

**Université de Montréal**

**Étude des conditions d'extinction d'un système  
prédateur-proie généralisé avec récolte contrôlée**

par

**Julien Courtois**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

12 septembre 2016

# Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

## Étude des conditions d'extinction d'un système prédateur-proie généralisé avec récolte contrôlée

présenté par

**Julien Courtois**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Marlène Frigon*

---

(président-rapporteur)

*Christiane Rousseau*

---

(directeur de recherche)

*Jacques Bélair*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le

*19 octobre 2016*

---

## SOMMAIRE

---

Dans ce mémoire, nous étudions le système prédateur-proie de Gause généralisé avec une récolte de proie contrôlée

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) - h_1(x, x_0, l) \\ \dot{y} = y [-d + cp(x)] \end{cases}$$

avec la fonction de réponse de Holling de type III généralisée

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

Nous étudions ce système pour des paramètres  $a, c, d, k, m, r, l$  strictement positifs et pour  $b \geq 0$ . Le système sans récolte ( $h_1 \equiv 0$ ) avait été étudié par Lamontagne [18] et avec récolte constante par Etoua [10]. Nous introduisons une fonction de récolte contrôlée  $h_1(x, x_0, l)$  sur les proies tenant compte du nombre de proies et dépendant d'un seuil de récolte  $x_0 \geq 0$ . Ceci permet de rendre le système réaliste pour  $x$  au voisinage de 0, d'optimiser la récolte, et de prévenir la possibilité d'extinction des espèces que le système avec  $h_1$  constant pouvait avoir pour tout  $x > 0$  et valeurs de paramètres. Ce type de fonction de récolte implique a priori la manipulation d'un système discontinu : nous étudions donc des techniques de lissage de ces discontinuités par régularisation. Nous faisons d'abord un retour sur les systèmes sans et avec récolte de proie constante aux chapitres 1 et 2 en traçant les diagrammes de bifurcations exacts et les portraits de phase de ces systèmes. Au chapitre 3, nous étudions le système discontinu et les méthodes de régularisation afin de choisir la plus optimale. Finalement, nous assemblons le tout au chapitre 4 avec l'étude du système avec récolte de proie régularisé, en passant par l'étude complète du système avec approvisionnement de proie, et donnons les différents effets sur les portraits de phase selon les conditions initiales.

**Mots clés** : Récolte contrôlée, système dynamique discontinu, régularisation, bifurcation de Hopf, bifurcation hétéroclinique, cycles limites, approvisionnement de proie

## SUMMARY

---

In this thesis, we study the generalized Gause predator-prey system with controlled prey harvest

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) - h_1(x, x_0, l) \\ \dot{y} = y [-d + cp(x)] \end{cases}$$

with the generalized Holling response function of type III

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}.$$

We study this system with strictly positive parameters  $a, c, d, k, m, r, l$  and  $b \geq 0$ . The system with no harvest ( $h_1 \equiv 0$ ) was studied by Lamontagne [18] and the one with constant harvest by Etoua [10]. We introduce a controlled prey harvesting function  $h_1(x, x_0, l)$  taking into account the number of preys with a harvesting threshold  $x_0 \geq 0$ . This makes the system realistic for  $x$  around 0, it optimizes the harvesting, and it prevents the possibility of species' extinction which exists in the system with  $h_1$  constant for all  $x > 0$  and all parameters. This type of harvesting function a priori implies handling a discontinuous system: therefore we study smoothing techniques of such discontinuities by regularization. We first return on systems without and with constant harvest in Chapters 1 and 2 by drawing the exact bifurcation diagrams and phase portraits of those systems. In Chapter 3, we study the discontinuous system and the regularization methods in order to choose the optimal one. Finally, we put together everything in Chapter 4 by studying the regularized prey harvesting system through a complete study of the prey stocking system, and we highlight the different effects on the phase portraits under the initial conditions.

**Key words** : Controlled harvesting, discontinuous dynamical system, regularization, Hoft bifurcation, heteroclinic bifurcation, limit cycles, prey stocking

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Table des matières</b> .....	v
<b>Liste des figures</b> .....	ix
<b>Liste des tableaux</b> .....	xvii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
<b>Chapitre 1. Étude du système sans récolte</b> .....	13
1.1. Simplification du système.....	13
1.2. Points fixes du système.....	15
1.3. Analyse des points fixes.....	19
1.3.1. Étude du point $\mathcal{O}$ .....	20
1.3.2. Étude du point $\mathcal{A}$ .....	21
1.3.2.1. Cas $\delta < \delta_{\mathcal{A}}$ .....	21
1.3.2.2. Cas $\delta > \delta_{\mathcal{A}}$ .....	21
1.3.2.3. Cas $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$ .....	21
1.3.3. Étude du point $\mathcal{M}$ .....	22
1.4. Bifurcation transcritique.....	23
1.5. Bifurcation de Hopf.....	25
1.6. « Bifurcation » du nœud-foyer.....	29
1.7. Diagrammes de bifurcation et portraits de phase.....	37
1.7.1. Validation numérique.....	38
<b>Chapitre 2. Étude du système avec récolte de proie constante</b> ...	43

2.1. Points fixes du système .....	43
2.1.1. Cas $y = 0$ .....	44
2.1.2. Cas $p(x) = \delta$ .....	45
2.1.2.1. $\lambda > \frac{\rho}{4}$ .....	46
2.1.2.2. $\lambda = \frac{\rho}{4}$ .....	46
2.1.2.3. $\lambda < \frac{\rho}{4}$ .....	47
2.2. Analyse des points fixes .....	48
2.2.1. Région $\lambda = \frac{\rho}{4}$ .....	48
2.2.2. Région $\lambda < \frac{\rho}{4}$ .....	49
2.2.2.1. Points fixes $\mathcal{O}_\lambda$ (ou $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}}$ ) et $\mathcal{A}_\lambda$ (ou $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$ ) .....	49
2.2.2.2. Point fixe $\mathcal{M}_\lambda$ .....	50
2.3. Bifurcations transcritiques et du col-nœud .....	52
2.4. Bifurcation de Hopf d'ordre $n \geq 1$ .....	55
2.4.1. Calcul de la courbe de bifurcation dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	56
2.4.2. Calcul de l'ordre de bifurcation .....	58
2.4.3. Calcul de la courbe de bifurcation dans d'autres plans .....	60
2.5. Surfaces de transition nœud-foyer .....	64
2.6. Bifurcations globales : Hétéroclinique et double cycle .....	67
2.7. Bifurcation de col nilpotent .....	80
2.8. Portraits de phase du système pour $\lambda > 0$ .....	84
<b>Chapitre 3. Systèmes discontinus et fonction de récolte contrôlée</b> .....	<b>93</b>
3.1. But d'une fonction de récolte contrôlée .....	93
3.2. Système d'EDOs discontinus .....	97
3.2.1. Traitement d'une discontinuité et solutions .....	97
3.2.2. Étude du système discontinu .....	101
3.2.2.1. Fonction discontinue étudiée .....	101
3.2.2.2. Analyse des points fixes .....	103
3.2.2.3. Stabilité et multiplicité du point $\mathcal{P}_{x_0}$ .....	108
3.2.2.4. Bifurcations locales .....	113
3.2.2.5. Portraits de phases du système .....	115
3.3. Approximation continue du système par régularisation .....	119

3.4. Choix de $\eta_1(x)$ .....	124
3.4.1. Fonction polynomiale.....	124
3.4.2. Fonction trigonométrique.....	127
3.4.3. Fonction logistique.....	128
3.5. Application au système étudié.....	131
<b>Chapitre 4. Étude du système avec récolte de proie contrôlée...</b>	<b>133</b>
4.1. Trajectoires à l'infini.....	134
4.2. Simplification du système.....	136
4.3. Étude du système avec approvisionnement de proie constante.....	139
4.3.1. Points fixes du système.....	139
4.3.2. Bifurcations du système.....	142
4.3.3. Implémentation au sous-système $F_\phi$ .....	147
4.4. Étude de la récolte de proie contrôlée linéairement.....	149
4.4.1. Récolte de proie linéaire.....	149
4.4.2. Implémentation au système contrôlée.....	151
4.5. Étude du système avec récolte de proie affine par morceaux.....	155
4.5.1. Récolte de proie affine.....	156
4.5.2. Étude du système avec récolte contrôlée.....	156
4.5.2.1. Analyse des points fixes.....	157
4.5.2.2. Bifurcations locales.....	165
4.6. Portrait de phase du système avec récolte contrôlée et interprétation biologique.....	169
4.7. Application des fonctions de récolte de proie contrôlée plus lisses ..	172
<b>Conclusion.....</b>	<b>180</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>185</b>
<b>Annexe A. Portrait de phase de la régularisation.....</b>	<b>A-i</b>
<b>Annexe B. Continuation et méthodes numériques.....</b>	<b>B-i</b>
B.1. Résolution numérique des équations différentielles.....	B-i
B.1.1. Méthodes Runge-Kutta (un pas).....	B-ii

B.1.2. Méthode à pas multiple .....	B-iii
B.2. Méthode de Newton.....	B-v
B.3. Continuation de paramètre.....	B-vi
B.4. Continuation par longueur d'arc.....	B-viii

## LISTE DES FIGURES

---

0.1	Fonctions de réponse de Holling ( $b > 0$ )	4
0.2	Fonctions de réponse de Holling ( $b < 0$ )	5
0.3	Fonction de réponse de Holling de type III généralisée pour $b \geq 0$	7
0.4	Fonction de réponse de Holling de type III généralisée pour $b < 0$	8
0.5	Exemple de zone d'extinction (rouge) des espèces au-dessus d'une séparatrice (verte) pour une récolte constante	10
0.6	Exemple d'extinction des espèces pour toutes conditions initiales et une récolte constante	10
0.7	Fonction de récolte de proie contrôlée $h_1(x, x_0, l)$	11
1.1	Graphique de la fonction de la condition (1.2.4b) pour une constante $\delta$	17
1.2	Courbes paramétrées $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ des positions possibles de $\mathcal{M}$ pour $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$	18
1.3	Les nullclines pour $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$ déterminant les différentes régions du portrait de phase	20
1.4	Col-nœud répulsif et attractif respectivement	24
1.5	Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace $(\alpha, \delta)$	27
1.6	Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace $(\beta, \delta)$	28
1.7	Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace $(\beta, \alpha)$	29
1.8	Bifurcation de Hopf $\mathcal{H}$ du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace $(\beta, \alpha, \delta)$	30
1.9	Diagramme des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace $(\beta, \alpha, \delta)$	30
1.10	Diagramme des courbes $\mathcal{H}, \mathcal{N} \pm$ dans le plan $(\alpha, \delta)$	33

1.11	Diagrammes de bifurcations pour plusieurs valeurs de $\rho > 0$ pour $\beta = 20$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	34
1.12	Diagramme des courbes $\mathcal{H}, \mathcal{N}\pm$ dans le plan $(\beta, \delta)$ .....	35
1.13	Diagrammes de bifurcations pour plusieurs valeurs de $\rho > 0$ pour $\alpha = 80$ dans le plan $(\beta, \delta)$ .....	35
1.14	Diagramme des courbes $\mathcal{H}, \mathcal{N}\pm$ dans le plan $(\beta, \alpha)$ .....	36
1.15	Diagrammes de bifurcation pour plusieurs valeurs de $\rho > 0$ pour $\delta = 0.0046$ dans le plan $(\beta, \alpha)$ .....	37
1.16	Surfaces de changement de type du point $\mathcal{M}$ dans l'espace $(\alpha, \delta, \beta)$ pour $\rho = 10^{-0.21} \approx 0.616595$ .....	37
1.17	Diagramme de bifurcation en fonction de $\delta$ pour $(\alpha, \beta) = (80, 10)$ et $\rho > 0$ obtenu avec XPPAUT.....	39
1.18	Amalgame de courbes de bifurcation de Hopf obtenues avec XPPAUT ..	40
1.19	Portraits de phase du système sans récolte pour différents paramètres $(\beta, \alpha, \delta)$ et $\rho = 0.01$ .....	42
2.1	Graphique de la courbe (2.1.2) dans l'espace $(x_*, \lambda)$ (pour $x = x_*$ )....	46
2.2	Courbes paramétrées $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ des positions possibles de $\mathcal{M}_\lambda$ pour $\delta \in ]p(x_{\mathcal{D}-}), p(x_{\mathcal{D}+})[$ pour différentes valeurs de $\lambda < \frac{\rho}{4}$ et points doubles/triples sur l'axe $x$ pour $\lambda \leq \frac{\rho}{4}$ .....	48
2.3	Les nullclines pour $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}_\lambda}, \delta_{\mathcal{A}_\lambda}[$ et $\lambda < \frac{\rho}{4}$ déterminant les différentes régions du portrait de phase .....	51
2.4	Portrait de phase aux points de bifurcations $\mathcal{CN}\pm$ .....	54
2.5	Diagrammes de bifurcations de type col-nœud en fonction de $\lambda_\rho$ pour $\rho > 0$ obtenus par XPPAUT.....	55
2.6	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour $\beta = 0$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	60
2.7	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour $\beta = 30$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	60
2.8	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour $\alpha = 50$ dans le plan $(\beta, \delta)$ .....	61

2.9	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour $\delta = 0.005$ dans le plan $(\beta, \alpha)$ .....	62
2.10	Diagramme de bifurcation de $\mathcal{H}$ pour $\lambda_\rho = 0.01$ .....	62
2.11	Diagramme de bifurcation de $\mathcal{H}$ pour $\lambda_\rho = 0.02$ .....	63
2.12	Diagramme de bifurcation de $\mathcal{H}$ pour $\lambda_\rho = 0.06$ .....	63
2.13	Diagramme de bifurcation de $\mathcal{H}$ pour $\lambda_\rho = 0.2$ .....	64
2.14	Diagramme des courbes $\mathcal{H}, \mathcal{N}^\pm$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ pour différents $\lambda$ et $\rho$ et $\beta = 30$ .....	66
2.15	Surfaces de changement de type du point $\mathcal{M}_\lambda$ pour $\lambda_\rho = 0.08$ et $\rho = 2.35$ .....	68
2.16	Exemple de boucle hétéroclinique de codimension infinie et de boucle homoclinique attractive .....	69
2.17	Séparatrices du système et exemple de connexion de selle pour $\rho = 0.01$ dans la région de paramètre $E_{\mathcal{H}^c}$ .....	71
2.18	Séparatrices du système et exemple de connexion de selle pour $\rho = 0.01$ dans la région de paramètre $E_{\mathcal{H}}$ autour de $\mathcal{BH}_-$ et loin de $\mathcal{BH}_2$ .....	72
2.19	Diagramme des bifurcations globales pour différents $\lambda_\rho$ pour $\beta = 30$ et $\rho = 0.001$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	75
2.20	Diagramme des bifurcations globales pour différents $\rho$ pour $\beta = 30$ et $\lambda_\rho = 0.013$ .....	76
2.21	Diagramme des bifurcations globales pour $\beta = 0$ et $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ .....	77
2.22	Diagramme de bifurcation obtenu par XPPAUT de $x$ en fonction de $\delta$ pour $(\alpha, \beta) = (50, 0)$ et $\lambda_\rho = 0.02$ .....	78
2.23	Diagramme de bifurcation du système avec récolte de proie dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	79
2.24	Diagramme de bifurcation de col nilpotent en fonction de $\lambda_\rho$ pour $\rho > 0$ obtenus par XPPAUT .....	82
2.25	Diagramme de bifurcation de col nilpotent dans l'espace $(\alpha, \delta, \beta)$ pour $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ .....	83
2.26	Portrait de phase du système au voisinage du col nilpotent au point $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$ pour des valeurs de paramètres sur $\mathcal{CN}_2$ (gauche) et $\mathcal{CN}_\infty$ (droite) à $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ .....	83

2.27	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres $(\beta, \alpha, \delta)$ dans $E_{\mathcal{M}_\lambda^c}$ .....	86
2.28	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres $(\beta, \alpha, \delta)$ dans $E_{\mathcal{B}\mathcal{H}^c}$ .....	87
2.29	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres $(\beta, \alpha, \delta)$ sur $\mathcal{B}\mathcal{H}$ .....	87
2.30	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres $(\beta, \alpha, \delta)$ dans $E_{\mathcal{B}\mathcal{H}}$ .....	88
2.31	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres pour $\beta = 0$ .....	89
2.32	Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres pour $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$ .....	89
3.1	Exemple de problème numérique d'un système discontinu autour d'une discontinuité .....	99
3.2	Point fixe d'un système discontinu de type 1 [12] .....	99
3.3	Points fixes non isolés d'un système discontinu de type 1 [12] .....	100
3.4	Points fixes d'un système discontinu de type 2 [12] .....	100
3.5	Points fixes d'un système discontinu de type 3 [12] .....	101
3.6	Graphique de $\eta_1$ définie par (3.2.2) .....	102
3.7	Graphiques de $g(x) = \rho x(1 - x)$ et $\eta_1(x)$ défini par (3.2.2) et portrait de phase sur $y = 0$ pour différents paramètres $x_0$ et $\lambda$ .....	105
3.8	Diagrammes de bifurcation des points singuliers sur $y = 0$ en fonction de $x_0$ du système discontinu pour $\lambda_\rho \geq 0$ .....	106
3.9	Diagrammes de bifurcation des points singuliers sur $y = 0$ en fonction de $\lambda_\rho$ du système discontinu pour $x_0 \geq 0$ .....	106
3.10	Diagramme de bifurcation des points singuliers du système discontinu sur $y = 0$ dans le plan $(x_0, \lambda_\rho)$ .....	107
3.11	Courbes paramétrées $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ des positions possibles de $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\lambda$ pour $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$ et points fixes sur l'axe $x$ pour différentes valeurs de $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$ et de $x_0 > 0$ .....	109
3.12	Points fixes d'un système discontinu de type 2 [12] .....	112

3.13	Les nullclines pour différents $\delta \in ]0, \delta_{\mathcal{A}_\lambda}[$ et $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ et $x_0 \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$ déterminant les différentes régions du portrait de phase .....	113
3.14	Exemple du changement de régions de paramètre par rapport au taux de récolte $\lambda$ d'un sous-système .....	116
3.15	Portraits de phase du système avec récolte discontinu pour différents seuils $x_0$ .....	117
3.16	Portraits de phase du système avec récolte discontinu pour différentes valeurs de $\delta$ et $x_0 < x_{\mathcal{D}-}$ .....	118
3.17	Fonctions de régularisation .....	121
3.18	Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation .....	123
3.19	Exemple d'apparition d'un antiselle par régularisation .....	123
3.20	Exemple d'apparition d'un point de selle par régularisation .....	124
3.21	Graphiques de $\eta_1$ définie par (3.4.2) pour $m = 0$ .....	127
3.22	Graphiques de $\eta_1$ définie par (3.4.2) pour $m = 1$ .....	127
3.23	Graphiques de $\eta_1$ définie par (3.4.2) pour $m = 2$ .....	127
3.24	Graphique de $\eta_1$ définie par (3.4.10) .....	128
3.25	Graphiques de $\eta_1$ définie par (3.4.15) pour diverses valeurs de $\omega$ .....	130
4.1	Schéma de la région attractive $R$ du théorème 4.1.1 .....	135
4.2	Type de la fonction de récolte contrôlée affine 4.0.3 dans le système $F_\phi$ en fonction de $x_0$ et $\sigma$ .....	137
4.3	Graphique de l'équation $\lambda = \rho x_*(1 - x_*)$ pour $\rho > 0$ .....	140
4.4	Courbes paramétrées $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ des positions possibles de $\mathcal{M}_\lambda$ pour $\delta \in ]0, p(x_{\mathcal{D}+})[$ pour différentes valeurs de $\lambda < 0$ et points doubles $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$ sur l'axe $x$ .....	141
4.5	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour $\beta = 5$ dans le plan $(\alpha, \delta)$ .....	143
4.6	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour $\alpha = 100$ dans le plan $(\beta, \delta)$ .....	144
4.7	Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour $\delta = 0.005$ dans le plan $(\beta, \alpha)$ .....	144

4.8	Diagramme de bifurcation du système (2.0.1) avec approvisionnement pour $\lambda_\rho = -0.138$ .....	145
4.9	Les nullclines pour $\delta < \delta_{\mathcal{A}\lambda}$ , $\lambda < \frac{\rho}{4}$ et $p(x_{\mathcal{D}-}) < 0$ déterminant les différentes régions du portrait de phase .....	146
4.10	Portrait de phase du système avec approvisionnement pour $\alpha = 40, \beta = 30, \delta = 0.009, \rho = 0.01, \lambda = -0.004$ ( $E_{\mathcal{H}^c}$ ).....	147
4.11	Portraits de phase du système (4.0.1) pour $\eta_1$ linéaire avec $\rho_0 \leq 0$ ....	150
4.12	Graphiques de $g(x)$ et $\eta_1(x)$ linéaire par morceaux pour $x_0 = \sigma$ et portrait de phase sur $y = 0$ pour différents paramètres $x_{0+}$ et $\lambda_\rho$ .....	152
4.13	Diagrammes de bifurcation en fonction de $x_0$ du système avec récolte contrôlée linéairement pour $\lambda_\rho \geq 0$ .....	154
4.14	Diagrammes de bifurcation en fonction de $\lambda_\rho$ du système avec récolte contrôlée linéairement pour $x_0 \geq 0$ .....	154
4.15	Diagramme de bifurcation des points singuliers du système à récolte linéaire par morceaux pour $y = 0$ dans le plan $(x_0, \lambda_\rho)$ .....	155
4.16	Graphiques de $g(x)$ et $\eta_1(x)$ affine par morceaux pour $0 < \sigma < x_0$ et différents $x_0$ .....	158
4.17	Diagrammes de bifurcation des points fixes sur $y = 0$ en fonction de $x_0$ du système à récolte affine par morceaux pour $\lambda_\rho \geq 0$ et $\sigma = hx_0$ pour $h = 0.1$ (haut) et $h = .78$ (bas).....	159
4.18	Diagrammes de bifurcation en fonction de $\lambda_\rho$ du système à récolte affine par morceaux pour $x_0 > 0$ et $\sigma = hx_0$ pour $h$ petit (haut) et grand (bas).....	160
4.19	Diagramme de bifurcation des points singuliers sur $y = 0$ du système à récolte affine par morceaux pour $y = 0$ et $\sigma = kx_0$ tel que $k \in ]0, 1[$ dans le plan $(x_0, \lambda_\rho)$ .....	161
4.20	Diagramme de bifurcation des points singuliers sur $y = 0$ du système à récolte affine par morceaux pour $y = 0$ et $\sigma = kx_0$ tel que $k \in [0, 1]$ dans l'espace $(x_0, \sigma, \lambda_\rho)$ .....	161
4.21	Courbes paramétrées $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ des positions possibles de $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$ pour $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$ et points sur l'axe $x$ pour différentes valeurs de $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$ et de $x_0, \sigma > 0$ .....	163

4.22	Les nullclines pour $\delta \in ]0, \delta_{\mathcal{A}\lambda}[$ et $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ et $x_{0+} \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$ déterminant les différentes régions du portrait de phase .....	164
4.23	Portraits de phase du système avec récolte affine par morceaux avec séparatrices pour 4 points fixes sur $y = 0$ .....	164
4.24	Portrait de phase du système avec fonction de récolte affine par morceaux dans le voisinage du point $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$ au point de bifurcation $\mathcal{F}$ de codimension 3 .....	168
4.25	Exemple du changement de régions de paramètre par rapport au taux de récolte $\lambda$ d'un sous-système .....	170
4.26	Comparaison des courbes de nullecline $y = f_{\eta_1}$ entre la fonction de récolte logistique (haut) et affine par morceaux (bas) .....	173
4.27	Comparaison des portraits de phase du système pour la fonction de récolte affine et la fonction logistique. En (d) on a extinction partout, et on n'a plus d'extinction en (a) et (b). .....	174
4.28	Fonction de récolte de proie contrôlée $\eta_1(x)$ dangereuse et favorable à l'extinction des espèces par rapport à $g(x)$ amenant au résultat 2.8.1 pour différentes valeurs de paramètres .....	175
4.29	Fonction de récolte de proie contrôlée $\eta_1(x)$ risquée et favorable à l'extinction des prédateurs par rapport à $g(x)$ amenant aux résultats 1.7.1 et 2.8.1 pour différentes valeurs de paramètres .....	176
4.30	Fonction de récolte de proie contrôlée $\eta_1(x)$ sécuritaire et favorable à la pérennité des espèces par rapport à $g(x)$ amenant au résultat 1.7.1 pour différentes valeurs de paramètres .....	176
4.31	Portrait de phase du système avec récolte linéaire par morceau pour $\rho_0 \leq 0$ .....	177
4.32	Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour $\lambda_\rho = 0.1$ et différents seuils seulement .....	178
4.33	Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour $\lambda_\rho = 0.2$ et différentes valeurs de $\delta$ seulement .....	179
4.34	Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour $\lambda_\rho \geq \frac{1}{4}$ .....	179

A.1	Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation et de formation d'une asymptote .....	A-i
A.2	Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation et de formation d'une asymptote .....	A-ii
A.3	Deux foyers sur la discontinuité formant un seul foyer .....	A-ii
A.4	Adoucissement formant un point de selle fusionnant avec un foyer ....	A-ii
A.5	Centre devenant un foyer .....	A-iii
A.6	Cycle limite défait pour former un point de selle .....	A-iii
A.7	Exemple d'adoucissement par régularisation.....	A-iii
A.8	Exemple d'adoucissement par régularisation.....	A-iv
A.9	Deux foyers symétriques formant un anti-selle.....	A-iv
A.10	Deux centres identiques formant deux boucles homocliniques puis un seul centre.....	A-v
A.11	Deux foyers non égaux formant un point de selle puis un seul foyer ...	A-v
A.12	Deux nœuds attractifs formant un nouveau point de selle puis un unique nœud attractif.....	A-vi
A.13	Deux nœuds de stabilité opposée restant semblables.....	A-vi
B.1	Interprétation graphique de la méthode de Newton.....	B-v
B.2	Représentation graphique de la continuation de paramètre .....	B-viii
B.3	Représentation graphique de la première itération.....	B-ix
B.4	Représentation graphique de la continuation par longueur d'arc .....	B-x

## LISTE DES TABLEAUX

---

0.1	Propriétés des types de fonctions de réponse de Holling .....	4
1.1	Points fixes/cycle limite et bifurcations du système sans récolte (1.1.9) pour $\rho > 0$ .....	38
2.1	Points fixes du système avec récolte constante avec référence aux portraits de phase de la figure 2.27 .....	52
2.2	Type du point $\mathcal{M}_\lambda$ du système avec récolte proie constante dans la région $E_{\mathcal{M}_\lambda}$ pour $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ .....	68
2.3	Cycles limites et stabilité du point $\mathcal{M}_\lambda$ du système avec récolte proie constante dans la région $E_{\mathcal{M}_\lambda}$ pour $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ et $\beta = 0$ .....	84
2.4	Cycles limites et stabilité du point $\mathcal{M}_\lambda$ du système avec récolte proie constante dans la région $E_{\mathcal{M}_\lambda}$ pour $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ et $\beta > 0$ .....	84
3.1	Points fixes et leur stabilité sur $y = 0$ du système discontinu ( $a$ : attractif, $r$ : répulsif, $s$ : semi-attractif) .....	107
3.2	Nature topologique du point $\mathcal{P}_{x_0}$ et sa multiplicité (entre parenthèses), pour $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$ .....	110
4.1	Points fixes du système avec approvisionnement constant .....	141
4.2	Type du point $\mathcal{M}_\lambda$ pour $\lambda < 0$ .....	145
B.1	Tableau de Butcher .....	B-ii

## REMERCIEMENTS

---

Je voudrais remercier en premier ma directrice de recherche Christiane Rousseau que je ne pourrai suffisamment remercier pour m'avoir fait confiance et accepté de me superviser tout au long de ma maîtrise. Je la remercie énormément pour son soutien financier, ses idées, son enseignement, son aide périodique et ses corrections de ce mémoire. Je la remercie particulièrement de m'avoir donné la chance de participer à une école d'été à Vancouver en juin 2015 qui m'a permis d'enrichir mes connaissances mathématiques et de rencontrer des personnes extraordinaires provenant du monde entier.

Je remercie évidemment mes collègues, professeurs et amis au département pour leur enseignement, leur amitié et leur passion des mathématiques que je partage avec eux. Merci à Anne Bourlioux pour sa confiance et ces belles discussions. Particulièrement, je remercie mon bon ami Damien pour son aide informatique et surtout sa bonne collaboration pour terminer nos devoirs dans son bureau jusqu'aux petites heures du matin.

Je remercie également mes parents pour leur soutien financier, sans qui je n'aurais pu étudier sans me soucier du reste, et surtout des bonnes sauces à spaghetti à ma mère! Merci à Louis-Jacques d'être toujours à mes côtés et de m'appuyer dans mes études. Et finalement, un grand merci à mon frère Jean-Sébastien sans qui je ne serais autant passionné par les sciences et qui ne cesse de m'apprendre de nouvelles choses quel que soit le domaine et de bien me conseiller dans la vie.

# INTRODUCTION

---

En mathématiques appliquées, la modélisation mathématique a pour but de formuler mathématiquement des systèmes réels afin de mieux comprendre leur fonctionnement, mais surtout, de formuler des équations afin de prédire et extrapoler des données, qu'elles soient biologiques ou physiques. Ceci est précisément l'esprit derrière l'étude des systèmes dynamiques appliqués à des systèmes réels biologiques. Depuis leur introduction par Lotka et Volterra, les systèmes prédateur-proie sont fréquemment utilisés par des équipes multidisciplinaires pour bien modéliser la dynamique des populations d'espèces animales. Ces systèmes contiennent typiquement des paramètres représentant des valeurs biologiques obtenues sur le terrain ou des valeurs de contrôle. L'idée des paramètres est que le même système peut servir pour plusieurs couples de populations prédateur-proie.

À la base les systèmes prédateur-proie modélisent et simplifient grandement un système naturel. L'ajout de nouveaux termes dans le système, de paramètres et de dimensions permet une description plus réaliste de l'évolution des populations modélisées. Mathématiquement parlant, l'ajout de ces termes complexifie l'analyse du système et permet également l'apparition de changements qualitatifs dans les comportements, appelés *bifurcations*, autrement absents dans des systèmes plus généraux. Par souci de réalisme, il est primordial d'utiliser des valeurs de paramètres provenant d'un domaine de définition « possible et utile ». Les modèles utilisés seront des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO). En faisant une analyse poussée du système en fonction des paramètres, il sera possible de suivre numériquement l'évolution des différents *portraits de phase*. Ceux-ci contiennent l'amalgame des lignes de courant du système et représentent la dynamique des populations en fonction du temps. Ils permettent d'obtenir une interprétation biologique de celle-ci afin de classifier les différentes conditions initiales menant à la coexistence des espèces (équilibre) ou à l'extinction d'une ou des espèces. De cette manière, il sera aussi possible d'ajouter un ou des termes au système naturel modifié, représentant une action externe sur le système pour

orienter l'évolution des populations et ainsi "choisir" le dynamisme de population désiré en pratique selon les conditions initiales.

Dans ce mémoire, nous analyserons l'ajout de paramètres de termes de récolte permettant de généraliser le plus possible l'étude d'un système prédateur-proie afin de l'appliquer de manière plus réaliste à un système réel. Le type de système étudié est *le modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et prédateurs* de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) - yp(x) - h_1(x) \\ \dot{y} = y[-d + q(x)] - h_2(y) \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Ce système typique montre l'interaction entre une population  $x$  de proies et une population  $y$  de prédateurs avec une fonction de réponse logistique des proies en l'absence des prédateurs

$$g(x) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (0.0.2)$$

pour un taux de croissance de proie  $r$  et un coefficient de capacité de l'environnement  $k$  pour les proies. Également, il y a une fonction de croissance des prédateurs

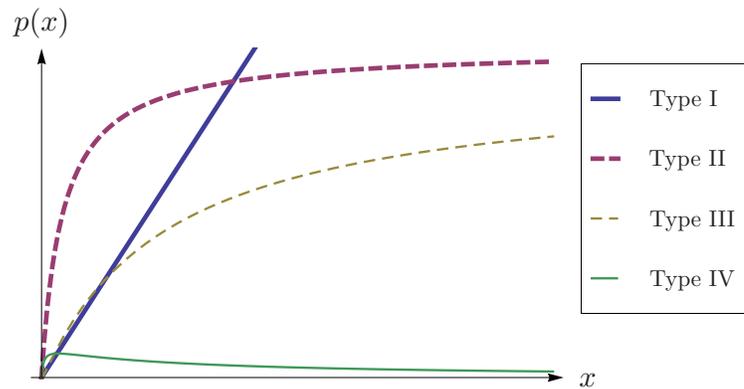
$$q(x) = cp(x) \quad (0.0.3)$$

selon le nombre de proies consommées pour un ratio  $c$  associé par prédateur sur prédateurs nés. La fonction  $p(x)$  est une fonction de réponse des prédateurs selon le nombre des proies. Typiquement, cette fonction contient des paramètres adaptés à un système précis et modélise, entre autres, le taux de mortalité total des proies dû à la prédation ( $-yp(x)$ ). Ici, nous utilisons une fonction de réponse de Holling. Plusieurs types de ces fonctions existent pour différents types de comportements étudiés (voir tableau 0.1 et figures 0.1 et 0.2).

En absence d'interventions extérieures, des systèmes de prédateur-proie, selon les paramètres et conditions initiales, peuvent mener à des conditions de coexistence ou d'extinction. Après compréhension de la dynamique du système dans la nature, il est évident qu'une intervention extérieure (humaine par exemple) dans le but de contrôler un système à des fins économiques peut être aisément faite par une récolte contrôlée (harvesting) de la proie ( $h_1$ ) si cette espèce est apte à être récoltée. Également, selon la relation entre le prédateur et le contrôleur

Type	$p(x)$	$p'(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$	$p'(0)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} p'(x)$	Critique
I	$ax$	$a$	$\infty$	$a$	$a$	$\emptyset$
II	$\frac{bx}{ax+1}$	$\frac{b}{(1+ax^2)}$	$\frac{b}{a}$	$b$	$0$	$\emptyset$
III	$\frac{mx^2}{ax^2+1}$	$\frac{2mx}{(ax^2+1)^2}$	$\frac{m}{a}$	$0$	$0$	$\{0\}$
III généralisé	$\frac{mx^2}{ax^2+bx+1}$	$\frac{mx(bx+2)}{(ax^2+bx+1)^2}$	$\frac{m}{a}$	$0$	$0$	$\left\{0, -\frac{2}{b}\right\}$
IV	$\frac{mx}{ax^2+1}$	$\frac{m-2amx^2}{(ax^2+1)^2}$	$0$	$m$	$0$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}$
IV généralisé	$\frac{mx}{ax^2+bx+1}$	$\frac{m-2amx^2}{(ax^2+bx+1)^2}$	$0$	$m$	$0$	$\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}$

TABLEAU 0.1. Propriétés des types de fonctions de réponse de Holling

FIGURE 0.1. Fonctions de réponse de Holling ( $b > 0$ )

externe, plus particulièrement si ce prédateur peut possiblement être un prédateur (ou danger) pour le contrôleur extérieur, la récolte de ce dernier pourrait s'avérer plus difficile ( $h_2$ ). Dans le cas où les récoltes simultanées de proies et de prédateurs sont possibles, par exemple, des humains qui supervisent un environnement sauvage (réserve contrôlée par exemple) avec des lièvres (proies) et des renards (prédateurs), cette pratique pourrait s'avérer intéressante si également

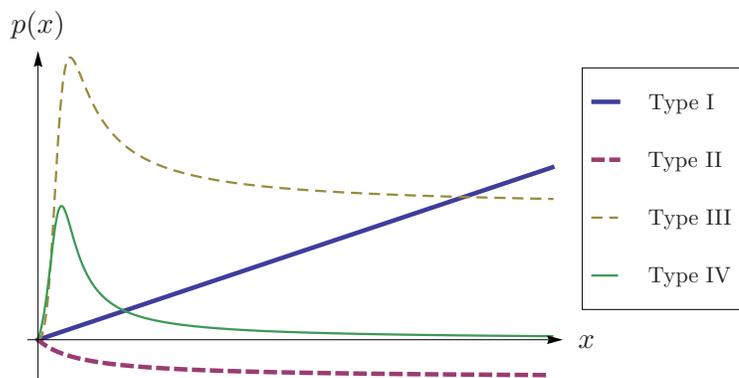


FIGURE 0.2. Fonctions de réponse de Holling ( $b < 0$ )

ces espèces se font rares dans une région particulière. La récolte contrôlée, ou séparation contrôlée des spécimens pourrait ainsi forcer la coexistence des espèces pour, par exemple, sauver une espèce dans le but d'en faire la revente.

La récolte des espèces est appliquée dans plusieurs domaines, notamment l'élevage en nature sauvage comme la pêche, et ce, à des fins économiques. En reprenant le dernier exemple, une ferme en milieu sauvage qui fait l'élevage de lièvres pour la viande et de renards pour la fourrure pourrait faire coexister ces deux espèces dans un système où le lièvre se nourrit de végétaux du milieu et le renard de lièvres dans un système contrôlé. Si l'éleveur désire faire perpétuellement de l'argent, il a intérêt à adapter sa récolte de proie pour permettre un équilibre du système afin de préserver les deux espèces et maximiser ses profits. Si l'éleveur est soumis à un quota, il devra également limiter sa récolte au détriment de ses profits, ce qui influencera évidemment son taux de récolte.

Cependant l'approvisionnement des espèces (stocking) peut s'avérer également possible dans le but d'empêcher l'extinction d'une espèce en difficulté dans le système. Par exemple, si plusieurs systèmes proie-prédateur de mêmes espèces existent à différents endroits, la récolte de proies pour un système  $A$  ( $h_1 > 0$ ) peut s'avérer l'approvisionnement de proies pour un système  $B$  ( $h_1 < 0$ ). Également la récolte de prédateurs pour un système  $A$  ( $h_2 > 0$ ) peut s'avérer l'approvisionnement de prédateurs pour un système  $B$  ( $h_2 < 0$ ). Combinant ces possibilités, un éleveur pourrait récolter les proies d'un système stable et approvisionner un autre système en lacune de proies, se privant de profit sur les proies récoltées à court terme, mais permettant d'empêcher l'extinction des espèces pour faire de la récolte ultérieurement et de meilleurs profits à long terme.

Typiquement, les fonctions de récoltes dépendent également de paramètres précis. Elles sont souvent étudiées dans leur forme la plus simple, soit une récolte constante, afin de ne pas trop complexifier le système : c'est ce qu'a fait Etoua [10]. Toutefois, ce type de récolte est irréaliste lorsque la population de proies est faible et elle est sujette à des possibilités d'extinctions des espèces, même pour de grandes populations de proie initiales. La question se pose. Est-il possible d'améliorer la fonction de récolte tout en minimisant la complexité additionnelle du système et en maintenant l'équilibre à long terme ?

Dans le but d'étudier un système de la forme (0.0.1), nous voulons adapter les fonctions de récolte  $h_1$  et  $h_2$  pour rendre le système plus utile. Il est sensé de ne pas récolter la même quantité selon que la population est nombreuse ou en voie d'extinction, d'où l'étude d'une fonction de récolte contrôlée. Typiquement, nous voulons que ces fonctions dépendent explicitement de la population récoltée et d'autres paramètres pouvant influencer la récolte, par exemple, un quota, des limites physiques (équipement) à la récolte, une quantité totale récoltée régulée, la valeur des récoltes sur le marché, etc. ... La prise en compte de tous ces paramètres va évidemment complexifier la fonction de récolte et donc l'étude du système.

Mais auparavant, en l'absence d'intervention extérieure, nous voulons partir d'un système avec coexistence des populations que ce soit à un équilibre fixe ou cyclique. Il serait absurde de récolter lorsque les populations sont déjà en voie d'extinction. Donc, comment profiter de ce système en incorporant la récolte tout en préservant la pérennité des populations ? Évidemment, des questions préalables se posent par rapport au comportement du modèle biologique sans intervention externe, à la dépendance aux conditions initiales et à l'effet des perturbations des paramètres biologiques dans le temps ([18]).

Cependant, avec l'introduction d'une récolte de la population, les questions suivantes se posent

- (1) Comment contrôler la récolte d'une espèce afin de maximiser les profits ?
- (2) Comment contrôler la récolte pour empêcher la surexploitation et l'extinction des espèces, c'est-à-dire quel est le *rendement soutenu maximal* ([7]) de chacune des espèces dans un système prédateur-proie ?

- (3) Quel type de fonction de récolte est la plus réaliste et, mathématiquement, la moins complexe ?
- (4) Est-il possible d'empêcher l'extinction inévitable d'espèces par un contrôle des récoltes et des approvisionnements ?
- (5) Quels sont les effets des interventions externes sur la dynamique de populations et les effets d'une perturbation des paramètres biologiques et/ou de contrôle dans le temps ?

Nous répondons à ces questions dans le cas du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) - h_1(x, x_0, l) & (0.0.4a) \\ \dot{y} = y [-d + cp(x)] & (0.0.4b) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

avec la fonction de Holling de type III généralisée

$$p_{(III)}(x) = p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}, \quad (0.0.5)$$

et fonction de récolte de proie contrôlée  $h_1(x, x_0, l)$ , le tout pour des constantes réelles  $a, b, c, d, k, r, l, x_0 > 0$  et  $b \geq 0$ .

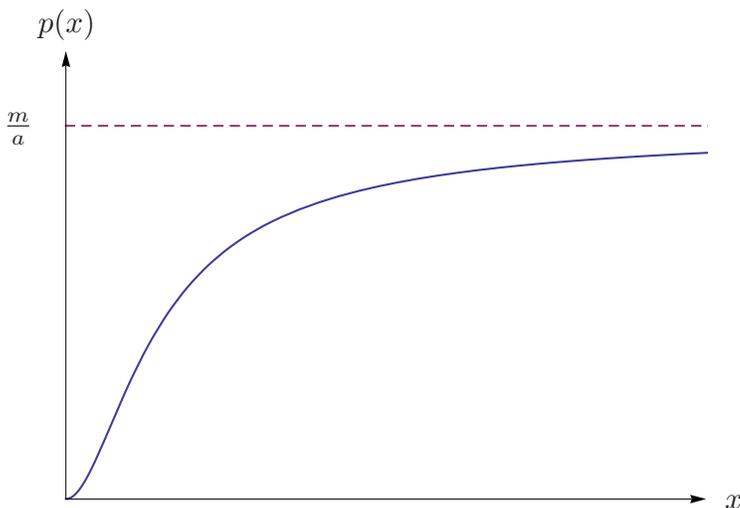


FIGURE 0.3. Fonction de réponse de Holling de type III généralisée pour  $b \geq 0$

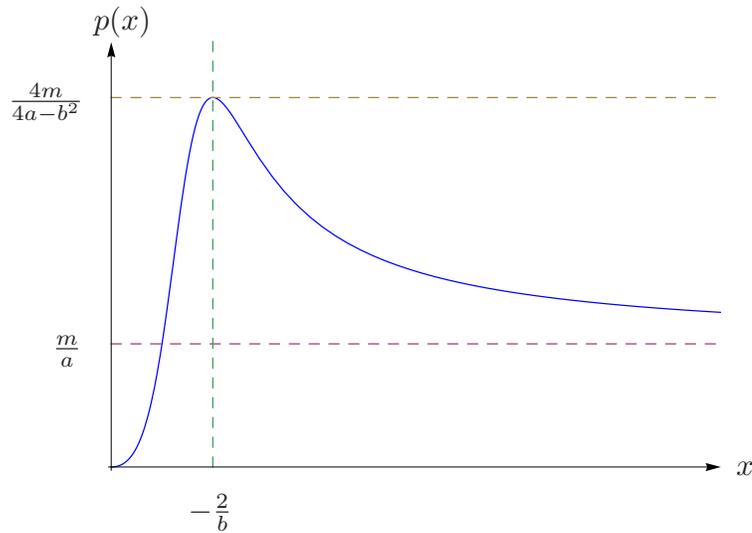


FIGURE 0.4. Fonction de réponse de Holling de type III généralisée pour  $b < 0$

La fonction de réponse  $p(x)$  doit être positive puisqu'elle représente la réponse des prédateurs envers les proies, en particulier, le taux de prédation. On doit avoir  $p(0) = 0$  pour refléter qu'il faut des proies pour qu'il y ait prédation. Elle évolue en fonction du nombre de proies puisque la prédation change selon la quantité de proies ; elle augmente pour une quantité de proies plus grande. Le fait qu'elle stagne quand la population de proies est grande modélise un effet de défense de groupe. Dans le cas de la fonction de Holling de type IV, cet effet est plus fort puisqu'elle tend à 0 pour  $x$  grand. Aussi cette réponse tangentielle à  $x = 0$  est plus réaliste que les types I (proportionnelle) et II (rationnelle) puisqu'il est plus naturel d'atteindre un certain seuil de proies avant de considérablement augmenter le taux de prédation.

En se fiant à  $p'(x)$  dans le tableau 0.1, nous remarquons que (0.0.5) est strictement croissante pour  $b \geq 0$ , ce qui n'est pas le cas pour  $b < 0$ . Contrairement aux fonctions de Holling de type 1 et 2 où  $p''(x)$  est de signe constant pour  $x \geq 0$ , celle de type 3 atteint un point d'inflexion lorsque  $b > 0$ , et deux si  $b < 0$ . Également, (0.0.5) atteint son minimum global à  $x = 0$  et son maximum global à  $x = -\frac{2}{b}$  pour  $b < 0$ , et ce dernier se trouve à l'infini si  $b > 0$ .

Le type III généralisé est à la fois réaliste et, pour  $b \geq 0$ , relativement simple étant donné sa forme croissante. Pour ces raisons, dans ce mémoire, nous étudions

le système (0.0.4) avec fonction de réponse de Holling de type III généralisée seulement pour les valeurs de  $b \geq 0$  pour  $x \geq 0$ .

Une étude numérique succincte a été faite pour différents types de fonction  $h_2$ . Mais pour l'essentiel de notre mémoire, nous définissons une récolte de prédateurs constante nulle

$$h_2(y) := 0. \quad (0.0.6)$$

Une étude approfondie du système (0.0.4) a été faite par Coutu [6] et Lamontagne [18] (voir [19]) dans le cas du système sans récolte de proie (c.-à-d.  $h_1 = 0$ ). Également, une étude approfondie de ce système a été faite par Etoua [10] dans le cas du système avec récolte de proie constante non adaptative (c.-à-d.  $h_1 = l > 0, x_0 < 0$ ). Bien qu'il s'agisse du cas le plus simple de récolte, le problème avec la récolte constante est que  $\dot{x}|_{x=0} = -l < 0$  ce qui est absurde du point de vue biologique puisque la population de proie peut devenir négative. C'est pour cela qu'il faut traiter le système (0.0.4) avec une récolte nulle lorsque les proies sont en voie d'extinction près de  $x = 0$ . Évidemment, une mince bande  $x \in [0, \epsilon[ \forall \epsilon > 0$  peut être ignorée en pratique pour rendre le système applicable. Toutefois, la possibilité d'extinction ne se limite pas à cette mince bande qui représente une population faible de proie. Peu importe les valeurs des paramètres, ce système est toujours propice à l'extinction des espèces pour toutes conditions initiales se trouvant au-dessus d'une certaine séparatrice du système relié à un point fixe (voir figure 0.5), quelle que soit la population de proie initiale  $x(0) > 0$  et le taux de récolte  $l > 0$ . Évidemment, une récolte extravagante amène l'extinction des proies, suivi de celle des prédateurs. De ce fait, ce système permet l'extinction des espèces peu importe les conditions initiales pour un certain seuil  $l > l_0$  à cause de l'absence de point d'équilibre (voir figure 0.6b). C'est également le cas pour certaines valeurs des paramètres pour une récolte constante  $l$  aussi petite que désirée causé par la présence de points d'équilibre instables dénombrables où les prédateurs sont portés à extinction (voir figure 0.6a). Mais ainsi, le but de la récolte constante perd tout son sens puisque nous voulions originalement récolter un minimum de proies pour des fins économiques sans déranger les conditions initiales de coexistence des espèces, et non entraîner leur extinction, d'où la nécessité d'étudier un contrôle sur la récolte.

Nous allons donc adapter la fonction de récolte à une fonction simple et réaliste qui élimine les problèmes d'extinction de ce système. Entre autres, il serait

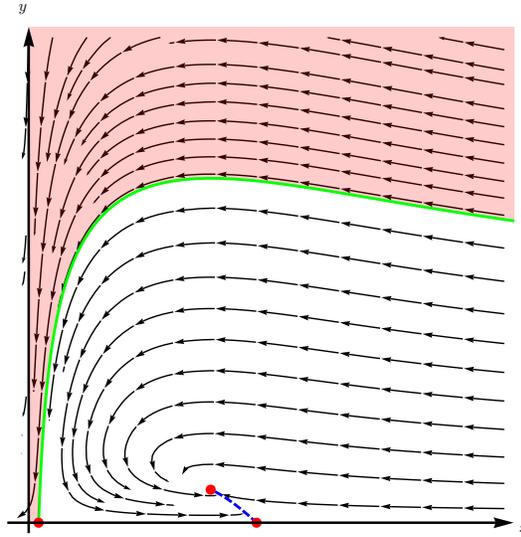


FIGURE 0.5. Exemple de zone d'extinction (rouge) des espèces au-dessus d'une séparatrice (verte) pour une récolte constante

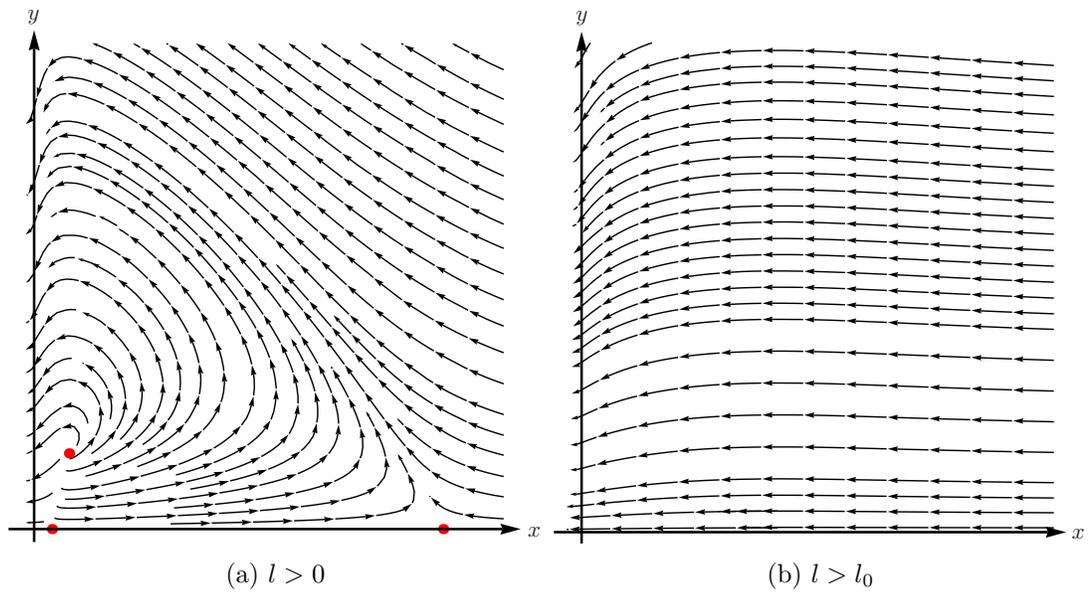


FIGURE 0.6. Exemple d'extinction des espèces pour toutes conditions initiales et une récolte constante

naturel pour un éleveur de proies d'agir similairement au prédateur comme la fonction de réponse de Holling de type III. Nous proposons donc une fonction de récolte avec un seuil  $x_0 \geq 0$  pour un taux de récolte maximale  $l > 0$  (figure 0.7). Comme cela donne un système discontinu, nous explorons plusieurs « lissages » d'une telle fonction, particulièrement en fonction d'un pas de récolte. Ceci sera

donc une forme naturelle de notre fonction de récolte contrôlée.

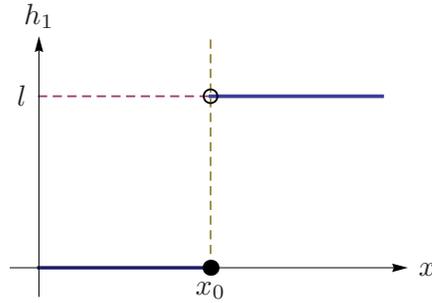


FIGURE 0.7. Fonction de récolte de proie contrôlée  $h_1(x, x_0, l)$

Nous ferons une analyse détaillée du système par le biais d’une étude théorique, complétée par une étude numérique, outil indispensable dans l’étude de systèmes non linéaires. Nous ferons souvent référence au mémoire [18] et à la thèse [10] puisque ce mémoire a pour but d’approfondir les portraits de phases des systèmes étudiés et de traiter d’une récolte plus générale.

D’abord, nous étudierons plus en profondeur le système (0.0.4) sans récolte de proie (chapitre 1) et avec récolte de proie constante (chapitre 2). Nous donnerons des diagrammes de bifurcation numériques exacts (plutôt que qualificatifs dans [10], voir remarque 0.0.1). Nous tracerons également les portraits de phase exacts du système avec récolte constante afin de mieux observer l’effet de la récolte sur le système vierge et de mettre en évidence les bassins de conditions initiales conduisant à l’extinction des populations. Nous traitons explicitement ces deux systèmes séparément afin de bien les distinguer.

Au chapitre 3, nous introduirons le concept de seuil de récolte et appliquerons l’étude de systèmes discontinus à notre système avec récolte contrôlée par le biais d’une fonction de récolte discontinue. Nous étudierons ensuite les possibilités de fonctions de récolte continues par le biais de la régularisation du système discontinu et approfondirons avec des exemples en annexe A.

Nous consoliderons le tout au chapitre 4 par l’étude du système avec la fonction de récolte régularisée choisie, affine par morceaux, grâce à l’amalgame des systèmes des chapitres 1 et 2, l’analyse des portraits de phase, et l’étude des conditions initiales. Nous vérifierons aussi que les différents types de lissage de la

fonction de récolte ont des effets similaires sur les portraits de phase. Nous observerons enfin les conséquences de telles fonctions de récolte lorsque appliquées à un système réel.

Tous les calculs dans ce mémoire, plus particulièrement la simplification des équations, ont été réalisés sur `Mathematica`. Les graphiques à données numériques ont été réalisés sur `Matlab` tandis que les graphiques à données analytiques ont été réalisés sur `Mathematica`. La vérification numérique des diagrammes de bifurcations a été calculée par `XPPAUT` et les détails des algorithmes numériques utilisés sont donnés en annexe B.

**Remarque 0.0.1.** *À moins d'indication contraire, tous les diagrammes de bifurcations sont obtenus analytiquement ou numériquement et représentent donc tous de vraies valeurs des paramètres de bifurcation.*

# Chapitre 1

---

## ÉTUDE DU SYSTÈME SANS RÉCOLTE

Dans ce chapitre, nous résumons et revoyons les résultats d'une étude du système (0.0.4) sans récoltes ni de proies ni de prédateurs, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}h_1(x) &:= 0, \\h_2(y) &:= 0.\end{aligned}\tag{1.0.1}$$

Nous revoyons les résultats de Lamontagne *et al.* [19] qui résument les mémoires de Coutu [6] et Lamontagne [18] que nous validerons par des tests numériques. Mais auparavant, nous allons simplifier le système général (0.0.4) en réduisant le nombre de paramètres afin d'étudier l'ensemble des portraits de phase et des diagrammes de bifurcations du système simplifié sans récolte avec les conditions (1.0.1). Ceci formera l'élément organisateur de nos résultats pour le système avec récoltes contrôlées.

### 1.1. SIMPLIFICATION DU SYSTÈME

Soit le système (0.0.4) défini avec la fonction de réponse de Holling de type III généralisé (0.0.5). On veut réduire le système qui dépend de 6 paramètres  $a, c, d, k, m > 0$  et  $b \geq 0$  ainsi que 2 fonctions  $(h_1, h_2)$ . Coutu [6] a observé qu'il était possible de réduire facilement ce nombre de paramètres par une transformation linéaire et un changement d'échelle sur le temps par

$$\begin{aligned}X &= Ax, \\Y &= By, \\T &= Ct,\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

où l'on recherche les valeurs de  $A, B, C$ . Nous obtenons ainsi le nouveau système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} \\ = \frac{r}{C} X \left( 1 - \frac{X}{Ak} \right) - \frac{m}{ABC} \left( \frac{X^2 Y}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right) - \frac{Ah_1}{C} \\ \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dy} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dT} \\ = Y \left[ -\frac{d}{C} + \frac{cm}{CA^2} \left( \frac{X^2}{\frac{a}{A^2} X^2 + \frac{b}{A} X + 1} \right) \right] - \frac{Bh_2}{C}. \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

Pour simplifier le système original, nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} Ak = 1, \\ \frac{cm}{CA^2} = 1, \\ \frac{m}{ABC} = 1. \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

En résolvant ce système pour nos 3 inconnues, nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k}, \\ B &= \frac{1}{ck}, \\ C &= cmk^2. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Nous obtenons ainsi la transformation linéaire

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{k}, \\ Y &= \frac{y}{ck}, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

et la transformation d'échelle sur le temps

$$T = cmk^2 t. \quad (1.1.6)$$

Et donc notre système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dT} = \frac{r}{cmk^2} X(1 - X) - \frac{X^2 Y}{ak^2 X^2 + bkX + 1} - \frac{h_1}{cmk^3} \\ \frac{dY}{dT} = Y \left( -\frac{d}{cmk^2} + \frac{X^2}{ak^2 X^2 + bkX + 1} \right) - \frac{h_2}{c^2 mk^3}. \end{array} \right. \quad (1.1.7)$$

Afin d'alléger la notation, posons

$$\alpha = ak^2, \quad \beta = bk, \quad (1.1.8a)$$

$$\rho = \frac{r}{cmk^2}, \quad \delta = \frac{d}{cmk^2}, \quad (1.1.8b)$$

$$\eta_1 = \frac{h_1}{cmk^3}, \quad \eta_2 = \frac{h_2}{c^2mk^3}. \quad (1.1.8c)$$

Cette transformation revient simplement à poser  $k = m = c = 1$  dans le système (0.0.4). En reprenant la notation initiale  $x := X, y := Y, t := T$  nous obtenons notre système simplifié

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \eta_1 \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)) - \eta_2, \end{cases} \quad (1.1.9a)$$

$$(1.1.9b)$$

avec

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}, \quad (1.1.10)$$

pour des paramètres à valeurs réelles  $\alpha, \rho, \delta > 0$  et pour  $\beta \geq 0$ .

À partir de maintenant, nous allons seulement étudier le système simplifié (1.1.9) qui dépend de 4 paramètres et 2 fonctions ( $\eta_1, \eta_2$ ). Nous ferons allusion à la fonction de réponse des proies en l'absence des prédateurs par  $g(x) = \rho x(1-x)$ .

Puisque dans ce chapitre nous travaillons sous les conditions (1.0.1), alors  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

**Remarque 1.1.1.** *À travers ce mémoire, les paramètres sont couplés comme en (1.1.8) car nous verrons qu'une perturbation de l'un ou l'autre des paramètres de chaque couple se reflète dans un changement similaire dans le système. Le paramètre  $\delta$  agira souvent comme paramètre indépendant lorsque nous voudrons modifier le système. Le paramètre  $\rho$  sera souvent fixé à une valeur par défaut.*

## 1.2. POINTS FIXES DU SYSTÈME

Afin d'obtenir les points fixes (ou points singuliers) de notre système d'équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire les points où le flot vectoriel est nul formant ainsi un ensemble invariant sur le temps, nous devons résoudre le système où les membres de droite de (1.1.9) s'annulent pour  $\beta \geq 0$ .

$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) = 0, \\ y[-\delta + p(x)] = 0. \end{cases} \quad (1.2.1a)$$

$$(1.2.1b)$$

Pour des points dans le premier quadrant, de (1.2.1b), deux cas se produisent. Dans le cas où  $y = 0$  nous obtenons aisément de (1.2.1a) les points fixes

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= (0, 0), \\ \mathcal{A} &= (1, 0),\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

et ce pour toutes les valeurs des paramètres. Ces points représentent évidemment des équilibres avec extinction des prédateurs et également avec extinction des proies à l'origine du système. Dans le cas où  $p(x) = \delta$ , il y a possibilité également d'un 3<sup>e</sup> point fixe

$$\mathcal{M} = (x_*, y_*),\tag{1.2.3}$$

si et seulement si  $\mathcal{M}$  satisfait aux conditions suivantes :

$$p(x_*) = \delta \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha\delta - 1)x_*^2 + \beta\delta x_* + \delta = 0,\tag{1.2.4a}$$

$$\rho x_*(1 - x_*) - yp(x_*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_* = \frac{\rho x_*(1 - x_*)}{\delta},\tag{1.2.4b}$$

le tout sous la condition

$$\delta < \frac{1}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\delta - 1 < 0.\tag{1.2.5}$$

Le discriminant et la solution positive de l'équation (1.2.4a) sont

$$\Delta = \delta \left( \delta\beta^2 - 4(\alpha\delta - 1) \right),\tag{1.2.6}$$

$$x_* = \frac{-\beta\delta - \sqrt{\Delta}}{2(\alpha\delta - 1)}.\tag{1.2.7}$$

En effet, en se fiant au graphique 0.3 de  $p(x)$ , pour  $x_* > 0$  nous remarquons que l'équation (1.2.4a) peut avoir soit aucune solution réelle positive ( $\delta \geq \frac{1}{\alpha}$ ), soit une solution unique positive ( $\delta < \frac{1}{\alpha}$ ) pour tout  $\alpha, \delta > 0$ , d'où la condition (1.2.5).

Toutefois, puisque seul le premier quadrant nous intéresse, une fois trouvé un  $x_*$  satisfaisant à la condition (1.2.4a), nous cherchons un  $y_* \geq 0$  satisfaisant (1.2.4b).

Nous remarquons que cette dernière équation est une fonction quadratique pour  $\delta, \rho > 0$  qui atteint son maximum à  $y_* = \frac{\rho}{4\delta}$  en  $x_* = \frac{1}{2}$ . Il est donc aisé de voir que

$$\frac{\rho x_*(1 - x_*)}{\delta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x_* < 1.\tag{1.2.8}$$

Et donc,

**Théorème 1.2.1.** *Il existe un troisième point fixe distinct  $\mathcal{M} = (x_*, y_*)$  dans le premier quadrant ouvert ( $x > 0, y > 0$ ) du système (1.1.9) sans récolte si les conditions (1.2.4), (1.2.5) et (1.2.8) sont satisfaites et ce pour  $\alpha, \delta, \rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ .*

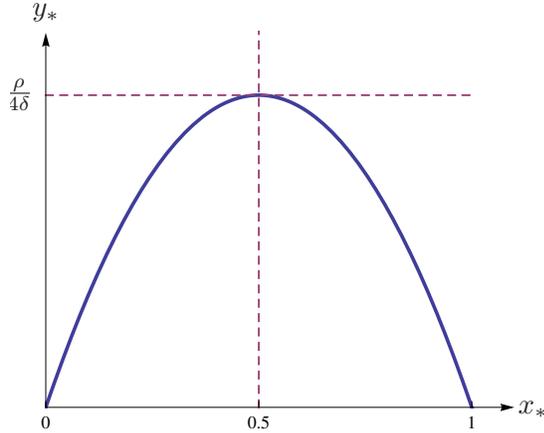


FIGURE 1.1. Graphique de la fonction de la condition (1.2.4b) pour une constante  $\delta$

**Remarque 1.2.1.** *Étant donnée l'expression explicite non élégante du point fixe  $\mathcal{M}$ , il sera plus simple de travailler implicitement : la valeur de  $x_*$  sera traitée souvent comme une variable pour nos calculs de bifurcations, ce qui facilitera grandement les calculs. Nous noterons  $\overline{\mathcal{M}}$  le point du théorème (1.2.1) sans la condition (1.2.8), c'est-à-dire lorsqu'il se trouve à la frontière ou en dehors du premier quadrant.*

Nous remarquons que lorsque  $x_* \rightarrow 1$ , alors  $y_* \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que dans ce cas  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  formant ainsi un point double  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$  sur la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}}} : \delta = \delta_{\mathcal{A}}$  où

$$0 < \delta_{\mathcal{A}} := p(1) = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} < \frac{1}{\alpha}. \quad (1.2.9)$$

Les paramètres satisfaisant à ces conditions correspondent à une surface de bifurcation transcritique représentant le passage de  $\mathcal{M}$  par  $\mathcal{A}$ , et que nous verrons en détail dans une section ultérieure. Cependant, si  $\delta \rightarrow 0^+$ , alors  $x_* \rightarrow 0^+$ . Comme  $x_* \sim 2\sqrt{\delta} + O(\delta)$ , alors  $y_* \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$ . Donc, nous avons la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}} : \delta = \delta_{\mathcal{O}}$  où

$$\delta_{\mathcal{O}} := p(0) = 0, \quad (1.2.10)$$

qui correspond à la surface de paramètre où le point  $\mathcal{M}$  passe à l'infini et disparaît du 1<sup>er</sup> quadrant. À la limite, pour  $\delta \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ , alors  $x_* \rightarrow \infty$ , et  $y_* \rightarrow -\infty$ . Ceci se passe sur la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\infty}} : \delta = \delta_{\infty}$  où

$$\delta_{\infty} := \lim_{x_* \rightarrow \infty} p(x_*) = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.2.11)$$

qui correspond à la surface de paramètre où la coordonnée  $x_*$  du point  $\overline{\mathcal{M}}$  passe de  $+\infty$  à  $-\infty$  et disparaît. Les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\infty}}$  correspondent à des bifurcations

se produisant toujours en bordure ou en dehors du premier quadrant respectivement pour  $\mathcal{M}$  et sont donc non pertinentes pour le modèle biologique ; nous les utilisons pour borner les valeurs de paramètre.

Donc les conditions d'existence de  $\mathcal{M}$  dans le théorème 1.2.1 se résument à  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$  pour  $\alpha, \rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Nous définissons la région

$$E_{\mathcal{M}} := \left( (\alpha, \delta, \beta) \mid \delta_{\mathcal{O}} < \delta < \delta_{\mathcal{A}} \right) \quad (1.2.12)$$

comme l'ensemble de paramètres permettant l'existence du point  $\mathcal{M}$ . Le paramètre  $\rho > 0$  de (1.2.4b) agit seulement sur l'amplitude en  $y$  du point  $\mathcal{M}$ , donc sur la taille de  $y_* > 0$ .

En évaluant la dérivée de  $y_*$  par rapport à  $x_*$  pour  $\delta = p(x_*)$ , nous obtenons un polynôme du 3<sup>e</sup> degré dont le discriminant est

$$\Delta_{\alpha, \beta} = 4 \left( \alpha^3 - 3\alpha^2(\beta + 9) + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \right). \quad (1.2.13)$$

Selon le signe de ce dernier, nous obtenons les courbes  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  de la figure (1.2).

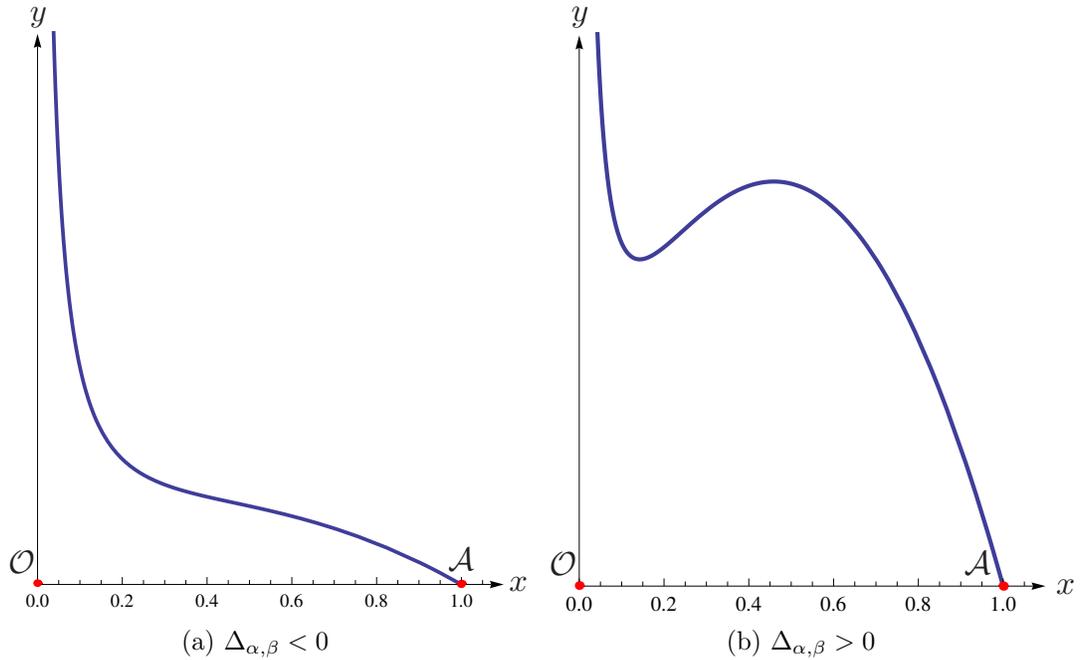


FIGURE 1.2. Courbes paramétrées  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  des positions possibles de  $\mathcal{M}$  pour  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$

Finalement, les droites d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$  sont des *droites invariantes* pour toutes les valeurs de paramètres. Ceci est une caractéristique typique d'un

système proie-prédateur. La droite  $x = x_*$  de la condition (1.2.4a) forme (avec  $y=0$ ) la *nullcline*  $\dot{y} = 0$ . Les courbes de solutions sont perpendiculaires à cette droite. Sur celle-ci, en se fiant à (1.1.9a), le flot en  $x$  agit ainsi

$$\dot{x}|_{(x_*, y > y_*)} < \dot{x}|_{(x_*, y = y_*)} = 0 < \dot{x}|_{(x_*, y < y_*)}. \quad (1.2.14)$$

Également, la courbe  $y = f(x) = \frac{\rho x(1-x)}{p(x)}$  pour  $x > 0$  est la nullcline  $\dot{x} = 0$ . Elle coïncide avec les courbes de la figure (1.2). Le flot en  $y$  du système par l'équation (1.1.9b) agit donc ainsi

$$\dot{y}|_{(x < x_*)} < \dot{y}|_{(x = x_*)} = 0 < \dot{y}|_{(x > x_*)}. \quad (1.2.15)$$

Les droites d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$  sont également des nullclines.

### Remarque 1.2.2.

- (1) *Puisque  $p(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ , par le graphique 1.1 nous voyons que  $\dot{x}|_{x > 1, y > 0} < 0$ , c'est-à-dire que le flot se dirige toujours vers la gauche lorsque  $x > 1$ . Nous verrons dans un prochain chapitre qu'une partie de la région  $0 < x < 1$  forme une région piégeante, ce qui élimine la possibilité d'une explosion à l'infini du nombre d'individus dans cette région et également la possibilité d'autres bifurcations en dehors de celle région.*
- (2) *Outre la droite  $x = 0$ , les variétés invariantes par le flot des points  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}$  ([16],[22],[26]) délimitent des régions de comportements dynamiques différents. Ces régions seront primordiales pour délimiter les conditions initiales d'extinction ou de survie des espèces pour notre système avec récolte contrôlé.*

**Remarque 1.2.3.** *Dans le cas où  $\beta < 0$ , cas traité par Lamontagne et al. [19], on peut avoir deux points singuliers dans le premier quadrant et les bifurcations associées : bifurcation du col-nœud et de Bogdanov-Takens ([18]).*

### 1.3. ANALYSE DES POINTS FIXES

Une analyse linéaire (voir [1],[26]) peut être faite en regardant le linéarisé du système dans le voisinage des points fixes, et ce à l'aide de la matrice jacobienne en fonction de  $(x, y)$ .

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - yp'(x) & -p(x) \\ yp'(x) & -\delta + p(x) \end{pmatrix}, \quad (1.3.1)$$

où

$$p'(x) = \frac{x(\beta x + 2)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} = \frac{p(x)^2(\beta x + 2)}{x^3}. \quad (1.3.2)$$

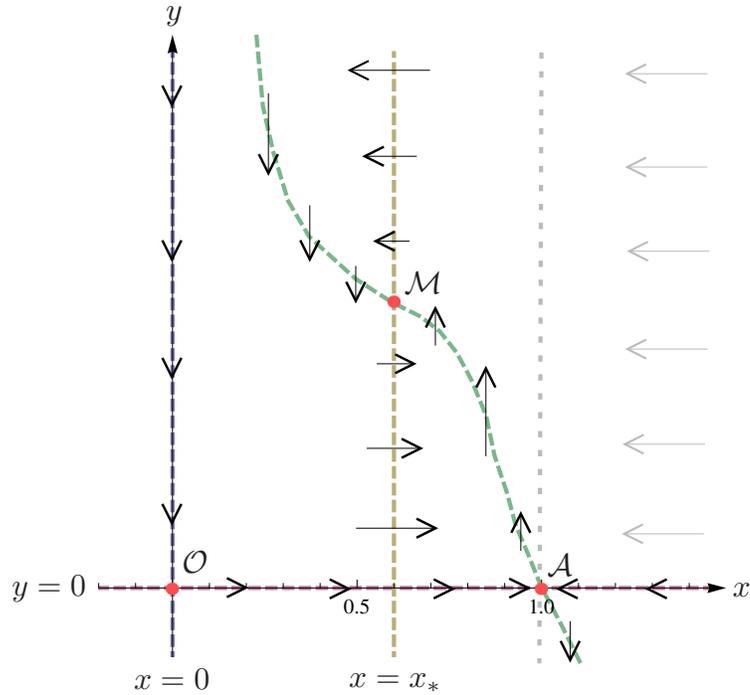


FIGURE 1.3. Les nullclines pour  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$  déterminant les différentes régions du portrait de phase

### 1.3.1. Étude du point $\mathcal{O}$

En évaluant  $\mathbf{Jac}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  à l'origine  $\mathcal{O} = (0, 0)$ , nous obtenons

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}. \quad (1.3.3)$$

Les valeurs propres de ce système sont  $\rho > 0$  et  $-\delta < 0$ , donc de signes opposés, associées aux vecteurs propres formant la matrice identité. Donc, d'après une analyse linéaire, ce point hyperbolique est de type selle avec variété stable définie par l'axe  $y$  et variété instable définie par l'axe  $x$ . Comme mentionné, ceci est typique pour un système proie-prédateur puisque si aucun individu n'existe, alors aucune évolution ne peut arriver. Le système est limité au premier quadrant pour ne pas avoir de population négative. Biologiquement parlant, ceci montre qu'en l'absence de proie, la population de prédateur est portée à disparaître puisque pour tout  $y > 0$

$$\begin{cases} \dot{x}|_{(x=0, y>0)} = 0, \\ \dot{y}|_{(x=0, y>0)} = -\delta y < 0, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

et donc ceci amène inévitablement à l'extinction des deux espèces. Donc l'extinction des proies amène l'extinction des deux espèces. Évidemment, ceci reflète

uniquement la cohabitation d'une unique espèce de proie et d'une unique espèce de prédateur et ceci ne prend pas compte un facteur d'adaptation des prédateurs face à l'absence de proies.

### 1.3.2. Étude du point $\mathcal{A}$

Pour le point  $\mathcal{A} = (1, 0)$ , nous obtenons

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\rho & -\delta_{\mathcal{A}} \\ 0 & \delta_{\mathcal{A}} - \delta \end{pmatrix}, \quad (1.3.5)$$

pour  $\delta_{\mathcal{A}}$  défini en (1.2.9). Les valeurs propres et vecteurs propres associés de ce système sont

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\rho < 0, & \mu_2 &= \delta_{\mathcal{A}} - \delta, \\ \nu_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nu_2 &= \begin{pmatrix} \delta_{\mathcal{A}} \\ \delta_{\mathcal{A}} - \delta - \rho \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

si  $\mu_2 \neq 0$ . Selon les valeurs de paramètre, le signe de  $\mu_2$  peut changer. Ainsi, une analyse linéaire nous donne diverses possibilités.

#### 1.3.2.1. Cas $\delta < \delta_{\mathcal{A}}$

Dans ce cas, les deux valeurs propres sont de signes opposés. Donc, d'après une analyse linéaire, ce point hyperbolique est de type selle avec variété instable tangente à la direction de  $\nu_2$  et avec variété stable définie par l'axe  $x$ . Cette dernière est présente dans tous les cas.

#### 1.3.2.2. Cas $\delta > \delta_{\mathcal{A}}$

Dans ce cas, les deux valeurs propres sont de même signe négatif. Donc, d'après une analyse linéaire, ce point hyperbolique est un nœud attractif.

#### 1.3.2.3. Cas $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$

Dans ce cas, la valeur propre  $\mu_2$  s'annule. Donc  $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$  est un point double non hyperbolique, donc une transition entre un nœud et un point de selle. La variété centre est tangente au vecteur

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} -\delta_{\mathcal{A}} \\ \rho \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3.7)$$

Nous allons voir que ce point est un col-nœud attractif.

Biologiquement parlant, en l'absence de prédateur, donc sur la variété stable de  $\mathcal{A}$ , la population de proie est portée à survivre puisque pour tout  $x > 0$

$$\begin{cases} \dot{x}|_{(x>0,y=0)} = \rho x(1-x), \\ \dot{y}|_{(x>0,y=0)} = 0. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

En se fiant à la figure 1.1, la population de proie survit et se stabilise à  $x = 1$ . Donc l'extinction des prédateurs amène la survie et stabilité des proies. Toutefois, ceci ne prend pas en compte l'adaptation de l'environnement face à l'extinction des prédateurs, ou même d'autres facteurs extérieurs comme des maladies ou autres prédateurs qui pourrait amener la population de « proies » à disparaître.

### 1.3.3. Étude du point $\mathcal{M}$

En évaluant le Jacobien au point  $\mathcal{M} = (x_*, y_*)$  satisfaisant au théorème 1.2.1, nous obtenons

$$\mathbf{Jac}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x_* - \frac{\delta^2 y_* (\beta x_* + 2)}{x_*^3} & -\delta \\ \frac{\delta^2 y_* (\beta x_* + 2)}{x_*^3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.9)$$

Nous allons étudier les valeurs propres grâce au déterminant et à la trace du jacobien avec l'aide du résultat de base suivant.

#### Théorème 1.3.1.

- (1) La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres.
- (2) Le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres.

Si l'on applique cette propriété, nous avons ceci.

**Théorème 1.3.2.** (voir [22],[16],[26]) Soit  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , le jacobien d'un système évalué à un point fixe  $X \in \mathbb{R}^2$  et soit  $\det(M)$ , le déterminant.

- (1) Si  $\det(M) > 0$ , alors  $X$  est un anti-selle. De plus, soit  $\text{tr}(M)$ , la trace. Si
  - (a)  $\text{tr}(M) < 0$ , alors  $X$  est un nœud/foyer attractif.
  - (b)  $\text{tr}(M) > 0$ , alors  $X$  est un nœud/foyer répulsif.
  - (c)  $\text{tr}(M) = 0$ , alors  $X$  est un centre/foyer faible.

Une partie imaginaire non nulle (resp. nulle) des valeurs propres de  $M$  indique que  $X$  est un foyer ou centre (resp. un nœud). En terme de  $\det(M)$  et  $\text{tr}(M) \neq 0$ , ceci revient à

- (i) si  $4\det(M) > \text{tr}(M)^2$ , alors  $X$  est un foyer ;
  - (ii) si  $4\det(M) = \text{tr}(M)^2$ , alors  $X$  est un nœud dégénéré/radial ;
  - (iii) si  $4\det(M) < \text{tr}(M)^2$ , alors  $X$  est un nœud.
- (2) Si  $\det(M) < 0$ , alors  $X$  est un point de selle.

