

Université de Montréal

Opération d'intersection généralisée en théorie de
Morse

par

François Charette

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

juillet 2007



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Opération d'intersection généralisée en théorie de

Morse

présenté par

François Charette

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif Polterovich

(président-rapporteur)

Octav Cornea

(directeur de recherche)

Marlène Frigon

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

On définit dans ce mémoire une nouvelle opération en théorie de Morse, qui généralise le produit d'intersection, en se servant d'une machinerie introduite par Barraud et Cornea, qui enrichit le complexe de Morse classique. On mentionne certains résultats classiques concernant l'homologie de Morse et on en présente de nouveaux, entre autres la définition de morphismes de comparaison de complexes enrichis.

Mots-clés : Théorie de Morse, produit d'intersection, espaces de modules, complexe de Morse enrichi, suite spectrale, morphisme de comparaison.

SUMMARY

In this thesis, we define a new operation using Morse theory, which generalizes the classical intersection product. We achieve this by using an enriched Morse complex defined by Barraud and Cornea. We mention some known results in Morse homology and give some new results regarding the enriched Morse complex.

Key-words : Morse theory, intersection product, moduli spaces, enriched Morse complex, spectral sequence, comparison morphism.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| Sommaire | iii |
| Summary | iv |
| Liste des figures | vii |
| Remerciements | 1 |
| Introduction | 2 |
| Chapitre 1. Théorie de Morse Classique | 6 |
| 1.1. Origines et décomposition cellulaire..... | 6 |
| 1.2. Fonction d'attachement et espaces de modules..... | 7 |
| 1.2.1. Autre définition des espaces de modules..... | 8 |
| 1.2.2. Compactification..... | 9 |
| 1.3. Homologie de Morse..... | 10 |
| Chapitre 2. Produit d'intersection | 12 |
| 2.1. Construction..... | 12 |
| 2.2. Invariance..... | 14 |
| Chapitre 3. Opération d'intersection généralisée | 17 |
| 3.1. Complexe de Morse enrichi..... | 19 |
| 3.1.1. Système de chaînes génératrices..... | 20 |
| 3.1.2. Complexe enrichi et suite spectrale..... | 22 |
| 3.1.3. Changement de coefficients et pull-back..... | 27 |

| | |
|---|-----------|
| 3.1.4. Invariance de la construction | 28 |
| 3.1.4.1. Homotopies constantes et paramétrage | 29 |
| 3.1.4.2. Homotopies d'homotopies | 32 |
| 3.2. Première construction de l'opération généralisée | 34 |
| 3.2.1. Complexe des tripodes et opération généralisée | 36 |
| 3.3. Deuxième construction de l'opération généralisée | 38 |
| 3.3.1. Définitions | 39 |
| 3.3.2. Comparaison de Ψ et $\Phi^{g,f}$ | 40 |
| 3.3.3. Démonstration du théorème 3.3.1 | 44 |
| 3.3.4. Invariance | 50 |
| Bibliographie | 53 |

LISTE DES FIGURES

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Convergence vers une ligne brisée | 10 |
| 2.1 | Tripode | 13 |
| 2.2 | | 14 |
| 2.3 | | 16 |
| 3.1 | Homotopie d'homotopies | 32 |
| 3.2 | Preuve de la proposition 3.1.13 | 33 |
| 3.3 | Action des boucles sur les tripodes | 35 |
| 3.4 | Lignes de flot de \bar{f}_3 | 45 |

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier le FQRNT de m'avoir offert une bourse, ce qui m'a permis de me concentrer pleinement sur ma maîtrise pendant deux ans.

Un grand merci à Octav Cornea, qui a partagé ses idées avec moi, m'a consacré beaucoup de temps et m'a empêché d'être (trop) paresseux ; sans lui, je n'aurais pas découvert la topologie, ou j'aurais pensé qu'elle est inaccessible.

INTRODUCTION

La théorie de Morse, où encore calcul des variations global, est l'étude de points critiques de certaines fonctions différentiables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Elle remonte aux années 1920 (et a même des origines en 1885 avec Poincaré), alors que M. Morse démontre les inégalités de Morse, qui relient le nombre de points critiques de fonctions de Morse aux nombres de Betti de M . Le lecteur peut trouver un historique de cette théorie - et beaucoup plus - dans l'imposant livre de Dieudonné [D].

La théorie de Morse est intimement reliée à la notion d'attachement de cellules ([Mi] et [F]). Une fonction de Morse donne, à équivalence d'homotopie près, une décomposition en cellules d'une variété; on obtient directement les inégalités de Morse (corollaire 1.1.2). En poussant l'étude de ces fonctions, on obtient des résultats beaucoup plus forts sur une variété, comme le théorème de périodicité de Bott, ou encore le théorème de h-cobordisme [Mi2]. Dans ce livre, l'homologie de Morse de M est définie et il est montré qu'elle est isomorphe à l'homologie singulière de M . On peut aussi reconstruire des opérations cohomologiques classiques, comme le produit cup, l'isomorphisme de Thom et les carrés de Steenrod (voir par exemple [Sc] ou [BeCoh]).

On présente dans ce mémoire de nouveaux résultats en théorie de Morse, en utilisant la technique des espaces de courbes solutions de flot gradient, dans le but de les généraliser à la théorie de Floer (ce qu'on ne fait pas ici). Pour cette raison, la plupart des résultats connus sont présentés sans démonstration, l'accent a été mis sur les nouveaux résultats. Parmi ceux-ci, on construit des morphismes $\Phi^{\alpha,\beta}$, qui induisent des isomorphismes en homologie, entre différents complexes de Morse enrichis (proposition 3.1.13), tels que définis par Barraud et Cornea

[BaCo]. Ce complexe mesure les espaces de modules de dimension quelconque, en associant à chaque point critique une chaîne dans l'espace des lacets de Moore de M , à l'aide d'un paramétrage de chaque ligne de flot par la valeur de la fonction. La construction des morphismes $\Phi^{\alpha,\beta}$ est calquée sur la méthode classique, c'est à dire en considérant des homotopies de Morse régulières entre deux fonctions Morse-smale; cependant l'homotopie constante n'induit pas un isomorphisme au niveau des complexes enrichis (contrairement au cas classique), elle en induit seulement un en homologie. La méthode utilisée dans ce mémoire est nouvelle et consiste à démontrer l'indépendance du morphisme associé à une homotopie constante par rapport au choix de paramétrages (proposition 3.1.10). Pour un paramétrage bien particulier, on montre que l'homotopie constante induit bien un isomorphisme, cette fois au niveau des complexes.

Le résultat central est la construction d'une opération d'intersection qui généralise le produit d'intersection classique et est donné par le théorème 3.3.1. On étend alors au complexe enrichi un morphisme Ψ , existant déjà en théorie de Morse classique dans la littérature, entre deux complexes enrichis et qui mesure les espaces de modules formés par la variété instable d'un premier point critique et la variété stable d'un deuxième, mais provenant d'une fonction différente. L'opération d'intersection applique ce morphisme Ψ à la somme de deux fonctions sur $M \times M$ et fait correspondre un point critique d'une troisième fonction sur la diagonale $\Delta M \subset M \times M$. On mentionne que le morphisme Ψ est en fait chaîne homotope aux morphismes de comparaison $\Phi^{\alpha,\beta}$ déjà construits et on donne une ébauche de la preuve (proposition 3.3.3). Ce résultat apparaît dans la littérature, mais sans preuve (par exemple dans [BeCoh]).

On définit aussi une différentielle sur le produit de deux complexes enrichis, qui est une déformation de la différentielle habituelle du produit tensoriel (remarque 3.3.7 et lemme 3.3.8), dans ce sens qu'elle agit sur les deux composantes du produit en même temps. La différentielle sur le produit est normalement $d(x \otimes y) = \partial x \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y$. Ici, la déformation correspond simplement à la différentielle du complexe enrichi, mais appliquée à une fonction Morse-Smale sur $M \times M$, donnée

Les deux premiers chapitres du mémoire contiennent des résultats de théorie de Morse classique. On présente les notions nécessaires à la définition des groupes d'homologie de Morse de M et on définit au chapitre 2 le produit d'intersection. On donne aussi la démonstration de son invariance, puisque des arguments du même type, qui font intervenir des espaces de modules et leur compactification, seront utilisés par la suite.

Le chapitre 3 contient tous les résultats nouveaux. On présente d'abord une construction de Barraud et Cornea, qui généralise l'homologie de Morse et mesure les espaces de modules de dimension supérieure à 1 ; on utilise cette machinerie pour construire l'opération d'intersection généralisée. Ce faisant, on introduit la notion de suite spectrale, qui contient beaucoup d'informations sur les espaces de modules (théorème 3.1.7). On donne ensuite une méthode de changement de coefficients, qui permet de retrouver l'homologie de Morse ; c'est dans ce sens que l'homologie enrichie généralise l'homologie de Morse. Cette méthode sera aussi utilisée pour généraliser le produit d'intersection.

Une première tentative de généralisation du produit d'intersection est présentée, car elle apparaît de façon très naturelle. On la définit en remarquant qu'un tripode est constitué de trois chemins basés en un point critique et ayant un point d'arrivée en commun. La présence d'obstructions potentielles (proposition 3.2.3) rend cette définition plus difficilement utilisable. Le problème apparaît lorsqu'on veut montrer que le morphisme d'intersection est un morphisme de chaînes ; un calcul simple fait alors intervenir le produit de deux cubes et le même produit avec les deux facteurs inversés. On sait que le produit de cubes (ou de simplexes) est commutatif signé en homologie, mais en général il ne l'est pas au niveau des complexes, c'est d'ailleurs ce qui permet de créer les carrés de Steenrod. On n'a pas vérifié s'il est possible de faire disparaître l'obstruction dans le cas du complexe enrichi, on a opté pour définir autrement l'opération d'intersection.

On redéfinit finalement l'opération différemment (théorème 3.3.1) à l'aide du morphisme Ψ mentionné plus haut. On montre qu'elle généralise bien le produit d'intersection et qu'elle est invariante par rapport aux fonctions utilisées (propositions 3.3.5 et 3.3.9). La méthode utilisée pour démontrer l'invariance est

classique et consiste à trouver un espace de modules ayant pour bords les morphismes d'intersection associés à des choix différents de fonctions, donnant ainsi une homotopie de chaînes.

Chapitre 1

THÉORIE DE MORSE CLASSIQUE

On introduit dans ce chapitre toutes les notions nécessaires à la définition des groupes d'homologie de Morse d'une variété riemannienne fermée M (i.e. connexe, compacte et sans bord). On mentionne les liens entre une fonction de Morse et une décomposition cellulaire de M , donnée par les variétés instables des points critiques.

On définit le complexe de Morse, où chaque point critique est vu comme une cellule et la différentielle est donnée grâce à une étude des espaces de modules et de leur compactification. On utilise deux approches différentes mais équivalentes pour donner la structure de ces espaces, une qui fait appel aux systèmes dynamiques, c'est le point de vue adopté dans l'article de Weber [We], l'autre qui est plus analytique et étudie le comportement des solutions d'une équation différentielle, qu'on peut trouver dans le livre de Schwarz [Sc].

1.1. ORIGINES ET DÉCOMPOSITION CELLULAIRE

Soient M une variété riemannienne fermée de dimension n et $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. On dit qu'un point critique p de f est non-dégénéré si la matrice Hessienne de f au point p est non-singulière. Dans un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , la matrice $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p))$ doit être un isomorphisme. Cette condition implique que le graphe de df intersecte la section nulle de T^*M transversalement, c'est donc une condition générique. Par le théorème des fonctions inverses, les points critiques non-dégénérés sont isolés (car la dérivé est localement bijective) et M étant compacte, il n'y en a qu'un nombre fini. f est une *fonction de Morse* si tous ses

points critiques sont non-dégénérés. Cet ensemble est dense dans $C^0(M)$, car la transversalité est générique.

L'*index* d'un point critique p , noté $\mu(p)$, est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice et est indépendant du système de coordonnées. On note $Crit f$ l'ensemble des points critiques de f et $Crit_k f$ les points critiques d'index k .

L'existence d'une métrique riemannienne g sur M donne un isomorphisme canonique entre TM et T^*M et nous permet de définir le vecteur gradient de f , noté ∇f , par la relation,

$$\langle \nabla f, X \rangle_g = df(X) = X(f).$$

Le flot généré par le champ de vecteurs gradient est un ingrédient essentiel à l'homologie de Morse et sert à prouver le prochain théorème, qui relie la topologie de M à la fonction f .

Théorème 1.1.1 ([Mi], théorème 3.5). *Soit f une fonction de Morse sur M . Alors M a le même type d'homotopie qu'un complexe CW, avec une cellule de dimension λ pour chaque point critique d'index λ .*

Corollaire 1.1.2 (Inégalités de Morse). *Si $B_k(M)$ est le rang libre de $H_k(M)$, le k ème groupe d'homologie de M , alors*

- (1) $|Crit_k f| \geq B_k(M)$
- (2) $\sum_{k=0}^n (-1)^k B_k(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k |Crit_k f|$

1.2. FONCTION D'ATTACHEMENT ET ESPACES DE MODULES

Dans le complexe cellulaire associé à une décomposition en cellules d'un complexe CW, la différentielle se calcule facilement en termes du degré des fonctions caractéristiques. Il est naturel de se demander comment exprimer cette différentielle dans le cas d'une fonction de Morse, qui donne une décomposition cellulaire à homotopie près; le flot gradient (négatif) joue ici un rôle clé. On peut relier cette différentielle avec la différentielle du complexe cellulaire et montrer que l'homologie ainsi obtenue est l'homologie cellulaire, c'est ce qui est fait dans [Mi2] et [F].

On considère le système dynamique,

$$\Psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = -\nabla f(\Psi(t, x)), \quad \Psi(0, \cdot) = id_M$$

donné par le flot gradient négatif et on définit les variétés stables et instables associées aux points critiques $x \in Crit f$

$$W^u(x) = \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \Psi(t, p) = x\},$$

$$W^s(x) = \{p \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, p) = x\},$$

qui sont des cellules de dimension $\mu(x)$ et $n - \mu(x)$. Cette décomposition en cellules ne donne en général pas une structure de complexe CW, car la condition de fermeture n'est pas toujours remplie. La bonne condition à imposer au système dynamique pour définir la différentielle est que $W^u(x) \cap W^s(y)$ soit une intersection transverse $\forall x, y \in Crit f$. Cette condition est générique et une fonction de Morse qui la vérifie est appelée *fonction Morse-Smale*.

Dans ce cas, $M_{x,y}^f = W^u(x) \cap W^s(y)$ est une variété (lorsqu'elle est non vide) de dimension $\mu(x) - \mu(y)$ et elle intersecte transversalement $f^{-1}(a)$, pour une valeur régulière a comprise dans $(f(y), f(x))$. L'espace de modules $W^u(x) \cap W^s(y) \cap f^{-1}(a) = \mathcal{M}_{x,y}^{f,a}$ est donc une variété de dimension $|x| - |y| - 1$ et elle est compacte de dimension 0 lorsque $|x| = |y| + 1$. On peut alors compter (modulo 2) le nombre d'éléments qu'elle contient, on obtient $n(x, y)_2 = |\mathcal{M}_{x,y}^{f,a}|_2$, qui serviront à définir la différentielle du complexe de Morse.

Remarque 1.2.1. *On peut aussi compter algébriquement le nombre de lignes, en associant à chacune un signe, qui dépend des orientations des variétés stables et instables.*

1.2.1. Autre définition des espaces de modules

On peut considérer l'espace $M_{x,y}^f$ - c'est l'approche utilisée dans le livre de Schwarz [Sc] - comme l'ensemble des courbes qui satisfont à l'équation différentielle $\gamma' = -\nabla f \circ \gamma$, i.e. $M_{x,y}^f = \{\gamma : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M \mid \gamma' = -\nabla f \circ \gamma, \gamma(-\infty) = x, \gamma(\infty) =$

$y\}$, où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est muni d'une structure de variété différentiable telle que la fonction

$$h : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$$

$$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

est un difféomorphisme.

