Université de Montréal

Fibrés symplectiques et la géométrie des difféomorphismes hamiltoniens

par
Dustin Connery-Grigg

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Août, 2016

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Fibrés symplectiques et la géométrie des difféomorphismes hamiltoniens

présenté par:

Dustin Connery-Grigg

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Octavian Cornea,	président-rapporteur
François Lalonde,	directeur de recherche
Vestislav Apostolov,	membre du jury

Mémoire accepté le: 27 octobre 2016

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur quelques éléments de la théorie des fibrés symplectiques et leurs usages en étudiant la géométrie hoferienne sur le groupe de difféomorphismes hamiltoniens. En particulier en assumant un certain confort avec les notions de base de la géométrie différentielle et de la topologie algébrique on développe dans le premier chapitre les rudiments nécessaires de la théorie des G-fibrés et, dans la deuxième, tous les faits nécessaires de la topologie symplectique et les difféomorphismes hamiltoniens pour comprendre la théorie de base des fibrés symplectiques, à voir le morphisme de flux et ses liens aux isotopies hamiltoniennes. Le troisième chapitre présente les fondements des fibrés symplectiques se conclu en construisant la forme de couplage dans un langage invariant et en présentant la caractérisation des fibrés symplectiques, dont le groupe de structure réduit au groupe hamiltonien. Le mémoire se termine en présentant quelques applications des fibrés hamiltoniens à la géométrie de Hofer, en particulier une caractérisation de la partie positive de la norme de Hofer d'un lacet hamiltonien en termes du $K-$aire du fibré au-dessus de la sphère associé et une démonstration de la non-dégénérescence de la norme de Hofer pour des variétés symplectiques fermées.

Mots clés: $G-$fibrés, géométrie symplectique, fibrés symplectiques, fibrés hamiltoniens, morphisme de flux, norme de hofer, forme de couplage, k-aire

ABSTRACT

This thesis presents a reasonably complete account of the elements theory of symplectic and Hamiltonian fibrations. We assume a familiarity and comfort with the basic notions of differential geometry and algebraic topology but little else. Proceeding from this, the first chapter develops the necessary notions from the theory of fiber bundles and $G-$fiber bundles, while the second chapter develops all the notions and theorems required to understand the later theory of symplectic fibrations. Most notably the second chapter includes a detailed account of the classical relationship between the flux homomorphism and Hamiltonian isotopies. The third chapter is where we develop the theory of symplectic and locally Hamiltonian fiber bundles, and in particular give an invariant construction of the coupling form on a symplectic fibration admitting an extension class. the third chapter ends with a proof of a structure theorem characterizing those symplectic fibrations for which the structure group reduces to the Hamiltonian group. In the final chapter, we present some applications of the theory of Hamiltonian fibrations by the way of characterizing the positive part of the Hofer norm of a Hamiltonian loop as the K-area of its associated Hamiltonian bundle over the sphere, and we finish by giving a proof of the non-degeneracy of the Hofer norm for closed symplectic manifolds.

Key words: $G-$fiber bundles, symplectic fiber bundles, Hamiltonian fiber bundles, Flux morphism, Hofer norm, K-area, coupling form

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ce mémoire prend pour objet trois tâches :

1. De présenter, d'une manière assez indépendante, les bases de la théorie des fibrés symplectiques et hamiltoniens en n'assumant qu'un confort avec les langages et théorèmes de base de la géométrie différentielle et de l'algèbre topologique.
2. De faire un cas philosophique pour l'importance et la naturalité de ces objets dans la géométrie symplectique dans le sens qu'ils suggèrent et répondent à certaines questions « morales » (des « pourquoi ? »'s et des « mais qu'est-ce que c'est *vraiment* ? ») dans le monde symplectique d'une manière agréable. (Bien sûr qu'un jugement de succès ou non dans cet effort sera en grand partie une question de goût)
3. De fournir la lectrice inconvaincue de notre succès dans cette deuxième tâche avec un argument pratique pour l'importance des fibrés symplectiques tout de même.

La première tâche est effectuée dans les premiers trois chapitres qui correspondent, en ordre, à une présentation des faits dont on aura besoin de la théorie des $G-$fibrés, à une présentation de la théorie de base des variétés symplectiques et les difféomorphismes hamiltoniens et à une présentation des fondements des fibrés symplectiques et hamiltoniens.

Pour la deuxième tâche, note qu'on peut interpréter les $G-$fibrés comme des « espaces tordus par l'action de G sur la fibre » (à vrai dire, l'action d'un fibré $G-$principal qui spécifie les manières dans lesquelles on peut tordre l'action de G) et c'est alors une question naturelle qui porte sur la fermeture catégorique par rapport à ces produits tordus si des tels produits avec $G = Symp(M,\omega)$ pour une variété symplectique (M,ω), produisent toujours un espace total symplectique (avec une structure symplectique compatible avec celle de la fibre) lorsque la fibre et la base sont tous les deux des variétés symplectiques. Il se trouve que ceci n'est pas le cas, mais qu'on peut caractériser les fibrés dont ceci est le cas comme les fibrés « localement hamiltoniens » (ceux dont le fibré induit du fibré d'holonomie au-dessus de tout disque dans la base ont comme groupe de structure $Ham(M,\omega)$), et alors les fibrés symplectiques et hamiltoniens nous donnent une façon naturelle et géométrique de comprendre l'importance du groupe $Ham(M,\omega)$ qui est, *a priori* défini d'une façon un peu *ad hoc* ; $Symp_0(M,\omega)/Ham(M,\omega)$ mesure précisément l'échec de la catégorie symplectique d'être fermée sous les produits tordus pas $Symp(M,\omega)$ des fibrés à fibre (M,ω).

La troisième tâche est effectuée dans le dernier chapitre, où l'on donne des applications de la théorie des fibrés hamiltoniens au-dessus de la sphère et du disque à l'approximation de la norme hoferienne des lacets hamiltoniens, et plus généralement la séminorme hoferienne sur le revêtement universel $\widetilde{Ham}(M,\omega)$. Ensuite, en assumant le théorème de Banyaga sur la simplicité de $Ham(M,\omega)$ et un résultat de [16], on présente une preuve de la non-dégénérescence de la norme de Hofer sur $Ham(M,\omega)$ lorsque M est une variété fermée.

Il y a, bien sûr, plein de sujets intéressants dans la théorie des fibrés symplectiques qu'on n'aborde même pas dans ce mémoire. Entre autres, la théorie des sections pseudoholomorphes et ses applications en construisant le morphisme de Seidel et plein d'autres morphismes importants dans la cohomologie quantique et l'homologie de Floer (voir, par exemple [8] ou [18]), les questions de « c-splitting » (voir [11]) et plusieurs autres, la lectrice qui se trouve interpellée par ce sujet est fortement encouragée de consulter les références contenues dans ces pages ; nous avons fait un effort d'indiquer dans l'introduction de chaque chapitre des références aux oeuvres qui ont influencé la présentation des idées qui suivent, et une telle lectrice trouvera certainement d'autres sujets qui l'intéresseront en les consultant.

CHAPITRE 1

FIBRÉS, G-FIBRÉS ET FIBRÉS LISSES

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'introduire le premier de nos protagonistes : les espaces fibrés. Ces objets sont des espaces topologiques qui sont « localement des produits » de deux espaces M et B, dites « la fibre » et « la base » respectivement, dans le sens qu'autour de tout point dans la base, il existe un voisinage U tel que l'espace en question est isomorphe dans un sens approprié à $M \times U$, et l'espace total est construit en recollant des telles espaces ensembles d'une manière similaire à la construction des variétés en recollant des morceaux d'espaces euclidienne. Il se trouve utile à spécifier de tels recollements par l'action d'un groupe sur les fibres qui contrôle les « changements de coordonnées » lorsqu'on passe d'un voisinage localement trivial à un autre. Ceci nous mène à la notion des G-fibrés principaux, qui jouent le rôle de rassembler tous les « changements de coordonnées » possibles au-dessus de la base donnée. Étant donné une fibre M et une base B, un « $G-$fibré au-dessus de B avec fibre M » est alors un espace localement trivial qui est globalement « tordu » par l'action de G sur M. Comme dans le monde complexe, il est possible d'obtenir une certaine mesure de cette « $G-$torsion » en observant, d'une manière appropriée, à quel point une fibre fixée est transformée lorsqu'on fait le tour d'un lacet dans la base en agissant tout le long sur la fibre dans une manière compatible avec le recollement décrit par l'action de G sur l'espace total. Rendre cette idée rigoureuse nous mène à la notion d'une « connexion », et de tels objets joueront un rôle principal dans notre étude de la topologie des fibrés symplectiques aussi bien que dans notre construction de mesures pour des difféomorphismes hamiltoniens à travers les fibrés symplectiques.

Les premières deux sections de ce chapitre poseront les fondations des espaces fibrés et des $G-$fibrés, et s'agissent principalement des définitions et des propriétés de base qui seront utilisées tacitement partout dans le reste du texte. Section 1.4 se concerne avec une démonstration du fait que des bases paracompactes homotopes possèdent « les mêmes » $G-$fibrés principaux localement triviaux, un fait classique souvent utile et, en fait, germinale dans la théorie des $G-$fibrés. La développent dans ces trois sections est fortement influencé par le joli livre de Husemöller [5]. Dans la section 1.5, on développe la notion d'une connexion à travers la notion des connexions d'Ehresmann et on étudie la structure principalement « fibré » qu'ils mesurent en étudiant comment les objets P et (P, π) se distinguent dans la perspective « d'Erlangen ». On ne les développe pas dans la généralité des connexions sur un $G-$fibré principal pourtant, en partie pour limiter les préalables requis et en partie parce que la preuve classique que tout $G-$fibré admette un $G-$connexion en passant par les connexions sur les $G-$fibrés principaux utilise d'une manière essentielle que G soit un groupe lisse de dimension finie et les groupes qui nous intéresse sont de dimension infinie. La preuve peut certainement être adaptée pour éviter ces hypothèses (voir par exemple [7]) mais encore une fois, cela demande une préparation non triviale et comme dans notre cas on peut établir l'existence des connexions pertinentes par d'autres moyens, on se permet d'éviter ces généralités.

1.2 Fibrés : définitions et notions de base

Définition 1.2.1 (Espace fibré)**.** Un **fibré** (au dessus d'un espace B) est un triplet (P, π, B) où P et B sont des espaces topologiques nommés **l'espace total** et la **base** du fibré respectivement et une application continue $\pi : P \to B$ qu'on appelle la **projection** du fibré. Pour chaque $b \in B$ l'espace topologique $\pi^{-1}(b)$ que l'on dénote souvent par M_b est dit la **fibre au-dessus de** b.

Exemple 1.2.1 (Fibrés triviaux)**.** Étant donné deux espaces topologiques X et Y on peut formé deux *fibrés triviaux*, chacun avec espace total $X \times Y$: $(X \times Y, \pi_X, X)$ où π_X dénote la projection naturelle et telle que toutes les fibres sont homéomorphes à Y et $(X \times Y, \pi_Y, Y)$ avec chaque fibre homéomorphe à X.

Exemple 1.2.2 (Fibré tangent)**.** À chaque variété lisse M, on peut associer son fibré tangent (TM, p, M)

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{(x, v_x) | v_x \in T_x M\}$$

où $T_x M$ est l'espace tangent à $x \in M$, l'application de projection est donnée par $p(x, v_v) = x$ et chaque fibre est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ où n est la dimension de la variété.

Définition 1.2.2 (Morphismes des fibrés)**.** Soient (P_1, π_1, B_1) et (P_2, π_2, B_2) deux espaces fibrés. Une application continue $\Phi : P_1 \to P_2$ est dite un **morphisme de fibrés** ou une **application de fibrés**, noté souvent par $\Phi : (P_1, \pi_1) \to (P_2, \pi_2)$ s'il existe une application continue $\varphi : B_1 \to B_2$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\Phi} & P_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \end{array}$$

Dans ce cas, on dit soit que Φ **descend à** φ ou que Φ **recouvre** φ quant à φ, on dit qu'il **se relève à** Φ. On décrit des fois le morphisme de fibrés Φ par la paire (Φ, φ) où Φ descend à φ lorsqu'on veut souligner le rapport entre ces deux applications.

Notons que la commutativité du diagramme ci haute force la continuité de l'application $\Phi|_{F_{b_1}} : F_{b_1} \to F_{\varphi(b_1)}$ pour chaque $b_1 \in B_1$, c'est-à-dire que les morphismes des fibrés *envoient des fibres en des fibres*.

Exemple 1.2.3 (La différentielle dans la catégorie lisse)**.** Soient M et N des variétés lisses et soit $f : M \to N$ une application lisse entre les deux alors la différentielle

$$\begin{aligned} Df : TM &\to TN \\ (x,v) &\mapsto (f(x), Df(v)) \end{aligned}$$

descend à f.

Définition 1.2.3 (La catégorie des fibrés)**.** On voit facilement que les définitions ci-haut se rejoignent pour donner une catégorie **Fib** telle que les objets sont des espaces fibrés et les morphismes sont des morphismes de fibrés. En vue de ceci, on dira qu'une application de fibrés est un **isomorphisme de fibrés** si elle est un isomorphisme dans **Fib** et l'on dira que deux fibrés (π_1, B_1) et (P_2, π_2, B_2) sont isomorphe s'ils sont isomorphes en **Fib** . Note qu'un isomorphisme en **Fib** recouvre forcément un homéomorphisme des bases, alors deux fibrés ne peut être isomorphes que si'ils ont la même base.

Pour chaque espace topologique $B \in$ **Top** on peut former la sous-catégorie $\mathbf{Fib}_B$ dont les objets sont les fibrés avec base B et les morphismes, dits des **B-morphismes**, sont les morphismes de fibrés au-dessus de B qui recouvrent id_B. C'est-à-dire que les morphismes dans $\mathbf{Fib}_B$ sont des diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Remarque. On aura pu prendre une notion de B-morphisme moins restrictif en relâchant la condition de recouvrir id_B pour celui de recouvrir n'importe quelle application continue $B \to B$, mais comme on n'aura pas besoin de cette généralité, on l'omet ici.

Dans ce qui suit on aura souvent occasion de nous concerner des fibrés dont tous les espaces et applications impliqués seront *lisses*, à ce titre il sera utile d'établir la définition suivante. Rappelons qu'il y a un foncteur oublieux $F : \mathbf{Top}_{C^\infty} \to \mathbf{Top}$ entre la catégorie des variétés lisses et celle des espaces topologiques qui oublie toute structure lisse.

Définition 1.2.4 (Fibrés lisses, première définition)**.** Un fibré (P, π, B) est dit un **fibré lisse** si $P, B \in F(Obj(\mathbf{Top}_{C^\infty}))$ et $\pi \in F(Mor(\mathbf{Top}_{C^\infty}))$.

Remarque. Rappelons (voir par exemple [4]) que toute fonction continue entre deux variétés

$$f : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$$

qui est lisse sur les bords est homotope à une application lisse

$$\tilde{f} : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$$

où $\tilde{f}|_{\partial M} = f|_{\partial M}$. Il en suit qu'il n'existe aucune différence essentielle entre la théorie d'homotopie des fibrés lisses dans laquelle garde une trace de la structure lisse et qu'on insiste que toutes les applications impliquées soient lisses et la théorie d'homotopie dans laquelle on ignore cette structure lisse.

1.2.1 Fibrés induits

Définition 1.2.5 (Fibrés induits)**.** Soient $\varphi : B_1 \to B_0$ une application continue et $P \xrightarrow{\pi} B_0$ un fibré alors on peut former le **fibré induit par** φ, noté par $(\varphi^*P, \varphi^*\pi, B_1)$ ou $\varphi^*(P, \pi)$, comme suit : on construit l'espace total φ^*P par

$$\varphi^*P := \{(b_1, p) \in B_1 \times P : \ \varphi(b_1) = \pi(p)\}$$

et l'on pose $\varphi^*\pi : (b_1, p) \mapsto b_1$. Il existe aussi un morphisme de fibrés tautologique dit le **morphisme canonique** du fibré induit

$$\begin{aligned} \varphi_{(P,\pi)} : \varphi^*P &\to P \\ (b_1, p) &\mapsto p \end{aligned}$$

et c'est évident par la construction de ces objets que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \varphi^*P \arrow[r, "\varphi_{(P,\pi)}"] \arrow[d, "\varphi^*\pi"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ B_1 \arrow[r, "\varphi"] & B_0 \end{tikzcd}$$

De plus, notons pour la future que pour tout $b_1 \in B_1$

$$\begin{aligned} (\varphi^*\pi)^{-1}(b_1) &= \big\{(b_1, p) \in \{b_1\} \times P : \varphi(b_1) = \pi(p)\big\} \\ &= \big\{(b_1, p) \in \{b_1\} \times \pi^{-1}(\varphi(b_1))\big\} \end{aligned}$$

alors les fibres du fibré induit sont homéomorphes de façon canonique aux fibres du fibré original.

Exemple 1.2.4 (Fibré induit d'un fibré trivial)**.** Soient $(X \times Y, \pi_1, X)$ le fibré trivial et $\varphi : Z \to X$ une application continue alors $\varphi^*(X \times Y, \pi_1) \simeq Z \times Y$ car on peut définir l'application

$$\begin{aligned} \Psi : Z \times Y &\to \varphi^*(X \times Y) \\ (z, y) &\mapsto \big(z, (\varphi(z), y)\big) \end{aligned}$$

et Ψ est évidemment continue, satisfait $\varphi^*\pi \circ \Psi(z, y) = z = \pi_{Z \times Y}$ et possède inverse $(z, (x, y)) \mapsto (z, y)$, d'où Ψ est un isomorphisme de fibrés.

Il en résulte que le fibré induit satisfait une propriété universelle :

Proposition 1.2.1. *Soient (P, π, B) et (P', π', B') deux fibrés et $(\Phi, \varphi) : (P', \pi') \to (P, \pi)$ un morphisme de fibrés alors il existe un unique morphisme de fibrés $u_\Phi : (P', \pi') \to \varphi^*(P, \pi)$*

tel que

$$\varphi^*_{(P,\pi)} \circ u_\Phi = \Phi$$

Démonstration. On construit u_Φ en posant pour $x \in P'$

$$u_\Phi(x) = (\pi'(x), \Phi(x))$$

C'est évident que u_Φ vérifie la relation désirée, et comme (Φ, φ) est un morphisme de fibrés on voit $\varphi(\pi'(x)) = \pi(\Phi(x))$ est donc u_Φ est un morphisme de fibrés. Pour vérifier que u_Φ est l'unique tel morphisme, suppose que $v : (P', \pi') \to \varphi^*(P, \pi)$ est un morphisme de fibrés tel que $\varphi^*_{(P,\pi)} \circ v = \Phi$ alors pour $x \in P'$ il faut que $\varphi^*\pi \circ v(x) = \pi'(x)$ comme v est un B_1-morphisme (et tout B_1-morphisme recouvre id_{B_1}). D'où, la relation $\varphi^*_{(P,\pi)} \circ v = \Phi$ force

$$v(x) = (\pi'(x), \Phi(x)) = u_\Phi(x)$$

$\square$

La nature formelle des constructions ci-haut pourrait nous porter à croire qu'il y a de la structure catégorique qui se cache quelque part, et c'est bien le cas : soit $\varphi : B_1 \to B_0$ une application continue alors à partir de φ on peut construire un foncteur

$$\varphi^* : \mathbf{Fib}_{B_0} \to \mathbf{Fib}_{B_1}$$

qui envoi $(P, \pi, B_0) \mapsto (\varphi^*P, \varphi^*\pi, B_1)$. Il nous reste à définir φ^* sur les morphismes de $\mathbf{Fib}_{B_0}$. Soit $(\Psi, id_{B_0}) : (P, \pi) \to (P', \pi')$ un tel morphisme pour $(b_1, x) \in \varphi^*P$ posons

$$\varphi^*\Psi(b_1, x) = (b_1, \Psi(x))$$

C'est alors évident par la définition du fibré induit que $\varphi^*\Psi : \varphi^*(P, \pi) \to \varphi^*(P', \pi')$ est un morphisme de fibrés, que $\varphi^* id_P = id_{\varphi^*P}$ et que si $\Psi' : (P', \pi') \to (P'', \pi'')$ est un autre B_0-morphisme alors

$$\varphi^*(\Psi' \circ \Psi)(b_1, x) = (b_1, \Psi' \circ \Psi(x)) = \varphi^*(\Psi')(b_1, \Psi(x)) = \varphi^*(\Psi') \circ \varphi^*(\Psi)(b_1, x)$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 1.2.2. *Soit $\varphi : B_1 \to B_0$ une application continue entre deux espaces topologiques alors l'allocation*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathbf{Fib}_{B_0} &\to \mathbf{Fib}_{B_1} \\ (P, \pi) &\mapsto \varphi^*(P, \pi) \\ \big(\Psi : (P, \pi) \to (P', \pi')\big) &\mapsto \big(\psi^*\Psi : \psi^*(P, \pi) \to \psi^*(P', \pi')\big) \end{aligned}$$

est un foncteur.

Dans le fond, le morphisme canonique nous donne une transformation naturelle entre chaque tel foncteur φ^* et l'identité sur $\mathbf{Fib}_{B_0}$:

Proposition 1.2.3. *Soit $\varphi : B_1 \to B_0$ une application continue entre deux espaces topologiques alors pour tout objet $(P,\pi),(P',\pi')$ et morphisme Ψ dans $\mathbf{Fib}_{B_0}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^*(P,\pi) & \xrightarrow{\varphi^*\Psi} & \varphi^*(P',\pi') \\
\big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{(P,\pi)}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{(P',\pi')}} \\
(P,\pi) & \xrightarrow{\quad\Psi\quad} & (P',\pi')
\end{array}$$

Démonstration. Calculons pour $(b_1,x) \in \varphi^*P$

$$\Psi \circ \varphi_{(P,\pi)}(b_1,x) = \Psi(x) = \varphi_{(P',\pi')}(b_1,\Psi(x)) = \psi_{(P',\pi')} \circ \varphi^*\Psi(b_1,x)$$

comme voulu. □

Le résultat suivant nous assure que ces foncteurs se comportent bien sous la composition :

Proposition 1.2.4. *Soient $\varphi_0 : B_1 \to B_0$, $\varphi_1 : B_2 \to B_1$ deux applications continues entre des espaces topologiques et (P,π) un fibré au-dessus de B_0 alors*

$$(\varphi_1 \circ \varphi_0)^*(P,\pi) \simeq (\varphi_1^* \circ \varphi_0^*)(P,\pi)$$

De plus, $id_{B_0}^*(P,\pi) \simeq (P,\pi)$

Démonstration. Pour $(b_2,x) \in (\varphi_1 \circ \varphi_0)^*(P,\pi)$ définissons

$$\begin{aligned}
\Psi : (\varphi_1 \circ \varphi_0)^*(P,\pi) &\to (\varphi_1^* \circ \varphi_0^*)(P,\pi) \\
(b_2,x) &\mapsto (b_2,(\psi_1(b_2,x)))
\end{aligned}$$

Alors c'est claire que Ψ est un isomorphisme de B_2-fibrés. Le deuxième énoncé suit du fait que

$$\begin{aligned}
\Psi : (P,\pi) &\to id_{B_0}^*(P,\pi) \\
x &\mapsto (\pi(x),x)
\end{aligned}$$

est évitement un isomorphisme avec inverse donné par le morphisme canonique. □

Définition 1.2.6 (Restriction d'un fibré)**.** Soient (P,π,B) un fibré et A un sous-ensemble de B alors on peut définir la **restriction** de (P,π,B) à A, notée $(P,\pi,B)|A$ ou des fois $(\pi^{-1}(A),\pi,A)$ comme le fibré $\pi^{-1}(A) \xrightarrow{\pi} A$.

Remarque. Notons que si $i_A : A \to B$ est l'application d'inclusion alors $(i_A^*P, i_A^*\pi, A) \simeq (\pi^{-1}(A),\pi,A)$ dans **Fib** via le morphisme de fibrés

$$\begin{aligned}
\Phi : \pi^{-1}(A) &\to i_A^*P \\
p &\mapsto (\pi(p),p)
\end{aligned}$$

Définition 1.2.7 (Fibrés localement triviaux)**.** Un fibré (P,π,B) est dit **localement trivial** (avec **fibre modèle** M) si'il existe un recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de B et des isomorphismes de fibrés

$$\Phi_\alpha : (U_\alpha \times M_\alpha, \pi_{U_\alpha}, U_\alpha) \to (P|_{U_\alpha}, \pi|_{U_\alpha}, U_\alpha)$$

pour chaque $U_\alpha \in \mathfrak{U}$. Les applications Φ_α sont appelées des **cartes locaux** ou des **trivialisations locaux** du fibré et $\mathfrak{U}$ est un **recouvrement trivialisant** de B. La collection $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ est dite **un atlas**.

Notons que pour tout $\alpha, \beta \in \Lambda$ avec $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ on peut définir la fonction continue

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \times M_\alpha \to U_\alpha \cap U_\beta \times M_\beta$$

comme $\phi_{\alpha\beta} := \pi_\alpha \circ (\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Ces applications sont appelées des **applications de transition** et c'est évident à partir de leur définition que

1. $\phi_{\alpha\beta}^{-1} = \phi_{\beta\alpha}$
2. $\phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\lambda} = \phi_{\alpha\lambda}$

d'où il suit facilement que M_β et M_α sont homéomorphes pour tout $\alpha, \beta \in \Lambda$ et donc il n'existe aucune ambiguïté en spécifiant la fibre modèle à homéomorphisme près.

Définition 1.2.8 (Fibrés vectoriels)**.** Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit B un espace topologique alors un fibré localement trivial au-dessus de B avec fibre V est dit un **fibré vectoriel** de rang n si'il existe un recouvrement trivialisant de B tel que les applications de transition $\phi_{\alpha\beta} : V_\beta \to V_\alpha$ sont des applications *linéaires* pour tout α, β, c'est-à-dire qu'on insiste que $\phi_{\alpha\beta} \in GL(V)$.

Exemple 1.2.5 (Fibrés tangents)**.** Soit M une variété lisse de dimension n, alors par définition M admet un recouvrement d'ouverts $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tel que pour chaque $\alpha \in \Lambda$ il y a un difféomorphisme

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

et la fonctorialité de la différentielle implique que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TM \supset^{-1} (U_\alpha) & \xrightarrow{d\varphi_\alpha} & TV_\alpha \simeq V_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ \Big\downarrow p & & \Big\downarrow \pi_{V_\alpha} \\ U & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & V_\alpha \end{array}$$

commute et $d\varphi_\alpha$ est linéaire sur chaque fibre par construction d'où (comme φ_α est un difféomorphisme de U_α à V_α pour chaque α) que les $d\varphi_\alpha$'s nous donnent un trivialization local de TM donc TM est un fibré vectoriel de rang n.

La classe de fibrés localement triviaux est une classe d'objets convenables pour plusieurs raisons, l'un d'eux est qu'elle est fermée sous les fibrés induits :

Proposition 1.2.5. *Soient (P,π,B_0) un fibré localement trivial et $\varphi : B_1 \to B_0$ une application continue, alors $\varphi^*(P,\pi)$ est un fibré localement trivial.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement trivialisant de (P,π) sur B_0, alors $\varphi^{-1}\mathfrak{U} = \{\varphi^{-1}U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de B_1. Soient

$$\begin{aligned} i_\alpha &: U_\alpha \to B_0 \\ j_\alpha &: \varphi^{-1}U_\alpha \to B_1 \end{aligned}$$

les inclusions évidentes, alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "\varphi"] & B_0 \\ \varphi^{-1}U_\alpha \arrow[u, "j_\alpha"] \arrow[r, "\varphi_\alpha := \varphi|_{\varphi^{-1}U_\alpha}"] & U_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

et donc par nos résultats sur la fonctorialité et comportement des fibrés induits, on a

$$(\varphi \circ j_\alpha)^*(P,\pi) \simeq \varphi_\alpha^*(i_\alpha^*(P,\pi))$$

et $i_\alpha^*(P,\pi)$ est le fibré trivial au-dessus de U_α par l'hypothèse de la trivialité locale de (P,π), et le fibré induit d'un fibré trivial est trivial, d'où $(\varphi \circ j_\alpha)^*(P,\pi)$ est trivial et donc $\varphi^*(P,\pi)$ est localement trivial. □

Définition 1.2.9 (Sections)**.** Étant donné un fibré (P,π,B) une application continue $\sigma : B \to P$ est dite une **section** de (P,π,B) si $\pi \circ \sigma = id_B$

Exemple 1.2.6 (Le graphe d'une fonction)**.** Soient $X, Y \in$ **Top** deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue alors la condition que f soit une fonction au lieu d'une relation est précisément la condition que le **graphe de** f

$$\begin{aligned} id_X \times f : X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

soit une section du fibré trivial $(X \times Y, \pi_X, X)$.

Exemple 1.2.7 (Champs vectoriels)**.** Soit M une variété lisse avec fibré tangent TM alors une section $\sigma : M \to TM$ n'est qu'une allocation continue $\sigma(x) = (x, v_x) \in T_xM$, c'est-à-dire que $\sigma : M \to TM$ est un champ vectoriel continu sur M

Exemple 1.2.8 (Sections des fibrés localement triviaux)**.** Alors que la trivialité locale peut sembler une hypothèse forte (selon notre désire de nous battre avec les fibres singulières), les fibrés localement triviaux ont l'avantage que leurs sections (si elles existent) sont assez simples à décrire en termes des données locales. Étant donné un fibré localement trivial (P,π,B) avec fibre M, recouvrement trivialisant $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ et trivialisations locaux

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times M$$

toute section $\sigma : B \to P$ peut être décrit comme une collection de graphes locaux $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha : U_\alpha &\to U_\alpha \times M \\ b &\mapsto (b, \Phi_\alpha \circ \sigma(b)) \end{aligned}$$

de plus, toute telle collection d'applications satisfaisant la condition nécessaire évidente $\phi_{\beta\alpha}(\pi_M \circ \sigma_\alpha) = \pi_M \circ \sigma_\alpha$ est une collection de graphes locaux d'une section globale $\sigma : B \to P$.

Exemple 1.2.9 (Section zéro d'un fibré vectoriel)**.** Soit (P,π,B) un fibré vectoriel de rang n avec fibre modèle V alors (P,π) possède une section globale canonique $0_\pi : B \to P$ appelée la **section zéro** qu'on peut définir en choisissant un recouvrement trivialisant $\mathfrak{U}$ de B et en posant

$$\begin{aligned} (0_\pi)_\alpha : U_\alpha &\to U_\alpha \times V \\ b &\mapsto (b, 0) \end{aligned}$$

et comme les applications de transition de tout fibré vectoriel sont linéaire sur les fibres ils envoient forcément 0 à 0 dans V d'où la collection $\{(0_\pi)_\alpha\}$ définit une section globale de (P,π).

1.3 Groupes de structure et $G-$fibrés

Définition 1.3.1 (Groupes topologiques)**.** Un **groupe topologique** est un triplet $(G,\cdot,\tau)$ avec $(G,\cdot)$ un groupe et (G,τ) un espace topologique tel que

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} inv : G &\to G \\ h &\mapsto h^{-1} \end{aligned}$$

sont continues pour tout $g \in G$.

Exemple 1.3.1 (Groupes de Lie)**.** Tout groupe de Lie G est un groupe topologique avec une structure lisse additionnelle telle que les applications L_g et inv sont lisses en plus d'être continues.

Définition 1.3.2 ($G-$espaces)**.** Soit G un groupe topologique alors on dit qu'un espace topologique X est un $G-$**espace à droit** s'il existe une application continue

$$\begin{aligned} X \times G &\to X \\ (x,g) &\mapsto x.g \end{aligned}$$

dit la G**-action** (notée souvent simplement par xg) telle que $\forall g,h \in G$, et $x \in X$

1. $x.(gh) = (x.g).h$
2. $x.id_G = x$

on dit qu'un espace topologique X est un G**-espace à gauche** s'il possède plutôt une application continue

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

qui satisfait les conditions analogues aux celles d'un $G-$espace à droit, ou d'une manière équivalente, telle que l'application

$$\begin{aligned} X \times G &\to X \\ (x,g) &\mapsto x.g := g^{-1}.x \end{aligned}$$

fait que X est un $G-$espace à droit.

Exemple 1.3.2 (Groupes de difféomorphismes)**.** Toute variété lisse M est un $Diff(M)-$espace à droit sous l'action

$$x.\phi := \phi(x)$$

$\forall x \in M$, $\forall \phi \in Diff(M)$.

Définition 1.3.3 (G-morphismes)**.** Soient X et Y des $G-$espaces à droit alors une application continue $f : X \to Y$ est un $G-$**morphisme** ou une G**-application** si $\forall g \in G\ f(xg) = f(x)g$.

Muni des définitions ci-haut on peut définir la catégorie $\mathbf{Top}_G$ dont les objets sont les $G-$espaces à droit et les morphismes sont les $G-$morphismes. On peut également définir des fibrés dans le cadre des $G-$espaces

Définition 1.3.4. Un $G-$**fibré** est un fibré (P,π,B) tel que P,B sont des $G-$espaces à droit et π est un $G-$morphisme

Exemple 1.3.3 (G-fibrés avec $G-$action triviale sur la base)**.** Notons que tout espace topologique B peut être donné la structure de G-espace à droit en le munissant de la $G-$action triviale $bg \mapsto b$ et qu'avec cette $G-$action choisie sur la base la notion d'un $G-$fibré est celle d'un fibré dans le sens précédent tel que $\forall g \in G$ l'application

$$\begin{aligned} R_g : P &\to P \\ p &\mapsto p.g \end{aligned}$$

satisfait $\pi \circ R_g = \pi$, c'est-à-dire que c'est un morphisme de fibrés, et les fibres $\pi^{-1}(b)$ sont des $G-$espaces avec $G-$action provenant de la restriction de la $G-$action sur l'espace total.

Exemple 1.3.4 (Modèle pour les fibrés principaux)**.** Soit X un $G-$espace à droit alors pour tout $x \in X$ on peut définir sa $G-$**orbite**

$$xG := \{y \in X : \ x.g = y, \ \exists g \in G\}$$

et la relation $x \sim x' \Leftrightarrow x' \in xG$ définit une relation d'équivalence et l'on note par X/G l'ensemble des telles classes d'équivalence. Si l'on note alors

$$\begin{aligned} q : X &\to X/G \\ x &\mapsto xG \end{aligned}$$

l'application de quotient et l'on munit X/G de la topologie quotient et la $G-$action triviale alors $(X, q, X/G)$ est un $G-$fibré, dit **le fibré associé au $G-$espace** X.

Définition 1.3.5 (Morphismes de G-fibrés)**.** Si (P_1, π_1, B_1) et (P_2, π_2, B_2) sont des $G-$fibrés alors on définit un **morphisme de $G-$fibrés** ou une **application de $G-$fibrés** comme étant un morphisme de fibrés

$$(\Phi, \varphi) : (P_1, \pi_1, B_1) \to (P_2, \pi_2, B_2)$$

tel que $\Phi : P_1 \to P_2$ et $\varphi : B_1 \to B_2$ sont tous les deux des $G-$morphismes.

Les définitions ci-haut nous donnent une autre catégorie $\mathbf{Fib}_G$ dont les objets sont des $G-$fibrés et les morphismes sont des morphismes de $G-$fibrés.

Définition 1.3.6 (G-espaces libres)**.** Un G-espace à droit X est dit **libre** lorsque l'action de G sur X est libre. C'est à dire $\forall x \in X \ x.g = x.h \Rightarrow g = h$. Une caractérisation plus géométrique des $G-$espaces libres se donne en définissant l'application de translation :
Considérons $X^* = \bigcup_{g \in G} Graphe(L_g) \subset X \times X$ c'est à dire

$$X^* = \{(x, x.g) \in X \times X : \ g \in G\}$$

alors on définit **l'application de translation** par la correspondance

$$\tau : X^* \to G$$

telle que $x.\tau(x,y) = y$. C'est-à-dire que pour chaque paire (x,y) avec $y = x.g$ pour un certain

$g \in G$, $\tau(x,y)$ est un choix d'un élément de G dont l'action envoie x à y. Il est facile à voir qu'un G-espace est libre si et seulement si'il possède une unique application de translation.

Définition 1.3.7 ($G-$fibré principal)**.** Un $G-$fibré (P,π,B) est dit **principal** si B est muni de la $G-$action triviale et P possède une unique application de translation.

Remarque. Notons que la trivialité de la $G-$action sur B implique que $\forall p \in P$ et $g \in G$, $\pi(p.g) = \pi(p)$, et par hypothèse la $G-$action sur P est libre, ce qui implique immédiatement que G agit librement sur les fibres de (P,π).

Proposition 1.3.1. *Soit (P,π,B) un fibré principal alors pour chaque $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ est homéomorphe à G.*

Démonstration. Fixons $p_0 \in P$ avec $\pi(p_0) = b$, alors comme G agit librement sur les fibres de (P,π) l'application

$$f : G \to \pi^{-1}(b)$$
$$g \mapsto p_0.g$$

est bien définie et l'application de translation de P nous fournit un inverse à f :

$$f^{-1} : \pi^{-1}(b) \to G$$
$$p \mapsto \tau(p_0,p)$$

qui existe et est continue par hypothèse et par définition,

$$p_0.\tau(p_0,p_0.g) = p_0.g$$

donc $\tau(p_0,p_0.g) = g$ comme l'action de G est libre sur P. □

Exemple 1.3.5 (Fibrés principaux associés aux sous-groupes fermés)**.** Soient G un groupe topologique et $H \subset G$ un sous-groupe fermé alors on peut considérer le fibré induit par l'application quotient

$$G \xrightarrow{q} G/H$$
$$g \mapsto gH$$

On voit aisément que $(G,q,G/H)$ est un $H-$fibré avec $H-$action triviale sur sa base et l'action de H sur G est évidement libre comme H est un sous-groupe de G alors il suit que $(G,q,G/H)$ est un H-fibré principal.

Proposition 1.3.2. *Soient X un $G-$espace à droit avec fibré associé $(X,q,X/G)$ et $\varphi : B \to X/G$ une application continue, alors φ^*X possède une unique action de G par le droit naturel* *et il existe un homéomorphisme naturel φ_G tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi^*X \arrow[dl, "q'"'] \arrow[dr, "\varphi^*q"] \arrow[rr, "\varphi_{(X,q)}"] & & X \arrow[d, "q"] \\
(\varphi^*X)/G \arrow[rr, "\varphi_G"] & & B \arrow[r, "\varphi"] & X/G
\end{tikzcd}$$

où $q' : \varphi^*X \to \varphi^*X/G$ est la projection quotient par rapport à l'action naturelle de G sur φ^*X et φ^*q est un $G-$morphisme. De plus, si $(X,q,X/G)$ est principal alors $\varphi^*(X,q)$ l'en est de même.

Démonstration. On muni φ^*X de la $G-$action suivante : pour tout $(b,x) \in B \times X$ tel que $q(x) = \varphi(b)$ et tout $g \in G$ on pose

$$(b,x).g = (b,x.g)$$

Notons qu'avec cette action $\varphi_{(X,q)}$ est un $G-$morphisme car

$$\varphi_{(X,q)}((b,x).g) = \varphi_{(X,q)}((b,x.g)) = x.g = \varphi_{(X,q)}((b,x)).g$$

en plus, c'est évident de la définition de $\varphi_{(X,q)}$ que ceci est la seule $G-$action qui fonctionne.

Ensuit, définissons $\varphi_G : (\varphi^*X)/G \to B$ par

$$\varphi_G((b,x)G) := b$$

ceci est continu, car $g(\varphi^*q^{-1}(b)) = b$ pour tout $b \in B$ et $(\varphi^*X)/G$ est muni de la topologie quotient, de plus, c'est clair que $\varphi_G((b,x)G)$ est injectif et surjectif, donc il faut seulement montrer qu'il est ouvert. Pour voir ceci, notons qe φ^*q est ouvert car pour tout ouvert basique $U \times V \cap \varphi^*X \subset B \times X$ on a que $U \cap \varphi^{-1} \circ q(V) \subset \varphi^*q(U \times V \cap \varphi^*X)$ et $U \cap \varphi^{-1} \circ q(V)$ est ouvert comme π est ouvert d'où, si $W \subset (\varphi^*X)/G$ est ouvert alors $\varphi^*q \circ q'^{-1}(W) = \varphi_G(W)$ l'en est aussi.

Finalement, si (X,q) est un $G-$fibré principal alors X possède une application de translation

$$\tau : X^* \to G$$

qui induit une application de translation $\varphi^*\tau$ sur (φ^*X, φ^q) en notant que $((b_1,x_1),(b_2,x_2)) \in$

$(\varphi^*X)^*$ si et seulement si $(x_1,x_2) \in X^*$ et en posant

$$\varphi^*\tau((b_1,x_1),(b_2,x_2)) := \tau(x_1,x_2)$$

et ça se voit aisément que $\varphi^*\tau$ est une application de translation. □

La valeur principale (ha) des $G-$fibrés principaux est qu'ils nous fournissent d'un moyen à comprendre les fibrés plus généraux dont les fibres sont des G-espaces à partir de la construction suivante

Définition 1.3.8 (Fibrés associés)**.** Soient (P,π,B) un $G-$fibré principal et M un $G-$espace à gauche alors on peut définir une $G-$action à droit sur $P \times M$ par :

$$\begin{aligned}(P \times M) \times G &\to P \times M \\ ((p,m),g) &\mapsto (p.g, g^{-1}.m)\end{aligned}$$

d'où l'on peut définir le **fibré associé** à (P,π) avec fibre M comme suit : l'espace total $P[M]$ est l'espace quotient sous l'action de G :

$$\begin{aligned}&P[M] := P \times M/\sim \\ &(p,m) \sim (p',m') \Leftrightarrow \exists g \in G\, t.q.\ (p',m') = (p.g, g^{-1}.m)\end{aligned}$$

et la projection π_M est définie par

$$\pi_M((p,m)G) = \pi(p)$$

Remarque. L'application de projection est bien définie, car (P,π) est un $G-$fibré principal et en conséquence l'action de G sur P fixe les fibres de (P,π).

Proposition 1.3.3. *Soient (P,π,B) un $G-$fibré principal et M un $G-$espace à gauche, alors les fibres de $(P[M],\pi_M)$ sont homéomorphes à M.*

Démonstration. Pour $b \in B$, fixons un $p_0 \in \pi^{-1}(b)$ et définissons l'application

$$\begin{aligned}f : M &\to P[M] \\ m &\mapsto (p_0,m)G\end{aligned}$$

comme $\pi_M((p_0,m)G) = p_0$, $f : M \to \pi_M^{-1}(b)$ et encore une fois l'application de translation de P nous fournit une application inverse. Posons

$$\begin{aligned}\varphi : \pi^{-1}(b) \times M &\to M \\ (p,m) &\mapsto \tau(p_0,p).m\end{aligned}$$

et notons que pour $g \in G$,

$$p_0.\tau(p_0,p.g) = p.g = p_0.\tau(p_0,p).g$$

alors par la liberté de l'action de G sur P, $\tau(p_0, p.g) = \tau(p_0, p).g$ d'où $\varphi(p.g, g^{-1}.m) = \varphi(p,m)$ et donc φ descend au quotient par l'action de G à $\left(\pi^{-1}(b) \times M/\sim\right) \simeq \pi_M^{-1}(b)$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \pi_M^{-1}(b) &\to M \\ (p,m)G &\mapsto \tau(p_0, p).m \end{aligned}$$

et c'est clair que $\bar{\varphi}$ et f sont inverses. □

1.3.1 $G-$Fibrés localement triviaux dans des coordonnées locales

Proposition 1.3.4. *Soient (P, π, B) un $G-$fibré principal, M un $G-$espace à gauche et $(P[M], \pi_M)$ le fibré associé, alors pour toute application continue $\varphi : B' \to B$ il existe un isomorphisme de fibrés canonique g_φ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} \varphi^*(P[M], \pi_M) \arrow[r, "g_\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_{(P[M],\pi_M)}"] & ((\varphi^* P)[M], \varphi^* \pi_M) \arrow[r, "(\varphi_{(P,\pi)})_M"] & (P[M], \pi_M) \end{tikzcd}$$

où $(\varphi_{(P,\pi)})_M$ est l'application induite par le quotient

$$\varphi_{(P,\pi)} \times id_M : \varphi^* P \times M \to P \times M$$

sous l'action de G.

Démonstration. Il ne faut que rappeler les définitions des objets impliqués, rappel que par définition

$$\begin{aligned} \varphi^*(P[M], \pi_M) &= \left\{(b_1, (p,m)G) \in B_1 \times P[M] : \varphi(b_1) = \pi_M((p,m)G) = \pi(p)\right\} \\ (\varphi^* P)[M] &= \left\{((b_1, p), m)G \in ((\varphi^* P) \times M)/G : \varphi(b_1) = \pi(p)\right\} \\ \varphi_{(P[M],\pi_M)}((b_1, (p,m)G)) &= (p,m)G \\ (\varphi_{(P,\pi)})_M &= ((b_1, p), m)G) = (p,m)G \end{aligned}$$

et l'on pose alors

$$g_\varphi(b_1(p,m)G) := ((b, p), m)G$$

et c'est évident que ceci est bien défini et satisfait la conclusion de l'énoncé. □

Définition 1.3.9. Un $G-$fibré principal (P, π) au-dessus de B est **localement trivial** s'il existe un recouvrement de B par des ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tel qu'il existe une famille d'isomorphismes de $G-$fibrés principaux $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ dites des **trivialisations locaux** telle que pour chaque $\alpha \in \Lambda$

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times G \xrightarrow{\simeq} \pi_{U_\alpha}^{-1}$$

où $(U_\alpha \times G, proj_1)$ est le $G-$fibré trivial sur U_α.

Définition 1.3.10. Soit $(P[M], \pi_M)$ le fibré associé au $G-$ fibré principal (P, π, B) et le $G-$espace à gauche M, alors on dit que $(P[M], \pi_M)$ est **localement trivial** si (P, π, B) l'est.

Proposition 1.3.5. *Soit $(B \times G, \pi)$ le $G-$fibré principal trivial audessus de B et soit*

$$((B \times G)[M], \pi_M)$$

le fibré associé avec M un $G-$espace à gauche, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : (B \times G)[M] &\to B \times M \\ (b, g, y)G &\mapsto (b, g.y) \end{aligned}$$

est un $G-$isomorphisme de fibrés.

Démonstration. Il n'y a qu'à montrer que l'application est bien définie, car le reste est évident. Pour voir cela, rappelons que la $G-$action sur $(B \times G) \times M$ est donnée pour $h \in G$ par $(b, g, x).h = (b, g.h, h^{-1}.x)$, d'où Φ n'est rien que le quotient par l'application

$$(b, g, x) \mapsto (b, g.x)$$

d'où la proposition. $\square$

Définition 1.3.11. Soient G un groupe topologique et M un $G-$espace à gauche alors un fibré un (P, p, M, B) est dit un $G-$**fibré avec fibre modèle** M s'il existe un $G-$fibré principal $(\mathscr{P}[M], \pi_M)$ tel que

$$(P, p, M, B) = (\mathscr{P}[M], \pi_M)$$

Notons que si

$$(\Phi, \varphi) : (P', \pi', B') \to (P, \pi, B)$$

est un $G-$morphisme entre deux $G-$fibrés principaux et M un $G-$espace à gauche, alors on a un $G-$morphisme naturel

$$(\Phi \times id_M, \varphi) : (P' \times M, \pi' \circ proj_1) \to (P \times M, \pi \circ proj_1)$$

qui factorise alors par les quotients par la $G-$action pour nous donner un $G-$morphisme des $G-$fibrés associés :

$$\begin{array}{ccc} P' \times M & \xrightarrow{(\Phi \times id_M, \varphi)} & P \times M \\ \downarrow{q'} & & \downarrow{q} \\ (P'[M], \pi'_M) & \xrightarrow{(\Phi_M, \varphi)} & (P[M], \pi_M) \end{array}$$

Ceci nous mène aux définitions suivantes :

Définition 1.3.12. Soient M un $G-$espace à gauche et $(P'[M], \pi'_M)$, $(P[M], \pi_M)$ deux $G-$fibrés avec fibre modèle M alors un **morphisme de $G-$fibrés (avec fibre modèle M)** est un morphisme de fibrés

$$(\Phi_M, \varphi) : (P'[M], \pi'_M) \to (P[M], \pi_M)$$

tel que $(\Phi, \varphi) : (P', \pi') \to (P, \pi)$ est un morphisme de $G-$fibrés principaux.

Théorème 1.3.1. *Soit $(B \times G, \pi, B)$ le $G-$fibré principal trivial au-dessus de B, alors tout $G-$automorphisme est de la forme*

$$\begin{aligned} \Phi : (B \times G, \pi) &\to (B \times G, \pi) \\ (b, g) &\mapsto (b, \phi(b).g) \end{aligned}$$

pour une application continue $\phi : B \to G$, et chaque telle application détermine un $G-$automorphisme de $(B \times G, \pi)$ dans cette manière.

Démonstration. Pour voir que Φ est un $G-$morphisme calculons pour $g, h \in G$, $b \in B$

$$\Phi(b, gh) = (b, \phi(b).gh) = (b, \phi(b).g).h = \Phi(b, g).h$$

Pour voir que Φ est un automorphisme, posons

$$\Phi^{-1}(b, g) := (b, \phi(b)^{-1}.g)$$

d'où c'est évident que Φ et Φ^{-1} sont inverses et donc des $G-$automorphismes. Finalement si Φ est un G-automorphisme de $(B \times G, \pi)$ alors forcément $\pi \circ \Phi(b, g) = \pi(b, g) = b$ donc Φ est de la forme $\Phi(b, g) = (b, f(b, g))$ pour une application

$$f : B \times G \to G$$

mais comme Φ est compatible avec l'action de G, en chaque $b \in B$ $f_b(g) := f(b, g)$ est déterminé par sa valeur en l'identité de G, c'est à dire

$$(b, f(b, g)) = \Phi(b, g) = \Phi(b, 1).g = (b, f(b, 1)).g = (b, f(b, 1).g)$$

d'où $f(b, g) = f(b, 1).g$ et donc en posant $\phi(b) := f(b, 1)$ on obtient le théorème. $\square$

Corollaire 1.3.1. *Soient $(B \times G, \pi, B)$ le $G-$fibré principal trivial au-dessus de B et M un $G-$espace à gauche alors tout $G-$automorphisme du fibré associé $(B \times G)[M]$ sont du forme*

$$\begin{aligned} \Phi : (B \times G, \pi) &\to (B \times G, \pi) \\ (b, g) &\mapsto (b, \phi(b).g) \end{aligned}$$

pour une application continue $\phi : B \to G$.

Démonstration. Par ce qui précède, un automorphisme de $(B\times G)[M]$ est le quotient par l'action de G d'un morphisme de la forme

$$\begin{aligned}(\Phi\times id_M, id_B) : (B\times G)\times M &\to (B\times G)\times M\\ (b,g,x) &\mapsto (b,\phi(b).g,x)\end{aligned}$$

et $(b,\phi(b).g,x)G = (b,\phi(b)y)$. $\square$

Définition 1.3.13. Soient (P,π,B) un $G-$fibré localement trivial avec fibre modèle M quelconque, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement d'ensembles ouverts de B et pour chaque $\alpha\in\Lambda$

$$\Phi_\alpha : U_\alpha\times M\to\pi^{-1}(U_\alpha)$$

est un $G-$isomorphisme de $G-$fibrés, alors la famille $\{(U_\alpha,\Phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ est dite un **atlas** de (P,π), les tuples (U_α,Φ_α) sont des **trivialisations locaux** ou des **cartes locales** et les applications $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta\to G$ définies par

$$\begin{aligned}\Phi_\beta^{-1}\Phi_\alpha : U_\alpha\cap U_\beta\times M &\to U_\alpha\cap U_\beta\times M\\ (b,x) &\mapsto (b,\phi_{\alpha\beta}(b).x)\end{aligned}$$

sont appelées des **applications de transition** de l'atlas.

Proposition 1.3.6. *Soient (P,π,B) un $G-$fibré localement trivial, $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de B et $\{(\Phi_\alpha,U_\alpha)\}$, $\{(\Phi'_\alpha,U_\alpha)\}$ deux atlas de (P,π) avec applications de transition $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ et $\{\phi'_{\alpha\beta}\}$ respectivement. Alors il existe des applications uniques*

$$r_\alpha : U_\alpha\to G$$

telles que $\Phi'_\alpha = \Phi_\alpha(b,r(b)x)$ pour $b\in U_\alpha$ et $x\in M$, de plus pour $b\in U_\alpha\cap U_\beta$

$$\phi'_{\alpha\beta}(b) = r_\beta^{-1}\circ\phi_{\alpha\beta}\circ r_\alpha(b)$$

Démonstration. L'existence des r_α suit du fait que tout automorphisme

$$(\Phi'_\alpha)^{-1}\Phi_\alpha : U_\alpha\times M\to U_\alpha\times M$$

est de la forme $(\Phi'_\alpha)^{-1}\Phi_\alpha(b,x) = (b,r_\alpha(b).x)$ d'où

$$\Phi_\alpha(b,x) = \Phi'_\alpha(b,r_\alpha(b).x)$$

et l'unicité est claire. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned}\Phi'_\beta(b,x) &= \Phi_\beta(b,r_\beta(b)x) = \Phi_\alpha(b,\phi_{\beta\alpha}r_\beta(b)x)\\ \Phi'_\alpha(b,\phi'_{\alpha\beta}(b)x) &= \Phi_\alpha(b,r_\alpha(b)\phi'_{\alpha\beta}(b)x)\end{aligned}$$

mais comme $\Phi'_\beta(b,x) = \Phi'_\alpha(b,\phi'_{\alpha\beta}x)$ l'énoncé suit. $\square$

Définition 1.3.14. Soient (P,π,B) un $G-$fibré localement trivial, $\{U_\alpha\}$ un recouvrement d'ouverts de B et $\{(U_\alpha,\Phi_\alpha)\}$, $\{(U_\alpha,\Phi'_\alpha)\}$ deux atlas avec applications de transition $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ et $\{\phi'_{\alpha\beta}\}$ alors on dit que les familles d'applications de transition sont **équivalentes**, noté

$$\{\phi_{\alpha\beta}\} \simeq \{\phi'_{\alpha\beta}\}$$

s'il existe une famille d'applications continues $r_alpha : U_\alpha \to G$ telle que pour $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\phi'_{\alpha\beta}(b) = r_\beta^{-1}(b).\phi_{\alpha\beta}(b).r_\alpha(b)$$

Théorème 1.3.2. *Soient (P,π,B) et (P',π',B) deux $G-$fibrés localement triviaux alors (P',π',B) et (P,π,B) sont isomorphes comme des $G-$fibrés si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de B et deux atlas $\{(\Phi_\alpha,U_\alpha)\}$, $\{(\Phi'_\alpha,U_\alpha)\}$ de (P,π) et (P',π') respectivement avec applications de transition $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ et $\{\phi'_{\alpha\beta}\}$ respectivement tel que*

$$\{\phi_{\alpha\beta}\} \simeq \{\phi'_{\alpha\beta}\}$$

Démonstration. Soit

$$\Psi : (P,\pi,B) \to (P',\pi',B)$$

un $G-$isomorphisme des fibrés, par hypothèse il existe un atlas $\{(U_\alpha,\Phi_\alpha)\}$ avec applications de transition $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ pour (P,π) alors

$$\Phi_\beta^{-1}(b,x) = \Phi_\alpha(b,\phi_{\alpha\beta}(b).x)$$

et comme Ψ est un $G-$isomorphisme

$$\begin{aligned}\Psi\circ\Phi_\beta(b,x) &= \Psi\Phi_\alpha(b,\phi_{\alpha\beta}(b).x)\\ &= \Phi_\alpha(b,r_\Psi(b).\phi_{\alpha\beta}(b).x)\end{aligned}$$

est un atlas équivalent sur (P',π'). Inversement, suppose qu'il existe deux atlas $\{(\Phi_\alpha,U_\alpha)\}$ sur (P,π) et $\{(\Phi'_\alpha,U_\alpha)\}$ sur (P',π') avec des familles d'applications de transition équivalentes, alors pour chaque $\alpha\in\Lambda$ définissons

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha : U_\alpha\times M &\to U_\alpha\times M\\ (b,x) &\mapsto (b,r_\alpha^{-1}(b).x)\end{aligned}$$

et pour $p\in P$, $p\in\pi^{-1}(U_\alpha)$ posons

$$\Psi(p) := \Phi'_\alpha\Psi_\alpha\Phi_\alpha^{-1}(p)$$

Il n'y a qu'à montrer que Ψ est bien défini, c'est-à-dire qu'on veut montrer pour

$p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ que

$$\begin{aligned} \Phi'_\alpha \Psi_\alpha \Phi_\alpha^{-1}(p) &= \Phi'_\beta \Psi_\beta \Phi_\beta^{-1}(p) \\ \Leftrightarrow \ \Psi_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Phi_\beta(b,x) &= (\Phi'_\alpha)^{-1} \Phi'_\beta \Psi_\beta(b,x) \\ \Leftrightarrow \ \Psi_\alpha(b, \phi_{\beta\alpha}(b).x) &= (\Phi'_\alpha)^{-1} \Phi'_\beta(b, r_\beta^{-1}(b).x) \\ \Leftrightarrow \ (b, r_\alpha^{-1}(b)\phi_{\beta\alpha}(b).x) &= (b, \phi'_{\beta\alpha}(b) r_\beta^{-1}(b).x) \\ \Leftrightarrow \ r_\alpha^{-1}(b)\phi_{\beta\alpha}(b).x &= \phi'_{\beta\alpha}(b) r_\beta^{-1}(b).x \end{aligned}$$

et ce dernier suit du fait que

$$\phi_{\beta\alpha} = r_\alpha(b)\phi'_{\beta\alpha}(b) r_\beta^{-1}(b)$$

par hypothèse. □

Proposition 1.3.7. *Soit $F : Vect_{\mathbb{R}} \to Vect_{\mathbb{R}}$ un foncteur de la catégorie des espaces vectoriels réels en soi-même et soit (P, π, V, B) un fibré vectoriel alors il existe un fibré vectoriel noté $(F(P), \pi) := (F(P), \pi, F(V), B)$ tel que pour chaque $b \in B$ le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} V_b \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"] & & F(V_b) \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Définissons l'espace total $F(P)$ par

$$F(P) := \sqcup_{b \in B} F(V_b)$$

et pour $v_b \in F(V_b)$, on pose $\pi'(v_b) = b$. Il reste qu'à noter que si $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ est un atlas pour (P, π) alors en définissant les applications de transition de $F(P)$ par $F(\phi_{\alpha\beta}) \in GL(F(V))$ pour $\phi_{\alpha\beta}$ les applications de transition de P, on obtient une famille d'applications de transition pour $F(P)$. □

Définition 1.3.15. Soit (P, π, B) un $G-$fibré avec fibre modèle M et soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé de G alors on dira que **le groupe de structure se réduit à** H s'il existe un atlas $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de cartes locales sur B avec applications de transition $\phi_{\alpha\beta}$ et des applications

$$r_\alpha : U_\alpha \to G$$

telles que pour tout $\alpha, \beta \in \Lambda$ pour $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ les applications de transition

$$\phi'_{\alpha\beta}(b) := r_\alpha^{-1} \circ \phi_{\alpha\beta} \circ r_\beta(b) \in H$$

1.4 L'homotopie et les fibrés principaux au-dessus des bases paracompactes

Dans la suite, tous nos fibrés sont localement triviaux.

