

Université de Montréal

Convergence faible de processus de Lévy vers un
processus hyperbolique généralisé pour
l'évaluation d'options

par

Louis-Philippe Joly

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

août 2007



QA

3

US4

2007

V.020

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Convergence faible de processus de Lévy vers un
processus hyperbolique généralisé pour
l'évaluation d'options**

présenté par

Louis-Philippe Joly

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Duncan

(président-rapporteur)

Manuel Morales

(directeur de recherche)

Louis Doray

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

13 Août 2007

SOMMAIRE

Le présent mémoire présente une méthode permettant de construire une suite de processus de Lévy convergeant faiblement dans l'espace \mathbb{D} vers des processus appartenant à la famille des processus hyperboliques généralisés. Ceci sera fait à partir d'une généralisation des arbres binomiaux de Cox, Ross et Rubinstein [Cox et al., 1979]. Cette généralisation, basée sur le concept de subordination, permettra un nombre aléatoire de changements de prix selon la valeur prise par un certain processus de Poisson composé. À partir de ces approximations, des mesures martingales équivalentes seront déterminées afin de trouver une suite de prix risque-neutre d'une option d'achat européenne. Cette suite de prix convergera vers le prix obtenu sous un modèle exponentiel-Lévy basé sur un processus hyperbolique généralisé.

Mots-clés : Processus de Lévy, Convergence faible, Processus hyperboliques généralisés, Mesure risque-neutre, Arbre binomiaux, Options européennes.

SUMMARY

This master's thesis introduces a method that allows to build a sequence of weakly convergent Lévy processes in the space \mathbb{D} to a process of the generalized hyperbolic family. This is achieved through a generalization of the binomial trees of Cox, Ross and Rubinstein [Cox et al., 1979]. This generalization, based on the subordination concept, provides a random number of price changes related to the value of a compound Poisson process. From this approximation, equivalent martingale measures will be determined in order to find a sequence of european call options risk-neutral prices. This sequence will converge toward the price obtained using an exponential-Lévy model based on a generalized hyperbolic process.

Key words : Lévy process, Weak convergence, Generalized hyperbolic process, Risk-neutral measure, Binomial tree, European call option.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	vii
Liste des notations utilisées	viii
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Notions de base	7
1.1. Processus stochastiques et convergence.....	7
1.1.1. Convergence faible et en distribution.....	7
1.1.2. L'espace métrique $\mathbb{D}[0, \infty)$ et la topologie de Skorohod.....	9
1.2. Processus de Lévy	11
1.2.1. Présentation des processus de Lévy	11
1.2.2. Lois infiniment divisibles.....	12
1.2.3. Processus de Poisson composés.....	16
1.2.4. Subordinateurs et subordinations	17
1.2.5. Processus GIG et GH.....	19
1.2.6. Processus de Lévy et convergence.....	23
1.3. Prix de produits dérivés dans un modèle exponentiel-Lévy.....	24
1.3.1. Présentation générale	25
1.3.2. Modèle exponentiel-Lévy et mouvement brownien géométrique .	27

1.4. Tableaux triangulaires	28
1.5. Les arbres binomiaux	31
Chapitre 2. Approximations et mouvement brownien géométrique	35
2.1. Modèle général et convergence en distribution	35
2.2. Convergence faible dans \mathbb{D}	41
2.3. Prix d'une option européenne	43
Chapitre 3. Arbres binomiaux à temps aléatoire	48
3.1. Convergence en distribution des variables L_t^n	49
3.2. Construction des processus N^n	53
3.3. Convergence faible et description des processus	60
Chapitre 4. Évaluation d'options européennes	66
4.1. Résumé du modèle et des processus	67
4.2. Détermination d'une mesure martingale équivalente	68
4.3. Méthode théorique d'évaluation	74
4.4. Calculs numériques à partir d'un exemple	79
Conclusion	84
Bibliographie	87

