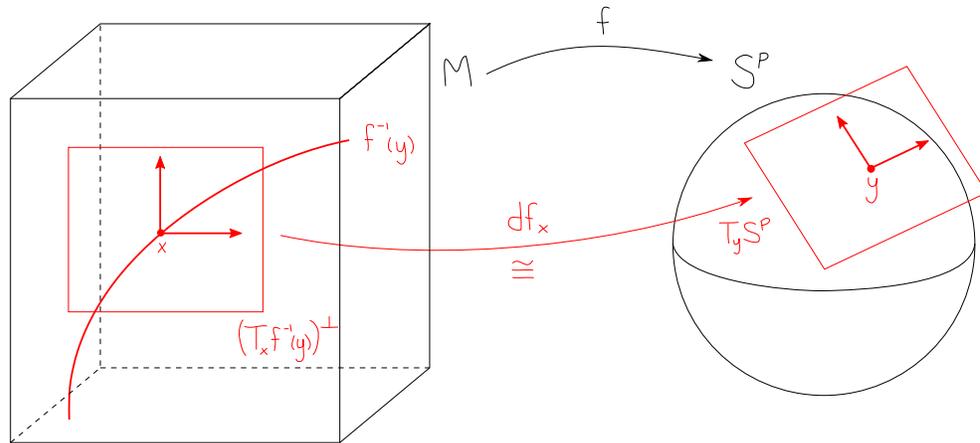


FIGURE 1.7. La variété de Thom-Pontryagin

Le premier résultat d'importance concernant la variété de Pontryagin est que, à cobordisme framé près, sa construction n'est pas affectée par les choix de y et de \mathbf{v} . C'est pourquoi on pourra simplement parler de la variété de Pontryagin associée à une fonction f .

Théorème 1.6.3. *Soit y et y' deux valeurs régulières de f , et soit \mathbf{v} une base de $T_y S^p$, et \mathbf{v}' une base de $T_{y'} S^p$, toutes deux orientées positivement. Alors il existe un cobordisme framé entre les sous-variétés framées $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ et $(f^{-1}(y'), f^*\mathbf{v}')$.*

DÉMONSTRATION. Voici une idée générale de la preuve de ce théorème. D'abord, on prouve que, pour une valeur régulière fixe y de f et deux choix de bases \mathbf{v} et \mathbf{v}' , $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v})$ est dans la même classe de cobordisme framé que $(f^{-1}(y), f^*\mathbf{v}')$. Pour le montrer, il suffit de décrire un cobordisme à l'aide d'un chemin lisse entre \mathbf{v} et \mathbf{v}' dans l'espace des bases de $T_y(S^p)$ orientées positivement, cet espace étant identifié à $GL^+(p, \mathbb{R})$.

Grâce à ce résultat, il ne sera plus nécessaire de spécifier le choix de base \mathbf{v} à chaque fois qu'on mentionne une variété de Pontryagin $f^{-1}(y)$.

Lemme A. *Si les valeurs régulières y et z suffisamment proches l'une de l'autre, alors il existe un cobordisme framé entre $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(z)$.*

DÉMONSTRATION. Si z est suffisamment proche de y , alors z appartient à un ouvert autour de y qui ne contient que des valeurs régulières de f . Soit une rotation r_t de S^p telle que $r_0 = \text{Id}$, r_1 apporte y sur z , et $r_t^{-1}(z)$ passe à l'intérieur de ce voisinage de valeurs régulières pour tout t . Comme z est une valeur régulière de $r_t \circ f : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$, par le théorème 1.2.4, $(r_t \circ f)^{-1}(z)$ est une sous-variété framée de $M \times [0, 1]$, dont les bords sont $(r_0 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(z)$ et $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$. \square

Lemme B. *Si f et g sont homotopes et y est une valeur régulière pour f et pour g , alors il existe un cobordisme framé entre $f^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $H : M \times [0, 1] \rightarrow S^p$ une homotopie telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. Choisissons une valeur régulière z de H suffisamment proche de y pour que, par le lemme A, il existe des cobordismes framés à la fois entre $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(z)$ et entre $g^{-1}(y)$ et $g^{-1}(z)$. Comme z est une valeur régulière de H , H fournit un cobordisme framé dont les bords sont $H_0^{-1}(z) = f^{-1}(z)$ et $H_1^{-1}(z) = g^{-1}(z)$. Par transitivité, $f^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y)$ se retrouvent donc dans la même classe de cobordisme framé. \square

En conclusion, si on a deux valeurs régulières quelconques y et z de f , on peut décrire une rotation

$$\begin{aligned} r_t : S^p &\longrightarrow S^p \\ r_0 &= \text{Id} \\ r_1(y) &= z. \end{aligned}$$

Cette rotation fournit l'homotopie $r_t \circ f$ entre $r_0 \circ f = \text{Id} \circ f = f$ et $r_1 \circ f$, et z est une valeur régulière pour les deux fonctions. On a donc par le lemme B que $f^{-1}(z)$ et $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(y)$ sont dans la même classe de cobordisme framé, ce qu'on voulait montrer. \square

Théorème 1.6.4 (Théorème du voisinage tubulaire trivial). *Soit $N \subset M$ une variété framée compacte et sans bord, de dimension n et munie du framing \mathbf{v} . Alors il existe un voisinage $U(N) \subset M$ ainsi qu'un difféomorphisme*

$$\begin{aligned} U(N) &\xrightarrow{\nu} N \times D^{m-n} \\ N \ni x &\longmapsto (x, 0) \\ \mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_{m-n}(x)) &\longmapsto (x, (e_1, \dots, e_{m-n})) \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_{m-n}) est la base canonique de \mathbb{R}^{m-n} .

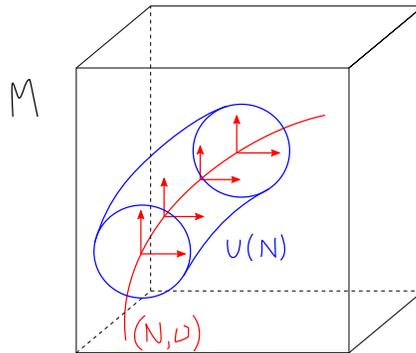


FIGURE 1.8. Voisinage tubulaire trivial

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve de ce théorème est de définir une fonction

$$\mu : N \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow M$$

qui à chaque point (x, t_1, \dots, t_{m-n}) associe la fin du segment de longueur

$$\|t_1 v_1(x) + \dots + t_{m-n} v_{m-n}(x)\|$$

sur la géodésique qui part en direction

$$\frac{t_1 v_1(x) + \dots + t_{m-n} v_{m-n}(x)}{\|t_1 v_1(x) + \dots + t_{m-n} v_{m-n}(x)\|}$$

à partir du point x . Si on restreint le domaine de cette fonction à $N \times U_\varepsilon$ pour U_ε une boule ouverte centrée à 0 et suffisamment petite de \mathbb{R}^{m-n} , alors μ sera bien définie et lisse. Puis, μ est bien un difféomorphisme, car $(d\mu)_{(x,0)}$ est non singulière et par le théorème de la fonction inverse (et en prenant à nouveau ε suffisamment petit). Enfin, on restreint une dernière fois μ à $N \times D_{\varepsilon/2}$, ce qui est difféomorphe à $N \times D^{m-n}$. Il ne reste qu'à prendre $\nu = \mu^{-1}$. □

Cela mène au théorème suivant :

Théorème 1.6.5. *Toute sous-variété framée compacte (N, \mathfrak{v}) de codimension p en M peut être décrite comme une variété de Pontryagin suivant une certaine fonction $f : M \longrightarrow S^p$.*

DÉMONSTRATION. Construisons explicitement une fonction $f : M \longrightarrow S^p$ qui fera l'affaire. On commence par choisir une représentation d'un voisinage trivial de N comme au théorème précédent, soit

$$U(N) \xrightarrow[\approx]{\nu} N \times D^p.$$

Puis, on définit $f : M \longrightarrow S^p$ de la façon suivante¹ :

$$f : M \longrightarrow M / \overline{M - U(N)} = U(N) / \partial(U(N)) \xrightarrow[\approx]{\nu} N \times D^p / \partial(N \times D^p) \xrightarrow{\pi} D^p / \partial D^p \xrightarrow[\approx]{\varphi} S^p$$

où π est la projection canonique et φ est un difféomorphisme. Alors f est un difféomorphisme dans un voisinage de N , $\varphi(\mathbf{0})$ est une valeur régulière de f , $f^{-1}(\varphi(\mathbf{0})) = N$, et par le théorème précédent,

$$f^{-1}(\varphi(e_1, \dots, e_p)) = \mathfrak{v}.$$

□

1. Dans ce mémoire, pour $B \subset A$ une sous-variété, A/B dénote le quotient de A par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de B à un seul point. Une flèche non identifiée $A \longrightarrow A/B$ dénote l'application qui envoie tous les points de B sur un même point et qui laisse les autres points inchangés.

Théorème 1.6.6. *Deux applications $f, g : M \longrightarrow S^p$ sont homotopes si et seulement si leurs variétés de Pontryagin appartiennent à la même classe de cobordisme framé.*

DÉMONSTRATION.

(\Rightarrow) Par le lemme B, $f^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y)$ sont dans la même classe de cobordisme framé aussitôt que f et g sont homotopes.

(\Leftarrow) On suppose que $f^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y)$ sont dans la même classe de cobordisme framé. Alors, il existe (X, \mathfrak{w}) un cobordisme framé entre $f^{-1}(y)$ et $g^{-1}(y)$. Ensuite, d'une façon analogue à ce qu'on a fait dans la preuve du théorème 1.6.5, on construit une fonction $F : M \times [0, 1] \longrightarrow S^p$ dont y est une valeur régulière et telle que $F^{-1}(y)$ munie du framing induit correspond exactement à (X, \mathfrak{w}) . Donc $F_0^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, $F_1^{-1}(y) = g^{-1}(y)$. Le lemme suivant nous permettra de conclure.

Lemme C. *Si $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v}) = (g^{-1}(y), g^*\mathfrak{v})$, alors f est homotope à g .*

DÉMONSTRATION. Voir Milnor [6, p.48]. □

En effet, on a alors

$$\begin{aligned} f &\simeq F_0 && \text{par le lemme C} \\ &\simeq F_1 \\ &\simeq g && \text{par le lemme C.} \end{aligned}$$

□

Les théorèmes de cette section nous permettent d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.6.7. *Il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie des fonctions de M dans S^p et l'ensemble des classes de cobordisme framé des sous-variétés de M de codimension p .*

Pour conclure, revenons sur notre affirmation selon laquelle la construction de Thom-Pontryagin offrait une généralisation du concept de degré modulo 2 d'une fonction. En effet, supposons que la dimension de la variété M soit égale à la dimension p de la sphère. Alors, la variété de Pontryagin $f^{-1}(y)$ pour une valeur régulière y sera de dimension 0, donc un ensemble de points. Le nombre de points dans cet ensemble, comptés modulo 2, correspond au degré modulo 2 de f tel que défini à la section 1.4.

Remarque 1.6.8. *Si on tient compte des orientations, la construction de Thom-Pontryagin généralise la notion plus générale de degré d'une fonction. Le framing de $f^{-1}(y)$ correspond à un choix d'orientation (+1 ou -1) pour chaque point, puis la somme de ces signes correspond au degré tel que défini à la remarque 1.4.2.*

Chapitre 2

THÉORIE DE MORSE

Dans ce chapitre, nous aborderons les bases de la théorie de Morse qui nous seront utiles aux chapitres suivants. La théorie de Morse est le sous-domaine de la topologie différentielle qui fait l'étude des variétés à l'aide des fonctions réelles qui y sont définies. En particulier, l'étude des points critiques de ces fonctions réelles est centrale en théorie de Morse ; en effet, nous nous en servirons pour former le complexe des points critiques, ou complexe de Morse. Nous définirons ensuite la différentielle de ce complexe à l'aide de trajectoires reliant les points critiques. Enfin, nous serons en mesure de définir l'homologie de Morse de la variété, puis de montrer qu'elle ne dépend pas des constructions qu'on a faites sur la variété en cours de route.

2.1. POINTS CRITIQUES

Nous débutons par réécrire la définition d'un point critique d'une fonction dans le cas des fonctions réelles, avant de caractériser ces points critiques en définissant leur indice.

Définition 2.1.1. *Soit une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété différentielle M de dimension n . Un **point critique** de f est un point $p \in M$ tel que $(df)_p = \mathbf{0}$. Autrement dit, si (x_1, \dots, x_n) est un système de coordonnées sur un voisinage de p , alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

On désigne par $\text{Crit}(f)$ l'ensemble des points critiques de la fonction f .

Définition 2.1.2. *Un point critique p de f est dit **dégénéré** si la matrice hessienne en p , soit*

$$\text{Hess}_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{ij}$$

*est singulière. Si elle est non-singulière, le point critique est dit **non-dégénéré**.*

La hessienne dépend du choix de coordonnées qu'on a fait au voisinage de p . Par contre, le nombre de valeurs propres positives, négatives ou nulles de la matrice n'en dépendent pas. On peut montrer ceci à l'aide de cartes, ou d'un argument plus intrinsèque comme dans [6, p.4]. Il suit que la notion suivante est bien définie :

Définition 2.1.3. *L'indice d'un point critique non-dégénéré p est le nombre de valeurs propres négatives de la hessienne de f définie en p , et est noté $\text{Ind}_f(p)$ ou $|p|$ lorsqu'aucune confusion n'est possible.*

On désigne par $\text{Crit}_k(f)$ l'ensemble des points critiques d'indice k de f .

2.2. FONCTIONS DE MORSE

Le comportement d'une fonction réelle autour d'un point critique non dégénéré se décrit très simplement. C'est pourquoi, en théorie de Morse, on choisit dès le départ d'étudier les fonctions réelles qui n'ont pas de points critiques dégénérés.

Définition 2.2.1. *Une fonction réelle sur une variété $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite une **fonction de Morse** si elle ne possède aucun point critique dégénéré.*

Lorsqu'une fonction est de Morse, en tout point critique p , les valeurs propres de la Hessienne sont toutes strictement positives ou strictement négatives. Suivant cette division des valeurs propres, on pourra décomposer l'espace tangent $T_p M$ en deux sous-espaces linéaires, l'un où la fonction f est décroissante au départ de p , de dimension correspondant au nombre de valeurs propres négatives, et l'autre où la fonction est croissante au départ de p , de dimension correspondant au nombre de valeurs propres positives.

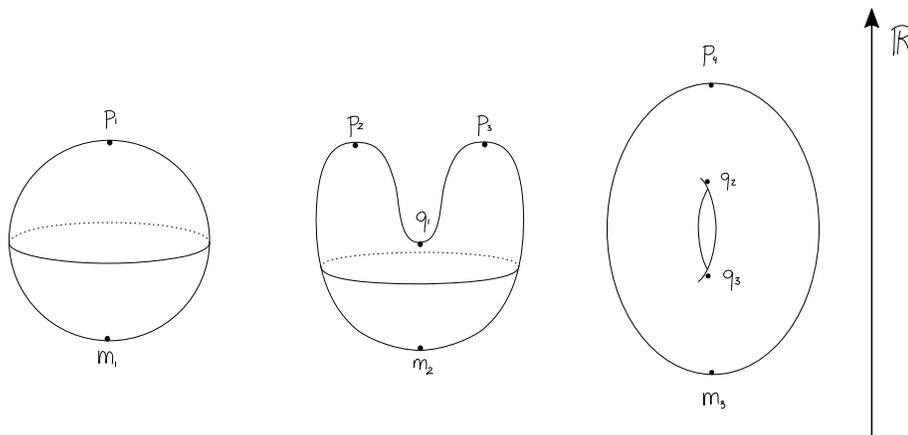


FIGURE 2.1. Fonctions hauteur

Exemple 2.2.2 (Fonctions de Morse). *La **fonction hauteur** sur une surface incluse dans \mathbb{R}^3 est la fonction qui associe à chaque point de la surface la valeur de sa dernière coordonnée. Ces fonctions fournissent de bons exemples de fonctions*

de Morse. Par exemple, sur la figure 2.1 sont illustrées les fonctions hauteur d'une sphère, d'une sphère déformée et d'un tore. Les points identifiés sur la figure sont des points critiques : les p_i sont des maximums (des points critiques d'indice 2), les q_i des points de selle (d'indice 1), et les m_i des minimums (d'indice 0).

Le lemme suivant est fondamental en théorie de Morse : c'est celui qui permet de modéliser le comportement des fonctions de Morse autour de leurs points critiques de la façon annoncée plus tôt.

Théorème 2.2.3 (Lemme de Morse). *Soit p un point critique non-dégénéré d'indice k d'une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une carte (U, h) de M autour de p telle que*

$$h(p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

$$f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{j=1}^k x_j^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2$$

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Im}(h) \subset \mathbb{R}^n$. Cette carte est appelée une **carte de Morse**.

DÉMONSTRATION. Voir Milnor [6, p.6]. □

L'énoncé du lemme de Morse nous permet de déduire que dans une carte de Morse, $(df)_x$ ne peut s'annuler qu'au point $x = p$. Cela entraîne les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.2.4. *Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.*

Corollaire 2.2.5. *Une fonction de Morse sur une variété compacte possède un nombre fini de points critiques.*

2.2.1. Existence et généricité des fonctions de Morse

Les fonctions de Morse existent sur toutes les variétés et existent en grand nombre. En effet, comme le démontre Milnor [6, §6], si on plonge la variété M dans \mathbb{R}^m pour un m suffisamment grand, le théorème de Sard implique que

$$f_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_p(x) = \|x - p\|^2$$

est une fonction de Morse pour tout point $p \in \mathbb{R}^m$ à l'exception d'un ensemble de mesure 0. À partir de cette observation, Milnor montre le résultat suivant :

Proposition 2.2.6. *Soit une variété M et soit g une fonction réelle sur M . Alors pour tout entier k fixé, la fonction g avec toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ peut être approchée, uniformément sur tout compact, par des fonctions de Morse.*

Une version plus générale de ce résultat peut aisément être démontrée à partir de là, toujours selon Milnor [7].

Théorème 2.2.7 (Généricité des fonctions de Morse). *Soit M une variété compacte. Alors l'ensemble des fonctions de Morse sur M forme un ouvert dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Ce résultat nous permettra plus tard d'apporter des petites modifications aux fonctions de Morse sans se soucier que leurs points critiques puissent devenir dégénérés.

2.3. PSEUDO-GRADIENTS ET CONDITION DE SMALE

Maintenant que nous avons des fonctions sur les variétés avec des points critiques adéquats, la prochaine étape est de définir un ensemble de trajectoires qui relient les points critiques entre eux. Pour ce faire, on pourrait penser à utiliser les trajectoires données par le gradient d'une fonction de Morse (ou à son opposé), mais ce champ de vecteurs ne possède pas certaines des propriétés voulues. Nous allons donc définir des ensembles plus généraux de champs de vecteurs appelés les champs de pseudo-gradients, avant de sélectionner parmi eux ceux qui font l'affaire, c'est-à-dire ceux qui satisfont à la condition de Smale. L'intérêt de cette condition réside entre autres dans le fait que lorsqu'elle est respectée, les trajectoires engendrées par le pseudo-gradient qui relient les points critiques d'indices consécutifs sont en nombre fini. Cette condition est centrale pour la construction de la différentielle du complexe de Morse qui sera faite plus tard dans ce chapitre.

Notons que certains auteurs choisissent les champs de pseudo-gradients qui «descendent» le long de la fonction de Morse (c'est-à-dire, la dérivée de f le long du champ de vecteurs est négative) alors que d'autres choisissent ceux qui «montent»; il ne s'agit que d'une convention. Conformément à ce qui est observé le plus souvent dans les sources récentes sur la théorie de Morse, nous choisirons les pseudo-gradients qui descendent le long des fonctions.

Définition 2.3.1. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Un champ de vecteurs X sur M avec les propriétés*

- (1) $(df)_x(X_x) \leq 0$ avec l'égalité si et seulement si $x \in \text{Crit}(f)$
- (2) dans une carte de Morse au voisinage d'un point critique, $X = -\text{grad}(f)$ pour la métrique canonique de \mathbb{R}^n

est appelé un **champ de pseudo-gradients** ou **pseudo-gradient** adapté à f .

Intuitivement, un champ de pseudo-gradients adapté à f est un champ de vecteurs qui «descend» le long de f , sans nécessairement emprunter le chemin qui

descend le plus rapidement, comme l'opposé du gradient le fait. Par contre, il agit exactement comme l'opposé du gradient dans un voisinage des points critiques.

Exemple 2.3.2. *Sur la figure suivante, le premier champ de vecteurs correspond à l'opposé du gradient de la fonction hauteur. Le second est un pseudo-gradient adapté à cette fonction, alors que le troisième n'en est pas un : la condition (2) de la définition 2.3.1 n'est pas respectée.*

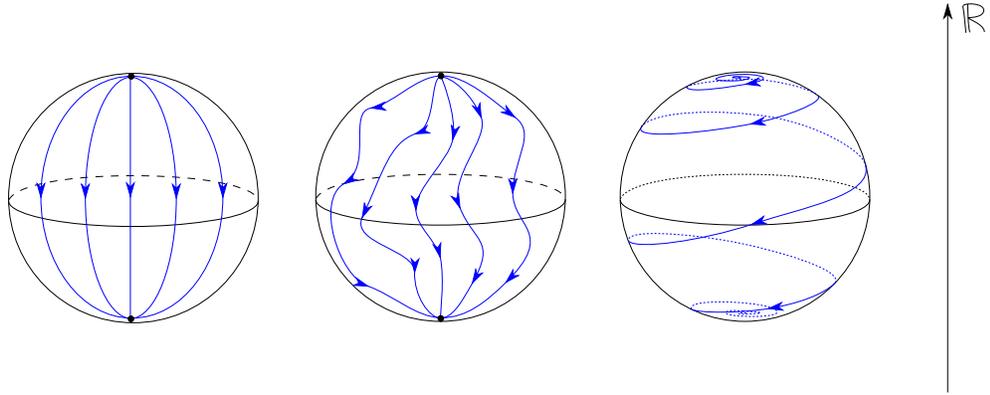


FIGURE 2.2. Trois champs de vecteurs sur la sphère

Par un argument utilisant des partitions de l'unité, il est possible de montrer qu'il existe des pseudo-gradients pour toutes les fonctions de Morse, sur toute variété M , puisqu'il existe des métriques riemmaniennes qui agissent comme on veut aux voisinages des points critiques (voir [1, p. 34]).

Définition 2.3.3. *Si M est une variété compacte, le pseudo-gradient X engendre un **flot***

$$\varphi^t : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

tel que

$$\frac{\partial \varphi^t(x)}{\partial t} = X_{\varphi^t(x)} \quad \varphi^0(x) = x$$

où $\varphi^t(x)$ est la trajectoire le long du champ X qui passe par x . De plus,

$$\varphi^t \circ \varphi^s(x) = \varphi^{t+s}(x)$$

d'où l'on déduit que φ^t fournit un groupe de difféomorphismes de M , avec φ^0 pour identité.