Pour le déterminant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{Det}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) &= \frac{\delta^3 y_* (\beta x_* + 2)}{x_*^3} \\ &= \frac{\rho \delta^2 (\beta x_* + 2) (1 - x_*)}{x_*^2} > 0, \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

par les conditions (1.2.4b) et (1.2.8).

Pour la trace

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) &= \rho - 2\rho x_* - \frac{\delta^2 y_* (\beta x_* + 2)}{x_*^3} \\ &= \rho - 2\rho x_* - \frac{\rho \delta (\beta x_* + 2) (1 - x_*)}{x_*^2}. \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Donc, selon le signe de  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*)$ , la stabilité de  $\mathcal{M}$  suit le point (1) du théorème 1.3.2, et nous l'analyserons en détail dans une section ultérieure.

**Remarque 1.3.1.** Dans le cas où  $\overline{\mathcal{M}}$  se trouverait dans le quatrième quadrant ( $x_* > 1$ ), le déterminant du jacobien serait strictement négatif, et alors ce point serait un point de selle.

## 1.4. BIFURCATION TRANSCRITIQUE

Nous avons vu à la section précédente que les points  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}$  pouvaient ensemble former un point double.

**Définition 1.4.1.** Un col-nœud (ang. saddle-node) est un point singulier double tel que le linéarisé a une valeur propre nulle et une valeur propre non-nulle. Il est attractif (resp. répulsif) si la valeur propre non-nulle est négative (resp. positive) associé à sa variété stable  $W^s$  (resp. instable  $W^u$ ). Le flot sur la variété centre  $W^c$  associé à sa valeur propre nulle est semi-stable au col-nœud.

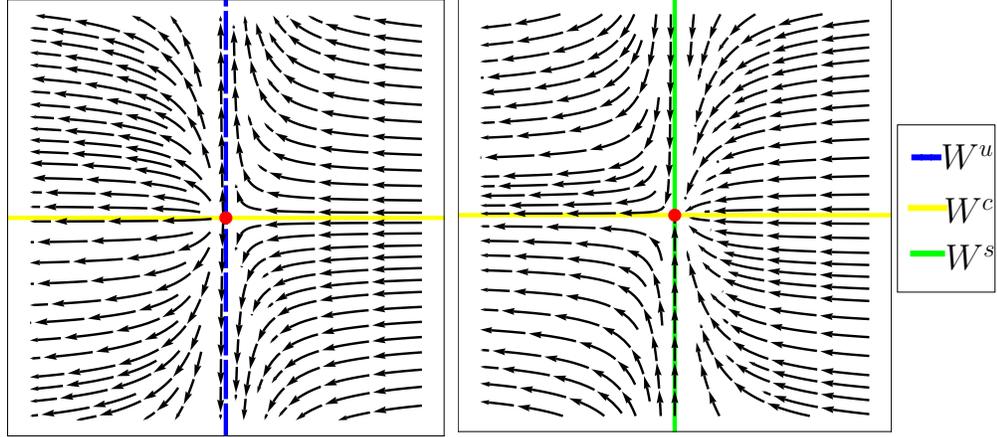


FIGURE 1.4. Col-nœud répulsif et attractif respectivement

Ce type de point provenant de la fusion de deux point fixes est un type de bifurcation.

**Définition 1.4.2.**

- (1) Une bifurcation de col-nœud est une bifurcation locale de codimension 1 où un point de selle (col) et un nœud se confondent pour disparaître. Voici sa forme normale pour un paramètre  $\epsilon$

$$\begin{cases} \dot{X} = -X^2 + \epsilon \\ \dot{Y} = \pm Y(1 + aX) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

- (2) Une bifurcation transcritique est une bifurcation locale de codimension 1 où deux points singuliers passent l'un à travers l'autre en échangeant leur type. Voici sa forme normale pour un paramètre  $\epsilon$

$$\begin{cases} \dot{X} = -X^2 + \epsilon X \\ \dot{Y} = \pm Y(1 + aX) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Ceci nous donne le résultat suivant

**Théorème 1.4.1.** *Il y a bifurcation transcritique sur la surface*

$$\mathcal{T}_- := \mathcal{S}_{\delta_A}. \quad (1.4.3)$$

*Sur cette surface, le point double  $\overline{\mathcal{M}_A}$  est un col-nœud attractif.*

En effet, une des valeurs propres du jacobien évalué en ce point s'annule. Tel que vérifié par Lamontagne *et al.* [19], en ramenant le point  $\mathcal{A}$  à l'origine par translation et le système par un changement de variable à une forme normale (voir Chochitaïchvili [10]), ceci nous permet d'étudier la variété centre du point fixe et d'identifier le point comme un col-nœud attractif. Cette bifurcation est transcritique puisque pour une perturbation de  $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$ , nous avons toujours 2 points fixes distincts dans le voisinage de  $\mathcal{A}$  :  $\overline{\mathcal{M}}_{\lambda}$  passe de nœud à point de selle en traversant dans le 4<sup>e</sup> quadrant pour  $\delta > \delta_{\mathcal{A}}$ .

Ceci est la seule possibilité pour ce type de bifurcation pour la récolte nulle puisque le point  $\mathcal{O}$  ne peut jamais former un point double avec  $\mathcal{M}$ . Contrairement au point à  $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ , lorsque  $x_* \rightarrow 0$ , nous avons que  $y_* \rightarrow \infty$  enlevant cette possibilité.

## 1.5. BIFURCATION DE HOPF

On peut facilement voir que seul le point  $\mathcal{M}$  a la possibilité d'avoir une *bifurcation de Hopf*.

**Définition 1.5.1.** *Une bifurcation de Hopf d'ordre  $n$  est une bifurcation locale se produisant lorsque les valeurs propres complexes conjuguées du linéarisé d'un point fixe traversent l'axe imaginaire. Ceci se produit lorsque le déterminant est strictement positif et que la trace s'annule.*

- *L'ordre correspond au nombre maximum de cycles limites pouvant apparaître dans un voisinage du point fixe par une perturbation du système. Ce nombre peut être déterminé par le calcul des coefficients de Lyapunov.*
- *Un ordre infini ( $n = \infty$ ) indique que le point fixe est un centre au point de bifurcation. Ceci est une bifurcation de Hopf dégénérée.*
- *Un ordre fini ( $n < \infty$ ) indique plutôt un foyer faible. La stabilité de ce dernier est indiquée par le signe du premier coefficient de Lyapunov non nul (le  $n^{\text{ième}}$ ).*

*En terme de stabilité d'un point fixe, la bifurcation de Hopf d'ordre 1 est le point de transition entre foyer attractif et foyer répulsif.*

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 1.5.1.** *Soient  $\alpha, \delta > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Sous les conditions du théorème (1.2.1),  $\forall \rho > 0$ , il y a bifurcation de Hopf d'ordre 1 supercritique au point  $\mathcal{M}$  sur*

la surface de paramètres

$$\mathcal{H} := (\alpha, \delta, \beta) : \begin{cases} \beta = \beta_{\delta_{\mathcal{H}}}(x_*), \\ \alpha = \alpha_{\delta_{\mathcal{H}}}(x_*), \\ \delta \in \left] 0, \frac{71 - 12\sqrt{17}}{32} \right], \\ x_* \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ , \end{cases} \quad (1.5.1)$$

définie par (1.5.8) dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$ . Il y a donc un cycle limite attractif  $\mathcal{C}_-$  pour les paramètres  $(\alpha, \delta, \beta) \in E_{\mathcal{H}}$ , région ouverte formée et délimitée par la surface  $\mathcal{H}$  (voir figure 1.10).

En effet, nous nous intéressons au point  $\mathcal{M} = (x_*, y_*)$  du théorème 1.2.1. Il est donc dans le premier quadrant ouvert exactement sous les conditions suivantes

$$\begin{cases} \alpha\delta - 1 < 0, \\ \delta = p(x_*), \\ y_* = \frac{\rho x_*(1 - x_*)}{\delta}, \\ 0 < x_* < 1, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

c'est-à-dire lorsque  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$ , donc dans la région  $E_{\mathcal{M}}$ . Par (1.3.10), nous avons que le déterminant du linéarisé (1.3.9) évalué en  $\mathcal{M}$  est strictement positif, donc  $\mathcal{M}$  est un anti-selle. Puisque nous pouvons écrire  $y_*$  en fonction de  $x_*$  (voir (1.2.8)), la trace du linéarisé (1.3.9), satisfaisant les conditions (1.5.2), s'annule dans le cas suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) &= 0 && \Leftrightarrow \\ \rho - 2\rho x_* - \frac{\rho\delta(\beta x_* + 2)(1 - x_*)}{x_*^2} &= 0 && \Leftrightarrow \\ 1 - 2x_* - \frac{\delta(\beta x_* + 2)(1 - x_*)}{x_*^2} &= 0 && \Leftrightarrow \quad (1.5.3) \\ 1 - 2x_* - \frac{(\beta x_* + 2)(1 - x_*)}{\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1} &= 0 && \text{par (1.2.4a)} \Leftrightarrow \\ (1 - 2x_*)(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1) &= (\beta x_* + 2)(1 - x_*) \end{aligned}$$

De ce dernier calcul, nous remarquons que le paramètre  $\rho$  n'apparaît pas dans la condition pour  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) = 0$ . Nous remarquons également que, puisque le membre de droite est strictement positif, alors  $(1 - 2x_*) > 0 \Leftrightarrow x_* < \frac{1}{2}$ . Étant donnée la condition (1.2.4a), nous obtenons en isolant  $\alpha$

$$(1 - 2x_*)(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1) = (\beta x_* + 2)(1 - x_*) \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \alpha_{\mathcal{H}} := \frac{\beta x_*^2 + 1}{x_*^2(1 - 2x_*)}, \quad (1.5.4)$$

et ce pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$  puisque  $\alpha > 0$ . En remplaçant le  $\alpha$  de (1.5.4) dans (1.2.4a), nous obtenons

$$\delta_{\alpha_{\mathcal{H}}} := \frac{x_*^2(1 - 2x_*)}{(1 - x_*)(\beta x_* + 2)}, x_* \in ]0, \frac{1}{2}[. \quad (1.5.5)$$

Nous obtenons ainsi la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dans l'espace de paramètre  $(\alpha, \delta)$  (figure 1.5) en fonction de tout  $\beta \geq 0$  paramétrée par le couple  $(\alpha_{\mathcal{H}}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}}})$  pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Il est aisé de voir que pour  $x_* \rightarrow 0^+$  ou  $x_* \rightarrow \frac{1}{2}^-$ , alors  $(\alpha_{\mathcal{H}}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}}}) \rightarrow (\infty, 0)$ .

**Remarque 1.5.1.** *La bifurcation de Hopf,  $\mathcal{H}$ , ne dépend pas de  $\rho$  : elle dépend explicitement de  $\alpha, \beta, \delta$ . Puisque  $x_*$  dépend explicitement des mêmes paramètres (voir (1.2.7)), alors ce dernier est utilisé comme paramètre de la courbe  $\mathcal{H}$  pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Le paramètre  $\rho$  n'a aucun effet sur la bifurcation : il amplifie seulement la valeur  $y_*$ .*

Il est aisé de voir que pour  $x_* \in ]\frac{1}{2}, 1[$ , alors  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) < 0$  et donc ne peut pas s'annuler pour aucun  $\alpha, \beta > 0$ . Donc, non seulement  $\mathcal{H}$  est bornée « inférieurement » et « supérieurement » par les surfaces de paramètres  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}}}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  (figure 1.9), mais elle est mieux bornée « supérieurement » par la surface de paramètre  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}} : \delta = \delta_{\mathcal{D}}$  où

$$\delta_{\mathcal{D}} := p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4} < \delta_{\mathcal{A}}. \quad (1.5.6)$$

À l'exception de mieux borner  $\mathcal{H}$ , cette surface n'est pas importante dans le cas sans récolte. Nous verrons son importance dans le cas avec récolte dans le prochain chapitre.

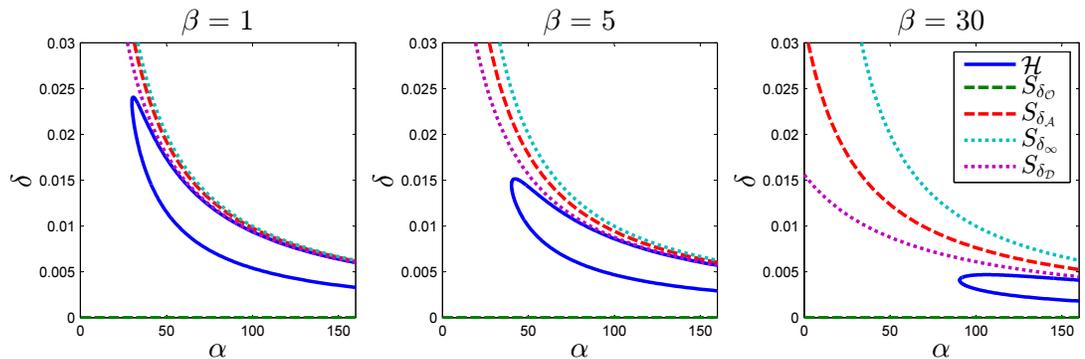


FIGURE 1.5. Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace  $(\alpha, \delta)$

De la même manière que  $\alpha_{\mathcal{H}}$ , afin d'obtenir une courbe sous forme paramétrique dans l'espace  $(\beta, \delta)$  (figure 1.6) nous pouvons isoler  $\beta$  pour les mêmes valeurs de  $x_*$  et par la condition (1.2.4a)

$$\beta = \beta_{\mathcal{H}} := \frac{-2\alpha x_*^3 + \alpha x_*^2 - 1}{x_*^2}, \quad (1.5.7a)$$

$$\delta_{\beta_{\mathcal{H}}} := \frac{x_*^3}{(1 - x_*)(\alpha x_*^2 - 1)}. \quad (1.5.7b)$$

Nous obtenons ainsi la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dans l'espace de paramètre  $(\beta, \delta)$  en fonction de  $\alpha \geq 27$  paramétrée par le couple  $(\beta_{\mathcal{H}}, \delta_{\beta_{\mathcal{H}}})$  pour  $x_* \in \left] \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{2} \right[$  puisque  $x_* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  correspond à une asymptote et les valeurs plus petites de  $x_*$  et  $\alpha < 27$  correspondent à des valeurs négatives de  $\delta_{\beta_{\mathcal{H}}}$  et  $\beta_{\mathcal{H}}$  respectivement.

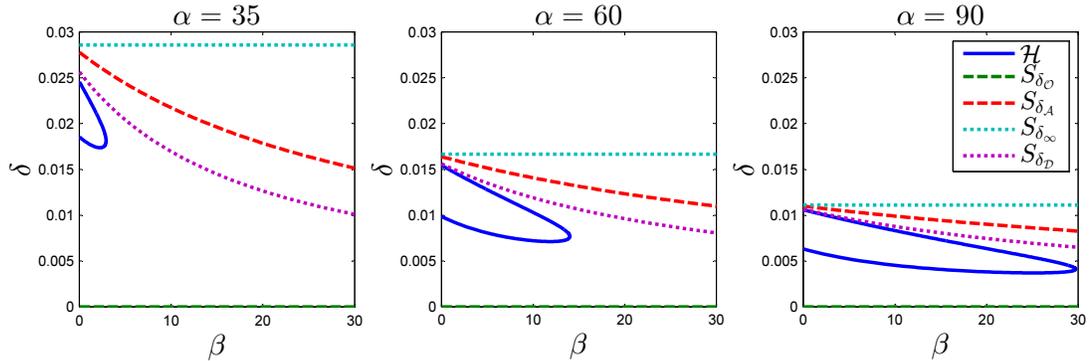


FIGURE 1.6. Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace  $(\beta, \delta)$

Également, nous obtenons la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dans l'espace de paramètre  $(\beta, \alpha)$  (figure 1.7) en fonction de  $\delta \in \left] 0, \frac{71-17\sqrt{17}}{32} \right]$  paramétrées par le couple  $(\beta_{\delta_{\mathcal{H}}}, \alpha_{\delta_{\mathcal{H}}})$  pour  $x_* \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$

$$\beta_{\delta_{\mathcal{H}}} := \frac{x_*^2 - 2x_*^3 - 2\delta + 2x_*\delta}{x_*\delta - x_*^2\delta}, \quad (1.5.8a)$$

$$\alpha_{\delta_{\mathcal{H}}} := \frac{x_*^3 + \delta - x_*\delta}{x_*^2\delta - x_*^3\delta}. \quad (1.5.8b)$$

Cette dernière est obtenue en éliminant  $\alpha$  des équations (1.2.4a) et (1.5.4) pour obtenir  $\beta_{\delta_{\mathcal{H}}}$  et en éliminant  $\beta$  des équations (1.2.4a) et (1.5.7a) pour obtenir  $\alpha_{\delta_{\mathcal{H}}}$ . Les valeurs de  $\delta > \frac{71-17\sqrt{17}}{32} \approx 0.02835$  correspondent à des valeurs de  $\beta_{\delta_{\mathcal{H}}}$  négatives.

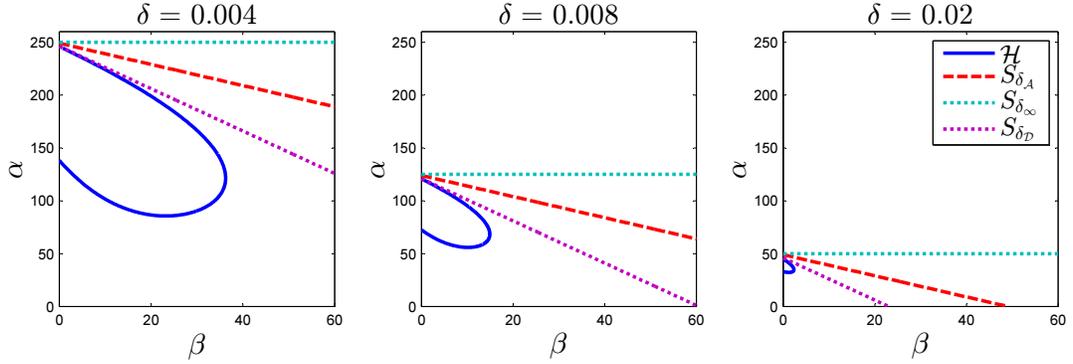


FIGURE 1.7. Diagrammes des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace  $(\beta, \alpha)$

Cette dernière paramétrisation sera utile pour paramétrer la surface de la bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\alpha, \beta, \delta)$  de la figure 1.8 puisqu'elle cause moins d'erreurs numériques. Afin de déterminer l'ordre de la bifurcation de Hopf, il est nécessaire d'utiliser les coefficients de Lyapunov. Tous les détails de ces calculs sont faits par Lamontagne *et al.* [19] et se résument en un théorème qui stipule que le premier coefficient de Lyapunov est  $L_1 < 0$  pour tout  $\alpha, \delta, \rho > 0$  et  $\beta \geq 0$  respectant les conditions (1.5.2). Ceci implique que la courbe  $\mathcal{H}$  représente un foyer faible attractif causé par une bifurcation de Hopf d'ordre un, dès lors la naissance d'un cycle limite attractif lorsque  $\mathcal{M}$  est répulsif. Donc  $\mathcal{H}$  est une surface de bifurcation de codimension 1. Puisque la naissance du cycle limite attractif fait passer la stabilité du point  $\mathcal{M}$  d'attractif à répulsif, cette bifurcation de Hopf est donc par définition de type *supercritique* ([26]).

Nous notons  $E_{\mathcal{H}}$  la région ouverte délimitée par la surface  $\mathcal{H} \subset E_{\mathcal{M}}$  qui correspond à l'espace de paramètres donnant un cycle limite attractif et  $E_{\mathcal{H}^c} \subset E_{\mathcal{M}}$  la région ouverte extérieure de  $E_{\mathcal{H}}$  délimité par  $\mathcal{S}_{\delta_A}$  (voir figure 1.10).

## 1.6. « BIFURCATION » DU NŒUD-FOYER

La stabilité d'un point fixe peut être analysée grâce au théorème (1.3.2). Un point anti-selle (hyperbolique) devient un nœud dégénéré lorsque ses variétés invariantes, donc ses valeurs propres, se confondent. Ceci marque en fait la transition entre un nœud, où les trajectoires s'approchent du point avec une tangente déterminée, et un foyer, où les trajectoires s'approchent du point en spiraland.

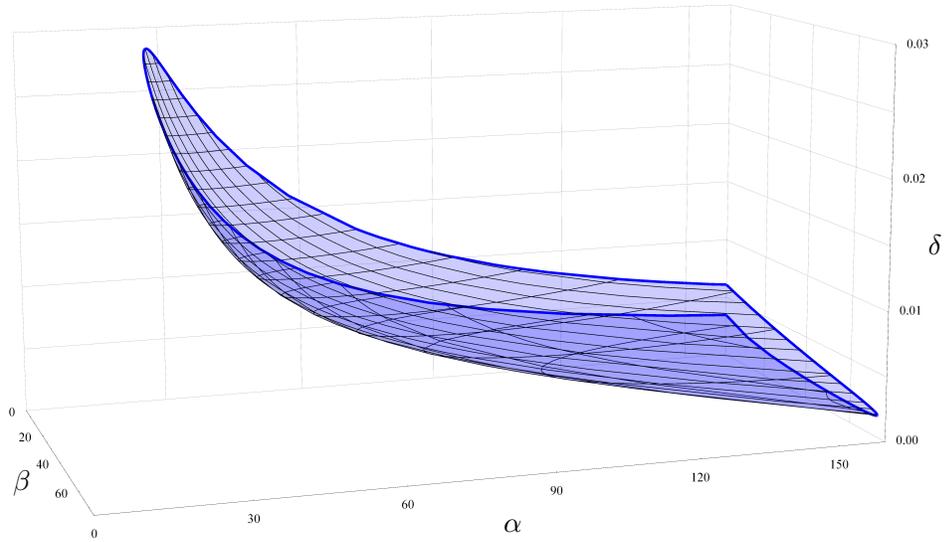


FIGURE 1.8. Bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$

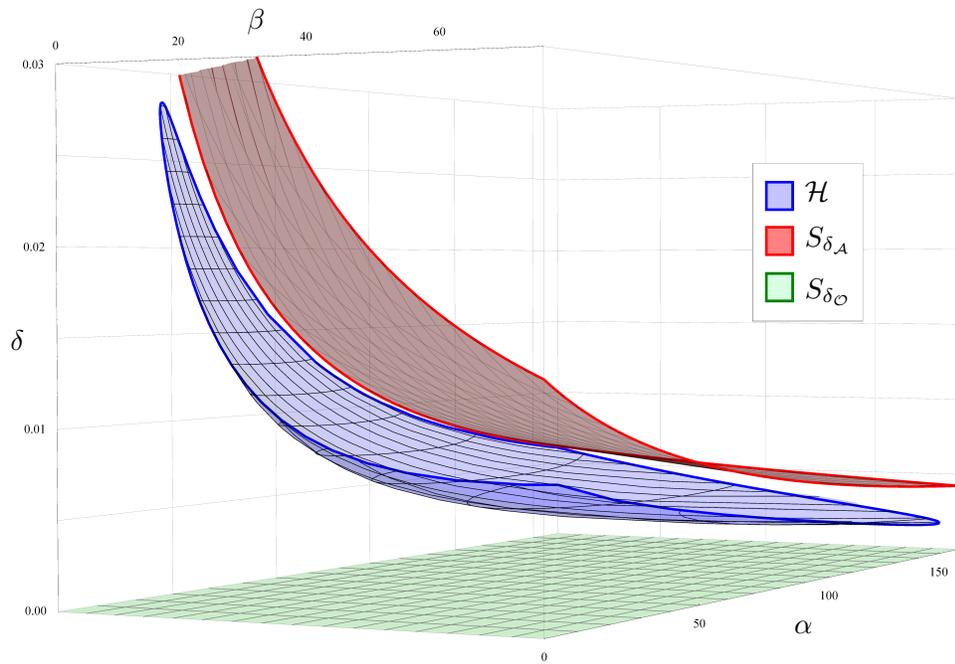


FIGURE 1.9. Diagramme des bifurcations du système (1.1.9) sans récolte dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$

Puisqu'un foyer est topologiquement équivalent à un nœud, cette transition n'est pas considérée comme une bifurcation lorsqu'on se limite à l'équivalence topologique des portraits de phase. Mais un nœud n'est pas visuellement équivalent à un foyer de par la nature de leurs valeurs propres (réelles ou complexes), d'où l'intérêt de l'étude de ce point de transition. Biologiquement parlant, la nature

du point fixe peut-être importante de par la manière dont les trajectoires l'atteignent, soit dans une direction asymptotique donnée (nœud), soit en spiralant autour (foyer). Puisque cette transition se produit à la fois pour les anti-selles attractifs ou répulsifs, les surfaces de bifurcation correspondantes sont de part et d'autre de la surface de bifurcation de Hopf. Une simple perturbation d'un foyer faible (ou centre) donne un foyer attractif ou répulsif. Donc une bifurcation de Hopf par définition peut seulement se produire lorsque le point fixe est un foyer puisque

$$4\det(M) > 0 = \text{tr}(M)^2. \quad (1.6.1)$$

Si l'on calcule les surfaces de la condition (1.6.1), il sera ainsi possible de connaître le type du point  $\mathcal{M}$  partout dans l'espace de paramètre pour  $\beta \geq 0$ . Ceci nous donnera le résultat du théorème 1.7.1 à la section suivante et les surfaces de transitions de la figure 1.16.

Le calcul des surfaces définies par (1.6.1) se fait de manière similaire au calcul de  $\mathcal{H}$ . En effet, puisque cette transition peut seulement s'appliquer au point  $\mathcal{M}$ , alors les conditions (1.5.2) doivent être satisfaites, ainsi que la condition (1.6.1) sur le jacobien évalué en  $(x_*, y_*)$ .

En substituant dans (1.6.1) la valeur du déterminant (1.3.10) et de la trace (1.3.11) tout en substituant  $\delta$  à  $p(x_*)$ , par (1.5.2) nous obtenons

$$\begin{aligned} & - \frac{4\rho(x_* - 1)x_*^2(\beta x_* + 2)}{(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1)^2} = \rho^2 \left( 1 - 2x_* + \frac{(x_* - 1)(\beta x_* + 2)}{\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{4\rho(x_* - 1)x_*^2(\beta x_* + 2)}{(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1)^2} + \rho^2 \left( 1 - 2x_* + \frac{(x_* - 1)(\beta x_* + 2)}{\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1} \right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1)^2} \rho \left[ \rho + 4\alpha^2 \rho x_*^6 - 4\alpha^2 \rho x_*^5 + 4\alpha\beta \rho x_*^5 + \alpha^2 \rho x_*^4 - 2\alpha\beta \rho x_*^4 \right. \\ & \left. + \beta^2 \rho x_*^4 + 4\beta x_*^4 + 4\alpha \rho x_*^3 - 4\beta x_*^3 + 8x_*^3 - 2\alpha \rho x_*^2 + 2\beta \rho x_*^2 - 8x_*^2 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 \left[ \rho(1 - 2x_*)^2 x_*^4 \right] + \alpha \left[ 2\rho(2x_* - 1)x_*^2 (\beta x_*^2 + 1) \right] \\ & + \rho (\beta x_*^2 + 1)^2 + 4(x_* - 1)x_*^2 (\beta x_* + 2) = 0 \end{aligned} \quad (1.6.2a)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \beta^2 \left[ \rho x_*^4 \right] + \beta \left[ 2x_*^2(\rho + x_*(x_*(\alpha\rho(2x_* - 1) + 2) - 2)) \right] \\ & + \rho (\alpha(2x_* - 1)x_*^2 + 1)^2 + 8(x_* - 1)x_*^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.6.2b)$$

et ce pour  $x_* \in ]0, 1[$ . L'équation (1.6.2a) est quadratique en  $\alpha$ , de discriminant

$$\Delta_\alpha = 16\rho(1-2x_*)^2(1-x_*)x_*^6(\beta x_*+2) > 0 \quad \forall x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[ , \rho > 0, \beta \geq 0. \quad (1.6.3)$$

Nous obtenons donc comme solution réelle

$$\alpha_{\mathcal{N}\pm} = \frac{\rho(\beta x_*^2 + 1) \mp 2\sqrt{\rho(1-x_*)x_*^2(\beta x_* + 2)}}{\rho(1-2x_*)x_*^2} \quad (1.6.4)$$

en fonction de  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$  pour  $\rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Le point  $x_* = \frac{1}{2}$  est une asymptote. En fait, il peut être montré que  $\alpha_{\mathcal{N}-} < 0$  pour  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$ , donc valeur rejetée, et que  $\alpha_{\mathcal{N}+} > 0$  pour  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$  qui correspond à des valeurs de la trace positive ( $\mathcal{N}+$ ), donc la région de l'anti-selle répulsif. Le reste des deux courbes lorsqu'elles sont à valeur positive correspondent à des valeurs de la trace négative ( $\mathcal{N}-$ ), donc la région de l'anti-selle attractif puisque seules les valeurs de  $\alpha > 0$  nous intéressent.

Tout comme pour  $\mathcal{H}$ , nous remplaçons les valeurs de  $\alpha_{\mathcal{N}\pm}$  dans (1.2.4a). Nous obtenons

$$\delta_{\alpha_{\mathcal{N}\pm}} = \frac{\rho x_*^2(1-2x_*)}{\rho(1-x_*)(\beta x_*+2) \mp 2\sqrt{\rho(1-x_*)x_*^2(\beta x_*+2)}}. \quad (1.6.5)$$

Ainsi, par un léger abus de notation, nous obtenons les courbes  $\mathcal{N}-$  pour l'anti-selle attractif et  $\mathcal{N}+$  pour l'anti-selle répulsif pour les  $\alpha_{\mathcal{N}\pm}$  associés dans l'espace de paramètre  $(\alpha, \delta)$  paramétrés par  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$  pour des valeurs de  $\rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ .

Nous remarquons également que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\alpha_{\mathcal{N}\pm}, \delta_{\alpha_{\mathcal{N}\pm}}) = \left( \frac{\beta x_*^2 + 1}{x_*^2(1-2x_*)}, \frac{x_*^2(1-2x_*)}{(1-x_*)(\beta x_*+2)} \right) = (\alpha_{\mathcal{H}}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}}}) \quad (1.6.6)$$

pour  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$ , ce qui donne la courbe  $\mathcal{H}$ . Les valeurs de  $x_* \in \left]0, \frac{1}{2}\left[\cup\right]\frac{1}{2}, 1\left[$  correspondent à des valeurs négatives de  $\alpha_{\mathcal{N}\pm}$  lorsque  $\rho$  est grand. Donc, tel que prévu, les courbes  $\mathcal{N}\pm$  bornent la courbe  $\mathcal{H}$ . En observant la figure 1.10, la région ouverte bornée par les courbes  $\mathcal{N}\pm$  de part et d'autre de  $\mathcal{H}$  à l'intérieur du premier quadrant que nous noterons  $E_{\mathcal{N}}$  correspond donc pour  $\mathcal{M}$  à un foyer instable s'il se trouve à l'intérieur de  $E_{\mathcal{H}}$  (c.-à-d.  $E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{N}}$ ) et un foyer stable sinon (c.-à-d.  $E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{N}}$ ). L'intérieur du complémentaire de  $E_{\mathcal{N}}$  sous  $\mathcal{S}_{\delta_A}$  dénotée  $E_{\mathcal{N}^c}$  correspond quant à elle à un nœud instable s'il se trouve à l'intérieur de  $E_{\mathcal{H}}$  (c.-à-d.

$E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{N}^c}$ ) et un nœud stable sinon (c.-à-d.  $E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{N}^c}$ ).

De plus, lorsque  $\rho \rightarrow 0$ , alors les courbes  $\mathcal{N}^{\pm}$  épousent les courbes limites  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}}}$  puisque celles-ci correspondent à la position de  $\mathcal{M}$  lorsque ce dernier se confond aux nœuds  $\mathcal{O}$  ou  $\mathcal{A}$ , bornant ainsi la limite à laquelle  $\mathcal{M}$  peut devenir un nœud avant de former un col-nœud. Également, la courbe  $\mathcal{N}^+$  traverse la droite  $\alpha = 0$  pour une certaine valeur de  $\rho$ . Biologiquement parlant et pour notre système, il s'agit d'une frontière, mais mathématiquement parlant, des valeurs de  $\alpha$  pourraient être négatives.

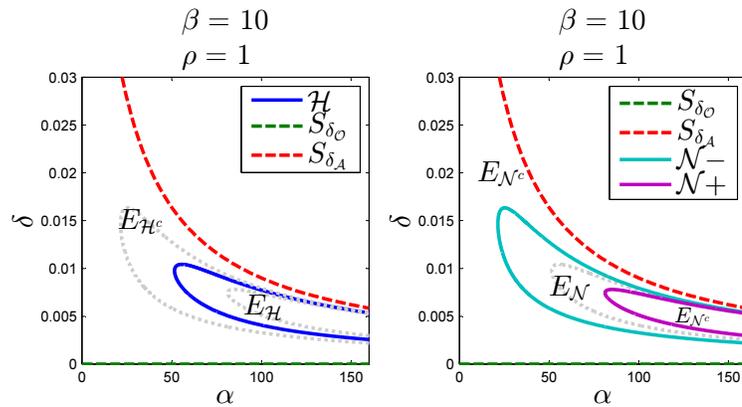


FIGURE 1.10. Diagramme des courbes  $\mathcal{H}, \mathcal{N}^{\pm}$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

De la même manière que pour  $\mathcal{H}$ , nous pouvons paramétrer les courbes  $\mathcal{N}^{\pm}$  dans l'espace  $(\beta, \delta)$ . Tout comme pour  $\alpha$ , l'équation (1.6.2b) est quadratique en fonction de  $\beta$  et son discriminant est

$$16x_*^4\Delta_\beta = 16(x_* - 1)x_*^5 \left( \rho + 2\alpha\rho x_*^3 + (1 - \alpha\rho)x_*^2 - (2\rho + 1)x_* \right) \quad (1.6.7)$$

Ce dernier n'est pas strictement positif pour  $x_* \in ]0, 1[$  lorsque  $\alpha$  et  $\rho$  varient. Il suffit alors de prendre seulement les valeurs de  $x_*$  telles que  $\Delta_\beta > 0$ . Les solutions associées sont :

$$\beta_{\mathcal{N}^\pm} = \frac{\rho(-2\alpha x_*^3 + \alpha x_*^2 - 1) + 2(1 - x_*)x_* \pm 2\sqrt{\Delta_\beta}}{\rho x_*^2}, \quad (1.6.8a)$$

$$\delta_{\beta_{\mathcal{N}^\pm}} = \frac{\rho x_*^3}{\rho(1 - x_*)(\alpha x_*^2 - 1) + 2(1 - x_*)x_* \pm 2\sqrt{\Delta_\beta}} \quad (1.6.8b)$$

pour  $\beta_{\mathcal{N}^\pm}, \delta_{\beta_{\mathcal{N}^\pm}} > 0$ , ce qui nous donne les courbes  $\mathcal{N}^{\pm}$  paramétrées en fonction de  $x_* \in ]0, 1[$  pour  $\alpha, \rho > 0$ . Contrairement à la paramétrisation dans l'espace

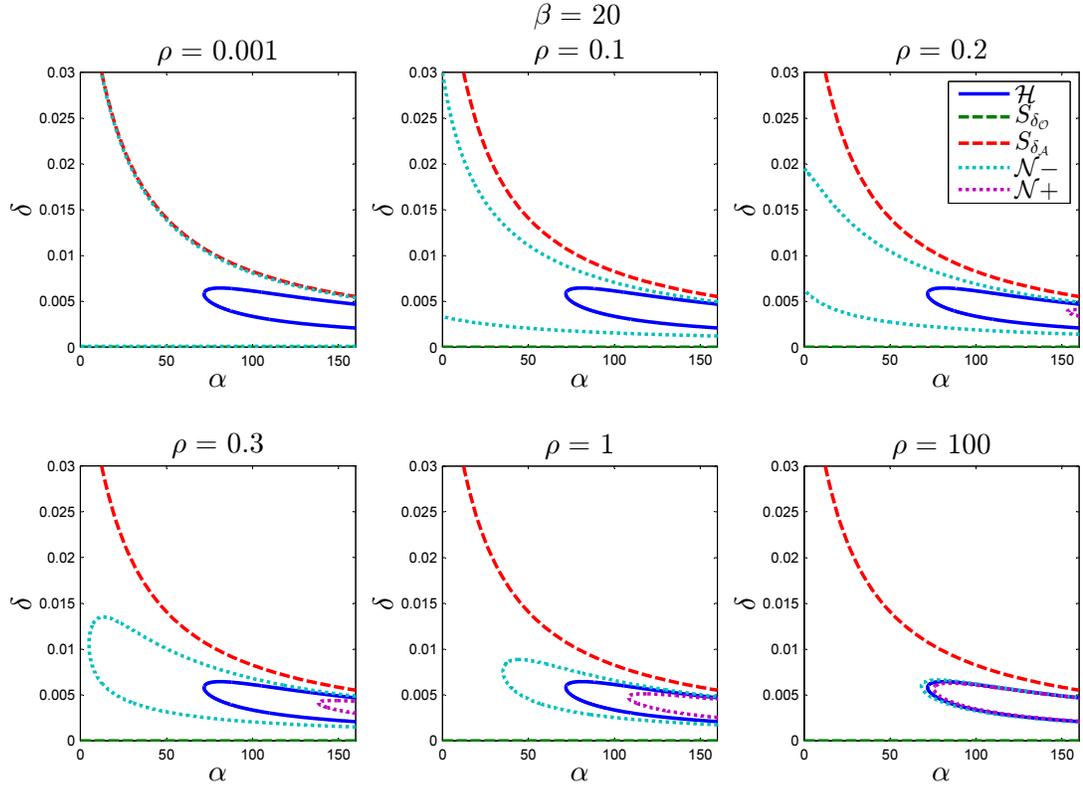


FIGURE 1.11. Diagrammes de bifurcations pour plusieurs valeurs de  $\rho > 0$  pour  $\beta = 20$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

$(\alpha, \delta)$ , puisque  $\Delta_\beta$  n'est pas strictement positif, ceci peut causer des erreurs numériques autour de  $\Delta_\beta = 0$  puisque les deux solutions s'y confondent.

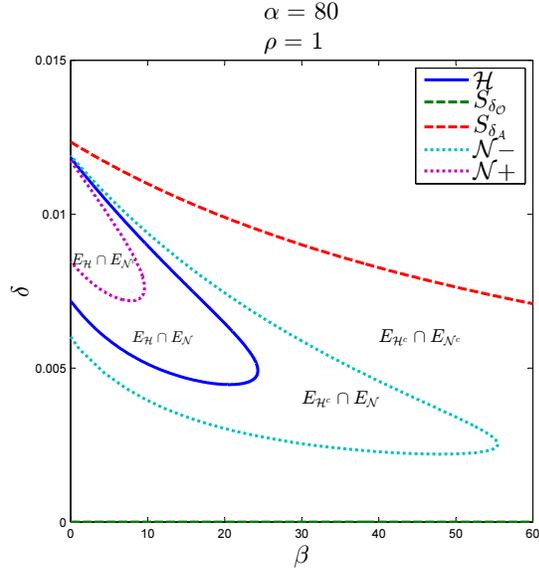
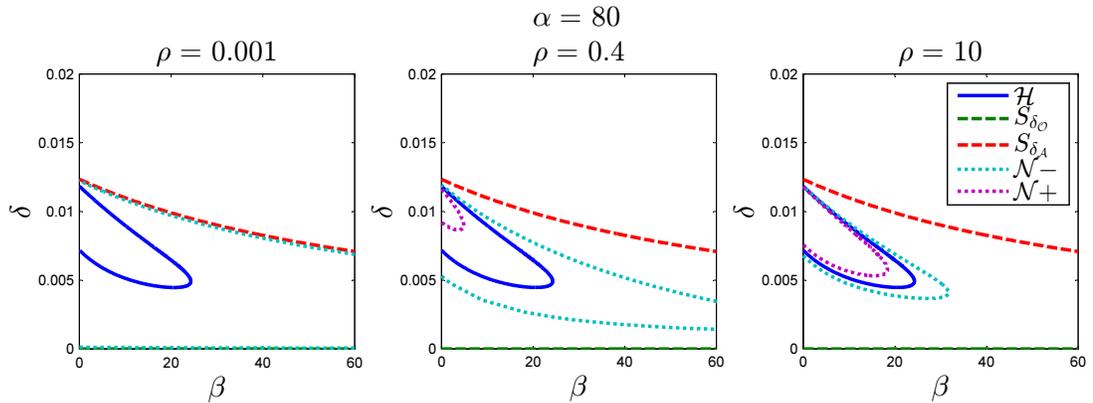
Nous remarquons également que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\beta_{N_\pm}, \delta_{\beta_{N_\pm}}) = \left( \frac{-2\alpha x_*^3 + \alpha x_*^2 - 1}{x_*^2}, \frac{x_*^3}{(1-x_*)(\alpha x_*^2 - 1)} \right) = (\beta_{\mathcal{H}}, \delta_{\beta_{\mathcal{H}}}) \quad (1.6.9)$$

pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$  ce qui donne également la courbe  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\beta, \delta)$ .

Également, nous pouvons obtenir les courbes  $\mathcal{N}_\pm$  dans l'espace  $(\beta, \alpha)$ . Celles-ci sont obtenues en égalisant les valeurs de  $\alpha$  obtenues en (1.2.4a) et (1.6.4) et les valeurs de  $\beta$  obtenues en (1.2.4a) et (1.6.8a). On obtient

$$0 = \beta^2 \left[ \delta^2 \rho (x_* - 1)^2 x_*^2 \right] + \beta \left[ 2\delta (x_* - 1) x_* \left( -2\delta \rho - 2\rho x_*^3 + x_*^2 (2\delta + \rho) + 2\delta \rho x_* \right) \right] + 8\delta^2 (x_* - 1) x_*^2 + \rho \left( -2\delta - 2x_*^3 + x_*^2 + 2\delta x_* \right)^2, \quad (1.6.10a)$$

FIGURE 1.12. Diagramme des courbes  $\mathcal{H}, \mathcal{N}^\pm$  dans le plan  $(\beta, \delta)$ FIGURE 1.13. Diagrammes de bifurcations pour plusieurs valeurs de  $\rho > 0$  pour  $\alpha = 80$  dans le plan  $(\beta, \delta)$ 

$$0 = \alpha^2 \left[ \delta^2 \rho (x_* - 1)^2 x_*^4 \right] + \alpha \left[ 2\delta (x_* - 1) x_*^2 (\rho (\delta + x_*^3 - \delta x_*) - 2\delta x_*^2) \right] \quad (1.6.10b)$$

$$+ \rho (\delta + x_*^3 - \delta x_*)^2 + 4\delta (x_* - 1) x_*^2 (\delta + x_*^2),$$

toutes deux quadratiques en  $\beta$  et  $\alpha$  respectivement, dont les discriminants sont

$$\Delta_{\delta_\beta} = 16\delta^3 (x_* - 1)^2 x_*^6 (\delta + \rho - 2\rho x_*), \quad (1.6.11a)$$

$$\Delta_{\delta_\alpha} = 16\delta^3 (x_* - 1)^2 x_*^8 (\delta + \rho - 2\rho x_*). \quad (1.6.11b)$$

En prenant seulement les valeurs de  $x_* \in ]0, 1[$  telles que  $\Delta_{\delta_\beta}, \Delta_{\delta_\alpha} > 0$ , nous obtenons les courbes  $\mathcal{N}^\pm$  paramétrées par le couple  $(\beta_{\delta_{\mathcal{N}^\pm}}, \alpha_{\delta_{\mathcal{N}^\pm}})$  en fonction de

$x_* \in ]0, 1[$  pour  $\delta, \rho > 0$  :

$$\beta_{\delta_{\mathcal{N}\pm}} = \frac{\rho(2\delta + 2x_*^3 - x_*^2 - 2\delta x_*) - 2\delta x_*^2 \pm 2\sqrt{\delta x_*^4(\delta + \rho - 2\rho x_*)}}{\delta\rho(x_* - 1)x_*}, \quad (1.6.12a)$$

$$\alpha_{\delta_{\mathcal{N}\mp}} = \frac{\rho(-\delta - x_*^3 + \delta x_*) + 2\delta x_*^2 \mp 2\sqrt{\delta x_*^4(\delta + \rho - 2\rho x_*)}}{\delta\rho(x_* - 1)x_*^2}. \quad (1.6.12b)$$

Sans surprise, nous obtenons

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\beta_{\delta_{\mathcal{N}\pm}}, \alpha_{\delta_{\mathcal{N}\mp}}) = \left( \frac{x_*^2 - 2x_*^3 - 2\delta + 2x_*\delta}{x_*\delta - x_*^2\delta}, \frac{x_*^3 + \delta - x_*\delta}{x_*^2\delta - x_*^3\delta} \right) = (\beta_{\delta_{\mathcal{H}}}, \alpha_{\delta_{\mathcal{H}}}) \quad (1.6.13)$$

pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$  ce qui donne également la courbe  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha)$ .

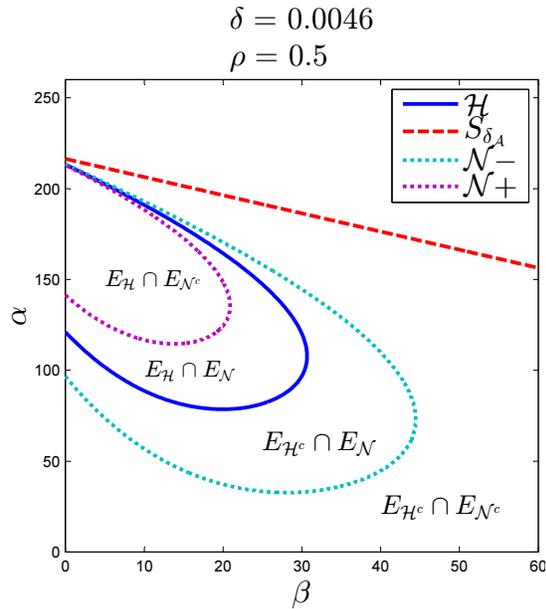


FIGURE 1.14. Diagramme des courbes  $\mathcal{H}, \mathcal{N}\pm$  dans le plan  $(\beta, \alpha)$

Encore une fois, cette dernière paramétrisation sera utilisée pour obtenir les surfaces  $\mathcal{N}\pm$  dans l'espace  $(\beta, \delta, \alpha)$  à la figure 1.16. Donc, la surface  $\mathcal{N}+$  est entourée par la surface  $\mathcal{H}$ , aussi bornée par la surface  $\mathcal{S}_{\delta_D}$ , qui est entourée par la surface  $\mathcal{N}-$  qui est bornée par les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_A}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_O}$ .

**Remarque 1.6.1.** Puisque  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) < 0$  lorsque  $x_* \in [\frac{1}{2}, 1[$ , alors la surface  $\mathcal{N}+$  ne se trouve jamais dans l'intervalle de paramétrisation  $\frac{1}{2} \leq x_* < 1$ , et seule la surface  $\mathcal{N}-$  peut s'y trouver.

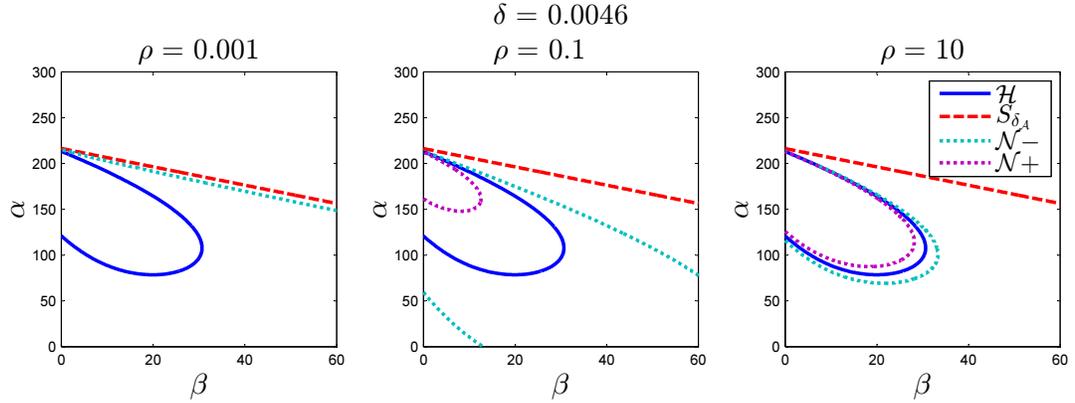


FIGURE 1.15. Diagrammes de bifurcation pour plusieurs valeurs de  $\rho > 0$  pour  $\delta = 0.0046$  dans le plan  $(\beta, \alpha)$

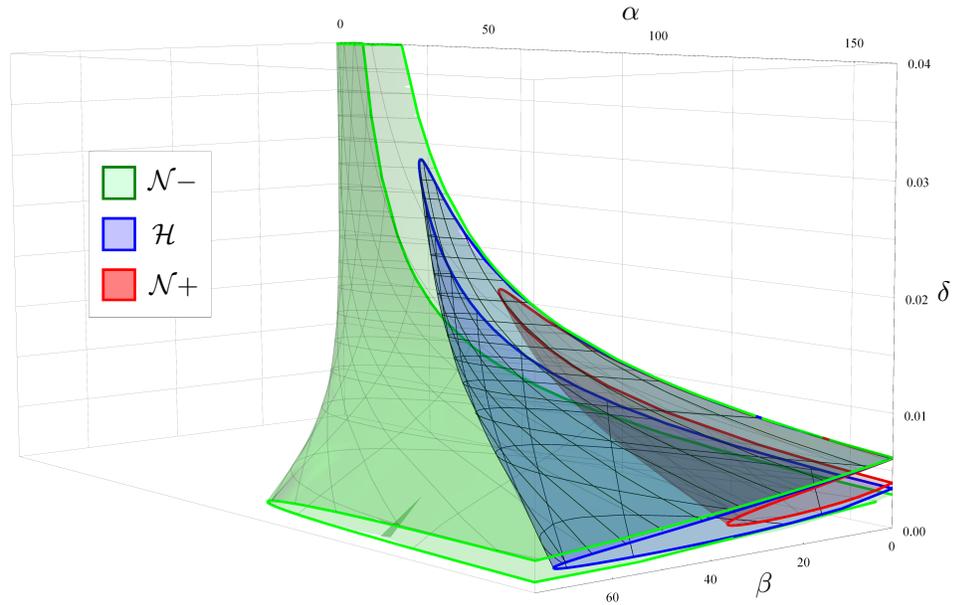


FIGURE 1.16. Surfaces de changement de type du point  $\mathcal{M}$  dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$  pour  $\rho = 10^{-0.21} \approx 0.616595$

## 1.7. DIAGRAMMES DE BIFURCATION ET PORTRAITS DE PHASE

Nous notons  $E_{\mathcal{H}}$  la région ouverte limitée par la surface  $\mathcal{H}$ . Pour résumer la nature des points fixes et bifurcations du système sans récolte, voici le résultat suivant :

**Théorème 1.7.1.** *La nature et la stabilité des points fixes du système (1.1.9) sans récolte pour  $\alpha, \delta, \rho > 0$  et  $\beta \geq 0$  est entièrement décrite au tableau 1.1. Celui-ci synthétise les diagrammes des bifurcations/transitions du système (1.1.9) sans*

récolte dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$  pour  $\rho > 0$  des figures 1.9 et 1.16.

Région $\delta$	Nb	Points fixes/Cycle limite			Bifurcation	Réf. 1.19		
		Pt	Région $(\alpha, \beta, \delta)$	Nature				
$\delta > \delta_{\mathcal{A}}$	2	$\mathcal{O}$	Selle		-	(e)		
		$\mathcal{A}$	Nœud attractif					
$\delta = \delta_{\mathcal{A}}$	2	$\mathcal{O}$	Selle		Transcritique	(d)		
		$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$	Col-nœud attractif					
$\delta_{\mathcal{O}} < \delta < \delta_{\mathcal{A}}$	3(1)	$\mathcal{O}$	Selle		-			
		$\mathcal{M}$	$\delta < \delta_{\mathcal{D}}$	$E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{N}^c}$	Nœud	attractif	-	
				$\mathcal{N}-$	Nœud dégénéré		« Nœud-Foyer »	(c)
				$E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{N}}$	Foyer		-	
			$\delta < \delta_{\mathcal{D}}$	$\mathcal{H}$	Foyer faible	répulsif	Hopf ordre 1	(b)
				$E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{N}}$	Foyer		-	
				$\mathcal{N}+$	Nœud dégénéré		« Nœud-Foyer »	(a)
		$E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{N}^c}$	Nœud	-				
		$\mathcal{C}_-$	$E_{\mathcal{H}}$	Cycle limite attractif	-			
		$\mathcal{A}$	Selle		-			

TABLEAU 1.1. Points fixes/cycle limite et bifurcations du système sans récolte (1.1.9) pour  $\rho > 0$

Moyennant une étude des bifurcations globales du système avec récolte de proie et l'existence d'une région attractive étudiée ultérieurement, nous verrons que l'étude du système (1.1.9) sans récolte est complète pour le premier quadrant.

L'étude des conditions d'extinction du système se fait grâce à l'analyse des bifurcations et des portraits de phase en suivant les différentes variétés invariantes des points  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{A}$ . Puisque la variété stable  $W^s(\mathcal{O})$  du point  $\mathcal{O}$ , soit l'axe des ordonnées, est fixe, ainsi que sa variété instable  $W^u(\mathcal{O})$ , soit l'axe des abscisses, qui est également la variété stable  $W^s(\mathcal{O})$  du point  $\mathcal{A}$ , alors seule la variété instable  $W^u(\mathcal{A})$  qui n'est pas fixée nous intéresse. Cette dernière est tracée numériquement par une méthode de tir avec comme essai initial la direction du vecteur propre associé à la valeur propre positive du point  $\mathcal{A}$  lorsqu'il est un point de selle.

### 1.7.1. Validation numérique

Même si l'étude du système sans récolte se fait analytiquement, nous utilisons des outils numériques comme `Matlab` et `XPPAUT` afin de vérifier l'exactitude de nos calculs et pour le cas où quelque chose nous aurait échappé. Puisque le système

(1.1.9) est non-linéaire, nous devons utiliser des outils numériques afin de tracer les portraits de phase ainsi que les variétés invariantes et les cycles limites. En ce qui a trait aux bifurcations globales des chapitres suivants, nous ne pouvons pas les trouver analytiquement et devons donc utiliser des méthodes numériques afin de tracer le diagramme de bifurcation. Ces outils sont présentés à l'annexe B où, entre autres, est expliqué le fonctionnement des outils de résolution d'équations différentielles de Matlab et XPPAUT.

Par exemple, avec ces programmes, nous obtenons des diagrammes de bifurcation (1D) donnant la stabilité et la position des points fixes et cycles limites du système comme à la figure 1.17. D'autre part, nous pouvons vérifier que nos calculs menant à la surface  $\mathcal{H}$  sont exacts en comparant les calculs à un amalgame de courbes (2D) obtenues numériquement formant cette même surface à la figure 1.18.

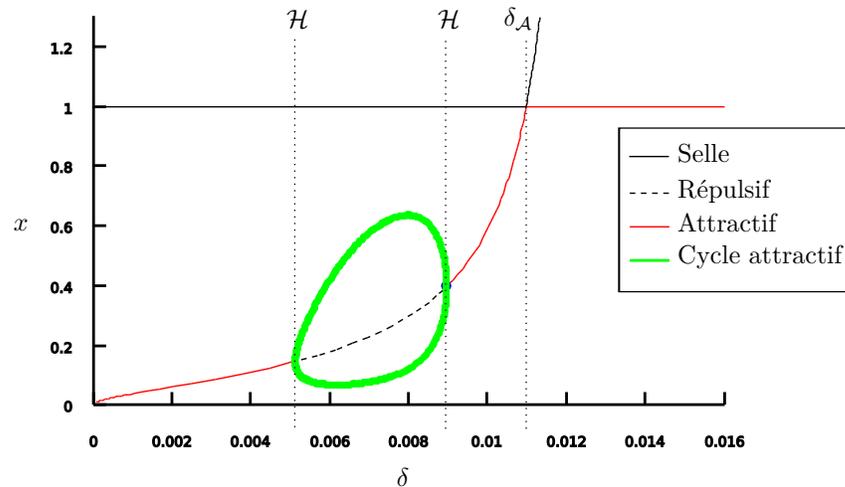


FIGURE 1.17. Diagramme de bifurcation en fonction de  $\delta$  pour  $(\alpha, \beta) = (80, 10)$  et  $\rho > 0$  obtenu avec XPPAUT

Avec nos diagrammes de bifurcations qui s'avèrent exacts, nous pouvons obtenir aussi les portraits de phases du système (1.1.9) sans récolte pour différentes valeurs de paramètres et ainsi observer à la figure 1.19 les ensembles  $\omega$ -limites des trajectoires selon les régions du diagramme de bifurcation du système à la figure 1.9.

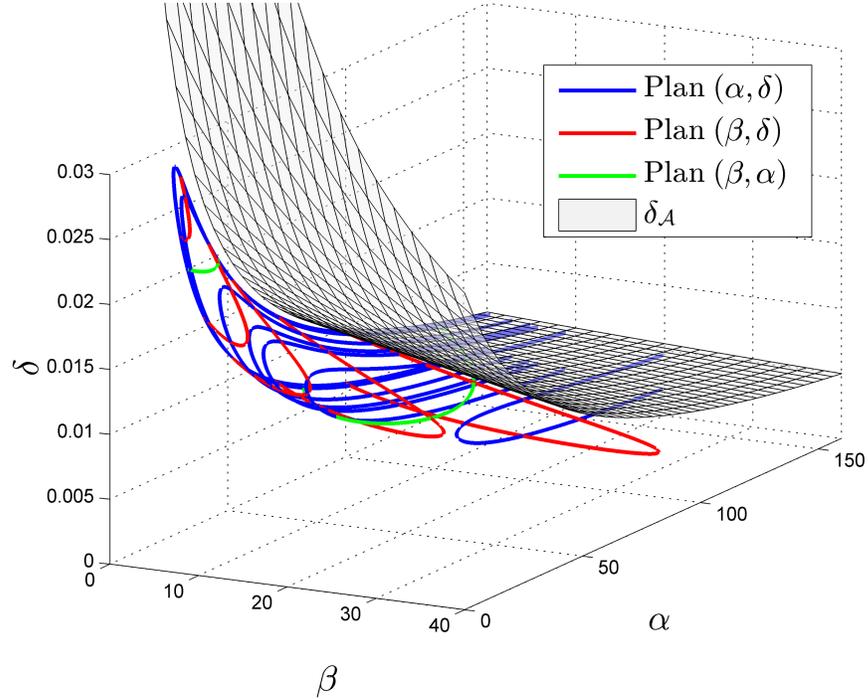


FIGURE 1.18. Amalgame de courbes de bifurcation de Hopf obtenues avec XPPAUT

Nous traçons également les séparatrices des points  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{A}$  lorsque ces points sont des points de selle. Nous remarquons que  $W^u(\mathcal{O}) = W^s(\mathcal{A})$  et  $W^s(\mathcal{O})$  définissent les frontières du premier quadrant, ce qui est typique d'un système prédateur-proie, et ce, pour toutes valeurs de paramètres. La séparatrice  $W^u(\mathcal{A})$  s'enroule autour du point  $\mathcal{M}$  avant la bifurcation de Hopf, et sinon autour du cycle limite stable  $\mathcal{C}_-$  formé. Pour toutes valeurs de paramètres, elle garde toujours cette forme (figure 1.19b) et ne va jamais à l'infini (ce qui sera démontré au chapitre 4). À l'exception de diviser les ensembles  $\omega$ -limite et  $\alpha$ -limite, elle ne joue pas de rôle spécial dans le système sans récolte.

**Définition 1.7.1** (Arrowsmith et Place [1]). *Soit  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ  $C^1$ ,  $X_0 \in X$  et  $\varphi(X_0, t) = \varphi^t(X_0)$  une trajectoire. L'ensemble  $\omega$ -limite ( $\alpha$ -limite) de la trajectoire de  $X_0$  est l'ensemble des points  $X_1 \in X$  tel qu'il existe une suite  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  tel que  $\varphi^{t_n}(X_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_1$  où  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  ( $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ ). On le note  $L_\omega(X_0)$  ( $L_\alpha(X_0)$ ).*

En particulier, l'ensemble  $L_\omega$  (resp.  $L_\alpha$ ) d'un ensemble de conditions initiales peut contenir des points fixes, des cycles limites et/ou des boucles homocliniques/hétérocliniques stables (resp. instables). Ces ensembles, possiblement vides, sont utiles pour définir les régions de conditions initiales conduisant à la coexistence des espèces. Il faut dans ce cas que  $L_\omega$  soit à l'intérieur du premier quadrant ouvert. En revanche, le système est propice à l'extinction d'une ou des espèces si  $L_\omega$  est sur la frontière du premier quadrant.

Avec ces portraits de phase, diagrammes de bifurcation et tableaux de points fixes, nous obtenons le résultat général suivant pour le système sans récolte.

**Résultat 1.7.1.** *Les portraits de phase de la figure 1.19 représentent l'ensemble des portraits de phase topologiques possibles du système 1.1.9 sans récolte pour les paramètres  $\alpha, \delta, \rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Le système biologique se comporte ainsi pour les conditions initiales  $t = 0$  dans le premier quadrant ouvert  $Q_1 = (x(0) > 0, y(0) > 0)$  :*

- (1) *Région de paramètre  $E_{\mathcal{M}}$  : pour toutes les conditions initiales, il y a coexistence des deux espèces, que ce soit un régime stable oscillatoire pour les paramètres dans  $E_{\mathcal{H}}$  ( $L_\omega(Q_1) = \mathcal{C}_-$ ) ou, une équilibre pour les paramètres dans  $\mathcal{H} \cup E_{\mathcal{H}^c}$  ( $L_\omega(Q_1) = \mathcal{M}$ ).*
- (2) *Région  $\delta \geq \delta_{\mathcal{A}}$  : pour toutes les conditions initiales, il y a extinction des prédateurs et survie des proies à  $x = 1$  ( $L_\omega(Q_1) = \mathcal{A}$ ).*

*Sur la frontière, nous avons pour toutes valeurs de paramètres que  $L_\omega(\{(x, y) | x = 0\}) = \mathcal{O}$  et  $L_\omega(\{(x > 0, y) | y = 0\}) = \mathcal{A}$ .*

Ainsi, l'entièreté des valeurs de paramètres offre des régions de conditions initiales « propices » à la récolte de proie car l'espèce ne va jamais s'éteindre dans un système sans récolte si  $x(0) > 0$ . Évidemment le cas  $y(0) = 0$  ou bien les zones de paramètres  $\delta \geq \delta_{\mathcal{A}}$  sont à éviter si le but est d'avoir une récolte avec coexistence des espèces, d'où l'étude de notre système avec récolte. Nous verrons que le flot  $\dot{x} > 0$  pour  $x > 0$  sur  $y = 0$  dans le voisinage de l'origine sera un point important pour empêcher l'extinction des deux espèces pour l'étude des systèmes avec fonction de récolte contrôlée. Maintenant, regardons l'effet d'un ajout de récolte pour des conditions initiales avec coexistence des espèces.

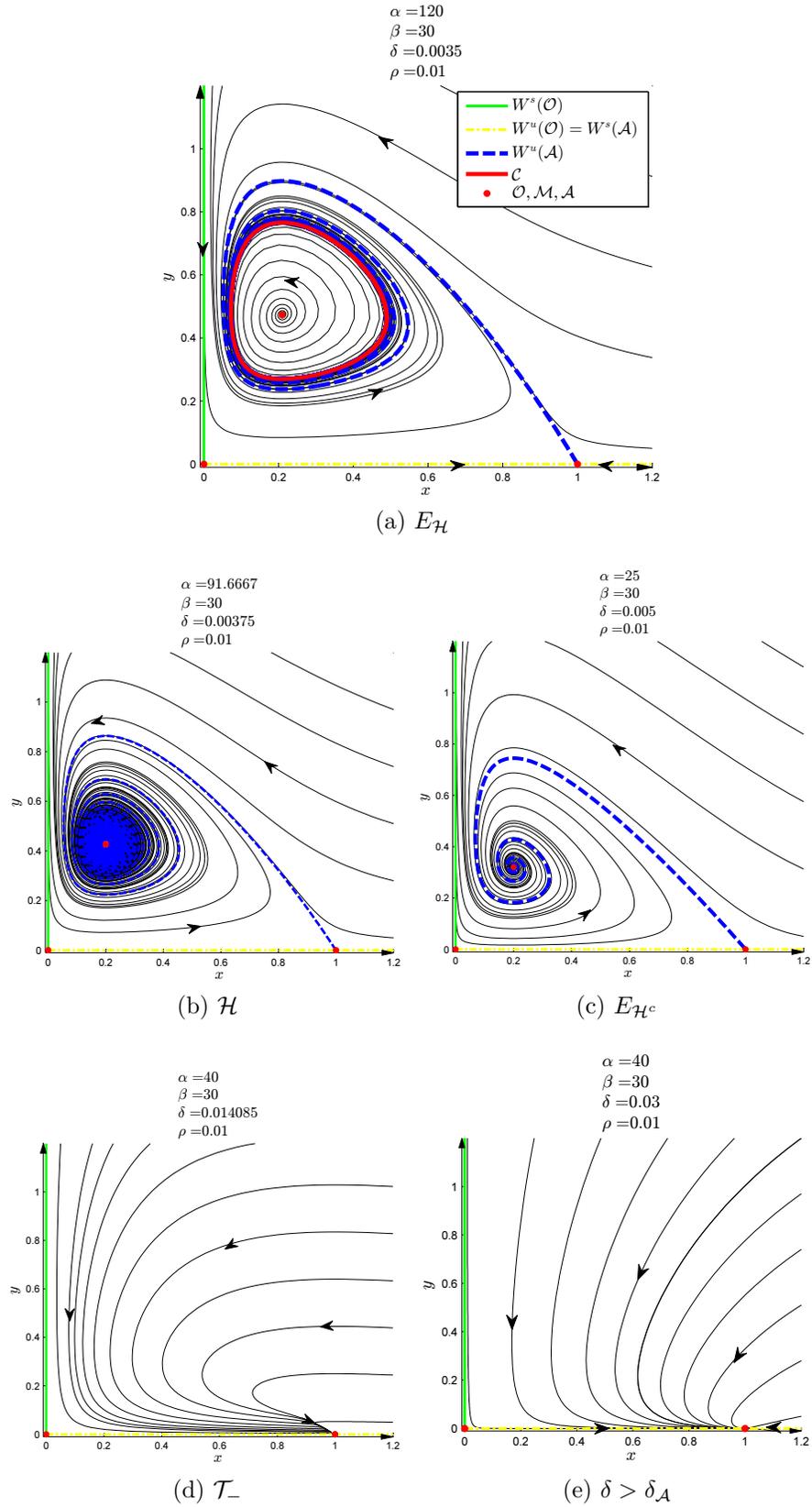


FIGURE 1.19. Portraits de phase du système sans récolte pour différents paramètres  $(\beta, \alpha, \delta)$  et  $\rho = 0.01$

# Chapitre 2

---

## ÉTUDE DU SYSTÈME AVEC RÉCOLTE DE PROIE CONSTANTE

Dans ce chapitre, nous revoyons les résultats d'une étude du système (1.1.9) avec récolte de proie constante

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda, & (2.0.1a) \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)), & (2.0.1b) \end{cases}$$

avec  $p(x)$  la fonction de Holling de type III généralisée (0.0.5) et des paramètres  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ , donc avec une fonction de récolte de proie

$$\eta_1(x) := \lambda > 0. \quad (2.0.2)$$

Nous revoyons les résultats de Etoua et Rousseau [11] qui résument la thèse d'Etoua [10]. Nous reprendrons en profondeur les différentes bifurcations de ce système en explicitant le calcul des lieux de bifurcation dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans la thèse d'Etoua [10]. Nous allons également vérifier numériquement les portraits de phase du système afin d'obtenir les conditions initiales d'extinction. Cette partie sera primordiale pour étudier notre système avec récolte contrôlée afin d'appliquer les résultats de la récolte constante à un certain seuil. Évidemment, traiter numériquement le cas  $\lambda = 0$  revient aux résultats du chapitre 1. L'étude séparée de ces deux chapitres est de permettre de comprendre l'effet spécifique de l'ajout d'une récolte de proie.

### 2.1. POINTS FIXES DU SYSTÈME

Puisque l'ajout d'une récolte  $\lambda > 0$  est une perturbation du système sans récolte étudié au premier chapitre, nous allons nous référer aux mêmes points fixes, mais avec perturbation. Encore une fois, les points fixes de ce système représentent les points où le flot vectoriel s'annule, donc les solutions du système

d'équations

$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda = 0 & (2.1.1a) \\ y[-\delta + p(x)] = 0 & (2.1.1b) \end{cases}$$

pour des points dans le premier quadrant ( $x, y \geq 0$ ). Tout comme pour le système sans récolte, de (2.1.1b), deux cas se produisent.

### 2.1.1. Cas $y = 0$

Dans le cas où  $y = 0$ , l'équation (2.1.1a) nous donne

$$\rho x^2 - \rho x + \lambda = 0 \quad (2.1.2)$$

dont le discriminant est

$$\Delta_\lambda = \rho(\rho - 4\lambda). \quad (2.1.3)$$

Nous obtenons ainsi 3 scénarios

#### a) $\rho - 4\lambda < 0$

Dans ce cas, le discriminant est négatif, l'équation (2.1.3) n'a aucune racine réelle et donc le système ne contient aucun point fixe sur la droite  $y = 0$ .

#### b) $\rho - 4\lambda = 0$

Le discriminant s'annule et l'équation (2.1.3) a une seule racine réelle double  $x = \frac{1}{2}$ . Donc le point

$$\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (2.1.4)$$

est un point singulier au moins double. Nous verrons par après qu'il pourrait être triple. Nous garderons la notation  $\mathcal{D}$  pour le cas du point double.

#### c) $\rho - 4\lambda > 0$

Le discriminant est positif et donc l'équation (2.1.3) a deux racines réelles positives distinctes

$$x_{\mathcal{D}\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta_\lambda}}{2\rho}. \quad (2.1.5)$$

puisque

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{D}-} - x_{\mathcal{D}+} &= \frac{\lambda}{\rho} > 0, \\ x_{\mathcal{D}-} + x_{\mathcal{D}+} &= 1. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Donc, nous obtenons deux points fixes

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\lambda &= (x_{\mathcal{D}-}, 0), \\ \mathcal{A}_\lambda &= (x_{\mathcal{D}+}, 0).\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

**Remarque 2.1.1.** *L'ajout d'une récolte a pour effet de perturber les points fixes  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{A}$  sur la droite  $y = 0$  devenus  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  respectivement. Ils restent symétriques par rapport à la droite  $x_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}$  pour éventuellement former le point fixe  $\mathcal{D}$ . Donc, pour  $\lambda > 0$ ,*

$$0 < x_{\mathcal{D}-} \leq x_{\mathcal{D}} \leq x_{\mathcal{D}+} < 1.\tag{2.1.8}$$

*Une trop grande récolte a donc pour conséquence de faire disparaître les 2 équilibres pour les proies en absence de prédateur lorsqu'ils se fusionnent. Nous verrons qu'il s'agit d'une bifurcation du col-nœud.*

### 2.1.2. Cas $p(x) = \delta$

Tout comme pour le cas sans récolte, il y a possibilité également d'un 3<sup>e</sup> point fixe

$$\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)\tag{2.1.9}$$

si et seulement si  $\mathcal{M}_\lambda$  satisfait aux conditions suivantes :

$$p(x_*) = \delta \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha\delta - 1)x_*^2 + \beta\delta x_* + \delta = 0\tag{2.1.10a}$$

$$\rho x_*(1 - x_*) - y p(x_*) - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_* = \frac{\rho x_*(1 - x_*) - \lambda}{\delta}\tag{2.1.10b}$$

également sous la condition

$$\delta < \frac{1}{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\delta - 1 < 0\tag{2.1.11}$$

pour les raisons mentionnées au chapitre 1 (voir (1.2.4a)). Dans ce cas, le discriminant et la solution positive de l'équation (2.1.10a) sont les mêmes qu'au cas sans récolte (1.2.7), soit

$$\Delta = \delta (\delta\beta^2 - 4(\alpha\delta - 1))\tag{2.1.12}$$

$$x_* = \frac{-\beta\delta - \sqrt{\Delta}}{2(\alpha\delta - 1)}\tag{2.1.13}$$

Avec un  $x_* > 0$  satisfaisant la condition (2.1.10a), nous cherchons un  $y_* \geq 0$  satisfaisant (2.1.10b). Or,

$$y_* \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \leq \rho x_*(1 - x_*),\tag{2.1.14}$$

ce qui revient à l'équation (2.1.2), et donc l'analyse est semblable à l'analyse de la section 2.1.1 en isolant  $\lambda$ .

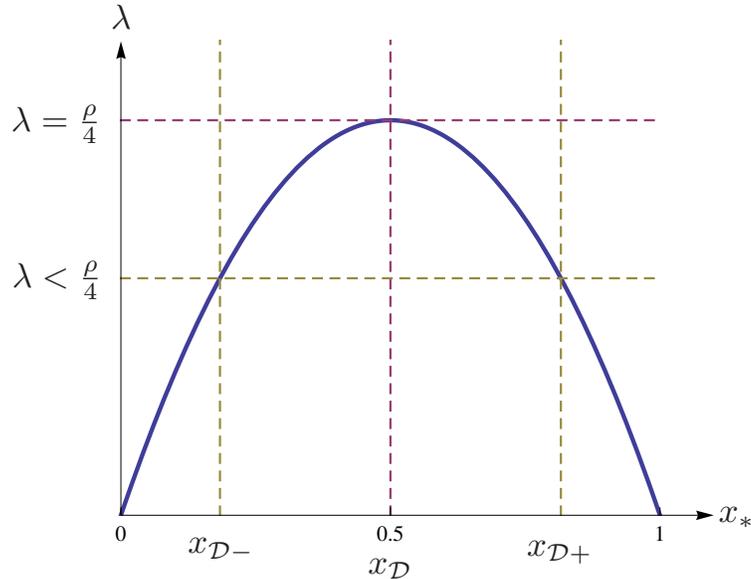


FIGURE 2.1. Graphique de la courbe (2.1.2) dans l'espace  $(x_*, \lambda)$  (pour  $x = x_*$ )

En se fiant au graphe à la figure 2.1 d'une fonction quadratique  $\lambda = \rho x_*(1 - x_*)$  atteignant son maximum égal à  $\lambda = \frac{\rho}{4}$  en  $x_* = \frac{1}{2}$ , nous obtenons ainsi 3 scénarios.

#### 2.1.2.1. $\lambda > \frac{\rho}{4}$

Dans ce cas,  $y_* < 0 \forall x_* > 0$  et donc  $\mathcal{M}_\lambda$  se trouve en dehors du premier quadrant. Donc il n'y a aucun point fixe dans le premier quadrant puisque les points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  n'existent pas de par le point **a)** de la section 2.1.1.

#### 2.1.2.2. $\lambda = \frac{\rho}{4}$

Dans ce cas, la seule possibilité est que  $x_* = x_{\mathcal{D}}$ , donc  $\mathcal{M}_\lambda = (\frac{1}{2}, 0)$ . En particulier,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}} : \delta &= \delta_{\mathcal{D}}, \\ \delta_{\mathcal{D}} &:= p(x_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

tel que défini à (1.5.6). Nous verrons que cette surface représente la surface de *bifurcation du col nilpotent*. Par ailleurs, similairement au cas 2.1.2.1, nous observons que  $y_* < 0$  si  $x_* \neq x_{\mathcal{D}}$ . Par 2.1.1.b, puisque le point  $\mathcal{D} = (\frac{1}{2}, 0)$  forme minimalement un point double, alors le point  $\mathcal{M}_\lambda = (x_{\mathcal{D}}, 0) := \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$  forme un point triple lorsque  $p(x_{\mathcal{D}}) = \delta$ . Dans ce cas, un seul point fixe se trouve dans le premier quadrant et il se trouve sur l'axe  $x$ .

2.1.2.3.  $\lambda < \frac{\rho}{4}$ 

Nous avons que  $y_* \geq 0 \Leftrightarrow x_* \in [x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}]$ . Alors  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$  est dans le premier quadrant ouvert selon (2.1.10) si et seulement si  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  définis par (2.1.5). Le premier quadrant contient donc 3 points fixes distincts  $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{M}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$ . Pour  $y_* = 0$ , dans le cas où  $x_* = x_{\mathcal{D}-}$  (resp.  $x_* = x_{\mathcal{D}+}$ ), alors  $\mathcal{M}_\lambda = (x_{\mathcal{D}-}, 0) := \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}} = \mathcal{O}_\lambda$  (resp.  $\mathcal{M}_\lambda = (x_{\mathcal{D}+}, 0) := \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}} = \mathcal{A}_\lambda$ ) est un point double ; le premier quadrant comporte ainsi deux points fixes se trouvant sur l'axe  $x$ .

Similairement au théorème (1.2.1), il y a donc possibilité d'un maximum de 3 points fixes distincts dans le premier quadrant lorsque  $\lambda < \frac{\rho}{4}$ . En revanche, il y a également la possibilité de n'avoir aucun point fixe, contrairement à un minimum de deux points fixes  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{A}$  pour le système sans récolte. Le tout se résume au tableau (2.1), y compris la stabilité des points étudiée à la section suivante.

La remarque 1.2.1 s'applique également au point  $\mathcal{M}_\lambda$ . Encore une fois, nous dénoterons  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  le point  $\mathcal{M}_\lambda$  lorsque celui-ci se situe aux frontières ou à l'extérieur du premier quadrant, soit lorsque  $x_* \in \mathbb{R} \setminus ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$ .

Nous voyons que le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  tel que représenté dans la figure (2.2) en fonction de  $\Delta_{\alpha,\beta}$  (voir (1.2.13)) agit similairement à  $\mathcal{M}$  de la figure (1.2) du cas sans récolte pour  $x_* > 0$ . La grande différence est lorsque  $x_* = x_{\mathcal{D}-}$ . Lorsque  $\mathcal{O}_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{O}$ , alors  $\overline{\mathcal{M}_\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \overline{\mathcal{M}} = (0, \infty) \neq \mathcal{O}$ , ceci étant occasionné par le fait que  $\delta \xrightarrow{x_* \rightarrow 0} 0$ , d'où nous obtenons la forme indéterminée  $y_* = \frac{0}{0}$  par (1.2.4b). Toutefois, nous avons que  $\delta > 0$ , alors ce problème disparaît lorsque  $\lambda > 0$  car l'indétermination est levée par (2.1.10b) et  $\mathcal{M}_\lambda \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} (0, -\infty)$  qui arrive toujours pour  $x_* < x_{\mathcal{D}-}$ .