Lemme 1.4.1. *Soit (P,π,B) un $G-$fibré principal où $B = A_1 \cup A_2$ avec $A_1 = X \times [a,c]$, $A_2 = X \times [c,b]$ $a < c < b$ et $P|_{A_i}$ localement trivial pour $i = 1,2$. Alors (P,π,B) est trivial.*

Démonstration. Écrivons $x_1 := a, y_1 := c, x_2 := c, y_2 := b$, alors par hypothèse on a pour $i = 1,2$

$$\begin{tikzcd} P|_{A_i} \arrow[r, "\Phi_i", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi"] & X \times [x_i,y_i] \times G \arrow[dl, "\pi_{X\times[x_i,y_i]}"] \\ X \times [x_i,y_i] & \end{tikzcd}$$

et la question est de modifier Φ_2 tel qu'il s'accord avec Φ_1 sur $X \times \{c\} \times G$. Soit donc $\phi_{21} : X \times G \to G$ défini par

$$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}(x,c,g) = (x,c,\phi_{21}(x)g)$$

et posons $\Phi_2' := \Phi_2 \circ (id_{A_2} \times \phi_{21})$. Alors pour $p \in P$ l'application

$$\bar{\Phi}(p) := \begin{cases} \Phi_1(p) & p \in A_1 \\ \Phi_2'(p) & p \in A_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

est bien défini, continue est nous donne un trivialisation global, d'où (P,π,B) est trivial. □

Lemme 1.4.2. *Soit $(P,\pi,B \times [0,1])$ un $G-$fibré (toujours localement trivial) quelconque avec B paracompacte, alors il existe un recouvrement localement fini $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de B tel que $(P,\pi)|_{U_\alpha\times[0,1]}$ est trivial.*

Démonstration. Fixons pour l'instant un $b \in B$ arbitraire, alors par hypothèse pour tout $t \in [0,1]$ il existe un voisinage de (b,t) ouvert

$$W_{b,t} := O_{b,t} \times V_{b,t} \subset B \times [0,1]$$

tel que $(P,\pi)|_{W_{b,t}}$ est trivial, mais comme $[0,1]$ est compacte il existe une suite finie

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

telle que $[0,1] = \bigcup_{i=0}^n V_{b,t_i}$. Posons donc $U_b = \cap_{i=0}^n O_{b,t_i}$ alors $(P,\pi)|_{U_b\times[0,1]}$ est trivial sur $U_b \times V_{b,t_i}$ pour $t = 0,\cdots n$ et par une application récursive du lemme précédent, ceci implique que $(P,\pi)|_{U_b\times[0,1]}$ est trivial. Comme ceci obtient pour un $b \in B$ arbitraire, on peut ensuite passer à un recouvrement localement fini de B par la paracompacité de B, d'où le lemme. □

Lemme 1.4.3. *Soit B un espace paracompacte et hausdorff, et soit $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recouvrement ouvert de B alors il existe un recouvrement $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable de B tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$*

$$V_n = \sqcup_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$$

avec $W_\alpha \subset U_\alpha$ *et* $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ *pour* $\alpha \neq \beta$ *et il existe une partition de l'unité* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* $supp\ \varphi_n \subset V_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Comme B est paracompacte et hausdorff, B admet une partition de l'unité $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ subordonnée à $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Pour tout sous-ensemble fini $F \subset \Lambda$, posons

$$V_F := \{b \in B | \psi_\alpha(b) > \psi_\beta(b),\ \forall \alpha \in F,\ \beta \notin F\}$$

Pour chaque $b \in B$, il n'existe qu'un nombre fini de ψ_α's non nulles dans un voisinage de b d'où si l'on pose

$$K_b := \{\beta \in F^c | \psi_\beta(b) \neq 0\}$$

K_b est un ensemble fini pour tout $b \in B$ et

$$V_F = \cup_{b\in B} \cap_{\alpha\in F} \cap_{\beta\in K_b} \{x \in B | \psi_\alpha(x) > \psi_\beta(x)\}$$

donc V_F est ouvert. De plus, c'est clair que $V_F \subset U_\alpha$ où $\alpha \in F$. Posons ensuit

$$V_n := \sqcup_{|F|=n} V_F$$

c'est évident par la construction des V_F que cette union est disjointe et que les V_n's recouvrent B car si $b \in B$ alors $\psi_\alpha(b) > 0$ pour un nombre fini de ψ_α's et si $F_b \subset \Lambda$ est l'ensemble des tels α on voit que $b \in V_{F_b}$. Enfin, pour obtenir la partition de l'unité garantie par l'énoncé, soit $\{\varphi'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et définissons

$$\varphi_n := \sum_{\substack{supp\ \varphi'_k \subset V_n \\ supp\ \varphi'_k \not\subset V_j\ j<n}} \varphi_k$$

□

Théorème 1.4.1. *Soient* $(P, \pi, B \times [0,1])$ *un* $G-$*fibré principal et* B *paracompacte alors*

$$(P,\pi)|_{B\times\{0\}} \simeq (P,\pi)|_{B\times\{1\}}$$

Démonstration. Par le lemme 1.4.2, il existe un recouvrement localement fini $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de B tel que $(P,\pi)|_{U_\alpha\times[0,1]}$ est localement trivial, et par le lemme précédent, on peut passer à un recouvrement dénombrable $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que chaque V_n est l'union disjointe des sous-ensembles ouverts, chacun dans un U_α particulier, d'où $(P,\pi)|_{V_n\times[0,1]}$ est aussi trivial.

Encore par le lemme précédent, on a une partition de l'unité $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $supp\ \varphi_n \subset V_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Définissons $\psi_0 = 0$ et pour $i \geq 1$ posons

$$\psi_i = \sum_{n=1}^{i} \varphi_n$$

Remarquons que $supp\ \psi_i \subset \cup_{n=0}^{i} V_n$ et que $\psi_i(b) = \psi_{i-1}(b)$ si $b \notin V_i$ par construction pour $i \geq 1$. Considérons ensuite le graphe de ψ_i pour chaque $i \geq 0$:

$$\Gamma_{\psi_i} := \{(x, \psi_i(x)) \in X \times [0,1]\}$$

Notons qu'on a pour chaque $i \geq 1$ des homéomorphismes :

$$\begin{aligned} h_i : \Gamma_{\psi_i} &\to \Gamma_{\psi_{i-1}} \\ (x, \psi_i(x)) &\mapsto (x, \psi_{i-1}(x)) \end{aligned}$$

et que h_i est l'identité hors de V_i. Écrivons $(P,\pi)|_i := (P,\pi)|_{\Gamma_{\psi_i}}$, alors comme $(P,\pi)|_{V_i\times[0,1]}$ est trivial pour chaque $i \geq 1$ on a des trivialisations :

$$\Phi_i : (P,\pi)|_{V_i\times[0,1]} \to V_i \times [0,1] \times G$$

et dans ce trivialisation on peut définir l'application

$$\begin{aligned} f : (P,\pi)_i|_{V_i\times[0,1]} &\to (P,\pi)_{i-1}|_{V_i\times[0,1]} \\ (b, \psi_i(b), g) &\mapsto (b, \psi_{i-1}, g) \end{aligned}$$

et comme h_i est l'identité hors de V_i, on voit que l'application

$$F_i(p) := \begin{cases} \Phi_i^{-1} \circ f \circ \Phi_i(p) & p \in (P,\pi)_i|_{V_i\times[0,1]} \\ id_{(P,\pi)_i} & p \in (P,\pi)_i|_{V_i^c\times[0,1]} \end{cases} \tag{1.2}$$

est un isomorphisme de $G-$fibrés. Considérons en suite la composition infinie

$$F = \Pi_{i=0}^{\infty} F_i$$

Comme dans un voisinage de chaque $b \in B$ il n'y a qu'un nombre fini des ψ_n non nuls, pour chaque b il y a un $N_b \in \mathbb{N}$ tel que $\psi_{N_b}(b) = 1$ et donc

$$F(b) = \Pi_{i=0}^{N_b} F_i(b)$$

alors F est bien défini et envoie

$$(P,\pi)|_{B\times\{0\}} \to (P,\pi)|_{B\times\{0\}}$$

et est un G-isomorphisme sur chaque fibre, d'où le théorème. □

Corollaire 1.4.1. *Soient (P,π,B_0) un $G-$fibré principal et $H : B_1 \to [0,1] \to B_0$ une homotopie entre H_0 et H_1 alors $H_0^*(P,\pi) \simeq H_1^*(P,\pi)$*

Démonstration. Considérons $H^*(P,\pi) \to B_1 \times [0,1]$ alors en appliquant le théorème précédent on obtient

$$H_0^*(P,\pi) = H^*(P,\pi)|_{B_1\times\{0\}} \simeq H^*(P,\pi)|_{B_1\times\{1\}} = H_1^*(P,\pi)$$

□

Corollaire 1.4.2. *Soit B_0, B_1 deux espaces paracompactes homotopes, alors tout $G-$fibré principal au-dessus de B_1 s'exprime comme le $G-$fibré induit d'un $G-$fibré principal au desus de B_0 et inversement.*

Démonstration. Par hypothèse il existe des applications continues

$$f : B_0 \to B_1$$
$$g : B_1 \to B_0$$

telles que $f \circ g \simeq_{htp} id_{B_0}$, $g \circ f \simeq_{htp} id_{B_1}$. Soit (P,π,B_1) un $G-$fibré principal au-dessus de B_1 alors $g^*(f^*P) \simeq (g\circ f)^*P \simeq id_{B_1}^*P \simeq P$ et pareillement pour un $G-$fibré au-dessus de B_1. □

Corollaire 1.4.3. *Soient (P,π,B) un $G-$fibré principal et B contractile alors (P,π) est trivial.*

Démonstration. Par le corollaire précédent, tout $G-$fibré principal est le fibré induit par une application de B en un point, mais le seul $G-$fibré principal au-dessus d'un point est le $G-$fibré trivial, et un fibré induit d'un fibré trivial est trivial. □

1.5 Les connexions d'Ehresmann sur les fibrés lisses

Soit $M \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ un fibré localement trivial avec B et M des variétés lisses et groupe de structure G qui agit sur M par des difféomorphismes. Comme l'espace total P se représente localement comme le produit $M \times U_\alpha$ pour $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de B et comme les fonctions de transition sont des difféomorphismes P est muni d'une structure lisse canonique. Autrement dit, la catégorie des variétés lisses est fermée par rapport aux produits tordus. Comme P est une variété lisse, il possède alors un fibré tangent $TP \to P$, et l'on peut s'attendre que la structure de fibré de P induit des structures utiles dans TP. On voit aisément qu'il existe le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\pi_*} & TB \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ P & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

et comme π est une submersion, $(\ker \pi_*)_x \subset T_xP$ est un sous-espace vectoriel de dimension constante en chaque $x \in P$. On fait donc la définition suivante

Définition 1.5.1. Distribution verticale Soit (P,π) un fibré lisse sur B, alors le sous-fibré $(\ker \pi_*, p|_{\ker \pi_*}) \subset (TP, p)$ avec fibre

$$(\ker \pi_*)_x := \{v \in T_xP : \pi_*(v) = 0\}$$

est dite la **distribution verticale** de (P,π). On la dénotera souvent par $(T^{vert}P,\pi)$.

Proposition 1.5.1. *Soit $(\Phi,\varphi) : (P_1,\pi_1,B_1) \to (P_2,\pi_2,B_2)$ une application lisse par fibres entre deux fibrés lisses avec distributions verticales $T^{vert}P_1$ et $T^{vert}P_2$ respectivement alors $(\Phi_*,\Phi) : (TP_1, p_1, P_1) \to (TP_2, p_2, P_2)$ envoie $T^{vert}P_1$ en $T^{vert}P_2$.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
TP_1 \arrow[rrr, "\Phi_*"] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[ddd, "\pi_{1*}"'] & & & TP_2 \arrow[dl, "p_2"] \arrow[ddd, "\pi_{2*}"] \\
& P_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_1"] & P_2 \arrow[d, "\pi_2"] & \\
& B_1 \arrow[r, "\varphi"] & B_2 & \\
TB_1 \arrow[ur, "q_1"] \arrow[rrr, "\varphi_*"] & & & TB_2 \arrow[ul, "q_2"]
\end{tikzcd}$$

c'est immédiat de la commutativité que si $\pi_{1*}v = 0$ alors $\pi_{2*}(\Phi_*v) = 0$, d'où l'assertion. $\square$

Le corollaire suivant est immédiat

Corollaire 1.5.1. *Soit $(\Phi,\varphi) : (P_1,\pi_1,B_1) \to (P_2,\pi_2,B_2)$ une application lisse par fibres entre deux fibrés lisses avec distributions verticales $T^{vert}P_1$ et $T^{vert}P_2$ respectivement alors*

1. *Si Φ est une immersion sur chaque fibre alors $(\Phi_*|_{T^{vert}P_1},\Phi) : (T^{vert}P_1, p_1) \to (T^{vert}P_2, p_2)$ est une injection sur chaque fibre.*

2. *Si Φ est un difféomorphisme sur chaque fibre, alors*

$$(\Phi_*|_{T^{vert}P_1},\Phi) : (T^{vert}P_1, p_1) \to (T^{vert}P_2, p_2)$$

est un isomorphisme sur chaque fibre.

3. *Soient $b \in B_1$ et $i_b : M_b \hookrightarrow P_1$ le plongement de fibre au-dessus de b, alors*

$$i_{b*} : TM_b \to T^{vert}P_1|_{M_b}$$

est un isomorphisme (canonique !)

Comme on a une identification naturelle de l'espace tangent de la fibre et la distribution verticale le long de cette fibre, et qu'on aimerait tenter de comprendre l'espace total à partir de sa base et sa fibre, on pourrait noter que l'application π induit canoniquement la suite exacte suivante en chaque point $p \in P$

$$0 \longrightarrow T^{vert}P_p \longrightarrow T_pP \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(p)}B \longrightarrow 0$$

et $T^{vert}P_p \simeq T_pM_{\pi(p)}$ canoniquement. Cette suite scinde si et seulement s'il existe une application $s_p : T_{\pi(p)}B \to T_pP$ telle que $s_p \circ \pi_* = id_{T_{\pi(p)}}B$. Alors pour comprendre (au moins localement) TP comme une somme directe de TM et TB, il suffit de pouvoir choisir un tel s_p lissage, donc la question se pose : est-ce qu'on peut le faire ? La réponse est « oui, mais il en existe plusieurs telles distributions et aucune façon de les choisir canoniquement » :

Proposition 1.5.2. *Soit*

$$0 \longrightarrow (P_1,\pi_1) \xrightarrow{\Phi_1} (P_2,\pi_2) \xrightarrow{\Phi_2} (P_3,\pi_3) \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de fibrés vectoriels réels lisses au-dessus d'une variété lisse B, (ici 0 *désigne le fibré trivial avec espace total B) alors la suite scinde, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme (non nécessairement canonique) de fibrés* $(P_2,\pi_2) \simeq (P_1,\pi_1) \oplus (P_3,\pi_3)$.

Démonstration. Comme la catégorie des fibrés vectoriels lisses au-dessus d'une base paracompacte est abélienne, il suffit de construire un inverse à droit $r : P_2 \to P_1$ de Φ_1. Suppose que la fibre modèle de P_1 est $\mathbb{R}^k$ et celle de P_2 est $\mathbb{R}^n$ alors on peut choisir un recouvrement $\{u_\alpha\}$ de B tel que P_1 et P_2 sont tous les deux trivialisable au-dessus de chaque ouvert U_α, alors localement on peut toujours choisir des trivialisations de P_1 et P_2 tels que Φ_1 est donné sur U_α par

$$\begin{aligned}(\Phi_1)_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (u,x_1,\cdots,x_k) &\mapsto (u,x_1,\cdots,x_k,f_1(u,x_1,\cdots x_k),\cdots,f_{n-k}(u,x_1,\cdots x_k))\end{aligned}$$

et l'on pose

$$\begin{aligned}r_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\to U_\alpha \times \mathbb{R}^k \\ (u,x_1,\cdots,x_n) &\mapsto (u,x_1,\cdots,x_k)\end{aligned}$$

c'est clair que localement chaque r_α est inverse à droit à Φ_α. Prenons ensuite une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$ et posons

$$r := \sum_\alpha \rho_\alpha r_\alpha$$

et c'est claire que r donne un inverse à droit de Φ globalement défini, d'où la proposition. $\square$

Ceci nous mène à notre prochaine définition

Définition 1.5.2. Soit (P,π) un fibré lisse avec distribution horizontale $T^{vert}P$ alors une **connexion** (d'Ehresmann) Γ sur (P,π) est un choix d'un sous-fibré de TP, noté soit *Hor* ou Γ selon l'emphase désirée et appelée une **distribution horizontale** telle que en chaque point $p \in P$

$$T_pP = T^{vert}P_p \oplus Hor_p$$

On voit immédiatement qu'une telle distribution horizontale détermine une famille d'applications $s_p : T_{\pi(p)}B \to T_p$ comme discuté ci-haute ($\pi_* : Hor_p \to T_{\pi(p)}B$ est un isomorphisme, car π_* est une injection et $\dim Hor_p = \dim T_{\pi(p)}B$ comme π_* est une submersion, donc on pose $s_p(v) = (0, \pi_*^{-1}(v)) \in T^{vert}P_p \oplus Hor_p$). Ce fait nous permet remonter des champs de vecteurs sur B à des champs de vecteurs en P :

Définition 1.5.3. Soient (P, π) un fibré lisse et Γ une connexion sur P alors pour tout champ vectoriel sur B

$$X : B \to TB$$

on définit le **relèvement horizontal** de X

$$X^{\#} : P \to TP$$

par $X^{\#}(p) = s_p(X_{\pi(b)})$ où les s_p sont celles décrites ci-haut.

Même si notre définition d'une connexion est géométriquement attirante, il se trouve qu'il cache une certaine structure : si (P, π, B) est un fibré et $B_0 \xrightarrow{\varphi} B$ est une application lisse, il en résulte qu'une connexion Γ sur P induit canoniquement une connexion $\varphi^*\Gamma$ sur φ^*P. Pour mieux comprendre comment ça se fait, c'est utile d'adopter une perspective duale. Note qu'un choix $Hor_p \subset T_pP$ d'un sous-espace horizontal est équivalent à un choix d'une application de projection :

$$\begin{aligned} L_{Hor_p} : T_pP = T^{vert}P_p \oplus Hor_p &\to T^{vert}P_p \\ (X^{v,\Gamma}, X^{h,\Gamma}) &\mapsto X^{v,\Gamma} \end{aligned}$$

et qu'on peut recouvrer Hor_p comme $\ker L_{Hor_p} = Hor_p$. Ensemble ces applications nous donnent un morphisme de fibrés vectoriels

$$L_{Hor} : (TP, \Pi) \to (T^{vert}P, \Pi)$$

Rappel ensuite que lorsqu'on retire un fibré (P, π, B) par un morphisme $B_0 \xrightarrow{\varphi} B$ alors le fibré retiré $(\varphi^*P, \varphi * \pi, B_0)$ possède évidemment une distribution verticale

$$\varphi^*T^{vert}P := \ker \varphi^*\pi$$

et par Corollaire 1.5.1 en chaque point $x \in B_0$ on a les isomorphismes canoniques

$$\varphi^*T^{vert}P|_{\pi^{-1}(x)} \simeq TM_x \simeq TM_{\varphi(x)} \simeq T^{vert}P|_{\pi^{-1}(\varphi(x)}$$

et donc on peut faire la définition suivante

Définition 1.5.4. Soient (P,π,B), $(T^{vert}P,\Pi)$, Γ et L_{Hor} comme décrit ci-haut et soit

$$\varphi : B_0 \to B$$

une application lisse et $(\varphi^*P, \varphi * \pi, B_0)$ le fibré retiré alors la connexion d'Ehresmann induite sur φ^*P par le morphisme des fibrés vectoriels φ^*L_{Hor} donné sur chaque fibre $T_q\varphi^*P$ par

$$\varphi^*L_{Hor_q} : T_q\varphi^*P \xrightarrow{\varphi_{(P,\pi)*}} T_{\varphi_{(P,\pi)}(q)}P \xrightarrow{L_{Hor}} T^{vert}P_{\varphi_{(P,\pi)*}} \simeq \varphi^*T^{vert}P_q$$

est nommée **la connexion retirée** par φ et on la dénote par $\varphi^*\Gamma$.

1.5.1 Intégration le long de la fibre

Le langage des connexions nous fournit aussi avec un langage pratique pour en décrire une opération utile sur les formes différentielles d'un fibré lisse appelé *l'intégration le long de la fibre*. L'intégration le long de la fibre d'un fibré lisse (P,π,B) avec fibre modèle M où $\dim M = m$ est une application sur les $k-$formes différentielles de P

$$\pi_! : \Omega^k(P) \to \Omega^{k-m}(B)$$

On va nous servir d'une connexion pour la définir, mais il va en sortir que $\pi_!$ est indépendant de ce choix de connexion.

Pour construire $\pi_!$, fixons une connexion auxiliaire Γ sur (P,π) et rappel qu'en chaque $b \in B$ on a que $M_b \xrightarrow{i_b} \pi^{-1}(b)$ est un difféomorphisme. Soit $\alpha \in \Omega^k(P)$ et pour $X_1, \cdots, X_{k-m} \in T_bB$ définissons

$$\pi_!\alpha_b(X_1,\cdots,X_{k-m}) := \int_{M_b} i_b^*(\iota(X^\#_{k-m}))\cdots\iota(X^\#_1)\alpha)$$

où $X^\#$ dénote le relèvement horizontal du vecteur X par rapport à Γ. Que cette allocation est lisse en b suit immédiatement du fait que Γ est défini par une distribution horizontale lisse.

Proposition 1.5.3. *Soient Γ_1 et Γ_2 deux connexions sur un fibré lisse avec fibre de dimension m et notons par $X^{\#,1}, X^{\#,2}$ les relèvements horizontaux d'un vecteur X par rapport à Γ_1 et Γ_2 respectivement, alors pour tout $\alpha \in \Omega^k(P)$, $b \in B$ et $X_1, \cdots, X_{k-m} \in T_bB$*

$$\int_{M_b} i_b^*(\iota(X^{\#,1}_{k-m}))\cdots\iota(X^{\#,1}_1)\alpha) = \int_{M_b} i_b^*(\iota(X^{\#,2}_{k-m}))\cdots\iota(X^{\#,2}_1)\alpha)$$

alors $\pi_!$ ne dépend pas du choix de connexion employée dans sa définition.

Démonstration. Pour simplifier la présentation, on va faire la preuve dans le cas où $k = m+1$, mais il n'y a aucune difficulté à l'étendre au cas général. Pour un vecteur $Y \in T_pP$

écrivons $Y = Y_v + Y_h$ où $Y_v \in T^{vert}P_p$ et $Y_h \in Hor_p$ avec

$$T_pP = T^{vert}P_p \oplus Hor_p$$

le scindement induit par la connexion Γ_1 et rappelons que sur Hor_p, $\pi_* : T_pP \to T_{\pi(p)}B$ est un isomorphisme. Alors pour $\alpha \in \Omega^k(P)$ et $X \in mathcalX(B)$ on calcul

$$\begin{aligned}\int_{M_b} i_b^*(\iota(X^{\#,1})\alpha) - \int_{M_b} i_b^*(\iota(X^{\#,2})\alpha &= \int_{M_b} i_b^*(\iota(X^{\#,1} - X^{\#,2})\alpha) \\ &= \int_{M_b} i_b^*(\iota((X^{\#,1} - X^{\#,2})_v)\alpha) + \int_{M_b} i_b^*(\iota((X^{\#,1} - X^{\#,2})_h)\alpha)\end{aligned}$$

Note ensuite que comme $(X^{\#,1} - X^{\#,2})_v \in T^{vert}P_b \simeq TM_b$,
$i_b^*(\iota((X^{\#,1} - X^{\#,2})_v)\alpha) = 0 \in \Omega^m(M)$. De plus, $(X^{\#,1} - X^{\#,2})_h = X_h^{\#,1} - X_v^{\#,2} - X_h^{\#,2}$, mais

$$\begin{aligned}\pi_*(X_h^{\#,1} - X_h^{\#,2}) &= \pi_* X_h^{\#,1} - \pi_* X_h^{\#,2} \\ &= X - X = 0\end{aligned}$$

donc $(X^{\#,1} - X^{\#,2})_h \in T^{vert}P_b \simeq TM_b$ aussi, et alors l'expression entier s'annule, ce qui démontre la proposition. □

1.5.2 Quelle est la différence entre P et (P, π) ?

Considérons maintenant l'espace total d'un fibré lisse comme une variété lisse elle-même. Si P peut être muni d'une structure de fibré lisse (P, π, B), comment peut-on voir la structure de (P, π) reflété dans les structures de P. Autrement dit, qu'est-ce c'est qu'on perd en applicant le foncteur oublieux

$$\begin{aligned}\mathbf{Fib}_{lisse} &\to \mathbf{Var}_{lisse} \\ (P, \pi) &\mapsto P\end{aligned}$$

Un façon de tenter d'adresser cette question est d'examiner la différence entre $Aut_{\mathbf{Var}}(P) = Diff(P)$ et $Aut_{\mathbf{Fib}}(P, \pi)$. Notons que pour n'importe quel $(\Phi, \varphi) \in Aut_{\mathbf{Fib}}(P, \pi)$, $\Phi \in Diff(P)$. Dénotons donc par $Diff(P, \pi) \subset Diff(P)$ le sous-ensemble de difféomorphismes de P qui sont aussi des difféomorphismes sur chaque fibre de (P, π).

C'est un fait classique que pour n'importe quelle variété lisse compacte, l'algèbre de Lie du groupe de difféomorphismes est donnée par les champs vectoriels sur la variété, donc supposons dans la suite que P est compacte (ce qui implique que M et B le sont aussi dans (P, π)) et fixons une connexion Γ sur (P, π).

Pour tout $X \in \mathscr{X}(P)$ on peut l'écrire d'une manière unique

$$X = X^{v,\Gamma} + X^{h,\Gamma}$$

où $X_p^{v,\Gamma} \in T^{vert}P_p$ et $X_p^{v,\Gamma} \in \Gamma_p$ pour tout $p \in P$. Notons que pour chaque $b \in B$, $X^{v,\Gamma}|_{\pi^{-1}(b)}$ est un champ vectoriel sur M_b et donc son flot préserve M_b, alors le flot de $X^{v,\Gamma}$ préserve forcément les fibres de π comme il recouvre id_B sur B. Si l'on veut que le flot de $X^{h,\Gamma}$ recouvre lui aussi un difféomorphisme de B (qui ont algèbre de Lie $\mathscr{X}(B)$) il est naturel qu'on demande $X^{h,\Gamma} = Y^\#$ pour Y un champ vectoriel sur B, mais on rencontre alors un problème (vraiment *le* problème) : il n'y a aucune raison que la relation

$$b \mapsto \{\pi_* X_p | p \in \pi^{-1}(b)\}$$

devrait définir une fonction (note que $\pi_* X_p = \pi_* X_p^{h,\Gamma}$). Cela inspire notre définition suivante

Définition 1.5.5. Soient (P,π,B) un fibré lisse, $V : P \to TP$ un champ vectoriel sur P et $v : B \to TB$ un champ vectoriel sur B alors on dit V **recouvre** v si le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{\pi_*} & TB \\ {\scriptstyle V}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ P & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

On dit que V **descend à** B s'il existe un champ vectoriel sur B qui est recouvert par V et si V recouvre 0, alors on dit que V est **vertical**. Notons par $\mathscr{X}(P,\pi)$ l'ensemble de champs vectoriels sur P qui descendent à B pour un fibré lisse (P,π,B), et par $\mathscr{X}^{vert}(P,\pi)$ l'ensemble de champs verticaux.

Notons que si $X = X^{v,\Gamma} + X^{h,\Gamma}$ descend à un champ vectoriel $x : B \to TB$, alors

$$\pi_* X = \pi_* X^{h,\Gamma} = x$$

et donc $X^{h,\Gamma} = x^\#$. La proposition suivante nous assure que les champs vectoriels qui descendent à B sont la notion correcte pour investiguer les difféomorphismes par fibres de (P,π)

Proposition 1.5.4.

1. *Soit $X, Y \in \mathscr{X}(P,\pi)$ alors $[X,Y] \in \mathscr{X}(P,\pi)$*

2. *Soit $X, Y \in \mathscr{X}(P,\pi)$ et suppose que $\pi_* Y = 0$ alors $\pi_*[X,Y] = 0$*

3. *Soit $\{X_t\}_{t\in[0,1]} \in \mathscr{X}(P)$ et soit $\Phi_t : P \to P$ une famille de difféomorphismes définit par*

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X_t \circ \Phi_t, \qquad\qquad \Phi_0 = id_P$$

alors

(a) $\Phi_t \in Diff(P,\pi)$ pour tout $t \in [0,1]$ si et seulement si $X_t \in \mathscr{X}(P,\pi)$.

(b) Φ_t recouvre id_B pour tout $t \in [0,1]$ si et seulement si $\pi_* X_t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration.

1. Suppose que X et Y recouvrent x et y respectivement. Notons que $\pi_* X = x$ si et seulement si pour tout $f \in C^\infty(B)$ on a $X(f \circ \pi) = (xf) \circ \pi$ et similairement pour Y. Alors on a pour un $f \in C^\infty(B)$ quelconque

$$\begin{aligned} XY(f \circ \pi) &= X(yf \circ \pi) = (xyf) \circ \pi \\ YX(f \circ \pi) &= Y(xf \circ \pi) = (yxf) \circ \pi \end{aligned}$$

   et donc $[X,Y](f \circ \pi) = (xy - yx)(f) \circ \pi = [x,y](f) \circ \pi$ donc $\pi_*[X,Y] = [x,y]$.

2. Ceci suit directement de (1), car on a $\pi_*[X,Y] = [\pi_* X, \pi_* Y] = [x,0] = 0$

3. (a) Supposons en premier que $\pi_* X_t = x_t$ pour chaque $t \in [0,1]$ alors soient $p \in P$ et $b = \pi(p)$ et calculons

$$\begin{aligned} x_t(b) = \pi_* X_t(p) &= \pi_* \dot{\Phi}_t \circ \Phi_t^{-1}(p) \\ &= d\pi \dot{\Phi}(t) \circ (\pi \circ \Phi_t^{-1}(p)) \end{aligned}$$

   et donc forcément $b = \pi \circ \Phi_t^{-1}(p)$ pour tout $p \in \pi^{-1}(b)$, donc on peut définir $\varphi_t : B \to B$ par $\varphi_t(b) = \pi \circ \Phi_t(p)$ pour n'importe quel $p \in \pi^{-1}(b)$ et l'on voit que Φ_t recouvre φ_t pour tout $t \in [0,1]$ et donc Φ_t préserve les fibres de P, et comme Φ_t est un difféomorphisme par hypothèse il est forcément un difféomorphisme sur chaque fibre.

   Supposons inversement que pour chaque $t \in [0,1]$ Φ_t est un difféomorphisme par fibres et alors recouvre un difféomorphisme $\varphi_t : B \to B$. On voit alors que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \pi \circ \Phi_t = \pi_* \dot{\Phi}_t &= \pi_*(X_t \circ \Phi_t) \\ &= (d\pi\, X) \circ (\pi \circ \Phi_t) = (d\pi\, X) \circ (\varphi_t \circ \pi) \end{aligned}$$

   donc si l'on pose

$$x_t := (d\pi\, X_t) \circ \varphi_t$$

   on voit immédiatement que X_t recouvre x_t, ce qu'il fallait démontrer.

   (b) Cet énoncé suit directement de l'argument précédent : on a vu que si $\pi_* X_t = x_t$ alors Φ_t recouvre $\varphi_t := \pi \circ \Phi_t$ mais si $\pi_* X_t = 0$ et $\varphi_0 = id_B$ alors

$$\frac{d}{dt} \varphi_t = x_t \circ \varphi_t = 0$$

donc $\varphi_t = id_B$ pour tout $t \in [0,1]$ et inversement si $\varphi_t = id_B$ pour $t \in [0,1]$ alors

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \Phi_t) = \frac{d}{dt}(\varphi_t \circ \pi) = \frac{d}{dt}\pi = 0$$

mais

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \Phi_t) = (d\pi\, X) \circ (\Phi_t \circ \pi) = d\pi\, X_t \circ \pi = \pi_* X_t$$

donc $\pi_* X_t = 0$.

□

Définition 1.5.6. Soit (P,π) un fibré lisse alors l'ensemble d'applications $\Phi : (P,\pi) \to (P,\pi)$ qui sont des difféomorphismes sur chaque fibre et qui recouvrent l'identité sur B forme un groupe sous la composition qu'on appelle le **groupe de jauge** dénoté $Aut(P,\pi)$.

Remarque. C'est facile à voir que si $\Phi \in Aut(P,\pi)$ alors pour n'importe quel $\Psi \in Diff(P,\pi)$ on a $\Psi\Phi\Psi^{-1} \in Aut(P,\pi)$, donc le groupe de jauge est un sous-groupe *normal* de $Diff(P,\pi)$.

Avec cette définition, la Proposition 1.5.4 nous dit que $(\mathscr{X}(P,\pi),[.,.])$ est l'algèbre de Lie de $Diff(P,\pi)$, que $\mathscr{X}^{vert}(P,\pi)$ est l'algèbre de Lie de $Aut(P,\pi)$ et donc $Aut(P,\pi)$ est un sous-groupe de Lie normal de $Diff(P,\pi)$.

1.5.3 Les holonomies des connexions

Comme on vient de voir,

Définition 1.5.7. Soient (P,π,B) un fibré lisse avec fibre modèle M et

$$\Lambda := \{\alpha : [0,1] \to B : \ \alpha \text{ lisse par morceaux}\}$$

Une famille de difféomorphismes $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ avec

$$\Phi_\alpha : M_{\alpha(0)} \to M_{\alpha(1)}$$

est dite **une structure de transport parallèle** si elle satisfait les conditions suivantes

1. Pour tout $b \in B$ et $*_b(t) = b$ pour $t \in [0,1]$ l'application constant on a

$$\Phi_{*_b} = id_{M_b}$$

2. Pour tout difféomorphisme $\phi : [0,1] \to [0,1]$ on a $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha\circ\phi}$

3. Soient $\alpha, \gamma \in \Lambda$ avec $\alpha(1) = \gamma(0)$ et $\alpha\#\gamma \in \Lambda$ alors

$$\Phi_{\alpha\#\gamma} = \Phi_\gamma \circ \Phi_\alpha$$

4. Pour tout $\alpha \in \Lambda$ et toute carte locale (U,φ) sur B avec im $\alpha \subset U$ si l'on pose pour $s \in [0,1]$, $\Phi_s := \Phi_{\alpha(st)}$ alors l'application

$$\begin{aligned} [0,1] &\to Diff(M) \\ s &\mapsto \varphi \circ \Phi_s \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

est une isotopie lisse.

Le difféomorphisme Φ_α est appelé **l'holonomie de α**.

Il existe aussi un cas particulier de la notion de l'holonomie d'une courbe qui est assez importante qu'il mérite un nom lui-même

Définition 1.5.8. Soient Γ une connexion sur un fibré lisse avec base B et $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ sa structure de transport parallèle. Si $\alpha : [0,1] \to B$ est un lacet lisse avec $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ alors l'application $\Phi_\alpha : M_b \to M_b$ est appelé **la monodromie de α** par rapport à Γ.

Remarque. Note que lorsqu'on fixe un trivialisation le long d'une courbe, l'holonomie nous donne une isotopie de la fibre modèle pourtant cette isotopie n'est pas canonique et dépend du choix du trivialisation le long de la courbe. Pourtant, si l'on considère l'holonomie d'un lacet, on peut sans perte de généralité identifier le point de base avec la fibre modulo conjugaison par le groupe de structure du fibré, donc l'holonomie d'une courbe peut être vue comme un difféomorphisme de la fibre modèle modulo la conjugaison par le groupe structural.

Toute connexion d'Ehresmann Γ induit une structure de transport parallèle dans la manière suivante : soit $\alpha : [0,1] \to B$ une courbe lisse alors il existe un champ de vecteurs X_α sur B tel que

$$X_\alpha \circ \alpha = \dot{\alpha}(t)$$

et $X_\alpha = 0$ hors d'un voisinage arbitraire de im $\alpha \in B$. On peut donc relever X_α horizontalement à $X_\alpha^\# : P \to TP$, et soit $\Phi_{X_\alpha^\#} : P \to P$ le flot de $X_\alpha^\#$ et on définit **la structure de transport parallèle induit par** Γ par l'allocation

$$\alpha \in \Lambda \mapsto \Phi_\alpha := (\Phi_{X_\alpha^\#})|_{\pi^{-1}(\alpha(0)}$$

c'est évident que cette construction ne dépend pas du choix de X et alors que ces Φ_α sont bien définis et que cette allocation vérifie les 4 conditions ci-haut. La proposition suivante nous garantit qu'on peut récupérer la connexion Γ à partir d'une structure de transport parallèle :

Proposition 1.5.5. *Soit $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, alors il existe une unique connexion Γ telle que $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ est la structure de transport parallèle induit par Γ.*

Démonstration. Pour recouvrir la distribution horizontale de Γ à partir de l'allocation définie ci-haut, soit $\{\Phi_\alpha\}$ la structure de transport parallèle induit par Γ et soit $p \in P$ un point arbitraire dans l'espace total. Prenons une base locale $X_1, \cdots, X_n$ de champs vectoriels sur B dans un voisinage de $b := \pi(p)$ et posons

$$\Gamma_p := span\langle X_1^{\#}(p), \cdots, X_n^{\#}(p)\rangle$$

pour la distribution horizontale de Γ en le point p, c'est évident par la construction ci-haut que ceci redonne Γ_p. $\square$

En vertu de la proposition précédente lorsqu'on parle d'une connexion, on veut peut parler soit d'une distribution horizontale soit une structure de transports parallèles. Si on veut faire l'emphase, on utilisera *connexion d'Ehresmann* pour le premier cas et *système de transports parallèles* dans le deuxième.

CHAPITRE 2

LES DIFFÉOMORPHISMES HAMILTONIENS

2.1 Introduction

Dans cette section on rencontre les autres protagonistes de notre histoire : les difféomorphismes hamiltoniens et on rassemble toutes les résultats dont on aura besoin dans la suite sur leur géométrie et leur comportement. Section 2 s'occupe d'introduire les variétés symplectiques qui serviront comme l'arène dans laquelle toute notre histoire se passe. L'objet principal de cette section est d'établir la forme normale pour les sous-variétés d'une variété symplectique, qui est une grande généralisation du fait que les variétés symplectiques n'ont aucun invariant local et qui dit que les voisinages des sous-variétés d'une variété symplectique sont déterminés à un difféomorphisme symplectique près par les valeurs de la forme symplectiques sur la sous-variété. Ceci nous permet d'introduire des coordonnées préférées sur un voisinage de l'identité du groupe des difféomorphismes symplectiques et d'obtenir comme conséquence la connectivité locale de ce groupe. Le développent de cette section s'inspire de [17] à part de la forme du théorème généralisé des voisinages symplectiques qui a été peu modifié de [14]. La section 3 présente les propriétés élémentaires des difféomorphismes hamiltoniens et introduit la norme de Hofer et ses parties positive et négative. Section 4 rassemble des faits sur la normalisation et reparamétrage des hamiltoniens qui sont fréquemment utilisés dans l'étude de la géométrie hoferienne et justifie rigoureusement les approximations qu'on invoquerait plusieurs fois le long de ce mémoire. Finalement section 5 introduit le morphisme de flux et l'utilise pour tirer des résultats essentiels sur la topologie des difféomorphismes hamiltoniens et pour donner une caractérisation des isotopies hamiltoniennes comme les isotopies symplectiques sur lesquels le flux s'annule. Les contenus de cette section ont été fortement inspirés de [1] et [17].

2.2 Les variétés symplectiques

2.2.1 Espaces vectoriels symplectiques

Définition 2.2.1. Espaces vectoriels munis d'une $2-$forme Soit V un espace vectoriel et $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ une $2-$forme sur V alors la paire (V,ω) est dite **un espace vectoriel muni d'une 2-forme**. Si (V,ω), (W,σ) sont deux espaces vectoriels munis de $2-$formes alors un morphisme de ces objets, noté

$$L : (V,\omega) \to (W,\sigma)$$

est une application linéaire entre $L : V \to W$ telles que l'application induit

$$\begin{aligned} L^* : \Lambda^2(W^*) &\to \Lambda^2(V^*) \\ \alpha_1 \wedge \alpha_2 &\mapsto L^*\alpha_1 \wedge L^*\alpha_2 \end{aligned}$$

vérifie $L^*\sigma = \omega$.

Définition 2.2.2 (2-formes non dégénérées)**.** Soit V un espace vectoriel et $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ une $2-$forme sur V alors ω est dite **non dégénérée** si s'application

$$\begin{aligned} I_\omega : V &\to V^* \\ v &\mapsto -\iota(v)\omega \end{aligned}$$

est injective. Un **espace vectoriel symplectique** est une paire (V,ω) où V est un espace vectoriel et ω est une $2-$forme non dégénérée sur V. Un morphisme d'espaces vectoriels symplectique est un morphisme d'espaces vectoriels munis de $2-$formes entre deux espaces vectoriels symplectiques.

Exemple 2.2.1. Sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec les coordonnées $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ la forme

$$\omega_0 := \sum_{i=0}^{n} x_i^* \wedge y_i^*$$

est clairement non dégénérée et l'on l'appele **la structure (symplectique) standard sur** $\mathbb{R}^{2n}$.

Exemple 2.2.2. Soit V un espace vectoriel quelconque alors $V \oplus V^*$ possède une forme non dégénérée naturelle

$$\begin{aligned} \omega : \left(V \oplus V^*\right) \times \left(V \oplus V^*\right) &\to \mathbb{R} \\ (v \oplus \alpha, w \oplus \beta) &\mapsto \beta(v) - \alpha(w) \end{aligned}$$

Définition 2.2.3 (Sous-espace complémentaire)**.** Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique et soit
$W \subset V$ un sous-espace de V alors on définit le **complément de** W relatif à ω, noté W^ω par

$$W^\omega := \{v \in W : \iota(w)\iota(v)\omega = 0 \; \forall w \in W\}$$

Proposition 2.2.1. *Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique et $W \subset V$ un sous-espace quelconque alors*

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim V$$

Démonstration. L'isomorphisme I_ω envoie isomorphiquement W^ω en $W^\perp$ alors $\dim W^\omega = \dim W^\perp$ mais

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V$$

pour tout sous-espace $W \subset V$, d'où le théorème. $\square$

Proposition 2.2.2. *Soit* (V,ω) *un espace vectoriel symplectique et* $W \subset V$ *un sous-espace quelconque alors* $(W^{\omega})^{\omega} = W$

Démonstration. Soit $w \in W$ alors $\iota(w)\iota(v)\omega = 0$ $\forall v \in W^{\omega}$, donc $W \subset (W^{\omega})^{\omega}$ et par la proposition précédente, $\dim W = \dim(W^{\omega})^{\omega}$, d'où la proposition. □

Définition 2.2.4. Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique et soit $W \subset M$ un sous-espace de V, alors on dit que W est un sous-espace

1. **isotrope** $W \subset W^{\omega}$
2. **coisotrope** si $W^{\omega} \subset W$
3. **lagrangien** si $W = W^{\omega}$
4. **symplectique** si $W \cap W^{\omega} = \{0\}$

Théorème 2.2.1. *[base standard pour des* $2-$*formes] Soit* V *un espace vectoriel et* $\sigma \in \Lambda^2(V^*)$ *une* $2-$*forme quelconque (non nécessairement non dégénérée) alors il existe* $k,n \in \mathbb{N}$ *et une base*

$$u_1,\cdots,u_k,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$$

telle que

$$\iota(u_i)\sigma = 0,\ \ i = 1,\cdots,k$$
$$\iota(x_i)\sigma = y_i^*\ ,\ i = 1,\cdots,n$$

Démonstration. Soient $U = \{v \in V :\ \iota(v)\omega = 0\}$, W un sous-espace complémentaire

$$V = U \oplus W$$

et $\{u_1,\cdots,u_k\}$ une base de U. Il n'y a qu'à choisir les paires de (x_i,y_i) promis comme une base de W. Pour ça, procédons par récursion sur la dimension de W : prenons un x_1 arbitraire, alors comme σ est non dégénérée sur W par construction, il existe un y_1 tel que $\sigma(x_1,y_1) = 1$. Soit $W_1 = span\langle x_1,y_1\rangle$ alors $W = W_1 \oplus W_1^{\sigma|_W}$ par des considérations dimensionnelles et l'on applique le même argument avec $W = W_1^{\sigma|_W}$ de dimension $\dim W - 2$. □

Corollaire 2.2.1. *Tout espace vectoriel symplectique* (V,ω) *possède une base*

$$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$$

telle que $\iota(x_i)\sigma = y_i^*$ *pour* $i = 1,\cdots,n$ *et un isomorphisme symplectique*

$$L : (V,\omega) \to (\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$$

Démonstration. Soit $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n$ la base donnée par le théorème précédent. Si $k \neq 0$ alors $I_w(\vec{u}_k) = -\iota(\vec{u}_k)\omega = 0$ qui contredit la non-dégénérescence de ω. On pose

$$L(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\vec{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\vec{y}_i \in \mathbb{R}^{2n}$$

□

Le corollaire suivant est immédiat

Corollaire 2.2.2. *Soit (V, ω) un espace vectoriel de dimension m alors $m = 2n$ pour $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Corollaire 2.2.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$ et $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ alors ω est non dégénérée si et seulement si $\omega^n \neq 0$.*

Démonstration. Soient $2r = k$ et $u_1, \cdots, u_r, x_1, \cdots, x_{n-r}, y_1, \cdots, y_{n-r}$ la base donnée par le théorème 2.2.1 alors il y a une base induite sur $\Lambda^2(V^*)$ de taille $n(2n-1)$ donnée par des produits des covecteurs duals à la base donnée. Par le théorème 2.2.1 dans cette base, ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-r} -\iota(y_i)\omega \wedge \iota(x_i)\omega = \sum_{i=1}^{n-r} x_i^* \wedge y_i^*$$

d'où $\omega^n \neq 0$ si et seulement si $r = 0$. □

Proposition 2.2.3. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $W \subset V$ un sous-espace quelconque alors ω induit une $2-$forme non dégénérée ω' sur l'espace quotient*

$$W' := W/(W \cap W^\omega)$$

Démonstration. On défini ω' par

$$\begin{gathered} \omega : W' \times W' \to \mathbb{R} \\ (u + W \cap W^\omega, v + W \cap W^\omega) \mapsto \omega(u, v) \end{gathered}$$

Ceci est bien défini, car si $u_1, u_2 \in W$ et $u_1 - u_2 = w \in W \cap W^\omega$ alors pour tout $v \in W$

$$\omega(u_1, v) - \omega(u_2, v) = \omega(w, v) = 0$$

et l'anti-symétrie implique que ω' est bien défini dans la deuxième variable. Pour voir que ω' est non dégénérée, suppose que pour tout $[v] \in W'$

$$\begin{aligned} & 0 = \omega'([u], [v]) \\ \Leftrightarrow \quad & \omega(u, v) = 0, \ \forall v \in W \\ \Leftrightarrow \quad & u \in W^\omega \end{aligned}$$

alors $[u] = 0$. □

Définition 2.2.5 (Quotient symplectique)**.** L'espace symplectique (W',ω') est appelé **le quotient symplectique** de W, et cette construction jouera un rôle fondateur dans notre étude des voisinages des sous-variétés des variétés symplectiques.

Définition 2.2.6 (Structures complexes sur un espace vectoriel)**.** Soit V un espace vectoriel alors on désigne par **une structure complexe sur** V une application linéaire

$$J : V \to V$$

telle que $J^2 = -id_V$. Le tuple (V,J) est dit **un espace vectoriel complexe**.

Exemple 2.2.3. Soit $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ la base standard pour $\mathbb{R}^{2n}$, la structure complexe

$$\begin{aligned} J_0 : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^{2n} \\ x_i &\mapsto y_i \\ y_i &\mapsto -x_i \end{aligned}$$

est **la structure complexe standard**.

Définition 2.2.7. Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique et $J : V \to V$ une structure complexe sur V alors J est J est dite $\omega-$**dominée** si la symétrisation $\langle .,. \rangle_J$ de la forme $\omega(.,J.)$ définie un produit scalaire sur V, c'est-à-dire que

$$\langle v,w \rangle_J := \frac{1}{2}(\omega(v,Jw)+\omega(Jv,w)$$

est positive et non dégénérée. J est dite $\omega-$compatible si J est $\omega-$dominée et

$$\langle v,w \rangle_J = \omega(v,Jw)$$

On désigne par $\mathscr{J}_t(V,\omega)$ l'espace des structures complexes $\omega-$dominées et par $\mathscr{J}(V,\omega)$ l'espace des structures complexes $\omega-$compatibles.

Exemple 2.2.4. Soit $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ l'espace symplectique standard et J_0 alors la structure complexe standard est ω_0-compatible.

Proposition 2.2.4. *Soit (V,ω) un espace vectoriel symplectique et J une structure complexe $\omega-$compatible sur V alors pour tout sous-espace $W \subset V$*

$$(JW)^{\omega} = W^{\perp}, \qquad W^{\omega} = (JW)^{\perp} \qquad JW \cap W^{\omega} = 0$$

où $W^{\perp}$ désigne le complément de W par rapport au produit scalaire $\langle .,. \rangle_J$

Démonstration. Par définition si $v \in (JW)^{\omega}$ alors $\forall Jw \in JW$, $\omega(v,Jw) = 0 \Leftrightarrow v \in W^{\perp}$.
Si $v \in W^{\omega}$ alors pour tout $w \in W^{\omega}$, $\omega(v,w) = -\omega(v,J(Jw)) = -\langle v,Jw \rangle_J = 0 \Leftrightarrow v \in (JW)^{\perp}$.
Il suit que $JW \cap W^{\omega} = 0$. □

Proposition 2.2.5. *Soient ω_0 la structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ et J_0 la structure complexe standard, alors l'application*

$$\begin{aligned} S : \mathscr{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) &\to Sym(\mathbb{R}^{2n}) \\ J &\mapsto (J + J_0)^{-1} \circ (J - J_0) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme de $\mathscr{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ en la balle ouverte

$$\{S_0 \in Sym(\mathbb{R}^{2n}) : \; \|S_0\| < 1\}$$

d'automorphismes symétriques de $\mathbb{R}^{2n}$.

Démonstration. Notons en premier que S est bien défini, car pour $x \neq 0$

$$0 < \omega(x, Jx) + \omega(x, J_0 x) = \omega(x, (J + J_0)x)$$

donc $\ker(J + J_0) = 0$ et $(J + J_0)$ est inversible. Ensuit notons que S est symétrique si et seulement si J est ω_0-compatible, car $S = (A + id_{\mathbb{R}^{2n}})^{-1} \circ (A - id_{\mathbb{R}^{2n}})$ où $A := J_0^{-1} J$ et

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle_{J_0} &= \langle x, Ay \rangle_{J_0} \\ \Leftrightarrow \;\; \omega_0(J_0^{-1} Jx, y) &= \omega_0(x, Jy) \\ \Leftrightarrow \;\; -\omega_0(Jx, y) &= \omega_0(x, Jy) \end{aligned}$$

d'où A est symétrique si et seulement si J est ω_0-compatible, est c'est facile de voir qu'une application linéaire L est symétrique si et seulement si $(L + id_{R^{2n}})^{-1}(L - id_{R^{2n}})$ l'est. Montrons ensuite que $im\, S \subset \{S_0 \in Sym(\mathbb{R}^{2n}) : \; \|S_0\| < 1\}$, évidement il suffit de montrer que

$$\|A + id_{\mathbb{R}^{2n}}\| > \|A - id_{\mathbb{R}^{2n}}\|$$

alors pour x vérifiant $\|x\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|A + id_{\mathbb{R}^{2n}}\|^2 - \|A - id_{\mathbb{R}^{2n}}\|^2 &\geq \omega_0(Ax + x, Ax + x) - \omega_0(Ax - x, Ax - x) \\ &= \omega_0(Ax, Jx) + \omega_0(Ax, x) + \omega_0(x, Jx) \\ &\quad -\omega_0(Ax, Jx) + \omega_0(Ax, x) + \omega_0, Jx) \\ &= 2\omega_0(Ax, x) + 2\omega_0(x, Jx) = 2[(J_0^{-1} Jx, x) + \omega_0(x, Jx)] \\ &= 4\omega_0(x, Jx) > 0 \end{aligned}$$

d'où $\|S\| < 1$. De plus, si $\|S\| < 1$ alors $(S - id_{R^{2n}})$ est inversible et l'application.

$$\begin{aligned} T : \{S_0 \in Sym(\mathbb{R}^{2n}) : \; \|S_0\| < 1\} &\to \mathscr{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \\ S_0 &\mapsto J_0 \circ (Id + S_0) \circ (Id - S_0)^{-1} \end{aligned}$$

est clairement l'inverse de S, et comme les deux sont des applications linéaires entre des espaces de dimension finie, elles sont forcément continues, d'où la proposition. $\square$

Corollaire 2.2.4. *Pour tout espace vectoriel symplectique* (V,ω), $\mathscr{J}(V,\omega)$ *est non-vide et contractile.*

Démonstration. Par théorème 2.2.1 tout espace vectoriel est isomorphe symplectiquement à $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ alors il suffit de montrer que $\mathscr{J}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ est non-vide est contractile, mais la proposition précédente implique que $\mathscr{J}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ est homéomorphe à un ensemble non vide et contractile, d'où l'énoncé. □

2.2.2 Fibrés vectoriels symplectiques

Rappelons que si (P,π,V,B) est un fibré vectoriel, alors on peut toujours former d'une manière naturelle la $k-$ième puissance extérieure : $(\Lambda^k(P),\pi,\Lambda^k(V),B)$ et le fibré dual (P^*,π,V^*,B). Soit $P \xrightarrow{\pi} B$ un fibré vectoriel avec fibre V et soit $\omega : B \to \Lambda^2(P^*)$ une section alors pour tout $b\in B$, $(V_b,\omega(b))$ est un espace vectoriel muni d'une $2-$forme.

Définition 2.2.8 (Fibrés vectoriels munis d'une $2-$forme)**.** On désigne par **un fibré vectoriel muni d'une** $2-$**forme** un tuple (P,π,ω,V,B) tel que (P,π,V,B) est un fibré vectoriel et $\omega : B \to \Lambda^2(P^*)$ est une section. On la note souvent par (P,ω) s'il n'y a aucun risque de confusion.

Définition 2.2.9 (Morphismes des Fibrés vectoriels munis de $2-$formes)**.** Soient (P,π,ω,V,B) et (P',π',ω',V',B') deux fibrés vectoriels munis de $2-$formes, alors un **morphisme de fibrés vectoriels munis de** $2-$**formes** Φ est un morphisme de fibrés vectoriels

$$\Phi : (P,\pi) \to (P',\pi)$$

tel que Φ_b est un morphisme d'espaces vectoriels munis de $2-$formes pour chaque $b\in B$.

Définition 2.2.10 (Fibrés vectoriels symplectiques)**.** Un fibré vectoriel symplectique est un fibré vectoriel (P,π,ω,V,B) tel que pour tout $b\in B$, (V_b,ω_b) est un espace vectoriel symplectique. Un morphisme de fibrés vectoriels symplectiques est un morphisme de fibrés vectoriels munis de 2-formes entre deux fibrés vectoriels symplectiques.

Définition 2.2.11 (Structures presque complexes)**.** Soit (P,π,V,B) un fibré vectoriel et soit $J : B \to End(P)$ une section du fibré vectoriel $(End(P),\pi,End(V),B)$ associé, alors J est dite **une structure presque complexe** si (V_b,J_b) est un espace vectoriel complexe pour chaque $b\in B$.

Si est (P,π,ω,V,B) est un fibré vectoriel symplectique, alors une structure presque complexe sur (P,π) est $\omega-$**dominée** (resp. $\omega-$**compatible**) si J_b est ω_b-dominée (resp. $\omega-$**compatible**) pour tout $b\in B$. Notons par $\mathscr{J}_t(P,\pi,\omega)$ l'espace des structures presque complexes $\omega-$dominées sur (P,π) et par $\mathscr{J}(P,\pi,\omega)$ l'espace des structures presque complexes $\omega-$compatibles sur (P,π). On aura besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.2.6. *Soit* (P,π,ω,V,B) *un fibré vectoriel symplectique quelconque alors* $\mathscr{J}(P,\pi,\omega)$ *est non-vide et contractile.*

Démonstration. Une structure presque complexe sur (P,π,ω,V,B) est une section du fibré vectoriel

$$\mathscr{J}(P,\pi,\omega) \to B$$

où la fibre au-dessus de $b \in B$ est $\mathscr{J}(V_b,\omega_b)$ mais par corollaire 2.2.4 ceci est contractile, et l'espace de sections d'un fibré avec fibres contractiles est contractile. $\square$

Définition 2.2.12. Soit M une variété lisse, alors **une structure presque complexe sur** M est une structure presque complexe J sur TM. Si $\omega \in \Omega^2(M)$ une $2-$forme telle que (TM,ω) est un fibré vectoriel symplectique alors une structure presque complexe sur M est dite $\omega-$dominée (resp. compatible) si J est une structure presque complexe $\omega-$dominée (resp. compatible) sur (TM,ω).

2.2.3 Variétés symplectiques

Définition 2.2.13. Soit M une variété lisse et $\omega \in \Lambda^2 T^*M$ une $2-$forme différentielle sur M alors on dit que ω est **non dégénérée** si (TM,ω) est un fibré vectoriel symplectique.

Définition 2.2.14. Une **variété symplectique** est une paire (M,ω) où M est une variété lisse et $\omega \in \Omega^2(M)$ est une $2-$forme *fermée* et *non dégénérée*. Si (M,ω) est une variété symplectique, on dit que M est la **variété sous-jacent**e et ω est une **forme symplectique** sur M.

Exemple 2.2.5 (Espaces cotangentes)**.** Soit M une variété lisse de dimension n, alors (T^*M,π,M) possède une $1-$forme différentielle $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ dite **la forme de Liouville** défini sur les fibres $T_{(x,\alpha)}T^*M$ par

$$\lambda_{(x,\alpha)}v = \pi^*\alpha$$

qui induit une forme symplectique ω_{taut} sur T^*M en définissant

$$\omega_{taut} := -d\lambda$$

C'est évident que ω_{taut} est fermée. Pour voir que ω_{taut} est non dégénérée prenons une carte locale $\varphi_U : \mathbb{R}^n \to U \subset M$ de M avec coordonnées $x_1,\cdots,x_n$ sur $\mathbb{R}^n$ et la carte locale induite $\Phi_U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to T^*M|_U$ avec coordonnées $x_1,\cdots,x_n$ sur la base et $y_1,\cdots,y_n$ sur la fibre. Il suit donc que dans ces coordonnées on à pour $(\xi,\eta) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n \times T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\lambda_{(x,\alpha)}v &= \lambda_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}(\xi \oplus \eta) \\
&= \iota(\xi \oplus \eta)(proj_1) * \sum_{i=1}^n y_i dx_i = \sum_{i=1}^n y_i dx_i(\xi) = \sum_{i=1}^n y_i dx_i(\xi)
\end{aligned}$$

alors dans ces coordonnées locales, λ est donné par

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

d'où toujours dans ces coordonnées

$$\begin{aligned}\omega_{taut} = -d\lambda &= -\sum_{i=1}^{n} d(y_i dx_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\end{aligned}$$

qui est non dégénéré par corollaire 2.2.3.

Proposition 2.2.7. *Soit M une variété lisse de dimension n et $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ la $1-$forme tautologique décrite ci-haut alors pour toute $1-$forme σ sur M vue comme une section $\sigma : M \to T^*M$ on a*

$$\sigma^*\lambda = \sigma$$

Démonstration. Pour alléger la confusion, notons par

$$\begin{aligned} s : M &\to T^*M\\ x &\mapsto (x, \sigma_x)\end{aligned}$$

σ vue simplement comme une section de T^*M alors par la définition de λ, pour $v \in T_xM$ on a

$$\begin{aligned}(s^*\lambda)_x(v) &= \lambda_{s(x)}(s_*v) = \lambda_{(x,\sigma_x)}(s_*v)\\ &= \iota(s_*v)\pi^*\sigma_x = \sigma_x(\pi_*s_*v) = \sigma_x((\pi \circ s)_*v)\\ &= \sigma(v)\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.6 (Produits symplectiques)**.** Soient (M, ω) et (N, σ) deux variétés symplectiques alors $(M \times N, \lambda_1\omega \times \lambda_2\sigma)$ est symplectique pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

Proposition 2.2.8. *Soit (M, ω) une variété symplectique avec* $\dim M = m$ *alors $m = 2n$ pour $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Démonstration. Par corollaire 2.2.2, $2n = \dim T_xM = \dim M$. □

Proposition 2.2.9. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique alors $\frac{\omega^n}{n!}$ est une forme de volume sur M*

Démonstration. Par corollaire 2.2.3, pour tout $x \in M$, $\omega_x^n \neq 0$, d'où $\frac{\omega^n}{n!}$ est une forme de volume. □

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.2.5. *Toute variété symplectique est orientable.*

Définition 2.2.15 (Volume d'une variété symplectique)**.** Soit (M,ω) une variété symplectique fermée alors on définit **le volume de** (M,ω) par la quantité

$$Vol(M,\omega) = \frac{1}{n!}\int_M \omega^n$$

Si ω est déjà compris, alors on écrit des fois $Vol(M) := Vol(M,\omega)$

Corollaire 2.2.6. *Soit* (M^{2n},ω) *une variété symplectique et* M *une variété fermée, alors* $[\omega] \neq 0 \in H^2(M;\mathbb{R})$.