On a une action de \mathbb{R} donnée par les reparamétrages des lignes de flot,

$$\mathbb{R} \times M_{x,y}^f \rightarrow M_{x,y}^f$$

$$(\tau, \gamma) \mapsto \gamma \bullet \tau = \gamma(\cdot + \tau).$$

Cette action ne change pas la dérivée de γ , elle nous redonne bien une ligne de flot.

Proposition 1.2.2 ([Sc], proposition 2.31). *L'action de \mathbb{R} est lisse, libre, propre et*

$$\mathcal{M}_{x,y}^f = M_{x,y}^f / \mathbb{R} \approx \mathcal{M}_{x,y}^{f,a}$$

$\mathcal{M}_{x,y}^{f,a}$ est donc indépendant du choix de $a \in (f(y), f(x))$, pourvu que l'intervalle ne contienne pas de valeur critique. On utilisera la notation \mathcal{M}_y^x pour faire référence aux deux définitions, en prenant celle qui convient le mieux à chaque situation.

1.2.2. Compactification

Lorsque \mathcal{M}_y^x est de dimension supérieure à 0, elle n'est en général pas compacte. L'obstruction à la compacité sont les lignes dites brisées; certaines sous-suites de lignes de flot peuvent se briser à la limite (voir figure 1.1). On peut ajouter toutes ces limites et compactifier de la sorte \mathcal{M}_y^x , ce qui lui donne la structure d'une variété à coins. Son bord vérifie la formule

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_y^x \approx \bigcup_{|y| < |x'| < |x|} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^{x'}. \quad (1.2.1)$$

La partie délicate de cette formule est de montrer qu'à chaque paire $(u, v) \in \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^{x'}$ correspond un élément de $\partial \overline{\mathcal{M}}_y^x$, c'est la méthode du gluing. Notez que lorsque $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ est de dimension 1, alors c'est une union disjointe de cercles ou d'intervalles, par la classification des variétés de dimension 1. Son bord contient

donc un nombre pair de points, et à chacun correspond un autre point avec l'orientation opposée.

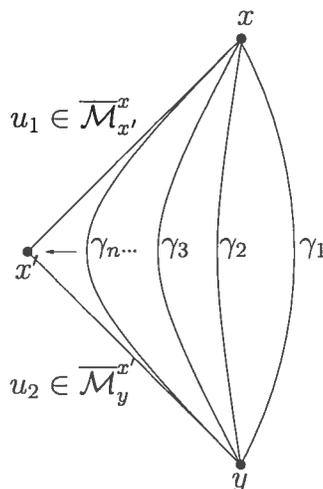


FIG. 1.1. Convergence vers une ligne brisée

1.3. HOMOLOGIE DE MORSE

On définit dans cette section l'homologie de Morse à coefficients \mathbb{Z}_2 associée à une fonction Morse-Smale f .

Comme les points critiques correspondent à des cellules, on définit le module $C_k(f) = \mathbb{Z}_2 \langle \text{Crit}_k f \rangle$ et

$$\partial_k : C_k(f) \rightarrow C_{k-1}(f)$$

$$\partial_k x = \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1} f} n(x, y) y$$

Le nombre de générateurs de $C_k(f)$ est fini (M est compacte), la différentielle s'étend par linéarité à tout $C_k(f)$. Lorsqu'on applique la différentielle deux fois à x disons, on obtient des points critiques y_i de degré $|x| - 2$, le coefficient donné à chacun correspond au nombre de points de la variété $\partial \overline{\mathcal{M}}_{y_i}^x$, il est donc pair, par une remarque faite à la section précédente. On obtient alors (l'anneau de coefficients est \mathbb{Z}_2)

Proposition 1.3.1. $\partial^2 = \partial_k \circ \partial_{k-1} = 0$

On peut donc définir l'homologie de ce complexe, $H_k(C_*(f), \partial)$, appelé groupe (il s'agit ici d'un \mathbb{Z}_2 espace vectoriel) d'homologie de Morse. Cette homologie correspond à l'homologie singulière de la variété.

Théorème 1.3.2. $H_k(C_*(f), \partial) \cong H_k(M; \mathbb{Z}_2)$, où $H_k(\cdot; \mathbb{Z}_2)$ sont les groupes d'homologie singulière.

Démonstration. Voir [Mi2] dans le cas d'une fonction de Morse auto-indexée. On dit qu'une fonction de Morse est auto-indexée si $\forall x \in \text{Crit}f, \mu(x) = k \Rightarrow f(x) = k$, i.e. tous les points critiques d'index k sont sur l'hypersurface $f^{-1}(k)$. Le cas d'une fonction Morse-Smale quelconque est démontré dans [Sc]. \square

Ce résultat nous dit que l'homologie de Morse d'une variété est indépendante du choix de la fonction Morse-Smale. On peut aussi montrer cette invariance, tel que fait dans [Sc], en utilisant des homotopies presque arbitraires (appelées homotopies de Morse régulières) entre deux fonctions de Morse et des homotopies d'homotopies, en étudiant la structure des espaces de module de ces homotopies sur $M \times \mathbb{R}$ et $M \times \mathbb{R} \times [0, 1]$. Cette méthode a l'avantage de construire explicitement des morphismes de chaînes entre les complexes de deux fonctions Morse-smale,

$$\Phi_k^{\beta\alpha} : C_k(f^\alpha) \rightarrow C_k(f^\beta),$$

qui induisent des isomorphismes en homologie de Morse. On utilisera cette méthode au chapitre 3 pour montrer l'invariance du complexe de Morse enrichi.

Remarque 1.3.3. *Le théorème reste vrai si on change les coefficients pour \mathbb{Z} , en tenant compte de l'orientation.*

Chapitre 2

PRODUIT D'INTERSECTION

Dans ce chapitre, on construit le produit d'intersection homologique à l'aide de la théorie de Morse. Il faut donc prendre deux cycles et leur faire correspondre un troisième. Pour ce faire, on se donne trois fonctions «génériques» et on considère l'intersection au niveau des cellules, i.e. des variétés stables et instables associées à trois points critiques. Cette intersection correspond au nombre de configurations en «Y», appelées des tripodes (figure 2.1). L'indépendance du produit découle de l'étude d'espaces de modules sur $M \times I$, donnés en considérant des homotopies régulières entre trois paires de fonctions Morse-Smale. Sur chaque face de $M \times I$, on aura le produit d'intersection défini par chaque triplet de fonctions, ce qui donnera une homotopie de chaînes entre deux définitions du produit. On peut aussi trouver cette construction dans [BeCoh] et [Ro].

2.1. CONSTRUCTION

On se donne trois fonctions Morse-Smale $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$), et on demande en plus que leurs variétés stables et instables s'intersectent deux à deux transversalement (cette condition est générique). On peut alors considérer la variété de dimension $|x| + |y| - |z| - n$ suivante,

$$\mathcal{M}_z^{x,y} = W^u(x) \cap W^u(y) \cap W^s(z)$$

où $x \in \text{Crit}f_1$, $y \in \text{Crit}f_2$, $z \in \text{Crit}f_3$. À chaque point de cette variété correspondent une ligne du flot gradient négatif de chaque fonction f_i , on peut donc

voir $\mathcal{M}_z^{x,y}$ comme l'ensemble de toutes les configurations en forme de «Y», les *tripodes*, où chaque branche est une ligne de flot.

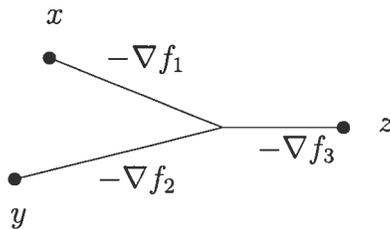


FIG. 2.1. Tripode

Lorsque $|z| = |x| + |y| - n$, cette variété est de dimension 0 et on définit $n(x, y, z)_2 = |\mathcal{M}_z^{x,y}|_2$. Le produit d'intersection est donné par la formule

$$\begin{aligned} \mu : C_p(f_1) \otimes C_q(f_2) &\rightarrow C_{p+q-n}(f_3) \\ x \otimes y &\mapsto \sum_{z \in C_{p+q-n}(f_3)} n(x, y, z)_2 z \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1. $\mu \circ d = \partial \circ \mu$, où d est la différentielle du produit tensoriel, qui vérifie la règle de Leibniz $d(x \otimes y) = \partial(x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial(y)$, i.e. on a un produit induit

$$\mu_* : H_p(C_*(f_1)) \otimes H_q(C_*(f_2)) \rightarrow H_{p+q-n}(C_*(f_3)).$$

De plus, μ_* est associatif.

Démonstration. On considère la variété de dimension 1 compacte $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$ (la compactification existe et se fait comme avant, en ajoutant les brisures), où $|z| = |x| + |y| - n - 1$. Les différentes brisures possibles ne peuvent se faire qu'à des points critiques (figure 2.2), elles correspondent donc aux différentielles des trois complexes associés aux fonctions f_i . Le bord de $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$ possède un nombre pair de points (c'est le bord d'une variété de dimension 1) et vérifie

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_z^{x,y} \approx \bigcup_{|x'|=|x|-1} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x',y} \cup \bigcup_{|y'|=|y|-1} \overline{\mathcal{M}}_{y'}^y \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x,y'} \cup \bigcup_{|z|=|z'|-1} \overline{\mathcal{M}}_{z'}^{x,y} \times \overline{\mathcal{M}}_z^{z'}.$$

Les différentes parties du bord correspondent respectivement à $\mu(\partial x \otimes y)$, $\mu(x \otimes \partial y)$ (qui n'est que $\mu d(x \otimes y)$) et $\partial(\mu(x \otimes y))$ (figure 2.2).

□

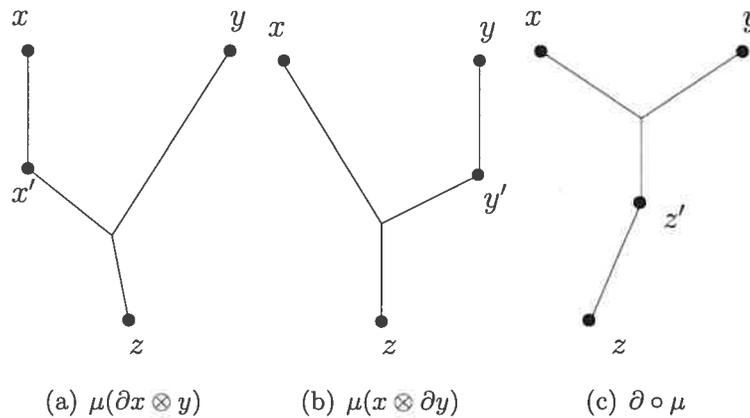


FIG. 2.2

2.2. INVARIANCE

Le produit défini par les fonctions de Morse coïncide avec le produit d'intersection en homologie ([BeCoh]), il est donc indépendant du choix des fonctions et des métriques. On utilise ici les morphismes de comparaison $\Phi^{\beta\alpha}$, qui proviennent d'homotopies régulières entre fonctions Morse-Smale, pour construire une homotopie de chaînes entre deux produits d'intersection provenant de deux triplets de fonctions Morse-Smale. On utilise le produit d'intersection sur $M \times I$, les trois fonctions sont les homotopies (génériques) et sur chaque face de $M \times I$, le produit correspond à celui défini par chaque triplet de départ, on obtient ainsi l'homotopie de chaînes.

Remarque 2.2.1. *En considérant d'autres configurations de graphes, on peut reconstruire les opérations homologiques et cohomologiques classiques, telles la dualité de Poincaré, le produit cup et les carrés de Steenrod. Ces constructions sont présentées dans [BeCoh].*

On utilise dans la prochaine proposition les morphismes de chaînes $\Phi^{\beta\alpha} : C_k(f_1) \rightarrow C_k(f_2)$ entre deux complexes de Morse. Ces morphismes sont construits en considérant une homotopie h entre f_1 et f_2 (ce sont des fonctions à valeur dans \mathbb{R} , elles sont donc homotopes) et en regardant les lignes de flot de cette homotopie sur $M \times I$. On peut faire en sorte que les points critiques de h coïncident avec ceux

de f_1 et f_2 et que le flot parte de $M \times 0$ et aille vers $M \times 1$; on augmente ainsi de 1 la dimension des variétés instables sur la face $M \times 0$, i.e. $Crit_k f_1 \subset Crit_{k+1} h$. Les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)}$ ont dimension 0 lorsque $x \in Crit_k f_1$ et $y \in Crit_k f_2$. Notez que ces morphismes induisent des isomorphismes en homologie de Morse (la proposition 3.1.13 donne une généralisation de cette propriété).

Proposition 2.2.2. μ_* est indépendant du choix des fonctions f_i .

DÉMONSTRATION. Soient

$$\mu : C_p(f_1) \otimes C_q(f_2) \rightarrow C_{p+q-n}(f_3)$$

$$\mu' : C_p(g_1) \otimes C_q(g_2) \rightarrow C_{p+q-n}(g_3)$$

deux morphismes d'intersection définis par deux triplets de fonctions Morse-Smale. Il faut montrer que le diagramme suivant est commutatif à homotopie de chaînes près, i.e. qu'il commute en homologie. Notez que les morphismes $\Phi^{\alpha,\beta}$ induisent des isomorphismes en homologie (on construira une généralisation de ces isomorphismes dans le chapitre trois, qui coïncideront avec ces morphismes en dimension 0, lorsqu'on considérera l'invariance du complexe de Morse enrichi).

$$\begin{array}{ccc} C_p(f_1) \otimes C_q(f_2) & \xrightarrow{\mu} & C_{p+q-n}(f_3) \\ \downarrow \Phi^{g_1, f_1} \otimes \Phi^{g_2, f_2} & & \downarrow \Phi^{g_3, f_3} \\ C_p(g_1) \otimes C_q(g_2) & \xrightarrow{\mu'} & C_{p+q-n}(g_3) \end{array}$$

Pour construire l'homotopie de chaînes, on se donne trois homotopies de Morse régulières $H_i : M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ entre f_i et g_i . Ensuite, on définit

$$\begin{aligned} \xi : C_p(f_1) \otimes C_q(f_2) &\rightarrow C_{p+q-n+1}(g_3) \\ x \otimes y &\mapsto \sum_{w \in Crit_{|x|+|y|-n+1} g_3} n(x, y, w)_2 w \end{aligned}$$

où $n(x, y, w)_2 = |W_{H_1}^u(x) \cap W_{H_2}^u(y) \cap W_{H_3}^s(w)|_2$. Cette variété est bien de dimension 0 (l'intersection est transverse), puisque $Crit_k f_i \subset Crit_{k+1} H_i$ et $Crit_k g_i \subset Crit_k H_i$. L'index des points critiques de f_i augmente de un, car le flot de H_i se déplace de gauche à droite dans $M \times I$ et $H_i|_{M \times 0} = f_i$, on ajoute une dimension aux variétés instables.

Finalement, on considère la variété de dimension 1 $W_{H_1}^u(x) \cap W_{H_2}^u(y) \cap W_{H_3}^s(w)$, où $w \in Crit_{|x|+|y|-n} g_3$. Comme avant, les brisures possibles se font à des points critiques, qui sont sur les faces; notez que deux des brisures correspondent à des tripodes (figure 2.3). Les différents morceaux du bord donnent la formule $\xi \circ d + \partial \circ \xi = \mu' \circ (\Phi^{g_1, f_1} \otimes \Phi^{g_2, f_2}) + \Phi^{g_3, f_3} \circ \mu$.