**Remarque 2.1.2.** *L'ajout d'une récolte de proie n'affecte aucunement l'abscisse  $x_*$  du point  $\mathcal{M}_\lambda$ . En effet, elle est déterminée par la solution de l'équation (2.1.10a) qui ne dépend pas de  $\lambda$ . Seule la valeur de  $y_*$  est influencée par  $\lambda$  comme le montre la figure 2.2. Nous verrons qu'il est plus naturel de travailler avec le paramètre  $\lambda_\rho := \frac{\lambda}{\rho}$ . Ceci va être important lors de la détermination d'un facteur de contrôle pour la récolte de proie contrôlée.*

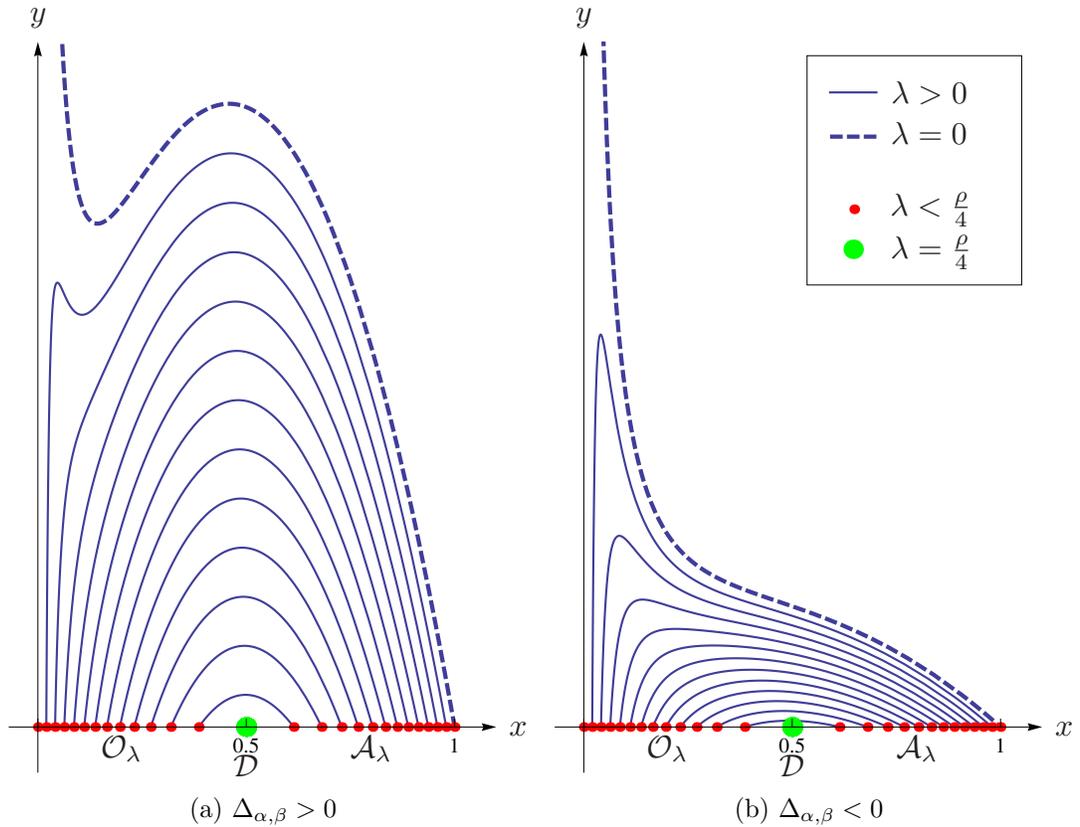


FIGURE 2.2. Courbes paramétrées  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  des positions possibles de  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta \in ]p(x_{\mathcal{D}^-}), p(x_{\mathcal{D}^+})[$  pour différentes valeurs de  $\lambda < \frac{\rho}{4}$  et points doubles/triples sur l'axe  $x$  pour  $\lambda \leq \frac{\rho}{4}$

## 2.2. ANALYSE DES POINTS FIXES

Tout comme à la section 1.3, nous utilisons le jacobien défini en (1.3.1) pour étudier la stabilité des points fixes du système (2.0.1)

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - yp'(x) & -p(x) \\ yp'(x) & -\delta + p(x) \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

La région  $\lambda > \frac{\rho}{4}$  ne contenant aucun point fixe, nous analyserons le cas  $\lambda \leq \frac{\rho}{4}$ .

### 2.2.1. Région $\lambda = \frac{\rho}{4}$

Le seul point fixe  $(x_{\mathcal{D}}, 0)$  est double ( $\mathcal{D}$ ) ou triple ( $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}$ ). Son jacobien est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_{\mathcal{D}}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{\mathcal{D}} \\ 0 & -\delta + \delta_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

dont les valeurs propres sont

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\delta + \delta_{\mathcal{D}}, \quad (2.2.3)$$

et les vecteurs propres associés

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta - \delta_{\mathcal{D}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.4)$$

si  $\mu_2 \neq 0$ . Trois cas s'imposent avec une valeur propre  $\mu_1$  nulle

(1) Point double  $\mathcal{D}$

(a)  $\delta < \delta_{\mathcal{D}}$  : valeur propre  $\mu_2$  positive, donc col-nœud répulsif,

(b)  $\delta > \delta_{\mathcal{D}}$  : valeur propre  $\mu_2$  négative, donc col-nœud attractif,

(2) Point triple  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}$

$\delta = \delta_{\mathcal{D}}$  : Deux valeurs propres nulles, nous verrons qu'il s'agit d'un col nilpotent.

Dans tous les cas, il s'agit d'un point non hyperbolique de multiplicité 2 (col-nœud) ou 3 (col nilpotent).

### 2.2.2. Région $\lambda < \frac{\rho}{4}$

Dans cette région, il y a possibilité de 3 points fixes distincts  $\mathcal{O}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$ ,  $\mathcal{M}_{\lambda} = (x_*, y_*)$ ,  $\mathcal{A}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$  avec possibilité de points confondus  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda}}}$  ou  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda}}}$ .

#### 2.2.2.1. Points fixes $\mathcal{O}_{\lambda}$ (ou $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda}}}$ ) et $\mathcal{A}_{\lambda}$ (ou $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda}}}$ )

Évalué sur la droite  $y = 0$  aux points  $x = x_{\mathcal{D}\pm}$ , le jacobien devient

$$\mathbf{Jac}(x_{\mathcal{D}\pm}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)} & -p(x_{\mathcal{D}\pm}) \\ 0 & -\delta + p(x_{\mathcal{D}\pm}) \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

dont les valeurs propres et vecteurs propres associés sont

$$\begin{aligned} \mu_{1,\pm} &= \mp \sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}, & \mu_{2,\pm} &= -\delta + p(x_{\mathcal{D}\pm}), \\ \nu_{1,\pm} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \nu_{2,\pm} &= \begin{pmatrix} p(x_{\mathcal{D}\pm}) \\ \delta \mp \sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)} + p(x_{\mathcal{D}\pm}) \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Puisque  $p$  est strictement croissante sur  $]0, \infty[$ , alors

$$p(x_{\mathcal{D}-}) < p(x_{\mathcal{D}+}). \quad (2.2.7)$$

La stabilité des points fixes  $\mathcal{O}_{\lambda}$  et  $\mathcal{A}_{\lambda}$  va ainsi être déterminée par la « position » de  $\delta$  dans l'inégalité précédente via le signe des valeurs propres. Nous obtenons ainsi les points doubles  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda}}}$  ou  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda}}}$  exclusivement lorsque  $\delta$  est égal à  $p(x_{\mathcal{D}-})$  ou  $p(x_{\mathcal{D}+})$  respectivement. Il existe donc 5 possibilités selon le signe de  $\mu_{1,\pm}$  et

$\mu_{2,\pm}$ , qui sont résumées au tableau 2.1. À la limite, lorsque  $p(x_{\mathcal{D}-}) = p(x_{\mathcal{D}+}) = p(x_{\mathcal{D}}) = \delta_{\mathcal{D}}$ , nous avons  $\lambda = \frac{\rho}{4}$ , discuté à la sous-section 2.2.1.

### 2.2.2.2. Point fixe $\mathcal{M}_\lambda$

Le point  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$  se trouve dans le premier quadrant si  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  satisfaisant aux conditions (2.1.10) et (2.1.11). Le jacobien évalué à ce point est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x_* - y_* p'(x_*) & -\delta \\ y_* p'(x_*) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.8)$$

dont la seule différence avec celui du système sans récolte (1.3.9) est le  $y_*$ . Encore une fois, si l'on évalue le déterminant, nous obtenons

$$\mathbf{Det}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = \delta y_* p'(x_*) > 0 \quad (2.2.9)$$

puisque  $p(x)$  est strictement croissante. Donc le point  $\mathcal{M}_\lambda$  est un anti-selle. Le déterminant s'annule seulement si  $y_* = 0$ , donc le cas de  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  traité en 2.2.1.2 et 2.2.2.1. Dans le cas où  $y_* < 0$ , donc à l'extérieur de premier quadrant, alors  $\mathbf{Det}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) < 0$  et ainsi  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  serait un point de selle.

Pour la trace, nous obtenons par (2.1.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) &= \rho - 2\rho x_* - y_* p'(x_*) \\ &= \frac{\lambda(\beta x_* + 2) - \rho x_* (2\alpha x_*^3 + x_*^2(\beta - \alpha) + 1)}{x_* (\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1)}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

La stabilité de  $\mathcal{M}_\lambda$  est déterminée par le signe de la trace pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  sous la condition  $\delta = p(x_*)$ . Nous remarquons que

$$1 - 2x_* \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_* \in \left[ \frac{1}{2}, x_{\mathcal{D}+} \right[, \quad (2.2.11)$$

alors dans ce cas  $\rho - 2\rho x_* \leq 0$  et puisque  $-y_* p'(x_*) < 0$ , donc  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) < 0$  formant ainsi un foyer/nœud attractif  $\forall \rho > 0$  si  $x_* \in \left[ \frac{1}{2}, x_{\mathcal{D}+} \right[$ , ce qui garantit que la trace ne puisse s'annuler dans cet intervalle.

Pour alléger, nous définissons les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{O}_\lambda} &:= p(x_{\mathcal{D}-}), \\ \delta_{\mathcal{D}} &:= p(x_{\mathcal{D}}), \\ \delta_{\mathcal{A}_\lambda} &:= p(x_{\mathcal{D}+}), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

et identiquement les surfaces suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}} &: \delta = \delta_{\mathcal{O}_\lambda}, \\ \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}} &: \delta = \delta_{\mathcal{D}}, \\ \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}} &: \delta = \delta_{\mathcal{A}_\lambda}.\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

Encore une fois, les conditions d'existence du point  $\mathcal{M}_\lambda$  dans le premier quadrant ouvert se résument à l'ensemble de paramètres appartenant à la région

$$E_{\mathcal{M}_\lambda} := \left( (\alpha, \delta, \beta) \mid \delta_{\mathcal{O}_\lambda} < \delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda} \right).\tag{2.2.14}$$

Similairement au système sans récolte, la droite d'équation  $x = 0$  forme une nullcline, mais  $y = 0$  n'en est plus une et le flot passe à travers. La droite  $x = x_*$  forme encore une nullcline dans l'espace de paramètre  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  avec un flot identique à (1.2.14), ainsi que la courbe  $y = f_\lambda(x) = \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)}$  pour  $x > 0$  de la figure 2.2 avec un flot identique à (1.2.15). Nous remarquons à la figure 2.3 que le flot se dirige strictement vers la gauche dans les régions  $x \notin ]x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}[$  délimitant une région possible pour les variétés invariantes des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  dans la bande  $[x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}]$  au voisinage de  $y = 0$ .

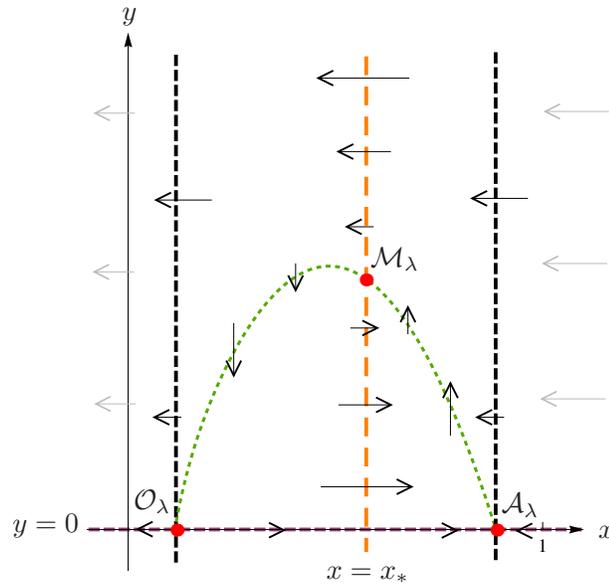


FIGURE 2.3. Les nullclines pour  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}_\lambda}, \delta_{\mathcal{A}_\lambda}[$  et  $\lambda < \frac{\rho}{4}$  déterminant les différentes régions du portrait de phase

Voici le tableau qui résume la stabilité des points fixes du système

Région	Condition	Nb	Point(s) fixe(s)			Réf.
$\lambda > \frac{\rho}{4}$	$\emptyset$	0	$\emptyset$			2.32
$\lambda = \frac{\rho}{4}$	$\delta < \delta_{\mathcal{D}}$	1	Double	Col-nœud répulsif	$\mathcal{D} = (x_{\mathcal{D}}, 0)$	2.4a
	$\delta = \delta_{\mathcal{D}}$	1	Triple	Col nilpotent	$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} = (x_{\mathcal{D}}, 0)$	2.26
	$\delta > \delta_{\mathcal{D}}$	1	Double	Col-nœud attractif	$\mathcal{D} = (x_{\mathcal{D}}, 0)$	2.4b
$\lambda < \frac{\rho}{4}$	$\delta < \delta_{\mathcal{O}_{\lambda}}$	2	Simple	Nœud répulsif	$\mathcal{O}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$	(a)
			Simple	Selle	$\mathcal{A}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	
	$\delta = \delta_{\mathcal{O}_{\lambda}}$	2	Double	Col-nœud répulsif	$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda}}} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$	(b)
			Simple	Selle	$\mathcal{A}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	
	$\delta_{\mathcal{O}_{\lambda}} < \delta < \delta_{\mathcal{A}_{\lambda}}$	3	Simple	Selle	$\mathcal{O}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$	Table 2.4
			Simple	Anti-selle	$\mathcal{M}_{\lambda} = (x_*, y_*)$	
			Simple	Selle	$\mathcal{A}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	
	$\delta = \delta_{\mathcal{A}_{\lambda}}$	2	Simple	Selle	$\mathcal{O}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$	(c)
			Double	Col-nœud attractif	$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda}}} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	
	$\delta > \delta_{\mathcal{A}_{\lambda}}$	2	Simple	Selle	$\mathcal{O}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}-}, 0)$	(d)
Simple			Nœud attractif	$\mathcal{A}_{\lambda} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$		

TABLEAU 2.1. Points fixes du système avec récolte constante avec référence aux portraits de phase de la figure 2.27

Pour la stabilité du point  $\mathcal{M}_{\lambda}$  dans la région  $E_{\mathcal{M}_{\lambda}}$ , nous verrons les détails dans la section 2.5. À partir de maintenant, nous allons utiliser le paramètre  $\lambda_{\rho} = \frac{\lambda}{\rho}$  pour simplifier le calcul des bifurcations du système.

### 2.3. BIFURCATIONS TRANSCRITIQUES ET DU COL-NŒUD

Faisons d'abord une simplification des points  $x_{\mathcal{D}\pm}$ .

$$\begin{aligned}
 x_{\mathcal{D}\pm} &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\rho(\rho - 4\lambda)}}{2\rho} \\
 &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 - 4\lambda_{\rho})}}{2}
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Nous voyons donc qu'ils dépendent strictement de la variable  $\lambda_{\rho}$ , ce qui simplifie grandement le système pour tout  $\rho > 0$ . Également, nous voyons que  $x_*$  ne dépend pas de  $\lambda$  et  $\rho$  dans (2.1.10a). En fait, la position de  $x_*$  par rapport à  $x_{\mathcal{D}\pm}$  se résume

à la position de  $\delta$  par rapport à  $\delta_{\mathcal{O}_\lambda}$  et  $\delta_{\mathcal{A}_\lambda}$ , et plus important, par rapport à  $\delta_{\mathcal{D}}$ . Évidemment,

$$x_{\mathcal{D}\pm} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} x_{\mathcal{D}} \quad (2.3.2)$$

Pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , lorsque  $y_* = 0$ , c'est-à-dire  $x_* \in \{x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}\}$ , le point  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  se confond en un point double avec l'un ou l'autre des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  sur l'abscisse. Remarquons que

$$p(x_{\mathcal{D}\pm}) = \frac{1 - 2\lambda_\rho \pm \sqrt{1 - 4\lambda_\rho}}{2 + \alpha(1 - 2\lambda_\rho) + \beta \pm \sqrt{1 - 4\lambda_\rho}}. \quad (2.3.3)$$

Donc  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  ne dépendent que de  $\frac{\lambda}{\rho}$ . Nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 2.3.1.** *Dans le cas où  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , il y a une bifurcation transcritique sur la surface suivante*

$$\mathcal{T}_+ := \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}. \quad (2.3.4)$$

*À la bifurcation, le point double  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}}$  est un col-nœud répulsif. De même, on a une bifurcation transcritique sur la surface suivante*

$$\mathcal{T}_- := \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}. \quad (2.3.5)$$

*À la bifurcation, le point double  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$  est un col-nœud attractif. Ces bifurcations sont de codimension 1.*

À ces bifurcations, par la section 2.2.2.1, une des valeurs propres du jacobien au point  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  s'annule. L'étude du flot sur la variété centre par une mise sous forme normale nous permet de déterminer ainsi la nature de ces col-nœuds. La preuve de la nature de ces points suit celle du col-nœud du cas sans récolte et les détails se retrouvent dans [10]. Avec l'ajout d'une récolte de proie, ce type de bifurcation est maintenant possible au point  $\mathcal{O}_\lambda$ .

Toutefois, dans le cas où  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$ , les points simples  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  finissent par se confondre lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$  pour former un seul point. Nous obtenons donc le résultat suivant :

**Théorème 2.3.2.** *Si  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$ , il y a bifurcation de col-nœud sur la surface  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  au point double  $\mathcal{D}$ , et ce, pour tout  $\rho > 0$ . Elle est définie par  $\mathcal{CN}_-$  si  $\delta > \delta_{\mathcal{D}}$ , formant ainsi un col-nœud attractif, et définie par  $\mathcal{CN}_+$  si  $\delta < \delta_{\mathcal{D}}$ , formant ainsi*

un col-nœud répulsif. Chacune de ces bifurcations, qui sont disjointes, est de codimension 1.

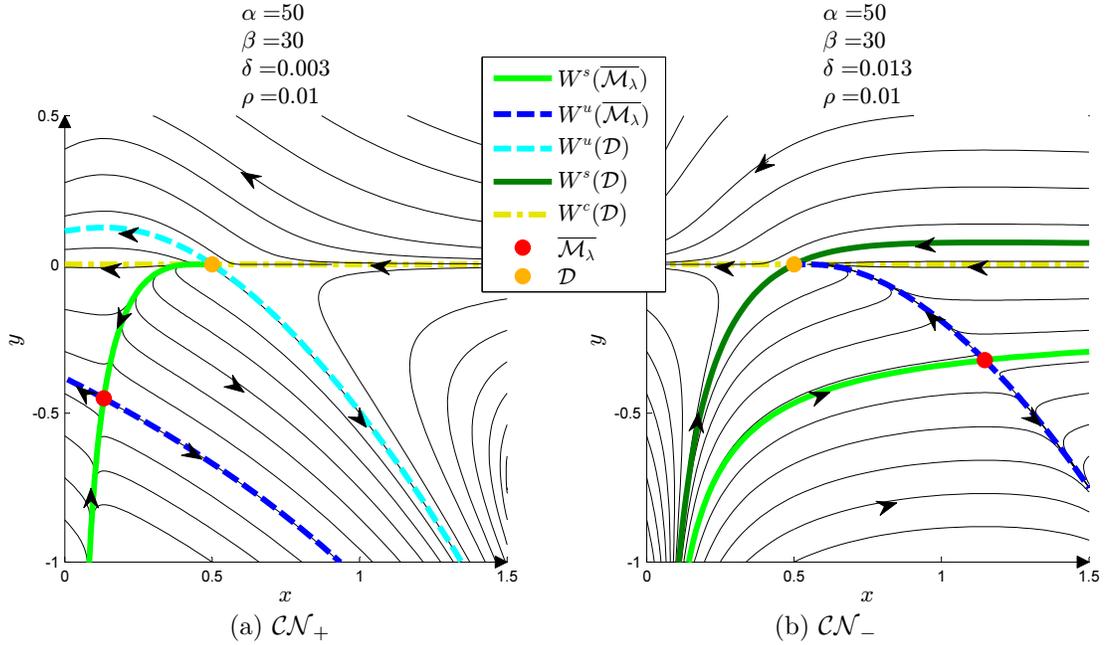


FIGURE 2.4. Portrait de phase aux points de bifurcations  $\mathcal{CN}_\pm$

En effet, par la section précédente, nous observons que  $x_{\mathcal{D}^+} = x_{\mathcal{D}^-} := x_{\mathcal{D}}$  lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , et une des valeurs propres de cet unique point singulier  $\mathcal{D}$  est nulle si  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$ . Toutefois, pour une perturbation du paramètre  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , nous obtenons 2 points singuliers ou aucun point singulier. Comme le théorème précédent, une étude du flot sur les variétés centres par une mise sous forme normale faite par Etoua [10] permet d'identifier la nature des col-nœuds formés.

En faisant varier le paramètre  $\lambda_\rho \in ]0, \frac{1}{4}[$  nous pouvons obtenir les bifurcations transcritiques  $\mathcal{T}_\pm$  dans le premier quadrant seulement si  $\delta_{\mathcal{O}} < \delta < \delta_{\mathcal{A}}$ . En effet, si  $\delta > \delta_{\mathcal{A}}$ , alors  $\mathcal{M}_\lambda$  serait toujours à l'extérieur du premier quadrant où à l'infini. En se fiant à la figure 2.5, en augmentant  $\lambda_\rho$ , les points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  se rapprochent sur l'abscisse, alors que  $x_*$  reste constant, et  $y_*$  diminue. Pour  $\delta < \delta_{\mathcal{D}}$  nous verrons à la section suivante que le point  $\mathcal{M}_\lambda$  peut passer par une bifurcation de Hopf avant d'atteindre la bifurcation  $\mathcal{T}_+$  pour former  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}}$  suivi de  $\mathcal{CN}_+$ . Pour  $\delta > \delta_{\mathcal{D}}$ , le point attractif  $\mathcal{M}_\lambda$  passe par  $\mathcal{T}_-$  pour former  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$  suivi de  $\mathcal{CN}_-$  pour former  $\mathcal{D}$  pour enfin disparaître du premier quadrant.

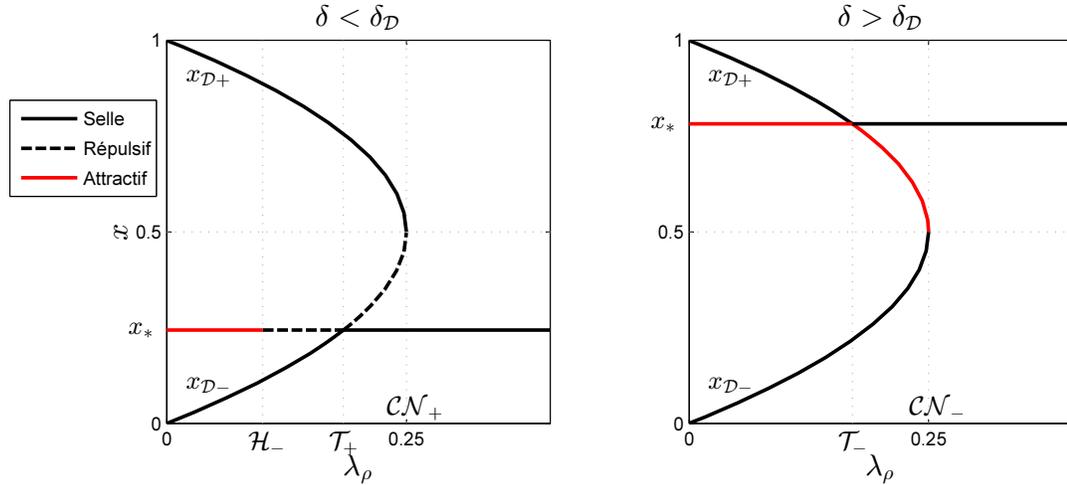


FIGURE 2.5. Diagrammes de bifurcations de type col-nœud en fonction de  $\lambda_\rho$  pour  $\rho > 0$  obtenus par XPPAUT

À l'inverse, lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow 0$ , les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  se confondent avec les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}}}$  respectivement, mais la bifurcation  $\mathcal{T}_+$  disparaît car  $\mathcal{M}$  passe à l'infini tel que mentionné au premier chapitre.

Toutefois, pour  $\lambda_\rho$  fixe, et en faisant varier  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$  comme à la figure 2.2, nous obtenons également d'autres bifurcations en plus des bifurcations  $\mathcal{T}_\pm$ , tel qu'illustré à la figure 2.5.

## 2.4. BIFURCATION DE HOPF D'ORDRE $n \geq 1$

Encore une fois, le seul point qui peut avoir une bifurcation de Hopf est le point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  puisque la trace du jacobien (2.2.5) évalué aux autres points fixes s'annule seulement lorsque leur déterminant est négatif, le point étant alors un point de selle. Également, le déterminant (2.2.9) est strictement positif si et seulement si  $\mathcal{M}_\lambda$  se trouve dans le premier quadrant, donc si et seulement si  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ .

Le calcul des coefficients de Lyapunov du théorème (1.3.2) nécessite la forme normale du système; si le  $n^{\text{ième}}$  coefficient est nul alors la bifurcation de Hopf est au moins d'ordre  $n + 1$ . Un centre nécessite que les coefficients de Lyapunov soient tous nuls, ce qui est impossible à calculer en pratique. Pour montrer qu'un point singulier est un centre, nous pouvons utiliser des méthodes *ad hoc*, comme la méthode de Darboux, ou encore d'autres méthodes comme l'a fait Laurin [20] pour le présent système avec récolte constante.

### 2.4.1. Calcul de la courbe de bifurcation dans le plan $(\alpha, \delta)$

Nous obtenons donc le résultat suivant

**Théorème 2.4.1.** *Soient  $(\alpha, \delta, \lambda, \rho) > 0, \beta \geq 0$  et soient les conditions pour l'existence du point fixe  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$  dans le premier quadrant avec la remarque (2.2.11)*

$$\begin{cases} \alpha\delta - 1 < 0, \\ \delta = p(x_*), \\ y_* = \frac{\rho x_*(1 - x_*) - \lambda}{\delta}, \\ \lambda_\rho < \frac{1}{4}, \\ x_{\mathcal{D}-} < x_* < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Au point  $\mathcal{M}_\lambda$ , pour  $\beta \geq 0$ , il y a bifurcation de Hopf d'ordre supérieur ou égal à 1 sur la surface de paramètres  $\mathcal{H}$  si  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) = 0$  définie en (2.2.10). Elle est d'ordre 1 sur

$$\mathcal{H}_\lambda := (\mathcal{H}_- \cup \mathcal{H}_+). \quad (2.4.2)$$

pour  $L_1(x_*) \neq 0$  définie en (2.4.12). Sur  $\mathcal{H}_-$ , la bifurcation de Hopf est supercritique pour  $L_1(x_*) < 0$ , et sur  $\mathcal{H}_+$ , elle est sous-critique pour  $L_1(x_*) > 0$ . Elle est soit d'ordre 2 si, de plus,

$$\mathcal{H}_2 : \begin{cases} \beta > 0, \\ L_1(x_*) = 0, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

soit d'ordre infini (centre) si, de plus,

$$\mathcal{H}_\infty : \begin{cases} \beta = 0, \\ L_1(x_*) = 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Nous notons

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_\lambda \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_\infty). \quad (2.4.5)$$

Pour  $\beta > 0$ , la bifurcation de Hopf forme au plus 2 cycles limites dans la région ouverte  $E_{\mathcal{H}}$  limitée par  $\mathcal{H}$ . Nous spécifierons ceci aux prochaines sections.

Encore une fois,  $\mathcal{M}_\lambda$  est un anti-selle pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[$ . Sa trace (2.2.10) s'annule si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\rho(\lambda_\rho(\beta x_* + 2) - x_*(2\alpha x_*^3 + x_*^2(\beta - \alpha) + 1))}{x_*(\alpha x_*^2 + \beta x_* + 1)} = 0 & \Leftrightarrow \\ \lambda_\rho(\beta x_* + 2) - x_*(2\alpha x_*^3 + x_*^2(\beta - \alpha) + 1) = 0 & \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Cette condition ne dépend pas de  $\rho$  et de  $\lambda$ , donc ceci est vrai pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ .

**Remarque 2.4.1.** *L'atout de la dépendance stricte de  $\lambda_\rho$  est de pouvoir fixer un  $\rho$  pour obtenir une valeur  $y_*$  désirée sans influencer la bifurcation. Biologiquement parlant, pour une quantité de proies constante, plus  $\rho$  est grand, plus la population de prédateurs devient grande, et donc plus la récolte doit être grande pour préserver  $\lambda_\rho$  et donc les paramètres de bifurcations. Donc le taux de population de prédateurs n'influence pas les paramètres de bifurcation. Ceci est reflété également dans le cas sans récolte avec l'indépendance du paramètre  $\rho$  dans l'équation du calcul de (1.5.4) où bien sûr  $\lambda_\rho = 0$ .*

Pour  $\beta \geq 0$ , on peut facilement isoler  $\alpha$  et nous obtenons

$$\alpha_{\mathcal{H}_\lambda} = \frac{\beta x_*^3 + x_* - (2 + \beta x_*)\lambda_\rho}{x_*^3(1 - 2x_*)}. \quad (2.4.7)$$

Nous obtenons également  $\delta$  en évaluant  $p$  en  $\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}$  :

$$\delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}} = \frac{x_*^3(2x_* - 1)}{(\beta x_* + 2)(\lambda_\rho + x_*^2 - x_*)}. \quad (2.4.8)$$

Nous obtenons donc la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\alpha, \delta)$  paramétrée par  $(\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*), \delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}}(x_*))$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}^-}, \frac{1}{2}[$ , et ce, pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  pour tout  $\rho > 0$ . Évidemment, nous retrouvons la courbe  $\mathcal{H}|_{\lambda_\rho=0}$  paramétrée par (1.5.4) du cas sans récolte  $\forall \rho > 0$ .

$$\lim_{\lambda_\rho \rightarrow 0} (\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}}) = \left( \frac{\beta x_*^2 + 1}{x_*^2(1 - 2x_*)}, \frac{x_*^2(1 - 2x_*)}{(1 - x_*)(\beta x_* + 2)} \right) = (\alpha_{\mathcal{H}}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}}}). \quad (2.4.9)$$

**Remarque 2.4.2.** *Il y a une asymptote qui se forme à la valeur de paramètre  $\delta = \delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}}(x_*)$  en  $x_* = x_{\mathcal{D}^-}$ . Nous remarquons que*

$$\lim_{x_* \rightarrow 0^+} \alpha_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*) = -\infty, \quad \lambda_\rho \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[ , \quad (2.4.10)$$

*contrairement au cas  $\lambda = 0$  qui donne  $+\infty$ . À la limite, nous avons toujours que  $\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}|_{x_*=x_{\mathcal{D}^-}} < 0$ , donc cela ne cause aucun problème. Mathématiquement parlant, il y a donc bifurcation de Hopf à  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  à l'extérieur du premier quadrant pour  $\alpha < 0$ . Pour  $x_* \rightarrow \frac{1}{2}$ , nous avons la même chose qu'au cas sans récolte, c'est-à-dire*

$$\lim_{x_* \rightarrow \frac{1}{2}} (\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}}) = (\infty, 0). \quad (2.4.11)$$

Dans l'espace  $(\alpha, \delta)$ , puisque  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}}[$ , nous voyons donc que  $\mathcal{H}$  est coin-  
cée entre la courbe  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et la courbe  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}$  si bien que lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$ , alors  
 $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}} \rightarrow \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}$  pour former la courbe de la bifurcation de col nilpotent, qui est aussi  
limite de  $\mathcal{H}$ , tel que nous verrons à la section 2.7.

### 2.4.2. Calcul de l'ordre de bifurcation

Afin de calculer l'ordre de la bifurcation, il faut calculer les coefficients de  
Lyapunov. Etoua [10] a montré qu'il est possible d'effectuer un changement de  
variable et de ramener le présent système sous la forme d'un système de Liénard  
généralisé dont il a calculé explicitement les premiers coefficients de Lyapunov  
dans sa thèse. Il obtient une formule ayant le même signe que le premier coefficient  
de Lyapunov :

$$L_1(x_*) = x_*^4 \left( -\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \beta^3 \right) + x_*^3 \left( 6\beta^2 - 6\alpha\beta \right) + x_*^2(6\beta - 6\alpha) + 4\beta x_* + 6 \quad (2.4.12)$$

pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[$ , d'où l'indépendance de  $\lambda$  puisque seul le signe nous intéresse.  
En résolvant l'équation  $L_1 = 0$  par rapport à  $\alpha$ , la seule racine positive, donc  
admissible, est

$$\alpha_{L_1}(x_*) = \frac{\beta^3 x_*^4 + 6\beta^2 x_*^3 + 6\beta x_*^2 + 4\beta x_* + 6}{x_*^2 (\beta^2 x_*^2 - 2\beta x_* + 6\beta x_* + 6)} \quad (2.4.13)$$

qui est indépendante de  $\rho$ . Similairement à  $\mathcal{H}$ , nous obtenons une paramétrisation  
du lieu où  $L_1$  s'annule dans le plan  $(\alpha, \delta)$  en la paramétrant par

$$\mathcal{L} : \left( \alpha_{L_1}(x_*), p(x_*)|_{\alpha=\alpha_{L_1}} \right), \quad x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[. \quad (2.4.14)$$

Évidemment, les seuls points qui nous intéressent sur cette courbe sont ceux qui  
sont aussi sur la courbe de bifurcation  $\mathcal{H}$ . En effet, nous remarquons que  $\mathcal{L}$  croise  
la courbe  $\mathcal{H}$  lorsque  $\alpha_{L_1} = \alpha_{\mathcal{H}_\lambda}$ , c'est-à-dire

$$q(x_*) := 2\beta^3 x_*^6 + 10\beta^2 x_*^5 + 12\beta x_*^4 + \beta \left( \beta^2(-\lambda_\rho) + 2\beta\lambda_\rho + \beta + 6 \right) x_*^3 \\ + 2 \left( -4\beta^2\lambda_\rho + 2\beta\lambda_\rho + \beta + 6 \right) x_*^2 - 18\beta\lambda_\rho x_* - 12\lambda_\rho = 0, \quad (2.4.15)$$

par (2.4.13) et (2.4.7). Nous pouvons montrer numériquement que

- (1)  $q(x_{\mathcal{D}-}) > 0$ ,
- (2)  $q\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ,
- (3)  $\frac{dq(x_*)}{dx} < 0$ ,  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[$ ,

pour des valeurs de  $\lambda_\rho$  loin de 0 et pour tout  $\beta \geq 0$ . Pour  $\lambda_\rho$  près de 0, la dérivée  
s'annule une seule fois pour un  $x_2 > x_{\mathcal{D}-}$  et  $q(x_2) < 0$ . Donc  $q$  a un unique zéro

$x_{L_1}$  par le théorème de valeur intermédiaire. Nous trouvons  $x_{L_1}$  par une méthode itérative de Newton pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  pour tout  $\beta \geq 0$ . Donc l'unique point

$$(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) : \left( \alpha_{\mathcal{H}_\lambda}, \delta_{\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}} \right) \Big|_{x_* = x_{L_1}} \quad (2.4.16)$$

correspond au point sur la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  où  $L_1$  s'annule. Etoua [10] a montré que le deuxième coefficient de Lyapunov  $L_2$  évalué en  $\alpha = \alpha_{L_1}$  est positif pour tout  $\beta > 0$ . Nous obtenons la courbe  $\mathcal{H}_2 = (\mathcal{H} \cap \mathcal{L})$  de codimension 2 de la bifurcation de Hopf d'ordre 2, donc un point dans le plan  $(\alpha, \delta)$  pour tout  $\beta > 0$ . Donc, dans l'espace des paramètres  $(\alpha, \delta, \beta)$ , le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  est un foyer faible répulsif sur la courbe  $\mathcal{H}_2$ . De part et d'autre de la courbe  $\mathcal{H}_2$  sur la surface  $\mathcal{H}$ , nous pouvons aisément calculer et vérifier numériquement que  $L_1(x_*) < 0$  pour  $x_* \in ]x_{L_1}, x_{\mathcal{D}}[$ , c'est-à-dire sur la partie « supérieure droite » de la courbe  $\mathcal{H}$  (dénomé  $\mathcal{H}_-$ ) formant ainsi un foyer faible attractif par une bifurcation de Hopf *supercritique*. Également, nous calculons que  $L_1(x_*) > 0$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{L_1}[$ , donc sur la partie « inférieure gauche » de la courbe  $\mathcal{H}$  (dénomé  $\mathcal{H}_+$ ) formant ainsi un foyer faible répulsif par une bifurcation de Hopf *sous-critique* ([26]).

Dans le cas où  $\beta = 0$ , Etoua [10] a remarqué que les cinq premiers coefficients de Lyapunov s'annulaient en  $\alpha = \alpha_{L_1}$ . Laurin [20] a démontré par après que pour cette condition,  $\mathcal{M}_\lambda$  est un centre, et donc que la bifurcation de Hopf est dégénérée. Nous dénoterons ce point par  $\mathcal{H}_\infty$ . Ceci signifie qu'il existe un voisinage autour de  $\mathcal{M}_\lambda$  qui contient une infinité de solutions périodiques. Dans ce cas, pour  $\beta = 0$ , la courbe en (2.4.14) se réduit à

$$\mathcal{L} : \left\{ \left( \frac{1}{x_*^2}, \frac{x_*^2}{2} \right), x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[ \right\} = \left\{ \delta = \frac{1}{2\alpha}, \alpha > 0 \right\}. \quad (2.4.17)$$

dans l'espace  $(\alpha, \delta)$ , correspondant au point

$$(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) = \mathcal{H}_\infty : \left( \frac{1}{\lambda_\rho}, \frac{\lambda_\rho}{2} \right) \quad (2.4.18)$$

lorsque  $x_* = x_{L_1}|_{\beta=0} = \sqrt{\lambda_\rho}$  puisque  $q(x_*)|_{\beta=0} = 12(x_*^2 - \lambda_\rho)$  et  $x_{\mathcal{D}-} < \sqrt{\lambda_\rho} < \frac{1}{2}$  car  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$ .

Nous marquons en gris pâle la courbe  $\mathcal{L}$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[$  dans les diagrammes de bifurcation.

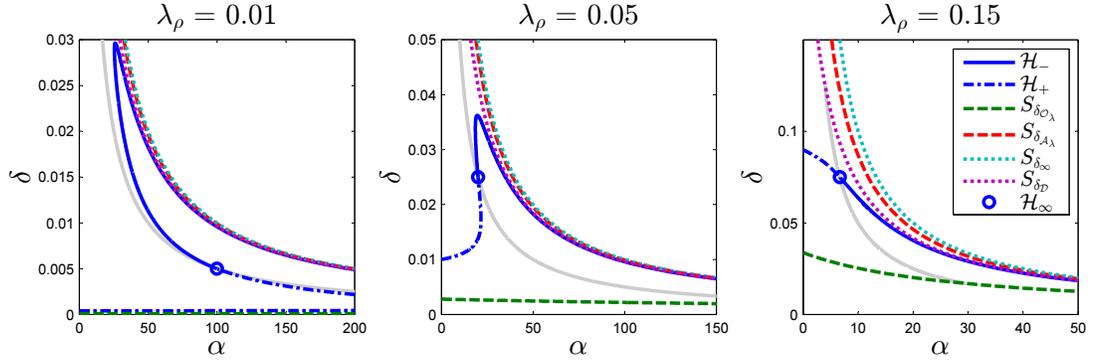


FIGURE 2.6. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour  $\beta = 0$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

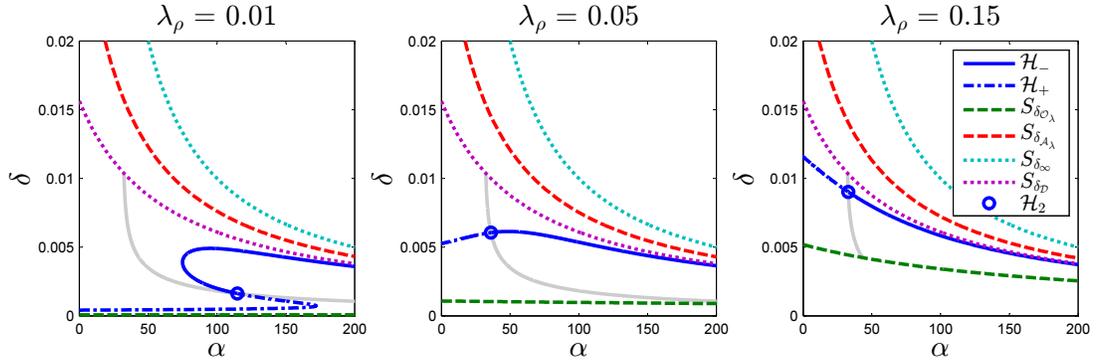


FIGURE 2.7. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour  $\beta = 30$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

### 2.4.3. Calcul de la courbe de bifurcation dans d'autres plans

Sans problème, pour  $\alpha > 0$ , nous pouvons également isoler  $\beta$  de (2.4.6) et nous obtenons la courbe  $\mathcal{H}$  paramétrée dans l'espace  $(\beta, \delta)$  par le couple

$$\beta_{\mathcal{H}_\lambda} = \frac{2\lambda_\rho - 2\alpha x_*^4 + \alpha x_*^3 - x_*}{x_*^3 - \lambda_\rho x_*} \quad (2.4.19a)$$

$$\delta_{\beta_{\mathcal{H}_\lambda}} = \frac{x_*^4 - \lambda_\rho x_*^2}{(\alpha x_*^2 - 1)(x_* - x_*^2 - \lambda_\rho)} \quad (2.4.19b)$$

pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}^-}, \frac{1}{2}[\setminus \{\sqrt{\lambda_\rho}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\}$  et ce pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  pour tout  $\rho > 0$ .

Encore une fois, nous retrouvons la courbe  $\mathcal{H}|_{\lambda_\rho=0}$  paramétrée par (1.5.7a) du cas sans récolte  $\forall \rho > 0$ .

$$\lim_{\lambda_\rho \rightarrow 0} (\beta_{\mathcal{H}_\lambda}, \delta_{\beta_{\mathcal{H}_\lambda}}) = \left( \frac{-2\alpha x_*^3 + \alpha x_*^2 - 1}{x_*^2}, \frac{x_*^3}{(1 - x_*)(\alpha x_*^2 - 1)} \right) = (\beta_{\mathcal{H}}, \delta_{\beta_{\mathcal{H}}}). \quad (2.4.20)$$

Il serait possible également d'isoler  $\beta$  dans l'équation  $L_1 = 0$  de (2.4.12) qui est un polynôme de degré 3 en  $\beta$ . Donc il y a possibilité d'au plus 3 solutions  $\beta_{L_1}$  pour certaines valeurs de  $\alpha > 0$  sur la courbe  $\mathcal{H}$  dans le plan  $(\beta, \delta)$ . Numériquement, on trouverait les solutions réelles des équations  $\beta_{L_1}(x_*) = \beta_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*)$ , mais ces calculs sont fastidieux et répètent les calculs faits précédemment. Pour cette raison, il n'est pas utile de calculer les points de la courbe  $\mathcal{H}_2$  dans le plan  $(\beta, \delta)$ . Pour la même raison, nous ne les calculons pas dans le plan  $(\beta, \alpha)$ . Puisque  $\mathcal{H}_2$  est une courbe de codimension 2, sa paramétrisation dans le plan  $(\alpha, \delta)$  est suffisante pour la tracer dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  pour  $\beta > 0$ .

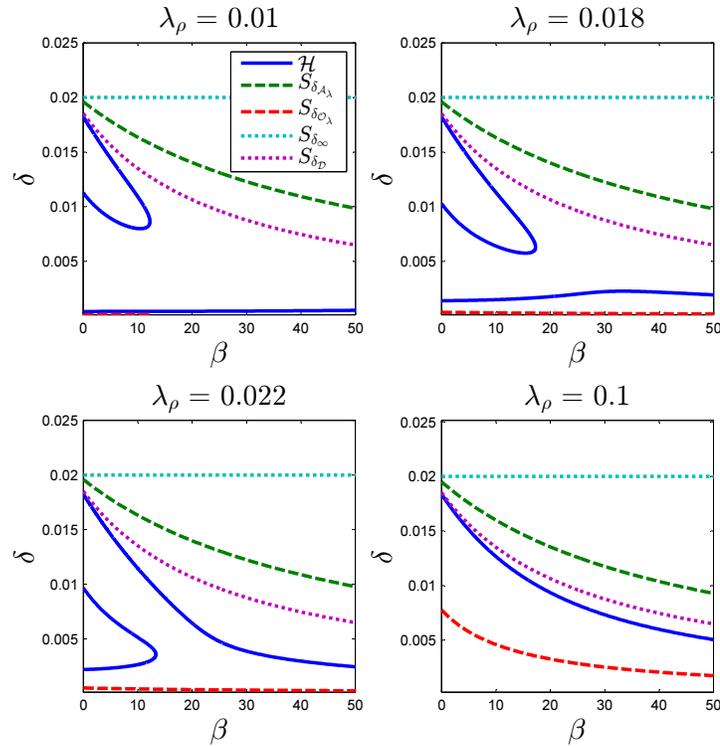


FIGURE 2.8. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour  $\alpha = 50$  dans le plan  $(\beta, \delta)$

Et de la même manière qu'au cas sans récolte, pour  $\delta > 0$ , nous obtenons la courbe  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha)$  paramétrée par le couple

$$\beta_{\delta\mathcal{H}_\lambda} := \frac{x_*^3 - 2x_*^4 - 2\delta(x_* - x_*^2 - \lambda_\rho)}{\delta x_* (x_* - x_*^2 - \lambda_\rho)} \quad (2.4.21a)$$

$$\alpha_{\delta\mathcal{H}_\lambda} := \frac{x_*^4 + \delta(x_* - x_*^2 - \lambda_\rho) - \lambda_\rho x_*^2}{\delta x_*^2 (x_* - x_*^2 - \lambda_\rho)} \quad (2.4.21b)$$

pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}^-}, \frac{1}{2}[$  et ce pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4} \forall \rho > 0$ . Encore une fois, nous retrouvons la courbe  $\mathcal{H}|_{\lambda_\rho=0}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha)$  du cas sans récolte  $\forall \rho > 0$ .

$$\lim_{\lambda_\rho \rightarrow 0} (\beta_{\delta\mathcal{H}_\lambda}, \alpha_{\delta\mathcal{H}_\lambda}) = \left( \frac{x_*^2 - 2x_*^3 - 2\delta + 2x_*\delta}{x_*\delta - x_*^2\delta}, \frac{x_*^3 + \delta - x_*\delta}{x_*^2\delta - x_*^3\delta} \right) = (\beta_{\delta\mathcal{H}}, \alpha_{\delta\mathcal{H}}) \quad (2.4.22)$$

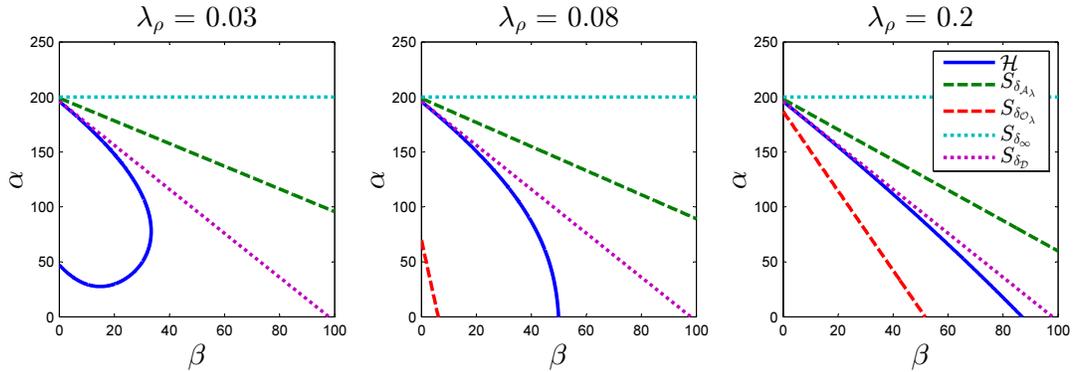


FIGURE 2.9. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) pour  $\delta = 0.005$  dans le plan  $(\beta, \alpha)$

Cette dernière paramétrisation est utile pour tracer la surface  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  puisqu'elle cause moins d'erreurs numériques.

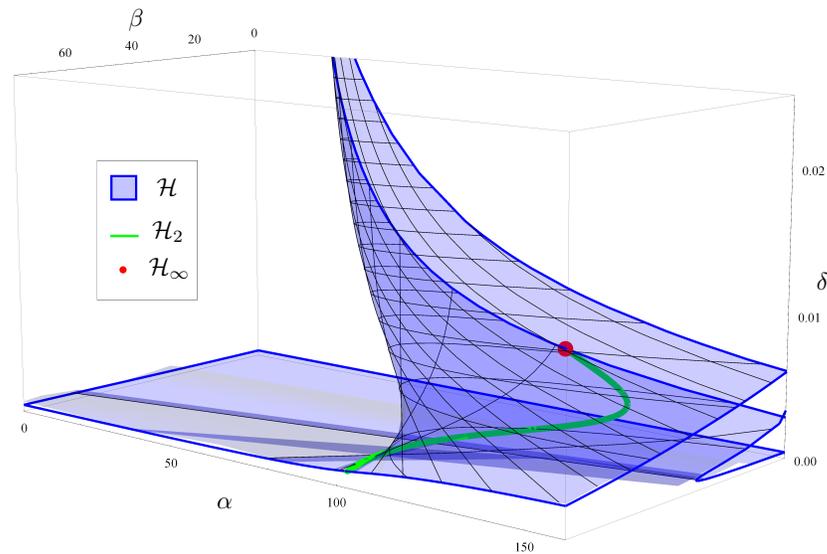


FIGURE 2.10. Diagramme de bifurcation de  $\mathcal{H}$  pour  $\lambda_\rho = 0.01$

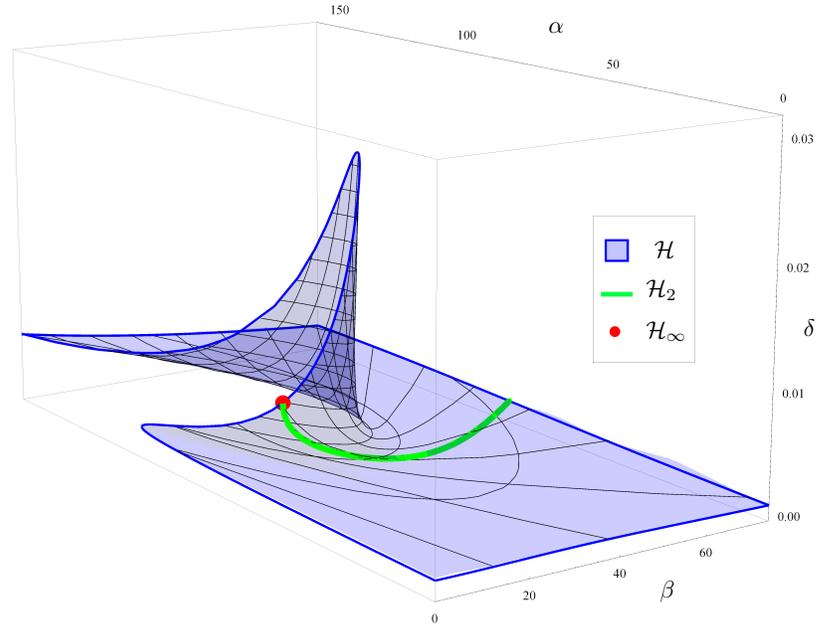


FIGURE 2.11. Diagramme de bifurcation de  $\mathcal{H}$  pour  $\lambda_\rho = 0.02$

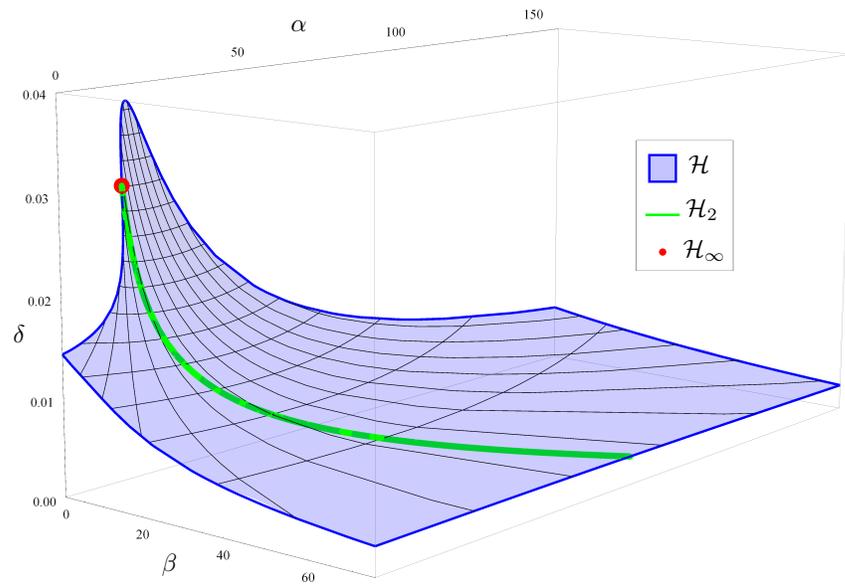


FIGURE 2.12. Diagramme de bifurcation de  $\mathcal{H}$  pour  $\lambda_\rho = 0.06$

Encore une fois, nous notons  $E_{\mathcal{H}} \subset E_{\mathcal{M}}$  la région ouverte délimitée par les surfaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et notons  $E_{\mathcal{H}^c} \subset E_{\mathcal{M}}$  la région ouverte extérieure de  $E_{\mathcal{H}}$  délimitée par les surfaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$ .

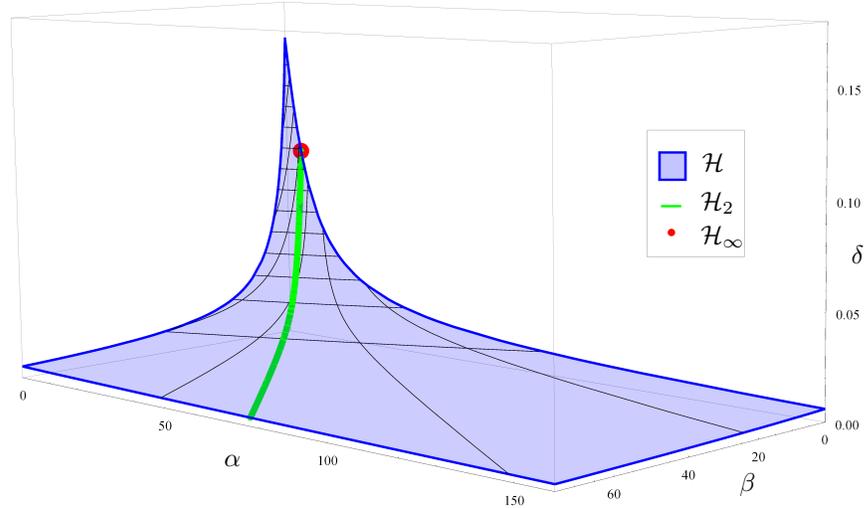


FIGURE 2.13. Diagramme de bifurcation de  $\mathcal{H}$  pour  $\lambda_\rho = 0.2$

Lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow 0$ , nous avons que  $x_{L_1} \rightarrow 0$ , et donc que  $\alpha_{L_1}(x_{L_1}) \rightarrow \infty$  pour tout  $\beta \geq 0$ , d'où nous obtenons que  $\mathcal{H}|_{\lambda_\rho=0} = \mathcal{H}_-$ , c'est-à-dire une bifurcation de Hopf supercritique d'ordre 1 du système sans récolte du chapitre 1. Nous obtenons le diagramme de bifurcation de  $\mathcal{H}$  (1.9) du cas sans récolte. Pour  $\rho > 0$  fixe, cette dernière surface est toujours restreinte à la région limitée par la surface de bifurcation de Hopf avec récolte  $\mathcal{H}|_{\lambda>0}$  dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  et ce pour tout  $\lambda > 0$ .

À l'opposé, lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$ , tel que l'on remarque à la section précédente, nous avons que les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  tendent vers  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}$ . Évidemment, puisque la surface  $\mathcal{H}$  est coincée entre les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$ , par le théorème du sandwich, elle aussi tend vers la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}$  qui correspond à la surface de la bifurcation de col nilpotent de codimension supérieure ou égale à 2 discutée à la section 2.7. En ce qui a trait aux diagrammes de bifurcation de  $\mathcal{H}$  pour  $\lambda_\rho \in [.2, .25[$ , ils sont semblables, seulement la valeur  $\delta$  est plus grande lorsque  $\lambda_\rho$  est plus grand.

## 2.5. SURFACES DE TRANSITION NŒUD-FOYER

Comme à la section 1.6, nous pouvons déterminer le type du point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$ , intervalle dans lequel il est un anti-selle, donc pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et la région de paramètre  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$ . Encore une fois, il s'agira de résoudre l'équation

$$4\text{Det}(\mathbf{x}_*) = \text{Tr}(\mathbf{x}_*)^2 \quad (2.5.1)$$

afin de déterminer les surfaces de transition du point  $\mathcal{M}_\lambda$  entre nœud et foyer. En remplaçant par les équations de la section 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& - \frac{4x(\beta x + 2)(\lambda + \rho(x - 1)x)}{(\alpha x^2 + \beta x + 1)^2} = \left( \frac{\lambda(\beta x + 2) - \rho x(x^2(\beta + \alpha(2x - 1)) + 1)}{x(x(\beta + \alpha x) + 1)} \right)^2 \\
& \Leftrightarrow \lambda(\beta x + 2) \left( 2\lambda + 4x^3 + \beta\lambda x \right) + \rho^2 x^2 \left( x^2(\beta + \alpha(2x - 1)) + 1 \right)^2 \\
& \quad - 2\rho x(\beta x + 2) \left( \lambda + x^2(\lambda(\beta + \alpha(2x - 1)) - 2(x - 1)x) \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \alpha^2 \left[ \rho^2(1 - 2x)^2 x^6 \right] + \alpha \left[ 2\rho(2x - 1)x^3 \left( \beta\rho x^3 + \lambda(\beta(-x) - 2) + \rho x \right) \right] \\
& \quad + \lambda(\beta x + 2) \left( 2\lambda + 4x^3 + \beta\lambda x \right) + \rho^2 x^2 \left( \beta x^2 + 1 \right)^2 \\
& \quad + 2\rho x(\beta x + 2) \left( 2(x - 1)x^3 - \lambda \left( \beta x^2 + 1 \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.5.2a}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \beta^2 \left[ \lambda x - \rho x^3 \right]^2 \\
& \quad + \beta \left[ 2x\rho x \left( 2(x - 1)x^3 + \lambda(x(\alpha(1 - 2x)x - 2) - 1) \right) \right] \\
& \quad + \beta \left[ 2\lambda \left( \lambda + x^3 \right) + \rho^2 x^3 \left( \alpha(2x - 1)x^2 + 1 \right) \right] \\
& \quad + 4\lambda \left( \lambda + 2x^3 \right) + 4\rho x \left( x^2(\alpha\lambda + 2x(-\alpha\lambda + x - 1)) - \lambda \right) \\
& \quad + \rho^2 x^2 \left( \alpha(2x - 1)x^2 + 1 \right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.5.2b}$$

Par l'équation (2.5.2a) qui est quadratique en  $\alpha$ , nous calculons le discriminant et les solutions à cette équation par rapport à  $\alpha$  et la valeur de  $\delta = p(x_*)$

$$\Delta_\alpha = 16x^9(\beta x + 2)(\rho - 2\rho x)^2(\rho x(1 - x) - \lambda) > 0 \quad \forall x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, x_{\mathcal{D}+}[. \tag{2.5.3}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathcal{N}\pm} &= \frac{\rho x(\beta x^2 + 1) - (\beta x + 2)\lambda \mp 2\sqrt{x^3(\beta x + 2)(\rho(1 - x)x - \lambda)}}{\rho(1 - 2x)x^3} \\
\delta_{\alpha_{\mathcal{N}\pm}} &= \frac{\rho x^3(2x - 1)}{\beta\rho x^3 - (\beta - 2)\rho x^2 + \lambda(\beta x + 2) - 2\rho x \pm 2\sqrt{-x^3(\beta x + 2)(\lambda + \rho(x - 1)x)}}
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Nous obtenons ainsi la paramétrisation des courbes  $\mathcal{N}-$  et  $\mathcal{N}+$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  et  $\beta \geq 0$  qui correspondent respectivement à une valeur de trace négative et positive au nœud dégénéré  $\mathcal{M}_\lambda$ . Nous divisons l'espace de la même manière qu'au cas sans récolte représenté à la figure 2.14. Le point  $\mathcal{M}_\lambda$  correspond à un foyer (resp. nœud) dans la région  $E_{\mathcal{N}}$  (resp.  $E_{\mathcal{N}}^c$ ) et sa stabilité est en fonction des régions  $E_{\mathcal{H}}$  et  $E_{\mathcal{H}^c}$ .

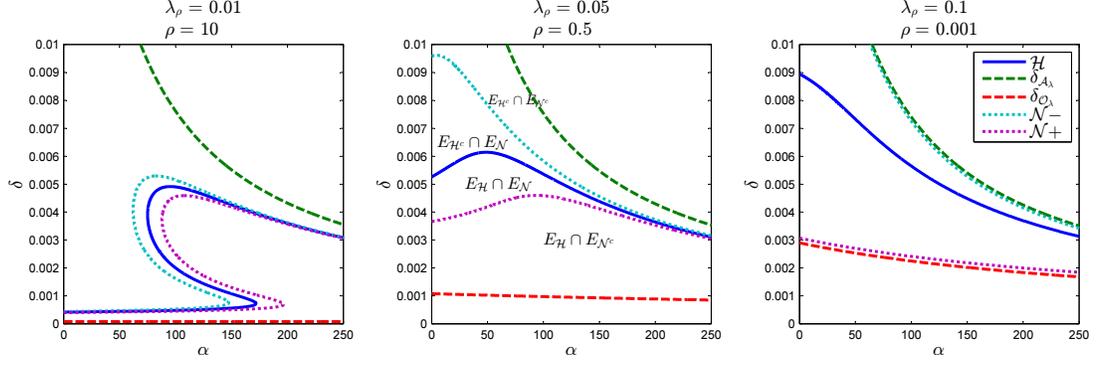


FIGURE 2.14. Diagramme des courbes  $\mathcal{H}, \mathcal{N}^{\pm}$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$  pour différents  $\lambda$  et  $\beta = 30$

Similairement, par l'équation (2.5.2b) qui est quadratique en  $\beta$ , nous calculons le discriminant et les solutions à cette équation par rapport à  $\beta$  et la valeur de  $\delta = p(x_*)$  associé

$$16x_*^2 \Delta_\beta = 16x_*^6 (\lambda + \rho(x-1)x) (\rho^2(2x-1)x^2(\alpha x^2 - 1) + \lambda x^2 + \rho((x-1)x^3 - \lambda(2x-1)(\alpha x^2 - 1))) \quad (2.5.5)$$

$$\beta_{\mathcal{N}^\pm} = \frac{\rho x (\lambda - 2(x-1)x^3 + \lambda x(\alpha x(2x-1) + 2)) - 2\lambda(\lambda + x^3) + \rho^2 x^3 (\alpha(1-2x)x^2 - 1) \pm \sqrt{\Delta_\beta}}{x(\lambda - \rho x^2)^2}$$

$$\delta_{\beta_{\mathcal{N}^\pm}} = \frac{(\lambda x - \rho x^3)^2}{(\rho x(1-x) - \lambda)(\lambda + \alpha \rho x^4 + 2x^3 - x^2(\alpha \lambda + \rho)) \pm 2\sqrt{\Delta_\beta}} \quad (2.5.6)$$

Nous obtenons ainsi la paramétrisation des courbes  $\mathcal{N}^\pm$  dans le plan  $(\beta, \delta)$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}[$  et  $\alpha > 0$ .

Pour la paramétrisation dans le plan  $(\alpha, \beta)$ , en substituant et en égalisant les valeurs de  $\alpha_{\mathcal{N}^\pm}$  et  $\beta_{\mathcal{N}^\pm}$  aux valeurs isolées de  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement de l'équation  $\delta = p(x_*)$ , nous obtenons

$$0 = 4\delta^2 x^3 (\beta x + 2)(\lambda + \rho(x-1)x) + (\rho x^3(2x-1) - \delta(\beta x + 2)(\lambda + \rho(x-1)x))^2,$$

$$0 = (\lambda - \rho x^2)^2 \left( -2\rho x (x^2(\alpha\delta - 1) - \delta) (2\delta(x-1)x^3 - \lambda(x^3 + \delta(x-1)(\alpha x^2 - 1))) + \dots \right.$$

$$\left. \lambda(\delta - x^2(\alpha\delta - 1)) (\delta\lambda + 4\delta x^3 + x^2(\lambda - \alpha\delta\lambda)) + \rho^2 x^2 (x^3 + \delta(x-1)(\alpha x^2 - 1))^2 \right). \quad (2.5.7)$$

Ces deux équations sont quadratiques en  $\beta$  et  $\alpha$  respectivement. Nous calculons leur discriminant

$$\begin{aligned}\Delta_{\delta\beta} &= 16\delta^3 x^8 (\delta + \rho - 2\rho x)(\lambda + \rho(x-1)x)^2, \\ \Delta_{\delta\alpha} &= 16\delta^3 x^{10} (\delta + \rho - 2\rho x)(\lambda + \rho(x-1)x)^2 (\lambda - \rho x^2)^4,\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

et obtenons les solutions

$$\begin{aligned}\beta_{\delta\mathcal{N}\pm} &= \frac{-2\delta(\lambda + x^3) - \rho x(-2\delta - 2x^3 + x^2 + 2\delta x) \pm 2\sqrt{\delta(-x^6)(\rho(2x-1) - \delta)}}{\delta x(\lambda + \rho(x-1)x)}, \\ \alpha_{\delta\mathcal{N}\pm} &= \frac{\delta\lambda - \rho x(\delta + x^3 - \delta x) + 2\delta x^3 + \lambda x^2 \mp 2\sqrt{\delta(-x^6)(\rho(2x-1) - \delta)}}{\delta x^2(\lambda + \rho(x-1)x)}.\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

Nous obtenons ainsi la paramétrisation des courbes  $\mathcal{N}\pm$  dans le plan  $(\alpha, \beta)$  pour  $x_* \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  et  $\delta > 0$ .

Cette dernière paramétrisation est utilisée pour obtenir les surfaces  $\mathcal{N}\pm$  dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  à la figure 2.15. Les surfaces  $\mathcal{N}\pm$  ont les mêmes propriétés et la même apparence qu'au cas sans récolte. Pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , elles prennent une apparence similaire à la surface  $\mathcal{H}$  et l'entourent. Nous avons déterminé à la section 2.4 que  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*) = 0$  sur la surface  $\mathcal{H}$ , donc les surfaces  $\mathcal{N}\pm$  de la transition nœud-foyer sont de part et d'autre de la surface  $\mathcal{H}$ . Similairement au cas sans récolte, la surface  $\mathcal{N}_-$  (resp.  $\mathcal{N}_+$ ) est entièrement dans la région  $E_{\mathcal{H}^c}$  (resp.  $E_{\mathcal{H}}$ ) et tend vers la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}\lambda}}$  (resp.  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}\lambda}}$ ) lorsque  $\rho \rightarrow 0$ . À l'inverse, les surfaces  $\mathcal{N}\pm$  tendent vers la surface  $\mathcal{H}$  lorsque  $\rho \rightarrow \infty$ .

La nature du point  $\mathcal{M}_\lambda$  est résumée au tableau 2.2.

## 2.6. BIFURCATIONS GLOBALES : HÉTÉROCLINIQUE ET DOUBLE CYCLE

**Définition 2.6.1** ([10]). *Le rapport d'hyperbolicité d'un point de selle est le rapport  $r = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$  où  $\mu_1 < 0 < \mu_2$  sont les valeurs propres.*

Ce rapport mesure la force d'attraction respective des variétés stable,  $W^s$ , et instable,  $W^u$ , d'un point de selle lorsqu'on passe au voisinage du col. Si  $r > 1$  (resp.  $r < 1$ ) alors les lignes de courant sont plus proches de  $W^u$  que de  $W^s$  (resp. plus proches de  $W^s$  que de  $W^u$ ).

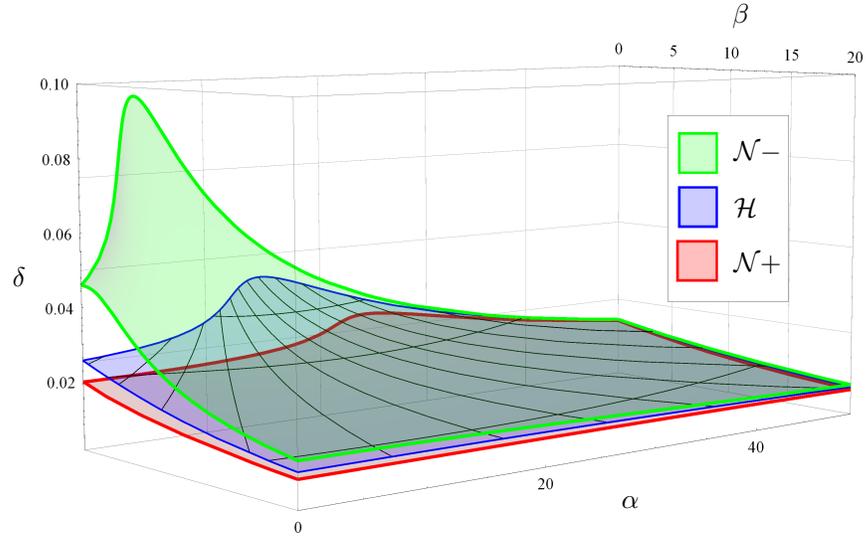


FIGURE 2.15. Surfaces de changement de type du point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\lambda_\rho = 0.08$  et  $\rho = 2.35$

Région		Type $\mathcal{M}_\lambda$		Bifurcation	
$E_{\mathcal{H}^c}$	$E_{\mathcal{N}^c}$	Nœud		attractif	–
	$\mathcal{N}^-$	Nœud dégénéré			« Nœud-Foyer »
	$E_{\mathcal{H}}$	Foyer			-
$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}_-$	Foyer faible		attractif	Hopf supercritique
	$\beta > 0$	$\mathcal{H}_2$	Foyer très faible	répulsif	Hopf ordre 2
	$\beta = 0$	$\mathcal{H}_\infty$	Centre		Hopf dégénéré
	$\mathcal{H}_+$	Foyer faible		répulsif	Hopf sous-critique
$E_{\mathcal{H}}$	$E_{\mathcal{N}}$	Foyer		répulsif	–
	$\mathcal{N}^-$	Nœud dégénéré			« Nœud-Foyer »
	$E_{\mathcal{H}^c}$	Nœud			-

TABLEAU 2.2. Type du point  $\mathcal{M}_\lambda$  du système avec récolte proie constante dans la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$

Pour deux points de selle dans un système, leur rapport d'hyperbolicité peut être utilisé afin d'étudier la stabilité d'une possible boucle hétéroclinique.

**Définition 2.6.2.** Une bifurcation hétéroclinique est une bifurcation globale se produisant lorsqu'une connexion de selle se produit entre deux points de selle distincts, c'est-à-dire qu'une séparatrice instable de l'un se confond avec une séparatrice stable de l'autre. On a une boucle hétéroclinique (figure 2.16 à gauche)

*s'il y a au moins deux connexions de selle entre deux points de selle.*

Lorsqu'on a une application de premier retour au voisinage de la boucle, sa stabilité est déterminée par le produit des rapports d'hyperbolicité des points de selle  $r_1 r_2$ . La boucle est attractive (resp. répulsive) de l'intérieur si  $r_1 r_2 > 1$  (resp. si  $r_1 r_2 < 1$ ). La boucle est de codimension supérieure si  $r_1 r_2 = 1$ .

En général, une bifurcation de boucle hétéroclinique est de codimension supérieure ou égale à 2 car chacune des connexions de selle est structurellement instable. Dans le cas où une des connexions de selle est fixée, le phénomène ressemble beaucoup à une *bifurcation homoclinique*, laquelle se produit à un seul point de selle lorsqu'une séparatrice stable et une séparatrice instable se confondent pour former une *boucle homoclinique* (figure 2.16 à droite).

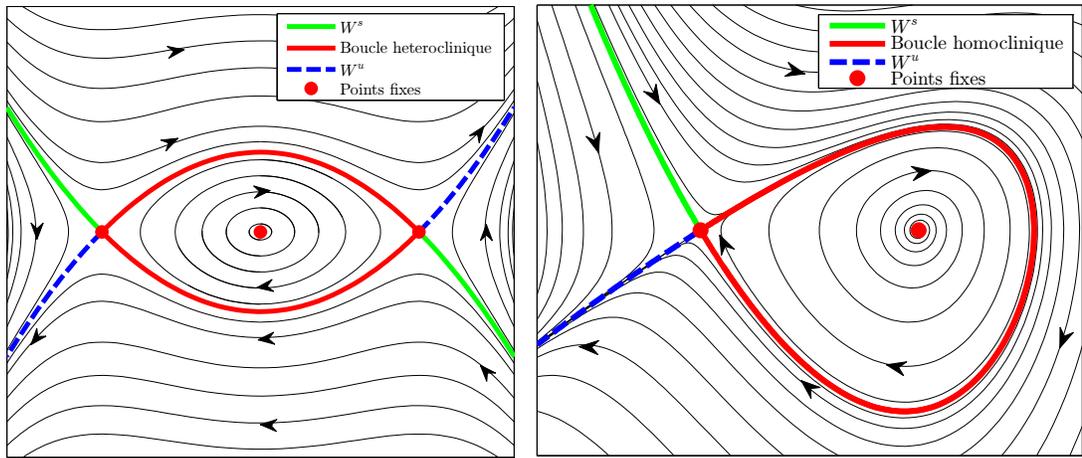


FIGURE 2.16. Exemple de boucle hétéroclinique de codimension infinie et de boucle homoclinique attractive

Ce dernier phénomène est étudié, entre autres, dans le cas où  $\beta < 0$  (voir [18]). En pratique, une telle bifurcation s'accompagne de la naissance ou de la disparition de cycles limites qui accrochent un ou des points de selle. C'est une bifurcation globale et sa détection se fait souvent inévitablement par méthodes numériques ou *ad hoc*.

Pour notre système, l'étude des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  à la section 2.2 nous a révélé que l'axe  $x$  est une connexion de selle fixe entre ces deux points pour toutes valeurs de paramètres. Dans ce cas, la codimension d'une bifurcation hétéroclinique

est exactement égale à un si  $r_1 r_2 \neq 1$  (figures 2.17 et 2.18) et supérieure ou égale à 2 si  $r_1 r_2 = 1$ . Pour ce dernier cas, la stabilité de la boucle est déterminée par une analyse plus complexe. Contrairement au cas sans récolte, puisque la variété stable du point  $\mathcal{O}_\lambda$  lorsqu'il est un point de selle n'est plus l'axe des ordonnées, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.6.1.** *Soit  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $\delta_{\mathcal{O}_\lambda} < \delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$ . Il y a bifurcation hétéroclinique sur la surface*

$$\mathcal{BH} = (\mathcal{BH}_+ \cup \mathcal{BH}_2 \cup \mathcal{BH}_-) \quad (2.6.1)$$

où  $\mathcal{BH}_+$  (resp.  $\mathcal{BH}_-$ ) est la portion de la surface où la boucle hétéroclinique formée est répulsive (resp. attractive). Sur  $\mathcal{BH}_2$ , la bifurcation est de codimension supérieure ou égale à 2. La boucle  $y$  est faiblement attractive pour  $\beta > 0$ , et entourera un anneau de solutions périodiques pour  $\beta = 0$ .

La preuve de l'existence de la boucle hétéroclinique se fait de manière *ad hoc*. Pour tout  $\alpha > 0, \beta \geq 0$  et  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , on remarque que les variétés stables et instables des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  respectivement ont des positions relatives pour un  $\delta = \delta_+ < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  comme à la figure gauche de 2.17 et pour un  $\delta = \delta_- > \delta_{\mathcal{O}_\lambda}$  comme à la figure droite de 2.17 puisque le flot en  $x$  est vers la gauche lorsque  $x \notin ]x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}[$  car  $\dot{x} \leq -yp(x) < 0$  pour tout  $y > 0$  tel qu'illustré à la figure 2.3 forçant le flot sur les séparatrices à aller dans le même sens. Par le théorème d'existence et d'unicité des solutions et par la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, il doit exister un  $\delta = \delta_{\mathcal{BH}}$  tel que  $\delta_- < \delta_{\mathcal{BH}} < \delta_+$  : les deux séparatrices  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  et  $W^u(\mathcal{A}_\lambda)$  doivent se croiser et ainsi former une connexion de selle comme à la figure centre de 2.17. Étant donné le flot en  $x$  par rapport à la région  $x \in ]x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}[$  et que les séparatrices ne peuvent aller à l'infini dans cette région puisque la pente du champ,  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ , est bornée (démontré au chapitre 4), alors la figure 2.17 représente les seules possibilités de positions relatives de ces séparatrices (détails dans [10]). Avec la connexion de selle sur l'axe  $x$  entre  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$ , ceci forme donc une boucle hétéroclinique. Numériquement, étant donnée l'instabilité structurelle de la connexion de selle, il est extrêmement difficile de la suivre, d'où une valeur de paramètre très précise.