Remarque 2.3.4. *Le fait que M soit compacte est essentiel pour que le flot soit bien défini et qu'il engendre un groupe de difféomorphismes.*

Une des propriétés importantes des lignes de flot est qu'elles proviennent toutes d'un point critique et se dirigent toutes vers un autre point critique.

Proposition 2.3.5. *Soit une fonction de Morse f sur une variété compacte M . Soit aussi un pseudo-gradient de Smale X adapté à f et φ^t le flot engendré par*

X . Alors pour toute ligne de flot $\varphi^t(x)$, il existe des points critiques p et q tels que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = p \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(x) = q.$$

DÉMONSTRATION. Considérons une ligne de flot $\varphi^t(x) : \mathbb{R} \rightarrow M$. Supposons que cette ligne de flot ne se termine pas sur un point critique.

Si la trajectoire entre dans un voisinage de Morse à un moment donné, elle doit en ressortir, et ne plus jamais y revenir, car la fonction de Morse décroît de long de la ligne de flot. Comme les points critiques sont présents en nombre fini sur M , il existe un temps t_0 à partir duquel la ligne de flot ne passera plus dans aucune carte de Morse. Donc, comme la dérivée de f le long de X ne peut s'annuler qu'à l'intérieur des cartes de Morse, $(df)_x(X_x) < -\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ et ce pour $t > t_0$. Cela implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi^t(x)) = -\infty$, ce qui est absurde, puisque M est compacte. Pour plus de détails, voir [1, p. 36]. \square

Revenons maintenant à la notion de carte de Morse : à ce point-ci, on va pouvoir décrire non seulement le comportement de la fonction dans ces cartes, mais aussi ceux du champ de gradient et du flot. Rappelons que le point critique $p \in \text{Crit}_k(f)$, par le lemme de Morse, possède un voisinage U pour lequel on a des coordonnées

$$(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$$

telles que

$$f(x, y) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=1}^{n-k} y_j^2.$$

Très souvent dans ce mémoire, il sera utile de choisir notre carte de Morse de la façon suivante : choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\Omega(p) = \left\{ (x, y) \mid -\varepsilon^2 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2, |x||y| \leq \frac{\varepsilon^2 \sqrt{101}}{100} \right\} \subset U.$$

Aussi, puisque le pseudo-gradient X correspond à l'opposé du gradient dans les cartes de Morse, on a

$$X = \sum_{i=1}^k x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n-k} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Le pseudo-gradient suit donc les lignes en gris dans la figure 2.3.

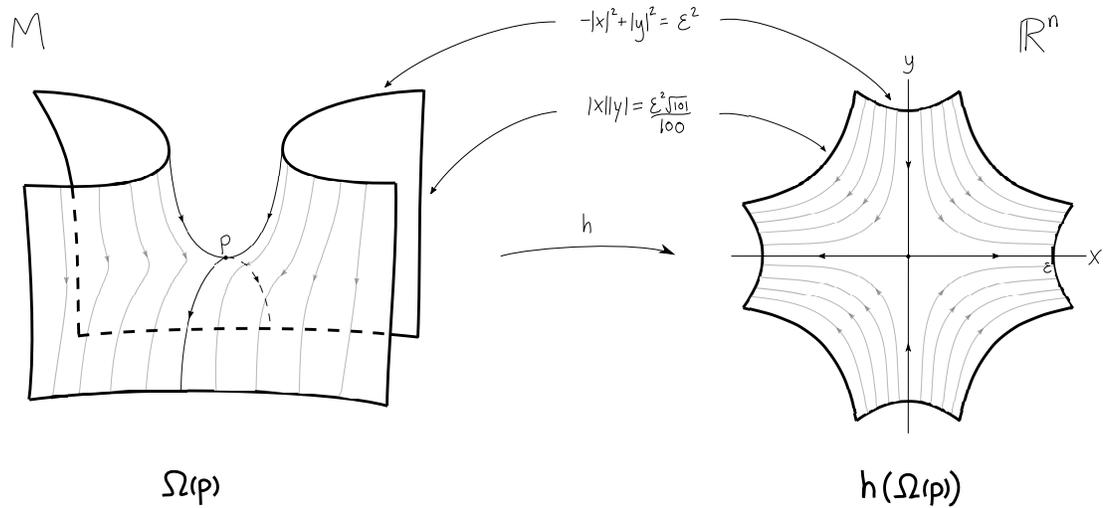


FIGURE 2.3. Une carte de Morse

2.3.1. Condition de Smale

Afin de définir la condition de Smale pour les pseudo-gradients, il faut se donner encore quelques définitions.

Définition 2.3.6. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété M compacte, X un pseudo-gradient adapté à f et φ_t le flot engendré par X . Soit aussi $p \in \text{Crit}(f)$. On définit la **variété stable** de p

$$W^s(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = p \right\}$$

et la **variété instable** de p

$$W^u(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = p \right\}.$$

Donnons-nous quelques notations : soit k l'indice du point critique p , $D^+ \subset \Omega(p)$ la préimage sous h du sous-espace de \mathbb{R}^n engendré par (y_1, \dots, y_{n-k}) et $D^- \subset \Omega(p)$ la préimage du sous-espace engendré par (x_1, \dots, x_k) . Alors on a que $D^+ \approx D^{n-k}$ et $D^- \approx D^k$. De plus, notons $S^+ \in \partial\Omega(p)$ la préimage de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 0, |y| = \varepsilon\}$ et S^- la préimage de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \varepsilon, |y| = 0\}$. On a cette fois que $S^+ \approx S^{n-k-1}$ et $S^- \approx S^{k-1}$.

Alors $W^s(p) - \{p\}$ correspond à $(S^+ \times \mathbb{R})$ où on fait correspondre $(x, t) \in (S^+ \times \mathbb{R})$ à $\varphi^t(x) \in M$, et dans $\Omega(p)$, $W^s(p)$ correspond à D^+ . On peut donc voir $W^s(p)$ comme le quotient de $S^+ \times (-\infty, +\infty]$ par la relation d'équivalence qui identifie $S^+ \times \{+\infty\}$ à un seul point, qui correspond à p . Il en va de même pour $W^u(p)$, qui est le quotient de $S^- \times [-\infty, +\infty)$ par la relation d'équivalence qui identifie $S^- \times \{-\infty\}$ à un seul point. Cela démontre la proposition suivante.

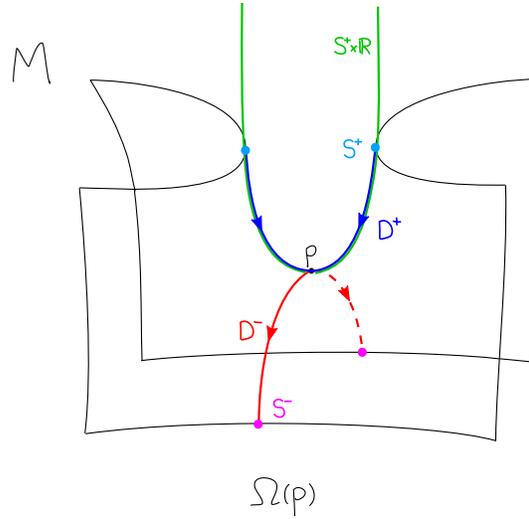


FIGURE 2.4. La variété stable

Proposition 2.3.7. *Les variétés stables et instables d'un point critique p sont des sous-variétés de M difféomorphes à des disques ouverts, de dimensions*

$$\dim W^s(p) = n - |p|$$

$$\dim W^u(p) = |p|.$$

Définition 2.3.8. *Soit un champ de pseudo-gradient X adapté à la fonction de Morse f sur M . On dit que X satisfait à la **condition de Smale** si pour tous $p, q \in \text{Crit}(f)$, $W^u(p)$ est transverse à $W^s(q)$.*

*On dit alors que (f, X) est un **couple de Morse-Smale**.*

Lorsque $p = q$ ou $f(p) \leq f(q)$, la condition de transversalité est trivialement vérifiée.

Dans les autres cas, si la condition de transversalité est satisfaite, on aura, par la remarque 1.5.5 et la proposition 2.3.7,

$$\begin{aligned} \dim(W^u(p) \cap W^s(q)) &= \dim W^u(p) + \dim W^s(q) - \dim M \\ &= |p| + (\dim M - |q|) - \dim M \\ &= |p| - |q|. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.9. *L'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore que l'on a introduite à l'exemple 2.2.2 ne satisfait pas à la condition de Smale. En effet, sur la figure suivante, on peut voir que la variété instable du premier point de selle n'est pas transverse à la variété stable du second point de selle.*

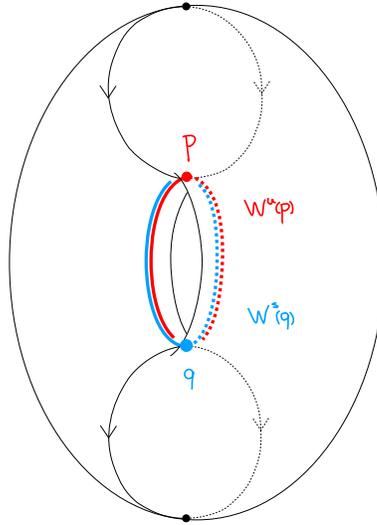


FIGURE 2.5. L'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore n'est pas Smale.

Définition 2.3.10. *L'ensemble des points de M qui se situent sur des trajectoires reliant les points critiques p et q forme une sous-variété de dimension $|p| - |q|$ notée*

$$M'_f(p, q) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = p \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = q \right\}.$$

Comme les trajectoires entre p et q ne contiennent aucun autre point critique, $f(\varphi^t(x))$ est une fonction strictement décroissante par rapport aux translations effectuées par le paramètre t . On en conclut que le groupe φ^t agit librement sur $M'_f(p, q)$ [6, p. 10], ce qui nous permet de faire la définition suivante.

Définition 2.3.11. *Le quotient de $M'_f(p, q)$ par les translations le long du paramètre t forme l'espace des trajectoires reliant p à q , de dimension $|p| - |q| - 1$, noté $M_f(p, q)$.*

L'espace $M'_f(p, q)$ est transverse aux sous-niveaux $f^{-1}(\alpha)$ pour $f(q) < \alpha < f(p)$, donc $M_f(p, q)$ est difféomorphe à $M'_f(p, q) \cap f^{-1}(\alpha)$ pour un $f(q) < \alpha < f(p)$. Si $M'_f(p, q)$ est non-vide, alors nécessairement $\dim M'_f(p, q) \geq 0$, donc $|p| > |q|$. Cela démontre la proposition suivante.

Proposition 2.3.12. *L'indice décroît strictement le long des trajectoires d'un pseudo-gradient satisfaisant à la condition de Smale.*

Comme pour les fonctions de Morse, il nous sera utile dans ce mémoire de pouvoir modifier légèrement les pseudo-gradients de Smale sans qu'ils perdent leurs propriétés. Le prochain théorème nous assure qu'on peut le faire.

Théorème 2.3.13 (Théorème de Smale). *Pour tout champ de pseudo-gradient X adapté à une fonction de Morse f , il existe un champ de pseudo-gradient \tilde{X}*

aussi adapté à f , qui est proche¹ de X au sens C^1 , égal à X sur un ensemble de cartes Morse aux voisinages des points critiques et qui satisfait à la condition de Smale. Autrement dit, la condition de Smale est générique.

DÉMONSTRATION. Voir [1, p. 46]. □

Exemple 2.3.14. Nous avons vu précédemment que l'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore placé à la verticale (voir figure 2.6, à gauche) ne respecte pas la condition de Smale.

Pour trouver une fonction de Morse sur le tore qui respecte la condition de Smale, il suffit pencher légèrement le tore dans l'espace comme à la droite de la figure 2.6, puis de prendre l'opposé du gradient de la fonction hauteur sur ce nouveau tore. On peut alors voir que les variétés stables et instables des points critiques sont toutes transverses entre elles.

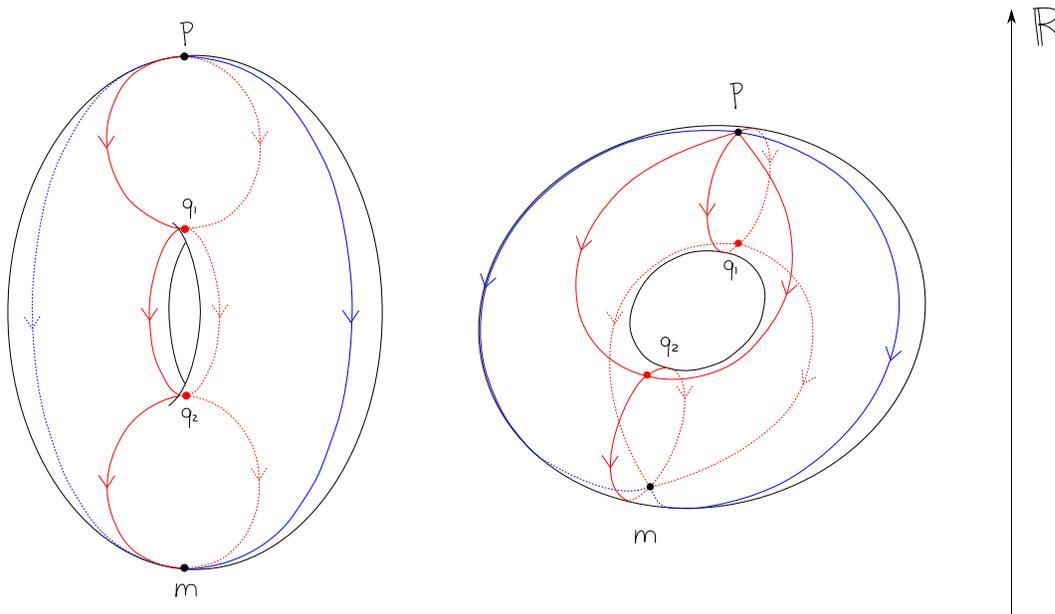


FIGURE 2.6. L'opposé du gradient de la fonction hauteur sur le tore placé à la verticale et sur le tore penché

Remarque 2.3.15. Certains auteurs utilisent une approche différente pour établir un couple de Morse-Smale sur une variété : on commence par établir un champ de vecteurs ou un flot dit de «Morse-Smale», c'est-à-dire dont tous les points où le gradient s'annule sont de forme standard et dont les variétés stables et instables sont toutes transverses. Ensuite, par un théorème de Smale [9], il existe une métrique Riemannienne pour laquelle X est l'opposé du gradient d'une certaine fonction de Morse f . Ce théorème assure que les deux approches sont équivalentes.

1. Voir [1, p.445] pour plus de détails sur la topologie C^k .

2.3.2. Topologie des sous-niveaux

Soit une variété M (pas nécessairement compacte) munie d'un couple de Morse-Smale (f, X) . On note $M_a = f^{-1}(-\infty, a] = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ le **sous-niveau** a de f .

Théorème 2.3.16 (Topologie des sous-niveaux, cas sans point critique). *Supposons que $a < b$ et que $f^{-1}[a, b] = \{x \in M \mid a \leq f(x) \leq b\}$ est compact et ne contient aucun point critique. Alors M_a est difféomorphe à M_b . De plus, il existe une déformation par rétraction de M_b sur M_a .*

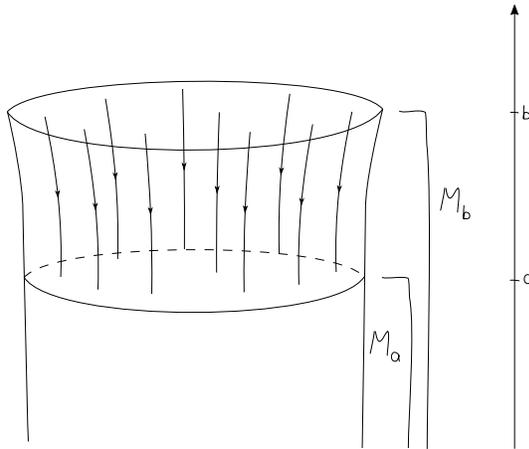


FIGURE 2.7. La rétraction de M_b sur M_a

DÉMONSTRATION. Soit une fonction lisse $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\rho(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(df)_x(X_x)} & \text{si } x \in f^{-1}[a, b] \\ 0 & \text{si } x \text{ est en dehors d'un voisinage de } f^{-1}[a, b] \end{cases}$$

et posons un nouveau champ de vecteurs $\tilde{X} = \rho X$. Comme ce champ de vecteurs s'annule en dehors d'un compact, son flot $\tilde{\varphi}^t$ est bien défini.

Fixons $x \in M$ et soit la trajectoire $\tilde{\varphi}^t(x)$. Alors la dérivée de f le long de cette trajectoire est constante sur $f^{-1}[a, b]$, car

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\tilde{\varphi}^t(x)) &= (df)_{\tilde{\varphi}^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}^t(x)\right) \\ &= (df)_{\tilde{\varphi}^t(x)}(\tilde{X}_{\tilde{\varphi}^t(x)}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

À cause de la modification ρ appliquée au flot, pour tout $x \in f^{-1}[a, b]$, le temps t requis pour que $\tilde{\varphi}^t(x)$ atteigne $f^{-1}(a)$ est exactement égal à $f(x) - a$.

On définit donc la rétraction par déformation

$$r_t : M_b \times [0, 1] \longrightarrow M_b$$

$$r_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq a \\ \tilde{\varphi}^{t(f(x)-a)}(x) & \text{si } a \leq f(x) \leq b \end{cases}$$

qui nous donne que $r_0(x) = \text{Id}(x)$ et $r_1(x)$ est un difféomorphisme qui envoie M_b sur M_a , ce qui conclut la démonstration. \square

Théorème 2.3.17 (Topologie des sous-niveaux, cas avec point critique). *Soit (f, X) un couple de Morse-Smale sur M , et soit p un point critique de f d'indice k . Supposons aussi que $f(p) = c$, et que $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ ne contient aucun autre point critique, pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors, si ε est assez petit, le sous-niveau $M_{c+\varepsilon}$ est homotope à $M_{c-\varepsilon}$ auquel on attache un disque de dimension k .*

DÉMONSTRATION. Prenons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\Omega(p) = \left\{ (x, y) \mid -\varepsilon^2 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ et } |x||y| \leq \frac{\varepsilon^2 \sqrt{101}}{100} \right\}$$

soit une carte de Morse pour p .

Établissons quelques notations : soit

$$D_p = \{(x, y) \in \Omega(p) \mid |y| = 0\} = W^u(p) \cap \Omega(p)$$

et notons

$$C = \left\{ (x, y) \in \Omega(p) \mid |y| \leq \frac{\varepsilon}{10} \right\}$$

un voisinage cylindrique de D_p dans $\Omega(p)$.

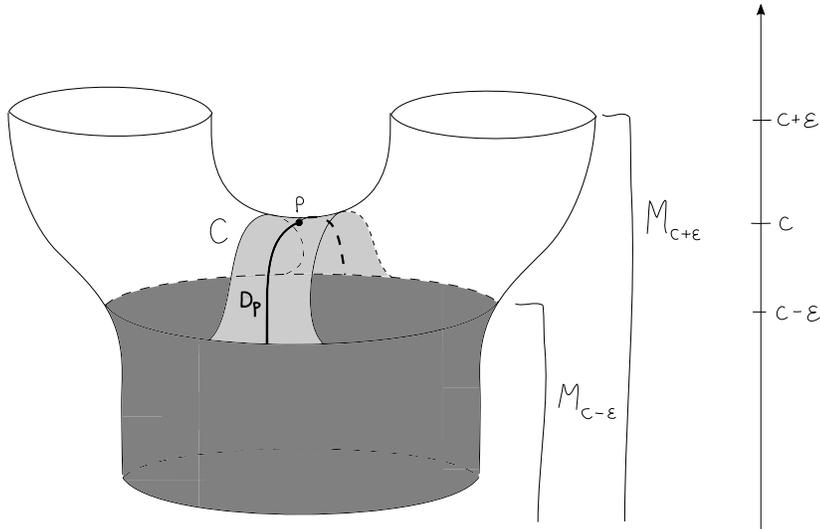


FIGURE 2.8. Les régions C et D_p

Suivant Milnor [7, théorème 3.14], nous allons décrire explicitement une rétraction par déformation

$$r_t : M_{c+\varepsilon} \times [0, 1] \longrightarrow M_{c+\varepsilon}$$

qui rétracte $M_{c+\varepsilon}$ sur $M_{c-\varepsilon} \cup D_p$. Pour obtenir cette rétraction, nous allons décrire puis composer deux rétractions : la première, notée r'_t , rétracte $M_{c+\varepsilon}$ sur $M_{c-\varepsilon} \cup C$, puis la seconde, notée r''_t , rétracte $M_{c-\varepsilon} \cup C$ sur $M_{c-\varepsilon} \cup D_p$.

Première rétraction : r'_t

Pour les points de $M_{c-\varepsilon}$, r'_t est l'identité. Pour les points de $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ qui sont en dehors de la carte de Morse $\Omega(p)$, r'_t suit les trajectoires du flot φ^t engendré par X jusqu'à atteindre $M_{c-\varepsilon}$, de la même façon que dans la preuve du théorème précédent. Enfin, pour $(x, y) \in \Omega(p)$, la rétraction suit également les trajectoires du flot, mais jusqu'à atteindre C .

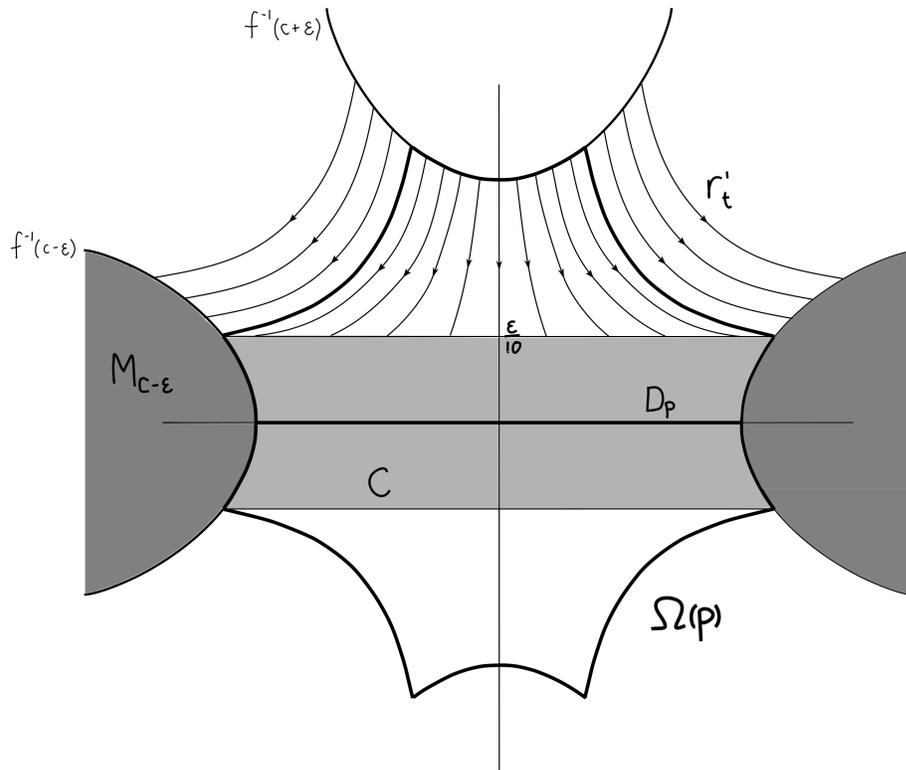


FIGURE 2.9. La rétraction r'_t

Plus précisément,

$$r'_t(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } |y| \leq \frac{\varepsilon}{10} \\ (\frac{x}{\rho}, \rho y) & \text{si } |y| \geq \frac{\varepsilon}{10} \end{cases}$$

où $\rho = \rho(x, y, t)$ est le maximum entre $\frac{\varepsilon}{10|y|}$ et la solution positive et réelle de l'équation

$$-\frac{|x|^2}{\rho^2} + \rho^2|y|^2 = (-|x|^2 + |y|^2)(1-t) - \varepsilon^2 t,$$

c'est-à-dire

$$\rho(x, y, t) = \max \left\{ \frac{\varepsilon}{10|y|}, \sqrt{\frac{(-|x|^2 + |y|^2)(1-t) - \varepsilon^2 t + \sqrt{((-|x|^2 + |y|^2)(1-t) - \varepsilon^2 t)^2 + 4|x|^2|y|^2}}{2|y|^2}} \right\}.$$

On peut vérifier que ρ est continue et bien définie, puisque l'équation précédente a une unique solution qui varie continûment pour $|y| \geq \frac{\varepsilon}{10}$. Aussi, r'_t est bien définie : les deux parties de sa définition concordent car $\rho(x, y, t) = 1$ aussitôt que $|y| = \frac{\varepsilon}{10}$ (ce fait peut aisément être vérifié avec Mathematica).