Démonstration. Si $\omega = d\lambda$ pour $\lambda \in \Omega^1(M)$ alors $[\omega^n] = 0$ et comme M est fermé

$$\langle [\omega^n],[M]\rangle = \int_M \omega^n = 0$$

mais ceci contredit la conclusion de corollaire 2.2.9

$$\frac{1}{n!}\int_M \omega^n \neq 0$$

□

Définition 2.2.16. Soient (M,ω), (N,σ) deux variétés symplectiques et soit $\varphi : M \to N$ une application lisse, alors φ est dit un **morphisme symplectique** ou une **application symplectique** si

$$\varphi_* : (TM,\omega) \to (TN,\sigma)$$

est un morphisme de fibrés symplectiques. Également, si :

$$\varphi^*\sigma = \omega$$

Définition 2.2.17. Soient (M,ω), (N,σ) deux variétés symplectiques tel qu'il existe un *difféomorphisme* $\varphi : M \to N$ tel que φ est une application symplectique, alors on dit que (M,ω) et (N,σ) sont **symplectomorphes** ou **isomorphes symplectiquement**. Écrivons

$$Symp(M,\omega) = \{\varphi : (M,\omega) \to (M,\omega) :\ \varphi^*\omega = \omega,\ \varphi \in Diff(M)\}$$

pour l'ensemble des automorphismes d'une variété symplectique.

On voit donc que la notion d'isomorphisme dans la catégorie symplectique est essentiellement une question d'équivalence de $2-$formes sous l'action naturelle du groupe des difféomorphismes de la structure lisse. C'est alors naturel de chercher des conditions sur les formes symplectiques *qua* des formes différentielles pour s'assurer qu'elles sont équivalentes symplectiquement. À voir si l'on fixe une variété lisse M, on a

$$\begin{aligned} Diff(M) \times \Omega^2(M) &\to \Omega^2 \\ (\varphi, \sigma) &\mapsto \varphi^* \sigma \end{aligned}$$

et l'on pose

$$\mathscr{S}(M) := \{\sigma \in \Omega^2(M) : \sigma \text{ est une forme symplectique}\}$$

Notons que si l'on écrit

$$\begin{aligned} F^2(M) &:= \{\sigma \in \Omega^2(M) : d\sigma = 0\} \\ N^2(M) &:= \{\sigma \in \Omega^2(M) : \sigma \text{ est non dégénérée}\} \end{aligned}$$

alors $\mathscr{S}(M) = F^2(M) \cap N^2(M) \subset \Omega^2(M)$. Maintenant, $\Omega^2(M)$ possède une topologie et structure lisse naturelle induite par celle de $C^\infty(M, \Lambda^2 TM)$ comme

$$\Omega^2(M) \subset C^\infty(M, \Lambda^2 TM)$$

et l'on peut voir que $\Omega^2(M)$ est un sous-ensemble fermé de $C^\infty(M, \Lambda^2 TM)$ parce qu'il s'écrit comme $L_\pi^{-1}(id_M)$ où

$$\begin{aligned} L_\pi : C^\infty(M, \Lambda^2 TM) &\to C^\infty(M, M) \\ f &\mapsto \pi \circ f \end{aligned}$$

On peut alors noter que F^2 est fixé par l'action de $Diff(M)$ sur $\Omega^2(M)$, et que

$$F^2 = \ker d : \Omega^2(M) \to \Omega^3(M)$$

est fermée. De plus, comme la non-dégénérescence est une condition ouverte (si $-\iota(v)\omega \neq 0$ alors pour tout ω_ε, $C^\infty-$proche de ω, $-\iota(v)\omega_\varepsilon \neq 0$). Il suit donc qu'on peut voir $\mathscr{S}(M)$ comme un sous-ensemble ouvert de $F^2(M)$, et étant donné deux formes symplectiques $\omega_0, \omega_1 \in \mathscr{S}(M)$ on peut tenter de formuler des conditions sur ω_0 et ω_1 en termes de la topologie différentielle de $\Omega^2(M)$ ou $\mathscr{S}(M)$ pour assurer qu'ils soient symplectomorphes. Le théorème suivant dû à Moser nous dit que si l'on considère l'application naturelle

$$\begin{aligned} [.] : \mathscr{S}(M) &\to H^2(M; \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto [\omega] \end{aligned}$$

alors lorsque ω_0 et ω_1 se retrouvent dans la même fibre, alors l'existence d'une courbe entièrement dans cette fibre qui les lie suffit pour garantir que ω_0 et ω_1 soient symplectomorphes.

Théorème 2.2.2. *Soient M une variété lisse et ω_0, ω_1 deux formes symplectiques sur M. Suppose qu'il existe une famille à $1-$paramètre lisse de formes symplectiques $\{\omega_t\}_{t\in[0,1]}$*

joignant ω_0 et ω_1 telle que

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t$$

pour $\sigma_t \in \Omega^1(M)$ et telle que le champ vectoriel X_t définit par

$$\imath(X_t)\omega = -\sigma_t,\ \ t \in [0,1]$$

est complet alors il existe une isotopie symplectique $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ avec $\varphi_0 = id_M$, $\omega_0 = \varphi_t^*\omega_t$ $\forall t \in [0,1]$.

Démonstration. Notons en premier que la non-dégénérescence des ω_t implique qu'il y a une bijection entre les $1-$formes et les champs vectoriels, donc les X_t sont bien définis. Ensuite, soit $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ l'isotopie induit par les X_t, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_t \circ \varphi_t,\ \ \varphi_0 = id_M$$

L'hypothèse de complétude des X_t nous assure que cette isotopie est bien définie pour tout temps $t \in [0,1]$, et l'on prétend que l'isotopie ainsi définie est celle qu'on recherche. Pour vérifier ceci, notons que $\varphi_0^*\omega_0 = \omega_0$ et calculons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega_t &= \varphi^*(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t)\\ &= \varphi^*(d\imath(X_t)\omega_t + \imath(X_t)d\omega_t + d\sigma_t)\\ &= \varphi^*(0) = 0\end{aligned}$$

d'où le théorème. □

Remarque. Notons que si M est une variété compacte, alors la condition de complétude sur les X_t est trivialement vérifiée, car tout champ vectoriel à support compact est complet.

Définition 2.2.18. Soit (M,ω) une variété symplectique et soit $i_N : N \hookrightarrow M$ un sous-variété de M alors on dit que N est une sous-variété **symplectique** (resp. **isotrope**, **coisotrope**, **lagrangien**) si pour chaque $x \in N$ $\imath(_)N*(T_xN) \subset T_xM$ est un sous-espace symplectique (resp. isotrope, coisotrope, lagrangien) de (T_xM,ω_x).

Exemple 2.2.7. Soit (M,ω) une variété symplectique alors pour tout $x \in M$, $M \times \{x\}$ est une sous-variété symplectique de $(M\times M, \omega\times\omega)$

Exemple 2.2.8. Toute sous-variété N de dimension 1 d'une variété symplectique (M,ω) est isotrope, car $\omega_x(v,v) = 0$ pour $T_xN = span\langle v\rangle$.

Exemple 2.2.9. Toute sous-variété N de codimension 1 d'une variété symplectique (M,ω) est coisotrope et possède une **distribution caractéristique** (TN^ω,π,N), et comme toute distribution $1-$dimensionnelle est intégrable, N possède une foliation, dit sa **foliation caractéristique** par des courbes isotropes.

Les deux propositions suivantes nous fournissent avec des exemples de sous-variétés lagrangiens

Proposition 2.2.10. *Soient* (M_0, ω_0) *et* (M_1, ω_1) *deux variétés symplectiques et* $\varphi : M_0 \to M_1$ *un difféomorphisme alors* φ *est symplectique si et seulement si son graphe*

$$\Gamma_\varphi := \{(x, \varphi(x)) \in M_1 \times M_2\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $(M_0 \times M_1, -\omega_0 \times \omega_1)$.

Démonstration. Soit i le plongement tautologique

$$\begin{aligned} i : M_0 &\hookrightarrow M_0 \times M_1 \\ x &\mapsto (x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

alors Γ_φ est lagrangienne si et seulement si

$$0 = i^*(-\omega_0 \times \omega_1) = -\omega_0 + \varphi^* \omega^1$$

d'où la proposition. □

Proposition 2.2.11. *Soient* M *une variété de dimension* n, (T^*M, ω_{taut}) *la structure symplectique tautologique sur l'espace cotangent et soit* $\sigma \in \Omega^1(M)$ *une* $1-$*forme vue comme une section de* T^*M, *alors* σ *est fermée si et seulement si son graphe est une sous-variété lagrangienne de* (T^*M, ω_{taut}).

Démonstration. Rappelons que $\omega_{taut} = -d\lambda$ où λ est la forme de Liouville, et que le graphe de σ est lagrangien si et seulement si $\sigma^* \omega_{taut} = 0$, alors par proposition 2.2.7 on a

$$\sigma^* \omega_{taut} = -\sigma^* d\lambda = -d\sigma^* \lambda = -d\sigma$$

d'où la proposition. □

Les deux propositions précédentes caractérisent des objets importants dans la géométrie symplectique par des sous-variétés lagrangiennes difféomorphes à la variété originale, mais il se trouve qu'elles font encore plus ; dans la prochaine section on verra que toutes les sous-variétés lagrangiennes (peu importe leur variété ambiante) sont possèdent des voisinages symplectomorphes aussitôt les sous-variétés soient difféomorphes. Ceci nous fournira avec une carte locale d'un voisinage de l'identité en $Symp(M, \omega)$ en termes des $1-$formes fermées, qui est un phénomène dont on profitera beaucoup dans les pages suivantes.

2.2.3.1 Formes normales des voisinage symplectiques

Théorème 2.2.3. *Soient* (M_0, ω_0), (M_1, ω_1) *deux variétés symplectiques de la même dimension,* $K_i \subset M_i$ $i = 0, 1$ *deux sous-variétés symplectiques compactes et* $\psi : K_0 \to K_1$ *un difféo-*

morphisme tel que

$$\omega_0(x) = \psi^*(\omega_1)(x),\ \ x \in K_0$$

Alors il existe deux voisinages $\mathscr{N}(K_0) \supset K_0$ et $\mathscr{N}(K_1) \supset K_1$ et un isomorphisme symplectique

$$\bar{\psi} : \mathscr{N}(K_0) \to \mathscr{N}(K_1)$$

tel que $\bar{\psi}|_{K_0} = \psi$.

Démonstration. Notons en premier qu'il suffit d'établir le théorème dans le cas où $M_0 = M_1 =: M$, $K_0 = K_1 =: K$ et $\psi = id_K$, car dans le cas général avec $\sigma_i := \omega_i$, $i = 0,1$ on est donné que $\psi : K_0 \to K_1$ est un difféomorphisme quelconque et donc, comme les variétés ambiantes sont de la même dimension, ψ s'étend à un difféomorphisme $\tilde{psi}$ sur deux voisinages $V_i \supset K_i$, $i = 0,1$ et l'énoncé suit en applicant le cas particulier à $M = V_0 = \tilde{psi}^{-1}(V_1)$, $K = K_0 = \psi^{-1}(K_1)$, $\omega_0 = \sigma_0$ et $\omega_1 = \tilde{\psi}^*\sigma_1$.

Supposons alors que $M_0 = M_1 =: M$, $K_0 = K_1 =: K$ et $\psi = id_K$. Prenons un voisinage tubulaire $T(K)$ de K difféomorphe par $\Phi : T(K) \to T^{\perp}(K)$ au fibré normal $(T^{\perp}(K), \pi)$ de K et soit

$$H : [0,1] \times T(K) \to T(K)$$

une homotopie lisse entre $H_0(x) = \pi \circ \Phi(x)$ et $H_1 = id_{T(K)}$ telle que H_t est un difféomorphisme pour $t > 0$ et $H_t|_K = id_K$ pour $t \in [0,1]$ (une contraction lisse le long des fibres de $T^{\perp}(K)$ fonctionne). Pour $t > 0$, soit X_t le champ vectoriel induit par l'isotopie H_t c'est à dire

$$X_t := \frac{d}{dt} H_t \circ H_t^{-1}$$

et considérons pour $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_t^*(\omega_0 - \omega_1) &= H_t^*(\iota(X_t) d(\omega_0 - \omega_1) + d\iota(X_t)(\omega_0 - \omega_1)) \\ &= dH_t^* \iota(X_t)(\omega_0 - \omega_1) \end{aligned}$$

Notons que pour $t > 0$ $H_t^* \iota(X_t)(\omega_0 - \omega_1) = \iota(H_t^* X_t) H_t^*(\omega_0 - \omega_1)$ et

$$H_0^*(\omega_0 - \omega_1) = id_K^*(\omega_0 - \omega_1) = 0$$

par hypothèse, alors comme H est lisse $\iota(H_t^* X_t) H_t^*(\omega_0 - \omega_1)$ s'étant lissement à la $1-$forme nulle, d'où on obtient une famille lisse de $1-$formes sur $T(K)$

$$\sigma_t := H_t^* \iota(X_t)(\omega_0 - \omega_1),\ \ \sigma_0 = 0$$

telle que

$$\omega_0 + d\sigma_t = \omega_0,$$
$$\omega_0 + d\sigma_1 = \omega_1$$

Comme K est compacte et la non-dégénérescence est une condition ouverte, il existe un voisinage V_0 de K tel que

$$\omega_0 + d\sigma_t$$

est non dégénérée pour tout $t \in [0,1]$, alors le théorème suit du théorème 2.2.2. $\square$

On peut voir le théorème précédent comme une forme de souplesse, il nous dit que tout isomorphisme de fibrés symplectiques

$$\begin{array}{ccc} (TM_0|_{K_0}, \omega_0) & \xrightarrow{\Psi} & (TM_1|_{K_1}, \omega_1) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ K_0 & \xrightarrow{\psi} & K_1 \end{array}$$

qui recouvre un difféomorphisme entre les bases, et tel que $\Psi|_{TK_0} = \psi_*$ s'étend à un isomorphisme de fibrés symplectiques

$$\begin{array}{ccc} (TM_0|_{\mathcal{N}(K_0)}, \omega_0) & \xrightarrow{\tilde{\psi}_*} & (TM_1|_{\mathcal{N}(K_1)}, \omega_1) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathcal{N}(K_0) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{N}(K_1) \end{array}$$

Cette point de vue se généralise dans le théorème suivant dû, dans cette forme à Marle [14], mais on a d'abord besoin d'une définition.

Définition 2.2.19. Soient (M,ω) une variété symplectique et $S \subset M$ une sous-variété quelconque, on définit le **fibré normal symplectique** de S, noté $(N^{\omega}S, \pi)$ par le fibré vectoriel symplectique $TS^{\omega}/(TS \cap TS^{\omega}$ avec fibre au-dessus de $s \in S$ donné par le quotient symplectique de $(T_sS^{\omega}, \omega_s)$

$$(N_s^{\omega}S, \omega_s') := (T_sS^{\omega}/(T_sS \cap (T_sS)^{\omega}, \omega_s')$$

où ω_s' est la forme symplectique induite par ω_s en passant au quotient.

Notons que si S est un sous variété symplectique alors $T_sS^{\omega} \cap T_sS = 0$ et donc

$$(T_sS^{\omega}/(T_sS \cap (T_sS)^{\omega} = T_sS^{\omega}$$

pour tout $s \in S$ et alors $TM = S \oplus TS^{\omega}$, et l'on peut identifier le fibré normal symplectique avec le fibré normal de S dans M, qui est toujours difféomorphe à un voisinage tubulaire de

S, ce qu'on a exploité dans le théorème précédent. L'idée du théorème suivant est similaire ; on veut décomposer l'espace tangent de la variété ambiant en des sous fibrés sur lesquelles on peut contrôler le type d'isomorphisme des sous-fibrés, et ensuite les rassembler en un isomorphisme de fibrés symplectiques auquel on peut appliquer le théorème précédent.

Théorème 2.2.4. *Soient (M_i, ω_i) $i = 0,1$ deux variétés symplectiques et $S_i \subset M_i$ $i = 0,1$ des sous-variétés compactes telles qu'il existe un isomorphisme de fibrés symplectiques Ψ et un difféomorphisme ψ qui rendent le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} N^{\omega}S_0 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_0"] & N^{\omega}S_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ S_0 \arrow[r, "\varphi"] & S_1 \end{tikzcd}$$

et tel que $\psi^*\omega_1(x) = \omega_0(\psi^{-1}(x))$ pour tout $x \in S_1$, alors il existe des voisinages des S_i, $\mathcal{N}(S_i) \subset M_i$ $i = 0,1$ et un difféomorphisme symplectique $\tilde{\psi} : \mathcal{N}(S_0) \to \mathcal{N}(S_1)$ tel que $\tilde{\psi}|_{S_0} = \psi$ et $\tilde{\psi}_* = \Psi$.

Démonstration. Pour chaque S_i, $i = 0,1$, considérons les fibrés vectoriels symplectiques suivants

$$\begin{aligned} E_i &:= TS_i/(TS_i \cap TS_i^{\omega_i}) \\ F_i &:= TS^{\omega_i}/(TS \cap TS^{\omega_i})(= N^{\omega_i}S_i) \\ G_i &:= (TS \cap TS^{\omega_i}) \oplus (TS \cap TS^{\omega_i})^* \end{aligned}$$

On a les suites exactes de fibrés suivantes

$$0 \longrightarrow TS_i \cap TS_i^{\omega_i} \longrightarrow TS_i \longrightarrow E_i \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow TS_i \cap TS_i^{\omega_i} \longrightarrow TS_i^{\omega_i} \longrightarrow F_i \longrightarrow 0$$

et comme toute suite exacte de fibrés vectoriels au-dessus d'une base paracompacte scinde (non canoniquement, bien sûr) on obtient

$$\begin{aligned} TS_i &\simeq E_i \oplus TS_i \cap TS_i^{\omega_i} \\ TS_i^{\omega} &\simeq F_i \oplus TS_i \cap TS_i^{\omega_i} \end{aligned}$$

d'où $TS_i + TS_i^{\omega_i} = E_i \oplus F_i \oplus (TS_i \cap TS_i^{\omega_i})$. Choisissons ensuite une structure presque complexe J_i sur le fibré tangent de la variété ambiant (restreint à S_i) $TM_i|_{S_i}$ telle que J_i est compatible avec ω_i (note que comme E_i et F_i sont des sous-fibrés symplectiques de $(TM_i|_{S_i}, \omega_i)$

alors ils sont invariants par J_i), et l'on a

$$\begin{aligned} &J_i(TS_i \cap TS_i^{\omega_i}) \subset TM_i|_{S_i} \\ &J_i(TS_i \cap TS_i^{\omega_i}) \cap (TS_i \cap TS_i^{\omega_i}) = 0 \end{aligned}$$

d'où, par les considérations dimensionnelles, on voit

$$TM_i|_{S_i} = (TS_i + TS_i^{\omega_i}) \oplus J_i(TS_i \cap TS_i^{\omega_i})$$

De plus, la compatibilité de J_i avec ω_i nous fournit avec une identification

$$J_i(TS_i \cap TS_i^{\omega_i}) \simeq (TS_i \cap TS_i^{\omega_i})^*$$

en identifiant $v \in J_i(TS_i \cap TS_i^{\omega_i})$ avec $\iota(J_i v)\omega_i \in (TS_i \cap TS_i^{\omega_i})^*$, d'où on obtient la décomposition

$$TM_i|_{S_i} = E_i \oplus F_i \oplus G_i$$

Par hypothèse on a que $\psi^*\omega_1 = \omega_0$ sur S_0, d'où $E_0 \simeq E_1$ et $G_0 \simeq G_1$ (ce deuxième suit du fait que $TS_0 \cap TS_i^{\omega_0} \simeq TS_1 \cap TS_1^{\omega_1}$ par ψ_* et donc $J_0(TS_0 \cap TS_0^{\omega_0}) \simeq J_1(TS_1 \cap TS_1^{\omega_1})$ par la compatibilité des J_i's avec les ω_i's, et les F_i sont isomorphe par hypothèse. On obtient alors un isomorphisme des fibrés symplectiques $(TM_0|_{S_0}, \omega_0) \simeq (TM_1|_{S_1}, \omega_1)$ qui recouvre le difféomorphisme sur les bases et qui s'accord avec la dérivée du difféomorphisme sur le sous-fibré TS_0, d'où théorème 2.2.3 s'applique. □

Corollaire 2.2.7 (Darboux)**.** *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique quelconque alors pour tout $x \in M$, il existe un voisinage de x symplectomorphe à un voisinage de l'origine dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Démonstration. Appliquons le théorème 2.2.4 à $x \in M$ et $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. □

Corollaire 2.2.8. *Soient (M_i, ω_i), $i = 0,1$ deux variétés symplectiques et $L_i \subset M_i$, $i = 0,1$ deux sous-variétés lagrangiennes compactes difféomorphes, alors il existe deux voisinages $\mathcal{N}(L_i) \supset L_i$, $i = 0,1$ et un difféomorphisme symplectique*

$$\psi : \mathcal{N}(L_0) \to \mathcal{N}(L_1)$$

Démonstration. Par hypothèse, les L_i's sont lagrangien, alors pour tout $x_i \in L_i$, $i = 0,1$

$$\begin{aligned} &T_{x_i} L_i^{\omega_i} = T_x L_i \\ \Rightarrow \quad &N_{x_i}^{\omega_i} L_i = 0 \end{aligned}$$

alors tout difféomorphisme est trivialement recouvert par un isomorphisme entre les fibrés normaux symplectiques et l'on applique le théorème 2.2.4. □

2.2.3.2 Le voisinage de Weinstein et la topologie locale de $Symp(M,\omega)$

Commençons par deux lemmes faciles sur la topologie des espaces fonctionnelle des fibrés :

Lemme 2.2.1. *Soit (P,π,B) un fibré lisse et soit $\sigma : B \to P$ une section de (P,π) alors il existe un voisinage W de σ dans la C^1-topologie tel que*

$$f \in \sigma \ \Rightarrow \pi \circ f = id_B$$

Démonstration. Pour chaque $b \in B$, soit (U_b, Φ_{U_b}) une carte locale pour (P,π) avec U_b identifié difféomorphiquement avec $\mathbb{R}^n$ tel que b est envoyé en 0, et soit (V,φ_V) une carte locale sur la fibre avec $V \simeq \mathbb{R}^m$ et $\sigma(0) = \in V$, alors comme σ un plongement et en particulier $D\sigma_{U_b}$ est de rang maximal, d'où pour tout f qui est C^1-proche de σ, $Df|_{U_b}$ est de rang maximal, et en particulier il existe, par le théorème des fonctions implicites, un voisinage O de 0 tel que $f|_O$ s'exprime comme le graphe d'une fonction $g : O \to \mathbb{R}^m$, d'où

$$\pi \circ f(b) = \pi \circ g(b) = b$$

et alors comme ceci est le cas pour tout $b \in B$, le lemme suit. □

Lemme 2.2.2. *Soit (P,π,V,B) un fibré vectoriel lisse et soit $\Gamma^\infty(P,\pi) \subset C^\infty(B,P)$ l'espace de sections lisses de (P,π) alors $\Gamma^\infty(P,\pi)$ est contractile.*

Démonstration. Soit $\sigma : B \to P$ une section, alors pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} t\sigma : B &\to P \\ b &\mapsto (b, t\sigma(b) \end{aligned}$$

est aussi une section, alors l'homotopie $H(t,\sigma) = t\sigma$ donne une contraction de $\Gamma^\infty(P,\pi)$ à la section zéro. □

Théorème 2.2.5. *Soit (M,ω) une variété symplectique compacte alors il existe un C^1-voisinage $W \subset Symp_0(M,\omega)$ de id_M un voisinage $O \subset F^1(M) \subset \Omega^1(M)$ des $1-$formes fermées contenant la forme nulle $0_M \in O$, et une bijection lisse*

$$\mathscr{W} : W \to O$$

telle que $\mathscr{W}(id_M) = 0_M$.

Démonstration. Par propositions 2.2.10 et 2.2.11 un difféomorphisme $\psi \in Diff(M)$ est symplectique si et seulement si son graphe $\Gamma_\psi \subset (M \times M, -\omega \times \omega)$ est une sous-variété lagrangienne et une $1-$forme arbitraire $\sigma : M \to T^*M$ est fermée si et seulement si son graphe Γ_σ est lagrangien. Comme id_M est évidemment un difféomorphisme symplectique avec graphe

$$\Gamma_{id_M} = \triangle \subset M \times M$$

et la $1-$forme nulle 0_M qui a comme graphe la section zéro :

$$\Gamma_{0_M} = \{(x,0) \in T_x^*M : \ x \in M\}$$

est évidement fermée, et les deux sont difféomorphes par le difféomorphisme naturel

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma_{id_M} &\to \Gamma_{0_M} \\ (x,x) &\mapsto (x,0) \end{aligned}$$

alors par le corollaire 2.2.8 il existe des voisinages $\mathscr{N}(\Gamma_{id_M})$, $\mathscr{N}(\Gamma_{0_M})$ et un difféomorphisme symplectique

$$\Psi : (\mathscr{N}(\Gamma_{id_M}), -\omega \times \omega) \to (\mathscr{N}(\Gamma_{0_M}, \omega_{taut})$$

avec $\Psi(\Gamma_{id_M}) = \Gamma_{0_M}$. Comme Ψ est un difféomorphisme lisse, pour $\psi \in Symp_0(M,\omega)$ qui est C^1-proche de id_M, $\Psi(\Gamma_\psi) \subset \mathscr{N}(\Gamma_{0_M})$ est l'image d'une application de M qui est C^1-proche de Γ_{0_M} alors par le lemme 2.2.1, $\Psi(\Gamma_\psi)$ est l'image d'une section $\sigma : M \to T^*M$. Il existe donc des voisinages ouverts $W \subset Symp_0(M,\omega)$, $O \subset \Omega^1(M)$ tels qu'on peut définir

$$\begin{aligned} \mathscr{W} : W &\to O \\ \psi &\to \sigma_\psi \end{aligned}$$

où σ_ψ vérifie

$$\Psi(\Gamma_\psi) = \Gamma_{\sigma_\psi}$$

De plus, comme Ψ est une application symplectique et Γ_ψ est lagrangien, $\Psi(\Gamma_\psi) = \Gamma_{\sigma_\psi}$ l'est aussi et par la proposition 2.2.11 σ_ψ est forcément fermée, alors $O \subset F^1(M)$ comme prétendu. □

Définition 2.2.20 (La Carte de Weinstein)**.** La paire $(W,\mathscr{W})$ construite dans le théorème ci-haut s'appelle la **carte de Weinstein** et elle nous donne un modèle utile pour la géométrie locale du groupe de symplectomorphismes.

Corollaire 2.2.9. *Soit (M,ω) une variété symplectique compacte alors $Symp(M,\omega)$ est localement connexe par arcs.*

Démonstration. Notons que par la continuité de l'opération du groupe, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage de id_M qui est connexe par arcs. Prenons la carte de Weinstein $(W,\mathscr{W})$ et notons que le lemme 2.2.2 implique que $\mathscr{W}(W)$ est contractile, donc connexe par arcs et comme $\mathscr{W}$ est en particulier un homéomorphisme entre ces deux espaces, W l'en est de même. □

2.3 Les isotopies et les difféomorphismes hamiltoniens

Soit (M,ω) une variété symplectique alors la non-dégénérescence de ω induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} I_\omega : TM &\to T^*M \\ X &\mapsto -\iota(X)\omega \end{aligned}$$

et alors un isomorphisme

$$\begin{aligned} I_{\omega_*} : \mathscr{X}(M) &\to \Omega^1(M) \\ (\sigma : M \to TM) &\mapsto I_\omega \circ \sigma \end{aligned}$$

Rappelons que $\Omega^1(M)$ possède une stratification naturelle $B^1 \subset Z^1 \subset \Omega^1(M)$ où

$$\begin{aligned} B^1 &:= \{dH : \ H \in C^\infty(M)\} \\ Z^1 &:= \{\alpha \in \Omega^1(M) : \ d\alpha = 0\} \end{aligned}$$

Cette stratification se retire par I_{ω_*} à une stratification sur $\mathscr{X}(M)$: $\mathfrak{ham} \subset \mathfrak{symp} \subset \mathscr{X}(M)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{ham} &= I_{\omega*}^{-1}(B^1) \\ \mathfrak{symp} &= I_{\omega*}^{-1}(Z^1) \end{aligned}$$

Appelons les éléments de $\mathfrak{ham}$ des **champs vectoriels hamiltoniens** ou des champs **exacts** et appelons les champs dans $\mathfrak{symp}$ **localement exact** ou des **champs symplectiques**. L'appellation de ce dernier vient du fait que les champs vectoriels dans $\mathfrak{symp}$ sont précisément ceux dont le flot préserve ω :

Proposition 2.3.1. *Soit $X \in \mathscr{X}(M)$ alors*

$$X \in \mathfrak{symp} \Leftrightarrow \mathscr{L}_X(\omega) = 0$$

Démonstration. Ceci est une conséquence simple de la formule de Cartan :

$$\mathscr{L}_X(\alpha) = \iota(X)d\alpha + d(\iota(X)\alpha)$$

et comme ω est fermé, on voit que pour $X \in \mathscr{X}(M)$ on a

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_X(\omega) &= \iota(X)d\omega + d(\iota(X)\omega) \\ &= d(\iota(X)\omega) \\ &= -dI_{\omega*}(X) \end{aligned}$$

et alors $\mathscr{L}_X(\omega) = 0 \Leftrightarrow dI_{\omega*}(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{symp}$. □

C'est un fait classique (voir par exemple [19]) que l'ensemble $Diff^\infty(M)$ des difféomorphismes lisses peut être donné la structure d'un groupe de Lie de dimension infinie avec algèbre de Lie $(\mathscr{X}^\infty(M), [.,.])$ l'ensemble des champs vectoriels lisses avec le crochet de Lie standard. De plus, on sait par corollaire 2.2.9 que $Symp(M,\omega)$ est localement connexe par arcs, en tenant compte de ceci, la proposition suivante est suggestive

Proposition 2.3.2. $(\mathfrak{symp}, [.,.])$ *est une sous-algèbre de Lie de* $(\mathscr{X}^\infty(M), [.,.])$ *et* $(\mathfrak{ham}, [.,.])$ *est un idéal de* $(\mathfrak{symp}, [.,.])$. *De plus, soient* $X,Y \in \mathfrak{symp}$ *alors*

$$[X,Y] = I_{\omega*}^{-1}(d\omega(X,Y))$$

Démonstration. Montrons en premier que $\mathfrak{symp}$ est fermée sous le crochet de Lie : soient $X,Y \in \mathfrak{symp}$, écrivons φ^t pour le flot à temps t du champ vectoriel X et rappelons que $\varphi_t^*\omega = \omega$ pour tout t d'où

$$\begin{aligned}
I_{\omega*}([X,Y]) &= -\iota([X,Y])\omega = \omega(\mathscr{L}_X Y, -) = \omega(\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^* Y, -) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega(\varphi_t^* Y, -) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega(\varphi_t^* Y, -) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega(Y, \varphi_t^* -) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*[\iota(Y)\omega] \\
&= \mathscr{L}_X\iota(Y)\omega = \iota(X)[d\iota(Y)\omega] + d\iota(X)\iota(Y)\omega \\
&= d\iota(X)\iota(Y)\omega, \text{ comme } \iota(Y)\omega \text{ est fermée} \\
&= d\omega(X,Y)
\end{aligned}$$

□

La proposition ci-haut est suggestive grâce à l'analogie à la théorie des groupes de Lie en dimension finie ; elle nous mène à soupçonner qu'il devrait exister deux sous-groupes de Lie (de dimension infinie) de $Diff(M)$ qu'on peut associer à une structure symplectique ω : le groupe avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{symp}$, qu'on va appeler $Symp(M,\omega)$ et le groupe avec algèbre $\mathfrak{ham}$ qu'on dénotera $Ham(M,\omega)$. De plus, le fait que $\mathfrak{ham}$ est un idéal de $\mathfrak{symp}$ suggère que $Ham(M,\omega)$ devrait en être un sous-groupe normal et fermé de $Symp(M,\omega)$. Malheureusement pour tout le monde qui cherchait une histoire simple, dans le cadre des dimensions infinies la relation entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie n'est pas aussi directe que dans les dimensions finies essentiellement à cause du fait que l'application exponentielle peut rater d'être injective ou surjective proche de l'identité. Pourtant, lorsque M est fermé il se trouve que cette histoire est toujours vrai ; on montrera la normalité de $Ham(M,\omega)$ mais le fait qu'il est fermé en $Symp_0(M,\omega)$ est un fait profond qui est équivalent au théorème de flux C^1 dû à Ono [20] qui dépasse la portée de ce mémoire.

Expliquons un peu le problème auquel on fait face. Naïvement, en vue de la proposition précédente, on imagine qu'il existe un sous-groupe normal $Ham(M,\omega)$ de $Symp(M,\omega)$ ayant comme algèbre de Lie $\mathfrak{ham}$. Si c'est le cas, il faut que $Ham(M,\omega)$ soit composé de tous les éléments de $Symp(M,\omega)$ qui peuvent être atteint en suivant une isotopie $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ de l'identité induite par le flot d'une famille à $1-$paramètre de champs vectoriels dans $\mathfrak{ham}$. Autrement dit, on a

$$\frac{d}{dt}h_t(x) = X_t \circ h_t(x), \qquad X_t \in \mathfrak{ham},\ \forall t \in [0,1],\ h_0 = id_M$$

Appelons une telle isotopie **une isotopie hamiltonienne**, et notons par $Iso_0^{ham}(M,\omega)$ l'ensemble de telles isotopies. On peut alors finalement définir les difféomorphismes hamiltoniens :

Définition 2.3.1.

$$Ham(M,\omega) := \left\{h \in Symp(M,\omega) : \exists h = h_1 \ pour\ \{h_t\}_{t\in[0,1]} \in Iso_0^{ham}(M,\omega)\right\}$$

C'est alors tautologique que le flot tout champ vectoriel hamiltonien qui dépend peut-être du temps (lorsqu'on parle des champs vectoriels sans qualification dans ce texte, ces champs vectoriels peuvent toujours dépendre du temps) est un difféomorphisme hamiltonien, et alors certainement $\mathfrak{ham} \subset AlgbreLie(Ham(M,\omega))$, mais la question qui nous presse est l'inverse ; est-ce que tout chemin lisse d'hamiltoniens basé en l'identité, c'est à dire, une application

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\to Ham(M,\omega) \\ t &\mapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = id_M$ induit par la relation

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)(x) = X_t \circ \alpha(t)(x),\ \forall t \in [0,1]$$

une famille de champs de vecteurs avec $X_t \in \mathfrak{ham}$, $\forall t \in [0,1]$? Autrement dit, est-ce que tout chemin lisse d'hamiltoniens est une isotopie d'hamiltoniens ? Remarque que la réponse n'est pas claire, comme *a priori*, si $Ham(M,\omega)$ n'est pas C^1-fermé dans $Symp(M,\omega)$, il pourrait arriver que pour un $x \in M$ donné, le chemin

$$\{\alpha(t)(x)\}_{t\in[0,1]} \subset M$$

n'est pas différentiable, et alors forcément $\alpha(t)$ ne pourrait pas être une isotopie hamiltonienne. On verra pourtant dans la dernière section de ce chapitre qu'en étudiant le comportement du morphisme de flux sur la carte de Weinstein qu'on peut garantir que ceci n'est pas le cas et que tout chemin lisse d'hamiltoniens est, en fait, une isotopie hamiltonienne.

2.4 La norme de Hofer et ses variantes

2.4.1 La structure de groupe des hamiltoniens

Proposition 2.4.1. *Soient $F,G : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ des hamiltoniens engendrant les isotopies hamiltoniennes $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ et $\{g_t\}_{t\in[0,1]}$ respectivement alors*

1. $(F\#G)(x,t) := F(x,t) + G(f_t^{-1}x,t)$ *engendre* $\{(f\circ g)_t\}_{t\in[0,1]}$

2. $\bar{F}(x,t) := -F(f_t x,t)$ *engendre* $\{f_t^{-1}\}_{t\in[0,1]}$

$C_c^\infty(M\times[0,1])$ est un groupe lorsqu'on le muni de l'opération $F\#G$ avec inverse donné par $F\mapsto\bar{F}$ si M n'est pas compacte, et $C^\infty(M\times[0,1])/C^\infty([0,1])$ l'est si M est compacte.

Démonstration. Écrivons

$$X_{H_t}(x) = \frac{d}{dt}h_t\circ h^{-1}(x)$$

pour le champ vectoriel hamiltonien engendré par n'importe quelle fonction à support compacte $H\in C_c^\infty(M)$, alors par le théorème de dérivation des fonctions composées on a

1.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f_t\circ g_t)\circ(f_t\circ g_t)^{-1} &= X_{F_t} + (f_t)_* X_{G_t}\\ &= X_{F_t} + (f_t^{-1})^* X_{G_t} = X_{F_t} + X_{G_t\circ f^{-1}}\\ &= X_{F_t+G_t\circ f^{-1}} = X_{(F\#G)_t}\end{aligned}$$

2. En posant $g_t = f_t^{-1}$ dans le calcul précédent, on obtient
$$0 = X_{(F\#\bar{F})_t}$$
d'où $F_t = c_t - \bar{F}_t\circ f^{-1}$ pour une constante $c\in\mathbb{R}$. Si M n'est pas compacte, alors forcément $c_t = 0$ pour chaque $t\in[0,1]$ car les deux fonctions doivent avoir le support compact, et si M est compacte, alors on peut imposer la condition additionnelle
$$\int_M F_t\omega^n = \int_M \bar{F}_t\omega^n \ \ \forall t\in[0,1]$$
d'où $c_t = 0$, alors dans les deux cas on obtient
$$\bar{F}_t = F_t\circ f_t$$

L'assertion que ces opérations donnent une structure de groupe sur les fonctions à support compacte sur une variété non compacte ou sur les fonctions modulo des constants sur une variété compacte avec identité la fonction nulle suit immédiatement de la discussion sur le choix de normalisation dans la deuxième preuve, il n'y a qu'à montrer l'associativité de l'opération de composition :
Soient F,G,H des hamiltoniens engendrant les isotopies f_t, g_t, h_t respectivement

$$\begin{aligned}(F\#G)\#H &= (F+G\circ f^{-1})\#H = F+G\circ f^{-1}+H\circ((f\circ g)^{-1})\\ &= F+G\circ f^{-1}+H\circ(g^{-1}\circ f^{-1}) = F+(G+H\circ g^{-1})\circ f^{-1}\\ &= F+(G\#H)\circ f^{-1} = F\#(G\#H)\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.2. *Soit h_t une isotopie hamiltonienne engendrée par l'hamiltonien H et $\varphi \in Symp(M,\omega)$ n'importe quel difféomorphisme symplectique, alors l'isotopie $\varphi^{-1}h_t\varphi$ est engendrée par l'hamiltonien $H\circ\varphi$.*

Démonstration. Soient Y_t et Z_t les champs vectoriels induits par les isotopies $\varphi^{-1}h_t\varphi$ et $h_t\varphi$ respectivement alors

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{d}{dt}\varphi^{-1}\circ\varphi + \varphi^* Z_t \\ &= \varphi^*(X_{H_t} + h_{t*}\frac{d}{dt}\varphi\circ\varphi) \\ &= X_{H_t\circ\varphi} \end{aligned}$$

□

2.4.2 La longueur d'une isotopie hamiltonienne

Rappelons qu'une isotopie hamiltonienne de (M^{2n},ω) est un chemin lisse de difféomorphismes hamiltoniens $\alpha(t) := \{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ tel qu'il existe des champs vectoriels hamiltoniens $\{X_{H_t}\}_{t\in[0,1]}$ avec $H_t : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que pour tout $t\in[0,1]$.

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = X_{H_t}\circ\varphi_t$$

Si M^{2n} est fermé alors chaque H_t n'est défini qu'à l'addition d'une constante près, il est donc souvent utile de normaliser les hamiltoniens par rapport à leur moyen sur M en chaque temps. On introduit donc la notation suivante

$$c(H) = c_t := \frac{1}{n!Vol(M,\omega)}\int_M H_t\omega^n$$

et étant donné une isotopie hamiltonienne h_t, on peut définir les fonctionnelles de « longueur » suivantes :

Définition 2.4.1. Soient h_t une isotopie hamiltonienne et H_t n'importe quel hamiltonien induisant h_t alors la **longueur positive hoferienne** de h_t est défini par

$$\mathscr{L}^+(h_t) := \int_0^1 \max_{x\in M} H_t(x) - c_t \,\mathrm{d}t$$

La **longueur négative hoferienne** de h_t est défini par

$$\mathscr{L}^-(h_t) := \int_0^1 c_t - \min_{x\in M} H_t(x) \,\mathrm{d}t$$

La **longueur hoferienne** de h_t est

$$\mathscr{L}(h_t) := \mathscr{L}^+(h_t) + \mathscr{L}^-(h_t)$$

Proposition 2.4.3. *Soient h_t, g_t des isotopies hamiltoniennes alors $\mathscr{L}^+(h_t)$ et $\mathscr{L}^-(h_t)$ sont bien définies et*

1. $$\mathscr{L}^+(h_t^{-1}) = \mathscr{L}^-(h_t)$$

2. $$\mathscr{L}^+(h_t \circ g_t) \leq \mathscr{L}^+(h_t) + \mathscr{L}^+(g_t)$$
$$\mathscr{L}^-(h_t \circ g_t) \leq \mathscr{L}^-(h_t) + \mathscr{L}^-(g_t)$$

3. *Pour n'importe quel difféomorphisme symplectique $\varphi \in Symp(M, \omega)$*
$$\mathscr{L}^+(\varphi^{-1} h_t \varphi) = \mathscr{L}^+(h_t)$$
$$\mathscr{L}^-(\varphi^{-1} h_t \varphi) = \mathscr{L}^-(h_t)$$

Démonstration. Pour vérifier que les fonctionnelles sont bien définies, suppose que H_t^1 et H_t^2 induisent la même isotopie, alors $dH_t^1 = dH_t^2$ pour tout $t \in [0,1]$, d'où il y a une fonction lisse k_t à valeurs réels telle que $H_t^1 = H_t^2 + k_t$, alors

$$\begin{aligned} c(H_t^1) &= \frac{1}{Vol(M,\omega)n!} \int_M H_t^1 \omega^n = \frac{1}{Vol(M,\omega)n!} \int_M H_t^2 \omega^n + k_t \\ &= c(H_t^2) + k_t \end{aligned}$$

et donc

$$H_t^1 - c(H_t^1) = H_t^2 + k_t - (c(H_t^2) + k_t) = H_t^2 - c(H_t^2)$$

d'où il suit que les fonctionnelles sont bien définies. En vertu de ceci, lorsque M est compacte on peut toujours supposer que nos hamiltoniens vérifient $c_t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ en calculant ces quantités. Montrons ensuite les deux énoncés numérotés :

1. L'égalité entre ces deux quantités suit du fait que si H_t engendre h_t alors $\bar{H}_t = -H \circ h_t$ engendre h_t^{-1}, et alors $\max_{x \in M} \bar{H}_t = \min_{x \in M} H$

2. Vérifions la première inégalité : encore une fois ça suit de la proposition 2.4.1, si H_t et

G_t engendrent h_t et g_t respectivement alors $(H\#G)_t = H + G \circ h^{-1}$ engendre $h_t \circ g_t$ et

$$\begin{aligned}\max(F\#G)_t &= \max F_t + G_t \circ f_t^{-1} \\ &\leq \max F_t + \max G_t \circ f_t^{-1} \\ &= \max F_t + \max G_t\end{aligned}$$

La deuxième inégalité suit de première et (1) :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^-(h_t \circ g_t) &= \mathscr{L}^+((h_t \circ g_t)^{-1}) \\ &\leq \mathscr{L}^+(g_t^{-1}) + \mathscr{L}^+(h_t^{-1}) = \mathscr{L}^-(h_t) + \mathscr{L}^-(h_t)\end{aligned}$$

3. Montrons la première égalité, le deuxième suit de celle-là dans la même manière que le numéro précédent :
   Si H_t engendre h_t, alors $H_t \circ \varphi$ engendre $\varphi^{-1} f \varphi$ par proposition 2.4.2 et

$$\begin{aligned}\max H_t &= \max H_t \circ \varphi, \\ \min H_t &= \min H_t \circ \varphi\end{aligned}$$

$\square$

Rappelons ensuite qu'un difféomorphisme $h \in C^\infty(M)$ est un difféomorphisme hamiltonien de (M, ω) s'il est le point final d'une isotopie hamiltonienne basée à id_M. On introduit alors les définitions suivantes

Définition 2.4.2. Soit $h \in Ham(M, \omega)$, alors on désigne par $Iso_0^{ham}(h)$ l'ensemble de tout les isotopies hamiltoniens $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ avec $h_0 = id_M$ et $h_1 = h$.

Définition 2.4.3. La **norme hoferienne** ou **norme de Hofer** d'un difféomorphisme hamiltonien $h \in Ham(M, \omega)$ est

$$\rho_H(h) := \inf_{h_t \in Iso_0^{ham}(h)} \{\mathscr{L}(h_t)\}$$

On appelle la quantité

$$\rho_H(h)^+ := \inf_{h \in Iso_0^{ham}(h)} \{\mathscr{L}^+(h_t)\}$$

la **partie positive de la norme hoferienne**, et l'on appelle la quantité

$$\rho_H(h)^- := \inf_{h \in Iso_0^{ham}(h)} \{\mathscr{L}^-(h_t)\}$$

la **partie négative de la norme hoferienne**

Remarque. Il faut noter que tandis que la norme hoferienne est authentiquement une norme, ses parties positive et négative ne le sont pas nécessairement.

Proposition 2.4.4. *La norme de Hofer est un séminorme symétrique et invariant sous la conjugaison, c'est-à-dire, pour tout $f, g \in Ham(M, \omega)$, $\varphi \in Symp(M, \omega)$ on a*

1. $\rho_H(\varphi^{-1} f \varphi) = \rho_H(f)$
2. $\rho_H(f^{-1}) = \rho_H(f)$
3. $\rho_H(fg) \leq \rho_H(f) + \rho_H(g)$

Démonstration. 1. Par proposition 2.4.3, pour toute isotopie hamiltonienne f_t avec $f = f_1$

$$\mathscr{L}(\varphi^{-1} f_t \varphi) = \mathscr{L}(f_t)$$

2. Par proposition 2.4.3, pour toute isotopie hamiltonienne f_t avec $f = f_1$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f_t) &= \mathscr{L}^+(f_t) + \mathscr{L}^-(f_t) = \mathscr{L}^-(f_t^{-1}) + \mathscr{L}^+(f_t^{-1}) \\ &= \mathscr{L}(f_t^{-1})\end{aligned}$$

3. Par proposition 2.4.3, pour toute isotopie hamiltonienne f_t avec $f = f_1$, g_t avec $g = g_1$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f_t g_t) &= \mathscr{L}^+(f_t g_t) + \mathscr{L}^-(h_t g_t) \\ &\leq \mathscr{L}^+(h_t) + \mathscr{L}^+(g_t) + \mathscr{L}^+(h_t^{-1}) + \mathscr{L}^+(g_t^{-1}) \\ &= \mathscr{L}(h_t) + \mathscr{L}(g_t)\end{aligned}$$

□

Remarque. Il suit aussi du raisonnement ci-haut que ρ_H^+ et ρ_H^- sont aussi des séminormes sur $Ham(M, \omega)$.

En fait comme on l'a déjà mentionné, la norme de Hofer est une véritable norme, c'est-à-dire qu'on a aussi

$$\rho_H(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = id_M$$

Ceci est un fait profond et sa preuve est difficile ; on le démontra comme une application de la théorie des fibrés hamiltoniens dans la dernière section de cette mémoire dans le cas où (M, ω) est fermée.

Comme la norme hoferienne est définie en utilisant des chemins lisses d'hamiltoniens (ce qu'on ne sait toujours pas, par contre ! À ce point-ci on sait seulement qu'il se définit en utilisant des isotopies hamiltoniennes), on pourrait bien imaginer qu'une étape intermédiaire d'estimer $\rho_H(h)$ serait de minimiser la norme hoferienne sur chaque classe d'homotopie des chemins de l'identité à h et peut-être obtenir des bornes utiles de cette façon. Il se trouve que ceci est une excellente idée. Rappelons rapidement (voir par exemple [3] que pour un groupe topologique G, on peut toujours construire son revêtement universel

$$\tilde{G} := \{\tilde{\gamma} := [\gamma] : \gamma : [0,1] \to G\}$$

où $[\gamma]$ désigne la classe d'équivalence par rapport à la relation d'homotopie avec les bouts fixés. $\tilde{G}$ possède une structure de groupe induit de celui de G :

$$\begin{aligned} \tilde{g} \cdot \tilde{h} &\mapsto \widetilde{g \cdot h} \\ \tilde{g}^{-1} &\mapsto \tilde{g}^{-1} \end{aligned}$$

De plus, $\tilde{G}$ est simplement connexe, possède une structure lisse induite de celle de G, et possède une application de projection canonique :

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{G} &\to G \\ [\gamma] &\mapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

et $\ker \pi = \pi_1(G)$.

Les séminormes définis ci-haut se relèvent à des séminormes sur le revêtement universel $\widetilde{Ham}(M,\omega)$ comme suit

Définition 2.4.4. Pour $\tilde{h}_t \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$ définissons **la (sémi)norme de Hofer** de $\tilde{h}_t$ par

$$\tilde{\rho}_H(\tilde{h}_t) := \inf_{\alpha(t) \in \tilde{h}_t} \{\mathscr{L}(\alpha)\}$$

et d'une manière analogue, on peut définir la **séminorme positive (resp. négative) hoferienne** de $\tilde{h}_t$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h}_t) &:= \inf_{\alpha(t) \in \tilde{h}_t} \mathscr{L}^+(\alpha) \\ \tilde{\rho}_H^-(\tilde{h}_t) &:= \inf_{\alpha(t) \in \tilde{h}_t} \mathscr{L}^-(\alpha) \end{aligned}$$

et c'est alors clair qu'on a pour $h \in Ham(M,\omega)$

$$\begin{aligned} \rho_H(h) &= \inf_{\tilde{h}:\pi(\tilde{h})=h} \tilde{\rho}_H(\tilde{h}_t) \\ \rho_H^+(h) &= \inf_{\tilde{h}:\pi(\tilde{h})=h} \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h}_t) \\ \rho_H^-(h) &= \inf_{\tilde{h}:\pi(\tilde{h})=h} \tilde{\rho}_H^-(\tilde{h}_t) \end{aligned}$$

Remarque. Attention ! En ce moment, ces nouvelles séminormes *ne sont pas bien définies* car on ne sait toujours que les chemins lisses d'hamiltoniens (qui sont les objets de $\widetilde{Ham}(M,\omega)$

à homotopie près) coïncident avec les isotopies hamiltoniennes qui sont utilisées dans la définition de la norme de Hofer. Une des conséquences majeures de nos travaux dans la dernière section de ce chapitre serait que ces séminormes sur le revêtement universel sont bien définies.

2.5 Normalisation et approximation des chemins hamiltoniens

Comme l'on a noté lorsqu'on avait défini les isotopies hamiltoniennes, si (M^{2n}, ω) est une variété symplectique fermée alors il existe une certaine ambiguïté lorsqu'on parle de *la* fonction hamiltonienne qui engendre l'isotopie à cause du fait que $\mathfrak{ham} \simeq C^\infty(M)/\mathbb{R}$ comme espaces vectoriels. Pour régler cette ambiguïté, on appellera un hamiltonien

$$H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

normalisé s'il satisfait

$$c(H_t) = c_t := \frac{1}{n!} \int_M H_t \omega^n = 0$$

pour chaque $t \in [0,1]$. Notons que si H est un hamiltonien qui engendre l'isotopie hamiltonienne h_t alors pour toute fonction lisse

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$H(x,t) + c(t)$ engendre aussi h_t, alors lorsque M est fermé on peut toujours nous arranger pour que nos isotopies hamiltoniennes soient engendrées par des hamiltoniens à moyen 0 sur M. Si M n'est pas fermé alors un hamiltonien H est dite normalisé si'il est de support compact, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $K \subset M$ compact tel que

$$K \supset \cup_{t\in[0,1]} supp\, H_t$$

Comme il est souvent utile de pouvoir passer entre des isotopies hamiltoniennes et les hamiltoniens qui les engendrent, c'est utile d'en savoir que les hamiltoniens normalisés sont fermés sous la structure de groupe retiré des isotopies hamiltoniennes à l'espace des hamiltoniens :

Proposition 2.5.1. *L'ensemble des hamiltoniens normalisés est fermé sous les opérations $H(x,t) \mapsto \bar{H}(x,t) := -H(h_t x,t)$ et $H\#G(x,t) = H(x,t) + G(h_t^{-1}(x,t))$ où h_t est l'isotopie hamiltonienne induite par H.*

Démonstration. Soient $H, G : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ des hamiltoniens normalisés. Si M n'est pas fermé ceci veut dire qu'il existe des ensembles compacts

$$K_1 \supset \cup_{t\in[0,1]} supp\, H_t$$
$$K_2 \supset \cup_{t\in[0,1]} supp\, G_t$$

et dans ce cas, on a pour tout $t \in [0,1]$

$$\text{supp } h_t := \{x \in M : \; h_t(x) \neq x\} \subset K_1$$

et il est donc clair que $K_1 \cup_{t\in[0,1]} supp\, \bar{H}_t$. De plus,

$$\begin{aligned} &G(h_t^{-1}x,t) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow h_t^{-1}x \in K_2 \\ &\quad\Leftrightarrow x \in h_t K_2 \\ &\quad\Rightarrow x \in K_1 \cup K_2 \end{aligned}$$

et donc

$$K_1 \cup K_2 \supset \cup_{t\in[0,1]} supp(H\#G)_t$$

En revanche, si M est fermé on a pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} c(H_t) &= \frac{1}{n!}\int_M H_t \omega^n = 0 \\ c(G_t) &= \frac{1}{n!}\int_M G_t \omega^n = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c(H\#G_t) &= \frac{1}{n!}\int_M H_t + G_t \circ h_t^{-1}\omega^n \\ &= \frac{1}{n!}\int_M H_t \omega^n + \frac{1}{n!}\int_M G_t \circ h_t^{-1}\omega^n \\ &= c(H_t) + c(G_t) \end{aligned}$$

comme h_t est un difféomorphisme qui préserve ω, d'où il suit immédiatement que $H\#G_t$ est normalisé, de plus, en utilisant le fait que $H\#\bar{H} = 0$ ça se voit immédiatement que

$$0 = c(0) = c(H) + c(\bar{H}) = c(\bar{H})$$

comme voulu. □

Il arrive souvent qu'on aimerait manipuler des isotopies hamiltoniennes en gardant toujours contrôle des hamiltoniens qui les induisent et il en existe quelques approximations et standardisations routines utilisées assez souvent dans la littérature et on les décrira dans la suite.

Lemme 2.5.1 (Reparamétrage d'un hamiltonien)**.** *Soient H un hamiltonien et h_t l'isotopie* *induite par H. Suppose que l'application*

$$\phi : [0,1] \to [0,1]$$

est lisse, alors l'isotopie $h_\phi : t \mapsto h_{\phi(t)}$ est induite par l'hamiltonien

$$H^\phi := \dot{\phi}(t) H(x, \phi(t))$$

Démonstration. Ceci n'est vraiment rien que le théorème de dérivation des fonctions composées ; on a pour tout $x \in M$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h_{\phi(t)}(x) &= \frac{d}{dt} h_{\phi(t)}(x) \cdot \frac{d}{dt} \phi(t) \\ &= \dot{\phi} \cdot X_{H \circ \phi} \\ &= X_{\dot{\phi} \cdot H \circ \phi} \end{aligned}$$

où cette dernière égalité suit du fait que pour n'importe quelle constante $a \in R$ si $\omega(X_H, -) = -dH$, alors évidement $\omega(aX_H, -) = a\omega(X_H, -) = -d(aH)$. $\square$

Si dans la situation décrite ci-haut ϕ est une application non décroissante avec $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$ (alors le chemin $t \mapsto h_{\phi(t)}$ passe par tous les mêmes points que $t \mapsto h_t$, dans le même ordre, mais peut-être à une vitesse différente) alors on appellera $h_{\phi(t)}$ un **reparamétrage** du chemin $t \mapsto h_t$ et l'on appellera ϕ **l'application de reparamétrage**. Notons que les reparamétrages nous concernent seulement à un difféomorphisme qui préserve l'orientation près, car les reparamétrages par les difféomorphismes préservant l'orientation n'affectent pas la longueur hoferienne du chemin :

Lemme 2.5.2. *Soient h_t une isotopie hamiltonienne induite par l'hamiltonien H et $h_{\phi(t)}$ un reparamétrage de h_t avec ϕ un difféomorphisme qui préserve l'orientation alors*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^+(h_t) &= \mathscr{L}^+(h_{\phi(t)}) \\ \mathscr{L}^-(h_t) &= \mathscr{L}^-(h_{\phi(t)}) \end{aligned}$$

et conséquemment

$$\mathscr{L}(h_t) = \mathscr{L}(h_{\phi(t)})$$

Démonstration. Ceci est plus ou moins une question de se rappeler des définitions des objets impliqués, rappelons que $c_t = c(H_t) = \frac{1}{n!} \int_M H_t \omega^n$ et notons que $c(\dot{\phi}(t) H_{\phi(t)}) = \dot{\phi}(t) c_{\phi(t)}$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^+(h_{\phi(t)}) &= \int_{[0,1]} \max_{x\in M} \dot{\phi}(t)(H_{\phi(t)} - c_{\phi(t)})\, dt \\
&= \int_{[0,1]} \max_{x\in M} H_t(x) - c_t\, dt \\
&= \mathscr{L}^+(h_t)
\end{aligned}$$

où la première égalité s'obtient comme ϕ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Le même calcul s'adapte *mutandum mutandis* pour montrer l'égalité pour la fonctionnelle $\mathscr{L}^-$. □

On aura souvent l'occasion de vouloir parler des segments des chemins hamiltoniens, plus précisément on voudra pouvoir discuter des isotopies hamiltoniennes paramétrées comme

$$\alpha : [a,b] \to Ham(M,\omega)$$

pour $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ quelconque. Dans ce cas on comprend α comme faisant référence au chemin $\alpha \circ \phi$ où $\phi(t) = a(1-t) + tb$ pour $t \in [0,1]$ et ceci étant compris, toute notre discussion précédente s'applique également aux segments des chemins hamiltoniens.

Étant donné un chemin hamiltonien $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ il est souvent convenable d'approximer h_t par un chemin h_t^ε avec les mêmes extrémités tel que h_t^ε est induit par un hamiltonien qui s'annule dans un voisinage des extrémités. Avant de pouvoir montrer comment ça se fait, on aura besoin d'un couple de lemmes qui nous aideront à contrôler les parties positives et négatives des longueurs des chemins hamiltoniens.

Lemme 2.5.3. *Soient $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie hamiltonienne induite par l'hamiltonien normalisé $H(x,t)$ et $\{h_{\phi(t)}\}_{t\in[0,1]}$ un reparamétrage de h_t alors il existe une constante $C_H > 0$ qui ne dépend que de H telle que*

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}^+(h_t) - \mathscr{L}^+(h_{\phi(t)})| &\le C_H \int_0^1 |t-\phi(t)| + |1-\dot{\phi}(t)|\, dt \\
|\mathscr{L}^-(h_t) - \mathscr{L}^-(h_{\phi(t)})| &\le C_H \int_0^1 |t-\phi(t)| + |1-\dot{\phi}(t)|\, dt
\end{aligned}$$

et conséquemment

$$|\mathscr{L}(h_t) - \mathscr{L}(h_{\phi(t)})| \le C_H \int_0^1 |t-\phi(t)| + |1-\dot{\phi}(t)|\, dt$$

(Où, bien sûr, ces constantes peuvent changer d'une ligne à l'autre)

Démonstration. Commençons avec $\mathscr{L}^+$

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}^+(h_t) - \mathscr{L}^+(h_{\phi(t)})| &= |\int_0^1 \max_{x\in M} H(x,t) - \max_{x\in M} \dot{\phi} H(x,\phi(t))\, dt| \\
&\leq \int_0^1 |\max_{x\in M} H(x,t) - \max_{x\in M} \dot{\phi} H(x,\phi(t))|\, dt \\
&= \int_0^1 |\max_{x\in M} H(x,t) - \dot{\phi} \max_{x\in M} H(x,\phi(t))|\, dt \\
&= \int_0^1 |[\max_{x\in M} H(x,t) - \max_{x\in M} H(x,\phi(t))] + (1-\dot{\phi})[\max_{x\in M} H(x,\phi(t))]|\, dt \\
&\leq \underbrace{\int_0^1 |\max_{x\in M} H(x,t) - \max_{x\in M} H(x,\phi(t))|\, dt}_{I} + \underbrace{\int_0^1 |1-\dot{\phi}| \max_{x\in M} H(x,\phi(t))}_{II}
\end{aligned}$$

Pour borner I, notons que l'application $t \mapsto \max_{x\in M} H(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc est uniformément continue sur $[0,1]$, d'où il existe une constante $0 < k_H < \infty$ qui ne dépend que de H telle que pour tout $t \in [0,1]$

$$|\max_{x\in M} H(x,t) - \max_{x\in M} H(x,\phi(t))| \leq k_H |t-\phi(t)|$$

et pour borner II, on pose $k'_H := \max_{t\in[0,1]} \max x \in MH(x,t)$ pour qu'on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}^+(h_t) - \mathscr{L}^+(h_{\phi(t)})| &\leq I + II && (2.1)\\
&\leq k_H \int_0^1 |t-\phi(t)|\, dt + k'_H \int_0^1 |1-\dot{\phi}(t)|\, dt && (2.2)\\
&\leq C_H \int_0^1 |t-\phi(t)| + |1-\dot{\phi}(t)|\, dt && (2.3)
\end{aligned}$$

où $C_H := \max(k_H, k'_h)$ d'où la première inégalité.