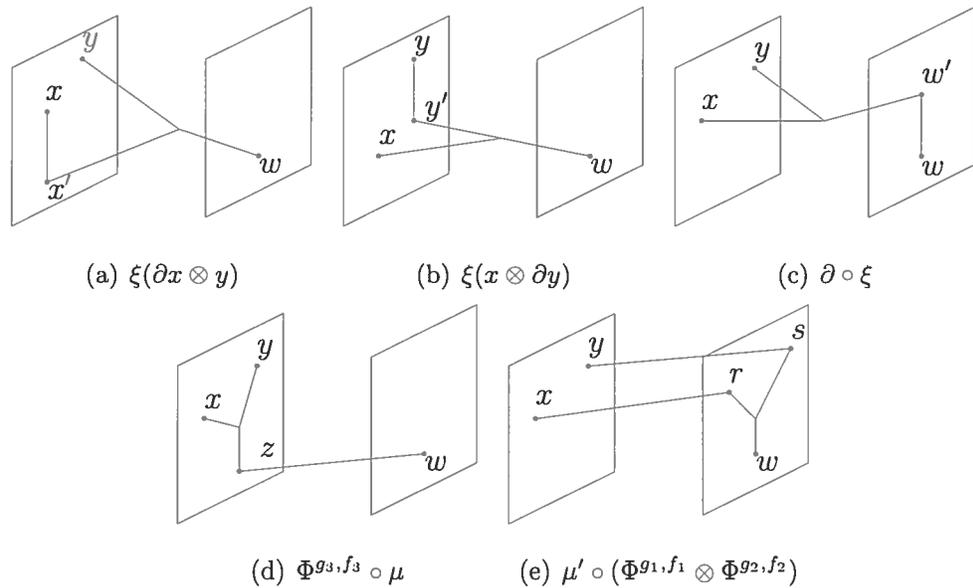


FIG. 2.3

□

Chapitre 3

OPÉRATION D'INTERSECTION GÉNÉRALISÉE

Ceci est le chapitre principal du mémoire. On définit une opération d'intersection généralisée, qui est valable quand les espaces $\mathcal{M}_z^{x,y}$ sont de dimension plus grande ou égale à 1. Pour ce faire, on présente d'abord une construction de Barraud et Cornea (voir [BaCo]), qui enrichit le complexe de Morse classique et permet de mesurer les espaces de module de dimension arbitraire, pas juste ceux de dimension 0, qui sont utilisés dans la définition de l'homologie de Morse classique. On donne aussi une preuve de l'invariance de cette construction au niveau homologique. Dans l'article de Barraud et Cornea, une forme d'invariance est montrée, mais seulement au niveau des suites spectrales induites. La section 3.1.4 contient des résultats nouveaux et montre l'invariance de la construction, en construisant des morphismes de comparaison $\Phi^{g,f}$ de complexes enrichis provenant de fonctions de Morse différentes. Le nouvel argument clé utilisé dans la construction des morphismes est l'indépendance de ces derniers par rapport au changement continu de paramétrage des lignes de flot. On introduit aussi la notion de suite spectrale, qui sert à mesurer les espaces de modules, et on présente une méthode pour effectuer un changement de coefficients dans le complexe enrichi.

Ensuite, ayant établi la machinerie nécessaire pour mesurer les espaces de module, on donne une première définition d'une opération d'intersection, en remarquant que les tripodes (i.e. les éléments de $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$) correspondent à trois chemins basés en des points critiques et ayant un point en commun. En identifiant

les points critiques à un seul point $[\nu]$, chaque tripode correspond à trois chemins ayant leur point d'arrivée en commun ; on peut alors représenter l'espace des tripodes comme un pull-back qui traduit cette observation. On utilise ensuite l'action des boucles sur chaque branche d'un tripode pour représenter la différentielle (chaque brisure allonge une des trois branches du tripode).

La première définition de l'opération d'intersection associée à deux points critiques un troisième, enrichi d'un coefficient, une chaîne dans le pull-back précédent. Cependant, un manque **probable** de commutativité du produit de deux cubes empêche la commutativité de cette opération avec la différentielle, i.e. on n'a pas un morphisme induit en homologie. Il n'est pas clair à ce moment que cette première définition permette de généraliser correctement le produit d'intersection. On a choisi de quand même présenter cette construction, puisqu'elle apparaît de façon très naturelle lorsqu'on essaie d'enrichir le produit d'intersection classique.

Finalement, on donne une construction qui fonctionne bien et qui est une généralisation au complexe de Morse enrichi de la construction de fonctions de Morse sur un fibré vectoriel, telle que présentée dans le livre de Schwarz [Sc]. L'idée est d'utiliser d'abord deux fonctions Morse-Smale sur M pour en définir une, appelée la somme, sur $M \times M$. Ensuite, on définit une deuxième fonction sur $M \times M$, qui donne une fonction Morse-Smale lorsque restreinte à la diagonale (on utilise le produit scalaire donné par la structure d'espace vectoriel sur chaque fibre du fibré normal de la diagonale). L'opération d'intersection mesure les lignes de flot qui partent d'un point critique de la fonction somme et qui se rendent à un point critique sur la diagonale. On montre que cette opération généralise effectivement le produit d'intersection, en utilisant un changement de coefficients associée à la fonction constante $g : M \rightarrow \{*\}$, et aussi qu'elle est invariante par rapport aux fonctions de Morse utilisées. On utilise dans la définition un deuxième morphisme de comparaison Ψ . On mentionne que ce morphisme est chaîne homotope aux morphisme $\Phi^{\beta,\alpha}$ déjà introduits et on présente une partie de la preuve (proposition 3.3.3). Cette affirmation est présente sans démonstration dans la littérature, entre autres dans [BeCoh].

3.1. COMPLEXE DE MORSE ENRICHI

Dans cette section, on enrichit le complexe de Morse classique en ajoutant à chaque point critique des coefficients dans l'espace des lacets de Moore de M . La différentielle ne comptera plus seulement les lignes de flot entre des points critiques consécutifs, mais à chaque ligne sera maintenant associé lacet, pour «nuancer» la différentielle. L'homologie ainsi obtenue sera triviale, par contre le complexe contiendra beaucoup d'informations (voir par exemple le théorème 3.1.7), qu'on peut extraire avec une suite spectrale de Leray-Serre, et une procédure de changement de coefficients permet d'obtenir une homologie non nulle (corollaire 3.1.8). On suit de près la présentation de Barraud et Cornea [BaCo].

Chaque ligne de flot entre deux points critiques x et y donne un chemin de x à y , paramétré naturellement par la valeur de la fonction le long de la ligne. On notera $C_{x,y}M := C^0([0, f(x) - f(y)], M)$; on obtient les fonctions continues

$$\gamma_y^x : \mathcal{M}_y^x \rightarrow C_{x,y}M$$

$$\gamma_y^x(u)(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ y & \text{si } t = f(x) - f(y), \\ w & \text{l'unique point sur la ligne } u \text{ vérifiant } f(w) = f(x) - t. \end{cases}$$

Le point w ci-dessus est unique, car la fonction de Morse est strictement décroissante le long d'une ligne de flot; en effet, soit σ une solution non constante du flot gradient négatif, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \sigma(t) &= df_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) = \langle \nabla f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle_g \\ &= - \langle \nabla f(\sigma(t)), \nabla f(\sigma(t)) \rangle_g = -|\nabla f(\sigma(t))|^2 < 0. \end{aligned}$$

On peut créer un nouveau chemin à partir de deux autres, lorsque la fin du premier coïncide avec le début du deuxième, en les mettant bout à bout, c'est la concaténation, notée par le symbole $\#$. Les fonctions γ_y^x se prolongent à la compactification des espaces de modules et pour $(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{M}}_y^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^y \subset \partial \overline{\mathcal{M}}_z^x$, on obtient, grâce au théorème de compactification et au «gluing»,

$$\overline{\gamma}_z^x((u_1, u_2)) = \overline{\gamma}_y^x(u_1) \# \overline{\gamma}_z^y(u_2). \quad (3.1.1)$$

La prochaine étape consiste à voir les lignes de flot non pas comme des chemins, mais comme des lacets de longueur variable. Puisque chaque ligne commence et se termine à un point critique, on considère un chemin simple ν passant par chaque point critique de f . On quotiente ensuite ce chemin par l'application $q : M \rightarrow M/\nu = M'$. M' a le même type d'homotopie que M , puisque ν est contractile, et a un point de base $[\nu]$, la classe de ν . Chaque ligne de flot est maintenant un lacet basé en $[\nu]$ et de longueur variable, c'est à dire un élément de $(\Omega' M', [\nu])$, l'espace des lacets de Moore de M' , qui a le même type d'homotopie que $(\Omega M, m)$. On notera ces deux espaces ΩM pour alléger la notation.

L'application q induit une fonction continue $q : C_{x,y} M \rightarrow \Omega M$, avec $x, y \in \text{Crit} f$. On peut maintenant représenter chaque ligne de flot comme un lacet :

$$\Psi_{x,y} = q \circ \overline{\gamma}_y^x : \overline{\mathcal{M}}_y^x \rightarrow \Omega M.$$

L'espace des lacets est muni d'une multiplication \cdot , donnée par la concaténation des chemins. Pour $(\gamma_1, \gamma_2) \in \partial \overline{\mathcal{M}}_z^x$ et grâce à (3.1.1), on obtient

$$\Psi_{x,z}((\gamma_1, \gamma_2)) = \Psi_{x,y}(\gamma_1) \cdot \Psi_{y,z}(\gamma_2). \quad (3.1.2)$$

3.1.1. Système de chaînes génératrices

Pour mesurer l'image des variétés à bords $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ dans ΩM , on utilise l'homologie cubique et le fait que l'homologie d'une variété à bord N de dimension n vérifie $H_n(N, \partial N; R) \approx R$, pour n'importe quel anneau commutatif et unitaire R .

Étant donné un espace topologique X , on note $S_* X$ les chaînes cubiques (non dégénérées) de X à coefficients \mathbb{Z}_2 (voir [Ma]). L'avantage d'utiliser des cubes (plutôt que des simplexes), est que le produit de deux cubes reste un cube.

$$S_k(X) \times S_l(Y) \rightarrow S_{k+l}(X \times Y)$$

$$(\sigma \times \sigma')(x, y) = (\sigma(x), \sigma'(y)).$$

Cette multiplication induit un morphisme d'Eilenberg-Zilber,

$$\xi : S_k(X) \otimes S_l(Y) \rightarrow S_{k+l}(X \times Y)$$

$$\sigma \otimes \sigma' \mapsto \sigma \times \sigma'$$

La multiplication sur l'espaces des lacets induit aussi une multiplication

$$\cdot : S_k(\Omega M) \otimes S_l(\Omega M) \rightarrow S_{k+l}(\Omega M),$$

définie par $(\sigma \cdot \sigma')(x, y) = \sigma(x) \cdot \sigma'(y)$, où $x \in I^k$, $y \in I^l$.

Définition 3.1.1. *Un système de chaînes génératrices pour un espace de modules est une famille $\{s_y^x \in S_{|x|-|y|-1}(\overline{\mathcal{M}}_y^x)\}$ vérifiant :*

i. L'image de s_y^x dans $S_{|x|-|y|-1}(\overline{\mathcal{M}}_y^x, \partial\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ par l'inclusion $(\overline{\mathcal{M}}_y^x, \emptyset) \rightarrow (\overline{\mathcal{M}}_y^x, \partial\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ est un cycle représentant la classe fondamentale relative au bord.

ii. En utilisant les identifications de (1.2.1), $\partial s_y^x = \sum_z s_z^x \times s_y^z$.

Lemme 3.1.2. *Un système de chaînes génératrices existe.*

DÉMONSTRATION. On construit les chaînes s_y^x par récurrence sur la dimension des espaces de modules. Lorsque la dimension est 1 ($|x| - |y| - 1 = 1$), alors les espaces de modules, lorsque leur bord est non-vide, ne sont que des intervalles et dans ce cas le lemme est vrai (ceci est classique et repose sur l'homologie d'un intervalle!). Supposons que le lemme soit vrai lorsque $|x| - |y| - 1 < k$. Soient maintenant x, y telles que $|x| - |y| - 1 = k$. On peut supposer que $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ est connexe, sinon on applique le raisonnement qui suit à chaque composante.

On considère la chaîne $c_y^x = \sum_z s_z^x \times s_y^z \in S_{k-1}(\partial\overline{\mathcal{M}}_y^x)$, en utilisant les identifications de (1.2.1). Alors $\partial c_y^x = \sum(\partial s_z^x \times s_y^z + s_z^x \times \partial s_y^z) = \sum_z \sum_k s_k^x \times s_z^k \times s_y^z + \sum_z \sum_t s_z^x \times s_t^z \times s_y^t = 2(\sum_{u,v} s_u^x \times s_v^u \times s_y^v) = 0$. La chaîne c_y^x représente bien une classe d'homologie. Cette classe est en fait la classe fondamentale de $\partial\overline{\mathcal{M}}_y^x$, puisqu'elle coïncide en chaque morceau $H_{k-1}(\overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z, \partial(\overline{\mathcal{M}}_z^x \times \overline{\mathcal{M}}_y^z))$ avec la classe $s_z^x \times s_y^z$, qui est une classe fondamentale par hypothèse (on utilise la formule de Künneth pour l'homologie d'un produit).

Étant donnée une variété de dimension k à bord, on a, de façon générale, que $\delta : H_k(M, \partial M) \rightarrow H_{k-1}(\partial M)$ est un isomorphisme et $i_* : H_{k-1}(\partial M) \rightarrow H_{k-1}(M)$ est l'homomorphisme nul. Ces notions sont classiques (voir [Sp] ou [Ma]).

Alors, on a que $c_y^x \in \text{Im}(\partial : S_k(\overline{\mathcal{M}}_y^x) \rightarrow S_{k-1}(\overline{\mathcal{M}}_y^x))$. On choisit s_y^x telle que $\partial s_y^x = c_y^x$. La propriété ii. est alors satisfaite. La première l'est aussi, car l'image

de s_y^x est un cycle dans $S_k(\overline{\mathcal{M}}_y^x, \partial\overline{\mathcal{M}}_y^x)$, le connectant δ de la paire $(\overline{\mathcal{M}}_y^x, \partial\overline{\mathcal{M}}_y^x)$ est un isomorphisme en dimension k et, par définition, $\delta([s_y^x]) = c_y^x$. \square

3.1.2. Complexe enrichi et suite spectrale

On mesure dans cette section l'image des cubes s_y^x dans $S_*(\Omega M)$ et on introduit la notion de suite spectrale. On pose

$$a_y^x = \Psi_{x,y*}(s_y^x) \in S_{|x|-|y|-1}(\Omega M).$$

Proposition 3.1.3.

$$\partial a_y^x = a_z^x \cdot a_x^z$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \partial a_y^x &= \Psi_{x,y*}(s_z^x \times s_y^z) \\ &= q \circ (\overline{\gamma}_{x,z}(s_z^x) \# \overline{\gamma}_{z,y}(s_y^z)) \\ &= (q \circ \overline{\gamma}_{x,z}(s_z^x)) \cdot (q \circ \overline{\gamma}_{z,y}(s_y^z)) \\ &= a_z^x \cdot a_y^z. \end{aligned}$$

\square

On peut maintenant définir le complexe de Morse enrichi, c'est le $S_*(\Omega M)$ -module

$$\mathcal{C}_*(f) = (S(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle Crit f \rangle)_*,$$

la structure de module est donnée par $\sigma \cdot (a \otimes x) = (\sigma \cdot a) \otimes x$ et la différentielle est l'unique dérivation de $S_*(\Omega M)$ -module (i.e. $d(a \otimes b) = (\partial a) \otimes b + a \cdot db$) déterminée par

$$d(x) = \sum_y a_y^x \otimes y.$$

Proposition 3.1.4. $d^2 = 0$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
 d^2(x) &= d(a_y^x \otimes y) \\
 &= \sum_y \partial a_y^x \otimes y + a_y^x \cdot dy \\
 &= \sum_y \partial a_y^x \otimes y + \sum_{y,z} a_y^x \cdot a_z^y \otimes z \\
 &= \sum_t (\partial a_t^x + \sum_s a_s^x \cdot a_t^s) \otimes t = 0.
 \end{aligned}$$

□

Le complexe étant défini, il reste à savoir ce que vaut son homologie. Pour la calculer, on aura besoin de la suite spectrale associée à la fibration de l'espace des chemins. On rappelle ici quelques notions de base concernant les suites spectrales et leur lien avec les fibrations. Ce concept n'est pas très important dans le cadre de ce mémoire, sauf pour le calcul de certains groupes d'homologie, on restera donc assez bref et concis dans la présentation. Le lecteur peut consulter [Sp] pour un exposé plus complet ; on suit de très près la présentation de Spanier, en faisant le parallèle avec la construction du complexe enrichi.