Seconde rétraction : r''_t

En dehors de C , on définit $r''_t = \text{Id}$. Pour $(x, y) \in C$, on descend verticalement jusqu'à atteindre D_p ou $M_{c-\varepsilon}$. Plus précisément,

$$r''_t(x, y) = \begin{cases} (x, (1-t)y) & \text{si } |x| \leq \varepsilon \\ (x, (1-\beta t)y) & \text{si } \varepsilon \leq |x| \leq \frac{\varepsilon\sqrt{101}}{10} \end{cases}$$

où $\beta = 1 - \frac{\sqrt{|x|^2 - \varepsilon^2}}{|y|}$.

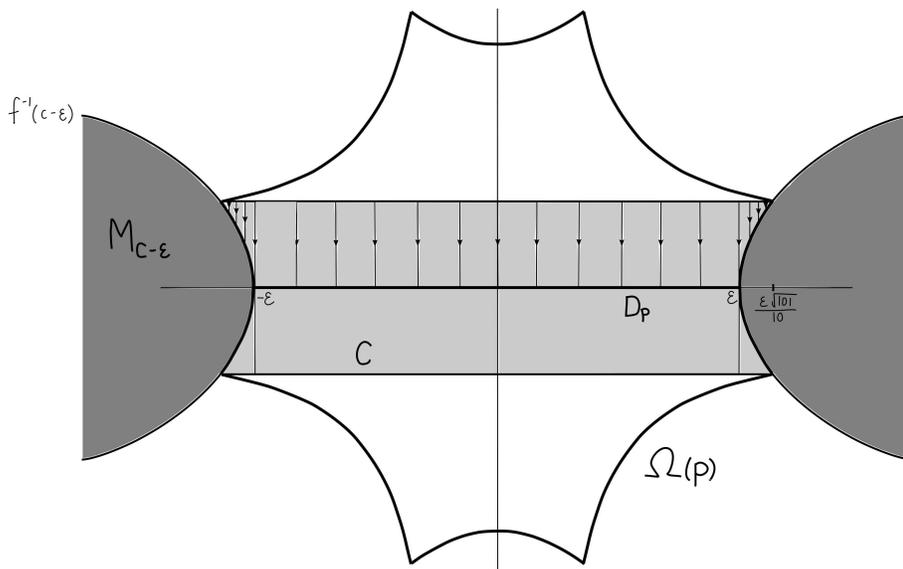


FIGURE 2.10. La rétraction r''_t

On peut vérifier que les deux définitions de r_t'' correspondent pour $|x| = \varepsilon$, et que r_t'' reste continue lorsque $|x| \rightarrow \varepsilon$ et $|y| \rightarrow 0$.

Cela complète la démonstration. □

Remarque 2.3.18. *En suivant Milnor [7, pp.35-36], la rétraction précédente se généralise au cas où il y a plusieurs points critiques p_1, p_2, \dots, p_j d'indice k dans $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Dans ce cas, $M_{c+\varepsilon}$ est difféomorphe à $M_{c-\varepsilon}$ auquel on ajoute j disques de dimension k .*

2.3.3. Déplacement et annulation de points critiques

Il sera parfois utile de «déplacer» les points critiques de f sur une variété M . Par exemple, on va parfois vouloir repousser des points critiques en dehors d'une certaine région $f^{-1}[a, b]$ de façon à pouvoir utiliser le théorème 2.3.16, ou bien on va vouloir réorganiser nos points critiques en «ordre» selon leur indice (c'est-à-dire que $f(p) > f(q)$ implique que $|p| \geq |q|$).

Le résultat suivant de Milnor [7, théorème 4.1] nous assure qu'il est possible de réarranger deux points critiques si leurs variétés stables et instables ne se rencontrent pas.

Théorème 2.3.19. *Soit f une fonction de Morse, et soit $a < b$ deux valeurs régulières telles que $f^{-1}[a, b]$ possède deux points critiques p et p' . Soit aussi X un pseudo-gradient de Smale associé à f . Si*

$$\left((W^u(p) \cap W^s(p')) \cup (W^u(p') \cap W^s(p)) \right) \cap f^{-1}[a, b] = \emptyset$$

alors, pour toutes valeurs $c, d \in (a, b)$, il existe une fonction de Morse g telle que

- (1) $g = f$ sur un voisinage du complément de $f^{-1}[a, b]$
- (2) g égale f plus une constante dans un voisinage des points critiques p et p'
- (3) X est aussi un pseudo-gradient pour g
- (4) g a les mêmes points critiques p et p' que f , mais avec $g(p) = c$ et $g(p') = d$.

Remarquons que par le point 2, on peut déduire que les indices des points critiques n'ont pas changé.

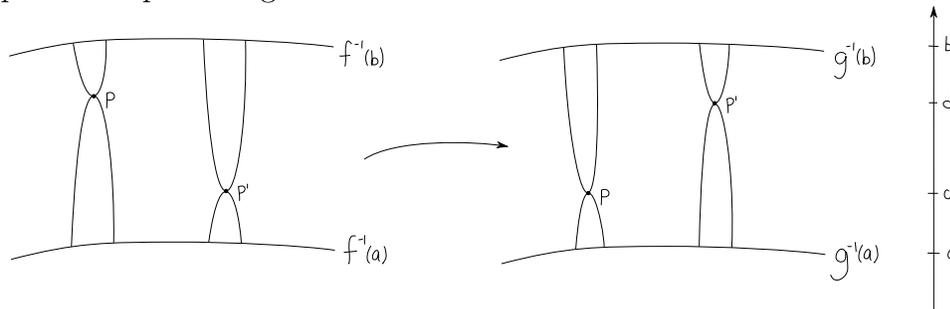


FIGURE 2.11. Glissement des points critiques

En utilisant à répétition le théorème précédent, et puisque les flots de Morse-Smale sont génériques 2.3.13, on peut glisser les points critiques d'une fonction à la hauteur désirée, tant qu'on respecte l'ordre des indices des points critiques qui sont reliés entre eux. C'est ce genre de procédure qui permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.3.20. *Étant donné une fonction de Morse g sur une variété compacte M , il existe une seconde fonction de Morse f telle que $\text{Crit}_k(f) = \text{Crit}_k(g)$ pour tout k et telle que $f(p) = |p|$.*

Définition 2.3.21. *Une telle fonction de Morse sera nommée une **fonction ordonnée**.*

Remarque 2.3.22. *En anglais, le terme utilisé est self-indexing function. Nous suivons ici la terminologie en français adoptée par Audin et Damian [1].*

Étant donné un couple de Morse-Smale sur une variété, on peut non seulement réarranger les points critiques, on peut aussi éliminer certains points critiques indésirables, selon une procédure décrite par Milnor [7, §5] et illustrée à la figure 2.12. C'est ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.3.23. *Sur toute variété compacte et connexe M il existe une fonction de Morse qui ne possède qu'un seul minimum.*

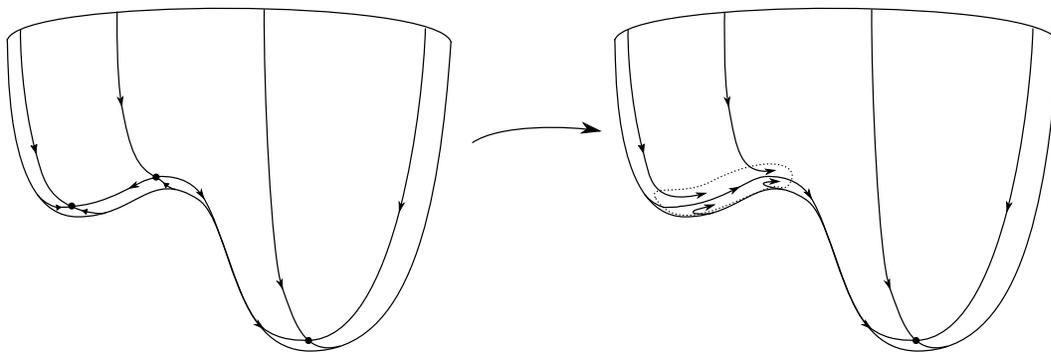


FIGURE 2.12. Une légère modification du pseudo-gradient qui annule un minimum et un point de selle

2.4. LE COMPLEXE DE MORSE

Soit une variété fermée (compacte, sans bord et connexe) M munie d'un couple de Morse-Smale (f, X) . Nous allons nous servir de ces constructions pour définir le complexe de Morse de la variété M (aussi appelé le complexe des points critiques), duquel nous allons ensuite dégager l'homologie de Morse. Nous allons montrer au chapitre 4 que cette homologie est la même que les autres homologies modulo 2 comme l'homologie simpliciale.

Soit d'abord le groupe gradué $(C_{\text{Mo}})_*(f)$ donné par

$$(C_{\text{Mo}})_k(f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle p \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle.$$

Pour alléger la notation, nous omettrons parfois de spécifier la fonction (f) ou l'indice (Mo) , lorsque qu'aucune confusion n'est possible.

Comme les points critiques sont les générateurs des groupes, et que les trajectoires du flot engendré par X relient les points critiques d'indices consécutifs, ces trajectoires pourront servir à définir les morphismes de la différentielle du complexe de Morse, de la façon suivante.

Soit $n_X(p, q) = \#M_f(p, q) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le nombre modulo 2 de trajectoires de X entre deux points critiques d'indices consécutifs p et q . Définissons la différentielle

$$\begin{aligned} (\partial_{\text{Mo}})_X^k : (C_{\text{Mo}})_k &\longrightarrow (C_{\text{Mo}})_{k-1} \\ (\partial_{\text{Mo}})_X^k(p) &= \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_X(p, q)q. \end{aligned}$$

Encore une fois nous nous permettrons d'alléger la notation, selon le contexte.

Il reste à s'assurer que ce morphisme est bien défini en vérifiant que les trajectoires comptées soient toujours présentes en nombre fini, puis que $\partial_{\text{Mo}} \circ \partial_{\text{Mo}} = 0$.

Théorème 2.4.1. *L'ensemble des trajectoires brisées (ou non) de p à q , que nous noterons $\overline{M}_f(p, q)$ et défini par*

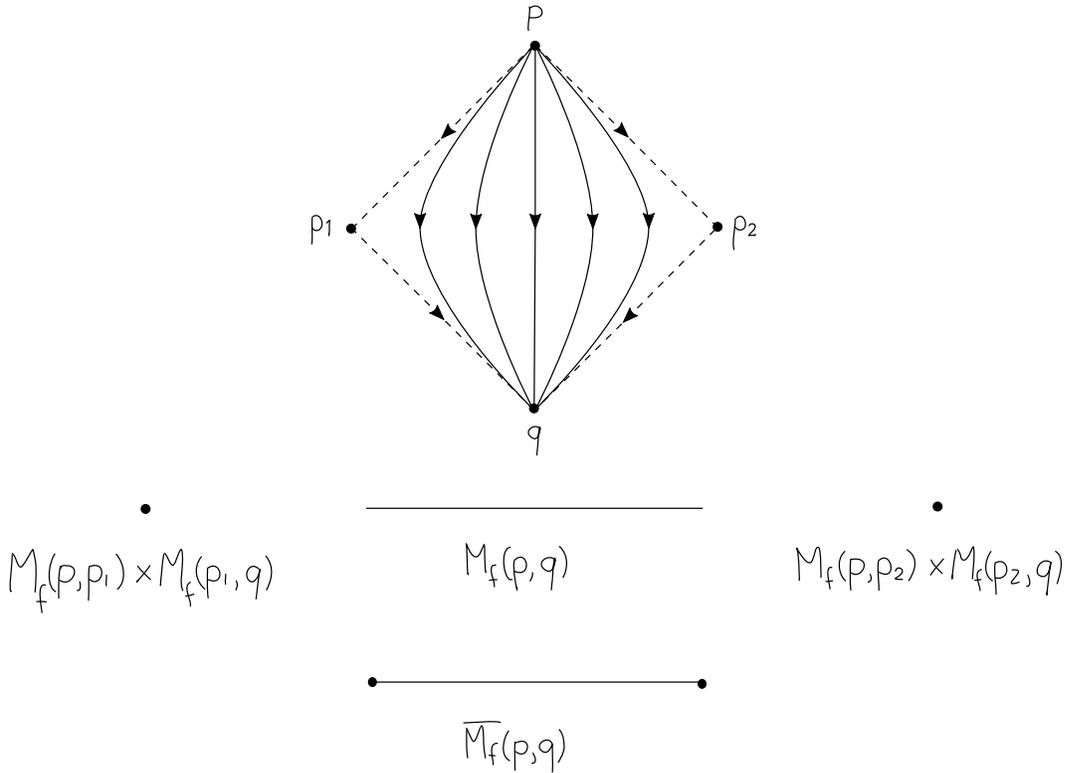
$$\overline{M}_f(p, q) := \bigcup_{p_i \in \text{Crit}(f)} M_f(p, p_1) \times \cdots \times M_f(p_{j-1}, q)$$

est compact.

Théorème 2.4.2. *L'espace $\overline{M}_f(p, q)$ est en fait une compactification de $M_f(p, q)$ par l'ajout des trajectoires brisées aux trajectoires directes : pour tout point de $\overline{M}_f(p, q)$, il existe des éléments de $M_f(p, q)$ arbitrairement proches de ce point.*

Corollaire 2.4.3. *Soit p et q deux points critiques d'indices $k + 1$ et $k - 1$ respectivement. Alors*

$$\partial \overline{M}_f(p, q) = \coprod_{p_i \in \text{Crit}_k(f)} M_f(p, p_i) \times M_f(p_i, q).$$

FIGURE 2.13. La compactification de $M_f(p, q)$

Pour l'étude de la différentielle, nous nous intéressons au cas où $|p| = |q| + 1$. Par ce que nous avons vu précédemment

$$\dim M_f(p, q) = |p| - |q| - 1 = 0$$

et donc $M_f(p, q)$ est un ensemble de points. Aussi, par définition,

$$\begin{aligned} \overline{M}_f(p, q) &= \bigcup_{p_i \in \text{Crit}(f)} M_f(p, p_1) \times \cdots \times M_f(p_{j-1}, q) \\ &= M_f(p, q) \end{aligned}$$

car les indices doivent décroître strictement le long des trajectoires, donc il n'existe aucun point critique p_i tel que $|p| > |p_i| > |q|$.

Comme nous aurons montré que $\overline{M}_f(p, q)$ est compact, alors dans ce cas-ci $M_f(p, q)$ le sera aussi. Comme un ensemble de points compact est fini, le nombre de trajectoires entre deux points critiques d'indices consécutifs sera fini, et ainsi ∂_{M_0} sera bien définie.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.1. La preuve sera faite en trois étapes :

- (1) Munir $\overline{M}_f(p, q)$ d'une topologie. Cette topologie sera définie à l'aide de celle de M , donc elle sera métrisable. Ainsi nous pourrons démontrer la compacité avec un argument séquentiel.

- (2) Montrer qu'une suite (ℓ_n) dans $M_f(p, q)$ possède une sous-suite qui converge dans $\overline{M_f(p, q)}$
- (3) Généraliser le résultat aux suites (ℓ_n) dans $\overline{M_f(p, q)}$.

Une fois ces trois parties complétées, nous aurons montré que $\overline{M_f(p, q)}$ est séquentiellement compact. Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous permettra ensuite de conclure que $\overline{M_f(p, q)}$ est compact.

Étape (1)

Soit $v = (v_1, \dots, v_j) \in \overline{M_f(p, q)}$. Nous allons définir des voisinages ouverts autour de v qui formeront une base pour la topologie de $\overline{M_f(p, q)}$. Précisons avant quelques notations, illustrées sur la figure 2.14 :

- Les v_i rejoignent les points critiques p_{i-1} et p_i (notons $p_0 = p$ et $p_j = q$).
- Chaque point critique p_i possède un voisinage de Morse $\Omega(p_i)$.
- La trajectoire v_i sort de $\Omega(p_{i-1})$ et entre dans $\Omega(p_i)$.
- Notons U_{i-1}^- un voisinage sur le bord de $\Omega(p_{i-1})$ du point de sortie et U_i^+ un voisinage sur le bord de $\Omega(p_i)$ du point d'entrée.
- Notons \mathbf{U}^- l'ensemble des U_i^- et \mathbf{U}^+ l'ensemble des U_i^+ .

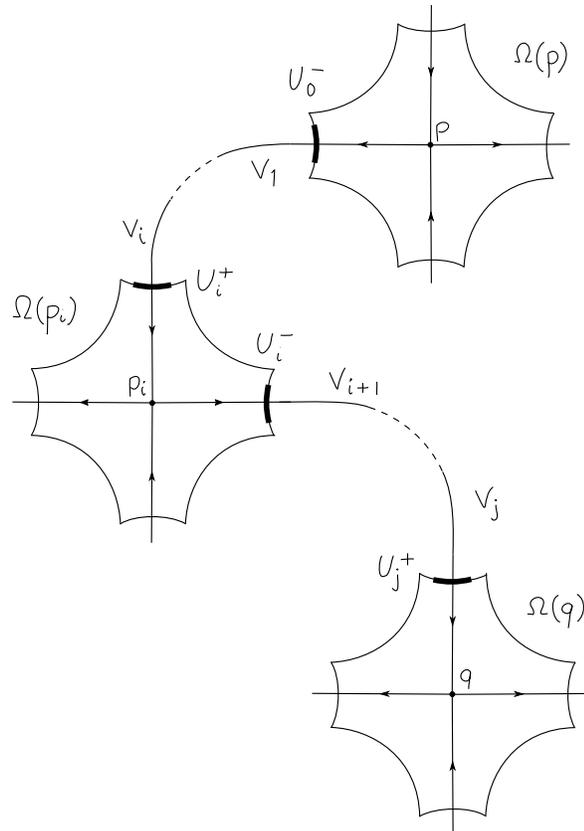


FIGURE 2.14. Cartes de Morse et trajectoires

Alors les éléments de la base de voisinages de la topologie, notés $\mathcal{W}(v, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$, sont définis ainsi : $w = (w_1, \dots, w_\ell) \in \overline{M_f}(p, q)$ est dans $\mathcal{W}(v, \mathbf{U}^-, \mathbf{U}^+)$ s'il existe des entiers $0 < i_0 < \dots < i_{\ell-1} < i_\ell = j$ tels que pour $k = 1, \dots, \ell$, $w_k \in M_f(p_{i_k}, p_{i_{k+1}})$, sort de $\Omega(p_{i_j})$ par l'intérieur du U^- correspondant et entre dans $\Omega(p_{i_{j+1}})$ par l'intérieur du U^+ correspondant.

Plus simplement, les éléments «proches» de v dans $\overline{M_f}(p, q)$ sont les trajectoires qui vont de p à q , sortent de $\Omega(p)$ et entrent dans $\Omega(q)$ par des points proches de v .

Cette topologie induit la topologie produit sur chacun des termes de la réunion

$$\overline{M_f}(p, q) = \bigcup_{p_i \in \text{Crit}(f)} M_f(p, p_1) \times \dots \times M_f(p_{j-1}, q).$$

Étape (2)

Pour faire cette démonstration, nous allons introduire encore quelques notations : soit une suite (ℓ_n) dans $M_f(p, q)$ telle que la trajectoire ℓ_n sort de $\Omega(p)$ par le point ℓ_n^- et entre dans $\Omega(q)$ par le point ℓ_n^+ .

La suite de points ℓ_n^- ainsi engendrée est incluse dans le bord de $\Omega(p)$ qui est une sphère, donc compacte. Il est donc possible d'en extraire une sous-suite convergente $(\ell_{n_k}^-)_k$. En choisissant cette sous-suite, nous avons par le fait même une autre sous-suite $(\ell_{n_k}^+)_k$.

- Soit $\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{n_k}^- = p^-$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{n_k}^+ = q^+$
- Soit $v(t) = \varphi^t(p^-)$ la trajectoire passant par p^- et soit le point critique $p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$. Ainsi $v \in M_f(p, p_1)$.

C'est le théorème de dépendance des conditions initiales pour les solutions d'équations différentielles (Cauchy-Lipschitz) qui est au cœur de la preuve. En effet, il nous donne que la trajectoire ℓ_{n_k} doit elle aussi entrer dans $\Omega(p_1)$ pour un k assez grand par le point $p_{n_k}^+$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}^+ = p_1^+$. En fait il y a deux cas :

- Soit $p_1 = q$. Dans ce cas $\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{n_k} = v$ et nous avons trouvé une sous-suite convergente de la suite (ℓ_n) qui converge dans $\overline{M_f}(p, q)$
- Soit $p_1 \neq q$. Alors, comme ℓ_{n_k} ne passe pas par p_1 , $p_{n_k}^+$ n'est pas dans la variété stable de p_1 . La trajectoire doit donc sortir de la carte $\Omega(p_1)$; soit $p_{n_k}^-$ le point de sortie. Nous supposons (encore par Cauchy-Lipschitz) que la suite des $p_{n_k}^-$ converge vers un point p_1^- de la variété instable de p_1 , puis répétons l'argument avec un $v_2 \in M_f(p_1, p_2)$ et ainsi de suite jusqu'à atteindre q . Donc nous avons trouvé une sous-suite (ℓ_{n_k}) de (ℓ_n) qui converge vers une trajectoire brisée de $\overline{M_f}(p, q)$.