Pour démontrer l'inégalité pour $\mathscr{L}^-$, rappelons que pour toute isotopie hamiltonienne $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ on a que $\mathscr{L}^-(h_t^{-1}) = \mathscr{L}^+(h_t)$ et que si H est un hamiltonien qui engendre $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ alors $\bar{H}(x,t) = -H(h_t x,t)$ engendre $\{h_t^{-1}\}_{t\in[0,1]}$ et l'on applique tout simplement l'argument précédent à l'isotopie $\{h_t^{-1}\}_{t\in[0,1]}$ et le reparamétrage $\{h_{\phi(t)}^{-1}\}$ pour établir la borne

$$\begin{aligned}
|\mathscr{L}^-(h_t) - \mathscr{L}^-(h_{\phi(t)})|) &= |\mathscr{L}^+(h_t^{-1}) - \mathscr{L}^+(h_t^{-1}\phi(t))| \\
&\leq C_H \int_0^1 |t-\phi(t)| + |1-\dot{\phi}|\, dt
\end{aligned}$$

(où C_H est potentiellement différente, mais qui ne dépend que de $\bar{H}$ et donc seulement sur H). $\square$

Une application élémentaire de l'inégalité triangulaire inverse au lemme précédent nous donne en fait l'énoncé suivant un peu plus fort

Corollaire 2.5.1. *Soit $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie hamiltonienne engendrée par l'hamiltonien normalisé $H(x,t)$ et soient $\{h_{\phi_1(t)}\}_{t\in[0,1]}$ et $\{h_{\phi_2(t)}\}_{t\in[0,1]}$ des reparamétrages de h_t alors il existe une constante $C_H > 0$ qui ne dépend que de l'hamiltonien H tel que*

$$|\mathscr{L}^+(h_{\phi_1(t)}) - \mathscr{L}^+(h_{\phi_2(t)})| \leq C_H \int_0^1 |\phi_1(t) - \phi(t)| + |\dot{\phi}_1(t) - \dot{\phi}_2(t)|\, dt$$
$$|\mathscr{L} - +(h_{\phi_1(t)}) - \mathscr{L}^-(h_{\phi_2(t)})| \leq C_H \int_0^1 |\phi_1(t) - \phi(t)| + |\dot{\phi}_1(t) - \dot{\phi}_2(t)|\, dt$$

En utilisant le lemme précédent, on peut démontrer la possibilité d'effectuer l'approximation qu'on cherchait initialement :

Proposition 2.5.2. *Soit $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie hamiltonienne induite par l'hamiltonien normalisé H alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel qu'il existe un reparamétrage $\{h_{\phi(t)}\}_{t\in[0,1]}$ tel que*

1. *$h_0 = h_{\phi(0)}$ et $h_1 = h_{\phi(1)}$*
2. *L'hamiltonien reparamétré $H^\phi(x,t) := \dot{\phi}(t)H(x,\phi(t))$ satisfait*

$$H_t^\phi \equiv 0$$

   pour $t \in [0,\delta) \cup (1-\delta, 1]$

3. $$|\mathscr{L}^+(\{h_t\}) - \mathscr{L}^+(\{h_{\phi(t)}\})| + |\mathscr{L}^-(\{h_t\}) - \mathscr{L}^-(\{h_{\phi(t)}\})| < \varepsilon$$

Démonstration. En vue du lemme précédent il nous faut simplement une application de reparamétrage qui s'annule dans un voisinage de $t = 0$ et $t = 1$ telle qu'on peut prendre la distance dans la norme de Sobolev entre le reparamétrage et l'identité aussi petite qu'on voudrait, mais c'est certain que ceci peut être arrangé par exemple en définissant

$$\varphi^\delta(t) := \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \delta \\ \frac{t-\delta}{1-2\delta} & \delta < t < 1-\delta \\ 1 & 1-\delta \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

et en notant que pour $t \notin (\delta, 1-\delta)$ on a (lorsque $\dot{\varphi}^\delta$ existe, hors d'un ensemble de mesure 0)

$$|t - \varphi^\delta(t)| \leq \delta$$
$$|1 - \dot{\varphi}^\delta(t)| = 1$$

tandis que pour $t \in (\delta, 1-\delta)$ on a

$$|t - \varphi^{\delta}(t)| \leq \frac{\delta}{1-2\delta}$$
$$|1 - \dot{\varphi}^{\delta}(t)| = \frac{2\delta}{1-2\delta}$$

et donc pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$ on a

$$\int_0^1 |t-\varphi^{\delta}(t)| + |1-\dot{\varphi}^{\delta}(t)| \leq \int_{t\notin(\delta,1-\delta)} \delta + 1\, dt + \int_{t\in(\delta,1-\delta)} \frac{3\delta}{1-2\delta}$$
$$= 2\delta^2 + 5\delta$$

Il y a un petit point technique ici : $\varphi^{\delta}(t)$ n'est pas lisse. Pourtant on peut certainement l'approximer à une précision arbitraire dans la norme de Sobolev par une série de fonctions lisses et monotones $\{\varphi^{\delta}_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ obtenues en multipliant $\varphi^{\delta}(t)$ par une fonction de bosse qui est nulle hors de $(\delta - \frac{1}{k}, \delta + \frac{1}{k}) \cup (1-\delta-\frac{1}{k}, 1-\delta+\frac{1}{k})$ alors en prenant $\delta > 0$ assez petit et k assez large on obtient une application de reparamétrage $\varphi^{\delta}_k(t)$ avec $\dot{\varphi}^{\delta}_k(t) = 0$ pour $t \in [0, \delta - \frac{1}{k}) \cup (1-\delta+\frac{1}{k}, 1]$ d'où

$$H^{\phi}(x,t) = \dot{\phi}(t) H(x, \phi(t)) = 0$$

sur $[0, \delta - \frac{1}{k}) \cup (1-\delta+\frac{1}{k}), 1]$ comme l'on a voulu. □

Remarque. Comme conséquence simple de la proposition précédente, notons que tout chemin hamiltonien peut être approximé à une précision arbitraire par rapport aux longueurs hoferiennes positives et négatives par un reparamétrage induit par un hamiltonien normalisé H qui est *périodique* dans le temps, en posant $H_t \equiv 0$ sur un voisinage de 0 et 1 et étends-le périodiquement en posant $H(t) = H(t-1)$. En conséquence, dans la définition de norme de Hofer (et ses parties positives et négatives) on peut toujours supposer que les isotopies en question sont induites par des hamiltoniens périodiques dans le temps.

Lorsqu'on a deux isotopies hamiltoniennes, on aimerait souvent concaténer ces deux chemins en traversant en par une en premier et, en considérant son point final comme l'identité en suivant ensuite le chemin décrit par la deuxième isotopie. La discussion précédente nous permet de rendre cette notion rigoureuse

Définition 2.5.1 (Concaténation des isotopies)**.** Soient $h = \{h_t\}_{t\in[0,1]}$ et $g = \{g_t\}_{t\in[0,1]}$ des isotopies hamiltoniennes engendrées par les hamiltoniens H et G respectivement alors on définit leur **concaténation** $h\#g$ comme suite :

Soient h_{ϕ_1} et g_{ϕ_2} des reparamétrages de h et g telles que les hamiltoniens qui les induisent s'annulent sure un voisinage de $t = 0$ et $t = 1$ et posons

$$h\#g(t) := \begin{cases} g_{\phi_2(2t)} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_{\phi_1(2t-1)} \circ g_1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Les reparamétrages nous assurent que ce chemin est lisse et engendré par un hamiltonien lisse, à voir $H^{\phi_1}(x,t)$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $G^{\phi_2}(x,t)$ on $[\frac{1}{2},1]$.

2.6 Le morphisme de flux

Comme les difféomorphismes hamiltoniens sont définis en termes des isotopies (hamiltoniens) il est naturel de nous demander quel si l'on peut attacher des invariants à des isotopies pour nous aider à distinguer les difféomorphismes hamiltoniens des difféomorphismes généraux en termes des isotopies qui ont comme points finaux les difféomorphismes hamiltoniens. Dans ce but, fixons une isotopie lisse $\Phi := \{\varphi_t\}_{0\leq t\leq 1} \subset Diff^{\infty}(M)$, $\varphi_0 = id_M$ et rappelons qu'à toute isotopie on peut associer un champ vectoriel qui dépend du temps

$$X_t(p) := (\frac{d}{dt}\varphi_t)\circ(\varphi_t)^{-1}(p), \qquad \forall p \in M$$

tel que les courbes intégrales du système différentiel

$$\dot{x}(t) = X_t \circ x(t), \qquad x(0) = x_0$$

sont exactement $x(t) = \varphi_t(x_0)$.

Une façon d'aborder l'étude des isotopies qui est naturelle dans le cadre symplectique (et qui remonte au moins au célèbre argument de Moser) est d'examiner l'action des isotopies sur les formes différentielles (et, en particulier, sur la forme symplectique en question). Suivant cette idée soit (M,ω) une variété symplectique fermée alors étant donné une famille (lisse) de p-formes $\{\beta_t\}_{t\in[0,1]}$ sur M on a la caractérisation suivant de la variation infinitésimale de la famille des formes différentielles tirées en arrière par l'isotopie :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^*\beta_t) = \varphi_t^*(\mathscr{L}_{X_t}\beta_t + \frac{d}{dt}\beta_t)$$

en intégrant les deux côtés de l'égalité de $t=0$ à $t=1$ on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_1^*\beta_1 - \beta_0 &= \varphi_1^*\beta_1 - \varphi_0^*\beta_0 \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\beta_t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi_t^*[\mathscr{L}_{X_t}\beta_t + \frac{d}{dt}\beta_t]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi_t^*[\iota(X_t)d\beta_t + d(\iota(X_t)\beta_t) + \frac{d}{dt}\beta_t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi_t^*(\iota(X_t)d\beta_t)\,\mathrm{d}t + d\int_0^1 \varphi_t^*(\iota(X_t)\beta_t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{d}{dt}\beta_t\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme une variété symplectique (M,ω) possède une famille canonique de formes différentielles à savoir la famille constante basée à ω il est alors naturel à prendre $\beta_t = \omega$ dans l'expression ci-haut qui nous donne

$$\begin{aligned}\varphi_1^*\omega - \omega &= \int_0^1 \varphi_t^*(\imath(X_t)d\omega)\,\mathrm{d}t + d\int_0^1 \varphi_t^*(\imath(X_t)\omega)\,\mathrm{d}t\\ &= d\int_0^1 \varphi_t^*(\imath(X_t)\omega)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

comme ω est fermé. Si l'on suppose que $\varphi_1 \in Symp(M,\omega)$ (remarque que ceci ne fait aucun hypothèse sur les valeurs itermédiaires de l'isotopie) ceci dit

$$d\int_0^1 \varphi_t^*(\imath(X_t)\omega)\,\mathrm{d}t = 0$$

Si l'on dénote alors par $\mathscr{I}_\omega^1$ le groupe des isotopies lisses de M avec $\varphi_0 = id_M$, $\varphi_1 \in Symp(M,\omega)$ et loi de multiplication donnée par $\{\varphi_t\}\circ\{\psi_t\} = \{\varphi_t\circ\psi_t\}$, la discussion précédente nous enseigne qu'il existe une application

$$\tilde{I}_\omega : \mathscr{I}_\omega^1 \underset{\Phi\to[\int_0^1 \varphi_t^*(\imath(X_t)\omega)\,\mathrm{d}t]}{\to} H^1(M;\mathbb{R})$$

En regardant $\tilde{I}_\omega$ on pourrait bien se demander s'il n'est pas possible de définir une autre application, peut-être plus simple en oubliant de tiré en arrière la forme $\imath(X_t)\omega$ en chaque temps c'est à dire de considérer l'application définit par

$$\int_0^1 \imath(X_t)\omega\,\mathrm{d}t$$

(remarque que cette expression dépend toujours de l'isotopie via le champ vectoriel) et certainement, on peut le faire, mais le compromis qu'il faut faire pour cette définition plus simple est qu'à moins que les X_t soient des champs symplectiques pour tout $t \in [0,1]$, ce qui est équivalent à demander que $\varphi_t \in Symp(M,\omega)$, $\forall t \in [0,1]$, il n'est pas évident que la $1-$forme résultante serait fermée, et donc *a priori* l'application ne descend pas nécessairement à une application en cohomologie sauf si l'on nous restreint aux isotopies qui sont contenues entièrement en $Symp(M,\omega)$ tandis que $\tilde{I}_\omega$ envoie des isotopies en la cohomologie de M aussitôt que leur point final préserve ω.

Pourtant si l'on dénote par $\mathscr{I}_\omega^{[0,1]}$ le groupe des isotopies basées à l'identité et qui prennent place complètement dans $Symp(M,\omega)$ alors la proposition suivante nous dit que sur $\mathscr{I}_\omega^{[0,1]}$ les deux définitions possibles sont d'accord

Proposition 2.6.1. *Soit $\Phi \in \mathscr{I}_\omega^{[0,1]}$ alors*

$$[\tilde{I}_\omega(\Phi)] = [\int_0^1 \imath(X_t)\omega\,\mathrm{d}t]$$

Démonstration. Comme $\Phi_t \in Symp(M,\omega)$ pour tout $t \in [0,1]$ alors $X_t = (\frac{d}{dt}\Phi_t)\circ\Phi_t^{-1}$ est un champ symplectique en chaque t, c'est-à-dire que $\imath(X_t)\omega$ est fermée. Pour chaque $t \in [0,1]$

définissons l'isotopie auxiliaire $\{\Psi_s\}_{s\in[0,1]}$ avec $\Psi_0 = id_M$ et $\Psi_1 = \Phi_t$ par

$$\Psi_s := \Phi_{st}$$

et soit $Y_s = \frac{d}{ds}\Psi_s \circ \Psi_s^{-1}$ le champ vectoriel induit par Ψ_s alors en applicant pour chaque t la relation obtenue en équation 2.6 à l'isotopie Ψ_s avec la famille de formes constante $\beta_s = \iota(X_t)\omega$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_t^*\iota(X_t)\omega - \iota(X_t)\omega &= \Psi_1^*\iota(X_t)\omega - \iota(X_t)\omega \\
&= \int_0^1 \Psi_s^*(\iota(Y_s)d\iota(X_t)\omega)\ \mathrm{d}s + d\int_0^1 \Psi_s^*(\iota(Y_s)\iota(X_t)\omega)\ \mathrm{d}s + \int_0^1 \frac{d}{ds}\iota(X_t)\omega\ \mathrm{d}s \\
&= d\int_0^1 \Psi_s^*(\iota(Y_s)\iota(X_t)\omega)\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 \Phi_t^*\iota(X_t)\omega - \iota(X_t)\omega\ dt = d\int_0^1\int_0^1 \Psi_s^*(\iota(Y_s)\iota(X_t)\omega)\ \mathrm{d}s\ dt$$

et donc $\tilde{I}_\omega(\Phi) - \int_0^1 \iota(X_t)\omega\ \mathrm{d}t$ est exacte. □

Notons que $\widetilde{Symp(M,\omega)} = \mathscr{I}_\omega^{[0,1]}/\sim$ où $\Phi \sim \Phi'$ si Φ et Φ' sont homotopes avec les bouts fixés par une homotopie contenue entièrement dans $Symp(M,\omega)$. La proposition suivante nous dit que $\tilde{I}_\omega$ descend à une application sur $\widetilde{Symp(M,\omega)}$, mais on aura en premier besoin d'un petit lemme sur le comportement infinitésimal des homotopies (lisses) des isotopies :

Lemme 2.6.1. *Soit*

$$h : [0,1]\times[0,1] \to Diff(M)$$

une application lisse avec $h_{0,0} = id_M$ et écrivons

$$X_{s,t} := \frac{d}{ds}h_{s,t}\circ h_{s,t}^{-1}, \qquad Y_{s,t} := \frac{d}{dt}h_{s,t}\circ h_{s,t}^{-1}$$

alors

$$\frac{d}{dt}X_{s,t} = \frac{d}{ds}Y_{s,t} + [X_{s,t}, Y_{s,t}]$$

Démonstration. Fixons un $x \in M$ et considérons le graphe de $h_{s,t}(x)$ muni de la projection naturelle :

$$(\Gamma_{h(x)}, \pi) = \{(s,t,h_{s,t}(x)) \in [0,1]^2 \times M\}$$

Comme $\Gamma_{h(x)}$ est paramétrée par l'application $id_{[0,1]} \times id_{[0,1]} \times h_{s,t}(x)$ on voit que l'espace tangent

$$\begin{aligned} T\Gamma_{h(x)} &= \bigcup_{(s,t)\in[0,1]^2} T_{\left(s,t,h_{s,t}(x)\right)} \\ &= \bigcup_{(s,t)\in[0,1]^2} span\langle \frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t} \rangle \end{aligned}$$

est intégrable d'où, par la condition d'intégrabilité de Frobenius on a $[\frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t}] \in T\Gamma_{h(x)}$, mais on a déjà vue que pour des fibrés quelconques $\pi_*[X,Y] = [\pi_* X, \pi_* Y]$ (cf. proposition 1.5.4) d'où

$$\pi_*[\frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t}] = [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$$

et alors $[\frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t}] \in T^{vert}\Gamma_{h(x)}$, mais les fibres sont $0-$dimensionnelles d'où $[\frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t}] = 0$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= [\frac{\partial}{\partial s} \oplus X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t} \oplus Y_{s,t}] \\ &= [\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}] \oplus ([\frac{\partial}{\partial s}, Y_{s,t}] + [X_{s,t}, \frac{\partial}{\partial t}] + [X_{s,t}, Y_{s,t}]) \\ &= 0 \oplus (\frac{d}{ds} Y_{s,t} - \frac{d}{dt} X_{s,t} + [X_{s,t}, Y_{s,t}]) \end{aligned}$$

et le lemme suit. □

Proposition 2.6.2. *Soient* Φ, $\Phi' \in \mathscr{I}_{\omega}^{[0,1]}$ *homotopes dans* $Symp(M,\omega)$ *avec les bouts fixés alors* $[\tilde{I}_{\omega}(\Phi)] = [\tilde{I}_{\omega}(\Phi')]$

Démonstration. Soit Z_t et Z'_t les champs vectoriels engendrés par les isotopies Φ et Φ' respectivement, alors par proposition 2.6.1 il suffit de montrer que

$$\int_0^1 \iota(Z_t)\omega \, dt - \int_0^1 \iota(Z'_t)\omega \, dt$$

est exacte. Soit $h_{s,t}$ l'homotopie entre Φ_t et Φ'_t, c'est-à-dire qu'on a

$$h_{s,0} = id_M,\ h_{0,t} = \Phi_t,\ h_{1,t} = \Phi'_t,\ h_{s,1} = \Phi_1 = \Phi'_1$$

et soient $X_{s,t}$ et $Y_{s,t}$ définies comme dans le lemme précédent alors

$$X_{0,t} = Z_t, \text{ et } X_{1,t} = Z'_t$$

et l'on voit

$$\int_0^1 \iota(Z_t)\omega\, dt - \int_0^1 \iota(Z_t')\omega\, dt = \int_0^1 \left(\frac{d}{ds}\int_0^1 \iota(X_{s,t})\omega\, dt\right) ds$$

mais

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_0^1 \iota(X_{s,t})\omega\, dt &= \int_0^1 \iota(\frac{d}{ds}X_{s,t})\omega\, dt \\
&= \int_0^1 \iota(\frac{d}{dt}Y_{s,t})\omega\, dt + \int_0^1 \iota([X_{s,t}, Y_{s,t}])\omega\, dt \\
&= \iota(Y_{s,1})\omega - \iota(Y_{s,0})\omega + \int_0^1 \iota([X_{s,t}, Y_{s,t}])\omega\, dt \\
&= \int_0^1 \iota([X_{s,t}, Y_{s,t}])\omega\, dt
\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit du fait que $Y_{s,1} = Y_{s,0} = 0$ comme les bouts de l'homotopie sont fixés, et comme $X_{s,t}, Y_{s,t}$ sont des champs symplectiques pour chaque $(s,t) \in [0,1]^2$ car l'homotopie prend place en $Symp(M,\omega)$, $[X_{s,t}, Y_{s,t}]$ est un champ hamiltonien car $\mathfrak{ham}$ est un idéal de $\mathfrak{symp}$, d'où

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \iota(X_{s,t})\omega\, dt$$

est exacte, et donc $\int_0^1 \iota(Z_t)\omega\, dt - \int_0^1 \iota(Z_t')\omega\, dt$ l'en est de même. □

À vue de la proposition précédente, comme on s'intéresse principalement à l'étude du groupe des difféomorphismes symplectiques faisons la définition suivante

Définition 2.6.1. Soit $\tilde{\Phi} \in \widetilde{Symp(M,\omega)}$ et soit X_t un champ vectoriel qui engendre un représentant quelconque de $\tilde{\Phi}$ alors appel l'application

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\omega : \widetilde{Symp(M,\omega)} &\to H^1(M;\mathbb{R}) \\
\tilde{\varphi} &\mapsto [\int_0^1 \iota(X_t)\omega\, \mathrm{d}t]
\end{aligned}$$

le **morphisme de flux** sur $\widetilde{Symp(M,\omega)}$. S'il n'y a aucun risque de confusion, on dénote souvent $\mathscr{F}_\omega$ simplement par $\mathscr{F}$.

La proposition suivante justifie l'appellation de "morphisme" utilisé ci-haut :

Proposition 2.6.3.

$$\mathscr{F}_\omega : \widetilde{Symp_0(M,\omega)} \to H^1(M;\mathbb{R})$$

est un homomorphisme surjectif de groupes.

Démonstration. Montrons en premier que $\mathscr{F}_\omega$ est un homomorphisme de groupes. Soient $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi} \in \widetilde{Symp(M,\omega)}$ et soient $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$, $\{\Psi_t\}_{t\in[0,1]}$ des représentants de $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ respectivement. Notons que

$$\begin{aligned} h : [0,1]^2 &\to Symp(M,\omega) \\ (s,t) &\mapsto (\Phi_t \circ \Psi_t) \circ (\Phi_{st} \circ \Psi_{st})^{-1} \circ (\Phi \# \Psi)_t \end{aligned}$$

est une homotopie lisse entre les isotopies $\{\Phi_t \circ \Psi_t\}$ et $\{(\Phi\#\Psi)_t\}$ où $(\Phi\#\Psi)_t$ est un reparamétrage lisse de la concaténation des deux chemins donnés par

$$(\Phi\#\Psi)_t := \begin{cases} \Psi_{\phi(2t)} & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \Phi_{\phi(2t-1)} & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

où $\phi : [0,1] \to [0,1]$ est une application de reparamétrage lisse telle que $\phi(t) = (1+\varepsilon)t$ hors d'un petit voisinage U_ε des bouts qui tend en mesure vers 0 avec ε, comme l'on a construit dans la section précédente sur la normalisation des isotopies hamiltoniennes.

Alors, par proposition 2.6.2 il suffit de montrer que $\mathscr{F}(\Phi_t\#\Psi_t) = \mathscr{F}(\Phi_t) + \mathscr{F}(\Psi_t)$. Soient X_t et Y_t les champs vectoriels induits par Φ et Ψ respectivement, alors le champ vectoriel induit par $\Phi_t\#\Psi_t$ est

$$(X\#Y)_t = \begin{cases} \dot{\phi}(2t)X_{\phi(2t)} & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \dot{\phi}(2t-1)Y_{\phi(2t)-1} & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

et donc, posons

$$\begin{aligned} V_1 &:= \frac{1}{2}U_\varepsilon = \{x \in [0,\frac{1}{2}] :\ 2x \in U_\varepsilon\} \\ V_2 &:= V_1 + \frac{1}{2} = \{x \in [\frac{1}{2},1] :\ x = v + \frac{1}{2},\ v \in V_1\} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \iota((X\#Y)_t)\omega \,\mathrm{d}t = &\int_{V_1} \dot{\phi}(2t)\iota(X_{\phi(2t)})\omega \,dt + \int_{[0,\frac{1}{2}]-V_1} (2+2\varepsilon)\iota(X_{\phi(2t)})\omega \\ &+ \int_{[\frac{1}{2},1]-V_2} (2+2\varepsilon)\iota(Y_{\phi(2t)-1})\omega + \int_{V_2} \dot{\phi}(2t)\iota(Y_{\phi(2t)-1})\omega \,dt \end{aligned}$$

et en prenant $\varepsilon \to 0$, et en notant que la classe d'homotopie de ces chemins est indépendante de ε on voit

$$\begin{aligned} [\int_0^1 \iota((X\#Y)_t)\omega \,\mathrm{d}t] &= [\int_0^{\frac{1}{2}} 2\iota(X_{2t})\omega \,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 2\iota(Y_{2t-1})\omega \,dt] \\ &= [\int_0^1 \iota(X_t)\omega \,dt] + [\int_0^1 \iota(Y_t)\omega \,dt] \\ &= \mathscr{F}(\tilde{\Psi}) + \mathscr{F}(\tilde{\Phi}) \end{aligned}$$

Pour voir que l'homomorphisme est surjectif, notons que si $\sigma \in \Omega^1(M)$ est une $1-$forme fermée alors par la non-dégénérescence de ω il existe un $X_\sigma \in \mathfrak{symp}$ tel que

$$\iota(X_\sigma)\omega = \sigma$$

et si l'on définit une isotopie symplectique Φ par

$$\dot{\Phi}_t = X_\sigma \circ \Phi^{-1}, \ \ \Phi_0 = id_M$$

et notons par $\tilde{\Phi}$ sa classe d'homotopie, alors

$$\mathscr{F}(\tilde{\Phi}) = [\int_0^1 \iota(X_\sigma)\omega \, dt] = [\sigma]$$

□

Proposition 2.6.4 (Quelques propriétés élémentaires du flux)**.** *Soient (M,ω), une variété symplectique, $\varphi : M \to M$ un difféomorphisme symplectique et*

$$\psi_t : M \to M$$

une isotopie symplectique alors

1. $\mathscr{F}(\psi_t \circ \varphi) = \mathscr{F}(\psi_t)$
2. $\mathscr{F}(\varphi \circ \psi_t) = \varphi_* \mathscr{F}(\psi_t)$

Démonstration. Pour une isotopie Φ écrivions X_{Φ_t} pour le champ vectoriel induit par Φ

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X_{\Phi_t} \circ \Phi_t$$

et rappelons que par le théorème de dérivation des fonctions composées pour deux isotopies Φ, Ψ on a

$$X_{\Phi\circ\Psi} = X_\Phi + \Phi_* X_\Psi$$

d'où

$$\int_0^1 \iota(X_{\psi_t\circ\varphi})\omega = \int_0^1 \iota(X_{\psi_t\circ\varphi})\omega$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \iota(X_{\varphi\circ\psi_t})\omega &= \int_0^1 \iota(\varphi_* X_{\psi_t})\omega = \int_0^1 \iota(\varphi_* X_{\psi_t})\omega \\ &= \int_0^1 \varphi_* \iota(X_{\psi_t})\omega = \varphi_* \int_0^1 \iota(X_{\psi_t})\omega\end{aligned}$$

□

2.6.1 Caractérisation géométrique du flux

Pour une variété symplectique compacte (M,ω) on vient de définir, dans un langage assez dynamique, un homomorphisme de groupes

$$\mathscr{F}_\omega : \widetilde{Symp_0(M,\omega)} \to H^1(M;\mathbb{R})$$

Le but de cette section est de pouvoir donner une image plus géométrique de cette application. Comme $\mathbb{R}$ est un rappelons qu'il existe l'isomorphisme naturel

$$H^1(M;\mathbb{R}) \simeq Hom(H_1(M;\mathbb{R}),\mathbb{R})$$

qui caractérise les $1-$formes par leurs valeurs sur les $1-$cycles. De plus, si M est connexe par arcs, alors

$$Hom(H_1(M;\mathbb{R}),\mathbb{R}) \simeq Hom(\frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M),\pi_1(M)]},\mathbb{R}) \simeq Hom(\pi_1(M),\mathbb{R})$$

Étant donné une isotopie symplectique Φ à l'homotopie symplectique près, on va alors chercher à caractériser $\mathscr{F}_\omega(\Phi)$ par ses valeurs sur des lacets dans M.

Définition 2.6.2 (La Trace d'une isotopie)**.** Soit $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset Diff(M)$ une isotopie lisse et soit $\gamma : S^1 \to M$ un lacet lisse dans M **la trace de γ par Φ** notée $tr_\Phi(\gamma)$ est l'application

$$\begin{aligned} tr_\Phi(\gamma) : [0,1]\times S^1 &\to M \\ (t,\theta) &\mapsto \Phi_t\circ\gamma(\theta) \end{aligned}$$

Proposition 2.6.5. *Soit Φ une isotopie lisse et soient γ_0,γ_1 deux lacets lisses homotopes, alors $tr_\Phi(\gamma_0)$ et $tr_\Phi(\gamma_1)$ sont homotopes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe une homotopie (qu'on peut sans perte de généralité supposer est lisse)

$$h : [0,1]\times S^1 \to M$$

avec $h_i(\theta) = \gamma_i(\theta)$ pour $i = 0,1$, comme h est lisse, h_s est un lacet lisse pour chaque $s \in [0,1]$, d'où

$$\begin{aligned} H : [0,1]\times([0,1]\times S^1) &\to M \\ (s,t,\theta) &\mapsto tr_\Phi(h_s(\theta)) \end{aligned}$$

est une homotopie entre $tr_\Phi(\gamma_0)$ et $tr_\Phi(\gamma_1)$. □

Proposition 2.6.6. *Soient Φ^0,Φ^1 deux isotopies lisses et lissement homotopes, alors $tr_{\Phi^0}(\gamma)$ et $tr_{\Phi^1}(\gamma)$ sont homotopes pour tout lacet γ.*

Démonstration. Par hypothèse il existe famille à deux paramètres lisse

$$h : [0,1] \times [0,1] \to Diff(M)$$

avec $h_{0,t} = \Phi_t^0$, $h_{1,t} = \Phi_t^1$, soit $\gamma : S^1 \to M$ un lacet lisse alors pour chaque $s \in [0,1]$, $h^s := \{h_{s,t}\}_{t \in 0,1}$ est une isotopie lisse et

$$\begin{aligned} H : [0,1] \times ([0,1] \times S^1) &\to M \\ (s,t,\theta) &\mapsto tr_{h^s}(\gamma) \end{aligned}$$

est une homotopie entre $tr_{\Phi^0}(\gamma)$ et $tr_{\Phi^1}(\gamma)$ □

En vue des deux propositions précédentes, la (restriction de la) trace descend à une application

$$\begin{aligned} tr : \widetilde{Symp_0}(M,\omega) \times \pi_1(M) &\to \left[[0,1] \times S^1, M\right] \\ \tilde{\Phi} \times [\gamma] &\mapsto [tr_\Phi(\gamma)] \end{aligned}$$

où $\left[[0,1] \times S^1, M\right]$ dénote les applications du cylindre en M modulo l'homotopie. Comme pour toute classe d'applications modulo l'homotopie $[X,Y]$ d'une variété orientée de dimension n en un autre détermine une class d'homologie de degré n par l'allocation

$$\begin{aligned} [X,Y] &\to H_n(Y;\mathbb{Z}) \\ [u : X \to Y] &\mapsto u_*[X] \end{aligned}$$

où $[X] \in H_n(X,;\mathbb{Z})$ est la classe fondamentale de X, on peut considérer

$$[0,1] \otimes [S^1] \in H_1([0,1] \times S^1;\mathbb{Z})$$

comme la classe fondamentale du cylindre, induit par les inclusions évidentes et des orientations choisies sur l'intervalle et le cercle, et alors considérer la trace d'une isotopie (modulo l'homotopie dans $Symp(M,\omega)$) comme une application

$$\begin{aligned} tr_{\tilde{\Phi}} : \pi_1(M) &\to H_2(M;\mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\mapsto tr_\Phi(\gamma)_*([0,1] \times [S^1]) \end{aligned}$$

Il y a bien sûr l'inclusion évidente

$$H_2(M;\mathbb{Z}) \to H_2(M;\mathbb{R}) = H_2(M;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$$

et lorsque (M,ω) est une variété symplectique, il y a une classe de cohomologie naturelle avec laquelle on peut apparier ces classes. Le théorème suivant nous dit que la trace, vue comme une application du groupe fondamental en la deuxième homologie de M, et l'homomorphisme de flux vérifie un type de dualité.

Théorème 2.6.1. *Pour $\tilde{\Phi} \in \widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ et*

$$tr_{\tilde{\Phi}} : \pi_1(M) \to H_2(M;\mathbb{R})$$

comme décrit ci-haut alors pour tout $[\gamma] \in \pi_1(M)$

$$\langle \omega, tr_{\tilde{\Phi}} \rangle = \langle \mathscr{F}_\omega(\tilde{\Phi}), [\gamma] \rangle$$

(où sur le droit on comprend $[\gamma] \in H_1(M;\mathbb{R})$ sous l'isomorphisme évident).

Démonstration. Soit X_t le champ vectoriel induit par l'isotopie Φ, alors on calcule

$$\begin{aligned}
\langle \omega, tr_{\tilde{\Phi}} \rangle &= \int_{tr_{\tilde{\Phi}}} \omega \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t, \Phi_{t*}\dot{\gamma}_s)\, dt\, ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \iota(\dot{\gamma}_s)\Phi_t^* \iota(X_t)\omega\, dt\, ds \\
&= \int_0^1 \iota(\dot{\gamma}_s)\left(\int_0^1 \Phi_t^* \iota(X_t)\omega\, dt \right) ds \\
&= \langle [\gamma], \tilde{I}_\omega(\Phi) \rangle \\
&= \langle [\gamma], \mathscr{F}_\omega(\Phi) \rangle
\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit de proposition 2.6.1 et le fait que Φ est une isotopie symplectique. □

On va vouloir repousser le morphisme de flux du revêtement universel à un morphisme sur $Symp(M,\omega)$ lui même, c'est-à-dire qu'on le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{Symp_0}(M,\omega) & \xrightarrow{\mathscr{F}_\omega} & H^1(M;\mathbb{R}) \\
\downarrow \pi & & \downarrow mod\ \mathscr{F}_\omega(\pi_1(Symp(M,\omega),id_M) \\
Symp(M,\omega)_0 & \xrightarrow{f_\omega} & H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega
\end{array}$$

C'est traditionnel d'écrire

$$\Gamma_\omega := \mathscr{F}_\omega(\pi_1(Symp(M,\omega), id_M)$$

pour l'image du noyau de l'application de projection sous le morphisme de flux, qu'on appelle **le sous-groupe de flux**. Il se trouve que le sous-groupe de flux est un invariant important de la structure symplectique, on n'en discutera pas trop de cet objet, mais remarquons que par notre construction géométrique ci-haut, on a

Proposition 2.6.7.

$$\Gamma_\omega = \mathscr{F}_\omega(\pi_1(Symp(M,\omega), id_M)) \subset \langle \omega, H_2(M;\mathbb{Z}) \rangle$$

En particulier, Γ_ω *est un sous-groupe dénombrable de* $H^1(M;\mathbb{R})$.

2.6.2 Le flux et la géométrie locale de $Ham(M,\omega)$

Théorème 2.6.2. *Soit* $\tilde{\Phi} \in \widetilde{Symp_0(M,\omega)}$ *alors* $\mathscr{F}_\omega(\tilde{\Phi}) = 0$ *si et seulement s'il existe un représentant* $\Phi \in \tilde{\Phi}$ *tel que* $\Phi_t \in Ham(M,\omega)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Brisons la preuve de ce théorème en trois parties

Proposition 2.6.8. *Soit* $\tilde{\Phi} \in \widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ *tel qu'il existe* $\Phi \in \tilde{\Phi}$ *qui est hamiltonienne en chaque moment, c'est à dire*

$$\Phi_t \in Ham(M,\omega), \ \forall t \in [0,1]$$

alors $\mathscr{F}_\omega(\Phi) = 0$

Démonstration. Soit X_t le champ vectoriel induit par l'isotopie Φ alors par hypothèse

$$[\iota(X_t)\omega] = 0, \ \forall t \in [0,1]$$

d'où $[\int_0^1 \iota(X_t)\omega dt] = 0$ aussi. □

Lemme 2.6.2. Φ *est une isotopie symplectique telle que* $\mathscr{F}_\omega(\Phi) = 0$ *si et seulement s'il existe un difféomorphisme hamiltonien* h *et un reparamétrage lisse* Φ' *du chemin* $h^{-1}\#\Phi$ *tel que*

$$\int_0^1 \iota(X_t')\omega = 0$$

où X_t' *est le champ vectoriel induit par* Φ'.

Démonstration. Comme le morphisme de flux est invariant sous l'homotopie, on peut supposer sans perte de généralité en reparamétrant peut-être Φ que Φ vérifie

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = 0$$

pour t dans un voisinage de 0 et 1. Comme $\mathscr{F}_\omega(\Phi) = 0$ il existe un hamiltonien qui est indépendant du temps $H : M \to \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^1 \iota(X_t)\omega \, dt = dH$$

soit donc $h := h_1$ le difféomorphisme hamiltonien défini par isotopie $h_0 = id_M$

$$\frac{d}{dt}h_t = X_H \circ h_t, \qquad \iota(X_H)\omega = dH$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut reparamétrer par une application de reparamétrage ϕ^ε de l'isotopie h_t telle que

$$(h_t^{-1}\#^\varepsilon\Psi)_t := \begin{cases} \Psi_{\phi^\varepsilon(2t)} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h^{-1}_{\phi(2t-1)^\varepsilon} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est lisse. D'où, avec la même notation que dans la preuve de la proposition 2.6.3 on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \iota((X\#^\varepsilon X_H)_t)\omega \,\mathrm{d}t &= \int_{V_1} \dot{\phi}(2t)\iota(X_{\phi(2t)})\omega\, dt + \int_{[0,\frac{1}{2}]-V_1} (2+2\varepsilon)\iota(X_{\phi(2t)})\omega \\
&\quad - \int_{[\frac{1}{2},1]-V_2} (2+2\varepsilon)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega - \int_{V_2} \dot{\phi}(2t)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega\, dt \\
&= \int_0^1 \iota(X_t)\omega \,\mathrm{d}t - \int_{[\frac{1}{2},1]-V_2} (2+2\varepsilon)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega \\
&\quad - \int_{V_2} \dot{\phi}(2t)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega\, dt
\end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit par notre hypothèse que $X_t = 0$ dans un voisinage de 0 et 1, on voit aussi que lorsque ε tend vers 0, cette quantité tend d'une manière continue vers

$$\int_0^1 \iota((X_t)\omega \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \iota((X_{H,t})\omega \,\mathrm{d}t = dH - dH = 0$$

de plus les formes

$$\dot{\phi}(2t)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega, \;\; (2+2\varepsilon)\iota(X_{H,\phi(2t-1)})\omega$$

sont évidement exactes, et donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_0^1 \iota((X\#^\varepsilon X_H)_t)\omega \,\mathrm{d}t \in \Gamma_\omega$, mais comme l'allocation

$$\varepsilon \mapsto \int_0^1 \iota((X\#^\varepsilon X_H)_t)\omega \,\mathrm{d}t$$

est continue et Γ_ω est dénombrable alors pour ε assez petit cette application est constante, d'où il existe un choix de ε telle que

$$\int_0^1 \iota((X\#^\varepsilon X_H)_t)\omega \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \iota((X_t)\omega \,\mathrm{d}t - \int_0^1 \iota((X_{H,t})\omega \,\mathrm{d}t = 0$$

Inversement, s'il existe un tel difféomorphisme hamiltonien et reparamétrage lisse, alors

$$\begin{aligned}
0 &= \mathscr{F}_\omega(h^{-1}\#\Phi) = \mathscr{F}_\omega(h^{-1}) + \mathscr{F}_\omega(\Phi) \\
&= 0 + \mathscr{F}_\omega(\Phi) = \mathscr{F}_\omega(\Phi)
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité sur la première ligne utilise que $\mathscr{F}_\omega$ est un homomorphisme de groupes et qu'il est invariant sous les homotopies. □

Proposition 2.6.9. *Soit $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie symplectique avec $\Phi_0 = id_M$ et*

$$\int_0^1 \iota(X_t)\omega\, dt = 0$$

où X_t est le champ vectoriel induit par Φ, alors Φ est homotope à une isotopie $\Psi = \{\Psi_t\}_{t\in[0,1]}$ par une homotopie lisse et symplectique qui fixe les bouts.

Démonstration. Définissons la famille à $1-$paramètre des $1-$formes fermées

$$\sigma_t := -\int_0^t \iota(X_t)\omega\, dt$$

et soit Y_t le champ vectoriel tel que $\iota(Y_t)\omega = \sigma_t$. Alors par hypothèse on a $Y_0 = Y_1 = 0$ et pour chaque $t \in [0,1]$ fixé, définissons l'isotopie h_t^s par $h_t^0 = id_M$ et

$$\frac{d}{ds}h_t^s = Y_t \circ h_t^s$$

Définissons $\Psi_t := \{h_t^1 \circ \Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ et notre homotopie par

$$\begin{aligned} H : [0,1] &\to Symp(M,\omega)_0 \\ s &\mapsto \{h_t^s \circ \Phi_t\}_{t\in[0,1]} \end{aligned}$$

alors l'isotopie est évidement lisse et symplectique en vue de sa construction, et comme $Y_0 = Y_1 = 0$, $h_0^s = h_1^s = id_M$ pour tout $s \in [0,1]$, d'où

$$h_0^s \circ \Phi_0 = \Phi_0, \qquad\qquad h_1^s \circ \Phi_1 = \Phi_1, \ \ \forall s \in [0,1]$$

en plus pour chaque $T \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\omega(\{\Psi_t\}_{t\in[0,T]}) &= \mathscr{F}_\omega(\{h_t^1\}_{t\in[0,T]}) + \mathscr{F}_\omega(\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}) \\ &= \mathscr{F}_\omega(\{h_t^1\}_{t\in[0,T]}) + [\int_0^T \iota(X_t)\omega\, dt] \end{aligned}$$

Notons ensuite que l'isotopie $\{h_t^1\}_{t\in[0,T]}$ est homotope à l'isotopie $\{h_T^s\}_{s\in[0,1]}$ par l'homotopie

$$F(\nu) = \begin{cases} F_1(2\nu) & \nu \in [0,\frac{1}{2}] \\ F_2(2\nu-1) & \nu \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

où F_1 et F_2 sont définies par

$$\begin{aligned} F_1(\nu) &= \{h_{Tt}^{\nu(t-1)+1}\}_{t\in[0,1]} \\ F_2(\nu) &= \{h_{T(1-\nu)s}^s\}_{s\in[0,1]} \end{aligned}$$

(et bien sûr qu'on peut perturbé F tel qu'elle soit lisse), d'où par l'invariance du flux sous les homotopies on trouve

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\omega(\{\Psi_t\}_{t\in[0,T]}) &= \mathscr{F}_\omega(h^s_T\}_{s\in[0,1]}) + [\int_0^T \iota(X_t)\omega\, dt] \\
&= [\iota(Y_T)\omega] + [\int_0^T \iota(X_t)\omega\, dt] \\
&= -[\int_0^T \iota(X_t)\omega\, dt] + [\int_0^T \iota(X_t)\omega\, dt] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors le champ vectoriel induit par Ψ est exacte en tout temps, d'où Ψ est une isotopie hamiltonienne. $\square$

Le théorème 2.6.2 suit facilement des trois énoncés précédents :

Démonstration. Si Φ est une isotopie hamiltonienne alors $\Phi_1 \in Ham(M,\omega)$ par définition et $\mathscr{F}_\omega(\Phi) = 0$ par proposition 2.6.8. Suppose alors que Φ est une isotopie symplectique quelconque telle que le flux de Φ s'annule par le lemme 2.6.2 il existe un hamiltonien h tel que proposition 2.6.9 peut être appliquée à $\Psi = h\#\Phi$ pour conclure que Ψ est homotope à une isotopie hamiltonienne, disons Ψ', mais ceci implique que $h^{-1}\Psi'$ est homotope à $h^{-1}h\Phi = \Phi$ et les difféomorphismes hamiltoniens sont fermés sous la composition, donc Φ est homotope symplectiquement à une isotopie hamiltonienne, et a fortiori $\Phi(1) \in Ham(M,\omega)$. $\square$

Théorème 2.6.2 s'étend facilement au revêtement universel :

Proposition 2.6.10. *Soit $\{\tilde{\varphi}_t\} \subset \widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ une isotopie lisse, alors $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1 \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$ si et seulement si $\{\tilde{\varphi}_t\}$ est homotope dans $\widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ à une isotopie $\{\tilde{\psi}_t\} \subset \widetilde{Ham}(M,\omega)$ par une homotopie qui fixe les bouts.*

Démonstration. C'est immédiat que si $\{\tilde{\varphi}_t\}$ est homotope avec les bouts fixés à une telle isotopie alors $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1 \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$, donc montrons l'inverse. Suppose que $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1 \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$ alors en applicant la projection canonique, $\pi(\tilde{\varphi}_t) = \tilde{\varphi}_t(1) =: \varphi_t$ on obtient une isotopie $\{\varphi_t\} \subset Symp_0(M,\omega)$ avec $\varphi_0, \varphi_1 \in Ham(M,\omega)$ et par le théorème 2.6.2, $\{\varphi_t\}$ est homotope par une homotopie H à une isotopie hamiltonienne $\{\psi_t\} \subset Ham(M,\omega)$ et par la propriété de relèvement des homotopies du revêtement universel H se relève à une homotopie entre $\{\tilde{\varphi}_t\}$ et $\{\tilde{\psi}_t\} \subset \widetilde{Ham}(M,\omega)$. $\square$

Corollaire 2.6.1. *L'inclusion naturelle*

$$\pi_1(Ham(M,\omega), id_M) \to \pi_1(Symp_0(M,\omega), id_M)$$

est injective.

Démonstration. Soit $[\alpha] \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$ telle que $[\alpha] = 0 \in \pi_1(Symp_0(M,\omega), id_M)$ alors il existe une isotopie $\{\tilde{\varphi}_t\} \subset \widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ avec $\tilde{\varphi}_0 = [\alpha]$, $\tilde{\varphi}_1 = \widetilde{id_M} \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$, d'où la proposition précédente implique que $[\alpha]$ est homotope à $\widetilde{id_M}$ par une homotopie à bouts fixés en $\widetilde{Ham}(M,\omega)$ alors $[\alpha] = 0 \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$. $\square$

2.6.2.1 Le flux dans la carte de Weinstein

Rappelons que la carte de Weinstein nous fournit avec une identification lisse

$$\mathscr{W} : W \to O$$

entre un voisinage de l'identité $W \subset Symp_0(M,\omega)$ et un voisinage O de la zéro forme 0_M dans l'espace des $1-$formes fermées, induit par l'identification naturelle

$$\Psi_W : \mathscr{N}(\Gamma_{id_M}) \to \mathscr{N}(\Gamma_{0_M})$$

entre les graphes des symplectomorphismes C^1-proches de l'identité dans $(M \times M, -\omega \times \omega)$ et les graphes des sections des formes fermées C^1-proches de la section zéro, vérifiant

$$\Gamma_{\mathscr{W}(\psi)} = \Psi_W(\Gamma_\psi)$$

et $\mathscr{W}(id_M) = 0_M$. Comme le flux nous fournit avec des invariants des isotopies symplectiques en termes de (classes de cohomologie de) $1-$formes, la carte de Weinstein nous dit que, moralement, il suffit d'étudier le morphisme de flux sur les espaces cotangents pour comprendre la géométrie locale du flux.

Lemme 2.6.3. *Soient (M,ω) une variété symplectique avec $\omega = -d\lambda$ exacte et Φ une isotopie symplectique basée en l'identité alors*

$$\mathscr{F}_\omega(\tilde{\Phi}) = [\lambda - \Phi_t^*\lambda]$$

Démonstration. Soit X_t le champ vectoriel induit par Φ et calculons

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\omega(\tilde{\Phi}) &= [\int_0^1 \iota(X_t)\omega\, dt] \\
&= [\int_0^1 \Phi_t^*\iota(X_t)\omega\, dt] \\
&= [-\int_0^1 \Phi_t^*\iota(X_t)d\lambda\, dt] \\
&= [-\int_0^1 \Phi_t^*\mathscr{L}_{X_t}\lambda\, dt] \\
&= [-\int_0^1 \Phi_t^*\frac{d}{dt}|_{t=0}\lambda\, dt] \\
&= [-\int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi_t^*\lambda\, dt] \\
&= [-\Phi_1^*\lambda + \lambda]
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.11. *Soit Φ une isotopie symplectique avec $\Phi_t \in W \subset Symp_0(M,\omega)$ pour $t \in [0,1]$ alors $\mathscr{F}_\omega(\Phi) = -[\mathscr{W}(\Phi_1)]$.*

Démonstration. Comme $\Phi_t \in W$ pour tout $t \in [0,1]$, alors par définition $\Psi_W(\Gamma_{\Phi_t}) \in \mathscr{N}(\Gamma_{0_M})$ pour tout t. Considérons

$$(N, -d\lambda) := (\mathscr{N}(\Gamma_{0_M}), -d\lambda|_{\mathscr{N}(\Gamma_{0_M})})$$

comme une variété symplectique où ici $\lambda = \lambda|_{\mathscr{N}(\Gamma_{0_M})}$ est la restriction de la forme de Liouville à $\mathscr{N}(\Gamma_{0_M})$. Définissons une isotopie symplectique de $(N, -d\lambda)$ par

$$\Phi'_t := \Psi_W \circ id_M \times \Phi_t \circ \Psi_W^{-1}$$

Φ'_t est un difféomorphisme symplectique pour chaque t, car c'est une composition de difféomorphismes symplectiques. Pour comprendre l'effet de Φ'_t c'est utile de considérer son action sur le graphe d'une section d'une $1-$forme fermée Γ_σ :

$$\begin{aligned}
\Phi'_t(\Gamma_\sigma) &= \Psi_W \circ id_M \times \Phi_t \circ \Psi_W^{-1}(\Gamma_\sigma) \\
&= \Psi_W \circ id_M \times \Phi_t(\Gamma_{\mathscr{W}^{-1}(\sigma)}) = \Psi_W(\Gamma_{\Phi_t \circ \mathscr{W}^{-1}(\sigma)}) \\
&= \Gamma_{\mathscr{W} \circ \Phi_t \circ \mathscr{W}^{-1}(\sigma)} \subset \mathscr{N}(\Gamma_{0_M})
\end{aligned}$$

En particulier, en applicant Φ'_t au graphe de la section zéro, on voit

$$\Phi'_t(\Gamma_{0_M}) = \Gamma_{\mathscr{W}(\Phi_t)}$$

De plus, il y a l'inclusion canonique

$$\begin{aligned}
i_\triangle : M &\to M \times M \\
x &\mapsto (x,x)
\end{aligned}$$

et alors $\Phi' \circ 0_M = i_\triangle$. Notons que si X_{Φ_t} dénote le champ vectoriel induit par l'isotopie Φ_t alors $(0, X_t) \in TM \times TM$ est le champ vectoriel induit par $id_M \times \Phi_t$ et donc

$$\iota(X_t)\omega = i_\triangle^*(\iota((0,X_t)) - \omega \times \omega)$$

d'où

$$\mathscr{F}_\omega(\Phi_t) = i_\triangle^* \mathscr{F}_{-\omega\times\omega}(id_M \times \Phi_t)$$

Mais $id_M \times \Phi_t = \Psi_W^{-1}\Phi'_t\Psi_W$ et l'on peut identifier $\mathscr{N}(\triangle)$ et N symplectiquement par Ψ_W, d'où par proposition 2.6.4

$$\mathscr{F}_{-\omega\times\omega} = \Psi^* \mathscr{F}_{-d\lambda}(\Phi'_t)(\Phi'_t)$$

ce qui implique

$$\mathscr{F}_\omega(\Phi_t) = i_\triangle^* \Psi^* \mathscr{F}_{-d\lambda}(\Phi'_t)(\Phi'_t) = 0_M^* \mathscr{F}_{-d\lambda}(\Phi'_t)$$

et comme $-d\lambda$ est une forme symplectique exacte, le lemme 2.6.3 implique que

$$\mathscr{F}_{-d\lambda}(\Phi'_t) = [\lambda - (\Phi'_1)^*\lambda]$$

Comme $\sigma^*\lambda = \sigma$ pour toute $1-$forme $\sigma \in \Omega^1(M)$ on calcule

$$0_M^*\mathscr{F}_{-d\lambda}(\Phi'_t) = [0_M^*\lambda - 0_M^*(\Phi'_1)^*\lambda] = -[0_M^*(\Phi'_1)^*\lambda]$$

Pour calculer $[0_M^*(\Phi'_1)^*\lambda]$, notons que comme $\Gamma_{\mathscr{W}(\Phi_t)}$ est une section, $f_t := \pi_{T*M} \circ \Phi'_t \circ 0_M$ défini une famille lisse de difféomorphismes avec $f_0 = id_M$ telle que $\Phi' \circ 0_M = \mathscr{W}(\Phi_t) \circ f_t$, d'où

$$\mathscr{F}_\omega(\Phi_t) = -f_1^*[\mathscr{W}(\Phi_1)^*\lambda] = -f_1^*[\mathscr{W}(\Phi_1)] = -[\mathscr{W}(\Phi_1)]$$

car f_1 est isotope à id_M et donc agit trivialement sur la cohomologie.

□

Proposition 2.6.12. *Soit $\psi \in W \subset Symp_0(M,\omega)$ alors $\psi \in Ham(M,\omega)$ si et seulement si $[\mathscr{W}(\psi)] \in \Gamma_\omega$.*

Démonstration. Supposons en premier que $\psi \in Ham(M,\omega)$ alors il faut montrer qu'il existe un lacet symplectique $\gamma : [0,1] \to Symp(M,\omega)$ avec $\gamma_0 = \gamma_1 = id_M$ tel que $\mathscr{F}\{\gamma_t\}_{t\in[0,1]} = [\mathscr{W}(\psi)]$. Comme ψ est hamiltonien, il existe une isotopie hamiltonienne lisse $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ avec $\psi_0 = id_M$, $\psi_1 = \psi$. Posons

$$\gamma_t := \begin{cases} \mathscr{W}^{-1}\big((2t)\sigma\big) & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \psi_{1-2t} & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Comme toujours, on peut perturber γ_t à un chemin lisse sans changer son flux, d'où l'on calcule

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\{\gamma_t\}_{t\in[0,1]}) &= \mathscr{F}(\{\mathscr{W}^{-1}\big((t\sigma\big)\}_{t\in[0,1]}) - \mathscr{F}(\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}) \\ &= \mathscr{F}(\{\mathscr{W}^{-1}\big(t\sigma\big)\}_{t\in[0,1]}) \end{aligned}$$

mais $\mathscr{W}^{-1}\big(t\sigma\big)\}_{t\in[0,1]}$ est une isotopie symplectique contenue dans la carte de Weinstein par construction alors par proposition 2.6.11,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\{\mathscr{W}^{-1}\big(t\sigma\big)\}_{t\in[0,1]}) &= -[\mathscr{W}\big(\mathscr{W}^{-1}(\sigma)\big)] \\ &= -[\sigma] \end{aligned}$$

d'où $[\sigma] \in \Gamma_\omega$.

Supposons inversement que $[\mathscr{W}(\psi)] \in \Gamma_\omega$, alors il existe un lacet $\gamma = \{\gamma_t\}_{t\in[0,1]}$ basé en l'identité avec $\mathscr{F}(\gamma) = [\mathscr{W}(\psi)]$, rappelons que l'image de la carte de Weinstein est contractile par des droits de la forme $t\sigma$ dans l'espace des $1-$formes fermées et définissons alors l'isotopie symplectique :

$$\psi_t := \begin{cases} \gamma_{2t} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mathscr{W}^{-1}\big((2t-1)\mathscr{W}(\psi)\big) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

alors $\psi_0 = id_M$, $\psi_1 = \psi$ et

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}) &= \mathscr{F}(\{\gamma_t\}_{t\in[0,1]}) + \mathscr{F}(\{\gamma_t\}_{t\in[0,1]}) \\ &= [\mathscr{W}(\psi)] - [\mathscr{W}(\psi)] = 0 \end{aligned}$$

d'où par le théorème 2.6.2 $\psi \in Ham(M, \omega)$. $\square$

On obtient finalement un résultat qui confirme notre soupçon initial que $\mathfrak{ham}$ en est l'algèbre de Lie de $Ham(M, \omega)$:

Théorème 2.6.3. *Soit $h_t : [0,1] \to Ham(M, \omega)$ une courbe lisse et définissons une famille de champs vectoriels X_t par*

$$\frac{d}{dt} h_t = X_t \circ h_t$$

alors chaque X_t est un champ hamiltonien.

Démonstration. Comme les X_t ne dépendent que de la variation de la courbe avec t en non le point initial, on peut sans perte de généralité supposer que $h_0 = id_M$, mais le lemme 2.6.12 implique qu'il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que pour $t \in [0, T)$, $[W(h_t)] \in \Gamma_\omega$, mais comme l'allocation

$$t \mapsto [W(h_t)]$$

est continue et Γ_ω est dénombrable, $[W(h_t)]$ est constant pour $0 \leq t < T$, d'où $[W(h_t)] = [W(h_0)] = 0$ et donc les champs X_t sont hamiltoniens pour $t \in [0, T)$, et en recouvrant $[0,1]$ par des intervalles I_k de longueur T et en itérant cet argument pour $\{X_t\}_{t\in I_k}$ on obtient le théorème. $\square$

Pour nos efforts, on obtient l'exactitude des suites suivantes :

Corollaire 2.6.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique fermée, alors la suite de groupes de Lie suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \widetilde{Ham(M,\omega)} \longrightarrow \widetilde{Symp_0(M,\omega)} \xrightarrow{\mathscr{F}_\omega} H^1(M;\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

Démonstration. Le théorème 2.6.2 implique que toute isotopie symplectique telle que le flux s'annule est isotope symplectiquement à une isotopie hamiltonienne, donc $\ker \mathscr{F} \subset \widetilde{Ham(M, \omega)}$. L'implication inverse est presque immédiate de la définition du flux, sauf qu'on ne savait pas jusqu'à théorème 2.6.3 que toute isotopie lisse engendre un champ vectoriel exact en tout temps, mais avec ceci, c'est clair que $\widetilde{Ham} \subset \ker \mathscr{F}$, de plus proposition 2.6.3 nous assure que le flux est surjectif. □

Corollaire 2.6.3. *Soit (M,ω) une variété symplectique fermée, alors la suite de groupes suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \pi_1(Ham(M,\omega), id_M) \longrightarrow \pi_1(Symp_0(M,\omega), id_M) \xrightarrow{\mathscr{F}_\omega} \Gamma_\omega \longrightarrow 0$$

Démonstration. C'est toujours clair que $\pi_1(Ham(M,\omega), id_M) = \ker \mathscr{F}|_{\pi_1(Symp_0(M,\omega), id_M)}$ et que $\mathscr{F}_\omega(\pi_1(Symp_0(M,\omega), id_M)) = \Gamma_\omega$ par définition. L'injectivité de l'inclusion naturelle est le sujet de corollaire 2.6.1. □

Corollaire 2.6.4. *Soit (M,ω) une variété symplectique fermée, alors la suite de groupes de Lie suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow Ham(M,\omega) \longrightarrow Symp_0(M,\omega) \xrightarrow{f_\omega} H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega \longrightarrow 0$$

où

$$\begin{aligned} f_\omega : Symp_0(M,\omega) &\to H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega \\ \psi &\mapsto \mathscr{F}_\omega(\psi) + \Gamma_\omega \end{aligned}$$

est le morphisme induit par le morphisme de flux en passant par le quotient de $\pi : \widetilde{Symp_0}(M,\omega) \to Symp_0(M,\omega)$.

