

Université de Montréal

Théorème Central Limite pour les marches aléatoires biaisées sur les arbres de Galton-Watson avec feuilles

par
Joss Rakotobe

Département de mathématiques et statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Septembre, 2016

© Joss Rakotobe, 2016.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Théorème Central Limite pour les marches aléatoires biaisées sur les arbres de Galton-Watson avec feuilles

présenté par:

Joss Rakotobe

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manuel Morales,	président-rapporteur
Alexander Fribergh,	directeur de recherche
François Perron,	membre du jury

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ

L'objectif en arrière-plan est de montrer que plusieurs modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires (MAMA) sont reliés à un modèle-jouet appelé le modèle de piège de Bouchaud. Le domaine des MAMA est très vaste, mais nous nous intéressons particulièrement à une classe de modèle où la marche est réversible et directionnellement transiente.

En particulier, nous verrons pourquoi on pense que ces modèles se ressemblent et quel genre de similarités on s'attend à obtenir, une fois qu'on aura présenté le modèle de Bouchaud. Nous verrons aussi quelques techniques de base utilisés de ce domaine, telles que les temps de régénérations.

Comme contribution, nous allons démontrer un théorème central limite pour la marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson.

Mots clés : Marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA), arbre de Galton-Watson, Théorème central limite, Temps de régénération, Modèles de piège.

ABSTRACT

This Master thesis is part of a larger project of linking the behaviours of a certain type of random walks in random environments (RWRE) with those of a toy model called the Bouchaud's trap model. The domain of RWRE is very wide but our interest will be on a particular kind of models which are reversible and directionally transient.

More specifically, we will see why those models have similar behaviours and what kind of results we could expect once we have reviewed the Bouchaud's trap model. We will also present some basic technic used in this field, such as regeneration times.

As a contribution, we will demonstrate a central limit theorem for the β -biased random walk on a Galton-Watson tree.

Keywords : Random walk in random environment, Galton-Watson tree, Central limit theorem, Regeneration time, Trap models.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES SIGLES	viii
NOTATION	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : OUTILS	4
1.1 Chaîne de Markov	4
1.2 Marches aléatoires et réseaux électriques	5
1.2.1 Introduction au sujet	6
1.2.2 Exemples de résultats	6
1.2.3 Application	7
1.3 Fonction génératrice	9
1.4 Arbre de Galton-Watson	11
1.5 Somme de variables aléatoires i.i.d.	18
1.5.1 Arbre de Galton-Watson et somme de variables aléatoires i.i.d.	18
1.5.2 Principe des grandes déviations	21
1.5.3 Somme de variables aléatoires i.i.d. à queues lourdes	22
CHAPITRE 2 : LES MODÈLES	28
2.1 Modèle de piège de Bouchaud unidirectionnel sur \mathbb{N}	29
2.1.1 Cas $\mathbf{E}[\xi^2] < \infty$	30

2.1.2	Cas $\mathbf{E}[\xi^2] = \infty$	31
2.2	Marche aléatoire en environnement aléatoire sur \mathbb{Z}	32
2.2.1	Définition du modèle	32
2.2.2	Résultats	33
2.2.3	Le ralentissement	35
2.3	Modèle de percolation surcritique sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$	37
2.3.1	Description de la percolation	37
2.3.2	Définition de la marche	38
2.3.3	Motivation	39
2.3.4	Faible biais	40
2.3.5	Biais fort	40
2.4	Marche aléatoire β -biaisée dans l'arbre de Galton-Watson	41
2.4.1	Introduction du modèle de Galton-Watson	41
2.4.2	Exposition des résultats	42
CHAPITRE 3 : UN THÉORÈME CENTRAL LIMITE COMME CONTRI-		
BUTION		44
3.1	La pollution de l'environnement	45
3.2	Les temps de régénérations : une contre-mesure à la pollution de l'environnement	46
3.3	Décomposition du modèle	49
3.3.1	Décomposition de l'arbre	49
3.3.2	Décomposition de la marche	51
3.4	Nombre de sites vus sur le tronc avant τ_1	52
3.4.1	Couplage	52
3.4.2	Queue des temps de régénération sur \mathbb{Z}	52
3.5	Temps passé dans un piège	54
3.6	Un second moment pour τ	60
3.7	Théorème central limite	62
BIBLIOGRAPHIE		67

LISTE DES FIGURES

1.1	Réseau associé à la marche β -biaisée sur \mathbb{Z} avec les conductances en bleu.	8
1.2	Graphe d'une fonction génératrice	9
1.3	L'arbre de Galton-Watson avec feuilles (points verts).	13
1.4	Les différentes fonctions caractéristiques pour un arbre de Galton-Watson.	17
1.5	Un arbre de Galton-Watson construit à partir d'un exemple de suite $(W_i)_{i \geq 1}$	19
1.6	Fonctions de densité de différentes lois α -stables (voir 1.5.7) en fonction de leurs paramètres. Images prises de [26] et [27].	26
1.7	Fonction de densité d'un subordonateur stable (voir 1.5.12). Image prise de [28].	27
2.1	Le modèle de piège de Bouchaud unidirectionnel sur \mathbb{N}	29
2.2	Probabilités de transition sur la MAMA sur \mathbb{Z}	33
2.3	Fonction potentiel (interpolée) avec les pièges encadrés en pointillé.	36
2.4	Percolation surcritique sur \mathbb{Z}^2 avec les arêtes ouvertes du cluster infini (en bleu) et les autres arêtes ouvertes (en vert).	38
2.5	Exemple de piège dans une percolation de \mathbb{Z}^2	39
3.1	Exemple de la pollution de l'environnement	46
3.2	Exemple d'un temps de régénération où $K = 4$	48
3.3	L'arbre de Galton-Watson décomposé en deux parties : le tronc (lignes continues) et les pièges (lignes discontinues).	50

LISTE DES SIGLES

càdlàg	continue à droite avec une limite à gauche
déf.	définition
i.e.	Id est, signifie "c'est à dire"
i.i.d.	indépendant identiquement distribué
ind.	indépendance
MAMA	Marche Aléatoire en Milieu Aléatoire
p.s.	presque sûrement

NOTATION

\mathbb{N}	Nombres naturels $1, 2, \dots$
\mathbb{Z}	Nombres entiers
\mathbb{R}	Nombres réels
\emptyset	Ensemble vide
$\{\dots\}$	Ensemble dont les éléments sont ...
$\{- \dots\}$	Ensemble des $-$ tels que ...
$[a; b]$	Intervalle fermé de a à b
$\text{card}(E)$	cardinal de l'ensemble E ; nombre d'éléments de E dans le cas où E est fini
\in	signe d'appartenance
<hr/>	
\forall	pour tout
\exists	il existe
$ x $	valeur absolue de x
Σ	somme d'une suite de nombre
Π	produit d'une suite de nombre
<hr/>	
f'	dérivée de la fonction f
$f^{(n)}$	dérivée n ^{ième} de f
$f \circ g$	composition des fonctions f et g
$f^{\circ n}$	composition de f avec elle même n fois
$\min(\dots)$	minimum de ...
$\text{arg min}(\dots)$	ensemble des arguments minisant ...
$\text{sgn}(x)$	signe de x : vaut 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$
\exp	fonction exponentielle
\ln	fonction logarithme népérien
\sim	égalité asymptotique de fonctions : $f \sim g$ signifie que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

$E[X], \mathbf{E}[X], \mathbb{E}[X]$	espérance de X
$Var[X]$	variance de X
$\sigma(\dots)$	σ -algèbre engendrée par ...
$\xrightarrow{(d)}$	Convergence en distribution
$\stackrel{(d)}{=}$	Égalité en distribution
$L^2(\mathcal{F})$	Ensemble des variables aléatoires de \mathcal{F} à variance finie
$\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$	Loi normale d'espérance μ et variance σ^2
S_α	Loi α -stable
S_α^{ca}	Loi α -stable complètement asymétrique

INTRODUCTION

Introduites dans les années 1970s, les marches aléatoires en milieux aléatoires constituent une branche des probabilités en plein essor. À l'origine, leur objectif était de modéliser des phénomènes physiques et biologiques. Les marches aléatoires permettent de décrire de manière simple toutes sortes de déplacements : diffusion de la chaleur, déplacement d'une particule dans un circuit électrique ou d'un fluide dans un milieu quelconque. Dans ces modèles, l'environnement est souvent simplifié et l'on a tendance à utiliser des milieux homogènes pour faciliter l'étude. Cependant, en pratique cet environnement n'est pas toujours aussi beau qu'on le souhaite et on ne peut parfois pas négliger ses irrégularités. Des défauts, des impuretés, des fluctuations ou des perturbations dans le milieu, de tels changements peuvent avoir des impacts considérables sur le trajet de la particule. Il est alors naturel de vouloir prendre en compte ces facteurs potentiels : on obtient un environnement aléatoire. Une marche aléatoire en milieu aléatoire (MAMA) est donc définie par deux choses :

1. l'*environnement* (appelé aussi le *milieu*), qui est choisi selon un certain aléa dans un ensemble qu'on notera généralement Ω et reste ensuite fixé tout le long de l'évolution ;
2. la *marche aléatoire*, qui est une chaîne de Markov sur un espace d'état discret et dont les probabilités de transitions vont dépendre de l'environnement choisi.

Après plus de quarante ans maintenant, ce domaine a attiré l'attention de nombreux mathématiciens et reste encore très actif. De nombreux résultats surprenants ont été découverts, tels que les phénomènes de ralentissement ou de vieillissements (voir [2]). Mais malgré tous ces progrès, les modèles sont encore peu compris, surtout dans des environnements multidimensionnels, et plusieurs problèmes ordinaires restent encore non démontrés à ce jour. Nombreux ont été étudiés de manière non rigoureuse, par exemple grâce à des simulations, ce qui permet d'avoir une bonne idée des résultats attendus. Toutefois, il est assez facile d'avoir des intuitions erronées. On en verra un exemple dans la section 2.2.

Notre objectif consiste à approfondir une récente investigation (voir [2]), qui a pour but de montrer que plusieurs modèles de MAMA pourraient être reliés à un modèle-jouet appelé le modèle de piège de Bouchaud (introduit dans [4]). Nous voulons comparer toutes sortes de comportements limites. Par exemple, pour la vitesse de la marche, nous nous intéressons à savoir dans quels cas elle est positive, à quelle échelle il faudrait la ré-échelonner si elle est nulle, si la phase de transition de positive à nulle est définitive¹, etc. On voudra aussi mettre en parallèle les différentes lois et processus limites qu'on obtient dans chaque modèle. Un des principaux objectifs est de réussir à démontrer un théorème central limite dans un certain régime. Nous verrons aussi les autres comportements limites qu'on peut obtenir; on verra que dans tous les régimes, on aura convergence vers ce qu'on appelle des *lois stables* (1.5.5).

La famille de modèles de MAMA auxquelles nous nous intéressons se caractérise par son type de marche qui se doit d'être *directionnellement transiente et réversible*. La *transience*, à l'opposé de la *réurrence*, signifie que la marche visitera chaque site un nombre fini de fois et elle divergera. Évidemment, cela n'est possible que dans un espace d'état infini, ce qui sera donc une condition implicite pour notre environnement. À cela s'ajoute la condition qu'elle doit diverger vers l'infini dans une direction spécifique, d'où le terme "directionnellement". Enfin, pour un $\omega \in \Omega$, on obtient un environnement $E(\omega)$ fixe. On dira alors qu'une marche est *réversible* sur $E(\omega)$ s'il existe une mesure π_ω définie sur $E(\omega)$ telle que

$$\forall x, y \in E(\omega), \pi_\omega(x)p(x; y) = \pi_\omega(y)p(y; x),$$

où $p(x; y)$ est la probabilité de transition de x à y de la marche.

Ces modèles sont depuis longtemps connus pour être reliés au piégeage², mais ce n'est que dernièrement que des liens concrets ont été faits. En effet, nous verrons que l'environnement de ces derniers est propice à la formation d'impasses où la marche perdra un temps plus ou moins considérable. C'est la cause de ce qu'on appelle le *ralentissement*

1. Ce dit *sharp* en anglais. Ce terme est employé pour spécifier qu'il y a une unique séparation des deux phases en deux intervalles.

2. Proviens de l'anglais *trapping*. On utilise ce terme pour désigner les modèles de piège

qui est un trait caractéristique des modèles appelés modèles de pièges de Bouchaud. Voilà pourquoi on parlera parfois de "structure de piège" présente dans ces MAMA.

Le chapitre 1 sera destiné à présenter quelques outils de bases sur les marches aléatoires, les arbres de Galton-Watson et les sommes de variables aléatoires i.i.d. Le chapitre 2 consistera à la présentation de différents modèles et de quelques principaux résultats déjà démontrés à ce jour. En particulier, nous y verrons le modèle de Galton-Watson, sur lequel nous apporterons notre propre contribution avec un nouveau résultat dans le chapitre 3, à savoir un théorème central limite.

CHAPITRE 1

OUTILS

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions de base sur les marches aléatoires. Nous en profiterons pour introduire plusieurs notations et préparer quelques résultats que nous utiliserons plus tard dans notre contribution. Enfin, nous développerons quelques résultats généraux sur les sommes de variables aléatoires i.i.d, qui sont des indispensables dans l'étude des MAMA.

1.1 Chaîne de Markov

La chaîne de Markov est un des premiers outils de base des marches aléatoires. Bien que ce soit un sujet assez basique, nous choisissons d'en faire quelques rappels sur les notions importantes que nous utiliserons plus tard.

Définition 1.1.1. Une *chaîne de Markov* (homogène) est une suite de variables aléatoires $X = (X_n)_{n \geq 0}$ caractérisée par un ensemble dénombrable E appelé *espace d'états*, une *loi initiale* $\kappa = (\kappa_i)_{i \in E}$ et un *opérateur de transition* $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$. Elle doit satisfaire les trois conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_0, \dots, a_{n-1}, i, j) \in E^{n+2},$$

1. $\mathbf{P}[X_0 = i] = \kappa_i$;
2. $\mathbf{P}[X_{n+1} = j | X_0 = a_0, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}, X_n = i] = \mathbf{P}[X_{n+1} = j | X_n = i]$;
3. $\mathbf{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{i,j}, \forall n \geq 0, i, j \in E$.

On notera en général $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ la σ -algèbre engendrée par (X_0, \dots, X_n) et \mathbf{P}_i la loi de X conditionnée à $\{X_0 = i\}$.

Remarque 1.1.2. La première condition est l'état initial. La deuxième s'appelle la propriété de Markov faible : connaissant le présent, le futur sera indépendant du passé. La troisième condition est l'homogénéité dans le temps : les transitions entre deux états ne dépendent pas du temps.

Définition 1.1.3 (Mesure invariante). *Une mesure π sur E est appelée mesure invariante d'une chaîne de Markov de matrice de transition P si $\pi = \pi P$.*

Définition 1.1.4 (Réversibilité). *On dit qu'une chaîne de Markov est réversible si elle possède une mesure π telle que pour tous $i, j \in E$,*

$$\pi(i)p_{i,j} = \pi(j)p_{j,i}.$$

Remarque 1.1.5. *En sommant sur i , on peut en déduire que π est nécessairement une mesure invariante par rapport à P .*

Définition 1.1.6 (Temps d'arrêt). *On appelle temps d'arrêt de la chaîne de Markov $X := (X_n)_{n \geq 0}$, une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, telle que $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.*

Proposition 1.1.7 (Propriété de Markov forte). *Soit T un temps d'arrêt de X et A un événement antérieur à T (c'est-à-dire, tel que $\{A \cap \{T = n\}\} \in \mathcal{F}_n$). Alors on a :*

$$\mathbf{P}_0[\{(X_{T+n})_{n \geq 0} \in B\} \cap A | T < \infty, X_T = i] = \mathbf{P}_i[(X_n)_{n \geq 0} \in B] \mathbf{P}_0[A | T < \infty, X_T = i],$$

avec \mathbf{P}_i la loi de X partant de i et $B \in E^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.1.8. *Intuitivement, cette proposition nous dit que la propriété faible de Markov peut être appliquée à un temps d'arrêt conditionné à être fini.*

1.2 Marches aléatoires et réseaux électriques

Cette section est tirée d'un livre de Lyons et Peres [17]. Nous allons présenter quelques liens entre marches aléatoires et réseaux électriques. Il s'agit d'un sujet très intéressant qui permet notamment de développer nos connaissances sur les marches aléatoires grâce aux notions que l'on connaît de la physique. On retrouvera d'ailleurs ce sujet dans de nombreux articles sur les MAMA, par exemple certaines de nos références.

1.2.1 Introduction au sujet

L'idée est d'étudier les chaînes de Markov réversibles grâce aux réseaux électriques. Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov réversible sur un espace d'état E dénombrable. On note $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ sa matrice de transition et $\pi(\cdot)$ une mesure invariante par rapport à P .

Pour chaque couple $(x,y) \in E^2$ tel que $p(x,y) > 0$, on dit que y est voisin de x et on notera $y \sim x$ (par réversibilité, si $y \sim x$, alors $x \sim y$ aussi). On appelle *degré* de x , le nombre de voisins qu'il a. En joignant par une arête chaque couple (x,y) qui est voisin, on obtient un graphe G . On assignera à l'arête (x,y) un poids $c(x,y)$ défini par :

$$c(x,y) := \pi(x)p(x,y) \stackrel{\text{réversibilité}}{=} \pi(y)p(y,x) = c(y,x) > 0.$$

On obtient alors un réseau électrique : chaque arête du graphe est un fil électrique et son poids caractérise sa *conductance*. L'inverse de la conductance, qu'on appelle la *résistance*, est alors définie par

$$r(x,y) := \frac{1}{c(x,y)}.$$

À partir de là, on peut définir toutes les notions d'électricité (tension, intensité, conductances et résistances effectives, énergie dissipée, etc.) de manière mathématiques et profiter des lois physiques qu'on connaît (loi des séries, loi des parallèle, loi d'Ohm, loi des noeuds, etc.) et qu'on peut aussi démontrer avec cette théorie, pour développer notre intuition (voir [17] pour plus de détails).

1.2.2 Exemples de résultats

Étant donné les conductances, on peut facilement retrouver les probabilités de transitions grâce à la formule

$$p(x,y) = \frac{c(x,y)}{\pi(x)} = \frac{c(x,y)}{\sum_{y':y' \sim x} c(x,y')}, \quad (1.2.1)$$

mais évidemment, cela n'est pas très intéressant. Supposons plutôt qu'on veuille calculer la probabilité que partant de x , on atteigne le site y avant de retourner à x . On la notera

$$P(x \rightarrow y) := P_x[T_y < T_x^+],$$

où $T_x := \inf\{n \geq 0 | X_n = x\}$ est le premier temps d'atteinte du site x et $T_x^+ := \inf\{n \geq 1 | X_n = x\}$, le temps de premier retour à x .

Dans le cas où (x, y) est une arête de G et que c 'est le seul chemin reliant x et y , on retombe alors dans le cas 1.2.1 : $P(x \rightarrow y) = p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}$.

Dans les autres cas, il nous faudra "imaginer" qu'on réduise tous les chemins allant de x à y à un seul fil (arête) qui aurait des propriétés équivalentes (c-à-d qu'il conserverait la tension et l'intensité partout ailleurs) et calculer quelle conductance ce fil aurait. On appelle cette conductance, la conductance effective de x à y , notée $\mathcal{C}(x, y)$ (et de même, la résistance effective $\mathcal{R}(x, y) = 1/\mathcal{C}(x, y)$), et définie de telle sorte que

$$P(x \rightarrow y) = \frac{\mathcal{C}(x, y)}{\pi(x)}.$$

Afin de pouvoir réduire un graphe et calculer cette conductance effective et cette résistance effective, on a besoin d'utiliser des lois de physiques : les lois des séries et des parallèle (et aussi la loi $Y - \Delta$ mais qu'on ne présentera pas).