Regardons la stabilité. Par la section 2.2.5, pour que  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  soient des points de selle distincts, nous avons que  $p(x_{\mathcal{D}^-}) < \delta < p(x_{\mathcal{D}^+})$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ . Nous calculons, par l'équation (2.2.6), les rapports d'hyperbolicité aux points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$

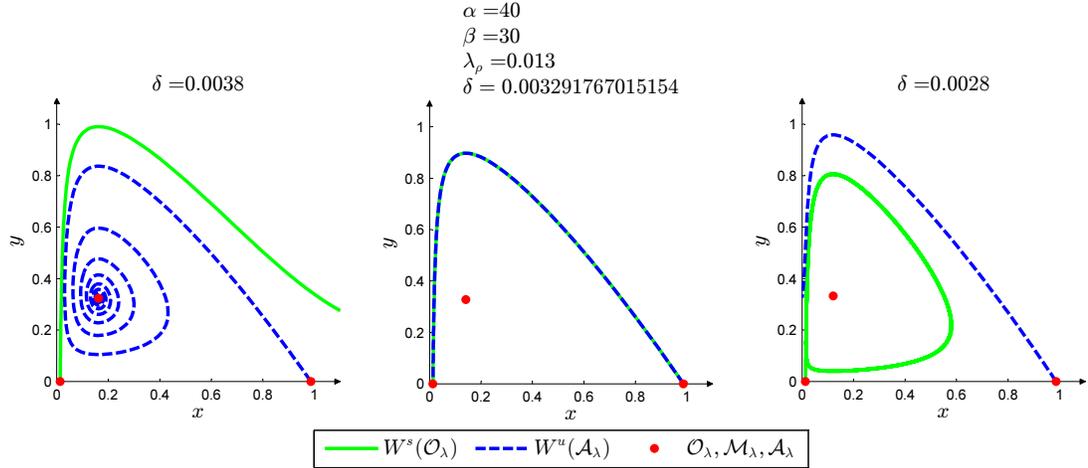


FIGURE 2.17. Séparatrices du système et exemple de connexion de selle pour  $\rho = 0.01$  dans la région de paramètre  $E_{\mathcal{H}^c}$

respectivement

$$r_- := -\frac{\mu_{2,-}}{\mu_{1,-}} = \frac{\delta - p(x_{\mathcal{D}-})}{\rho\sqrt{1-4\lambda_\rho}} \quad (2.6.2)$$

$$r_+ := -\frac{\mu_{1,+}}{\mu_{2,+}} = \frac{\rho\sqrt{1-4\lambda_\rho}}{-\delta + p(x_{\mathcal{D}+})} \quad (2.6.3)$$

de sorte que

$$\text{Sign}(r_- r_+ - 1) = \text{Sign}\left(\delta - \frac{p(x_{\mathcal{D}-}) + p(x_{\mathcal{D}+})}{2}\right) \quad (2.6.4)$$

Donc nous obtenons que la boucle hétéroclinique de la surface  $\mathcal{BH}$  est de codimension supérieure ou égale à 2 lorsqu'elle intersecte la surface

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) : \delta = L_{\mathcal{BH}}(\alpha, \beta) &:= \frac{p(x_{\mathcal{D}-}) + p(x_{\mathcal{D}+})}{2} \\ &= \frac{2\alpha\lambda_\rho^2 + (\beta - 2)\lambda_\rho + 1}{2(\alpha^2\lambda_\rho^2 + (\alpha((\beta - 2) + 1) + \beta^2)\lambda_\rho + \beta + 1)} \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

qui dépend explicitement de  $\lambda_\rho$  pour  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Nous définissons  $\mathcal{BH}_2 = (\mathcal{BH} \cap \mathcal{R})$ . La surface  $(\mathcal{R})$  est identifiée par une courbe grise pointillée dans les diagrammes de bifurcations à titre indicatif. Évidemment  $0 < p(x_{\mathcal{D}-}) < L_{\mathcal{BH}} < p(x_{\mathcal{D}+})$  ce qui vérifie que  $(\mathcal{R})$  est coincée entre les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  dans la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  (2.2.14) où les points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  sont des selles. Par l'équation (2.6.4), en se fiant à la figure 2.20 dans le plan  $(\alpha, \delta)$ , nous voyons que la partie de la surface  $\mathcal{BH}$  où  $\delta < L_{\mathcal{BH}}(\alpha)$ , soit la partie à « gauche » de  $\mathcal{BH}_2$ , correspond à la partie où la boucle hétéroclinique est répulsive ( $\mathcal{BH}_+$ ). Pour une perturbation de  $\delta$ , les séparatrices ont une position relative comme aux images de gauche et de

droite de la figure 2.17, et sont confondues sur la boucle à l'image du milieu. Également, la partie où  $\delta < L_{\mathcal{BH}}(\alpha)$ , soit la partie à « droite » de  $\mathcal{BH}_2$ , correspond à la partie où la boucle hétéroclinique est attractive ( $\mathcal{BH}_-$ ). Pour une perturbation de  $\delta$ , les séparatrices ont une position relative comme aux images de gauche et de droite de la figure 2.18, et sont confondues sur la boucle à l'image du milieu.

Encore une fois, nous définirons par  $E_{\mathcal{BH}} \subset E_{\mathcal{M}_\lambda}$  la région ouverte sous la surface  $\mathcal{BH}$  bornée par  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et par  $E_{\mathcal{BH}^c} \subset E_{\mathcal{M}_\lambda}$  la région ouverte au-dessus de la surface  $\mathcal{BH}$  bornée par  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  (voir figure 2.19).

Nous définissons par  $\mathcal{C}_+$  (resp.  $\mathcal{C}_-$ ) le cycle limite répulsif (resp. attractif) formé par les bifurcations  $\mathcal{H}_+$  ou  $\mathcal{BH}_+$  (resp.  $\mathcal{H}_-$  ou  $\mathcal{BH}_-$ ) se retrouvant dans la région de paramètres  $E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{BH}}$  (resp.  $E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{BH}^c}$ ) (voir tableaux 2.3 et 2.4).

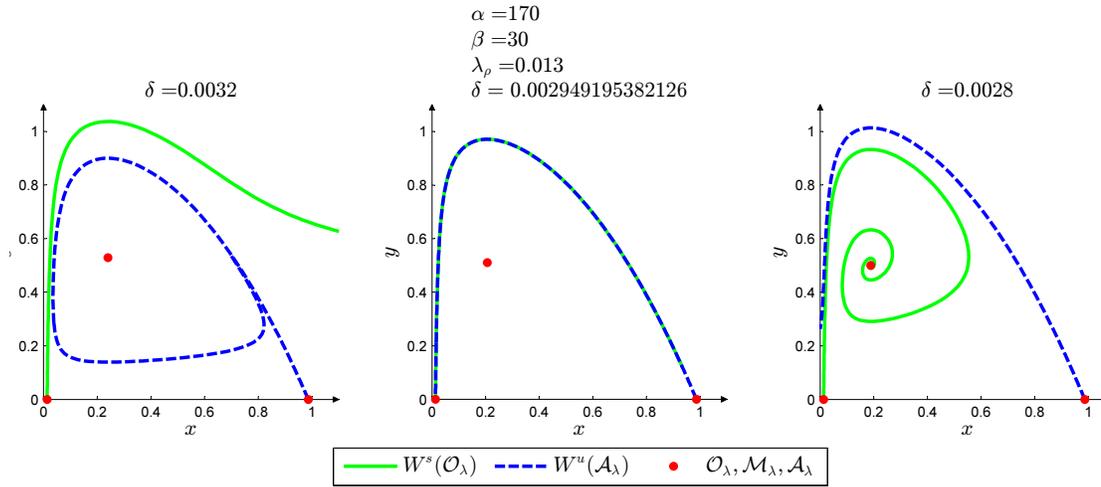


FIGURE 2.18. Séparatrices du système et exemple de connexion de selle pour  $\rho = 0.01$  dans la région de paramètre  $E_{\mathcal{H}}$  autour de  $\mathcal{BH}_-$  et loin de  $\mathcal{BH}_2$

À la figure 2.17, nous remarquons le foyer attractif  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta > \delta_{\mathcal{BH}}$  (à gauche) et le cycle répulsif  $\mathcal{C}_+$  pour  $\delta < \delta_{\mathcal{BH}}$  (à droite). Ceci correspond bien à la boucle hétéroclinique répulsive (au milieu) de la surface  $\mathcal{BH}_+$  pour ces paramètres. Tandis qu'à la figure 2.18, nous remarquons le foyer répulsif  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta < \delta_{\mathcal{BH}}$  (à droite) et le cycle attractif  $\mathcal{C}_-$  pour  $\delta > \delta_{\mathcal{BH}}$  (à gauche). Ceci correspond bien à la boucle hétéroclinique attractive (au milieu) de la surface  $\mathcal{BH}_-$  pour ces paramètres.

Puisque la surface  $\mathcal{BH}$  est coincée entre les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$ , alors tout comme la surface  $\mathcal{H}$ , nous avons que  $\mathcal{BH} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}$  correspondant à la surface du col nilpotent. À l'inverse,  $\mathcal{BH} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow 0} \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}}}$  et cette surface va ainsi disparaître en se confondant avec l'axe  $\delta = 0$  puisque la variété stable du point  $\mathcal{O}_\lambda \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow 0} \mathcal{O}$  devient l'axe des ordonnées et va donc à l'infini, d'où l'impossibilité de former une connexion de selle. Également,  $\mathcal{BH}_2 \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow 0} (\infty, 0)$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$  étant donné la forme de  $(\mathcal{R})$ .

Nous définissons par  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH})$  le point d'intersection des surfaces de bifurcations  $\mathcal{H}_-$  et  $\mathcal{BH}_+$ . C'est une bifurcation d'ordre 2 formée par l'intersection de deux bifurcations d'ordre 1 locale et globale. Ceci implique qu'on peut avoir la formation d'un cycle répulsif,  $\mathcal{C}_+$ , au voisinage interne de la boucle hétéroclinique disparue et d'un cycle attractif,  $\mathcal{C}_-$ , au voisinage du point  $\mathcal{M}_\lambda$  suite à une perturbation des paramètres. Ceci implique évidemment la possibilité d'une région où au moins deux cycles limites existent.

**Résultat 2.6.1.** *Pour  $\beta > 0$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , il y a bifurcation de double cycle répulsif dans la région  $E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{BH}}$  sur la surface  $\mathcal{DC}$  reliant les courbes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{BH}_2$ .*

Cette bifurcation signifie que deux cycles limites distincts se confondent pour former un cycle semi-stable répulsif (répulsif à l'extérieur et attractif à l'intérieur) au point de bifurcation qui disparaît ensuite. Ainsi, la région formée par le triangle  $E_{\mathcal{DC}}$  de sommets  $\mathcal{H}_2, (\mathcal{H} - \mathcal{BH}), \mathcal{BH}_2$  et de côtés  $\mathcal{M}_-, \mathcal{BH}_+, \mathcal{DC}$  contient exactement deux cycles limites, soit le cycle attractif  $\mathcal{C}_-$  se trouvant à l'intérieur du cycle répulsif  $\mathcal{C}_+$ . La région  $E_{\mathcal{DC}}$  est plus grande pour  $\beta > 0$  grand et  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$  ni grand ni petit. Mais pour  $\beta \rightarrow 0$  ou  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$ , celle-ci se contracte pour former une bifurcation de codimension supérieure. Pour  $\lambda_\rho \rightarrow 0$ , puisque  $\mathcal{H}_2 \rightarrow (\infty, 0)$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$ , alors il en va de même pour  $E_{\mathcal{DC}}$  qui va ultimement disparaître à l'infini pour laisser la surface  $\mathcal{H}$  du cas sans récolte.

En revanche, sur la surface  $\mathcal{DC}$ , puisque  $\mathcal{DC} \subset (E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{BH}})$ , alors le point  $\mathcal{M}_\lambda$  est répulsif et il doit y avoir un seul cycle semi-stable répulsif  $\mathcal{C}_\pm$ , c'est-à-dire qu'il est répulsif de l'extérieur, mais attractif de l'intérieur. Il est la fusion du cycle  $\mathcal{C}_+$  avec le cycle  $\mathcal{C}_-$  qui proviennent de la région de paramètre  $E_{\mathcal{DC}}$ .

Nous connaissons l'existence de cette surface  $\mathcal{DC}$  par la théorie au voisinage de  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{BH}_2$ . Que ces deux surfaces soient le prolongement l'une de l'autre pour

former  $\mathcal{DC}$  semble naturel avec les contraintes du problème. La théorie dit que c'est le cas au voisinage du col nilpotent lorsque  $\lambda_\rho \approx \frac{1}{4}$  mais une preuve formelle est manquante lorsqu'on s'en éloigne pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ . Nous pouvons donc seulement l'observer et vérifier son existence numériquement.

**Remarque 2.6.1.** *Puisque les bifurcations de boucle hétéroclinique et de double cycle sont globales, nous utilisons le logiciel XPPAUT à précision élevée pour calculer numériquement les courbes de bifurcations dans l'espace  $(\alpha, \delta)$  seulement. Ces dernières sont obtenus en suivant dans l'espace de paramètres les solutions périodiques de grande période. Ce sont partout des surfaces dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$ . Les détails sur les méthodes numériques utilisée se retrouvent en annexe B.*

Une étude complète des bifurcations de la boucle hétéroclinique et de Hopf d'ordre 2 ([10], [16], [23]) nous montre qu'au point de bifurcation de Hopf d'ordre 2,  $\mathcal{H}_2$ , le contact entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{DC}$  est un contact d'ordre 1, c'est-à-dire une tangence d'ordre quadratique. Numériquement, ce type de contact ne cause aucun problème. L'intersection  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH})$  est transversale puisque ce sont deux bifurcations d'ordre 1 indépendante se produisant aux mêmes valeurs de paramètre. Toutefois, le contact au point de bifurcation hétéroclinique d'ordre supérieure ou égale à 2,  $\mathcal{BH}_2$ , entre  $\mathcal{BH}$  et  $\mathcal{DC}$  est d'ordre infini, ce qui est extrêmement difficile à observer numériquement : c'est ce qu'on peut observer aux figures 2.19 et 2.20. L'étude nous révèle également que les courbes de bifurcation  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$  ont le même comportement asymptotique aux extrémités.

**Théorème 2.6.2.** *Lorsque  $\beta = 0$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , le point  $\mathcal{M}_\lambda$  est un centre à  $\mathcal{H}_\infty$ . Le bassin du centre contient une infinité de solutions périodiques autour de  $\mathcal{M}_\lambda$ . Il est borné par une boucle hétéroclinique formée par les variétés instable et stable des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  respectivement de codimension infinie en  $\mathcal{BH}_\infty$ .*

Laurin [20] a démontré que pour  $\beta = 0$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , le système était réversible, c'est-à-dire intégrable dans une certaine région ce qui montre la codimension infinie de  $\mathcal{BH}_\infty$ . En particulier, nous observons que les surfaces  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  s'intersectent au point de bifurcation de Hopf d'ordre infini  $\mathcal{H}_\infty$  où également s'intersectent les surfaces de bifurcation locale  $\mathcal{H}$  et globale  $\mathcal{BH}$ . En effet, nous calculons que

$$\mathcal{R}|_{\beta=0} : \delta = \frac{2\alpha\lambda_\rho^2 - 2\lambda_\rho + 1}{2\alpha^2\lambda_\rho^2 - 4\alpha\lambda_\rho + 2\alpha + 2} \quad (2.6.6)$$

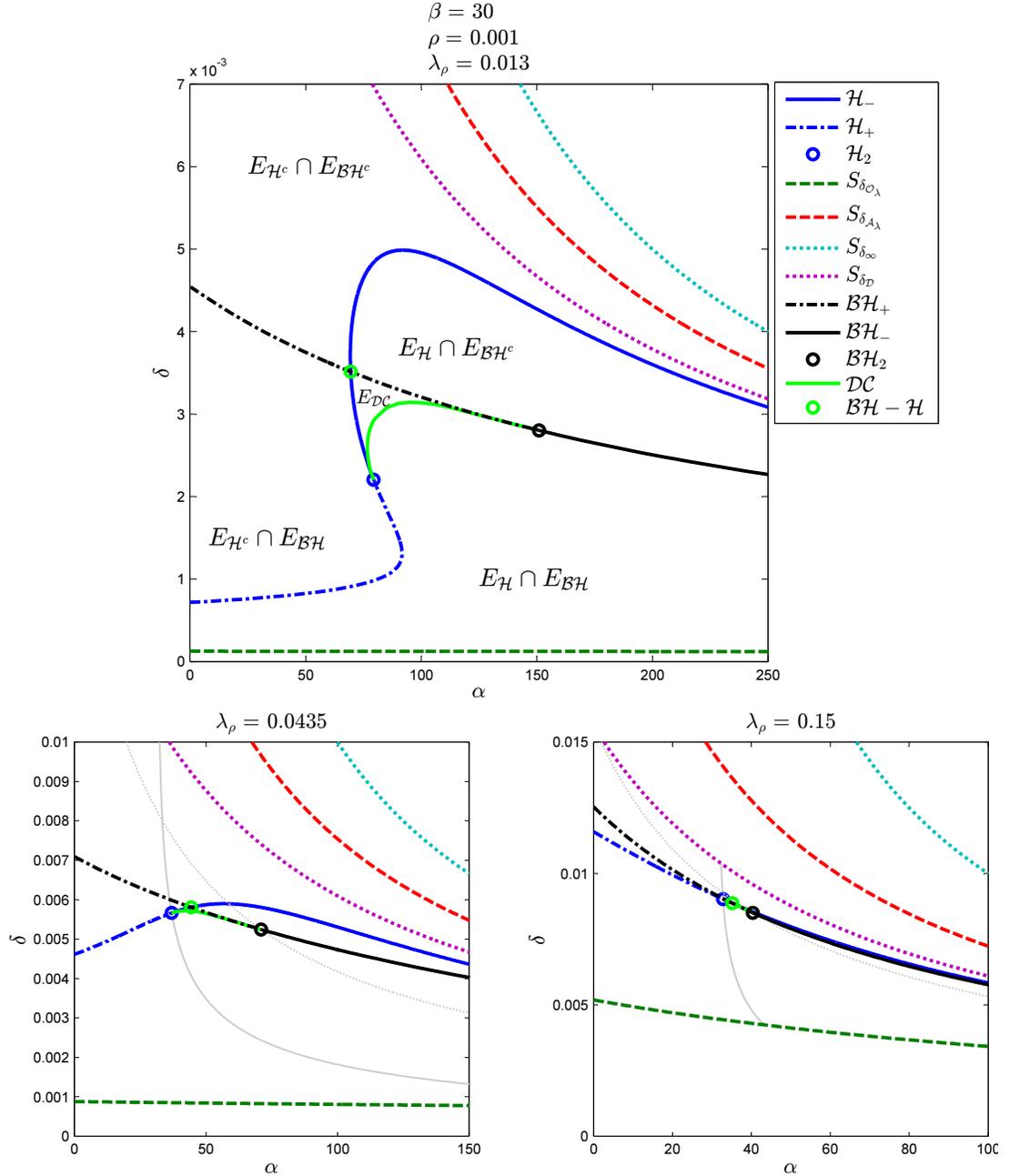


FIGURE 2.19. Diagramme des bifurcations globales pour différents  $\lambda_\rho$  pour  $\beta = 30$  et  $\rho = 0.001$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

Nous résolvons l'équation quadratique obtenue en égalisant le membre de droite de cette dernière équation à celle de l'équation (2.4.17) et obtenons comme solution

$$(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \mathcal{H}_\infty = \left( \frac{1}{\lambda_\rho}, \frac{\lambda_\rho}{2} \right). \quad (2.6.7)$$

Nous calculons numériquement la courbe  $\mathcal{BH}$  et vérifions, étant donné que le système est intégrable, qu'elle intersecte  $\mathcal{R}$  en ce même point conformément à la théorie

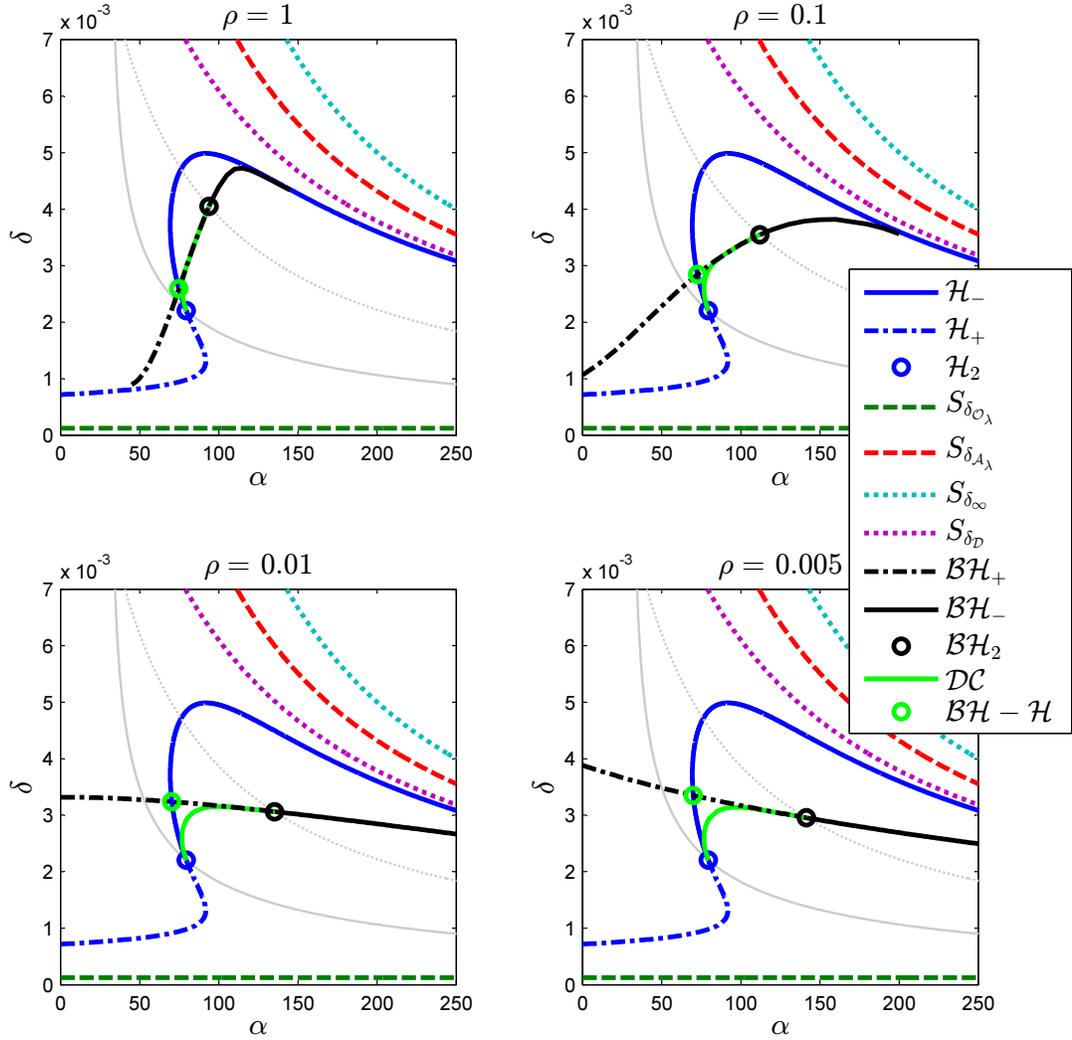


FIGURE 2.20. Diagramme des bifurcations globales pour différents  $\rho$  pour  $\beta = 30$  et  $\lambda_\rho = 0.013$

prédisant que ce doit être le cas étant donné la forme du diagramme de bifurcation et des régions de paramètres contenant au plus un cycle limite. Ceci implique que la région  $E_{\mathcal{DC}}$  formée par le triangle de sommets  $\mathcal{H}_2$ ,  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH})$ ,  $\mathcal{BH}_2$  lorsque  $\beta > 0$  se réduit à un seul point  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH}) = \mathcal{H}_\infty = \mathcal{BH}_\infty$  lorsque  $\beta = 0$  où les courbes  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$  se coupent transversalement (voir figure 2.21). En ce point dans l'espace des paramètres, le point  $\mathcal{M}_\lambda$  est un centre dans le plan de phase. Puisqu'une bifurcation de Hopf d'ordre infini se produit en même temps qu'une bifurcation hétéroclinique, ceci implique que cette dernière doit également être d'ordre infini et la région formée par cette boucle contient une infinité de solutions périodiques puisqu'il s'agit de la seule frontière possible pour la région des solutions périodiques. Ceci est assuré grâce au théorème (4.1.1) du chapitre 4 qui,

comme nous le verrons, stipule l'existence d'une région attractive contenant les séparatrices pour toutes les valeurs des paramètres, éliminant du coup la possibilité que les variétés stables et instables des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  respectivement s'en aillent à l'infini pour une certaine valeur de  $\rho$ , ce qui aurait pu empêcher la formation d'une boucle hétéroclinique.

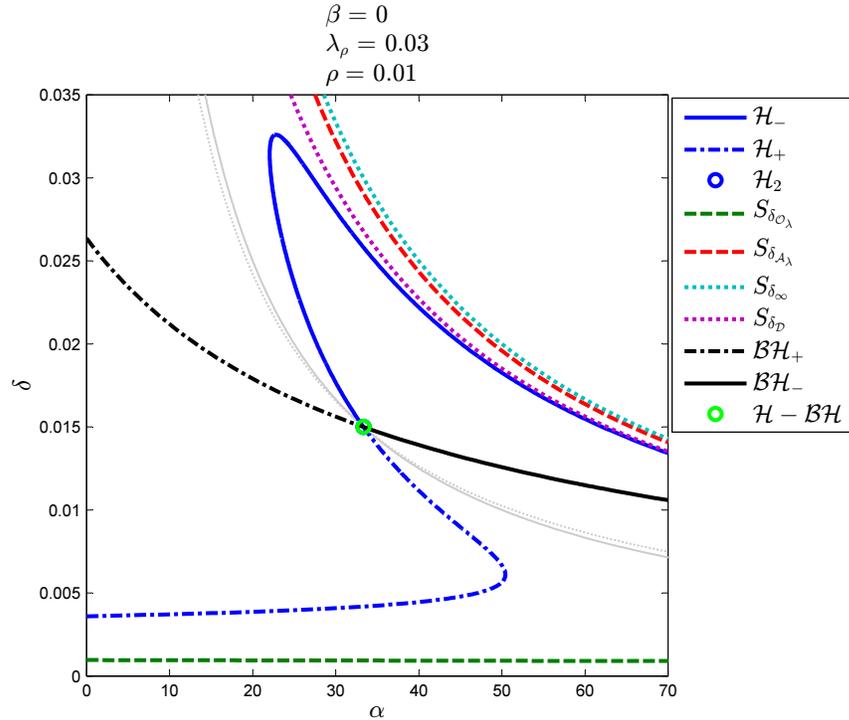


FIGURE 2.21. Diagramme des bifurcations globales pour  $\beta = 0$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$

Numériquement, à la figure 2.22 nous observons qu'à partir de la région  $E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{B}\mathcal{H}}$  (resp.  $E_{\mathcal{H}} \cap E_{\mathcal{B}\mathcal{H}^c}$ ) le cycle  $\mathcal{C}_+$  (resp.  $\mathcal{C}_-$ ) semble être à mi-distance entre le point  $\mathcal{M}_\lambda$  et la boucle hétéroclinique lorsqu'on se dirige vers le point de bifurcation  $(\mathcal{H} - \mathcal{B}\mathcal{H})$  ( $\delta = 0.01$ ) où une infinité de solutions périodiques se forment de part et d'autre. Si  $\alpha = \frac{1}{\lambda_\rho}$  et  $\delta = \frac{\lambda_\rho}{2}$ , correspondant à la bifurcation de Hopf dégénérée, alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un seul cycle limite à  $\delta = \frac{\lambda_\rho}{2} \pm \epsilon$  (cycle  $\mathcal{C}_-$  ou  $\mathcal{C}_+$ ), mais une infinité de solutions périodiques se forment à  $\delta = \frac{\lambda_\rho}{2}$  depuis le centre  $\mathcal{M}_\lambda$  de  $\mathcal{H}_\infty$  jusqu'à la boucle hétéroclinique de  $\mathcal{B}\mathcal{H}_\infty$ ; AUTO a alors de la difficulté numériquement à identifier ces solutions périodiques qui sont structurellement instables.

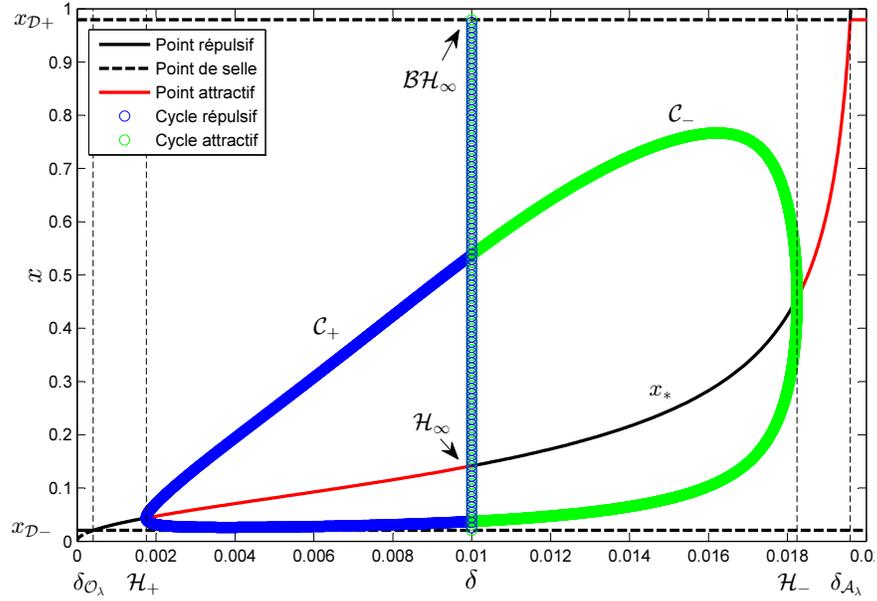


FIGURE 2.22. Diagramme de bifurcation obtenu par XPPAUT de  $x$  en fonction de  $\delta$  pour  $(\alpha, \beta) = (50, 0)$  et  $\lambda_{\rho} = 0.02$

Évidemment, puisque la bifurcation de Hopf d'ordre 2,  $\mathcal{H}_2$ , est répulsive et que celle du double cycle  $\mathcal{DC}$  l'est également, ceci impliquerait que la bifurcation hétéroclinique d'ordre supérieur ou égale à 2,  $\mathcal{BH}_2$ , doit être attractive, c'est-à-dire que la connexion de selle à  $\mathcal{BH}_2$  forme une boucle hétéroclinique faiblement attractive de l'intérieur.

**Remarque 2.6.2.** *Étant donné le diagramme de bifurcation pour  $\beta \geq 0$ , on pourrait s'attendre pour  $\beta < 0$  à une bifurcation du double cycle attractif (i.e. formant un cycle semi-stable répulsif de l'intérieur et attractif de l'extérieur) reliant une bifurcation de Hopf d'ordre 2 attractive et une bifurcation hétéroclinique d'ordre supérieur ou égale à 2 répulsive dans la région  $E_{\mathcal{H}^c} \cap E_{\mathcal{BH}^c}$ .*

Bien que l'entièreté des bifurcations locales du système (2.0.1) dépendent explicitement seulement du paramètre  $\lambda_{\rho}$  plutôt que de  $\lambda$  et  $\rho$ , en particulier la surface  $\mathcal{H}$ , nous remarquons, comme illustré par la figure 2.20, que les deux paramètres  $\rho$  et  $\lambda$  influencent les bifurcations globales  $\mathcal{BH}$  et  $\mathcal{DC}$  pour  $\lambda_{\rho}$  fixe tout comme les surfaces  $\mathcal{N}_{\pm}$ . Les tests numériques nous permettent l'observation suivante :

**Conjecture 2.6.1.** *La surface  $\mathcal{BH}$  restreinte à la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  est également restreinte à la région  $E_{\mathcal{N}} \subset E_{\mathcal{M}_\lambda}$  où le point  $\mathcal{M}_\lambda$  est un foyer.*

Soit le plan  $(\alpha, \delta)$ . Pour  $\rho \rightarrow \infty$  ou suffisamment grand et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  fixe, nous avons que les surfaces  $\mathcal{N}^\pm$  bornant la région  $E_{\mathcal{N}}$  se contractent vers la surface  $\mathcal{H}$ . Nous observons le même effet sur les surfaces  $\mathcal{BH}$  et  $\mathcal{DC}$  qui se contractent sur la surface  $\mathcal{H}$  tout en étant coincées entre les surfaces  $\mathcal{N}^\pm$ . Le point  $\mathcal{BH}_2$  suit le long de la courbe  $(\mathcal{R})$  de sorte que  $\mathcal{BH}_2 \rightarrow (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$  et  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH}) \rightarrow \mathcal{H}_2$  pour  $\rho \rightarrow \infty$ . Pour  $\rho$  grand, ceci a pour effet que les surfaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{BH}$  s'épousent près des bifurcations d'ordre supérieur, rendant leur distinction difficile numériquement. Ceci signifierait (conjecturé) qu'il ne puisse avoir de boucle hétéroclinique si le point  $\mathcal{M}_\lambda$  n'est pas un foyer.

À l'opposé, lorsque  $\rho \rightarrow 0$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  fixe, la région  $E_{\mathcal{N}}$  tend vers  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  et la courbe  $\mathcal{BH}$  épouse la courbe  $(\mathcal{R})$  de sorte que  $\mathcal{BH}_2 \rightarrow (\infty, 0)$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$  et  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH}) \rightarrow \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$  pour  $\rho \rightarrow 0$  permettant à la région triangulaire  $E_{\mathcal{DC}}$  se s'élargir à l'infini (voir figure 2.23 pour la tendance).

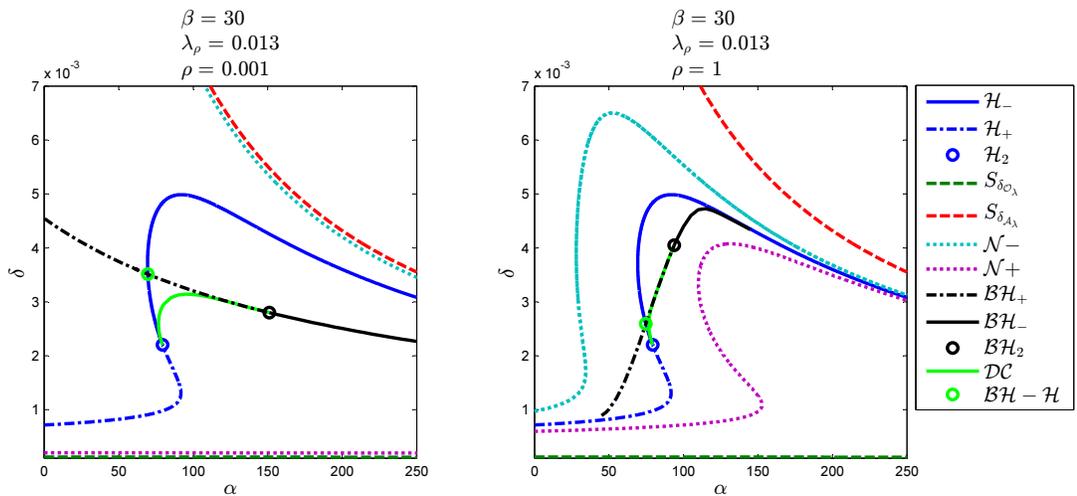


FIGURE 2.23. Diagramme de bifurcation du système avec récolte de proie dans le plan  $(\alpha, \delta)$

Les bifurcations dans la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  ainsi que les cycles et boucles du système sont résumé au tableaux 2.3 et 2.4.

## 2.7. BIFURCATION DE COL NILPOTENT

Pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , nous avons au plus 3 points fixes dans le système ainsi que la possibilité de bifurcations locales de Hopf d'ordre supérieur ou égal à un ( $\mathcal{H}$ ), transcritiques ( $\mathcal{T}\pm$ ), ainsi que des bifurcations globales de boucle hétéroclinique d'ordre supérieur ou égal à un, ( $\mathcal{BH}$ ), et de double cycle, ( $\mathcal{DC}$ ).

Lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , les points fixes  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  fusionnent par le biais d'une bifurcation de col-nœud ( $\mathcal{CN}_\pm$ ) pour ainsi former le seul point fixe et double  $\mathcal{D} = (\frac{1}{2}, 0)$  si  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$  (1.5.6) : le point  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  se trouve à l'extérieur du premier quadrant puisque  $y_* < 0$ . Toutes les surfaces de bifurcations ainsi que la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$ , puisqu'elles sont coincées entre les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$ , se contractent pour former une seule surface de bifurcation.

**Théorème 2.7.1.** *Il y a bifurcation de col nilpotent sur la surface de paramètre*

$$\mathcal{CN} : \begin{cases} \lambda_\rho = \frac{1}{4}, \\ \delta = \delta_{\mathcal{D}}, \end{cases} \quad (2.7.1)$$

au point triple  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} = (\frac{1}{2}, 0)$  et ce pour tout  $\rho > 0$ . En ce point,  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}$  est un col nilpotent (voir figure 2.26). Cette bifurcation est génériquement de codimension 2 puisque la droite  $y = 0$  est invariante. Elle est de codimension 3 si

$$\mathcal{CN}_3 : \begin{cases} (2.7.1), \\ \beta > 0, \\ \alpha = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}, \end{cases} \quad (2.7.2)$$

et de codimension infinie (réversible) si

$$\mathcal{CN}_\infty : \begin{cases} (2.7.1), \\ \beta = 0, \\ \alpha = 4, \end{cases} \quad (2.7.3)$$

donc,  $\delta = \frac{1}{8}$ . Nous notons

$$\mathcal{CN} : (\mathcal{CN}_2 \cup \mathcal{CN}_3 \cup \mathcal{CN}_\infty) \quad (2.7.4)$$

tel que  $\mathcal{CN}_2$  est la partie de la surface de paramètre  $\mathcal{CN}$  de codimension 2

$$\mathcal{CN}_2 : \begin{cases} (2.7.1), \\ \beta \geq 0, \\ \alpha \neq \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}. \end{cases} \quad (2.7.5)$$

En effet, tel que vérifié par Etoua [10], cette bifurcation est au moins de codimension 2 puisqu'elle se produit lorsque  $\mathbf{Det}(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) = \mathbf{Tr}(\frac{1}{2}, \mathbf{0}) = 0$  que l'on peut solutionner, dans ce cas-ci, en fonction de  $\lambda_\rho$  et  $\delta$ .

La surface du col nilpotent est un cas limite (frontière) des surfaces de bifurcations transcritiques  $\mathcal{T}_\pm$  et de la surface de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  aux points  $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  et  $\mathcal{M}_\lambda$  qui deviennent un seul point ( $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$ ) lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$ , entraînant du même coup les surfaces de bifurcation globales  $\mathcal{BH}$  et  $\mathcal{DC}$ . Ainsi, nous avons que  $\{\mathcal{T}_+, \mathcal{H}, \mathcal{T}_-\} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} \mathcal{CN}_2$ ,  $\mathcal{H}_2 \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} \mathcal{CN}_3$  et  $\mathcal{H}_\infty \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} \mathcal{CN}_\infty$ , d'où nous calculons pour la surface  $\mathcal{H}$  lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$  par l'équation (2.4.13)

$$\alpha_{L_1}|_{x_*=\frac{1}{2}} = \frac{\beta^2 + 8\beta + 24}{\beta + 6}. \quad (2.7.6)$$

La courbe d'ordre supérieure  $\mathcal{H}_2$  ainsi que le point  $\mathcal{H}_\infty$  sur la surface  $\mathcal{H}$  qui existent pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  se confondent avec la surface  $\mathcal{CN}$  quand  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , ceci ayant pour effet d'augmenter d'un la codimension sur cette surface. Ceci est vérifié par une étude de mise sous forme normale et d'éclatement au voisinage du point  $\overline{\mathcal{M}_\mathcal{D}}$  ramené à l'origine par [10]. Ainsi, avec  $\delta = \delta_\mathcal{D} = p(x_\mathcal{D})$  pour  $\alpha = \alpha_{L_1}$ , nous obtenons la paramétrisation de la courbe  $\mathcal{CN}_3$  d'ordre 3 dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  pour  $\beta > 0$  et bien sûr le point  $\mathcal{CN}_\infty = (4, \frac{1}{8}, 0)$  d'ordre infini pour  $\beta = 0$  en lequel le système est réversible (i.e le système sous forme normale est symétrique) vérifié par [20]. Le reste de la surface  $\mathcal{CN}$ , i.e.  $\mathcal{CN}_2$ , est d'ordre 2. Nous avons que  $\delta_\mathcal{D} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$  et que  $\mathcal{CN}$  est bornée par  $\delta_\mathcal{D}|_{\alpha=0, \beta=0} = \frac{1}{4}$ .

**Remarque 2.7.1.** *Nous observons évidemment à la surface ( $\mathcal{R}$ ) de l'équation (2.6.5) que  $L_{\mathcal{BH}}(\alpha) \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}} \delta_\mathcal{D}$  de même que la surface  $\mathcal{BH}$ . Nous observons numériquement que pour  $\beta > 0$ , la courbe  $\mathcal{BH}_2$  tend vers la courbe  $\mathcal{CN}_3$  lorsque  $\lambda_\rho \rightarrow \frac{1}{4}$ . On a le même résultat pour la courbe  $(\mathcal{H} - \mathcal{BH})$  ainsi que pour la région*

$E_{\mathcal{D}\mathcal{C}}$ , cette région triangulaire se contractant en  $\mathcal{CN}_3$ .

La surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{D}}}(\mathcal{CN})$  divise le plan  $\lambda_{\rho} = \frac{1}{4}$  en les 2 régions de bifurcation de col-nœud du théorème (2.3.2) (figure 2.25)

$$\mathcal{CN}_+ : \begin{cases} \lambda_{\rho} = \frac{1}{4} \\ \delta < \delta_{\mathcal{D}} \end{cases} \quad (2.7.7)$$

$$\mathcal{CN}_- : \begin{cases} \lambda_{\rho} = \frac{1}{4} \\ \delta > \delta_{\mathcal{D}} \end{cases} \quad (2.7.8)$$

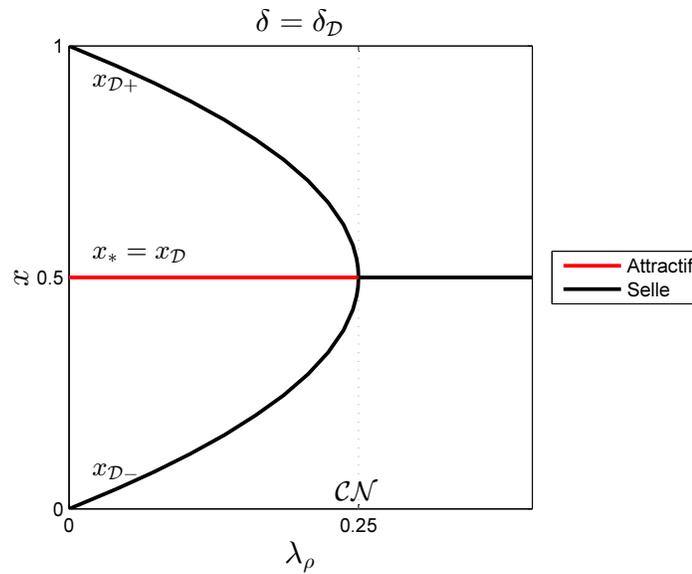


FIGURE 2.24. Diagramme de bifurcation de col nilpotent en fonction de  $\lambda_{\rho}$  pour  $\rho > 0$  obtenus par XPPAUT

En effet, paramétrée par  $\lambda_{\rho}$ , cette bifurcation locale a pour effet de former à  $\lambda_{\rho} = \frac{1}{4}$  un point fixe triple  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}$ , un col nilpotent, à partir d'au plus trois points fixes simples distincts  $\mathcal{O}_{\lambda}, \mathcal{M}_{\lambda}, \mathcal{A}_{\lambda}$ , soit un selle, un anti-selle et un selle respectivement. Le jacobien au point triple est une matrice nilpotente (d'où le terme). Ce point non hyperbolique à valeurs propres nulles a le type topologique d'un point de selle. Il y a 4 séparatrices mais elles sont 2 à 2 tangentes. Ces séparatrices sont les limites des séparatrices des points de selles  $\mathcal{O}_{\lambda}$  et  $\mathcal{A}_{\lambda}$  avant la confluence. Elles forment deux variétés invariantes sur lesquels le flot est semi-stable au col, soient le couple  $(W^u(\mathcal{O}_{\lambda}), W^s(\mathcal{A}_{\lambda}))$  en noir pointillé, et le couple  $(W^s(\mathcal{O}_{\lambda}), W^u(\mathcal{A}_{\lambda}))$  en vert et bleu respectivement à la figure 2.26. En effet, la variété centre est de codimension 2 dans ce cas, c'est-à-dire le cas intermédiaire des séparatrices  $W^s(\mathcal{D})$  et

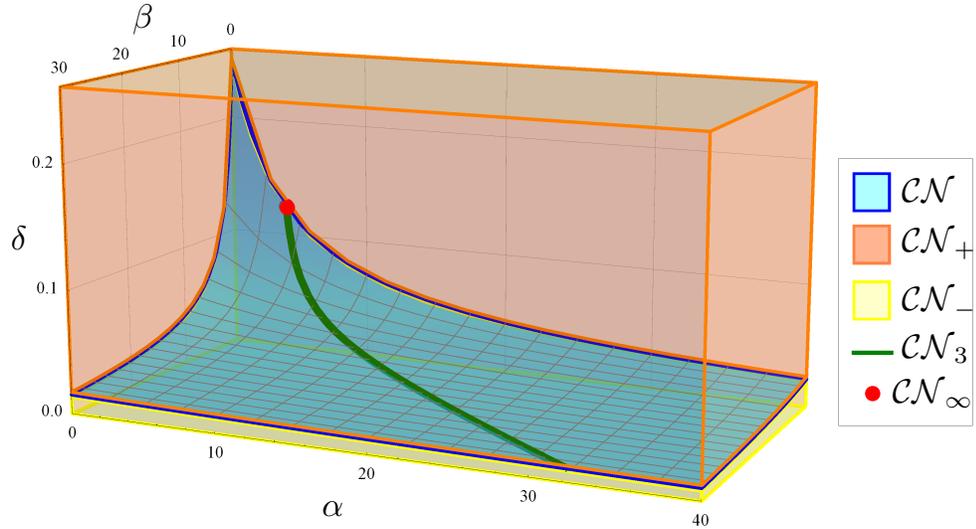


FIGURE 2.25. Diagramme de bifurcation de col nilpotent dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$  pour  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$

$W^u(\mathcal{D})$  (voir figure 2.4). La forme du portrait de phase dans le premier quadrant est identique pour toutes valeurs de paramètre lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  : le flot va vers la gauche partout à l'exception du col au point  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ .

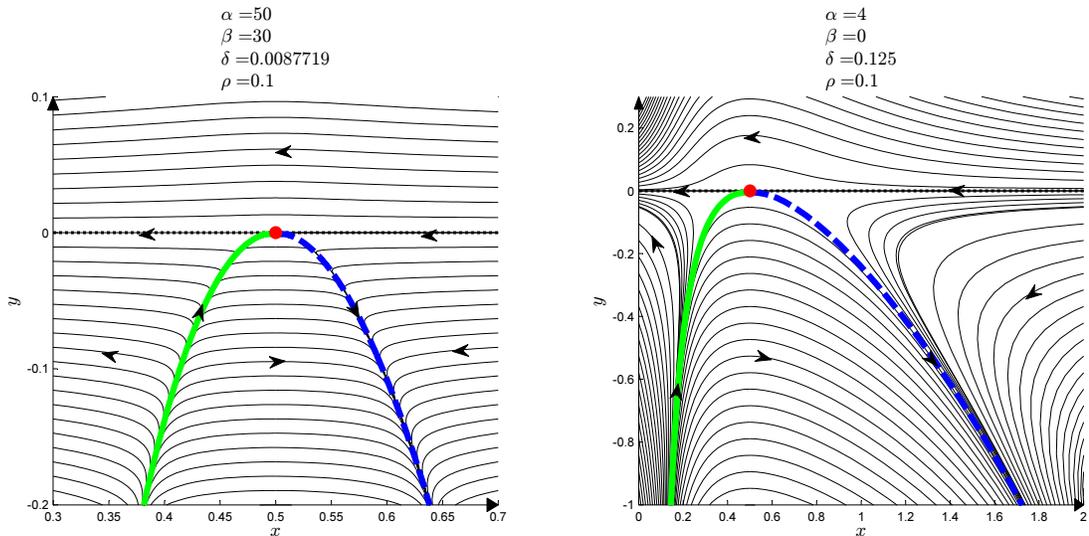


FIGURE 2.26. Portrait de phase du système au voisinage du col nilpotent au point  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$  pour des valeurs de paramètres sur  $\mathcal{CN}_2$  (gauche) et  $\mathcal{CN}_\infty$  (droite) à  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$

Lorsque  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$ , il n'y a plus de points fixes ni de cycles limites dans le premier quadrant, car  $\dot{x} < 0 \forall x > 0$  et  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$  est dans le 4<sup>e</sup> quadrant. Le seul point de bifurcation pour tout  $\lambda_\rho$  est la surface  $\mathcal{S}_{\delta_\infty}$  où le point  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ , déjà dans le 4<sup>e</sup>

quadrant s'en va à l'infini. Pour tout  $y > 0$ , la population de proie est portée à disparaître (figure 2.32).

## 2.8. PORTRAITS DE PHASE DU SYSTÈME POUR $\lambda > 0$

Voici les tableaux qui résument les bifurcations, les cycles limites et la stabilité du point  $\mathcal{M}_\lambda$  avec référence aux portraits de phase des figures 2.28, 2.29, 2.30, 2.31.

Région	Bifurcation	Cycle	Boucle	$\mathcal{M}_\lambda$	Réf.	
$E_{B\mathcal{H}^c}$	$E_{\mathcal{H}^c}$	-	$\emptyset$	$\emptyset$	Attractif	(e)
	$\mathcal{H}_-$	Hopf supercritique	$\emptyset$	$\emptyset$	Faiblement attractif	(f)
	$E_{\mathcal{H}}$	-	$\mathcal{C}_-$	$\emptyset$	Répulsif	(g)
$B\mathcal{H}$	$B\mathcal{H}_+$	Hétéroclinique répulsive	$\emptyset$	Répulsive	Attractif	(h)
	$\mathcal{H} - B\mathcal{H}$	Hopf/Hétéroclinique dégénérée	Infinité	Dégénérée	Centre	(t)
	$B\mathcal{H}_-$	Hétéroclinique attractive	$\emptyset$	Attractive	Répulsif	(l)
$E_{B\mathcal{H}}$	$E_{\mathcal{H}^c}$	-	$\mathcal{C}_+$	$\emptyset$	Attractif	(m)
	$\mathcal{H}_+$	Hopf sous-critique	$\emptyset$	$\emptyset$	Faiblement répulsif	(s)
	$E_{\mathcal{H}}$	-	$\emptyset$	$\emptyset$	Répulsif	(q)

TABLEAU 2.3. Cycles limites et stabilité du point  $\mathcal{M}_\lambda$  du système avec récolte proie constante dans la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $\beta = 0$

Région	Bifurcation	Cycle	Boucle	$\mathcal{M}_\lambda$	Ref.		
$E_{B\mathcal{H}^c}$	$E_{\mathcal{H}^c}$	-	$\emptyset$	$\emptyset$	Attractif	(e)	
	$\mathcal{H}_-$	Hopf supercritique	$\emptyset$	$\emptyset$	Faiblement attractif	(f)	
	$E_{\mathcal{H}}$	-	$\mathcal{C}_-$	$\emptyset$	Répulsif	(g)	
$B\mathcal{H}$	$E_{\mathcal{H}^c}$   $B\mathcal{H}_+$	Hétéroclinique répulsive	$\emptyset$	Répulsive	Attractif	(h)	
	$\mathcal{H} - B\mathcal{H}$	Hopf supercritique / Hétéroclinique répulsive	$\emptyset$	Répulsive	Faiblement attractif	(i)	
	$E_{\mathcal{H}}$	$B\mathcal{H}_+$	Hétéroclinique répulsive	$\mathcal{C}_-$	Répulsive	Répulsif	(j)
		$B\mathcal{H}_2$	Hétéroclinique ordre 2	$\emptyset$	Faiblement attractive	Répulsif	(k)
		$B\mathcal{H}_-$	Hétéroclinique attractive	$\emptyset$	Attractive	Répulsif	(l)
$E_{B\mathcal{H}}$	$E_{\mathcal{H}^c}$	-	$\mathcal{C}_+$	$\emptyset$	Attractif	(m)	
	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}_-$	Hopf supercritique	$\mathcal{C}_+$	$\mathcal{C}_+$	Faiblement attractif	(n)
		$\mathcal{H}_2$	Hopf ordre 2	$\emptyset$	$\emptyset$	Très faiblement répulsif	(r)
		$\mathcal{H}_+$	Hopf sous-critique	$\emptyset$	$\emptyset$	Faiblement répulsif	(s)
		$E_{DC}$	-	$\mathcal{C}_-, \mathcal{C}_+$	$\emptyset$	Répulsif	(o)
	$E_{\mathcal{H}}$	$\mathcal{DC}$	Double cycle	$\mathcal{C}_\pm$	$\emptyset$	Répulsif	(p)
		-	-	$\emptyset$	$\emptyset$	Répulsif	(q)

TABLEAU 2.4. Cycles limites et stabilité du point  $\mathcal{M}_\lambda$  du système avec récolte proie constante dans la région  $E_{\mathcal{M}_\lambda}$  pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $\beta > 0$

Ceci nous donne le théorème suivant :

**Théorème 2.8.1.** *La nature et la stabilité des points fixes du système (2.0.1) avec récolte de proie constante  $\lambda > 0$  pour  $\alpha, \delta, \rho > 0$  est, pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , entièrement décrite au tableau 2.4 pour  $\beta > 0$  et au tableau 2.3 pour  $\beta = 0$ , ainsi qu'au tableau 2.1 pour  $\lambda > 0$ . Le type du point  $\mathcal{M}_\lambda$  est précisé au tableau 2.2. Ces tableaux synthétisent les diagrammes des bifurcations/transitions du système (2.0.1) avec récolte de proie constante dans l'espace  $(\alpha, \delta, \beta)$  pour  $\lambda, \rho > 0$  des figures 2.10 à 2.13 pour  $\mathcal{H}$ , la figure 2.15 pour  $\mathcal{N}_\pm$ , la section 2.6 pour  $\mathcal{BH}, \mathcal{DC}$  et la figure 2.25 pour  $\mathcal{CN}$ .*

Encore une fois, l'étude des conditions de survie ou d'extinction des espèces du système avec récolte de proie constante (2.0.1) se fait à partir des portraits de phase de ce système, topologiquement bien différenciés par les régions de paramètres des tableaux de bifurcations du système. Les régions des conditions initiales du premier quadrant ouvert  $Q_1$  lorsque  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  seront délimitées par les séparatrices  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  et  $W^u(\mathcal{A}_\lambda)$  et des cycles limites du système, d'où l'importance d'une étude numérique afin de pouvoir tracer ces derniers. Contrairement au cas sans récolte où la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda) = (x = 0)$  permettait de délimiter le premier quadrant, et du coup empêcher les extinctions, le flot traverse l'axe des ordonnées permettant ainsi l'extinction des proies par un déplacement vers  $Q_1$  de  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ .

Nous traçons cette séparatrice numériquement ainsi que le reste du portrait de phase pour les régions de paramètres données aux figures 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31 et 2.32.

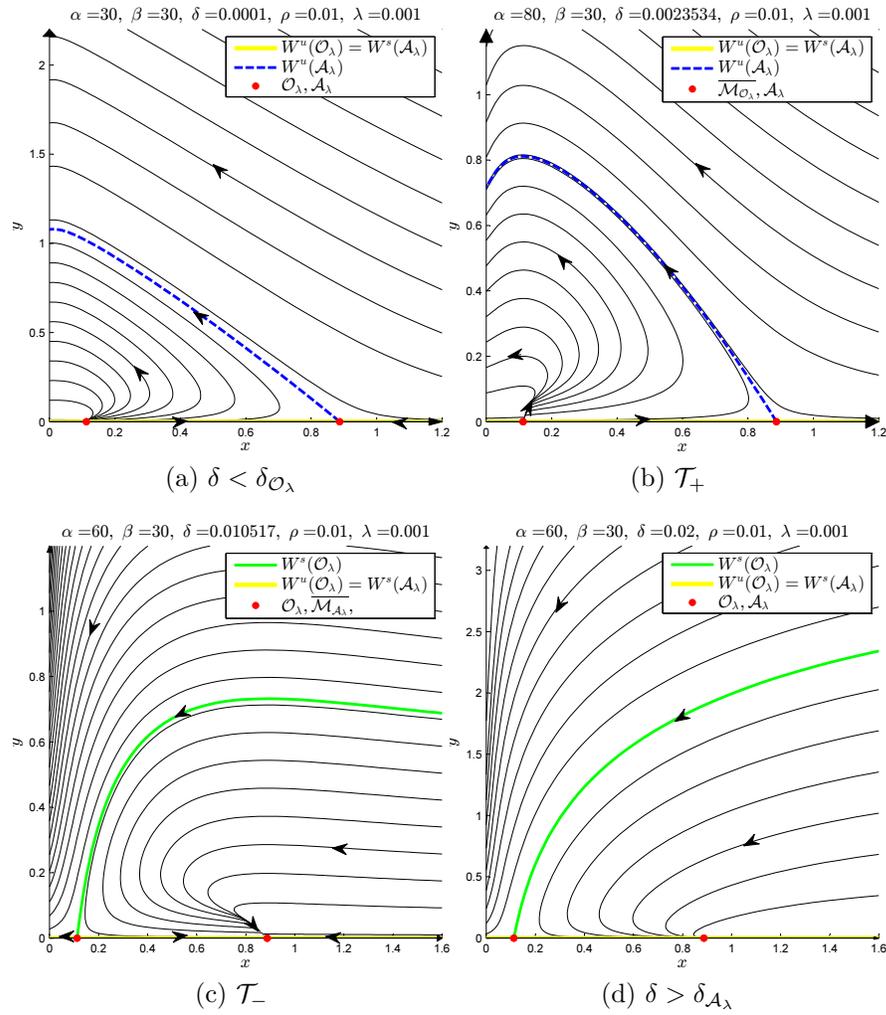


FIGURE 2.27. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres  $(\beta, \alpha, \delta)$  dans  $E_{\mathcal{M}_\lambda^c}$

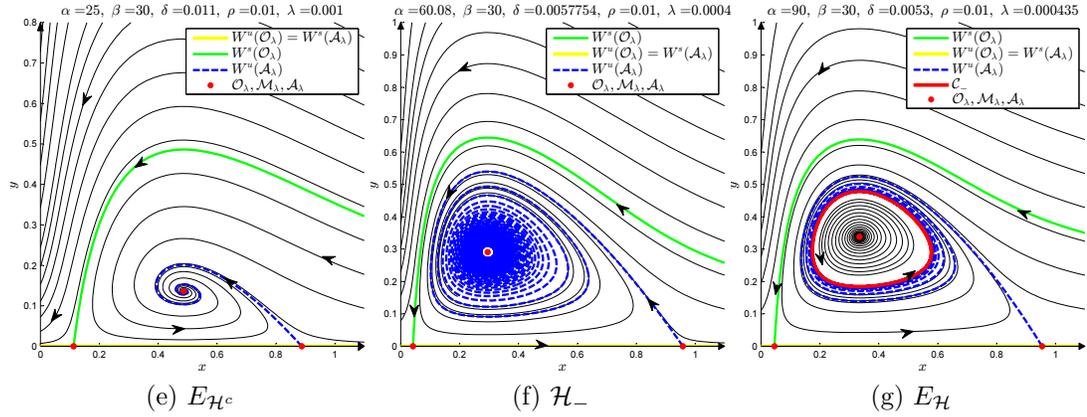


FIGURE 2.28. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres  $(\beta, \alpha, \delta)$  dans  $E_{\mathcal{B}\mathcal{H}^c}$

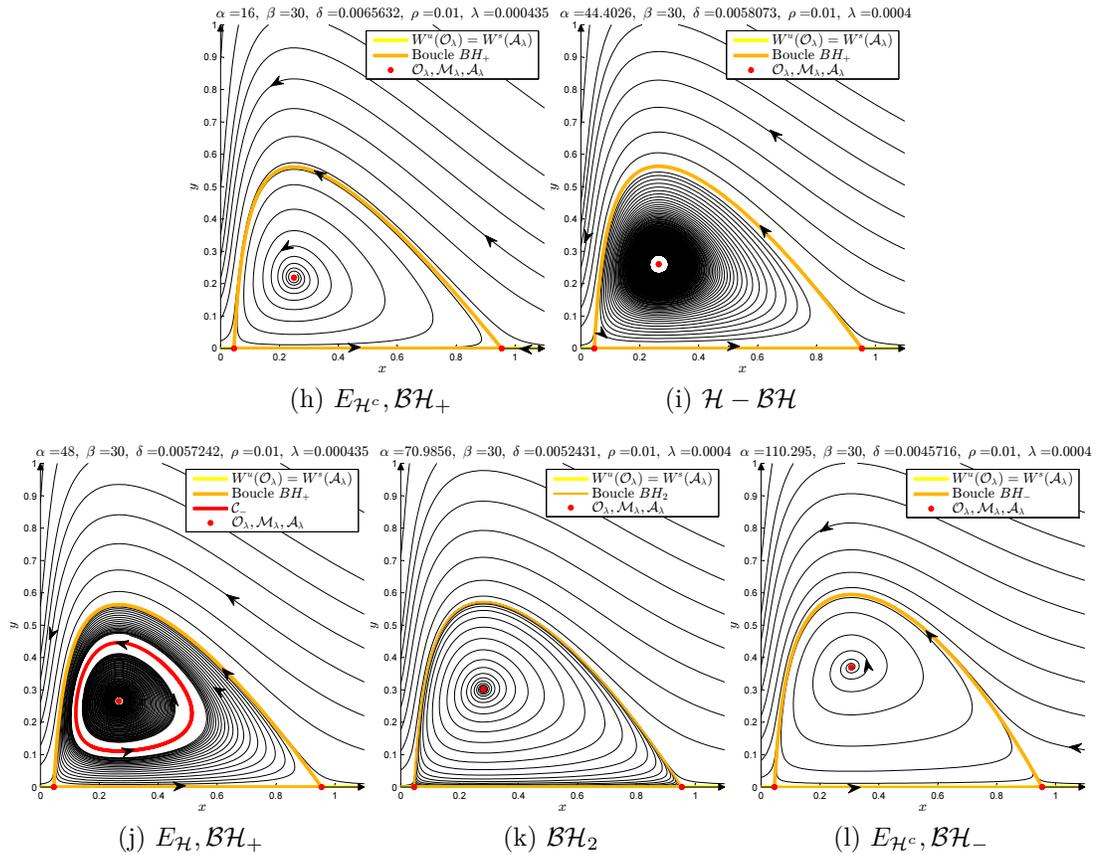


FIGURE 2.29. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres  $(\beta, \alpha, \delta)$  sur  $\mathcal{B}\mathcal{H}$

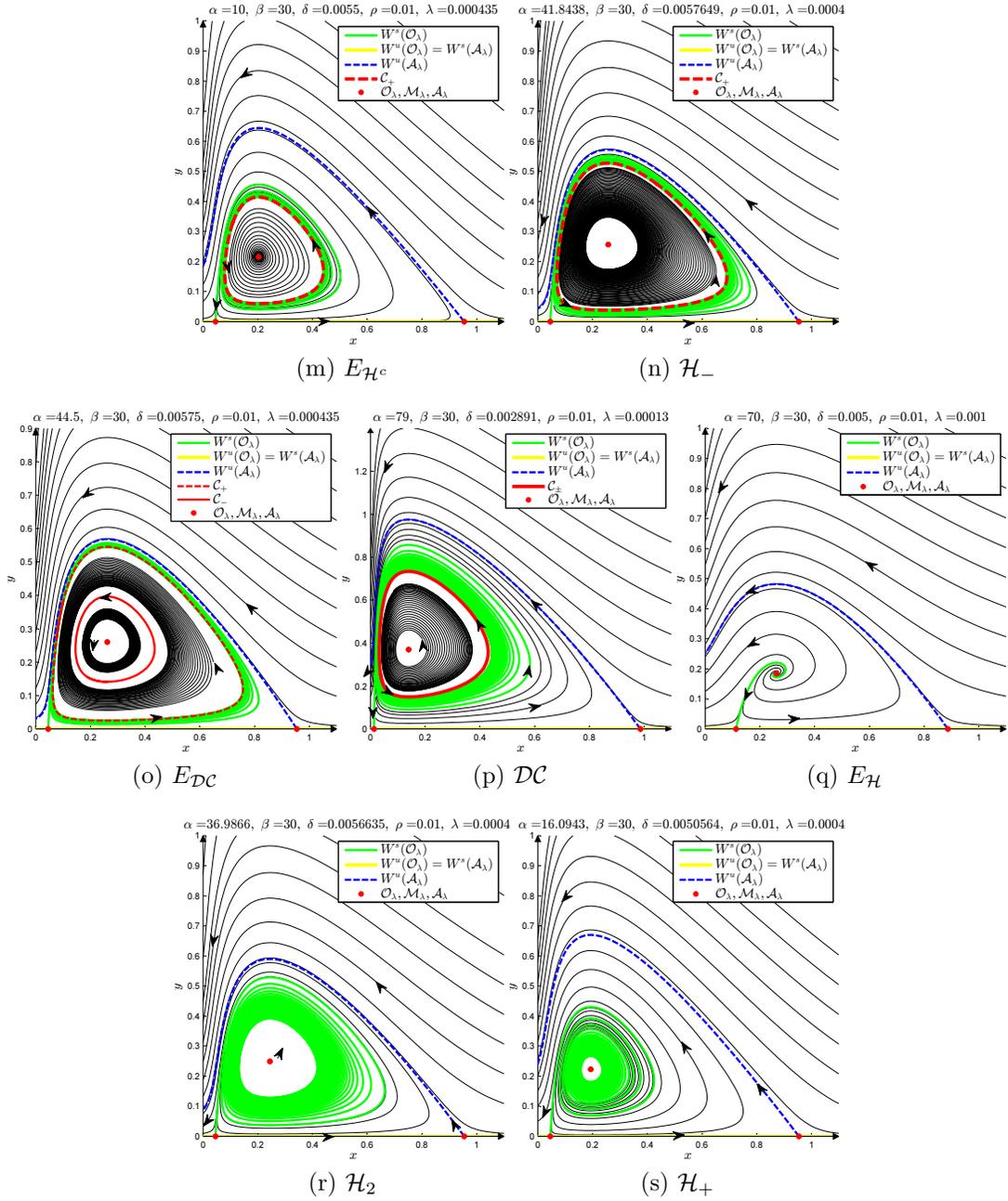


FIGURE 2.30. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres  $(\beta, \alpha, \delta)$  dans  $E_{B\mathcal{H}}$

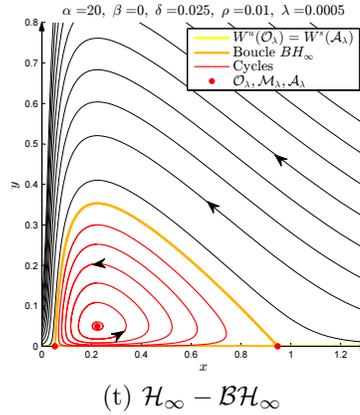


FIGURE 2.31. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres pour  $\beta = 0$

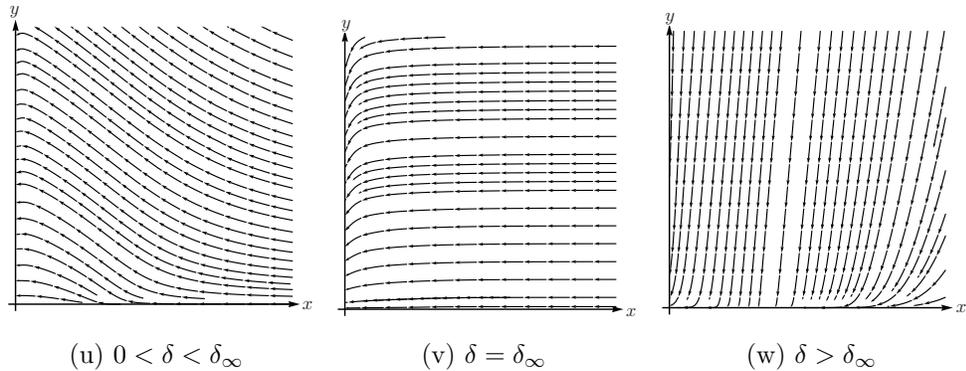


FIGURE 2.32. Portraits de phase du système avec récolte de proie constante pour différents paramètres pour  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$

Avec ces portraits de phase, diagrammes de bifurcation et tableaux de points fixes, nous obtenons le résultat général suivant pour le système avec récolte de proie constante.

**Résultat 2.8.1.** *Les portraits de phase des figures 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31 et 2.32 représentent l'ensemble des possibilités topologiques du système (1.1.9) avec récolte de proie constante pour les paramètres  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Le système biologique se comporte ainsi pour les conditions initiales à  $t = 0$  dans le premier quadrant ouvert  $Q_1 = (x(0) > 0, y(0) > 0)$  pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $\beta \geq 0$  :*

- (1) Conditions initiales conduisant à l'extinction des espèces

- Région de paramètres  $\delta \geq \delta_{\mathcal{A}_\lambda} \cup E_{\mathcal{BH}^c}$  (2.27, 2.28) : toutes les conditions initiales au-dessus de la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ .
- Région de paramètres  $\mathcal{BH}$  (2.29, 2.31) : toute les conditions initiales au-dessus de la boucle  $\mathcal{BH}$ .
- Région de paramètres  $E_{\mathcal{BH}} \cup \delta \leq \delta_{\mathcal{O}_\lambda}$  (2.30, 2.27) :
  - $E_{\mathcal{H}^c} \cup \mathcal{H}_- \cup E_{\mathcal{DC}}$  : à l'extérieur de  $\mathcal{C}_+$ ,
  - $\mathcal{DC}$  : à l'extérieur de  $\mathcal{C}_-$ ,
  - Ailleurs : partout,

(2) *Survie des proie seulement (extinction des prédateurs)*

- Région de paramètres  $\delta \geq \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  (2.27) : toutes les conditions initiales sous la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  pour survie à  $x = x_{\mathcal{D}+}$ , ou toutes les conditions initiales sur la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  pour survie à  $x = x_{\mathcal{D}-}$  (selle),
- Région de paramètres  $E_{\mathcal{BH}^c} \cup E_{\mathcal{BH}}$  : toutes les conditions initiales sur la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  pour survie à  $x = x_{\mathcal{D}-}$ ,
- Région de paramètres  $\mathcal{BH}$  (2.29, 2.31) : toute les conditions initiales sur la boucle  $\mathcal{BH}$  pour survie à  $x = x_{\mathcal{D}-}$ .

(3) *Coexistence des espèces*

- Région de paramètres  $E_{\mathcal{BH}^c}$  (2.28) : toutes les conditions initiales sous la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  pour survie à l'équilibre  $\mathcal{M}_\lambda$  ou cyclique à  $\mathcal{C}_-$ ,
- Région de paramètres  $\mathcal{BH}$  (2.29) : toutes les conditions initiales à l'intérieur de la boucle  $\mathcal{BH}$  pour survie à l'équilibre  $\mathcal{M}_\lambda$  ou cyclique à  $\mathcal{C}_-$ , ou boucle  $\mathcal{BH}$ , ou cyclique dégénéré lorsque  $\beta = 0$ ,
- Région de paramètres  $E_{\mathcal{BH}}$  (2.30) : toutes les conditions initiales à l'intérieur de  $\mathcal{C}_+$  pour survie à l'équilibre  $\mathcal{M}_\lambda$ , ou cyclique à  $\mathcal{C}_-$  ou  $\mathcal{C}_\pm$ .

Sur la frontière  $y = 0$ , nous avons pour toutes valeurs de paramètres que  $L_\omega(x = x_{\mathcal{D}-}) = \mathcal{O}_\lambda$  et  $L_\omega(x > x_{\mathcal{D}-}) = \mathcal{A}_\lambda$  (1.7.1) garantissant la survie des proies, mais son extinction pour  $x < x_{\mathcal{D}-}$ .

Lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , il y a extinction des espèces pour toutes les conditions initiales dans  $Q_1$ . Sur la frontière  $y = 0$ , il y a survie à  $x = x_{\mathcal{D}}$  pour  $x \geq x_{\mathcal{D}}$  et extinction pour  $x < x_{\mathcal{D}}$ .

Lorsque  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$ , il y a extinction des espèces pour toutes les conditions initiales.

Donc les frontières des régions de conditions initiales d'extinction sont la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ , la boucle hétéroclinique de  $\mathcal{BH}$  et le cycle répulsif  $\mathcal{C}_+$  ou semi-stable  $\mathcal{C}_\pm$  lorsqu'il existe.

Si le paramètre  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$  c'est-à-dire une récolte  $\lambda > \frac{\rho}{4}$ , nous voyons que, peu importe les conditions initiales et les autres valeurs de paramètre, alors forcément il y a extinction des espèces, où typiquement il n'y a aucun point fixes ou cycles limites dans le premier quadrant car  $\dot{x} < 0 \forall (x, y) \in Q_1$  (figure 2.32). Seule la valeur de  $\delta$  par rapport à  $\delta_\infty = p(\infty) = \frac{1}{\alpha}$  affecte les lignes de courant. Même si  $\overline{\mathcal{M}_\lambda}$  se trouve dans le 4<sup>e</sup> quadrant, l'effet sur le flot en  $y$  reste le même, c'est-à-dire comme l'équation (1.2.15). En effet, pour  $\delta$  petit, les prédateurs prennent avantage sur les proies et il y a croissance de cette population, jusqu'à l'extinction des proies, ceci menant les prédateurs à leur propre extinction. Pour  $\delta \geq \delta_\infty$ , il y a décroissance des prédateurs, et de plus en plus rapide pour  $\delta$  plus grand. Cet effet est identique pour  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  à l'exception de la présence du point  $\overline{\mathcal{M}_\mathcal{D}}$  pour  $\delta$  autour de  $\delta_\mathcal{D} = p(x_\mathcal{D}) = \frac{1}{\alpha + 2\beta + 4}$  (figures 2.4 et 2.26).

Toute récolte de cet ampleur amène l'extinction des espèces inévitablement et donc n'assure pas la préservation. Elle n'est pas utile à long terme pour faire des profits. Ceci caractérise typiquement des phénomènes réels de société comme la surpêche, la coupe à blanc, la chasse excessive..., et est à l'origine de l'extinction d'espèces animales et végétales dans la nature. Même pour certaines valeurs de récolte inférieures à ce seuil, l'extinction des espèces est assurée pour toutes les conditions initiales pour des valeurs de paramètres dans la région  $\delta \leq \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  (figure 2.27a et 2.27b) ou  $E_\mathcal{H} \cap E_{\mathcal{BH}}$  (figure 2.30q, 2.30r et 2.30s). Pour toutes les autres régions de paramètres, il y existe un ouvert non-vide de conditions initiales où au moins la population de proie est préservée, c'est-à-dire que la région de coexistence n'est pas de mesure nulle, aspect essentiel pour tout système biologique. En revanche, ces régions contiennent toutes un ensemble de conditions initiales assurant l'extinction des espèces :  $\forall \alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ ,  $\exists y_0 < \infty$  tel que  $\forall x(0) > 0, y(0) \geq y_0$ , alors  $(x(t), y(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (0, 0)$ . Ceci forme le rendement soutenu maximal des deux espèces pour le système avec récolte de proie constante.

Avec le problème de réalisme avec  $\dot{x} < 0$  à  $x = 0$ , lorsqu'on veut appliquer le système, il suffit tout simplement d'utiliser une fonction discontinue de récolte nulle à  $x = 0$  que nous étudierons au chapitre suivant. Mais, malgré ceci, nous voyons clairement par le résultat 2.8.1 que les problèmes d'extinction des espèces ne se limitent pas à une mince bande de conditions initiales autour de  $x = 0$ . Les nouvelles bifurcations liées à l'ajout d'un paramètre  $\lambda > 0$ , en particulier celle de boucle hétéroclinique  $\mathcal{BH}$ , ont pour effet de faire apparaître et d'amplifier le problème d'extinction qui était absent dans le cas sans récolte. Ce problème est maintenant présent pour toutes les valeurs de paramètres et pour toute population de proie supérieure à  $x = 1$ , aussi grande qu'elle soit.

Ceci a pour effet que ce type de système, du moins, ce type de fonction de récolte, est dangereux en pratique. À court terme ou par manque de souci de la pérennité des espèces, la récolte constante peut être utile étant donnée sa simplicité. À long terme, la stabilité des populations peut être essentielle. Il est nécessaire d'adapter notre fonction de récolte constante à une fonction plus réaliste, non seulement autour de  $x = 0$  mais assurant la pérennité des populations comme dans le cas sans récolte. tout en permettant de faire une récolte contrôlée à des fins économiques qui sera bénéfique à court et à long terme.

# Chapitre 3

---

## ÉTUDE DES SYSTÈMES DISCONTINUS APPLICABLES ET FONCTION DE RÉCOLTE CONTRÔLÉE

Dans ce chapitre, nous étudions l'ajout d'une fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1 \geq 0$ , c'est-à-dire non-constante et dépendant du nombre d'individus récoltés, pour l'étude du système (1.1.9). L'étude analytique de la récolte constante nulle et positive faite aux chapitres 1 et 2 respectivement sera assemblée afin d'étudier la fonction de récolte contrôlée discontinue. Nous ferons l'analyse d'un tel système discontinu et étudierons les outils d'approximations continues et numériques possibles qui nous serviront à analyser notre système (1.1.9) au chapitre suivant.

### 3.1. BUT D'UNE FONCTION DE RÉCOLTE CONTRÔLÉE

Même si une étude complète a été faite par Etoua [10] sur le système avec récolte de proie constante, il demeure que le système a des failles au point de vue réalisme et efficacité quand on veut l'appliquer. Du point de vue réalisme, cela n'a pas de sens que le système permette à la population de prendre des valeurs négatives. Du point de vue efficacité, puisque nous assumons une récolte constante uniforme, par exemple une chasse non régulée de proie, ceci peut entraîner une extinction des espèces si cette récolte s'avère trop grande tel qu'observé au chapitre 2. Initialement, l'idée d'ajouter une récolte de proie était à des fins économiques tout en favorisant l'équilibre des espèces, qu'elle soit fixe ou cyclique afin de maximiser la récolte tout en préservant les espèces. Ceci s'avère exact pour de bonnes conditions initiales, par exemple en dessous de la variété stable  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  du point  $\mathcal{O}_\lambda$  (voir 2.28).

Cependant, pour des conditions initiales  $(x(0), y(0))$  au-dessus de cette séparatrice,  $x$  tend rapidement et inévitablement vers 0. La composante  $\dot{x} < 0$  du champ en  $x = 0$  permet ensuite de traverser l'axe  $y$  vers le 2<sup>e</sup> quadrant, ce qui est irréaliste biologiquement. Évidemment, puisque  $x, y \geq 0$  représentent des populations,  $x = 0$  devrait former une condition limite à la récolte. Donc sur l'axe  $y$ , la récolte devient nulle et le système devient le système sans récolte se trouvant sur la variété stable de  $\mathcal{O}$  (l'axe  $y$ ), ce qui amène donc à l'extinction des prédateurs tel qu'observé au chapitre 1. Ainsi, pour que le système (1.1.9) avec récolte constante soit réaliste, pour éviter des populations négatives, nous devons utiliser une récolte de proie de la forme

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \lambda, & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

ce qui est identique au système (2.0.1) avec récolte constante, à l'exception de l'ajout du point fixe  $\mathcal{O}$  avec sa variété stable, donc un système discontinu. Cependant, les conclusions de ce nouveau système par rapport aux résultats 2.8.1 sont identiques au niveau des conditions initiales menant à l'extinction des espèces, à l'exception de l'absence d'un flot traversant l'axe  $x = 0$ . Ceci ne règle pas le problème des conditions d'extinction en dehors du voisinage de  $x = 0$ . Donc il vaut mieux que le système soit sans récolte pour  $x > 0$  petit, c'est-à-dire lorsque la population de proie est faible et en danger d'extinction. En effet, il serait absurde d'exercer la même quantité de récolte à une petite population de proie que lorsque celle-ci est grande. D'où l'idée d'introduire une fonction de récolte contrôlée  $\eta_1(x)$  pour préserver le comportement du système sans récolte lorsque  $x$  est petit tout en gardant une récolte importante lorsque la population de proie est grande et ainsi empêcher l'extinction des populations, et ce, en respectant les contraintes du système liées à la récolte.