Démonstration. L'exactitude de cette suite est impliquée par l'exactitude des deux suites précédentes. □

Terminons cette section avec une application jolie du morphisme de flux et du rôle du groupe de flux aux dynamiques des difféomorphismes symplectiques et hamiltoniens, et ensuite un théorème profond dû à Banyaga. On ne le démontra pas le théorème de Banyaga dans ce mémoire comme il demandera une digression considérable de notre objet, mais on aura besoin de ce résultat (ou bien, la première partie du résultat sur la simplicité de Ham) lors de notre preuve de la non-dégénérescence de la norme de Hofer.

Comme la classe de flux d'une isotopie mesure l'aire symplectique de la trace des lacets sous l'isotopie, il est raisonnable d'imaginer qu'elle pourrait contraindre les dynamiques d'une isotopie qui, a priori, retourne chaque point à soi même, c'est-à-dire les lacets symplectiques $\tilde{\varphi} \in \pi_1(Symp(M,\omega), id_M)$. Le lemme suivant confirme ces soupçons :

Lemme 2.6.4. *Soit (M,ω) une variété symplectique fermée et soit $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ n'importe quel lacet de difféomorphismes symplectiques basés à l'identité, alors pour tout $x \in M$ le lacet $\{\varphi_t(x)\}_{t\in[0,1]} \in M$ vérifie*

$$PD([\{\varphi_t(x)\}_{t\in[0,1]}]) = \frac{1}{Vol(M,\omega)}[\mathscr{F}_\omega(\{\varphi_t\}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}]$$

Démonstration. Soit $S := PD([\psi_t(x)]) \in H^{2n-1}(M;\mathbb{R})$ le dual de Poincaré du lacet et soit $f : Q \to M$ une application lisse avec $\dim Q = 2n-1$, alors on a

$$\begin{aligned}
\langle S, f_*[Q]\rangle &= [\varphi_t(x)] \cdot f_*[Q] \\
&= \deg \varphi_t^{-1} \circ f \\
&= \frac{1}{n!Vol(M,\omega)} \int_{Q\times S^1} (\varphi_t^{-1} \circ f)^* \omega^n \\
&= \frac{1}{n!Vol(M,\omega)} \int_0^1 \int_Q f^* \iota(X_{\varphi_t})\omega^n \\
&= \frac{1}{n!Vol(M,\omega)} \int_0^1 \int_Q f^*(n\iota(X_{\varphi_t})\omega \wedge \omega^{n-1}) \\
&= \frac{1}{(n-1)!Vol(M,\omega)} \int_Q \int_0^1 f^*(\iota(X_{\varphi_t})\omega \wedge \omega^{n-1}) \\
&= \frac{1}{(n-1)!Vol(M,\omega)} \int_Q f^* \mathscr{F}_\omega(\{\varphi_t\}) \wedge \omega^{n-1}) \\
&= \langle \frac{1}{Vol(M,\omega)} [\mathscr{F}_\omega(\{\varphi_t\}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}], f_*[Q]\rangle
\end{aligned}$$

ce qui était à démontrer. □

On obtient comme corollaire immédiat le résultat suivant sur la topologie des orbites des lacets hamiltoniens :

Corollaire 2.6.5. *Soit (M,ω) une variété symplectique fermée et soit $\{h_t\}_{t\in[0,1]} \subset Ham(M,\omega)$ n'importe quel lacet de difféomorphismes hamiltoniens basé à l'identité, alors pour tout $x \in M$ le lacet $h_t(x) \in M$ est nul homologue, c'est à dire*

$$[h_t(x)] = 0 \in H_1(M;\mathbb{R})$$

Démonstration. Par le théorème précédent, $PD([\{h_t(x)\}_{t\in[0,1]}]) = \frac{1}{Vol(M,\omega)}[\mathscr{F}_\omega(\{h_t\}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}]$, mais $\pi_1(Ham(M,\omega), id_M) \subset \ker \mathscr{F}_\omega(h_t)$ alors $PD([\{h_t(x)\}_{t\in[0,1]}]) = 0$, mais comme le dual de Poincaré est un isomorphisme, $[\{h_t(x)\}_{t\in[0,1]}] = 0$. □

Finalement on a un théorème célèbre de Banyaga qui constate, en particulier, que $Ham(M,\omega)$ est un groupe simple. La preuve utilise le morphisme de flux d'une manière essentielle, et la lectrice intéressée est fortement encouragée de consulter la preuve dans le livre excellent de Banyaga [1].

Théorème 2.6.4. *[Banyaga] Soit (M,ω) une variété symplectique fermée alors $Ham(M,\omega)$ est simple (ne contiens aucun sous-groupe normal non trivial) et*

$$Ham(M,\omega) = [Symp_0(M,\omega), Symp_0(M,\omega)]$$

CHAPITRE 3

FIBRÉS SYMPLECTIQUES, HAMILTONIENS, LOCALEMENT HAMILTONIENS ET LEURS CONNEXIONS

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on effectue notre étude des fibrés symplectiques en utilisant comme outil principal les connexions symplectiques, localement hamiltoniennes et hamiltoniennes. La question qui nous serve toujours comme phare est de comprendre quand est-ce qu'un fibré symplectique au dessus d'une base symplectique est lui même un espace symplectique, d'une manière compatible avec la structure symplectique préservée par l'action de $Symp(M,\omega)$ sur les fibres. Dans la première section, on note que la condition d'avoir une forme compatible avec la structure symplectique sur les fibres induites une connexion d'Ehresmann telle que les holonomies sont forcément des difféomorphismes symplectiques et l'on donne un argument dû à Thurston qui montre qu'au-dessus d'une base symplectique compacte, l'espace total possède une structure symplectique compatible avec sa structure comme fibré si et seulement s'il admet une forme *fermée* qui s'accord sur les fibres avec la structure symplectique, ce qui nous mène dans la prochaine section de considéré la structure imposée par des telles formes. Pourtant, pour nous préparer à contempler de telles questions, dans le reste de la première section, on développe la théorie de la courbure des connexions symplectiques. Munit de ces connaissances, la deuxième section est dédiée à la construction de la forme de couplage de Guillemin, Lerman et Sternberg et un examen de sa forme locale, en particulier cette construction montre l'équivalence entre les notions de « fibré symplectique admettant une forme symplectique compatible sur l'espace total » et celui d'un fibré localement hamiltonien lorsque la base est symplectique, en particulier ceci implique que la catégorie symplectique est fermée par rapport aux « produits hamiltonienement tordus ». Finalement, notre dernière section étudie la question de réduire le groupe structural d'un fibré symplectique au groupe hamiltonien. Notre caractérisation géométrique du morphisme de flux porte de beaux fruits ici, comme il éclaire la condition précise pour pouvoir effectuer cette réduction et comme conséquence il nous donne des informations sur les façons d'étendre une forme symplectique sur les fibres à une forme globale fermée (normalisée). Toutes les trois sections de ce chapitre sont influencées dans leur contenu et leur présentation par notre lecture de [17] et la troisième section doit aussi beaucoup à notre lecture de [11].

3.2 Les Fibrés symplectiques et les connexions symplectiques

3.2.1 Formes $\pi-$compatibles et Leurs Connexions

Définition 3.2.1. Soit (M,ω) une variété symplectique. Un fibré (localement trivial) $M \hookrightarrow P \xrightarrow{B}$ est dit **symplectique** s'il possède comme groupe structural le groupe $Symp(M,\omega)$. On la dénote par $(P,\pi,(M,\omega),B)$ ou simplement par (P,π) si les autres données sont claires à partir du contexte.

Dans la suite, on supposera que M est fermé à moins de spécifier autrement. On aimerait mieux comprendre la structure des tels espaces. En particulier, on prendra comme question motivant « est-ce que la catégorie des variétés symplectiques est fermée par rapport à des tels produits tordus ? » Si oui, il faut évidement que P possède une 2-forme différentielle τ telle que $i_b^*\tau = \omega_b$ pour tout $b \in B$, où $i_b : (M_b, \omega_b) \hookrightarrow P$ est le plongement de la fibre au-dessus bu point b.

Une première observation dans cette direction, originalement due à Thurston, est l'énoncé général suivant sur la relation entre la cohomologie deRham d'un fibré et celle de sa fibre :

Proposition 3.2.1. *Soit (P,π) un fibré avec fibre modèle M et soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme différentielle fermée quelconque telle que ω est fixé par l'action du groupe structural de P, alors il existe une forme globale $\tau \in \Omega^n(P)$ telle que $(i_b)^*\tau = \omega_b$ pour tout $b \in B$ si et seulement s'il existe une classe cohomologique $a \in H^n(P;\mathbb{R})$ avec*

$$i_b^* a = [\sigma_b]$$

pour n'importe quel (alors pour tout) $b \in B$.

Démonstration. Soient $\tau_0 \in \Omega^n(P)$ n'importe quelle représentante de la classe a, $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ un atlas de (P,π) tel que les U_α sont tous contractiles, et $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Pour chaque $\alpha \in \Lambda$ soit $\omega_\alpha := (proj_M^\alpha)^*\omega$ où

$$proj_M^\alpha : U_\alpha \times M \to M$$

est la projection naturelle. Comme $i_b^*[\tau_0] = [\omega_b]$ pour chaque $b \in B$, pour chaque α dans π^{U_α}

$$\Phi_{\alpha *}\omega_\alpha - \tau_0 = \nu(b) \wedge \mu + \beta$$

où μ et β sont des formes fermées sur B et $\nu(b)$ est une forme exacte sur M pour chaque $b \in U_\alpha$ pour $b \in B$, mais comme U_α est contractile toute forme fermée sur U_α est exacte, d'où, il existe une $(n-1)-$forme $\lambda_\alpha \in \Omega^{n-1}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ telle que

$$\Phi_{\alpha *}\omega_\alpha - \tau_0 = d\lambda_\alpha$$

Posons alors

$$\tau := \tau_0 + \sum_{\alpha\in\Lambda} d\big((\rho_\alpha \circ \pi)\lambda_\alpha\big)$$

Comme $\sum_{\alpha\in\Lambda} d((\rho_\alpha \circ \pi)\lambda_\alpha) = d\sum_{\alpha\in\Lambda}(\rho_\alpha \circ \pi)\lambda_\alpha$ est exacte, τ représente toujours la classe a et il reste qu'à montrer que τ s'accord sur les fibres avec ω_b. Écrivons

$$d((\rho_\alpha \circ \pi)\lambda_\alpha) = \pi^* d\rho_\alpha \wedge \lambda_\alpha + \rho_\alpha \circ \pi \wedge d\lambda_\alpha$$

et notons que $\pi^* d\rho_\alpha$ est dans le noyau de i_b^* pour tout $b \in B$ car il s'annule sur les vecteurs verticaux d'où

$$\begin{aligned}
i_b^*\tau &:= i_b^*\tau_0 + \sum_{\alpha\in\Lambda} i_b^*(\rho_\alpha \circ \pi)d\lambda_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi) i_b^*(\tau_0 + d\lambda_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi) i_b^*\Phi_{\alpha *}\omega_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi)\omega_b \\
&= \omega_b
\end{aligned}$$

d'où la proposition. □

On voit donc qu'on peut étendre une forme symplectique ω sur la fibre (M,ω) à une forme fermée globale τ sur l'espace total aussitôt que ω se retrouve dans l'image de l'application

$$i^* : H^2(P;\mathbb{R}) \to H^2(M;\mathbb{R})$$

Remarquons qu'on ne peut pas s'attendre que cette application soit injective en général et qu'il pourrait donc exister plusieurs choix d'une pré-image $a \in H^2(P;\mathbb{R})$ de $[\omega]$, une phénomène qui se trouve au coeur de la question d'interpréter « qu'est-ce que c'est » une structure hamiltonienne sur un fibré.

Définition 3.2.2. Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique, on désigne par **une classe d'extension** toute classe cohomologique $a \in H^2(P;\mathbb{R})$ telle que $i_b^*a = [\omega_b]$ pour tout $b \in B$.

Il se trouve (ce qui n'est pas particulièrement inattendu, c'est clair) que les formes globales τ (pas nécessairement fermées !) qui se restreignent elles-mêmes à ω_b pour chaque $b \in B$ sont assez importantes qu'elles méritent un nom.

Définition 3.2.3. Soit (P,π) un fibré symplectique avec fibre (M,ω). Si $\tau \in \Omega^2(P)$ satisfait pour chaque $b \in B$

$$i_b^*\tau = \omega_b$$

alors on dit que τ est **π-compatible** (ou $(\pi,\omega)-$**compatible** s'il existe une ambiguïté probable dans le choix de forme symplectique sur la fibre). On note l'ensemble des telles formes par $\Omega^2_\pi(P)$ ou $\Omega^2_{\pi,\omega}(P)$ selon le cas.

Lors de notre étude des fibrés généraux, on a noté que lorsque M et B sont compactes alors le sous-groupe $Diff(P,\pi) \subset Diff(P)$ des difféomorphismes par fibres avait comme algèbre de Lie les champs vectoriels qui descendent à B $\mathscr{X}_{(P,\pi)}$. Il va nous profiter de faire une étude similaire du groupe des automorphismes des fibrés symplectiques. Notons par $Diff_\omega(P,\pi)$ les difféomorphismes de P qui sont aussi des isomorphismes symplectiques par fibres. Évidement, $Diff_\omega(P,\pi) \subset Diff(P,\pi)$. On a en premier l'énoncé suivant intuitif :

Proposition 3.2.2. *Soit $(P, \pi, (M, \omega))$ un fibré symplectique et*

$$\Phi : (P, \pi) \to (P, \pi)$$

un difféomorphisme par fibres. Alors $\Phi \in Diff_\omega(P, \pi)$ si et seulement si pour un certain (et donc pour n'importe quelle) $\tau \in \Omega^2_{\pi,\omega}(P)$ on a pour tout $b \in B$

$$i_b^*(\Phi^*\tau - \tau) = 0 \in \Omega^2(M_b)$$

Démonstration. Ceci suit directement des définitions. Par définition, Φ recouvre un difféomorphisme $\varphi : B \to B$, et sa restriction à chaque fibre $\Phi_b : (M_b, \omega_b) \to (M_{\varphi(b)}, \omega_{\varphi(b)})$ est définit par $i^{-1}_{\varphi(b)} \circ \Phi \circ i_b$. De plus $i_b^*\tau = \omega_b$, donc on voit

$$i_b^*(\Phi^*\tau - \tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i_b^*\Phi^*\tau|_{\pi^{-1}(\varphi(b))} = \omega_b \quad \Leftrightarrow \quad i_b^*\Phi^*(i^{-1}_{\varphi(b)})^*\omega_{\varphi(b)} = \Phi_b^*\omega_{\varphi(b)} = \omega_b$$

□

Grâce à la non-dégénérescence de ω, les formes $\pi-$compatibles induisent aussi un autre structure géométrique utile sur notre fibré, celui d'une connexion (d'Ehresmann) :

Définition 3.2.4. Soit τ une forme $\pi-$compatible sur un fibré symplectique $(P, \pi, (M, \omega))$, alors en chaque point $p \in P$ on définit la **connexion induite par** τ par

$$(\Gamma_\tau)_p := \{w \in T_pP : \tau(w, v) = 0 \, \forall v \in (\ker d\pi)_p\}$$

Proposition 3.2.3. *Si $\tau \in \Omega^2_{\pi,\omega}(P)$ alors*

1. *Pour chaque $p \in P$*

$$T_pP = (\ker d\pi)_p \oplus (\Gamma_\tau)_p$$

2. *Deux tels formes τ_1, τ_2 induisent la même connexion si et seulement si $d\pi \subset \ker(\tau_1 - \tau_2)$*

3. *Soit Γ une connexion d'Ehresmann quelconque, alors il existe une $2-$forme $\tau \in \Omega^2_{\pi,\omega}(P)$ telle que $\Gamma = \Gamma_\tau$*

4. *Pour un champ vectoriel X sur P posons $X = X^{v,\tau} + X^{h,\tau}$ avec $X^{v,\tau} \in \ker \pi$ et $X^{h,\tau} \in \Gamma_\tau$ alors pour tout $b \in B$*

$$i_b^*\iota(X)\tau = i_b^*\iota(X^{v,\tau})\tau = \iota(i_b^*X^{v,\tau}|_{\pi^{-1}(b)})i_b^*\tau$$

Démonstration. 1. Comme $di_{\pi(p)} : TM_{\pi(p)} \to TP$ est un isomorphisme sur son image, le sous-fibré $\ker \pi_{\pi(p)}$, et alors τ se restreint à ω sur $\ker \pi$, et ω est non dégénérée, c'est évident que $\dim(\Gamma_\tau)_p \leq \dim P - \dim M$. Pour voir qu'on à l'égalité, suppose qu'il existe $w \in T_pP - (\ker d\pi)_p$ tel qu'il existe $v \in (\ker d\pi)_p$ avec

$$\tau(w,v) \neq 0$$

alors par la non-dégénérescence de τ sur $\ker \pi$, il existe $u \in (\ker d\pi)_p$ avec $\tau(u,v) = \tau(w,v)$, et donc

$$\tau(w-u,v) = 0$$

alors $T_pP = (\ker \pi)_p \oplus (\Gamma_\tau)_p$.

2. Soient $\tau_1, \tau_2 \in \Omega^2_{\pi,\omega}(P)$ et prenons $v \oplus 0, u \oplus h_1 \in (\ker \pi)_p \oplus (\Gamma_{\tau_1})_p = T_pP$, on voit donc

$$\begin{aligned}(\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, u \oplus h_1) &= (\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, u \oplus 0) + (\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, 0 \oplus h_1)\\ &= (\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, 0 \oplus h_1)\end{aligned}$$

car τ_1 et τ_2 sont tous les deux égaux sur $\ker \pi$, et c'est alors clair que

$$\begin{aligned}&(\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, u \oplus h_1) = 0\\ \Leftrightarrow\ &(\tau_1 - \tau_2)(v \oplus 0, 0 \oplus h_1) = 0\\ &\Leftrightarrow \Gamma_{\tau_1} = \Gamma_{\tau_2}\end{aligned}$$

3. Étant donné Γ, pose $\tau := \omega_b$ sur la distribution verticale et pour une base locale $\{w_1, \cdots, w_k\}$ de Γ on pose $\tau(w_i, v) := 0$ pour tout $v \in \ker \pi$ et $\tau(w_i, w_j) := 0$ alors c'est clair par construction que $\Gamma_\tau = \Gamma$.

4. La deuxième égalité suit directement du premier qui suit de son tour d'un calcul simple :

$$i_b^* \iota(X)\tau = i_b^* \iota(X^{v,\tau} + X^{h,\tau})\tau = i_b^* \iota(X^{v,\tau})\tau + i_b^* \iota(X^{h,\tau})\tau$$

et l'on note que $i_b^* \iota(X^{h,\tau})\tau = 0$ par définition.

$\square$

Un certain thème se reproduira le long de notre étude de ces connexions, et c'est peut-être une bonne idée de l'exprimer de façon explicite avant de procéder ; on peut clairement obtenir n'importe quelle connexion d'Ehresmann à partir d'une forme $\pi-$compatible, donc l'utilité des telles formes est qu'elles nous permettent à lier des propriétés de la connexion induite aux propriétés des formes $\pi-$compatibles qui leur engendrent qu'on peut alors calculer plus aisément. La plupart de ce chapitre se concernera à interpréter des propriétés des connexions en termes des formes $\pi-$compatibles qui leur sont associées.

Comme exemple de cette philosophie, rappelons que se donner une connexion d'Ehresmann est équivalent à se donner un système de transports parallèles $\{\Phi_\alpha\}$, $\alpha : [0,1] \to B$ où l'on obtient $\Phi_\alpha : M_{\alpha(0)} \to M_{\alpha(1)}$ par le flot du relèvement horizontal $\dot{\alpha}^{\#}$. L'énoncé suivant donne une interprétation géométrique aux systèmes de transports parallèles d'une connexion Γ_τ en termes de la géométrie de τ.

Proposition 3.2.4. *Soient $(P,\pi,(M,\omega))$ un fibré symplectique et τ une forme $\pi-$compatible. Étant donné une courbe $\alpha : [0,1] \to B$, $(P,\tau)|_{\alpha([0,1]}$ est muni d'un feuilletage caractéristique induit par τ et le transport parallèle $\Phi_\alpha : M_{\alpha(0)} \to M_{\alpha(1)}$ par rapport à la connexion Γ_τ n'est rien que l'holonomie de ce feuilletage.*

Démonstration. Cette proposition découle directement des définitions.
$P|_{\alpha([0,1]} = \pi^{-1}(\alpha([0,1])) =: \pi^{-1}(\alpha)$ est de codimension 1 et relatif au scindement induit par Γ_τ on a

$$T_{\alpha(t)}\pi^{-1}(\alpha) = TM_{\alpha(t)} \oplus \Gamma|_{\pi^{-1}(\alpha)}$$

et donc τ s'annule sur $\Gamma|_{\pi^{-1}(\alpha)}$ qui a dimension 1, et qui contient $\alpha^{\#}(p)$ en chaque point $p \in \pi^{-1}(\alpha)$ par définition, donc $\alpha^{\#}(p)$ engendre le feuilletage caractéristique et donc $t \mapsto \Phi_{\alpha(t)}(x)$ est une courbe intégrale du feuilletage pour chaque $x \in M_{\alpha(0)}$, d'où la proposition. □

Terminons cette discussion en remontant à notre question initiale : quand est-ce qu'un « produit tordu » de variétés symplectiques admet une forme symplectique globale qui se restreint sur les fibres à la forme symplectique sur les fibres ? Rappelons que dans la proposition de Thurston avec laquelle on a commencé cette section on a construit à partir d'une classe cohomologique qui s'accordait sur les fibres avec les classes sur les fibres une forme fermée globale $\tau \in \Omega^2(P)$ qui se restreint sur les fibres à la forme symplectique sur les fibres. Pourtant, la forme construite ci-haut n'est pas forcément non dégénérée, mais si la base du fibré supporte une forme symplectique $\beta \in \Omega^2(B)$ alors en sommant la forme obtenue dans la proposition précédente avec un multiple $\pi^*\beta$, on peut obtenir une forme symplectique globale sans modifiant la forme sur les fibres :

Théorème 3.2.1. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),(B,\beta))$ un fibré symplectique au-dessus d'une base symplectique compacte et supposons que ω se retrouve dans l'image de l'application de restriction*

$$i^* : H^2(P;\mathbb{R}) \to H^2(M;\mathbb{R})$$

alors il existe une forme symplectique $\Omega \in \Omega^2(P)$ telle que

$$i_b^*\Omega = \omega_b$$

pour tout $b \in B$.

Démonstration. Soit $\tau \in \Omega^2(P)$ la forme construite dans la proposition 3.2.1 alors τ vérifie pour tout $b \in B$

$$i_b^*\tau = \omega_b$$

donc τ est $\pi-$compatible et induite alors une connexion Γ_τ (qui est symplectique de plus, comme τ est fermée et donc verticalement fermée. On verra plus tard que les holonomies de la connexion induites par τ autour des lacets contractiles sont même hamiltoniennes). τ s'annule sur des paires de vecteurs dont un est horizontal et l'autre vertical, alors il suffit de le modifier sur des paires de vecteurs horizontaux. Pour chaque $b \in B$ soit $\Gamma_b \subset TP$ le sous-espace horizontal de la connexion Γ_τ et

$$K_b := \min_{\substack{h_1,h_2 \in \Gamma_b \\ \beta(h_1,h_2)=1}} \{\tau_b(h_1,h_2)\}$$

comme B est compacte, il existe $K > 0$ tel que $-K \leq \inf_{b\in B} K_b$ et donc

$$\Omega_K := \tau + K\pi^*\beta$$

vérifie

$$\Omega_K(h_1,h_2) \geq 0$$

pour toute paire $h_1, h_2 \in Hor_b$, de plus, c'est clair que $i_b^*\Omega_K = i_b^*\tau = \omega_b$ et que $\Gamma_{\Omega_K} = \Gamma_\tau$ et donc $\Omega_K(v,h) = 0$ pour $v \in T^{vert}P$, $h \in \Gamma_\tau$, d'où le théorème. □

3.2.1.1 Connexions symplectiques et leurs holonomies

D'un autre point de vue, les connexions d'Ehresmann nous permettent à définir des relèvements horizontaux $X^\# : P \to TP$ des champs vectoriels $X : B \to TB$. De plus, les flots des tels relèvements sont des difféomorphismes par fibres. C'est alors naturel de vouloir nous restreindre aux connexions telles que les flots associés sont des symplectomorphismes par fibres. La proposition suivante caractérise ces connexions en termes des formes $\pi-$compatibles qui leurs engendrent.

Proposition 3.2.5. *Soient τ une $2-$forme πcompatible sur un fibré symplectique $(P,\pi,(M,\omega))$ et Γ_τ la connexion induite par τ, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

1. *τ est verticalement fermée, c'est-à-dire que pour tout $X \in TP$, $b \in B$*

$$i_b^* i(X)d\tau = 0$$

2. *Pour tout $X : B \to TB$ à support compact, le flot de son relèvement horizontal $X^\#$ est un symplectomorphisme par fibres.*

Démonstration. Soit X un champ vectoriel sur B à support compact et $X^{\#}$ son relèvement horizontal par rapport à la connexion induit par τ. Soit $\Phi_t : P \to P$ la famille de difféomorphismes par fibre définit par le flot de $X^{\#}$, c'est-à-dire qu'on a pour $t \in [0,1]$

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X^{\#} \circ \Phi_t, \qquad\qquad \Phi_0 = id_P$$

d'où pour chaque $b \in B$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} i_b^* \Phi_t^* \tau = i_b^* \frac{d}{dt} \Phi_t^* \tau &= i_b^* \Phi_t^* \mathscr{L}_{X^{\#}} \tau \\ &= i_b^* \Phi_t^* (i(X^{\#}) d\tau + di(X^{\#})) \\ &= i_b^* \Phi_t^* i(X^{\#}) d\tau + d i_b^* \Phi_t^* i(X^{\#}) \tau\end{aligned}$$

et $i_b^* \Phi_t^* i(X^{\#}) \tau =$, car pour tout $Y \in \mathscr{X}(M)$, $(i_b)_* Y \in \ker \pi$ et $(\Phi_t)_*$ préserve $\ker \pi$ car il est un difféomorphisme par fibres, et $i(X^{\#}) \tau(Y) = 0$ pour tout $Y \in \ker \pi$, par la définition de Γ_τ. Donc on voit

$$\frac{d}{dt} i_b^* \Phi_t^* \tau = i_b^* \Phi_t^* i(X^{\#}) d\tau$$

d'où la proposition. □

Des telles formes $\pi-$compatibles méritent un nom.

Définition 3.2.5. Soit $(P, \pi, (M, \omega))$ un fibré symplectique et $\tau \in \Omega^2(P)$ une $2-$forme $\pi-$compatible, si en addition τ est verticalement fermée, on l'appel une **forme de connexion**. L'ensemble des formes de connexions sur $(P, \pi, (M, \omega)))$ est dénoté $\Omega^2_{con}(P, \pi, \omega)$ ou $\Omega^2_{con}(P, \pi)$ s'il n'existe aucun risque de confusion.

Proposition 3.2.6. *Soit $(P, \pi, (M, \omega), B)$ un fibré symplectique, alors (P, π) admet une connexion symplectique.*

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, il suffit de construire une forme de connexion sur (P, π). Pour construire une telle forme, soit $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un atlas de (P, π) et $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Pour chaque $\alpha \in \Lambda$ soit $\omega_\alpha := (proj_M^\alpha)^* \omega$ où

$$proj_M^\alpha : U_\alpha \times M \to M$$

est la projection naturelle. Posons ensuite

$$\tau := \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi) \Phi_{\alpha *} \omega_\alpha$$

pour $b \in B$, calculons

$$\begin{aligned} i_b^* \tau &= \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi) i_b^* \Phi_{\alpha *} \omega_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi) \omega_b \\ &= \omega_b \end{aligned}$$

donc τ est $\pi-$compatible, de plus, dans une carte locale (U_β, Φ_β) on a

$$\begin{aligned} \Phi_\beta^* \tau &= \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi_{U_\beta}) \Phi_\beta^* \Phi_{\alpha *} \omega_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi_{U_\beta}) (\Phi_\alpha^{-1} \Phi_\beta)^* \omega_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda} (\rho_\alpha \circ \pi_{U_\beta}) \omega_\beta \end{aligned}$$

car $\Phi_\alpha^{-1}\Phi_\beta(b,x) = (b, \phi_{\beta\alpha}(b)x)$ où $\phi_{\beta\alpha}(b) \in Symp(M,\omega)$ d'où $\Phi_\beta^* \tau = \omega_\beta$ est évidemment verticalement fermée. □

Le lemme prochain est facile, mais utile

Lemme 3.2.1. *Soit $(P, \pi, (M, \omega))$ un fibré symplectique, τ une forme verticalement fermée et Φ un difféomorphisme par fibres alors $\Phi^*\tau$ est encore verticalement fermée*

Démonstration. Calculons pour un $b \in B$ arbitraire

$$i_b^* \iota(X) d\Phi^* \tau = i_b^* \iota(X) \Phi^* d\tau = i_b^* \Phi^* \iota(\Phi^* X) d\tau$$

et ce dernier est identiquement nul car τ est verticalement fermée et im $(\Phi \circ i_b)_* \subset \ker \pi$, car Φ est un difféomorphisme par fibres. □

On a comme conséquence immédiate de ce lemme que les symplectomorphismes par fibres envoient des formes de connexions à des formes de connexions, comme ils préservent aussi la $\pi-$compatibilité de la forme en question.

3.2.2 Champs vectoriels symplectiques par fibres et verticalement hamiltoniens

Comme on aimerait représenter l'algèbre de Lie des symplectomorphismes par fibres comme une sous-algèbre de $\mathscr{X}(P, \pi)$, et intuitivement, cette dernière devrait être engendrée par les champs vectoriels qui préservent infinitésimalement la forme ω sur les fibres on fait donc la définition suivante

Définition 3.2.6. Soit $(P, \pi, (M, \omega))$ un fibré symplectique et $X \in \mathscr{X}(P, \pi)$ alors on dit que X est un champ vectoriel **symplectique par fibres** si pour n'importe quelle $\tau \in \Omega^2_{con}(P, \pi, \omega)$

on a

$$d(i_b^*\iota(X)\tau) = 0$$

Remarque. Par la formule de Cartan on a

$$d(i_b^*\iota(X)\tau) = i_b^*(\mathscr{L}_X\tau - \iota(X)d\tau) = i_b^*\mathscr{L}_X\tau - i_b^*\iota(X)d\tau$$

d'où l'on voit l'importance du fait que τ soit une forme de connexion et non seulement $\pi-$compatible dans cette définition, car cette condition garantit

$$i_b^*\mathscr{L}_X\tau = 0 \Leftrightarrow d(i_b^*\iota(X)\tau) = 0$$

nous garanti que la définition ne dépend que du fibré symplectique et non le choix de τ.

Proposition 3.2.7. *Soit $\tau_1, \tau_2 \in \Omega^2_{con}(P, \pi, \omega)$, alors*

$$d(i_b^* i(X)\tau_1) = 0 \Leftrightarrow d(i_b^*\iota(X)\tau_2) = 0$$

Démonstration. Soit Φ_t le flot à temps t de X et $\varphi : B \to B$ le difféomorphisme recouvert par Φ, alors on a pour tout $b \in B$

$$\begin{aligned}
d(i_b^* i(X)\tau_1) - d(i_b^* i(X)\tau_2) &= i_b^* d i(X)[\tau_1 - \tau_2] \\
&= i_b^*\mathscr{L}_X(\tau_1 - \tau_2) - \underbrace{i_b^* i(X) d[\tau_1 - \tau_2]}_{=0 \text{ car } \tau_1, \tau_2 \in \Omega^2_{con}(P,\pi,\omega)} \\
&= i_b^*\mathscr{L}_X(\tau_1 - \tau_2) \\
&= i_b^* \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t^*(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(i_b^*\Phi_t^*)(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(i_b^*\Phi_t^*)(\tau_1 - \tau_2)|_{\pi^{-1}(\varphi(b))} \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(i_b^*\Phi_t^*)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Dans ce qui suit, on aura aussi besoin du lemme suivant

Lemme 3.2.2. *Soient τ une forme de connexion sur un fibré symplectique $(P, \pi, (M, \omega))$, $X \in \mathscr{X}(P, \pi)$ et $\Phi \in Diff(P, \pi)$ alors*

$$i_b^* d i(X)\tau = 0,\ \forall b \in B \Leftrightarrow i_b^*\Phi^* d i(X)\tau = 0,\ \forall b \in B$$

Démonstration. $i_b^* di(X)\tau = 0\,\forall b \in B$ si et seulement si pour toute section $Y, Z : P \to \ker \pi$ on a $(i(Z)i(Y)di(X)\tau) = 0$, et comme Φ est un difféomorphisme par fibres Φ_* se restreint à un automorphisme de fibrés vectoriels sur $\ker \pi$, donc $\Phi_* Y$ est $\Phi_* Z$ sont toujours des sections verticales, d'où le lemme. □

La proposition suivante montre que les champs vectoriels symplectiques par fibres forment l'algèbre de Lie du groupe des symplectomorphismes par fibres :

Proposition 3.2.8. *Soit $(P, \pi, (M, \omega))$ un fibré symplectique et $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ une famille d'applications défini par*

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = X_t \circ \Phi_t, \qquad \Phi_0 = id_M$$

pour $\{X_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathscr{X}(P, \pi)$ alors $\Phi_t \in Diff_\omega(P, \pi)$ pour tout t si et seulement si $\{X_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathscr{X}_\omega(P, \pi)$. De plus, soit $X, Y \in \mathscr{X}_\omega(P, \pi)$, Z alors $[X, Y] \in \mathscr{X}_\omega(P, \pi)$.

Démonstration. Le premier énoncé suit du calcul pour n'importe quel $b \in B$, τ une forme de connexion

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_b^* \Phi_t^* \tau &= i_b^* \Phi_t^* \mathscr{L}_{X_t} \tau \\ &= i_b^* \Phi_t^* (di(X_t)\tau) \end{aligned}$$

où cette dernière égalité suit du fait que τ est une forme de connexion, et par le lemme précédent on voit que $i_b^* \Phi_t^* (di(X_t)\tau) = 0$ si et seulement si X_t est symplectique par fibres d'où suit le premier énoncé.

Montrons ensuite que $\mathscr{X}_\omega(P, \pi)$ est fermé sous le crochet de Lie. Soient $X, Y \in \mathscr{X}_\omega(P, \pi)$ et calculons

$$\begin{aligned} i_b^* di([X, Y])\tau &= i_b^* \mathscr{L}_{[X,Y]} \tau \\ &= i_b^* (\mathscr{L}_X \mathscr{L}_Y \tau - \mathscr{L}_Y \mathscr{L}_X \tau) \end{aligned}$$

et si Φ_t et Ψ_s sont les flots de X et Y respectivement on a

$$i_b^* (\mathscr{L}_X \mathscr{L}_Y \tau) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i_b^* \Phi_t^* \Psi_s^* \tau$$

mais Φ_t et Ψ_s sont des symplectomorphismes par fibres étant les flots des champs vectoriels symplectiques par fibres, et donc $i_b^* \Phi_t^* \Psi_s^* \tau = i_b^* \tau$ pour tout $s, t \in [0, 1]$ et alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} i_b^* \Phi_t^* \Psi_s^* \tau = 0$$

et de la même manière on voit que $i_b^* (\mathscr{L}_Y \mathscr{L}_X \tau) = 0$, d'où il suit que $[X, Y] \in \mathscr{X}_\omega(P, \pi)$ □

Corollaire 3.2.1. *Soient $P \xrightarrow{\pi} B$ un fibré symplectique et τ une forme $\pi-$compatible, alors τ est une forme de connexion si et seulement si pour tout champ vectoriel $X : B \to TB$ à support compact le relèvement $X^{\#} : P \to P$ relatif à Γ_τ est symplectique par fibres.*

Démonstration. τ est une forme de connexion si et seulement si le flot de $X^{\#}$ est un symplectomorphisme par fibres, par la proposition ci-haute ceci est équivalent à demander que $X^{\#}$ soit symplectique par fibres □

Il en existe aussi une notion de champs vectoriels hamiltoniens sur des fibrés symplectiques, et ils joueront un rôle important dans ce qui suit.

Définition 3.2.7. Soient $(P,\pi,(M,\omega))$ un fibré symplectique et τ une forme de connexion. Un champ vectoriel $X : P \to TP$ est dit **verticalement hamiltonien** s'il existe une fonction dite **l'hamiltonien de** X

$$H_X : P \to \mathbb{R}$$

tel que pour tout $b \in B$

$$i_b^* \iota(X)\tau = -i_b^* dH_X$$

On note par $\mathscr{X}_\omega^{ham}(P,\pi)$ l'ensemble des champs verticalement hamiltoniens.

Remarque.
1. Note que le H ci-haut n'est pas uniquement défini, pourtant on peut choisir une normalisation telle qu'il l'en est. Comme H est une fonction sur un fibré il est déterminé par la famille $\{H|_{\pi^{-1}(b)}\}_{b\in B}$ et comme τ est $\pi-$compatible, si k dénote la dimension de la fibre typique, alors on peut normalisé H par la condition

   $$\int_{M_b} i_b^*(H\tau^k) = 0$$

   notons par $\to C_0^\infty(P,\pi)$ l'ensemble de tous les fonctions sur P qui satisfont cette condition de normalisation. On obtient ainsi une application.

   $$\mathscr{I}_\tau : \mathscr{X}_\omega^{ham}(P,\pi) \to C_0^\infty(P,\pi)$$

   où $i_b^* i(X)\tau := -i_b^* d\mathscr{I}^\tau(X)$.

2. Expliquons l'aspect 'vertical' des champs verticalement hamiltoniens. Les champs verticalement hamiltoniens ne sont pas forcément des champs verticaux, en fait soit $X \in \mathscr{X}_\omega^{ham}(P,\pi)$ et exprimons X comme la somme $X = X^v + X^h$ des composantes verticale et horizontale respectivement alors

   $$i_b^* \iota(X)\tau = i_b^* \iota(X^v)\tau = -i_b^* dH_X$$

   donc la propriété d'être verticalement hamiltonien ne dépend que de la partie verticale d'un champ vectoriel et $X^v|_{M_b}$ est exactement le champ hamiltonien sur (M_b,ω_b) engendré par l'hamiltonien normalisé $H|_{M_b}$. Il suit que le noyau de $\mathscr{I}_\tau$ est composé des champs horizontaux et donc $\mathscr{I}_\tau$ descend à une bijection sur

$$\mathscr{X}^{ham,\,vert}_{\omega}(P,\pi) := \mathscr{X}^{ham}_{\omega}(P,\pi) \cap \mathscr{X}^{vert}(P,\pi)$$

Proposition 3.2.9. *Soient $(P,\pi,(M,\omega))$ un fibré symplectique, τ une forme de connexion, X un champ vectoriel verticalement hamiltonien avec $i_b^* i(X)\tau = -i_b^* dH_X$ pour $H_X \in C^\infty(P)$ et $\Phi : P \to P$ un symplectomorphisme par fibres alors*

$$i_b^* i(\Phi^* X)\tau = -i_b^* d(H_X \circ \Phi)$$

de plus si Y est un champ vectoriel symplectique par fibres alors $[X,Y]$ est verticalement hamiltonien avec $H_{[X,Y]} = -d\mathscr{L}_Y H$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned}
i_b^*\iota(\Phi^*X)\tau &= i_b^*\iota((\Phi^*X)^{v,\tau})\tau = \iota(i_b^*(\Phi^*X)^{v,\tau})i_b^*\tau \\
&= \iota(i_b^*(\Phi^*X)^{v,\tau})i_b^*\Phi^*\tau \qquad \text{(car } \Phi \text{ est symplectique par fibres)} \\
&= i_b^*\Phi^*\iota(X^{v,\tau})\tau \\
&= i_b^*\Phi^*\iota(X)\tau|_{\pi^{-1}(\varphi(b))} \\
&= -i_b^*\Phi^* dH_X \\
&= -i_b^* d(H_X \circ \Phi)
\end{aligned}$$

2. Soit Ψ_t le flot engendré par Y alors

$$\begin{aligned}
i_b^*\iota([X,Y])\tau = i_b^*\iota(-\mathscr{L}_Y X)\tau &= i_b^*\iota(-\frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi_t^* X)\tau \\
&= -\frac{d}{dt}|_{t=0} i_b^*\iota(\Phi_t^* X)\tau \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} i_b^*\Phi_t^* dH_X \\
&= i_b^*\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_t^* dH_X \\
&= i_b^* d\mathscr{L}_Y H_X
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Courbure des connexions symplectiques

À toute connexion d'Ehresmann Γ sur un fibré lisse $P \xrightarrow{\pi} B$ on peut associer une forme de courbure qui est une $2-$forme

$$\begin{aligned}
\Omega_\Gamma : \mathscr{X}(B) \times \mathscr{X}(B) &\to \mathscr{X}(P,\pi) \\
(X,Y) &\mapsto [X^\#, Y^\#]^{vert}
\end{aligned}$$

la trivialité de laquelle indique que le groupe de structure du fibré est muni de la topologie discrète (ou de manière équivalente, qu'on peut prendre les applications de transition comme étant localement constants).

Si $\Gamma = \Gamma_\tau$ pour une forme $\pi-$compatible τ, il est immédiat de corollaire 3.2.1 que Γ est une connexion symplectique si et seulement si l'image de Ω_Γ est contenu dans $\mathscr{X}_\omega(P,\pi)$. En suivant notre philosophie générale, il est naturel de se demander si l'on ne peut pas obtenir une relation plus fine entre Ω_Γ et τ. En particulier, pour tout $X,Y \in \mathscr{X}(B)$, $\Omega_\Gamma(X,Y)$ est un champ vectoriel P et τ est une $2-$forme sur P donc c'est assez normal de se demander ce qu'on peut dire de $\iota(\Omega_\Gamma(X,Y))\tau$:

Proposition 3.2.10 (Identité de Courbure)**.** *Soient $P \xrightarrow{\pi} B$ un fibré symplectique, τ une forme $\pi-$compatible et $\Gamma = \Gamma_\tau$ sa connexion associée, alors pour tout $X,Y \in \mathscr{X}(B)$ et tout $b \in B$*

$$i_b^* \iota(\Omega_\Gamma(X,Y))\tau = i_b^*[\iota(X^\#)\iota(Y^\#)d\tau - d\iota(X^\#)\iota(Y^\#)\tau]$$

Remarque. L'identité de courbure détermine $\iota(\Omega_\Gamma(X,Y))\tau$ complètement, car $\Omega_\Gamma(X,Y)$ est verticale par définition, donc $\iota(\Omega_\Gamma(X,Y))\tau$ s'annule sur tout vecteur horizontal.

Démonstration. Par la définition de la dérivée extérieure on a pour un vecteur Z quelconque

$$\begin{aligned} d\tau(X^\#,Y^\#,Z) = {} & X^\#[\tau(Y^\#,Z)] - Y^\#[\tau(X^\#,Z)] + Z[\tau(X^\#,Y^\#)] \\ & - \tau([X^\#,Y^\#],Z) + \tau([X^\#,Z],Y^\#) - \tau([Y^\#,Z],X^\#) \end{aligned}$$

mais si $Z \in \ker\pi$, alors $\tau(Y^\#,Z) = \tau(X^\#,Z) = 0$, car $X^\#, Y^\#$ sont horizontaux. De plus, comme les champs vectoriels verticaux forment un idéal de l'algèbre de Lie $\mathscr{X}(P,\pi)$, lorsque Z est vertical $\tau([X^\#,Z],Y^\#) = \tau([Y^\#,Z],X^\#) = 0$ pour la même raison. On voit donc

$$\begin{aligned} i_b^* d\iota(X^\#)\iota(Y^\#)\tau &= i_b^*[d\iota(X^\#)\iota(Y^\#)\tau - \iota([X^\#,Y^\#])\tau] \\ &= i_b^*[d\iota(X^\#)\iota(Y^\#)\tau - \iota([X^\#,Y^\#]^{vert})\tau] \end{aligned}$$

comme $i_b^*\iota(W)\tau = i_b^*\iota(W^{vert})\tau$ pour n'importe quel champ W, d'où la proposition. □

3.2.4 Formes de connexion et courbure dans des coordonnées locales

Pour mieux clarifier le lien entre les holonomies dans les fibrés symplectiques et les isotopies symplectiques, en particulier les isotopies engendrées par des fonctions hamiltoniennes on donnera dans cette section la description locale des formes de connexion et la forme de courbure associée. Ceci va nous permettre de lier le comportement des holonomies des lacets contractiles et la forme de courbure. Plus précisément, on montrera

Proposition 3.2.11. *Soient τ une forme de connexion sur un fibré symplectique $(P,\pi,(M,\omega))$ et Ω_{Γ_τ} la forme de courbure de la connexion induite par τ alors $\Omega_{\Gamma_\tau}(X,Y) \in \mathscr{X}_\omega^{ham}(P,\pi)$ pour tout $X,Y \in \mathscr{B}$ si et seulement si l'holonomie de tout lacet contractile est hamiltonienne.*

Commençons par décrire l'expression générale d'une forme de connexion τ. Rappel qu'une forme de connexion doit satisfaire deux conditions :

$$i_b^*\tau = \omega_b \qquad i_b^*\iota(X)\tau = 0 \qquad \forall b \in B, \forall X \in \mathscr{X}(P)$$

Fixons ensuite un des coordonnées $x_1, \cdots, x_n$ sur un ouvert contractile $U \subset B$, $U \simeq \mathbb{R}^n$, et écrivons τ_{loc} pour la représentation de τ dans ces coordonnés. On a $\tau_{loc} \in \Omega^2(\mathbb{R}^n \times M)$, et tout $2-$forme σ sur $\mathbb{R}^n \times M$ s'exprime comme

$$\lambda(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

avec $\lambda(x) \in \Omega^2(M)$, $\alpha_i(x) \in \Omega^1(M)$, $f_{ij}(x) \in \Omega^0(M)$ (qui dépend alors du point x dans la base d'une manière lisse). De plus, si l'on dénote par d^M la dérivée externe le long de la fibre, la dérivée externe d'une forme différentielle avec l'expression comme ci-haut s'écrit comme

$$\begin{aligned} d\sigma = d^M\lambda(x) &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx_i}\lambda(x) + d^M\alpha_i(x)\right) \wedge dx_i \\ &+ \sum_{i<j}\left(\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x) + d^M f_{ij}(x)\right) \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &+ \sum_{i<j<k}\left(\frac{d}{dx_i}f_{jk} + \frac{d}{dx_j}f_{ki}(x) + \frac{d}{dx_k}f_{ij}(x)\right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \end{aligned}$$

Comme U est contractile, on peut toujours supposer que le fibré est trivial symplectiquement au-dessus de U, c'est-à-dire qu'on peut toujours choisir un trivialisation tel que $\tau_{loc}|_{M_x} = \lambda(x) = \omega$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$. Comme ω est fermée sur M on voit que $d^M\omega = 0$. Contemplons maintenant la condition de fermeture verticale ; soit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le champ vectoriel associé au coordonné x_i, alors

$$\begin{aligned} \iota\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) d\tau_{loc} = \left(\frac{d}{dx_i}\omega + d^M\alpha_i(x)\right) &+ \sum_{i<j}\left(\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x) + d^M f_{ij}(x)\right) \wedge dx_j \\ &+ \sum_{i<j<k}\left(\frac{d}{dx_i}f_{jk} + \frac{d}{dx_j}f_{ki}(x) + \frac{d}{dx_k}f_{ij}(x)\right) dx_j \wedge dx_k \end{aligned}$$

et c'est clair que ces dernières deux termes s'annulent sur des vecteurs verticaux, donc il suit que $\Phi^*\tau$ est verticalement fermée si et seulement si pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$d^M\alpha_i(x) = 0$$

Calculons en suite la connexion induite par un tel τ_{loc} en termes de ses relèvements horizontaux. Rappel que le relèvement horizontal d'un vecteur X par rapport à la connexion $\Gamma_{\tau_{loc}}$ est déterminé par les deux conditions :

$$\pi_* X^\# = X \qquad \tau_{loc}(X^\#, Y) = 0, \qquad \forall Y \in T^{vert}(\mathbb{R}^n \times M)$$

Localement, on a $T(\mathbb{R}^n \times M) = T\mathbb{R}^n \times TM$ et pour un vecteur $v \in T\mathbb{R}^n \times TM$ on écrira $v = (X,Y) \in T\mathbb{R}^n \times TM$ avec $X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Avec cette notation, on voit

$$\iota(X^\#)\tau_{loc} = \iota(X^\#)\omega + \sum_{i=1}^n -X_i\alpha_i + \sum_{i<j} X_i f_{ij}(x) dx_j$$

mais $\iota(Y)\sum_{i<j} X_i f_{ij}(x) dx_j = 0$ pour tout Y vertical, et si l'on écrit $X^\# = (X,Y)$ on voit que

$$\iota(X^\#)\omega = \omega(Y)$$

Alors le relèvement de X par rapport à τ_{loc} se donne par (X,Y) où Y vérifie

$$\omega(Y) = \sum_{i=1}^n X_i \alpha_{ix}$$

et il suit que l'holonomie le long d'une courbe $\gamma(t)$ en $\mathbb{R}^n$ est donc donné par

$$\frac{d}{dt}\Phi_{\gamma,t} = Y_t \circ \Phi_{\gamma,t}$$

où Y_t vérifie $\omega(Y_t) = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}(t)\alpha_i(\gamma(t))$.

Donc dans un trivialisation, on peut toujours écrire une forme de connexion dans la forme

$$\tau_{loc} = \lambda(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

où $\lambda(x)$ est une forme symplectique sur M pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ et $\frac{d}{dx_i}\lambda(x) + d^M\alpha_i(x) = 0$, et en choisissant un trivialisation symplectique par fibres, on peut même assumer que τ_{loc} est de la forme

$$\tau_{loc} = \omega + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

pour ω la forme symplectique sur la fibre standard, et la condition sur les α_i's deviens $d^M\alpha_i(x) = 0$, alors les α_i's sont fermées sur les fibres.

Démonstration. Démonstration de proposition 3.2.11 Exploitons maintenant notre compréhension du comportement locale des formes de connexion pour démontrer que les holonomies autour des lacets contractiles d'une connexion sont tous hamiltoniennes si et seulement si la courbure de la connexion prend ses valeurs dans les champs verticalement hamiltoniens. Prenons une connexion Γ induit par une forme de connexion τ, qu'on peut l'écrire localement dans une carte $\mathbb{R}^n \times M$ comme

$$\tau_{loc} = \omega + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

et comme deux formes de connexion induisent la même connexion si et seulement si la distribution verticale est dans le noyau de leur différence, on peut même supposer que les f_j sont tous nulles. En scindant l'espace tangent du fibré en utilisant la connexion Γ, écrivons les relèvements horizontaux des champs vectoriels $\frac{\partial}{\partial x_i}$ comme $\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#} = (\frac{\partial}{\partial x_i}, v_i) \in TR^n \times TM$. Notons que pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$

$$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$$

et alors

$$\begin{aligned} \Omega_\Gamma(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) &= [\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#}, \frac{\partial}{\partial x_j}^{\#}] - [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]^{\#} \\ &= [\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#}, \frac{\partial}{\partial x_j}^{\#}] \end{aligned}$$

Posons $v_{ij} := [\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#}, \frac{\partial}{\partial x_j}^{\#}]$, alors par l'identité de courbure on voit

$$\begin{aligned} i_b^* \iota(v_{ij})\tau &= i_b^*\big(\iota(\frac{\partial}{\partial x_j}^{\#})\iota(\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#})d\tau - d\iota(\frac{\partial}{\partial x_j}^{\#})\iota(\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#})\tau\big) \\ &= i_b^*(\iota(\frac{\partial}{\partial x_j}^{\#})\iota(\frac{\partial}{\partial x_i}^{\#})d\tau - d\omega(v_i, v_j)) \end{aligned}$$

et $d\tau$ s'écrit localement dans la forme

$$\begin{aligned} d\tau &= \sum_{i=1}^{n} d^M \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} (\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)) \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} (\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)) \wedge dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

comme les $\alpha_i(x)$ sont fermées le long des fibres, d'où on voit

$$\iota((\frac{\partial}{\partial x_j}, v_j))\iota((\frac{\partial}{\partial x_j}, v_j))d\tau = \frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)$$

et alors

$$\Omega_\Gamma(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = v_{ij}, \qquad \iota(v_{ij}) = \Big(\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)\Big) - d\omega(v_i, v_j)$$

où $\imath(v_i)\omega = \alpha_i$. Il suit donc que la courbure est verticalement hamiltonienne si et seulement si les formes $\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)$ sont toutes exactes. Considérons ensuite un lacet de la forme

$$\gamma(t) = e^{2i\pi t} = x_i(t) + ix_j(t)$$

alors l'holonomie autour du lacet est décrite par l'isotopie ψ_t induite par le champ vectoriel X_t tel que $\imath(X_t)\omega = \alpha_i(\gamma(t))\dot{x}_i(t) + \alpha_j(\gamma(t))\dot{x}_j(t)$, mais

$$\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x) = dH$$

si et seulement si Ω_Γ est verticalement hamiltonienne, et comme le lacet γ est contractile, il est alors le bord d'un disque D, ce qui implique

$$\int_0^1 \imath(X_t)\omega = \int_D dH = d\int_D H$$

d'où le flux s'annule. Inversement, si le flux s'annule autour de tout lacet contractile alors il existe une telle H, d'où les $\frac{d}{dx_j}\alpha_i(x) - \frac{d}{dx_i}\alpha_j(x)$ sont exactes. Comme le trivialisation était arbitraire, ceci prouve la proposition. □

3.3 Connexions hamiltoniennes et localement hamiltoniennes sur les fibrés symplectiques

Définition 3.3.1. Une connexion définie par une structure de transports parallèles $\{\Phi_\gamma\}$ sur un fibré symplectique $(M,\omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ est dite **une connexion hamiltonienne** si

1. $\{\Phi_\gamma\}$ est une connexion symplectique
2. Pour tout $b \in B$ et chaque lacet basé $\alpha : (S^1,*) \to (B,b)$ on a $\Phi_\alpha \in Ham(M_b,\omega_b)$.

Une connexion symplectique est appelée **localement hamiltonienne** si la deuxième condition ci-haut s'obtient simplement pour des lacets *contractiles* basés en $b \in B$ pour tout $b \in B$. Notons par $\mathscr{H}(P,\pi)$ l'ensemble des connexions hamiltoniennes d'un fibré symplectique (P,π) et par $\mathscr{H}_{loc}(P,\pi)$ l'ensemble des connexions localement hamiltoniennes sur (P,π). Nous venons justement de voir que cette condition est précisément la condition que la courbure de Γ prend ses valeurs dans les champs verticalement hamiltoniens.

Rappelons qu'on a vu auparavant que les connexions symplectiques peuvent être caractérisées comme ces distributions horizontales induites par les $2-$formes $\pi-$compatibles sur p qui sont verticalement fermées. Comme une de nos questions motivantes est celle de découvrir quand est-ce que (P,π) admet une forme *symplectique* et $\pi-$compatible (ce qui réduit dans plusieurs cas d'intérêt au problème de trouver quand est-ce que (P,π) admet une forme fermée et $\pi-$compatible), il est naturel de se demander qu'est ce qu'il se passe si la forme $\pi-$compatible qui engendre la connexion est fermée. Le théorème suivant dû originalement à Guillemin-Lerman-Sternberg [2] constate que les telles connexions sont précisément celles qui sont localement hamiltoniennes et, de plus, que des telles connexions sont en bijection avec des certaines formes de connexion fermées *normalisées* :

Théorème 3.3.1. *Soit* $(M,\omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ *un fibré symplectique avec* $dimM = 2k$ *et soit* Γ *une connexion symplectique sur* P *alors les énoncés suivants sont équivalents*

1. Γ *est localement hamiltonienne*

2. *Il existe une* $2-$*forme* τ *fermée et* $\pi-$*compatible telle que* $\Gamma = \Gamma_\tau$

3. *Il existe une* $2-$*forme unique* τ_Γ *fermée et* $\pi-$*compatible telle que* $\Gamma = \Gamma_{\tau_\Gamma}$ *et telle que*

$$\pi_! \tau_\Gamma^{k+1} = 0 \in \Omega^2(B)$$

et telle que pour n'importe quelle autre forme de connexion τ *fermée avec* $\Gamma_\tau = \Gamma$ *il existe une* $2-$*forme* $\beta \in \Omega^2(B)$ *unique telle que*

$$\tau = \tau_\gamma + \pi^* \beta$$

Démonstration. L'implication $(2) \Rightarrow (1)$ est la plus facile alors commençons par celle-là. On montrera qu'étant donné un fibré symplectique $(M,\omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ alors pour toute forme de connexion fermée τ l'holonomie de Γ_τ autour de tout lacet contractile est hamiltonienne.

Soit $\gamma : (S^1,*) \to (B,b)$ un lacet (basé, lisse) contractile dans B alors toute homotopie (lisse) à l'application constante est équivalent à une application (lisse)

$$u : (D^2,S^1) \to (B,\gamma(S^1))$$

où l'on identifie $\partial D^2 \simeq S^1$ et $u|_{S^1} = \gamma$.

Considérons alors le fibré induit $(u^*(P),u^\pi,D^2)$, comme D^2 est contractile $(u^*(P),u^\pi,D^2)$ est forcément trivial comme un $Symp(M,\omega)$-fibré et il existe alors un isomorphisme symplectique par fibres

$$\Psi : (u^*(P),u^*_{(P,\pi)}\tau) \to (M \times D^2,\Omega)$$

où $\Omega := (u_{(P,\pi)} \circ \Psi^{-1})^* \tau$ est toujours une forme de connexion fermée. Paramétrons

$$D^2 = \{(r,\theta) |\, r \in [0,1],\, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Notre but est de montrer que l'holonomie $\Psi_{\alpha(1)} : (M_{(1,0)},\omega) \to (M_{(1,0)},\omega)$ du chemin $\alpha(t) = (1,2t\pi)$ est hamiltonienne en montrant que le flux de $\Psi_{\alpha(t)}$ s'annule. Par notre caractérisation géométrique du flux, ceci est équivalent à montrer que pour tout lacet lisse $\lambda : S^1 \to M$ on a

$$\int_{\Phi_\lambda([0,1]\times S^1)} \omega = 0$$

où $\Phi_\lambda : [0,1] \times S^1 \to M$ est défini par

$$\Phi_\lambda(t,\theta) := \Psi_{\alpha(t)}(\lambda(\theta))$$

Comme Ω est une forme de connexion elle se restreint à ω sur chaque fibre alors ceci est équivalent à demander que

$$\int_{(\Phi_\lambda([0,1]\times S^1),1,0)} \Omega = 0$$

mais l'application $(t,\theta) \mapsto (\Phi_\lambda(t,\theta),1,0)$ est homotope avec bord fixe à l'application $(t,\theta) \mapsto (\Phi_\lambda(t,\theta),1,2t\pi)$ et donc comme Ω est fermée on voit

$$\int_{(\Phi_\lambda([0,1]\times S^1),1,0)} \Omega = \int_{\{(\Phi_\lambda(t,\theta),1,2t\pi):\,(t,\theta)\in[0,1]\times S^1\}} \Omega$$

mais pour toute $\theta \in S^1$ fixe, $(t,\theta) \mapsto (\Phi_\lambda(t,\theta),1,2t\pi)$ est exactement le transport parallèle de $\lambda(\theta) \in M_{(1,0)}$ par $\Psi_\alpha(t)$ le long du bord de D^2 et par la définition de la distribution horizontale induite par une forme de connexion, le transport parallèle se produit le long des directions nulles de Ω d'où

$$\int_{\{(\Phi_\lambda(t,\theta),1,2t\pi):\,(t,\theta)\in[0,1]\times S^1\}} \Omega = 0$$

□

La forme τ_Γ décrite dans le théorème précédent est un objet important dans la théorie des fibrés symplectiques et s'appelle **la forme de couplage**. On la construira tantôt.