- Loi des séries : deux résistances r_1 et r_2 en séries sont équivalentes à une résistance $r_1 + r_2$. En d'autres termes, si $x \in E$ est un site de degré 2, avec voisins y et z , alors ces deux arêtes sont équivalentes à une arête de résistance effective $\mathcal{R}(y, z) = r(y, x) + r(x, z)$.
- Loi des parallèle : deux fils en parallèle de conductances c_1 et c_2 équivaux à un fil de conductance $c_1 + c_2$.

1.2.3 Application

Faisons une petite application de ce résultat (qui nous sera aussi utile dans le dernier chapitre) avec la marche β -biaisée sur \mathbb{Z} : $p(i, i+1) = 1 - p(i, i-1) = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Les conductances, comme la mesure invariante, sont uniques à un facteur multiplicatif près. En posant une conductance de 1 à l'arête $[0;1]$, on obtient le graphe de la figure 1.1

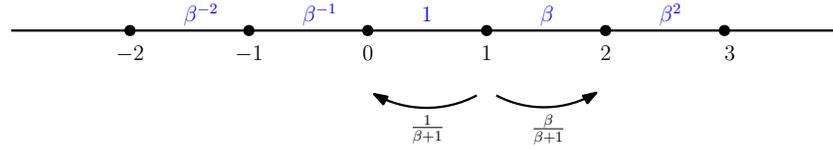


Figure 1.1 – Réseau associé à la marche β -biaisée sur \mathbb{Z} avec les conductances en bleu.

Pour $m, n \in \mathbb{Z}, m < n$, en utilisant la loi des résistances en série, on obtient :

$$\mathcal{R}(m, n) = \sum_{i=m}^{n-1} r(i; i+1) = \sum_{i=m}^{n-1} \beta^{-i} = \beta^{-m} \frac{1 - \beta^{-(n-m)}}{1 - \beta^{-1}} = \frac{\beta^{1-m} - \beta^{1-n}}{\beta - 1},$$

et donc

$$\mathcal{C}(m, n) = \frac{\beta - 1}{\beta^{1-m} - \beta^{1-n}} = (\beta - 1) \frac{\beta^{m-1}}{1 - \beta^{m-n}}.$$

De plus, $\pi(m) = c(m-1, m) + c(m, m+1) = \beta^{m-1} + \beta^m$. Cela nous permet de calculer la probabilité que partant de m , on atteigne le point n avant de revenir à m :

$$P(m \rightarrow n) = \frac{\mathcal{C}(m, n)}{\pi(m)} = \frac{\beta^{m-1}(\beta - 1)}{(\beta^{m-1} + \beta^m)(1 - \beta^{m-n})} = \frac{\beta - 1}{(1 + \beta)(1 - \beta^{m-n})}.$$

Enfin, en passant à la limite, on obtient la probabilité $q_{\mathbb{Z}}$ de diverger vers l'infini avant de revenir au point initial, c'est-à-dire la probabilité de non-retour quand $\beta > 1$:

$$q_{\mathbb{Z}} = P(m \rightarrow \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(m \rightarrow n) = \frac{\beta - 1}{1 + \beta}, \quad (1.2.2)$$

qui dans ce modèle ne dépend pas du point de départ m . En outre, on peut en déduire la transience vers $+\infty$ de la marche quand $\beta > 1$ (et par symétrie, qu'on a transience vers $-\infty$ si $\beta < 1$).

1.3 Fonction génératrice

Définition 1.3.1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle fonction génératrice de Z , la fonction G_Z sous la forme :

$$G_Z : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$$

$$t \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

où $p_k = \mathbf{P}[Z = k], k = 0, 1, \dots$

Remarque 1.3.2. La fonction génératrice est bien définie sur tout son domaine puisque $|G_Z(t)| \leq G_Z(1) = 1$, pour tout $t \in [0; 1]$ et on a une série entière à termes positifs qui converge. Elle est donc continue sur $[0; 1]$ et analytique sur $(0; 1)$ avec des dérivés positives. En outre, elle est convexe sur $[0; 1]$.

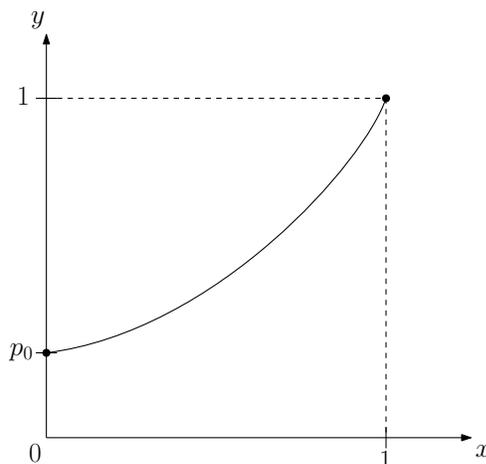


Figure 1.2 – Graphe d’une fonction génératrice

Remarque 1.3.3. Par unicité du développement en série entière autour de 0, la fonction génératrice est caractéristique de sa variable aléatoire, c’est-à-dire que si G_X et G_Y sont deux fonctions génératrices de X et Y respectivement telles que $G_X = G_Y$, alors X et Y ont la même loi.

Proposition 1.3.4. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors*

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Démonstration. Il suffit de constater que pour une variable aléatoire quelconque Z , $G_Z(t) = \mathbf{E}[t^Z]$. On a alors

$$G_{X+Y}(t) = \mathbf{E}[t^{X+Y}] = \mathbf{E}[t^X t^Y] \stackrel{\text{ind.}}{=} \mathbf{E}[t^X] \mathbf{E}[t^Y] = G_X(t)G_Y(t).$$

□

Remarque 1.3.5. *Entre autres, en dérivant G_Z , cela nous permet de calculer l'espérance de Z à l'aide du théorème d'Abel : $\mathbf{E}[Z] = G'_Z(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G'_Z(t) \in [0; \infty]$. Les autres moments, s'ils existent, s'obtiennent en effectuant des combinaisons linéaires des dérivées successives évaluées en 1 par passage à la limite (en utilisant le théorème d'Abel).*

Proposition 1.3.6. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et N une variable aléatoire indépendante de cette suite, toutes à valeurs dans \mathbb{N} . Posons*

$$S_n := \sum_{k=0}^n X_k, n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

$$1) G_{S_N} = G_N \circ G_X,$$

$$2) \mathbf{E}[S_N] = \mathbf{E}[N] \mathbf{E}[X],$$

où $X \stackrel{(d)}{=} X_0$.

Démonstration. 1) Notons que pour un réel $t \in [0; 1]$, on a

$$t^{S_N} = \sum_{n \geq 0} t^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
G_{S_N}(t) &= \mathbf{E}[t^{S_N}] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} t^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[t^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\
&\stackrel{ind.}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[t^{S_n}] \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[t^{X_0} \dots t^{X_n}] \mathbf{P}[N = n] \\
&\stackrel{ind.}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[t^{X_0}] \dots \mathbf{E}[t^{X_n}] \mathbf{P}[N = n] \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} (G_X(t))^n \mathbf{P}[N = n] \\
&= G_N(G_X(t)).
\end{aligned}$$

- 2) On dérive et évalue en 1 cette dernière égalité en utilisant la règle de dérivation en chaîne :

$$\mathbf{E}[S_N] = G'_{S_N}(1) = G'_N(G_X(1))G'_X(1) = \mathbf{E}[N]\mathbf{E}[X]$$

car $G_X(1) = 1$.

□

1.4 Arbre de Galton-Watson

Dans cette section, nous allons étudier en détail l'environnement sur lequel nous travaillerons plus tard : les arbres de Galton-Watson.

C'est dans les années 1870 que le statisticien **Francis Galton** a initié avec son ami mathématicien **Henry William Watson** le modèle qu'on développera plus tard sous le nom d'*arbre de Galton-Watson*. Grand personnage de l'histoire aux multiples réalisations, dont celle de fondateur de ce qu'on appelle aujourd'hui la biométrie, Galton était un héréditariste convaincu, qui s'est longtemps intéressé à la génétique. Le samedi 1er mars de l'année 1873, intrigué par la disparition de familles de grandes personnalités telles que des génies, des aristocrates ou des bourgeois, il posa le problème suivant dans le périodique *Educational Times* (voir [10]) : "Une grande nation, composée de N adultes mâles qui ont tous des noms de familles différents, ont colonisé un district. La loi de leur population est telle que, pour chaque génération, a_0 pourcent des adultes n'ont aucun

enfant mâle ; a_1 pourcent ont un enfant mâle ; et ainsi de suite jusqu'à a_5 pourcent qui en ont cinq. Trouver (1) quelle proportion des noms aura disparu après r générations ; et (2) combien de personnes porteront le même nom". Dans la même année, suite à une requête de Galton, Watson prit le problème en main. Il publia ses premiers résultats sur un modèle un peu plus général [11], en ne s'arrêtant pas à cinq enfants, mais en généralisant le résultat à d enfants, où d est un entier tellement grand qu'on serait certain de ne pas en avoir plus. Depuis, cet objet mathématique a été encore plus généralisé en ne limitant plus le nombre d'enfants mais en le soumettant simplement à une loi de probabilité. Étant donné que ce modèle est à l'origine basé sur un arbre généalogique (ne contenant que les mâles), on utilisera certains termes de généalogie. Un arbre de Galton-Watson est :

1. un graphe non orienté, acyclique¹, connexe et hiérarchique (avec différents niveaux spécifiques),
2. possédant un unique plus haut sommet appelé *racine*,
3. où chaque sommet (appelé *individu*) est relié à un sommet du niveau au-dessus (à l'exception de la racine), appelé son *parent* et à potentiellement d'autres sommets un niveau en-dessous (appelés ses *enfants*). Le niveau où se trouve un individu est appelé sa *génération*.

La caractéristique principale des arbres de Galton-Watson est que le nombre d'enfants d'un individu est aléatoire et que chaque individu a un nombre d'enfants indépendant mais identiquement distribué des nombres d'enfants des autres individus (même s'ils ont des liens de parentés).

Plus formellement, soit μ une loi de moyenne m finie, caractérisant le nombre d'enfants d'un individu et soit $(Z_i^{(n)})_{i,n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de distribution μ . $f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ désignera leur fonction génératrice.

1. On part d'un individu appelé la racine (ou le 0) ;
2. Il a $Z_1^{(0)}$ enfants qui formeront la première génération,

1. Qui ne contient pas de cycles.

On procède par récurrence sur $n \geq 1$ pour définir les générations successives :

1. Chaque enfant x_i de la nième génération a $Z_i^{(n)}$ enfants ;
2. les enfants de la n-ième génération formeront la (n+1)-ième génération.

Cette construction nous donne un arbre *aléatoire* qui caractérisé par μ et aussi par f .

D'autre part, lorsque $p_0 \neq 0$, il est possible qu'un individu n'ait pas d'enfant. On appellera ce dernier une *feuille* et le modèle sera plus spécifiquement appelé un arbre de Galton-Watson *avec feuilles*. C'est ce modèle spécifique qui nous intéressera dans le chapitre suivant.

Remarque 1.4.1. *Ces arbres modélisent un arbre généalogique : on ne tient pas compte des possibles chevauchements entre les générations, c'est-à-dire que chaque individu d'une même génération naît en même temps et a ses enfants en même temps.*

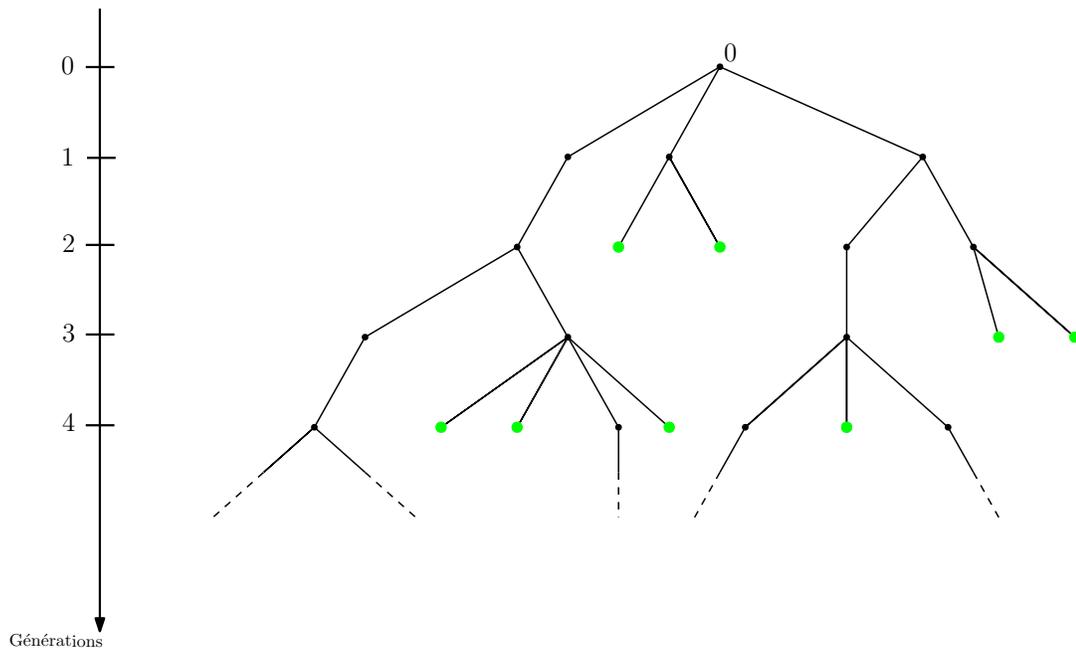


Figure 1.3 – L'arbre de Galton-Watson avec feuilles (points verts).

À présent, nous allons regarder les différentes caractéristiques de ce type d'arbre. Notre premier intérêt sera de savoir quelle sera la hauteur H de cet arbre. Pour cela,

posons pour un entier $n \geq 0$, Z_n la variable aléatoire représentant le nombre d'individus de la génération n . On a donc $Z_0 = 1, Z_1 = Z_1^{(0)}$, et pour $n \geq 2$,

$$Z_n = \sum_{k=0}^{Z_{n-1}} Z_k^{(n-1)}.$$

La hauteur est donnée par la formule $H := \inf\{n \in \mathbb{N} | Z_n = 0\}$.

À présent, regardons ensemble la loi de cette variable Z_n .

Proposition 1.4.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

- 1) $G_{Z_n} = f^{\circ n}$, où $f^{\circ n} := \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{n \text{ fois}}$,
- 2) $\mathbf{E}[Z_n] = m^n$,

Démonstration. Dans les deux cas, on procède par récurrence sur n .

Cas 1) .

Initialisation : pour $n = 0$,

$$G_{Z_0} = id = f^{\circ 0}.$$

Hypothèse de récurrence (h1) : supposons la propriété 1) vraie pour un certain $(n-1) \in \mathbb{N}$, alors

$$G_{Z_n}(t) \stackrel{1.3.6(1)}{=} G_{Z_{n-1}} \circ f \stackrel{(h1)}{=} f^{\circ n-1} \circ f = f^{\circ n}$$

La propriété 1) sera aussi vraie pour n .

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cas 2) .

Initialisation : pour $n = 0$,

$$\mathbf{E}[Z_0] = 1 = m^0.$$

Hypothèse de récurrence (h2) : supposons la propriété 2) vraie pour un certain

$(n - 1) \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbf{E}[Z_n] \stackrel{1.3.6(2)}{=} \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{Z_{n-1}} Z_k^{(n-1)}\right] = \mathbf{E}[Z_{n-1}]\mathbf{E}[Z_k^{(n-1)}] \stackrel{(h2)}{=} m^{n-1}m = m^n.$$

La propriété 2) sera aussi vraie pour n .

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

On obtient ainsi une borne supérieure de la queue de la hauteur en utilisant l'inégalité de Markov :

$$\mathbf{P}[H \geq n] = \mathbf{P}[Z_n > 0] = \mathbf{P}[Z_n \geq 1] \leq \mathbf{E}[Z_n] = m^n. \quad (1.4.3)$$

On dit qu'il y a *extinction* de l'arbre lorsqu'il n'y a plus d'individus à une génération donnée, c'est-à-dire lorsqu'on a l'évènement

$$\mathbf{Ex} := \{\exists n \geq 0 | Z_n = 0\} = \{\exists n \geq 0 | H = n\}$$

Par définition de Z_n , si $Z_n = 0$ pour un certain n , alors nécessairement $Z_{n+k} = 0$ pour tout k positif et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$. D'autre part, si $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$, étant donné que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une suite à valeur dans les entiers, alors forcément $Z_n = 0$ pour un certain entier naturel n et on a extinction. Ainsi, $\mathbf{Ex} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0\}$.

À présent, notons par $q := \mathbf{P}[\mathbf{Ex}]$, la probabilité qu'il y ait extinction. On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.4.4. *La probabilité d'extinction de l'arbre est donnée par le plus petit point fixe de f sur $[0; 1]$.*

Démonstration. Remarquons que $\{Z_0 = 0\} \subset \{Z_1 = 0\} \subset \dots \subset \{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} \subset \dots$

On obtient alors par le théorème de convergence monotone (TCM) :

$$\begin{aligned}
 q &= \mathbf{P}[\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0] \\
 &\stackrel{(TCM)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[Z_n = 0] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_{Z_n}(0) \\
 &\stackrel{1.3.6(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(0) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(0),
 \end{aligned}$$

et cette limite existe car f est convexe. En utilisant la continuité de f , on obtient

$$f(q) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{\circ n}(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ(n+1)}(0) = q,$$

ce qui implique que q est un point fixe de f . Le fait d'avoir construit notre point fixe en partant de 0 nous assure directement que q est le plus petit des points fixes : en effet, si $u \in [0; 1]$ est un point fixe de f , alors on a $0 \leq u$ donc $f(0) \leq f(u) = u$, $f(f(0)) \leq f(f(u)) = u, \dots$

D'où à la limite, $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(u) = u$ □

Remarque 1.4.5. Rappelons que $m = f'(1)$. On peut distinguer trois phases :

1. *Le cas sous-critique : $m < 1$. $f(1) = 1$ Par la convexité de f (voir remarque 1.3.2) entraîne que $f(x) > x, x \in [0; 1[$ (entre autres, on a que $p_0 = \mathbf{P}[Z_1 = 0] = 1 - \mathbf{P}[Z_1 \geq 1] \geq 1 - \mathbf{E}[Z_1] \geq 1 - m > 0$). Ainsi, $q = 1$ est l'unique point fixe de f et l'arbre sera fini.*
2. *Le cas surcritique : $m > 1$.*
 - (a) *Si $p_0 > 0$, alors $f(x) < x$ au voisinage de 1 et $f(0) > 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaire (appliqué à $f(x) - x$), il y a un $x^* \in (0; 1)$ tel que $f(x^*) = x^*$ et donc $q < 1$. On a une probabilité positive d'avoir un arbre infini.*

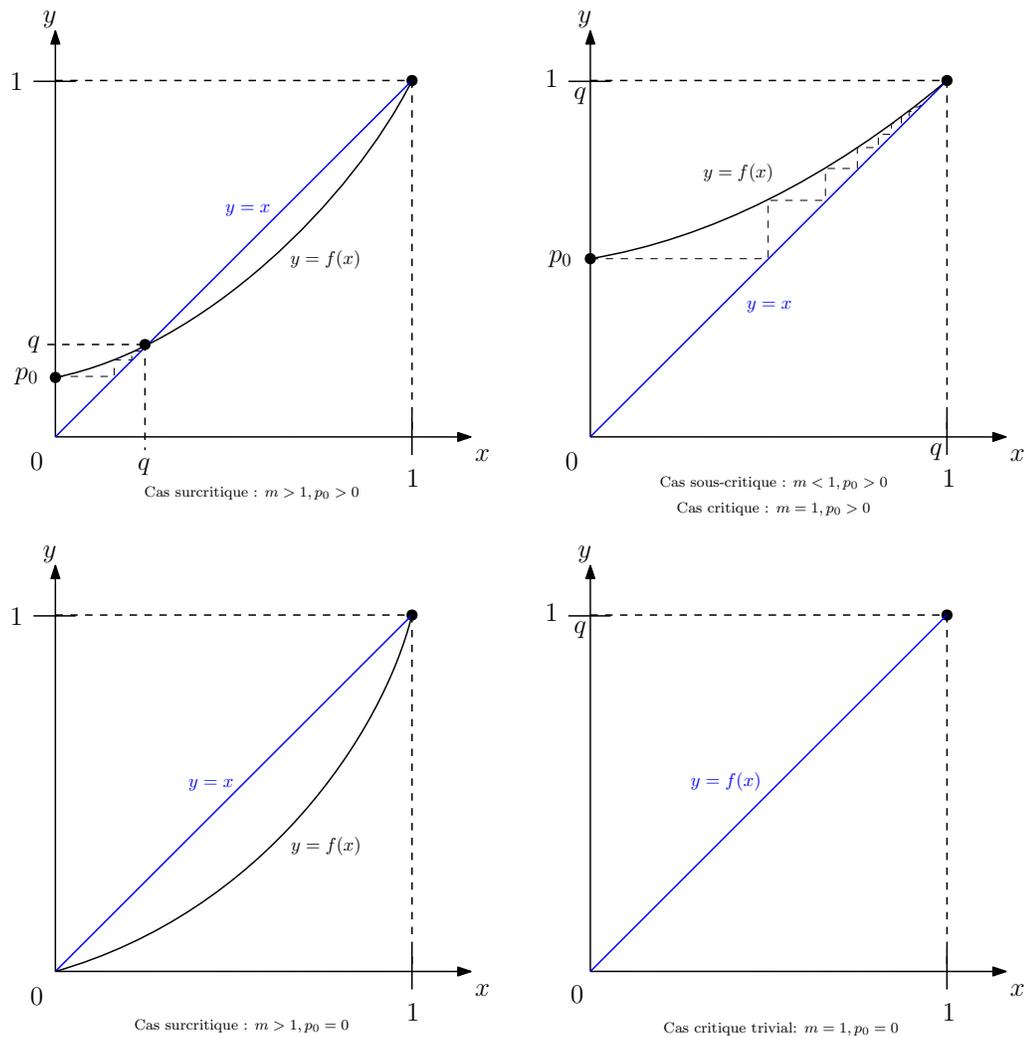


Figure 1.4 – Les différentes fonctions caractéristiques pour un arbre de Galton-Watson.