On fixe d'abord un anneau principal R (dans notre cas, \mathbb{Z}_2). On dit que E est un R -module bigradué s'il est constitué d'une famille de modules $E_{s,t}$, où $s, t \in \mathbb{Z}$. Une différentielle de bidegré $(-r, r-1)$ est une famille d'homomorphismes $d : E_{s,t} \rightarrow E_{s-r, t+r-1}$ qui vérifient $d^2 = 0$. On a donc une famille de groupes d'homologie associée à ces modules :

$$H_{s,t}(E) = \ker d_{s,t} / \operatorname{im} d_{s+r, t-r+1}.$$

Une k -suite spectrale E est une famille $\{E^r, d^r\}$, $r \geq k$ vérifiant

i. E^r est un module bigradué et d^r est une différentielle de bidegré $(-r, r-1)$

ii. Pour $r \geq k$, il y a un isomorphisme $H(E^r) \approx E^{r+1}$.

On peut voir une suite spectrale comme un «livre» dans lequel la page k contient un réseau de groupes $E_{s,t}^k$ reliés par une différentielle, et la page $k+1$ est l'homologie de la page k ; ces groupes d'homologies sont à leur tour reliés par une différentielle, et ainsi de suite. On dit que la suite spectrale est *convergente*

si pour chaque (s, t) , il y a un r pour lequel $E_{s,t}^k \approx E_{s,t}^r$, $\forall k \geq r$, autrement dit, les pages sont toutes les mêmes à partir de la page r (ceci n'est pas la définition exacte, mais ça nous suffira pour ce mémoire).

Une *filtration* F d'un complexe de chaînes C est une suite $\{F_s C\}$ de sous-complexes (c'est à dire que $F_s C$ est un sous complexe de chaînes $\{F_s C_t\}$) vérifiant $F_s C \subset F_{s+1} C$. Le *module bigradué associé* à la filtration est défini par $G(C)_{s,t} = F_s C_{s+t} / F_{s-1} C_{s+t}$. La filtration est *bornée inférieurement* si pour chaque t , il existe s tel que $F_s A_t = 0$. Une telle filtration induit une filtration de $H_*(C)$ donnée par

$$F_s H_k(C) = \text{im}[H_k(F_s C) \rightarrow H_k(C)].$$

Le lien entre une filtration et une suite spectrale est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. *Soit F une filtration d'un complexe de chaînes C bornée inférieurement telle que $\bigcap_s F_s A = 0$ (i.e. la filtration est convergente). Alors il y a une 1-suite spectrale vérifiant*

$$E_{s,t}^1 \approx H_{s+t}(F_s C / F_{s-1} C).$$

De plus, cette suite spectrale converge vers le module bigradué $GH_(C)$ associé à la filtration $F_s H_*(C)$ définie ci-dessus.*

Exemple Soit X un complexe CW et $\{X^k\}$ les k -squelettes de X , alors la filtration topologique $X^k \subset X^{k+1}$ donne une filtration du complexe de chaînes singulières de X , qui prend les chaînes dans le k -squelette, i.e. $F_s(C(X)) = C(X_s)$. Cette filtration vérifie les hypothèses du théorème précédent, on a donc une 1-suite spectrale, dont la première page vaut $E_{s,t}^1 \approx H_{s+t}(C(X_s)/C(X_{s-1})) = H_{s+t}(X_s, X_{s-1})$. Ces groupes sont non-nuls seulement lorsque $t = 0$, par des propriétés homologiques classiques des complexes CW. On retrouve donc le complexe cellulaire de X . On peut vérifier qu'à la page 2, on a l'homologie cellulaire $E_{s,0}^2 \approx H_s(X)$.

Le complexe enrichi $\mathcal{C}(f)$ admet la filtration différentielle suivante, donnée en bornant supérieurement les indexes des points critiques :

$$F_k \mathcal{C} = S(\Omega M) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle x \in \text{Crit} f \mid \mu(x) \leq k \rangle .$$

On note $E(f) = (E_{p,q}^r(f), d^r)$ la suite spectrale associée à cette filtration. La différentielle à la page E^r mesure les espaces de modules entre des points critiques de différence d'index au plus k . On peut calculer la deuxième page de cette suite spectrale, en se basant sur la preuve du théorème précédent, et on obtient : $E_{p,q}^2 \approx H_p(\Omega M) \otimes H_q^{\text{Morse}}(M)$. Cette deuxième page est en fait la même que celle de la suite spectrale de Leray-Serre, associée à la fibration de l'espace des lacets, qu'on définit à l'instant.

On dit que $p : E \rightarrow B$ est une *fibration* si, pour tout espace topologique X , étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{h_0 := h|_{X \times 0}} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

il existe H t.q. $H \circ i = h_0$ et $p \circ H = h$. Autrement dit, on veut pouvoir relever n'importe quelle homotopie dans B à une homotopie dans E . La fibration qui nous sera utile est la *fibration de l'espace des lacets* $p : PM \rightarrow M$. L'espace $PM = \{\sigma : ([0, 1], 0) \rightarrow (M, m_0)\}$ est appelé *espace des chemins*. La fonction p est l'évaluation au bout d'un chemin, $p(\sigma) = \sigma(1)$. On appelle *fibre* l'espace $F = p^{-1}(b_0)$; la fibre en m_0 est l'espace des lacets de M basés en m_0 , $(\Omega M, m_0)$. Un revêtement est une fibration avec une fibre discrète. Le théorème suivant associe une suite spectrale, dite de Leray-Serre, à une fibration :

Théorème 3.1.6. *Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de fibre $F = p^{-1}(b_0)$, où B est un complexe CW connexe par arc et $\pi_1(B) = 0$. Il y a une 2-suite spectrale vérifiant $E_{s,t}^2 \approx H_s(B; H_t(F; G))$. De plus, cette suite spectrale converge vers le module bigradué associé à la filtration de $H_*(E; G)$ définie par*

$$F_s H_*(E; G) = \text{im}[H_*(E_s; G) \rightarrow H_*(E; G)]$$

Dans notre cas, le groupe de coefficients G est \mathbb{Z}_2 , la page E^2 est bien donnée par la formule $E_{s,t}^2 \approx H_s(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_t(\Omega M; \mathbb{Z}_2)$. Notez que dans la fibration de l'espace des lacets, l'espace PM est contractile. La suite spectrale converge donc vers un groupe trivial, sauf lorsque $s = t = 0$.

Le lien entre la fibration de l'espace des lacets et la filtration du complexe riche est intuitivement simple : Une fonction de Morse donne, à équivalence d'homotopie près, une décomposition en cellules d'une variété, les cellules de dimension k étant associées aux points critiques d'index k . Le théorème précédent est démontré en étudiant ce qui arrive à la préimage par p des k -squelettes de B . On peut faire la même chose dans le cadre de la théorie de Morse ; on regarde ce qui arrive à la préimage des points critiques et des variétés instables dans l'espace des chemins. La construction est tellement similaire que les 2 suites spectrales sont en fait isomorphes.

On dit que deux suites spectrales E et E' sont isomorphes s'il existe une famille $\{\phi^k\}$ d'isomorphismes qui commutent avec la différentielle du complexe bigradué, $\phi^k : E_{s,t}^k \rightarrow E'_{s,t}{}^k$, et vérifiant $\phi^{k+1} = \phi_*^k : H(E^k) \rightarrow H(E'^k)$.

Théorème 3.1.7 ([BaCo], théorème 1.1 d)). *Lorsque M est simplement connexe et $r \geq 2$, $E(f)$ est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre associée à la fibration de l'espace des lacets*

$$\mathcal{P} : \Omega M \rightarrow PM \rightarrow M.$$

L'homologie du complexe \mathcal{C} est donc nulle, car la suite spectrale converge vers l'homologie de PM , qui est nulle. Notez que ce résultat implique aussi l'invariance de la construction du complexe par rapport aux choix de la fonction de Morse et de la métrique. Malgré le manque d'information au niveau homologique, la suite spectrale de Serre contient beaucoup d'informations sur M et donne un bon cadre pour mesurer les espaces de modules de grande dimension. Pour des applications de ce théorème, notamment à la topologie symplectique, on peut consulter l'article de Barraud et Cornea [BaCo].

3.1.3. Changement de coefficients et pull-back

On présente dans cette section une méthode de changements de coefficients du complexe riche, qui permet d'obtenir une homologie non-nulle, correspondant à l'homologie d'un pull-back.

Étant donné une fibration $p : E \rightarrow B$ de fibre F et une application continue $g : X \rightarrow B$, le *pull-back* de g est l'espace topologie $E_g = \{(e, x) \in E \times X | p(e) = g(x)\}$ et s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{id} & F \\
 \downarrow id & & \downarrow i \\
 E_g & \xrightarrow{\pi_1} & E \\
 \downarrow \pi_2 & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{g} & B
 \end{array}$$

Pour la fibration de chemins $\Omega B \rightarrow PB \rightarrow B$ et $X = M$, on a aussi le diagramme commutatif suivant, où $\Omega g(\sigma) = g \circ \sigma$ et $\bar{g}(\sigma) = (g \circ \sigma, \sigma(1)) \in E_g \subset PB \times M$:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega M & \xrightarrow{\Omega g} & \Omega B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 PM & \xrightarrow{\bar{g}} & E_g \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 M & \xrightarrow{id} & M
 \end{array}$$

Le changement de coefficients prend un élément $\gamma \otimes x \in S(\Omega M) \otimes C_k(f)$ et le transforme en $\Omega g_*(\gamma) \otimes x \in S(\Omega B) \otimes C_k(f)$. Remarquez que la fonction f reste définie sur M et non sur B et qu'on a encore une filtration différentielle donnée par

$$F^k \mathcal{C} = S(\Omega B) \otimes \mathbb{Z}_2 \langle x \in Crit f | \mu(x) \leq k \rangle .$$

On a alors, comme corollaire du théorème 3.1.7, un lien entre la suite spectrale associée à cette filtration et le pull-back E_g :

Corollaire 3.1.8 ([BaCo], corollaire 3.5). *La suite spectrale associée à la filtration F^k ci-dessus est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration pull-back $\Omega B \rightarrow E_g \rightarrow M$. Elle converge vers l'homologie de E_g .*

Exemple En utilisant la fonction constante vers le point $g : M \rightarrow \{*\}$, le pull-back E_g est homéomorphe à M et le changement de coefficients envoie $\gamma \otimes x \in S(\Omega M)$ sur $\Omega g(\gamma) \otimes x = 0 \otimes x$ lorsque le degré de γ est supérieur à 0, car seuls les 0-cubes d'un point sont non-dégénérés (on a utilisé les égalités $\Omega\{*\} = P\{*\} = \{*\}$). Tout ce qui compte dans la différentielle du complexe $S(\Omega\{*\}) \otimes C_k(f)$ est donc la différentielle classique du complexe de Morse; l'homologie obtenue est l'homologie de Morse de M , qui est isomorphe à l'homologie singulière.

3.1.4. Invariance de la construction

On donne dans cette section une preuve de l'indépendance de l'homologie du complexe riche par rapport aux choix des fonctions. La méthode est inspirée de la théorie de Morse classique. On construit des morphismes de comparaison entre deux complexes à l'aide d'homotopies régulières, qui induisent des isomorphismes en homologie. Contrairement au cas classique, l'homotopie constante n'induit pas l'identité au niveau du complexe enrichi. Ce phénomène est surprenant, mais son origine est simple; en dimension 0, la situation correspond au cas classique et les bouts d'une ligne de flot de l'homotopie constante entre f et f sont un même point critique x . Par contre, en dimension supérieure à 0, chaque ligne qui apparaît dans la différentielle de Morse de f engendre une famille de ligne de flot de l'homotopie constante. Malgré cela, on montre qu'il s'agit bien d'un isomorphisme au niveau homologique. Pour ce faire, on remarque que les coefficients utilisés dans le complexe enrichi proviennent d'un paramétrage particulier des lignes de flot, obtenu en prenant la valeur de la fonction le long de chaque ligne. On montre qu'en changeant de façon continu le paramétrage, on obtient la même homologie. Cet argument est essentiel à la preuve et est nouveau. Ce résultat est très naturel, car l'homologie est un invariant discret, mais il n'est pas si simple à démontrer.

On se donne une homotopie régulière h^{f_2, f_1} entre deux fonctions Morse-Smale f_1 et f_2 (voir par exemple [CoRa] ou [We]). On envoie l'espace de modules compactifié dans les lacets (de Moore) de M , $\Psi_y^x : \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \rightarrow \Omega M$ (on utilise la projection $\Omega\pi : \Omega(M \times I) \rightarrow \Omega M$). En utilisant les formules de frontière et les notations de la section précédente pour les cubes s_y^x et a_y^x , on choisit à nouveau une famille de chaînes génératrices, $m_y^x \in S_{|x|-|y|}(\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)}, \partial\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)})$ telle que $\partial m_y^x = \sum_{|x'| < |x|} s_{x'}^x \times m_y^{x'} + \sum_{|y'| > |y|} m_{y'}^x \times s_{y'}^y$. L'image de ces cubes par Ψ_y^x est notée aussi m_y^x et satisfait $\partial m_y^x = \sum_{|x'| < |x|} a_{x'}^x \cdot m_y^{x'} + \sum_{|y'| > |y|} m_{y'}^x \cdot a_{y'}^y$.