Un corollaire simple du théorème précédent est que le tiré en arrière de toute connexion localement hamiltonienne par un morphisme de fibrés symplectiques $\Phi : (P,\pi) \to (P',\pi')$ est toujours localement hamiltonienne

Corollaire 3.3.1. *Soient $(M',\omega') \hookrightarrow P' \to B'$ et $(M,\omega) \hookrightarrow P \to B$ des fibrés symplectiques, Γ une connexion localement hamiltonienne sur (P,π) et soit $\Phi : (P',\pi') \to (P,\pi)$ un morphisme de fibrés symplectiques alors $\Phi^*\Gamma$ est une connexion localement hamiltonienne sur (P',π')*

Démonstration. Soit τ_Γ la forme de couplage de Γ alors $\Phi^*\Gamma = \Gamma_{\Phi^*\tau_\Gamma}$ et $\Phi^*\tau_\Gamma$ est fermée comme la forme de couplage est fermée d'où $\Phi^*\Gamma$ est localement hamiltonienne □

En fait, sous l'hypothèse que les fibres des deux fibrés sont difféomorphes (alors Φ est un isomorphisme symplectique sur chaque fibre) on peut montrer quelque chose de plus fort : les formes de couplage se retirent à des formes de couplage

Proposition 3.3.1. *Soient $(M',\omega') \hookrightarrow P' \to B'$ et $(M,\omega) \hookrightarrow P \to B$ des fibrés symplectiques $\dim M' = \dim M = k$, Γ une connexion localement hamiltonienne sur (P,π) avec forme de couplage τ_Γ et soit*

$$\Phi : (P',\pi') \to (P,\pi)$$

un morphisme de fibrés qui est un isomorphisme symplectique sur les fibres alors la forme de couplage de $\Phi^*\Gamma$ est $\Phi^*\tau_\Gamma$.

Démonstration. Il faut seulement vérifier que $\Phi^*\tau_\Gamma$ satisfait la condition de normalisation du théorème 3.3.1, alors calculons sur chaque fibre de (P',π').

$$\begin{aligned}\int_{M'}(\Phi^*\tau_\Gamma)^{k+1} &= \int_{M'}\Phi^*(\tau_\Gamma^{k+1})\\ &= \int_M \tau_\Gamma^{k+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

La valeur de la proposition précédente est enregistrée dans le corollaire immédiat suivante : la forme de couplage se comporte bien par rapport aux fibrés induits. Plus précisément

Corollaire 3.3.2. *Soient $(M,\omega)\hookrightarrow P\xrightarrow{\pi} B$ un fibré symplectique, Γ une connexion localement hamiltonienne avec forme de couplage τ_Γ et soit $\varphi : B'\to B$ une application lisse alors la forme de couplage de $\varphi^*_{(P,\pi)}\Gamma$ sur le fibré induit $(\varphi^*P,\varphi^*\pi)$ est $\varphi^*_{(P,\pi)}\tau_\Gamma$.*

3.3.1 Forme de couplage

Le but de cette section est de décrire une construction importante associée à une connexion localement hamiltonienne due originalement à Guillemin, Lerman et Sternberg en [2]. La construction associe à toute connexion localement hamiltonienne une forme de connexion *fermée* qui engendre la connexion et qui est unique modulo une condition de normalisation.

Pour nous préparer, fixons une connexion symplectique Γ et rappelons qu'il existe une application

$$\mathscr{I}_\tau : \mathscr{X}^{ham}_\omega(P,\pi)\to C^\infty_0(P,\pi)$$

qui envoie chaque champ verticalement hamiltonien à la fonction sur P qui se restreint sur chaque fibre à l'hamiltonien normalisé qui engendre la partie verticale de X sur la fibre. Alors lorsque $\Omega_\Gamma(x,y)\in\mathscr{X}^{ham,vert}_\omega(P,\pi)$ pour $x,y\in\mathscr{X}(B)$ on peut voir la courbure comme une $2-$forme sur B prenant ses valeurs dans les fonctions normalisées sur le fibré :

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^\Gamma : \mathscr{X}(B)\times\mathscr{X}(B) &\to C^\infty_0(P)\\ (x,y) &\mapsto H^\Gamma_{x,y} := \mathscr{I}_\tau\circ\Omega_\Gamma(x,y)\end{aligned}$$

De plus, π_* induis un isomorphisme

$$\begin{aligned}\pi^* : \mathscr{X}^{hor,\Gamma}(P,\pi) &\to \mathscr{X}(B)\\ X^\# &\mapsto X\end{aligned}$$

où $X^{\#}$ est le relèvement horizontal de X par rapport à Γ, donc dans la même situation décrit ci-haut on obtient une deux forme $\pi^*\mathscr{H}^{\Gamma}$ horizontale sur P.

Notre objectif est de pouvoir, étant donné la connexion Γ, de construire une forme de connexion τ_{Γ} qui est *fermée* et tel que $\Gamma = \Gamma_{\tau_{\Gamma}}$, sous l'hypothèse que Γ est localement hamiltonienne. Comme τ est une forme de connexion, on a pour tout $X, Y \in \mathscr{X}(P)$, $b \in B$

$$\begin{aligned}\tau(X,Y)|_{M_b} &= \tau(X^v + X^h, Y^v + Y^h)|_{M_b} \\ &= \tau(X^v, Y^v)|_{M_b} + \tau(X^h, Y^v)|_{M_b} + \tau(X^v, Y^h)|_{M_b} + \tau(X^h, X^h)|_{M_b} \\ &= \omega_b(X^v, Y^v) + \tau(X^h, X^h)|_{M_b}\end{aligned}$$

donc il suffit de définir τ sur des paires de champs horizontaux.

Notons que si Γ est une connexion localement hamiltonienne, alors par Proposition 3.2.11 la courbure Ω_{Γ} prend ses valeurs dans l'espace des champs verticaux et verticalement hamiltoniens pour tous les champs vectoriels sur la base et donc la forme horizontale $\pi^*\mathscr{H}^{\Gamma}$ définit ci-haut est bien défini, on va donc poser

$$\tau_{\Gamma} := \tau_0 + \pi^*\mathscr{H}^{\Gamma}$$

où $\tau_0(X^v + X^h, Y^v + Y^h) := \omega_b(X^v, Y^v)$ pour $X, Y \in T_pP$ avec $\pi(p) = b$. C'est à dire que pour n'importe quels champs horizontaux $x^{\#}, y^{\#} \in\in T_pP$ on a

$$\tau_{\Gamma}(x^{\#}, y^{\#}) = \mathscr{H}^{\Gamma}_{x,y}(p)$$

On appelle τ_{Γ} la **forme de couplage de** Γ. C'est évident par la définition de τ_{Γ} que $\Gamma_{\tau_{\Gamma}} = \Gamma$. La proposition suivante énumère les propriétés fondamentales de τ_{Γ}.

Proposition 3.3.2. *Soit Γ une connexion localement hamiltonienne sur un fibré symplectique $(P, \pi, (M, \omega))$ de dimension n avec fibre de dimension $2k$ et soit τ_{Γ} sa forme de couplage alors*

1. *τ_{Γ} est fermée*
2. *τ_{Γ} est l'unique forme de connexion fermée quelconque qui induit la connexion Γ telle que*

$$\pi_!(\tau_{\Gamma}^{k+1}) = 0 \in \Omega^2(B)$$

3. *Si $\tau \in \Omega^2(P)$ est une forme de connexion fermée qui induit la connexion Γ alors*

$$\tau = \tau_{\Gamma} + \pi^*\beta$$

pour $\beta \in \Omega^2(B)$ fermée.

Démonstration.

1. Pour montrer que $d\tau_\Gamma = 0$ il faut montrer que $d\tau_\Gamma$ s'annule sur tout triplet de champs vectoriels $(X_1, X_2, X_3) \in \mathscr{X}(P)^3$. Il y a 4 cas possibles selon le numéro des X_i's qui sont verticaux (et l'on peut supposer sans perte de généralité que les autres sont horizontaux). Si tous les trois champs sont verticaux $d\tau_\Gamma(X_1, X_2, X_3) = 0$, car τ_Γ est verticalement fermé et il en va de même pour le cas où deux des trois champs sont verticaux.

   Dans le cas que X_1, X_2 sont horizontaux et X_3 est vertical, il existe $x_1, x_2 \in \mathscr{X}(B)$ tel qu'on peut écrire $X_i = x_i^\#$, $i = 1, 2$, et par l'identité de courbure on a

$$i_b^* \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#) d\tau_\Gamma = i_b^*(\iota([x_1^\#, x_2^\#]^v)\tau_\Gamma + d\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma)$$

   mais $\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma = -\iota([x_1^\#, x_2^\#]^v)\tau_\Gamma$ par définition, donc $\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)d\tau_\Gamma$ est nulle sur tout champ vertical.

   Le cas le plus difficile est lorsque $X_i = x_i^\#$ pour $x_i \in \mathscr{X}(B)$, $i = 1, 2, 3$. Pour traiter ce cas, utilisons la définition de la dérivée extérieure :

$$\begin{aligned} d\tau_\Gamma(x_1^\#, x_2^\#, x_3^\#) = & \mathscr{L}_{x_1^\#}\tau_\Gamma(x_2^\#, x_3^\#) - \tau_\Gamma([x_2^\#, x_3^\#], x_1^\#) \\ & - \mathscr{L}_{x_2^\#}\tau_\Gamma(x_1^\#, x_3^\#) + \tau_\Gamma([x_1^\#, x_3^\#], x_2^\#) \\ & + \mathscr{L}_{x_3^\#}\tau_\Gamma(x_1^\#, x_2^\#) - \tau_\Gamma([x_1^\#, x_2^\#], x_3^\#) \end{aligned}$$

   Chacune de ces lignes est une fonction, donc il est raisonnable de chercher les champs vectoriels pour quels ils sont les fonctions hamiltoniennes sur chaque fibre. C'est-à-dire qu'on cherche à calculer

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{L}_{x_1^\#}\tau_\Gamma(x_2^\#, x_3^\#) - \tau_\Gamma([x_2^\#, x_3^\#], x_1^\#)\big) &= \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{L}_{x_1^\#}\tau_\Gamma(x_2^\#, x_3^\#)\big) \\ &\quad - \mathscr{I}_\tau^{-1}\Bigg(\tau_\Gamma([x_2, x_3]^\#, x_1^\#) + \tau_\Gamma([x_2^\#, x_3^\#]^v, x_1^\#)\Bigg) \\ &= \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{L}_{x_1^\#}\mathscr{I}_\tau([x_2^\#, x_3^\#]^v)\big) - \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\tau_\Gamma([x_2, x_3]^\#, x_1^\#)\big) \\ &= \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{I}_\tau([x_1^\#, [x_2^\#, x_3^\#]^v])\big) - \mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{I}_\tau([[x_2, x_3]^\#, x_1^\#]^v)\big) \\ &= -[[x_2^\#, x_3^\#]^v, x_1^\#] - [[x_2, x_3]^\#, x_1^\#]^v \\ &= -[[x_2^\#, x_3^\#]^v, x_1^\#]^v - [[x_2, x_3]^\#, x_1^\#]^v \\ &= -[[x_2^\#, x_3^\#], x_1^\#]^v \end{aligned}$$

   Où l'on utilise plusieurs fois l'identité

$$[X^\#, Y^\#]^v = [X^\#, Y^\#] - [X, Y]^\#$$

   La deuxième égalité suit du fait que $\tau_\Gamma([x_2^\#, x_3^\#]^v, x_1^\#) = 0$, car $[x_2^\#, x_3^\#]^v$ est vertical et $x_1^\#$ est horizontal, la troisième du fait que si Y est verticalement hamiltonien engendré verticalement par la fonction H et X est un champ symplectique quelconque alors

$$\iota([X,Y]))\tau = i_b^*\mathscr{L}_X H$$

(voir proposition 3.2.9) et l'égalité pénultième suit du fait que $[[x_2^\#,x_3^\#]^v,x_1^\#]$ est verticale, car les champs verticaux forment un idéal de l'algèbre de Lie des champs vectoriels sur P.

De la même manière, on calcule

$$\mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{L}_{x_2^\#}\tau_\Gamma(x_1^\#,x_3^\#)-\tau_\Gamma([x_1^\#,x_3^\#],x_2^\#)\big) = -[[x_1^\#,x_3^\#],x_2^\#]^v$$
$$\mathscr{I}_\tau^{-1}\big(\mathscr{L}_{x_3^\#}\tau_\Gamma(x_1^\#,x_2^\#)-\tau_\Gamma([x_1^\#,x_2^\#],x_3^\#)\big) = -[[x_1^\#,x_2^\#],x_3^\#]^v$$

on voit alors que

$$\begin{aligned} d\tau_\Gamma(x_1^\#,x_2^\#,x_3^\#) &= \mathscr{I}_\tau(-[[x_2^\#,x_3^\#],x_1^\#]^v)+\mathscr{I}_\tau([[x_1^\#,x_3^\#],x_2^\#]^v)+\mathscr{I}_\tau(-[[x_1^\#,x_2^\#],x_3^\#]^v) \\ &= \mathscr{I}_\tau\left([x_1^\#],[x_2^\#,x_3^\#]^v+[x_2^\#,[x_3^\#,x_1^\#]]^v+[x_3^\#,[x_1^\#,x_2^\#]]^v\right) \\ &= \mathscr{I}_\tau\left(([x_1^\#],[x_2^\#,x_3^\#]+[x_2^\#,[x_3^\#,x_1^\#]]+[x_3^\#,[x_1^\#,x_2^\#]])^v\right) \\ &= \mathscr{I}_\tau(0)=0 \end{aligned}$$

par l'identité de Jacobi et donc τ_Γ est fermée.

2. Montrons en premier que

$$\pi_!(\tau_\Gamma^{k+1}) = 0 \in \Omega^2(B)$$

c'est-à-dire que pour n'importe quel $x_1,x_2 \in \mathscr{X}(B)$ et $b \in B$ on a

$$\int_{M_b} i_b^*\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma^{k+1} = 0$$

pour vérifier cette identité, montrons en premier les deux égalités suivantes pour n'importe quels vecteurs X,Y et n'importe quelle $2-$forme τ

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \iota(Y)\tau\wedge\iota(X)\tau^k-\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau^k = -2k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1} \\ &(b) \qquad \iota(Y)\iota(X)\tau^{k+1} = (k+1)(\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k-k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}) \end{aligned}$$

Les deux se prouvent par récurrence. Commençons par (a) : lorsque $k=0$ l'énoncé est trivialement vrai. Supposons donc que l'identité est vérifiée pour $0\le n\le k-1$ et calculons

$$\begin{aligned}
\iota(Y)\tau\wedge\iota(X)\tau^k-\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau^k &= -\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}-\iota(X)\tau\wedge\tau\wedge\iota(Y)\tau^{k-1}\\
&+\iota(Y)\tau\wedge iX\tau\wedge\tau^{k-1}+\iota(Y)\tau\wedge\tau\wedge\iota(X)\tau^{k-1}\\
&=-2\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}-\tau\wedge\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau^{k-1}\\
&+\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\iota(X)\tau^{k-1}\\
&=-2\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}+\tau\wedge(\iota(Y)\tau\wedge\iota(X)\tau^{k-1}\\
&-\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau^{k-1})\\
&=-2\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}\\
&-2(k-1)\tau\wedge\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-2}\\
&=-2k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}
\end{aligned}$$

Pour démontrer (b), notons encore une fois que le cas où $k=0$ est trivial. Suppose encore que l'identité est vérifiée pour $0\leq n\leq k-1$ et l'on calcule

$$\begin{aligned}
\iota(Y)\iota(X)(\tau\wedge\tau^k) &= \iota(Y)(\iota(X)\tau\wedge\tau^k+\tau\wedge\iota(X)\tau^k)\\
&=\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k-\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau^k+\iota(Y)\tau\wedge\iota(X)\tau^k+\tau\wedge\iota(Y)\iota(X)\tau^k\\
&=\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k-2k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}\\
&+k\tau\wedge\big(\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^{k-1}-(k-1)\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-2}\big)\\
&=\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k-2k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}+k\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k\\
&-k(k-1)\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}\\
&=(k+1)\iota(Y)\iota(X)\tau\wedge\tau^k-(k+1)k\iota(X)\tau\wedge\iota(Y)\tau\wedge\tau^{k-1}
\end{aligned}$$

ce qui prouve (b). Maintenant qu'on à (b), on calcule

$$\begin{aligned}
i_b^*\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma^{k+1} &= (k+1)i_b^*\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau\wedge\tau^k-k\iota(x_1^\#)\tau\wedge\iota(x_2^\#)\tau\wedge\tau^{k-1})\\
&=(k+1)i_b^*\mathscr{H}^\Gamma_{x_1,x_2}\wedge\tau^k-(k+1)ki_b^*\iota(x_1^\#)\tau\wedge i_b^*\iota(x_2^\#)\tau\wedge i_b^*\tau^{k-1})\\
&=(k+1)i_b^*\mathscr{H}^\Gamma_{x_1,x_2}\tau^k
\end{aligned}$$

comme $\iota(x_1^\#)\tau$ s'annule sur des vecteurs horizontaux. Il suit donc que

$$\int_{M_b} i_b^*\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma^{k+1}=(k+1)\int_{M_b} i_b^*\mathscr{H}^\Gamma_{x_1,x_2}\tau^k=0$$

car $\mathscr{H}^\Gamma$ est normalisé sur chaque fibre.

Pour prouver le reste de l'énoncé, supposons que τ' est une $2-$forme de connexion fermée quelconque qui induit Γ. Comme τ_Γ et τ' induisent tous les deux la connexion Γ, proposition 3.2.3 implique que la distribution verticale est contenue dans le noyau de $\tau'-\tau_\Gamma$ alors $\tau'-\tau_\Gamma$ est une $2-$forme horizontale et donc il existe une $2-$fome

$\beta \in \Omega^2 B$ telle que

$$\pi^*\beta = \tau' - \tau_\Gamma$$

comme τ' et τ_Γ sont tous les deux fermées, $d\pi^*\beta = \pi^* d\beta = 0$ et comme π_* est un isomorphisme sur les champs horizontaux, π^* l'en est sur les formes différentielles, d'où β est fermée.

Suppose finalement que τ' est comme ci-haut, mais aussi qu'il satisfait la condition de normalisation

$$\int_{M_b} i_b^* \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)(\tau')^{k+1} = 0$$

pour chaque $b \in B$ alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{M_b} i_b^* \Big(\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)(\tau')^{k+1} - \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma^{k+1} \Big) \\
&= (k+1)\int_{M_b} i_b^* \Big((\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau' \wedge (\tau')^k - (\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma \wedge \tau_\Gamma^k \Big) \\
+(k+1)k &\int_{M_b} i_b^* \Big(\iota(x_1^\#)\tau' \wedge \iota(x_2^\#)\tau' \wedge (\tau')^{k-1} - \iota(x_1^\#)\tau_\Gamma \wedge \iota(x_2^\#)\tau_\Gamma \wedge \tau_\Gamma^{k-1} \Big) \\
&= (k+1)\int_{M_b} i_b^* \big(\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau' - \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\tau_\Gamma \big) \wedge \omega_b^k \\
&= (k+1)\int_{M_b} \big(i_b^* \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\pi^*\beta \big) \wedge \omega_b^k
\end{aligned}$$

Comme β est horizontal $\iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\pi^*\beta$ est constante sur chaque fibre, donc

$$\begin{aligned}
\int_{M_b} \big(i_b^* \iota(x_2^\#)\iota(x_1^\#)\pi^*\beta \big) \wedge \omega_b^k &= 0 \\
\Leftrightarrow \beta &= 0
\end{aligned}$$

d'où l'unicité de τ_Γ sujet à la condition de normalisation.

□

3.3.2 Forme de couplage dans des coordonnées locales

Rappelle qu'une forme de connexion sur le fibré trivial $\mathbb{R}^n \times (M,\omega)$ est de la forme

$$\tau = \omega + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} f_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j \tag{3.1}$$

où les x_i sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$, $\alpha_i(x) \in \Omega^1(M)$, $f_{ij}(x) \in \Omega^0(M)$ et $d^M \alpha_i(x) = 0$ pour chaque $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Supprimons dans la suite la dépendance des formes sur x, et rappelons que la forme de courbure de τ s'écrit

$$\Omega_\tau = v_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad \iota(v_{ij})\omega = \frac{d}{dx_j}\alpha_i - \frac{d}{dx_i}\alpha_j + d\omega(v_i, v_j)$$

où $\frac{\partial}{\partial x_i} \oplus v_i \in T_x\mathbb{R}^n \oplus T_z M$ est le relèvement horizontal de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\iota(v_i)\omega = \alpha_i$ et que τ est localement hamiltonienne (alors fermée) si et seulement si les $1-$formes

$$\frac{d}{dx_j}\alpha_i - \frac{d}{dx_i}\alpha_j$$

sont exactes pour tout $i, j \in \{1, \cdots n\}$, d'où en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ il existe une fonction $H_{i,j}(x) : M_x \to M_x$ de moyenne 0 avec

$$dH_{i,j} = \frac{d}{dx_j}\alpha_i - \frac{d}{dx_i}\alpha_j$$

d'où on peut écrire

$$\iota(v_i j)\omega = d\big(H_{i,j} + \omega(v_i, v_j)\big)$$

et rappel que dans la construction de la forme de couplage on a posé

$$\tau_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \oplus v_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \oplus v_j\right) := H_{i,j} + \omega(v_i, v_j)$$

mais comme

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) \wedge dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \oplus v_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \oplus v_j\right) &= \iota(v_i)\omega \wedge dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \oplus v_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \oplus v_j\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

on voit que dans la forme de l'équation 3.1 τ_Γ s'écrit comme

$$\tau_\Gamma = \omega + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge dx_i + \sum_{i<j} H_{i,j} dx_i \wedge dx_j$$

En plus, comme τ_Γ est localement hamiltonienne son holonomie autour de tout lacet en $\mathbb{R}^n$ est hamiltonienne alors pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ $i \neq j$ soient

$$\gamma_R^1(t) := Rt + R(1-t)\vec{x}_i$$
$$\gamma_R^2(t) := Rt + R(1-t)\vec{x}_j$$

et on peut considérer l'holonomie autour du lacet lisse par morceaux

$$\gamma_x(t) := \vec{x} + \begin{cases} \gamma_R^1(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ R\vec{x}_i + \gamma_R^2(4t-1)) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ R\vec{x}_i + R\vec{x}_j - \gamma_R^1(-4t+1) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ R\vec{x}_j - \gamma_R^2(-4t+1) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

qui est donné pour $z_0 \in M_x$ par la solution avec $z(0) = z_0$, $z(t) \in M_{\gamma_x(t)}$ de l'équation différentielle

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} 4v_i \circ z(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 4v_j \circ z(t) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -4v_i \circ z(t) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ -4v_j \circ z(t) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et comme l'holonomie autour du lacet est hamiltonienne, il suit de nos travaux sur le morphisme de flux qu'il existe une isotopie symplectique

$$\begin{aligned} \Phi : [0,1] &\to Symp(M,\omega) \times [0,1] \\ s &\mapsto \varphi_t^s \end{aligned}$$

avec $\varphi_t^0(z) = z(t)$ pour $z \in M_x$ et $\varphi_t^1 \in Ham(M,\omega)$ pour $t \in [0,1]$ d'où, comme $\mathbb{R}^n$ est contractile, il existe un trivialisation symplectique par fibres $T : \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}^n \times M$ tel que l'holonomie de $T^*\tau_\Gamma$ (qui est toujours une forme de couplage) autour de γ_x est une isotopie hamiltonienne, d'où les champs v_i, v_j sont hamiltoniens et donc les formes $\alpha_i(\gamma_x(t)), \alpha_j(\gamma_x(t))$ sont exactes, et ceci pour tout $i, j \in \{1, \cdots n\}$ et tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Il suit donc que τ_Γ s'écrit dans la forme

$$\tau_\Gamma = \omega + \sum_{i=1}^{n} d^M H_i \wedge dx_i + \sum_{i<j} H_{i,j} dx_i \wedge dx_j$$

pour des hamiltoniens normalisés H_i sur M, et comme la fermeture de τ_Γ force

$$dH_{i,j} = \frac{d}{dx_i} d^M H_j - \frac{d}{dx_j} d^M H_i = d\left(\frac{d}{dx_i} H_j - \frac{d}{dx_j} H_i\right)$$

donc $H_{i,j} = \frac{d}{dx_i} H_j - \frac{d}{dx_j} H_i + F(\vec{x})$ mais $F(\vec{x}) = 0$, car il faut que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M_x} \tau_\Gamma(x_i \oplus v_i, x_j \oplus v_j) \omega^k \\ &= \int_{M_x} \frac{d}{dx_i} H_j - \frac{d}{dx_j} H_i + F(\vec{x}) \omega^k \\ &= \int_{M_x} F(\vec{x}) \omega^k \end{aligned}$$

pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $i, j = 1, \cdots n$. On déduit alors que lorsqu'un fibré symplectique au-dessus d'une base de dimension n admet une forme de connexion fermée, alors il existe toujours une forme de couplage induisant la même connexion qui s'exprime localement comme

$$\tau_\Gamma = \omega + \sum_{i=1}^{n} d^M H_i(x) \wedge dx_i + \sum_{i<j} \frac{d}{dx_i} H_j(x) - \frac{d}{dx_j} H_i(x) dx_i \wedge dx_j$$

pour n hamiltoniens normalisés sur les fibres

$$\begin{aligned} H_i : \mathbb{R}^n &\to C_0^\infty(M) \\ x &\mapsto H_i(x) \end{aligned}$$

$i = 1, \cdots, n$. C'est toutefois commun d'écrire cette expression dans la forme

$$\tau_\Gamma = \omega + \sum_{i=1}^{n} d^M H_i(x) \wedge dx_i - \sum_{i<j} \frac{d}{dx_j} H_i(x) - \frac{d}{dx_i} H_j(x) dx_i \wedge dx_j$$

pour souligner le fait que c'est la positivité de la forme $\sum_{i<j} \frac{d}{dx_j} H_i(x) - \frac{d}{dx_i} H_j(x) dx_i \wedge dx_j$ qui est l'obstruction à la non-dégénérescence de τ_Γ et alors c'est cette quantité qui contrôle la valeur de K par laquelle il faut multiplier une forme non dégénérée sur la base pour que $\tau_\Gamma + K\pi^*\beta$ soit symplectique. On abordera plus sur cette issue dans le prochain chapitre.

3.4 Réduction du groupe de structure

Une connexion $\{\Phi_\gamma\}$ symplectique est dite **localement hamiltonienne** si $\Phi_\gamma \in Ham(M, \omega)$ pour tout lacet contractile en B, elle sera dite **hamiltonienne** lorsque $\Phi_\gamma \in Ham(M, \omega)$ pour *tous* les lacets γ en B.

Proposition 3.4.1. *Soient $(P, \pi, (M, \omega), B)$ un fibré symplectique et $\{\Phi_\gamma\}$ une connexion hamiltonienne alors le groupe de structure de (P, π) se réduit à $Ham(M, \omega)$.*

Démonstration. On construira des trivialisations locaux tels que les applications de transitions se retrouvent dans $Ham(M, \omega)$. Prenons un recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de B par des ensembles ouverts contractiles tels que les intersections sont contractiles et dans chaque U_α fixons un point b_α. Sans perte de généralité, suppose que $0 \in \Lambda$ et, comme B est connexe par arcs, pour chaque $\alpha \in \Lambda$ fixe une courbe γ_{b_0, b_α} avec $\gamma_{b_0, b_\alpha}(0) = b_0$, $\gamma_{b_0, b_\alpha}(1) = b_\alpha$ et $\gamma_{b_0, b_0}(t) = b_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Fixe une identification symplectique avec la fibre modèle

$$(M_{b_0}, \omega_{b_0}) \simeq (M, \omega)$$

et pour chaque $\alpha \in \Lambda$ on identifie M_{b_α} avec (M_ω) par

$$\Phi^{-1}_{\gamma_{b_0, b_\alpha}} : M_{b_\alpha} \xrightarrow{\simeq} M$$

Ensuit, pour chaque U_α, identifions U_α par un difféomorphisme φ_α avec une boule standard en $\mathbb{R}^n$ avec b_α envoyé a l'origine et pour chaque $x \in U_\alpha$ prenons définissons la courbe

$$\gamma_{b_\alpha,x}(t) := \varphi^{-1}(t\varphi(x))$$

Pour chaque $\alpha \in \Lambda$, on défini alors des trivialisations symplectiques locaux par

$$\begin{aligned} T_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\to U_\alpha \times M \\ p &\mapsto \left(\pi(p), \Phi_{\gamma_{b_\alpha,b_0}} \circ \Phi^{-1}_{\gamma_{b_\alpha,\pi(p)}}(p)\right) \end{aligned}$$

et pour $\alpha, \beta \in \Lambda$ tels que $\exists x \in U_\alpha \cap U_\beta$ les applications de transitions sont alors données en x par

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta}(x) &:= (\Phi^{-1}_{\gamma_{b_\alpha,b_0}} \circ \Phi^{-1}_{\gamma_{b_\alpha,x}}) \circ (\Phi_{\gamma_{b_\beta,x}} \circ \Phi_{\gamma_{b_0,b_\beta}}) \\ &= \Phi_{\gamma_{b_0,b_\beta} \# \gamma_{b_\beta,x} \# \gamma_{x,b_\alpha} \# \gamma_{b_\alpha,b_0}} \end{aligned}$$

mais

$$\gamma_{b_0,b_\beta} \# \gamma_{b_\beta,x} \# \gamma_{x,b_\alpha} \# \gamma_{b_\alpha,b_0}$$

est un lacet basé en b_0 alors $\phi_{\alpha\beta}(x) \in Ham(M,\omega)$ pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ d'où le groupe structural de (P,π) se réduit à $Ham(M,\omega)$. □

Proposition 3.4.2. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré avec groupe de structure $Ham(M,\omega)$, alors (P,π) admet une connexion hamiltonienne.*

Démonstration. Il faut montrer qu'il existe une connexion telle que pour tout $b \in B$ et tout lacet basé en b $\alpha : (S^1,*) \to (B,b)$, l'holonomie autour de α est un élément de $Ham(M,\omega)$. Pour construire une telle connexion, soit $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ un atlas de (P,π) avec les U_i contractiles avec intersections contractiles, $\{\rho_i\}_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$ et pour chaque $i \in I$ soit $\omega_i := (proj^i_M)^*\omega$ où

$$proj^i_M : U_i \times M \to M$$

est la projection naturelle. Posons ensuite

$$\tau := \sum_{i\in I} (\rho_i \circ \pi)\Phi_{i*}\omega_i$$

on a déjà vu que τ est une forme de connexion et induit alors une connexion symplectique, montrons que si le groupe de structure de (P,π) est $Ham(M,\omega)$ que la connexion induite est hamiltonienne.

Dans la carte locale (U_j,Φ_j) considérons un vecteur X qui est horizontal pour ω_j, c'est-à-dire que $X \in TU_j \times \{0\} \subset TU_j \times TM$, on prétend que $\Phi_{j*}X$ est horizontal pour τ. Pour voir ceci, note que pour $V \in T^{vert}P$ et n'importe quel $i \in I$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}\iota(V)\iota(\Phi_{j*}X)\Phi_{i*}\omega_i &= \iota(\Phi_{i*}^{-1}V)\iota(\Phi_{i*}^{-1}\Phi_{j*}X)\omega_i \\ &= \iota(V')\iota((\Phi_i^{-1}\Phi_j)_*X)\omega_i\end{aligned}$$

pour $V' \in T^{vert}(U_i \times M)$, car les difféomorphismes par fibres préservent les distributions verticales, et $\Phi_i^{-1}\Phi_j(b,x) = (b, h_{ji}(b)(x))$ pour $h_{ji}(b) \in Ham(M,\omega)$, donc $\Phi_i^{-1}\Phi_j)_*X \in \ker proj_M^i$ d'où

$$\iota(V)\iota(\Phi_{j*}X)\Phi_{i*}\omega_i = 0$$

pour tout $i \in I$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $\iota(V)\iota(\Phi_{j*}X)\tau = 0$.

Prenons donc un lacet basé $\alpha(t)$ avec $\alpha(0) = b$ pour un $b \in B$ quelconque et considérons $(P,\pi)|_{S^1} := (P,\pi)|_{\pi^{\alpha(S^1)}}$. Comme $S^1 = [0,1]/0 \sim 1$ est compacte, $\alpha(S^1)$ est recouvert par un nombre fini des $\{U_i\}_{i\in I}$, disons $U_0, \cdots, U_k$ avec $b \in U_0$ et sans perte de généralité on peut passer à un sous-recouvrement tel que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $j \neq i, i+1$ (ceci suit du fait que les U_i's ont été choisies pour avoir les intersections contractiles), de plus dans chaque carte locale (U_i,Φ_i) l'holonomie de $\Gamma_{\Phi^*\tau}$ est trivial, car $\Gamma_{\Phi^*\tau}$ est la connexion plate dans (U_i,Φ_i), soient donc $t_0, \cdots, t_k \in S^1$ tels que $b_i := \alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$ pour $i = 0, \cdots, k-1$ et $b_k := \alpha(t_k) \in U_k \cap U_0$ alors en calculant l'holonomie dans la carte locale (U_i,Φ_i) pour $t \in [t_{i-1}, t_i)$ pour $i = 1, \cdots, k$ et dans la carte locale (U_0,Φ_0) pour $t \in [0,t_0)$ on voit que l'holonomie autour de α est donné par

$$\Pi_{i=0}^{k-1} h_{i,i+1}$$

mais comme (P,π) a $Ham(M,\omega)$ comme groupe de structure, $h_{i,i+1} \in Ham(M,\omega)$ pour chaque i, d'où l'holonomie autour de chaque lacet est α. □

Comme $Ham(M,\omega)$ est un sous-groupe normal de $Symp(M,\omega)$, il est naturel de chercher des conditions sur la géométrie (à vraie dire, la topologie) d'un fibré symplectique tel que son groupe de structure se réduit à $Ham(M,\omega)$. Ceci est l'objet des prochaines pages, mais ce projet nécessitera quelques préparations :

Lemme 3.4.1. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique et soit $B_1 \subset B$ le $1-$squelette de B, $i_1 : B_1 \hookrightarrow B$ l'inclusion de B_1 dans B, alors les énoncés suivants sont équivalents*

1. *$i_1^*(P,\pi)$ est $Symp(M,\omega)-$trivialisable*
2. *Pour tout lacet $\gamma : S^1 \to B$, $\gamma^*(P,\pi)$ est $Symp(M,\omega)-$trivialisable*
3. *Il existe une connexion symplectique Γ sur (P,π) telle que l'holonomie de Γ autour de tout lacet dans B est isotope dans $Symp(M,\omega)$ à id_M.*
4. *L'holonomie de toute connexion symplectique sur (P,π) autour de tout lacet dans B est isotope dans $Symp(M,\omega)$ à $id_{Symp(M,\omega)}$*

Démonstration. (4) $\Rightarrow$ (3) est triviale.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Tout lacet γ dans B est homotope à un lacet, disons $\tilde{\gamma}$ dans B_1, alors par corollaire 1.4.1, $\gamma^*(P,\pi) \simeq i_1^*(P,\pi)|_{\tilde{\gamma}}$ qui est $Symp(M,\omega)-$trivial par hypothèse. Inversement, comme B_1 est homotope à un bouquet de cercles d'où, par corollaire 1.4.2, $i_1^*(P,\pi)$ est forcément triviale à part d'au-dessus des lacets dans B_1 mais si on assume (2) alors a fortiori tout lacet dans B_1 est symplectiquement trivialisable.

(3) $\Rightarrow$ (2) Fixons une connexion symplectique Γ sur P telle que décrit et prenons un lacet γ dans B, avec $\gamma(0) = b$. Sans perte de généralité identifions la fibre modèle avec $(M_b, \omega_b) \simeq (M,\omega)$, et soit $\Phi_{\gamma(t)} : (M,\omega) \to (M_{\gamma(t)}, \omega_{\gamma(t)})$ l'holonomie de Γ associé à Γ. Par hypothèse il existe une isotopie symplectique ψ_t avec $\psi_0 = id_M$, $\psi_1 = \Phi_{\gamma(1)}$, définissons donc un trivialisation symplectique T_γ de $P|_\gamma$ par

$$\begin{aligned} T_\gamma : (M,\omega) \times S^1 &\to P|_\gamma \\ (x,t) &\mapsto \Phi_{\gamma(t)} \circ \psi_t^{-1}(x) \end{aligned}$$

alors comme $T_\gamma(x,0) = T_\gamma(x,1) = id_M$ on obtient un trivialisation comme on a voulu.

(2) $\Rightarrow$ (4) Fixons une connexion symplectique arbitraire Γ sur P et prenons un lacet γ dans B, avec $\gamma(0) = b$. Encore une fois, identifions la fibre modèle avec $(M_b,\omega_b) \simeq (M,\omega)$. Comme $P|_\gamma$ est symplectiquement trivialisable, on peut l'identifier avec $(M,\omega) \times S^1$ modulo la composition par des lacets de difféomorphismes symplectiques $\psi_t \in Symp(M,\omega)$ avec $\psi_0 = \psi_1 = id_M$, et en fixant n'importe quel trivialisation, Γ est envoyée à une connexion symplectique sur $S^1 \times M$, mais l'holonomie de toute connexion symplectique sur $S^1 \times (M,\omega)$ est évidement isotope à l'identité, d'où le lemme. $\square$

Comme on pourrait s'y attendre, la réduction du groupe de structure de $Symp(M,\omega)$ à $Ham(M,\omega)$ impliquera le morphisme de flux d'une manière essentielle. Expliquons maintenant cette connexion : dans le cadre des fibrés symplectiques (P,π) avec fibre (M,ω) au-dessus d'une base B, on sait que tout fibré hamiltonien admet une connexion (globalement) hamiltonienne alors par le théorème 3.3.1 c'est nécessaire que P possède une forme de couplage τ et a fortiori une classe d'extension $\tau \in [a] \in H^2(P;\mathbb{R})$ qui se restreignent à la forme symplectique sur les fibres et sa classe cohomologique, respectivement. Par le lemme ci-haut, comme $Ham(M,\omega) \subset Symp_0(M,\omega)$ si le groupe de structure de P se réduit à $Ham(M,\omega)$, alors il faut que P soit trivialisable symplectiquement le long de son $1-$squelette. Choisissons une classe d'extension $a \in H^2(P;\mathbb{R})$ et un trivialisation symplectique $T : B_1 \times (M,\omega) \to P|_{B_1}$, notons que comme B_1 est homotope à un bouquet de cercles qui sont des générateurs (non nécessairement libres !) de $\pi_1(B,b_0)$ où $b_0 \in B$ est un point arbitraire dans (on assume que B est connexe) qu'on prend pour le point de base pour le bouquet, ceci est équivalent à donner une allocation

$$\pi_1(B,b_0) \ni [\gamma] \mapsto \big(T_\gamma : S \times (M,\omega) \to (P,\pi)|_{\gamma)}\big)$$

et les T_γ sont des trivialisations du fibré au-dessus de Γ. Maintenant, supposons qu'il y a $n \geq 0$ cercles $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ dans notre bouquet alors si l'on choisit une forme fermée $\tau \in a$, τ induit une connexion symplectique sur (P, π) qui nous donne, et en retirant τ par T_{γ_n} on obtient une connexion symplectique sur $S^1 \times M$ qui induit alors une isotopie symplectique $\{\Phi_t^{T_\gamma^* \tau}\}_{t \in S^1}$, et on peut alors mesurer son flux. Ceci remonte à définir un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tau, T) : \pi_1(B, b_0) &\to H^1(M; \mathbb{R}) \\ [\gamma_i] &\to \mathscr{F}_\omega(\Phi_t^{T_{\gamma_i}^* \tau}) \end{aligned}$$

et si τ induit une connexion (globalement) hamiltonienne alors il devrait exister un trivialisation T tel que cet homomorphisme s'annule, et on aimerait montrer que ceci est aussi une condition suffisante pour l'existence d'une connexion hamiltonienne. Ceci est l'idée de base, mais formalisons un peu ces notions dans un langage plus géométrique pour que ces symétries soient plus évidentes.

Définition 3.4.1. Soit $(P, \pi, (M, \omega), B)$ un fibré symplectique au-dessus d'une base connexe par arcs admettant une classe d'extension $a \in H^2(P; \mathbb{R})$ de la classe $[\omega]$ sur la fibre et $b_0 \in B$ un point arbitraire mais fixé dans B. Alors pour toute paire (γ, T_γ) d'un lacet γ basé en b_0 et un trivialisation symplectique

$$T_\gamma : S^1 \times (M, \omega) \to (P, \pi)|_\gamma$$

désignons par $f(a; T_\gamma) \in H^1(M; \mathbb{R})$ la **classe de flux** de (a, T_γ) défini sur $\sigma \in H_1(M; \mathbb{R})$ par

$$\langle f(a; T_\gamma), \sigma \rangle := \langle T_\gamma^*(a), [S^1] \otimes \sigma \rangle$$

Notons que cette définition s'accord avec celui donné en termes de τ ci-haut, car si $[\tau] = a$ et σ se représente par un lacet α dans M alors on a

$$\langle f(a; T_\gamma), \sigma \rangle = \int_{S^1 \times S^1} (\gamma \times \alpha)^* T_\gamma^* \tau$$

et ceci ne dépend clairement pas du choix de représentant τ, ni évidement de la classe d'homotopie de γ. La prochaine tâche est d'étudier la dépendance de $f(a, T_\gamma)$ sur le trivialisation T_γ choisi.

Lemme 3.4.2. *Soient T_γ, T'_γ deux trivialisations dans la situation décrite ci-haut alors*

$$f(a; T_\gamma) - f(a; T'_\gamma) \in \Gamma_\omega$$

Démonstration. Comme l'on a déjà remarqué, deux trivialisations d'un fibré symplectique trivial au-dessus d'un cercle ne peut varier que par un lacet de difféomorphismes symplectiques $\Psi := \psi_t \in Symp(M,\omega)$ avec $\psi_0 = \psi_1 = id_M$, alors

$$\begin{aligned}\langle f(a;T'_\gamma),\sigma\rangle - \langle f(a;T_\gamma),\sigma\rangle &= \langle (\Psi\circ T_\gamma)^*(a),[S^1]\otimes\sigma\rangle - \langle T_\gamma^*(a),[S^1]\otimes\sigma\rangle \\ &= \langle T_\gamma^*(a),[S^1]\otimes\Psi_*(\sigma)\rangle - \langle T_\gamma^*(a),[S^1]\otimes\sigma\rangle \\ &= \langle T_\gamma^*(a),tr_\Psi(\sigma)\rangle = \langle\omega,tr_\Psi(\sigma)\rangle = \mathscr{F}_\omega(\Psi)\end{aligned}$$

□

Il suit donc que pour chaque classe d'extension a et tout lacet $[\gamma]\in\pi(B)$, il existe un élément bien défini $\bar{f}_a(\gamma) = [f(a;T_\gamma)] \in H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega$ où T_γ est un trivialisation quelconque. Notons ensuite un fait subtil, mais important : si un lacet représente une classe de torsion dans l'homologie, alors $f(a;T_\gamma)$ **ne dépend pas de** a **non plus**.

Proposition 3.4.3. *Soit $\gamma : S^1 \to B$ un lacet (toujours basé en b_0) tel que $\gamma_*[S^1]\in H_1(B;\mathbb{Z})$ est torsion, $a,a'\in H^2(P;\mathbb{R})$ deux classes d'extension et T_γ un trivialisation de $(P,\pi)|_\gamma$ alors*

$$f(a;T_\gamma) = f(a';T_\gamma)$$

Démonstration. Par hypothèse il existe un $k\in\mathbb{N}$ tel que $k[\gamma]=[b_0]\in H_1(M;\mathbb{R})$ alors pour une $\sigma\in H_1(M;\mathbb{R})$ représentée par un lacet α basé dans la fibre $\pi^{-1}(b_0)$ on calcule

$$\begin{aligned}k\cdot\langle f(a;T_\gamma),\sigma\rangle &= k\int_{S^1\times S^1}(\gamma\times\alpha)^*T_\gamma^*\tau \\ &= k\langle\gamma\otimes T_{\gamma*}\alpha_*[S^1],a\rangle = \langle k\gamma\otimes T_{\gamma*}\alpha_*[S^1],a\rangle \\ &= \langle[b_0]\otimes T_{\gamma*}\alpha_*[S^1],a\rangle = \langle T_{\gamma*}\alpha_*[S^1],[\omega_b]\rangle\end{aligned}$$

et ceci pour toute classe d'extension a. □

Il suit donc que pour chaque classe de torsion $[\gamma]\in H_1(B;\mathbb{Z})$ on obtient un invariant $f_\gamma = [f(a;T_\gamma)] \in H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega$ qui ne dépend que de la topologie du fibré et la structure symplectique sur les fibres. De plus, il suit que s'il existe un γ pour quel f_γ ne s'annule pas, alors on *ne peut pas choisir* une classe d'extension a contenant une forme de couplage avec connexion globalement hamiltonienne. Il en suit que ces classes f_γ représentent des obstructions à la réduction du groupe structural à $Ham(M,\omega)$. Ceci motive la définition suivante :

Définition 3.4.2. Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique trivialisable au-dessus de son $1-$squelette (c'est-à-dire que son groupe de structure se réduit à $Symp_0(M,\omega)$) alors on dit que **le flux s'annule sur les classes de torsion** si pour tout $[\gamma]\in Tor\Big(H_1(B,\mathbb{Z})\Big)$

$$\bar{f}_a(\gamma) = 0 \in H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega$$

pour une (alors toute) classe d'extension $a\in H^2(P;\mathbb{R})$.

Notons que pour une classe d'extension a et un trivialisation symplectique du $1-$squelette T fixé, la classe de flux nous fournit d'un homomorphisme

$$\begin{aligned} f(a;T) : \pi_1(B) &\to H^1(M,\mathbb{R}) \\ [\gamma] &\to f(a;T_\gamma) \end{aligned}$$

où T_γ désigne le trivialisation du fibré au-dessus de gamma induit par T. Notons que si $f(a;T)(\gamma) \in \Gamma_\omega$ alors en composant T_γ avec un lacet basé en l'identité, on peut trouver un autre trivialisation T' du $1-$squelette tel que $f(a;T')(\gamma) = 0$, c'est-à-dire que le flux de l'holonomie induit par n'importe quelle classe de couplage τ dans a est nulle, et alors l'holonomie est hamiltonienne. En particulier, ce veut dire que si le flux s'annule sur les classes de torsion alors on peut trouver un trivialisation tel que l'holonomie est hamiltonienne sur les classes de torsion.

En somme, on vient d'établir qu'il y a au moins trois obstructions à la réduction du groupe structural de $Symp(M,\omega)$ à $Ham(M,\omega)$: il faut pouvoir trivialiser le fibré le long du $1-$squelette (réduire le groupe structural à $Symp_0(M,\omega)$, il faut que l'espace total admette au moins une classe d'extension de la classe symplectique de la fibre et il faut que le flux s'annule sur les classes de torsion. Le théorème suivant nous dit que ces trois conditions sont suffisantes pour garantir la réduction du groupe de structure à $Ham(M,\omega)$.

Théorème 3.4.1. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique alors les énoncés suivants sont équivalents*

1. *Le groupe structural de (P,π) se réduit à $Ham(M,\omega)$*
2. *(P,π) admet une connexion hamiltonienne*
3. *(P,π) est trivialisable symplectiquement sur le $1-$squelette de B, possède une classe d'extension $a \in H^2(P;\mathbb{R})$ et le flux s'annule sur les classes de torsion.*

Démonstration. L'équivalence de (1) et (2) est établi par les propositions 3.4.1 et 3.4.2, on montrera que $(3) \Rightarrow (2)$. Supposons que (P,π) vérifie les hypothèses de (3) alors par théorème 3.3.1 il existe une forme de couplage $\tau := \tau_{\Gamma'}$ dans la classe a qui est $\pi-$compatible et fermée alors Γ' est localement hamiltonienne, mais qui a peut-être l'holonomie non hamiltonienne sur des lacets non contractiles. Notre but sera de modifier τ par une $2-$forme auxiliaire fermée $\rho \in H^2(P;\mathbb{R})$ qui s'annule sur le fibré vertical de P, et telle que l'holonomie de $\Gamma_{\tau-\rho}$ est hamiltonienne sur les lacets non contractiles.

Fixons d'abord un point $b_0 \in B_1$, une identification de $(M_{b_0},\omega_{b_0}) \simeq (M,\omega)$ et la fibre modèle et une rétraction r de B_1 à un bouquet de cercles avec b_0 comme point de base. Notons par A l'ensemble de tout droit $e_i : [0,1] \to B_1$ dans B_1 qui sont homotopes par r à b_0, par $\Phi_{e_i(t)}$: le transport parallèle de Γ de M_{b_0} en $M_{e_i(t)}$ et définissons un trivialisation symplectique de

$\pi^{-1}(A)$ par

$$\begin{aligned} T_A : A \times (M,\omega) &\to \pi^{-1}(A) \\ (e_i(t),x) &\mapsto \Phi_{e_i(t)}(x) \end{aligned}$$

Comme l'on a déjà remarqué pour chaque lacet $\gamma : S^1 \to B$,

$$\bar{f}_a(\gamma) = 0 \in H^1(M;\mathbb{R})$$

si et seulement s'il existe un trivialisation T du $1-$squelette tel que $f(a;T_\gamma) = 0 \in H^1(M;\mathbb{R})$. trivialisation tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \pi_1(B) \arrow[r, "f(a;T_\gamma)"] \arrow[dr, "\bar{f}_a(\gamma)"'] & H^1(M;\mathbb{R}) \arrow[d, "\mathrm{mod}\ \Gamma_\omega"] \\ & H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega \end{tikzcd}$$

Note que par proposition 3.4.3 et la discussion qui la suite, ceci est possible si et seulement si le flux s'annule sur les classes de torsion, et qu'on peut donc étendre T_A à un trivialisation T du $1-$squelette tel que le flux s'annule sur un lacet $[\gamma] \in \pi_1(B)$ si et seulement si l'holonomie de τ_Γ le long de γ est hamiltonienne. Prenons ensuite un voisinage du $1-$squelette $U_1 \subset B$ qui se rétracte par déformation à B_1, par corollaire 1.4.2 T s'étend à un trivialisation symplectique.

$$T^1 : U_1 \times (M,\omega) \to \pi^{-1}(\mathcal{N}(B_1))$$

tel que pour $\gamma' \in \pi_1(U_1) \simeq \pi_1(B_1)$ et $\gamma \in \pi(B_1)$, $f(a;T^1_{\gamma'}) = f(a;T^1_\gamma) \Leftrightarrow \gamma' \simeq \gamma$ dans U_1. Soit donc $\omega_1 = proj_2^*\omega \in \Omega^2(M,\omega)$ et posons

$$\rho_1 := \tau - T_{1*}\omega_1$$

Alors sur $\pi^{-1}(U_1)$, $\Gamma_{\tau-\rho_1} = \Gamma_{T_{1*}\omega_1}$ et donc par notre choix de trivialisation, l'holonomie de $\Gamma_{\tau-\rho_1}$ autour de tout lacet dans U_1 est triviale.

Ensuite, c'est un fait standard sur la topologie des CW-complexes (voir, par exemple [22] ch. 2) que pour chaque dimension $2 \leq k \leq m = \dim B$, on peut choisir des voisinages ouverts et U_k, W_k :

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m = B \qquad\qquad \overline{U_k} \cap \overline{U_{k+1} - U_k} \subset W_k$$

tels que la fermeture de $V_k := W_k \cap U_k$ est disjoint du $k-$squelette B_k et qui est est une union disjointe d'ensembles ouverts, connexes par arcs S_i^k tels que chaque S_i^k est équivalent par une rétraction à une $k-$sphère contractile dans B. Pour chaque $2 \leq k \leq m$ on cherche à étendre

ρ_{k-1} à une $2-$forme fermée $\rho_k \in \Omega^2(\pi^{-1}(U_k))$ qui s'annule sur les fibres, s'accord avec ρ_{k-1} sur $U_{k-1} - V_{k-1}$ et qui est exacte sur $\pi^{-1}(V_k)$.

$\boldsymbol{k = 2}$

Prenons un lacet $\gamma : S^1 \to V_1$. α est contractile, car V_1 l'est par construction et donc le flux par rapport à T_1 est trivial. Soit $\alpha : S^1 \to M$ un lacet dans la fibre alors

$$\begin{aligned}\int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} \rho_1 &= \int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} \tau - \int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} T_{1*}\omega_1 \\ &= \int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} \tau - \int_{\gamma\times\alpha} \omega_1 = \int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} \tau\end{aligned}$$

mais $\int_{T_1\circ(\gamma\times\alpha)} \tau = \langle f_\gamma(\tau; T_1), \alpha_*[S^1]\rangle = 0$. De plus, comme τ est une forme de connexion ρ_1 s'annule sur les cycles verticaux aussi, alors ρ_1 s'annule sur tout $2-$cycle dans $\pi_1^{-1}(V_1)$ (comme $H_2(V_1;\mathbb{Z}) = 0$, les seules $2-$cycles non triviales possibles sont ceux des deux formes qu'on vient juste de considérer). Il suit que ρ_1 est exacte sur $\pi_1^{-1}(V_1)$. Choisissons ensuite une fonction lisse à support compacte $\phi_1 : V_1 \to [0,1]$ telle que

$$\phi_1(b) := \begin{cases} 0 & b \in \mathcal{N}(\overline{V_1} \cap \overline{U_2 - U_1}) \\ 1 & b \in \mathcal{N}(\overline{V_1} \cap \overline{U_1 - V_1}) \end{cases}$$

et posons

$$\rho_2(p) := \begin{cases} \rho_1(p) & p \in \pi^{-1}(U_1 - V_1) \\ d(\phi \circ \pi)\rho_1(p) & p \in \pi^{-1}(V_1) \\ 0 & p \in \pi^{-1}(U_2 = U_1) \end{cases}$$

C'est évident par la construction de ρ_2 qu'elle est 0 sur les fibres, fermée et s'accord avec ρ_1 sur $\pi^{-1}(U_1 - V_1)$. Il faut maintenant trouver un $2-$forme $\beta \in \Omega^2(B)$ sur la base telle que $\rho_2' = \rho_2 + \pi^*\beta$ est exacte. Choisissons un point arbitraire $m_0 \in M$, et considérons la section

$$\begin{aligned}\sigma_1 : B^1 &\to \pi^{-1}(B_1) \\ b &\mapsto T_1((b, m_0))\end{aligned}$$

Ensuite, sur chaque $2-$cellule $\triangle$, choisissons un point sur son bord (dans B_1) et un feuilletage de la $2-$cellule par des arcs, et en utilisant la structure de transport parallèle de la connexion $\Gamma_{\tau-\rho_2}$, trivialisons $\pi^{-1}(\triangle)$. Ceci nous donne sur chaque $2-$cellule $\triangle$ un trivialisation.

$$T_2 : \triangle \times M \to \pi^{-1}(\triangle)$$

et comme $\partial\triangle \subset B_1$, on obtient pour chaque $\triangle$ un lacet hamiltonien comme les applications de transition sur le bord de $\triangle$:

$$\begin{aligned} T_2^{-1}T_1 : \partial\triangle \times M &\to \partial\triangle \times M \\ (b,m) &\to (b, h_t(b)\cdot m) \end{aligned}$$

pour $\{h_t(b)\}_{b\in\partial\triangle} \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$. Par corollaire 2.6.5, le lacet $b \mapsto h_t(b)(m_0)$ est nullhomologue en M. Mais un lacet est nullhomologue seulement s'il est homologue à un lacet nullhomologue (évidement) il existe alors une application (singulier) du $2-$simplex

$$u : \triangle - b_\triangle \to M$$

où $b_\triangle$ désigne le barycentre de $\triangle$ avec $u(b) = h_t(b)(m_0)$ pour $b \in \partial\triangle$ et telle que sur un voisinage de $b_\triangle$ les $u(b)$ s'accumulent à un cycle nullhomologue en M. On peut donc considérer la section (singulier !)

$$\begin{aligned} \sigma_2 : \triangle - b_\triangle \to \triangle - b_\triangle \times M &\xrightarrow{T_2} \pi^{-1}(\triangle) \\ b \mapsto (b, u(b)) &\mapsto T_2(b, u(b)) \end{aligned}$$

De plus, c'est clair qu'on peut homotoper u telle que σ_2 est lisse hors d'un voisinage $O_{b_\triangle}$ du barycentre, alors considérons une 2 forme fermée β_2 telle que $\beta_2 = 0$ sur $U_1 \cup O_{b_\triangle}$ et telle que

$$\int_\triangle \beta_2 = \int_\triangle \sigma_2^* \rho_2$$

pour chaque $2-$cellule dans B_2 (l'idée ici est qu'on aimerait vraiment soustraire $\sigma_2^*\rho_2$ de ρ_2 telle qu'elle s'annule sur les cellules horizontales, mais comme on est en train de travailler dans la catégorie lisse et qu'on ne peut pas assurer que u soit lisse sur la $2-$cellule complète, il faut prendre une forme lisse qui la moyenne sur $\triangle$). Maintenant, la forme $\sigma_2^*(\rho_2 - \pi^*\beta_2)$ vérifie par construction

$$\int_\triangle \sigma_2^*(\rho_2 - \pi^*\beta_2) = 0$$

sur chaque $2-$cellule, et je prétends que la forme $\rho_2 - \pi^*\beta_2$ est exacte sur $\pi^{-1}(V_2)$. Pour voir ceci, considérons les $2-$cycles dans $\pi^{-1}(V_2)$: un tel cycle est une somme de soit des cycles dans la fibre, et c'est clair que $\rho_2 - \pi^*\beta_2$ s'annule sur des tels cycles, comme $\pi^*\beta_2$ est horizontal et ρ_2 s'annule déjà là dessus, soit des $2-$cycles de la forme produite qu'on a déjà considérée lors de notre étude de ρ_1 et comme les trivialisations autour des bords des $2-$cellules sont des lacets hamiltoniens, et alors comme $\sigma_2(b) = \sigma_1(b)$ pour $b \in \partial\triangle$, le flux de $\sigma_2^*(\rho_2 - \pi^*\beta_2)$ s'annule et alors $\sigma_2^*(\rho_2 - \pi^*\beta_2)$ s'annule sur des tels cycles aussi, soit des 2-cycles qui sont des sections $v : \triangle \to M$ sur les $2-$cellules, mais comme les $u : \triangle - b_\triangle \to M$ sont homologues à des tels cycles (car ils s'accumulent en un lacet nullhomologue dans la fibre $M_{b_\triangle}$) et $\int_\triangle \sigma_2^*(\rho_2 - \pi^*\beta_2) = 0$ par construction, on voit que la prétention est vraie. Alors $\bar{\rho}_2 := \rho_2 - \pi^*\beta_2$ est exacte sur $\pi^{-1}(V_2)$, est nulle sur les fibres et s'accord avec ρ_1 sur $\pi^{-1}(U_1 - V_1)$.

$k > 2$

Le reste de la démonstration est par récurrence. Ayant défini une $2-$forme ρ_k sur $\pi^{-1}(V_k)$ telle que

1. ρ_k est fermée et $i_b^*\rho_k = 0$ pour tout $b \in U_k$
2. $\rho_k|_{\pi^{-1}(U_{k-1}-V_{k-1}} = \rho_{k-1}$
3. $\rho_k|_{\pi^{-1}(V_k)}$ est exacte

alors choisissons une $1-$forme $\mu_k \in \Omega^1(\pi^{-1}(V_k))$ telle que $\rho_k|_{\pi^{-1}(V_k)} = d\mu_k$ (existe par hypothèse (3)) on prend une fonction lisse à support compacte $\phi_k : V_k \to [0,1]$ telle que

$$\phi_k(b) := \begin{cases} 0 & b \in \mathscr{N}(\overline{V_k} \cap \overline{U_{k+1} - U_k}) \\ 1 & b \in \mathscr{N}(\overline{V_1} \cap \overline{U_k - V_k}) \end{cases}$$

et posons

$$\rho_{k+1}(p) := \begin{cases} \rho_k(p) & p \in \pi^{-1}(U_k - V_k) \\ d((\phi_k \circ \pi)\mu_k)(p) & p \in \pi^{-1}(V_k) \\ 0 & p \in \pi^{-1}(U_{k+1} - U_k) \end{cases}$$

alors c'est clair que ρ_{k+1} est fermée est s'annule sur les fibres sur U_k, car ρ_k le fait sur $\pi^{-1}(U_k - V_k)$ et $d((\phi_k \circ \pi)\mu_k = \pi^* d\phi_k \wedge \mu$ s'annule sur des paires de vecteurs verticaux, et ρ_{k+1} est évidement exact sur $\pi^{-1}(V_k)$. On obtient alors lorsque $k = m = \dim B$ une forme ρ_m globalement définie, exacte, qui s'annule sur les fibres et telle que l'holonomie de $\Gamma_{\tau-\rho_m}$ sur B_1 est l'holonomie de $\Gamma_{\tau-\rho_1}$ qui est hamiltonienne par construction, ce qui était à démontrer. $\square$

Il suit alors que sur un fibré symplectique tel que le groupe de structure se réduit à $Symp_0(M,\omega)$ et tel que le flux s'annule sur les classes de torsion, on peut comprendre un choix d'une classe d'extension comme définissant une réduction du groupe de structure à $Ham(M,\omega)$ en choisissant n'importe quelle connexion localement hamiltonienne Γ induite par une représentante de cette classe et en effectuant la construction ci-haut. De plus comme les connexions localement hamiltoniennes sont en bijection avec leurs formes de couplage, il suffit de nous restreindre aux classes d'extension **normalisées** dans le sens qu'elles vérifient $\pi_! a = 0 \in H^2(B;\mathbb{R})$. De plus, notre discussion sur le morphisme de flux et l'effet des trivialisations symplectiques sur le $1-$squelette précédant le théorème nous enseigne la proposition suivante :

Proposition 3.4.4. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique au-dessus d'une base connexe par arcs tel que le flux s'annule sur les classes de torsion et soit $T : B_1 \times (M,\omega) \to \pi^{-1}(B_1)$*

un trivialisation symplectique sur le $1-$*squelette, alors l'ensemble des classes d'extensions normalisées de* (P,π) *est en bijection avec l'ensemble d'homomorphismes* $\pi_1(B) \to \Gamma_\omega$.