(b) si $p_0 = 0$, alors $q = 0$ est le plus petit point fixe. On aura forcément un arbre infini.

3. Le cas critique : $m = 1$.

(a) Si f est la fonction identité (i.e. $f(x) = x$ pour tout x), alors chaque individu aura exactement un enfant et entres autres, $p_0 = 0$. Donc, $q = 0$ est le plus petit point fixe et l'arbre sera infini. Ce sous-cas sera appelé le cas trivial puisqu'on obtiendra un arbre déterminé : une ligne.

(b) Sinon, $p_0 = f(0)$ est strictement positif et donc $f(x) > x, x \in [0; 1[$ comme

dans le cas sous-critique. L'arbre sera alors fini.

Nous finissons cette section par un petit lemme qu'on peut remarquer sur la figure 1.4 et qui nous sera utile plus tard.

Lemme 1.4.6. *Dans le cas surcritique, on a toujours $f'(q) < 1$.*

Démonstration. Nous savons que $h(x) := f(x) - x$ est une fonction convexe sur $[0; 1)$ (car $h'' = f'' \geq 0$).

De plus, on a $h(q) = 0$ et $h(1) = 0$, avec $q < 1$ comme on est dans le cas surcritique. Par le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in (q; 1)$ tel que $h'(c) = 0$. Par convexité, $h'(q) \leq h'(c) = 0$, avec $h'(q) = 0$ si et seulement si h' est identiquement nulle, ce qui est impossible sauf dans le cas trivial. D'où $h'(q) < 0$ et donc $f'(q) < 1$. \square

1.5 Somme de variables aléatoires i.i.d.

Les sommes de variables aléatoires i.i.d. sont des éléments cruciaux dans la compréhension des MAMA. Nous verrons deux exemples montrant leur indispensabilité : le premier est un lien avec les arbres de Galton-Watson et le second est en rapport avec les variables dites à queues *lourdes*.

1.5.1 Arbre de Galton-Watson et somme de variables aléatoires i.i.d.

Le premier résultat que nous allons énoncer donne une petite ébauche de l'omniprésence des sommes de variables aléatoire i.i.d. dans nos modèles. Ce résultat est le théorème de Dwass (voir [6]). Il fait le lien entre le volume d'un arbre de Galton-Watson fini presque sûrement et une somme de variable aléatoire i.i.d.

Théorème 1.5.1 (Théorème de Dwass). *Soit T un arbre de Galton-Watson de distribution W , avec $p_0 \neq 0$ et $m := E[W] \leq 1$ (l'arbre est donc fini presque sûrement). De plus, soit V le volume de cet arbre, c'est-à-dire le nombre total d'individu.*

Alors, on a

$$P[V = k] = \frac{1}{k} P[W_1 + \dots + W_k = k - 1],$$

où W_1, \dots, W_k sont des copies i.i.d. de W .

Démonstration. Nous reprenons une preuve faite par Dominic Yeo ([25]) qui est assez intéressante et surtout plus simple que celle effectuée par Dwass.

Comme motivation, remarquons que si on a k individus dans l'arbre, alors, mis à part la racine, chacun d'entre eux est nécessairement l'enfant d'un individu. En notant W_1, \dots, W_k les nombres d'enfants des k individus, on obtient donc l'évènement $E_k := \{W_1 + \dots + W_k = k - 1\}$. D'où, $\{V = k\} \subset E_k$.

En revanche, si pour un certain k on a E_k , cela n'implique pas que $V = k$. Pour mieux comprendre cela, nous allons définir notre arbre d'une manière équivalente.

Soit $(W_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de distribution W . On pose v_1 la racine. Elle a W_1 enfants qu'on notera de manière ordonnée v_2, \dots, v_{1+W_1} . Puis, v_2 a W_2 enfants notés $v_{W_1+2}, \dots, v_{W_1+W_2+1}$ et on continue ainsi de suite de manière récurrente jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'autres individus à considérer. La loi de l'arbre obtenu est évidemment équivalente à celle d'un arbre de Galton-Watson puisque chaque individu a toujours un nombre i.i.d. d'enfants. L'arbre de la figure 1.5 est donné par la suite $(W_i)_{i \geq 1} = (2; 2; 0; 0; 0; 2; 1; \dots)$. Cet arbre a 5 enfants puisque même si $W_7 = 2$, il n'existe pas de v_6, v_7, \dots

Cependant, remarquons que dans cet exemple, $W_1 + \dots + W_8 = 7$ et pourtant $V \neq 8$.

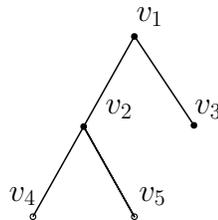


Figure 1.5 – Un arbre de Galton-Watson construit à partir d'un exemple de suite $(W_i)_{i \geq 1}$.

On peut facilement déduire de cette construction que

$$V = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid W_1 + \dots + W_k = k - 1\},$$

puisque au premier moment où on a $W_1 + \dots + W_k = k - 1$, cela signifie que chaque enfant de v_1, \dots, v_k est un des individus v_2, \dots, v_k et il n'y a donc plus d'autres individus à

considérer. En termes d'évènements, cela se traduit par

$$\{V = k\} = E_k \cap \{W_1 + \dots + W_j \geq j, \forall 1 \leq j \leq k-1\},$$

et par définition de probabilité conditionnelle, il ne nous reste qu'à montrer que

$$P[W_1 + \dots + W_j \geq j, \forall 1 \leq j \leq k-1 | E_k] = \frac{P[V = k]}{P[E_k]} = \frac{1}{k}.$$

Pour cela, notons que la distribution jointe de (W_1, \dots, W_k) est invariante par permutation des indices.

Soit C_n le groupe cyclique engendré par la permutation $\tau := (12\dots k)$. Nous allons montrer que sachant E_k , il existe une unique permutation cyclique $\sigma \in C_k$ des indices 1 à k qui permet d'avoir

$$W_{\sigma(1)} + \dots + W_{\sigma(j)} \geq j, \forall 1 \leq j \leq k-1. \quad (1.5.2)$$

Unicité.

Supposons qu'il en existe deux : $\sigma_1 = \tau^n, \sigma_2 = \tau^m \in C_k$, avec $0 \leq n < m \leq k-1$, qui satisfont 1.5.2.

Alors

$$W_{\sigma_1(1)} + \dots + W_{\sigma_1(m-n)} = W_{n+1} + \dots + W_m \geq m-n$$

et

$$W_{\sigma_2(1)} + \dots + W_{\sigma_2(k-(m-n))} = W_{m+1} + \dots + W_k + W_1 + \dots + W_n \geq k - (m-n)$$

d'où $W_1 + \dots + W_k \geq k$ ce qui contredit l'hypothèse qu'on a E_k .

Existence.

Posons $n := \min(\arg \min_{j \in \{1, \dots, k\}} (W_1 + \dots + W_j - j))$ Alors, $\sigma = \tau^n$ satisfait 1.5.2 :

pour $j \in \{1; \dots; k - n\}$,

$$\begin{aligned} W_{\sigma(1)} + \dots + W_{\sigma(j)} &= W_{n+1} + \dots + W_{j+n} \\ &= (W_1 + \dots + W_{j+n} - (j+n)) - (W_1 + \dots + W_n - n) + j \\ &\geq j \text{ (par définition de } n) \end{aligned}$$

pour $j \in \{k - n + 1; \dots; k - 1\}$ ($= \emptyset$ si $n = 1$)

$$\begin{aligned} W_{\sigma(1)} + \dots + W_{\sigma(j)} &= W_{n+1} + \dots + W_k + W_1 + \dots + W_{(j+n)-k} \\ &= (W_1 + \dots + W_k - k) - (W_1 + \dots + W_n - n) + (W_1 + \dots + W_{(j+n)-k} - ((j+n) - k)) + j \\ &> j - 1 \text{ (par définition de } n \text{ et car } (j+n) - k < (k+n) - k = n). \end{aligned}$$

Quelle que soit la permutation des indices, il y aura une unique permutation cyclique dans C_k qui permet d'obtenir 1.5.2. De plus, chaque permutation est équiprobable. On a donc une probabilité de $\frac{1}{k}$ d'obtenir un ordre qui nous donne $W_1 + \dots + W_j \geq j, \forall 1 \leq j \leq k - 1$. \square

1.5.2 Principe des grandes déviations

Nous savons par la loi forte des grands nombres que pour une suite de variables aléatoires i.i.d. $(X_i)_{i \geq 1}$ de moyenne μ finie, la moyenne empirique $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ de n de ces variables converge presque sûrement vers μ . Elle converge donc aussi en probabilité : $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - E[X]| > \varepsilon) = 0$.

Mais, à quelle vitesse cette probabilité tend-elle vers 0 ? Le principe des grandes déviations donne une réponse à cette question dans un cas particulier.

Théorème 1.5.3 (Principe des grandes déviations). *Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives i.i.d. d'espérance $\mu < \infty$ et soit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Si la fonction génératrice des moments $\phi(\theta) = E[e^{\theta X_1}]$ est finie pour un certain $\theta > 0$, alors pour tout $a > \mu$, $P[S_n > na]$ décroît exponentiellement rapidement.*

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned} P[S_n \geq na] &= P[e^{\theta S_n} \geq e^{\theta na}] \\ &\leq \frac{E[e^{\theta S_n}]}{e^{\theta na}} \\ &= E[e^{\theta(S_n - na)}] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{\theta(X_i - a)}\right] \stackrel{i.i.d.}{=} E[e^{\theta(X_1 - a)}]^n \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $r := E[e^{\theta(X_1 - a)}]$ est plus petit que 1.

Par la loi forte des grands nombres, $S_n/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ presque sûrement. Par définition de cette limite, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, S_n/n - \mu < a - \mu$ avec probabilité 1 et cela est équivalent à $S_n - na < 0$ presque sûrement. Ainsi, pour $n > N$,

$$1 > E[e^{\theta(S_n - na)}] = E[e^{\theta(X_1 - a)}]^n = r^n,$$

d'où $r < 1$, ce qui termine la preuve. □

Remarque 1.5.4. *Le principe des grandes déviations permet aussi d'identifier l'ordre de grandeur de cette décroissance exponentielle donné par $\gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(P[S_n \geq na])}{n}$. Cependant, nous ne nous attardons pas sur ce point puisque cela ne nous sera pas utile. Le lecteur pourra se référer à la section 1.9 de [5] pour plus de détails.*

1.5.3 Somme de variables aléatoires i.i.d. à queues lourdes

Le but de cette section est d'observer les différents comportements limites d'une somme de variables n'ayant pas de queues exponentielles. On dit que ces variables ont alors des queues *lourdes*.

Tout le long, on désignera par X une variable aléatoire réelle non négative et à queue lourde, $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même distribution que X et $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Nous connaissons déjà le comportement de S_n dans le cas où X a un second moment : le *théorème central limite* nous dit que $\frac{S_n - nE[X]}{\sqrt{n\text{Var}(X)}}$ converge en distribution vers

une loi $\mathcal{N}(0;1)$ et le *théorème de Donsker* montre que pour tout $T > 0$, le processus $(\frac{S_{\lfloor tn \rfloor} - \lfloor tn \rfloor E[X]}{\sqrt{n \text{Var}(X)}}, 0 \leq t \leq T)$ converge en distribution vers un processus brownien standard (voir section 7.6 de [5]).

Mais que se passe-t-il si X n'a pas de second moment ?

La caractéristique de la loi normale qui est sans doute la plus intéressante en tant que comportement limite est sa stabilité : elle est stable par linéarité, à un rééchelonnage et un recentrage près (voir définition 1.5.5 ci-dessous).

Définition 1.5.5 (Distribution stable). *Si la variable aléatoire X est non-dégénérée, on dit qu'elle a une distribution stable si, pour tout $k > 0$, il existe des constantes a_k et b_k telles que $(S_k - b_k)/a_k$ a la même loi que X .*

La stabilité est une propriété qu'on remarque très souvent lorsqu'on étudie des comportements limites. Le théorème suivant va nous confirmer le lien très fort qu'il y a entre ces lois stables et les sommes de variables aléatoires i.i.d. (voir théorème 7.15 de [5]).

Théorème 1.5.6. *Y est une limite non-dégénérée en loi de $(S_k - b_k)/a_k$ pour certaines constantes $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ si et seulement si Y a une loi stable.*

Nous voulons maintenant voir sous quelles conditions S_n pourrait converger en loi vers une loi stable.

Il s'avère que les lois stables sont décrites par quatre paramètres. L'un d'eux est généralement classé comme étant le plus important, on préférera alors l'expression de loi α -stable, où le paramètre central $\alpha \in (0; 2]$ est le paramètre de stabilité de la loi.

La définition suivante est équivalente à la précédente.

Définition 1.5.7. *Pour $\alpha \in (0; 2]$, on note S_α une variable aléatoire dite α -stable définie par sa fonction caractéristique :*

$$E[e^{itS_\alpha}] = e^{it\mu - |ct|^\alpha(1 + \beta \text{sgn}(t)w_\alpha(t))},$$

avec $-1 \leq \beta \leq 1$, $c, \mu \in \mathbb{R}$, $\text{sgn}(t)$ la fonction signe et

$$w_\alpha(t) = \begin{cases} -\tan(\pi\alpha/2) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ (2/\pi) \ln|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

β est le paramètre d'asymétrie. Quand $\beta = 1$ (respectivement -1), on dit que la loi stable est complètement asymétrique positive (respectivement négative). Dans le cas où $\alpha > 1$, le paramètre μ est la moyenne. Si $\beta = \mu = 0$, la loi est dite symétrique. Enfin, la constante c représente un paramètre d'échelle.

La figure 1.6 nous montre des graphes de différentes lois α -stables.

Comme dit précédemment, la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est un exemple de loi stable. C'est exactement la loi 2-stable avec pour moyenne μ et variance $\sigma^2 = 2c^2$.

Afin d'énoncer le critère de convergence, nous avons tout d'abord besoin de définir une certaine classe de fonction.

Définition 1.5.8 (Variation lente). *On dit qu'une fonction $L(x)$ est à variation lente si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(Kx)}{L(x)} = 1 \text{ pour tout } K > 0.$$

Comme exemple, la fonction logarithme est à variation lente tandis que les fonctions x^ε ne le sont pas quelque soit $\varepsilon > 0$. Intuitivement, il s'agit d'une classe des fonctions qui n'influenceront pas "significativement" les comportements asymptotiques des autres fonctions.

Nous allons maintenant énoncer un critère essentiel permettant de savoir si on a convergence vers une loi stable (voir théorème 7.7 de [5]).

Théorème 1.5.9. *Si on a les deux conditions suivantes :*

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} P[X_1 > x] / P[|X_1| > x]$ existe,
2. $P[|X_1| > x] = x^{-\alpha} L(x)$,

avec $L(x)$ une fonction à variation lente et $\alpha < 2$, alors $(S_n - b_n)/a_n$ converge en distribution vers une loi α -stable, avec

$$a_n = \inf\{x \in \mathbb{R} | P[|X_1| > x] \leq 1/n\} \quad \text{et} \quad b_n = nE[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}}]$$

Remarque 1.5.10. *La deuxième condition est nécessaire pour avoir convergence vers une loi α -stable avec $\alpha \neq 2$.*

Enfin, que se passe-t-il au niveau des processus limites ? On va commencer par définir le processus limite associé aux lois stables.

Définition 1.5.11 (Processus de Lévy). *Un processus càdlàg (continu à droite et admettant une limite à gauche) $(L_t, 0 \leq t \leq T)$ est appelé un processus de Lévy α -stable si*

1. $L_0 = 0$ presque sûrement,
2. les accroissements sont indépendants,
3. $L_t - L_s$ est de même loi que $(t - s)^{1/\alpha} S_\alpha$, où S_α est une loi α -stable.

Typiquement, on distingue deux cas si $P[X \geq x] = x^{-\alpha} L(x)$, avec L une fonction à variation lente : $\alpha < 1$ et $\alpha \in (1; 2)$. Si $\alpha < 1$,

$$S_t^{(n)} := \frac{S_{[tn]}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} t^{1/\alpha} S_\alpha,$$

et si $\alpha \in (1; 2)$,

$$S_t^{(n)} := \frac{S_{[tn]} - tnE[X]}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} t^{1/\alpha} S_\alpha$$

Dans les deux cas, le processus $(S_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T)$ converge dans l'espace de Skorokhod vers un processus de Lévy α -stable (voir chapitre 3 de [8]).

Remarque 1.5.12. *Si la loi stable de la définition du processus de Lévy est complètement asymétrique, on en dira de même pour le processus de Lévy.*

Si le processus de Lévy est croissant, on l'appellera un subordonateur stable (voir figure 1.7).