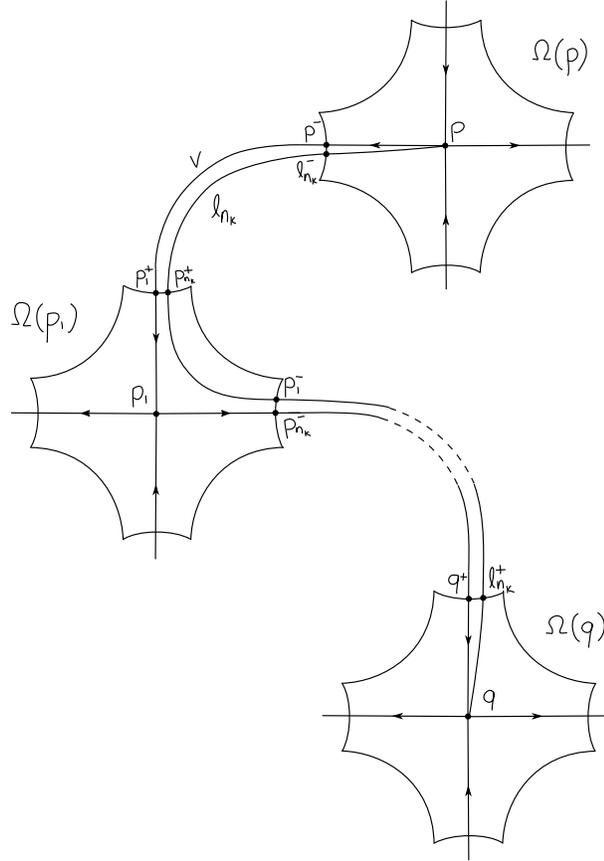


FIGURE 2.15. La sous-suite de trajectoires ℓ_{n_k}

Étape (3)

Dans le cas général d'une suite (ℓ_n) dans $\overline{M_f}(p, q)$, nous allons commencer par créer la sous-suite (ℓ_{n_k}) comme précédemment, puis aller assez loin dans la sous-suite pour que les trajectoires atteignent toutes exactement le même ensemble de points critiques $\{p_1, \dots, p_{j-1}\}$ dans leur parcours entre p et q . Ensuite, sur chaque segment de $\ell_n = (\ell_n^1, \dots, \ell_n^j) \in M_f(p, p_1) \times \dots \times M_f(p_{j-1}, q)$, nous appliquons le résultat trouvé à l'étape (2). \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.2. Voir Audin et Damian [1]. \square

Maintenant que ∂_{M_o} est bien définie, il ne reste qu'à vérifier que $((C_{M_o})_+, (\partial_{M_o})^*)$ forme bien un complexe de chaînes en montrant que $\partial_{M_o} \circ \partial_{M_o} = 0$.

Soit $p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$. Par la définition de ∂_{M_o} , nous avons que

$$\partial_{M_o} \circ \partial_{M_o}(p) = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}} \left(\sum_{p_i \in \text{Crit}_k} n_X(p, p_i) n_X(p_i, q) \right) q.$$

Il faut montrer que cette expression est nulle, donc que

$$\sum_{p_i \in \text{Crit}_k} n_X(p, p_i) n_X(p_i, q) = 0$$

pour toute paire de points critiques (p, q) d'ordre $k + 1$ et $k - 1$ respectivement.

On a l'équivalence

$$\sum_{p_i \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, p_i) n_X(p_i, q) = \# \left\{ \prod_{p_i \in \text{Crit}_k(f)} M_f(p, p_i) \times M_f(p_i, q) \right\},$$

et, par le corollaire 2.4.3, $\prod_{p_i \in \text{Crit}_k(f)} M_f(p, p_i) \times M_f(p_i, q)$ est le bord de la variété compacte de dimension un $\overline{M}_f(p, q)$. Or les variétés compactes de dimensions un sont toutes difféomorphes à des réunions finies de cercles et de segments fermés [8, p. 55], et donc leurs bords sont des ensembles de points qui ne peuvent être qu'en nombre pair. Comme nous comptons modulo 2, cela conclut la démonstration : $\partial_{M_0} \circ \partial_{M_0} = 0$ et $((C_{M_0})_\star, (\partial_{M_0})^\star) := C_{M_0}$ est un complexe de chaînes appelé le **complexe de Morse**. Son homologie

$$(H_{M_0})_k = \ker (\partial_{M_0})^k / \text{Im} (\partial_{M_0})^{k+1}$$

est appelée l'**homologie de Morse** de la variété M .

Sans entrer dans les détails, voici quelques exemples de calculs d'homologie de Morse pour des variétés simples. Nous ferons des calculs plus complets pour des variété plus complexes à la fin de ce chapitre.

Exemple 2.4.4 (Sphère S^2). *Calculons l'homologie de Morse de la sphère unitaire S^2 munie de la fonction hauteur et du pseudo-gradient de Smale $X = -\text{grad}(f)$ (voir figure 2.2.2). On a les groupes de chaînes*

$$\begin{aligned} (C_{M_0})_0(f) &= \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \langle m_1 \rangle \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (C_{M_0})_2(f) &= \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \langle p_1 \rangle \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (C_{M_0})_k(f) &= \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \langle \emptyset \rangle \cong 0 \text{ pour tout } k \neq 0, 2 \end{aligned}$$

Puis, en observant la chaîne

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

on déduit que la différentielle $(\partial_{M_0})^k$ est nulle pour tout k .

D'où

$$(H_{M_0})_k(f) = \begin{cases} \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 2.4.5 (Sphère déformée). Calculons l'homologie de la sphère déformée munie de f la fonction hauteur f et du pseudo-gradient de Smale $X = -\text{grad}(f)$, comme illustré sur la figure suivante.

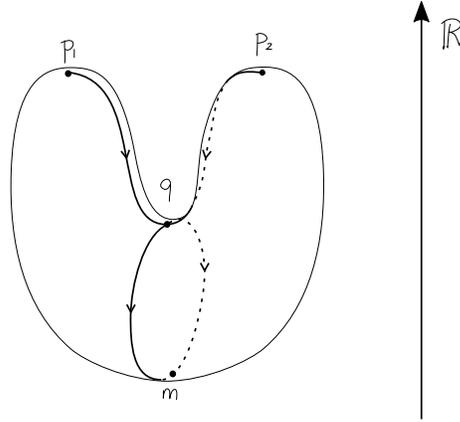


FIGURE 2.16. La fonction hauteur et l'opposé du gradient sur la sphère déformée

On a d'abord les groupes

$$\begin{aligned} (C_{Mo})_0(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_1(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle q \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_2(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_1, p_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_k(f) &= 0 \text{ pour tout } k \neq 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Ensuite, la différentielle du complexe compte les trajectoires qui relient les points critiques, donc

$$\partial^2(p_1) = q \quad \partial^2(p_2) = q \quad \partial^1(q) = 2m = 0.$$

On obtient le complexe de Morse

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

duquel on calcule l'homologie

$$\begin{aligned} (H_{Mo})_0(f) &= \ker \partial^0 / \text{Im } \partial^1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle m \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{Mo})_1(f) &= \ker \partial^1 / \text{Im } \partial^2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle q \rangle / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle q \rangle \cong 0 \\ (H_{Mo})_2(f) &= \ker \partial^2 / \text{Im } \partial^3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p_1 + p_2 \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{Mo})_k(f) &= 0 \text{ pour tout } k \neq 0, 1, 2 \end{aligned}$$

qui coïncide avec l'homologie calculée à l'exemple précédent.

Exemple 2.4.6 (Tore). *Calculons l'homologie du tore penché muni de la fonction hauteur f ainsi que du pseudo-gradient de Smale $X = -\text{grad}(f)$, comme illustré sur la figure 2.6.*

On a d'abord les groupes

$$\begin{aligned}(C_{Mo})_0(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_1(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle q_1, q_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_2(f) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{Mo})_k(f) &= 0 \text{ pour tout } k \neq 0, 1, 2\end{aligned}$$

Ensuite, on a que $\partial^k = 0$ pour tout k , car

$$\partial^2(p) = 2q_1 + 2q_2 = 0 \quad \partial^1(q_1) = 2m = 0 \quad \partial^1(q_2) = 2m = 0.$$

On en déduit que l'homologie du tore est donnée par

$$\begin{aligned}(H_{Mo})_0(f) &= \ker \partial^0 / \text{Im } \partial^1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle m \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{Mo})_1(f) &= \ker \partial^1 / \text{Im } \partial^2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle q_1, q_2 \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{Mo})_2(f) &= \ker \partial^2 / \text{Im } \partial^3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle p \rangle / 0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{Mo})_k(f) &= 0 \text{ pour tout } k \neq 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Il est important de s'assurer que l'homologie de Morse ne dépend pas des choix de fonction de Morse et de pseudo-gradient qui sont faits lors de son calcul, mais seulement de la variété M .

Théorème 2.4.7 (Invariance de l'homologie de Morse). *Soit M une variété compacte et soit $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de Morse munies de X_0 et X_1 des pseudo-gradients satisfaisant à la condition de Smale. Alors on peut trouver*

$$\Phi_* : (C_*(f_0), \partial_{X_0}^*) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1}^*)$$

un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en homologie.

DÉMONSTRATION. On va montrer l'invariance de l'homologie en deux grandes étapes. On va commencer par trouver un morphisme de complexes entre $(C_*(f_0), \partial_{X_0}^*)$ et $(C_*(f_1), \partial_{X_1}^*)$. Ensuite on va énoncer et prouver deux lemmes qui nous permettront de montrer que le morphisme candidat induit un isomorphisme en homologie.

Étape 1 : description du morphisme entre les complexes

Soit une fonction

$$F : M \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, s) \longmapsto F(x, s) = F_s(x)$$

telle que

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{pour } s \in [0, \varepsilon] \\ F_s = f_1 & \text{pour } s \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Dans cette première étape de la preuve, on va d'abord transformer légèrement F pour en faire une fonction de Morse \tilde{F} . Ensuite on va construire un pseudo-gradient de Smale \tilde{X} adapté à \tilde{F} . Enfin, les propriétés du complexe de Morse $(C_*(\tilde{F}), \partial_{\tilde{X}})$ nous permettront de dégager un morphisme de complexes

$$\Phi^F : (C_*(f_0), \partial_{X_0}) \longrightarrow (C_*(f_1), \partial_{X_1}).$$

D'abord on étend F à $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$ pour que

$$\begin{cases} F_s = f_0 & \text{pour } s \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ F_s = f_1 & \text{pour } s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Soit ensuite une fonction lisse $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui a un maximum à 0, un minimum à 1 et aucun autre point critique, qui est croissante sur $] - \infty, 0] \cup [1, \infty[$ et assez décroissante sur $]0, 1[$ pour que

$$\frac{\partial}{\partial s} F(x, s) + g'(s) < 0 \quad \forall x \in M \quad \forall s \in]0, 1[.$$

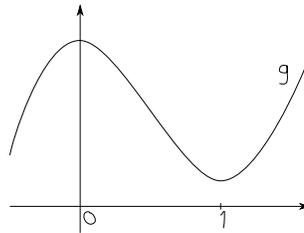


FIGURE 2.17. La fonction g

Ainsi $\tilde{F} = F + g$ est une fonction de Morse sur $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$. En effet, on va montrer que ses seuls points critiques sont

$$\text{Crit}(\tilde{F}) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$$

et qu'ils sont non-dégénérés. D'abord on observe que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} F(x, s) + g'(s) < 0 \quad \forall x \in M \quad \forall s \in]0, 1[\\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} F(x, s) + g'(s) = 0 + g'(s) > 0 \quad \forall x \in M \quad \forall s \in [-\varepsilon, 0[\cup]1, 1 + \varepsilon] \end{array} \right.$$

ce qui implique que $\text{Crit}(\tilde{F}) \in M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$. De plus, comme les points critiques de \tilde{F} sont ceux pour lesquels la dérivée est nulle dans toutes les directions, on voit que $\text{Crit}(\tilde{F}) = \text{Crit}(f_0) \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$.

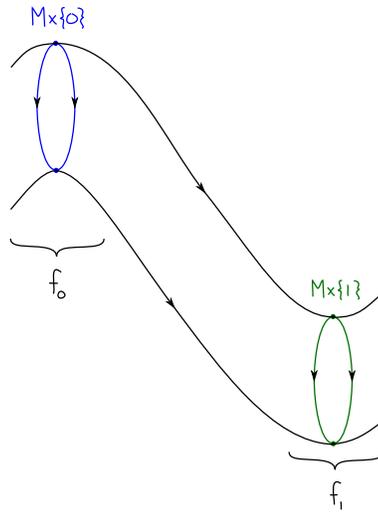


FIGURE 2.18. $\tilde{F} : M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$

Ensuite, soit $p \in \text{Crit}(\tilde{F})$, supposons $p \in \text{Crit}(f_0) \times \{0\}$,

$$\det(\text{Hess}_{\tilde{F}}(p)) = \left| \begin{pmatrix} \text{Hess}_{f_0}(p) & 0 \\ 0 & \frac{d^2g}{ds^2}\Big|_0 \end{pmatrix} \right| = \det(\text{Hess}_{f_0}(p)) \frac{d^2g}{ds^2}\Big|_0 \neq 0;$$

de même si $p \in \text{Crit}(f_1) \times \{1\}$,

$$\det(\text{Hess}_{\tilde{F}}(p)) = \left| \begin{pmatrix} \text{Hess}_{f_1}(p) & 0 \\ 0 & \frac{d^2g}{ds^2}\Big|_1 \end{pmatrix} \right| = \det(\text{Hess}_{f_1}(p)) \frac{d^2g}{ds^2}\Big|_1 \neq 0.$$

Donc tous les points critiques sont non-dégénérés et \tilde{F} est une fonction de Morse.

Avant de passer au pseudo-gradient, notons que, en comptant les valeurs propres négatives de la hessienne, on a, pour $p \in \text{Crit}(f_0)$,

$$\text{Ind}_{\tilde{F}}(p, 0) = \text{Ind}_{f_0}(p) + 1$$

et pour $q \in \text{Crit}(f_1)$,

$$\text{Ind}_{\tilde{F}}(q, 1) = \text{Ind}_{f_1}(q).$$

En effet, comme g a un maximum en 0, on a ajouté à \tilde{F} par rapport à f_0 une direction linéairement indépendante dans laquelle la fonction décroît, et donc l'indice a augmenté de 1 dans la tranche $M \times \{0\}$. Comme g a un minimum en 1, dans la tranche $M \times \{1\}$ l'indice des points critiques de \tilde{F} reste inchangé par rapport à l'indice des points critiques de f_1 .

Ensuite, il reste à construire un champ de pseudo-gradient \tilde{X} adapté à \tilde{F} . On commence par étendre les champs de gradient X_0 et X_1 autour de $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ respectivement de la façon suivante :

$$X = \begin{cases} X_0 - \text{grad } g \text{ sur } M \times [-\varepsilon, \varepsilon] \\ X_1 - \text{grad } g \text{ sur } M \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Par un argument de partition de l'unité, il est possible d'étendre X à un pseudo-gradient adapté à \tilde{F} sur $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, transverse aux tranches $M \times \{\varepsilon\}$ et $M \times \{1 - \varepsilon\}$.

On aimerait maintenant un pseudo-gradient qui satisfasse à la condition de Smale. Soit \tilde{X} un pseudo-gradient de Smale arbitrairement proche de X au sens C^1 . Les changements significatifs de trajectoires se feront seulement dans $M \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. En effet, dans les tranches $M \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $M \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, si \tilde{X} est assez proche de X , la transversalité entre les différentes variétés stables et instables n'est pas dérangée (et les points où l'on vérifie la transversalité sont en nombre fini, puisqu'on est sur une variété compacte). Par conséquent, les trajectoires de \tilde{X} qui restent dans ces tranches reproduisent celles de X (dans le sens qu'elles relient les mêmes points critiques en même nombre), qui elles sont identiques à celles de X_0 ou X_1 car les lignes de gradient de g sont transverses aux tranches. Seuls les indices des points critiques sont affectés par g , et ce pour $M \times \{0\}$ seulement.

On obtient donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (C_\star(\tilde{F}|_{M \times [-\varepsilon, \varepsilon]}), \partial_{\tilde{X}}) &= (C_\star(f_0 + g), \partial_{X_0 - \text{grad } g}) \\ &= (C_{\star+1}(f_0), \partial_{X_0}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (C_\star(\tilde{F}|_{M \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]}), \partial_{\tilde{X}}) &= (C_\star(f_1 + g), \partial_{X_1 - \text{grad } g}) \\ &= (C_\star(f_1), \partial_{X_1}). \end{aligned}$$

Maintenant qu'on a décrit \tilde{F} et \tilde{X} de Morse-Smale, on peut construire le complexe de Morse correspondant sur $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

Par ce qu'on avait dit plus tôt, on peut décrire les espaces de points critiques de \tilde{F} ainsi :

$$C_{k+1}(\tilde{F}) = C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1).$$

On déduit de la construction de \tilde{X} que l'ensemble de ses trajectoires se divise en deux parties : celles qui restent dans une tranche $M \times \{0\}$ ou $M \times \{1\}$, et celles qui partent de la première tranche pour aller dans la seconde. C'est ainsi qu'on peut décrire la différentielle du complexe :

$$\partial_{\tilde{X}} : C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_1) \longrightarrow C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1)$$

$$\partial_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \partial_{X_0} : C_k(f_0) &\longrightarrow C_{k-1}(f_0) & 0 : C_{k+1}(f_1) &\longrightarrow C_{k-1}(f_0) \\ \Phi^F : C_k(f_0) &\longrightarrow C_k(f_1) & \partial_{X_1} : C_{k+1}(f_1) &\longrightarrow C_k(f_1). \end{aligned}$$

La composante Φ^F est la candidate pour le morphisme de complexes que l'on recherche entre $(C_*(f_0), \partial_{X_0})$ et $(C_*(f_1), \partial_{X_1})$. Il faut seulement vérifier que

$$\Phi^F \circ \partial_{X_0} = \partial_{X_1} \circ \Phi^F$$

pour s'assurer qu'il s'agit bien d'un morphisme de complexes. On obtiendra cela à partir de la propriété de la différentielle :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\tilde{X}} \circ \partial_{\tilde{X}} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{X_0} \circ \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F & \partial_{X_1} \circ \partial_{X_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne $\Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F = 0$. Comme on travaille dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cela équivaut à $\Phi^F \circ \partial_{X_0} = \partial_{X_1} \circ \Phi^F$.

Étape 2 : Φ^F induit un isomorphisme en homologie

Pour la deuxième partie de la preuve, nous allons énoncer deux lemmes qui nous permettront ensuite de conclure que Φ^F induit un isomorphisme en homologie. Les preuves des deux lemmes suivront.

Lemme 2.4.8. *Si $(f_1, X_1) = (f_0, X_0)$ et*

$$I : M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, s) \longmapsto I(x, s) = I_s(x) = f_0(x) \quad \forall x \in M$$

$$\forall s \in [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$$

alors le morphisme de complexes induit Φ^I est l'identité.

Lemme 2.4.9. Soit (f_0, X_0) , (f_1, X_1) et (f_2, X_2) trois couples de Morse-Smale sur M . Soit F une interpolation entre f_0 et f_1 comme dans la preuve du théorème, et soit $G : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une interpolation entre f_1 et f_2 telle que

$$\begin{cases} G_s = f_1 & \text{pour } s \in [0, \varepsilon] \\ G_s = f_2 & \text{pour } s \in [1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

et $H : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une interpolation entre f_0 et f_2 telle que

$$\begin{cases} H_s = f_0 & \text{pour } s \in [0, \varepsilon] \\ H_s = f_2 & \text{pour } s \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Alors les morphismes induits en homologie par $\Phi^G \circ \Phi^F$ et Φ^H sont homotopes.

Prenons maintenant $H = I$ et faisons de G une interpolation entre f_1 et f_0 . Par le lemme 2.4.8, on a que l'application induite en homologie par Φ^I est l'identité. Par le lemme 2.4.9 et puisque deux morphismes homotopes induisent la même application en homologie, on déduit que $\Phi^G \circ \Phi^F$ induit aussi l'identité en homologie. De façon similaire, on pourrait aussi bien montrer que $\Phi^F \circ \Phi^G$ induit l'identité en homologie. Donc les morphismes induits en homologie par Φ^F et Φ^G sont des inverses l'un de l'autre, et sont des isomorphismes.

Il reste maintenant à faire la preuve des deux lemmes.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.4.8. Nous allons suivre les mêmes étapes que précédemment pour construire (\tilde{I}, X) un couple de Morse-Smale sur $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Il sera ensuite clair que le morphisme de complexes induit $\Phi^{\tilde{I}}$ sera l'identité.

Soit comme précédemment une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec un maximum à 0, un minimum à 1, qui est croissante sur $] -\infty, 0] \cup [1, \infty[$ et décroissante sur $]0, 1[$, et telle que

$$\frac{\partial}{\partial s} I(x, s) + g'(s) = 0 + g'(s) < 0 \quad \forall x \in M \quad \forall s \in]0, 1[.$$

Encore une fois $\tilde{I} = I + g$ est une fonction de Morse sur $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, par un raisonnement similaire.

Aussi soit $X = X_0 - \text{grad } g$ sur tout $M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Si on étudie ce que font ses trajectoires entre deux points critiques consécutifs, puisque l'indice des points de $M \times \{0\}$ est un de plus que dans $M \times \{1\}$, elles ne peuvent que rester dans $M \times \{0\}$ et faire comme X_0 ou alors descendre le long du gradient de g pour rejoindre le point critique dans $M \times \{1\}$ qui correspond au point de départ. Ici X

est déjà un pseudo-gradient adapté satisfaisant à la propriété de Smale car toutes les propriétés de transversalité sont vérifiées dans la construction.