Démonstration. Comme l'on a déjà mentionné, pour chaque a, $f(a;T)$ envoie des générateurs de $\pi_1(B)$ à Γ_ω et alors s'étend à un homomorphisme. Inversement, la construction de la forme induisant une connexion globalement hamiltonienne ci-haut dépend de notre choix initial du relèvement de l'homomorphisme $\bar{f}_a : \pi(B) \to H^1(M;\mathbb{R})/\Gamma_\omega$ et choisir un tel relèvement est équivalent à choisir un homomorphisme $\varphi : \pi_1(B) \to \Gamma_\omega$. $\square$

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

4.1 Introduction

Dans notre dernier chapitre, on applique la théorie développée dans les pages précédentes pour développer des invariantes qui mesurent ou bornent les séminormes introduites dans le deuxième chapitre. La première section présente trois mesures qu'on peut associer à des fibrés localement hamiltoniens et après avoir présenté deux constructions fondamentales, le fibré au-dessus d'une sphère associé à un lacet hamiltonien et les régions au-dessus et en dessous du graphe d'un hamiltonien, on démontre que ces trois mesures s'accordent sur des fibrés hamiltoniens au-dessus de la sphère. Ensuite à l'aide d'un lemme de recollement dû en la forme présentée dans [13] on montre qu'on peut recoller les régions au-dessus en dessous du graphe d'un hamiltonien pour obtenir une borne sur la norme hoferienne. La section se termine en présentant sans preuve un théorème de [16] sur le non-écrasement pondéré qui découle d'une étude de la cohomologie quantique des fibrés symplectiques au-dessus des sphères dont on aura besoin dans la section finale. Dans la section finale, on présente des arguments de [10] (I et II) pour établir la nécessité et suffisance locale d'avoir des extrema fixés pour minimiser le fonctionnel $\mathscr{L}$ dans une classe d'homotopie et finalement, on applique le théorème de non-écrasement pondéré pour conclure qu'il existe des géodésiques dans un voisinage de l'identité pour séminorme bi-invariante qui borne la norme hoferienne inférieurement, ce qui nous permet, en utilisant la simplicité de $Ham(M,\omega)$, a conclure qui cette séminorme est non dégénérée et alors conclure qui la norme de Hofer l'est aussi. La ligne d'argumentation suivie dans la deuxième section pour prouver la non-dégénérescence de la norme de Hofer vient de l'argument suivi dans [16] et la lectrice qui trouve ce sujet interpellant serait bien servi en le lisant.

4.2 Fibrés symplectiques au-dessus des surfaces simplement connexes

Une des classes de fibrés symplectiques la plus abordable sans être triviale est celle des fibrés symplectiques au-dessus des surfaces symplectiques. Dans cette section, on nous restreint aux surfaces dont l'homologie s'annule dans la première dimension. Il est toutefois productif à contempler le cas plus général pour un instant. Considérons le fibré symplectique

$$(M,\omega) \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} (\Sigma_g,\sigma)$$

où Σ_g est la surface orientable de genre g. Rappelons de nos résultats dans la section précédente que (P,π) admet une forme symplectique globale Ω qui est $(\omega,\pi)-$compatible si et seulement si (P,π) possède une classe d'extension $a \in H^2(P;\mathbb{R})$ avec $i^*a = \omega$ et dans ce cas il existe un $K > 0$ tel que

$$[\Omega] = a + K\pi^*[\sigma]$$

et que, pour un certain choix d'une forme de couplage τ_Γ, Ω vérifie

$$\Omega = \tau_\Gamma + K\pi^*\sigma$$

Notons qu'en posant $K' = K\int_{\Sigma_g}\sigma$ on peut toujours supposer que $\int_{\Sigma_g}\sigma = 1$. Notre première remarque est qu'on peut normaliser σ sans perte de généralité :

Proposition 4.2.1. *Soit $((P,\Omega),\pi,(M,\omega),(B,\beta_0))$ un fibré symplectique au-dessus d'une base symplectique avec $\Omega = \tau_\Gamma + K\pi^*\beta_0$ une forme symplectique, et soit $\beta_1 \in \Omega^2(B)$ une forme symplectique sur B telle qu'il existe une isotopie symplectique*

$$\varphi_t : (B,\beta_0) \to (B,\beta_t)$$

alors il existe un difféomorphisme symplectique $\Phi : (P,\Omega) \to (P,\Omega_1)$ de l'espace totale qui est aussi est symplectique par fibres et tel que

$$\Omega_1 = \Phi_*\tau_\Gamma + K\pi^*\beta_1$$

Démonstration. Soit $X_t : B \to TB$ le champ vectoriel engendré par l'isotopie φ_t, alors la connexion Γ induite par τ_Γ nous donne des relèvements horizontaux

$$X_t^\# : P \to Hor_\Gamma \subset TP$$

tels que leur flot $\Phi_t : (P,\pi) \to (P,\pi)$ est symplectique par fibre en chaque $t \in [0,1]$. C'est clair que

$$\Omega_t := (\Phi_t^{-1})^*(\tau_\Gamma + K\pi^*\beta_0) = \Phi_{t*}\tau_\Gamma + K\pi^*\varphi_{t*}\beta_0 = \tau_{\Phi_{t*}^{-1}\Gamma} + K\beta_t$$

est symplectique aussitôt que Ω_0 l'en est, et donc Ω_1 est la forme symplectique telle que promise, et $\Phi = \Phi_1$ l'isotopie. □

Remarque. On a même quelque chose de plus fort ; comme l'isotopie globale $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ est basée en l'identité, $[(\Phi_1^{-1})^*(\tau_\Gamma)] = [\tau_\Gamma]$ et alors $(\Phi_1^{-1})^*(\tau_\Gamma) - \tau_\Gamma = d\mu$ pour $\mu \in \Omega^1(P)$ et par la forme locale des classes de couplage il suit que μ vérifie $\iota(v)\mu = 0$ pour tout vecteur v vertical. La forme $d\mu$ est dite **une perturbation hamiltonienne**.

Corollaire 4.2.1. *Soit $((P,\Omega),\pi,(M,\omega),(\Sigma,\sigma_0))$ un fibré symplectique au-dessus d'une surface telle que $[\Omega] = u_\pi + K\pi^*[\sigma_0]$ et $\int_\Sigma \sigma_0 = 1$ alors si $\sigma_1 \in \Omega^1(\Sigma)$ est n'importe quelle $1-$forme fermée telle que $\int_\Sigma \sigma_1 = 1$ alors il existe une isotopie Φ_t de fibrés symplectiques telle que*

$$\Phi_1 : ((P,\Omega),\pi,(\Sigma,\sigma_0)) \to ((P,\Phi_{1*}\tau_\Gamma + K\pi^*\sigma_1),\pi,(\Sigma,\sigma_1))$$

qui est un difféomorphisme symplectique des espaces totales.

Démonstration. On note que si σ_0 et σ_1 sont des formes d'aires dans la même classe de cohomologie alors $t\sigma_0 + (1-t)\sigma_1$ donne un chemin lisse entre les deux formes, contenues dans la même classe cohomologique (et donc symplectique), d'où le théorème de Moser implique qu'il existe une isotopie symplectique φ_t avec $\varphi_1^*\sigma_1 = \sigma_0$ et l'on applique le lemme précédent. □

Rappelons aussi dans ce qui suit que, comme les surfaces symplectiques sont forcément orientables, par le théorème 3.4.1 des tels fibrés ont une réduction du groupe de structure à $Ham(M,\omega)$ si et seulement s'ils sont trivialisables symplectiquement et qu'ils admettent une classe d'extension. De plus, les façons de faire cette réduction sont en bijection avec les façons d'allouer à chaque générateur de $\pi(\Sigma_g)$ un élément Γ_ω. (C'est à cause de ce fait que les bases simplement connexes sont si abordables).

4.2.1 La K-aire positive

Soit $(P,\pi,(M,\omega),(B,\beta))$ un fibré symplectique au-dessus d'une base symplectique (non nécessairement trivialisable sur le $1-$squelette !) admettant de classes d'extensions, alors l'ensemble des connexions localement hamiltoniennes est non-vide. Rappelons que toute connexion localement hamiltonienne Γ induit une forme de couplage τ_Γ qui est défini sur les paires de vecteurs horizontaux $v_1^\#, v_2^\#$ en les envoyant à un hamiltonien normalisé sur la fibre qui mesure la courbure du connexion. Alors pour chaqun de ces connexions Γ on désigne par **la partie positive de la norme de Γ relative β** par

$$\|\Gamma\|_\beta^+ := \sup_{\substack{b\in B,\\ v,w\in T_bB,\\ \beta(v,w)=1}} -\min_{x\in M_b} \tau_\Gamma(v^\#,w^\#)$$

où $v^\#$ désigne le relèvement horizontal de v par rapport à Γ.

Remarque. J'avoue que c'est peut-être un peu embêtant de désigner par « la partie positive » de quelque chose qui est la négative d'un minimum. Pourtant si l'on rappelle que toute forme de couplage s'écrit comme $\tau_\Gamma = \omega \oplus -\pi^*\mathscr{H}$, où $\mathscr{H} \in \Omega^2(B, C_0^\infty(P))$ est un deux forme sur la base avec valeurs dans les hamiltoniens normalisés sur les fibres, on voit que les définitions ci-haut sont en train de mesurer les extrémités de $\mathscr{H}$.

On définit ensuite la **partie positive de la K-aire** de (P,π) relative β :

$$\chi_\beta^+(P) := \sup_{\Gamma \text{ localement hamiltonienne}} \frac{1}{\|\Gamma\|_\beta^+}$$

Remarque. On aura pu également définir la partie négative de la norme de Γ et la norme de Γ et alors la partie négative de la K-aire et la K-aire lui même dans la manière évidente, mais comme on ne les utilisera pas dans ce qui suit, on les omet ici.

Proposition 4.2.2. *Soit (Φ, φ) un difféomorphisme symplectique par fibres telles que $\varphi^*\beta = \beta$, alors*

$$\|\Gamma\|^+_\beta = \|\Phi_*\Gamma\|^+_{\varphi^*\beta}$$

Démonstration. Soit (Φ, φ) un difféomorphisme symplectique par fibres alors, comme l'on a déjà discuté, sur les vecteurs horizontaux, τ_Γ peut être vue comme la forme π^*H^Γ où $H^\Gamma = \mathscr{I}_\omega \circ \Omega_\Gamma \in \Omega^2(B, C^\infty_0(P))$ et par la commutativité du diagramme évident, pour tout vecteurs horizontaux $v^\#, w^\#$

$$\iota(w^\#)\iota(v^\#)\Phi^*\tau_\Gamma = \iota(w^\#)\iota(v^\#)\pi^*\varphi^*H^\Gamma = \iota(\varphi_* w)\iota(\varphi_* v)H^\Gamma$$

et $\iota(w)\iota(v)\varphi^*\beta = 1 \Leftrightarrow \iota(\varphi_* w)\iota(\varphi_* v) = 1$. □

Corollaire 4.2.2. *$\chi^+_\beta(P)$ ne dépend sur β qu'à une isotopie symplectique près.*

Démonstration. Comme on l'a déjà vu, si β_0 et β_1 sont liées par une isotopie symplectique φ_t, $\beta_0 = \varphi_t^*\beta_t$, $t \in [0,1]$ alors l'isotopie se relève à une isotopie de difféomorphismes symplectiques par fibres Φ_t de (P, π) et on applique la proposition précédente. □

Le corollaire suivant est immédiat

Corollaire 4.2.3. *Si (P, π) est un fibré symplectique au-dessus d'une surface alors $\chi^+_\beta(P)$ est indépendante de β*

4.2.2 L'aire des fibrés admettant une forme symplectique dominée

D'un autre point de vue, considérons des fibrés symplectiques $((P, \Omega), \pi, (M, \omega), B)$ où Ω est une forme symplectique dominée par ω. Remarque que Ω induit une connexion Γ (et alors une forme de couplage), mais qu'il n'y a aucune hypothèse sur la symplectitude de B alors on n'a aucun moyen naturel de choisir des bi-vecteurs sur la base pour sonder la courbure de Γ, mais on peut toujours définir un invariant de la structure :

Définition 4.2.1. Soit $((P, \Omega), \pi, (M, \omega), B)$ un fibré symplectique et $\Omega \in \Omega^2(P)$ est une forme symplectique dominée par ω alors on définit **l'aire du fibré**

$$A((P, \Omega, \pi)) := \frac{Vol(P, \Omega)}{Vol(M, \omega)}$$

Remarque. Expliquons l'appellation *aire* ici. Si M est de dimension $2n$, B est de dimension $2k$ et supporte une forme symplectique β telle que

$$\Omega = \tau_\Gamma + K\pi^*\beta$$

pour un $K > 0$ alors

$$Vol(P, \Omega) = \frac{1}{(n+k)!}\int_P (\tau_\Gamma + K\pi^*\beta)^k = \frac{1}{(n+k)!}\sum_{i=0}^{n+k}\int_P \binom{n+k}{i}\tau_\Gamma^{n+k-i} \wedge \pi^*(K\beta)^i$$

et si $k=1$ et β est une forme d'aire normalisée telle que $\int_B \beta = 1$ alors $K\beta$ est une forme d'aire avec aire totale K et $\beta^i = 0$ pour $i \geq 2$ et dans ce cas on obtient

$$Vol(P,\Omega) = \frac{1}{(n+1)!}\Big(\int_P \tau_\Gamma^{n+1} + (n+1)\int_P \tau_\Gamma^n \wedge \pi^*(K\beta)\Big)$$

mais dans n'importe quel trivialisation local $U_\alpha \times M$, $\int_P \tau_\Gamma^{n+1} = \int_{U_\alpha}\int_M \tau_\Gamma^{n+1} = 0$, alors le premier terme s'annule et l'on a

$$\begin{aligned} Vol(P,\Omega) &= \frac{1}{n!}\int_P \tau_\Gamma^n \wedge \pi^*(K\beta) = \frac{1}{n!}\int_B \pi_! \tau_\Gamma^n \wedge (K\beta) \\ &= \frac{1}{n!}\int_B n! Vol(M,\omega)\cdot K\beta = K \end{aligned}$$

Donc lorsque Ω est une forme $(\omega,\pi)-$dominée au-dessus d'une surface, l'aire du fibré peut être vue comme une mesure de la taille de la base nécessaire pour que Ω soit exprimable comme la somme de la forme de couplage et le retiré en arrière de la forme d'aire sur la base.

Notons qu'aussitôt qu'on peut définir la notion de la K-aire et donc la notion de la norme d'une connexion symplectique sur un fibré $(P,\pi,(M,\omega),(B,\beta)$ ce fibré supporte forcément des classes de déformation de formes symplectiques $(\omega,\pi)-$dominées :

$$\Omega_{\Gamma,K} := \tau_\Gamma + K\pi^*\beta$$

pour $K > 0$ assez large où τ_Γ s'agit de la forme de couplage de n'importe quelle connexion localement hamiltonienne. Pourtant, comme on n'est pas exigé d'avoir une forme symplectique sur la base pour définir l'aire, on peut généraliser cette façon de mesurer la taille d'une connexion localement hamiltonienne :

Définition 4.2.2. Soit $(P,\pi,(M,\omega),B)$ un fibré symplectique et notons par $S(P,\pi,\omega)$ l'ensemble de formes symplectiques $(\omega,\pi)-$dominées sur P et par $S_\Gamma(P,\pi,\omega) \subset S(P,\pi,\omega)$ le sous-ensemble de ces formes qui induit la connexion Γ pour une connexion localement hamiltonienne Γ donnée. Définissons **L'aire de** Γ par

$$A_{P.\pi,\omega}(\Gamma) := \inf_{\Omega \in S_\Gamma(P,\pi,\omega)} A((P.\pi,\omega))$$

Pausons pour un moment pour introduire quelques exemples utiles qui vont figurer d'une manière importante dans notre histoire en nous fournissant d'un pont entre nos investigations géométriques et nos questions portant sur le comportement des difféomorphismes hamiltoniens.

4.3 Interlude : Quelques Fibrés favoris

4.3.0.1 Les Fibrés Hamiltoniens au-dessus d'une sphère

Soit $\lambda \in \pi_1(Symp(M,\omega), id_M)$, on peut associer à λ un fibré symplectique à fibre (M,ω) au-dessus de la sphère comme suite :
Soient U_+, U_- des $2-$disques modélisés par

$$U_+, U_- := \{re^{2\pi it} \in \mathbb{C}; r \in [0,1],\, t \in [0,1]\}$$

Prenons un représentant $\{\varphi_t\}$ de λ et définissons l'espace total P_λ par

$$P_\lambda := \big(U_+ \times (M,\omega) \bigsqcup U_+ \times (M,\omega)\big)/\sim$$

où la relation d'équivalence est donnée par

$$U_+ \times M \ni (e^{2\pi it_+}, x) \sim \left(e^{2\pi it_-}, \varphi_t(x)\right) \in U_- \times M$$

Modélisons S^2 par le recollement

$$S^2 = \big(U_+ \bigsqcup U_-\big)/(e^{2\pi it_+} \simeq e^{2\pi it_-})$$

avec l'orientation induite par l'inclusion de U_+. On munit alors P_λ avec l'application de projection

$$\begin{aligned} \pi : P_\lambda &\to S^2 \\ [e^{2\pi it}, x] &\mapsto [e^{2\pi it}] \end{aligned}$$

Remarque. C'est évident que ce fibré est isomorphe au fibré lisse construit de la même manière, mais en prenant des voisinages tubulaires $V_\pm$ des bords des disques $U_\pm$ et des rétractions lisses aux bords $r_\pm : [0,1] \times V_\pm \to V_\pm$ et prenant la fonction de transition $\phi : V_+ \times M \to V_- \times M$ comme $\varphi_{r_+(re^{2\pi it})}$.

Notons que les systèmes de trivialisations ainsi définis sont $Symp(M,\omega)-$équivalents si et seulement si les lacets sont isotopes dans $Symp(M,\omega)$, d'où cette construction ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet, alors P_λ est bien défini.

Inversement, supposons qu'on est donné un fibré symplectique (P,π) au-dessus d'une sphère. Recouvrons la sphère par deux ouverts contractiles U_1, U_2 qui s'entrecroisent dans un voisinage V de l'équateur. Comme U_1, U_2 sont contractiles, $\pi^{-1}(U_i)$ est trivialisable symplectiquement pour $i = 1,2$. Fixons des trivialisations $T_i : U_i \times (M,\omega) \to \pi^{-1}(U_i)$, un point de base $z_0 \in S^2$ sur l'équateur S^1, et fixons une identification de $(M_{z_0}, \omega_{z_0}) \simeq (M,\omega)$ avec la fibre modèle. Alors pour tout $(z,x) \in V \times M$,

$$T_2^{-1} T_1(z,x) = (z, \phi_z(x))$$

avec $\phi_{z_0} = id_M$ et $\phi_z \in Symp(M,\omega)$, alors la structure de fibré symplectique sur (P,π) est déterminée par l'application

$$\phi : V \to Symp(M,\omega)_0$$

D'où le groupe de structure se réduit à la composante de l'identité, alors (P,π) est symplectiquement trivialisable sur son $1-$squelette et, de plus, comme (V,z_0) est homotope à (S^1,z_0) on peut choisir les fonctions de transitions sur V telles qu'elles sont constantes le long d'un rétract par déformation de (V,z_0) à (S^1,z_0), alors $(P,\pi) = (P_\lambda,\pi)$ pour

$$\lambda = [\{\phi_t\}_{t\in(S^1,z_0)}] \in \pi_1(Symp(M,\omega), id_M)$$

On conclu alors de cette discussion qu'il y a une bijection entre $\pi_1(Symp(M,\omega), id_M)$ et les fibrés symplectiques au-dessus de S^2. À vrai dire la construction ci-haut n'a rien d'essentiellement symplectique là dedans et s'adapte directement pour donner une bijection entre les $G-$fibrés au-dessus de S^n et $\pi_{n-1}(G, id_G)$, mais on peut combiner cette construction avec nos résultats précédents pour en tirer davantage des informations sur des tels fibrés. Notons en premier

Proposition 4.3.1. *Soit $(P,\pi,(M,\omega),S^2))$ un fibré symplectique, alors P admet une forme symplectique $(\omega,\pi)-$compatible si et seulement si $(P,\pi) = (P_\lambda,\pi)$ pour un $\lambda \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$.*

Démonstration. La sphère peut être donnée une structure de CW avec un $1-$squelette trivial, alors tout fibré au-dessus d'une sphère est forcément trivialisable le long de son $1-$squelette. De plus, $H_1(S^2;\mathbb{Z}) = 0$ alors ne possède aucune classe de torsion, d'où le flux s'annule trivialement sur les classes de torsion, alors la proposition suit du théorème 3.4.1, la caractérisation de tout fibré hamiltonien au-dessus de la sphère comme étant de la forme (P_λ,π) et le fait qu' au-dessus d'une base symplectique, une forme symplectique $(\omega,\pi)-$dominée existe si et seulement si une classe d'extension existe. □

Notons ensuite que comme les choix d'une classe d'extension normalisée sur (P,π) sont en bijection avec les homomorphismes

$$\pi_1(B) \to \Gamma_\omega$$

et $\pi_1(S^2) = 0$ alors pour chaque (P_λ,π) hamiltonien, il n'existe qu'un choix canonique de classe d'extension $a_\lambda \in H^2(P;S^2)$ telle que toute forme de couplage τ_Γ sur (P_λ,π) représente a_λ. On appel cette classe cohomologique **la classe de couplage** de (P_λ,π).

4.3.0.2 Les Fibrés tautologiques d'une fonction hamiltonienne

Cette construction se base sur l'observation que le graphe d'une fonction hamiltonienne peut être vue comme une variété co-isotrope de $(M\times[0,1]\times\mathbb{R}, \omega\oplus dt\wedge ds)$ avec un feuilletage caractéristique qui décrit l'isotopie induite par H. Plus précisément soit Γ_H l'image de l'application

$$\Phi_H : M \times [0,1] \underset{(x,t)\mapsto(x,t,H_t(x))}{\rightarrow} M \times [0,1] \times \mathbb{R}$$

C'est évident que Γ_H est de codimension 1 (alors co-isotrope) et possède donc un feuilletage par les courbes intégrales de sa distribution caractéristique.

Proposition 4.3.2. *Pour tout $x \in M$ la courbe $\gamma_x : [0,1] \to \Gamma_H$ définie comme*

$$\gamma_x(t) := \big(\varphi_t^H(x), t, H_t \circ \varphi_t^H(x)\big)$$

est une courbe intégrale du feuilletage caractéristique de Γ_H.

Démonstration. Il suffit de montrer que $g_x(t) := (\varphi_t^H(x), t)$ est une courbe intégrale de $M \times [0,1], \Phi_H^*(\omega \oplus dt \wedge ds))$ comme $\gamma_x = \Phi_H \circ g_x$.

Notons en premier que

$$\Phi_H^*(\omega \oplus dt \wedge ds) = \omega \oplus dt \wedge dH$$

et pour $t \in [0,1]$ quelconque

$$\begin{aligned}(X_{H_t} \oplus \frac{d}{dt}) \lrcorner (\omega \oplus dt \wedge dH) &= X_{H_t} \lrcorner \omega \oplus \frac{d}{dt} \lrcorner (dt \wedge dH) \\ &= -dH_t \oplus \frac{d}{dt} \lrcorner (dt \wedge dH)\end{aligned}$$

Posons $\alpha := -dH_t \oplus \frac{d}{dt} \lrcorner (dt \wedge dH)$, alors on cherche à montrer que $\alpha(v) = 0$ pour tout $v \in T_{(x,t)}(M \times [0,1])$. Soient $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ des coordonnées sur M dans un voisinage de $x \in M$ et calculons pour n'importe quel $i \in \{1, \ldots, 2n\}$

$$\begin{aligned}(dt \wedge dH)(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx_i}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} & \frac{\partial H}{\partial x_i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x_i}\end{aligned}$$

Pourtant c'est évident que $-dH_t(\frac{d}{dx_i}) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, donc $\alpha(\frac{d}{dx_i} \oplus 0) = 0$, et

$$\begin{aligned}\alpha(0 \oplus \frac{d}{dt}) &= -dH_t(0) \oplus (dt \wedge dH)(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}) \\ &= 0\end{aligned}$$

d'où $\alpha(v) = 0$ pour tout $v \in T_{(x,t)}(M \times [0,1])$, et donc pour chaque $(x,t) \in M \times [0,1]$ la distribution caractéristique de $\Phi_H^*(\omega \oplus dt \wedge ds)$ est engendrée par $X_{H_t} \oplus \frac{d}{dt}$, d'où $g_x(t) := (\varphi_t^H(x), t)$ est une courbe intégrale comme l'on a voulu. $\square$

L'utilité de cette construction provient de l'identification entre les transports parallèles d'une connexion symplectique associée à une courbe avec les courbes intégrales du feuilletage caractéristique de la préimage de la courbe par la projection du fibré induit par la forme de connexion qui induit la connexion symplectique ; l'idée sera de construire un fibré au-dessus d'un disque dont la préimage du bord est (essentiellement) Γ_H et tel que, au moins dans un voisinage de la préimage du bord, la forme de connexion est $\omega \oplus dt \wedge ds$. Ceci nous donnera un fibré au-dessus du disque dont l'holonomie le long du bord est décrite par l'isotopie hamiltonienne h_t induite par H et on peut donc espérer que la géométrie symplectique d'un tel objet pourrait nous offrir des informations sur les propriétés dynamiques de h_t.

Il se trouve que essentiellement dû au fait que Γ_H est contenu canoniquement entre deux hyperplans $\{(x,t,\min_t \min_x H_t(x))\}$ et $\{(x,t,\max_t \max_x H_t(x))\}$ on va pouvoir construire deux tels fibrés (pourtant des questions d'orientations feront que les holonomies autour des bords seront inverses), l'un en considérant la région au-dessus du graphe et l'autre en considérant la région au-dessous du graphe.

En vue de simplifier la présentation de ces constructions et aussi d'assurer que les objets construits soient lisses pour le reste de la section, en suivant [16], on supposera que tous les hamiltoniens impliqués sont positivement normalisés dans le sens suivant

Définition 4.3.1. Un hamiltonien $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est dit **positivement $\kappa-$normalisé** pour un certain $\kappa \geq 0$ si

1. il existe un voisinage de $t = 0$ et $t = 1$ tel que $H_t \equiv 0$ sur ce voisinage
2. $\min_{x\in M} H_t \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$
3. $\int_0^1 \min_{x\in M} H_t \leq \kappa$

Notons que si l'on a un hamiltonien normalisé H engendrant l'isotopie hamiltonienne h_t alors on peut toujours supposer que (1) est satisfait. De plus, on peut toujours remplacer H par un hamiltonien H^κ qui est positivement $\kappa-$normalisé pour n'importe quel $\kappa > 0$ sans changer h_t comme suit : en vue que $\min_{x\in M} H_t$ est une fonction continue de t, on peut l'approximer uniformément par une fonction lisse $m(t)$ telle que $m(t) \leq \min_{x\in M} H_t$ pour tout $t \in [0,1]$, $m(t) = 0$ dans un voisinage de $t = 0$ et $t = 1$ et $0 \leq \min_{x\in M} H_t - m(t) < \kappa$, d'où c'est évident que la norme de Hofer de $H^\kappa := H - m(t)$ est égale à celle de H, H^κ engendre h_t, $\min_{x\in M} H_t^\kappa \geq 0$ $\forall t \in [0,1]$ et

$$\int_0^1 \min_{x\in M} H_t^\kappa = \int_0^1 \min_{x\in M} H_t - m(t) < \kappa$$

Il suit donc qu'on peut toujours supposer qu'on travail avec un tel hamiltonien pour un petit $\kappa \geq 0$ quelconque.

4.3.0.3 $R^H_\pm$: Les Régions au-dessus et en dessous de la Graphe

Étant donné un hamiltonien positivement $\kappa-$normalisé H engendrant l'isotopie h_t, on construira une famille d'approximations lisses aux « régions en dessus et en dessous du graphe » de H. Pour assurer que les objets qu'on construira soient lisses, fixons un petit $\varepsilon > 0$ et considérons deux fonctions lisses

$$\mu_-, \mu_+ : [0,1] \to \mathbb{R}$$

telles que $\mu_-(0) = \mu_+(0) = \mu_-(1) = \mu_+(1) = 0$, avec $-2\varepsilon \leq \mu_-(t) < 0$, $\max_{x\in M} H_t < \mu_+(t) \leq \max_{x\in M} H_t + 2\varepsilon$ pour $t \in (0,1)$ et

$$\int_0^1 \mu_+ - \max_{x\in M} H_t \, dt < \varepsilon$$
$$\int_0^1 \min_{x\in M} H_t - \mu_- \, dt < \varepsilon$$

et telles que l'union des graphes $\{(t,\mu_-(t))\} \cup \{(t,\mu_+(t))\} \subset [0,1]\times\mathbb{R}$ est l'image un plongement lisse $S^1 \hookrightarrow [0,1]\times\mathbb{R}$.

Définissons **la région en dessous du graphe** :

$$R^H_-(\varepsilon) := \{(x,t,s) \in (M\times[0,1]\times\mathbb{R}, \omega \oplus ds\wedge dt) : \mu_-(t) \leq s \leq H_t(x)\}$$

et la **région en dessus du graphe** :

$$R^H_+(\varepsilon) := \{(x,t,s) \in (M\times[0,1]\times\mathbb{R}, \omega \oplus ds\wedge dt) : H_t(x) \leq s \leq \mu_+(t)\}$$

Remarque. **Attention :** Ici on vient d'inverser l'orientation de $[0,1]\times\mathbb{R}$! L'effet est de forcer le feuilletage caractéristique du graphe Γ_H de suivre l'isotopie h_t^{-1} au lieu de h_t lorsqu'il est lu dans la direction positive. Ceci allégera notre notation dans la suite. On pourrait également partout remplacer H par $\bar{H}$ si ce changement nous dérange.

Note que $R^H_-(\varepsilon)$ est une variété lisse avec coins ; son bord est formé de deux variétés lisses de codimension 1 recollées le long des variétés $M\times 0\times 0$ et $M\times 1\times 0$. Le morceau en haut est Γ_H dont la monodromie de son feuilletage caractéristique est h_1^{-1} tandis que le morceau en bas est

$$\Gamma_{\mu_-} := \{(x,t,\mu_-(t)) \in M\times[0,1]\times\mathbb{R}\}$$

Mais on peut considérer ceci comme le graphe de l'hamiltonien

$$F : M\times[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$(x,t) \mapsto \mu_-(t)$$

qui engendre l'isotopie constante $t \mapsto id_M$ (comme $\mu_-(t)$ est constante sur M pour chaque

t), et donc la monodromie de son feuilletage caractéristique est triviale.

Notons aussi qu'on peut munir $R_-^H(\varepsilon)$ d'une structure de fibré symplectique au-dessus du disque $R_-^H(\varepsilon) \to D^2$. Une façon de voir ceci est comme suit
Note que la région

$$U_- := \{(t,s) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \mu_-(t) \leq s \leq \max_{x \in M} H_t\}$$

est homéomorphe par un homéomorphisme qui préserve l'aire

$$\psi : U_- \to D^2(a) \subset \mathbb{C}$$

avec $\psi(0,0) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{0i}$ au disque $D^2(a)$, le disque fermé d'aire a centré en l'origine. Pose ensuit

$$H_t^s := \begin{cases} \frac{s}{\max_{x \in M} H_t} H_t & s \in [0, \max_{x \in M} H_t] \\ s & s \in [\mu_-(t), 0] \end{cases} \tag{4.1}$$

et perturbe H_t^s sur un voisinage $s \in (-\delta, 0)$ pour un $\delta > 0$ tel que H_t^s est lisse. Ceci nous donne une famille à 1 paramètre d'hamiltoniens dont les graphes donnent un feuilletage de R_+^H et pour n'importe quel $b \in D^2$ écrivons $(t_b, s_b) := \psi^{-1}(b)$ et définissons

$$\pi^{-1}(b) := \{(x, t_b, H_{t_b}^{s_b}(x)) \in R_-^H(\varepsilon)\}$$

Alors si l'on marque le point $\psi(0,0) \in D^2(a)$ et si $\alpha(\tau) := \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-2\pi\tau i}$ est le chemin qui suit le bord du disque dans l'orientation positive alors on voit que $\pi^{-1}(\alpha) = \Gamma_H^+ \cup \Gamma_{\mu_-}^-$ où Γ_H^+ dénote qu'on suit Γ_H dans la direction positive, c'est-à-dire que lorsque τ s'augmente on traverse Γ_H de $t = 0$ vers $t = 1$ et $\Gamma_{\mu_-}^-$ dénote que lorsque τ continue d'augmenter on traverse Γ_{μ_-} dans la direction négative, alors dans ce trivialisation le transport parallèle autour du bord suit l'isotopie h_t^{-1} définie par H suivi par l'isotopie constante induite par μ_-, d'où l'holonomie de $R_-^H(\varepsilon)$ autour du lacet basé $\alpha(\tau)$ est h_1^{-1}.

On peut voir aisément que la discussion ci-haut s'adapte de manière directe à $R_+^H(\varepsilon)$, sauf qu'il faut noter que dans ce cas $\pi^{-1}(\alpha) = \Gamma_{\mu_+}^+ \cup \Gamma_H^-$ où cette fois-ci les signes indiquent que lorsque τ s'augmente on traverse en premier $\Gamma_{\mu+}$ dans l'orientation positive et ensuite on traverse le long de Γ_H dans l'orientation négative, et donc l'holonomie de ce chemin est induite par $\bar{H}(x,t) = -H(h_t x, t)$, d'où l'holonomie dans $R_+^H(\varepsilon)$ du lacet basé $\alpha(\tau)$ est h_1. On écrit typiquement $((R_H^+(\varepsilon), \Omega_0), \pi, D^2)$ et $((R_H^-(\varepsilon), \Omega_0), \pi, D^2)$ pour les fibrés ainsi construits, considérés comme des fibrés au-dessus du disque.

4.4 Da Capo : Mesurements Hoferiens et Les Fibrés Hamiltoniens

Proposition 4.4.1. *Soit $\varepsilon > 0$ et $H : [0,1] \times (M, \omega) \to \mathbb{R}$ un hamiltonien tel qu'on peut construire $(R_H^+(\varepsilon), \Omega_0)$ et $(R_H^-(\varepsilon), \Omega_0)$, les régions au-dessus et en dessous du graphe construit* *dans la section précédente, alors*

$$A((R_H^-(\varepsilon),\Omega_0)) = \mathscr{L}^-(H)+\varepsilon$$
$$A((R_H^+(\varepsilon),\Omega_0)) = \mathscr{L}^+(H)+\varepsilon$$

Démonstration. Ceci est un calcul direct :

$$\begin{aligned}
Vol(R_H^-(\varepsilon),\Omega_0) &= \frac{1}{n!}\int_{R_H^-(\varepsilon)} (proj_M^*\omega + proj_{\mathbb{R}^2}^* dt\wedge ds)^n \\
&= \frac{n+1}{(n+1)!}\int_{R_H^-(\varepsilon)} proj_M^*\omega^n \wedge proj_{\mathbb{R}^2}^*(dt\wedge ds) \\
&= \frac{1}{n!}\int_M\int_{t=0}^1\int_{s=\mu_-(t)}^{H_t(x)} \omega^n\wedge(dt\wedge ds) \\
&= \frac{1}{n!}\int_M\int_{t=0}^1 H_t(x)-\mu_-(t)\omega^n\wedge dt \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{t=0}^1\int_M (H_t(x)-\min_{x\in M} H_t(x))\omega^n\wedge dt + \int_{t=0}^1\int_M (\min_{x\in M} H_t(x)-\mu_-(t)\omega^n\wedge dt\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{t=0}^1 n!Vol(M,\omega)(c_t(H)-\min_{x\in M} H_t(x))dt + \int_M \varepsilon\omega^n\right) \\
&= \frac{n!Vol(M,\omega)}{n!}\int_0^1 c_t(H)-\min_{x\in M} H_t(x)dt+\varepsilon \\
&= Vol(M,\omega)(\mathscr{L}^-(H)+\varepsilon)
\end{aligned}$$

d'où $A((R_H^-(\varepsilon),\Omega_0) = \mathscr{L}^-(H)+\varepsilon$, et le calcul se fait pareillement pour $A((R_H^+(\varepsilon),\Omega_0))$. □

Soit $(P,\pi,(M,\omega),(B,\beta)$ un fibré symplectique au-dessus d'une base symplectique admettant des classes d'extension, et rappelons que l'argument de Thurston nous assure que pour tout $\beta\in\Omega^2(B)$ symplectique il existe une représentante τ de a qui s'accord sur les fibres avec la forme symplectique de la fibre et un $K>0$ assez grand que $\tau+K\pi^*\beta$ est symplectique. L'invariant suivant cherche à minimiser cette valeur de K relatif à β.

Définition 4.4.1 (Force de couplage d'une classe d'extension)**.** Pour chaque classe d'extension normalisée $a\in H^2(P;\mathbb{R})$ on désigne par **la force de couplage de** a **relative à** β la quantité

$$\varepsilon_\beta(a) := \sup_{\substack{a+K\pi^*[\beta]\text{ admet}\\ unerprsentantesymplectique}} \left\{\frac{1}{K}\right\}$$

4.5 Les Invariants des fibrés symplectiques au-dessus de la sphère

Dans ce qui suit $\lambda\in\pi_1(Ham(M,\omega),id_M)$ désigne toujours un lacet hamiltonien et (P_λ,π) son fibré au-dessus de la sphère (S^2,σ) avec $\int_S^2\sigma=1$, $a_\lambda\in H^2(P_\lambda;\,R)$ dénote la classe de couplage.

Définition 4.5.1. La taille de (P_λ, π) est défini par

$$taille(P_\lambda) := \inf_{\Gamma \text{ localement hamiltonienne}} A_{P,\pi,\omega}(\Gamma)$$

Remarque. Cette quantité est la réciproque de $size(P_\lambda)$ dans [21].

Théorème 4.5.1.

$$taille(P_\lambda) = \frac{1}{\varepsilon_\sigma(a_\lambda)} = \frac{1}{\chi^+(P_\lambda)}$$

Démonstration. Montrons que

$$\frac{1}{\chi^+(P_\lambda)} \geq taille(P_\lambda) \geq \frac{1}{\varepsilon_\sigma(a_\lambda)} \geq \frac{1}{\chi^+(P_\lambda)}$$

1. $\frac{1}{\varepsilon_\sigma(a_\lambda)} \geq taille(P_\lambda)$ **:** Ceci est immédiat. Si Ω_K est une forme symplectique représentant la classe $a_\lambda + K\pi^*[\sigma]$ alors $A(P_\lambda, \Omega_K) = K$. En prenant l'infimum sur toutes les formes symplectiques ayant cette forme, on obtient $\frac{1}{\varepsilon(P_\lambda)} \geq taille(P_\lambda)$.

2. $\frac{1}{\chi^+(P_\lambda)} \geq \frac{1}{\varepsilon_\sigma(a_\lambda)}$ **:** Choisissons une forme de couplage τ_Γ arbitraire. Comme il n'y a qu'une classe de couplage sur un fibré au-dessus d'un sphère, $[\tau_\Gamma] \in a_\lambda$, et par la définition de $\frac{1}{\chi^+(P_\lambda)}$ la forme

$$\tau_\Gamma + K\pi^*\sigma$$

   est symplectique pour tout $K > \frac{1}{\chi^+(P_\lambda)}$, d'où l'inégalité.

3. $\frac{1}{\chi^+(P_\lambda)} \geq taille(P_\lambda)$ **:** Soit Ω une forme symplectique quelconque sur P_λ et soit τ_Γ la forme de couplage associé à la connexion induite par Ω, alors

$$\Omega = \tau_\Gamma + K\pi^*\beta$$

   pour $\beta \in \Omega^2(S^2)$ fermée, mais comme la deuxième classe de cohomologie de la sphère est de dimension 1 sur les réels alors sans perte de généralité, $\Omega = \tau_\Gamma + A(P_\lambda, \Omega)\pi^*\sigma$. Toute forme $(\omega, \pi)-$compatible est non dégénéré sur les fibres et nulle pour des paires de vecteurs dont un est vertical et l'autre horizontal, alors il suffit de considérer les valeurs de Ω sur la distribution horizontale. Pour les vecteurs horizontaux, $h_1^\#, h_2^\#$ on a

$$\tau_\Gamma(h_1^\#, h_2^\#) = -\mathscr{H}^\Gamma(h_1, h_2)$$

   pour $\mathscr{H}^\Gamma \in \Omega^2(B, C_0^\infty(P_\lambda))$. Encore un fois, comme la deuxième classe de cohomologie de la sphère est de dimension 1, $\mathscr{H}^\Gamma = L^\Gamma\sigma$ pour $L^\Gamma \in C_0^\infty(P_\lambda)$ et alors

$$\begin{aligned}\Omega(h_1^\#, h_2^\#) &= \tau_\Gamma(h_1^\#, h_2^\#) + A(P_\lambda, \Omega)\sigma(h_1, h_2) \\ &= (A(P_\lambda, \Omega) - L^\Gamma)\sigma(h_1, h_2)\end{aligned}$$

et comme Ω est non dégénérée, ceci implique que

$$A(P_\lambda,\Omega) > L^\Gamma$$
$$\Rightarrow A(P_\lambda,\Omega) > \|\Gamma\|^+$$

et en prenant l'infimum sur toutes les formes symplectiques, on obtient

$$taille(P_\lambda) \geq \frac{1}{\chi^+(P_\lambda)}$$

□

4.6 Les fibrés hamiltoniens marqués au-dessus de S^2 et D^2

Définition 4.6.1. Soit $B := D^2$ ou S^2 désignons par un **fibré hamiltonien marqué au-dessus de** B l'ensemble des donnés suivant :

1. Un fibré symplectique $((P,\Omega),\pi,(M,\omega),B)$ avec Ω une forme symplectique $(\omega,\pi)-$compatible
2. Un choix d'un point $q \in \partial D^2 \simeq S^1$ si $B = D^2$ ou $q \in S^1$ avec S^1 identifié avec l'équateur si $B = S^2$
3. Un choix d'une identification $(M_q,\omega_q) \simeq (M,\omega)$
4. Un choix d'un trivialisation de S^1, soit celui induit par D^2 soi-même si $B = D^2$, soit le trivialisation de S^1 induit par le trivialisation du fibré au-dessus de l'hémisphère nord.

Pour un élément $\tilde{h} \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$, notons par $\mathscr{P}(\tilde{h},B)$ l'ensemble des fibrés hamiltoniens marqués au-dessus de B tel que l'holonomie autour de S^1 dans le trivialisation fixé est un représentant de $\tilde{h}$ et par $\mathscr{P}(h,B) = \cup_{\pi(\tilde{h})=h}\mathscr{P}(\tilde{h},B)$.

Définition 4.6.2. Pour $h \in Ham(M,\omega)$, $\tilde{h} \in \widetilde{Ham}(M,\omega)$ définissons

1. $\tilde{A}^+(\tilde{h}) := \inf\{A((P,\Omega),\pi) : (P,\Omega,\pi) \in \mathscr{P}(\tilde{h},D^2)\}$
2. $\tilde{A}^-(\tilde{h}) := \tilde{A}^+(\tilde{h}^{-1})$
3. $A^+(h) := \inf_{\pi(\tilde{h})=h}\tilde{A}^+(\tilde{h})$, $A^-(h) := \inf_{\pi(\tilde{h})=h}\tilde{A}^-(\tilde{h})$
4. $\tilde{A}(\tilde{h}) := \inf\{A((P,\Omega),\pi) : (P,\Omega,\pi) \in \mathscr{P}(\tilde{h},S^2), (P,\pi)$ symplectiquement trivial$\}$
5. $A(h) := \inf_{\pi(\tilde{h})=h}\tilde{A}(\tilde{h})$

La proposition suivante illumine l'importance de ces mesures.

Proposition 4.6.1.

$$\tilde{A}^+(\tilde{h}) = \tilde{\rho}^+_H(\tilde{h})$$

Démonstration. Comme $A(R_H^+\varepsilon), \Omega_0) = \mathscr{L}^+(H) + \varepsilon$ en minimisant sur tout les hamiltoniens induisant des isotopies dans la classe $\tilde{h}$ et en prenant $\varepsilon \to 0$, on voit

$$\tilde{A}^+(\tilde{h}) \leq \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$$

Donc il ne reste qu'à montrer $\tilde{A}^+(\tilde{h}) \geq \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$. Raisonnons par l'absurde qu'il existe un fibré $((P,\Omega),\pi,D^2)$ avec holonomie $\tilde{h}$ le long du bord $(\partial D^2, b_0)$ et $A(P,\Omega) < \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$. Fixons une identification de la fibre au-dessus du point de base avec la fibre modèle $(M_{b_0}, \omega_{b_0}) \simeq (M,\omega)$, alors par le théorème 2.2.4 il existe un symplectomorphisme d'un voisinage $\pi^{-1}(\mathscr{N}(b_0))$ tel que Ω est une forme produite sur $\pi^{-1}(\mathscr{N}(b))$, étendons ceci à un trivialisation global : identifions D^2 avec le carré d'unité C

$$C = \{(x,y) : x,y \in [0,1]\}$$

d'une telle manière que $\mathscr{N}(b)$ est envoyé en $N := \partial C - \big(1\} \times (0,1)\big)$ et $b \mapsto (0,0)$. Ensuite, pour chaque $x \in [0,1]$, soient $\gamma_x(t) := (x,t)$ le chemin vertical et

$$\Phi_t^x := \Phi_{\gamma_x(t)} : (M_x, \omega_x) \simeq (M,\omega) \to (M_{\gamma_x(t)}, \omega_{\gamma_x(t)})$$

l'holonomie associée par rapport à la connexion induite par Ω. Choisissons un trivialisation symplectique par fibres au-dessus du disque en posant

$$\begin{aligned} T : C \times (M,\omega) &\to P \\ (\gamma_x(t), m) &\mapsto (\Phi_t^x)^{-1}(m) \end{aligned}$$

Alors dans ce trivialisation, $\Omega_T := T^*\Omega$ est de la forme

$$\begin{aligned} \Omega_T := {} & \omega + d^M H_1(x,y,m) \wedge dx + d^M H_2(x,y,m) \wedge dy \\ & - (\frac{d}{dx} H_2(x,y,m) - \frac{d}{dy} H_1(x,y,m) dx) \wedge dy + a(x,y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

car toute forme symplectique s'écrit comme la somme d'une forme de couplage et d'une forme symplectique sur la base (et donc une forme d'aire ici). Mais l'holonomie dans les directions horizontales est nulle, par notre construction du trivialisation, alors Ω_T s'écrit comme

$$\Omega_T = \omega + d^M H_2 \wedge dy - \frac{d}{dx} H_2 dx \wedge dy + a(x,y) dx \wedge dy$$

où H_2 (et alors $\frac{d}{dx}H_2$) s'annul(ent) sur N et $A(P,\Omega) = \int_C a(x,y)$. Notons que dans ce trivialisation, l'holonomie originale $\{h_t\} \in \tilde{h}$ est donnée par l'holonomie du chemin $\gamma_{(1,0)}(t)$ et que ceci est homotope à l'isotopie $\Phi_s := \{\Phi_1^{(s,0)}\}_{s \in [0,1]}$: l'homotopie

$$H^\nu(t) := \begin{cases} \Phi_\nu^{(2t,0)} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_{2(1-\nu)(t-1)+1} \circ \Phi_\nu^{(1,0)} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est un reparamétrage de h_t pour $\nu = 0$ et un reparamétrage de Φ_s pour $\nu = 1$ (et bien sûr les reparamétrages sont homotopes aux isotopies originales). On voit alors que $\mathscr{L}^+(\Phi_s) \geq \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$, mais on montrera que $\mathscr{L}^+(\Phi_s) < \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$.

Soient X^s, Y^t les flots des champs vectoriels $\frac{\partial}{\partial x}^\# = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}^\# = -X_{H_2} + \frac{\partial}{\partial y}$ où $\iota(X_{H_2})\omega = -d^M H_2$, respectivement, et soit $h_t^s = Y^t \circ X^s$. Posons v_s^t pour le champ vectoriel engendré par h_t^s dans la $s-$direction partout qu'il soit défini,

$$v_t^s(x,y,m) = \partial_s h_t^s(x,y,m) = Y_*^t \frac{\partial}{\partial x}^\# ,\ (x,y,m) \in im\, h_s^t$$

Notons que $X^s, Y^t = \mathrm{id}$ pour $(x,y) \in N$ et donc en particulier, v_t^s est bien défini pour des tels points, que $\Phi_s = h_1^s$ et aussi que $\partial_t h_t^s = \frac{\partial}{\partial y}^\#$, alors

$$\begin{aligned}\partial_t v_t^s &= \frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial y}^\# - [\frac{\partial}{\partial y}^\#, Y_*^t \frac{\partial}{\partial x}^\#] = -[\frac{\partial}{\partial y}^\#, Y_*^t \frac{\partial}{\partial x}^\#] \\ &= -Y_*^t[\frac{\partial}{\partial y}^\#, \frac{\partial}{\partial x}^\#]\end{aligned}$$

et alors, calculons

$$\begin{aligned}v_1^s &= \int_0^1 \partial_t v_t^s\, dt + v_0^s \\ &= -\int_0^1 Y_*^t[\frac{\partial}{\partial y}^\#, \frac{\partial}{\partial x}^\#]\, dt + \frac{\partial}{\partial x} = \int_0^1 Y_*^t[\frac{\partial}{\partial x}^\#, \frac{\partial}{\partial y}^\#]\, dt + \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Par nos travaux sur la forme de courbure, on sait que

$$\begin{aligned}\iota([\frac{\partial}{\partial x}^\#, \frac{\partial}{\partial y}^\#])\omega &= -\partial_x d^M H_2 - \omega(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - X_{H_2}) \\ &= -\partial_x d^M H_2 = -d^M \partial_x H_2\end{aligned}$$

Donc $[\frac{\partial}{\partial x}^\#, \frac{\partial}{\partial y}^\#] = X_{\partial_x H_2}$, et

$$Y_*^t[\frac{\partial}{\partial x}^\#, \frac{\partial}{\partial y}^\#] = X_{(\partial_x H_2)\circ(Y^t)^{-1}}$$

et alors

$$\begin{aligned}v_1^s(s,1,m) &= \int_0^1 X_{(\partial_x H_2)\circ(Y^t)^{-1}}(s,1,m)\, dt + \frac{\partial}{\partial x} \\ &= I_\omega^{-1}\Big(\int_0^1 (\partial_x H_2)(s, 1-t, (Y^t)^{-1}(m))\, dt + \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

où $I_\omega(X_H) = -dH$. Notons finalement que l'isotopie Φ_s est engendrée par les parties verticales des v_1^s, alors l'hamiltonien qui l'engendre est exactement

$$F_s := \int_0^1 (\partial_x H_2)(s, 1-t, (Y^t)^{-1}(m))\, dt$$

On voit alors que Φ_s est engendré par un hamiltonien qui vérifie

$$F_s(m) \leq \int_0^1 \max_{m \in M} \partial_x H_2\, dt$$

mais comme Ω_T est symplectique, il faut que

$$-\frac{d}{dx} H_2 dx \wedge dy + a(x,y) dx \wedge dy > 0$$
$$\Leftrightarrow\ a(x,y) > \frac{d}{dx} H_2 dx$$

alors $F_s(m) < \int_0^1 a(x,y)\, dt$ et

$$\mathscr{L}^+(F_s) = \int_0^1 \max m \in M F_s\, ds < \int_C a(x,y) = A(P, \Omega)$$

(rappel que F_s est normalisé, car $\partial_x H_2$ l'est), mais ceci est une contradiction, d'où la proposition. $\square$

Le corollaire suivant est immédiat

Corollaire 4.6.1. *Pour $h \in Ham(M, \omega)$, $\tilde{h} \in \widetilde{Ham}(M, \omega)$*

$$\tilde{A}^-(\tilde{h}) = \tilde{\rho}_H^-(\tilde{h}), \qquad A^+(h) = \rho_H^+(h), \qquad A^-(h) = \rho_H^-(h)$$

On aimerait pouvoir combiner ces mesures d'une manière cohérente, et qui nous mène au lemme suivant

Lemme 4.6.1. *Soit $((P_1, \Omega_1), \pi_1, D_1)$ et $((P_2, \Omega_2), \pi_2, D_2)$ deux fibrés hamiltoniens marqués au-dessus du disque et suppose que $P_1 \in \mathscr{P}(h, D^2)$,$P_2 \in\in \mathscr{P}(h, D^2)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fibré hamiltonien marqué $(P_1 \# P_2, \Omega', \pi', S^2) \in \mathscr{P}(h, S^2)$ tel que*

$$A(P_1 \# P_2) < A(P_1) + A(P_2) + \varepsilon$$

Démonstration. Identifions D_1 avec le disque $D_+^2 = \{re^{2\pi it} | r, t \in [0,1]\}$ muni de l'orientation usuel et D_2 avec le disque D_-^2 muni de l'orientation opposée. Identifions $(M_1, \omega_1) \simeq (M, \omega)$ pour les deux fibrés, alors on est donné que l'holonomie autour du lacet $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ par rapport à la connexion induit par Ω_1 est l'isotopie h et par rapport à la connexion induite par Ω_2 est h^{-1}. Soient $h_t^1 : (M_1, \omega_t) \to (M_{\alpha(t)})$ et $h_t^2 : (M_1, \omega_t) \to (M_{\alpha(t)})$ les holonomies autour de $\alpha(t)$ dans P_1 et P_2 respectivement et note alors que l'application $\Psi : \pi_1^{-1}(S^1) \to \pi_2^{-1}(S^1)$

$$\begin{aligned}\Psi_t : \pi_1^{-1}(\alpha(t)) &\to \pi_2^{-1}(\alpha(-t))\\ p &\mapsto (h^2_{1-t}) \circ (h^2_1)^{-1} \circ (h^1_t)^{-1}(p)\end{aligned}$$

respecte les orientations des fibrés et envoie l'holonomie autour du bord de P_1 à l'holonomie autour du bord de P_2, mais les holonomies ne sont rien que les feuilletages caractéristiques des sous-variétés coisotropes $\pi^{-1}(\alpha(t))$ dans P_1 et $\pi^{-1}(\alpha(-t))$ dans P_2, alors Ψ préserve les feuilletages caractéristiques. On aimerait ensuite appliquer le théorème 2.2.4 pour obtenir un difféomorphisme symplectique dans des voisinages des bords les longs desquels on pourrait recoller les fibrés symplectiquement, mais il y a une issue un peu subtile ; il faut faire les recollements d'une manière qui préserve la structure de fibré hamiltonien. Pour faire ceci, on va montrer qu'on peut choisir une telle identification d'une manière que les fibres de P_1 sont envoyés en des fibres dans P_2 ayant le même rayon, ce qui va nous permettre de préserver les fibres d'une manière symplectique. À cette fin, pour un $\delta > 0$ prenons une fonction sur le disque qui est lisse et de la forme

$$H(r,t) := \begin{cases} r & r \in (1-\delta, 1] \\ Q(r,t) & r \in (1-2\delta, 1-\delta] \\ c & r \notin (1-2\delta, 1] \end{cases}$$

pour $Q(r,t)$ une fonction et $c \in \mathbb{R}$ un constant, et définissons des hamiltoniens F_1, F_2 sur P_1 et P_2 par

$$\begin{aligned}F_1 &:= H \circ \pi_1\\ F_2 &:= H \circ \pi_2\end{aligned}$$

Notons que dans un voisinage du bord du disque $X_{F_i} = X_{H_i}^{\#_i} = \frac{\partial}{\partial t}^{\#_i}$ où $Y^{\#_i}$ désigne le relèvement horizontal par rapport à la connexion induite par Ω_i, $i = 1, 2$. Il suit donc que les flots hamiltoniens à temps t s'accordent avec les isotopies autour des bords : $\psi^t_{F_i}(p) = h^i_t(p)$ pour $p \in \pi_i^{-1}(\alpha(t))$. Alors les applications ψ^t nous permettent d'étendre notre identification initiale à un voisinage des bords :

$$\begin{aligned}\Psi_F : \pi_1^{-1}\Big((1-\delta, 1] \times S^1\Big) &\to \pi_2^{-1}\Big((1-\delta, 1] \times S^1\Big)\\ p &\mapsto (\psi^{1-t}_{F_2}) \circ (\psi^1_{F_2})^{-1} \circ (\psi^t_{F_1})^{-1}(p)\end{aligned}$$

Comme les sous-variétés coisotropes sont déterminées à un voisinage près par leurs feuilletages isotropes (théorème 2.2.4) il suit qu'on peut étendre P_1 à une variété symplectique P_1^ε sur un voisinage collier externe $C_1^\varepsilon = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times S^1$ de D_1^2 et la même est vrai de P_2 avec un voisinage collier interne $C_2^\varepsilon = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times S^1$ et que l'identification Ψ^F s'étend par théorème 2.2.4 à un difféomorphisme symplectique

$$\tilde{\Psi}_F : \pi_1^{-1}(C_1^\varepsilon) \to \pi_2^{-1}(C_2^\varepsilon)$$

qui envoie un voisinage de $\pi^{-1}(\{1\} \times S^1)$ dans P_1^ε symplectiquement en un voisinage de $\pi^{-1}(\{1\} \times S^1)$ dans P_2^ε. Recollons donc P_1 et P_2 par $\tilde{\Psi}_F$, c'est à dire, définissons l'espace total

$$P_1 \# P_2 := P_1 \sqcup P_2 / \{P_1 \ni p_1 \sim \tilde{\Psi}_F(p) \in P_2\}$$

Le problème maintenant est que $\tilde{\Psi}_F$ ne préserve par les fibres en général, alors même si on a construit un espace total, il faut toujours montrer qu'on peut choisir une application de projection $\pi_1 \# \pi_2$ telle que $(P_1 \# P_2, \pi_1 \# \pi_2)$ est un fibré hamiltonien. Comme $\tilde{\Psi}_F$ étend Ψ_F pour $M^1_{(r,t)} := \pi_1^{(r,t)}, (r,t) \in C_1^\varepsilon$,

$$\tilde{\Psi}_F(M^1_{(r,t)}) \subset \pi_2^{-1}((1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \{1-t\})$$

et $\tilde{\Psi}_F(M^1_{(1,t)}) = \pi_2^{-1}((1, 1-t))$, alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\tilde{\Psi}_F(M^1_{(r,t)})$ est isotope par une isotopie $\{\Upsilon^s_{(r,t)}\}_{s \in [0,1]}$ avec

$$\Upsilon^1_{(r,t)} : \tilde{\Psi}_F(M^1_{(r,t)}) \to \pi_2^{-1}((1, 1-t)$$

alors pour $p \in \pi^{-1}(C_1^\varepsilon)$ on pose $\pi_1 \# \pi_2(p) := \pi_1(p)$ et pour $p \in \tilde{\Psi}_F(M^1_{(r,t)}) \subset \pi^{-1}(C_2^\varepsilon)$ on pose $\pi_1 \# \pi_2(p) := \pi_2(\Upsilon^1_{(r,t)} p)$ et on utilise les projections naturelles si p est hors de la région de recollement. C'est claire par construction que cette projection est bien définie et que l'aire du fibré résultant respecte la borne dans l'énoncé. $\square$

En général, le lemme 4.6.1 n'exige rien sur les isotopies autour des bords des disques, seulement que les holonomies totales soient mutuellement inverses alors il n'y a aucune raison que le fibré résultant soit trivial symplectiquement. En général si l'holonomie de P_1 autour du bord du disque est h_t^1 et h_t^2 l'holonomie de P_2 alors $P_1 \# P_2 \simeq P_\lambda$ pour $\lambda = [(h_t^2)^{-1} \circ (h_t^1)]$. Ce qui préfigure l'importance des fibrés au-dessus de S^2 ; ils contrôlent la géométrie possible des recollements des régions au-dessus et en dessous des graphes des hamiltoniens. Remarquons que sous l'identification du lemme, si les holonomies de $P_1 \in \mathscr{P}(\tilde{h}, D^2)$, $P_2 \in \mathscr{P}(\tilde{h}^{-1}, D^2)$ alors les deux fibrés se recollent tel que $P_1 \# P_2$ est trivial symplectiquement. Ce qui inspire la définition suivante

Définition 4.6.3. Désignons par **la séminorme fibré** de $h \in Ham(M, \omega)$ la quantité

$$\rho_f(h) := \inf_{\pi(\tilde{h}) = h} \{\tilde{\rho}_H^+(\tilde{h}) + \tilde{\rho}_H^-(\tilde{h})\}$$

Remarque. Notons que ce n'est pas le cas que $\rho_f(h) = \rho_H(h)$ car en principe, il se peut que le chemin dans $\tilde{h}$ qui minimise $\tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$ est différent que celui qui minimise $\tilde{\rho}_H^-(\tilde{h})$, mais on a de toute façon

$$\rho_f(h) \leq \rho_H(h)$$

De plus, le lemme de recollement nous donne :

Corollaire 4.6.2.

$$A(h) = \rho_f(h)$$

Démonstration. Si $\{h_t^+\}$ et $\{h_t^-\}$ sont des chemins homotopes, induits par les hamiltoniens H^+ et H^- respectivement, tels que

$$\mathscr{L}^+(h_t^+) + \mathscr{L}^-(h_t^-) < \rho_f(h) + \varepsilon$$

alors en recollant les fibrés $R^+_{H^+}(\varepsilon)$ et $R^-_{H^-}(\varepsilon)$ par le lemme ci-haut, on obtient un fibré trivial au-dessus de la sphère d'aire inférieure à $\rho_f(h) + 3\varepsilon$ avec holonomie h, pour tout $\varepsilon > 0$, alors $A(h) \leq \rho_f(h)$, inversement, si l'holonomie autour de l'équateur d'un fibré trivial au-dessus d'une sphère est h, alors les fibrés induits par les inclusions de l'hémisphère nord et l'hémisphère sud sont des fibrés au-dessus du disque avec les holonomies inversement homotopes et alors leurs aires sont bornées par $\tilde{A}^+(\tilde{h}) = \tilde{\rho}_H^+(\tilde{h})$ et $\tilde{A}^-(\tilde{h}) = \tilde{\rho}_H^-(\tilde{h})$, et alors $A(h) \geq \rho_f(h)$ □

On voit aussi facilement que

$$\tilde{A}(\tilde{h}) = \tilde{\rho}_H(\tilde{h})$$

et alors lorsqu'on veut souligner qu'on est en train d'imaginer $\tilde{\rho}_H(\tilde{h})$ dans des termes géométriques, on écrit $\tilde{\rho}_f := \tilde{\rho}_H$.