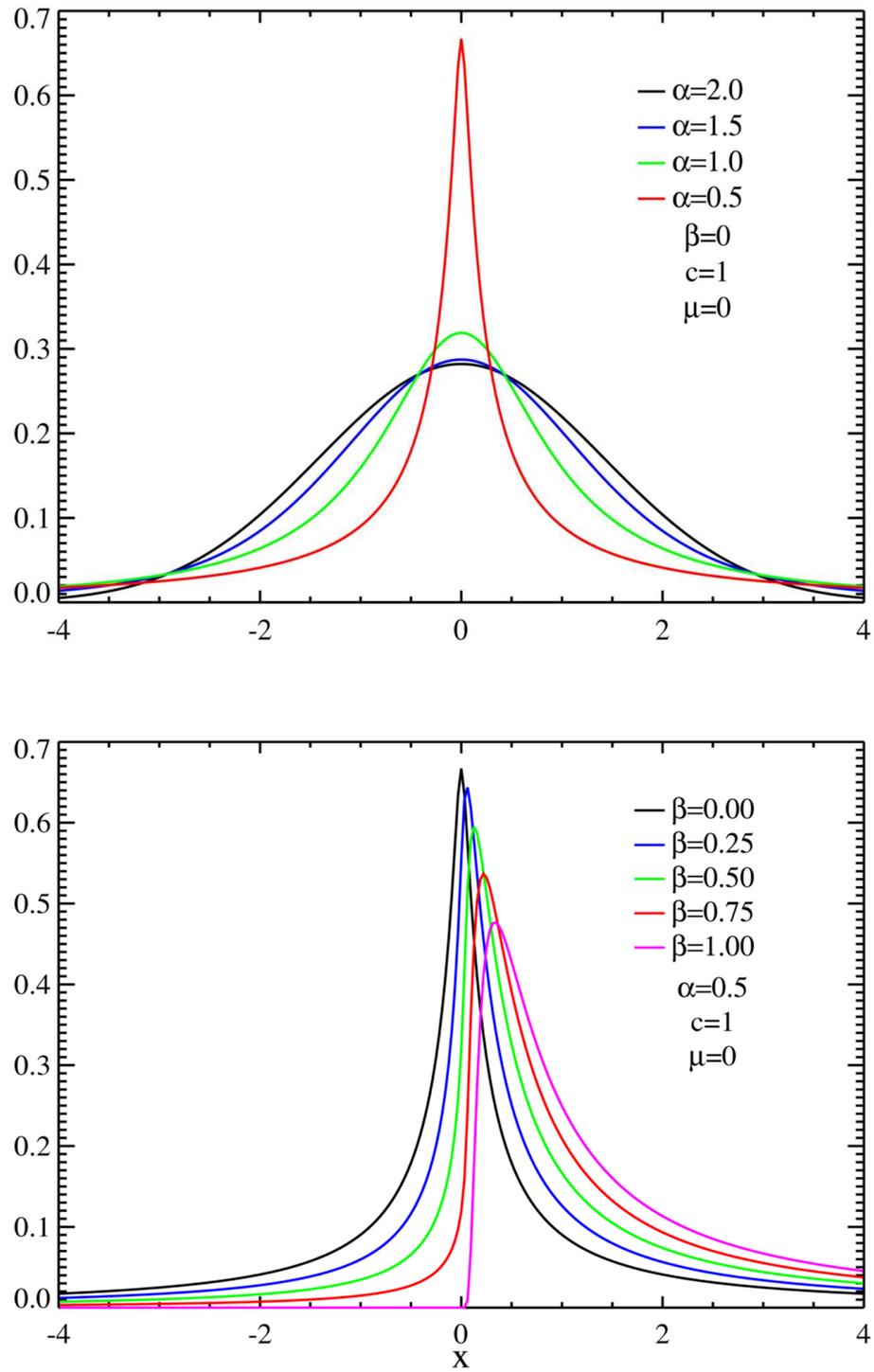


Figure 1.6 – Fonctions de densité de différentes lois α -stables (voir 1.5.7) en fonction de leurs paramètres. Images prises de [26] et [27].

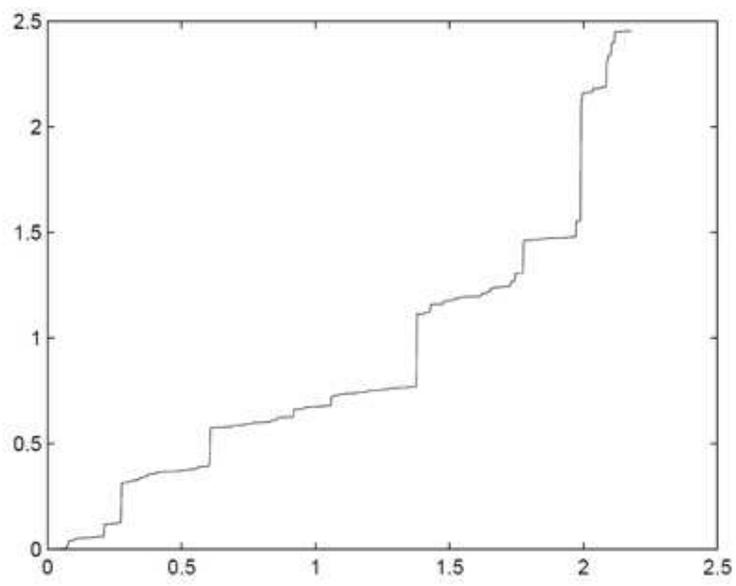


Figure 1.7 – Fonction de densité d'un subordonateur stable (voir 1.5.12). Image prise de [28].

CHAPITRE 2

LES MODÈLES

Ce chapitre sera consacré à la présentation des différents modèles. Dans un premier temps, nous présenterons le fameux modèle de piège de Bouchaud, dans sa version la plus simple. Ce modèle est la référence typique du phénomène de ralentissement. Ce ralentissement est causé par des pièges, définis de manière explicite, et nous verrons les principaux résultats que ce phénomène entraîne. En particulier, nous pourrions constater des comportements limites stables.

Ensuite, nous verrons trois différents modèles de MAMA. Dans ces modèles, les pièges ne seront pas explicitement définis, mais il y aura plutôt une certaine structure dans l'environnement qui agira comme un piège pour la marche. Une fois qu'on aura établi cette "structure de piège", on pourra dès lors voir les principaux comportements que l'on espère retrouver dans ces modèles de MAMA, à savoir par exemple des limites stables.

Ces modèles seront :

- la MAMA sur \mathbb{Z} . Ce modèle, introduit dans les années 1960s et étudié dans les années 1970s, est particulier dû au fait que la structure de piège est très implicite par rapport aux autres modèles de MAMA que nous présenterons.
- la marche aléatoire sur une percolation de \mathbb{Z}^d . C'est un modèle où la recherche y est très active. La difficulté de ce modèle multidimensionnel entraîne qu'il reste encore beaucoup de conjectures non démontrées (voir problèmes ouverts de la section 4 dans [2]).
- la marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson. Ce modèle a été principalement étudié dans le but de comprendre le modèle plus difficile qu'est la MAMA sur \mathbb{Z}_d . Malgré qu'il soit considéré moins difficile, de nombreuses questions restent encore ouvertes (voir problèmes ouverts de la section 3 dans [2]).

2.1 Modèle de piège de Bouchaud unidirectionnel sur \mathbb{N}

Les résultats de cette section ont été pris des articles [2] et [23]. Soit $(\xi_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On définit alors le modèle de piège de Bouchaud unidirectionnel sur \mathbb{N} comme étant un processus de Markov à temps continu $(X_t)_{t \geq 0}$ avec espace d'états \mathbb{N} tel que X_t reste sur un site i un temps aléatoire $\xi_i e_i$ de loi exponentielle de moyenne ξ_i , puis passe à son voisin de droite. La suite $(e_i)_{i \geq 0}$ est i.i.d. de loi exponentielle de moyenne 1. Intuitivement, on peut voir ce processus comme une marche unidirectionnelle qui se retrouve piégé à chaque site qu'elle rencontre. ξ_i représente la profondeur du piège qu'elle rencontre au site i . L'espace de probabilité associé est $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Remarque 2.1.1. Pour $\omega \in \Omega$, le processus $X_t(\omega)$ est une fonction étagée càdlàg (continue à droite et admet une limite à gauche). Voir figure 2.1

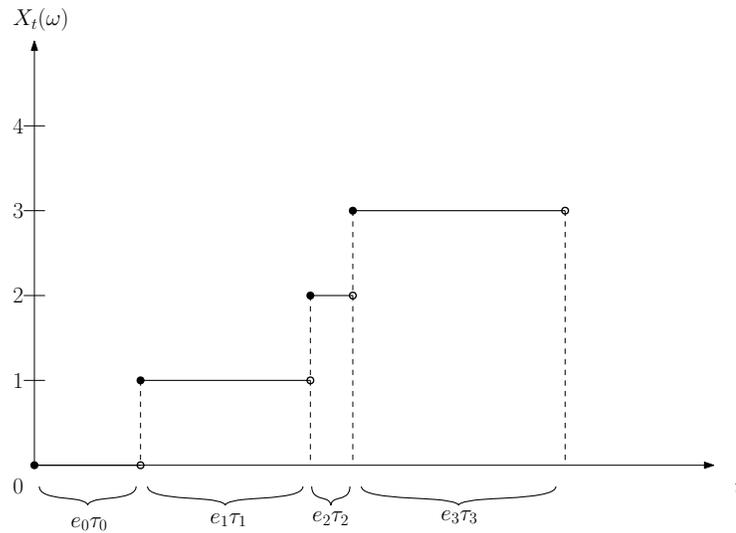


Figure 2.1 – Le modèle de piège de Bouchaud unidirectionnel sur \mathbb{N} .

Ce modèle est assez simple puisqu'on peut le ramener à une somme de variables i.i.d. : en effet, soit $S(n)$ le temps qu'il faut pour atteindre le site n . Cette quantité peut être définie comme

$$S(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i e_i.$$

Posons $X_t = S^{-1}(t)$, pour tout $t \geq 0$, où on définit l'inverse généralisé d'une fonction croissante f par $f^{-1}(t) := \inf\{u \geq 0 | f(u) > t\}$. Par des arguments d'inversions, on pourra alors trouver les comportements limites de X_t grace à ceux de $S(n)$: il suffit de poser $n = S^{-1}(t) = X_t$. Cela est possible car $X_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. De plus, $X_t \rightarrow \infty \iff t \rightarrow \infty$. Le principal acteur qui influence la marche est bien sûr la profondeur des pièges. On notera ξ (respectivement e) une variable de même loi que les ξ_i (respectivement e_i). Deux principaux cas se présentent.

2.1.1 Cas $\mathbf{E}[\xi^2] < \infty$

C'est le cas le plus trivial. Les pièges n'affecte pas beaucoup la marche. Pour le voir, on peut utiliser la loi des grands nombres afin de déterminer la vitesse de notre marche et aussi obtenir un théorème central limite. La vitesse est considérée comme au sens physique de vitesse moyenne de la particule. Elle est définie par :

$$v := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t}. \quad (2.1.2)$$

Par la loi des grands nombres, on a une vitesse *déterminée* presque sûrement :

$$p.s., \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{n} = \mathbf{E}[\xi e] \text{ et donc } v := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \lim_{X_t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} \stackrel{n=X_t}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S(n)} = \frac{1}{\mathbf{E}[\xi e]}. \quad (2.1.3)$$

De même, on peut utiliser le théorème central limite sur $S(n)$ et les même arguments d'inversions pour montrer que

$$p.s., \frac{S(n) - nv^{-1}}{\text{Var}(\xi e)\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0;1) \text{ et } \frac{X_t - nv}{v^{3/2}\text{Var}(\xi e)\sqrt{t}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0;1) \quad (2.1.4)$$

On obtient aussi un processus limite gaussien par le théorème de Donsker (voir ??) : pour tout $T \geq 0$ les processus

$$(S_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T) := \left(\frac{S(\lfloor tn \rfloor) - tn/v}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq T \right)$$

et

$$(X_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T) := \left(\frac{X_{tn} - vtn}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq T \right)$$

convergent tous les deux vers des mouvements browniens quand n tend vers l'infini, dans la topologie de Skorohod.

2.1.2 Cas $E[\xi^2] = \infty$

Les effets des pièges se font sentir : on a désormais des comportements limites non-Gaussiens.

Supposons qu'il existe un réel $\alpha \in (0; 2)$ tel que $\mathbf{P}[\xi \geq t] \sim t^{-\alpha}$.

2.1.2.1 Sous-cas $\alpha > 1$

On a alors toujours une espérance finie, ce qui maintient la loi des grands nombres : la vitesse demeure positive telle qu'en 2.1.3. Cependant, les variations de la marche ne sont plus les mêmes.

$$\frac{X_t - vt}{t^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} -v^{1+1/\alpha} S_\alpha^{ca},$$

où S_α^{ca} est une variable aléatoire stable, complètement asymétrique et de moyenne nulle (voir section 6.1.1 de [2] pour plus de précision sur ce type de variable).

De plus, le processus rééchélonné

$$(X_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T) := \left(\frac{X_{tn} - vtn}{n^{1/\alpha}}, 0 \leq t \leq T \right)$$

converge en loi vers un processus $(-v^{1+1/\alpha} S_t, 0 \leq t \leq T)$, avec S_t un processus α -stable asymétrique de Lévy (voir section 6.2.1 de [2]).

1. Lorsqu'on parle de fonction, $f(x) \sim g(x)$ signifie que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$

2.1.2.2 Sous-cas $\alpha < 1$

Cette fois-ci, la vitesse devient nulle puisque $\mathbf{E}[\xi] = \infty$. Il nous faut rééchelonné la limite de X_t à l'ordre de t^α :

$$\frac{X_t}{t^\alpha} \xrightarrow{(d)} (S_\alpha^{ca})^{-\alpha},$$

où S_α^{ca} est une variable aléatoire complètement asymétrique positive (voir section 6.1.1 de [2]).

Le processus

$$(X_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T) := \left(\frac{X_{tn}}{n^\alpha}, 0 \leq t \leq T \right)$$

converge faiblement vers $(Z_t, 0 \leq t \leq T)$, où Z_t est l'inverse d'un α -stable subordonateur (voir section 6.2.1 de [2]).

Petit bilan des résultats qu'on aimerait obtenir :

- une vitesse positive, mais qui devient éventuellement nulle ; c'est le phénomène de ralentissement, typique d'une présence de structure de piège ;
- des comportements limites stables, avec des limites gaussiennes dans un certain régime où la structure de piège n'aurait pas trop d'influence sur la marche.

Voyons maintenant cela dans nos modèles de MAMA.

2.2 Marche aléatoire en environnement aléatoire sur \mathbb{Z}

Ce modèle a été introduit dans les années soixante pour modéliser la réplication de l'ADN. Il fait penser à une marche biaisée sur \mathbb{Z} à laquelle on a effectué une perturbation des probabilités des transitions.

2.2.1 Définition du modèle

Soit $\omega := (\omega_i, i \in \mathbb{Z})$ une famille de variables aléatoires i.i.d. prenant des valeurs dans $(0;1)$, définie sur un ensemble Ω , ce qui servira d'aléa pour l'environnement. On note P la distribution de ω et E l'espérance correspondante. Conditionnant sur ω (c'est-à-dire

choisissant un environnement), on définit la marche aléatoire $(X_n, n \geq 0)$ comme étant une marche au plus proche voisin sur \mathbb{Z} avec probabilité de transition donnée par ω : $X := (X_n, n \geq 0)$ est la chaîne de Markov telle que $X_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$P^\omega[X_{n+1} = k+1 | X_n = k] = \omega_x = 1 - P^\omega[X_{n-1} = k+1 | X_n = k], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

P^ω est la loi de X sachant ω , E^ω l'espérance correspondante. On notera aussi \mathbb{P} la loi jointe de (ω, X) , aussi appelé la loi générale, et \mathbb{E} l'espérance correspondante.

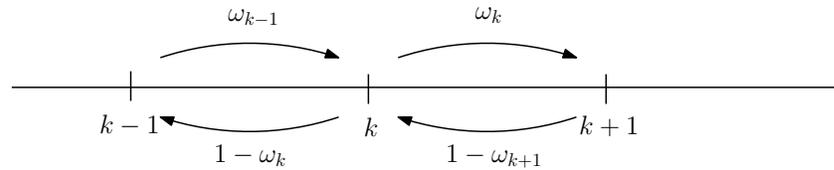


Figure 2.2 – Probabilités de transition sur la MAMA sur \mathbb{Z}

2.2.2 Résultats

Une première intuition naïve serait de penser qu'à long terme, la marche visiterait une grande partie du milieu et que donc, moyennant le milieu, on obtiendrait un même comportement limite que celui d'une marche biaisée sur \mathbb{Z} , soit, que :

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\omega_0] - \mathbb{E}[1 - \omega_0] = \mathbb{E}[2\omega_0 - 1]. \quad (2.2.1)$$

Cette intuition ne sera pas sans mérite. Cependant, l'étude des MAMA est plus difficile parce qu'il faut justement prendre cet aléa de l'environnement en considération (et non le moyenné, ce qui est une modélisation plus simple mais moins précise du problème).

Ce sont plutôt les variables

$$\rho_i := \frac{1 - \omega_i}{\omega_i}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

qui vont jouer un rôle important dans cette MAMA. En effet, sa loi désignera si la marche est transiente ou récurrente, si elle a une vitesse positive ou non. Nous supposons que $\mathbb{E}[\ln \rho_0]$ est toujours bien définie (même si possiblement infinie).

Le théorème suivant nous donne le critère de transience et récurrence (voir théorème 1.7 de [21]).

Théorème 2.2.2 (Solomon, 1975). 1. Si $\mathbb{E}[\ln \rho_0] < 0$ (respectivement > 0), alors la marche est transiente et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \text{ (respectivement } -\infty) \quad \mathbb{P} - p.s..$$

2. Si $\mathbb{E}[\ln \rho_0] = 0$, alors la marche est récurrente et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty \quad \mathbb{P} - p.s..$$

Remarque 2.2.3. Une manière de montrer cette transience est de faire le lien avec le réseau électrique associé. Comme on a pu le voir dans 1.2.3, la transience et la récurrence sont reliées à la résistance (ou conductance) effective d'un point à l'infini. Lorsque cette résistance est infinie (et donc conductance 0), on a récurrence (le courant ne passe pas). On peut calculer cette résistance de la même manière qu'en 1.2.3 et voir qu'elle est reliée à l'espérance de $\ln \rho_0$.

Étant donné que notre intérêt est porté sur les marches transientes, on supposera pour la suite que $E[\ln \rho_0] < 0$ (le cas > 0 pourra être déduit par symétrie). On a donc transience vers $+\infty$ \mathbb{P} -presque sûrement.

Introduisons le temps d'arrêt

$$\Delta_n := \inf\{i \geq 0 | X_i = n\} < \infty \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

qui est le premier temps d'atteinte du point n . Le théorème suivant nous donne la vitesse de la marche (voir théorème 1.16 de [21]).

Théorème 2.2.4 (Solomon, 1975). Si $\mathbb{E}[\ln \rho_0] < 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{n} = v^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \quad \mathbb{P} - p.s.,$$

avec

$$v = \begin{cases} \frac{1 - \mathbb{E}[\rho_0]}{1 + \mathbb{E}[\rho_0]} & \text{si } \mathbb{E}[\rho_0] < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La partie intéressante de ce théorème est de constater qu'on peut avoir une transience vers $+\infty$ et toutefois avoir une vitesse nulle. C'est un phénomène typique aux modèles présentant des pièges.

De plus, remarquons face à ce dernier théorème que $\frac{1 - \rho_0}{1 + \rho_0} = 2\omega_0 - 1$. Afin de réconforter l'intuition erronée en 2.2.1, notons qu'il a été montré que v a le même signe que $\mathbb{E}[2\omega_0 - 1]$ et lui est strictement inférieur (par l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ sur $(0; +\infty)$) si ω_0 n'est pas dégénérée. On a donc presque sûrement une vitesse inférieure à celle de la marche dans le milieu homogène. Ceci appuie l'hypothèse qu'il y a bien un ralentissement provoqué par l'aléa de l'environnement, et donc la présence d'une structure de piège en dimension un.