Soit

$$\begin{aligned} I_y(x) &= g(x) - yp(x) - \eta_1(x) \\ &= \rho x(1 - x) - yp(x) - \eta_1(x) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Ceci est l'équation de la composante  $\dot{x}$  du système (1.1.9). Donc

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \rho x(1 - x) - \eta_1(x), \\ I_0(0) &= -\eta(0). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Alors  $\dot{x} = I_0(x)$  est l'équation de l'évolution des proies en l'absence de prédateurs. Elle sera importante pour étudier l'introduction d'une fonction de récolte quelconque afin de pouvoir identifier les points fixes du sous-système  $y = 0$  servant

de base au système complet.

En dérivant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{dI_0}{dx}(x) &= \rho(1 - 2x) - \frac{d\eta_1}{dx}(x), \\
\frac{dI_0}{dx}(0) &= \rho - \frac{d\eta_1}{dx}(0), \\
\frac{d^2I_0}{dx^2}(x) &= -2\rho - \frac{d^2\eta_1}{dx^2}(x), \\
\frac{d^2I_0}{dx^2}(0) &= -2\rho - \frac{d^2\eta_1}{dx^2}(0), \\
\frac{d^nI_0}{dx^n}(x) &= -\frac{d^n\eta_1}{dx^n}(x) \quad n > 2.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Un aspect intéressant du système 1.1.9 en l'absence de récolte de prédateur ( $\eta_2 = 0$ ) est que le point fixe à l'intérieur du premier quadrant  $\mathcal{M} = (x_*, y_*)$  reste inchangé pour différents  $\eta_1$  à l'exception de sa hauteur  $y_*$  puisque les zéros du flot en  $y$  de l'équation  $y(-\delta + p(x)) = 0$  restent évidemment les mêmes, soit  $y = 0$  et  $\delta = p(x)$ , cette dernière équation ayant une seule solution positive. En particulier, lorsque  $x_{\mathcal{D}^-} < x_* < x_{\mathcal{D}^+}$ ,  $y_*|_{\eta_1=0} > y_*|_{\eta_1=\lambda>0}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{M}|_{\lambda=0}$  est plus haut que  $\mathcal{M}_\lambda$ . Seuls les points fixes sur  $y = 0$  pourraient changer via des bifurcations en fonction de  $\eta_1(x)$ , d'où l'importance des équations précédentes.

Dans le cas d'une fonction  $\eta_1$  à proprement parler de *récolte*, pour que cette dernière ait un sens biologique, il est impératif qu'elle prenne des valeurs positives ou nulles sinon nous parlerions d'*approvisionnement*. Toutefois, afin d'empêcher l'extinction des espèces et pour avoir du sens biologiquement, la récolte devra être nulle lorsque la population récoltée est nulle : la population ne peut être négative. Pour optimiser la récolte totale, le taux de récolte devra augmenter si la population à récolter augmente. À la limite, la récolte ne pourra pas être plus grande que le taux de récolte maximale  $\lambda$  fixé par un quota par exemple. Cette limite a pour but également de simplifier un système qui prendrait en compte d'autres contraintes. Donc, dans le cas de la fonction de récolte de proie  $\eta_1$ , celle-ci doit satisfaire à

$$\bullet \quad \eta_1(0) = 0, \tag{3.1.5a}$$

$$\bullet \quad \eta_1(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \tag{3.1.5b}$$

$$\bullet \quad \eta_1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \lambda, \tag{3.1.5c}$$

$$\bullet \quad \eta_1(x) \text{ croissante sur } \mathbb{R}^+, \tag{3.1.5d}$$

$$\bullet \quad \frac{dI_0}{dx}(0) = \rho - \frac{d\eta_1}{dx}(0) > 0 \Leftrightarrow \frac{d\eta_1}{dx}(0) < \rho. \quad (3.1.5e)$$

Idéalement,  $\eta_1$  devrait être  $C^0$  et au moins  $C^1$  par morceaux pour qu'elle soit dérivable presque partout, donc avec singularités dénombrables. Une condition optionnelle mais qui rajoute du réalisme est que

$$\left. \frac{d\eta_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad (3.1.6)$$

ayant pour effet, comme pour la fonction de réponse de Holling type III, de limiter la récolte pour une population faible et d'attendre un certain seuil avant d'augmenter le taux de récolte. En revanche, il est essentiel d'avoir la condition (3.1.5a) jumelé à la condition (3.1.5e), qui est probablement la plus importante pour le but premier de ce mémoire afin d'éliminer le problème d'extinction des espèces du système avec récolte de proie constante pour une condition initiale  $x(0) > 0$  aussi grande qu'elle soit. En effet, il est irréaliste d'avoir un taux de croissance des proies en l'absence des prédateurs ( $\rho$ ) inférieur au taux de récolte de proie autour de  $x = 0$ . De ce fait,  $\eta_1(0) = 0$  puisque  $g(0) = 0$ , la fonction de réponse des proies, et non pas inférieur à  $g(0)$  puisque nous parlerions d'approvisionnement de proie sinon. Et donc, afin d'éliminer l'existence d'une mince bande de conditions initiale portant inévitablement à l'extinction des espèces comme au chapitre 2 où  $\dot{x} < 0$  pour  $x < \epsilon \forall \epsilon > 0$  assez petit, nous avons besoin de la condition (3.1.5e) qui à l'inverse garantit que  $\forall \epsilon > 0$  assez petit,  $\dot{x} > 0$  pour  $0 < x < \epsilon$ . Ainsi, ceci empêche l'extinction des proies pour des populations dans cette mince bande et garantit l'existence d'un point fixe stable de coordonnées  $(x > 0, 0)$ . Ceci peut potentiellement empêcher l'existence de régions de conditions initiales portant à l'extinction des espèces.

En résumé,  $\eta_1$  prendra la forme d'un sigmoïde variant entre 0 et  $\lambda$ . Une fois trouvée une fonction satisfaisant les conditions (3.1.5) et aisée à manipuler, nous regarderons si le système avec les comportements introduits est structurellement stable, ce qui nous permettra d'extrapoler pour une famille de fonctions de récolte. Nous verrons que les conditions (3.1.5a) et (3.1.5e) sont les plus importantes, comme nous le désirons, pour potentiellement obtenir les régions de coexistence des espèces du cas sans récolte. Moins importantes, les autres conditions servent avant tout au réalisme au niveau application et à simplifier ce type de fonction pour toujours parler de fonction de type « récolte ».

Dans le but d'améliorer la fonction de récolte constante applicable (3.1.1), nous allons d'abord vérifier l'effet d'une fonction  $\eta_1$  qui est  $C^0$  par morceaux, donc discontinue en étudiant les conséquences de l'introduction d'une discontinuité dans un système d'EDOs.

### 3.2. SYSTÈME D'EDOS DISCONTINUUS

Ici, nous traitons des systèmes dynamiques discontinus de la forme

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} F_2(X) & \text{si } h(X) < 0, \\ F_1(X) & \text{si } h(X) > 0, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où  $X = (x, y)$ ,  $L : h(X) = 0$  est une « courbe de discontinuité » pour une fonction  $h$  délimitant deux systèmes au moins  $C^1$  et non égaux donnés par  $F_1$  et  $F_2$ . Nous traitons une seule courbe de discontinuité pour un système en deux dimensions. Ce système décrit par  $F$  est discontinu aux points  $X_0 \in \{X|h(X) = 0\} = L$  par des discontinuité de type saut seulement.

#### 3.2.1. Traitement d'une discontinuité et solutions

Les systèmes d'EDOs discontinus (differential equations with discontinuous right-hand sides) sont fréquents dans des problèmes de modélisations mathématiques, particulièrement en mécanique, en génie électrique et en théorie des systèmes automatisés [12]. Ils sont expressément conçus pour réguler et stabiliser un système continu. Toutefois leur analyse peut s'avérer difficile. Numériquement, les solutions dans le voisinage de la discontinuité peuvent faire exploser le nombre de pas de discrétisation et ainsi ralentir considérablement des simulations. La longueur du pas de discrétisation est très importante puisque s'il est trop grand, la discontinuité pourrait être complètement ignorée et fausser la courbe de solution.

Si le flot est dans le même sens autour de la discontinuité, ceci ne cause aucun problème numériquement. Cependant, si le flot est à contresens de chaque côté de de la discontinuité, plusieurs problèmes peuvent se produire. Typiquement, les solutions vont zigzaguer autour de la courbe de discontinuité jusqu'à atteindre un voisinage où le flot va dans le même sens. Analytiquement, il est possible de traiter ce type de situation en étudiant certains types de solutions.

Un système  $\dot{x} = f(x)$  où  $f \in C^{k \geq 1}(\mathbb{R}^n)$  avec des solutions  $\phi^t(x_0)$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  a des *solutions normales*. Une solution normale est différentiable partout et est solution du système  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \forall t > 0$ . Une solution de Carathéodory

est une solution dans le domaine contenant un ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) de mesure nulle de temps  $t$  sans solution au système. Typiquement, un champ  $f(x)$  discontinu n'a pas de solution normale, mais peut avoir des solutions de Carathéodory définies par morceaux. Ce type de solution est utile dans l'étude des systèmes discontinus puisque ceux-ci ne sont pas localement Lipschitz partout, et donc les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions ne peuvent s'appliquer. La notion de solution de Carathéodory permet de trouver une solution à un système discontinu et permet l'application des théorèmes fondamentaux pour des solutions loin de la discontinuité, ou pour des portions de solutions. (Plus de détails dans [12]).

Dans cette section, nous ne voulons pas étudier en détail les systèmes discontinus. Nous voulons plutôt utiliser quelques outils de base afin de comprendre sommairement l'effet sur les portraits de phase et à la limite la nature topologique des points fixes dans le voisinage de la discontinuité. De ce fait, nous survolons rapidement la théorie sans donner les détails des théorèmes de Filippov [12].

Soit un champ  $\dot{x} = f(x) \in C^{k \geq 1}(\mathbb{R}^2)$  défini par morceaux et discontinu sur une courbe  $L$  divisant le plan en deux régions  $G^-$  et  $G^+$ . Soit  $f^-(x)$  (resp.  $f^+(x)$ ) la partie du champ sur  $G^-$  (resp.  $G^+$ ). Soit  $f_N^-(x)$  (resp.  $f_N^+(x)$ ) la composante de  $f^-(x)$  (resp.  $f^+(x)$ ) normale (perpendiculaire) à  $L$  à la limite d'une trajectoire d'un point  $x$  sur  $L$ . Afin d'étudier la dynamique du système sur la courbe de discontinuité, nous calculons un sous-champ  $f^0(x)$  sur  $L$  donnée par la composante tangentielle de  $L$  d'une « moyenne » de  $f^-(x)$  et  $f^+(x)$ . Généralement, si ce champ s'annule, alors nous avons un point fixe sur la courbe. Nous pouvons aussi avoir la formation d'un segment de points fixes non isolés (un phénomène de codimension supérieure). Précisément, la direction du flot du champ  $f^0(x)$  sur  $L$  nous intéressera seulement si le produit des composantes perpendiculaires des champs voisins de la courbe de discontinuité, évalué sur celle-ci  $f_N^-(x)f_N^+(x)$  est négatif. Numériquement, traiter les lignes de courant sur la courbe de discontinuité est difficile : on obtient une courbe en zigzag parce qu'on est repoussé d'un côté et de l'autre (voir figure 3.1). Si les champs voisins  $f^-(x)$  et  $f^+(x)$  s'annulent autour de  $L$ , nous pouvons avoir des points fixes sur  $L$ , et un champ structurellement instable. Autrement, si le produit des composants perpendiculaire  $f_N^-(x)f_N^+(x)$  est positif, alors le flot traverse  $L$  sans problème.

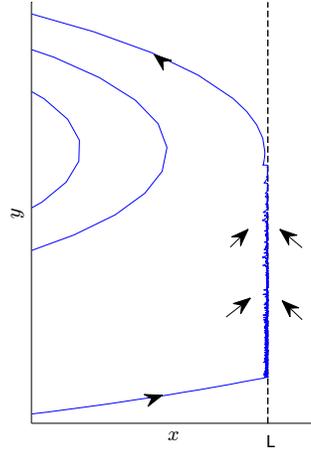


FIGURE 3.1. Exemple de problème numérique d'un système discontinu autour d'une discontinuité

Puisque le jacobien n'est pas bien défini dans le voisinage de la discontinuité, nous étudions directement la nature et la stabilité des points fixes se trouvant sur la courbe de discontinuité en observant le flot autour du point fixe. Nous divisons ces points en plusieurs types. Nous avons le type 1 lorsque le flot perpendiculaire à la courbe dans chacun des champs se dirige vers celle-ci ( $f_N^-(x) > 0, f_N^+(x) < 0$ ). Si un point fixe  $c$  sur  $L$  tel que  $f^0(c) = 0$  est attractif ou répulsif ou semi-attractif, nous obtenons respectivement un nœud attractif ou un point de selle ou un col nœud attractif (figure 3.2) et le système est structurellement stable dans les deux premiers cas [12]. Dans le cas où le flot perpendiculaire se dirige en sens inverse ( $f_N^-(x) < 0, f_N^+(x) > 0$ ), nous regardons le temps  $t \rightarrow -\infty$  et obtenons une stabilité répulsive et des points fixes de la même manière. Nous appelons la courbe  $L$  une *séparatrice* par rapport à un point fixe  $c \in L$  où  $f^0(c) = 0$ , puisque  $L$  agit similairement à une séparatrice ou variété invariante d'un point fixe hyperbolique dans un système continu. Le signe de la valeur propre associé au point  $c$  dans le système  $f^0(c)$ , c'est-à-dire le signe de  $\frac{df^0(c)}{dx}$ , indique la stabilité du point lorsqu'il est de type 1 et ainsi sa nature topologique dans le système. Les points de type 1 sont topologiquement équivalents à leurs semblables dans un système continu.

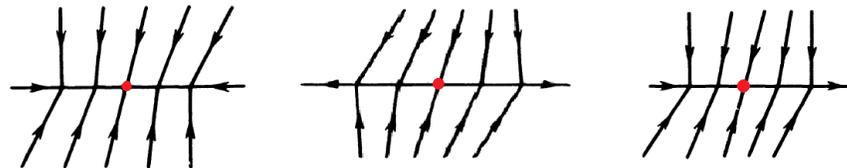


FIGURE 3.2. Point fixe d'un système discontinu de type 1 [12]

Si les composantes tangentielles du flot de  $f^-(x)$  et  $f^+(x)$  sur  $L$  sont nulles ou symétriquement opposées sur un intervalle, nous avons la possibilité de formation de points fixes non isolés  $c$  pour  $c \in ]c_1, c_2[$  tel que  $f^0(c) = 0$  (figure 3.3). Cette situation est structurellement instable et une perturbation va en général créer un nombre fini de points fixes isolés sur  $L$ .

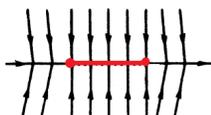


FIGURE 3.3. Points fixes non isolés d'un système discontinu de type 1 [12]

Les autres types sont étudiés en détail dans [12]. Nous avons par exemple le type 2 lorsque la composante normale à  $L$ ,  $f_N^-(x)$  ou  $f_N^+(x)$ , s'annule en un point (figure 3.4) ou le type 3 lorsque que les deux composantes sont nulles (figure 3.5). Les points fixes de type 1 (sauf les col-nœuds) ou 2 peuvent être structurellement stables. Les points fixes de type 3 apparaissent typiquement autour de cycles limites épousant la droite de discontinuité ou des lignes de courant tangential à celle-ci. Plusieurs sont structurellement instables.

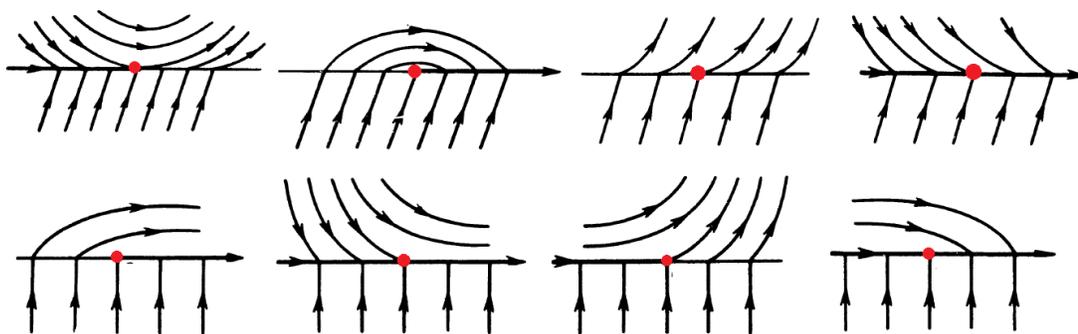


FIGURE 3.4. Points fixes d'un système discontinu de type 2 [12]

En terme de bifurcation locale, lorsque nous avons des points fixes du type 1 sur  $L$  qui apparaissent ou disparaissent, nous parlons de bifurcation de col-nœud. La classification des bifurcations touchant les points de type 2 n'est pas très développée et nous nous abstenons de leur étude. Aussi, les bifurcations globales

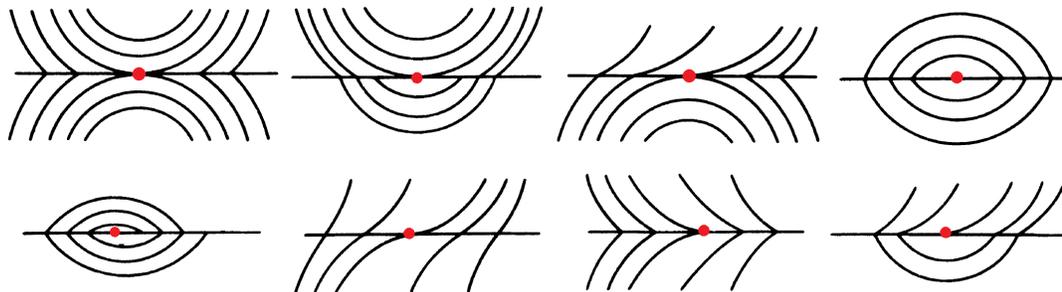


FIGURE 3.5. Points fixes d'un système discontinu de type 3 [12]

se produisant autour de solutions périodiques sont beaucoup plus difficiles à étudier. Une courbe de discontinuité peut diviser un cycle limite dans un système continu et produire un point de type 3 et un cycle limite plus petit par une ligne de courant tangentielle à  $L$ . Les solutions cycliques sont étudiées en détail par Llibre, Novaes, et Teixeira [21].

En résumé, nous regardons la direction du champ de chaque côté de la courbe de discontinuité  $L$ . S'il y a opposition des flots, alors on traite la discontinuité comme un point fixe ou une droite invariante, sinon on l'ignore, car le flot sera dans le même sens. Nous moyennons les champs au point de discontinuité pour déterminer la direction du flot sur  $L$ . Si la moyenne est nulle, on traite un point fixe. De part et d'autre de la discontinuité, l'analyse locale des champs est identique, seule l'étude des cycles limites dans chacune des régions peut changer.

Dans ce qui suit, on se concentre sur l'allure topologique des portraits de phase plus que sur le détail des solutions.

### 3.2.2. Étude du système discontinu

#### 3.2.2.1. Fonction discontinue étudiée

À titre de rappel, nous désirons implémenter une fonction de récolte non constante. Pour la récolte de proie, afin d'empêcher l'extinction des espèces causée par la récolte de proie constante et également afin de donner un sens réaliste biologiquement et respectant les conditions (3.1.5), il serait possible de choisir une fonction de contrôle qui démarre la récolte constante à un seuil  $x_0 > 0$ . Le type de fonction le plus simple possible est une fonction définie par morceaux

autour d'un seuil

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_0, \\ \lambda & \text{si } x > x_0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

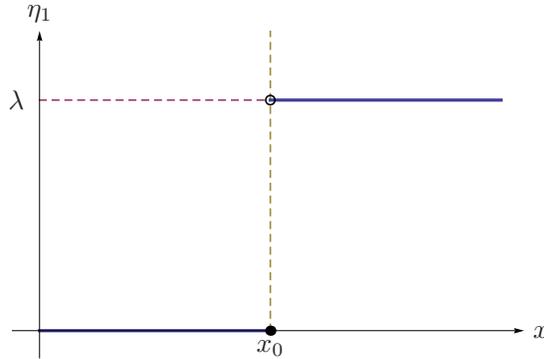


FIGURE 3.6. Graphique de  $\eta_1$  définie par (3.2.2)

Cette fonction discontinue est l'amalgame le plus simple du cas de récolte nulle et de récolte constante afin de contrôler la récolte à un seuil de départ  $x_0 > 0$  pour assurer une récolte nulle en  $x = 0$  (condition (3.1.5a)). Donc pour le système (1.1.9) avec fonction de récolte discontinue (3.2.2), ceci a pour but de forcer, lorsque  $y = 0$ , l'existence d'un point fixe  $\mathcal{O}$  à l'origine de type selle comme dans le cas sans récolte et ainsi d'enlever la possibilité d'extinction des proies, et d'empêcher un flot négatif  $\dot{x} < 0$  sur la droite  $x = 0$ . Afin d'éliminer également les problèmes d'extinction de la récolte constante ( $x_0 \leq 0$ ) et afin de satisfaire la condition (3.1.5e), il est impératif d'utiliser  $x_0 > 0$ , ce qui satisfera du même coup la condition (3.1.6). Nous étudions donc le système (3.2.3) pour  $h(x) = x - x_0$ .

$$\dot{X} = F(X) = \begin{cases} F_0(X) & \text{si } x < x_0, \\ F_\lambda(X) & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

À gauche de la courbe de discontinuité  $L : x = x_0$ , nous avons le champ  $F_2 = F_0$  correspondant au système (1.1.9) sans récolte, et à droite nous avons le champ  $F_1 = F_\lambda$  correspondant au système (2.0.1) avec récolte de proie constante pour des valeurs de paramètres  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Sur la courbe de discontinuité  $L$ , nous interprétons les solutions et utilisons les outils suggérés par [12] tel que décrit dans la sous-section 3.2.1. Donc nous moyennons les champs  $F_0$  et  $F_\lambda$  sur cette droite pour nos test numériques. La moyennisation choisie pour de genre de traitement est donnée par la formule

$$L^0(y) = \frac{F_{\lambda,y}(x_0, y)F_{0,x}(x_0, y) - F_{0,y}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y)}{F_{0,x}(x_0, y) - F_{\lambda,x}(x_0, y)} = y(-\delta + p(x_0)) \quad (3.2.4)$$

où

$$\begin{aligned} F_{0,x}(x, y) &= \rho x(1 - x) - yp(x), \\ F_{0,y}(x, y) &= F_{\lambda,y}(x, y) = y(-\delta + p(x)), \\ F_{\lambda,x}(x, y) &= F_{0,x}(x, y) - \lambda \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

qui représentent les flot parallèles et normaux à la droite de discontinuité  $L$  de chaque côté. Nous définissons donc le sous-système sur  $L$  de dimension 1

$$\dot{y} = L^0(y). \tag{3.2.6}$$

Étant donné que  $F_{0,y}(x, y) = F_{\lambda,y}(x, y)$ , ceci nous donne tout simplement le flot en  $y$  original de nos sous-système. Le flot sur  $L$  décrit par  $L^0$  nous est utile dans le cas  $F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) < 0$  ou lorsque plus d'une des valeurs de  $F_{0,x}(x, y)$ ,  $F_{0,y}(x, y) = F_{\lambda,y}(x, y)$  ou  $F_{\lambda,x}(x, y)$  s'annule. Sinon le flot traverse  $L$  comme normalement et nous ignorons la discontinuité.

### 3.2.2.2. Analyse des points fixes

Pour des valeurs de paramètre  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$  fixes, nous voulons étudier les portraits de phase du système (3.2.1) pour différentes valeurs de  $x_0 > 0$ . Le comportement de chacun des sous-systèmes  $F_0$  et  $F_\lambda$  est connu par les chapitres 1 et 2 respectivement. Il reste donc l'étude au voisinage et à la discontinuité  $x = x_0$ , ainsi que l'aspect global de ce système pour différents  $x_0 > 0$ .

Pour les points fixes sur  $y = 0$ , leurs positions respectives suivent l'inégalité  $0 < x_{\mathcal{D}^-} \leq x_{\mathcal{D}} \leq x_{\mathcal{D}^+} < 1$  pour  $\mathcal{O}, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  et  $\mathcal{A}$  respectivement. Puisque  $x_0 > 0$ , le point  $\mathcal{O}$  est toujours présent. Toutefois, selon la valeur de  $x_0$ , les autres points fixes sont obtenus en déterminant les solutions de l'équation  $I_0(x) = 0$  (voir tableau de figures 3.7). Puisque cette fonction dépend explicitement de  $x_0$  ainsi que  $\lambda_\rho$  par rapport aux points fixes de  $F_\lambda$  et  $g(x)$  (voir section 2.1.1), nous regardons les différents cas en fonction de ces paramètres. Puisque l'axe des  $x$  est invariant, si  $F_{0,x}(x_0, 0)F_{\lambda,x}(x_0, 0) < 0$ , c'est-à-dire un changement de direction du flot en  $x$  autour de  $L$ , alors

$$\mathcal{P}_{x_0} = (x_0, 0) \tag{3.2.7}$$

forme un nouveau point fixe du système. Rien n'empêche ce point fixe de fusionner avec d'autres points fixes.

**Définition 3.2.1.** Soit  $(X_\epsilon)$  une famille de champs de vecteurs. Un point singulier  $x_0$  de  $X_{\epsilon_0}$  est de multiplicité  $k$  si pour tout voisinage  $U$  de  $x_0$  il existe un

voisinage  $V$  de  $\epsilon_0$  et un voisinage  $W \subset U$  de  $x_0$  tels que pour tout  $\epsilon \in V$   $X_\epsilon$  a au plus  $k$  points singuliers dans  $W$  et il existe une suite  $\epsilon_n \in V : \epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$  tel que  $X_{\epsilon_n}$  a exactement  $k$  points singuliers dans  $W$ .

Particulièrement, lorsque  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 = x_{\mathcal{D}-}$ , nous avons à la figure 3.7f la formation du point de multiplicité 2

$$\mathcal{O}_{\lambda, x_0} := (x_0 = x_{\mathcal{D}-}, 0) = \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{P}_{x_0} \quad (3.2.8)$$

Également, lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  et  $x_0 = x_{\mathcal{D}}$ , nous avons à la figure 3.7h la formation du point de multiplicité 3

$$\mathcal{D}_{x_0} := \left( x_0 = \frac{1}{2}, 0 \right) = \mathcal{D} = \mathcal{P}_{x_0}. \quad (3.2.9)$$

Nous étudierons plus loin ces deux dernières bifurcations. Lorsque  $x_0 = x_{\mathcal{D}+}$ , nous avons à la figure 3.7j pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  la « transition » du point de multiplicité 1

$$\mathcal{A}_{\lambda, x_0} := (x_0 = x_{\mathcal{D}+}, 0) = \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{P}_{x_0} \quad (3.2.10)$$

ainsi qu'à  $x_0 = 1$  pour  $\lambda_\rho > 0$  aux figures 3.7m, 3.7n, 3.7o

$$\mathcal{A}_{x_0} := (x_0 = 1, 0) = \mathcal{A} = \mathcal{P}_{x_0}. \quad (3.2.11)$$

puisque ceci n'entraîne pas un changement du nombre de points fixes à proprement parler pour une perturbation de paramètre pour ce système en particulier. Dans le cas  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$ , nous avons toujours 2 points fixes  $\mathcal{O}$  et soit  $\mathcal{P}_{x_0}$  ou  $\mathcal{A}_{x_0}$  ou  $\mathcal{A}$ . Ainsi, contrairement au système avec récolte constante, le système discontinu contient toujours un minimum de deux points fixes sur  $y = 0$ , et peut avoir jusqu'à un maximum de 4 point fixes (figure 3.7d) pour tout  $\lambda > 0$ . Pour les autres cas où  $\mathcal{P}_{x_0}$  existe, il est de multiplicité 1 (figures 3.7d, 3.7e, 3.7h, 3.7k, 3.7l). Évidemment, si  $x_0 > 1$  nous retrouvons globalement le système sans récolte et ses points fixes pour  $x < x_0$ , et le flot est strictement vers la gauche pour  $x \geq x_0$ . Selon le signe de  $I_0(x)$  évalué dans le voisinage des points fixes, le sens du flot sur l'axe  $y = 0$  suit le sens des flèches du tableau de figures 3.7, et ce indépendamment des paramètres  $\alpha, \beta, \delta$  qui vont être importants seulement pour déterminer la nature de ces point fixes dans l'ensemble du portrait de phase.

**Remarque 3.2.1.** *Techniquement, nous avons aussi un point de multiplicité 2 avec  $\mathcal{O} = \mathcal{P}_{x_0}$  si  $\lambda_\rho > 0$  lorsque  $x_0 = 0$  en terme du système discontinu, mais nous n'abordons pas ce cas de bifurcation puisqu'il s'agit de l'application réaliste du système avec récolte constante déjà abordé.*

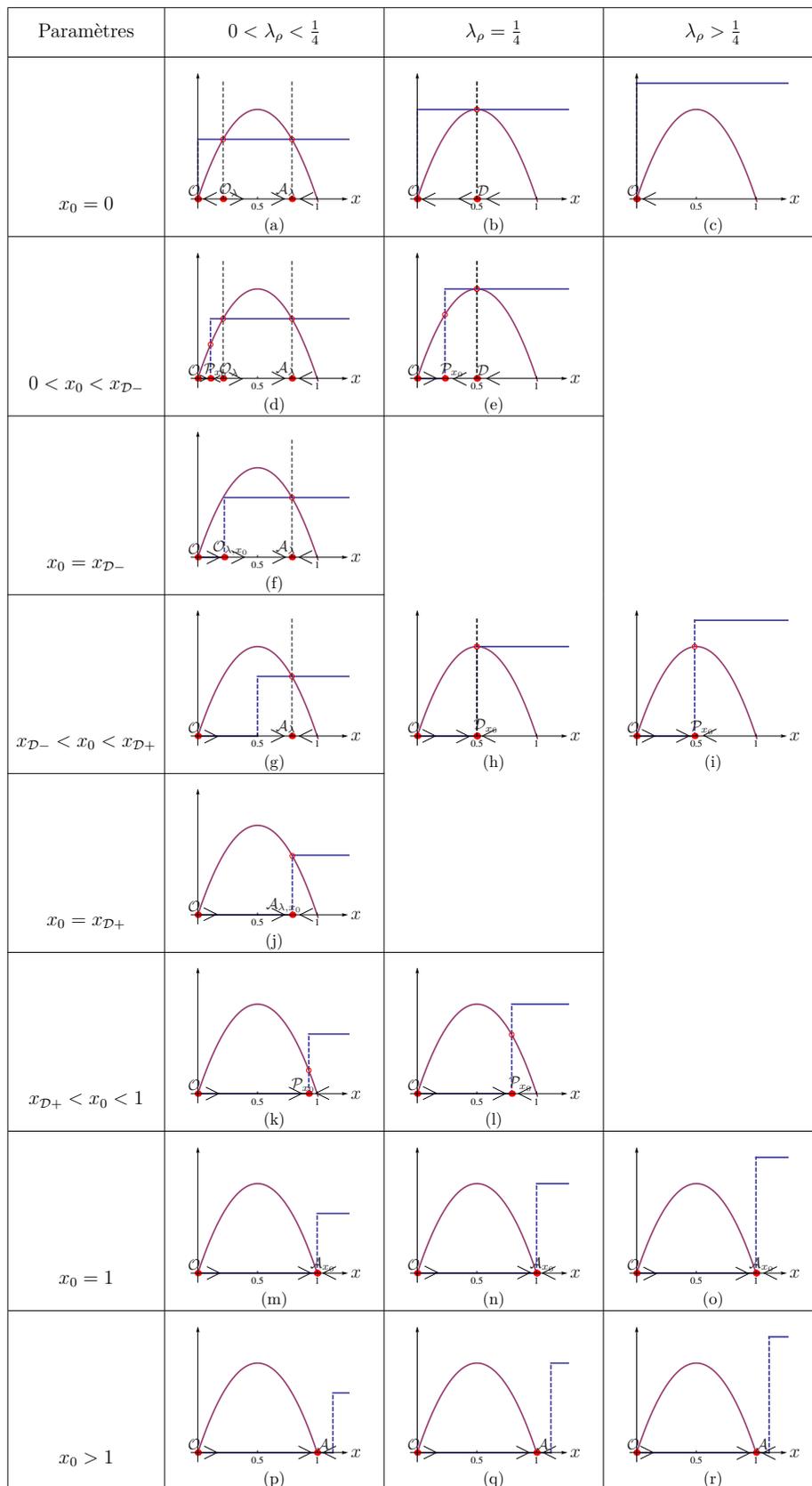


FIGURE 3.7. Graphiques de  $g(x) = \rho x(1-x)$  et  $\eta_1(x)$  défini par (3.2.2) et portrait de phase sur  $y = 0$  pour différents paramètres  $x_0$  et  $\lambda$

Par rapport à  $\lambda_\rho$  ou  $x_0$ , nous pouvons suivre les points fixes  $\mathcal{O}$  (bleu),  $\mathcal{O}_\lambda$  (rouge),  $\mathcal{A}_\lambda$  (noir) et  $\mathcal{P}_{x_0}$  (vert) dans les diagrammes de bifurcation aux figures 3.8 et 3.9.

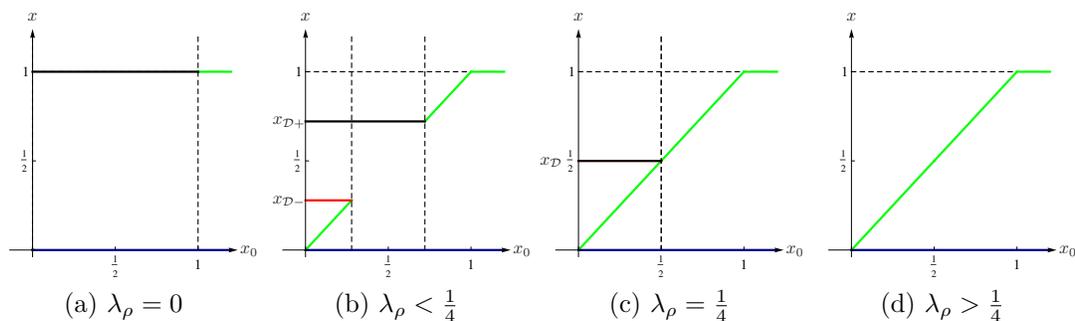


FIGURE 3.8. Diagrammes de bifurcation des points singuliers sur  $y = 0$  en fonction de  $x_0$  du système discontinu pour  $\lambda_\rho \geq 0$

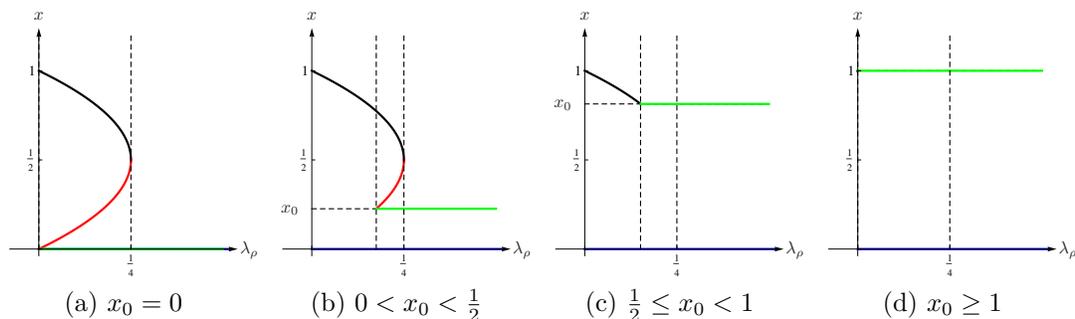


FIGURE 3.9. Diagrammes de bifurcation des points singuliers sur  $y = 0$  en fonction de  $\lambda_\rho$  du système discontinu pour  $x_0 \geq 0$

Nous obtenons donc le diagramme de bifurcation des points fixes sur  $y = 0$  du système discontinu à la figure 3.10 ainsi que les régions délimitées par les courbes de bifurcation avec le nombre de points fixes. Nous y remarquons également la bifurcation de la récole constante  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  (vert) décrivant la fusion entre les points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  pour former le point  $\mathcal{D}$  de multiplicité minimale 2 pour  $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$  (section 2.7). Les points fixes et leur stabilité dans chacune des régions de paramètres  $x_0$  et  $\lambda_\rho$  sur  $y = 0$  est résumé au tableau 3.1.

Dans le cas  $y > 0$ , chacun des sous-systèmes  $F_0$  et  $F_\lambda$  contient son point fixe respectif  $\mathcal{M}$  ou  $\mathcal{M}_\lambda$ . L'abscisse  $x_*$  est la même pour les deux sous-systèmes, seul l'ordonnée  $y_*$  change. Pour  $0 < x_* < 1$ , si  $x_0 > x_*$ , alors le point  $\mathcal{M}$  est dans

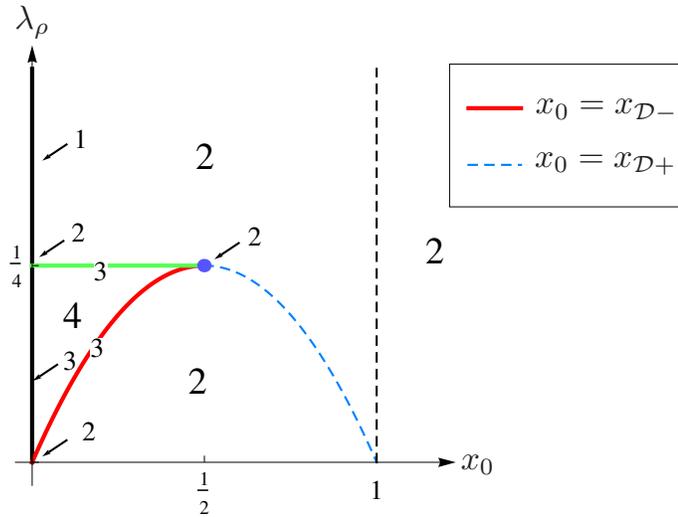


FIGURE 3.10. Diagramme de bifurcation des points singuliers du système discontinu sur  $y = 0$  dans le plan  $(x_0, \lambda_\rho)$

Région		Nb	Points fixes	Mult.	Stab.	Ref. 3.7		
$x_0 = 0$	$\lambda_\rho < \frac{1}{4}$	3	$\mathcal{O} = \mathcal{P}_{x_0}$	$\mathcal{O}_\lambda$	1	r	(a)	
				$\mathcal{A}_\lambda$	1	a		
	$\lambda_\rho = \frac{1}{4}$	2		$\mathcal{D}$	2	s	(b)	
	$\lambda_\rho > \frac{1}{4}$	1			2	a	(c)	
$0 < x_0 < 1$	$0 < x_0 < \frac{1}{2}$	$x_0 = x_{\mathcal{D}-}$	3	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_{\lambda, x_0}$	2	s	(f)
					$\mathcal{A}$	1	a	
	$x_0(1-x_0) < \frac{1}{4}$	$\lambda_\rho < \frac{1}{4}$	4		$\mathcal{P}_{x_0}$	1	a	(d)
					$\mathcal{O}_\lambda$	1	r	
					$\mathcal{A}_\lambda$	1	a	
		$\lambda_\rho = \frac{1}{4}$	3		$\mathcal{P}_{x_0}$	1	a	(e)
					$\mathcal{D}$	2	s	
	$x_0 = \frac{1}{2}, \lambda_\rho = \frac{1}{4}$	2	$\mathcal{D}_{x_0}$		3	s	(h)	
	$x_{\mathcal{D}-} < x_0 < x_{\mathcal{D}+}$	2	$\mathcal{A}$		1	a	(g)	
	$x_0 = x_{\mathcal{D}+}$	2	$\mathcal{A}_{\lambda, x_0}$		2	a	(j)	
$x_{\mathcal{D}+} < x_0 < 1, \lambda_\rho > \frac{1}{4}$	2	$\mathcal{P}_{x_0}$	1	a	(k),(l),(i)			
$x_0 = 1$	2	$\mathcal{A}_{x_0}$	1	a	(m),(n),(f)			
$x_0 > 1$	2	$\mathcal{A}$	1	a	(p),(q),(r)			
			1	r				

TABLEAU 3.1. Points fixes et leur stabilité sur  $y = 0$  du système discontinu ( $a$  : attractif,  $r$  : répulsif,  $s$  : semi-attractif)

$Q_1$ , sinon c'est le point  $\mathcal{M}_\lambda$ , et il est plus bas dans  $Q_1$ , ou encore absent, comme à la figure 3.11 où est tracée en lignes épaisses la position de  $\mathcal{M}$  ou  $\mathcal{M}_\lambda$  comme courbe paramétré en  $x_*$  selon les valeurs de  $x_0$ . Les lignes pointillés et les points gris correspondent à la position de référence des points fixes absents à cause de la position de  $x_0$ . Selon la valeur de  $\delta$  (donc de  $x_*$ ), ces points fixes peuvent avoir une multiplicité supérieure lorsqu'ils se confondent avec les points fixes sur  $y = 0$  par des bifurcations de col-nœud déjà étudiées, soient  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}}, \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}, \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}, \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$ . On assiste aussi à un nouveau phénomène dans le cas  $x_0 = x_*$ , c'est-à-dire  $p(x_0) = \delta$ , nous avons la présence des deux points fixes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_\lambda$  sur la droite de discontinuité  $x = x_0$ . Puisque  $\dot{y} = 0$  sur  $x = x_*$  et que  $y_*|_{F_0} > y_*|_{F_\lambda}$ , ceci signifie que  $F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) < 0$ . Comme pour le point fixe  $\mathcal{P}_{x_0}$ ,  $L^0 = 0$  et donc nous avons un segment de point fixes non isolés  $(x_* = x_0, y)$  pour  $y_*|_{F_\lambda} \leq y \leq y_*|_{F_0}$  représenté par la ligne rouge  $x = x_0 = x_*$  dans la figure 3.11. Pour  $y \notin ]y_*|_{F_\lambda}, y_*|_{F_0}[$ , nous avons que  $F_{0,x}(x_0^-, y)F_{\lambda,x}(x_0^+, y) > 0$  et donc le flot passe à travers  $L$ .

En particulier, pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{O}_\lambda}$  et  $x_0 = x_{\mathcal{D}-}$ , alors  $x_0 = x_*$  et nous avons la formation du point fixe de multiplicité 3 sur  $y = 0$

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda, x_0}} := (x_0 = x_{\mathcal{D}-}, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}} = \mathcal{O}_{\lambda, x_0}, \quad (3.2.12)$$

et pour  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{D}}$  et  $x_0 = x_{\mathcal{D}}$ , nous avons la formation du point fixe de multiplicité 4 sur  $y = 0$

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}, x_0}} := \left(x_0 = \frac{1}{2}, 0\right) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}_{x_0}, \quad (3.2.13)$$

ainsi que le point de transition de multiplicité 2 pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  et  $x_0 = x_{\mathcal{D}+}$

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda, x_0}} := (x_0 = x_{\mathcal{D}+}, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}} = \mathcal{A}_{\lambda, x_0}. \quad (3.2.14)$$

Mais puisque ces points nouvellement formés sont non isolés, leur stabilité n'a d'importance que dans la direction transverse. En pratique, ce cas n'est pas structurellement stable et on a donc probabilité nulle de le rencontrer dans un système réel. Lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$  et  $x_0 = 1$ , nous avons le point isolé de transition de multiplicité 2

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}, x_0}} := (x_0 = 1, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}_{x_0}. \quad (3.2.15)$$

### 3.2.2.3. Stabilité et multiplicité du point $\mathcal{P}_{x_0}$

Étant donné l'analyse des points fixes  $\mathcal{O}, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}, \mathcal{A}_\lambda, \mathcal{M}, \mathcal{M}_\lambda$  simples ou de multiplicité supérieure faite aux chapitres précédents, lorsque leur coordonnée

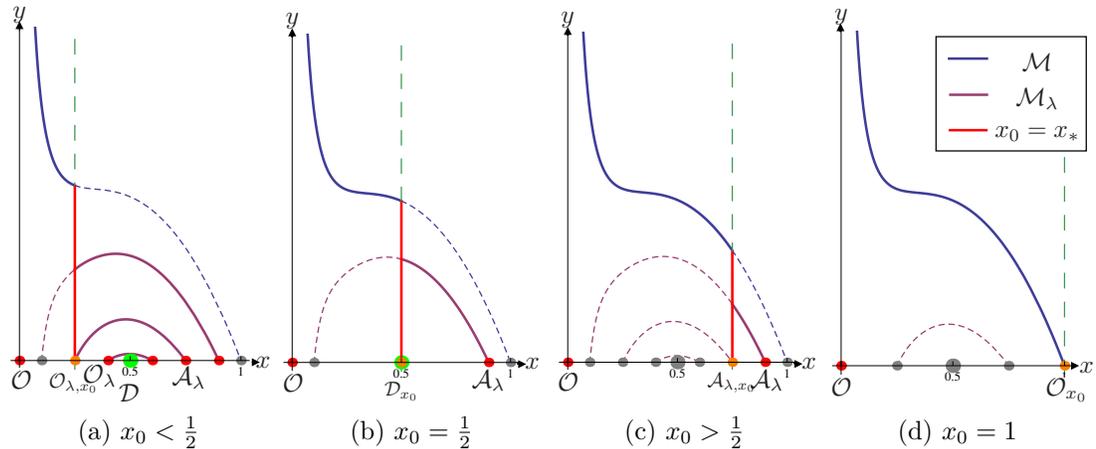


FIGURE 3.11. Courbes paramétrées  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  des positions possibles de  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta \in ]\delta_O, \delta_A[$  et points fixes sur l'axe  $x$  pour différentes valeurs de  $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$  et de  $x_0 > 0$

$x \neq x_0$ , alors nous connaissons leur stabilité, en particulier leur nature en fonction des paramètres  $\alpha, \beta, \delta, \lambda_\rho$  résumé au tableau 1.1 ( $F_0$ ) et aux tableaux 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 ( $F_\lambda$ ). Nous retrouvons toutes les mêmes bifurcations locales également. Donc seule la stabilité du point  $\mathcal{P}_{x_0}$  et sa multiplicité nous intéressent dans cette section. Cependant, puisque le système est discontinu à ce point, nous ne pouvons pas calculer explicitement le jacobien du système.

Pour nous y prendre, nous devons regarder le flot sur le sous-système  $L^0(y)$  restreint à la courbe  $L$ . Ce système est utile seulement lorsque  $F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) < 0$  sur  $L$ . Il est aisé de voir que le flot s'annule évidemment pour  $y = 0$  et  $\delta = p(x_0)$ . Le flot sur  $L$  est défini à (3.2.4) par rapport au point fixe  $y = 0$ . Donc de même qu'à l'équation (1.2.15), nous avons que  $x_0$  est répulsif sur l'axe  $x$  lorsque  $L$  est à droite de la droite  $x = x_*$  et est attractif s'il est à gauche. Ceci forme donc le flot sur la séparatrice  $L$  pour le point fixe  $y = 0$ . Le cas où  $L$  est la droite  $x = x_* = x_0$  implique qu'elle forme un droite de points fixes non isolés. Mais nous nous intéressons au flot sur  $L$  seulement quand  $F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) < 0$ . Il faut donc regarder le signe de  $F_{0,x}$  et  $F_{\lambda,x}$  dans le voisinage de  $L$  en regardant le flot sur la nullecline  $\dot{x} = 0$  équivalente à la courbe  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  tracée en lignes épaisses à la figure 3.11 et identiquement définie par

$$y = f_\lambda(x) = \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)} \quad (3.2.16)$$

pour chacun des champs  $F_0$  ( $\lambda = 0$ ) et  $F_\lambda$  ( $\lambda < \frac{\rho}{4}$ ). Précisément, nous avons que  $F_{0,x}(x_0, f_0(x_0)) = 0 \forall x_0 \leq 1$  et  $F_{\lambda,x}(x_0, f_\lambda(x_0)) = 0 \forall x_{0-} \leq x_0 \leq x_{0+}$  dans le

premier quadrant fermé, sinon ils s'annulent en dehors du premier quadrant. De plus, nous avons que

$$\begin{aligned}
F_{0,x}(x_0, y) &< 0 & \forall y > f_0(x_0), \\
F_{0,x}(x_0, y) &> 0 & \forall 0 < y < f_0(x_0), \\
F_{\lambda,x}(x_0, y) &< 0 & \forall y > f_\lambda(x_0), \\
F_{\lambda,x}(x_0, y) &> 0 & \forall 0 < y < f_\lambda(x_0).
\end{aligned}
\tag{3.2.17}$$

Puisque  $f_\lambda(x_0) < f_0(x_0)$ , alors

$$F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) < 0 \quad \forall y \in ]f_\lambda(x_0), f_0(x_0)[ \tag{3.2.18}$$

En particulier, si  $f_\lambda(x_0) < 0$ , soit lorsque  $x_0 \notin ]x_{0-}, x_{0+}[$ , alors nous avons cette inégalité jusqu'à  $y = 0$ , c'est-à-dire jusqu'au point  $\mathcal{P}_{x_0}$  si  $x_0 \leq 1$ . Par ailleurs, le flot traverse donc la droite  $L$  et le flot  $L^0$  est ignoré (voir figure 3.13).

Puisque  $\lambda > 0$ , en se fiant au tableau des figures 3.7, nous voyons que  $F_{0,x}(x_0, 0) > 0 > F_{\lambda,x}(x_0, 0)$  lorsque le point  $\mathcal{P}_{x_0}$  est de multiplicité 1, précisément, il est attractif sur sa variété invariante  $y = 0$ . Lorsqu'il est de multiplicité supérieure, nous voyons que les flots  $F_{0,x}(x_0 = x_{0-}, 0), F_{\lambda,x}(x_0 = x_{0-}, 0) > 0$  sont positifs et que le point  $\mathcal{O}_{\lambda,x_0}$  est semi-stable sur sa variété  $y = 0$ . Pour les points  $\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{A}_{\lambda,x_0}, \mathcal{A}_{x_0}$ , nous avons que  $F_{0,x}(x_0, 0) > 0 > F_{\lambda,x}(x_0, 0)$  et donc ces points sont attractifs sur leur variété  $y = 0$ . Ainsi, par l'analyse du flot sur la séparatrice  $y = 0$  et du flot sur la séparatrice  $x = x_0$  du point  $\mathcal{P}_{x_0}$  et de sa multiplicité, par le flot (3.2.4) sur  $L$ , leur nature topologique est décrite au tableau 3.2.

Paramètres	$x_0 < x_*$	$x_0 = x_*$	$x_0 > x_*$
$0 < x_0 < x_{\mathcal{D}-}$	Nœud attractif (1)	Col-nœud non isolé ( $\infty$ )	Point de selle (1)
$x_0 = x_{\mathcal{D}-}$	Col-nœud attractif (2)	Col-nœud non isolé ( $\infty$ )	Col-nœud répulsif (2)
$x_0 = x_{\mathcal{D}}$ ( $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ )	Nœud attractif (3)	Col-nœud non isolé ( $\infty$ )	Point de selle (3)
$x_{\mathcal{D}+} \leq x_0 < 1$	Nœud attractif (1)	Col-nœud non isolé ( $\infty$ )	Point de selle (1)

TABLEAU 3.2. Nature topologique du point  $\mathcal{P}_{x_0}$  et sa multiplicité (entre parenthèses), pour  $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$

Particulièrement, nous remarquons pour  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , le point  $\mathcal{D}_{x_0}$  à  $x_0 = x_{\mathcal{D}}$  perd sa nature topologique de la section 2.7 pour devenir un point de type 1. Puisque  $f_\lambda(x_0) = 0$  au point de multiplicité supérieure de  $\mathcal{P}_{x_0}$ , alors nous avons que  $F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) > 0 \forall y < 0$  et tout deux sont positifs. En ce sens, la droite  $L$  n'est plus la séparatrice de ces points pour  $y < 0$ . Tous ces points,  $y$  compris  $\mathcal{P}_{x_0}$  de multiplicité 1, limités au premier quadrant, sont de type 1 (voir remarque 3.2.2).

**Remarque 3.2.2.** *Certaines bifurcations ne sont visibles que si on regarde aussi le flot dans le 4<sup>e</sup> quadrant.*

Pour le point  $\mathcal{A}_{x_0}$  à  $x_0 = 1$ , le contraire se produit. Nous avons que

$$\begin{aligned} F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) &> 0 \quad \forall y > 0, \\ F_{0,x}(x_0, y)F_{\lambda,x}(x_0, y) &< 0 \quad \forall y < 0. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Dans le 1<sup>er</sup> quadrant, sa séparatrice est exactement  $W^u(\mathcal{O})$  et il est topologiquement équivalent à  $\mathcal{A}$  : le champ  $L^0$  est alors sans intérêt. Pour  $x_0 \geq 1$ , le système se comporte exactement comme le système sans récolte dans  $Q_1$ , à l'exception que le flot pour  $x > x_0$  est plus fort vers la gauche dû à la récolte constante. Donc, nous avons le résultat évident suivant.

**Proposition 3.2.1.** *Le système discontinu 3.2.3 est topologiquement et visuellement identique au système sans récolte dans  $Q_1$  pour  $x_0 \geq 1$ .*

Ce type de fonction de récolte est donc sans intérêt puisque nous n'exerçons aucune récolte dans la région où risque de se retrouver la population. Économiquement parlant, il est intéressant d'avoir un seuil de récolte  $x_0$  assez petit : c'est ce que nous étudions maintenant.

Pour  $x_0 = x_*$ , nous avons que  $L^0(y) = 0 \forall y$ . Donc pour  $y = 0$  les point fixes non isolés  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda,x_0}}}$ ,  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{x_0}}}$ ,  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda,x_0}}}$  sont de type 2 (figure 3.4). Le point  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{x_0}}}$  pour  $x_0 = 1$  est non isolé de type 2 également, mais limité au premier quadrant, il a la même nature que  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$ .

Également, puisque  $F_{0,x}(x_0, f_0(x_0)) = 0$  pour  $x_0 < 1$  et  $F_{\lambda,x}(x_0, f_0(x_0)) < 0$ , nous avons donc un point fixe de type 2

$$\mathcal{M}_{0,x_0} = (x_0, f_0(x_0)). \quad (3.2.20)$$

Aussi, pour  $\lambda > 0$ , puisque  $F_{\lambda,x}(x_0, f_\lambda(x_0)) = 0$  pour  $x_{\mathcal{D}^-} < x_0 < x_{\mathcal{D}^+}$  et  $F_{0,x}(x_0, f_\lambda(x_0)) > 0$ , nous avons donc un point fixe de type 2

$$\mathcal{M}_{\lambda,x_0} = (x_0, f_\lambda(x_0)). \quad (3.2.21)$$

**Définition 3.2.2.** *Un point fixe de type 2 isolé sur une droite de discontinuité  $L$  est attractif (resp. répulsif) s'il est attractif (resp. répulsif) sur la portion de  $L$  qui est invariante par le flot, c'est-à-dire que le flot sur  $L$  se dirige vers le (resp. s'éloigne du) point fixe (voir figure 3.12).*

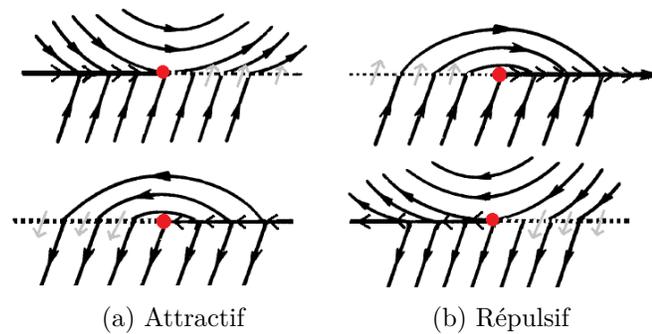


FIGURE 3.12. Points fixes d'un système discontinu de type 2 [12]

Ainsi, les points fixes de type 2  $\mathcal{M}_{0,x_0}$  et  $\mathcal{M}_{\lambda,x_0}$  sont isolés lorsque  $x_0 \neq x_*$ , et ils sont respectivement répulsif et attractif lorsque  $x_0 < x_*$  et ils sont respectivement attractif et répulsif lorsque  $x_0 > x_*$ .

Pour comprendre le mouvement du flot à travers les nullclines et la droite  $L$ , on se fie aux figures 1.3 et 2.3. Pour  $\alpha, \beta, \rho$  fixes, nous pouvons tracer pour différentes valeur de  $\lambda, x_0$  et  $\delta$  les différentes régions du portrait de phase par rapport aux nullclines et  $L$  comme à la figure 3.13. Comme les différentes courbes  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  sont identiques à la nullcline  $y = f_\lambda(x)$ , pour les valeurs des paramètres non représentées à la figure 3.13, se référer à la figure 3.11.

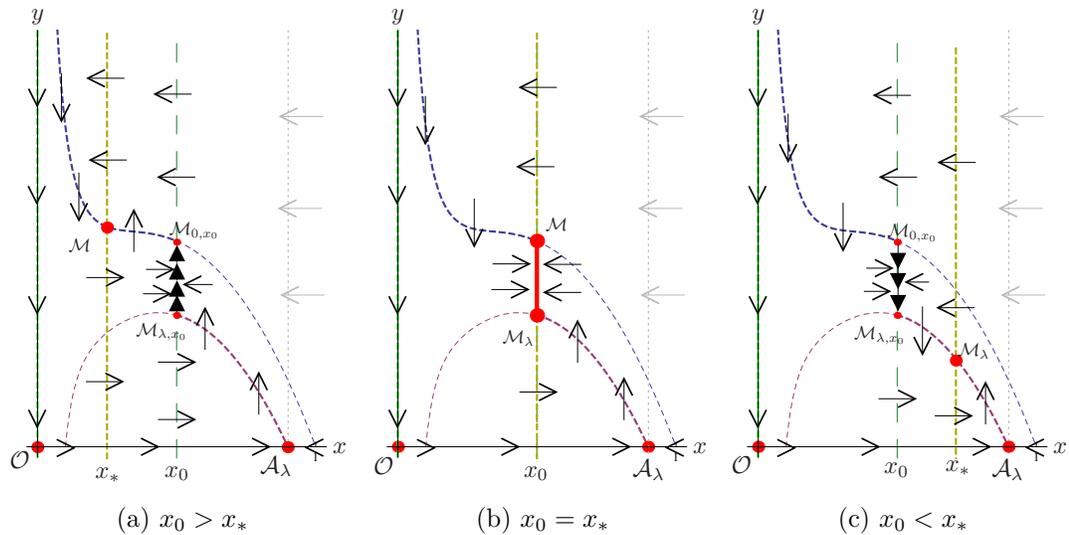


FIGURE 3.13. Les nullclines pour différents  $\delta \in ]0, \delta_{A_\lambda}[$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 \in ]x_{\mathcal{D}^-}, x_{\mathcal{D}^+}[$  déterminant les différentes régions du portrait de phase

#### 3.2.2.4. Bifurcations locales

Bien que les bifurcation locales étudiées aux premiers chapitres restent les mêmes, de nouvelles bifurcations se produisent dans le système à cause de la droite de discontinuité  $L$ . Typiquement, ces bifurcations sont liées au nouveau point du système discontinu  $\mathcal{P}_{x_0}$ .

**Théorème 3.2.1.** *Pour  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 \neq x_*$  ( $\delta \neq p(x_0)$ ), il y a une bifurcation de col-noeud lorsque*

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{(1 - 4\lambda_\rho)}}{2} = x_{\mathcal{D}^-}. \quad (3.2.22)$$

*À cette valeur, le point fixe  $\mathcal{O}_{\lambda, x_0}$  de type 1 et de multiplicité 2 est un col-noeud attractif si  $x_0 < x_*$ , et répulsif si  $x_0 > x_*$ .*

**DÉMONSTRATION.** Typiquement, la preuve se fait comme à l'habitude (voir bifurcation col-noeud Etoua [10]). Nous pouvons ramener le point à l'origine. Nous voyons que la droite  $y = 0$  forme la variété centre du col-noeud. Toutefois, la variété stable pour  $x_0 < x_*$  (ou variété instable pour  $x_0 > x_*$ ) se divise en 2 partie. Pour  $y > 0$ , elle est formée par la droite  $L$ , et de l'autre côté, dû à la direction du flot, elle est formée par une ligne de courant du système  $F_\lambda$  dans la région

$x > x_0, y < 0$  se terminant (ou commençant) à  $x = x_0$ .

□

Dans le système avec récolte de proie constante, lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , nous avons la possibilité d'une bifurcation du col nilpotent à  $x = \frac{1}{2}$ . Toutefois, dans le système discontinu (3.2.3), lorsque la discontinuité atteint  $x_0 = \frac{1}{2}$ , nous obtenons une nouvelle sorte de bifurcation.

**Théorème 3.2.2.** *Il y a bifurcation de fourche supercritique de codimension 2 lorsque*

$$\begin{cases} \lambda_\rho = \frac{1}{4}, \\ x_0 = x_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.2.23)$$

*et si  $x_0 \neq x_*$ , i.e  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$ . À ces valeurs, le point fixe de type 1  $\mathcal{D}_{x_0}$  est de multiplicité 3 et se mélangeant aux bifurcations  $\mathcal{CN} \pm$  de codimension 1. Cette bifurcation est définie par  $\mathcal{F}_+$  si  $x_0 > x_*$ , formant ainsi un point de selle résultant de la fusion des points de selle  $\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{A}_\lambda$  et du nœud répulsif  $\mathcal{O}_\lambda$ . Elle est définie par  $\mathcal{F}_-$  si  $x_0 < x_*$ , formant ainsi un nœud attractif résultant de la fusion des nœuds attractifs  $\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{A}_\lambda$  et du point de selle  $\mathcal{O}_\lambda$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par les tableaux 2.1 et 3.2 et l'analyse, nous connaissons la nature de chacun des 3 points fixes  $\mathcal{P}_{x_0}, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  lorsque  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 < x_{\mathcal{D}-} < \frac{1}{2}$ . La variété du point  $\mathcal{P}_{x_0}$  est décrite par  $L$ . Puisque les points  $\mathcal{P}_{x_0}$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  sont attractif sur  $y = 0$ , alors au point de bifurcation, la séparatrice de  $\mathcal{D}_{x_0}$  est décrite par  $L$  suivant la stabilité des séparatrices de  $\mathcal{P}_{x_0}$  et  $\mathcal{A}_\lambda$ , soit attractive ou répulsive selon  $x_0$  par rapport à  $x_*$ . Le résultat s'en suit.

□

Quant aux valeurs de paramètre  $x_0 = x_*$ , techniquement nous avons une bifurcation d'ordre supérieur puisque il y a apparition d'une infinité de point fixes non isolés sur la droite de discontinuité  $L$  pour  $y \in [f_\lambda(x_0), f_0(x_0)]$ . Par exemple, en (3.2.23), le point  $\mathcal{D}_{x_0} = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{x_0}}}$  devenu de type 2 est de multiplicité 4 si  $x_0 = x_*$ , i.e  $\delta = \delta_{\mathcal{D}} = p(x_0)$  et se mélange avec la bifurcation  $\mathcal{CN}$  de codimension au moins 2. Mais nous n'étudions pas plus en détails ce changement topologique soudain étant donné son instabilité structurelle et que le système n'est pas localement Lipschitz partout dans ce cas.

L'étude des bifurcations globales se fait manifestement numériquement. Évidemment, les cycle limites et boucles hétérocliniques du système  $F_\lambda$  variant en

$x$  de  $x_1 > 0$  à  $x_2 > x_1$  restent intactes si  $x_0 \leq x_1$ . Si  $x_0 > x_1$ , dans le cas de la boucle hétéroclinique (voir section 2.6), des simulations numériques nous montrent qu'elle disparaît toujours et que la séparatrice  $W^u(\mathcal{A}_\lambda)$  rejoint le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  ou le cycle  $\mathcal{C}_-$  qui était à l'intérieur de la boucle hétéroclinique puisque le flot à gauche de  $L$  et en dessous de la nullcline  $f_0(x < x_0)$  est vers la droite. Aussi, des simulations montrent que les cycles limites deviennent plus petits jusqu'à se concentrer vers  $\mathcal{M}_\lambda$  lorsque  $x_0 \rightarrow x_*$ . Il n'est toutefois pas évident dans le système discontinu qu'il y a formation de solutions périodiques formées de parties de cycles limites ou de trajectoires de part et d'autre de la droite  $L$ . D'autres tests seraient requis.

### 3.2.2.5. Portraits de phases du système

Avec l'étude globale du système discontinu, nous pouvons tracer les divers portraits de phase en fonction d'un seuil  $x_0 > 0$ . Évidemment, le but principal d'introduire le système discontinu (3.2.3) avec fonction de récolte de proie (3.2.2) contrôlée par un seuil était d'imposer un moratoire à la récolte de proie lorsque cette population est en des régions de danger d'extinction ou près de  $x = 0$ . Ainsi, nous voulons donc reprendre les portraits de phase étudiés au chapitre 2 et regarder l'effet de l'imposition du seuil de récolte sur les portraits de phase et les régions de coexistence des espèces.

À cet effet, en terme des paramètres  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ , nous allons reprendre les régions de paramètres définis au chapitre 1 ( $\lambda = 0$ ) pour le sous-système  $F_0$  et au chapitre 2 ( $\lambda > 0$ ) pour le sous-système  $F_\lambda$ . Nous regardons particulièrement les portraits de phase pour les diverses régions de paramètres du sous-système  $F_\lambda$ . Comme mentionné, par exemple, la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  dépend du paramètre  $\lambda$ . Ainsi, pour les valeurs de paramètres fixes dans  $E_{\mathcal{H}}$  sous la courbe  $\mathcal{H}$  dans le sous-système  $F_\lambda$ , le sous-système  $F_0$  associé pour  $\lambda = 0$  pourrait se trouver à l'extérieur de son homologue  $\mathcal{H}$  dans la région de paramètre  $E_{\mathcal{H}^c}$  ou vice-versa (voir figure 3.14).

Par exemple, en vérifiant la région de paramètre associé aux deux sous-systèmes, nous obtenons les portraits de phase aux figures 3.15 et 3.16. Nous mettons un point gris à l'emplacement de points fixes absent dus à leur position par rapport à la région de leur sous-système associé.

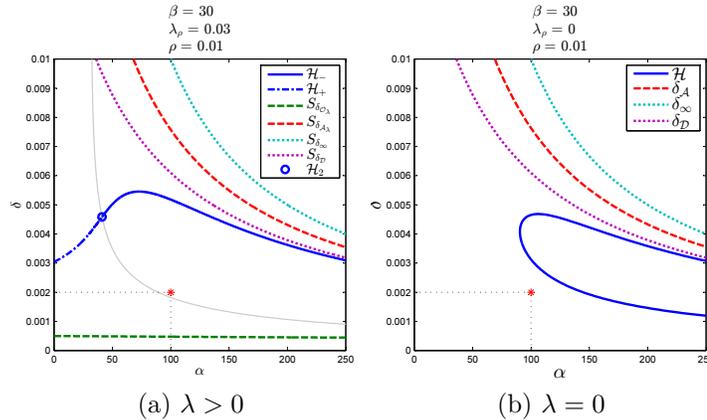


FIGURE 3.14. Exemple du changement de régions de paramètre par rapport au taux de récolte  $\lambda$  d'un sous-système

Nous obtenons donc le résultat suivant

**Résultat 3.2.1.** *Les portraits de phase des figures 3.15 et 3.16 représentent des portraits de phase topologiques possibles du système discontinu (3.2.3) pour les paramètres  $\alpha, \delta, \lambda, \rho > 0$  et  $x_0, \beta \geq 0$ . En particulier, pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et un seuil de récolte  $x_0 > x_{\mathcal{D}-}$ , le système se comporte similairement au système sans récolte 1.1.9 en terme de régions de coexistence des espèces et les portraits de phase sont équivalents à ceux de la figure 1.19 du système sans récolte, retournant donc le résultat 1.7.1.*

Évidemment, pour  $x_0 \geq 1$  nous avons que les régions de coexistence et d'extinction des espèces sont identiques au cas sans récolte par la proposition 3.2.1.

Soit les portraits de phase pour la récolte constante dans la région de paramètres  $E_{\mathcal{BH}^c}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*) \in Q_1$ . Le seul problème d'extinction dans cette région vient de conditions initiales au-dessus de la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ . Bien sûr, il suffit d'utiliser un seuil de récolte  $x_0 > x_{\mathcal{D}-}$  éliminant complètement cette séparatrice et ainsi toute possibilité d'extinction et ramenant le système topologiquement équivalent au système sans récolte si  $x_0 < x_*$  (figure 3.15). Ceci est semblable pour la région de paramètres  $\mathcal{BH}$ . Si  $0 < x_0 \leq x_{\mathcal{D}-}$ , alors au lieu d'avoir extinction des espèces pour les conditions initiales au-dessus de la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ , il y aura seulement extinction des prédateurs et pérennité des proies à  $\mathcal{O}_\lambda$  (ou  $\mathcal{O}_{\lambda, x_0}$ ) si  $x_0 < x_*$  (figure 3.16d) et coexistence des espèces à  $\mathcal{M}$  si  $x_0 > x_*$  (figure 3.16e). Tel que mentionné, les solutions périodiques stables

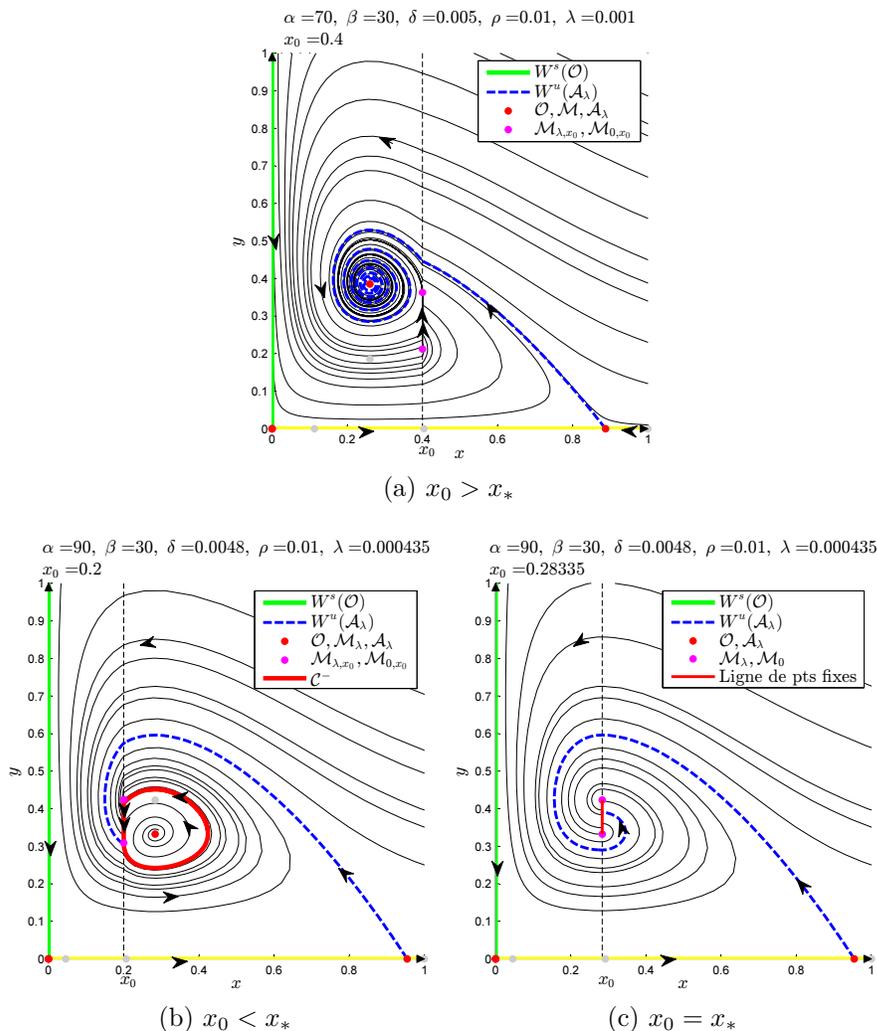


FIGURE 3.15. Portraits de phase du système avec récolte discontinu pour différents seuils  $x_0$

dans le système  $F_\lambda$  demeurent dans le système discontinu et se concentrent au point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $x_0 \rightarrow x_*$  (figure 3.15b). Toutefois, si  $x_0 = x_*$ , alors nous avons la formation d'un segment de points fixes non isolés sur  $x = x_*$  entre  $f_\lambda(x_0 = x_*)$  et  $f_0(x_0 = x_*)$  (figure 3.15c). Ainsi, nous voyons que les paramètres  $x_0$  et  $\delta$  sont importants pour le contrôle des régions de conditions d'extinction et de pérennité des espèces, peu importe la valeur des autres paramètres. Il est aisé de voir toutes les situations possibles en reprenant les portraits de phase des chapitres 1 et 2 et de les recoller ensemble le long d'un seuil de récolte  $x_0 > 0$  en suivant les figures du tableau 3.7.

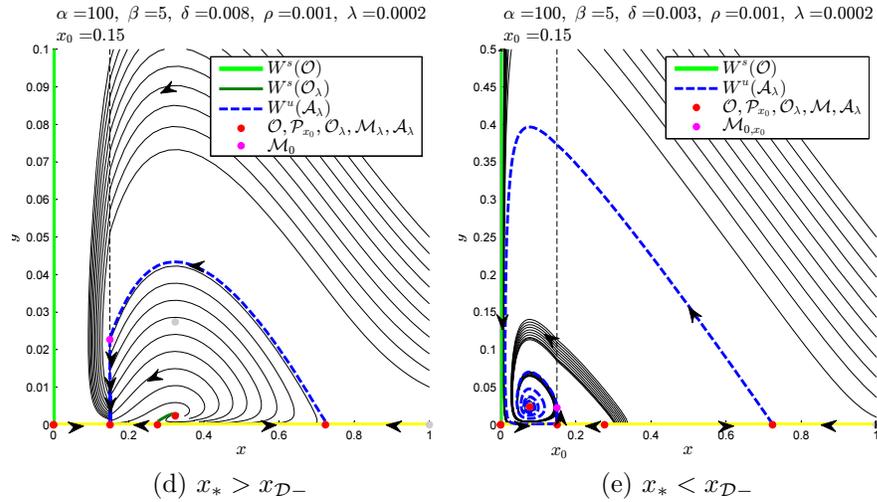


FIGURE 3.16. Portraits de phase du système avec récolte discontinu pour différentes valeurs de  $\delta$  et  $x_0 < x_{\mathcal{D}-}$

Au final, la fonction de récolte contrôlée (3.2.2) est absolue, c'est-à-dire qu'en fonction de  $x_0$ , soit la récolte est nulle ou encore la récolte est maximisée à  $\lambda > 0$ . Le choix de  $x_0$  en fonction des points fixes ou cycles limites ne donne pas place à ajustement. Du coup, ce type de récolte, quoiqu'elle fonctionne et soit simple d'application, n'est pas optimal et n'est pas réaliste. En effet, dans un cas réel, un éleveur n'alternera pas entre une récolte maximale et un arrêt de récolte, et il y aura forcément une zone de transition et donc un taux de récolte plus modéré. Il est donc naturel de viser une récolte plus lisse et continue, d'où l'idée de vouloir utiliser une fonction de récolte au moins  $C^0$  et croissante en fonction de la population. En ce sens, nous pouvons assurer la pérennité des espèces, mais au prix d'un moratoire sur la récolte et ce dès que  $0 < x(t) < x_0$ .

Ainsi nous voyons les avantages d'introduire un contrôle à notre fonction de récolte de proie  $\eta_1(x)$ . Nous obtenons une récolte de proie simple comme au chapitre 2 mais avec les régions de coexistence du chapitre 1 assurées par les conditions (3.1.5) obtenues par l'amalgame le plus simple possible des études complètes de ces chapitres. Toutefois, la discontinuité engendrée par ce « bricolage » de portraits de phase peut rendre difficile l'analyse de ce système autour de cette discontinuité. Nous avons la possibilité de formation de système structurellement instable par l'apparition de lignes de points fixes non isolés. Le système (1.1.9) avec fonction de récolte discontinue (3.2.2) n'est pas localement Lipschitz à  $x = x_0 < 1$ . Il peut s'avérer complètement inconcevable de pratiquer une telle sorte de récolte surtout si le flot traverse constamment cette discontinuité, forçant

l'arrêt et le redémarrage constant de la récolte (voir 3.1). Ceci est typiquement ce qui arrive lors de simulations numériques pour une courbe de solution dans le voisinage de la discontinuité. Une fonction de récolte lisse et au moins  $C^0$  permettrait d'éliminer ce problème et de respecter les conditions (3.1.5). Également, ceci permettrait d'adapter la récolte continûment et d'exercer une récolte plus faible tout en gardant la pérennité des espèces du système discontinu lorsque  $x(t) < x_0$ . Regardons d'abord comment lisser ce type de fonction afin de pouvoir l'utiliser dans notre système au chapitre suivant.

### 3.3. APPROXIMATION CONTINUE DU SYSTÈME PAR RÉGULARISATION

Afin de traiter plus aisément les systèmes d'EDOs discontinus par des logiciels analytiques ou numériques, il est idéal de convertir de tels systèmes en systèmes continus, et ce, en approximant par des fonctions continues au voisinage des discontinuités. La plupart des solveurs numériques comme `ode23` ou `ode45` de `Matlab` qui utilisent la méthode de Runge-Kutta à un ordre adaptatif (voir annexe B) ne sont pas faits pour traiter des fonctions avec des discontinuités. Les erreurs numériques prennent rapidement de l'ampleur autour des discontinuités d'un système, d'où l'utilisation de solveurs « *stiff* » comme `ode23s` lorsque les solutions croissent rapidement dans une direction afin de limiter la discrétisation abusive du système et donc le temps de calcul. Mais là encore, `Matlab` n'est pas optimisé pour l'analyse d'un système avec discontinuités du type saut.

Afin de contourner les difficultés dues aux discontinuités d'un système, les analystes numériques utilisent plutôt une approximation continue autour de celles-ci. En effet, en choisissant une fonction respectant les propriétés du système, il est possible d'approximer un saut dans une fonction discontinue par une fonction lisse, définie par morceaux selon les cas. La forme de cette fonction sera déterminée par un paramètre appelé le *pas* et identifié par  $\sigma$ . Ce paramètre prend souvent une valeur réelle entre  $]0, \infty[$ . Les cas extrêmes de  $\sigma = \infty$  et  $\sigma = 0$  représentent souvent respectivement une approximation constante ou la fonction discontinue elle-même. Ainsi, de telles valeurs de pas sont souvent associées à de fortes erreurs numériques autour de la discontinuité, d'où l'idée « d'adoucir » celle-ci par une valeur de pas non extrême. Un système d'EDOs continu qui approxime un système discontinu est appelé une *régularisation* [25].

Afin de pouvoir traiter la fonction de récolte de proie discontinue (3.2.2) dans notre système (1.1.9) autour du point de discontinuité  $x = x_0$ , nous pouvons définir généralement ce type de système discontinu par le système (3.2.1). Ceci pourrait se généraliser dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $X \in \mathbb{R}^n$  et à tout système d'équations différentielles discontinues discontinu par morceaux tel qu'étudié par Llibre *et al.* [21]. Puisque notre système décrit par  $F$  est discontinu aux points  $X_0 \in \{X|h(X) = 0\}$ , cet ensemble sera souvent traité comme un ensemble où le système est non défini ou une frontière au système. De ce fait,  $F(X)$  est souvent défini par défaut en  $X = X_0$  par  $F(X_0) = F_1(X_0)$  ou  $F(X_0) = F_2(X_0)$  ou même  $F(X_0) = \frac{F_1(X_0)+F_2(X_0)}{2}$  selon le contexte. Avec ce dernier choix, nous pouvons donc réécrire le système sous la forme suivante :

$$F(X) = \frac{F_1(X) + F_2(X)}{2} + \phi^0(h(X)) \left( \frac{F_1(X) - F_2(X)}{2} \right), \quad (3.3.1)$$

où

$$\phi^0(u) := \text{sign}(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u < 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ 1 & \text{si } u > 0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

ce qui se manipule mieux même si le système n'a pas changé.