On obtient aussi :

Corollaire 4.6.3.

$$taille(P_\lambda) = \tilde{\rho}^+(\lambda)$$

Démonstration. Ceci est essentiellement une conséquence du fait que le fibré P_λ n'est rien que le recollement d'un fibré au-dessus du disque avec holonomie décrite par le lacet λ et un disque avec holonomie triviale : soit $(P_\lambda^\varepsilon, \Omega_\varepsilon) \to D^2$ une suite de fibrés hamiltoniens au-dessus du disque telle que

$$A(P_\lambda^\varepsilon, \Omega_\varepsilon) < \tilde{\rho}^+(\lambda) + \varepsilon$$

et $(Q_\varepsilon, \Omega_Q) \to D^2$ une suite de fibrés triviaux au-dessus du disque d'aire ε (alors l'holonomie est triviale). Comme le disque est contractile, ces fibrés sont topologiquement triviaux, et donc le recollement du lemme 4.6.1 produit le fibré P_λ avec une forme symplectique Ω'_ε telle que $A(P_\lambda, \Omega'_\varepsilon) \leq \tilde{\rho}^+(\lambda) + 2\varepsilon + \delta$ pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, d'où $taille(P_\lambda) \leq \tilde{\rho}^+(\lambda)$.

Inversement, si Ω est une forme symplectique sur P_λ quelconque, soit $i_+^*P_\lambda \to D_+^2$ le fibré induit par l'inclusion de l'hémisphère nord dans la construction de P_λ comme un quotient, alors $i_+^*P_\lambda$ est un fibré au-dessus du disque avec holonomie λ et forcément $\tilde{A}(i_+^*P_\lambda, i_+^*\Omega) \geq \tilde{\rho}^+(\lambda)$, et alors $A(P_\lambda, \Omega) \geq \tilde{\rho}^+(\lambda)$ d'où la proposition. □

Concluons en introduisant une notion et un théorème dont on aura besoin dans la suite, qui lient d'une manière directe l'aire du fibré hamiltonien d'un lacet et sa norme.

Définition 4.6.4. Soit (M^2n, ω) une variété symplectique et $\lambda \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$, alors on dit que (P_λ, π) possède **la propriété de non-écrasement pondérée** s'il existe un $\kappa \in \mathbb{R}$, $|\kappa| \leq \max(\tilde{\rho}^+\lambda, \tilde{\rho}^-\lambda)$ tel que l'existence d'un plongement symplectique $\psi : B^{2n+2}(a) \hookrightarrow P_\lambda$ de la balle standard de capacité a implique

$$a \leq \min\{A(P_\lambda) + \kappa, A(P_{-\lambda}) - \kappa\}$$

Théorème 4.6.1 (McDuff [16]). *Soit (M,ω) une variété symplectique fermée, alors il existe un constant $\hbar(M) > 0$ tel que pour tout lacet $\lambda \in \pi_1(Ham(M,\omega), id_M)$ vérifiant*

$$\tilde{\rho}^+(\lambda), \tilde{\rho}^-(\lambda) < \frac{\hbar(M)}{2}$$

(P_λ, π) possède la propriété de non-écrasement pondérée.

Nous ne démontrerons pas ce théorème, car, encore une fois, cela demandera trop d'espace pour bien développer toutes les notions requises pour le prouver, pourtant sa preuve suggère que les fibrés hamiltoniens nous fournissent d'une cadre utile pour lier la théorie des courbes holomorphes et les mesurément dans la géométrie de Hofer, donc esquissons les idées principales :
Pour un fibré symplectique $(P, \pi, (M,\omega), (B,\beta)$ admettant des classes d'extension au-dessus d'une base symplectique une fois qu'on fixe une classe d'extension on peut considérer des formes symplectiques sur l'espace total de la forme $\tau_\Gamma + K\pi^*\beta$ pour Γ une connexion localement hamiltonienne quelconque. Chaque connexion nous fournit d'un scindement du fibré tangent de l'espace total en une distribution verticale (isomorphe sur chaque fibre de B comme un fibré vectoriel symplectique au fibré tangent symplectique de (M,ω)) et une distribution horizontale (isomorphe comme fibré vectoriel symplectique à l'espace tangent symplectique de (B,β)). On peut alors utiliser ces isomorphismes pour définir des structures presque complexes sur l'espace total $\tilde{J}_{J_B,J_V,\Gamma}$ qui correspondent par les isomorphismes horizontaux et verticaux à un choix de structures presque complexes sur la base J_B et sur la fibre J_V.

Lorsque la base est une surface de riemann, on peut définir ainsi une notion de « sections pseudo-holomorphes » (voir, par exemple [18] lorsque les bases sont des surfaces de riemann ou [6] pour une extension aux bases symplectiques dans le cas d'une fibre semi-positive relative à l'espace total), qui sont des sections du fibré

$$u : (\Sigma_g, j_\Sigma) \to (P, \tilde{J})$$

vérifiant $\bar{\partial}_{\tilde{J}, j_\Sigma}(u) = 0$ pour une opératrice différentielle qui dépend du choix des structures presque complexes. Les applications dans le noyau d'une telle opératrice vérifient une borne sur leur énergie en termes du retiré un arrière de la forme symplectique sur M et la norme de la courbure de la connexion choisie, ce qui nous permet de développer une théorie d'invariants Gromov-Witten pour énumérer des telles sections représentant une classe d'homologie fixée, et il en sort que le nombre de telles applications dans chaque classe d'homologie (de sections) de P est invariant sous des perturbations génériques de la connexion choisie et la structure presque complexe choisie sur l'espace total.

On utilise ensuite cette théorie pour montrer que l'orbite d'un point $x \in M$ sous tout lacet de difféomorphismes hamiltoniens est contractile (cf. corollaire 2.6.5 où on a établi que les orbites sont nullhomologues), ce qui implique que les fibrés (P_λ, π) possèdent des sections pour $\lambda \in \pi_1(Ham(M, \omega), id_M)$. On définit ensuite une application Ψ_σ entre le groupe fondamental de $Ham(M, \omega)$ et les automorphismes de la cohomologie quantique de M en associant à chaque tel lacet une classe de cohomologie quantique qui énumère pour chaque classe d'homologie de M les intersections avec les représentants pseudoholomorphes d'une section σ dans P_λ dans une fibre fixée. En utilisant la classe de couplage et la classe de Chern de la distribution verticale, il se trouve qu'on peut choisir une section canonique σ_λ de chaque fibré tel que

$$\Psi_{\sigma_{id_M}}(\widetilde{id_M}) = id_{QH^*}, \qquad \Psi_{\sigma_{\lambda_1+\lambda_2}} = \Psi_{\sigma_{\lambda_1}} \circ \Psi_{\sigma_{\lambda_2}}$$

(voir [12] pour le cas semipositive et [15] pour les détails en général) On obtient alors une *représentation* de $\pi_1(Ham(M, \omega))$ dans la cohomologie quantique, dite la **représentation de Seidel**. Muni de cette représentation, on peut garantir l'existence des sections pseudoholomorphes passant par chaque point de la fibre avec une aire bornée par $\min\{A(P_\lambda) + \kappa, A(P_{-\lambda}) - \kappa\}$ lorsque $\tilde{\rho}_H(\lambda)$ est assez petit, d'où tout plongement symplectique de la balle standard contient une telle section qu'on peut retirer par le plongement symplectique pour obtenir une courbe holomorphe dans la balle standard qui est alors forcément une surface minimale, ce qui borne nécessairement la capacité de $B^{2n+2}(a)$.

Notons finalement que ce théorème contient comme cas particulier le théorème de non-écrasement standard établi pour les variétés du forme $(M, \omega) \times S^2$ dans [9] comme le fibré trivial au-dessus de la sphère est le fibré correspondant au lacet hamiltonien constant $[0] \in \pi_1(Ham(M, \omega), id_M)$ et c'est clair que $[0]$ vérifie les hypothèses du théorème pour toute variété (M, ω).

4.7 Non-dégénérescence de la Norme de Hofer

Le but de cette section est de donner une preuve du fait que la norme de Hofer

$$\rho_H(.) : Ham(M,\omega) \to [0,\infty)$$

est non-dégénérée lorsque (M,ω) est une variété fermée. À vrai dire ceci est vrai pour toute variété symplectique sans aucune restriction, un fait dû originalement à Lalonde-McDuff dans [9] par une preuve qui évite complètement les invariants de Gromov-Witten et qui établit l'existence des courbes pseudo-holomorphes nécessaires par des arguments géométriques abstrus. La preuve que l'on présente ici suit celui décrit dans [16] qui utilise en grande partie l'étude des géodésiques de la métrique hoferienne réalisée dans les parties I et II de [10].

Notre objet sera de montrer que ρ_f est une norme, ce qui impliquera la non-dégénérescence de la norme de Hofer. La bi-invariance des séminormes sur $Ham(M,\omega)$ est utile dans cette tâche parce que, comme l'est constaté par le lemme suivant, ça réduit énormément ce qu'il faut montrer

Lemme 4.7.1. *Tout séminome bi-invariante sur $Ham(M,\omega)$ est soit une norme, soit identiquement nulle.*

Démonstration. Soit

$$\nu : Ham(M,\omega) \to [0,+\infty)$$

une séminorme bi-invariante, alors $\ker(\nu) \subset Ham(M,\omega)$ est un sous-groupe normal de $Ham(M,\omega)$, mais par un théorème de Banyaga, $Ham(M,\omega)$ est un groupe simple d'où soit $\ker(\nu)$ est trivial, soit $\ker(\nu) = Ham(M,\omega)$. □

Notre but donc est de montrer que ρ_f n'est pas identiquement nulle sur $Ham(M,\omega)$, la stratégie pour ceci sera de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur des fonctions hamiltoniennes pour qu'ils engendrent des isotopies dans $Ham(M,\omega)$ qui minimisent ρ_f, et il en sortira qu'en particulier, toute isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien suffisamment petit et qui ne dépend pas du temps serait un géodésique, d'où ρ_f est non nul pour au moins un difféomorphisme hamiltonien, et alors par le lemme précédent, ρ_f est une norme.

4.7.1 Géodésiques de $\tilde{\rho}_f$ et ρ_f

Définition 4.7.1 (La pseudo-métrique induite par une séminorme bi-invariante)**.** Soit G un groupe topologique et soit $\nu : G \to [0,\infty)$ une séminorme bi-invariante alors ν induit une pseudo-métrique $d_\nu(.,.)$ sur G en posant $\forall g,h \in G$

$$d_\nu(g,h) := \nu(hg^{-1})$$

On voit aisément que la bi-invariance de ν implique que d_ν est invariante sous la multiplication à droit et à gauche dans les deux arguments : $\forall g,h,k \in G$

$$d_\nu(kg,kh) = d_\nu(gk,hk) = d_\nu(g,h)$$

On notera par d_f la pesudo-métrique induite par ρ_f.

Définition 4.7.2 (Régularité des chemins)**.** Soit $\alpha : [a,b] \to G$ un chemin lisse dans un groupe topologique muni d'une structure lisse, on dit que α est **régulier** si $\forall t \in [a,b]$

$$\dot{\alpha}(t) \neq 0$$

Notons que pour des chemins dans $Ham(M,\omega)$ cette condition correspond à insister sur le fait que l'hamiltonien qui induit α vérifie $H_t \neq c$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in [a,b]$.

Définition 4.7.3 (Les propriétés qui s'obtiennent en chaque moment)**.** Soit $\{\alpha_t\}_{t\in[a,b]}$ un chemin dans un groupe topologique G alors une propriété $\mathscr{P}$ des chemins est dite **d'obtenir en chaque moment** si pour tout $s \in [a,b]$ il existe un voisinage fermé $[a_s,b_s] \supset s$ tel que la propriété $\mathscr{P}$ soit vérifiée pour le chemin

$$\{\alpha_t \circ \alpha_{a_s}^{-1}\}_{t\in[a_s,b_s]}$$

Définition 4.7.4 (Chemins qui minimisent la distance)**.** Soit (M,d) une variété lisse munie d'une pseudo-métrique d et soit $\ell : C^\infty([0,1],M) \to [0,\infty)$ une fonctionnelle de longueur (peut-être dégénérée) sur l'espace des chemins dans M avec $\ell(\alpha\circ\phi) = \ell(\alpha)$ pour n'importe quel difféomorphisme $\phi : [0,1] \to [0,1]$. Soit $\mathscr{P}(x,y) \subset C^\infty([0,1],M)$ le sous-espace des chemins qui commencent à x et qui terminent à y, alors on dira qu'un chemin $\alpha \in \mathscr{P}(x,y)$ **mesure** d **par** ℓ ou simplement que α est $d-$**mesurant** si ℓ est compris si

$$d(x,y) = \ell(\alpha)$$

Note qu'étant donné n'importe quelle fonctionnelle de longueur ℓ comme ci-haut, on peut étendre ℓ à une famille de fonctionnelles

$$\ell_{a,b} : C^\infty([a,b],M) \to [0,\infty)$$

en posant $\ell_{a,b}(\alpha) := \ell(\alpha\circ\phi)$ pour tout difféomorphisme

$$\phi : [a,b] \to [0,1]$$

alors il est sensible de parler des chemins qui sont $d-$mesurant en chaque moment.

Exemple 4.7.1. Sur $Ham(M,\omega)$ nous avons la fonctionnelle de longueur $\mathscr{L} = \mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-$, alors un chemin qui est ρ_f-mesurant par $\mathscr{L}$ est un chemin hamiltonien $\alpha(t) = h_t$ tel que

$$\begin{aligned}\rho_f(h_1 h_0^{-1}) &= d_f(h_0, h_1)\\ &= \inf_{\gamma\in\mathscr{P}(h_0,h_1)} \mathscr{L}^+(\gamma) + \inf_{\gamma\in\mathscr{P}(h_0,h_1)} \mathscr{L}^-(\gamma)\\ &= (\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)(h_t)\end{aligned}$$

Notons qu'un tel chemin mesure forcément ρ_H par $\mathscr{L}$ aussi.

Exemple 4.7.2. Avec un chemin $\alpha : [0,1] \to \widetilde{Ham}(M,\omega)$, on peut obtenir un autre chemin $\pi\circ\alpha : [0,1] \to Ham(M,\omega)$ où π est la projection du revêtement universel. On peut alors remonter la fonctionnelle de longueur $\mathscr{L}$ à une fonctionnelle $\tilde{\mathscr{L}}$ sur $\widetilde{Ham}(M,\omega)$ en posant

$$\tilde{\mathscr{L}}(\alpha) := (\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)(\pi\circ\alpha)$$

Soit ensuit α un chemin avec $\alpha(0) = \tilde{id_M}$ le lacet constant et $\alpha(1) = \tilde{\varphi}_1$, et supposons que α mesure $\tilde{d}_f$ par $\tilde{\mathscr{L}}$, on voit

$$\begin{aligned}\tilde{d}_f(id, \tilde{\varphi}_1) &= \tilde{\rho}_f(\tilde{\varphi})\\ &= \inf_{\gamma\in\tilde{\varphi}} \mathscr{L}^+(\gamma) + \mathscr{L}^-(\gamma)\\ &= (\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)(\pi\circ\alpha)\end{aligned}$$

Alors des tels chemins (ou, à vrai dire, leurs projections) peut être compris comme des chemins qui minimisent $\mathscr{L}$ relatif à leur classe d'homotopie.

Définition 4.7.5 (Les géodésiques)**.** Soient G un groupe lisse, ℓ une fonctionnelle de longueur et d une métrique sur G. On désignera par un $(d,l)-$**géodisique** (ou simplement un d-géodésique s'il n'y a aucun risque de confusion) tout chemin $\alpha : [0,1] \to G$ qui vérifie :

1. α est régulier
2. α est $(d,\ell)-$mesurant en chaque moment.

Exemple 4.7.3. Un chemin $\alpha : [0,1] \to \widetilde{Ham}(M,\omega)$ est un $(\tilde{d}_f,\tilde{L})$-géodésique si pour tout $s \in [0,1]$ il existe un voisinage fermé de s, $[a_s,b_s]$ tel que le chemin

$$\{\pi\circ(\alpha_t\alpha_{a_s}^{-1})\}_{t\in[a_s,b_s]}$$

minimise $\mathscr{L}$ relatif tout les chemins dans sa classe d'homotopie.

Notre but est maintenant de caractériser les $(\tilde{d}_f,\tilde{L})$-géodésiques. À cette fin, on aura les définitions suivantes :

Définition 4.7.6 (les maximums et minimums fixés)**.** Soit $H : [0,1]\times M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien, on définit les ensembles de **maximums fixés** et **minimums fixés** respectivement par :

$$\text{maxset } H_t := \{x \in M : \ H_t(x) = \max_{p \in M} H_t(p)\}$$
$$\text{minset } H_t := \{x \in M : \ H_t(x) = \min_{p \in M} H_t(p)\}$$

Exemple 4.7.4 (Exemple Important)**.** Pour donner une illustration de la raison que les objets qu'on vient juste de définir pourraient nous intéresser, et pour donner un cas illustratif d'un théorème qui s'en vient, montrons que si $\tilde{\alpha}$ est un chemin dans $\widetilde{Ham}(M,\omega)$ tel que $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ est induit par un hamiltonien H avec la propriété que pour quelques $t_0, t_1 \in (0,1)$

$$\text{maxset } H_{t_0} \cap \text{maxset } H_{t_1} = \emptyset$$

alors $\tilde{\alpha}$ ne peut pas être un $(\tilde{d}_f, \tilde{L})$-géodésique.

L'idée centrale est ceci : on cherche à perturber le flot hamiltonien tel que l'hamiltonien qui l'engendre est modifié autour de t_0 et T_1, mais invariant autrement. Dans un voisinage de t_0 on perturbera α par le flot d'un hamiltonien qui est négatif sur un voisinage de maxset H_{t_0}, mais nul sur un voisinage de minset $H_{t_0} \cup$ maxset H_{t_1} tel que le maximum du hamiltonien résultant est baissé autour du temps t_0, mais le minimum est invariant, et on défera la perturbation autour du temps 1_t, et comme les ensembles maximaux au temps t_0 et t_1 sont disjoint le maximum autour de t_1 serait invariant, et son minimum ne peut qu'augmenter, ce qui nous fournira avec un chemin α_ε dans la même classe d'homotopie que α avec les bouts fixés, mais $\mathscr{L}(\alpha_\varepsilon) < \mathscr{L}(\alpha)$. Les détails sont comme suit :

Soient $X_j =$ maxset H_{t_j}, $Y_j =$ minset H_{t_j} $j = 1,2$, $M_j := \max H_{t_j}$ et $m_j = \min H_{t_j}$ pour $j = 1,2$. Notons que la régularité de $\tilde{\alpha}$ nous permet d'assumer que maxset $H_t \cap$ minset $H_t = \emptyset$. Remarquons que par la continuité de chaque H_t et le fait que H ait le support compact implique que pour tout ensemble ouvert $O \supset X_j$, $\exists \delta > 0$ tel que $O \supset H_{t_j}^{-1}((M_j - \delta, M_j])$ et pareillement pour des ouverts contenants Y_j. Comme $X_0 \cap (X_1 \cup Y_0) = \emptyset$, il existe des voisinages disjoints $\mathscr{N}(X_0) \cap \mathscr{N}(X_1 \cup Y_0) = \emptyset$ alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}(X_0) &\supset H_{t_0}^{-1}((M_0 - \delta, M_0]) \supset H_{t_0}^{-1}([M_0 - \frac{\delta}{2}, M_0]) \\
\mathscr{N}(X_1 \cup Y_0) &\supset (H_{t_1}^{-1}([M_1 - \delta, M_1]) \cup H_{t_0}^{-1}([m_0, m_0 + \delta)) \\
&\supset (H_{t_1}^{-1}([M_1 - \frac{\delta}{2}, M_1]) \cup H_{t_0}^{-1}([m_0, m_0 + \frac{\delta}{2}])
\end{aligned}$$

Pour alléger la notation, posons $C_j := H_{t_j}^{-1}([M_j - \frac{\delta}{2}, M_j])$ et $D_0 := H_{t_0}^{-1}([m_0, m_0 + \frac{\delta}{2}])$ et fixons ensuite $c > 0$ à déterminer plus tard et définissons l'hamiltonien suivant

$$G(x) = \begin{cases} -c & x \in C_0 \\ 0 & x \notin \mathscr{N}(X_0) \end{cases} \tag{4.2}$$

tel que $-c \leq G(x) \leq 0$ $\forall x \in M$ et G est lisse sur M. Soit ψ_t le flot à temps t induit par G. Fixons $0 < \varepsilon < \frac{t_1 - t_0}{2}$ et définissons notre flot perturbant $\{\Psi_t^\varepsilon\}_{t\in[0,1]}$ comme suite

$$\Psi_t^\varepsilon = \begin{cases} id_M & t \in [0, t_0 - \varepsilon) \\ \psi_{t-(t_0-\varepsilon)} & t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ \psi_{2\varepsilon} & t \in (t_0 + \varepsilon, t_1 - \varepsilon) \\ \psi^{-1}_{t-t_1-\varepsilon} \circ \psi_{2\varepsilon} & t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \\ id_M & t \in (t_1 + \varepsilon, 1] \end{cases} \tag{4.3}$$

Il y a une issue technique à ce point-ci ; comme on l'a défini, Ψ_t^ε n'est qu'un chemin hamiltonien continu et non nécessairement lisse. Pourtant, comme on l'a décrit dans la section sur la reparamétrage des chemins hamiltoniens, on peut reparamétrer $\{\psi_t\}_{t\in[0,2\varepsilon]}$ par une application de reparamétrage ϕ telle que l'hamiltonien $G^\phi(x,t) = \dot{\phi}(t)G(x,\phi(t))$ de ψ_ϕ est 0 autour de $t = 0$ et $t = 2\varepsilon$, et $0 \leq \dot{\phi}(t) \leq 1+\kappa$ pour $t \in [0, 2\varepsilon]$ et $\dot{\phi}(t) = 1+\kappa$ pour $t \in (\kappa, 2\varepsilon - \kappa)$, où on peut prendre $\kappa > 0$ aussi petit que l'on veut. Alors, en remplaçant ψ par ψ_ϕ dans la définition ci-haut, on obtient le flot perturbant lisse $\Psi_t^{\varepsilon,\kappa}$.

On considère ensuite le chemin perturbé $\alpha_t^{\varepsilon,\kappa} := \Psi_t^{\varepsilon,\kappa} \circ \alpha_t$.

Rappelons que l'hamiltonien induit de $\Psi_t^{\varepsilon,\kappa} \circ \alpha_t$ est

$$F_{\varepsilon,\kappa}\#H = F_{\varepsilon,\kappa}(x,t) + H((\Psi_t^{\varepsilon,\kappa})^{-1}(x), t)$$

où $F_{\varepsilon,\kappa}$ est l'hamiltonien lisse qui induit $\Psi_t^{\varepsilon,\kappa}$

$$F_{\varepsilon,\kappa}(x,t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_0 - \varepsilon) \\ 2\dot{\phi}(t)\varepsilon G(x) & t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ 0 & t \in (t_0 + \varepsilon, t_1 - \varepsilon) \\ -2\dot{\phi}(t)\varepsilon G(x) \circ \psi_{2\varepsilon} & t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \\ 0 & t \in (t_1 + \varepsilon, 1] \end{cases} \tag{4.4}$$

Contemplons maintenant le comportement de cet hamiltonien autour de $t = t_0$. Comme $X_0 \subset$ minset G^ϕ, X_0 est fixé par $\Psi_{t_0}^{\varepsilon,\kappa}$,et par la continuité de $\alpha_t^{\varepsilon,\kappa}$ dans le temps, il existe un $\varepsilon > 0$ assez petit que pour $|t - t_0| < \varepsilon$ on a $\Psi_t^{\varepsilon,\kappa}(\text{maxset } H_t) \subset C_0$, alors tant que c et κ sont choisis tels que

$$2(1+\kappa)\varepsilon c < \frac{\delta}{2}$$

les maximums de $\max F_{\varepsilon,\kappa}\#H$ et $H_t \circ \Psi_t^{\varepsilon,\kappa}$ s'accordent et donc dans cette région on obtient

$$(\max F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t = \max H_t - 2\dot{\phi}(t)\varepsilon c$$

et en raisonnant d'une manière pareille par la continuité et en utilisant que $Y_0 \subset \operatorname{maxset} G^{\phi}$, on voit qu'un tel choix de c garantie que les minimums des deux hamiltoniens s'accordent pour $|t-t_0| < \varepsilon$, ce qui implique

$$(\min F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t = \min H_t$$

Les extrémités de $(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t$ et H_t s'accordent alors pour $t_0+\varepsilon \leq t \leq t_1-\varepsilon$ et on a $X_1 \subset \operatorname{maxset} G^{\phi}$, et donc encore une fois pour un $\varepsilon > 0$ assez petit, $\operatorname{maxset} H_t \subset \mathscr{N}(X_0)^c$ pour $|t-t_1| < \varepsilon$, d'où sur cette région

$$(\max F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t = \max H_t$$

et comme $G^{\phi} < 0$ globalement sur M,

$$(\min F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t = \min H_t$$

On voit alors que pour des choix $\kappa, c, \varepsilon > 0$ qui peuvent être prit arbitrairement petit (pourtant, pas indépendamment l'un de l'autre) :

$$\begin{cases} (\max F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t < \max H_t - 2(1+\kappa)\varepsilon c & |t-t_0| < \varepsilon - \kappa \\ (\max F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t \leq \max H_t & t \in [0,1] \\ (\min F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t \geq \min H_t & t \in [0,1] \end{cases}$$

d'où il sort que

$$\begin{aligned} (\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)(F_{\varepsilon,\kappa}\#H) &= \int_0^1 \max_{x\in M}(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t - c_t(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)\, dt \\ &+ \int_0^1 \max_{x\in M} c_t(F_{\varepsilon,\kappa}\#H) - \min_{x\in M}(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t\, dt \\ &= \int_0^1 \max_{x\in M}(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t - \min_{x\in M}(F_{\varepsilon,\kappa}\#H)_t\, dt \\ &< (\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)(H) \end{aligned}$$

et comme $\alpha^{\varepsilon,\kappa}$ possède les mêmes bouts que α et est évidement homotope à α (prenons simplement $c \to 0$ dans l'argument ci-haut pour obtenir une homotopie), le chemin $t \mapsto \alpha_t$ ne minimise par $\mathscr{L}$ dans sa classe d'homotopie, ou, également, $\tilde{\alpha}$ n'est pas un $(\tilde{d}_f, \tilde{L})$-géodésique.

Notez que l'argument ci-haut montre aussi, simplement en échangeant les rôles des maximums et minimums et en échangeant aussi $G(x)$ pour $-G(x)$ que si α est $(\mathscr{L}^+ + \mathscr{L}^-)-$minimisant dans sa classe d'homotopie, alors H ne peut pas avoir des ensembles minimaux disjoints non plus.

L'argument ci-haut donne une indication d'une connexion intime entre les propriétés topologiques des intersections des ensembles extrémaux des hamiltoniens et la longueur de leurs flots hamiltoniens correspondants. Il se trouve que la démonstration qu'on vient de donner s'adapte pour donner des conditions nécessaires assez fort pour qu'un hamiltonien puisse induire une isotopie hamiltonienne $\mathscr{L}-$minimisant dans sa classe d'homotopie. Comme l'argument précédent nous a montré qu'un hamiltonien qui est $\mathscr{L}-$minimisant dans sa classe d'homotopie ne peut jamais avoir des ensembles maximaux ou minimaux disjoints, définissons

Définition 4.7.7.

$$\mathscr{F}_{\max}(H) := \cap_{t\in[0,1]}\text{maxset } H_t$$
$$\mathscr{F}_{\min}(H) := \cap_{t\in[0,1]}\text{minset } H_t$$

On appellera $\mathscr{F}_{\max}(H)$ **l'ensemble des maximums fixés de** H et $\mathscr{F}_{\min}(H)$ **l'ensemble de minimums fixés de** H. Tout point dans $x \in \mathscr{F}_{\max}(H) \cup \mathscr{F}_{\min}(H)$ est dite un extremum de H fixé.

L'idée essentielle de l'argument ci-haut était d'utiliser le fait que les deux ensembles maximaux étaient disjoints pour nous permettre de recouvrir un voisinage du premier ensemble maximal par une fonction négative et constante sur ce voisinage, mais nulle sur un voisinage de l'autre, et de perturber le flot de cette fonction à des moments opportuns tels que le maximum ne pouvait que décroitre. On pourrait envisager vouloir appliquer cet argument « point par point », c'est à dire, de fixer un $t_0 \in [0,1]$ et pour chaque point $p \in$ maxset H_{t_0}, de trouver un $t_p \in [0,1]$ tel que $p \notin$ maxset H_{t_p} et ensuite d'appliquer l'argument ci-haut pour réduire le maximum de H en p. Il y a des issues techniques ici, en particulier, cette méthode pourrait en principe demander un choix non dénombrable des t_p's et plusieurs difficultés techniques liées. Il est alors sensible d'espérer qu'il ne faut faire qu'un nombre au plus dénombrable des tels choix. Le lemme suivant nous informe qu'on peut nous restreindre à un nombre fini des tels choix.

Lemme 4.7.2. *Soit $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ une isotopie hamiltonienne à support compact tel que l'hamiltonien qui l'induit*

$$H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

n'a aucun maximum (resp. minimum) fixé, alors il existe une collection finie $\{t_0,t_1,\cdots,t_k\}$ telle que

$$\cap_{j=0}^{k}\textit{maxset } H_{t_j} = \emptyset, \qquad\qquad (\textit{resp.} \cap_{j=0}^{k}\textit{minset } H_{t_j} = \emptyset)$$

Démonstration. Rappelons qu'on dit qu'une collection d'ensembles $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ possède *la propriété d'intersections finies* si n'importe quelle sous-collection finie $\{A_{\alpha_1},\cdots,A_{\alpha_n}\}$ vérifie $\cap_{j=1}^{n} A_{\alpha_j} \neq \emptyset$, et rappel qu'un ensemble est compact si et seulement si chaque collection de sous-ensembles fermés avec la propriété d'intersections finies possède une intersection non nulle.

Ensuite, notons que $X = \cup_{t\in[0,1]}\overline{supp\ H_t}$ est compacte par hypothèse et maxset H_t est fermé pour tout t, mais par hypothèse

$$\cap_{t\in[0,1]}\text{maxset } H_t = \emptyset$$

et alors $\{\text{maxset } H_t\}_{t\in[0,1]}$ ne peut pas posséder la propriété d'intersections finies, d'où les $\{t_0, t_1, \cdots, t_k\}$ existent comme prétendu. □

La démonstration de notre résultat suivant utilisera aussi le lemme topologique suivant qui nous dit essentiellement que dans la situation qu'on vient justement de décrire, on peut épaissir les ensembles maximaux impliqués.

Lemme 4.7.3. *Soient X, Y des espaces hausdorff et $f_1, f_2, \cdots, f_k : X \to Y$ des applications continues. Suppose que pour chaque $j \in \{1, \cdots, k\}$ il existe une famille de sous-ensembles décroissante $\mathscr{C}^j := \{C_n^j\}_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$C_0^j \supset C_1^j \supset C_2^j \supset \cdots$$

telles que

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(C_\infty^j) = \emptyset$$

alors pour chaque $j \in \{1, \cdots, k\}$ $\exists N_j \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(C_{N_j}^j) = \emptyset$$

Démonstration. Démontrons en premier le cas $k = 2$. Considérons l'application continue

$$\begin{aligned} f_1 \oplus f_2 : X \times X &\to Y \times Y \\ (x_1, x_2) &\mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

et note que la condition

$$f_1^{-1}(C_\infty^1) \cap f_2^{-1}(C_\infty^2) = \emptyset$$

est équivalente à la condition

$$(f_1 \oplus f_2)^{-1}(C_\infty^1 \times C_\infty^2) \cap \triangle = \emptyset$$

où

$$\triangle := \{(x, x) \in X \times X\}$$

est le diagonal, qui est fermé comme X est Hausdorff. Suppose ensuite que $(f_1 \oplus f_2)^{-1}(C_{n_1}^1 \times$

$C^2_{n_2}) \cap \triangle \neq \emptyset$ pour tous les tuples $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, comme chaque $C^j_{n_j}$ est compacte, on obtient une suite $\bar{y}_{(n_1,n_2)} := \{(y_{n_1}, y_{n_2})\}_{(n_1,n_2)} \subset C^1_{n_1} \times C^2_{n_2}$. Comme les familles d'ensembles compactes sont décroissantes on a $\bar{y}_{(n_1,n_2)} \in C^1_0 \times C^2_0$ pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors il existe une sous-suite convergeant $\bar{y}_{(n_{r_1}, n_{r_2})}$ qui converge à un $\bar{y}_\infty \in C^1_\infty \times C^2_\infty$, mais là $(f_1 \oplus f_2)^{-1}(\bar{y}_{(n_{r_1}, n_{r_2})}) \subset \triangle$ converge à $(f_1 \oplus f_2)^{-1}(\bar{y}_\infty) \notin \triangle$, ce qui est une contradiction.

Pour étendre ceci au cas $k > 2$ notons simplement que si $k > 2$ alors on peut considérer les applications

$$\begin{aligned} F_1 : X &\to \Pi_{j=1}^{k-1} Y \\ x &\mapsto (f_1(x), \cdots, f_{k-1}(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_2 : X &\to \Pi_{j=1}^{k-1} Y \\ x &\mapsto (f_k(x), f_k(x) \cdots, f_k(x)) \end{aligned}$$

et les collections d'ensembles compactes $\mathscr{D}^1 := \Pi_{j=1}^{k-1} \mathscr{C}^j$ et $\mathscr{D}^2 := \Pi_{j=1}^{k-1} \mathscr{C}^k$, et ensuite on applique l'argument précédent. □

Muni de ces lemmes, réalisons l'extension proposée de notre exemple. Le résultat est le théorème suivant

Théorème 4.7.1. *Soit $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ une isotopie hamiltonienne régulière avec un hamiltonien normalisé H. Si $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ est $\mathscr{L}-$minimisant dans sa classe d'homotopie (sous les homotopies qui fixent les bouts) alors*

$$\cap_{t \in [0,1]} \mathit{maxset}\, H_t \neq \emptyset \qquad \mathit{et} \qquad \cap_{t \in [0,1]} \mathit{minset}\, H_t \neq \emptyset$$

Démonstration. On montrera que pour n'importe quelle isotopie hamiltonienne $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ induit par un hamiltonien normalisé H tel que

$$\cap_{t \in [0,1]} \text{maxset}\, H_t = \emptyset$$

il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit que h_t peut être perturbé d'une manière semblable à l'argument précédent à une isotopie homotope h^ε_t telle que $\mathscr{L}(h^\varepsilon_t) < \mathscr{L}(h_t)$, et l'argument pour les minimums fixés suit avec les modifications évidentes. Tous les problèmes techniques dont on a rencontré auparavant (à voir falloir nous assurer que le flot perturbant continu peut être approximé par une perturbation lisse et les choix des constants impliqués) sont identiques aux celles qu'on verra ici. Ceci étant le cas, on ne nous troublera pas des estimés précis ni l'issue de la lissitude dans cet argument comme ces issues se règlent mot pour mot de la même façon que dans le cas modèle.

Ce qui est essentiellement nouveau ici est ceci : par hypothèse et le lemme 4.7.2 il existe

$\{t_0, t_1, \cdots, t_k\} \in [0,1]$ tels que

$$\cap_{j=0}^{k} \text{maxset } H_{t_j} = \emptyset$$

Comme dans le cas modèle, posons

$$\begin{aligned}
X_j &:= \text{maxset } H_{t_j} \\
Y_j &:= \text{minset } H_{t_j} \\
M_j &:= \max_{x \in M} H_{t_j} \\
m_j &:= \min_{x \in M} H_{t_j} \\
C_j^{\delta} &:= H_{t_j}^{-1}([M_j - \delta, M_j]) \text{ pour } \delta > 0 \\
D_j^{\delta} &:= H_{t_j}^{-1}([m_j, m_j + \delta]) \text{ pour } \delta > 0
\end{aligned}$$

L'idée maintenant est de recouvrir un voisinage $\mathcal{N}(X_0)$ de X_0 avec k ensembles ouverts O_j, $j = 1, \cdots, k$ tels que pour chaque i, il existe un voisinage $\mathcal{N}(X_j \cup Y_0) \supset X_i \cup Y_0$ avec $\mathcal{N}(X_j \cup Y_0) \cap O_i = \emptyset$, et de définir une fonction lisse et non positive K_j qui est constante et négative sur un gros ensemble fermé à l'intérieur de O_j et 0 hors de O_j. Explicitement, comme

$$X_0 \cap (\bigcap_{j=1}^{k} X_j \cup Y_0) = \emptyset$$

et tous les ensembles impliqués sont fermés et compacts, en notant que

$$\begin{aligned}
X_j \cup Y_0 &= \cap_{n=1}^{\infty} (C_j^{\frac{1}{n}} \cup D_0^{\frac{1}{n}}) \\
X_0 &= \cap_{n=1}^{\infty} C_0^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

et en applicant le lemme 4.7.3, on obtient des $\delta_j > 0$, $j = 0, \cdots, k$ tels que

$$\cap_{j=1}^{k} (C_j^{\delta_j} \cup D_0^{\delta_j}) \cap C_0^{\delta_0} = \emptyset$$

et l'on prend $O_j := M - C_j^{\delta_j} \cup D_0^{\delta_j}$ pour $j = 1, \cdots, k$, on prend $\min_j \ \delta_j > \kappa > 0$, $c > 0$ et on prend pour K_j une fonction lisse et non positive telle que

$$K_j(x) := \begin{cases} -c & x \in \overline{M - C_j^{\delta_j + \kappa} \cup D_0^{\delta_j + \kappa}} \\ 0 & x \in C_j^{\delta_j} \cup D_0^{\delta_j} \end{cases}$$

Désignons ensuite par ψ_t^j l'isotopie induite par K_j et pour un $\varepsilon > 0$ petit, définissons le flot perturbant :

$$\Psi_t^{\varepsilon} := \begin{cases} id_M & t < t_0 - \varepsilon \\ \Pi_{j=1}^k \psi_{t-t_0}^j & t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ \Pi_{j=1}^k \psi_{\varepsilon}^j & t \in (t_0 + \varepsilon, t_1 - \varepsilon) \\ (\psi_{t-t_1}^1)^{-1} \circ \Pi_{j=1}^k \psi_{\varepsilon}^j & t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \\ \cdots & \\ \Pi_{j=i}^k \psi_{\varepsilon}^j & t \in (t_{i-1} + \varepsilon, t_i + \varepsilon) \\ (\psi_{t-t_i}^i)^{-1} \circ \Pi_{i=1}^k \psi_{\varepsilon}^j & t \in [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon] \\ \cdots & \\ id_M & t > t_k + \varepsilon \end{cases}$$

En posant $h_t^{\varepsilon} = \Psi_t^{\varepsilon} \circ h_t$ pour l'isotopie perturbée et en effectuant l'analyse des extrema de l'hamiltonien de h_t dans exactement la même manière que le cas modèle, on voit que $\mathscr{L}(h_t^{\varepsilon}) < \mathscr{L}(h_t)$. $\square$

Le théorème précédent nous enseigne que si notre objet est d'étudier les chemins qui minimisent la longueur hoferienne, il suffit d'étudier des chemins induits par des hamiltoniens avec des extrema fixés. Ce fait suggère qu'il serait peut-être utile d'étudier ce qu'on peut dire de cette classe plus restrictive de fonctions. On fera ceci en examinant la géométrie symplectique des fibrés associés R_H^- et R_H^+. Contemplons en premier R_H^+ ; si H possède un maximum fixé $P \in M$, alors on voit que la région en dessous de la courbe intégrale du feuilletage caractéristique le long du graphe Γ_H passant par $(P, 0, 0)$ et en dessus du graphe Γ_{μ_-} est homéomorphe par une application préservant l'aire à un disque d'aire $\mathscr{L}(H)$. En tirant de l'inspiration du théorème de non-écrasement, on sait que les plongements des balles symplectiques évincent une rigidité importante dans la géométrie symplectique, et on aimerait alors épaissir ce disque à une balle $B^{2n+2}(\mathscr{L}(H) - \varepsilon) \hookrightarrow R_H^-$ pour tout $\varepsilon > 0$, et on peut bien sûr faire un argument similaire avec R_H^+ lorsque H possède un minimum fixé.

La difficulté centrale est de comprendre comment étendre le plongement du disque, et ceci demande une étude de la relation entre les deux espaces $B^{2n+2}(a)$ et $B^2(a)$ pour une capacité $a \geq 0$. Modélisons $B^{2n+2}(a) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, \omega_0)$ par

$$B^{2n+2}(a) = \{(z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \|z_i\|^2 \leq \frac{a}{\pi}\}$$

Considérons ensuite la projection sur la première coordonnée :

$$p_1 : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$$
$$(z_1, z_2, \cdots, z_n, z_{n+1}) \mapsto (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

Ceci induite une projection par restriction

$$p : B^{2n+2}(a) \to B^{2n}(a)$$

et si $\bar{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in B^2(a)$ avec $\sum_{i=1}^{n} \|z_i\|^2 = \frac{(1-c)a}{\pi}$ pour $c \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} p^{-1}(\bar{z}) &= \{(\bar{z}, z_{n+1}) : \|z_{n+1}\|^2 \leq \frac{ca}{\pi}\} \\ &\simeq B^2(ca) \subset B^2(a) \end{aligned}$$

Alors on peut voir $B^{2n+2}(a)$ comme un type d'espace fibré au-dessus de $B^{2n}(a)$ avec les fibres des balles de dimension 2 telles que la capacité décroit lorsqu'on se rapproche du bord de $B^{2n+2}(a)$ jusqu'au moment qu'ils sont des fibres singuliers sur le bord de $B^{2n}(a)$. En particulier, on peut considérer $B^{2n+2}(a)$ comme un sous-espace du produit

$$B^{2n+2}(a) \subset B^{2n}(a) \times B^2(a) \xrightarrow{p} B^2(a)$$

Donc si on peut construire une application produit

$$\begin{array}{ccc} B^{2n}(a) \times B^2(a) & \xrightarrow{\psi_1 \times \psi_2} & (M \times [0,1] \times \mathbb{R}, \omega \oplus dt \wedge ds) \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B^2(a) & \xrightarrow{\quad\psi_2\quad} & ([0,1] \times \mathbb{R}, dt \wedge ds) \end{array}$$

qui est symplectique est qui envoie $B^{2n+2}(a)$ comme un sous-espace de $B^{2n}(a) \times B^2 a$ à $R_H^-(\varepsilon)$ dans $M \times [0,1] \times \mathbb{R}$, alors on aura construit un plongement symplectique de $B^{2n+2}(a)$ dans $R_H^-(\varepsilon)$. Nous sommes maintenant prêts à démontrer la proposition

Proposition 4.7.1. *Soit (M^{2n}, ω) une variété symplectique fermée, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout hamiltonien H avec $\|H\|_{C^2} < \delta$, alors*

1. *si H a un point maximal fixe alors il existe un plongement symplectique*

$$B^{2n}(\mathscr{L}(H)) \hookrightarrow R_H^-$$

2. *si H a un point minimal fixe alors il existe un plongement symplectique*

$$B^{2n}(\mathscr{L}(H)) \hookrightarrow R_H^+$$

Démonstration. On fera la preuve pour un H avec un point maximal fixe P, la preuve pour le cas d'un point minimal fixe étant pareil. Posons

$$M_t := \max_{x \in M} H_t = H_t(P), \qquad L := \mathscr{L}(H) = \int_0^1 M_t \, dt$$

Suite à la discussion ci-haute, on voit qu'il suffit de prendre $\psi_2 : B^2(L) \to [0,1] \times \mathbb{R}$ une application préservant l'aire avec image $\{(t,s) : \mu_-(t) \le s \le M_t - \mu_-(t)\}$, et $\psi_1 : B^{2n}(L) \to M$ une application symplectique avec $\psi_1(0)$ aussitôt qu'on peut nous assurer que pour $b \in \partial B^{2n}((1-c)L)$,

$$\psi_2(p^{-1}(b)) \subset \{(t,s) : \mu_-(t) \le s \le \min_{b \in \partial B^{2n}((1-c)L)} H_t(\psi_2(b))\}$$

. C'est-à-dire qu'on veut nous assurer que le graphe de H n'ait pas trop de courbure.

En premier, notons que par le théorème de Darboux et la compacité de M, il existe un $\kappa > 0$ tel que pour tout point $p \in M$, il existe un plongement symplectique $i_p : B^{2n}(\kappa) \hookrightarrow (M, \omega)$ centré en p. Prenons donc une telle boule centrée en P et identifions dans ce qui suit les points dans $B^{2n}(\kappa)$ avec leurs images sous i_P. De plus, il existe $\delta > 0$ ne dépendant que sur M tel que pour $x \in B^{2n}((1-c)L)$, $H(x,t) \in [cM_t, M_t]$. Pour voir ceci, on note que le théorème de Taylor entraîne que pour chaque $x \in B^{2n}((1-c)L) \subset B^{2n}(L)$ on a pour un $C > 0$ indépendant de H et $t_0 \in [0,1]$ fixe

$$H(x,t_0) \ge M_{t_0} - CL(1-c)\delta \ge M_{t_0} - C(1-c)\delta^2$$

Et soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $H(P,t_0) = \max_t \max_x H_t$, alors pour tout $t \in [0,1]$

$$M_{t_0} - \frac{3}{2}\delta \le M_t \le M_{t_0}$$

alors si $\delta \le \min(\frac{M_{t_0}}{C+\frac{3}{2}}, 1)$ on a

$$\begin{aligned} M_{t_0} - \frac{3}{2}\delta &\ge C\delta \ge C\delta^2 \\ \Rightarrow M_t &\ge C\delta^2 \\ \Leftrightarrow M_t - C(1-c)\delta^2 &\ge cM_t \\ \Rightarrow H(x,t) &\ge cM_t \end{aligned}$$

pour tout $c \in [0,1]$, $x \in B^{2n}((1-c)L)$. On voit alors que pour des tels x, $H_t(x) \in [cM_t, M_t]$, et donc l'application $i_P \times \psi_1$ plonge $B^{2n+2}(L)$ symplectiquement dans R_H^-, ce qu'il fallait démontrer. □

4.7.2 La non-dégénérescence à travers le non-écrasement

Lemme 4.7.4. *Soit $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien engendrant l'isotopie h_t et suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un plongement symplectique*

$$(B^{2n}(a), \omega_0) \hookrightarrow R_H(\varepsilon)$$

où $R_H(\varepsilon) = R_H^-(\varepsilon)$ ou $R_H^+(\varepsilon)$ et $a = \mathscr{L}(H)$ alors si $R_H(\varepsilon) = R_H^-(\varepsilon)$, $\tilde{h}_t$ minimise $\tilde{\rho}^+$ et si $R_H(\varepsilon) = R_H^+(\varepsilon)$, $\tilde{h}_t$ minimise $\tilde{\rho}^-$.

Démonstration. Démontrons le cas $R_H(\varepsilon) = R_H^-(\varepsilon)$, le cas $R_H(\varepsilon) = R_H^+(\varepsilon)$ se fait pareillement. On raisonne par l'absurde : suppose qu'il existe un autre hamiltonien G engendrant une isotopie $\{g_t\}$ homotope à $\{h_t\}$ tel que $\mathscr{L}^+(G) < \mathscr{L}^+(H)$ et considérons les deux fibrés $(R_H^-(\varepsilon), \pi_H, \Omega_H, D^2)$ et $(R_G^+(\varepsilon), \pi_G, \Omega_G, D^2)$. Comme les holonomies autour du bord du disque sont inverses et homotopes alors par le lemme 4.6.1 en les recollant le long de leurs holonomies, on obtient un fibré symplectiquement trivial au-dessus de la sphère.

$$R_{G,H}(2\varepsilon) := (R_H^- \# R_G^+, \Omega', \pi', S^2)$$

avec $A(R_{G,H}(2\varepsilon)) < \mathscr{L}^-(H) + \mathscr{L}^+(G) + 2\varepsilon + \kappa$ pour tout $\kappa > 0$. Prenons $\varepsilon, \kappa > 0$ tels que $\mathscr{L}^+(G) < \mathscr{H}^+ - 2\varepsilon + \kappa$ alors

$$A(R_{G,H}(2\varepsilon)) < \mathscr{L}^-(H) + \mathscr{H}^+ = \mathscr{L}(H)$$

mais par hypothèse, on peut plonger symplectiquement une balle de capacité $\mathscr{L}(H)$ dans R_H^- alors dans $R_{G,H}$, mais ceci contredit la propriété de non-écrasement du fibré

$$P_{[0]} = (M, \omega) \times S^2$$

comme l'aire de $R_{G,H}$ est inférieur à $\mathscr{L}(H)$, ce qui est une contradiction. □

On obtient comme corollaire immédiat :

Corollaire 4.7.1. *Soit $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ un chemin dans $Ham(M, \omega)$ alors un relèvement $\tilde{h}_t$ est géodésique par rapport à $\tilde{\rho}_f$ si et seulement si h_t est induit par un hamiltonien avec un maximum et minimum fixés en chaque moment.*

Démonstration. Par proposition 4.7.1 avoir des extrémités fixées en chaque moment est nécessaire pour minimiser $\mathscr{L}$. Par proposition 4.7.1 pour chaque morceau $\{h_{t_0}^{-1} h_t\}_{[t_0, t_0+\varepsilon]}$ du chemin assez petit, aussitôt que $h_{t_0}^{-1} h_t$ ait des extrémités fixées, alors on peut plonger une balle de capacité $\mathscr{L}(\{H_t\}_{(t_0,t_0+\varepsilon)}$ dans $R^+_{\{H_t\}_{(t_0,t_0+\varepsilon)}}(\varepsilon')$ et $R^-_{\{H_t\}_{(t_0,t_0+\varepsilon)}}(\varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' > 0$ et le lemme 4.7.4 nous donne qu'alors $\{h_{t_0}^{-1} h_t\}_{[t_0,t_0+\varepsilon]}$ minimise $\mathscr{L}$. □

Proposition 4.7.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique fermée, alors il existe un C^2-voisinage $\mathscr{N}$ de l'identité dans $Ham(M, \omega)$ tel que tout chemin mesurant $\tilde{\rho}_f$ par $\mathscr{L}$ mesure aussi ρ_f par $\mathscr{L}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{N} \subset Ham(M, \omega)$ un voisinage de l'identité assez petite que tout chemin mesurant $\tilde{\rho}_f$ par $\mathscr{L}$ admet des plongements symplectiques de la balle de capacité $\mathscr{L}(H)$ dans $R_H^+(\varepsilon)$ et $R_H^-(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par le théorème 4.6.1 on sait qu'il existe un constant $\hbar(M) > 0$ tel que P_λ possède la propriété de non-écrasement pondérée aussitôt que $\lambda < \frac{\hbar(M)}{2}$, prenons donc aussi $\mathscr{N} \subset \rho_f^{-1}\Big([0, \hbar(M)/4)\Big)$ alors si $\{h_t\}_{[t\in[0,1]}$ est $\tilde{\rho}_f$-mesurant par $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}(h_t) < \frac{\hbar(M)}{4}$.

Raisonnons encore une fois par l'absurde : suppose que h_t, engendré par H est $(\tilde{\rho}_f, \mathscr{L})$-mesurant, mais pas $\rho_f, \mathscr{L}-$mesurant alors il existe *deux* autres chemins homotopes $\{g_t^{\pm}\}_{t\in[0,1]}$ engendrés par $G^{\pm}$ tels que $g_1^{\pm} = h_1$, $g_0^{\pm} = id_M$ et

$$\mathscr{L}^-(G^-) + \mathscr{L}^+(G^+) < \mathscr{L}(H)$$

Donc forcément soit $\mathscr{L}^-(G^-) < \mathscr{L}^-(H)$, soit $\mathscr{L}^+(G^+) < \mathscr{L}^+(H)$. Supposons sans perte de généralité que $\mathscr{L}^-(G^-) < \mathscr{L}^-(H)$, et soit $\delta_0, \delta_1 > 0$ tels que

$$\mathscr{L}^-(G^-) = \mathscr{L}^-(H) - \delta_0, \qquad \mathscr{L}^+(G^+) = \mathscr{L}^+(H) + \delta_0 - \delta_1$$

Comme dans la preuve de lemme 4.7.4, considérons les recollements des régions en dessous et au-dessus des graphes des hamiltoniens $R_H^{\pm}(\varepsilon), R_+^{\pm}(\varepsilon), R_{G^-}^{\pm}(\varepsilon)$, mais cette fois-ci comme on a trois hamiltoniens, il faut choisir les fibrés à recoller d'une manière intelligente tel qu'on peut appliquer la propriété de non-écrasement pondérée. À cette fin, considérons

$$P_{G^+,H} := (R_H^-(\varepsilon)\# R_{G^+}^+(\varepsilon)), \qquad P_{H,G^-} := (R_{G^-}^-(\varepsilon)\# R_H^+(\varepsilon)$$

Par hypothèse $\{h_t\}$ mesure $\tilde{\rho}$, alors H possède des extrémités fixées, et par notre choix de $\mathscr{N}$ ceci implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une balle de capacité $\mathscr{L}(H)$ plongée symplectiquement dans chacun de $P_{G^+,H}$ et P_{H,G^-}. De plus, ces fibrés sont les fibrés associés aux lacets $\lambda = [(g_t^+)^{-1}h_t]$ et $\lambda' = [h_t^{-1}g_t^-]$, mais comme g_t^+ et g_t^- sont homotopes, $\lambda' = -\lambda$, et notre hypothèse sur $\mathscr{N}$ nous assure (par théorème 4.6.1) qu'il existe un $\kappa \in \mathbb{R}$ avec $|\kappa| \leq \frac{\hbar(M)}{2}$ tel que toute balle symplectiquement plongée vérifie

$$a_+ \leq A(P_\lambda) + \kappa = A(P_{G^+,H}) + \kappa, \qquad a_- \leq A(P_{-\lambda}) - \kappa = A(P_{H,G^-}) - \kappa$$

alors on voit

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(H) \leq A(P_\lambda) + \kappa = \mathscr{L}^+(G^+) + \mathscr{L}^-(H) + \varepsilon = \mathscr{L}(H) + \delta_0 - \delta_1 + \varepsilon + \kappa \\ &\mathscr{L}(H) \leq A(P_{-\lambda}) - \kappa = \mathscr{L}(H) - \delta_0 + \varepsilon - \kappa \end{aligned}$$

et alors en sommant les inégalités on observe

$$\begin{aligned} &2\mathscr{L}(H) \leq 2\mathscr{L}(H) - \delta_1 + 2\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \ \delta_1 \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

mais on peut prendre $\varepsilon \to 0$ indépendamment de δ_1 d'où on voit que $\delta_1 = 0$, mais $\delta_1 > 0$ par hypothèse, une contradiction. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Banyaga. *The structure of classical diffeomorphism groups*. Mathematics and its applications. Kluwer Academic, 1997. ISBN 9780792344759.

[2] V. Guillemin, E. Lerman et S. Sternberg. *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*. Cambridge University Press, 1996.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Self published, 2002.

[4] Morris W Hirsch. *Differential topology*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Dale Husemoller. *Fibre bundles*. Springer, 1966.

[6] Clément Hyvrier. *Invariants de Gromov-Witten et fibrations hamiltoniennes*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2008.

[7] Andreas Kriegl et Peter W Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53. American Mathematical Soc., 1997.

[8] Francois Lalonde. A field theory for symplectic fibrations over surfaces. *Geometry & Topology*, 8(3):1189–1226, 2004.

[9] François Lalonde et Dusa McDuff. The geometry of symplectic energy. *Annals of Mathematics*, 141(2):349–371, 1995.

[10] François Lalonde et Dusa McDuff. Hofer's l^∞-geometry : Energy and Stability of Hamiltonian flows, parts I and II. *Inventiones mathematicae*, 122(1):1–33 and 35–69, 1995.

[11] François Lalonde et Dusa McDuff. Symplectic structures on fiber bundles. *Topology*, 42(2):309–347, 2003.

[12] François Lalonde, Dusa McDuff et Leonid Polterovich. Topological rigidity of Hamiltonian loops and quantum homology. *Inventiones mathematicae*, 135(2):369–385, 1999.

[13] François Lalonde et Egor Shelukhin. Proof of the main conjecture on g-areas. *arXiv preprint arXiv :1411.1452*, 2014.

[14] Charles-Michel Marle. Sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique. Dans *Third Schnepfenried geometry conference*, volume 1, pages 69–86, 1983.

[15] Dusa McDuff. Quantum homology of fibrations over S^2. *International Journal of Mathematics*, 11(05):665–721, 2000.

[16] Dusa McDuff. Geometric variants of the Hofer norm. *Journal of Symplectic Geometry*, 1(2):197–252, 2002.

[17] Dusa McDuff et Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford University Press, 1998.

[18] Dusa McDuff et Dietmar Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52. American Mathematical Soc., 2012.

[19] John Milnor. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. Dans *Relativity, groups and topology. 2*. 1984.

[20] K. Ono. Floer–Novikov cohomology and the flux conjecture. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 16(5):981–1020, 2006.

[21] Leonid Polterovich. Symplectic aspects of the first eigenvalue. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1998(502):1–17, 1998. ISSN 435-5345.

[22] George W Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2012.