2.2.3 Le ralentissement

Afin de comprendre la structure de piège présente dans ce modèle, nous allons utiliser une fonction aléatoire de l'environnement $V(n)$ qu'on appelle le potentiel.

$$V(n) := \begin{cases} \sum_{k=0}^n \ln \rho_k & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -\sum_{k=n}^0 \ln \rho_k & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

Cette fonction caractérise le parcours que doit empreinter la marche. Intuitivement, on peut imaginer que le marcheur se déplace sur la courbe de V et qu'il est plus enclin à descendre une pente plutôt qu'à la monter.

Étant donné que $\mathbb{E}[\ln \rho_i] < 0$, on a

$$P - p.s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = -\infty,$$

et donc le marcheur va se diriger vers $+\infty$. Le graphe de cette fonction met tout de suite en évidence la structure de piège (voir 2.3 ci-dessous).

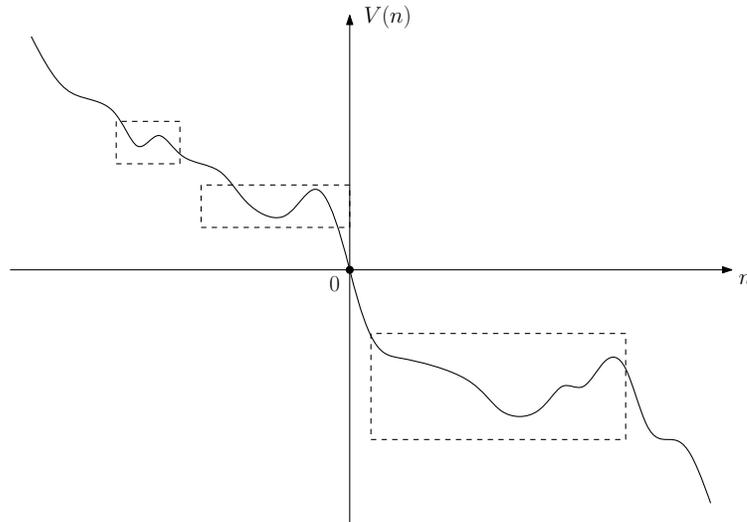


Figure 2.3 – Fonction potentiel (interpolée) avec les pièges encadrés en pointillé.

Le théorème suivant est tiré des articles [14] et [7]. Il nous donne les comportements limites de la marche selon différents régimes.

Théorème 2.2.5. *Supposons que*

1. $-\infty \leq \mathbb{E}[\ln \rho_0] < 0$,
2. *il existe un réel $\alpha \in (0; 2)$ tel que $\mathbb{E}[\rho_0^\alpha] = 1$ et $\mathbb{E}[\rho_0^\alpha \ln \rho_0] < \infty$,*
3. *la distribution de $\ln \rho_0$ est non-lattice (voir [2]),*

alors

- *si $\alpha \in (1; 2)$, on a*

$$\frac{\Delta_n - nv^{-1}}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} S_\alpha^{ca} \text{ et } \frac{X_n - nv}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} -v^{1+1/\alpha} S_\alpha^{ca},$$

- *si $\alpha \in (0; 1)$, alors*

$$\frac{\Delta_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{(d)} S_\alpha^{ca} \text{ et } \frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{(d)} (S_\alpha^{ca})^{-\alpha},$$

- si $\alpha > 2$,

$$\frac{\Delta_n - nv^{-1}}{n^{1/2}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0; 1) \text{ et } \frac{X_n - nv}{n^{1/2}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0; 1),$$

où S_α^{ca} est une loi stable complètement asymétrique d'index α .

2.3 Modèle de percolation surcritique sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$

Dans cette section, nous allons définir un autre exemple de MAMA : la marche aléatoire biaisée sur une percolation surcritique sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$, telle que décrite dans [9].

2.3.1 Description de la percolation

On considère l'ensemble des arêtes de longueur 1 sur \mathbb{Z}^d , défini par $E(\mathbb{Z}^d) := \{(x; y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \mid \|x - y\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{Z}^d .

Indépendamment pour chaque arête, on décidera de la garder avec probabilité $p \in (0; 1)$ ou de l'enlever avec probabilité $1 - p$. Formellement, on effectue une percolation de Bernoulli en choisissant une configuration aléatoire $\omega \in \Omega := \{0; 1\}^{E(\mathbb{Z}^d)}$, où chaque arête e a une probabilité p de donner $\omega(e) = 1$ (i.e. on conserve l'arête e), indépendamment des autres arêtes.

Il existe une probabilité de percolation critique, notée $p_c(d)$ (voir [12]), qui sépare deux types de percolations qu'on peut obtenir :

- lorsque $p < p_c(d)$, on a une percolation sous-critique, c'est-à-dire que presque sûrement le graphe obtenu ne contient que des clusters² finis ;
- lorsque $p > p_c(d)$, on a une percolation surcritique. Dans ce cas, on obtient presque sûrement un unique cluster infini (et d'autres clusters finis).

La théorie de la percolation a énormément d'applications. Elle permet de modéliser plusieurs phénomènes naturels par exemple la propagation d'un incendie dans une forêt.

2. Terme anglais pouvant être traduit par *amas*. Un cluster désigne tout simplement un sous-graphe connexe et maximal.

Une arête ouverte serait vue comme s'il y a deux arbres proches ce qui augmenterait les chances de propagations.

Nous nous intéressons au cas surcritique $p > p_c$. On note $K_\infty(\omega)$ le cluster infini de \mathbb{Z}^d . Avec probabilité positive, ce cluster contient x , pour $x \in \mathbb{Z}^d$. On note P_p la mesure correspondante à l'environnement conditionnellement à l'évènement que le cluster contienne 0.

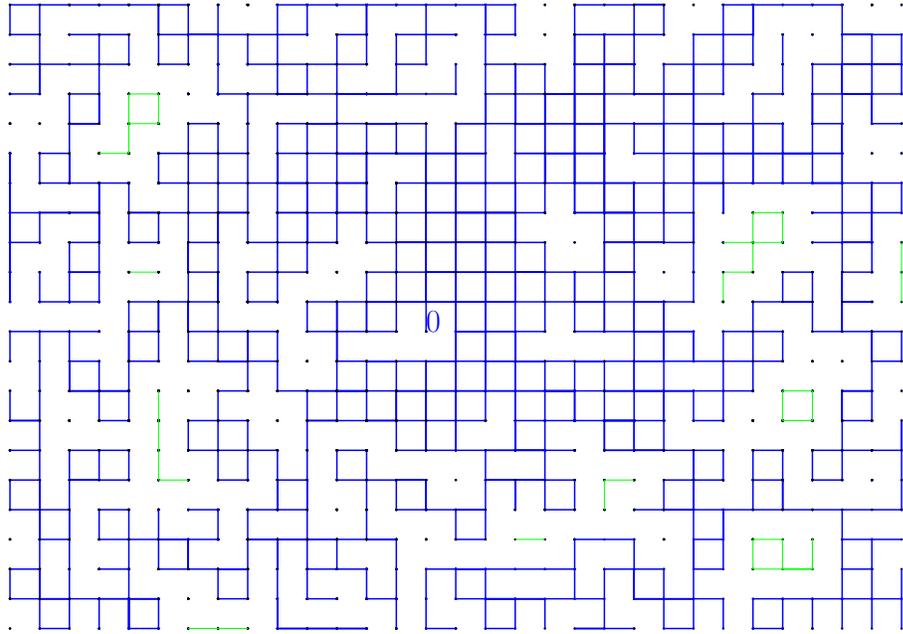


Figure 2.4 – Percolation surcritique sur \mathbb{Z}^2 avec les arêtes ouvertes du cluster infini (en bleu) et les autres arêtes ouvertes (en vert).

2.3.2 Définition de la marche

On note le biais³ $\ell \in \mathbb{R}^d$. Il dépendra de deux paramètres : sa force (norme) $\lambda > 0$ et sa direction $\vec{\ell} \in S^{d-1}$ dans la sphère unité (avec la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^d), de telle sorte que $\ell = \lambda \vec{\ell}$. Étant donné un environnement $\omega \in \Omega$, on considère la chaîne de Markov réversible (voir 1.1.1 pour la définition de chaîne de Markov réversible) sur \mathbb{Z}^d de loi P^ω , avec comme probabilités de transition $p^\omega(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{Z}^d$ définies par

3. Le biais est un paramètre qui influence significativement le déplacement d'une marche. Par exemple, dans le cas de la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , le biais est le paramètre donnant la probabilité d'avancer. Ainsi, avec un biais plus grand la marche aura plus tendance à avancer que reculer.

1. $X_0 = 0$,
2. $p^\omega(x, x) = 1$ si x n'est relié à aucun voisin dans ω et
3. $p^\omega(x, y) = \frac{c^\omega(x, y)}{\sum_{z \sim x} c^\omega(x, z)}$ si $x \sim y$,

où $x \sim y$ signifie que x et y sont adjacents. Les conductances (voir section 1.2) $c^\omega(x, y)$ sont données par

$$c^\omega(x, y) := \begin{cases} e^{(x+y) \cdot \ell} & \text{si } x \sim y \text{ et } \omega([x; y]) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure invariante associée π est définie par $\pi(x) := \sum_{z \sim x} c^\omega(x, z)$.

Enfin, on définit la loi générale de cette MAMA par le produit semi-direct $\mathbb{P}_p = P_p \times P^\omega$.

2.3.3 Motivation

Avant de passer aux autres comportements limites de cette marche, nous allons tenter d'expliquer par un simple exemple le phénomène de piège qui nous fait penser que cette MAMA se comporte comme le modèle de Bouchaud.

Supposons la configuration de l'environnement de la figure 2.5 ci-dessous.

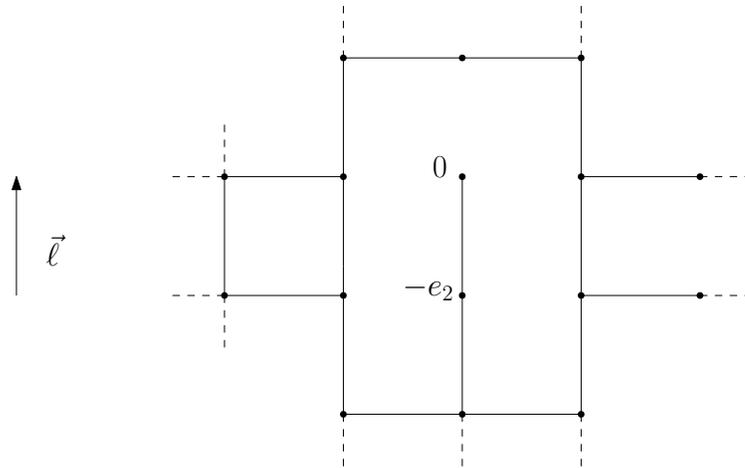


Figure 2.5 – Exemple de piège dans une percolation de \mathbb{Z}^2 .

On a $d = 2$ et $\vec{\ell} = \vec{e}_2$, où e_2 est le deuxième vecteur de la matrice identité dans \mathbb{R}^2 . De plus, une seule arête $e = [0; -e_2]$ est reliée à 0. La marche sera alors forcée de suivre cette

arête et se rendre au point $-e_2$. À cause du cluster infini, on est sûr que d'autres arêtes seront reliées au point $-e_2$. Un de ces chemins dirigerait sûrement la marche vers l'infini, cependant le biais a tendance à favoriser un déplacement dans une direction précise : celle qui retourne au point 0. Elle va alors perdre du temps, forcée à aller à contresens du biais à cause des "trous" dans l'environnement.

On peut donc constater qu'augmenter la force du biais ne va pas nécessairement accélérer la marche, mais bien au contraire, cela peut faire augmenter la force du piège et par la même occasion, ralentir la marche. Il nous tarde de confirmer cette affirmation.

Les résultats suivants sont tirés de l'article de Sznitman [23].

2.3.4 Faible biais

Il existe une force de transition $\lambda_w(d, p)$ telle que si $\lambda < \lambda_w(d, p)$, on a une vitesse positive déterminée

$$\mathbb{P} - p.s, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = v \in \mathbb{R}^d, v \cdot \ell > 0$$

et un théorème central limite fonctionnel : la suite de processus

$$(B_t^{(n)}, 0 \leq t \leq T) := \left(\frac{X_{[tn]} - [tn]v}{\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq T \right)$$

converge en distribution sur $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers un mouvement brownien de matrice de covariance non-dégénérée.

On obtient des comportements similaires à ceux du modèle de Bouchaud où ξ avait un second moment fini.

2.3.5 Biais fort

L'article de Sznitman mentionné précédemment a aussi montré que la vitesse devient nulle lorsque la force du biais est assez grande. Mais ce n'est que plus tard, dans [9], qu'il a été montré que la transition de vitesse strictement positive à nulle est *définitive*. En d'autres termes, il existe une force critique notée λ_c telle que si $\lambda < \lambda_c$, alors $v \cdot \ell > 0$ (on est alors dans le régime *ballistique*), et si $\lambda > \lambda_c$, alors $v = \vec{0}$ (c'est le régime *sous-*

ballistique).

Dans le cas sous-ballistique, il faut rééchelonner la marche à une fonction de λ (voir [9]) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log X_n}{\log n} = \frac{c_{d,p,\vec{\ell}}}{\lambda},$$

où $c_{d,p,\vec{\ell}} \in \mathbb{R}^d$ dépend de d , p et $\vec{\ell}$.

Comme vous pouvez le constater, il n'y a pas encore de résultats de convergences vers des lois stables comme dans le modèle unidimensionnel. D'importants travaux sont en cours pour compléter ces résultats. On peut voir la différence de complexité avec le modèle unidimensionnel en constatant les résultats manquants (voir section 4.1 de [2]).

2.4 Marche aléatoire β -biaisée dans l'arbre de Galton-Watson

2.4.1 Introduction du modèle de Galton-Watson

Considérons un processus de branchement de Galton-Watson, avec fonction génératrice $\mathbf{f}(z) = \sum_{k \geq 0} p_k z^k$, i.e. tous les enfants de chaque individu sont des copies i.i.d. de Z , où $\mathbf{P}[Z = k] = p_k$. On supposera que l'arbre sera surcritique et avec feuilles, i.e. $\mathbf{m} := \mathbf{E}[Z] = \mathbf{f}'(1) \in (1, \infty)$ et $p_0 > 0$ (voir remarque 2.(b) 1.4.5). On notera $q \in [0, 1]$ la probabilité d'extinction de l'arbre, caractérisée par $\mathbf{f}(q) = q$ (voir définition). Partant d'un unique individu, appelé la racine (ou encore 0), ce processus génère un arbre aléatoire T orienté vers le bas (voir un exemple d'arbre sur le graphe). Comme $q > 0$ dans le cas surcritique (voir cas 2.(b) 1.4.5), on conditionnera tout le long de ce texte sur la non-extinction de T pour que T soit un arbre aléatoire infini. Notons (Ω, \mathbf{P}) l'espace de probabilité associé, où \mathbf{P} est la loi de l'arbre original, conditionné à la non-extinction. Pour un sommet $u \in T$, on notera $|u| = d(0, u)$ la distance de u à la racine.

Pour $\omega \in \Omega$, considérons la marche aléatoire β -biaisée dans l'arbre de Galton-Watson $T(\omega)$ telle que décrite dans [18]. Plus précisément, on définit pour $\beta > 1$, une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les sommets de $T(\omega)$, telle que si $u \neq 0$ et u a k enfants v_1, \dots, v_k et un parent \overleftarrow{u} , alors

1. $P^\omega[X_{n+1} = \overleftarrow{u} | X_n = u] = \frac{1}{1 + \beta k},$

$$2. P^\omega[X_{n+1} = v_i | X_n = u] = \frac{\beta}{1+\beta k}, \text{ for } 1 \leq i \leq k,$$

et de 0, toutes les probabilités de transition vers chacun de ses enfants sont égales. On a ainsi une chaîne de Markov réversible et on peut donc la décrire comme un réseau électrique avec conductances $c(\overleftarrow{x}, x) := \beta^{|x|-1}$.

Sauf contre-indication, on choisira $X_0 = 0$, c'est-à-dire qu'on commencera toujours notre marche à la racine. On appelle $P^\omega[\cdot]$ la loi *trempee*⁴ de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partant de 0 et on définit la loi *recuite*⁴ par le produit semi-direct $\mathbb{P} = \mathbf{P} \rtimes P^\omega$.

2.4.2 Exposition des résultats

Maintenant que nous avons posé le modèle, voyons un peu quelques faits intéressants déjà démontrés sur la marche.

Transience. Du fait qu'on ait $\beta > 1$ et $m > 1$, alors $m\beta > 1$. Intuitivement, par définition de la marche (2.4.1), on s'attendra donc à ce qu'elle est plus tendance à descendre qu'à monter. C'était un des objectifs de l'article de Lyons [15] qui prouve que cette marche est bien transiente presque sûrement par rapport à \mathbb{P} dès que $m\beta > 1$.

Vitesse. On sait aussi que \mathbb{P} -p.s, $|X_n|/n$ converge vers une limite déterminée $v \geq 0$ (voir [18]). En outre, la marche aléatoire est *balistique*, i.e. sa vitesse $v > 0$ si et seulement si $\beta < \beta_c := 1/\mathbf{f}'(q)$. Dans le régime *sous-balistique*, i.e. si $\beta \geq \beta_c$, on a donc $v = 0$. La transition de régime est donc définitive. À première vue, ce résultat semble assez paradoxal. Le biais β étant le paramètre qui augmente nos chances de descendre, cela nous fait croire que la marche aurait tendance à avancer plus vite si le biais croît. Cette conjecture pourrait être vraie si l'on avait $p_0 = 0$, mais cela reste encore à démontrer (voir section 6 de [18]), ce qui n'est pas notre objectif. Par contre, le fait qu'on ait $p_0 > 0$ donne naissance à ce qu'on appellera des pièges (voir section 3.3). Ces pièges sont la principale cause du ralentissement de la marche. En outre, dans le régime sous-balistique, la marche va y perdre toute sa vitesse ; le biais incite trop la marche à descendre au fond du

4. Ce vocabulaire vient de la métallurgie : La trempe consiste à plonger un matériau chaud dans un fluide plus froid ; c'est un refroidissement brutal de la pièce qui a pour objectif de figer la structure obtenue lors de la mise en solution. Par analogie, on utilise le même terme pour qualifier la situation sous la loi P^ω , c'est-à-dire à environnement fixé ("figé"). Par opposition, le recuit est une opération de chauffage de pièces métalliques, et c'est sous ce nom que l'on désigne la situation en moyenne, sous \mathbb{P} .

piège et y rester coincée.

CHAPITRE 3

UN THÉORÈME CENTRAL LIMITE COMME CONTRIBUTION

Nous en arrivons à l'objectif principal de ce mémoire : compléter ces résultats et fortifier l'hypothèse d'un lien entre cette MAMA et le modèle de Bouchaud. Pour cela, nous allons montrer qu'on a un théorème central limite pour la marche aléatoire β -biaisée sur un arbre de Galton-Watson telle que définie dans la section 2.4, si $\beta < \sqrt{\beta_c}$.

Nous commencerons dans la section 3.1 par soulever un problème commun face à l'étude des comportements de MAMA : la "pollution" de l'environnement. Cette pollution se caractérise principalement par une perte d'indépendance. La section suivante nous montrera une manière de contourner ce problème. Nous définirons dans la section 3.2 ce qu'on appelle les temps de régénérations. On notera τ le premier d'entre eux. Ces temps nous permettent de partitionner l'espace-temps de la marche en des parties indépendantes.