Les morphismes de comparaison sont alors définis par

$$\Phi(h^{f_2, f_1}) = \Phi^{f_2, f_1} : \mathcal{C}_k(f_1) \rightarrow \mathcal{C}_k(f_2)$$

$$x \mapsto \sum_y m_y^x \otimes y$$

$$\gamma \otimes x \mapsto \gamma \cdot \Phi^{f_2, f_1}(x)$$

Proposition 3.1.9. Φ^{f_2, f_1} est un morphisme de chaînes, i.e. $\Phi^{f_2, f_1} \circ d_{f_1} = d_{f_2} \circ \Phi^{f_2, f_1}$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} d \circ \Phi^{f_2, f_1}(\gamma \otimes x) &= \partial\gamma \cdot m_y^x \otimes y + \gamma \cdot \partial m_y^x \otimes y + \gamma \cdot m_y^x \cdot a_{y'}^y \otimes y' \\ &= \partial\gamma \cdot m_y^x \otimes y + \gamma \cdot (a_{x'}^x \cdot m_y^{x'} + m_{y'}^x \cdot a_{y'}^y) \otimes y + \gamma \cdot m_y^x \cdot a_{y'}^y \otimes y' \\ &= \partial\gamma \cdot m_y^x \otimes y + \gamma \cdot a_{x'}^x \cdot m_y^{x'} \otimes y \\ &= \Phi^{f_2, f_1} \circ d(\gamma \otimes x) \end{aligned}$$

□

3.1.4.1. Homotopies constantes et paramétrage

On note h^f l'homotopie constante régulière, i.e. de la forme $h^f(x, t) = f(x) + g(t)$ où $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse avec seulement deux points critiques et est décroissante (voir par exemple [We]). En théorie de Morse classique, le morphisme $\Phi(h^f)$ induit l'identité au niveau des complexes de Morse;

cependant dans le complexe enrichi, ceci est faux pour une fonction Morse-Smale quelconque, puisqu'on a la relation $\overline{\mathcal{M}}_y^x = \emptyset \iff \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} = \emptyset$ (avec $x \neq y$), i.e. les solutions de $\gamma'(t_0) = -\nabla f(\gamma(t_0))$ donnent des solutions de $\sigma'(t_0) = (\sigma'_1(t_0), \sigma'_2(t_0)) = -\nabla h^f(\sigma(t_0)) = -(\nabla f(\sigma_1(t_0)), \nabla g(\sigma_2(t_0)))$ et vice-versa. On obtient ainsi

$$\Phi(h^f)(\gamma \otimes x) = \gamma \cdot \gamma_0 \otimes x + \sum_{\{y | \overline{\mathcal{M}}_y^x \neq \emptyset\}} \gamma \cdot m_y^x \otimes y \quad (3.1.3)$$

γ_0 représente un 0-cube dont l'image est le lacet constant. Notez que ceci a été obtenu en utilisant le paramétrage naturel donné par la valeur de h^f dans M le long des lignes du flot. L'argument clé pour montrer $\Phi_*(h^f) = id$ au niveau homologique est que la valeur du morphisme en homologie est indépendante du paramétrage utilisé. On montre dans la prochaine proposition qu'un changement continu de paramétrage donne lieu au même morphisme en homologie (bien sûr, au niveau des chaînes ces morphismes sont différents), et par un choix judicieux de paramétrage, on obtient $\Phi_*(h^f) = id$.

Proposition 3.1.10. $\Phi(h^f)_* = id_{H_*(C(f))}$

DÉMONSTRATION. On considère l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times I$. La variable temporelle servira pour le changement de paramétrage. Il faut voir $\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)}$ comme l'espace des lignes du flot de h^f , ce sont toujours les mêmes éléments, mais on changera la paramétrage.

On envoie ensuite cet espace dans ΩM de la façon suivante :

$$r : \mathcal{M}_{(y,1)}^{(x,0)} \times I \rightarrow \Omega M$$

(γ, ϵ) est envoyé sur un lacet dans M (à l'aide de $\pi : M \times I \rightarrow M$) de longueur $f(x) - (f(y) + \epsilon g(1))$ paramétré par la valeur de la fonction $f + \epsilon g$. En $\epsilon = 0$, les lignes sont paramétrées uniquement par la valeur de f , elles sont donc déterminées par les lignes de flot sur les faces, i.e. le cube $m_y^x \in S_{|x|-|y|}(\Omega M)$ aura la même image que $a_y^x \in S_{|x|-|y|-1}(\Omega M)$, il s'agit donc d'un cube dégénéré, qui vaut 0 au niveau des complexes. Les seuls cubes m_y^x non dégénérés seront ceux de dimension

0, ce qui n'arrive que lorsque $y = x$, par les propriétés du flot. De plus, γ_0 de l'équation 3.1.3 est maintenant le lacet constant de longueur 0, alors $\gamma \cdot \gamma_0 = \gamma$.

On peut étendre r à l'espace compactifié $\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times I$. La frontière de cet espace est *difféomorphe* à

$$\begin{aligned} & \bigcup_{|x'| < |x|} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x',0)} \times I \quad \bigcup_{|y| < |y'|} \overline{\mathcal{M}}_{(y',1)}^{(x,0)} \times I \times \overline{\mathcal{M}}_y^{y'} \\ & \bigcup \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times \{0\} \quad \bigcup \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times \{1\} \end{aligned}$$

Remarque 3.1.11. *Notez que dans le deuxième terme, le produit avec l'intervalle se retrouve au milieu, et non à la fin, ce qu'on peut faire pour deux raisons. D'abord, dans les deux cas, les espaces sont difféomorphes. La principale raison est cependant la consistance avec l'opération de «gluing», car sur les éléments de bord $\overline{\mathcal{M}}_{x'}^x$ et $\overline{\mathcal{M}}_y^{y'}$, le paramétrage est le même pour chaque $\epsilon \in I$, puisque seule la valeur de f change le long des lignes de flot sur ces faces, g étant constante.*

Par la remarque, on peut alors trouver une famille de chaînes génératrices $\{c_y^x \in S_{|x|-|y|+1}(\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times I, \partial(\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \times I))\}$ qui satisfait $\partial c_y^x = s_{x'}^x \times c_{y'}^{x'} + c_{y'}^x \times s_y^{y'} + m_y^x \times 0 + m_y^x \times 1$.

On considère ensuite, $c_y^x = r_*(c_y^x)$ (on utilise la même notation pour simplifier), qui satisfait $\partial c_y^x = m_y^x + \overline{m}_y^x + a_{x'}^x \cdot c_{y'}^{x'} + c_{y'}^x \cdot a_y^{y'}$. Ici, m_y^x correspond à $r_*(m_y^x \times 0)$ et est donc dégénéré (sauf s'il est de dimension 0), car il est paramétré par la valeur de f seulement; \overline{m}_y^x correspond à $r_*(m_y^x \times 1)$ et représente les lignes paramétrées par la valeur de $f + g$.

On définit alors

$$\tau : C_*(f) \rightarrow C_{*+1}(f)$$

$$x \mapsto \sum_y c_y^x \otimes y$$

$$\gamma \otimes x \mapsto \gamma \cdot \tau(x)$$

On vérifie directement que $d\tau - \tau d(\gamma \otimes x) = \sum_y \gamma \cdot m_y^x \otimes y + \gamma \cdot \overline{m}_y^x \otimes y$. On a donc que $\overline{m}_y^x \otimes y$ est chaîne homotope à $m_y^x \otimes y$, son image en homologie est donc nulle - puisque m_y^x est dénénééré -, sauf lorsque $x = y$.

En homologie, on aura finalement la valeur de $\Phi(h^f)$ sur les cycles, en évaluant l'équation 3.1.3 :

$$\Phi(h^f)_* \left(\sum_{x \in J} \gamma(x) \otimes x \right) = \sum_{x \in J} \gamma(x) \otimes x,$$

qui correspond bien à l'identité. \square

3.1.4.2. Homotopies d'homotopies

La prochaine étape est de comparer différents morphismes de comparaison. On se donne 4 fonctions Morse-Smale, 4 homotopies régulières et on complète le carré de la figure (3.1) par une homotopie d'homotopies (voir [CoRa] pour l'existence de telles fonctions). On doit ensuite quotienter $M \times I^2$ par un chemin simple passant par tous les points critiques et coïncidant avec les chemins simples déjà utilisés sur les faces de $M \times I^2$ pour créer les morphismes de comparaison. On devra alors utiliser un chemin qui revient à son point de départ. Pour garantir que ce chemin ν soit contractile, on exige alors que $\pi_1(M) = 0$.

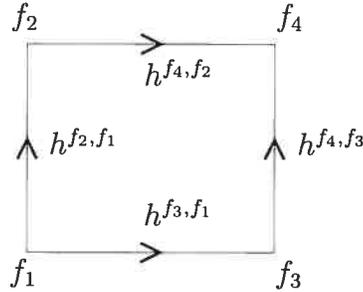


FIG. 3.1. Homotopie d'homotopies

On peut procéder comme avant, en compactifiant l'espace de modules d'une homotopie d'homotopies. On obtient une famille de chaînes génératrices qu'on envoie dans ΩM et ces cubes vérifient alors $\partial c_z^x = \sum_{|x'| < |x|} a_{x'}^x \cdot c_z^{x'} + \sum_{|z'| > |z|} c_z^x \cdot a_z^{z'} + \sum_{y \in \text{Crit}_{f_2}} m_y^x \cdot m_z^y + \sum_{w \in \text{Crit}_{f_3}} m_w^x \cdot m_z^w$. On définit ensuite le morphisme

$$\Lambda : \mathcal{C}_p(f_1) \rightarrow \mathcal{C}_{p+1}(f_4)$$

$$x \mapsto \sum_z c_z^x \otimes z$$

$$\gamma \otimes x \mapsto \gamma \cdot \Lambda(x)$$

Proposition 3.1.12. $\Lambda d - d\Lambda = \Phi^{f_4, f_2} \circ \Phi^{f_2, f_1} - \Phi^{f_4, f_3} \circ \Phi^{f_3, f_1}$. Au niveau homologique, on obtient donc $\Phi_*^{f_4, f_2} \circ \Phi_*^{f_2, f_1} = \Phi_*^{f_4, f_3} \circ \Phi_*^{f_3, f_1}$.

DÉMONSTRATION. Le calcul est direct et utilise les expressions de ∂a_q^p , ∂m_q^p et ∂c_z^x . \square

Proposition 3.1.13. $\Phi_*^{f_4, f_1} = \Phi(h^{f_4, f_1})_*$ est indépendant du choix de l'homotopie. De plus, $\Phi_*^{f_4, f_2} \Phi_*^{f_2, f_1} = \Phi_*^{f_1, f_4}$ et $\Phi_*^{f_4, f_1} = (\Phi_*^{f_1, f_4})^{-1}$. Les morphismes de comparaison donnés par une homotopie sont donc des isomorphismes.

DÉMONSTRATION. On pose $f_2 = f_1$, $f_3 = f_4$, et on choisit des homotopies comme à la figure 2(a), où \bar{h}^{f_4, f_1} et h^{f_4, f_1} sont deux homotopies différentes entre f_1 et f_4 . On obtient alors

$$\Phi_*(\bar{h}^{f_4, f_1})\Phi_*(h^{f_1}) = \Phi_*(h^{f_4})\Phi_*(h^{f_4, f_1}).$$

Par la proposition 3.1.10, on obtient le premier résultat. Une configuration telle qu'à la figure 2(b) donne $\Phi_*^{f_4, f_2} \Phi_*^{f_2, f_1} = \Phi_*^{f_1, f_4}$. Finalement, en posant $f_4 = f_1$, on obtient des isomorphismes et leur inverse $\Phi_*^{f_4, f_1} = (\Phi_*^{f_1, f_4})^{-1}$.

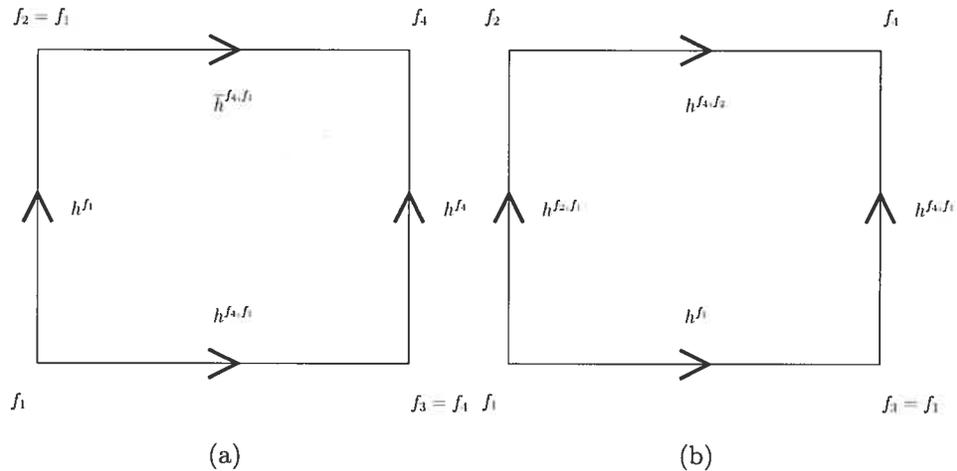


FIG. 3.2. Preuve de la proposition 3.1.13

\square

3.2. PREMIÈRE CONSTRUCTION DE L'OPÉRATION GÉNÉRALISÉE

La dernière section mesurait les espaces $\overline{\mathcal{M}}_y^x$ de grande dimension en enrichissant le complexe de Morse. Pour définir une opération d'intersection généralisée, il faut trouver un espace convenable dans lequel envoyer $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$. L'espace YM défini ci-dessous semble un candidat de choix, mais on verra qu'il ne permet pas d'induire un produit en homologie. Son manque de commutativité avec la différentielle s'exprime par un diagramme qui commute en homologie, mais en général pas au niveau des chaînes. On verra à la prochaine section que le problème n'est pas vraiment YM , mais plutôt le produit tensoriel de deux complexes enrichis.

On utilise les mêmes notations qu'à la section sur le produit d'intersection classique. On a donc trois fonctions Morse-Smale génériques et des variétés $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$ de dimension $|x| + |y| - |z| - n$. On quotiente ensuite M par un chemin ν passant par les points critiques des trois fonctions et on note l'espace quotient par M .

Un tripode est constitué de trois chemins basés en $[\nu]$ qui ont un point en commun. Un bon candidat où envoyer $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$ est donc le pull-back YM des applications $ev_1 \times ev_1 \times ev_1 : PM \times PM \times PM \rightarrow M$ et $\Delta : M \rightarrow M \times M \times M$, i.e. $YM = \{(m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in M \times PM \times PM \times PM \mid m = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \gamma_3(1)\}$, qui s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} YM & \longrightarrow & PM \times PM \times PM \\ \downarrow \pi & & \downarrow ev_1 \times ev_1 \times ev_1 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \times M \end{array}$$

où $PM = (PM', [\nu]) = \{\sigma : I \rightarrow M' \mid \sigma(0) = [\nu]\}$.

On peut mettre un lacet sur chaque branche d'un tripode et en obtenir ainsi un nouveau (figure 3.3), ce qui définit trois opérations continues de ΩM sur YM .

$$\cdot_1 : \Omega M \times YM \rightarrow YM$$

$$(\gamma, (m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) \mapsto (m, \gamma \# \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\cdot_2 : YM \times \Omega M \rightarrow YM$$

$$((m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \gamma) \mapsto (m, \gamma_1, \gamma \# \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\begin{aligned} \cdot_3 : \Omega M \times YM &\rightarrow YM \\ (\gamma, (m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)) &\mapsto (m, \gamma_1, \gamma_2, \gamma^{-1} \# \gamma_3) \end{aligned}$$

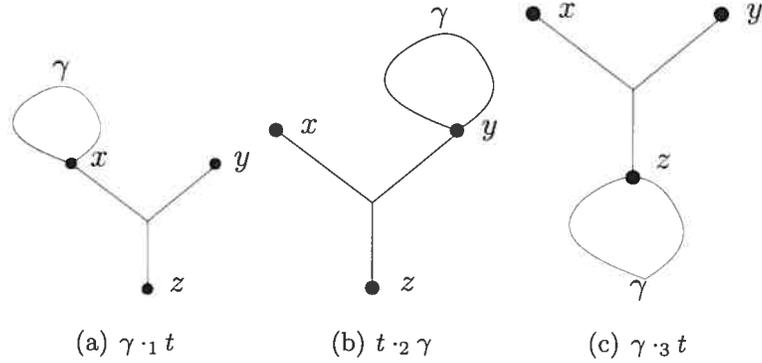


FIG. 3.3. Action des boucles sur les tripodes

La deuxième opération est à droite pour des raisons techniques. Elles vérifient

$$\begin{aligned} \gamma \cdot_1 (\sigma \cdot_1 y) &= (\gamma \cdot \sigma) \cdot_1 y \\ (y \cdot_2 \sigma) \cdot_2 \gamma &= y \cdot_2 (\gamma \cdot \sigma) \\ \gamma \cdot_3 (\sigma \cdot_3 y) &= (\sigma \cdot \gamma) \cdot_3 y \end{aligned}$$

et elles induisent trois actions

$$\begin{aligned} \cdot_i : S_p(\Omega M) \otimes S_q(YM) &\rightarrow S_{p+q}(YM), \quad i = 1, 3 \\ \cdot_2 : S_q(YM) \otimes S_p(\Omega M) &\rightarrow S_{p+q}(YM). \end{aligned}$$

On peut maintenant envoyer 3 lignes de flots qui s'intersectent dans l'espace des tripodes en paramétrant chaque ligne par la valeur de la fonction f_i et en l'envoyant dans $[0, 1]$, le point 0 correspondant au point critique (i.e. $[\nu]$) et le point 1 au point d'intersection des trois lignes de flot ; $\Psi_z^{x,y} : \mathcal{M}_z^{x,y} \rightarrow YM$.