Alors comme auparavant on construit le complexe : $C_{k+1}(\tilde{I}) = C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_0)$ et la différentielle est

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{X}} : C_k(f_0) \oplus C_{k+1}(f_0) &\rightarrow C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_0) \\ \partial_{\tilde{X}} &= \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 \\ \Phi^I & \partial_{X_0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \partial_{X_0} : C_k(f_0) &\longrightarrow C_{k-1}(f_0) & 0 : C_{k+1}(f_0) &\longrightarrow C_{k-1}(f_0) \\ \Phi^I : C_k(f_0) &\longrightarrow C_k(f_0) & \partial_{X_0} : C_{k+1}(f_0) &\longrightarrow C_k(f_0). \end{aligned}$$

Par ce qui précède, Φ^I doit être l'identité, qui induit à son tour l'identité en homologie. □

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.4.9. Comme dans les preuves précédentes on va interpoler entre les fonctions de Morse sur M . Cette fois cependant on a trois fonctions de Morse f_0 , f_1 et f_2 et trois interpolations F , G et H . Soit donc la fonction

$$\begin{aligned} K : M \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \times [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ K(x, s, t) &= K_{s,t}(x) \end{aligned}$$

telle que

$$K_{s,t} = \begin{cases} H_t & \text{pour } s \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ G_t & \text{pour } s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \\ F_s & \text{pour } t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ f_2 & \text{pour } t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \end{cases}$$

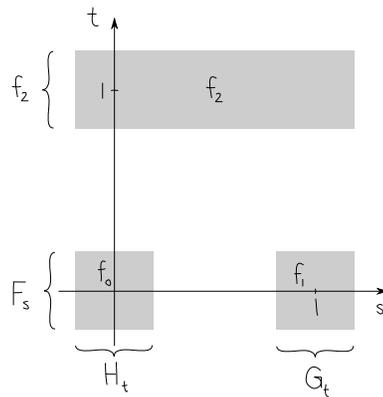


FIGURE 2.19. La fonction $K_{s,t}$

Soit aussi, comme précédemment, la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec un maximum en 0, un minimum en 1 et aucun autre point critique, croissante sur $] -\infty, 0[\cup] 1, \infty[$ et assez décroissante sur $[0, 1]$ pour que

$$(1) \quad g'(s) + \max \left(\frac{\partial}{\partial s} F(x, s), \frac{\partial}{\partial s} G(x, s), \frac{\partial}{\partial s} H(x, s) \right) < 0$$

$$(2) \quad g'(s) + \frac{\partial}{\partial s} K(x, s, t) < 0$$

et soit

$$\widetilde{K}(x, s, t) = K_{s,t}(x) + g(s) + g(t).$$

Par un argument similaire à ce qui a été fait plus haut, c'est une fonction de Morse. Par un argument similaire aussi, il est possible de construire X un champ de pseudo-gradient adapté à \widetilde{K} , puis de le modifier pour en faire \widetilde{X} un pseudo-gradient adapté satisfaisant à la condition de Smale. Les points critiques de \widetilde{K} correspondent à l'ensemble

$$\text{Crit}(f_0) \times \{0\} \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_1) \times \{1\} \times \{0\} \cup \text{Crit}(f_2) \times \{0\} \times \{1\} \cup \text{Crit}(f_2) \times \{1\} \times \{1\},$$

et leurs indices sont ainsi :

- si $p \in \text{Crit}(f_0)$, alors $\text{Ind}_{\widetilde{K}}(p, 0, 0) = \text{Ind}_{f_0}(p) + 2$,
- si $p \in \text{Crit}(f_1)$, alors $\text{Ind}_{\widetilde{K}}(p, 1, 0) = \text{Ind}_{f_1}(p) + 1$,
- si $p \in \text{Crit}(f_2)$, $\text{Ind}_{\widetilde{K}}(p, 0, 1) = \text{Ind}_{f_2}(p) + 1$ et $\text{Ind}_{\widetilde{K}}(p, 1, 1) = \text{Ind}_2(p)$.

Donc

$$C_k(\widetilde{K}) = C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_1) \oplus C_{k-1}(f_2) \oplus C_k(f_2)$$

et la différentielle est décrite ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_{\widetilde{X}} &: C_{k+1}(\widetilde{K}) \rightarrow C_k(\widetilde{K}) \\ \partial_{\widetilde{X}} &: C_{k-1}(f_0) \oplus C_k(f_1) \oplus C_k(f_2) \oplus C_{k+1}(f_2) \\ &\rightarrow C_{k-2}(f_0) \oplus C_{k-1}(f_1) \oplus C_{k-1}(f_2) \oplus C_k(f_2) \end{aligned}$$

$$\partial_{\widetilde{X}} = \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & \text{Id} & \partial_{X_2} \end{pmatrix}.$$

L'identité $\partial_{\widetilde{X}} \circ \partial_{\widetilde{X}} = 0$ nous donne

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{\widetilde{X}} \circ \partial_{\widetilde{X}} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & \text{Id} & \partial_{X_2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F & \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} & 0 \\ S & \Phi^G & \text{Id} & \partial_{X_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{X_0} \circ \partial_{X_0} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi^F \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_1} \circ \Phi^F & \partial_{X_1} \circ \partial_{X_1} & 0 & 0 \\ \Phi^H \circ \partial_{X_0} + \partial_{X_2} \circ \Phi^H & 0 & \partial_{X_2} \circ \partial_{X_2} & 0 \\ S \circ \partial_{X_0} + \Phi^G \circ \Phi^F + \Phi^H + \partial_{X_2} \circ S & \Phi^G \circ \partial_{X_1} + \partial_{X_2} \circ \Phi^G & \partial_{X_2} \circ \partial_{X_2} & \partial_{X_2} \circ \partial_{X_2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne à son tour $S \circ \partial_{X_0} + \Phi^G \circ \Phi^F + \Phi^H + \partial_{X_2} \circ S = 0$ ou, puisque nous comptons modulo 2, $\Phi^G \circ \Phi^F - \Phi^H = S \circ \partial_{X_0} - \partial_{X_2} \circ S$. Donc les morphismes $\Phi^G \circ \Phi^F$ et Φ^H sont homotopes, et, par conséquent, ils induisent le même morphisme en homologie. \square

Ceci termine la démonstration du théorème 2.4.7. \square

Remarque 2.4.10. *Comme nous avons montré que l'homologie de Morse sur une variété M ne dépend pas des choix de fonction de Morse et de pseudo-gradient de Smale, nous noterons dorénavant $(H_{Mo})_\star(M)$ l'homologie de Morse de la variété M .*

En utilisant les outils de la théorie de Morse, il est possible de montrer plusieurs des résultats standards pour l'homologie singulière. Dans leur livre, Audin et Damian [1] font plusieurs de ces preuves. Nous ne citerons ici que les résultats les plus importants pour la suite, sans les démontrer : nous montrerons plutôt au chapitre 4 que l'homologie de Morse est isomorphe à l'homologie cellulaire, qui est bien connue et qui possède toutes ces propriétés.

Proposition 2.4.11. *Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors l'application induite en homologie $f_\star : (H_{Mo})_\star(M) \rightarrow (H_{Mo})_\star(N)$ est un isomorphisme.*

Proposition 2.4.12. *Si M est une variété compacte et connexe, alors*

$$(H_{Mo})_0(M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Proposition 2.4.13 (Dualité de Poincaré). *Si M est une variété compacte sans bord de dimension n , alors*

$$(H_{Mo})_k(M) \cong (H_{Mo})_{n-k}(M)$$

pour tout k .

Proposition 2.4.14 (Fonctorialité). *Si $f : M \rightarrow N$ est lisse, alors*

$$f_\star : (H_{Mo})_\star(M) \rightarrow (H_{Mo})_\star(N)$$

est un morphisme de groupes abéliens gradués.

Proposition 2.4.15 (Invariance homotopique). *Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux applications homotopes, alors $f_\star = g_\star$.*

2.5. EXEMPLES

Pour terminer ce chapitre, nous allons étudier en détail la topologie de trois variétés simples à l'aide de la théorie de Morse. D'abord, nous étudierons la sphère de dimension n , ensuite l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$, et enfin l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$.

2.5.1. La sphère

Soit la fonction hauteur sur la sphère

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

donnée par

$$\begin{aligned} f : S^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto x_{n+1}. \end{aligned}$$

On va étudier la fonction en détail sur les cartes ayant pour domaine les ouverts

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{x \in S^n \mid x_i > 0\} \\ U_i^- &= \{x \in S^n \mid x_i < 0\} \end{aligned}$$

pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$ qui recouvrent la sphère. D'abord, dans les cartes d'ouverts U_i^+ et U_i^- telles que $i \neq n+1$, la fonction est donnée par

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$$

donc sa dérivée $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)$ est non-nulle partout, et la fonction ne possède aucun point critique.

Dans la carte de U_{n+1}^+ , on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{-x_i}{\sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)}} \end{aligned}$$

et donc la dérivée $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right)$ ne s'annule qu'au point $(0, \dots, 0)$ de la carte, qui correspond au point $(0, \dots, 0, 1)$ sur la sphère.

Aussi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{-x_i}{\sqrt{1 - 0}} \right) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donc la hessienne de f à ce point est la matrice $-I_n$. Donc, f a un point critique non-dégénéré d'indice n au point $(0, \dots, 0, 1)$.

De façon similaire, par l'étude de f et de ses dérivées dans l'ouvert U_{n+1}^- , on prouve que $(0, \dots, 0, -1)$ est un point critique de f avec pour hessienne I_n , donc un point critique non-dégénéré d'indice 0.

On en conclut que f est une fonction de Morse, et que $-\text{grad}(f)$ est un pseudo-gradient adapté à f . Comme les variétés $W^u(0, \dots, 0, 1) = S^n - (0, \dots, 0, 1)$ et $W^s(0, \dots, 0, -1) = S^n - (0, \dots, 0, -1)$ s'intersectent de façon transversale partout, $-\text{grad}(f)$ respecte la condition de Smale.

Nous pouvons donc décrire le complexe de Morse de la sphère. D'abord,

$$(C_{\text{Mo}})_k(f) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, si $n = 1$, $\partial(0, 1) = 2(0, -1) = 0$, donc la différentielle de Morse est nulle partout. Si $n > 1$, toutes les applications de la différentielle auront le groupe nul comme domaine ou comme image, donc la différentielle sera nulle aussi.

On en conclut que l'homologie de la sphère est donnée par

$$(H_{\text{Mo}})_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.5.2. L'espace projectif réel

L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est l'espace topologique formé des droites de \mathbb{R}^{n+1} qui passent par l'origine. On peut aussi décrire cet espace comme le quotient de la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$ par la relation d'équivalence $x \sim -x$. Nous allons donc commencer par définir une fonction de Morse sur la sphère, avant de nous en servir pour définir une fonction de Morse sur $\mathbb{R}P^n$, pour enfin calculer son homologie de Morse.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : S^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} ix_i^2. \end{aligned}$$

Nous allons étudier cette fonction sur le même ensemble de cartes qu'à l'exemple précédent : sur chaque carte d'ouvert U_k^+ , on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} ix_i^2 + k \left(1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} x_i^2 \right) \\ &= k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} (k-i)x_i^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -2(k-j)x_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_j = 0 \quad \text{car } j \neq k$$

donc $(0, \dots, 0)$ est le seul point critique de la fonction f dans cette carte. Aussi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell} = \begin{cases} -2(k-j) & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, $-2(k-j) < 0$ si et seulement si $j < k$, ce qui implique que le point critique $(0, \dots, \underbrace{1}_{k^{\text{e position}}}, \dots, 0) \in S^n$ est non-dégénéré d'indice $k-1$.

Par un argument similaire effectué sur la carte de U_k^- , on trouve que f possède un unique point critique $(0, \dots, \underbrace{-1}_{k^{\text{ième position}}}, \dots, 0) \in S^n$ non-dégénéré d'indice $k-1$ également.

Au total, la fonction possède donc $2(n+1)$ points critiques non-dégénérés, deux de chaque indice entre 0 et n . Donc f est de Morse.

Notons

$$\begin{aligned} \pi : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

la projection qui envoie x sur sa classe d'équivalence sous la relation $x \sim -x$.

Remarquons que la fonction f est telle que $f(x) = f(-x)$, donc

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}P^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [x] &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} ix_i^2 \end{aligned}$$

est bien définie et est aussi de Morse. Les points critiques de g correspondent à une paire de points critiques de f avec les indices correspondants.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire

$$(C_{\text{Mo}})_k(g) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour trouver l'homologie de ce complexe, il faudra étudier sa différentielle. Pour ce faire, munissons $\mathbb{R}P^n$ d'un champ de pseudo-gradient de Smale X associé à g . Puisque $f(x) = f(-x)$, il existe un unique champ de pseudo-gradient de Smale \widetilde{X} associé à f et tel que

$$(d\pi)_x(\widetilde{X}_x) = X_{\pi(x)},$$

c'est-à-dire que les trajectoires induites par \widetilde{X} se projettent sur celles de X . La symétrie implique donc que sur la sphère, pour deux points critiques p et q de f

d'indices consécutifs, on a

$$n_{\tilde{X}}(p, q) = n_{\tilde{X}}(-p, -q)$$

et que, si π_* est l'application linéaire induite par π sur les groupes de chaînes,

$$\begin{aligned} \partial_{\text{Mo}} \circ \pi_*(p) &= \partial_{\text{Mo}}([p]) \\ &= \sum_{[q]} n_X([p], [q])[q] \\ &= \sum_{[q]} (n_{\tilde{X}}(p, q) + n_{\tilde{X}}(p, -q))[q] \\ &= \sum_q n_{\tilde{X}}(p, q)[q] \\ &= \pi_* \left(\sum_q n_{\tilde{X}}(p, q)q \right) \\ &= \pi_* \circ \partial_{\text{Mo}}(p). \end{aligned}$$

Cela implique que π induit un morphisme de complexes

$$\pi_* : ((C_{\text{Mo}})_*(f), \partial_{\tilde{X}}^*) \longrightarrow ((C_{\text{Mo}})_*(g), \partial_X^*).$$

Soit maintenant μ_* les applications linéaires

$$\begin{aligned} \mu_* : (C_{\text{Mo}})_*(g) &\longrightarrow (C_{\text{Mo}})_*(f) \\ [x] &\longmapsto x + (-x). \end{aligned}$$

Encore une fois par symétrie des trajectoires, on a que

$$\begin{aligned} \partial_{\text{Mo}} \circ \mu_*([p]) &= \partial_{\text{Mo}}(p + (-p)) \\ &= \partial_{\text{Mo}}(p) + \partial_{\text{Mo}}(-p) \\ &= \sum_q n_{\tilde{X}}(p, q)q + \sum_r n_{\tilde{X}}(-p, r)r \\ &= \sum_q n_{\tilde{X}}(p, q)q + \sum_{-q} n_{\tilde{X}}(-p, -q)(-q) \\ &= \sum_{[q]} n_X([p], [q])(q + (-q)) \\ &= \mu_* \circ \partial_{\text{Mo}}([p]) \end{aligned}$$

et donc μ_* est un morphisme de complexes

$$\mu_* : ((C_{\text{Mo}})_*(g), \partial_X^*) \longrightarrow ((C_{\text{Mo}})_*(f), \partial_{\tilde{X}}^*).$$

Étudions la suite de complexes

$$0 \longrightarrow ((C_{\text{Mo}})_*(g), \partial_X^*) \xrightarrow{\mu_*} ((C_{\text{Mo}})_*(f), \partial_{\tilde{X}}^*) \xrightarrow{\pi_*} ((C_{\text{Mo}})_*(g), \partial_X^*) \longrightarrow 0.$$

Il s'agit d'une suite exacte, car

$$\begin{aligned}\pi_* \circ \mu_*([p]) &= \pi_*(p + (-p)) \\ &= \pi_*(p) + \pi_*(-p) \\ &= [p] + [-p] \\ &= 0.\end{aligned}$$

On peut donc en extraire une longue suite exacte en homologie de Morse

$$\dots \rightarrow (H_{\text{Mo}})_k(S^n) \rightarrow (H_{\text{Mo}})_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\partial} (H_{\text{Mo}})_{k-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow (H_{\text{Mo}})_{k-1}(S^n) \rightarrow \dots$$

En utilisant l'exemple précédent, ainsi que les propositions 2.4.12 et 2.4.13, on peut déduire en posant $k = 0, \dots, n$ dans la suite précédente que

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.5.3. L'espace projectif complexe

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est l'espace topologique formé de l'ensemble des sous-espaces complexes de dimension 1 de \mathbb{C}^{n+1} . On peut aussi décrire cet espace comme l'ensemble $\{z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_i |z_i|^2 = 1\}$ quotienté par la relation d'équivalence qui identifie z et λz si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $|\lambda| = 1$.

De façon analogue à ce qu'on a fait dans l'exemple précédent, on montre que la fonction

$$\begin{aligned}f : \mathbb{C}P^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [(z_1, \dots, z_{n+1})] &\longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} i|z_i|^2\end{aligned}$$

est de Morse. Cette fois-ci, les points critiques seront $p_k = [(0, \dots, \underbrace{1}_{k^{\text{ième position}}, \dots, 0)]$

pour $1 \leq k \leq n+1$, d'indice $|p_k| = 2(k-1)$ (il est naturel que l'indice double par rapport à l'exemple précédent, puisqu'on double les dimensions des variétés instables en passant de \mathbb{R} à \mathbb{C}). On a donc

$$(C_{\text{Mo}})_k(f) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné la nature de ce complexe, la différentielle doit être nulle pour tout k , donc on déduit que

$$(H_{\text{Mo}})_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chapitre 3

CW-COMPLEXES ET HOMOLOGIE CELLULAIRE

Le cœur de ce mémoire se trouve au chapitre suivant, qui fera l'étude détaillée des relations qui existent entre les flots de Morse-Smale sur une variété tels que décrits au chapitre précédent et différentes structures de CW-complexes que nous allons attribuer à cette variété. Le présent chapitre sert à rafraîchir rapidement les principales notions sur les CW-complexes et à fixer les notations qui seront utilisées au chapitre suivant.

3.1. CW-COMPLEXES

Dans ce mémoire, nous nous limitons à l'étude des variétés compactes et sans bord. C'est pourquoi nous nous en tiendrons à l'étude des CW-complexes de dimension finie.

Définition 3.1.1. *Un CW-complexe de dimension 0 est une union discrète de points $X = X^{(0)}$.*

*Un **CW-complexe** X de dimension finie n est un espace topologique admettant des sous-espaces $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n-1)} \subset X^{(n)} = X$ tels que, pour tout $k \leq n$, il existe une famille d'indices I_{k+1} et des applications $\alpha_i^k : S^k \rightarrow X^{(k)}$ telles que $X^{(k+1)}$ est (à homéomorphisme près) le quotient de*

$$X^{(k)} \coprod_{i \in I_{k+1}} D_i^{k+1}$$

par la relation d'équivalence $x \sim \alpha_i^k(x)$ pour $x \in \partial D_i^{k+1}$.

*Les applications α_i^k sont appelées les **applications d'attachement** et s'étendent à D_i^{k+1} pour former les **applications caractéristiques***

$$\phi_i^{k+1} : D_i^{k+1} \hookrightarrow X^{(k)} \coprod_i D_i^{k+1} \rightarrow X^{(k+1)} \hookrightarrow X$$

où la seconde flèche est le quotient décrit ci-haut.

L'image de ϕ_i^{k+1} est appelée la **cellule** e_i^{k+1} de X . Son intérieur est homéomorphe au disque ouvert de dimension $k + 1$. Comme ensemble,

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \coprod_{i \in I_{k+1}} \text{int}(e_i^{k+1}).$$

On note $Cell_k(X)$ l'ensemble des cellules de dimension k de X .

Exemple 3.1.2 (Tore). *Le tore est l'espace topologique obtenu en prenant un carré et en identifiant ses côtés opposés, comme sur la figure suivante.*

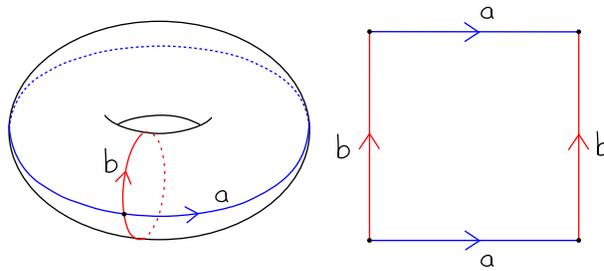


FIGURE 3.1. Une structure de CW-complexe sur le tore

Le tore est donc un CW-complexe qui a une cellule de dimension 0 (correspondant aux quatre coins du carré, qui sont identifiés), deux cellules de dimension 1 (correspondant aux côtés opposés identifiés du carré) et une cellule de dimension 2. Les applications d'attachement des cellules de dimension 1 sont l'application constante sur le point, et l'application d'attachement de la cellule de dimension 2 identifie le bord du carré à la figure en huit formée par les cellules de dimension 1, en suivant dans l'ordre a, b, a en sens inverse, puis b en sens inverse.

Exemple 3.1.3 (S^n). *La sphère S^n a une structure de CW-complexe possédant deux cellules e^0 et e^n . L'application d'attachement $\alpha^{n-1} : S^{n-1} \rightarrow X^{(0)}$ est celle qui envoie le bord du disque D^n sur le point e^0 .*

Exemple 3.1.4 ($\mathbb{R}P^n$). *Comme vu à l'exemple 2.5.2, $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de la sphère S^n par la relation d'équivalence $x \sim -x$. On peut aussi décrire cet espace comme $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\} \approx D^n$ avec la relation d'équivalence $x \sim -x$ sur ∂D^n . Mais $\partial D^n \approx S^{n-1}$ munie de cette relation d'équivalence est précisément $\mathbb{R}P^{n-1}$. On déduit qu'on obtient $\mathbb{R}P^n$ en attachant une cellule e^n à $\mathbb{R}P^{n-1}$, avec l'attachement $\alpha^{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ qui applique le quotient à*

∂D^n . Par induction, on conclut que $\mathbb{R}P^n$ a la structure d'un CW-complexe avec une cellule e^k pour chaque dimension $k = 0, \dots, n$.

Définition 3.1.5. Un **sous-complexe** d'un CW-complexe X est un sous-espace fermé composé d'une union de cellules de X . Un sous-complexe est un CW-complexe en tant que tel.

Définition 3.1.6. L'**application relative d'attachement** de la cellule e_i^n à la cellule e_j^{n-1} est la composition

$$\alpha_{i,j} : S_i^{n-1} \xrightarrow{\alpha_i} X^{(n-1)} \xrightarrow{\pi} X^{(n-1)} / \overline{X^{(n-1)} - e_j^{n-1}}$$

où α_i est l'application d'attachement de la cellule e_i^n et π est l'application quotient.

3.2. LE COMPLEXE CELLULAIRE

Comme les squelettes $X^{(k)}$ de X sont des espaces topologiques, il est possible de calculer leur homologie simpliciale (ou singulière) $H_*(X^{(k)})$, ainsi que l'homologie relative d'un squelette $X^{(k)}$ par rapport à un autre. À partir de telles constructions, il est possible de former un nouveau complexe de chaînes, appelé le complexe cellulaire, et de calculer son homologie. Cette homologie s'avèrera identique à l'homologie simpliciale du CW-complexe $X = X^{(n)}$.

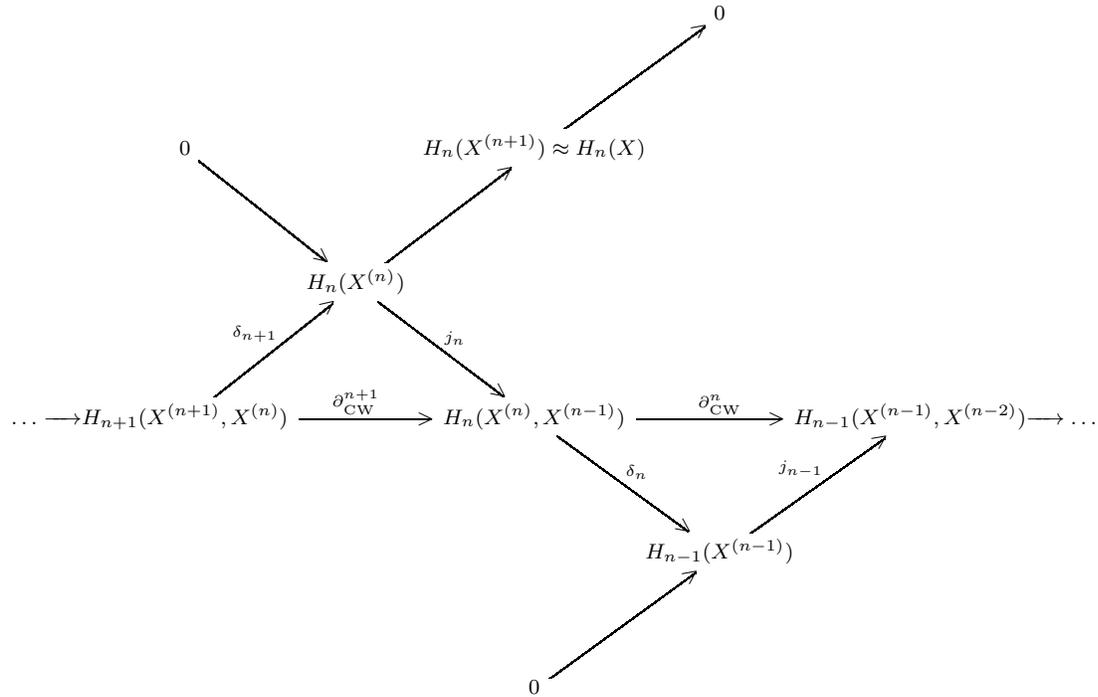
D'abord, il est possible de démontrer le lemme suivant (Hatcher [4] en fournit une preuve claire).