La méthode que nous allons adopter est classique pour obtenir ce genre de résultat lorsqu'on utilise des temps de régénération. Nous savons déjà, grâce à l'article de Snitzman [22] sur le modèle de percolation sur \mathbb{Z}^d vu précédemment en 2.3, que la partie importante dans la démonstration d'un tel théorème est de montrer que τ_1 a un second moment (voir théorème 4.1 de [22]). Pour pouvoir borner la queue de τ_1 , il faut savoir où la marche pourrait passé beaucoup de temps avant τ_1 .

Le modèle que nous étudions est particulier du fait qu'il y a deux parties distinguables où la marche peut passer du temps : la colonne (le tronc) qui est un sous-arbre infini sans feuilles et les pièges (les branches) qui sont des sous-arbres finis attachés à la colonne. Nous établirons formellement cette décomposition dite de Harris dans la section 3.3 (voir [13] pour plus de détails sur ce type de décomposition). Les pièges sont des sous-arbres finis où la marche reste bloquée à faire plusieurs allers-retours avant de pouvoir en sortir. Elle y perd alors un temps considérable. Nous allons voir dans la section 3.5 que le temps passé dans un piège est de l'ordre de β^H , où H est la hauteur du piège. Plus le biais est grand, plus on sera coincé dans le piège. C'est pourquoi il nous sera nécessaire

d'avoir une condition majorant $\beta : \beta < \sqrt{\beta_c}$.

L'autre souci est de savoir si on en rencontrera beaucoup. Pour cela, nous allons montrer dans la section 3.4 qu'on a peu de chance de visiter beaucoup de sites du tronc avant τ grâce à un couplage de la marche sur le tronc avec une marche biaisée sur \mathbb{Z} .

Enfin, avec une condition raisonnable sur le nombre d'enfants (puisque le nombre d'enfants est aussi relié au nombre de pièges) dans la section 3.6 on combinera ces deux derniers pour démontrer qu'on a bien un second moment si $1 < \beta < \sqrt{\beta_c}$. On conclura avec le théorème central limite dans la section 3.7.

3.1 La pollution de l'environnement

La marche sur un arbre $T(\omega)$ déterminé est définie par une chaîne de Markov. Ainsi, si on connaît le présent, le futur devient indépendant du passé. Cependant, cela n'est vrai que pour la loi trempée P^ω , c'est-à-dire si l'on connaît l'environnement. En ce qui concerne la loi recuite, malgré les hypothèses d'indépendance de l'environnement (sur les nombres d'enfants de chaque individu), le simple fait que cet environnement soit aléatoire détruit la propriété de Markov. À cause du fait qu'on ne connaît pas l'environnement, au fur et à mesure que la marche avance, elle découvre cet environnement. Le fait d'en connaître plus sur l'environnement va affecter les probabilités de transitions. Ce sont ces informations qui vont "polluer" l'environnement et causer la perte de la propriété de Markov. Voyons ça dans un exemple : analysons la figure 3.1 avec $\beta = 2$ et Z qui suit une loi uniforme sur $\{0; 1; 2\} : f(s) = \frac{1+s+s^2}{3}$.

Les trois premiers graphes illustrent le déplacement de la marche jusqu'au temps 3. C'est ce que connaît le marcheur. Le dernier graphe illustre le point de vue du marcheur au temps 3 s'il ne connaît pas son passé.

Lorsque X_3 connaît son passé, il sait que le site x où il se trouve a au moins un enfant : celui qu'il a déjà visité au temps 2. On peut donc écarter la possibilité d'avoir zéro enfant, contrairement au cas où le marcheur ne connaît pas son passé.

Notons Z_x le nombre d'enfants de x et \overleftarrow{x} le parent de x .

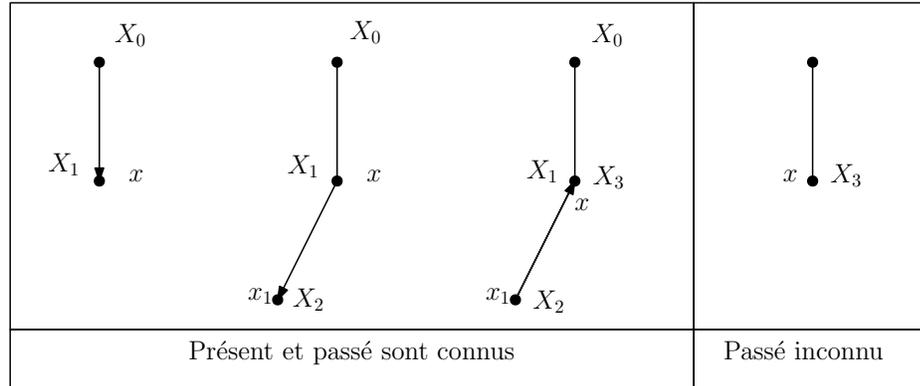


Figure 3.1 – Exemple de la pollution de l'environnement

Connaissant uniquement le présent, on ne sait rien sur le nombre Z_x d'enfants de x , donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X_4 = \overleftarrow{x} | X_3 = x] &= \mathbf{E}[P^\omega[X_4 = \overleftarrow{x} | X_3 = x]] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{1+2Z_x}\right] \\
 &= \frac{1}{1+0}P[Z_x = 0] + \frac{1}{1+2}P[Z_x = 1] + \frac{1}{1+4}P[Z_x = 2] \\
 &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 23/45.
 \end{aligned}$$

En revanche, en connaissant le passé, on sait que x a au moins un enfant x_1 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X_4 = \overleftarrow{x} | X_2 = x_1, X_3 = x] &= \mathbf{E}[P^\omega[X_4 = \overleftarrow{x} | X_2 = x_1, X_3 = x]] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{1+2Z_x} \mathbb{1}_{\{Z_x \geq 1\}}\right] \\
 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+4}\right) = 8/45.
 \end{aligned}$$

3.2 Les temps de régénérations : une contre-mesure à la pollution de l'environnement

Afin de pouvoir analyser les comportements de la marche, on a besoin de retrouver une certaine indépendance dans le comportement de la marche. Nous voulons trouver des moments où les déplacements futurs ne dépendront pas du passé.

Considérons τ_1 le premier moment où la marche atteint un nouveau maximum, et en même temps, où la marche ne reviendra pas en arrière. Si un tel moment existe, on a pour tout $0 \leq n < \tau_1$, $|X_n| < |X_{\tau_1}|$ et pour tout $n \geq \tau_1$, $|X_n| \geq |X_{\tau_1}|$. Cela nous assure que

le passé et le futur de X_{τ_1} seront dans des niveaux différents. Ainsi, sachant X_{τ_1} , comme on est sûr que dans tous les cas on n'a jamais visité le site X_{τ_1} dans le passé, on sait qu'on a aucune information du passé n'aura d'influence sur le futur. De plus, connaissant τ_1 , on sait qu'on ne reviendra pas en arrière de X_{τ_1} . En un sens, on peut dire que X_{τ_1} est devenu une nouvelle racine pour le futur : on a régénération de la marche. En particulier, on appellera τ_1 , un *temps de régénération*.

En répétant cette construction à partir de cette "nouvelle racine" τ_1 , on peut définir de la même manière τ_2 , et par récurrence, on obtient une suite $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de temps de régénération séparant la marche en plusieurs blocs disjoints.

Afin de définir plus formellement les temps de régénération, on aura besoin de quelques notations. Considérons les temps d'arrêt suivants :

$$T_u = \inf\{n \geq 0, |X_n| > u\}, u \in \mathbb{N},$$

$$D = \inf\{n \geq 0, |X_n| < |X_0|\}.$$

Ensuite, en notant θ la translation temporelle canonique et t la translation spatiale canonique, on définit deux suites de temps d'arrêt : des temps d'atteinte de nouveau maximum $S_k, k \geq 1$, de retour vers le niveau de départ $R_k, k \geq 1$ et la suite de nouveaux niveaux $M_k, k \geq 0$,

$$M_0 = 0,$$

$$S_1 = T_{M_0} = 1, R_1 = D \circ \theta_{S_1} + S_1 \leq \infty,$$

$$M_1 = \sup\{|X_m|, 0 \leq m \leq R_1\} \leq \infty,$$

et par récurrence sur $k \geq 1$,

$$S_{k+1} = T_{M_k} \leq \infty, R_{k+1} = D \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1} \leq \infty,$$

$$M_{k+1} = \sup\{|X_m|, 0 \leq m \leq R_{k+1}\} \leq \infty,$$

Remarque 3.2.1.

S_k est le k -ième moment où on atteint un nouveau maximum.

R_k est le temps auquel la marche retourne en dessous du niveau de $|X_{S_k}|$. Si R_k est infini, S_k est alors un temps de régénération. Sinon, M_k sera aussi fini et par transience, S_{k+1} aussi presque sûrement.

Ainsi, on a

$$S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq R_2 \leq \dots \leq \infty$$

et chaque inégalité est stricte si le membre de gauche est fini. Enfin, on définit

$$K = \inf\{k \geq 1, S_k < \infty, R_k = \infty\} \leq \infty \text{ et}$$

$$\tau_1 = S_K \leq \infty \text{ (avec la convention que } S_\infty = \infty \text{)}.$$

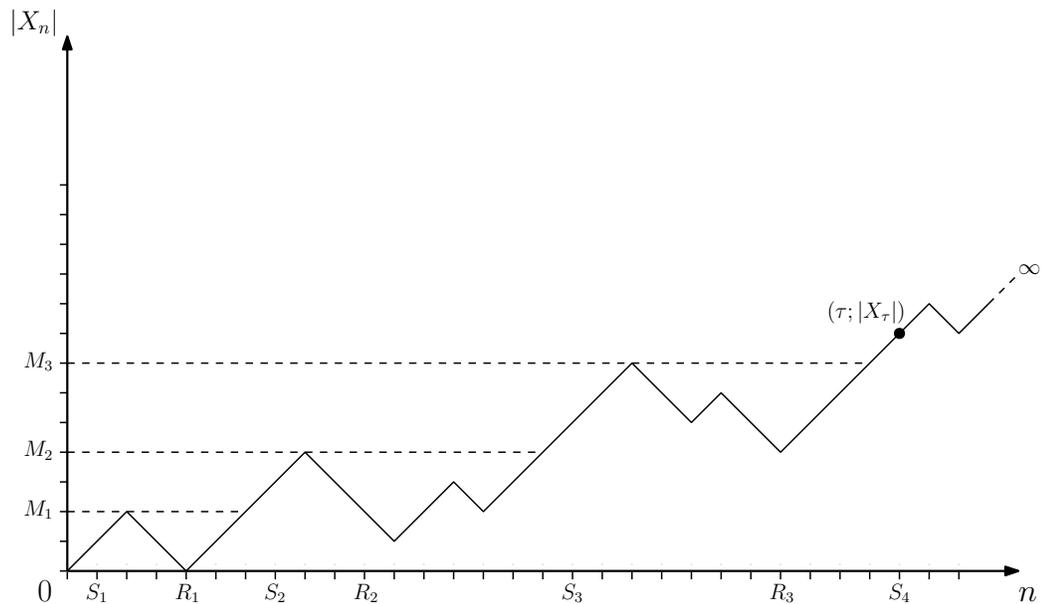


Figure 3.2 – Exemple d'un temps de régénération où $K = 4$.

Par transience, $\mathbb{P}[D \circ \theta_n = \infty] > 0$ et ne dépend pas de n , et donc $\mathbb{P} - p.s.$, $K < \infty$ (ce qui équivaut à $\tau_1 < \infty$).

En voyant τ_1 comme une fonction de X , on peut définir $\mathbb{P} - p.s.$ de la même manière

une suite de temps de régénération $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$, en suivant la construction suivante :

$$\tau_{k+1} = \tau_k(X) + \tau_1(X_{\cdot+\theta_{\tau_k}}), k \geq 1, \quad (3.2.2)$$

La proposition suivante donne la régénération de la marche. Elle a été démontrée par Lyons, Pemantle et Peres dans [18].

Proposition 3.2.3. $(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|, \tau_2 - \tau_1), \dots, (|X_{\tau_{k+1}}| - |X_{\tau_k}|, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sous \mathbb{P} .

Remarque 3.2.4. On peut aussi montrer que $\mathbb{P}[\tau_2 - \tau_1 \geq k] \leq C\mathbb{P}[\tau_1 \geq k]$, où la constante $C > 0$ ne dépend pas de k (il suffit de supposer que 0 a un parent $\overleftarrow{0}$ et effectuer la même marche mais en conditionnant sur le fait qu'on n'ira jamais en $\overleftarrow{0}$, i.e. que 0 est un temps de régénération).

Pour la suite du chapitre, nous noterons $\tau := \tau_2 - \tau_1$.

3.3 Décomposition du modèle

Afin de pouvoir démontrer un théorème central limite avec cette nouvelle structure régénératrice, il nous faut une certaine condition de second moment : il faut montrer que $\mathbb{E}[\tau^2] < \infty$ (voir théorème 4.1 de [22]). Un des phénomènes qui va aller à l'encontre de cette condition s'appelle le ralentissement. Pour bien comprendre ce "ralentissement" de la marche, on a besoin de décomposer notre arbre en deux parties.

3.3.1 Décomposition de l'arbre

$$\mathbf{g}(s) = \frac{\mathbf{f}((1-q)s+q) - q}{1-q} \text{ et } \mathbf{h}(s) = \frac{\mathbf{f}(qs)}{q}. \quad (3.3.1)$$

Il est connu (voir [16]) qu'un arbre \mathbf{f} -Galton-Watson (avec $p_0 > 0$ et conditionné à être infini) peut être généré en

- (i) construisant un arbre \mathbf{g} -Galton-Watson $T_{\mathbf{g}}$ appelé le tronc (où tous les sites ont une lignée infinie puisque $g(0) = 0$),

- (ii) à chaque site x de $T_{\mathbf{g}}$, on attache un nombre aléatoire N_x de bourgeons qui seront les racines d'arbres \mathbf{h} -Galton-Watson notés $\mathcal{P}_x^{(i)}$, $i = 1, \dots, N_x$ (finis presque sûrement puisque $h'(1) = f'(q) < \frac{1}{\beta} < 1$), qu'on appellera des pièges dans cet environnement T . On désignera par \mathcal{B}_T et \mathcal{P}_T l'ensemble des bourgeons et des pièges respectivement de T .

De plus, connaissant $T_{\mathbf{g}}$ et N_x , les pièges sont i.i.d. (voir [16] pour plus de détails). Intuitivement, cette décomposition sépare chaque site en deux groupes : les sites qui ont une infinité de descendants et ceux qui en ont un nombre fini, par exemple toutes les feuilles. Les sites du premier groupe sont tous forcément reliés à la racine et forment un unique arbre infini sans feuilles et les sites du deuxième groupe qui sont reliés entre eux formeront chacun un sous-arbre fini (un piège).

À chaque site du tronc, la marche risque de tomber dans un piège. Une fois dedans, elle sera attirée vers le fond de ce piège à cause du biais et mettra donc un temps considérable à en sortir. Il nous faudra borner ce temps et nous assurer qu'on ne tombe pas dans trop de pièges avant τ_1 .

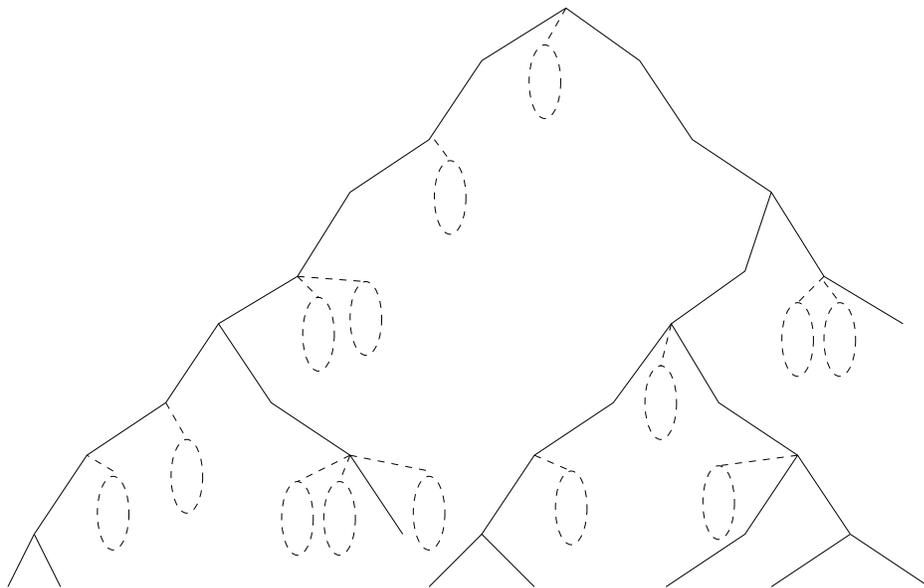


Figure 3.3 – L'arbre de Galton-Watson décomposé en deux parties : le tronc (lignes continues) et les pièges (lignes discontinues).

3.3.2 Décomposition de la marche

Une manière de s'assurer de ne pas tomber dans trop de pièges est de ne pas visiter trop de sites sur le tronc, et que sur chaque site, on ne visite pas trop de pièges. On va donc définir la marche sur le tronc. On pose d'abord la suite d'indices aléatoires $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ par récurrence :

1. $\sigma_0 = 0$,
2. $\sigma_{n+1} = \inf\{i > \sigma_n | X_{i-1}, X_i \in \text{tronc}\}$,

et on note $Y_n := X_{\sigma_n}$ la marche vue sur le tronc.

Soit $(U_n)_{n=1,2,\dots}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, de loi uniforme sur $(0,1)$. En se rappelant de la définition de X_n , on peut alors définir la marche sur le tronc de la manière suivante (on note $u^{(i)}$ le i ème enfant de u vu sur le tronc) :

$$Y_0 = 0, Y_1 = Y_0^{(i)} \text{ si } U_0 \in \left(\frac{i-1}{k_0}; \frac{i}{k_0}\right), \text{ pour } 1 \leq i \leq k_0,$$

et pour $n \geq 1$,

1. $Y_{n+1} = \overleftarrow{Y}_n$ si $U_n \in (0; \frac{1}{1+\beta k_n})$,
2. $Y_{n+1} = Y_n^{(i)}$ si $U_n \in (\frac{1+\beta(i-1)}{1+\beta k_n}; \frac{1+\beta i}{1+\beta k_n})$, pour $i = 1, \dots, k_n$, avec k_n le nombre d'enfants de Y_n sur le tronc.

Pour clore cette décomposition, on notera \mathbf{P}_Y la loi du tronc T_g , P_Y^ω la loi trempée de $(X_{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbb{P}_Y := \mathbf{P}_Y \times P_Y^\omega$ la loi recuite sur le tronc.

Ensuite, pour chaque entrée dans un piège, on utilise une loi avec comme environnement $\mathbf{P}_{\text{piège}}$, $P_{\text{piège}}^\omega$ la loi trempée de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}, n \neq \sigma_n}$ et $\mathbb{P}_{\text{piège}} := \mathbf{P}_{\text{piège}} \times P_{\text{piège}}^\omega$ la loi recuite sur ce piège. En considérant tous les pièges, on obtient par cette décomposition que $\mathbb{P} = \mathbb{P}_Y \times \mathbb{P}_{\text{pièges}}$, où $\mathbb{P}_{\text{pièges}}$ est la loi recuite sur l'ensemble des pièges.

Intuitivement, la marche suit la loi \mathbb{P}_Y sur le tronc, et à chaque entrée dans un piège, elle va suivre une loi $\mathbb{P}_{\text{piège}}$, indépendante des autres pièges visités.

À partir de maintenant, nous nous consacrons à la démonstration que τ_1 a un second moment sous \mathbb{P} .

Étant donné qu'on se préoccupe de limites asymptotiques, certaines constantes ne joueront pas un rôle important. Ainsi, dans le reste de ce chapitre, des constantes seront

notées par c et C (c pour une petite constante positive et C pour une grande), sans aucune spécification d'une éventuelle dépendance par rapport à β . De plus, leur valeur pourra changer d'une ligne à l'autre.