Comme à la section précédente, on peut prolonger ces fonctions à la frontière

$$\partial \overline{\mathcal{M}}_z^{x,y} \approx \bigcup_{|x'| < |x|} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x',y} \cup \bigcup_{|y'| < |y|} \overline{\mathcal{M}}_{y'}^y \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x,y'} \cup \bigcup_{|z'| < |z|} \overline{\mathcal{M}}_{z'}^{x,y} \times \overline{\mathcal{M}}_z^{z'}. \quad (3.2.1)$$

Ce prolongement utilise les trois actions \cdot_i et vérifie (figure 2.2)

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_z^{x,y} \Big|_{\overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x',y}} &= \overline{\Psi}_{x,x'} \cdot_1 \overline{\Psi}_z^{x',y} \\ \overline{\Psi}_z^{x,y} \Big|_{\overline{\mathcal{M}}_{y'}^y \times \overline{\mathcal{M}}_z^{x,y'}} &= \overline{\Psi}_z^{x,y'} \cdot_2 \overline{\Psi}_{y,y'} \\ \overline{\Psi}_z^{x,y} \Big|_{\overline{\mathcal{M}}_{z'}^{x,y} \times \overline{\mathcal{M}}_z^{z'}} &= \overline{\Psi}_{z',z} \cdot_3 \overline{\Psi}_{z'}^{x,y}\end{aligned}$$

On a ici changé le paramétrage des chemins, car on considérait avant les chemins de longueur variable et maintenant ceux de longueur 1, mais on prend la même notation pour les applications $\overline{\Psi}_{s'}^s$.

Comme avant, on note $\{s_z^{x,y} \in S_{|x|+|y|-|z|-n}(\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y})\}$ une famille de chaînes génératrices qui vérifie $\partial s_z^{x,y} = \sum_{|x'|<|x|} s_{x'}^x \times s_z^{x',y} + \sum_{|y'|<|y|} s_{y'}^y \times s_z^{x,y'} + \sum_{|z'|>|z|} s_{z'}^{x,y} \times s_z^{z'}$.

Lemme 3.2.1. *Un système de chaînes génératrices existe.*

DÉMONSTRATION. La preuve est identique à la preuve de la dernière section sur les systèmes de chaînes. Lorsqu'on calcule la frontière du membre de droite dans la formule de $\partial s_z^{x,y}$ (qui doit être nulle, puisque c'est le bord d'un bord), on arrive à un problème de commutativité du produit de deux cubes, on doit alors utiliser les identifications de (3.2.1) pour régler ce problème. À part ce léger détail, la preuve est directe. \square

3.2.1. Complexe des tripodes et opération généralisée

Le complexe des tripodes est inspiré du complexe riche développé au début du chapitre et il utilise les cubes dans YM pour enrichir la différentielle. Plutôt que d'associer un lacet à chaque point critique, on y associe maintenant un tripode.

$$\mathcal{C}(f, Y) = (S(YM) \otimes C(f))_*$$

$$d(\sigma \otimes z) = \partial\sigma \otimes z + \sum_{|z'|<|z|} a_{z'}^z \cdot_3 \sigma \otimes z'$$

Proposition 3.2.2. $d^2 = 0$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
d^2(\sigma \otimes z) &= \partial^2 \sigma \otimes z + a_{z'}^z \cdot_3 \partial \sigma \otimes z' + \partial(a_{z'}^z \cdot_3 \sigma) \otimes z' + (a_{z'}^z \cdot a_{z''}^{z'}) \cdot_3 \otimes z'' \\
&= a_{z'}^z \cdot_3 \partial \sigma \otimes z' + \partial a_{z'}^z \cdot_3 \sigma \otimes z' + a_{z'}^z \cdot \partial \sigma \otimes z' + (a_{z'}^z \cdot a_{z''}^{z'}) \cdot_3 \sigma \otimes z'' \\
&= (a_{z''}^{z'} \cdot a_{z'}^z) \cdot_3 \sigma \otimes z' + (a_{z'}^z \cdot a_{z''}^{z'}) \cdot_3 \sigma \otimes z'' = 0
\end{aligned}$$

□

On mesure l'image de $\overline{\mathcal{M}}_z^{x,y}$ grâce aux applications $\overline{\Psi}_z^{x,y}$ définies avant. On pose $a_z^{x,y} = \overline{\Psi}_{z*}^{x,y}(s_z^{x,y})$ et la frontière de ce cube vérifie $\partial a_z^{x,y} = a_{x'}^x \cdot_1 a_z^{x',y} + a_z^{x,y'} \cdot_2 a_{y'}^y + a_z^{z'} \cdot_3 a_{z'}^{x,y}$

On peut maintenant définir l'opération d'intersection généralisée (on dit opération plutôt que produit, car on ne peut pas l'itérer).

$$\begin{aligned}
\Psi : (S(\Omega M) \otimes C(f_1))_p \otimes (C(f_2) \otimes S(\Omega M))_q &\rightarrow C(f, Y)_{p+q-n} \\
\Psi((\gamma_1 \otimes x) \otimes (y \otimes \gamma_2)) &\mapsto \sum_z \gamma_1 \cdot_1 a_z^{x,y} \cdot_2 \gamma_2 \otimes z
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.3. *Cette opération vérifie*

$$\begin{aligned}
&(\Psi \circ d - d \circ \Psi)((\gamma_1 \otimes x) \otimes (y \otimes \gamma_2)) = \\
&\sum_{z'} (\sum_z \gamma_1 \cdot_1 (a_{z'}^z \cdot_3 a_z^{x,y}) \cdot_2 \gamma_2 + a_{z'}^z \cdot_3 (\gamma_1 \cdot_1 a_z^{x,y}) \cdot_2 \gamma_2) \otimes z'.
\end{aligned}$$

En général, le produit de deux cubes n'est pas commutatif-signé au niveau des chaînes, il y a donc peu de chances que cette opération passe en homologie. Étudions la question de plus près.

Posons

$$\begin{aligned}
\Psi_{1,3} : \Omega M \times \Omega M \times YM &\rightarrow YM \\
(\sigma_1, \sigma_2, y) &\mapsto \gamma_1 \cdot_1 (\sigma_2 \cdot_3 y)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi_{3,1} : \Omega M \times \Omega M \times YM &\rightarrow YM \\
(\sigma_1, \sigma_2, y) &\mapsto \gamma_1 \cdot_3 (\sigma_2 \cdot_1 y)
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\Psi_{3,1}(\sigma_1, \sigma_2, y) = \Psi_{1,3}(\sigma_2, \sigma_1, y) = \Psi_{1,3} \circ (\tau \times id)(\sigma_1, \sigma_2, y) \quad (3.2.2)$$

où τ inverse le premier et le deuxième paramètres.

Par la proposition précédente, la commutativité de Ψ avec d est équivalente à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 S(\Omega M) \otimes S(\Omega M) \otimes S(YM) & \xrightarrow{\xi} & S(\Omega M \times \Omega M \times YM) & \xrightarrow{\Psi_{1,3}} & S(YM) \\
 \downarrow T \otimes id & & \downarrow \tau \times id & \nearrow \Psi_{3,1} & \\
 S(\Omega M) \otimes S(\Omega M) \otimes S(YM) & \xrightarrow{\xi} & S(\Omega M \times \Omega M \times YM) & &
 \end{array}$$

où $T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$. Le triangle à droite commute, par l'équation (3.2.2), mais en général, le carré à gauche ne commute qu'en homologie (ici on ne sait pas s'il commute ou non). Ce manque de commutativité permet de créer des opérations cohomologiques généralisées, comme les carrés de Steenrod, voir [Sp], on peut donc s'attendre à ce que le carré de gauche ne commute pas.

3.3. DEUXIÈME CONSTRUCTION DE L'OPÉRATION GÉNÉRALISÉE

On donne dans cette section une construction naturelle, inspirée de la construction de fonctions de Morse sur des fibrés vectoriels ([Sc]), mais appliquée au complexe riche, qui permet de généraliser le produit d'intersection classique. La première construction utilisait des coefficients dans $S(\Omega M) \otimes S(\Omega M)$, on utilise maintenant $S(\Omega(M \times M))$ comme anneau de coefficients et le fait que deux fonctions de Morse sur M donnent une fonction de Morse sur $M \times M$. La différentielle utilisée donnera une sorte de déformation de la différentielle du produit tensoriel des deux complexes riches (voir la remarque 3.3.7). Dans ce sens, il n'est pas surprenant que l'opération de la section précédente ne passe pas en homologie, puisque la différentielle ne contient pas assez de termes.

On définit un morphisme Ψ entre deux complexes enrichis et on montre (on donne plutôt une ébauche de preuve, il manque des détails techniques) qu'il est chaîne homotope au morphisme de comparaison $\Phi^{\beta,\alpha}$ utilisé précédemment (proposition 3.3.3). Le résultat principal de ce mémoire est la création d'une opération d'intersection généralisée, donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Il y a un morphisme de chaînes non nul, dont les premiers termes coïncident avec le produit d'intersection,*

$$\bar{\Psi} : S(\Omega(M \times M))_p \otimes (C(f_1)_q \otimes C(f_2)_r) \rightarrow (S(\Omega(M \times M)) \otimes C(f_3))_{p+q+r-n}.$$

De plus, ce morphisme est naturel par rapport au changement de coefficients, i.e. donnée $g : M \times M \rightarrow X$ continue, alors $\bar{\Psi}$ induit

$$\bar{\Psi} : S(\Omega X)_p \otimes (C(f_1)_q \otimes C(f_2)_r) \rightarrow (S(\Omega X) \otimes C(f_3))_{p+q+r-n}.$$

La proposition 3.3.5 donne le lien entre le produit d'intersection classique et cette nouvelle opération. La construction de cette opération est possible grâce à un morphisme de comparaison Ψ de deux fonctions défini différemment des morphismes $\Phi^{g,f}$ et qui a une saveur géométrique sur M . On mentionne que ces deux morphismes sont chaînes-homotopes et on présente une partie de la preuve, on donne notamment l'espace de modules à utiliser pour construire une homotopie de chaînes.

3.3.1. Définitions

On se donne $h_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ deux fonctions Morse-Smale génériques qui sont telles que $N_y^x = W_{h_1}^u(x) \cap W_{h_2}^s(y)$ soit une variété de dimension $|x| - |y|$. Ces variétés admettent une compactification naturelle \bar{N}_y^x et leur frontière vérifie

$$\partial \bar{N}_y^x = \bigcup_{|x'| < |x|} \bar{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \bar{N}_y^{x'} \cup \bigcup_{|y'| > |y|} \bar{N}_y^x \times \bar{\mathcal{M}}_y^{y'} \quad (3.3.1)$$

On peut envoyer ces espaces dans l'espace des chemins comme avant. On remarque d'abord que $p \in N_y^x$ vérifie $\exists x' \in \text{Crit } h_1$, $y' \in \text{Crit } h_2$ tels que $p \in \mathcal{M}_{x'}^x$, et $p \in \mathcal{M}_y^{y'}$. On a donc

$$j_y^x : N_y^x \rightarrow C_{x,y}M = C^0([0, h_1(x) - h_1(p) + h_2(p) - h_2(y)], M)$$

$$j_y^x(p)(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ y & \text{si } t = h_1(x) - h_2(y), \\ \gamma_{x'}^x([p])(t) & \text{si } 0 < t < h_1(x) - h_1(p), \\ \gamma_{y'}^{y'}([p])(t - (h_1(x) - h_1(p)) + h_2(y') - h_2(p)) & \text{si } h_1(x) - h_1(p) \leq t. \end{cases}$$

Ces fonctions s'étendent à la frontière de N_y^x . On quotiente ensuite M par un chemin simple passant par tous les points critiques de h_1 et h_2 , on obtient ainsi les fonctions $\bar{j}_y^x : \bar{N}_y^x \rightarrow \Omega M$ qui vérifient

$$\bar{j}_y^x|_{\bar{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \bar{N}_y^{x'}}(u, p) = \bar{\Psi}_{x, x'}(u) \cdot \bar{j}_y^{x'}(p)$$

$$\bar{j}_y^x|_{\bar{N}_y^x \times \bar{\mathcal{M}}_y^{y'}}(p, u) = \bar{j}_y^x(p) \cdot \bar{\Psi}_{y', y}(u).$$

On aura à nouveau besoin d'un système de chaînes génératrices, cette fois pour l'espace \bar{N}_y^x . On note ces chaînes par $n_y^x \in S_{|x|-|y|}(\bar{N}_y^x)$ et leur frontière est donnée par $\partial n_y^x = \sum_{|x'| < |x|} s_{x'}^x \times n_y^{x'} + \sum_{|y'| > |y|} n_y^{x'} \times s_{y'}^{y'}$.

On définira ensuite un morphisme avec l'image de ces chaînes génératrices, $N_y^x = \bar{j}_y^x(n_y^x)$. On a $\partial N_y^x = \sum_{x'} a_{x'}^x \cdot N_y^{x'} + \sum_{y'} N_y^{x'} \cdot a_{y'}^{y'}$. On pose

$$\Psi : C_p(h_1) \rightarrow C_p(h_2) \quad (3.3.2)$$

$$\gamma \otimes x \mapsto \sum_y \gamma \cdot N_y^x \otimes y.$$

Proposition 3.3.2. Ψ induit un morphisme en homologie, i.e. $\Psi \circ d = d \circ \Psi$

DÉMONSTRATION. $\Psi(d(\gamma \otimes x)) = \Psi(\partial\gamma \otimes x) + \Psi(\gamma \cdot a_{x'}^x \otimes x')$ et

$$\begin{aligned} d\Psi(\gamma \otimes x) &= d(\gamma \cdot N_y^x \otimes y) \\ &= \partial\gamma \cdot N_y^x \otimes y + \gamma \cdot (\partial N_y^x) \otimes y + \gamma \cdot N_y^x \cdot a_{y'}^{y'} \otimes y' \\ &= \partial\gamma \cdot N_y^x \otimes y + \gamma \cdot a_{x'}^x \cdot N_y^{x'} \otimes y + \gamma \cdot N_y^{x'} \cdot a_{y'}^{y'} \otimes y + \gamma \cdot N_y^x \cdot a_{y'}^{y'} \otimes y' \\ &= \Psi(\partial\gamma \otimes x) + \Psi(\gamma \cdot a_{x'}^x \otimes x') + 0 \\ &= \Psi(d(\gamma \otimes x)) \end{aligned}$$

□

3.3.2. Comparaison de Ψ et $\Phi^{g,f}$

Le morphisme Ψ défini ci-dessus a les mêmes domaine et image que le morphisme de comparaison $\Phi^{g,f}$ de la section 3.1.4, il est naturel de se demander s'ils induisent la même chose en homologie. Comme l'homologie du complexe riche est nulle, on serait tenté d'utiliser la méthode des modèles acycliques, à condition de vérifier qu'on a un isomorphisme en H_0 . Cependant, on ne sait pas comment étendre cette méthode au changement de coefficients, vu la difficulté de trouver un modèle en homologie de Morse. On n'introduit pas cette méthode, puisqu'on ne s'en sert pas, mais le lecteur curieux peut consulter [D], [Sp] ou [Ma].