Le défi est de bien choisir une nouvelle fonction pour adoucir la fonction discontinu  $\phi_0$  dans le système (3.3.1) au voisinage de la discontinuité afin de moyenner les fonctions  $F_1$  et  $F_2$ .

**Définition 3.3.1.** ([21])

- (1) Une fonction continue  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  au moins  $C^0$  est une fonction de régularisation (ou transition function) si  $\phi(u) = -1$  pour  $u \leq -1$ ,  $\phi(u) = 1$  pour  $u \geq 1$  et  $\phi'(u) > 0$  pour  $u \in (-1, 1)$ .
- (2) Une  $\phi$ -régularisation  $F_\phi$  d'un système discontinu  $F$  est un système continu au moins  $C^0$  régularisé autour de la discontinuité de  $F$  par une fonction de régularisation  $\phi$ .

Nous pouvons prendre une fonction de régularisation  $\phi = \phi^1$  linéaire par morceaux pour un intervalle par défaut de rayon 1 autour de la discontinuité

selon la valeur de  $h(X)$ , de sorte que  $F(X_0) = \frac{F_1(X_0)+F_2(X_0)}{2}$ .

$$\phi^1(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1, \\ u & \text{si } -1 < u < 1, \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Nous obtenons une fonction  $\phi^1$  qui est  $C^0$  et dérivable par morceaux. Il est possible d'augmenter l'ordre de différentiabilité en interpolant l'intervalle de transition  $u \in [-1, 1]$  par des fonctions polynomiales de degré supérieur. Par exemple :

$$\phi^2(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1, \\ -\frac{u^3}{2} + \frac{3u}{2} & \text{si } -1 < u < 1, \\ 1 & \text{si } u \geq 1, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$\phi^3(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1, \\ \frac{3u^5}{8} - \frac{5u^3}{4} + \frac{15u}{8} & \text{si } -1 < u < 1, \\ 1 & \text{si } u \geq 1, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

et plus généralement,  $\phi^n$  de classe  $C^{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  que nous appelons *degré de régularisation*. En pratique, il y a de légères différences sur les portraits de phase régularisés par les fonctions de régularisation pour différents degrés  $n$ . Ces différences sont surtout aux limites des axes  $X_0 \pm$ , pour que la régularisation soit plus lisse, mais la forme topologique reste identique. Nous verrons plus tard que la fonction  $\phi^1$  est assez lisse pour nos besoins.

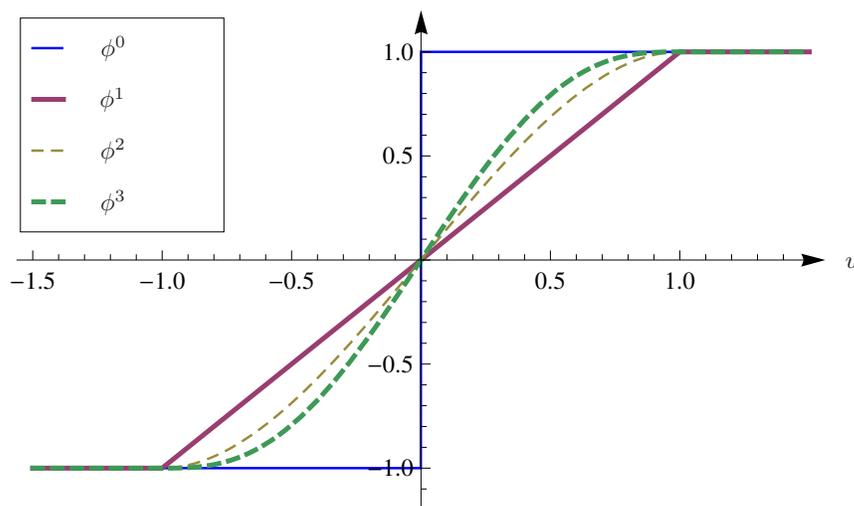


FIGURE 3.17. Fonctions de régularisation

Afin de contrôler la largeur de l'intervalle de régularisation, nous définissons une fonction de régularisation générale :

$$\phi_\sigma^n(u) = \phi^n\left(\frac{u}{\sigma}\right) \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \sigma > 0. \quad (3.3.6)$$

Nous obtenons donc une  $\phi_\sigma^n$ -régularisation du système discontinu  $F$  par un système régularisé de la forme

$$F_\sigma^n(X) = \frac{F_1(X) + F_2(X)}{2} + \phi_\sigma^n(h(X)) \left( \frac{F_1(X) - F_2(X)}{2} \right). \quad (3.3.7)$$

Nous observons que  $\phi_\sigma^n \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \phi^0$ , soit le système discontinu original, ou sinon  $F_\sigma^n \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \frac{F_1(X) + F_2(X)}{2}$  qui est tout simplement la moyenne des deux champs sur la totalité du domaine pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . À la discontinuité, nous avons

$$F_\sigma^n(X_0) = \frac{F_1(X_0) + F_2(X_0)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \sigma > 0. \quad (3.3.8)$$

Évidemment, si  $F_1(X) = -F_2(X)$  au voisinage de  $\{X|h(X) = 0\}$ , alors la régularisation donne les mêmes lignes de flot que le système discontinu original pour tout  $\sigma$  dans le voisinage de la discontinuité. Dans ce cas,  $h(X) = 0$  est une courbe de points singuliers car  $F_\sigma^n(X_0) = \phi_\sigma^n(h(X_0)) \left( \frac{F_1(X_0) - F_2(X_0)}{2} \right) = 0$ , donc la régularisation ne fera que ralentir de manière continue la vitesse du champ autour de la discontinuité.

En plus de transformer un système discontinu en un système continu et ainsi permettre une analyse rigoureuse, la régularisation a pour effet d'introduire un troisième système,  $F_\phi$ , entre les deux systèmes originaux  $F_1$  et  $F_2$ . Évidemment, ce troisième système est la zone de transition contenant la courbe de discontinuité  $h(X) = 0$  et est défini dans la région délimitée par les courbes  $h(X) = \pm\sigma$ .

Dans cette zone, on pourrait assister à la formation de points fixes et cycles limites en plus de ceux déjà présents dans les systèmes définis par  $F_1$  et  $F_2$ , ou encore voir disparaître certains de ceux-ci pour  $\sigma \gg 0$ . Ainsi, pour  $\sigma > 0$  certaines nouvelles bifurcations locales peuvent également se produire comme, par exemple, l'apparition de points fixes. Également, les lignes de flot ont la possibilité de former des cycles fermés formés de morceaux de lignes de courant de différents champs. C'est un nouveau type de bifurcation globale. Le système régularisé est défini

comme :

$$F_\sigma^n(X) = \begin{cases} F_1(X) & \text{si } h(X) \geq \sigma, \\ F_\phi(X) & \text{si } -\sigma < h(X) < \sigma, \\ F_2(X) & \text{si } h(X) \leq -\sigma. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Tel que montré dans les prochains portraits de phase, les principaux types de transformation d'un système discontinu par régularisation sont l'adoucissement de la discontinuité (figure 3.18), l'apparition d'un antiselle (figure 3.19) et l'apparition d'un point de selle (figure 3.20). Dans ces figures, les lignes pointillées rouges représentent les courbes  $h(X) = \pm\sigma$ , et la bleue entre les deux autres représente la courbe  $h(X) = 0$ .

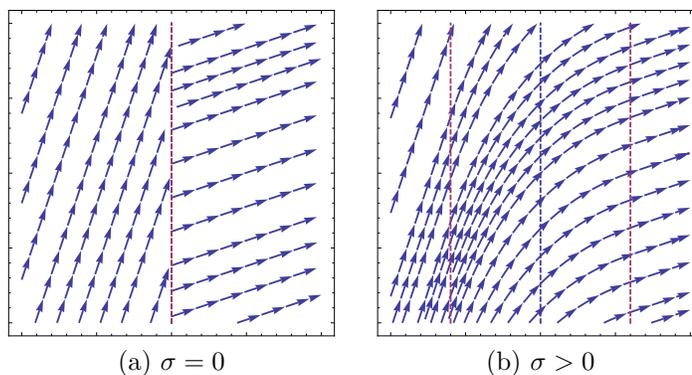


FIGURE 3.18. Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation

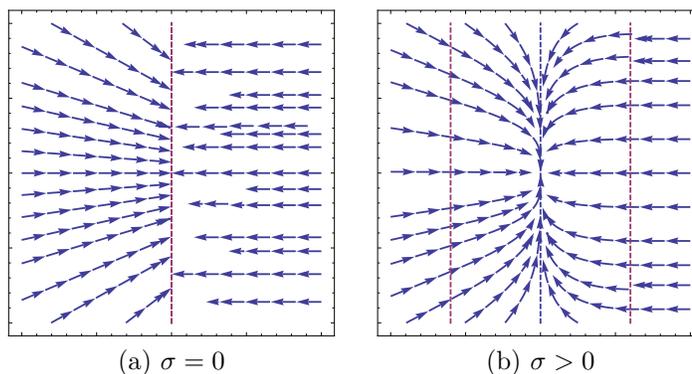


FIGURE 3.19. Exemple d'apparition d'un antiselle par régularisation

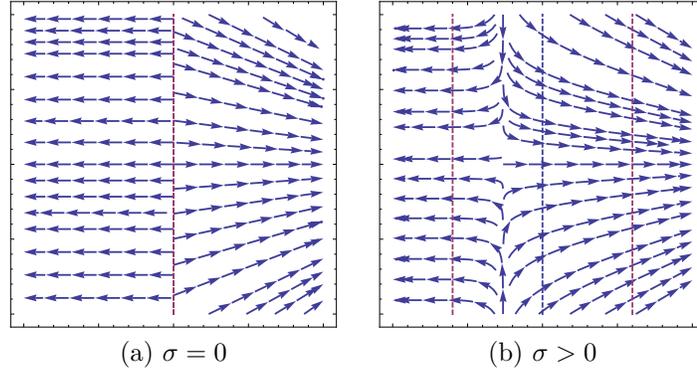


FIGURE 3.20. Exemple d'apparition d'un point de selle par régularisation

Une étude des différents comportements de la régularisation se trouve en annexe A. De manière générale, plus la différence des composantes des champs  $F_1$  et  $F_2$  parallèles à  $h(X) = 0$  sera grande, plus grands seront les changements visuels.

Pour notre système (1.1.9) avec récolte de proie (3.1.1) discontinue,  $F_1$  représente le système avec récolte constante,  $F_2$  représente le système sans récolte et  $h(x) = x - x_0$ .

### 3.4. CHOIX DE $\eta_1(x)$

Il existe une multitude de choix pour définir notre fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1(x)$ . Toutefois, certaines de ces fonctions peuvent être manipulées analytiquement tandis que d'autres peuvent seulement être manipulées numériquement, ce qui constitue un élément important pour le choix de  $\eta_1$ . Certaines fonctions aussi simplifient le système et le ramènent aux formes étudiées aux chapitres 1 et 2, tel que nous verrons au chapitre suivant. Les fonctions possibles devront cependant respecter les conditions définies par (3.1.5).

#### 3.4.1. Fonction polynomiale

Une manière simple d'approximer la singularité à  $x_0$  de la fonction discontinue (3.2.2) est de définir une fonction définie par morceaux de la même manière, à l'exception d'une interpolation polynomiale dans un rayon d'un pas  $\sigma$  autour de  $x_0$ , c'est-à-dire, définie sur  $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ . Il s'agit tout simplement des fonctions de régularisation définies à la section 3.3 pour  $\eta_1$ . En définissant

$$\begin{cases} x_{0-} = x_0 - \sigma, \\ x_{0+} = x_0 + \sigma, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

nous pouvons définir notre fonction de récolte par

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq x_{0-}, \\ a_{m,2m+1}x^{2m+1} + a_{m,2m}x^{2m} + \dots + a_{m,1}x + a_{m,0}, & \text{si } x_{0-} < x < x_{0+}, \\ \lambda, & \text{si } x \geq x_{0+}, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

où  $m$  représente l'ordre de continuité aux points  $\{x_{0-}, x_{0+}\}$ . Pour obtenir une fonction  $C^m$ , nous utilisons un polynôme d'interpolation  $P_{2m+1}$  de degré  $2m + 1$ . Les  $2m + 2$  coefficients de ce polynôme forment un vecteur

$$a_m(x_0, \sigma) = (a_{m,2m+1}, a_{m,2m}, a_{m,2m-1}, \dots, a_{m,1}, a_{m,0}). \quad (3.4.3)$$

Ce polynôme doit respecter les conditions suivantes

$$\bullet \quad P_{2m+1}(x_{0-}) = 0, \quad (3.4.4a)$$

$$\bullet \quad P_{2m+1}(x_{0+}) = \lambda, \quad (3.4.4b)$$

$$\bullet \quad \frac{d^n P_{2m+1}}{dx^n}(x_0 \pm \sigma) = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \dots, m. \quad (3.4.4c)$$

Puisque  $\lambda > 0$ , les conditions (3.4.4) impliquent que  $P_{2m+1}$  est croissant sur  $]x_{0-}, x_{0+}[$  comme désiré. Ainsi, ceci nous donne le système d'équations suivant

$$\begin{pmatrix} x_{0-}^{2m+1} & x_{0-}^{2m} & \dots & x_{0-} & 1 \\ x_{0+}^{2m+1} & x_{0+}^{2m} & \dots & x_{0+} & 1 \\ (2m+1)x_{0-}^{2m} & (2m)x_{0-}^{2m-1} & \dots & 1 & 0 \\ (2m+1)x_{0+}^{2m} & (2m)x_{0+}^{2m-1} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(2m+1)!}{(m+1)!}x_{0-}^{m+1} & \frac{(2m)!}{(m)!}x_{0-}^m & \dots & 0 & 0 \\ \frac{(2m+1)!}{(m+1)!}x_{0+}^{m+1} & \frac{(2m)!}{(m)!}x_{0+}^m & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{m,2m+1} \\ a_{m,2m} \\ a_{m,2m-1} \\ a_{m,2m-2} \\ \vdots \\ a_{m,1} \\ a_{m,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.5)$$

Nous pouvons résoudre ce système pour certaines valeurs de  $m$ . Alors  $\forall \lambda, x_0 > 0$  tel que  $0 < \sigma \leq x_0$ , pour  $m = 0$ , c'est-à-dire l'interpolation linéaire, nous obtenons

$$a_0 = \frac{\lambda}{2\sigma} (1, -x_{0-}), \quad (3.4.6)$$

la fonction polynomiale affine par morceaux  $\eta_1(x)$  est donc  $C^0$ , donc non dérivable aux points  $x = x_0 \pm \sigma$ . Pour  $m = 1$ , c'est-à-dire l'interpolation de degré 3, nous obtenons

$$a_1 = \frac{\lambda}{4\sigma^3} (-1, 3x_0, -3x_{0-}x_{0+}, x_{0-}^2(x_0 + 2\sigma)), \quad (3.4.7)$$

et pour  $m = 2$ , c'est-à-dire l'interpolation de degré 5, nous obtenons

$$a_2^T = \frac{3\lambda}{16\sigma^5} \begin{pmatrix} 1 \\ -5x_0 \\ -10(\sigma^2 - 3x_0^2) \\ 30x_0(\sigma^2 - x_0^2) \\ 15x_0^2 - x_0^2 \\ -x_0^3(8\sigma^2 + 9\sigma x_0 + 3x_0^2) \end{pmatrix}. \quad (3.4.8)$$

Pour  $m > 0$ , la fonction est donc  $C^m$ , donc dérivable au plus  $m$  fois aux points  $x = x_0 \pm \sigma$ .

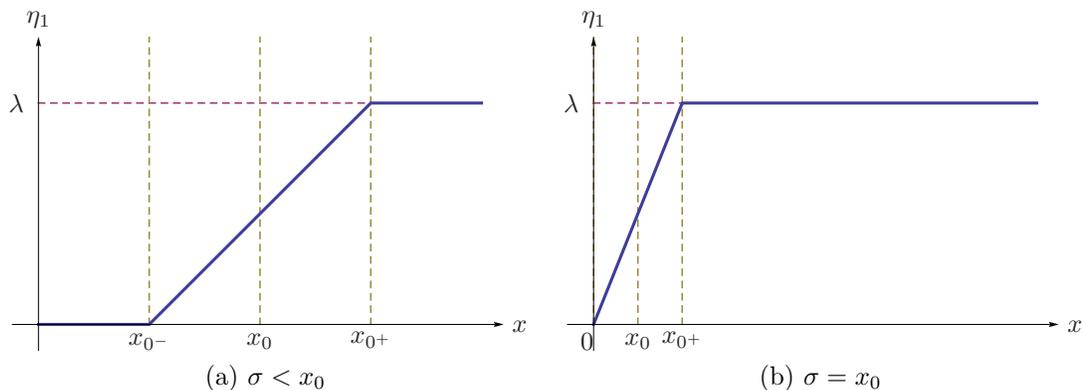
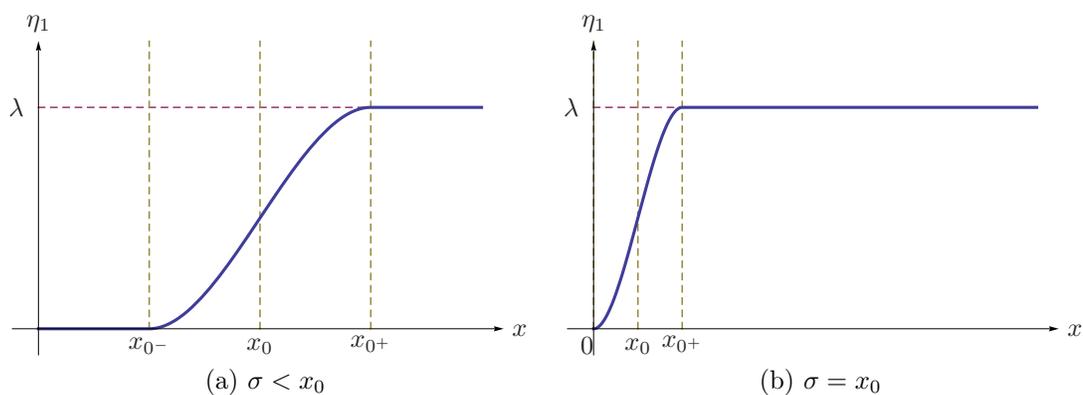
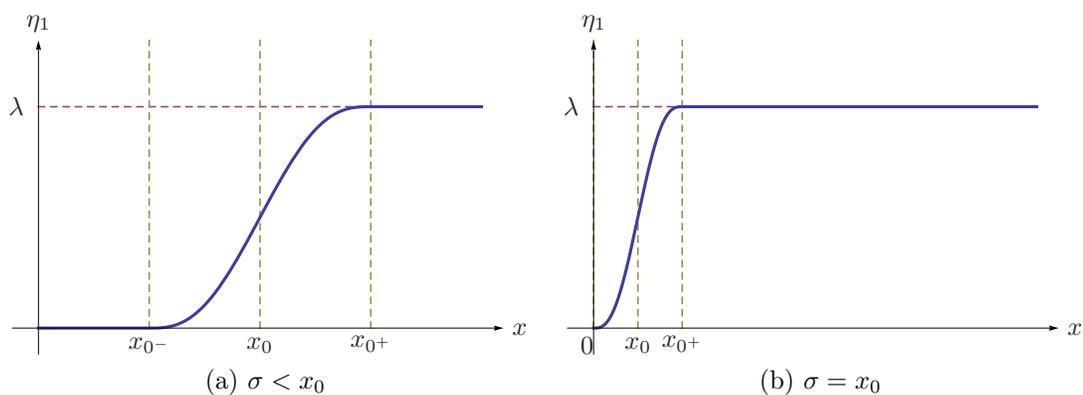
On pourrait résoudre ce système pour  $m \geq 3$ . Cependant, en termes de  $\{\lambda, x_0, \sigma\}$ , les coefficients de  $a_m$  deviennent lourds. En revanche, pour certaines valeurs numériques de  $\{\lambda, x_0, \sigma\}$ , ce système se résout facilement numériquement. Bien sûr, pour une valeur de  $\sigma$  très petite, le système d'équations linéaires devient rapidement *mal-conditionné* pour de grandes valeurs de  $m$  pouvant causer des erreurs numériques sur les coefficients. Toutefois, il est possible de choisir un grand  $m$  pour obtenir une fonction  $\eta_1$  polynomiale par morceaux aussi lisse que désiré mais ce pour un pas  $\sigma(m)$  assez grand. De la même manière, nous pouvons trouver la fonction de régularisation  $\phi_\sigma^n$  aussi lisse que désiré dans un cas général. Un ordre de continuité  $m$  élevé permet de se rapprocher le plus possible d'une fonction de récolte analytique globalement définie plus naturelle pour les applications lorsqu'on connaît les conditions initiales approximativement.

Évidemment, nous avons que  $\eta_1(0) = 0 \forall x_0 > 0, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Toutefois, nous avons également que

$$\frac{d\eta_1}{dx}(0) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sigma} & \text{si } x_0 = \sigma > 0 \text{ et } m = 0 \\ 0 & \text{si } x_0 > 0, \sigma < x_0, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Dans le cas où  $m > 0$ , puisque  $\sigma > 0$ , ceci nous assure que nous avons toujours le point singulier  $\mathcal{O}$  à l'origine et qu'il est simple.

Donc pour un  $m$  choisi,  $\eta_1$  dépend des paramètres  $\{\sigma > 0, x_0 \geq 0\}$  tel que  $\sigma \leq x_0$ , et du taux de récolte maximum  $\lambda$ . Plus  $\sigma$  est grand, moins la fonction est abrupte, à l'opposé, lorsque  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\eta_1$  se rapproche de la fonction discontinue (3.2.2) en  $x_0$ .

FIGURE 3.21. Graphiques de  $\eta_1$  définie par (3.4.2) pour  $m = 0$ FIGURE 3.22. Graphiques de  $\eta_1$  définie par (3.4.2) pour  $m = 1$ FIGURE 3.23. Graphiques de  $\eta_1$  définie par (3.4.2) pour  $m = 2$ 

### 3.4.2. Fonction trigonométrique

De manière semblable à l'interpolation polynomiale dans la régularisation du système, une méthode populaire auprès des analystes numériques pour contourner

la singularité en  $x_0$  est l'interpolation trigonométrique, c'est-à-dire d'interpoler par une demi-période d'une fonction sinus autour de la singularité dans un rayon d'un pas également. Cette fonction prend la forme générale d'une fonction sinus ou cosinus tout en respectant les conditions semblables à (3.4.4). Ceci donne

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{0-}, \\ \frac{\lambda}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi(x - x_0)}{2\sigma} \right) + 1 \right] & \text{si } x_{0-} < x < x_{0+}, \\ \lambda & \text{si } x \geq x_{0+}. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

Cette fonction définie par morceaux est au plus  $C^1$  puisque, évaluée en  $x_{0\pm}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dx} \left( (x_{0\pm})^\mp \right) &= 0 = \frac{d\eta_1}{dx} \left( (x_{0\pm})^\pm \right) \\ \frac{d^2\eta_1}{dx^2} \left( (x_{0\pm})^\mp \right) &= \mp \frac{\pi^2}{8\sigma^2} \neq 0 = \frac{d^2\eta_1}{dx^2} \left( (x_{0\pm})^\pm \right) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

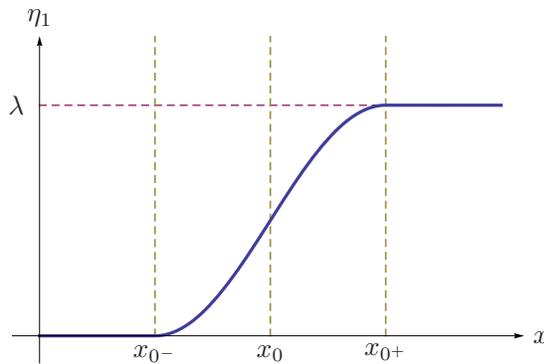


FIGURE 3.24. Graphique de  $\eta_1$  définie par (3.4.10)

Le désavantage principal de cette fonction est la nécessité de résoudre l'équation  $I_0(x) = 0$  par rapport à  $x$  numériquement seulement, où  $I_0(x)$  est défini en (3.1.3). Toutefois, ceci en fait également un avantage puisqu'il est aisé de manipuler le système en variant aisément le pas  $\sigma$  et le seuil de récolte  $x_0$  numériquement. Ces derniers agissent de la même manière que pour la fonction polynomiale (3.4.2).

Il aurait été possible d'utiliser une fonction trigonométrique inverse comme  $\arctan$ . Plus difficile à contrôler, cette dernière aurait des propriétés semblables à la fonction logistique présentée ci-dessous.

### 3.4.3. Fonction logistique

Finalement, différemment des autres fonctions de régularisation et plus réaliste, une façon fréquemment utilisée en biologie pour décrire les fonctions du modèle de Verhulst pour les dynamiques de population en temps continu est la

fonction logistique généralisée. Elle a la particularité d'avoir la forme d'une sigmoïde adaptée pour des cas généraux. Sa forme générale est donc la suivante

$$f(x) = A + \frac{K - A}{(1 + Qe^{-Bx})} \quad (3.4.12)$$

où les paramètres représentent

- $A$  : Asymptote du bas
- $K$  : Asymptote du haut
- $B$  : Taux de croissance
- $Q = \frac{f(0) - K}{A - f(0)}$

Afin d'adapter cette fonction à nos besoins pour satisfaire les conditions (3.1.5), nous prenons la forme plus compacte suivante

$$\eta_1(x) = \frac{\lambda_\epsilon}{1 + e^{-\omega(x-x_0)}} - \epsilon \quad (3.4.13)$$

dans laquelle les paramètres représentent

- $\omega$  : Coefficient directeur *c.-à-d.* taux de croissance
- $x_0$  : Seuil de récolte
- $\epsilon$  : Ajustement de hauteur
- $\lambda_\epsilon$  : Taux de récolte ajusté

Le but sera de trouver les deux derniers paramètres pour satisfaire aux conditions (3.1.5). Puisque

$$\eta_1(0) = \frac{\lambda_\epsilon}{1 + e^{\omega x_0}} - \epsilon, \quad (3.4.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta_1(x) = \lambda_\epsilon - \epsilon,$$

en remplaçant dans les équations (3.1.5a) et (3.1.5c), nous obtenons en simplifiant

$$\eta_1(x) = \frac{\lambda(e^{\omega x} - 1)}{e^{\omega x} + e^{\omega x_0}}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.4.15)$$

Donc  $\eta_1$  dépend des paramètres  $\{\omega > 0, x_0 \geq 0\}$  pour un taux de récolte maximum  $\lambda$ . Le paramètre  $\omega$  agira de manière inverse au pas  $\sigma$  des fonctions polynomiales et trigonométriques : plus  $\omega$  est petit, moins la fonction est abrupte ; à l'opposé, lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\eta_1$  devient comme la fonction discontinue (3.2.2) en  $x_0$ . En pratique, il est intéressant de noter que la fonction logistique agit similairement aux fonctions polynomiales pour le paramètre  $\omega = \frac{C_0}{\sigma}$  pour  $C_0 \approx 5$ , et ce, pour  $\sigma \in ]0, x_0]$ , donc  $\omega \geq \frac{5}{x_0}$ . Ainsi, nous pouvons traiter la fonction logistique avec le nouveau paramètre  $\sigma \in ]0, x_0]$  en remplaçant  $\omega$  par  $\frac{5}{\sigma}$ . Le cas où  $\omega \in ]0, \frac{5}{x_0}[$  correspond à  $\eta'(0) \gg 0$ . Le choix de  $\omega$  sera donc primordial puisque les erreurs numériques vont rapidement prendre le dessus lors de l'évaluation de  $\eta_1(x)$  pour

$\omega$  grand, beaucoup plus que les fonctions polynomiales pour  $\sigma$  très petit.

Contrairement aux autres fonctions de régularisation, la fonction logistique a l'avantage de ne pas être définie par morceaux. Puisqu'il s'agit d'une fonction exponentielle, elle est donc analytique sur  $\mathbb{R}^+$ . Elle offre également plus de flexibilité et est plus simple à contrôler, offrant ainsi un meilleur réalisme pour une application biologique. Cependant, tout comme la fonction trigonométrique, l'étude des points singuliers nécessite une analyse numérique. Également, contrairement aux fonctions définies par morceaux, nous calculons que

$$\frac{d\eta_1}{dx}(0) = \frac{\omega\lambda}{1 + e^{\omega x_0}} > 0, \quad \forall \omega, \lambda > 0. \quad (3.4.16)$$

Ceci pourrait poser problème biologiquement parlant à un certain niveau. Toutefois, le système est non défini pour des valeurs de  $x < 0$ . Donc tout ce qui importe est que  $\eta_1(0) = 0$  puisque le flot s'annulera sur la droite  $x = 0$ .

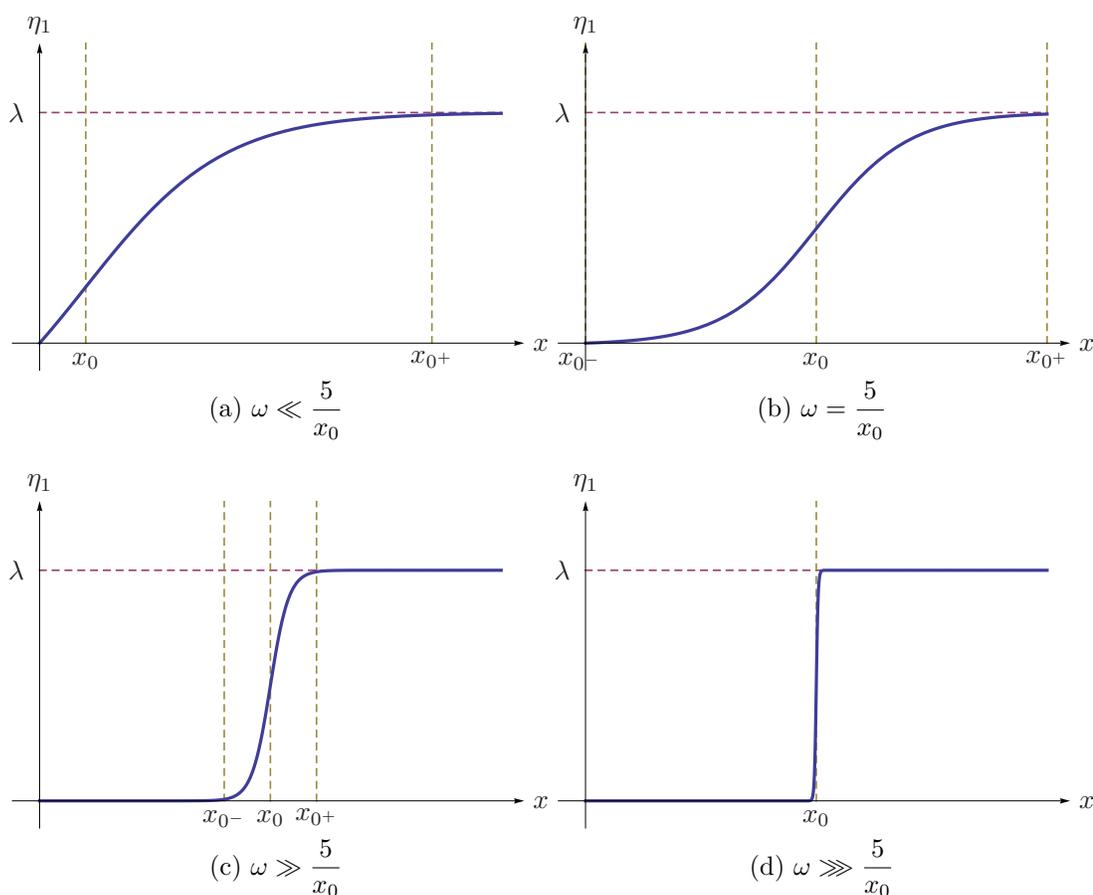


FIGURE 3.25. Graphiques de  $\eta_1$  définie par (3.4.15) pour diverses valeurs de  $\omega$

### 3.5. APPLICATION AU SYSTÈME ÉTUDIÉ

Somme tout, pour notre système, nous pouvons définir  $F_1 := F_\lambda$  comme le système avec récolte constante (2.0.1) pour  $\lambda > 0$  et  $F_2 := F_0$  pour le système sans récolte. En incorporant la régularisation, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} F_\sigma(x, y) &= \frac{F_\lambda(x, y) + F_0(x, y)}{2} + \phi_\sigma(x - x_0) \left( \frac{F_\lambda(x, y) - F_0(x, y)}{2} \right) \\ &= \begin{cases} \rho x(1 - x) - yp(x) - \eta_1(x) \\ y(-\delta + p(x)) \end{cases} \\ &= F_0(x, y) - (\eta_1(x), 0), \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

car seule la partie de la récolte de proie change où  $\phi_\sigma$  est une fonction de régularisation quelconque et  $\eta_1(x)$  est notre fonction de récolte de proie contrôlée. Nous pouvons ainsi analyser notre système continu. Évidemment, les choix de  $x_0$ , le seuil de récolte, et de  $\sigma$ , le pas de contrôle du seuil de récolte, sont primordiaux pour l'effet désiré sur les portraits de phase.

Nous avons exploré ces différents choix de fonction de récolte pour pouvoir choisir la fonction la plus simple à étudier analytiquement et numériquement et la plus réaliste possible. Nous nous inspirons en fait de la réponse naturelle des prédateurs envers la population de proies modélisée par la fonction de Holling de type III généralisée afin de modéliser la fonction de réponse des récolteurs  $\eta_1$ . Toutefois la fonction de Holling n'est pas le choix idéal étant donné sa complexité (fonction rationnelle de degré supérieur) et également son nombre de paramètres ne permettant pas un contrôle adéquat en fonction d'un seuil  $x_0$ .

En raison de son contrôle aisé, nous priorisons la fonction de récolte polynomiale (3.4.2) qui dépend seulement explicitement de  $x_0$ ,  $\sigma$  et  $\lambda$ . Elle est la forme de récolte la plus intuitive pour respecter les conditions (3.1.5) dans le cas d'une fonction définie par morceaux. De plus, à l'exception du cas linéaire  $m = 0$ , elle respecte la condition optionnelle (3.1.6). Également, étant donné sa forme polynomiale, il est plus aisé de résoudre les systèmes d'équations qui en résultent, ce qui ne nous contraint pas à résoudre ces équations numériquement.

Dans un souci de simplicité, nous allons explicitement étudier au chapitre 4 le système (1.1.9) avec fonction de récolte polynomiale linéaire  $m = 0$ . Nous

allons également le séparer en 2 cas, soit le cas linéaire  $x_0 = \sigma$  et le cas affine  $\sigma < x_0$ . Par souci de travailler avec une fonction analytique qui soit naturelle, nous allons également comparer la fonction polynomiale à la fonction logistique qui, contrairement à la fonction polynomiale, donne des équations à solutions numériques seulement. Nous mettons ainsi en évidence que, peu importe le choix de fonction de récolte de la section (3.4) respectant les conditions (3.1.5), l'analyse et l'effet de la récolte contrôlée demeurent semblables en fonction du seuil et du pas de récolte  $x_0$  et  $\sigma$ .

# Chapitre 4

---

## ÉTUDE DU SYSTÈME AVEC RÉCOLTE DE PROIE CONTRÔLÉE

Dans ce chapitre, nous étudions le système simplifié (1.1.9) avec fonction de récolte de proie contrôlée présentée au chapitre 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x(1-x) - yp(x) - \eta_1(x) & (4.0.1a) \\ \dot{y} = y(-\delta + p(x)) & (4.0.1b) \end{cases}$$

avec  $p(x)$  la fonction de Holling de type III généralisé (0.0.5) et des paramètres  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$  et  $\beta \geq 0$ . Le choix de la fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1$  doit respecter le contexte décrit au chapitre 3, c'est-à-dire une forme de sigmoïde satisfaisant aux conditions (3.1.5), en particulier  $\eta_1(0) = 0$  et  $0 \leq \frac{d\eta_1}{dx}(0) < \rho$ . Nous voulons donc prendre  $\eta_1(x)$  avec seuil de récolte  $x_0 \geq 0$  comme étant la fonction logistique

$$\eta_1(x) = \frac{\lambda(e^{\omega x} - 1)}{e^{\omega x} + e^{\omega x_0}}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (4.0.2)$$

pour les cas généraux qui seront traités numériquement pour un coefficient directeur  $\omega = \frac{\rho}{\sigma} > 0$ . Toutefois, comme nous le verrons, nous pouvons simplifier ce type de fonction de récolte et ainsi faciliter le traitement analytique par la fonction polynomiale affine par morceaux avec  $m = 0$

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{0-} \\ \frac{\lambda(x - x_0 + \sigma)}{2\sigma} & \text{si } x_{0-} < x < x_{0+} \\ \lambda & \text{si } x \geq x_{0+} \end{cases} \quad (4.0.3)$$

où  $x_{0\pm} = x_0 \pm \sigma$  avec un pas  $0 < \sigma \leq x_0$ . Nous étudions le système (4.0.1) avec fonction de récolte (4.0.3). Par la suite, nous faisons des tests pour la fonction (4.0.2) où nous voulons obtenir les mêmes résultats.

#### 4.1. TRAJECTOIRES À L'INFINI

Dans cette section, nous étudions les trajectoires à l'infini.

**Théorème 4.1.1.** *Pour tout  $\alpha, \delta, \rho, \lambda > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et fonction de récolte de proie  $\eta_1$  satisfaisant à (3.1.5), il existe un rectangle  $R = [0, r] \times [0, l]$ , où  $l = l(\alpha, \beta, \delta, \rho, \lambda, \eta_1)$  et  $0 < r = r(\rho, \lambda, \eta_1) \leq 1$  formant une région attractive pour tout point dans le premier quadrant du système (4.0.1), c'est-à-dire contenant l'ensemble  $\omega$ -limite de toute trajectoire du premier quadrant.*

**DÉMONSTRATION.** En reprenant les preuves des théorèmes similaires dans [19] et [10], d'après (3.1.5), puisque  $0 \leq \eta_1(x) \leq \lambda$  et  $\eta_1(x)$  est croissante pour tout  $x \geq 0$  et  $0 \leq \frac{d\eta_1}{dx}(0) < \rho$ , alors selon (4.0.1a),  $\exists r = r(\rho, \lambda, \eta_1) \leq 1$  tel que  $\dot{x} < 0 \forall x > r$ . Donc toute trajectoire rentre dans la bande  $x \in [0, r]$ . Également,  $\dot{y} < 0 \forall x < x_*$  tel que  $p(x_*) = \delta$ , en particulier,  $\forall \delta > 0$ ,  $\dot{y} < 0 \forall x \in [0, \epsilon]$ , soit une bande attractive en  $y$ , pour un  $\epsilon \in ]0, x_*[$  quelconque. Aussi,  $\dot{x} < 0 \Leftrightarrow y > y_*(x) = \frac{\rho x(1-x) - \eta_1(x)}{p(x)} \forall x \in [0, r]$ . Soit

$$\max_{x \in [\epsilon, r]} \frac{\rho x(1-x) - \lambda}{p(x)} \leq N := \max_{x \in [\epsilon, r]} \frac{\rho x(1-x) - \eta_1(x)}{p(x)} \leq \max_{x \in [\epsilon, r]} \frac{\rho x(1-x)}{p(x)} \quad (4.1.1)$$

et la pente du champ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\delta - p(x)}{p(x) - \frac{\rho x(1-x) - \eta_1(x)}{y}} \quad (4.1.2)$$

Le reste de la preuve est identique à celle du théorème de [10]. Il s'en suit que  $\frac{dy}{dx} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \frac{\delta - p(x)}{p(x)}$ , ce qui est borné sur la bande  $[\epsilon, r]$ . Donc pour  $t \in [0, T]$ , il existe au moins une trajectoire  $(x(t), y(t))$  telle que  $x(0) = r$  et  $x(T) = \epsilon$  pour  $y(t) \geq N$  suffisamment grand. Prenons la plus basse trajectoire en  $y$ ,  $(x_l(t), y_l(t))$ , vérifiant cette propriété pour  $t \in [0, T_l]$  et définissons

$$l := \max_{t \in [0, T_l]} y_l(t) \quad (4.1.3)$$

Puisque la pente des trajectoires  $y$  est bornée, il est clair que les trajectoires ne peuvent aller à l'infini dans la région  $\{(x, y) \mid x \in [\epsilon, r], y \geq N\}$  et doivent donc entrer dans la région  $x \in [0, \epsilon]$  où  $\dot{y} < 0$ . Le flot peut soit rester là, ou bien décrire un mouvement en spirale en retournant dans la région  $x \in [\epsilon, r]$  mais pour  $y < N$ . La trajectoire reste donc sous  $y < l$  et donc, dans les deux cas, reste dans  $R = [0, r] \times [0, l]$  (voir figure 4.1).  $\square$

En particulier, nous avons pour  $\eta_1(x) = \lambda$  constante que  $r = x_{\mathcal{D}^+}$  si  $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$  et que  $R = \{(x, y) \mid x = 0, y \leq l\}$  sinon, c'est-à-dire dans ce cas que le flot se rend

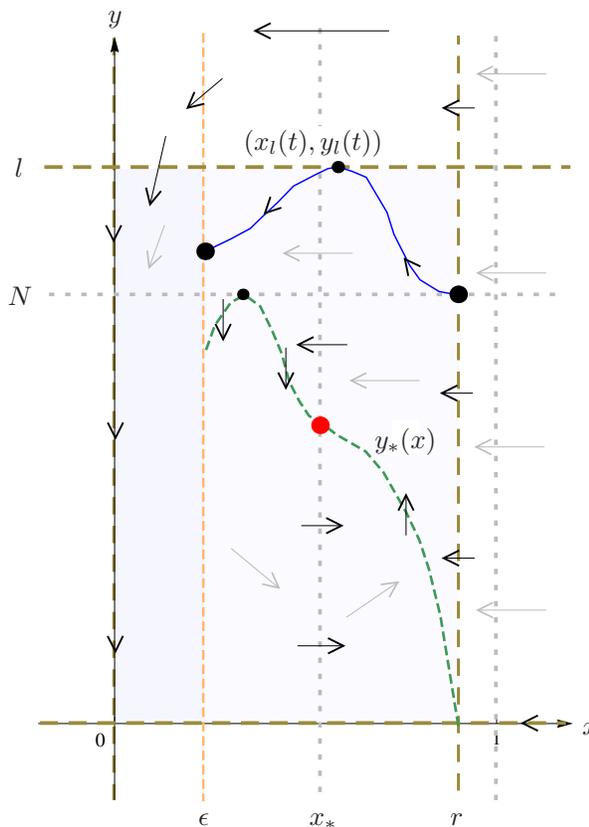


FIGURE 4.1. Schéma de la région attractive  $R$  du théorème 4.1.1

au 2<sup>e</sup> quadrant.

La totalité du flot dans le premier quadrant se dirige et se termine dans notre région bornée puisque la séparatrice  $W^s(\mathcal{O})$  définie par l'axe des ordonnées empêche le flot de sortir du premier quadrant car  $\eta_1(0) = 0$ . Ceci implique qu'il ne peut y avoir d'autres bifurcations locales et globales ni d'autres cycles dans le système, ni même « d'asymptotes » qui pourraient se former par la régularisation de notre système à l'extérieur de ce rectangle (voir annexe A).

Donc, ceci confirme que les études et les diagrammes de bifurcations des deux premiers chapitres sont complets dans le premier quadrant pour toutes les valeurs de paramètres. Également, ceci garantit que les séparatrices des points de selle sont bornées en  $y$  tel que discuté à la section 2.6, et que les seules positions possibles de celles-ci dans le premier quadrant incluant la possibilité de former une boucle hétéroclinique sont données aux figures 2.17 et 2.18. On aurait le même résultat pour n'importe quelle fonction  $\eta_1$  des conditions (3.1.5).

## 4.2. SIMPLIFICATION DU SYSTÈME

Considérons notre système régularisé (4.0.1) avec fonction de récolte de proie définie par morceaux (4.0.3), c'est-à-dire régularisé par une  $\phi_\sigma^1$ -régularisation : notre système se divise en trois systèmes disjoints pour un pas  $\sigma > 0$  et un seuil  $x_0 > \sigma$  tel qu'illustré en (3.3.9). La partie pour  $x \leq x_{0-}$  est représentée par le système sans récolte  $F_0$  étudié au chapitre 1, la partie pour  $x \geq x_{0+}$  est représentée par le système avec récolte constante  $F_\lambda$  étudié au chapitre 2 et la partie de transition  $x_{0-} < x < x_{0+}$  est représentée par le système  $F_\phi$  doté de la fonction de récolte de proie

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \lambda_1 x - \lambda_0, \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda}{2\sigma} > 0, \\ \lambda_0 &= \frac{\lambda(x_0 - \sigma)}{2\sigma} \geq 0,\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

c'est-à-dire une fonction affine, telle que définie par (4.0.3). Essentiellement, nous pouvons traiter cette partie comme un sous-système dans une bande du premier quadrant définie par  $x \in ]x_{0-}, x_{0+}[$  et tout simplement étudier le système complet pour  $\eta_1 = \lambda_1 x + \lambda_0$ . Cependant, pour un certain changement de variable, nous pouvons ramener ce sous-système à un système avec  $\lambda'$  constant (ou nulle) mais qui peut prendre des valeurs négatives. Ceci nous permet du même coup de couvrir l'étude du système (0.0.4) lorsque  $\eta_1(x)$  est une fonction affine sur  $\mathbb{R}^+$  pour des valeurs de  $\lambda_1 > 0, \lambda_0 \geq 0$ . L'idée est simplement de regrouper les termes  $\rho x$  et  $\lambda_1 x$  en un seul terme.

En termes des valeurs  $x_0$  et  $\sigma$ , notre fonction de récolte contrôlée affine se divise en trois types dans le système  $F_\phi$  pour  $\sigma \leq x_0$  tel qu'illustré à la figure 4.2. Elle peut être discontinue ( $\sigma = 0$ , étudiée à la section 3.2), linéaire ( $\sigma = x_0$ ) ou affine ( $0 < \sigma < x_0$ ). Nous séparons l'étude de chacun de ces types par rapport à leur application pratique.

Comme pour le système original (0.0.4), nous cherchons une transformation linéaire et un changement d'échelle sur le temps de la forme

$$\begin{aligned}X &= Ax, \\ Y &= By, \\ T &= Ct.\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

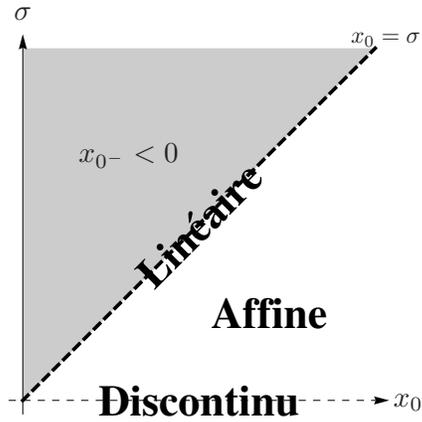


FIGURE 4.2. Type de la fonction de récolte contrôlée affine 4.0.3 dans le système  $F_\phi$  en fonction de  $x_0$  et  $\sigma$

Donc pour un système  $F_\phi$  avec récolte affine (4.2.1) dans le premier quadrant, nous obtenons ainsi le nouveau système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dT} = \frac{dX}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} \\ = \frac{(\rho - \lambda_1)}{C} X \left( 1 - \frac{\rho X}{A(\rho - \lambda_1)} \right) - \frac{Y}{ABC} \left( \frac{X^2}{\frac{\alpha}{A^2} X^2 + \frac{\beta}{A} X + 1} \right) + \frac{A\lambda_0}{C}, \\ \frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dy} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dT} \\ = Y \left[ -\frac{\delta}{C} + \frac{1}{CA^2} \left( \frac{X^2}{\frac{\alpha}{A^2} X^2 + \frac{\beta}{A} X + 1} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{A(\rho - \lambda_1)} = 1, \\ CA^2 = 1, \\ ABC = 1. \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

En résolvant ce système pour nos 3 inconnues, nous obtenons

$$\begin{aligned} A = B &= \frac{\rho}{\rho - \lambda_1}, \\ C &= \frac{(\rho - \lambda_1)^2}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Donc notre système devient

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = \frac{\rho^2}{\rho - \lambda_1} X(1 - X) - Y \left( \frac{X^2}{\frac{\alpha(\rho - \lambda_1)^2}{\rho^2} X^2 + \frac{\beta(\rho - \lambda_1)}{\rho} X + 1} \right) + \frac{\lambda_0 \rho^3}{(\rho - \lambda_1)^3} \\ \frac{dY}{dT} = Y \left( -\frac{\delta \rho^2}{(\rho - \lambda_1)^2} + \left( \frac{X^2}{\frac{\alpha(\rho - \lambda_1)^2}{\rho^2} X^2 + \frac{\beta(\rho - \lambda_1)}{\rho} X + 1} \right) \right). \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Afin d'alléger la notation, posons

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha(\rho - \lambda_1)^2}{\rho^2}, & \beta' &= \frac{\beta(\rho - \lambda_1)}{\rho}, \\ \rho' &= \frac{\rho^2}{\rho - \lambda_1}, & \delta' &= \frac{\delta \rho^2}{(\rho - \lambda_1)^2}, & \lambda' &= \frac{-\lambda_0 \rho^3}{(\rho - \lambda_1)^3}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Nous obtenons notre système simplifié

$$\begin{cases} \dot{X} = \rho' X(1 - X) - Y p(X) - \lambda', \\ \dot{Y} = Y(-\delta' + p(X)), \end{cases} \quad (4.2.8)$$

avec

$$p(X) = \frac{X^2}{\alpha' X^2 + \beta' X + 1}. \quad (4.2.9)$$

Afin de garder le système dans le premier quadrant en prenant  $A, B > 0$ , une restriction à cette transformation est

$$\rho' > 0 \Leftrightarrow \rho > \lambda_1 = \frac{\lambda}{2\sigma} \Leftrightarrow \sigma > \frac{\lambda}{2\rho} \Leftrightarrow \lambda' \leq 0. \quad (4.2.10)$$

En conséquence, nous obtenons un système avec approvisionnement de proie constante ou nulle pour des paramètres à valeurs réelles  $\alpha', \rho', \delta' > 0$ ,  $\beta' \geq 0$  et  $\lambda' \leq 0$  ainsi que la contrainte

$$\rho_0 := \rho - \lambda_1 > 0. \quad (4.2.11)$$

Évidemment, puisque le système  $F_\phi$  est restreint à la région  $x \in ]x_0^-, x_0^+[$ , seule la région suivante de notre nouveau système nous intéressera,

$$X \in ]X_0^-, X_0^+[: = \left] \frac{\rho x_0^-}{\rho_0}, \frac{\rho x_0^+}{\rho_0} \right[. \quad (4.2.12)$$

Donc afin d'utiliser ce changement de variable pour les fonctions de récolte affines, il faut étudier les fonctions d'approvisionnement de proie constante.

### 4.3. ÉTUDE DU SYSTÈME AVEC APPROVISIONNEMENT DE PROIE CONSTANTE

Bien qu'une étude complète ait été faite sur la récolte de proie constante au chapitre 2 avec  $\lambda > 0$ , une étude similaire peut être faite pour un approvisionnement de proie avec  $\lambda' < 0$  pour le système (4.2.8). Ainsi, afin de garder exactement les mêmes équations et notations, nous pouvons reprendre le système (2.0.1) du chapitre 2 et le traiter pour  $\lambda < 0$  et y faire référence pour des détails. De ce fait

$$\dot{x}|_{x=0,y} = -\lambda > 0 \quad (4.3.1)$$

Bien évidemment, nous obtenons le même problème que la récolte de proie constante avec un flux non nul sur l'axe  $x = 0$ . Toutefois, l'étude de ce système découle de la transformation du système à récolte de proie affine et est donc nécessaire seulement pour  $x \in ]X_{0-}, X_{0+}[$  tel que  $X_{0-} > 0$ . Pour l'instant, nous faisons une étude séparée pour ce système dans le premier quadrant  $x \geq 0, y \geq 0$  en prenant la même notation qu'au chapitre 2.

#### 4.3.1. Points fixes du système

Les points fixes sont les mêmes qu'au chapitre 2 et s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} \rho x(1-x) - yp(x) - \lambda = 0 & (4.3.2a) \\ y[-\delta + p(x)] = 0 & (4.3.2b) \end{cases}$$

Puisque  $\lambda < 0$ , alors nous avons toujours que  $\lambda_\rho = \frac{\lambda}{\rho} < 0$ , donc l'étude du système se résume à ce cas. De ce fait, lorsque  $y = 0$ , nous obtenons une seule solution positive

$$x_{\mathcal{D}+} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4\lambda_\rho}}{2} > 1. \quad (4.3.3)$$

puisque

$$x_{\mathcal{D}-} - x_{\mathcal{D}+} = \lambda_\rho < 0. \quad (4.3.4)$$

Nous obtenons un seul point fixe dans le premier quadrant  $\mathcal{A}_\lambda = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$  sur l'axe  $y = 0$  pour  $x \geq 0$ . Le point fixe  $\mathcal{O}_\lambda$  du système avec récolte traverse l'axe des ordonnées ( $\mathcal{O}$ ) pour se retrouver dans la région  $x < 0$ , et est donc en dehors du premier quadrant. Bien sûr, nous avons que  $x_{\mathcal{D}\pm} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow -\infty} \pm\infty$ .

Pour le cas où  $p(x) = \delta$ , nous obtenons encore un point fixe  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$  défini en (2.1.10) pour  $\alpha\delta - 1 < 0$ . Avec un  $x_* > 0$  satisfaisant la condition

(2.1.10a), nous cherchons un  $y_* \geq 0$  satisfaisant (2.1.10b) tel que

$$y_* \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \rho x_*(1 - x_*). \quad (4.3.5)$$

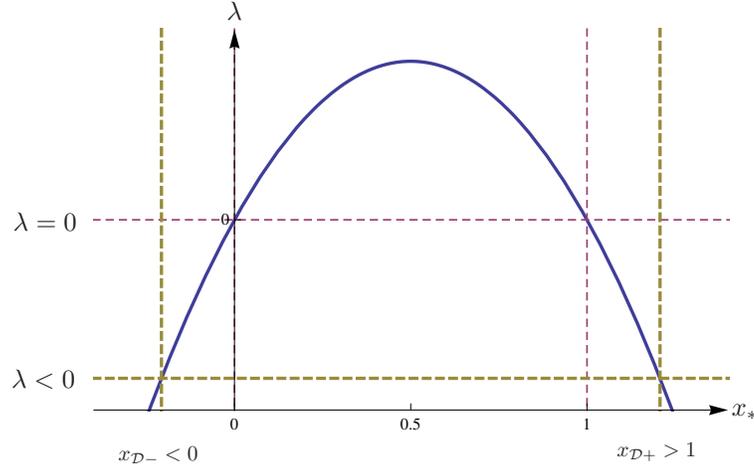


FIGURE 4.3. Graphique de l'équation  $\lambda = \rho x_*(1 - x_*)$  pour  $\rho > 0$

Puisque nous nous intéressons seulement au premier quadrant, nous avons que  $y_* \geq 0 \Leftrightarrow x_* \in [0, x_{\mathcal{D}+}]$ . Alors,  $\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$  est à l'intérieur du premier quadrant ouvert si et seulement si  $x_* \in ]0, x_{\mathcal{D}+}[$ , donnant ainsi avec  $\mathcal{A}_\lambda$  deux points fixes distincts. Pour  $x_* = x_{\mathcal{D}+}$ , alors  $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{A}_\lambda$  forme un point double  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$ .

Donc, contrairement à la récolte de proie, le système avec approvisionnement a un maximum de deux points fixes dans le premier quadrant et un minimum d'un.

Similairement à la surface  $\mathcal{S}_{\delta_0}$  pour la récolte nulle, nous avons que  $x_* \rightarrow 0 \Leftrightarrow \delta \rightarrow 0$  par (2.1.10a). Dans ce cas, nous avons que  $y_* \rightarrow \infty$  par (2.1.10b) formant une asymptote en  $x_* = 0$  où le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda = \overline{\mathcal{M}_\lambda}$  passe à l'infini. Puisque  $\delta > 0$ , nous dénoterons la surface

$$\mathcal{S}_{\delta_0} : \delta = 0 \quad (4.3.6)$$

comme une surface limite où  $\mathcal{M}_\lambda$  passe à l'infini et qu'il ne faut pas confondre avec  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}} = \mathcal{S}_{\delta_0}$  lorsque  $\lambda = 0$  qui correspond à  $\delta = p(x_{\mathcal{D}-})$ . Donc le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  se trouve dans le premier quadrant pour  $0 < \delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  défini en (2.2.12) comme à la figure 4.4 en fonction de  $\Delta_{\alpha,\beta}$  défini en (1.2.13). Nous avons que  $p(x_{\mathcal{D}+}) \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow -\infty} \frac{1}{\alpha} = \delta_\infty$  puisque  $x_{\mathcal{D}+} \xrightarrow{\lambda_\rho \rightarrow -\infty} +\infty$ , donc la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}$  se confond avec la surface  $\mathcal{S}_{\delta_\infty}$  pour  $\lambda_\rho$  très petit.

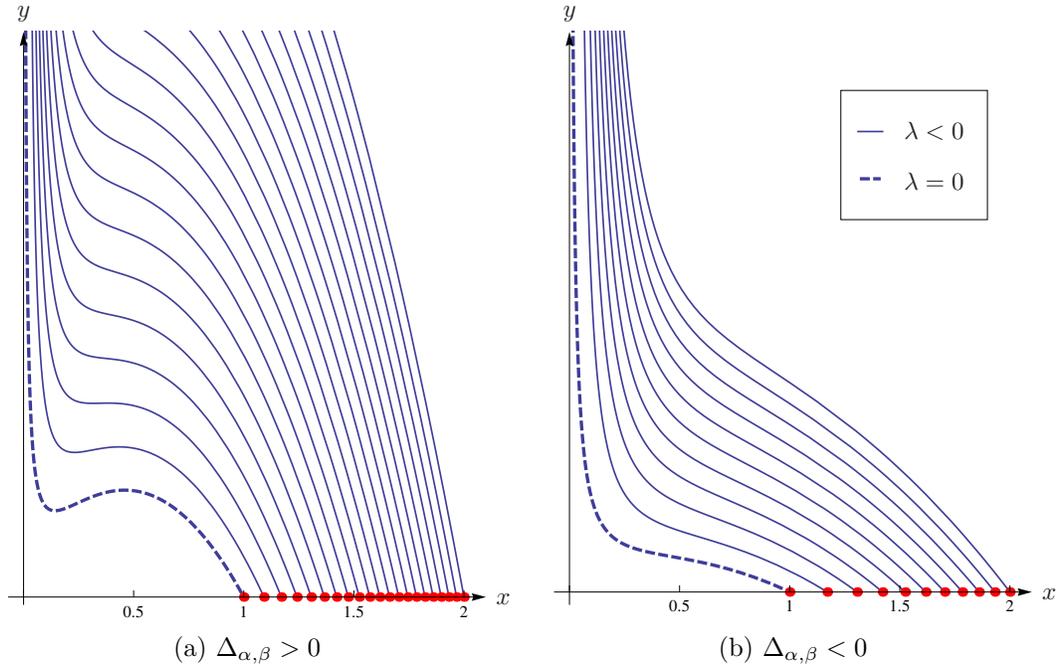


FIGURE 4.4. Courbes paramétrées  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  des positions possibles de  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta \in ]0, p(x_{\mathcal{D}+})[$  pour différentes valeurs de  $\lambda < 0$  et points doubles  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$  sur l'axe  $x$

En ce qui a trait à la stabilité des points fixes, nous nous intéressons seulement aux jacobiens pour la région  $\lambda_\rho < 0$  où l'analyse a été faite à la section 2.2.2 qui se résume au tableau 4.1.

Région	Condition	Nb	Point(s) fixe(s)			Réf.
$\lambda_\rho < 0$	$0 < \delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$	2	Simple	Anti-selle	$\mathcal{M}_\lambda = (x_*, y_*)$	Tableau 4.2
			Simple	Selle	$\mathcal{A}_\lambda = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	
	$\delta = \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$	1	Double	Col-nœud attractif	$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}} = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	1.19d
	$\delta > \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$	1	Simple	Nœud attractif	$\mathcal{A}_\lambda = (x_{\mathcal{D}+}, 0)$	1.19e

TABEAU 4.1. Points fixes du système avec approvisionnement constant

**Remarque 4.3.1.** *L'approvisionnement de proie a pour effet, bien évidemment, d'empêcher l'extinction des proies lorsque la population de proie est faible. Puisque  $\dot{x} > 0$  sur  $x = 0$  pour tout  $y \geq 0$  et que  $\dot{y} = 0$  sur  $y = 0$ , alors les proies ne peuvent jamais s'éteindre. Le théorème 4.1.1 s'applique également, avec la seule différence que la région bornée est définie par  $R = [0, x_{\mathcal{D}+} > 1] \times [0, l]$  et le reste de la preuve pour  $\lambda < 0$  demeure identique à celle de Etoua [10].*

### 4.3.2. Bifurcations du système

Comme pour le système avec récolte de proie constante, nous avons la possibilité de formation d'un point double au point  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$ , et donc obtenons la même bifurcation de col-nœud, de type transcritique sur la surface

$$\mathcal{T}_- := \mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{A}_\lambda}}, \quad (4.3.7)$$

où le point double  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}$  est un col-nœud attractif. En ce qui a trait à la bifurcation transcritique à la surface  $\mathcal{S}_{\delta_{\mathcal{O}_\lambda}}$ , elle se produit également, mais dans la région  $x < 0$  avec le point  $\mathcal{O}_\lambda$  et le point de la solution négative de  $\delta = p(x_*)$ . Mais contrairement à la récolte constante, il ne peut avoir de bifurcation de col-nœud entre les points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  puisque ces points s'éloignent pour  $\lambda < 0$  de plus en plus petit dans les deux premiers quadrants. Donc du même coup, il ne peut y avoir de bifurcation de col nilpotent.

Comme pour  $\lambda > 0$ , il y a possibilité de bifurcation de Hopf au point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour les mêmes raisons qu'au chapitre 2. Toutefois, cette bifurcation s'apparente plus à celle du cas sans récolte de la manière suivante :

**Théorème 4.3.1.** *Soient  $(\alpha, \delta, \rho) > 0, \beta \geq 0$  et  $\lambda < 0$  sous les conditions d'existence du point  $\mathcal{M}_\lambda$  dans le premier quadrant :*

$$\begin{cases} \alpha\delta - 1 < 0, \\ \delta = p(x_*), \\ y_* = \frac{\rho x_*(1 - x_*) - \lambda}{\delta}, \\ \lambda_\rho < 0, \\ 0 < x_* < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Alors il y a bifurcation de Hopf d'ordre 1 supercritique sur la surface de paramètre  $\mathcal{H}$  définie par  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = 0$  définie en (2.2.10) au point  $\mathcal{M}_\lambda$ .

**DÉMONSTRATION.** En effet, nous obtenons une surface de bifurcation  $\mathcal{H}$  similaire au cas  $\lambda = 0$ , et ce, pour tout  $\lambda_\rho < 0$ , car le premier coefficient de Lyapunov est toujours positif donnant, dès lors, que la bifurcation de Hopf est d'ordre 1. Le point singulier  $\mathcal{M}_\lambda$  est un anti-selle, et la trace de son jacobien peut s'annuler seulement pour  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$ . La trace  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*)$  a le signe de

$$\lambda_\rho(\beta x_* + 2) - x_* \left( 2\alpha x_*^3 + x_*^2(\beta - \alpha) + 1 \right). \quad (4.3.9)$$

Nous pouvons remarquer que cette dernière est strictement négative si  $\beta \geq \alpha$ . De ce fait, à un seuil de  $\lambda \ll 0$  nous avons que  $\mathbf{Tr}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) < 0$  et donc que la bifurcation de Hopf devient impossible pour certaines valeurs de paramètres.

Nous obtenons donc les mêmes équations de la surface de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  que pour  $\lambda > 0$  dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  paramétrées par  $x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Par exemple, dans le plan  $(\alpha, \delta)$ ,  $\mathcal{H}$  est paramétrée par le couple  $(\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*), \delta_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*))$  défini en (2.4.7) et (2.4.8). Et comme pour  $\lambda = 0$ , nous avons que  $(\alpha_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*), \delta_{\mathcal{H}_\lambda}(x_*)) \rightarrow (0, \infty)$  lorsque  $x_* \rightarrow 0^+$  ou  $x_* \rightarrow \frac{1}{2}$ .

Dans le plan  $(\alpha, \delta)$ , pour  $\lambda_\rho < 0$ , nous devons avoir que

$$\alpha \geq \frac{1 - 4096\lambda_\rho^3 + 768\lambda_\rho^2 + 6\lambda_\rho - (32\lambda_\rho + 1)\sqrt{(4\lambda_\rho - 1)(16\lambda_\rho - 1)^3}}{54\lambda_\rho^2}, \quad (4.3.10)$$

afin que la courbe  $\mathcal{H}$  existe pour  $\beta \geq 0$ .

Encore une fois, la surface  $\mathcal{H}$  est coincée entre les surfaces  $\mathcal{S}_{\delta_0}$  et  $\mathcal{S}_{\delta_A}$  définie en (2.2.12). Toutefois, pour tout  $\lambda < 0$ , la surface  $\mathcal{H}$  est bornée (entourée) par la surface de la bifurcation de Hopf  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$  pour  $\lambda = 0$ . Qualitativement, diminuer le paramètre  $\lambda_\rho < 0$  a un effet similaire à augmenter le paramètre  $\beta$  ou  $\delta$  pour les sous-espaces  $(\alpha, \delta)$  et  $(\beta, \alpha)$  respectivement et à diminuer le paramètre  $\alpha$  pour le sous-espace  $(\beta, \delta)$  par rapport à la courbe  $\mathcal{H}$ .

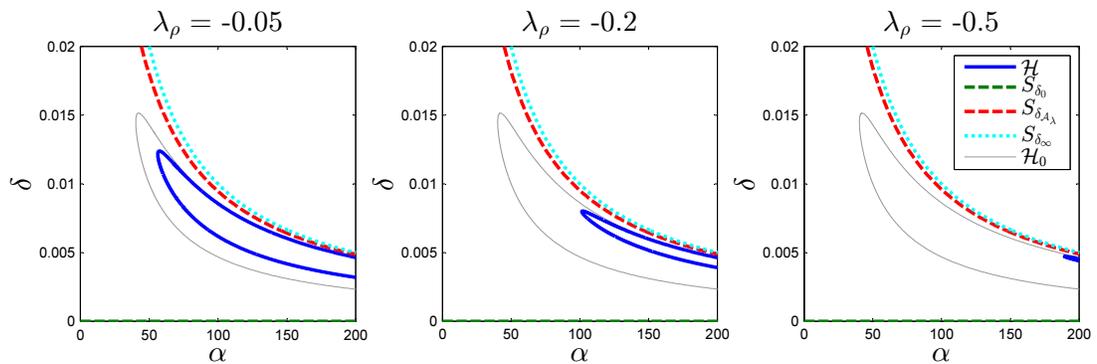


FIGURE 4.5. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour  $\beta = 5$  dans le plan  $(\alpha, \delta)$

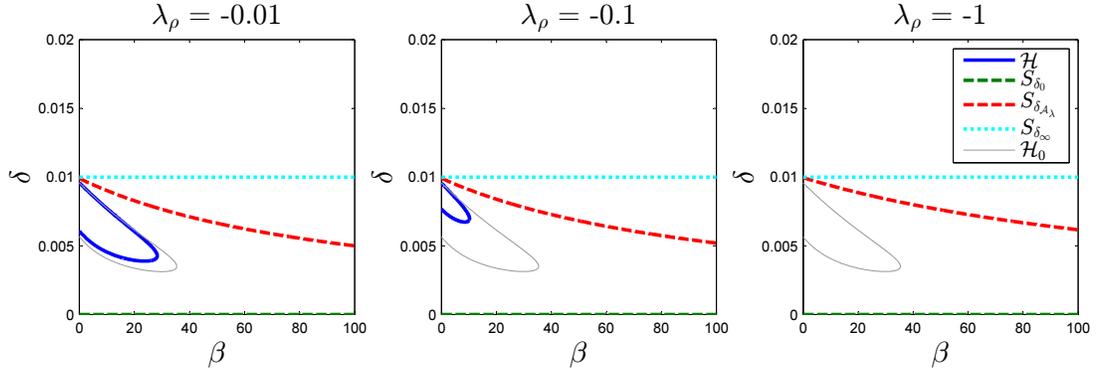


FIGURE 4.6. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour  $\alpha = 100$  dans le plan  $(\beta, \delta)$

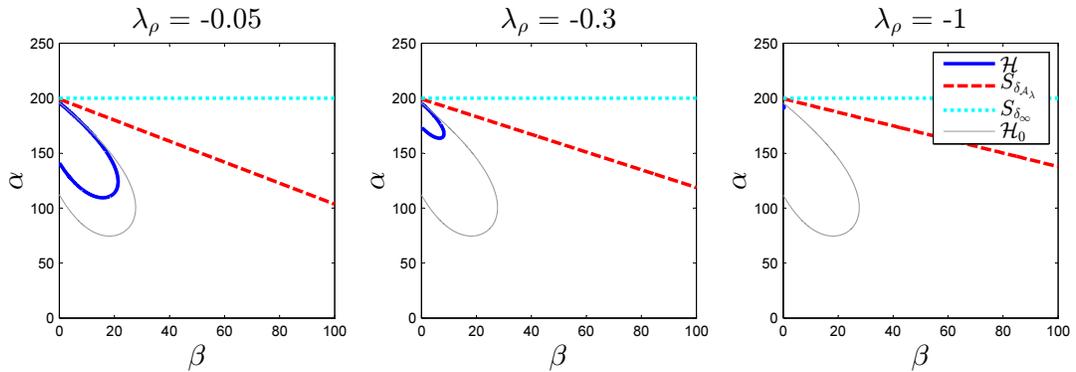


FIGURE 4.7. Diagrammes de bifurcations du système (2.0.1) avec approvisionnement pour  $\delta = 0.005$  dans le plan  $(\beta, \alpha)$

Nous avons pour  $\beta \geq 0$  que le premier coefficient de Lyapunov du système a le même signe que  $L_1$  défini en (2.4.12). La courbe où  $L_1(x_*) = 0$  est définie par  $\alpha_{L_1}(x_*)$  en (2.4.13) et croise la courbe  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $q(x_*) = 0$  pour  $\lambda_\rho < 0$ , ou similairement

$$q(x_*) = x_*^2(2 + \beta x_*)(2\beta^2 x_*^3 + 6\beta x_*^2 + \beta + 6) - \lambda_\rho(2 + \beta x_*)(\beta(\beta - 2)x_*^2 + 6\beta x_* + 6) = 0. \quad (4.3.11)$$

Nous remarquons que le membre de gauche de cette équation est strictement positif et que  $\beta(\beta - 2)x_*^2 + 6\beta x_* + 6 > 0 \forall x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $\forall \beta \geq 0$ . Donc  $\forall \lambda_\rho < 0$ , nous avons que  $q(x_*) > 0$  ce qui signifie que la courbe de bifurcation de Hopf  $\mathcal{H}$  ne croise jamais la courbe où  $L_1$  s'annule, donc il est toujours de signe constant, car  $q(x_*)$  est continu et bien défini partout. Il est aisé de vérifier que  $L_1(x_*) < 0 \forall x_* \in ]0, \frac{1}{2}[$  et donc que la bifurcation est toujours supercritique d'ordre 1.  $\square$

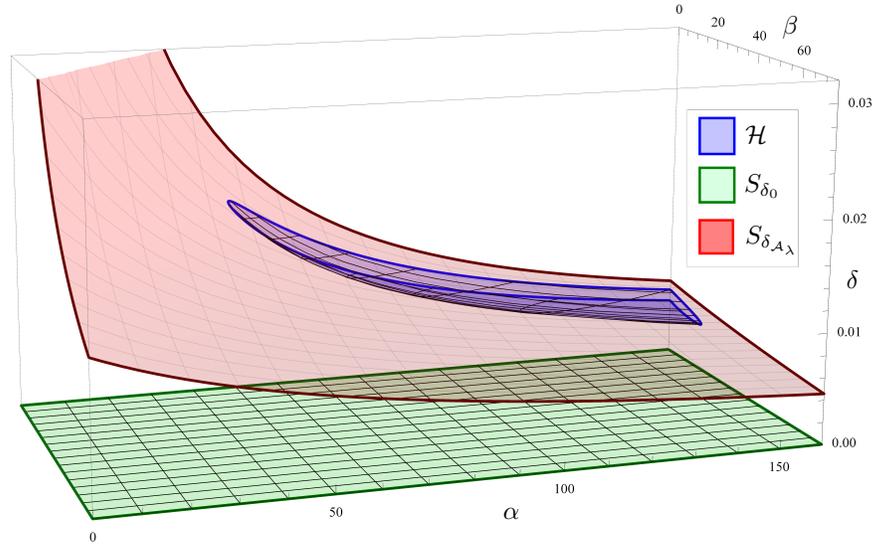


FIGURE 4.8. Diagramme de bifurcation du système (2.0.1) avec approvisionnement pour  $\lambda_p = -0.138$

Ainsi, la bifurcation de Hopf forme un cycle limite attractif dans la région ouverte  $E_{\mathcal{H}}$  limitée par  $\mathcal{H}$ . Il n'y a donc aucun cycle associé pour des valeurs de paramètres en dehors de  $E_{\mathcal{H}}$ .

En ce qui a trait aux surfaces de transition nœud-foyer  $\mathcal{N}^{\pm}$ , elles ont les mêmes équations qu'à la section 2.5 et ont qualitativement la même apparence que celles des graphiques du cas sans récolte de la section 1.6. Donc le type du point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\lambda < 0$  est résumé au tableau 4.2.

Région		Type $\mathcal{M}_\lambda$		Bifurcation	Réf.
$E_{\mathcal{H}^c}$	$E_{\mathcal{N}^c}$	Nœud		–	1.19c
	$\mathcal{N}^-$	Nœud dégénéré		« Nœud-Foyer »	
	$E_{\mathcal{H}}$	Foyer		-	
$\mathcal{H}$		Foyer faible	attractif	Hopf supercritique	1.19b
$E_{\mathcal{H}}$	$E_{\mathcal{N}}$	Foyer		–	1.19a
	$\mathcal{N}^-$	Nœud dégénéré		« Nœud-Foyer »	
	$E_{\mathcal{H}^c}$	Nœud		-	

TABLEAU 4.2. Type du point  $\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\lambda < 0$

En ce qui a trait aux variétés invariantes du point  $\mathcal{A}_\lambda$  lorsqu'il est un point de selle ( $\delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$ ),  $W^s(\mathcal{A}_\lambda)$  est toujours l'axe des abscisses et puisque  $\dot{x} > 0$

pour tout  $y \geq 0, \lambda < 0$  lorsque  $x = 0$ , tel qu'évoqué par la remarque 4.3.1,  $W^u(\mathcal{A}_\lambda)$  ne peut traverser l'axe des ordonnées et donc ne peut éventuellement former une connexion de selle avec  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  au 2<sup>e</sup> quadrant. Ceci garanti, avec la bifurcation de Hopf d'ordre maximal 1, qu'il ne peut avoir de bifurcation hétéroclinique, ni de boucle homoclinique, ni d'autres bifurcations d'ordre supérieur dans le 1<sup>er</sup> quadrant dû aux positions de la séparatrice  $W^u(\mathcal{A}_\lambda)$  restreinte à la région  $0 < x < x_{\mathcal{D}+}$  puisque  $\dot{x} < 0$  pour tout  $x > x_{\mathcal{D}+}$ . Sa forme est identique à celle de  $W^u(\mathcal{A})$  du cas sans récolte et spirale autour de  $\mathcal{M}_\lambda$  ou du cycle limite attractif  $\mathcal{C}_-$ .

En effet, une étude du point  $\mathcal{O}_\lambda$  dans le 2<sup>e</sup> quadrant nous montre que, pour  $\delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  et selon le signe de  $b^2 - 4a$  et la valeur de  $x_{\mathcal{D}-}$  (par rapport à la solution négative de  $\delta = p(x)$ ), nous avons que le signe de  $p(x_{\mathcal{D}-})$  peut changer. Dans ce cas, nous avons selon (2.2.6) que le point  $\mathcal{O}_\lambda$  est un point de selle si  $p(x_{\mathcal{D}-}) < 0$  et un nœud ou col-nœud répulsif sinon car  $p(x_{\mathcal{D}-} < 0) > p(x_{\mathcal{D}+} > 0)$ . Selon le cas, nous avons que le flot en  $x$  en  $x = x_{\mathcal{D}-}$  est  $\dot{x} = -yp(x_{\mathcal{D}-})$  dans le 2<sup>e</sup> quadrant ce qui est positif (resp. négatif) lorsque  $\mathcal{O}_\lambda$  est un point de selle (resp. nœud répulsif). Ceci implique une seule position possible de la séparatrice de  $\mathcal{O}_\lambda$ , dont la partie supérieure doit se trouver dans la région  $x < x_{\mathcal{D}-} < 0$  montrant l'inexistence de connexion de selle possible (voir figure 4.9).

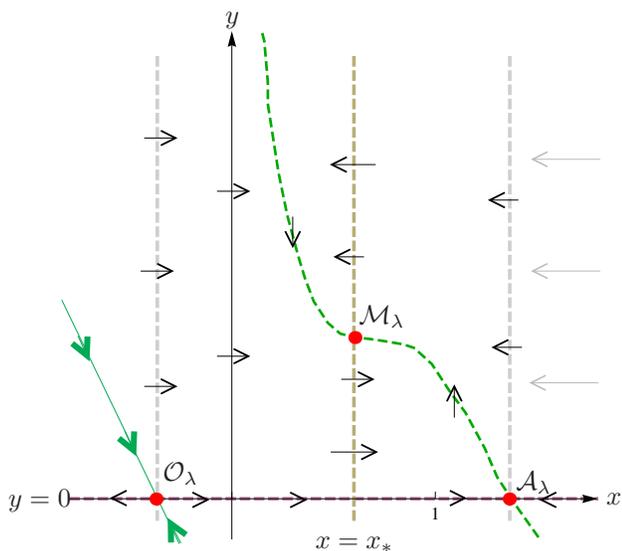


FIGURE 4.9. Les nullclines pour  $\delta < \delta_{\mathcal{A}_\lambda}, \lambda < \frac{\rho}{4}$  et  $p(x_{\mathcal{D}-}) < 0$  déterminant les différentes régions du portrait de phase

Ceci complète donc l'étude de ce système et nous donne le résultat suivant :

**Théorème 4.3.2.** *La nature et la stabilité des points fixes ainsi que toutes les bifurcations du système (4.2.8) avec approvisionnement de proie pour  $\alpha, \delta, \rho > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\lambda < 0$  sont entièrement décrits aux tableaux 4.1 et 4.2 et par le diagramme de bifurcation qui pour tout  $\lambda < 0$  a la forme donnée à la figure 4.8.*

En ce qui a trait aux portraits de phase, ils sont similaires à ceux du système sans récolte (1.19) pour les mêmes régions de paramètres étant donné la similitude des bifurcations. La seule différence est que le flot en  $x = 0$  est positif, laissant entrer les lignes de courant provenant du 2<sup>e</sup> quadrant à l'intérieur du 1<sup>er</sup> quadrant, ainsi que la position des points  $\mathcal{O}_\lambda$  ( $x_{\mathcal{D}^-} < 0$ ) et  $\mathcal{A}_\lambda$  ( $x_{\mathcal{D}^+} > 1$ ) pour  $\lambda < 0$ , comme à la figure 4.10. Par conséquence, les régions de coexistence des prédateurs et d'extinction des prédateurs sont exactement les mêmes qu'au chapitre 1 et un résultat similaire au résultat (1.7.1) s'applique pour tout  $\lambda < 0$ .