Lemme 3.2.1. (1) $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = 0$ si $k \neq n$ et est un groupe abélien libre pour $k = n$, avec un générateur pour chaque cellule de dimension n de X .

(2) $H_k(X^{(n)}) = 0$ si $k > n$.

(3) L'inclusion $i : X^{(n)} \longrightarrow X$ induit un isomorphisme $i_* : H_k(X^{(n)}) \longrightarrow H_k(X)$ si $k < n$.

En utilisant le lemme précédent ainsi que les suites exactes longues des paires $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$, $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ et $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$, on peut dégager le diagramme suivant :



Définition 3.2.2. Le **complexe cellulaire** du CW-complexe X est un complexe de chaînes $C_{CW} = (C_*(X), \partial_{CW}^*)$ formé du groupe gradué

$$C_n(X) := H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \langle e_i^n \mid e_i^n \in \text{Cell}_k(X) \rangle$$

et de la différentielle $\partial_{CW}^n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ qui est définie comme la composition

$$H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$$

où δ_n est le connectant de la suite exacte longue de la paire $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ et j_{n-1} est l'application provenant de la suite exacte longue de la paire $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$.

Remarque 3.2.3. On a bel et bien que C_{CW} est un complexe de chaînes car $\partial_{CW}^{n+1} \circ \partial_{CW}^n = j_{n-1} \circ \delta_n \circ j_n \circ \delta_{n+1}$ contient deux applications consécutives de la suite exacte longue de la paire $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$, donc vaut 0.

Théorème 3.2.4. L'homologie du complexe cellulaire, appelée **homologie cellulaire** et notée

$$(H_{CW})_k(X) = \ker \partial_{CW}^k / \text{Im } \partial_{CW}^{k+1},$$

est isomorphe à l'homologie singulière de X .

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle d'une étude du diagramme précédent à l'aide du lemme 3.2.1. Nous référons à nouveau à Hatcher [4] pour une démonstration complète. \square

Corollaire 3.2.5 (Formule pour la différentielle cellulaire). *On a que*

$$\partial_{CW}^n(e_i^n) = \sum_j \deg(\alpha_{i,j}) e_j^{n-1}$$

où les cellules e_i^n et e_j^{n-1} sont associées aux générateurs correspondants des groupes du complexe de chaînes.

DÉMONSTRATION. Une démonstration de ce résultat se trouve dans le livre de Hatcher [4, p.170]. \square

Exemple 3.2.6 (Tore). *Étant donné la structure de CW-complexe du tore donnée à l'exemple 3.1.2, on a que*

$$\begin{aligned} C_0(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ C_1(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ C_2(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ensuite, en étudiant l'attachement des cellules dans cet exemple, on déduit que les applications relatives d'attachement de a et b au point sont de degré 2, et que l'application relative d'attachement de la cellule de dimension 2 à a et à b ont aussi degré 2, puisque le côté du carré est attaché en passant deux fois sur chaque boucle. En étudiant la formule pour la différentielle cellulaire donnée ci-haut, et étant donné qu'on compte modulo 2, on déduit que la différentielle s'annule toujours. On en conclut que

$$\begin{aligned} (H_{CW})_0(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{CW})_1(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{CW})_2(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.7 (S^n). *Étant donné l'exemple 3.1.3, on a que*

$$C_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étude de la différentielle est triviale si $n > 1$. Si $n = 1$, l'attachement relatif de la cellule e^1 au point est l'application constante qui envoie le bord de D^1 sur le point, ce qui a degré 2, donc la différentielle est nulle dans ce cas aussi. On en déduit que

$$(H_{CW})_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3.2.8 ($\mathbb{R}P^n$). *Étant donné l'exemple 3.1.4, on a que*

$$C_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application relative d'attachement de la cellule e_i^k à la cellule e_j^{k-1} est la composition

$$\alpha_{i,j} : S^{k-1} \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{R}P^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{k-1} / \mathbb{R}P^{k-2} \approx S^{k-1}$$

qui a degré 2, donc à nouveau la différentielle est nulle partout, et l'homologie de $\mathbb{R}P^n$ est donnée par

$$(H_{CW})_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \dots, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chapitre 4

RELATIONS ENTRE LES CW-COMPLEXES ET LES FLOTS

Dans ce dernier chapitre, nous étudierons comment un couple de Morse-Smale sur une variété M peut être associé à un CW-complexe, ainsi que les liens structuraux entre le flot de Morse-Smale et l'attachement des cellules du CW-complexe.

Suivant les ouvrages de Milnor [6], nous commencerons par décrire la construction classique d'un CW-complexe homotope à M , ainsi que du complexe cellulaire qui en découle.

Ensuite, suivant un article de Franks [3], nous pousserons plus loin l'étude des relations entre le flot de Morse-Smale et ce CW-complexe construit par Milnor, en nous attardant au lien qui existe entre l'attachement des variétés instables entre elles et l'attachement relatif des cellules dans le CW-complexe. Par une application directe de ce résultat, nous montrerons que le complexe de chaînes de Milnor est le même que celui qu'on a retrouvé en utilisant la théorie de Morse au chapitre 2, ce qui implique que l'homologie de Morse d'une variété est isomorphe à son homologie cellulaire.

Puis, nous décrirons un façon différente de construire un CW-complexe associé à une fonction de Morse-Smale, proposée par Barraud et Cornea dans [2]. Cette façon est plus directe : la variété M elle-même sera munie d'une structure de CW-complexe. Cette nouvelle structure fournira un troisième complexe de chaînes pour la variété M , que nous nommerons ici le complexe de Barraud-Cornea.

Enfin, nous prendrons soin de montrer que ce troisième complexe cellulaire est isomorphe aux deux précédents (le complexe de Morse et le complexe cellulaire de Milnor). Bien que ce fait ait été tenu pour vrai dans la littérature, à notre connaissance, les démonstrations n'ont pas encore été publiées à ce jour.

4.1. LE CW-COMPLEXE ASSOCIÉ AU FLOT, SUIVANT MILNOR

4.1.1. Construction du CW-complexe et homologie cellulaire

Théorème 4.1.1. *Soit f une fonction de Morse-Smale sur une variété compacte M de dimension n . Alors M a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe, dans lequel on retrouve une cellule de dimension k pour chaque point critique de f d'indice k .*

DÉMONSTRATION. Supposons sans perte de généralité que f est ordonnée (ce qui est possible par le théorème 2.3.20).

Nous définirons, de façon inductive sur l'indice k des points critiques, des équivalences homotopiques $g_k : M_{k+\varepsilon} \longrightarrow Y^{(k)}$ pour un certain CW-complexe $Y = Y^{(n)}$ qui sera également construit au fil de l'induction.

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, M_ε est difféomorphe à une réunion de disques, qui se rétractent en suivant le flot sur l'ensemble des points minimums de f . On pose donc $Y^{(0)} = \text{Crit}_0(f)$ et $g_0 : M_\varepsilon \longrightarrow Y^{(0)}$ est l'équivalence homotopique donnée par la rétraction des disques sur les points minimums.

Ensuite, supposons que $g_{k-1} : M_{k-1+\varepsilon} \longrightarrow Y^{(k-1)}$ est une équivalence homotopique.

Par le théorème 2.3.16, il existe une rétraction $h : M_{k-\varepsilon} \longrightarrow M_{k-1+\varepsilon}$.

Aussi, par le théorème 2.3.17, $M_{k+\varepsilon}$ a le même type d'homotopie que $M_{k-\varepsilon} \cup_{j_i} \{D_{q_i}\}$ où $D_{q_i} = W_{q_i}^u \cap (\overline{M - M_{k-\varepsilon}})$ et $j_i : \partial D_{q_i} \longrightarrow M_{k-\varepsilon}$ est simplement l'inclusion, pour $q_i \in \text{Crit}_k(f)$.

Soit $\alpha_i = g_{k-1} \circ h \circ j_i : \partial D_{q_i} \longrightarrow Y^{(k-1)}$. Alors on a que

$$\begin{aligned} M_{k+\varepsilon} &\simeq M_{k-\varepsilon} \cup_{j_i} D_{q_i} \\ &\simeq Y^{(k-1)} \cup_{\alpha_i} D_{q_i} \end{aligned}$$

où la seconde homotopie est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.1.2. *Soit $j : \partial D^k \longrightarrow X$ une application d'attachement. Alors toute équivalence homotopique $h : X \longrightarrow Y$ s'étend à une équivalence homotopique*

$$G : X \cup_j D^k \longrightarrow Y \cup_{h \circ j} D^k.$$

DÉMONSTRATION. Pour la preuve de ce lemme, voir Milnor [6, p.21]. □

D'où on conclut que g_{k-1} s'étend à $g_k : M_{k+\varepsilon} \longrightarrow Y^{(k)} = Y^{(k-1)} \cup_{\alpha_i} D_{q_i}$.

À la fin de l'induction, $g = g_n$ fournit l'équivalence homotopique recherchée entre $M_{n+\varepsilon} = M$ et $Y^{(n)} = Y$, ce qui conclut la démonstration. □

Maintenant que nous avons un CW-complexe Y homotope à M , nous pouvons former un complexe de chaînes $C_{\text{Mi}} = ((C_{\text{Mi}})_\star, \partial_{\text{Mi}}^\star)$ et en dégager une homologie cellulaire, comme au chapitre 3. D'abord, dans la construction faite dans la preuve précédente, remarquons qu'il y a une cellule $e_i^k \in Y^{(k)}$ pour chaque point critique $p \in \text{Crit}_k(f)$. Le groupe gradué $(C_{\text{Mi}})_k$ peut donc être réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (C_{\text{Mi}})_k &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle e_i^k \mid e_i^k \in \text{Cell}_k(Y) \right\rangle \\ &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle e_p^k \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle. \end{aligned}$$

Puis, rappelons que selon la formule 3.2.5, la différentielle cellulaire est donnée par

$$\partial_{\text{Mi}}(e_p^k) = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \text{deg}_2(\alpha_{p,q}) e_q^{k-1}$$

où $\alpha_{p,q}$ désigne l'application d'attachement de la cellule associée à p à la cellule associée à q . Explicitement, elle est donnée par la composition

$$\alpha_{p,q} : \partial D_p \xrightarrow{\alpha_p} Y^{(k-1)} \longrightarrow \overline{Y^{(k-1)} - e_q^{k-1}}$$

où la seconde flèche est le quotient qui envoie $\overline{Y^{(k-1)} - e_q^{k-1}}$ sur un seul point.

Exemple 4.1.3. *Sur la figure suivante, suivant les notations de la démonstration du théorème 4.1.1, nous avons fait l'étude de l'homotopie entre le tore penché muni de la fonction hauteur et de l'opposé du gradient (voir l'exemple 2.3.14) et un CW-complexe construit récursivement. On remarque que ce CW-complexe est équivalent à celui de l'exemple 3.1.2 et possède une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule, associées aux points critiques de la fonction hauteur d'indices 0, 1 et 2 respectivement. Les attachements des cellules se font aussi de la même façon. On en conclut que*

$$\begin{aligned} (C_{\text{Mi}})_0(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{\text{Mi}})_1(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (C_{\text{Mi}})_2(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} (H_{\text{Mi}})_0(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{\text{Mi}})_1(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (H_{\text{Mi}})_2(T^2) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

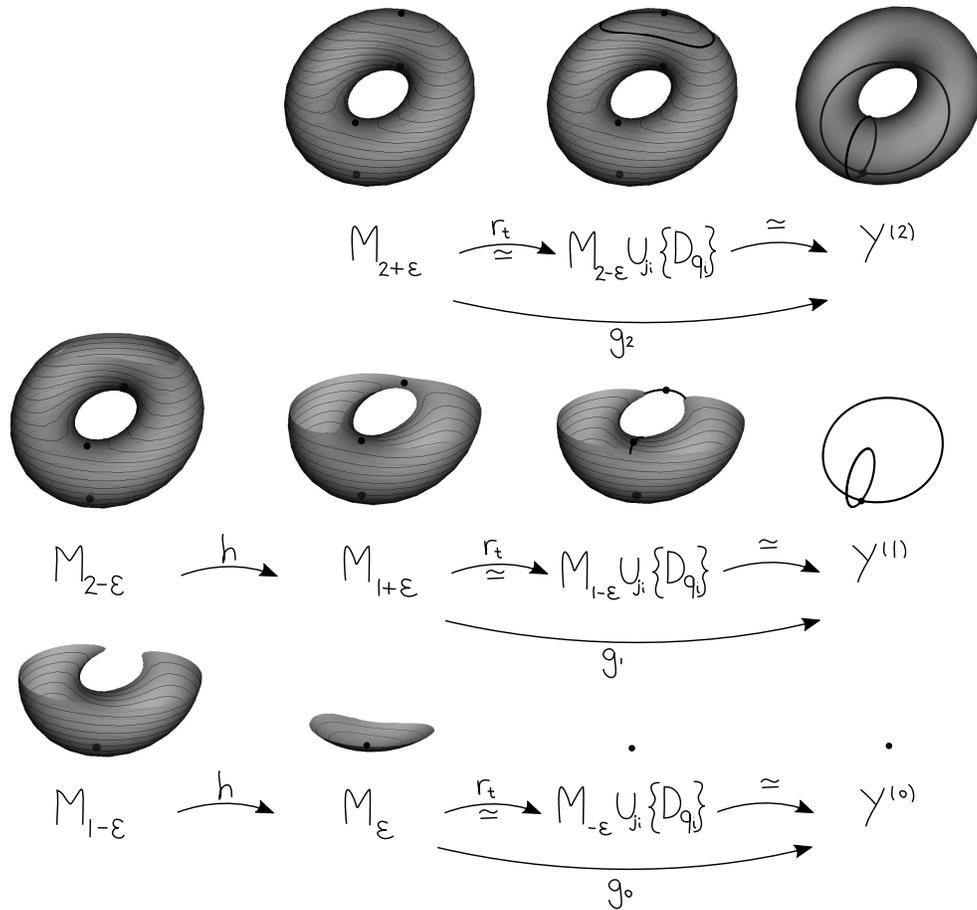


FIGURE 4.1. Illustration de la construction récursive d'un CW-complexe Y homotope au tore

4.2. RELATION ENTRE L'ATTACHEMENT DES CELLULES ET LA VARIÉTÉ CONNECTANTE

On vient d'établir une forte relation entre M muni de la fonction de Morse-Smale f et le CW-complexe Y qui est homotope à M : chaque point critique de f d'indice k correspond à une cellule de dimension k dans Y . Suivant Franks [3], on peut démontrer un lien encore plus fort entre les deux constructions : la façon dont les cellules sont attachées entre elles dans Y correspond à une certaine relation entre les variétés instables des points critiques correspondants, via la construction de Thom-Pontryagin. Autrement dit, le CW-complexe Y associé à M donne de l'information non seulement sur le nombre et l'indice des points critiques de f , mais aussi sur la façon dont les points critiques sont reliés entre eux par le flot de Morse-Smale associé à f .

4.2.1. Définitions et constructions

Débutons cette section par quelques définitions et constructions qui seront nécessaires à l'énonciation et la preuve du résultat annoncé.

Définition 4.2.1. *Deux points critiques p et q d'une fonction de Morse-Smale f sont dits **successifs** si $M_f(p, q) \neq \emptyset$ et $M_f(p, q) = \overline{M_f(p, q)}$. Autrement dit, il n'existe aucune trajectoire brisée reliant p et q .*

Soit p et q deux points critiques successifs. Soit aussi une valeur régulière a telle que $f(q) < a < f(p)$. Définissons les sphères stables et instables

$$\begin{aligned} S^u(p) &= W^u(p) \cap f^{-1}(a) \\ S^s(q) &= W^s(q) \cap f^{-1}(a). \end{aligned}$$

Puisque le flot est transverse au sous-niveau $f^{-1}(a)$, et que $W^u(p)$ est un disque de dimension $|p|$, $S^u(p)$ est une sphère de dimension égale à $|p| - 1$. Similairement, $S^s(q)$ est une sphère de dimension $n - |q| - 1$ [7, p. 28].

Comme f est Morse-Smale, on a que $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$, ce qui implique que dans le sous-niveau $f^{-1}(a)$, $S^u(p) \pitchfork S^s(q)$. On note N l'intersection $S^u(p) \cap S^s(q)$.

Trouvons la dimension de cette sous-variété : par transversalité (1.5.5), on a

$$\dim S^u(p) + \dim S^s(q) - \dim N = \dim (f^{-1}(a)) = n - 1,$$

donc

$$\begin{aligned} \dim N &= (|p| - 1) + (n - |q| - 1) - (n - 1) \\ &= |p| - |q| - 1. \end{aligned}$$

Notons ici que le fait que p et q soient successifs fait en sorte que le choix de $f(q) < a < f(p)$ n'affecte aucunement la construction de N , puisque tous les sous-niveaux $f^{-1}(a)$ sont difféomorphes, par 2.3.16 et à condition de repousser les points critiques comme dans la section 2.3.3.

Avant de pouvoir énoncer le résultat de Franks, nous devons décrire la construction d'un framing de N comme sous-variété de $S^u(p)$. Ce framing sera de dimension égale à $\dim S^u(p) - \dim N = |q|$. À ce point-ci, rien ne nous assure qu'un tel framing de N existe (voir remarque 1.5.2). Par contre, comme la variété stable $W^s(q) \subset M$ est un disque de dimension $n - |q|$, elle possède un voisinage tubulaire trivial, donc par la remarque 1.5.3, elle possède un framing de dimension $|q|$. Notons ce framing \mathfrak{w} . Nous allons obtenir le framing de $N \subset S^u(p)$ en projetant \mathfrak{w} , comme dans le lemme suivant :

Lemme 4.2.2. *Soit (P, \mathfrak{w}) une sous-variété framée de M et Q une autre sous-variété quelconque, telles que $P \pitchfork Q$. Alors la projection de $\mathfrak{w}|_{P \cap Q}$ sur Q est un isomorphisme, et est un framing de $P \cap Q \subset Q$.*

Premièrement, on pose $P = W^s(q)$ et $Q = f^{-1}(a)$ dans l'énoncé du lemme. On a bien que $W^s(q) \pitchfork f^{-1}(a)$ car $T_x W^s(q) + T_x f^{-1}(a) = T_x M$. Par le lemme, la projection de $\mathfrak{w}|_{S^s(q)}$ sur $f^{-1}(a)$ est un isomorphisme, et nous donne un framing de $S^s(q) \subset f^{-1}(a)$.

Ensuite, on pose $P = S^s(q)$ et $Q = S^u(p)$ dans l'énoncé du lemme. Comme $S^u(p) \pitchfork S^s(q)$ dans la variété ambiante $f^{-1}(a)$, la proposition donne que le framing obtenu précédemment restreint à $N = S^u(p) \cap S^s(q)$ se projette sur $S^u(p)$ par un isomorphisme, pour obtenir un framing de $N \subset S^u(p)$. Notons ce nouveau framing \mathfrak{v} .

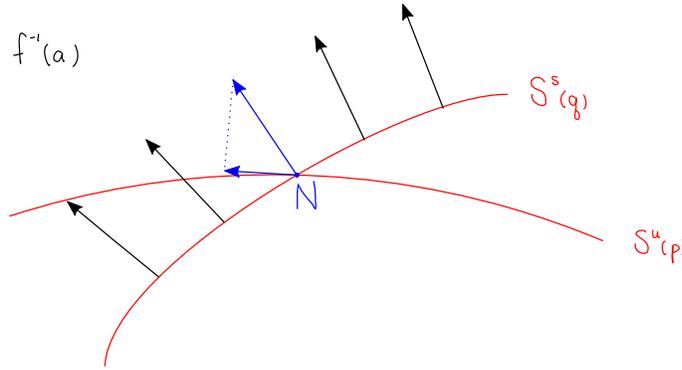


FIGURE 4.2. Projection du framing de $S^s(q) \subset f^{-1}(a)$ restreint à N sur $S^u(p)$

Définition 4.2.3. *Soit deux points critiques successifs p et q . La variété*

$$N = S^u(p) \cap S^s(q)$$

*munie du framing \mathfrak{v} décrit ci-haut est appelée la **variété connectante** de p et q .*

PREUVE DU LEMME 4.2.2. Soit $n = \dim M$, $p = \dim P$ et $q = \dim Q$, et notons

$$\mathfrak{w}(x) = (w_1(x), \dots, w_{n-p}(x)).$$

Par l'hypothèse de transversalité, on a que

$$T_x P + T_x Q = T_x M, \quad (4.2.1)$$

donc chaque vecteur $w_i(x)$ peut être décomposé puis projeté de la façon suivante :

$$\underbrace{w_i(x)}_{\in (T_x P)^\perp} = \underbrace{w'_i(x)}_{\in T_x Q} + \underbrace{w''_i(x)}_{\in (T_x Q)^\perp} \longmapsto w'_i(x)$$

pour former $(w'_1(x), \dots, w'_{n-p}(x))$. On montre que :

(1) $w'_i(x) \perp P \cap Q$ pour $1 \leq i \leq (n-p)$

Car $w_i(x) \perp P \supset P \cap Q$ et $w''_i(x) \perp Q \supset P \cap Q$, donc $w'_i(x) = w_i(x) - w''_i(x)$ est aussi $\perp P \cap Q$.

(2) $w'_i(x) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq (n-p)$

Supposons $w'_i(x) = 0$ pour un certain i . Alors $w_i(x) = w''_i(x) \perp T_x Q$, et on a aussi $w_i(x) \perp T_x P$. Cela contredit la transversalité de P et Q .

(3) $(w'_1(x), \dots, w'_{n-p}(x))$ est libre

Supposons le contraire. Alors il existe $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq (n-p)$ non tous nuls tels que $a_1 w'_1 + \dots + a_{n-p} w'_{n-p} = 0$. Ensuite, si on considère le vecteur $a_1 w_1 + \dots + a_{n-p} w_{n-p}$, on remarque qu'il est en même temps normal à $T_x P$ et à $T_x Q$ (car $a_1 w_1 + \dots + a_{n-p} w_{n-p} = a_1 (w'_1 + w''_1) + \dots + a_{n-p} (w'_{n-p} + w''_{n-p}) = 0 + (a_1 w''_1 + \dots + a_{n-p} w''_{n-p}) \subset (T_x Q)^\perp$). Cela contredit la transversalité de P et Q .