Proposition 3.3.3. *Les morphismes Ψ et $\Phi^{g,f}$ sont chaînes homotopes, i.e. il y a un morphisme $\Gamma : C_k(f) \rightarrow C_{k+1}(g)$, qui vérifie $\Gamma \circ d + d \circ \Gamma = \Psi - \Phi^{g,f}$*

DÉMONSTRATION. On compare les deux morphismes en créant une homotopie de chaînes, donnée en considérant un espace de modules approprié. On donne la compactification de cet espace; on montre vers quoi peuvent converger les suites de points et on ajoute ces limites. Cependant, on ne fait pas l'opération inverse, le gluing, qui est plus technique.

L'espace de modules doit avoir à chacun de ces bouts les espaces de modules associés aux morphismes Ψ et $\Phi^{\beta,\alpha}$. Notez que les points de la variété N_y^x sont en bijection avec des courbes continues (et même lisses par morceaux), qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$\gamma'(t) = \begin{cases} -\nabla f(\gamma(t)) & t \leq 0 \\ -\nabla g(\gamma(t)) & t \geq 0 \end{cases}$$

On impose que ces courbes soient continues, car il existe des solutions non continues en $t = 0$ à ce système d'équations. On considère d'abord une généralisation au complexe enrichi du morphisme $\Phi^{g,f}$ défini dans le livre de Schwarz [Sc], i.e. provenant d'une homotopie $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et vérifiant $\frac{\partial}{\partial t} h(\cdot, t) = 0$, $\forall |t| \geq 1$, $h(x, -1) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$. Ensuite, les espaces de modules associés à cette

homotopie ne sont plus des courbes solutions dans $M \times I$, mais des courbes dans M , solutions de l'équation non autonome $\gamma'(t) = -\nabla h_t(\gamma(t))$; elles ne sont plus invariantes par l'action de \mathbb{R} . Notez que dans ce cas, $-\nabla h_t(\gamma(t)) = -\nabla f(\gamma(t))$ si $t \leq 1$ et $-\nabla h_t(\gamma(t)) = -\nabla g(\gamma(t))$ si $t \geq 1$.

Dans le cas de l'homotopie dans $M \times I$, on effectuait la projection des lacets $\Omega(M \times I) \rightarrow \Omega M$ dans la construction des morphismes $\Phi^{\beta, \alpha}$. Ces deux constructions donnent, en homologie, le même morphisme. Pour montrer ce dernier point (on ne le fait pas ici, c'est assez technique), il faut remarquer que les espaces de modules de l'équation non autonome dans M et de l'équation autonome dans $M \times I$ sont homéomorphes, et que l'homéomorphisme préserve les courbes solutions, à reparamétrage près (on utilise ensuite l'invariance par rapport aux paramétrages pour obtenir une homotopie de chaînes).

Il faut trouver un espace qui donne une homotopie de chaînes et qui d'un côté contient $\mathcal{M}_{(y,1)}^{(x,0)} = \{\gamma : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M \mid \gamma(-\infty) = x, \gamma(\infty) = y, \gamma'(t) = -\nabla h_t(\gamma(t))\}$, et N_y^x de l'autre. L'idée est de faire une interpolation linéaire entre les deux champs de vecteurs gradients $-\nabla f$ et $-\nabla g$ et de parcourir l'interpolation de plus en plus vite, pour à la fin «sauter» de $-\nabla f$ à $-\nabla g$. On compactifie cet espace et il faut s'assurer que les courbes ainsi ajoutées soient continues.

Remarquons d'abord que $\Phi^{g,f}$ est indépendant de l'homotopie choisie, on peut donc prendre l'homotopie $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $h|_{M \times [-1,1]} = \frac{1}{2}(1-t)f + \frac{1}{2}(1+t)g$ et on la rend lisse en $|t| = 1$. Le flot gradient négatif de cette homotopie est $-\nabla h_t = \frac{1}{2}(1-t)(-\nabla f) + \frac{1}{2}(1+t)(-\nabla g) = \sigma(\cdot, t)$, $|t| \leq 1$.

L'interpolation linéaire est une famille de sections, notée

$$\sigma : M \times [-1, 1] \rightarrow TM$$

$$(p, t) \mapsto (p, \frac{1}{2}(1-t)(-\nabla f) + \frac{1}{2}(1+t)(-\nabla g)).$$

$M \times [-1, 1]$ étant compact, la norme carrée de ces vecteurs est bornée supérieurement par $A = \max_{(p,t)} \|\sigma(p, t)\|^2$. On a premièrement l'espace suivant : $\mathcal{M}_y^x(\lambda) =$

$$\{\gamma : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow M \mid \gamma(-\infty) = x, \gamma(\infty) = y, \gamma'(t) = \begin{cases} -\nabla f(\gamma(t)) & t \leq -\lambda \\ \sigma(\gamma(t), t/\lambda) & t \in [-\lambda, \lambda] \\ -\nabla g(\gamma(t)) & t \geq \lambda \end{cases} \}.$$

Cet espace donne les courbes continues qui interpolent linéairement, en un temps 2λ , entre $-\nabla f$ et $-\nabla g$. L'espace de modules qui donne l'homotopie de chaînes est donné par : $G_y^x = \{(\gamma, \lambda) \mid \lambda \in (0, 1], \gamma \in \mathcal{M}_y^x(\lambda)\}$. On a donc une famille de courbes, qui chacune interpole entre les deux vecteurs gradient, et ce de plus en plus rapidement. En compactifiant, on ajoutera, entre autres, des courbes solutions lorsque $\lambda = 0$.

Étant donnée une suite $\{\lambda_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, on considère une suite convergente vers γ de courbes $\gamma_n \in \mathcal{M}_y^x(\lambda_n)$. Alors, on vérifie directement que $\gamma'(t) = -\nabla f(\gamma(t))$, $t < 0$ et $\gamma'(t) = -\nabla g(\gamma(t))$, $t > 0$. Le seul problème potentiel est en $t = 0$, où on doit s'assurer que $\gamma(0^-) = \gamma(0^+)$, i.e. que γ est bien continue. On montre que $\gamma(0^-) = \lim \gamma_n(-\lambda_n) = \lim \gamma_n(\lambda_n) = \gamma(0^+)$. Il suffit de calculer la longueur des courbes γ_n entre $-\lambda_n$ et λ_n ; si cette dernière tend vers 0, alors la courbe limite coïncide en 0^- et 0^+ .

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} \|\gamma_n'(t)\|^2 dt &= \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} \|\sigma(\gamma_n(t), t/\lambda_n)\|^2 dt \\ &\leq 2A\lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La courbe γ est bien élément de N_y^x . Comme on l'a mentionné au début de la preuve, il resterait à faire le gluing, c'est à dire prendre $\gamma \in N_y^x$ et trouver une suite $(\gamma_n, \lambda_n) \in G_y^x$ qui converge vers $(\gamma, 0)$; ceci est plus technique (c'est toujours l'étape difficile dans la compactification) et on ne le fait pas.

Les autres types de brisures ne causent pas de problème, ils sont dus comme avant à la présence de lignes brisées passant par un point critique de l'homotopie ou des fonctions f et g . Par exemple, en $\lambda = 1$, on obtient les courbes de $\overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)}$, solutions du flot $-\nabla h_t$. On peut donc compactifier la variété G_y^x de dimension $|x| - |y| + 1$, on obtient \overline{G}_y^x , qui vérifie

$$\begin{aligned} \partial \overline{G}_y^x \approx & \bigcup_{x' \in \text{Crit}f, |x'| < |x|} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{G}_y^{x'} \quad \bigcup_{y' \in \text{Crit}g, |y'| > |y|} \overline{G}_y^{x'} \times \overline{\mathcal{M}}_x^{y'} \\ & \bigcup \overline{N}_y^x \quad \bigcup \overline{\mathcal{M}}_{(y,1)}^{(x,0)} \end{aligned}$$

Comme d'habitude, on quotiente M par un chemin passant par les points critiques de f et g , on envoie ces espaces compactifiés dans les lacets de Moore de

M , par l'application $\bar{\alpha}_{x,y} : \bar{G}_y^x \rightarrow \Omega M$. On utilise en $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ les paramétrages associés aux morphismes $\Phi^{g,f}$ et Ψ ; entre les deux, on utilise une famille de paramétrages et le fait que les morphismes sont indépendants des variations continues de paramétrages.

On choisit un système de chaînes génératrices $g_y^x \in S_{|x|-|y|+1}(\bar{G}_y^x)$ et on envoie ces chaînes sur $g_y^x = \bar{\alpha}_{x,y^*}(g_y^x) \in S_{|x|-|y|+1}(\Omega M)$; elles vérifient $\partial g_y^x = \sum_{x'} a_{x'}^x \cdot g_{y'}^{x'} + \sum_{y'} g_{y'}^x \cdot a_y^{y'} + n_y^x + m_y^x$. On définit :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{C}_k(f) &\rightarrow \mathcal{C}_{k+1}(g) \\ x &\mapsto \sum_y g_y^x \otimes y \\ \gamma \otimes x &\mapsto \gamma \cdot \Gamma(x) \end{aligned}$$

On utilise finalement l'expression de ∂g_y^x et un calcul direct donne le résultat. \square

3.3.3. Démonstration du théorème 3.3.1

On présente ici la construction de l'opération généralisée ainsi qu'une méthode de changement de coefficients qui permet de retrouver le produit d'intersection classique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3.1. Soient $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions Morse-Smale génériques. On considère d'abord la fonction Morse-Smale

$$h_1 = f_1 \oplus f_2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f_1(x) + f_2(y)$$

L'ensemble de ses points critiques est $Crit f_1 \times Crit f_2$. Ensuite, on définit une deuxième fonction h_2 sur $M \times M$ qui vaut f_3 sur la diagonale; on donne ci-dessous les grandes lignes de cette construction. On a le plongement diagonal $\Delta : M \rightarrow M \times M$ et on peut définir une fonction Morse-Smale sur le fibré normal de ΔM , en utilisant le produit scalaire sur chaque fibre et la fonction f_3 sur la diagonale.

En général, pour un fibré vectoriel $\varphi : E \rightarrow M$ de dimension k , soient \langle, \rangle_E une métrique riemannienne sur E et la forme quadratique

$$q(v_m) = \langle v_m, v_m \rangle_E, \quad v_m \in \varphi^{-1}(m).$$

Soit g une fonction Morse-Smale sur M , on obtient une fonction Morse-Smale sur E en posant

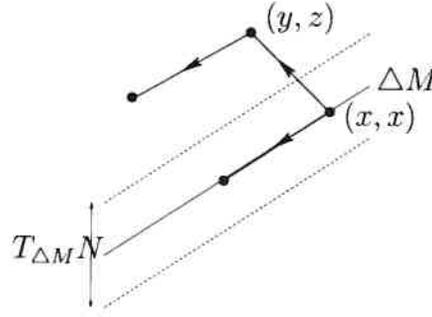
$$\begin{aligned} \bar{g} : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_m &\mapsto g(m) - q(v_m) \end{aligned}$$

avec les propriétés $\bar{g}|_M = g$ et $\text{Crit}_* \bar{g} = \text{Crit}_{*-k} g$, puisque les lignes du flot gradient négatif «s'éloignent» de la section nulle (figure 3.4), la dimension des variétés instables augmente de k .

Dans le cas particulier du plongement diagonal, on définit la fonction \bar{f}_3 sur le fibré normal de la diagonale, qui prolonge la fonction f_3 , et on prolonge cette fonction à une fonction Morse-Smale, notée aussi \bar{f}_3 , définie sur $M \times M$. Ceci est possible grâce au lemme d'extension de Tietze et à la densité des fonctions Morse-Smale. Par construction, on a $\mathcal{M}_y^x = \emptyset$, $\forall x \in \text{Crit} \bar{f}_3 \setminus (\text{Crit} \bar{f}_3|_{\Delta M})$, $\forall y \in \text{Crit} \bar{f}_3|_{\Delta M}$. En d'autres mots, $C_k(f_3^c) := C_k(\bar{f}_3) \setminus C_k(\bar{f}_3|_{\Delta M})$ est un sous-complexe de $C_k(\bar{f}_3)$. Par vérification directe, on remarque que le quotient de ces deux complexes est isomorphe à $C_{k-n}(f_3)$ lorsque $k \geq n$, puisque l'index des points critiques augmente de n dans le fibré normal et parce que la différentielle ne conserve que les points critiques sur la diagonale, les autres étant «tués» en passant au complexe quotient (figure 3.4). Lorsque $k < n$, le quotient est nul - on a donc que le quotient est isomorphe à $C_{k-n}(f_3)$ même pour $k < n$, par convention.

Remarque 3.3.4. *À l'aide de cette construction, on peut reconstruire l'isomorphisme de Thom pour des fibrés vectoriels. Tous les détails sont faits dans le livre de Schwarz [Sc].*

On applique ensuite le morphisme Ψ défini en (3.3.2) aux fonctions $h_1 = f_1 \oplus f_2$ et $h_2 = \bar{f}_3$ définies sur $M \times M$, et on a automatiquement un morphisme induit en homologie, cependant on voudrait n'avoir que les points critiques de la fonction f_3 . On n'a qu'à répéter les arguments décrits ci-dessus en enrichissant cette fois

FIG. 3.4. Lignes de flot de \bar{f}_3

le complexe. On a donc le quotient

$$id \otimes j : C(\Omega(M \times M)) \otimes C(\bar{f}_3) \rightarrow C(\Omega(M \times M)) \otimes \frac{C(\bar{f}_3)}{C(f_3^c)}.$$

On notera $\frac{C(\bar{f}_3)}{C(f_3^c)}$ par $C(\bar{f}_3, f_3^c)$. La différentielle riche de ce complexe quotient est définie sur les générateurs (i.e. les points critiques sur la diagonale) par

$$d(\gamma \otimes [(x, x)]) = \partial\gamma \otimes [(x, x)] + \sum_{x' \in \text{Crit} f_3} \gamma \cdot a_{x'}^x \otimes [(x', x')].$$

Par un abus de notation, on note par $a_{x'}^x \in S(\Omega(M \times M))$ les cubes qui correspondent à l'image par le plongement diagonal (un difféomorphisme sur image) de $a_{x'}^x \in S(\Omega M)$. On vérifie directement que $id \otimes j$ est un morphisme de chaînes.

Ensuite, comme la dimension des variétés instables augmente de n , on a un isomorphisme de chaînes

$$\varphi : (C(\Omega(M \times M)) \otimes C(\bar{f}_3, f_3^c))_p \rightarrow (C(\Omega(M \times M)) \otimes C(f_3))_{p-n}$$

$$\gamma \otimes [(x, x)] \mapsto \gamma \otimes x$$

Finalement, l'opération d'intersection généralisée est définie par $\bar{\Psi} = \varphi \circ (id \otimes j) \circ \Psi$. □

Au niveau homologique, cette opération donne

$$\bar{\Psi}_* : H_*(P(M \times M)) \rightarrow H_{*-n}(C(\Omega(M \times M)) \otimes C(f_3)).$$

L'homologie du complexe d'arrivé est calculée dans la remarque 3.3.6. Notez que $\bar{\Psi}_*$ est trivial, puisque $H_*(P(M \times M)) = 0$ sauf en dimension 0. Cependant, en procédant à un changement de coefficients dans le complexe riche, on peut obtenir

une opération non-triviale et retrouver le produit d'intersection classique, comme le montre la proposition suivante. On n'a - heureusement- pas travaillé pour rien !