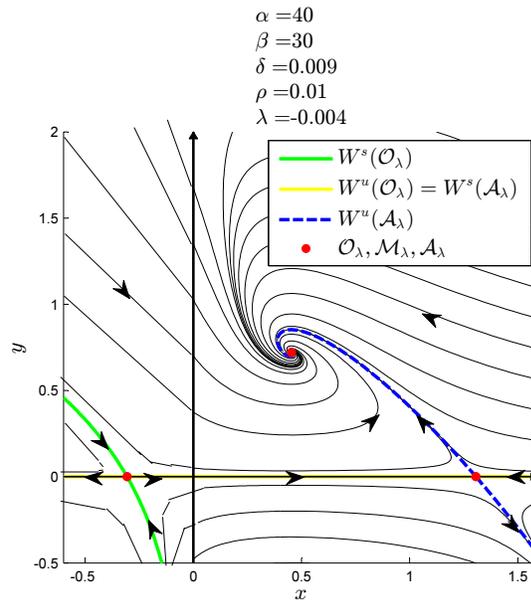


FIGURE 4.10. Portrait de phase du système avec approvisionnement pour  $\alpha = 40, \beta = 30, \delta = 0.009, \rho = 0.01, \lambda = -0.004$  ( $E_{\mathcal{H}^c}$ )

### 4.3.3. Implémentation au sous-système $F_\phi$

Typiquement, pour le système (4.0.1) avec récolte contrôlée (4.0.3), lorsque nous étudierons le sous-système  $F_\phi$  restreint à la région  $x \in ]x_0^-, x_0^+[$ , nous ferons

référence à ses points fixes par  $\mathcal{O}_\phi, \mathcal{M}_\phi, \mathcal{A}_\phi$ . Évidemment, selon les valeurs des paramètres  $x_0, \sigma$ , ces points fixes pourraient ne pas se retrouver dans la région en question et donc disparaître du système (4.0.1).

En ce sens, dans le sous-système  $F_\phi$ , les points trouvés par le changement de variable dans les coordonnées  $(X, Y)$  deviennent dans notre système de coordonnées  $(x, y)$

$$(x, y) = \frac{\rho_0}{\rho}(X, Y) \quad (4.3.12)$$

et donc les points fixes sont

$$\mathcal{O}_\phi = (X = X_{\mathcal{D}^-} \leq 0, Y = 0) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} X_{\mathcal{D}^-}, 0 \right) = \left( \frac{\rho_0(1 - \sqrt{(1 - 4\lambda'_\rho)})}{2\rho} \leq 0, 0 \right), \quad (4.3.13a)$$

$$\mathcal{A}_\phi = (X = X_{\mathcal{D}^+}, Y = 0) = \left( \frac{\rho_0}{\rho} X_{\mathcal{D}^+}, 0 \right) = \left( \frac{\rho_0(1 + \sqrt{(1 - 4\lambda'_\rho)})}{2\rho}, 0 \right), \quad (4.3.13b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\phi &= (X = X_*, Y = Y_*) = \frac{\rho_0}{\rho}(X_*, Y_*) \\ &= \left( \frac{-\beta\delta\rho - \sqrt{\delta\rho^2(4 - 4\alpha\delta + \beta^2\delta)}}{2\rho(\alpha\delta - 1)} = x_*, \frac{\rho_0^2 x(1 - x) - \lambda_0\rho}{\delta\rho} \right) \end{aligned} \quad (4.3.13c)$$

où

$$\lambda'_\rho = \frac{\lambda'}{\rho'} = \frac{\lambda_0\rho}{\rho_0^2} \quad (4.3.14)$$

et

$$X_* = \frac{-\beta'\delta' - \sqrt{\delta'(\delta'\beta'^2 - 4(\alpha'\delta' - 1))}}{2(\alpha'\delta' - 1)} = \frac{-\beta\delta\rho - \sqrt{\delta\rho^2(4 - 4\alpha\delta + \beta^2\delta)}}{2\rho_0(\alpha\delta - 1)} = \frac{\rho}{\rho_0} x_* \quad (4.3.15)$$

$$Y_* = \frac{\rho' X_*(1 - X_*) - \lambda'}{\delta'} = \frac{\rho_0^2 x(1 - x) - \lambda_0\rho}{\delta\rho_0} \quad (4.3.16)$$

Puisque le point  $\mathcal{O}_\phi = (x \leq 0, 0)$ , il ne sera jamais dans le système avec récolte (4.0.1) ou au mieux égal au point  $\mathcal{O}$ . Seuls les points  $\mathcal{A}_\phi$  et  $\mathcal{M}_\phi$  nous intéresseront. Bien évidemment, nous avons que la coordonnée  $x$  des points  $\mathcal{M}, \mathcal{M}_\phi$  et  $\mathcal{M}_\lambda$  est la même, soit  $x_*$  étant la solution de  $p(x_*) = \delta$ . Puisqu'un seul de ces points peut être dans le système et agir comme « 3<sup>e</sup> point fixe », la position de  $x_*$  par rapport

à  $x_{0-}$  et  $x_{0+}$  est importante. Seule la coordonnée  $y$  va changer, de sorte que

$$\begin{aligned} y_*|_{\eta_1=\lambda_1 x-\lambda_0} &\geq y_*|_{\eta_1=0} > y_*|_{\eta_1=\lambda}, & \text{si } x_* \leq x_{0-}, \\ y_*|_{\eta_1=0} &\geq y_*|_{\eta_1=\lambda_1 x-\lambda_0} \geq y_*|_{\eta_1=\lambda}, & \text{si } x_{0-} < x_* < x_{0+}, \\ y_*|_{\eta_1=0} &> y_*|_{\eta_1=\lambda} \geq y_*|_{\eta_1=\lambda_1 x-\lambda_0}, & \text{si } x_{0+} \leq x_*, \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

selon l'équation  $y_*|_{\eta_1} = \frac{\rho x_*(1-x_*)-\eta_1(x_*)}{\delta}$  pour  $\lambda > 0$ . Aux frontières des sous-systèmes, si  $x_* = x_{0-}$ , alors  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\phi$ , et si  $x_* = x_{0+}$ , alors  $\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\lambda$ , et donc nous avons toujours un seul point fixe à l'intérieur de  $Q_1$ . Toutefois, contrairement au cas de récolte de proie constante ou nulle, comme nous le verrons, il y a la possibilité d'avoir au plus 4 points fixes sur l'axe  $y = 0$ . Donc pour notre système (4.0.1) avec fonction de récolte affine (4.0.3), nous avons que les points  $\mathcal{A}$  et/ou  $\mathcal{M}$  sont dans le système si  $1 \leq x_{0-}$  et/ou  $x_* \leq x_{0-}$  respectivement. Les points  $\mathcal{O}_\lambda$ ,  $\mathcal{M}_\lambda$  et/ou  $\mathcal{A}_\lambda$  sont dans le système si  $x_{0+} \leq x_{\mathcal{D}-}$ ,  $x_{0+} \leq x_*$  et/ou  $x_{0+} \leq x_{\mathcal{D}+}$  respectivement. Et finalement, les points  $\mathcal{M}_\phi$  et/ou  $\mathcal{A}_\phi$  sont dans le système si  $x_{0-} < x_* < x_{0+}$  et/ou  $x_{0-} < \frac{\rho_0(1+\sqrt{1-4\lambda'\rho})}{2\rho} < x_{0+}$  respectivement. Quant au point  $\mathcal{O}_\phi$ , il est soit à l'origine lorsque  $x_0 = \sigma$  ( $\mathcal{O}_\phi = \mathcal{O}$ ), ou il se trouve dans le 2<sup>e</sup> quadrant, donc en dehors du système  $F_\phi$ . Le point  $\mathcal{O}$  est toujours à l'origine afin de garantir un flot nul en  $x$  sur la droite  $x = 0$  qui est invariante sous le flot et ainsi empêcher l'extinction des espèces pour des conditions initiales loin de  $x = 0$ .

#### 4.4. ÉTUDE DE LA RÉCOLTE DE PROIE CONTRÔLÉE LINÉAIRE-MENT

La fonction de récolte de proie définie en (4.2.1) est linéaire lorsque  $\lambda_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sigma$ . De ce fait, pour le système après changement de variable (4.2.8),  $\lambda' = 0$  et nous nous ramenons à un système sans récolte de proie dont l'étude complète a été faite au chapitre 1. Dans ce cas, le système (4.0.1) ne comporte que les régions avec  $F_\phi$  et  $F_\lambda$  puisque  $x_{0-} = 0$ .

##### 4.4.1. Récolte de proie linéaire

La valeur  $\rho$  correspond au taux de croissance des proies en l'absence de prédateur à  $x = 0$ . La valeur  $\lambda_1$  correspond plutôt à la pente de la fonction de récolte affine. De ce fait, la valeur  $\rho_0 = \rho - \lambda_1$  correspond au taux effectif de croissance des proies près de  $x = 0$  et doit absolument être strictement positive sinon il y aura extinction des espèces. Donc, pour le système (4.0.1) avec récolte linéaire (4.2.1), lorsque  $\rho_0 \leq 0$  et  $\lambda_0 = 0$ , nous obtenons que

$$\dot{x} = \rho_0 x - \rho x^2 - yp(x) < 0 \quad \forall x > 0, y \geq 0, \quad (4.4.1)$$

et  $\dot{x} = 0$  pour  $x = 0$ . Bien que  $\dot{y}$  puisse devenir positif, le seul point fixe de ce système est l'origine dont le jacobien est

$$\mathbf{Jac}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

décrivant un nœud stable lorsque  $\rho_0 < 0$  et un col-nœud attractif lorsque  $\rho_0 = 0$ . Puisque  $\delta > 0$ , lorsque  $\rho_0 = 0$ , il y a bifurcation transcritique à l'origine avec le point  $\mathcal{A}'$  du système  $\rho_0 > 0$  transformé en système sans récolte. Pour n'importe quelle condition initiale  $(x(0), y(0))$ , il y aura extinction des espèces avec un flot vers la gauche. Puisque clairement l'origine est un point attractif pour tout le premier quadrant, alors l'étude de ce système est complète, car il ne peut y avoir de bifurcation. Ce système à lui seul pour  $\rho_0 \leq 0$  n'est pas intéressant d'un point de vue biologique, car elle n'a aucune représentation pratique.

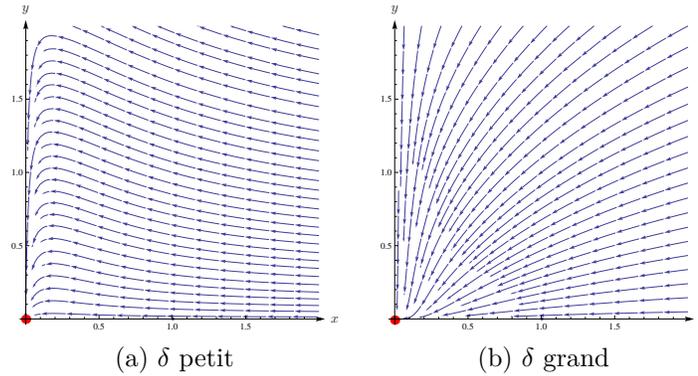


FIGURE 4.11. Portraits de phase du système (4.0.1) pour  $\eta_1$  linéaire avec  $\rho_0 \leq 0$

Ceci concorde avec la condition (3.1.5e) pour le choix de notre fonction de récolte contrôlée. En effet, pour  $\eta_1(x) = \lambda_1 x$ , nous avons que

$$\frac{d\eta_1}{dx}(0) < \rho \Leftrightarrow \lambda_1 < \rho \Leftrightarrow \rho_0 > 0 \quad (4.4.3)$$

Nous voyons donc l'effet du non-respect de la condition (3.1.5e). Ceci cause inévitablement l'extinction des espèces pour toutes conditions initiales autour de  $x = 0$ . Nous verrons en détail à la section 4.7 comment ceci influence notre choix de fonction de récolte de contrôle pour maximiser la récolte et assurer la pérennité des espèces.

En revanche, dans le cas où  $\rho_0 > 0$ , le changement de variables dans le système (4.2.8) de la section 4.2 est possible. Nous nous ramenons donc à un système

sans récolte étudié complètement au chapitre 1 et retrouvons les conclusions du résultat 1.7.1. Avec l'étude du système à récolte linéaire complète, ceci nous permet d'obtenir le sous-système  $F_\phi$  restreint à la région  $x \in ]0, x_{0+}[$  pour étudier le système à récolte contrôlée pour  $\lambda_0 = 0$ .

#### 4.4.2. Implémentation au système contrôlée

Bien que le système soit ainsi divisé en deux sous-parties afin d'enlever la discontinuité et d'adoucir la récolte constante du système  $F_\lambda$  jusqu'à la frontière  $x = 0$  pour  $\lambda_0 = 0$ , ceci a pour effet que  $\left. \frac{dm(x)}{dx} \right|_{x=0} \neq 0$ , pour le cas de la fonction de récolte polynomiale linéaire  $m = 0$ . La région  $F_0$  du système (4.0.1) avec récolte contrôlée linéaire (4.0.3) est restreinte à  $x = 0$ . Ceci forme pour toutes valeurs de  $\lambda, \rho, x_0, \sigma$  le point à l'origine  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\phi$  ainsi que sa variété stable  $W^s(\mathcal{O})$  permettant ainsi de restreindre le flot au premier quadrant. Toutefois, selon les valeurs de  $\lambda, \rho, x_0, \sigma$ , la région du système  $F_\phi$  pourrait ajouter d'autres points fixes et solutions périodiques au système à récolte contrôlée ainsi que ceux de la région du système  $F_\lambda$ .

Afin d'étudier les points fixes sur la droite  $y = 0$ , nous déterminons les solutions de l'équation  $I_0(x) = 0$  en traçant les fonctions  $g(x)$  et  $\eta_1(x) = \lambda_1 x$  à la figure 4.12 avec la droite  $x = x_{0+}$  séparant les régions des systèmes  $F_\phi$  et  $F_\lambda$ , et ce, en fonction de  $\lambda_\rho$  et  $x_{0+} = 2x_0$ . Selon le signe de  $I_0(x)$ , nous traçons le sens du flot sur  $y = 0$ . Similairement au système discontinu, nous obtenons la possibilité de la présence du point  $\mathcal{A}_\phi$  pour  $x < x_{0+}$  pouvant également fusionner avec d'autres.

En effet, lorsque  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}-}$ , nous avons à la figure 4.12i la formation du point de multiplicité 2

$$\mathcal{O}_{\lambda,\phi} := (x_{0+} = x_{\mathcal{D}-}, 0) = \mathcal{O}_\lambda = \mathcal{A}_\phi. \quad (4.4.4)$$

Également, lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}}$ , nous avons à la figure 4.12j la formation du point de multiplicité 3

$$\mathcal{D}_\phi := \left( x_{0+} = \frac{1}{2}, 0 \right) = \mathcal{D} = \mathcal{A}_\phi. \quad (4.4.5)$$

Nous étudierons plus loin ces deux dernières bifurcations. Lorsque  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}+}$ , nous avons à la figure 4.12m pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  la « transition » du point de multiplicité 1

$$\mathcal{A}_{\lambda,\phi} := (x_{0+} = x_{\mathcal{D}+}, 0) = \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_\phi, \quad (4.4.6)$$

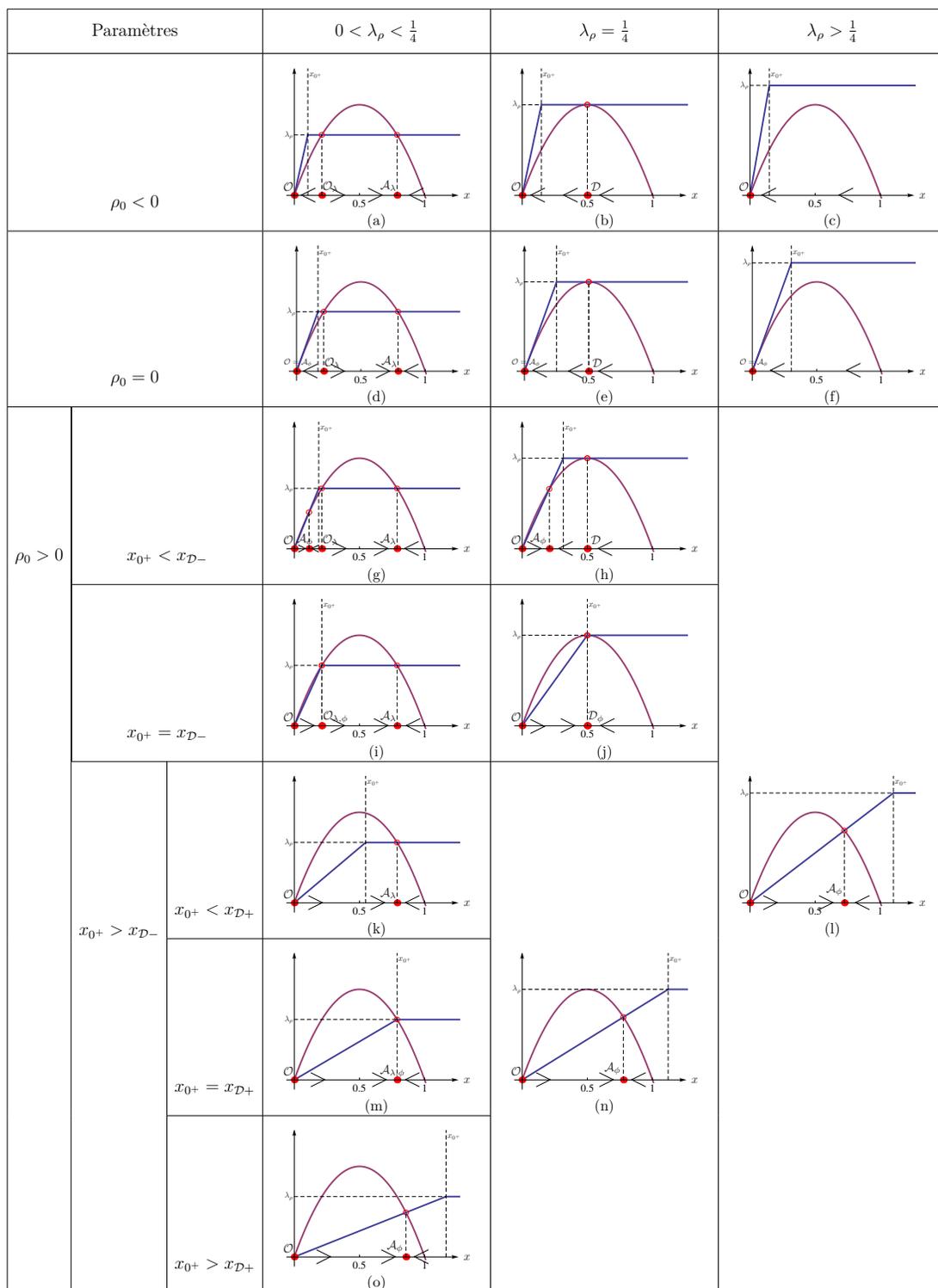


FIGURE 4.12. Graphiques de  $g(x)$  et  $\eta_1(x)$  linéaire par morceaux pour  $x_0 = \sigma$  et portrait de phase sur  $y = 0$  pour différents paramètres  $x_{0+}$  et  $\lambda_\rho$

puisque'une perturbation de paramètre ne change pas le nombre de points fixes au voisinage de  $\mathcal{A}_{\lambda,\phi}$ . Encore une fois, nous avons un maximum de 4 points fixes (figure 4.12g) pour tout  $\lambda_\rho > 0$ . Pour les autres cas où  $\mathcal{A}_\phi$  est présent, il est de multiplicité 1 (figures 4.12g, 4.12h, 4.12n, 4.12l, 4.12o). Évidemment, lorsque  $x_0 \rightarrow \infty$  nous retrouvons globalement le système sans récolte.

Afin d'obtenir explicitement la position des points fixes, nous cherchons les valeurs de  $x$  tel que  $g(x) = \eta_1(x)$ . Évidemment  $x = 0$  est une solution, formant le point  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\phi$ . Pour  $x > x_{0+}$ , la seule solution possible est  $x = x_{\mathcal{D}+}$  du cas de récolte constante déjà étudié si et seulement si  $x_{\mathcal{D}+} > x_{0+}$ . Pour la zone de régularisation  $0 < x < x_{0+}$ , nous utilisons la définition de la récolte linéaire

$$\begin{aligned} g(x) = \eta_1(x) &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{2\sigma}x = \rho x(1-x) \\ &\Leftrightarrow \lambda_\rho = 2\sigma(1-x) = x_{0+}(1-x) \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \frac{\lambda_\rho}{x_{0+}}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Nous obtenons une dépendance explicite à  $x_{0+}$  et  $\lambda_\rho$  ce qui simplifie l'étude du système. En fonction de  $x_{0+}$ , cette fonction a une asymptote en  $x = 1$  ( $x_{0+} \rightarrow \infty$ ). Donc, le point où  $x = 1 - \frac{\lambda_\rho}{x_{0+}} = 0$  pour former un point double  $\mathcal{O} = \mathcal{A}_\phi$  est lorsque

$$0 = 1 - \frac{\lambda_\rho}{x_{0+}} \Leftrightarrow \lambda_\rho = x_{0+} \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{2\sigma} \Leftrightarrow \rho_0 = 0. \quad (4.4.8)$$

Les premières figures du tableau de figures 4.12 correspondent au cas  $\rho_0 \leq 0$ . Comme fait à la sous-section précédente, seul le point fixe  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\phi$  existe à la frontière et tout le flot s'y rend. Donc  $\rho_0 = 0$  agit comme frontière et bifurcation à notre système linéaire par morceaux. À cette frontière, nous retrouvons la remarque 3.2.1 avec le point  $\mathcal{A}_\phi$  pouvant être de multiplicité 2 ou trois selon la valeur de  $\lambda_\rho$ . Nous avons la formation des points  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  ou  $\mathcal{A}_{\lambda,\phi}$  si  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et lorsque

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\lambda_\rho}{x_{0+}} = x_{\mathcal{D}\pm} &\Leftrightarrow x_{0+} = \frac{2\lambda_\rho}{1 \mp \sqrt{1-4\lambda_\rho}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\lambda_\rho}{x_{0+}} = x_{0+} \\ &\Leftrightarrow \lambda_\rho = x_{0+}(1-x_{0+}) = 2x_0(1-2x_0) \\ &\Leftrightarrow x_{0+} = 2x_0 = x_{\mathcal{D}\pm} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

et nous avons le point de multiplicité trois  $\mathcal{D}_\phi$  lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  et  $x_{0+} = 2x_0 = x_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{4}$ .

Nous traçons les diagrammes de bifurcations par rapport à  $\lambda_\rho$  ou  $x_0$  en suivant les points fixes  $\mathcal{O}$  (bleu),  $\mathcal{O}_\lambda$  (rouge),  $\mathcal{A}_\lambda$  (noir) et  $\mathcal{A}_\phi$  (vert) dans les diagrammes de bifurcation aux figures 4.13 et 4.14. Nous assemblons ces schémas au diagramme de bifurcation dans le plan  $(x_0, \lambda_\rho)$  à la figure 4.15.

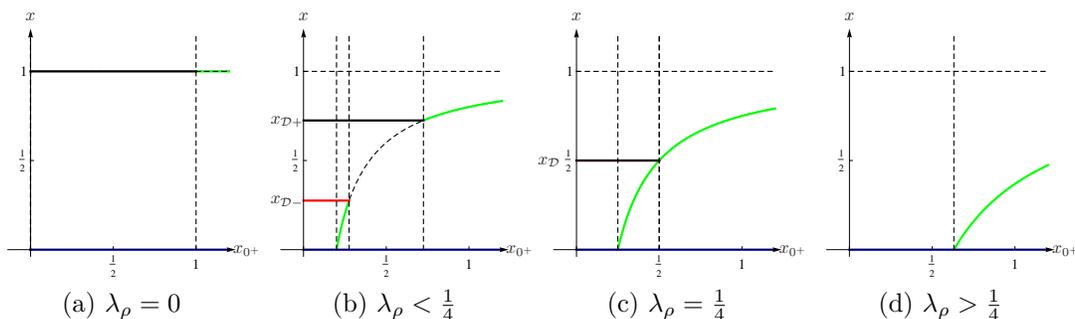


FIGURE 4.13. Diagrammes de bifurcation en fonction de  $x_0$  du système avec récolte contrôlée linéairement pour  $\lambda_\rho \geq 0$

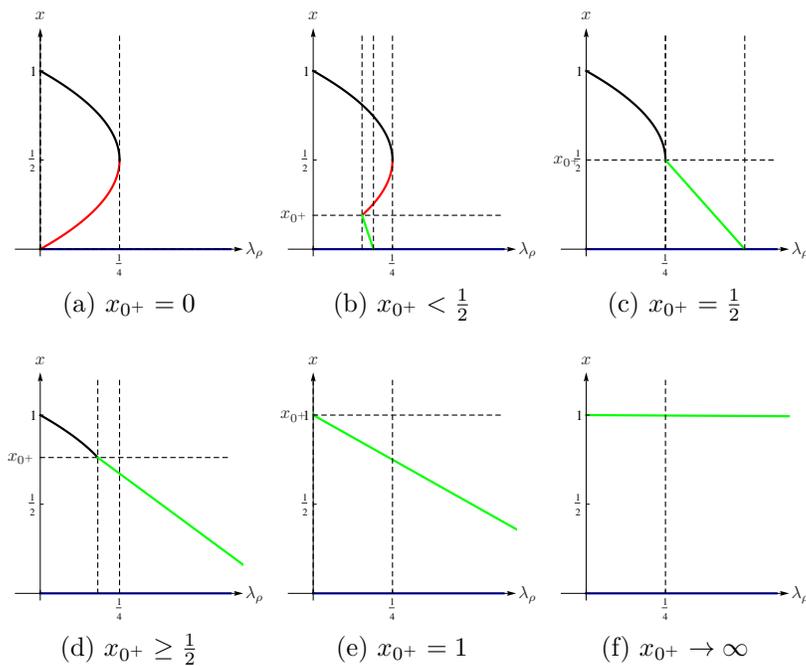


FIGURE 4.14. Diagrammes de bifurcation en fonction de  $\lambda_\rho$  du système avec récolte contrôlée linéairement pour  $x_0 \geq 0$

Comme pour le cas discontinu, le type et la stabilité des points fixes sont connus parfaitement lorsque ceux-ci ne se retrouvent pas sur les frontières  $x = x_{0\pm}$  : ceci suit de l'étude dans les premiers chapitres des sous-systèmes  $F_\phi$  avec

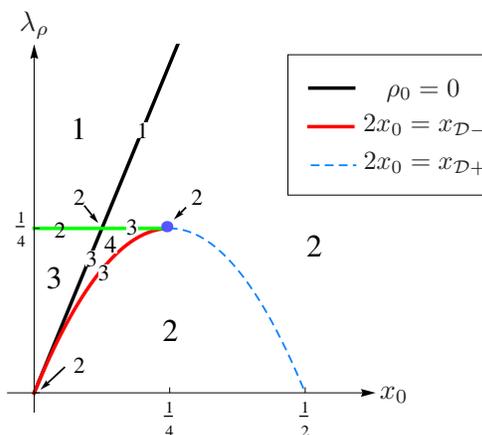


FIGURE 4.15. Diagramme de bifurcation des points singuliers du système à récolte linéaire par morceaux pour  $y = 0$  dans le plan  $(x_0, \lambda_\rho)$

changement de variable et  $F_\lambda$ . Mais contrairement au cas discontinu, le champ  $y$  est continu sur ses frontières, mais non dérivable, ce qui peut poser problème pour l'évaluation du jacobien, d'où l'idée de vouloir utiliser ultérieurement une régularisation plus fine. Toutefois, une simple analyse des trajectoires dans le voisinage d'un point fixe se trouvant sur la frontière permet de décrire la stabilité asymptotique de ce point. Nous étudierons en détail la stabilité des points fixes et les bifurcations avec le cas général  $\lambda_0 \geq 0$  de la fonction de récolte affine par morceaux à la prochaine section.

#### 4.5. ÉTUDE DU SYSTÈME AVEC RÉCOLTE DE PROIE AFFINE PAR MORCEAUX

Dans le cas où  $x_0 > \sigma > 0$ , alors  $\lambda_0 > 0$  et nous avons une fonction de récolte de proie affine en (4.2.1). Pour notre système, après changement de variable (4.2.8),  $\lambda' > 0$ , et nous nous ramenons à un système avec approvisionnement de proie. Dans ce cas, contrairement à la récolte contrôlée linéairement, le système (4.0.1) contient les 3 régions avec  $F_0, F_\phi$  et  $F_\lambda$  puisque  $x_{0-} > 0$  afin d'adoucir davantage la région avec récolte constante  $F_\lambda$  et d'assurer un moratoire à la récolte dans le but de la préservation due au danger potentiel d'extinction d'une trop grande récolte. Aussi, ceci garantit que  $\left. \frac{d\eta_1(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0$ , ce qui semble plus réaliste.

### 4.5.1. Récolte de proie affine

Lorsque  $\lambda_0 > 0$  et  $\rho_0 < 0$ , nous ne pouvons pas utiliser le changement de variables au système (4.2.8) à proprement parler. Le changement de variable amène le système dans le 3<sup>e</sup> quadrant. L'étude de ce système révèle qu'il est similaire au cas du système avec approvisionnement étudié. Nous pourrions donc utiliser une récolte affine dans le cas  $\rho_0 < 0$ .

En effet, en étudiant le sous-système  $F_\phi$  pour  $\eta_1$  affine avec  $\lambda_0 > 0$  définie en (4.2.1), lorsque  $\rho_0 \leq 0$ , nous obtenons

$$\dot{x} = \rho_0 x - \rho x^2 - yp(x) + \lambda_0 \quad \forall x > 0, y \geq 0, \quad (4.5.1)$$

et  $\dot{x} = \lambda_0 > 0$  pour  $x = 0$ . Comme pour le système avec approvisionnement, nous avons au plus deux points fixes  $\mathcal{A}_\phi = (x_{\mathcal{D}^+}, 0)$  et  $\mathcal{M}_\phi = (x_*, y_*)$  où  $y_* = \frac{\rho_0 x_* - \rho x_*^2 + \lambda_0}{\delta}$  ayant la même stabilité pour des paramètres semblables.

Nous nous abstenons ici d'en faire une étude complète puisque le cas  $\rho_0 \leq 0$  est moins intéressant en pratique étant donné la forme abrupte de la récolte de transition du système  $F_\phi$ . Dans le cas où  $\rho_0 \rightarrow -\infty$  ou très négatif, c'est-à-dire  $\sigma \rightarrow 0$ , le système devient équivalent au système discontinu. Toutefois, contrairement au cas  $\lambda_0 = 0$ , ce système demeure applicable même si  $\rho_0 \leq 0$  puisqu'il y a la présence de points fixes attractifs ou d'au plus un cycle attractif dans le premier quadrant ouvert. Les seules valeurs de paramètres où ce système devient dangereux, comme à la section 4.4.1, est lorsque  $\rho_0 \rightarrow -\infty$  et  $x_0 = 0$ , ce qui nous donne le système avec récolte constante appliquée réalistement qui mène aux résultats 2.8.1 du chapitre 2.

Encore une fois, dans le cas où  $\rho_0 > 0$ , le changement de variables dans le système (4.2.8) de la section 4.2 est possible et nous nous ramenons donc à un système avec approvisionnement constant étudié complètement à la section 4.3. Avec l'étude du système à récolte affine complète, ceci nous permet d'obtenir le sous-système  $F_\phi$  restreint à la région  $x \in ]x_{0-}, x_{0+}[$  pour étudier le système (4.0.1) à récolte contrôlée (4.0.3) pour  $\sigma \in ]0, x_0]$ .

### 4.5.2. Étude du système avec récolte contrôlée

Le but d'étudier séparément les types de fonction de récolte contrôlée est que les diagrammes de bifurcation des types discontinu et linéaire peuvent s'obtenir

facilement en terme de  $x_0$  et  $\lambda_\rho$  puisque  $\sigma$  s'obtient en terme de  $x_0$ . Et comme le montre la figure 4.2, le type affine se trouve entre les deux autres en terme du paramètre  $\sigma$ , et donc nous voulons extrapoler les diagrammes de bifurcation à partir de ceux des autres. De ce fait, afin de bien étudier toutes les possibilités de couples de paramètres  $(x_0, \sigma)$ , nous allons étudier le système avec récolte affine par morceaux pour  $\sigma = kx_0$  tel que  $k \in ]0, 1[$ . Évidemment, le cas  $k = 0$  correspond à la fonction discontinue et  $k = 1$  correspond à la fonction linéaire par morceaux. Ainsi, nous avons que  $x_{0-} = x_0 + \sigma = (1 - k)x_0 > 0$  et  $x_{0+} = (1 + k)x_0$  pour  $k \in ]0, 1[$ , et donc

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq (1 - k)x_0, \\ \frac{\lambda(x + (k - 1)x_0)}{2kx_0} & \text{si } (1 - k)x_0 < x < (1 + k)x_0, \\ \lambda & \text{si } x \geq (1 + k)x_0. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Nous avons donc la présence des trois sous-systèmes disjoints  $F_0, F_\phi, F_\lambda$  dans le système (4.0.1). Ceci assure que le point  $\mathcal{O}$  est toujours isolé et présent avec sa séparatrice  $W^s(\mathcal{O})$ .

**Remarque 4.5.1.** *Pour  $x_0 > 0$ , en terme de  $\sigma < x_0$ , il y a une transition lorsque la récolte passe d'affine à linéaire, et ceci lorsque  $\sigma = x_0$ . À ce point, les points simples  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}_\phi$  qui se trouvent dans le 2<sup>e</sup> quadrant, donc inexistant pour le système, se fusionnent pour former le point du système avec récolte linéaire  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\phi$ . Mais puisque le point  $\mathcal{O}_\phi$  existe seulement dans le système  $F_\phi$ , ce point n'existe jamais dans le système complet, d'où seulement une transition et la formation d'un point de multiplicité 1.*

#### 4.5.2.1. Analyse des points fixes

Les portraits de phase sur  $y = 0$  avec le graphique des fonctions  $g(x)$  et  $\eta_1(x)$  de (4.0.3) sont semblables à ceux du tableau de figures 4.12 à l'exception que le seuil de transition de récolte  $x_{0-}$  est strictement positif. Pour toute valeur de  $\sigma = kx_0$  pour  $0 < k < 1$ , nous pouvons nous ramener à chacune des figures de 4.12 et obtenir les mêmes points fixes et portraits de phase sur  $y = 0$  pour une valeur de seuil de récolte maximale  $x_{0+}$  identique. Les figures des cas  $\rho_0 \leq 0$  sont ramenées aux figures du cas  $x_{0+} < x_{\mathcal{D}-}$  puisque  $x_{0-} > 0$ . Cependant, il y a l'exception où  $x_{0-} \geq 1$  (voir figure 4.16). Dans le cas où  $x_{0-} = 1$  nous avons la formation d'un point de transition de multiplicité 1  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\phi$ , qui pouvait être obtenu dans le système avec récolte linéaire par morceaux dans la limite où

$x_0 \rightarrow \infty$ . Pour  $x_{0-} \geq 1$ , nous obtenons ainsi le même résultat que le système discontinu pour  $x_0 \geq 1$  à l'exception d'une récolte plus douce pour  $x \in [x_{0-}, x_{0+}]$  (voir proposition 3.2.1).

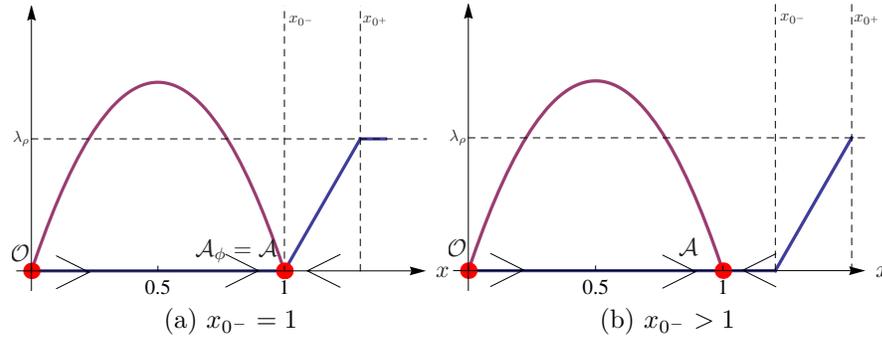


FIGURE 4.16. Graphiques de  $g(x)$  et  $\eta_1(x)$  affine par morceaux pour  $0 < \sigma < x_0$  et différents  $x_0$

Nous cherchons explicitement les valeurs de  $x$  tel que  $g(x) = \eta_1(x)$  pour obtenir les points fixes de manière générale pour  $k \in ]0, 1[$ . Pour la zone de transition  $x_{0-} < x < x_{0+}$ , nous utilisons la définition de la récolte affine

$$\begin{aligned}
 g(x) = \eta_1(x) &\Leftrightarrow \frac{\lambda(x + (k-1)x_0)}{2kx_0} = \rho x(1-x) \\
 &\Leftrightarrow \lambda_\rho = \frac{2kx_0x(1-x)}{(k-1)x_0 + x} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{2kx_0 - \lambda_\rho + \sqrt{(\lambda_\rho - 2kx_0)^2 - 8kx_0^2\lambda_\rho(k-1)}}{4kx_0}.
 \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Nous obtenons une dépendance explicite en  $x_0, \lambda_\rho, k$ . Le changement de variables est valide pour  $\rho_0 > 0$ , et la limite est en

$$\rho_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_\rho = 2kx_0. \tag{4.5.4}$$

Contrairement au cas  $k = 1$ , ceci n'est pas une bifurcation pour notre système, car il n'y a pas changement de stabilité ou du nombre de points fixes. Toutefois, comme pour  $k = 1$ , à la limite lorsque  $k \rightarrow 0$ , soit lorsque  $x_0 = 0$ , on a aussi une bifurcation. Dans ce cas, nous retrouvons exactement la remarque 3.2.1 puisque le système devient discontinu à ce point. Nous avons la formation des points  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  ou  $\mathcal{A}_{\lambda,\phi}$  si  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et lorsque

$$x_{0+} = x_{\mathcal{D}\pm} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_\rho}}{2(1+k)} \tag{4.5.5}$$

et nous avons le point de multiplicité trois  $\mathcal{D}_\phi$  lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2(1+k)}$ . Nous avons la transition du point  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\phi$  lorsque

$$x_{0-} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{1-k}. \quad (4.5.6)$$

Similairement au cas linéaire ( $k = 1$ ), nous traçons les diagrammes de bifurcation en suivant les mêmes points pour de petites et grandes valeurs de  $k$  aux figures 4.17 et 4.18 en fonction de  $x_0$  et  $\lambda_\rho$  respectivement. Ceci donne le diagramme de bifurcation pour ces deux paramètres et les points fixes sur  $y = 0$  du système avec récolte affine par morceaux pour  $k \in ]0, 1[$  à la figure 4.17.

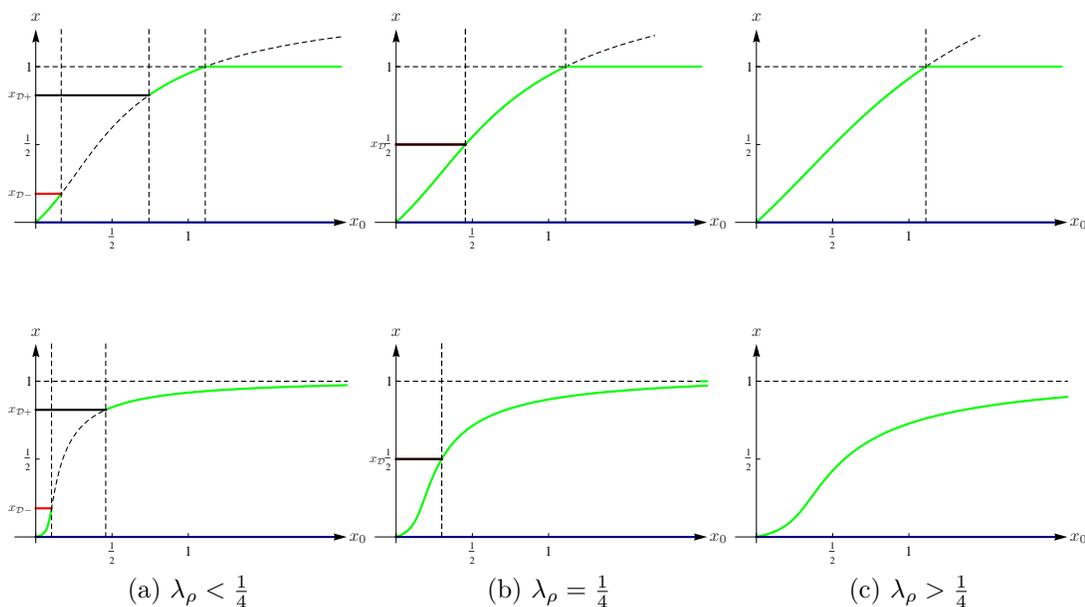


FIGURE 4.17. Diagrammes de bifurcation des points fixes sur  $y = 0$  en fonction de  $x_0$  du système à récolte affine par morceaux pour  $\lambda_\rho \geq 0$  et  $\sigma = hx_0$  pour  $h = 0.1$  (haut) et  $h = .78$  (bas)

Donc, nous pouvons rassembler à la figure 4.20 les diagrammes de bifurcation des points fixes sur  $y = 0$  des systèmes discontinus ( $\sigma = 0$ ) et affines par morceaux ( $\sigma = kx_0$  pour  $k \in ]0, 1[$ ) des figures 3.10, 4.15 et 4.19. Nous retrouvons également les bifurcations  $\mathcal{CN}^\pm$  ou  $\mathcal{CN}$  selon la valeur de  $\delta$  lorsque  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ . Nous obtenons les régions de l'espace  $(x_0, \sigma, \lambda_\rho)$  pour  $x_0$  et  $\sigma$  appartenant au domaine de la figure 4.2 pour que  $x_{0-} \geq 0$ . Les points se trouvant dans chacune des régions ainsi que leur stabilité sur  $y = 0$  peuvent être résumés dans un tableau similaire au tableau 3.1.

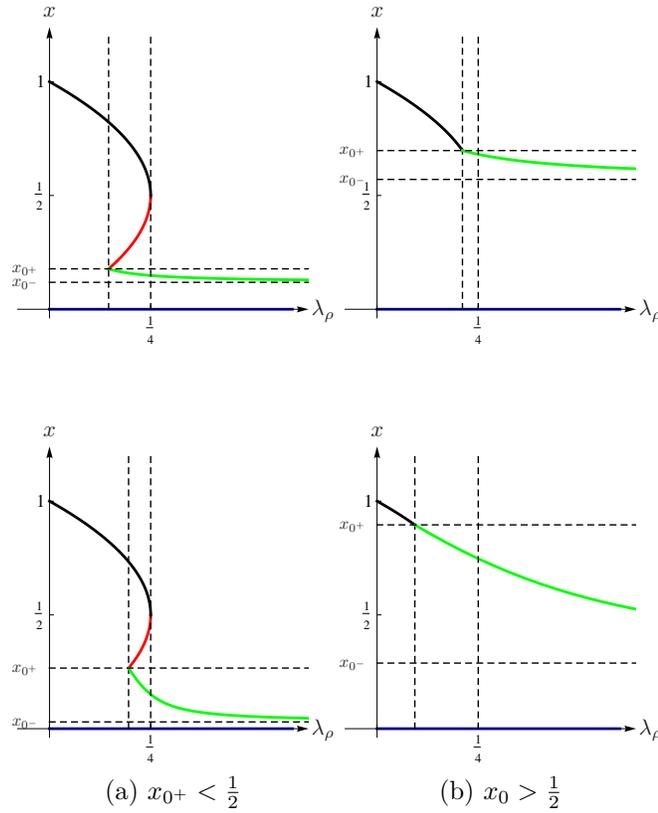


FIGURE 4.18. Diagrammes de bifurcation en fonction de  $\lambda_\rho$  du système à récolte affine par morceaux pour  $x_0 > 0$  et  $\sigma = hx_0$  pour  $h$  petit (haut) et grand (bas)

Dans la région  $y > 0$ , un seul point fixe peut s'y trouver, soit  $\mathcal{M}$  dans  $F_0$  ( $0 < x_* \leq x_{0-}$ ), soit  $\mathcal{M}_\phi$  dans  $F_\phi$  ( $x_{0-} \leq x_* \leq x_{0+}$ ) ou soit  $\mathcal{M}_\lambda$  dans  $F_\lambda$  ( $x_* \geq x_{0+}$ ). Lorsque  $\delta = p(x_{0\pm})$ , le point à l'intérieur du premier quadrant traverse les nouvelles régions de récolte. En particulier, lorsque  $\delta = p(x_*)$ , nous avons que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\phi$ , et lorsque  $\delta = p(x_{0+})$ , nous avons que  $\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\lambda$ . Puisque la multiplicité reste la même, il s'agit d'une transition.

Les positions relatives de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_\phi$ ,  $\mathcal{M}_\lambda$  sont résumées à (4.3.17). Selon la valeur de  $\delta$  et de la région du sous-système, ce point fixe peut former via une bifurcation transcritique avec les points de  $y = 0$  un point de multiplicité supérieure. Nous connaissons la nature et stabilité de chacun de ces points pour des valeurs de  $x \notin \{x_{0-}, x_{0+}\}$ . Seule la stabilité des points fixes à  $x = x_{0-}$  ou  $x = x_{0+}$  reste à étudier.

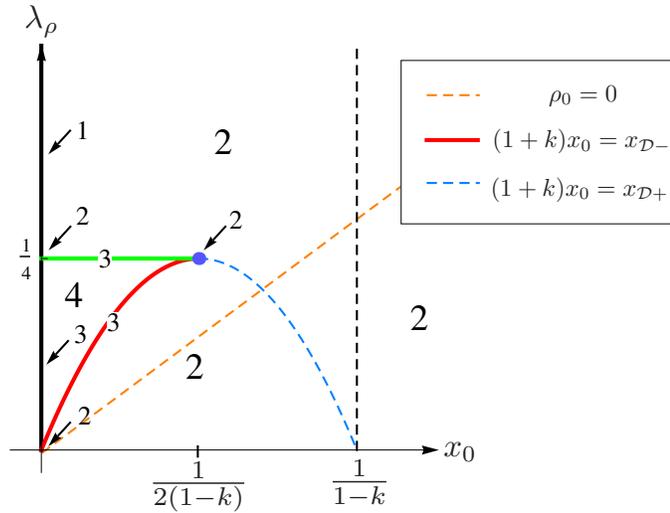


FIGURE 4.19. Diagramme de bifurcation des points singuliers sur  $y = 0$  du système à récolte affine par morceaux pour  $y = 0$  et  $\sigma = kx_0$  tel que  $k \in ]0, 1[$  dans le plan  $(x_0, \lambda_\rho)$

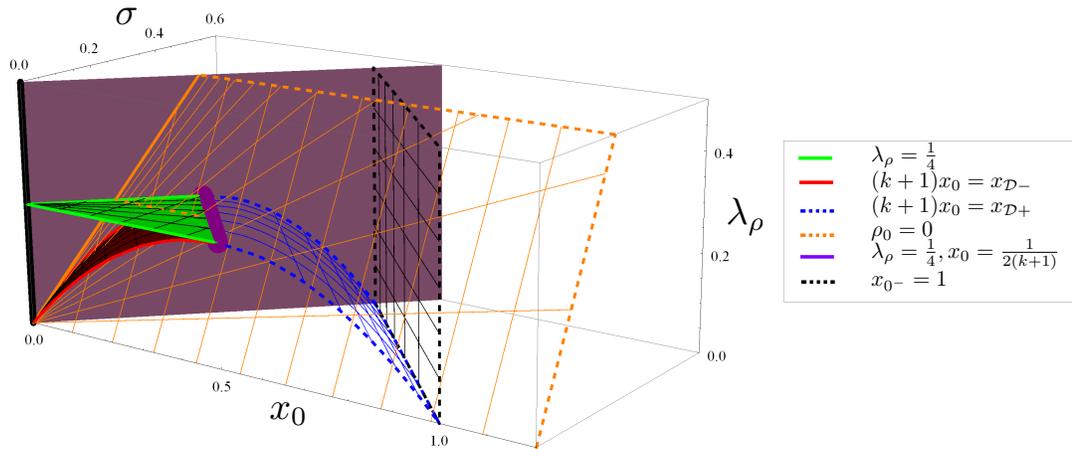


FIGURE 4.20. Diagramme de bifurcation des points singuliers sur  $y = 0$  du système à récolte affine par morceaux pour  $y = 0$  et  $\sigma = kx_0$  tel que  $k \in [0, 1]$  dans l'espace  $(x_0, \sigma, \lambda_\rho)$

En particulier, pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{O}_\lambda}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}-}$ , alors  $x_{0+} = x_*$  et nous avons la formation du point fixe de multiplicité 3

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda,\phi}}} := (x_{0+} = x_{\mathcal{D}-}, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}} = \mathcal{O}_{\lambda,\phi}, \quad (4.5.7)$$

et pour  $\lambda_\rho = \frac{1}{4}$ , lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{D}}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}}$ , nous avons la formation du point fixe de multiplicité 4

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}} := \left( x_* = \frac{1}{2}, 0 \right) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}_\phi, \quad (4.5.8)$$

ainsi que le point de transition de multiplicité 2 pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{A}_\lambda}$  et  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}+}$

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda, \phi}} := (x_{0+} = x_{\mathcal{D}+}, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}} = \mathcal{A}_{\lambda, \phi}. \quad (4.5.9)$$

Lorsque  $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$  et  $x_{0-} = 1$ , nous avons le point de transition de multiplicité 2

$$\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}}} := (x_{0-} = 1, 0) = \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}. \quad (4.5.10)$$

Pour voir la position relative des points  $\mathcal{M}, \mathcal{M}_\phi, \mathcal{M}_\lambda$ , nous pouvons tracer la courbe paramétrique  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  pour  $0 < \delta < \infty$  définie par morceaux par rapport aux frontières  $x = x_{0-}$  et  $x = x_{0+}$  séparant les sous-systèmes (voir figure 4.21). Pour différentes valeurs de  $x_0$  et  $\sigma = kx_0$  pour  $k \in ]0, 1]$ , nous obtenons différents positionnement des points fixes sur  $y = 0$  et du point à l'intérieur du premier quadrant (ou même le 2<sup>e</sup>). Les lignes pointillées et les points gris correspondent à la position de référence des points fixes absents dus à la position de  $x_{0-}$  et  $x_{0+}$ .

Cette courbe  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  est exactement celle de la nullcline  $\dot{x} = 0$

$$y = f_{\eta_1}(x) = \frac{\rho x(1-x) - \eta_1(x)}{p(x)} \quad (4.5.11)$$

pour  $0 < x < \infty$ . Puisque  $\eta_1(x)$  est continue, alors  $f_{\eta_1}(x)$  est continue également contrairement à la nullcline de la récolte discontinue (voir figure 3.11). Cette courbe est l'amalgame des trois courbes de nullclines dans chacun des sous-systèmes, lesquelles s'intersectent à  $x = x_{0-}$  et  $x = x_{0+}$ . Avec les nullclines  $x = 0$  et  $x = x_*$ , nous pouvons déterminer typiquement le sens du flot pour notre système avec récolte contrôlée affine (voir figure 4.22). Pour différentes valeurs de  $x_0$  et  $\sigma$  comme à la figure 4.21, le flot serait semblable à celle de la figure 4.22 pour la nullcline  $y = f_{\eta_1}(x)$  identique aux courbes  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$ .

Avec l'analyse des points fixes propres à chacun des sous-systèmes et leur jacobien bien défini, nous connaissons la stabilité de chacun de ces points fixes, en particulier leur nature en fonction des paramètres  $\alpha, \beta, \delta, \lambda_\rho$  résumée aux chapitres et sections précédents. Nous retrouvons toutes les mêmes bifurcations locales également. En particulier, nous connaissons la position des séparatrices à chacun des points selon les valeurs des paramètres. Par exemple, dans le cas de la présence

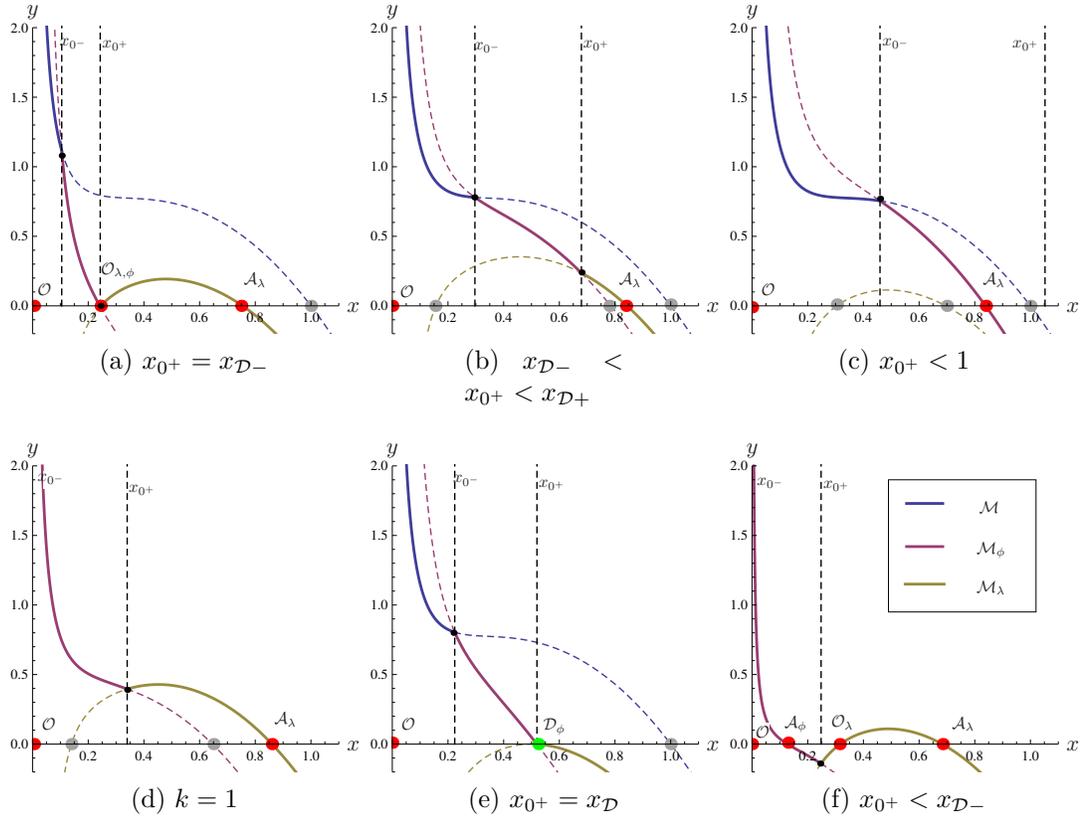


FIGURE 4.21. Courbes paramétrées  $(x_*(\delta), y_*(\delta))$  des positions possibles de  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$  pour  $\delta \in ]\delta_{\mathcal{O}}, \delta_{\mathcal{A}}[$  et points sur l'axe  $x$  pour différentes valeurs de  $\lambda_\rho \leq \frac{1}{4}$  et de  $x_0, \sigma > 0$

de 4 points fixes distincts sur  $y = 0$  pour la région de paramètre  $x_{0+} < x_{D-}$ , selon la valeur de  $x_*$ , nous avons alternance de points de selles et de nœuds (voir figure 4.12g). Leurs séparatrices peuvent se rejoindre au point fixe à l'intérieur du quadrant et former des régions délimitées par une « boucle » que nous reparlerons plus loin. Si  $x_* < p(x_{\mathcal{A}_\phi})$  tel que  $\mathcal{A}_\phi = (x_{\mathcal{A}_\phi}, 0)$ , alors nous obtenons les séparatrices comme à la figure 4.23.

Donc seule la stabilité des points aux frontières  $x = x_{0-}$  et  $x = x_{0+}$  reste à étudier. Cependant, notre système n'est pas dérivable à ces points, c'est-à-dire que le jacobien n'est pas bien défini puisque la dérivée à gauche n'est pas la même que la dérivée à droite. Pour la région du sous-système  $F_\phi$ , nous avons

$$\mathbf{Jac}(x, y) := \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x - yp'(x) - \lambda_1 & -p(x) \\ yp'(x) & -\delta + p(x) \end{pmatrix} \quad (4.5.12)$$

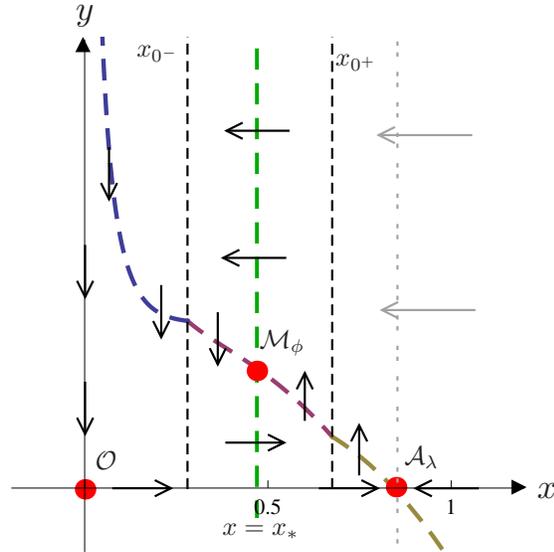


FIGURE 4.22. Les nullclines pour  $\delta \in ]0, \delta_{\mathcal{A}_\lambda}[$  et  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_{0+} \in ]x_{\mathcal{D}-}, x_{\mathcal{D}+}[$  déterminant les différentes régions du portrait de phase

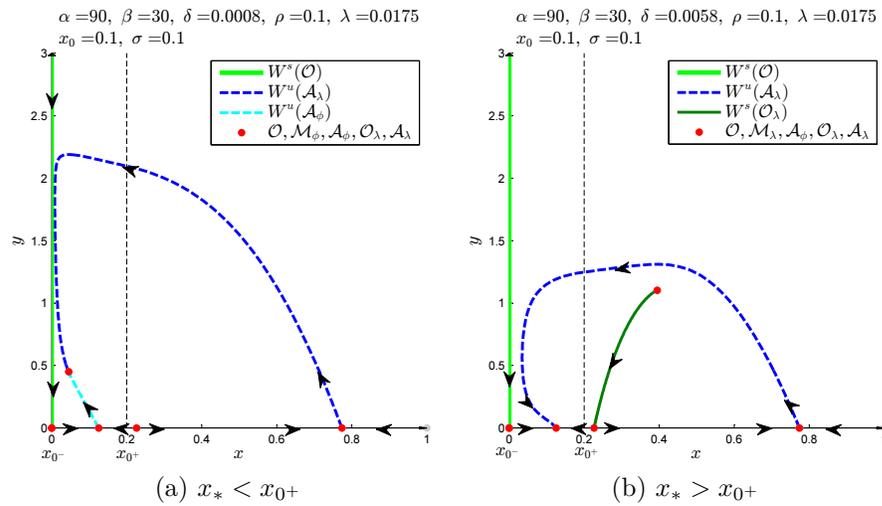


FIGURE 4.23. Portraits de phase du système avec récolte affine par morceaux avec séparatrices pour 4 points fixes sur  $y = 0$

En particulier, pour  $\mathcal{M}_\phi$ , nous avons

$$\text{Jac}(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho x_* - \frac{\delta^2 y_*(\beta x_* + 2)}{x_*^3} - \frac{\lambda}{2kx_0} & -\delta \\ \frac{\delta^2 y_*(\beta x_* + 2)}{x_*^3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5.13)$$

Seul le terme  $-\frac{\lambda}{2kx_0}$ , est différent du jacobien des sous-systèmes  $F_0$  et  $F_\lambda$ . Pour analyser la stabilité asymptotique des points  $x = x_{0^\pm}$ , nous utilisons une méthode

*ad hoc.*

Pour le point fixe à l'intérieur du premier quadrant strictement de multiplicité 1, lorsque  $x_* = x_{0-}$ , nous avons que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\phi$  et lorsque  $x_* = x_{0+}$ , nous avons que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\phi$ . Toutefois, grâce à la continuité de  $\eta_1(x)$ , nous avons évidemment que  $\eta_1(x_{0\pm}^-) = \eta_1(x_{0\pm}^+) = \eta_1 \geq 0$ , c'est-à-dire que le taux de récolte est constant pour des coordonnées dans le voisinage du point fixe. Ainsi, nous pouvons nous référer à l'étude du chapitre 1 ou 2 selon la valeur de  $\lambda \geq 0$  afin de connaître la stabilité du point fixe. Par exemple, pour des valeurs de paramètre dans  $E_{\mathcal{H}}$ , le point fixe est un anti-selle attractif dans chacun des sous-systèmes autour dans le voisinage de  $x = x_{\mathcal{D}-}$  ou  $x = x_{\mathcal{D}+}$ , et donc le sera à la frontière. Typiquement, la nature et la stabilité de  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\phi$  sont identiques à celles de  $\mathcal{M}$  étudiées au chapitre 1 et celles de  $\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\lambda$  sont identiques à celles de  $\mathcal{M}_\lambda$  étudiées au chapitre 2. Si les paramètres se trouvent sur une courbe de bifurcation  $\mathcal{H}$  ou  $\mathcal{N}_\pm$ , une perturbation de  $\lambda$  change la nature du point fixe. Nous avons ce résultat puisqu'il s'agit d'un point de transition gardant donc la même multiplicité. La même analyse peut être faite pour les points de transition  $\mathcal{A}_{\lambda,\phi}, \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{\lambda,\phi}}}, \mathcal{A} = \mathcal{A}_\phi$  et  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}}}$  : ceux-ci gardent donc la même nature et stabilité asymptotique que les points  $\mathcal{A}_\lambda, \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_\lambda}}, \mathcal{A}$  et  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$  déjà étudiés.

Pour les autres points se trouvant sur  $y = 0$ , l'étude des figures du tableau 4.12 et 4.16 montre que  $y = 0$  forme une séparatrice et que le point  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  (ou  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda,\phi}}}$ ) est semi-attractif et que le point  $\mathcal{D}_\phi$  (ou  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$ ) est attractif sur  $y = 0$ . La stabilité et la nature de ces points formés lors des bifurcations sont étudiées à la prochaine sous-section.

#### 4.5.2.2. Bifurcations locales

Les bifurcations locales étudiées aux premiers chapitres restent encore une fois les mêmes. De nouvelles bifurcations arrivent dans le système le long des droites  $x = x_{0\pm}$  puisqu'ailleurs, les bifurcations ont déjà été étudiées. Pour  $\sigma = kx_0 > 0$  et  $k \in ]0, 1]$ , ces bifurcations sont évidemment équivalentes à celles du système discontinu tout comme leur preuve.

**Théorème 4.5.1.** *Pour  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 \neq \frac{x_*}{k+1}$  ( $\delta \neq p(x_{0+})$ ), il y a une bifurcation de col-nœud lorsque*

$$(k+1)x_0 = x_{\mathcal{D}-} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda_\rho}}{2(1+k)} \quad (4.5.14)$$

À cette valeur, le point fixe  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  de multiplicité 2 est un col-nœud attractif si  $x_0 < \frac{x_*}{k+1}$ , et répulsif si  $x_0 > \frac{x_*}{k+1}$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire au théorème 3.2.1. La droite  $y = 0$  forme la variété centre de  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  pour un flot selon la figure 4.12i. Dans la région  $y > 0$ , sa variété stable est formée par la variété stable  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  du point de selle  $\mathcal{O}_\lambda$  si  $x_{0+} < x_*$ . Dans l'autre cas, sa variété instable est formée par la variété instable  $W^u(\mathcal{A}_\phi)$  du point de selle  $\mathcal{A}_\lambda$  si  $x_{0+} > x_*$ .  $\square$

Toutefois, nous avons le résultat suivant

**Théorème 4.5.2.** *Pour  $0 < \lambda_\rho < \frac{1}{4}$ , il y a une bifurcation du col nilpotent lorsque*

$$\begin{cases} (k+1)x_0 = x_{\mathcal{D}^-} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda_\rho}}{2(1+k)} \\ x_0 = \frac{x_*}{k+1} \Leftrightarrow \delta = p(x_{0+}) = \delta_{\mathcal{O}_\lambda} \end{cases} \quad (4.5.15)$$

À cette valeur, le point fixe  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda,\phi}}}$  de multiplicité 3 est un col nilpotent de codimension supérieure ou égale à 2.

**Idée de preuve.** Nous obtenons ce résultat de la même façon que le col nilpotent  $\mathcal{CN}$  du chapitre 2. Dans ce cas, nous obtenons exactement les portraits de phase des figures 2.26 symétriquement inversés par l'axe  $y = 0$  et pour un flot allant en sens inverse. Dans ce cas, les séparatrices des points  $\mathcal{O}_\lambda$  et  $\mathcal{A}_\phi$  se confondent sur la variété centre  $y = 0$ , mais leur portion dans la région  $y > 0$  continue de chaque côté de  $x = x_{0+}$ . Les cas de multiplicité supérieure restent à calculer explicitement.

Nous avons également la bifurcation suivante

**Théorème 4.5.3.** *Il y a bifurcation de fourche supercritique de codimension 2 lorsque*

$$\begin{cases} \lambda_\rho = \frac{1}{4}, \\ x_0 = x_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2(k+1)}. \end{cases} \quad (4.5.16)$$

et si  $x_0 \neq \frac{x_*}{k+1}$ , c.-à-d.  $\delta \neq \delta_{\mathcal{D}}$ . À ces valeurs, le point  $\mathcal{D}_\phi$  est de multiplicité 3. Le point (4.5.16) est à la jonction des bifurcations de col-nœud  $\mathcal{CN}^\pm$  de codimension 1. Cette bifurcation est définie par  $\mathcal{F}_+$  si  $x_0 > \frac{x_*}{k+1}$ , formant ainsi un point de selle résultant de la fusion des points de selle  $\mathcal{A}_\phi, \mathcal{A}_\lambda$  et du nœud répulsif  $\mathcal{O}_\lambda$ . Elle est définie par  $\mathcal{F}_-$  si  $x_0 < \frac{x_*}{k+1}$ , formant ainsi un nœud attractif résultant de la fusion

des nœuds attractifs  $\mathcal{A}_\phi, \mathcal{A}_\lambda$  et du point de selle  $\mathcal{O}_\lambda$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire au théorème 3.2.2. Nous connaissons la nature de chacun des 3 points fixes  $\mathcal{A}_\phi, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  lorsque  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et  $x_0 < x_{\mathcal{D}-} < \frac{1}{2}$  et leurs variétés invariantes. Par la figure 4.12d, nous voyons que les points  $\mathcal{A}_\phi$  et  $\mathcal{A}_\lambda$  sont attractifs sur  $y = 0$ , tandis que  $\mathcal{O}_\lambda$  est répulsif. Si  $x_* < x_{0+}$  (resp.  $x_* > x_{0+}$ ), alors les trois points sont répulsifs (resp. attractifs) le long de l'axe  $y = 0$  et au point de bifurcation, la droite  $y = 0$  forme la variété stable, et la séparatrice  $W^u(\mathcal{A}_\phi)$  forme la variété instable (resp. la séparatrice  $W^s(\mathcal{A}_\phi)$  forme l'autre variété stable) pour  $y > 0$  (voir figure 2.4).  $\square$

Mais encore une fois, lorsque le point fixe  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$  à l'intérieur du 1<sup>er</sup> quadrant traverse  $y = 0$ , nous obtenons le résultat suivant

**Conjecture 4.5.1.** *Il y a bifurcation de « col-nœud topologique » de codimension supérieure ou égale à 3 lorsque*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \lambda_\rho = \frac{1}{4}, \\ x_0 = x_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2(k+1)}, \\ x_0 = \frac{x_*}{k+1} \Leftrightarrow \delta = p(x_{0+}) = \delta_{\mathcal{D}}. \end{cases} \quad (4.5.17)$$

À ces valeurs, le point  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$  est de multiplicité 4.  $\mathcal{F}$  est une limite du lieu de la bifurcation du col nilpotent  $\mathcal{CN}$  de codimension supérieure ou égale à 2 résultant de la fusion des points  $\mathcal{A}_\phi, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  et  $\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_\lambda$ . Il est asymptotiquement attractif dans le premier quadrant.

Bien que la théorie ne soit pas trop détaillée sur ce type de bifurcation, nous pouvons comparer le point  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$  à la fusion du nœud attractif et du col nilpotent du cas avec récolte constante. Dans le premier quadrant, il a la forme d'un nœud dégénéré attractif, tandis que dans le 4<sup>e</sup> quadrant, il a la forme d'un col-nœud (voir figure 4.24). Cela ressemble à une bifurcation de fourche par rapport au flot sur  $y = 0$  dans le sens que  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$  résulte d'un autre point de vue de la fusion entre le nœud attractif  $\mathcal{A}_\phi$ , le col-nœud répulsif  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_\lambda}}$  et le point de selle  $\mathcal{A}_\lambda$ . Sa codimension doit suivre celle du col nilpotent  $\mathcal{CN}$  qui est la partie  $x > x_{0+}$  décrite à la section 2.7 plus 1.

Le système (4.0.1) avec fonction de récolte contrôlée (4.0.3) se divise en trois sous-systèmes, soient  $F_0$  représenté par le système sans récolte,  $F_\phi$  rattaché au système avec approvisionnement constant, et  $F_\lambda$  représenté par le système avec

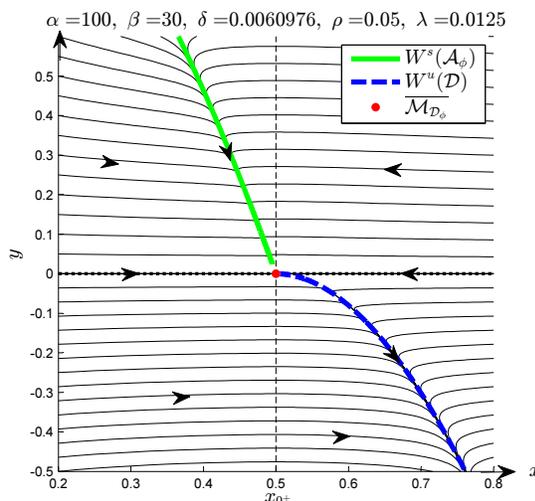


FIGURE 4.24. Portrait de phase du système avec fonction de récolte affine par morceaux dans le voisinage du point  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{D}_\phi}}$  au point de bifurcation  $\mathcal{F}$  de codimension 3

récolte constante. Étant donné l'étude complète de chacun de ces systèmes des chapitres et sections précédentes, seul le sous-système  $F_\lambda$  possède des bifurcations globales en lui-même et de codimension supérieure à 1. Évidemment, les cycles limites des deux premiers sous-systèmes pourraient comme pour le système discontinu se déformer par rapport à leur position dans chacune des régions du premier quadrant et former d'autres cycles. Également, les lignes de courant dans chacune des régions pourraient se rejoindre et former des cycles ou « boucles » (défini en 4.5.1) dans le premier quadrant, comme nous l'observons à la figure 4.23.

**Définition 4.5.1.** *Une boucle est une réunion de trajectoires et de points singuliers qui forment la frontière d'une région invariante par le flot.*

En effet, dans le cas de la présence de 4 points fixes distincts sur  $y = 0$  (4.12g), selon la valeur de  $x_*$ , les séparatrices des points de selle peuvent rejoindre des nœuds sur  $y = 0$ . Puisque les points sont reliés sur  $y = 0$ , alors ceci forme une boucle contenant les points fixes  $\mathcal{A}_\phi, \mathcal{O}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda$  et les séparatrices ou lignes de courant les reliant. Cette boucle peut contenir le point  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$ . Ce dernier peut également fusionner avec les points sur  $y = 0$ , tout comme ceux-ci peuvent fusionner entre eux comme à la bifurcation de col-nœud au point  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  ou  $\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\lambda,\phi}}}$  (figure 4.12i).

Il ne peut donc y avoir de boucles hétérocliniques à proprement parler (comme à la bifurcation  $\mathcal{BH}$  du chapitre 2) à cheval sur les différents sous-systèmes dû à

la présence du point  $\mathcal{A}_\phi$ . Il peut seulement y avoir strictement une boucle hétéroclinique dans le sous-système  $F_\lambda$  par  $\mathcal{BH}$ . Toutefois, nous avons une forme de « bifurcation de boucle » lorsque  $x_{0+} = x_{\mathcal{D}-}$  : une perturbation positive de  $x_{0+}$  forme un cycle limite de la même manière qu'à une bifurcation hétéroclinique.

Une étude complète de ces bifurcations globales reste à faire pour le système avec récolte de proie contrôlée affine par morceaux. Des tests numériques plus poussés nous permettraient peut-être de trouver d'éventuelles solutions périodiques dans le premier quadrant formées de parties de cycle limites ou de trajectoires dans chacune des régions.

#### 4.6. PORTRAIT DE PHASE DU SYSTÈME AVEC RÉCOLTE CONTRÔLÉE ET INTERPRÉTATION BIOLOGIQUE

Avec l'étude du système (4.0.1) avec récolte contrôlée affine par morceaux (4.0.3) pour un seuil  $x_0$  et un pas  $\sigma = kx_0$  pour  $k \in ]0, 1]$ , nous pouvons maintenant étudier l'ensemble des portraits de phase possibles. Nous voulons donc visualiser l'effet d'une récolte contrôlée sur les portraits de phase du système sans récolte (figure 1.19) et du système avec récolte constante (figures de la section 2.8)

Également, pour toutes valeurs de paramètres, les diagrammes de bifurcation pour les systèmes  $F_0, F_\lambda$  et  $F_\phi$  restent les mêmes. Chacun de ces systèmes peut être observé séparément. Donc les trois portraits de phase peuvent être superposés de manière à les recoller le long des courbes  $x = x_{0-}$  et  $x = x_{0+}$ .

L'étude des conditions de survie se fait de la même manière. Nous voulons vérifier si nous avons atteint notre objectif et si notre choix de fonction de récolte contrôlée élimine les conditions d'extinctions des espèces. Évidemment, puisque  $\eta_1(0) = 0$ , la séparatrice  $W^s(\mathcal{O})$  et son point à l'origine enlève le flot traversant l'axe  $x = 0$ . Étant donné le résultat 2.8.1 stipulant, entre autre, que la séparatrice  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$  était une frontière aux régions d'extinction et de survie, nous voulons donc vérifier l'effet de l'introduction du point  $\mathcal{A}_\phi$  et de sa séparatrice sur le reste du portrait de phase.

Évidemment, nos portraits seront similaires à ceux du système discontinu, à l'exception d'être continus, plus lisses et, particulièrement, sans points fixes non



du système sans récolte (résultat 1.7.1).

Comme prévu, ce résultat est similaire au résultat 3.2.1 du système avec récolte de proie discontinu. Les différents portraits de phase sont similaires en terme de  $x_{0+}$  au lieu de  $x_0$ . Mais évidemment, le flot est continu et la région de récolte est beaucoup plus grande tout en assurant également la pérennité des espèces.

Soit la fonction de récolte affine par morceaux respectant les conditions (3.1.5). Pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  et un seuil  $x_{0+} > x_{\mathcal{D}-}$ , ceci permet d'obtenir un système avec le point  $\mathcal{O}$  et sa droite invariante  $x = 0$ , et le point  $\mathcal{A}_\phi$  ou  $\mathcal{A}_\lambda$ . Ce dernier joue le rôle du point  $\mathcal{A}$  dans le système sans récolte et sa séparatrice se dirige toujours vers  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$  ou un cycle stable  $\mathcal{C}^-$  (figures 4.32b, 4.32c, 4.32d, 4.33g, 4.34j). De même, lorsque nous avons 3 ou 4 points fixes sur  $y = 0$ , nous obtenons le résultat 4.6.1 en termes de régions de conditions initiales si  $\delta < p(x_{\mathcal{A}_\phi})$ , soit l'abscisse du point  $\mathcal{A}_\phi$  (ou  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$ ) (figure 4.33g). Cependant, lorsque  $\delta \geq p(x_{\mathcal{A}_\phi})$ , le système devient identique au système avec récolte constante et nous obtenons le résultat 2.8.1 (figures 4.32e, 4.32f). Pour  $\lambda_\rho \geq \frac{1}{4}$ , nous obtenons un résultat similaire au résultat 4.6.1 pour  $x_{\mathcal{A}_\phi} > 0$  et  $\delta < p(x_{\mathcal{A}_\phi})$  (figure 4.34j). Cependant, pour des valeurs de  $\delta \geq p(x_{\mathcal{A}_\phi})$ , nous avons extinction des prédateurs, mais survie des espèces à  $\mathcal{A}_\phi$  (figure 4.34i). Évidemment, pour  $\rho_0 \leq 0$ , nous obtenons toujours l'extinction des espèces ou des régions de conditions initiales selon le résultat 2.8.1 pour toutes valeurs de paramètres (figure 4.31).

Quant au pas de récolte  $\sigma$ , sa valeur reste au choix du récolteur par rapport au choix de la grandeur de la zone de transition de récolte moyennée : soit le récolteur préfère assurer un taux de récolte plus faible sur un plus grand intervalle de temps ( $\sigma$  grand), soit il préfère maximiser le taux de récolte, mais avoir à ajuster souvent son taux de récolte sur un court intervalle de temps ( $\sigma$  petit). Pour une fonction de récolte de proie respectant les conditions (3.1.5), une récolte de proie linéaire par morceaux ( $\sigma = x_0$ ) est utile pour  $\lambda_\rho < \frac{1}{4}$  petit puisque ceci assure une récolte non nulle en tout temps. Si  $\lambda_\rho > \frac{1}{4}$  est plus grand, forcément  $x_0$  et  $\sigma$  seront plus petits et une récolte affine par morceaux  $\sigma < x_0$  serait plus appropriée en allouant des temps de moratoire sur la récolte.

Encore une fois, nous voyons que les paramètres les plus importants pour le contrôle des régions de conditions d'extinction et de pérennité des espèces sont les paramètres  $x_0$  et  $\delta$  peu importe la valeur des autres paramètres. Le paramètre

$\delta$  donne explicitement la position du point fixe  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\phi/\mathcal{M}_\lambda$  dans le premier quadrant pouvant former l'ensemble  $\omega$ -limite des conditions initiales. Le paramètre  $\sigma$  quant à lui permet d'adoucir la discontinuité de  $x = x_0$ , mais aussi d'élargir la zone de récolte moyennée pour des fins économiques. Le système (4.0.1) avec récolte contrôlée affine par morceaux (4.0.3) respectant les conditions (3.1.5) est similaire au système sans récolte en terme de régions de conditions initiales propices à la pérennité des espèces (résultat 4.6.1). Cependant il a l'avantage économique du système avec récolte constante. À court terme, ce système pourrait ramener moins d'argent, mais à moyen et long terme, il est nettement avantageux, car il y a coexistence et récolte durable.