3.4 Nombre de sites vus sur le tronc avant τ_1

Dans cette section, nous allons montrer que la marche ne visitera pas trop de sites sur le tronc avant de se régénérer. La clé pour cela est le couplage de la marche sur T avec une marche aléatoire sur \mathbb{Z} .

3.4.1 Couplage

On définit Z_n une marche aléatoire β -biaisée sur \mathbb{Z} comme suit

1. $Z_0 = 0$,
2. $Z_{n+1} = Z_n - 1$, si $U_n \in [0, \frac{1}{\beta+1}]$,
3. $Z_{n+1} = Z_n + 1$, sinon.

C'est ici qu'on utilise l'hypothèse $\beta > 1$, mais cette hypothèse n'est probablement pas nécessaire pour avoir le théorème central limite. Cela nous permet surtout d'effectuer ce couplage avec une marche sur \mathbb{Z} transiente vers $+\infty$.

En construisant de cette manière Z_n , cela nous assure que si $|Y_n|$ diminue, Z_n diminue aussi. On a donc $|Y_n| \geq Z_n$ et surtout $\tau_1^Y \leq \tau_1^{\mathbb{Z}}$ (τ_1^Y et $\tau_1^{\mathbb{Z}}$ font référence aux premiers temps de régénération de Y_n et Z_n respectivement que l'on définit de manière analogue à τ_1). Par rapport à l'arbre entier T , τ_1^Y correspond au nombre de sites vus sur le tronc avant τ_1 puisque $\tau_1 = \sigma_{\tau_1^Y}$.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à trouver une borne de la queue du temps de régénération sur \mathbb{Z} . On notera $p := \beta/(1 + \beta)$ la probabilité d'avancer.

3.4.2 Queue des temps de régénération sur \mathbb{Z}

Comme pour les temps de régénération sur l'arbre, on va diviser le problème en deux parties : pour que $\tau_1^{\mathbb{Z}}$ soit grand, il faut soit qu'on visite beaucoup de nouveaux

maximums, soit qu'on passe beaucoup de temps "proche" de l'état initial.

On utilisera des notations similaires à celles utilisées pour définir les temps de régénération pour les arbres. Ainsi, on notera respectivement $S_i^{\mathbb{Z}}, R_i^{\mathbb{Z}}, M_i^{\mathbb{Z}}$ les temps d'atteintes de nouveaux maximums, les temps de retours vers le niveau de départ et les nouveaux niveaux sur \mathbb{Z} .

Proposition 3.4.1. τ_1^Y et $\tau_1^{\mathbb{Z}}$ ont des queues exponentiellement décroissantes.

Démonstration. Rappelons que $\tau_1^Y \leq \tau_1^{\mathbb{Z}}$. Ainsi, il nous suffit de démontrer le résultat pour $\tau_1^{\mathbb{Z}}$. Cette démonstration se fera en 3 étapes.

D'abord, on montre qu'il est peu probable de visiter beaucoup de nouveaux maximums avant $\tau_1^{\mathbb{Z}}$. Cela est logique puisqu'à chaque nouveau maximum, on a une probabilité $q_{\mathbb{Z}} \in (0; 1)$ de non-retour (voir 1.2.3).

En termes de calcul, ça donne :

$$\begin{aligned} P[\tau_1^{\mathbb{Z}} > S_n^{\mathbb{Z}}] &= P[\tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_1^{\mathbb{Z}}] \cdot P[\tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_2^{\mathbb{Z}} | \tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_1^{\mathbb{Z}}] \cdot \\ &\quad \dots \cdot P[\tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_n^{\mathbb{Z}} | \tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_1^{\mathbb{Z}}, \dots, \tau_1^{\mathbb{Z}} \neq S_{n-1}^{\mathbb{Z}}] \\ &= (1 - q_{\mathbb{Z}})^n, \end{aligned}$$

d'où

$$P[\tau_1^{\mathbb{Z}} > S_n^{\mathbb{Z}}] < e^{-cn} \tag{3.4.2}$$

Ensuite, il faut montrer que $S_n^{\mathbb{Z}}$ a une queue exponentielle. Pour cela, nous allons utiliser le principe des grandes déviations : par définition, les variables aléatoires $(S_{i+1}^{\mathbb{Z}} - S_i^{\mathbb{Z}})_{i \geq 1}$ sont positives, identiquement distribuées et, comme ici l'environnement n'est pas aléatoire, indépendantes (par la propriété forte de Markov). On peut donc écrire $S_{n+1}^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}}$ comme une somme de n variables i.i.d. de même loi que $S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}}$. Il nous reste qu'à montrer que $S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}}$ a un moment exponentiel.

On a $S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} = (S_2^{\mathbb{Z}} - R_1^{\mathbb{Z}}) + (R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}})$. D'où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P[S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} = n] \leq P[S_2^{\mathbb{Z}} - R_1^{\mathbb{Z}} \geq n/2, R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} \leq n/2] + P[R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} \geq n/2].$$

Or,

$$P[R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} = 2n] \leq (4p(1-p))^n \leq e^{-cn},$$

puisqu'il faut faire n aller-retours, et remarquons que sur l'évènement $\{R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} \leq n/2\}$, nécessairement le maximum entre ces deux temps, $M_1^{\mathbb{Z}}$, est au plus $n/4$. D'où,

$$\begin{aligned} P[S_2^{\mathbb{Z}} - R_1^{\mathbb{Z}} \geq n/2, R_1^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} \leq n/2] &\leq P[S_2^{\mathbb{Z}} - R_1^{\mathbb{Z}} \geq n/2, M_1^{\mathbb{Z}} \leq n/4] \\ &\leq P[S_2^{\mathbb{Z}} - R_1^{\mathbb{Z}} \geq M_1^{\mathbb{Z}} + n/4] \\ &\leq (4p(1-p))^{n/8} \\ &\leq e^{-cn}. \end{aligned}$$

puisqu'il faudra faire $n/8$ aller-retours. En combinant ces deux derniers résultats, on obtient

$$P[S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} = n] \leq e^{-cn}.$$

On peut donc appliquer le principe des grandes déviations à la suite $(S_{i+1}^{\mathbb{Z}} - S_i^{\mathbb{Z}})_{i \geq 1}$: soit $a \in \mathbb{N}$, tel que $a > E[S_2^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}}]$, alors

$$P[S_{n+1}^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} \geq na] \leq e^{-cn}. \quad (3.4.3)$$

Enfin, on en déduit la queue exponentielle de $\tau_1^{\mathbb{Z}}$ par 3.4.2 et 3.4.3 :

$$\begin{aligned} P[\tau_1^{\mathbb{Z}} > n(a+2)] &\leq P[\tau_1^{\mathbb{Z}} > S_{n+1}^{\mathbb{Z}}] + P[S_{n+1}^{\mathbb{Z}} > n(a+2), S_1^{\mathbb{Z}} < 2n] + P[S_1^{\mathbb{Z}} \geq 2n] \\ &\leq e^{-cn} + P[S_{n+1}^{\mathbb{Z}} - S_1^{\mathbb{Z}} > na] + (4p(1-p))^n \\ &\leq e^{-cn}. \end{aligned}$$

□

3.5 Temps passé dans un piège

Dans cette section, nous allons démontrer que la marche ne peut pas rester longtemps dans un piège.

Introduisons premièrement quelques notations. Soit \mathcal{P} un piège, i.e. un arbre de

Galton-Watson fini. H désignera sa hauteur, $Vol(\mathcal{P})$ son volume, $0_{\mathcal{P}}$ sa racine et $\overleftarrow{0}_{\mathcal{P}}$ le parent de sa racine (qui se trouve sur le tronc).

Soit P^{ω} l'opérateur de transition de $L^2(\pi^{\omega})$ vers $L^2(\pi^{\omega})$. Nous nous intéresserons à la principale valeur propre de Dirichlet $\Lambda_{\omega}(\mathcal{P})$ de $I - P^{\omega}$ dans \mathcal{P} , qui est donnée par

$$\Lambda_{\omega}(\mathcal{P}) = \inf\{\mathcal{E}(f, f) \mid f|_{(\mathcal{P})^c} = 0, \|f\|_{L^2(\pi)} = 1\}, \quad (3.5.1)$$

où on définit la forme de Dirichlet pour $f, g \in L^2(\pi)$ par

$$\mathcal{E}(f, g) = (f, (I - P^{\omega})g)_{\pi} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \mathcal{P} \\ |x| - |y| = 1}} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))c^{\omega}([x, y]),$$

où $c^{\omega}([x, y])$ désigne la conductance de l'arête $[x, y]$ dans l'arbre (voir 1.2).

Pourquoi s'intéresse-t-on à cette valeur propre ?

En fait, il semblerait que cette valeur propre est essentiellement l'inverse du temps de sortie du piège. On va donc essayer de montrer que $\Lambda_{\omega}(\mathcal{P})$ ne peut pas être trop petit.

On introduit une fonction pour $x \in \mathcal{P}$

$$\mathcal{BK}(x) = \min_{(p_x(i))_{i \geq 0} \in \mathcal{S}} \max_{i \geq 0} |x| - |p_x(i)|, \quad (3.5.2)$$

où \mathcal{S} est l'ensemble de tous les chemins simples de \mathcal{P} (c.-à-d. ne passant pas deux fois par le même site), infinis, et commençant à x .

Intuitivement, $\mathcal{BK}(x)$ représente la profondeur à laquelle est situé x dans un piège. En outre, cette profondeur est évidemment 0 si x est sur le tronc et on a

$$H = \max_{x \in \mathcal{P}} \mathcal{BK}(x).$$

Proposition 3.5.3. *Pour tout $\omega \in \Omega$,*

$$\Lambda_{\omega}(\mathcal{P}) \geq c Vol(\mathcal{P})^{-2} H^{-1} \beta^{-H}$$

Démonstration. Par définition de H , on peut construire pour chaque $x \in \mathcal{P}$ un chemin

simple $p_x = (p_x(i))_{0 \leq i \leq l_x}$ tel que $p_x(0) = x$, $p_x(i) \in \mathcal{P}$ pour $0 < i < l_x$ et $p_x(l_x) = \overleftarrow{0}_{\mathcal{P}}$ (la racine du piège), et tel que

$$\max_{i \leq l_x} (|x| - |p_x(i)|) \leq H$$

(c'est-à-dire qu'on force le chemin à ne pas descendre plus profondément que x).

On utilise un argument classique de Saloff-Coste (voir [20]). Pour une fonction $f \in L^2(\pi)$ telle que $\|f\|_{L^2(\pi)} = 1$ et $f|_{(\mathcal{P})^c} = 0$, on a que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x \in \mathcal{P}} f^2(x) \pi_{\omega}(x) = \sum_{x \in \mathcal{P}} \left[\sum_{i=0}^{l_x-1} (f(p_x(i+1)) - f(p_x(i))) \right]^2 \pi_{\omega}(x) \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{P}} l_x \sum_{i=0}^{l_x-1} \left[f(p_x(i+1)) - f(p_x(i)) \right]^2 \pi_{\omega}(x). \end{aligned}$$

En posant $|0_{\mathcal{P}}| = h$, on obtient la majoration

$$\pi_{\omega}(x)/c_{\omega}(p_x(i+1); p_x(i)) \leq \frac{\beta^{h+H-1} + \beta^{h+H} \max_{x \in \mathcal{P}}(N_x)}{\beta^h} \leq \beta^{H-1} \text{Vol}(\mathcal{P}) \leq C\beta^H \text{Vol}(\mathcal{P}).$$

D'où l'on obtient,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{x \in \mathcal{P}} H \sum_{i=0}^{l_x-1} \left[f(p_x(i+1)) - f(p_x(i)) \right]^2 c_{\omega}(p_x(i+1); p_x(i)) C\beta^H \text{Vol}(\mathcal{P}) \\ &\leq CH\beta^H \text{Vol}^2(\mathcal{P}) \sum_{|x-y|=1} \left[f(x) - f(y) \right]^2 c_{\omega}(x; y) \\ &\leq CH\beta^H (\text{Vol}(\mathcal{P}))^2 \mathcal{E}(f, f). \end{aligned}$$

Et donc $\Lambda_{\omega}(\mathcal{P}) \geq c(\text{Vol}(\mathcal{P}))^{-2} H^{-1} \beta^{-H}$.

□

Il nous faut maintenant borner les queues de $\text{Vol}(\mathcal{P})$ et H . Soit

$$\gamma := \frac{\ln \mathbf{f}'(q)}{\ln \beta}.$$

Cette constante joue un rôle très important dans le comportement de cette MAMA (voir [3]). En effet, remarquons que si $\gamma > 1$, on a alors $\beta < \beta_c = 1/f'(q)$ et la vitesse sera positive (voir introduction du chapitre). Nous verrons qu'elle est en fait une constante clé pour ce modèle.

Posons Y la loi du nombre d'enfants d'un individu du piège \mathcal{P} .

Lemme 3.5.4. *La queue du volume d'un piège est donnée par $\mathbf{P}[\text{Vol}(\mathcal{P}) \geq n] \leq e^{-cn}$, $c > 0$*

Démonstration. Par le théorème de Dwass 1.5.1 :

$$\mathbf{P}[\text{Vol}(\mathcal{P}) = n] = \frac{1}{n} \mathbf{P}[Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)} = n - 1], n \geq 1$$

où $Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}$ sont des copies indépendantes de Y .

Rappelons que par 3.3.1, $E[Y_i] = h'(1) = f'(q)$. Or, dans le cas surcritique, $f'(q) < 1$ (voir 1.4.6) d'où $E[Y_i] < 1$. Par la densité des rationnels, il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $E[Y_i] < a < 1$. Par le principe d'Archimède, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N(1 - a) > 1$ et donc $aN < N - 1$. De plus, la fonction caractéristique de \mathcal{P} est donnée par

$$h(s) = \sum_{k \geq 0} q_k s^k, \text{ avec } q_k = p_k q^{k-1} \leq q^{k-1},$$

et donc Y a des moments exponentiels. Pour $n > N$ on peut alors appliquer le principe des grandes déviations (voir [5]) :

$$\mathbf{P}[Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)} \geq n - 1] \leq \mathbf{P}[Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)} \geq an] < e^{-cn}, c > 0.$$

□

Quant à la hauteur, on a pratiquement déjà démontré qu'elle a une queue exponentielle :

$$\mathbf{P}[H \geq n] \stackrel{(1.4.3)}{\leq} \mathbf{E}[Y]^n \stackrel{3.3.1}{=} \mathbf{f}'(q)^n, \text{ avec } \mathbf{f}'(q) < 1 \text{ par le lemme 1.4.6.} \quad (3.5.5)$$

Remarque 3.5.6. *Cela suffit pour notre démonstration, mais il a même été démontré que $\mathbf{P}[H \geq n] \sim \alpha \mathbf{f}'(q)^n$, $\alpha > 0$ (voir lemme 3.3 de [3]).*

Proposition 3.5.7. *Pour $t > 0$,*

$$\mathbf{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \leq t^{-1}] \leq C(\ln t)^C t^{-\gamma},$$

Démonstration. On a

$$\mathbf{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \leq t^{-1}] \leq \mathbf{P}[\text{Vol}(\mathcal{P}) \geq \ln^2 t] + \mathbf{P}[H \geq \ln^2 t] + \mathbf{P}[\beta^{-H} \leq t^{-1} \ln^6 t]$$

En appliquant le lemme 3.5.4 et l'équation 3.5.5 on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \leq t^{-1}] &\leq e^{-c \ln^2 t} + \mathbf{f}'(q)^{\ln^2 t} + \mathbf{P}[H \geq (\ln t - 6 \ln(\ln t)) / \ln \beta] \\ &\leq t^{-c \ln t} + t^{\ln \mathbf{f}'(q) \ln t} + \mathbf{f}'(q)^{(\ln t - 6 \ln(\ln t)) / \ln \beta} \\ &\leq t^{-c \ln t} + t^{\ln \mathbf{f}'(q) \ln t} + e^{\ln \mathbf{f}'(q) \ln t / \ln \beta} e^{-6 \ln \mathbf{f}'(q) \ln(\ln t) / \ln \beta} \\ &\leq t^{-c \ln t} + t^{\ln \mathbf{f}'(q) \ln t} + t^{-\gamma} \ln^{6\gamma} t \\ &\leq C(\ln t)^{6\gamma} t^{-\gamma} \end{aligned}$$

□

On en arrive au résultat principal de cette section. En dénotant par $T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}}$ le temps de sortie de \mathcal{P} , on obtient le théorème suivant.

Proposition 3.5.8. $\mathbb{P}[T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t] \leq C(\ln t)^C t^{-\gamma}$.

Démonstration. Pour $\omega \in \Omega$, l'opérateur sur $L^2(\pi_\omega)$ donné par $\mathbf{1}\{\mathcal{P}\}P^\omega \mathbf{1}\{\mathcal{P}\}$ est associé avec la marche tuée en quittant le piège. Rappelons que le théorème de Perron-Frobenius établit que cet opérateur a pour norme la valeur propre maximale de l'opérateur, qui est $1 - \Lambda_\omega(\mathcal{P})$. Cela entraîne que pour tout site $x \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \pi_\omega(x) P_x^\omega [T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > n] &= (\mathbf{1}\{x\}, (\mathbf{1}\{\mathcal{P}\}P^\omega \mathbf{1}\{\mathcal{P}\})^n \mathbf{1}\{\mathcal{P}\})_{L^2(\pi_\omega)} \\ &\leq (\pi_\omega(x) \pi_\omega(\mathcal{P}))^{1/2} (1 - \Lambda_\omega(\mathcal{P}))^n \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}. \end{aligned}$$

Une petite analyse de fonction nous donne l'inégalité $(1 - \Lambda_\omega(\mathcal{P}))^t \leq \exp(-t\Lambda_\omega(\mathcal{P}))$: cela est équivalent à $\ln(1 - \Lambda_\omega(\mathcal{P})) \leq -\Lambda_\omega(\mathcal{P})$, ce qui est vrai par concavité de la fonction $\ln(1 - x)$ sur $(0; 1)$ qui a pour tangente en 0 la droite $y = -x$. De plus, en utilisant le fait que $\pi_\omega(\mathcal{P}) \leq \beta^H \text{Vol}(\mathcal{P})$, on obtient :

$$P_{0\varnothing}^\omega [T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t] \leq (\beta^H \text{Vol}(\mathcal{P}))^{1/2} \exp(-t\Lambda_\omega(\mathcal{P})) = \text{Vol}(\mathcal{P})^{1/2} \exp(H \ln \beta - t\Lambda_\omega(\mathcal{P})).$$

Enfin, en moyennant sur l'environnement, on a

$$\mathbb{P}[T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t] \leq C [\mathbb{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) < H \ln \beta / t] + \mathbb{P}[T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t, \Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t]]$$

Calculons ces deux dernières probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) < H \ln \beta / t] &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{P}[\Lambda_\omega(\mathcal{P}) < k \ln \beta / t] P[H = k]) \\ &\stackrel{3.5.7}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(t / (k \ln \beta)))^C (t / (k \ln \beta))^{-\gamma} (\mathbf{f}'(q))^k \\ &\leq (\ln t)^C t^{-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} ((k \ln \beta)^\gamma (\mathbf{f}'(q))^k) \\ &\leq (\ln t)^C t^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

car $\sum_{k=0}^{\infty} ((k \ln \beta)^\gamma (\mathbf{f}'(q))^k)$ converge et ne dépend pas de t .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t, \Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t] &\leq \mathbf{E}[P^\omega [T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t] \mathbb{1}_{\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t}] \\ &\leq \mathbf{E}[(\beta^H \text{Vol}(\mathcal{P}))^{1/2} e^{-t\Lambda_\omega(\mathcal{P})} \mathbb{1}_{\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t}] \\ &\leq \mathbf{E}[(\beta^H \text{Vol}(\mathcal{P}))^{1/2} e^{-t\Lambda_\omega(\mathcal{P})} \mathbb{1}_{\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t}] \\ &\leq C \mathbf{E}[\exp(H \ln \beta - 2t\Lambda_\omega(\mathcal{P})) \mathbb{1}_{\Lambda_\omega(\mathcal{P}) \geq H \ln \beta / t}]^{1/2} \\ &\quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Shwarz et 3.5.4}) \\ &\leq C \mathbf{E}[\exp(-t\Lambda_\omega(\mathcal{P}))]^{1/2} \\ &\leq C e^{-ct} \quad (\text{car } \Lambda_\omega(\mathcal{P}) \leq 1 \text{ presque sûrement}). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Par 3.5.9 et 3.5.10, on a donc

$$\mathbb{P}[T_{\mathcal{P}}^{\text{exit}} > t] \leq C (\ln t)^C t^{-\gamma}$$

□

3.6 Un second moment pour τ

Par la remarque 3.2.4, il nous suffit de montrer que τ_1 a un second moment, pour montrer que τ en a aussi un. À partir de maintenant, nous allons supposer que $\gamma > 2$. De plus, étant donné que le nombre d'enfants est directement relié au nombre de pièges que l'on risque de visiter, il est normal d'imposer une condition sur ce dernier. Nous allons supposer que la variable aléatoire Z est bornée par $d \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.6.1. *Nous avons choisi cette condition sur le nombre d'enfants, d'une part pour faciliter la démonstration du théorème, et d'autre part parce que notre intérêt pour ce modèle est de nous aider à comprendre le modèle de percolation sur \mathbb{Z}^d , sans compter qu'il s'agit du modèle initialement proposé par Galton et Watson.*

Afin de borner la queue de τ_1 , on voulait d'abord montrer qu'il était peu probable de visiter beaucoup de sites.