Proposition 3.3.5. *En utilisant le changement de coefficient associé à la fonction constante $c : M \times M \rightarrow \{*\}$, on obtient une opération $\bar{\Psi}$ qui correspond au produit d'intersection classique.*

DÉMONSTRATION. On utilise le diagramme commutatif suivant pour changer les coefficients

$$\begin{array}{ccc} \Omega(M \times M) & \xrightarrow{\Omega c} & \Omega\{*\} = \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(M \times M) & \longrightarrow & E = M \times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times M & \xrightarrow{id} & M \times M \end{array}$$

D'un élément $\gamma \otimes x \in S_*(\Omega(M \times M)) \otimes C_*(f)$, on passe à $\Omega c_*(\gamma) \otimes x \in S_*(\Omega(\{*\})) \otimes C_*(f)$. Puisque $S_*(\Omega(\{*\})) = 0$ (sauf en dimension 0), le changement de coefficient permet de passer du complexe riche au complexe de Morse classique, et on retrouve l'homologie de Morse (ici, c'est l'homologie de $M \times M$, mais cet argument reste valable pour toute variété). L'opération $\bar{\Psi}$ est donnée par

$$\bar{\Psi} : C_p(f_1 \oplus f_2) \rightarrow C_p(\bar{f}_3) \rightarrow C_p(\bar{f}_3, f_3^c) \rightarrow C_{p-n}(f_3)$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{z \in \text{Crit}_{|x|+|y|-n} f_3} |W_{f \oplus g}^u(x, y) \cap W_{f_3}^s(z, z)|_2 z$$

Il suffit enfin de remarquer que $W_{f \oplus g}^u(x, y) \cap W_{f_3}^s(z, z) = (W_{f_1}^u(x) \times W_{f_2}^u(y)) \cap \Delta(W_{f_3}^s(z)) = W^u(x) \cap W^u(y) \cap W^s(z)$. \square

Remarque 3.3.6 (Homologie du complexe quotient). *On connaît, par le théorème 3.1.7, l'homologie des complexes riches $\mathcal{C}(f)$, elle correspond à l'homologie de l'espace des chemins et est donc nulle. Cependant, l'homologie de $C(\Omega(M \times M)) \otimes C(\bar{f}_3, f_3^c)$ n'est pas celle de $P(M \times M)$, puisque les points critiques qui restent après avoir quotienté ne donnent pas une décomposition cellulaire de $M \times M$,*

mais seulement de la diagonale. Le noyau de l'application $id \otimes j$ du théorème précédent donne la suite courte exacte suivante :

$$0 \longrightarrow S(\Omega(M \times M)) \otimes C(f_3^c) \longrightarrow C(\bar{f}_3) \longrightarrow S(\Omega(M \times M)) \otimes C(\bar{f}_3, f_3^c) \longrightarrow 0$$

Ceci reste valable en changeant les coefficients par l'application $g : M \times M \rightarrow N$, on aura alors la suite

$$0 \longrightarrow S(\Omega N) \otimes C(f_3^c) \longrightarrow S(\Omega N) \otimes C(\bar{f}_3) \longrightarrow S(\Omega N) \otimes C(\bar{f}_3, f_3^c) \longrightarrow 0$$

L'homologie de ces complexes peut être non nulle, comme le montre le lemme précédent, on répète ici la méthode de la section sur le changement de coefficients pour la calculer. On note $M_0 = M \times M \setminus U(\Delta M)$ le complément d'un voisinage de la diagonale dans $M \times M$ et $i : M_0 \rightarrow M \times M$ l'inclusion. On a les deux pull-back E_1, E_2 et les diagrammes commutatifs suivants,

$$\begin{array}{ccccc} \Omega M_0 & \xrightarrow{\Omega(g \circ i)} & \Omega N & \longrightarrow & \Omega N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P M_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & P N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \xrightarrow{id} & M_0 & \xrightarrow{g \circ i} & N \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(M \times M) & \xrightarrow{\Omega g} & \Omega N & \longrightarrow & \Omega N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P(M \times M) & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & P N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M \times M & \xrightarrow{id} & M \times M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

En utilisant le corollaire 3.5 de [BaCo], la courte suite exacte ci-dessus correspond à la suite

$$0 \longrightarrow S(E_1) \longrightarrow S(E_2) \longrightarrow S(E_2, E_1) \longrightarrow 0$$

Lorsque $N = M \times M$ et $g = id$, alors $E_2 = P(M \times M)$ et on obtient, en considérant la suite longue exacte induite en homologie et le fait que l'homologie

de l'espace des chemins est nulle, lorsque $\pi_1(M) = 0$ et $n = \dim M \geq 2$

$$H_k(P(M \times M), E_1) \approx \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq n-1 \\ H_{k-1}(E_1) & n \leq k \end{cases}$$

Remarque 3.3.7. On note que $C(h_1)_{p+q+r} \approx S(\Omega(M \times M))_p \otimes (C(f_1)_q \otimes C(f_2)_r)$, ce deuxième complexe admet donc une structure de complexe de chaînes, avec une différentielle qui n'est pas celle du produit tensoriel de deux complexes. Le lemme 3.3.8 ci-dessous permet d'en calculer les premiers termes :

$$\begin{aligned} \bar{d}(\omega \otimes (x \otimes y)) &= \partial\omega \otimes (x \otimes y) \\ &+ \omega \cdot (\\ &\quad \sum_{x' \in \text{Crit} f_1} (a_{x'}^x \times c_y) \otimes (x' \otimes y) + \\ &\quad \sum_{y' \in \text{Crit} f_2} (c_x \times a_{y'}^y) \otimes (x \otimes y') + \\ &\quad \sum_{|x'|=|x|-1, |y'|=|y|-1} (a_{x'}^x \times a_{y'}^y \times \gamma) \otimes (x' \otimes y') \\ &+ \text{reste}). \end{aligned}$$

Les zéro cubes c_x et c_y correspondent aux lacets constants basés en x et en y respectivement, qui sont identifiés lorsqu'on quotiente $M \times M$ par le chemin simple ν . La 1-chaîne $\gamma \in S_1(\overline{\mathbb{R}})$ engendre $H_1(\overline{\mathbb{R}}, \{\infty, -\infty\})$ quand on passe au quotient. Notez que les premiers termes de cette somme correspondent à la différentielle du produit tensoriel des complexes enrichis et que les termes suivant font baisser l'index des points critiques de f_1 et f_2 simultanément. Cette différentielle est donc une sorte de déformation de la différentielle du produit tensoriel des deux complexes.

Lemme 3.3.8. Soient la fonction Morse-Smale $h = f_1 \oplus f_2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x, y), (x', y') \in \text{Crit} h$ tels que $|x'| < |x|, |y'| < |y|$. Alors on a un difféomorphisme $\mathcal{M}_{(x', y')}^{(x, y)} \approx \mathcal{M}_{x'}^x \times \mathcal{M}_{y'}^y \times \mathbb{R}$. Lorsque $|x| - |x'| = |y| - |y'| = 1$, ce

difféomorphisme se prolonge à la compactification de l'espace de module, i.e.

$$\overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x,y)} \approx \mathcal{M}_{x'}^x \times \mathcal{M}_{y'}^y \times \overline{\mathbb{R}}$$

DÉMONSTRATION. On utilise les difféomorphismes de la proposition 1.2.2 et on note Ψ^{f_2} le flot donné par $-\nabla f_2$; on choisit $a \in (f_1(x'), f_1(x))$, $b \in (f_2(y'), f_2(y))$ et on définit

$$\xi : \mathcal{M}_{x,x'}^{f_1,a} \times \mathcal{M}_{y,y'}^{f_2,b} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{(x',y')}^{(x,y)}$$

$$([z_1], [z_2], t) \mapsto [(z_1, \Psi_t^{f_2}(z_2))].$$

Les crochets représentent les classes d'équivalence des points par l'action des flots respectifs. Par existence et unicité des solutions aux équations différentielles ordinaires, ξ est une bijection, les méthodes utilisées dans [Sc] garantissent que c'est de plus un difféomorphisme.

Pour montrer la deuxième affirmation, on utilise les reparamétrages par le flot $\Psi^{f_1 \oplus f_2}$ et on considère les suites $t_n \rightarrow \infty$ et $s_n \rightarrow -\infty$; alors, peu importe les indexes de x' et y' , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi([z_1], [z_2], t_n) = (x, [z_2]) \times ([z_1], y') \in \overline{\mathcal{M}}_{(x,y')}^{(x,y)} \times \overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x,y')} \subset \partial \overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x,y)},$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \xi([z_1], [z_2], s_n) = ([z_1], y) \times (x', [z_2]) \in \overline{\mathcal{M}}_{(x',y)}^{(x,y)} \times \overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x',y')} \subset \partial \overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x,y)}.$$

La conclusion est directe lorsque $|x| - |x'| = |y| - |y'| = 1$, car les espaces de modules des fonctions f_1 et f_2 sont déjà compacts, i.e. $\overline{\mathcal{M}}_{x'}^x = \mathcal{M}_{x'}^x$ et $\overline{\mathcal{M}}_{y'}^y = \mathcal{M}_{y'}^y$. \square

Ce lemme est évidemment incomplet, puisqu'il ne donne pas de formule explicite reliant tous les espaces de modules des fonctions f_1 et f_2 à ceux de la fonction $f_1 \oplus f_2$. On ne peut cependant pas espérer obtenir un résultat du type $\overline{\mathcal{M}}_{(x',y')}^{(x,y)} \approx \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_{y'}^y \times \overline{\mathbb{R}}$, car le «gluing» agit sur les fonctions f_1 et f_2 en même temps, la frontière fait intervenir un mélange des deux espaces, tandis que la frontière du produit à droite brise chaque espace séparément.

3.3.4. Invariance

Soient $f_1 \sim_h f_2$ (la lettre h dénote l'homotopie) et $g_1 \sim_r g_2$ quatre fonctions Morse-Smale génériques. On veut comparer $\Psi : \mathcal{C}(f_1) \rightarrow \mathcal{C}(g_1)$ et $\Psi' : \mathcal{C}(f_2) \rightarrow \mathcal{C}(g_2)$. On crée alors un produit similaire à Ψ sur $M \times I$ à l'aide des homotopies régulières h et r , et on considère les variétés $G_z^x = W_h^u(x) \cap W_r^s(z)$, avec $x \in \text{Crit}_k f_1$, $z \in \text{Crit}_p g_2$ (G_z^x est de dimension $k-p+1$, puisque $\text{Crit}_* g_2 \subset \text{Crit}_{*+1} r$). On peut compactifier ces variétés et leur frontière est

$$\begin{aligned} \partial \overline{G}_z^x \approx & \bigcup_{y \in \text{Crit} g_1} \overline{N}_y^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^y \quad \bigcup_{w \in \text{Crit} f_2} \overline{\mathcal{M}}_w^x \times \overline{N}_z^w \\ & \bigcup_{x' \in \text{Crit} f_1} \overline{\mathcal{M}}_{x'}^x \times \overline{G}_z^{x'} \quad \bigcup_{z' \in \text{Crit} g_2} \overline{G}_{z'}^x \times \overline{\mathcal{M}}_z^{z'} \end{aligned}$$

On construit à l'aide de cette formule un système de chaînes génératrices $g_z^x \in S_{|x|-|z|+1}(\partial \overline{G}_z^x)$ tel que $\partial g_z^x = N_y^x \times m_z^y + m_w^x \times N_z^w + s_{x'}^x \times g_z^{x'} + g_{z'}^x \times s_z^{z'}$.

L'image de ces cubes dans $S_*(\Omega M)$ (on utilise $\pi : M \times I \rightarrow M$ pour obtenir des lacets dans M et non dans $M \times I$) est notée g_z^x et ces cubes vérifient $\partial g_z^x = n_y^x \cdot m_z^y + m_w^x \cdot n_z^w + a_{x'}^x \cdot g_z^{x'} + g_{z'}^x \cdot a_z^{z'}$.

Le morphisme recherché est donné par

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{C}(f_1)_p &\rightarrow \mathcal{C}(g_2)_{p+1} \\ x &\mapsto \sum_{|z| \leq |x|+1} g_z^x \otimes z \\ \gamma \otimes x &\mapsto \gamma \cdot \Omega(x) \end{aligned}$$

Proposition 3.3.9. *En utilisant les notations de la section 3.1.4, on a $\Omega \circ d - d \circ \Omega = \Psi' \circ \Phi^{f_2, f_1} - \Phi^{g_2, g_1} \circ \Psi$, le diagramme suivant est commutatif en homologie.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(f_1) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{C}(g_1) \\ \downarrow \Phi^{f_2, f_1} & & \downarrow \Phi^{g_2, g_1} \\ \mathcal{C}(f_2) & \xrightarrow{\Psi'} & \mathcal{C}(g_2) \end{array}$$

Remarque 3.3.10. *Comme les applications $\Phi^{\alpha, \beta}$ induisent des isomorphismes en homologie (proposition 3.1.13), les deux produits sont égaux, à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\Omega(d(\gamma \otimes x)) &= \Omega(\partial\gamma \otimes x + \gamma \cdot a_{x'}^x \otimes x') \\ &= \partial\gamma g_z^x \otimes z + \gamma \cdot a_{x'}^x \cdot g_z^{x'} \otimes z\end{aligned}$$

$$d(\Omega(\gamma \otimes x)) = d(\gamma \cdot g_z^x \otimes z) = \partial\gamma \cdot g_z^x \otimes z + \gamma \cdot \partial g_z^x \otimes z + \gamma \cdot g_z^x \cdot a_{z'}^z \otimes z'$$

On a donc

$$\begin{aligned}(\Omega d - d\Omega)(\gamma \otimes x) &= \gamma \cdot a_{x'}^x \cdot g_z^{x'} \otimes z + \gamma \cdot \partial g_z^x \otimes z + \gamma \cdot g_z^x \cdot a_{z'}^z \otimes z' \\ &= \gamma \cdot a_{x'}^x \cdot g_z^{x'} \otimes z + \gamma \cdot (n_y^x \cdot m_z^y + m_w^x \cdot n_z^w + a_{x'}^x \cdot g_z^{x'} + g_{z'}^x \cdot a_z^{z'}) \otimes z \\ &\quad + \gamma \cdot g_z^x \cdot a_{z'}^z \otimes z' \\ &= \gamma \cdot (n_y^x \cdot m_z^y + m_w^x \cdot n_z^w) \otimes z \\ &= \gamma \cdot n_y^x \Phi^{g^2, g^1}(y) + \gamma \cdot m_w^x \Psi'(w) \\ &= \Phi^{g^2, g^1}(\gamma \cdot n_y^x \otimes y) + \Psi'(\gamma \cdot m_w^x \otimes w) \\ &= \Phi^{g^2, g^1} \circ \Psi(\gamma \otimes x) + \Psi' \circ \Phi^{f^2, f^1}(\gamma \otimes x).\end{aligned}$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [BaCo] JEAN-FRANÇOIS BARRAUD, OCTAV CORNEA, *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence*. <http://arxiv.org/abs/math/0401094v1>.
- [CoRa] OCTAV CORNEA, ANDREW RANICKI, *Rigidity and gluing for Morse and Novikov complexes*. J. Eur. Math. Soc. 5, 343-394 (2004).
- [BeCoh] M. BETZ, R. COHEN, *Graph moduli spaces and cohomology operations*. Turkish J. Math. 18 (1994), no. 1, 23-41.
- [D] JEAN DIEUDONNÉ, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, Boston 1989.
- [F] J. FRANKS, *Morse-smale flows and homotopy theory*, Topology 18, (1979), 199-215.
- [Ma] WILLIAM S. MASSEY, *Singular Homology Theory*. Graduate Texts in Mathematics, 70. Springer Verlag, 1980.
- [Mi] JOHN W. MILNOR, *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [Mi2] JOHN W. MILNOR, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1965.
- [Ro] OLIVIER ROUSSEAU, *Quelques propriétés du complexe de Morse-Novikov*. Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (2005).
- [Sc] MATTHIAS SCHWARZ, *Morse homology*, PM. 111, Birkhäuser, Basel 1993.
- [Sp] E. SPANIER, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [We] JOA WEBER, *The Morse-Witten complex via dynamical systems*. J. Eur. Math. Soc. 5 (2003), 343-394.