#### 4.7. APPLICATION DES FONCTIONS DE RÉCOLTE DE PROIE CONTRÔLÉE PLUS LISSES

Ainsi, nous voyons que les problèmes d'extinctions des espèces et de flot traversant l'axe  $x = 0$  peuvent être réglés par l'implémentation d'une fonction de récolte de proie contrôlée affine par morceaux respectant les conditions (3.1.5). Ce choix de fonction est optimal puisque l'analyse des points fixes et des bifurcations est simplifiée par un changement de variables ramenant le système au système à récolte constante négative qui a été étudié précédemment. Puisque la fonction de récolte est affine par morceaux, la résolution des équations est beaucoup plus simple. Il s'agissait donc de la forme la plus simple pour rendre continue la fonction de récolte discontinue (3.2.3). Toutefois une nouvelle analyse a dû être faite au voisinage des limites des sous-systèmes impliqués par la définition par morceaux de la fonction de récolte. Particulièrement, puisque  $\eta_1(x)$  affine par morceaux est  $C^0$ , elle est non dérivable aux seuils de récolte  $x = x_{0\pm}$ . Mais une analyse du voisinage de ces seuils nous a permis de comprendre le système dans ces régions. Cependant, la forme non dérivable de cette fonction peut la rendre irréaliste en terme d'application.

Une fonction de récolte plus réaliste serait donnée par une fonction analytique. Par exemple, afin de respecter les conditions (3.1.5), nous avons la fonction logistique (4.0.2). Cette fonction est dérivable partout et donc ne cause aucun problème sur  $\mathbb{R}^+$ . Ce type de fonction est également beaucoup plus près d'un modèle naturel qu'une fonction non analytique. Toutefois, l'analyse du système (4.0.1) avec cette fonction de récolte devient difficile puisque la résolution de l'équation  $I_0(x) = g(x) - \eta_1(x)$  se fait numériquement. En fait, tout calcul relié

au système ne peut que se faire numériquement, complexifiant l'analyse et l'obtention d'équations pour paramétrer nos courbes de bifurcations.

Des tests numériques montrent que la fonction de récolte logistique n'est pas différente de la fonction affine par morceaux par rapport au système (4.0.1). En comparant ces deux fonctions de récolte (voir figure 4.26), nous voyons évidemment que la fonction logistique est lisse aux points non dérivables de la fonction affine par morceaux. Mais lorsque nous regardons l'effet sur les portraits de phase, nous voyons qu'ils sont semblables (figure 4.27).

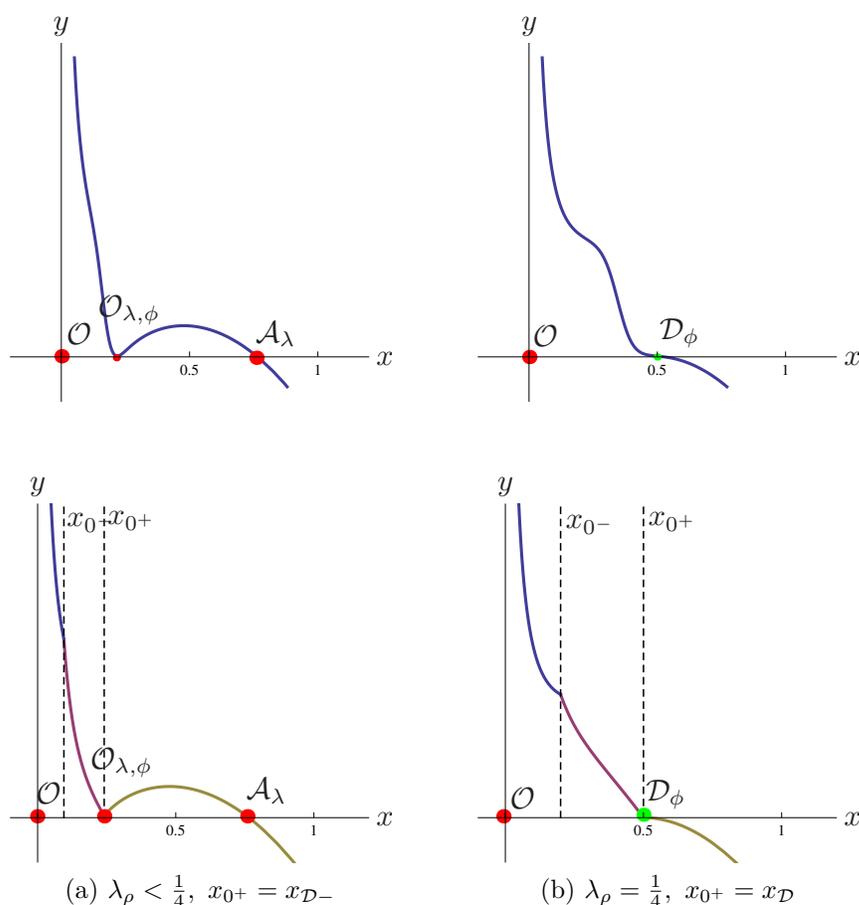


FIGURE 4.26. Comparaison des courbes de nullcline  $y = f_{\eta_1}$  entre la fonction de récolte logistique (haut) et affine par morceaux (bas)

Par exemple, à la figure 4.27, pour des valeurs de paramètre portant inévitable à l'extinction des espèces pour toutes conditions initiales (sauf sur  $W^s(\mathcal{O}_\lambda)$ ) pour le système avec récolte constante, la récolte contrôlée rend le système propice à la coexistence des espèces pour toutes conditions initiales identiquement au cas sans

récolte, mais en exerçant une récolte non nulle. De plus, les lignes de courant se ramènent toujours à la région de récolte non nulle  $x > x_{0-}$ . Cet exemple illustre parfaitement le but de ce mémoire.

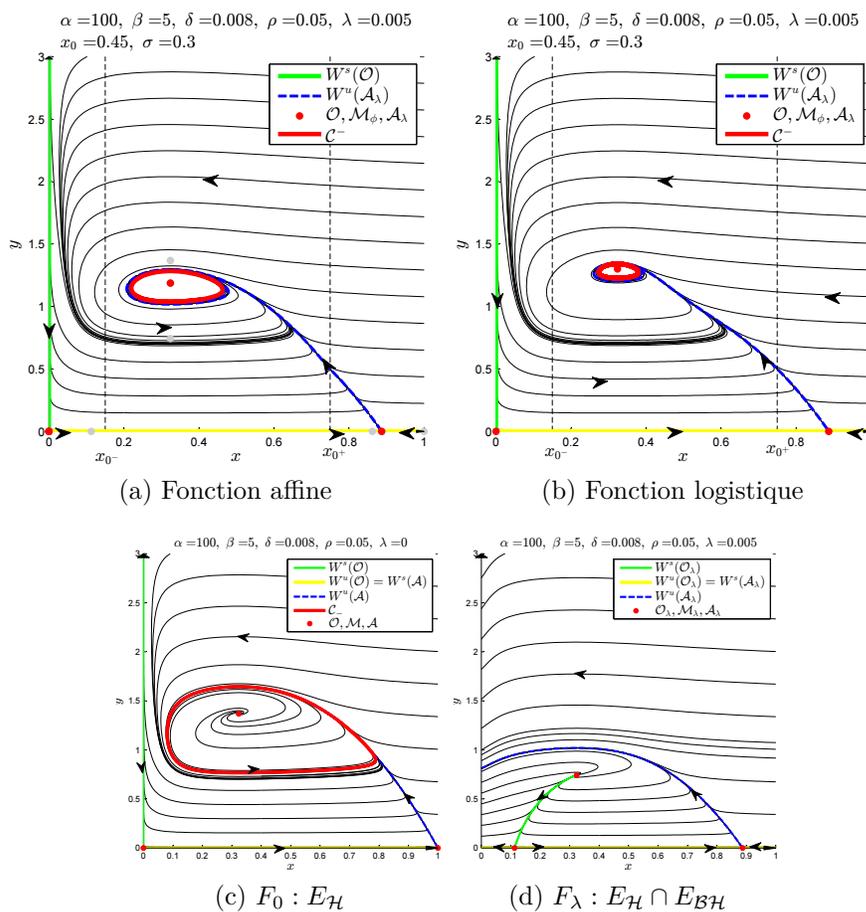


FIGURE 4.27. Comparaison des portraits de phase du système pour la fonction de récolte affine et la fonction logistique. En (d) on a extinction partout, et on n'a plus d'extinction en (a) et (b).

Puisque la fonction discontinue (3.2.2) n'est pas Lipschitz, nous ne pouvons appliquer le théorème d'existence et d'unicité des solutions. On pouvait aussi avoir des lignes de point fixes non isolés. Elle était toutefois suffisante pour obtenir des régions de coexistence des espèces comme le résultat 1.7.1. Nous avons donc le résultat suivant.

**Résultat 4.7.1.** *Toutes les fonctions de récolte de proies contrôlée  $C^{k \geq 1}$  respectant les conditions (3.1.5) et ayant la forme de la figure 4.30 appliquées au système (4.0.1) donnent le résultat 1.7.1 par rapport aux régions de conditions initiales du*

système sans récolte pour des valeurs de paramètres semblables.

Pour des valeurs de paramètres ne se trouvant pas sur des courbes de bifurcations, les portraits de phase du système avec récolte de proie affine par morceaux sont topologiquement équivalents aux portraits de phase d'un système avec fonction de récolte contrôlée de la forme de la figure 4.30, et donc selon le résultat 4.6.1, propices à la pérennité des espèces. La forme des lignes de courant et cycles limites pourrait changer, mais sans changer la forme topologique du portrait de phase. Similairement, si la fonction de récolte contrôlée a les formes de la figure 4.28, alors nous obtenons le même résultat que la récolte constante et il y a toujours danger d'extinction des espèces pour des zones de conditions initiales, et ce, pour toutes les valeurs de paramètres. Si la fonction de récolte contrôlée a les formes de la figure 4.29, alors nous obtenons les mêmes résultats que pour les systèmes avec ou sans la récolte constante et il peut y avoir danger d'extinction des prédateurs. Plus précisément, si  $\delta < p(x_{\mathcal{A}_\phi})$  où  $x_{\mathcal{A}_\phi}$  est l'ordonnée du point  $\mathcal{A}_\phi$  (ou  $\mathcal{O}_{\lambda,\phi}$  ou  $\mathcal{D}_\phi$ ), alors nous nous ramenons aux résultats 1.7.1 en termes des régions de conditions initiales et le système sera sécuritaire sous cette condition. Toutefois, si  $\delta \geq p(x_{\mathcal{A}_\phi})$ , alors nous retrouvons les résultats 2.8.1 en termes des régions de conditions initiales et il y a des régions de conditions initiales amenant l'extinction des espèces pour toutes valeurs de paramètres.

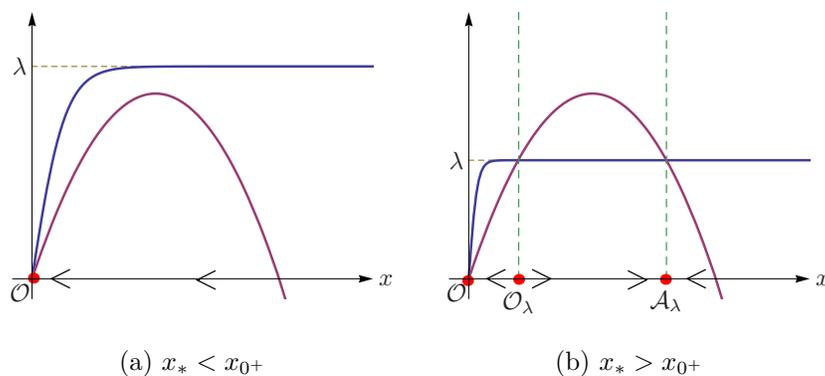


FIGURE 4.28. Fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1(x)$  dangereuse et favorable à l'extinction des espèces par rapport à  $g(x)$  amenant au résultat 2.8.1 pour différentes valeurs de paramètres

En particulier, les portraits de phase et l'analyse du système (4.0.1) avec une fonction de récolte de proies contrôlée respectant les conditions (3.1.5) sont similaires à ceux du système avec récolte de proie affine par morceaux. Donc

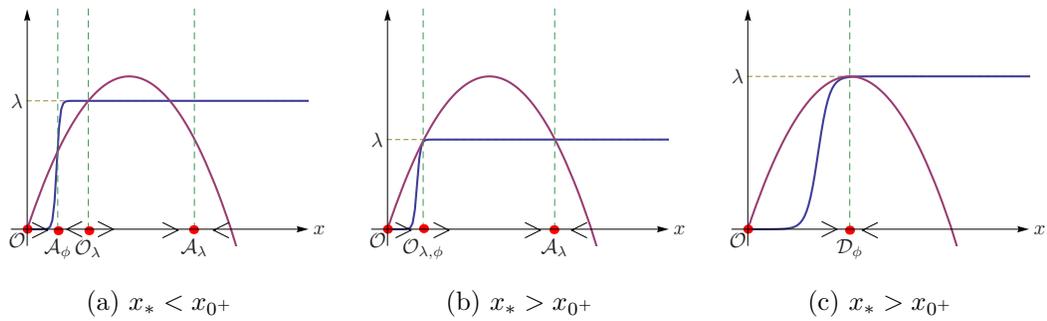


FIGURE 4.29. Fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1(x)$  risquée et favorable à l'extinction des prédateurs par rapport à  $g(x)$  amenant aux résultats 1.7.1 et 2.8.1 pour différentes valeurs de paramètres

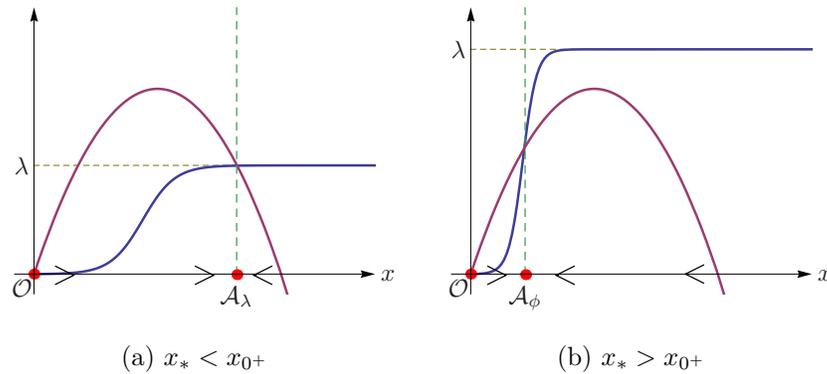


FIGURE 4.30. Fonction de récolte de proie contrôlée  $\eta_1(x)$  sécuritaire et favorable à la pérennité des espèces par rapport à  $g(x)$  amenant au résultat 1.7.1 pour différentes valeurs de paramètres

l'analyse faite aux sections 4.5 et 4.6 est suffisante pour obtenir les résultats 4.6.1 pour n'importe quelle fonction plus lisse selon le théorème 4.7.1.

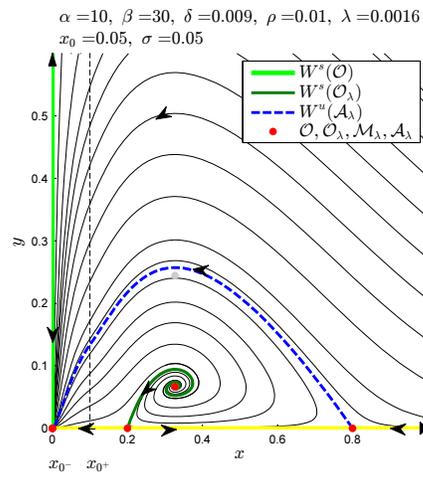


FIGURE 4.31. Portrait de phase du système avec récolte linéaire par morceau pour  $\rho_0 \leq 0$

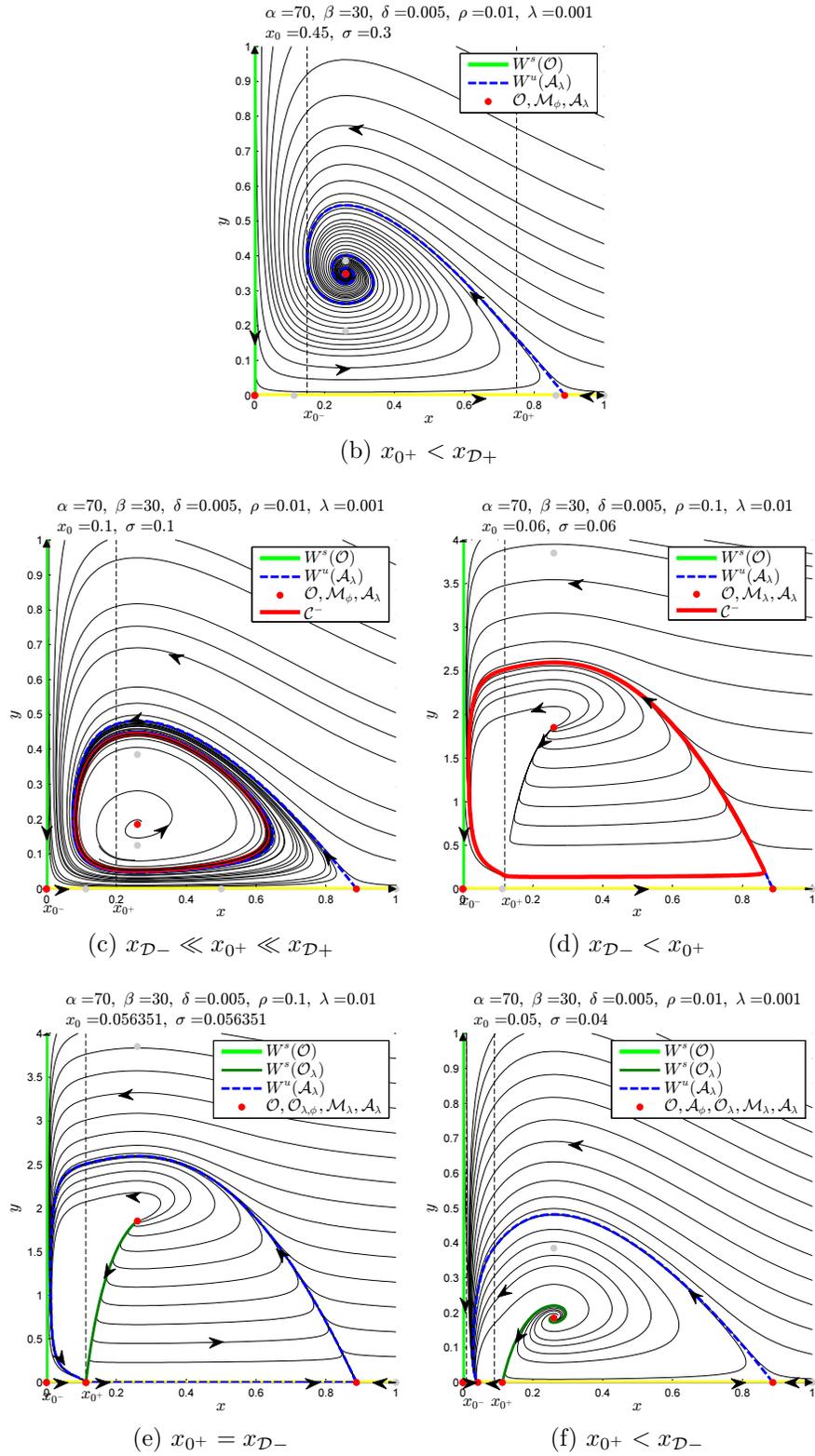


FIGURE 4.32. Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour  $\lambda_\rho = 0.1$  et différents seuils seulement

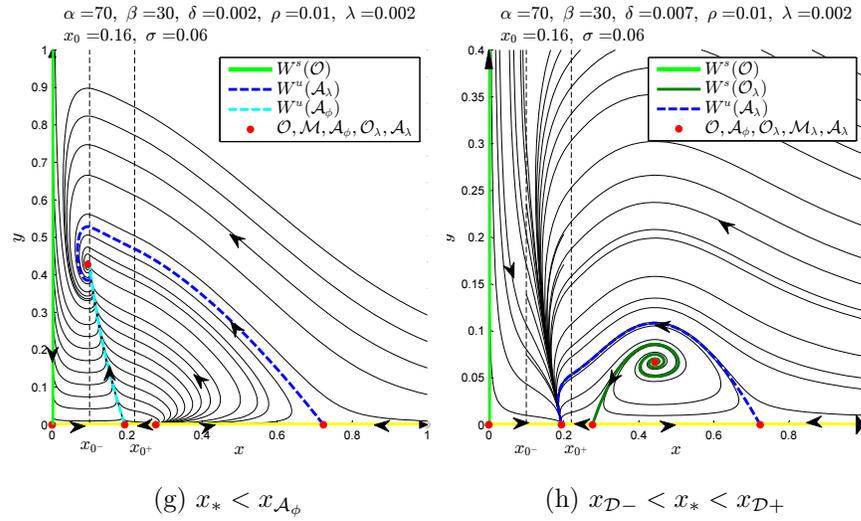


FIGURE 4.33. Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour  $\lambda_\rho = 0.2$  et différentes valeurs de  $\delta$  seulement

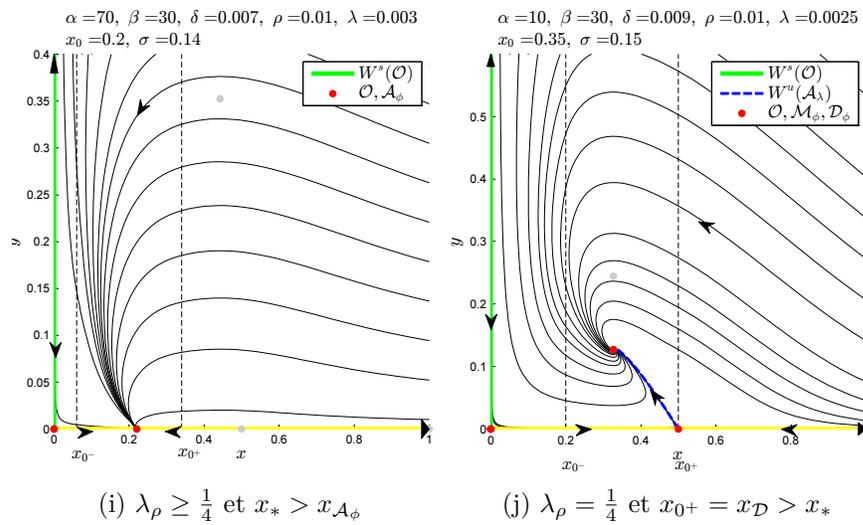


FIGURE 4.34. Portraits de phase du système avec récolte affine par morceau pour  $\lambda_\rho \geq \frac{1}{4}$

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système de Gause

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) - h_1(x, x_0, l) \\ \dot{y} = y [-d + cp(x)] \end{cases}$$

avec fonction de Holling de type III généralisée

$$p(x) = \frac{x^2}{ax^2 + bx + 1},$$

ainsi qu'avec fonction de récolte de proie contrôlée  $h_1(x, x_0, l)$ . Nous avons étudié ce système pour des paramètres  $a, c, d, k, m, r, l$  strictement positifs et pour  $b, x_0 \geq 0$ . Par un changement de variable linéaire et un changement d'échelle sur le temps, nous éliminons 3 paramètres pour obtenir

$$(\alpha, \beta, \rho, \delta, x_0, \eta_1) = \left( ak^2, bk, \frac{r}{cmk^2}, \frac{d}{cmk^2}, \frac{x_0}{k}, \frac{h_1}{cmk^3} \right).$$

Nous avons proposé un type de fonction de récolte de proie contrôlée afin de rendre réaliste le système avec récolte constante  $h_1 = l > 0$  étudié par Etoua [10] tout en préservant la pérennité des espèces du système sans récolte  $h_1 = 0$ , ceci permettant de toujours exercer une récolte maximale au dessus d'un certain seuil pour des fins économiques. Dans ce mémoire, nous avons choisi spécifiquement d'étudier ce système avec une fonction de récolte affine par morceaux

$$\eta_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{0-}, \\ \frac{\lambda(x - x_0 + \sigma)}{2\sigma} & \text{si } x_{0-} < x < x_{0+}, \\ \lambda & \text{si } x \geq x_{0+}, \end{cases}$$

soit une fonction intermédiaire entre une fonction de récolte nulle  $h_1 = 0$  et une fonction de récolte constante  $h_1 = l$  où  $\lambda = \frac{l}{cmk^3} > 0$  et  $x_{0\pm} = x_0 \pm \sigma$  pour un paramètre  $0 \leq \sigma \leq x_0$ . Bien qu'une récolte constante soit le type de récolte le plus simple, celle-ci permet au flot du système de traverser l'axe  $x = 0$ . Elle permet également l'extinction des espèces même avec de grandes populations initiales et

ce pour toutes valeurs de paramètres. Nous voulions proposer une fonction de récolte contrôlée la plus simple possible avec un seuil de récolte  $x_0$  pour une récolte maximale  $\lambda > 0$ .

Pour nous y prendre, nous avons d'abord vérifié numériquement au chapitre 1 les diagrammes de bifurcation et les portraits de phase du système sans récolte pour obtenir les régions de conditions initiales propres à la coexistence des espèces par le résultat 1.7.1. Au chapitre 2, nous avons étudié en détail le système avec récolte de proie constante. Nous avons calculé et obtenu numériquement les courbes de bifurcation de boucle hétéroclinique et de double cycle dans le plan  $(\alpha, \delta)$  pour  $\lambda > 0$  et  $\rho > 0$  et ainsi conjecturé leur position pour les cas limites  $\rho \rightarrow 0$  et  $\rho \rightarrow \infty$  à la conjecture 2.6.1. Nous avons également calculé numériquement la position de la courbe de bifurcation de Hopf d'ordre 2,  $\mathcal{H}_2$ , dans l'espace  $(\beta, \alpha, \delta)$  comme étant la seule courbe d'intersection entre les surfaces  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{L}$  : résultats qui étaient conjecturés dans [10]. Puis nous avons vérifié numériquement par l'étude des portraits de phase les dangers d'extinction de cette récolte pour toutes conditions initiales au-dessus de la séparatrice  $W_s(\mathcal{O}_\lambda)$  ou à l'extérieur du cycle répulsif  $\mathcal{C}_+$  pour tout  $\lambda > 0$  par le résultat 2.8.1.

Ensuite au chapitre 3, nous avons élaboré des conditions suffisantes pour la coexistence des espèces, soit les conditions (3.1.5) appliquées à notre système via une fonction de récolte discontinue au seuil  $x = x_0$  formée des récoltes nulle et constante. Nous avons ensuite lissé cette fonction par régularisation pour obtenir nos fonctions de récolte contrôlée. Finalement au chapitre 4, nous avons étudié notre système avec la fonction régularisée affine par morceaux. Nous avons utilisé un changement de variable afin de ramener notre système à un système avec approvisionnement de proie que nous avons étudié au complet pour obtenir le théorème 4.3.2. Ceci nous a permis d'étudier notre système et d'obtenir ainsi les portraits de phase montrant la coexistence des espèces et la disparition du danger d'extinction (voir résultat 4.6.1). Nous avons aussi vérifié numériquement que toute fonction de récolte définie par morceaux ou analytique respectant les conditions (3.1.5) conduit au même résultat.

Donc une fois trouvée une fonction de récolte contrôlée applicable pour des problèmes réels, nous pouvons ainsi optimiser la récolte pour des fins économiques et garantir la pérennité des espèces. Soit  $T < \infty$  le temps total d'intégration du système prédateur-proie et  $(x(t), y(t))_{t \geq 0}$  la solution du système pour  $(x(0), y(0))$  la population de proies et prédateurs initiale au temps  $t = 0$ . Alors la quantité

totale de proies récoltées tout au long de l'élevage est obtenue par

$$Q_x(T) = \int_0^T \eta_1(x(t)) dt.$$

Évidemment, s'il y a extinction des espèces à une valeur  $t < T$ , alors  $Q_x(T)$  n'est pas maximisé, d'où l'importance de définir une récolte de proie optimale, c'est-à-dire, un taux de récolte maximale sans extinction des espèces. Bien sûr, un récolteur qui n'a aucun intérêt au système pour  $t > T$  n'a pas à se soucier des conséquences de sa récolte, même s'il peut y avoir extinction des espèces pour  $t > T$ . Les prédateurs pourraient être bénéfiques, tout comme la pérennité de ce système à long terme pour assurer un profit perpétuel. En terme de seuil  $x_{0-}, x_0, x_{0+}$ , afin d'optimiser  $Q_x(T)$ , il faudrait que  $x(t) > x_{0+}$  le plus longtemps possible, et au moins avoir  $x(t) > x_{0-}$  pour tout  $t > 0$ . Si  $x(t) \leq x_{0-}$ , alors évidemment  $\eta_1(x(t)) = 0$  ce qui n'apporte aucun profit et il faut donc minimiser la présence de la population de proies dans cette région. Typiquement, nous voudrions satisfaire les conditions suivantes :

- 1) Être dans une région de coexistence des espèces avant d'appliquer la récolte.
- 2) Avoir que l'ensemble  $\omega$ -limite de cette région soit le point fixe  $\mathcal{M}_\lambda$  dans la région  $x \geq x_{0+}$ , et minimalement le point fixe  $\mathcal{M}_\phi$  dans la région  $x > x_{0-}$ , ou une solution cyclique variant entre  $0 < x_1 \leq x(t) \leq x_2$  tel que  $x_2 > x_{0+}$ , et minimalement  $x_2 > x_{0-}$ .
- 3) Optimiser la valeur de récolte maximale  $\lambda$  de manière à satisfaire les points 1) et 2).

La deuxième condition est essentielle pour assurer que les périodes de moratoire, c'est-à-dire les périodes d'abstention de récolte pour la préservation des espèces et où  $x(t) < x_{0-}$ , soient de durée finie, donc en quantité dénombrable.

Même si le temps nous a manqué pour faire une étude rigoureuse du système avec récolte de prédateur, une étude succincte nous a permis d'explorer un peu ce type de système. Nous pouvons profiter de la population de prédateur et la récolter, soit  $\dot{y} = y(-\delta + p(x)) - \eta_2(y)$  pour  $\eta_2(y) > 0$ . Évidemment, le flot passe à travers la frontière  $y = 0$  puisque  $\dot{y} = -\eta_2(y) < 0$ , mais surtout ce type de système donne des systèmes d'équations lourdes pouvant être résolus numériquement seulement. Un tel système offre la possibilité de plus de quatre points fixes dans le premier quadrant.

Afin d'optimiser la quantité de prédateur récoltée  $Q_y(T) = \int_0^T \eta_2(y(t))dt$ , alors il faudra optimiser la valeur de  $y_*$ . Tout en respectant les conditions précédentes 1), 2) et 3), ceci assure l'optimisation de la quantité totale d'espèces récoltées  $Q_x(T) + Q_y(T)$ . Évidemment, une fonction de récolte de prédateur constante pourrait être améliorée afin de prendre en compte un seuil de récolte  $y_0$  et ainsi dépendre explicitement du nombre de prédateurs  $y$  et obtenir une fonction de récolte de prédateur contrôlée  $\eta_2(y, y_0, \lambda_2)$  pour une récolte maximale  $\lambda_2 > 0$ .

Notre fonction de récolte de proie contrôlée dépend seulement explicitement du nombre de proies pour des paramètres  $x_0, \lambda, \sigma$ . Une étude plus adaptative pourrait se faire avec  $\eta_1(x, y, \xi)$  en fonction du nombre de proies et de prédateurs et d'autres paramètres  $\xi$ , comme des quotas ou autres contraintes. Évidemment, le but des paramètres est d'avoir le plus de contrôle sur le système, sans pour autant rendre le système trop compliqué. De ce fait, une récolte de proie qui dépend strictement du nombre de proies semble être le plus simple et le plus optimal. Ceci était également le but de ce mémoire de choisir une fonction de récolte contrôlée la plus simple possible.

Évidemment, les possibilités d'études ultérieures deviennent infinies si l'on regarde des couplages de systèmes prédateur-proie. Nous pouvons étudier l'optimisation de la récolte/approvisionnement de proies  $x_1, x_2$  dans deux systèmes  $(x_1, y)$  et  $(x_2, z)$  couplés pour des prédateurs distincts  $y$  et  $z$  afin d'assurer la pérennité des espèces où la récolte de  $x_1$  devient l'approvisionnement pour  $x_2$  et vice-versa. Il est possible également d'étudier par exemple des systèmes avec récolte/approvisionnement de proies/prédateurs lorsque le prédateur d'un système  $(x, y_1)$  est la proie dans un autre système  $(y_2, z)$  et vice-versa. Dans ce cas, le problème d'optimisation du taux de récolte de proie et de prédateur devient un sujet d'étude en lui-même. Comment optimiser les récoltes dans un couplage de systèmes prédateur-proie tout en préservant la pérennité des espèces dans chacun des systèmes ? Est-ce qu'à long terme l'extinction d'une espèce dans un système  $A$  afin de préserver les espèces d'un système  $B$  est profitable ? Évidemment, les fonctions de récoltes/approvisionnement deviendraient plus compliquées puisqu'elles devront également dépendre indirectement des populations des autres systèmes. Nous pourrions aussi regarder les coûts reliés à un système prédateur-proie pour un récolteur contre les profits engendrés par la récolte ; quelle est la taille de population optimale ?

En terme de régions de conditions initiales, il n'y a pas lieu d'introduire une fonction d'approvisionnement contrôlée car il n'y a pas de danger d'extinction des espèces et les résultats de notre fonction d'approvisionnement constant sont similaires au cas sans récolte (1.7.1). Donc notre récolte contrôlée et notre approvisionnement constant seraient suffisants pour étudier un couplage de systèmes.

D'autres aspects pourraient être étudiés ultérieurement pour le système (4.0.1). Par exemple :

- Compléter l'étude des bifurcations globales du système (4.0.1) avec récolte de proie contrôlée.
- Étudier le système (4.0.1) pour  $b < 0$ .
- Étudier le système (4.0.1) avec  $p(x)$  fonction de Holling type IV.
- Étudier le système avec récolte/approvisionnement contrôlée de prédateur et de proie pour  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yp(x) - h_1(x, x_o, l_1) \\ \dot{y} = y [-d + cp(x)] - h_2(y, y_o, l_2) \end{cases}$$

- Étudier des conditions d'optimisation d'un couplage de systèmes à récolte ou à approvisionnement de proies/prédateurs pour différents couples d'espèces  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$

## Bibliographie

---

- [1] D. ARROWSMITH et C.M. PLACE : *Dynamical Systems : Differential Equations, Maps, and Chaotic Behaviour*. Chapman Hall/CRC Mathematics Series. Taylor & Francis, 1992. ISBN 9780412390807.
- [2] F. BRAUER et A.C. SOUDACK : Coexistence properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking. *Journal of Mathematical Biology*, 12:101–114, 1981.
- [3] Claudio A. BUZZI, Paulo R. da SILVA et Marco A. TEIXEIRA : A singular approach to discontinuous vector fields on the plane. *Journal of Differential Equations*, 231(2):633 – 655, 2006. ISSN 0022-0396.
- [4] Claudio A. BUZZI, Tiago de CARVALHO et Marco A. TEIXEIRA : Birth of limit cycles bifurcating from a nonsmooth center. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 102(1):36 – 47, Janvier 2013. ISSN 0021-7824.
- [5] J. CORTES : Discontinuous Dynamical Systems : A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability. *ArXiv e-prints*, janvier 2009.
- [6] Caroline COUTU : *Étude du diagramme de bifurcation d'un système prédateur-proie*. Mémoire, Université de Montréal, 2003.
- [7] Guoren DAI et Moxun TANG : Coexistence region and global dynamics of a harvested predator-prey system. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 58 (1):193–210, 1998.
- [8] Eusebius DOEDEL : *Lecture Notes on Numerical Analysis of Bifurcation Problems*. Mars 1997. Notes de lecture.
- [9] Eusebius DOEDEL : *An Introduction to Numerical Continuation Methods with Applications*. 2014. URL <http://users.encs.concordia.ca/~doedel/courses/comp-6361/slides.pdf>.
- [10] Remy ETOUA : *Étude d'un modèle de Gause généralisé avec récolte de proies et fonction de Holling type III généralisée*. Thèse, Université de Montréal, 2008.
- [11] Remy ETOUA et Christiane ROUSSEAU : Bifurcation analysis of a generalized Gause model with prey harvesting and a generalized Holling response

- function of type III. *Journal of Differential Equations*, Novembre 2010.
- [12] A.F. FILIPPOV : *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Springer Science+Business Media Dordrecht, 1988. ISBN 9789027726995.
- [13] H.I. FREEDMAN : Stability analysis of a predator-prey system with mutual interference and density-dependent death rates. *Bulletin of Mathematical Biology*, 41:67–78, 1979.
- [14] M. GAMEIRO et J.-P. LESSARD : Ordinary differential equations : A constructive approach. À être publié, Mai 2015.
- [15] G.H. GOLUB et J.M. ORTEGA : *Scientific Computing and Differential Equations : An Introduction to Numerical Methods*. Academic Press, 1992. ISBN 0122892550.
- [16] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2002. ISBN 9780387908199.
- [17] Y.A. KUZNETSOV : *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013. ISBN 9781475724219.
- [18] Yann LAMONTAGNE : *Étude d'un système prédateur-proie avec fonction de réponse Holling de type III généralisée*. Mémoire, Université de Montréal, 2006.
- [19] Yann LAMONTAGNE, Caroline COUTU et Christiane ROUSSEAU : Bifurcation Analysis of a Predator-prey System with Generalised Holling Type III Functional Response. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Janvier 2008.
- [20] Sophie LAURIN : *Le Problème centre-foyer et application*. Mémoire, Université de Montréal, 2011.
- [21] Jaume LLIBRE, Douglas D. NOVAES et Marco A. TEIXEIRA : On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 139:229–244, Septembre 2014.
- [22] L. PERKO : *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN 9781461300038.
- [23] Christiane ROUSSEAU : *Recueil de notes : Équations Différentielles Non Linéaires (MAT6115)*. Université de Montréal, 2015.
- [24] Dana SCHLOMIUK : *Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields*. NATO ASI series : Mathematical and physical sciences. Springer, 1993. ISBN 9780792323921.
- [25] J. SOTOMAYOR et M.A. TEIXEIRA : Regularization of discontinuous vector field. *World Science Publications*, page 207–223, 1998.

- [26] S.H. STROGATZ : *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Advanced book program. Westview Press, 1994. ISBN 9780738204536.

# Annexe A

---

## PORTRAIT DE PHASE DE LA RÉGULARISATION

La régularisation (voir section 3.3) a été étudiée entre autres par Sotomayor et Teixeira [25] et Buzzi, da Silva, et Teixeira [3], et peut conduire à toutes sortes de nouveaux phénomènes et bifurcations. Plusieurs de ceux-ci pourraient être observés dans notre système, dont certains localement seulement. Nous donnons les plus intéressants que nous avons tracés sur *Mathematica*, similairement aux figures 3.18, 3.19 et 3.20. Les lignes pointillées rouges représentent les courbes  $h(X) = \pm\sigma$ , et la bleue entre les deux autres représente la courbe  $h(X) = 0$ .

La régularisation a parfois le danger de former des « asymptotes » où les trajectoires vont à l'infini. Ce problème n'arrive pas dans notre système régularisé grâce au théorème 4.1.1.

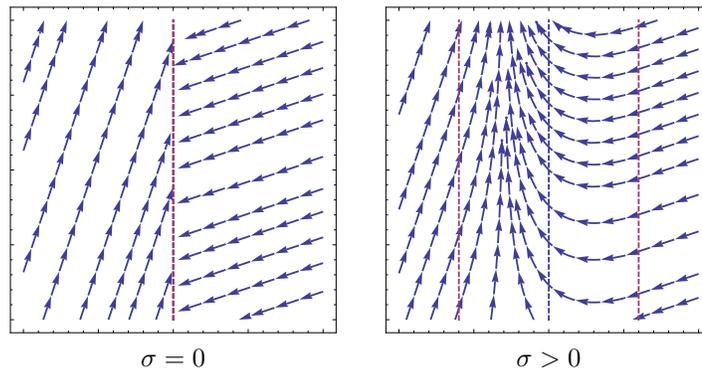


FIGURE A.1. Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation et de formation d'une asymptote

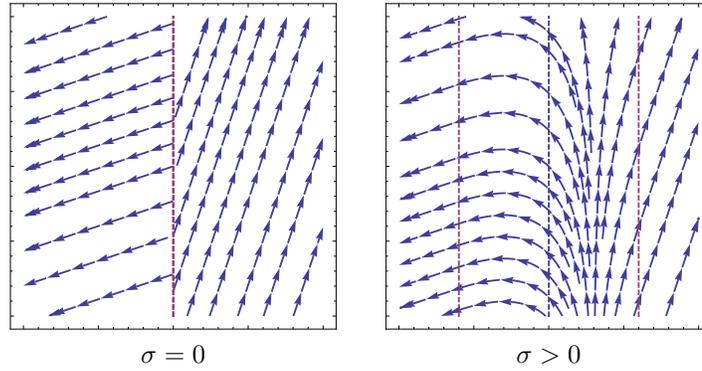


FIGURE A.2. Exemple d'adoucissement d'une discontinuité par régularisation et de formation d'une asymptote

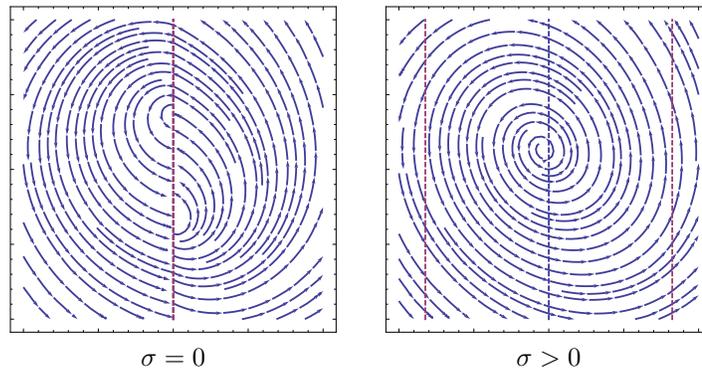


FIGURE A.3. Deux foyers sur la discontinuité formant un seul foyer

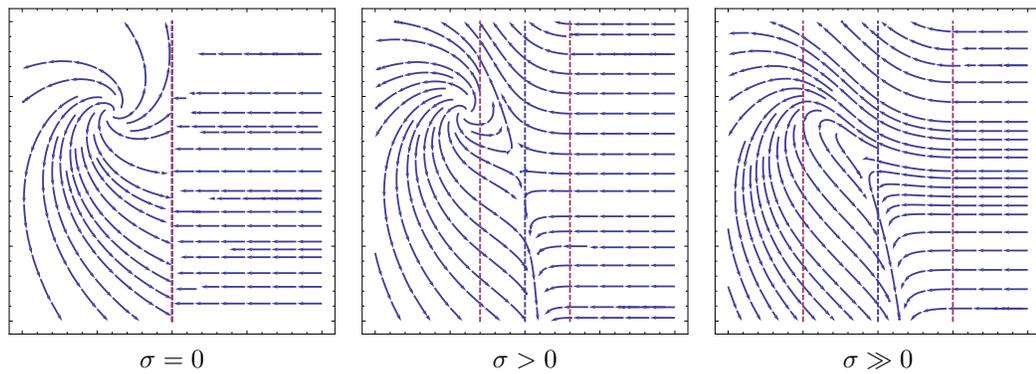


FIGURE A.4. Adoucissement formant un point de selle fusionnant avec un foyer

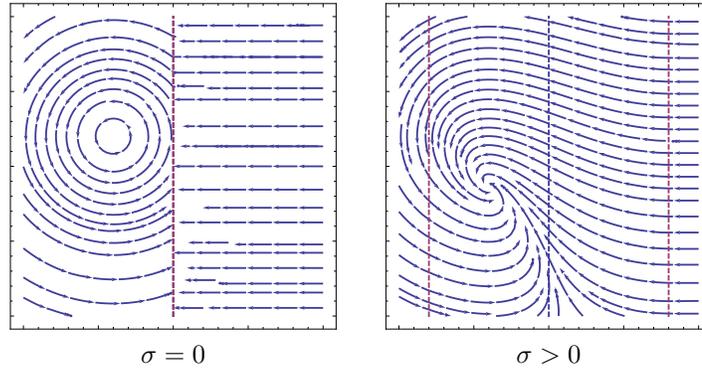


FIGURE A.5. Centre devenant un foyer

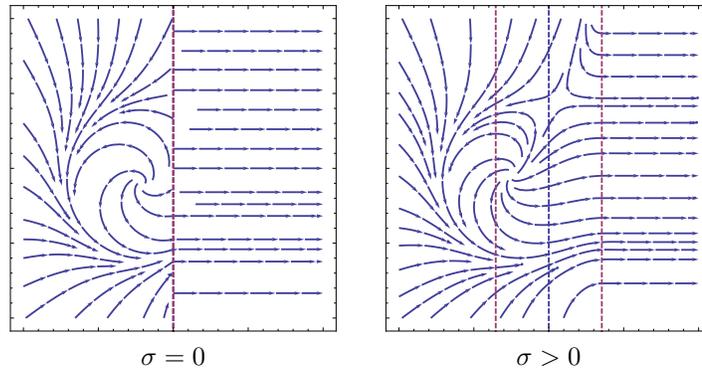


FIGURE A.6. Cycle limite défait pour former un point de selle

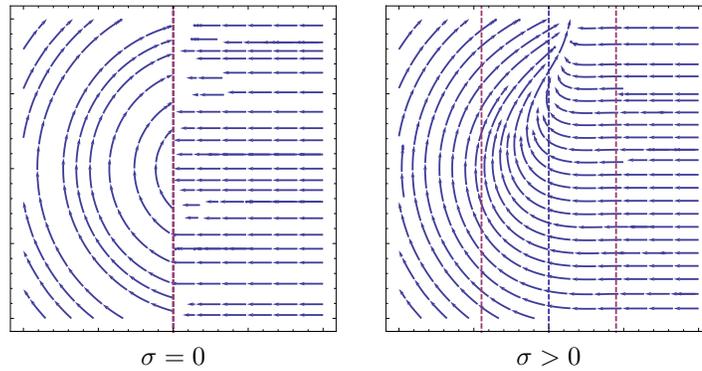


FIGURE A.7. Exemple d'adoucissement par régularisation

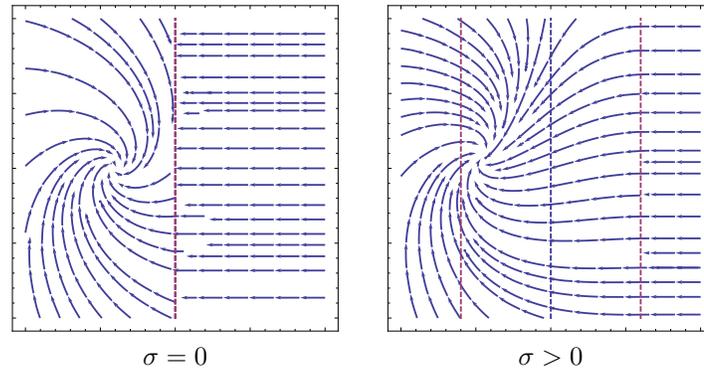


FIGURE A.8. Exemple d'adoucissement par régularisation

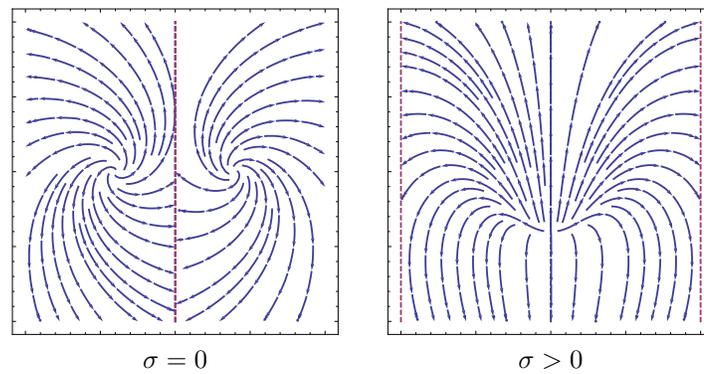


FIGURE A.9. Deux foyers symétriques formant un anti-selle

Ces exemples nous donnent un bon aperçu des effets possibles de la régularisation sur les portraits de phase. Nous voyons ainsi les différentes bifurcations que cela peut engendrer en fonction du pas  $\sigma$ . Pour notre système (4.0.1), ceci nous a aidé pour visualiser l'apparition possible de solutions périodiques. Toutefois, une analyse mathématique rigoureuse (numérique) est requise pour calculer les bifurcations précisément.

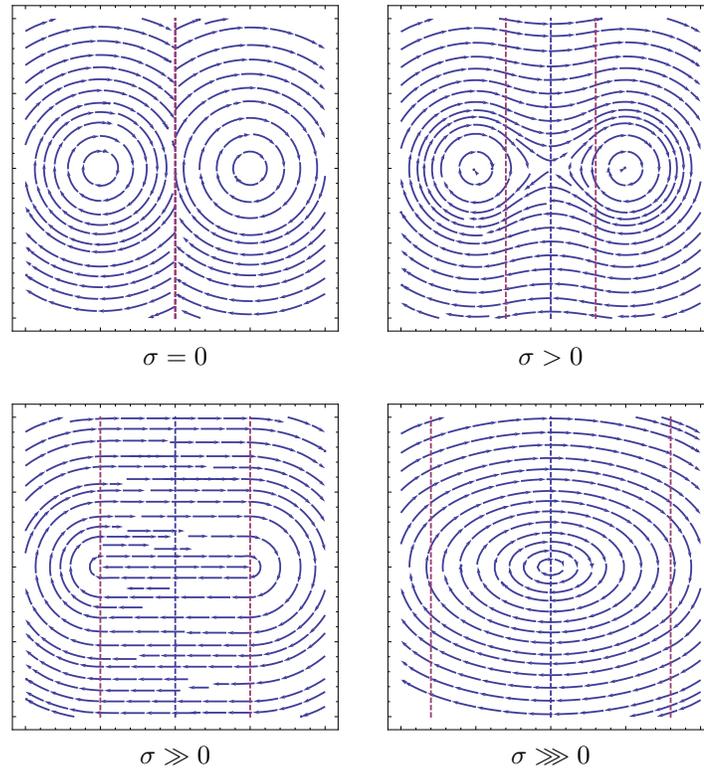


FIGURE A.10. Deux centres identiques formant deux boucles homocliniques puis un seul centre

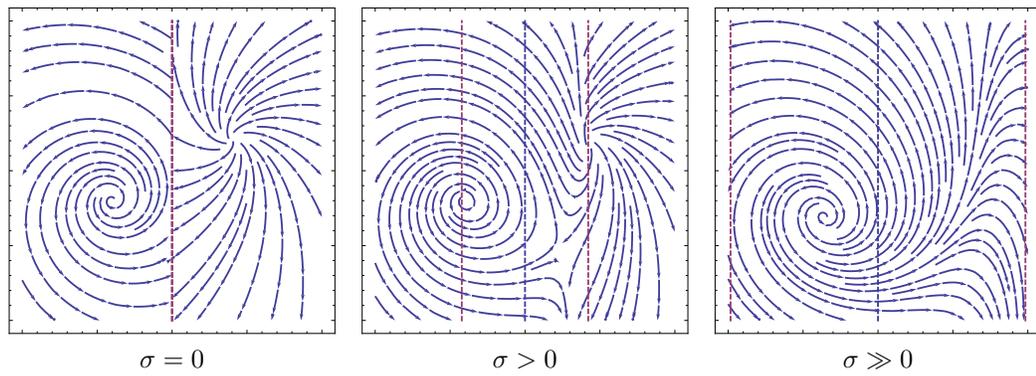


FIGURE A.11. Deux foyers non égaux formant un point de selle puis un seul foyer

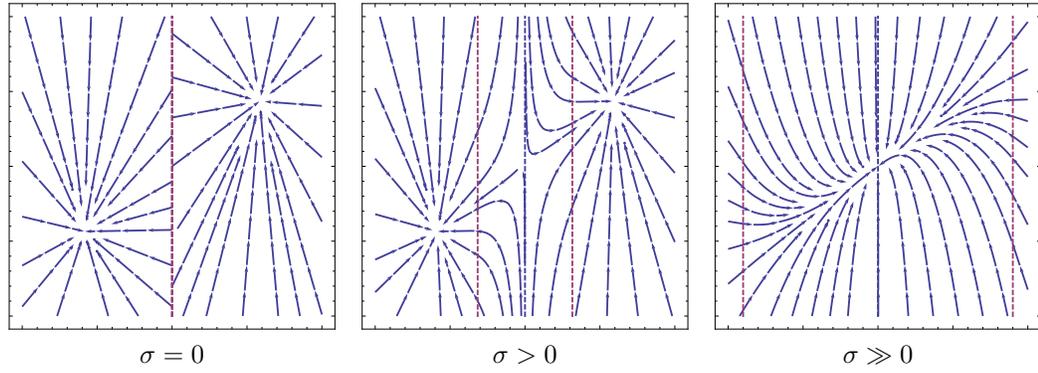


FIGURE A.12. Deux nœuds attractifs formant un nouveau point de selle puis un unique nœud attractif

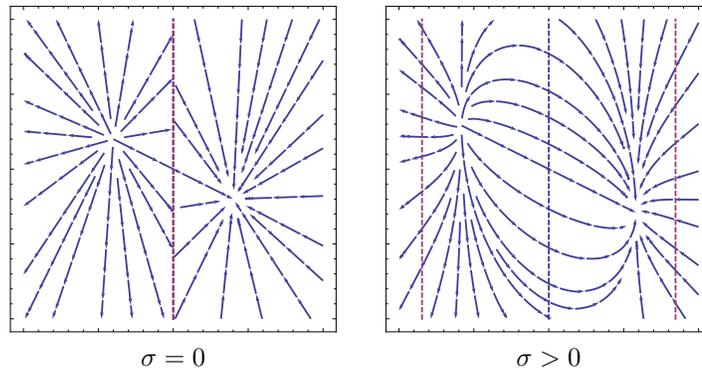


FIGURE A.13. Deux nœuds de stabilité opposée restant semblables

# Annexe B

---

## CONTINUATION ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

Dans cette annexe, nous revoyons sous forme de résultat et à titre indicatif les différentes méthodes numériques utilisées dans ce mémoire via les programmes `Matlab` et `XPPAUT` qui utilisent, à la base, ces outils mathématiques en plus d'optimisations propres à chacun. En premier, nous verrons les méthodes de simulation des trajectoires, en particulier celles de type Runge-Kutta, utilisées pour tracer les portraits de phase. Ensuite nous verrons la méthode de Newton pour trouver des points fixes de fonctions ou solutions de système pour, finalement, utiliser le théorème des fonctions implicites avec la continuation de paramètres, outil utile pour tracer des diagrammes de bifurcation dans l'espace des paramètres.

Ces résultats de base de l'analyse numérique se retrouvent dans de nombreux ouvrages. En particulier, les formules des méthodes de résolution numérique d'équations différentielles proviennent de Golub et Ortega [15] et la continuation numérique provient de Gameiro et Lessard [14] et Doedel [8] [9].

### B.1. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Mais d'abord, puisque les machines fonctionnent à temps discret, la discrétisation du temps est à la base de l'analyse numérique. Nous allons généraliser les outils présentés pour des systèmes dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $F = (F_i)_{i=1, \dots, n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et le système

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X), \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

On cherche la solution  $X(t)$  de ce système pour  $t > 0$ . Soit la discrétisation

$$\begin{cases} t_k = k\Delta t \\ x_{i,k} \approx x_i(t_k) & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \\ X_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}) \end{cases}$$

pour un pas de temps  $\Delta t$ . Ce type de discrétisation est utilisé dans tout l'annexe. Plusieurs méthodes existent pour trouver une solution numérique à ce système. Afin de comprendre les méthodes utilisées, commençons par la base avec la méthode des différences finies.

### B.1.1. Méthodes Runge-Kutta (un pas)

On discrétise avec Euler-avant (méthode explicite) pour un pas de temps  $\Delta t$ . On obtient

$$x_{(i,k+1)} = x_{(i,k)} + (\Delta t)F_i(t_k, x_{(1,k)}, x_{(2,k)}, \dots, x_{(n,k)}) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ainsi, nous obtenons la solution numérique  $X_{k+1} = X(t_{k+1}) + \mathcal{O}(\Delta t)$  pour  $k \geq 0$  avec une erreur globale  $\mathcal{O}(\Delta t)$  si les dérivées sont bornées. La convergence de cette méthode n'est pas garantie. Mais il est possible de diminuer l'erreur de cette méthode. Par Taylor, nous pouvons approximer  $X_{k+1}$  par des termes d'ordre supérieur, donc obtenir une erreur d'ordre supérieur. On obtient

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + (\Delta t) \sum_{i=1}^s b_i \kappa_i, \\ \kappa_i = F \left( t_k + c_i \Delta t, X_k + (\Delta t) \sum_{j=1}^s a_{i,j} \kappa_j \right), \end{cases}$$

pour  $s \geq 1$ . Les différentes valeurs de  $a_{i,k}$ ,  $b_i$  et  $\kappa_i$  que nous pouvons représenter par *un tableau de Butcher* représentent diverses méthodes à un pas de Runge-Kutta selon le  $s$  choisi.

$c_1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,s}$
$c_2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\cdots$	$a_{s,s}$
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_s$

TABLEAU B.1. Tableau de Butcher

Par exemple, nous retrouvons plusieurs méthodes explicites

— ( $s = 1$ ) Méthode d'Euler-avant avec ordre  $\mathcal{O}(\Delta t)$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

— ( $s = 2$ ) Méthode de Heun avec ordre  $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad X_{k+1} = X_k + \frac{\Delta t}{2} [F(t_k, X_k) + F(t_{k+1}, X_k + (\Delta t)F(t_k, X_k))]$$

— ( $s = 2$ ) Méthode du point-milieu avec ordre  $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad X_{k+1} = X_k + (\Delta t)F\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{\Delta t}{2}F(t_k, X_k)\right)$$

— ( $s = 4$ ) Méthode de Runge-Kutta avec ordre  $\mathcal{O}((\Delta t)^4)$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Dans les méthodes de Runge-Kutta adaptatives, on peut varier le pas de temps pendant l'exécution, ou utiliser plusieurs méthodes d'ordres différentes avec le même pas et prendre la plus précise. Ainsi, les solveurs `ode23` et `ode45` de `Matlab` utilisent respectivement les méthodes de Runge-Kutta adaptatives d'ordre 2 ou 3 et d'ordre 4 ou 5.

Selon la forme des solutions, les méthodes numériques doivent être adaptées si le système est « raide » (ang. *stiff*), c'est-à-dire qu'il a des changements de direction soudain et abrupt des solutions. Il faut utiliser des solveurs en conséquence avec pas adaptatif à des directions comme `ode23s` ou encore augmenter le nombre de pas.

### B.1.2. Méthode à pas multiple

Nous pouvons calculer la solution  $X_{k+1}$  à l'aide de plusieurs pas. Nous avons

$$X(t_{k+1}) - X(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} X'(t)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(X(t))dt \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(t)dt$$

où  $p(t)$  est une *interpolation polynomiale* de  $F(X(t))$  de degré  $N$  aux points  $(t_{k-N}, F(X_{k-N})), (t_{k-N+1}, F(X_{k-N+1})), \dots, (t_k, F(X_k))$  pour  $N \leq k$ .

Ceci nous donne la méthode explicite d'Adams-Bashforth d'ordre  $\mathcal{O}((\Delta t)^{N+1})$  à  $N + 1$  pas dont la formule générale

$$\boxed{X_{k+1} = X_k + \Delta t (a_0 F(t_k, X_k) + a_1 F(t_{k-1}, X_{k-1}) + \dots + a_N F(t_{k-N}, X_{k-N}))}$$

Pour différentes valeurs de  $N$ , nous pouvons calculer les coefficients  $a_i$ .

- $N = 0$  :  $a_0 = 1$  (on retrouve Euler-avant à 1 pas)
- $N = 1$  :  $a_0 = \frac{3}{2}$ ,  $a_1 = \frac{-1}{2}$
- $N = 3$  :  $a_0 = \frac{55}{24}$ ,  $a_1 = \frac{-59}{24}$ ,  $a_2 = \frac{37}{24}$ ,  $a_3 = \frac{-9}{24}$

Il y a aussi la méthode implicite d'Adams-Moulton d'ordre  $\mathcal{O}((\Delta t)^{N+2})$  à  $N+2$  pas. Nous interpolons à la place  $F(X(t))$  jusqu'à l'itération suivante (un pas de plus). Ceci nous donne une formule générale est

$$\boxed{X_{k+1} = X_k + \Delta t (b_{-1} F(t_{k+1}, X_{k+1}) + b_0 F(t_k, X_k) + \dots + b_N F(t_{k-N}, X_{k-N}))}$$

Pour différentes valeurs de  $N$ , nous pouvons calculer les coefficients  $b_i$ .

- $N = -1$  :  $b_{-1} = 1$  (Euler-arrière)
- $N = 0$  :  $b_{-1} = \frac{1}{2}$ ,  $b_0 = \frac{1}{2}$
- $N = 2$  :  $b_{-1} = \frac{9}{24}$ ,  $b_0 = \frac{19}{24}$ ,  $b_1 = \frac{-5}{24}$ ,  $b_2 = \frac{1}{24}$

À chaque itération, pour résoudre en fonction de  $X_{k+1}$ , il faut utiliser une méthode itérative (voir Newton) également jusqu'à un seuil de tolérance.

Finalement, il y a la méthode explicite Prédicteur-Correcteur. Ceci consiste à utiliser des méthodes explicites (Adams-Basforth) pour calculer l'itération initiale  $X_{k+1}^{(0)}$  pour approximer  $F(t_{k+1}, X_{k+1}^{(0)})$  nécessaire au calcul explicite d'une méthode implicite (Adams-Moulton) pour calculer  $X_{k+1}$  ou jusqu'à un seuil de tolérance désiré. Donc ceci est entièrement explicite avec un ordre semblable aux méthodes implicites.

Les solveurs `ode113` et `ode15s` utilisent cette dernière méthode à pas multiple pour différents ordres.

Ceci résume les différentes méthodes utilisées par `Matlab` pour la suite de fonctions ODE dans laquelle la précision peut être spécifiée moyennant un temps de calcul plus long afin de tracer les solutions des portraits de phase. Bien que le solveur

ode45 soit efficace la majorité du temps, nous avons dû utiliser différents solveurs en fonction du système et des paramètres présentés dans ce mémoire. Ainsi, nous utilisons ces solveurs afin de tracer les lignes de courants (solutions) de notre système d'équations différentielles (sans/avec récolte de proie constante/contrôlée), et ce pour divers points initiaux afin de tracer les portraits de phase.

Nous utilisons également ces solveurs pour tracer les variétés instables de points selle à partir d'une perturbation du point fixe dans la direction de son vecteur propre pour un intervalle de temps positif. Pour les variétés stables, nous faisons la même chose mais sur un intervalle de temps négatif et déterminons avec précision la position de la séparatrice par une méthode de tir. Le logiciel *Mathematica*, utilisé pour tracer les portraits de phase de l'annexe A, utilise sensiblement les mêmes méthodes numériques pour tracer des portraits de phase.

## B.2. MÉTHODE DE NEWTON

Une méthode itérative rapide pour trouver les zéros d'une fonction est souvent la méthode de point-fixe de Newton lorsque celle-ci converge. En une dimension, soient  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $x \in \mathbb{R}$ , cette méthode consiste à itérer ceci

$$x^{(n+1)} = T(x^{(n)}) = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

jusqu'à l'obtention d'un point fixe  $x^{(k)} \approx T(x^{(k)})$  (figure B.1). Bien sûr, si  $x_* = T(x_*)$ , alors  $f(x_*) = 0$  est un zéro recherché de la fonction  $f$ .

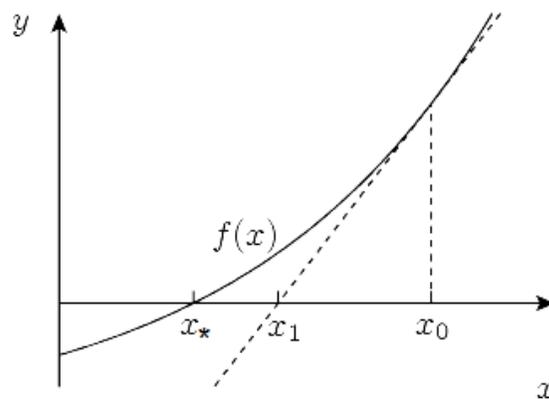


FIGURE B.1. Interprétation graphique de la méthode de Newton

Cette méthode peut également se généraliser en dimension supérieure. Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , alors

$$T(X) = X - DF(X)^{-1}F(X), \quad DF(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Comme application, soit le système  $\dot{X} = F(X)$ , avec une discrétisation acceptable. Nous définissons  $G(X) = \dot{X} - F(X)$  et cherchons les solutions de  $G(X) = 0$  par la méthode de Newton. En général, nous cherchons à déterminer les solutions d'un système  $F(X) = 0$  avec des méthodes numériques. Ces solutions peuvent être :

- Points fixes d'un système d'équations ;
- Solutions numériques d'un système d'équations (fonction ou courbe) en fonction du temps ;
- Solutions périodiques ou courbes fermées (Fourier, Poincaré) ;
- Courbes de paramètres d'une bifurcation.

La première et la dernière sont celles que nous utilisons pour la continuation de paramètre avec le code de `AUTO` sous le logiciel `XPPAUT`. Souvent des méthodes directes sont utilisées pour des systèmes linéaires, mais des méthodes itératives sont utilisées pour des systèmes non-linéaires. Évidemment, il y a une grande source d'erreur si le système est *mal-conditionné*, par exemple une matrice quasi singulière et donc difficile à inverser numériquement. Dans tous les cas, il s'agit d'approximations numériques avec un terme d'erreur.

### B.3. CONTINUATION DE PARAMÈTRE

Lorsque  $F = 0$  représente une solution d'une EDO, le théorème d'existence et d'unicité des solutions garantit qu'une simple perturbation des paramètres donne une solution légèrement perturbée si notre système est structurellement stable. Lorsqu'une solution  $x_*$  d'une fonction quelconque  $F(x_*; \lambda) = 0$  est trouvée pour une valeur de paramètre donnée  $\lambda$  (par Newton par exemple), nous voudrions trouver une ou des solutions pour d'autres valeurs de paramètres. Nous voulons donc rechercher d'autres solutions autour d'une solution connue pour un système

dépendant d'un ou plusieurs paramètres dont l'existence est garantie par le théorème des fonctions implicites.

**Théorème B.3.1** (Fonctions implicites). *Soient  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  des ouverts. Soit  $F : X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  telle que*

- (1)  $F(x_0, \lambda_0) = 0$  pour  $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$  ;
- (2)  $D_x F(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible.

*Alors il existe des voisinages  $X_0 \subset X$  et  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  de  $x_0$  et  $\lambda_0$  respectivement et une fonction  $x : \Lambda_0 \rightarrow X_0$  unique de classe  $C^1$  telle que  $f(x(\lambda), \lambda) = 0$ . De plus, si  $(x, \lambda) \in X_0 \times \Lambda_0$  et  $f(x, \lambda) = 0$ , alors  $x = x(\lambda)$ .*

S'il y a plus d'une solution pour les mêmes paramètres, il pourrait avoir plusieurs branches de solutions. La *continuation de paramètre* permet de trouver numériquement les branches de solutions d'un système et de détecter des bifurcations d'un système. Ceci est l'idée derrière le programme XPPAUT et son sous-programme AUTO. Le théorème (B.3.1) est à la base de la continuation de paramètre.

Soit  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$  et  $F : \mathbb{R}^N \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $C^1$ . Nous désirions obtenir les solutions de  $F(x; \lambda) = 0$ . Nous cherchons donc une fonction  $x(\lambda)$  à partir d'une solution connue  $x(\lambda_0) = x_0$  tel que  $F(x_0, \lambda_0) = 0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} F(x; \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dF}{d\lambda} &= D_x F \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{d\lambda} &= -(D_x F)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Donc  $x(\lambda)$  est solution de l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} := \dot{x} = -(D_x F(x, \lambda))^{-1} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda), \\ x(\lambda_0) = x_0. \end{cases}$$

Nous utilisons la méthode itérative de Newton pour solutionner ce système discrétisé pour des pas de paramètre  $\Delta\lambda$  avec première itération (naïve)  $x_1^{(0)} = x_0 + \Delta\lambda \dot{x}_0$ .

Donc au  $n^e$  pas

- (1)  $(x_n, \lambda_n)$  ;
- (2)  $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda$  ;

(3) Résoudre pour  $\dot{x}_n$  le système

$$D_x F(x_n, \lambda_n) \dot{x}_n = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_n, \lambda_n).$$

(4) Première itération  $x_{n+1}^{(0)} = x_n + \Delta \lambda \dot{x}_n$  (Euler-avant);

(5) Jusqu'au seuil de tolérance (méthode Newton,  $k = 0, 1, \dots$ )

(a) Résoudre pour  $\Delta x_{n+1}^{(k)}$  le système linéaire

$$D_x F(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}) \Delta x_{n+1}^{(k)} = -F(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1});$$

(b)  $x_{n+1}^{(k+1)} = x_{n+1}^{(k)} + \Delta x_{n+1}^{(k)}$ ;

(6)  $(x_{n+1}, \lambda_{n+1})$ .

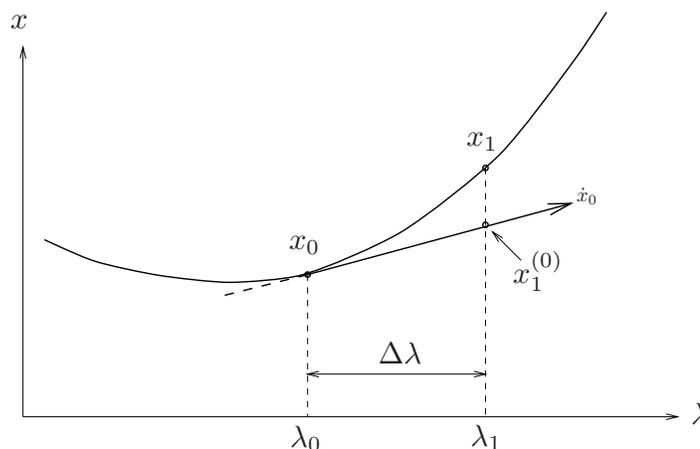


FIGURE B.2. Représentation graphique de la continuation de paramètre

Ainsi nous obtenons la courbe  $x(\lambda)$  discrétisée pour  $\Delta \lambda > 0$ . Ceci est un algorithme simple, applicable à la majorité des cas, et rapide (méthode du 2<sup>e</sup> ordre). Mais la méthode nécessite un pas  $\Delta \lambda$  adaptatif en fonction de la forme de  $x(\lambda)$ , lequel peut donc être petit. Également,  $x(\lambda)$  peut être une fonction paramétrique. Ceci pose problème s'il y a un pli dans la courbe.

#### B.4. CONTINUATION PAR LONGUEUR D'ARC

Pour éviter les plis, on utilise la *continuation par longueur d'arc* (pseudo arclength). On suppose que  $(x, \lambda) = (x(s), \lambda(s))$  est paramétrée par longueur d'arc  $s$ . Donc soit  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$  et  $F : \mathbb{R}^N \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$ . On cherche la courbe  $u(s) = (x(s), \lambda(s))$  tel que  $F(u(s)) = 0$ . Soit la discrétisation  $u_n = (x_n, \lambda_n) =$

$(x(n\Delta s), \lambda(n\Delta s))$  et la solution connue  $u_n$  tel que  $F(x_n, \lambda_n) = 0$ . Nous avons

$$\|\dot{u}_n\| = \|\dot{x}_n\|^2 + |\dot{\lambda}_n|^2 = 1$$

On veut que

$$\begin{aligned} \dot{u}_n^T \cdot (u_{n+1} - (u_n + \dot{u}_n \Delta s)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \dot{x}_n^T (x_{n+1} - x_n) + \dot{\lambda}_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) - \Delta s &= 0 \Leftrightarrow \\ N(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) &= 0. \end{aligned}$$

On veut donc trouver la solution du système

$$G(x, \lambda) = \begin{pmatrix} F(x, \lambda) \\ N(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

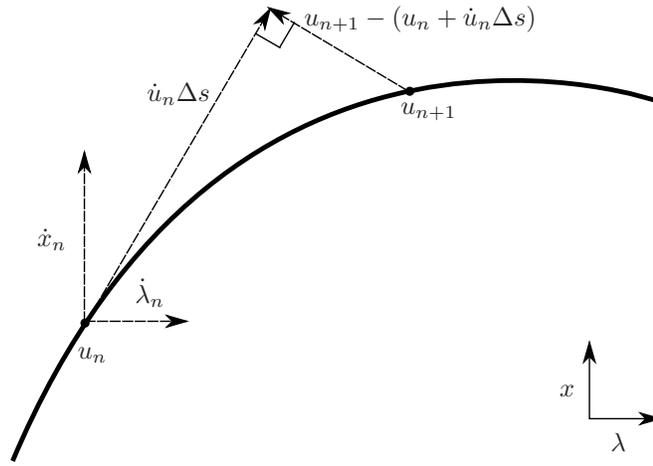


FIGURE B.3. Représentation graphique de la première itération

On résout ce système par la méthode de Newton en itérant jusqu'à un seuil de tolérance. Donc au  $n^e$  pas, nous avons

- (1)  $u_n = (x_n, \lambda_n)$ ;
- (2) On trouve la première tangente  $\dot{u}_n = \frac{(\dot{x}_n, \dot{\lambda}_n)}{\|(\dot{x}_n, \dot{\lambda}_n)\|}$ ;
- (3) Première itération  $u_{n+1}^{(0)} = u_n + \dot{u}_n \Delta s$ ;
- (4) Jusqu'au seuil de tolérance, on itère (méthode Newton,  $k = 0, 1, \dots$ )

$$H(x, \lambda) = (x, \lambda) - DG(x, \lambda)^{-1}G(x, \lambda).$$

(a) On résout pour  $\Delta x_{n+1}^{(k)}$  et  $\Delta \lambda_{n+1}^{(k)}$  le système

$$\begin{pmatrix} D_x F(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)}) & F_\lambda(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)}) \\ \dot{x}_n & \dot{\lambda}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{n+1}^{(k)} \\ \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)}) \\ N(x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)}) \end{pmatrix};$$

- (b)  $u_{n+1}^{(k+1)} = (x_{n+1}^{(k+1)}, \lambda_{n+1}^{(k+1)}) = (x_{n+1}^{(k)} + \Delta x_{n+1}^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta \lambda_{n+1}^{(k)})$ ;  
 (5)  $u_{n+1} = (x_{n+1}, \lambda_{n+1})$ .

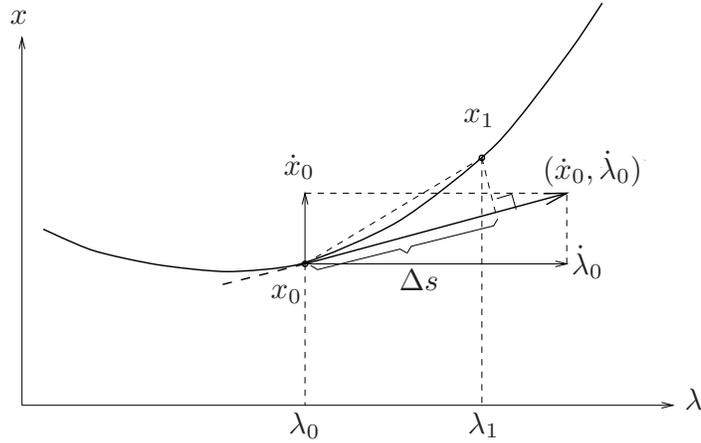


FIGURE B.4. Représentation graphique de la continuation par longueur d'arc

Avec  $u_{n+1}$  trouvé, puisque  $F(x, \lambda) = 0 \Rightarrow \dot{F} = (D_x F)\dot{x} + (F_\lambda)\dot{\lambda} = 0$ , alors la tangente à ce point doit satisfaire le système suivant

$$\begin{pmatrix} D_x F(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) & F_\lambda(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) \\ \dot{x}_n & \dot{\lambda}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \dot{\lambda}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Et donc nous obtenons la prochaine tangente  $\dot{u}_{n+1} = \frac{(\dot{x}_{n+1}, \dot{\lambda}_{n+1})}{\|(\dot{x}_{n+1}, \dot{\lambda}_{n+1})\|}$  par simple substitution arrière, ce qui correspond à l'étape 2. Puis on recommence. Mais comment trouver  $\dot{u}_0$ ? Plusieurs choix possibles :

- $\dot{x}_0 = 0, \dot{\lambda} = 1$ ; (pas le meilleur choix)
- Trouver  $(\lambda_1, x_1)$  par continuation de paramètre et prendre

$$\dot{u}_0 = \frac{(x_1 - x_0, \lambda_1 - \lambda_0)}{\|(x_1 - x_0, \lambda_1 - \lambda_0)\|};$$

- Prendre  $\dot{u}_0 \in \text{Null}([D_x F(x_0, \lambda_0), F_\lambda(x_0, \lambda_0)])$ , donc si  $x \in \mathbb{R}$ , prendre  $\dot{u}_0 = (F_\lambda(x_0, \lambda_0), -F_x(x_0, \lambda_0))$ ;
- Prendre une direction désirée afin de continuer la paramétrisation sur une autre branche si l'on connaît déjà une branche de solution (prendre  $\Delta s_2 = -\Delta s$  pour sens inverse).

Les deux dernier choix sont ceux utilisés dans notre cas, car le premier marche toujours, et le second est très utile pour obtenir une courbe de bifurcation pour toutes les valeurs du paramètre étudié.

**Remarque B.4.1.** *Nous pouvons généraliser l'espace  $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$  pour  $m \in \mathbb{N}$  comme dans le théorème (B.3.1). Il faudra traiter  $\lambda$  comme un amalgame de paramètres et calculer le jacobien  $D_\lambda F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  au lieu de sa dérivée simple. Cependant, afin de mieux suivre les effets d'un paramètre et les bifurcations de codimension 1, il est mieux de traiter les paramètres d'un système, un à la fois.*

Avec cette méthode, nous pouvons facilement suivre un point fixe en fonction d'un paramètre, par exemple les figures 1.17, 2.5, 2.22, 2.24 et ainsi analyser sa stabilité et tout changement le long de la courbe pour détecter des bifurcations. Dans ce cas-ci, la fonction  $F$  représente le membre de droite de notre système dans  $\mathbb{R}^2$  (ex. : (1.1.9)) et  $\lambda$  est tout simplement un paramètre (ex. :  $\delta$ ). Pour les diagrammes de bifurcations en fonction de 2 paramètres, nous rajoutons une dimension à l'espace de paramètre selon la remarque (B.4.1) (ex. :  $(\alpha, \delta)$ ) et utilisons pour  $F$  les équations satisfaisant à la bifurcation, par exemple les figures de bifurcation de Hopf avec l'équation de la trace nulle. Pour la bifurcation globale de double cycle, il suffit à AUTO de suivre les courbes de paramètres des solutions périodiques dans l'espace de paramètre et de détecter une valeur limite de ces courbes, c'est-à-dire une valeur où deux cycles limites se confondent. Pour la boucle hétéroclinique, AUTO suit une courbe de paramètres d'une solution périodique de grande période jusqu'à entrer en collision avec une courbe de paramètres d'un point fixe dans l'espace de paramètres. Cependant, pour suivre la courbe de paramètre d'une boucle, d'autres équations doivent être prises en compte comme celle des variétés stable et instable aux points de selle. Nous devons également multiplier les équations du système par une constante afin de contrôler la période des solutions périodiques ce qui peut potentiellement causer davantage d'erreurs numériques.