Par les énoncés (1), (2) et (3), nous avons donc obtenu une base $\mathfrak{w}'(x) = (w'_1(x), \dots, w'_{n-p}(x))$ normale à $T_x(P \cap Q)$ et incluse dans $T_x Q$. L'ensemble de ces bases pour $x \in P \cap Q$ forme donc un framing de $P \cap Q \subset Q$, puisque $\dim Q - \dim P \cap Q = n - p$ (1.5.5), et on a projeté de façon continue un autre framing, donc $x \mapsto \mathfrak{w}'(x)$ est continue aussi. \square

4.2.2. Résultat et démonstration

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de la section 4.2.

Soit f une fonction de Morse ordonnée sur une variété M de dimension n , et X son pseudo-gradient de Smale.

Théorème 4.2.4. *Soit p et q deux points critiques successifs de f , et soit $N \subset S^u(p)$ la variété connectante framée qui leur est associée. Alors la classe d'homotopie de N selon la construction de Thom-Pontryagin est la même que la classe d'homotopie de $\alpha_{p,q}$, qui est dans Y l'application d'attachement de la cellule correspondant à p relativement à la cellule correspondant à q .*

Démonstration. Soit k l'indice du point critique q , et soit $\Omega(q) \subset M$ une carte de Morse comme au chapitre 2.

Rappelons la rétraction par déformation r_t qui rétracte $M_{k+\varepsilon}$ sur $M_{k-\varepsilon} \cup W^u(q)$ qu'on a décrite dans la preuve du théorème 2.3.17. Pour les besoins de cette démonstration, nous allons modifier r_t de façon à pouvoir s'en servir pour décrire un voisinage trivial de $W^s(q)$ dans $\Omega(q)$.

La rétraction r_t a été construite en composant deux rétractions r'_t et r''_t . Nous allons seulement modifier $r'_t|_{\Omega(q)}$: pour $(x, y) \in \Omega(q)$,

$$r'_t(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } |y| \leq \frac{\varepsilon}{10} \\ \left(\frac{x}{\rho}, \rho y\right) & \text{si } |y| > \frac{\varepsilon}{10} \end{cases}$$

où $\rho = \rho(x, y, t)$ est la solution positive et réelle de l'équation

$$-\frac{|x|^2}{\rho^2} + \rho^2|y|^2 = (-|x|^2 + |y|^2)(1 - \alpha t) - \varepsilon^2 \alpha t,$$

c'est-à-dire

$$\rho(x, y, t) = \sqrt{\frac{(-|x|^2 + |y|^2)(1 - \alpha t) - \varepsilon^2 \alpha t + \sqrt{((-|x|^2 + |y|^2)(1 - \alpha t) - \varepsilon^2 \alpha t)^2 + 4|x|^2|y|^2}}{2|y|^2}}$$

où $\alpha = \alpha(x, y) \in [0, 1]$ est un facteur qui fait en sorte que $r'_t(x, y)$ touche $y = \frac{\varepsilon}{10}$ au moment précis où $t = 1$. Explicitement,

$$\alpha = \frac{-(\varepsilon^2 + 100|x|^2)(\varepsilon^2 - 100|y|^2)}{100\varepsilon^2(\varepsilon^2 - |x|^2 + |y|^2)}.$$

On note que α est bien défini car $-|x|^2 + |y|^2 > -\varepsilon^2$ dans la région $|y| > \frac{\varepsilon}{10}$ de la carte $\Omega(q)$. Aussi, lorsque $-|x|^2 + |y|^2 \rightarrow -\varepsilon^2$, alors $|y| \rightarrow \frac{\varepsilon}{10}$ en même temps, et $\alpha \rightarrow 1$.

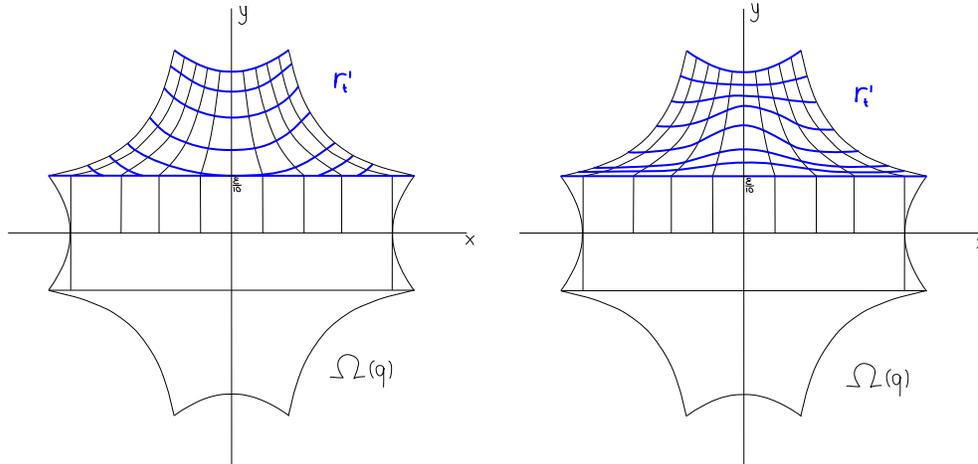


FIGURE 4.3. Quelques courbes de niveau de la rétraction r'_t , avant et après la modification apportée par α

Comme cette rétraction est très similaire à celle de Milnor, et ne change pas son comportement aux bords des régions de sa définition, nous ne referons pas

le détail des vérifications de la continuité de r'_t . Aussi, comme précédemment, la nouvelle rétraction r_t se généralise au cas où il y a plusieurs points critiques $q = q_1, q_2, q_3, \dots$ d'indice k .

La composition de r'_t modifiée avec r''_t nous donne maintenant une rétraction

$$r_t : M_{k+\varepsilon} \longrightarrow M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \in \text{Crit}_k f} W^u(q_i)$$

telle que $r_t(U(N))$ donne un disque différent pour tout $t \in [0, 1]$, car $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ pour $t \in]0, 1[$. On va se servir de cette propriété pour spécifier un voisinage tubulaire trivial de $W^s(q)$ dans M dont on connaîtra précisément la structure dans la carte $\Omega(q)$.

D'abord, soit le voisinage

$$U(S^s(q)) = \left\{ (x, y) \in \Omega(q) \mid -|x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2 \text{ et } |x||y| \leq \frac{\varepsilon^2}{10} \right\} \approx S^s(q) \times D^k.$$

Puis, pour $t \in [0, 1]$, on définit

$$U(W^s(q) \cap f^{-1}(k + t\varepsilon)) := r_t(U(S^s(q))) \approx (W^s(q) \cap f^{-1}(k + t\varepsilon)) \times D^k$$

On peut vérifier que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ne s'annule jamais, ce qui entraîne que $|\frac{\partial r'_t}{\partial t}|$ ne s'annule pas non plus : il en va de même pour r''_t . Cela implique que l'ensemble de ces voisinages en disque pour $t \in [0, 1]$ forme un voisinage tubulaire $U(W^s(q)) \approx W^s(q) \times D^k$ dans la carte $\Omega(q)$. On peut prolonger cet isomorphisme de façon arbitraire en dehors de $\Omega(q)$. Notons cet isomorphisme et le voisinage tubulaire résultant

$$U(W^s(q)) \xrightarrow{\nu} W^s(q) \times D^k.$$

Nous avons apporté cette modification à r_t dans le but de montrer que de faire la rétraction r_t revient à faire une projection de $U(W^s(q))|_N \approx N \times D_q$ sur le disque D_q . Autrement dit, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U(W^s(q))|_N & \xrightarrow{r_t} & D_q \\ \downarrow \nu \approx & & \downarrow \approx \\ N \times D^k & \xrightarrow{\pi} & D^k \end{array}$$

où π est le quotient usuel.

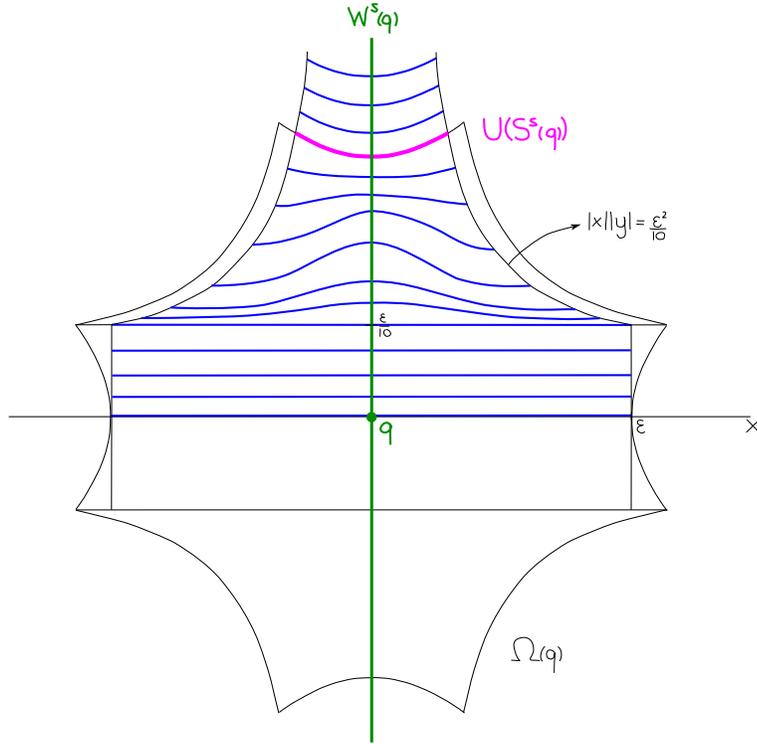


FIGURE 4.4. Le voisinage $U(W^s(q))$

Rappelons aussi que $N \subset S^u(p)$ est muni d'un framing \mathfrak{v} , et que ce framing est isomorphe à la restriction du framing de $W^s(q) \subset M$ à N . Cela permet donc la définition d'un voisinage de $N \subset S^u(p)$ noté $U(N)$, et d'un isomorphisme

$$U(N) \xrightarrow{\phi} U(W^s(q))|_N$$

Maintenant, soit l'application $\beta : S^u(p) \rightarrow S^k$ qui est la composition de r_t et du quotient qui envoie $M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \neq q} \{D_{q_i}\}$ sur un point, tel que dans la première ligne du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta : S^u(p) & \xrightarrow{r_t} & M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \in \text{Crit}_k(f)} \{D_{q_i}\} & \longrightarrow & \frac{M_{k-\varepsilon} \bigcup \{D_{q_i}\}}{M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \neq q} \{D_{q_i}\}} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 U(N) & \xrightarrow[\approx]{\phi} & U(W^s(q))|_N & \xrightarrow{r_t} & D_q \\
 \downarrow \nu \approx & & \downarrow \approx & & \uparrow = \\
 N \times D^k & \xrightarrow{\pi} & D^k & \longrightarrow & D_q / \partial D_q
 \end{array}$$

Le diagramme commute à homotopie près, donc β est l'application associée à la variété framée (N, \mathbf{v}) via la construction de Thom-Pontryagin. En effet, q est une valeur régulière de β , puisque r_t et le quotient qui suit sont des isomorphismes sur un petit ouvert autour de N . Aussi, par construction, $\beta^{-1}(q) = N$, et le framing \mathbf{v} correspond précisément au framing donné par β et le framing canonique de q dans D_q .

Nous arrivons maintenant à l'objet principal de cette démonstration, qui est de montrer que cette application β est homotope à l'application relative d'attachement

$$\alpha_{p,q} : \partial D_p \xrightarrow{\alpha_p} Y^{(k)} \xrightarrow{\pi} Y^{(k)} / Y^{(k)} - e_q^k,$$

qui rappelons-le est celle qui attache le bord de la cellule associée à p à la cellule associée à q dans le CW-complexe Y . Si on se souvient des détails de la démonstration du théorème 2.3.17, on voit que tous les carrés et triangles du diagramme suivant commutent à homotopie près.

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_{p,q} : \partial D_p & \xrightarrow{\alpha_p} & Y^{(k)} & \xrightarrow{\pi} & Y^{(k)} / Y^{(k)} - e_q^k \\ & \searrow h & \uparrow g_k \simeq & & \downarrow \simeq \\ & & M^{k+\varepsilon} & & \\ & \swarrow h & \downarrow r_t \simeq & & \\ \beta : S^u(p) & \xrightarrow{r_t} & M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \in \text{Crit}_k(f)} \{D_{q_i}\} & \xrightarrow{\pi} & \frac{M_{k-\varepsilon} \bigcup \{D_{q_i}\}}{M_{k-\varepsilon} \bigcup_{q_i \neq q} \{D_{q_i}\}} \end{array}$$

Cela nous amène à conclure que $\alpha_{p,q} \simeq \beta$. □

4.2.3. Équivalence des complexes cellulaires de Morse et de Milnor

Le théorème de Franks nous permet de montrer assez aisément que le complexe cellulaire associé à Y , que l'on a noté C_{Mi} , est le même que le complexe de Morse C_{Mo} dégagé au chapitre 2.

Théorème 4.2.5. *Soit M une variété compacte, (f, X) un couple de Morse-Smale sur M , et Y le CW-complexe associé à (f, X) par le théorème 4.1.1. Alors $C_{\text{Mi}}(Y) \cong C_{\text{Mo}}(f)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que

$$(C_{\text{Mo}})_k(f) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \langle p \mid p \in \text{Crit}_k(f) \rangle$$

et

$$(C_{\text{Mi}})_k(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \langle e_p^k \mid p \in \text{Crit}_k(f) \rangle.$$

Il est donc clair que les groupes gradués sont isomorphes.

Ensuite, rappelons que la différentielle du complexe de Morse est

$$\partial_{\text{Mo}}(p) = \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, q) q \quad p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$$

où $n_X(p, q)$ est le nombre modulo 2 de trajectoires de X reliant p à q . La différentielle du complexe cellulaire est quant à elle

$$\partial_{\text{Mi}}(e_p^{k+1}) = \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} \deg_2(\alpha_{p,q}) e_q^k.$$

Pour compléter la démonstration, il suffit de montrer que $n_X(p, q) = \deg_2(\alpha_{p,q})$, où $\alpha_{p,q}$ est l'application relative d'attachement de la cellule de Y associée au point critique p de f à la cellule associée au points critique q .

Comme la différentielle relie les points critiques d'indices consécutifs, on a que $|p| - |q| = 1$.

Soit N la variété connectante de p et q , alors on a $\dim N = |p| - |q| - 1 = 0$. N est donc un ensemble discret de points, un pour chaque trajectoire reliant p à q . Donc $|N| \equiv n_X(p, q) \pmod{2}$.

Soit ensuite $\beta : S^u(p) \rightarrow S^k$ l'application associée à N par la construction de Thom-Pontryagin, telle que définie dans la preuve du théorème précédent (4.2.4). Dans un premier temps, on a observé que $\beta^{-1}(q) = N$, donc ici $\deg_2(\beta) = |N|$. Puis, l'énoncé du théorème nous donne que, $\beta \simeq \alpha_{p,q}$, ce qui implique que $\deg_2(\beta) = \deg_2(\alpha_{p,q})$ par le théorème 1.4.3.

En résumé, on a

$$n_X(p, q) \equiv |N| = \deg_2(\beta) = \deg_2(\alpha_{p,q}) \pmod{2},$$

ce qu'on voulait démontrer. □

4.3. CW-COMPLEXE ASSOCIÉ AU FLOT, SUIVANT BARRAUD-CORNEA

Dans Barraud et Cornea [2], les auteurs ont proposé une façon plus directe (relativement à la construction classique de Milnor) de construire un CW-complexe associé à un couple de Morse-Smale sur une variété. Cette nouvelle construction commence par la description détaillée de la compactification des variétés instables, qui formeront éventuellement les cellules d'un nouveau CW-complexe, celui-là égal à M elle-même.

4.3.1. L'éclatement d'une variété instable

Soit (f, X) un couple de Morse-Smale sur une variété M . Par les théorèmes 2.3.20 et 2.3.23, on peut supposer que la fonction f est ordonnée et possède un unique minimum, noté m .

Soit p un point critique de f . Rappelons qu'au chapitre 2, nous avons établi que $\overline{M}_f(p, m)$ est la compactification de l'espace des trajectoires reliant p à m par l'ajout des trajectoires brisées.

Donc pour $v \in \overline{M}_f(p, m)$ on peut écrire $v = (v_1, v_2, \dots, v_j) \in M_f(p, p_1) \times M_f(p_1, p_2) \times \dots \times M_f(p_{j-1}, m)$ avec $p_i \in \text{Crit}(f)$ et $j \geq 1$.

Il sera utile de reparamétriser ces trajectoires d'une façon plus naturelle : pour $v \in M_f(p, m)$, choisissons la paramétrisation

$$\begin{aligned} s_v : [0, f(p)] &\longrightarrow M \\ s_v(t) = z &\Leftrightarrow f(z) = f(p) - t. \end{aligned}$$

Cette paramétrisation s'étend bien aux trajectoires brisées $v = (v_1, v_2, \dots, v_j) \in \partial \overline{M}_f(p, m)$.

Définition 4.3.1. *L'éclatement de la variété instable $W^u(p)$ est*

$$\hat{M}(p) := \overline{M}_f(p, m) \times [0, f(p)] / \sim$$

où $((v_1, \dots, v_j), t) \sim ((v'_1, \dots, v'_j), t)$ si, $\forall i$ tel que $f(p_{i-1}) > t$, on a $v_i = v'_i \in M_f(p_{i-1}, p_i)$.

Autrement dit, on identifie les points (v, t) et (v', t) si les trajectoires de v et de v' coïncident partout au-dessus du niveau t (voir figure 4.5).

Comme annoncé, on voudra utiliser les éclatements $\hat{M}(p)$ pour décrire une structure de CW-complexe pour M . Avant de procéder, il faut établir que ces espaces possèdent certaines propriétés, entre autres qu'ils sont Hausdorff et homéomorphes à des disques.

Proposition 4.3.2. *$\hat{M}(p)$ est Hausdorff.*

DÉMONSTRATION. On veut montrer que la limite de suites de $\hat{M}(p)$ est unique. Soit donc deux suites (v_n, t_n) et $(v'_n, t'_n) \in \overline{M}_f(p, m) \times [0, f(p)]$ telles que

- $v_n \rightarrow v$ et $t_n \rightarrow t$
- $v'_n \rightarrow v'$ et $t'_n \rightarrow t'$
- $[(v_n, t_n)] = [(v'_n, t'_n)] \quad \forall n$.

Alors on veut montrer que $[(v, t)] = [(v', t)]$.

D'abord, comme $(v_n, t_n) \sim (v'_n, t'_n)$ pour tout n , selon la définition de cette relation d'équivalence, $t_n = t'_n$ pour tout n , donc $t = t'$. Ensuite, comme $(v_n, t_n) \sim (v'_n, t_n)$, v_n et v'_n coïncident au-dessus du niveau t_n pour tout n . Donc v et v' doivent coïncider au-dessus du niveau t . D'où $[(v, t)] = [(v', t)]$. \square

Étant donné les paramétrisations s_v des trajectoires de f , on pourra définir une application continue

$$\begin{aligned} S : \overline{M}_f(p, m) \times [0, f(p)] &\longrightarrow M \\ (v, t) &\longmapsto s_v(f(p) - t) \end{aligned}$$

qui envoie (v, t) sur le point de M qui se situe sur la trajectoire v à l'intersection de $f^{-1}(t)$, ainsi qu'une application

$$\begin{aligned} o : \hat{M}(p) &\longrightarrow M \\ [(v, t)] &\longmapsto S(v, t) = s_v(f(p) - t). \end{aligned}$$

La définition du quotient dans $\hat{M}(p)$ nous assure que o est bien définie.

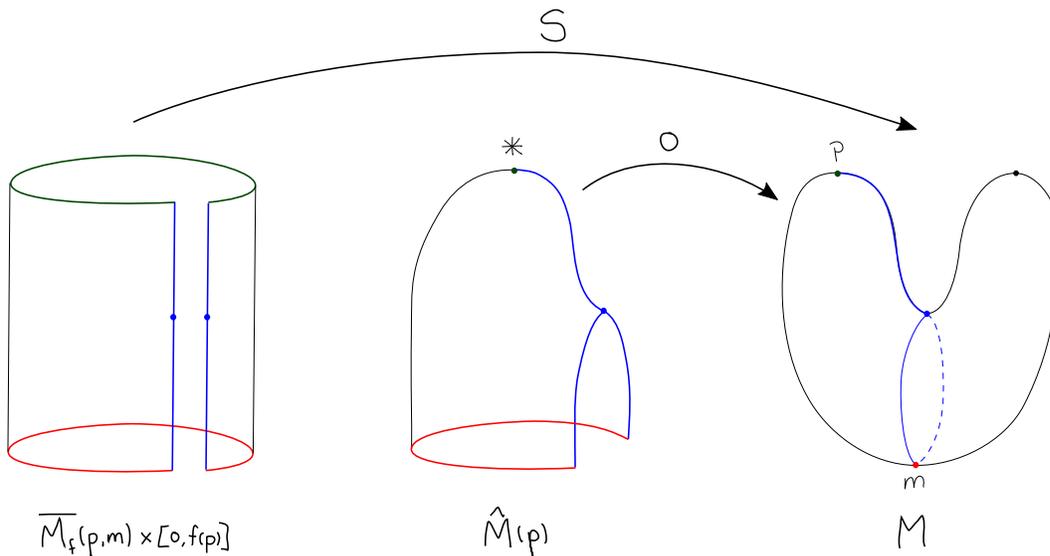


FIGURE 4.5. Les applications S et o

La proposition suivante justifie que l'on appelle $\hat{M}(p)$ l'éclatement de $W^u(p)$:

Proposition 4.3.3. $o(\hat{M}(p)) = \overline{W^u(p)}$.

DÉMONSTRATION.

$$(1) o(\hat{M}(p)) \supseteq \overline{W^u(p)}$$

- (a) Si $x \in W^u(p)$, alors x appartient au premier segment d'une certaine trajectoire brisée (ou non) $v = (v_1, \dots, v_j)$ entre p et m ($j \geq 1$) et est situé à l'intersection d'un certain $f^{-1}(t)$. Donc il existe $(v, t) \in \overline{M_f(p, m)} \times [0, f(p)]$ tel que $o([(v, t)]) = S(v, t) = x$.
- (b) Si $x \in \partial \overline{W^u(p)}$, on prend une suite $(x_n) \subset W^u(p)$ telle que $x_n \rightarrow x$. Par (a), pour tout n , il existe $(v_n, t_n) \in \overline{M_f(p, m)} \times [0, f(p)]$ tel que $S(v_n, t_n) = x_n$. Comme (v_n, t_n) est une suite incluse dans un compact, elle possède une sous-suite convergente (v_{n_k}, t_{n_k}) . Soit $(v, t) \in \overline{M_f(p, m)} \times [0, f(p)]$ la limite de cette sous-suite. Par continuité de S , on a que $S(v_{n_k}, t_{n_k}) = x_{n_k} \rightarrow S(v, t)$. Comme $x_{n_k} \rightarrow x$ et M est Hausdorff, on a que $S(v, t) = x = o([(v, t)])$.

$$(2) o(\hat{M}(p)) \subseteq \overline{W^u(p)}$$

Soit $z \in \hat{M}(p)$. Alors $z = [(v, t)]$ avec $(v, t) \in \overline{M_f(p, m)} \times [0, f(p)]$. On veut montrer que $o(z) \in \overline{W^u(p)}$.