Soit $A(t) = \{\tau_1^Y \geq \ln^2 t\}$. Par le théorème 3.4.1, on a

$$\mathbb{P}[A(t)] \leq \exp(-c \ln^2 t) \leq t^{-c \ln t} \leq o(t^{-k}) \text{ pour tout } k. \quad (3.6.2)$$

Dans le cas où on visiterait peu de sites, en supposant qu'on n'ait pas trop de pièges, pour que τ_1 soit grand il faudrait donc qu'on passe beaucoup de temps dans un des pièges.

Supposons qu'on a l'évènement $\{A^c(t); \tau_1 \geq t\}$.

Alors, on peut être sûr qu'avant τ_1 on va tomber sur un piège où on restera "assez longtemps". Plus formellement, avant τ_1 on a :

1. Nombre de pièges visités : comme $Z \leq d$ et $\tau_1^Y < \ln^2 t$, cela implique que $\text{card}(\{i \leq \tau_1 | X_i \in \mathcal{B}_T\}) \leq d \ln^2 t$ (où on rappelle que \mathcal{B}_T est l'ensemble des bourgeons);
2. Temps passé dans les pièges : comme $\tau_1 \geq t$ et $\tau_1^Y < \ln^2 t$, $\text{card}(\{i \leq \tau_1 | X_i \in \mathcal{P}_T\}) \geq t - \ln^2 t$.

Notons par $\mathcal{P}_i, i = 1, \dots, \lfloor d \ln^2 t \rfloor$ les pièges visités avant τ_1 . Alors, par le principe des tiroirs on a :

$$\exists \mathcal{P}_i \text{ tel que } T_{\mathcal{P}_i}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t}.$$

Proposition 3.6.3. *Si $\gamma > 2$ et $Z \leq d$, alors*

$$\mathbb{E}[\tau^2] < \infty$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau_1 \geq t] &\leq \mathbb{P}[A(t)] + \mathbb{P}[A^c(t), \tau_1 \geq t] \\ &\leq o(t^{-3}) + \mathbb{P}\left[\max_{i=1, \dots, \lfloor d \ln^2 t \rfloor} T_{\mathcal{P}_i}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t}\right] \\ &\leq o(t^{-3}) + \mathbb{E}_Y \left[\mathbb{P}^{\text{pièges}} \left[\max_{i=1, \dots, \lfloor d \ln^2 t \rfloor} T_{\mathcal{P}_i}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right] \right] \end{aligned}$$

Connaissant le tronc, les pièges sont i.i.d. et on connaît les $\lfloor d \ln^2 t \rfloor$ pièges qu'on peut rencontrer. Le membre de droite devient donc égal à :

$$\begin{aligned} o(t^{-3}) + \mathbb{E}_Y \left[d \ln^2 t \mathbb{P}^{\text{piège}} \left[T_{\mathcal{P}_1}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right] \right] &\leq o(t^{-3}) + d \ln^2 t \mathbb{E}_Y \left[\mathbb{P}^{\text{piège}} \left[T_{\mathcal{P}_1}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right] \right] \\ &\leq o(t^{-3}) + d \ln^2 t \mathbb{P} \left[T_{\mathcal{P}_1}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right] \end{aligned}$$

Par la proposition 3.5.8, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[T_{\mathcal{P}_1}^{exit} \geq \frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right] &\leq C \left(\ln \left(\frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right) \right)^C \left(\frac{t - \ln^2 t}{d \ln^2 t} \right)^{-\gamma} \\ &\leq C (\ln t)^C t^{-\gamma}, \end{aligned}$$

d'où,

$$\mathbb{P}[\tau_1 \geq t] \leq o(t^{-3}) + d \ln^2 t C(\ln t)^C t^{-\gamma} \leq C(\ln t)^C t^{-\gamma},$$

et donc τ_1 a un second moment. Par la remarque 3.2.4, τ a aussi un second moment. \square

3.7 Théorème central limite

Dans cette section, nous allons démontrer un théorème central limite, dit "fonctionnel" sous les conditions $\gamma > 2$ et $Z \leq d$. Pour cela, nous allons commencer par montrer qu'on a une vitesse déterminée et positive pour X sous \mathbb{P} , en utilisant la loi forte des grands nombres. Les preuves de ces théorèmes ont déjà été faites sur d'autres modèles (voir [23]). Nous ne faisons que reprendre les mêmes démarches en y ajoutant des explications plus détaillées pour accommoder le lecteur.

Proposition 3.7.1. Loi forte des grands nombres pour X sous \mathbb{P} .

Supposons

$$\gamma > 2 \text{ et } Z \leq d, \tag{3.7.2}$$

alors

$$\mathbb{P} - p.s., \frac{|X_n|}{n} \longrightarrow v := \frac{\mathbb{E}[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|]}{\mathbb{E}[\tau]} > 0$$

Démonstration. Remarquons que pour tout n , $|X_n| \leq n$. En utilisant la proposition 3.6.3, on a donc :

$$\mathbb{E}[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|] \leq \mathbb{E}[\tau] < \infty,$$

En conséquence de 3.2.3 et de la loi forte des grands nombres, on obtient alors

$$\mathbb{P} - p.s., \frac{\tau_n - \tau_1}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[\tau], \frac{|X_{\tau_n}| - |X_{\tau_1}|}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|], \text{ quand } n \rightarrow \infty, \tag{3.7.3}$$

et comme les variables τ_1 et $|X_{\tau_1}|$ sont finies presque sûrement sous \mathbb{P} , on a

$$\mathbb{P} - p.s., \frac{\tau_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[\tau], \frac{|X_{\tau_n}|}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|], \text{ quand } n \rightarrow \infty, \tag{3.7.4}$$

On définit ensuite $\mathbb{P} - p.s.$ une suite croissante $(k_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers l'infini telle que pour tout n ,

$$k_n = \inf\{j \in \mathbb{N} | \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \quad (3.7.5)$$

Cela implique que

$$\tau_{k_n} \leq n \leq \tau_{k_n+1}$$

En inversant cette dernière inégalité, en la multipliant par k_n et en utilisant 3.7.4, on obtient par le théorème des gendarmes

$$\mathbb{P} - p.s., \frac{k_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\mathbb{E}[\tau]} \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (3.7.6)$$

De plus,

$$\frac{|X_n|}{n} = \frac{|X_{\tau_{k_n}}|}{n} + \frac{|X_n| - |X_{\tau_{k_n}}|}{n},$$

d'où, par 3.7.4 et 3.7.6, on a

$$\frac{|X_{\tau_{k_n}}|}{n} = \frac{|X_{\tau_{k_n}}|}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|]}{\mathbb{E}[\tau]}, \mathbb{P} - p.s.$$

et par 3.7.4,

$$\frac{||X_n| - |X_{\tau_{k_n}}||}{n} \leq \frac{||X_{\tau_{k_n+1}}| - |X_{\tau_{k_n}}||}{n} \leq \frac{\tau_{k_n+1} - \tau_{k_n}}{n} = \frac{\tau_{k_n+1}}{k_n+1} \frac{k_n+1}{n} - \frac{\tau_{k_n}}{k_n} \frac{k_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \mathbb{P} - p.s.$$

En outre, $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ et $\mathbb{P} - p.s., |X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}| > 0$ implique que la vitesse est strictement positive. \square

Nous arrivons enfin au théorème principal de ce mémoire. Ce théorème est une application du théorème de Donsker, aussi appelé le théorème central limite fonctionnel.

Théorème 3.7.7. Théorème central limite fonctionnel pour X_n sous \mathbb{P} .

Sous \mathbb{P} , la suite de processus $(B_{\bullet}^n)_{n \geq 0} := \left(\left(\frac{X_{\lfloor \bullet n \rfloor} - \lfloor \bullet n \rfloor v}{\sigma \sqrt{n}} \right)_{n \geq 0} \right)$ converge en loi dans l'espace

de Skorokhod¹ $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vers un mouvement brownien standard, où

$$\sigma^2 := \frac{\text{Var}(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}| - v\tau)}{\mathbb{E}[\tau]} = \frac{\mathbb{E}[(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}| - v\tau)^2]}{\mathbb{E}[\tau]} > 0$$

Démonstration. Posons $V_i := (|X_{\tau_{i+1}}| - |X_{\tau_i}|) - (\tau_{i+1} - \tau_i)v$ pour $i \geq 1$. Par 3.2.3, la suite $(V_i)_{i \geq 1}$ est indépendante et identiquement distribuée. De plus, en remarquant que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $||X_m| - |X_n|| \leq |m - n|$, et par 3.6.3, on a : $E[|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|] \leq E[\tau] < \infty$ et $E[(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}|)^2] \leq E[\tau^2] < \infty$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[V_1] = \mathbb{E}[(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}| - v\tau)] \stackrel{\text{déf. de } v}{=} 0,$$

et

$$\sigma_0^2 := \mathbb{E}[V_1^2] = \mathbb{E}[(|X_{\tau_2}| - |X_{\tau_1}| - v\tau)^2] < \infty$$

Le théorème de Donsker appliqué à la suite $(V_i)_{i \geq 1}$ affirme que la suite de processus $(\frac{\Sigma_{tn}}{\sigma_0 \sqrt{n}})_{n \geq 0}$, où

$$\Sigma_r := (|X_{\tau_1}| - v\tau_1) + \sum_{i=1}^{\lfloor r \rfloor - 1} V_i = |X_{\tau_{\lfloor r \rfloor}}| - v\tau_{\lfloor r \rfloor}, r \in \mathbb{R}_+,$$

converge en loi sous \mathbb{P} dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vers un mouvement brownien standard B_t quand n tend vers l'infini (voir théorème 1.2 p278 de [8]), puisque $\mathbb{P} - p.s.$, $(|X_{\tau_1}| - v\tau_1) < \infty$. Afin de se débarrasser de τ , nous allons utiliser la même astuce que pour la loi des grands nombres : on va réutiliser la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ définie en 3.7.5.

Rappelons que $\mathbb{P} - p.s.$, $\frac{k_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}[\tau]}$. De plus, $\mathbb{P} - p.s.$, pour tout $T > 0$ on a :

$$\begin{aligned} |\sigma B_t^n \sqrt{n} - \Sigma_{k_{\lfloor tn \rfloor}}| &= |(|X_{\lfloor tn \rfloor}| - \lfloor tn \rfloor v) - (|X_{\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}}}| - v\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}})| \\ &\leq \sum_{n \leq \tau_{k_n} + 1} (|X_{\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor} + 1}}| - |X_{\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}}}|) - v(\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor} + 1} - \tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}}) \\ &\leq (1 + v)(\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor} + 1} - \tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}}), \end{aligned}$$

1. Espace des fonctions càdlàg. La topologie de Skorokhod est une généralisation de la topologie uniforme, dans le sens où elle coïncide avec cette dernière sur l'espace des fonctions continues.

d'où, $\sigma B_t^n - \frac{\Sigma_{k_{[tn]}}}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 en \mathbb{P} -probabilité : pour $u > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sigma B_t^n - \frac{\Sigma_{k_{[tn]}}}{\sqrt{n}} \right|\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq k \leq k_{[Tn]}} \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{\sqrt{n}} > u\right] \\ &\leq k_{[Tn]} \mathbb{P}[\tau > \sqrt{nu}] \\ &\stackrel{3.6.3}{\leq} [Tn] C(\sqrt{nu})^{-\gamma} \quad (\text{car } k_n \leq k_{\tau_n} \leq n) \\ &= Cn^{1-\gamma/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{car } \gamma > 2). \end{aligned}$$

Il ne nous reste qu'à démontrer la convergence en loi de la suite $\left(\frac{\Sigma_{k_{[tn]}}}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un brownien ; on obtiendra alors un résultat similaire pour $(B_t^n)_{t \geq 0}$.

Pour $t > 0$,

$$\frac{\Sigma_{k_{[tn]}}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sigma} \frac{\Sigma_{t(k_{[tn]}/t)}}{\sigma_0 \sqrt{k_{[tn]}/t}} \sqrt{\frac{k_{[tn]}}{tn}} \quad (3.7.8)$$

Rappelons que $\left(\frac{\Sigma_{tn}}{\sigma_0\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers un mouvement brownien standard B_t donc on aura aussi convergence en loi de sa sous-suite $\left(\frac{\Sigma_{t(k_{[tn]}/t)}}{\sigma_0 \sqrt{k_{[tn]}/t}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un brownien standard. Or,

$$\left| \frac{\Sigma_{t(k_{[tn]}/t)}}{\sigma_0 \sqrt{k_{[tn]}/t}} - \frac{\Sigma_{t[k_{[tn]}/t]}}{\sigma_0 \sqrt{[k_{[tn]}/t]}} \right| \leq \left| \frac{\sum_{i=[k_{[tn]}/t] + t}^{[k_{[tn]}/t] + t} V_i}{\sigma_0 \sqrt{[k_{[tn]}/t]}} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{presque sûrement,} \quad (3.7.9)$$

car presque sûrement, V_i est fini et $V_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} 0$. D'où,

$$\frac{\Sigma_{t(k_{[tn]}/t)}}{\sigma_0 \sqrt{k_{[tn]}/t}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} B_t.$$

Enfin, nous avons déjà vu que $\frac{k_{[tn]}}{tn}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{\mathbb{E}[\tau]}$, d'où on en conclut que :

$$\frac{\Sigma_{k_{[tn]}}}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \frac{\sigma_0}{\sigma} B_t \sqrt{\frac{1}{\mathbb{E}[\tau]}} \stackrel{(d)}{=} B_t, \quad (3.7.10)$$

ce qui termine la preuve.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aidékon, E. (2008). Transient random walks in random environment on a Galton-Watson tree. *Probab. Theory Related Fields*. **142**, 525–559.
- [2] Ben Arous, G. et Fribergh, A. (2014). Biased random walks on random graphs. Disponible à arXiv :math/1406.5076
- [3] Ben Arous, G., Fribergh, A., Gantert, N. et Hammond, A. (2007). Biased random walks on a Galton-Watson tree with leaves. Disponible à arXiv :math/0711.3686
- [4] Bouchaud, J. P. (1992). Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. *Journal de Physique I* **2**, 1705–1713.
- [5] Durrett, R. (2005). *Probability : Theory and Examples* (3^e éd.). Duxbury, Belmont, USA : Thomson–Brooks/Cole.
- [6] Dwass, M. (1969). The Total Progeny in a Branching Process and a Related Random Walk. *Journal of Applied Probability*. **6(3)**, 682–686.
- [7] Enriquez, N., Sabot, C., Tournier, L. et Zindy, O. (2010). Stable fluctuations for ballistic random walks in random environment on \mathbb{Z} . Disponible à arXiv :1004.1333
- [8] Ethier, S. M., Kurtz, T. G. (1986). Markov processes. *New York : John Wiley and Sons*.
- [9] Fribergh et Hammond, A. (2011). Phase transition for the speed of the biased random walk on the supercritical percolation cluster. Disponible à arXiv :math/1103.1371
- [10] Galton, F. (1873) Problem 4001. *Educational Times*. **25(143)**, p.300. Re-péré à <http://ioearc.da.ulcc.ac.uk/9344/1/Educational%20Times%20Vol%2025%20Iss%20143.PDF>.

- [11] Galton, F. et Watson, H. W. (1875) On the probability of the extinction of families. *The journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*. **Vol. 4**, 138–144.
- [12] Grimmett, G. R. (1999) *Percolation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi :10.1007/978-3-662-03981-6
- [13] Hernandez-Lerma, O. et Lasserre, J. B. (2012). *Markov Chains and Invariant Probabilities*. Birkhäuser Verlag, Suisse.
- [14] Kesten, H., Kozlov, M. V., et Spitzer, F. (1975). A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Mathematica* **30.2**, 145-168.
- [15] Lyons, R. (1990). Random walks and percolation on trees. *Annals of Probability*. **18**, 931–958.
- [16] Lyons, R. (1992). Random walks, capacity and percolation on trees. *Annals of Probability*. **20**, 2043–2088
- [17] Lyons, R. et Peres, Y. (2016). Probability on trees and networks. *Cambridge University Press*. 18–31. Repéré à <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/prbtree.html>.
- [18] Lyons, R., Pemantle, R. et Peres, Y. (1996). Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields*. **106**, 254–268.
- [19] Pemantle, R. (1988). Phase transition in reinforced random walk and RWRE on trees. *Annals of Probability*. **16** 1229–1241.
- [20] Saloff-Coste, L. (1997). Lectures on finite Markov chains. Dans P. Bernard, (éd.), *Lectures Notes in Mathematics : École d'été de probabilités de Saint Flour XXVI-1996* (vol. **1665**, p. 301–413). Berlin, Heidelberg : Springer.
- [21] Solomon, F. (1975). Random walks in a random environment. *Annals of probability*. **3**, 1–31.

- [22] Sznitman, A.-S. (2000). Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment. *The Journal of the European Mathematical Society*. **2**, 93–143.
- [23] Sznitman, A.-S. (2003). On the anisotropic random walk on the percolation cluster. *Communications in mathematical physics*. **240 (1-2)**, 123–148.
- [24] Sznitman, A.-S. et Zerner, M. (1999). A law of large numbers for random walks in random environment. *Annals of probability*. **27(4)**, 1851–1869.
- [25] Yeo, D. (2012, 21 Octobre). Branching Processes and Dwass's Theorem. Repéré à <https://eventuallyalmosteverywhere.wordpress.com/2012/10/21/branching-processes-and-dwasss-theorem/>
- [26] User :PAR (2005). *Probability density function for symmetric Levy distributions* [png, 1300×975]. Repéré à https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/01/Levy_distributionPDF.png
- [27] User :PAR (2005). *Probability distribution function for the Levy skew distribution* [png, 1300×975]. Repéré à https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Levyskew_distributionPDF.png
- [28] Young S. K. (Mai 2015). *College of Business, NY, USA*. Repéré à <http://dx.doi.org/10.3389/fams.2015.00001>