- (a) Si $(v, t) \in M_f(p, m) \times (0, f(p)]$, on a terminé, car alors $o(z)$ est un point sur une trajectoire au départ de p , donc $o(z) \in W^u(p) \subset \overline{W^u(p)}$.
- (b) Si $(v, t) \notin M_f(p, m) \times (0, f(p)]$, alors on choisit une suite $(v_n, t_n) \subset M_f(p, m) \times (0, f(p)]$ telle que $(v_n, t_n) \rightarrow (v, t)$. Par continuité, on a une suite $S(v_n, t_n) \rightarrow S(v, t)$, où, par (a), $S(v_n, t_n) \in W^u(p)$, donc $S(v, t) = o(z) \in \overline{W^u(p)}$.

□

Proposition 4.3.4. $\hat{M}(p)$ est contractile.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que tous les points de $\overline{M_f(p, m)} \times \{f(p)\}$ sont envoyés sur le même point dans $\hat{M}(p)$ par le quotient qui le définit. Notons ce point $*$ $\in \hat{M}(p)$. On va montrer que $\text{Id}(\hat{M}(p))$ est homotope à l'application constante qui envoie $\hat{M}(p)$ sur $*$.

Pour ce faire, définissons

$$\begin{aligned} s'_v : [0, f(p)] &\longrightarrow \hat{M}(p) \\ s'_v(t) &= [(v, f(p) - t)] \end{aligned}$$

Alors $s'_v(0) = [(v, f(p))] = *$, et $s_v = o \circ s'_v$.

Une fois ces notations établies, on note qu'il y a, pour tout $z \in \hat{M}(p)$, une trajectoire $\bar{z} : [0, \tau] \rightarrow \hat{M}(p)$, telle que $\bar{z}(0) = *$, $\bar{z}(\tau) = z$ et qui coïncide avec une trajectoire $v \in \overline{M}_f(p, m)$, c'est-à-dire que $\bar{z}(t) = s'_v(t) \forall t \in [0, \tau]$. Le choix de τ et de \bar{z} est unique par définition.

On observe que l'association

$$\begin{aligned} \beta : \hat{M}(p) &\longrightarrow P'(\hat{M}(p)) = \left\{ \bar{z} : [0, \tau] \longrightarrow \hat{M}(p) \mid \tau \geq 0 \text{ et } \bar{z}(0) = * \right\} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

est continue, ce qui nous permet d'écrire l'homotopie

$$\begin{aligned} H : \hat{M}(p) \times [0, 1] &\longrightarrow \hat{M}(p) \\ H_\alpha(z) &= (\beta(z))(\tau - \alpha\tau) \\ H_0(z) &= \bar{z}(\tau) = \text{Id}(z) \\ H_1(z) &= \bar{z}(0) = * \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Bien que $o(\hat{M}(p)) = \overline{W^u(p)}$, et que $\hat{M}(p)$ soit contractile, on ne pourra se servir des éclatements pour décrire une structure de CW-complexe pour M que lorsqu'on aura l'assurance que $\hat{M}(p)$ est un disque fermé. Cette propriété, montrée par Barraud et Cornea [2], est beaucoup plus forte et est loin d'être triviale, et ne sera ici qu'énoncée.

Théorème 4.3.5. *$\hat{M}(p)$ est homéomorphe à un disque fermé de dimension égale à l'indice de p . De plus,*

$$\partial \hat{M}(p) = \bigcup_{|q| < |p|} M_f(p, q) \times \hat{M}(q).$$

Exemple 4.3.6. *Sur la figure suivante sont illustrés les éclatements des points critiques d'indice non-nul de la fonction hauteur ordonnée sur le tore penché. L'éclatement du minimum m est un simple point $*$ tel que $o(*) = m$.*

On remarque que

$$\partial \hat{M}(p) = M_f(p, q_1) \times \hat{M}(q_1) \cup M_f(p, q_2) \times \hat{M}(q_2) \cup M_f(p, m) \times \hat{M}(m).$$

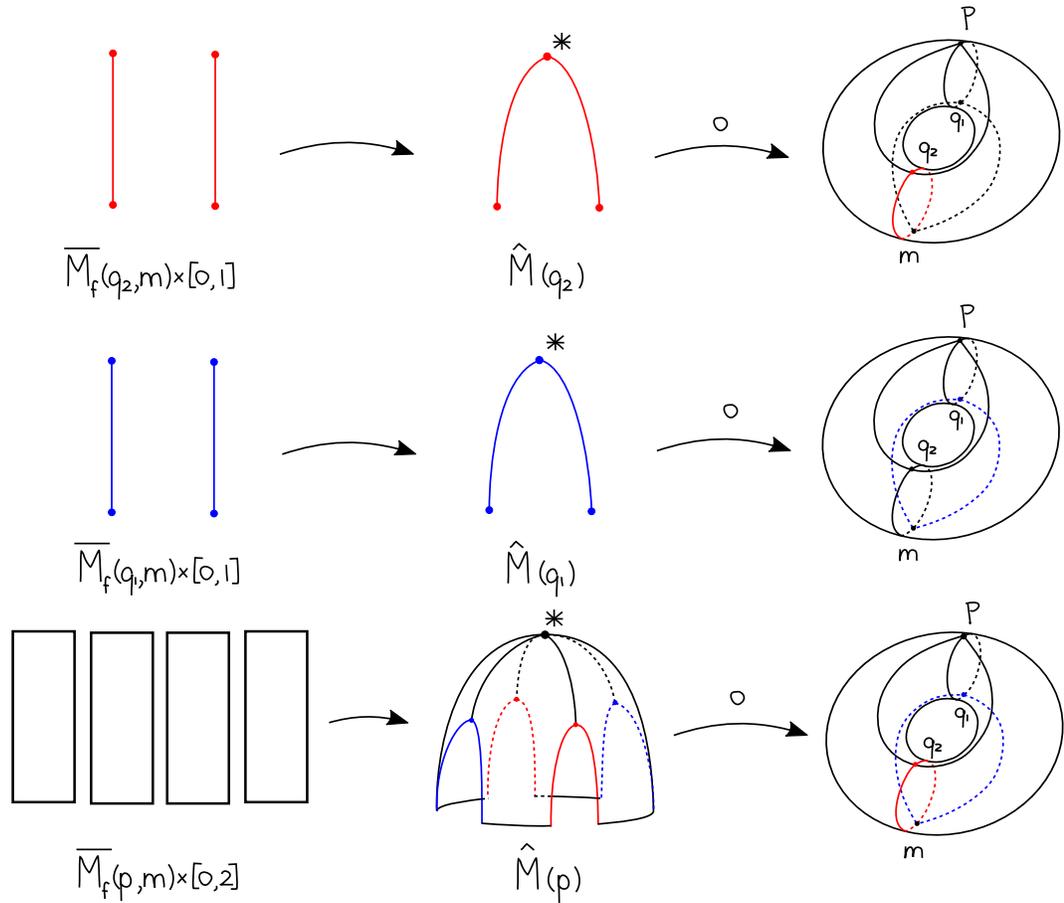


FIGURE 4.6. Les éclatements des points critiques sur le tore

4.3.2. CW-complexe et homologie cellulaire

Le fait que les $\widehat{M}(p)$ soient des disques fermés permet de décrire un autre CW-complexe associé à M via la fonction de Morse-Smale f . En fait, on va montrer que la variété M de dimension finie n a elle-même la structure d'un CW-complexe avec les squelettes

$$M^{(k)} = \bigcup_{|p| \leq k} \overline{W^u(p)}$$

$$M^{(n)} = M.$$

D'abord,

$$M^{(0)} = \bigcup_{|p|=0} \overline{W^u(p)} = \overline{W^u(m)} = \{m\}$$

est un seul point, et on a bien que $M^{(0)} \subset M^{(1)} \subset \dots \subset M^{(n)} = M$.

De plus, il existe des ensembles d'indices $I_{k+1} = \{i \mid p_i \in \text{Crit}_{k+1}(f)\}$ et des applications d'attachement données par

$$o|_{\partial \hat{M}(p_i)} : \partial \hat{M}(p_i) \longrightarrow M^{(k)} = \bigcup_{|p| \leq k} \overline{W^u(p)} \quad i \in I_{k+1}$$

telles que $M^{(k+1)}$ est le quotient de $M^{(k)} \amalg \hat{M}(p_i)$ par la relation d'équivalence $x \in \partial \hat{M}(p_i) \sim o(x)$.

Donc M est un CW-complexe avec pour cellules e_i^k les fermetures $\overline{W^u(p_i)}$ des variétés instables des points critiques d'indice k de f .

Encore une fois, comme on a obtenu une structure de CW-complexe, on pourra construire un complexe cellulaire. On le nommera ici le complexe de Barraud-Cornea, et il sera noté $C_{BC}(M)$.

Soit donc le groupe gradué généré par les cellules

$$(C_{BC})_k = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \left\langle \overline{W^u(p)} \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle$$

ainsi que la différentielle cellulaire

$$\partial_{BC}(\overline{W^u(p)}) = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \deg_2(\alpha'_{p,q}) \overline{W^u(q)}$$

où $\alpha'_{p,q}$ est l'attachement relatif de $\overline{W^u(p)}$ à $\overline{W^u(q)}$, donc

$$\alpha'_{p,q} : \partial \hat{M}(p) \xrightarrow{o} \bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} \longrightarrow \bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} \Big/ \left(\overline{\bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} - \overline{W^u(q)} } \right)$$

De ce complexe cellulaire, on peut dégager une homologie cellulaire $H_{BC}(M)$.

Exemple 4.3.7. *L'analyse des éclatements du tore qu'on a faite à l'exemple 4.3.6 nous révèle que*

$$\begin{aligned} (C_{BC})_0(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (C_{BC})_1(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (C_{BC})_2(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Une étude des applications relatives d'attachement $\alpha'_{p,q}$ à l'aide de la figure 4.6 nous révèle qu'elles sont toutes de degré deux, ce qui implique que la différentielle est nulle partout, et que

$$\begin{aligned} (H_{BC})_0(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (H_{BC})_1(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \\ (H_{BC})_2(T^2) &\cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4.3.3. Équivalence des complexes cellulaires de Barraud-Cornea, de Morse et de Milnor

Dans cette dernière section, nous allons énoncer et démontrer deux théorèmes. D'abord, nous montrerons que le complexe de Barraud-Cornea est identique au complexe de Morse. Enfin, bien que ce ne soit pas nécessaire de le montrer à cause de la transitivité, nous montrerons directement que le complexe de Barraud-Cornea est identique au complexe de Milnor.

Théorème 4.3.8. *Soit M une variété compacte munie d'un couple de Morse-Smale (f, X) ainsi que d'une structure de CW-complexe comme décrite par Barraud et Cornea. Alors, $C_{BC}(M) \cong C_{Mo}(f)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que

$$(C_{Mo})_k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle p \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle$$

et

$$(C_{BC})_k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle \overline{W^u(p)} \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle.$$

Il est donc clair que les groupes gradués de chaînes sont isomorphes.

Ensuite, rappelons que la différentielle du complexe de Morse est

$$\partial_{Mo}(p) = \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} n_X(p, q)q \quad p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$$

où $n_X(p, q)$ est le nombre modulo 2 de trajectoires de X reliant p à q . La différentielle du complexe cellulaire de Barraud-Cornea est quant à elle

$$\partial_{BC}(\overline{W^u(p)}) = \sum_{q \in \text{Crit}_k(f)} \text{deg}_2(\alpha'_{p,q}) \overline{W^u(q)} \quad p \in \text{Crit}_{k+1}(f)$$

Pour compléter la démonstration, il suffit donc de montrer que, pour p et q des points critiques quelconques d'indices consécutifs $k+1$ et k , on a $n_X(p, q) = \text{deg}_2(\alpha'_{p,q})$.

D'abord, on remarque que $\dim M_f(p, q) = k+1 - k - 1 = 0$, donc $M_f(p, q)$ est un ensemble fini de $n_X(p, q)$ points. Il suit que

$$\partial \hat{M}(p) = \underbrace{M_f(p, q) \times \hat{M}(q)}_{n_X(p, q) \text{ copies de } \hat{M}(q)} \cup \left(\bigcup_{\substack{q_i \in \text{Crit}_k(f) \\ q_i \neq q}} M_f(p, q_i) \times \hat{M}(q_i) \right).$$

L'étude de la fonction

$$\alpha'_{p,q} : \partial \hat{M}(p) \xrightarrow{\circ} \bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} \longrightarrow \bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} / \left(\bigcup_{|q_i| \leq k} \overline{W^u(q_i)} - \overline{W^u(q)} \right)$$

nous révèle que

$$\left(\alpha'_{p,q}\right)^{-1}(q) = M_f(p, q) \times \{q\}.$$

En effet, comme $o(\hat{M}(q)) = \overline{W^u(q)}$ avec degré 1, les $n_X(p, q)$ copies du disque $\hat{M}(q)$ sont envoyées sur $\overline{W^u(q)}$ et leur intérieur n'est ensuite pas affecté par le quotient.

Donc, $\deg\left(\alpha'_{p,q}\right) = n_X(p, q)$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 4.3.9. *Soit M une variété compacte munie d'un couple de Morse-Smale (f, X) , d'une structure de CW-complexe $M^{(k)}$ comme décrite par Barraud et Cornea et d'une structure de CW-complexe $Y^{(k)}$ comme décrite par Milnor. Alors, $C_{BC}(M) \cong C_{Mi}(Y)$.*

La preuve de ce théorème reposera sur le lemme suivant :

Lemme 4.3.10. $M^{(k)} = \bigcup_{|p| \leq k} \overline{W^u(p)}$ est une rétraction par déformation du sous-niveau $M_{k+\varepsilon}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer par induction sur k qu'il existe des rétractions $M_{k+\varepsilon} \xrightarrow{\rho_k} M^{(k)}$ qui se décomposent chacune en deux rétractions

$$M_{k+\varepsilon} \xrightarrow{\varphi_X^{ta}} U(M^{(k)}) \xrightarrow{\psi_k} M^{(k)}$$

où $U(M^{(k)})$ est un voisinage fermé de $M^{(k)}$ dans M dont le bord est transverse au flot φ_X^t , $ta(x)$ est le temps d'arrivée de $x \in M_{k+\varepsilon}$ sur $\partial U(M^{(k)})$, et ψ_k rétracte le voisinage sur $M^{(k)}$.

D'abord, pour $k = 0$, on a $M^{(0)} = \{m\}$, donc prenons simplement $U(M^{(0)}) = M_{\varepsilon/2}$. On a bien que $\partial(U(M^{(0)})) = f^{-1}(\varepsilon/2)$ est transverse au flot, et ψ_0 est la rétraction qui suit le flot jusqu'à m .

Ensuite, supposons qu'il existe une rétraction

$$M_{k-1+\varepsilon} \xrightarrow{\varphi_X^{ta}} U(M^{(k-1)}) \xrightarrow{\psi_{k-1}} M^{(k-1)}$$

telle que décrite plus tôt.

La première étape est de décrire $U(M^{(k)})$. On le fait en étendant $U(M^{(k-1)})$ par l'ajout de voisinages tubulaires triviaux des $\overline{W^u(p_i) - U(M^{(k-1)})}$ pour $p_i \in \text{Crit}_k(f)$. Ces voisinages sont appelés des **anses**; on les note $A_i \approx D^k \times D^{n-k}$. On prend soin de choisir les A_i assez petits pour qu'ils ne se touchent pas entre eux, et avec des bords transverses au flot, ce qui est possible par généralité de la

transversalité (1.5.6). De cette façon, on peut poser

$$U(M^{(k)}) = U(M^{(k-1)}) \cup_{i \in \text{Crit}_k(f)} A_i.$$

D'abord, par transversalité, la première rétraction

$$M_{k+\varepsilon} \xrightarrow{\varphi_X^{t_\alpha}} U(M^{(k)})$$

est bien définie.

Ensuite, nous décrirons ψ_k en deux étapes.

D'abord, on rétracte $U(M^{(k)})$ sur $U(M^{(k-1)}) \cup_{i \in \text{Crit}_k(f)} W^u(p_i)$ de la façon suivante : loin de $U(M^{(k-1)})$, on rétracte les anses en suivant la projection naturelle $D^k \times D^{n-k} \rightarrow D^k$, et près de $U(M^{(k-1)})$, sur un voisinage diffeomorphe à $S^{k-1} \times D^{n-k} \times [0, 1]$, on suit la rétraction décrite sur la région ombragée de la figure 4.7.

Dans un deuxième temps, ψ_k suit $\psi_{k-1} : U(M^{(k-1)}) \rightarrow M^{k-1}$, sauf dans un voisinage des anses : à cet endroit, on modifie la rétraction comme sur la figure, de façon à ce que tout reste continu. \square

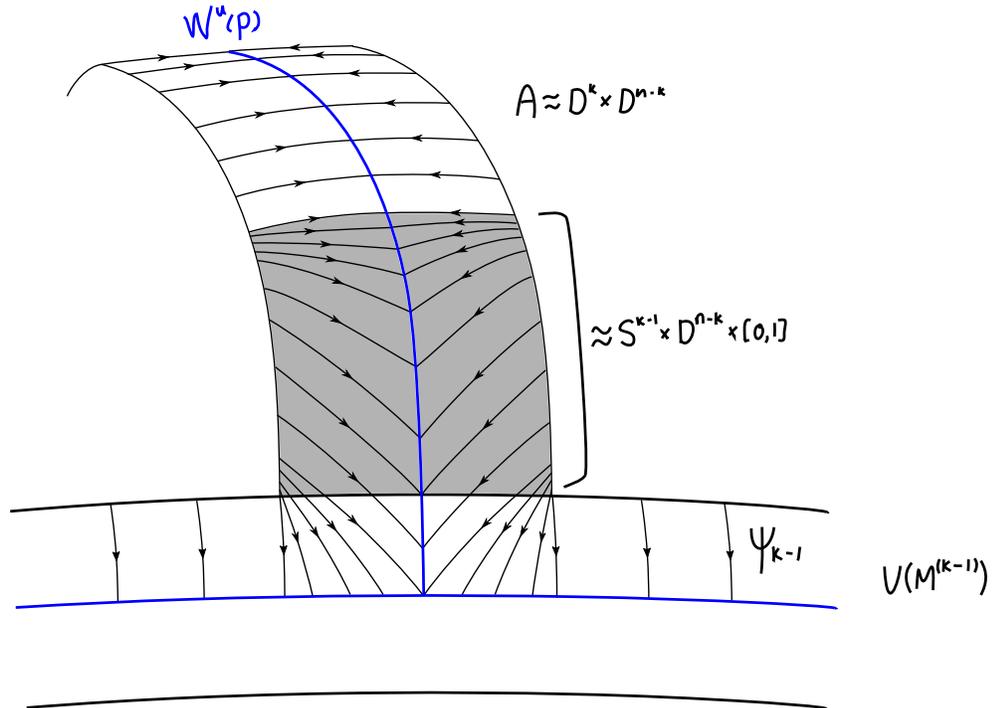


FIGURE 4.7. La rétraction ψ_k

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3.9. D'abord, rappelons que

$$(C_{\text{Mi}})_k = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \left\langle e_p^k \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle$$

et

$$(C_{BC})_k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \left\langle \overline{W^u(p)} \mid p \in \text{Crit}_k(f) \right\rangle.$$

Il est donc clair que les groupes gradués de chaînes sont isomorphes.

Ensuite, pour montrer que ∂_{BC} est isomorphe à ∂_{Mi} , quelques arguments d'algèbre homologique nous permettent de conclure, en remontant à la définition de $\partial_{CW} : H_k(Y^{(k+1)}, Y^{(k)}) \longrightarrow H_{k-1}(Y^{(k)}, Y^{(k-1)})$ telle que décrite au chapitre 3.

Par le lemme précédent, on obtient le schéma commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \hookrightarrow & M^{(k-1)} & \hookrightarrow & M^{(k)} & \hookrightarrow & M^{(k+1)} \hookrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dots & \hookrightarrow & M_{k-1+\varepsilon} & \hookrightarrow & M_{k+\varepsilon} & \hookrightarrow & M^{k+1+\varepsilon} \hookrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dots & \hookrightarrow & Y^{(k-1)} & \hookrightarrow & Y^{(k)} & \hookrightarrow & Y^{(k+1)} \hookrightarrow \dots \end{array}$$

La naturalité de la suite exacte longue de $(M^{(k+1)}, M^{(k)})$ et $(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})$ et le lemme des cinq nous donnent que $H_k(M^{(k+1)}, M^{(k)}) \cong H_k(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})$ pour tout k .

Aussi, puisque le carré qui précède commute, la naturalité de la suite exacte des triplets $(M^{(k+1)}, M^{(k)}, M^{(k-1)})$ et $(Y^{(k+1)}, Y^{(k)}, Y^{(k-1)})$ nous donne le carré commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H_k(M^{(k+1)}, M^{(k)}) & \xrightarrow{\partial_{BC}} & H_{k-1}(M^{(k)}, M^{(k-1)}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_k(Y^{(k+1)}, Y^{(k)}) & \xrightarrow{\partial_{Mi}} & H_{k-1}(Y^{(k)}, Y^{(k-1)}) \end{array}$$

Donc $\partial_{BC} \cong \partial_{Mi}$.

□

Exemple 4.3.11. *Au cours de ce mémoire, nous avons étudié la topologie du tore en calculant son homologie de trois façons : en calculant son complexe de Morse C_{Mo} (exemple 2.4.6), son complexe cellulaire C_{Mi} (exemple 4.1.3) et son complexe de Barraud-Cornea C_{BC} (exemple 4.3.7). On observe effectivement que les trois complexes de chaînes sont identiques.*

Bibliographie

- [1] M. AUDIN et M. DAMIAN : *Théorie de Morse et homologie de Floer*. EDP sciences, 2010.
- [2] J. BARRAUD et O. CORNEA : Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence. *Annals of Mathematics*, 166:657–722, 2007.
- [3] J. FRANKS : Morse-Smale flows and homotopy theory. *Topology*, 18(3):199–215, 1979.
- [4] A. HATCHER : *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] M.W. HIRSCH : *Differential topology, volume 33 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] J. MILNOR : *Morse theory, volume 51 of Annals of Mathematics Studies*. Numéro 51. Princeton University Press, 1963.
- [7] J. MILNOR : *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [8] J. MILNOR : *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [9] S. SMALE : On gradient dynamical systems. *Annals of Mathematics*, 74 (2):199–206, 1961.