LISTE DES FIGURES

1.1	Fonctions de densité de lois inverses gaussiennes généralisées	20
1.2	Fonctions de densité de lois hyperboliques généralisées	21
1.3	Exemple de trajectoire d'un processus hyperbolique généralisé	22
2.1	Exemple d'une trajectoire de X^n	37
2.2	Exemple d'une trajectoire de S^n	37
3.1	Exemple d'une trajectoire de N^n	58
3.2	Exemple d'une trajectoire de L^n	64
4.1	Valeurs de \bar{r}_n pour différents n	81
4.2	Prix risque neutre d'une option européenne	82
4.3	Prix d'une option européenne par Monte-Carlo	82

LISTE DES NOTATIONS UTILISÉES

- $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ Boréliens de l'espace métrique $\langle \mathbb{S}, d \rangle$
- $\mathcal{L}(X), \mu_X$ Distribution ou loi de la variable aléatoire X
- ν_L Mesure de Lévy du processus L
- $\mu_n \Longrightarrow \mu$ Convergence faible de mesures
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{S})} X$ Convergence en distribution ou en loi des éléments aléatoires X^n vers X dans l'espace topologique $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$
- $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} X$ Convergence en distribution ou en loi des variables aléatoires X^n vers X
- $S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S$ Convergence faible des processus stochastiques S^n vers S
- $\psi_L(u)$ Exposant caractéristique du processus L évalué en u
- $\Psi_Y(u)$ Exposant caractéristique du processus Y évalué en u
- $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ Espérance sous la mesure \mathbb{Q} de la variable aléatoire X

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mon directeur de recherche, le professeur Manuel Morales, pour son support, ses conseils et son aide financière tout au long de mon cheminement. Merci aussi au département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal de m'avoir fourni un environnement adéquat et du financement. Merci finalement à tous ces mathématiciens ayant pavé la voie menant à ce mémoire.

INTRODUCTION

Le marché des produits dérivés est en pleine expansion et depuis plusieurs décennies, ce domaine des finances s'est avéré particulièrement propice à l'utilisation des modèles mathématiques. Si Bachelier [1900] fut l'un des précurseurs en utilisant une marche aléatoire comme processus modélisant les prix d'actifs financiers, l'éclosion se produisit essentiellement par l'introduction du mouvement brownien géométrique par Black et Scholes [1973]. C'est-à-dire que si t représente le temps et $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ le processus représentant le prix d'une action, son évolution est décrite par $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$ où $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et S_0, μ, σ des constantes. Ce modèle leur permit d'obtenir une formule portant leur nom et désormais célèbre pour le prix d'une option européenne. Par la suite, Cox, Ross et Rubinstein [Cox et al., 1979] introduisirent leur fameux modèle binomial à temps discret permettant d'approximer le modèle précédent et d'en offrir une approche intuitive.

Cependant, les modèles s'appuyant sur le mouvement brownien, donc à trajectoires continues, possèdent plusieurs inconvénients. Des inconvénients tout d'abord conceptuels. Il n'y a rien qui laisse supposer que les changements de prix se fassent de manière continue. Aussi, dans ce type de marché, les options sont redondantes, c'est-à-dire répliquables par un portefeuille adéquat. Finalement, plusieurs évidences empiriques obtenues par l'analyse de séries chronologiques montrent clairement les défaillances de ce modèle, telles que le fameux "volatility smile" et le fait que la distribution des accroissements sont plutôt leptokurtiques, c'est-à-dire que des changements de prix importants arrivent trop fréquemment comparativement aux prédictions de ce modèle.

C'est pour ces raisons que des modèles exponentiels-Lévy furent introduits. Dans ces modèles, le prix d'un instrument suit un processus de la forme $S_t = S_0 e^{L_t}$ où $\{L_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy, c'est-à-dire un processus où les trajectoires ne sont pas nécessairement continues ni les accroissements de lois normales. Ces processus sont complètement déterminés par la loi de L_1 , qui doit être infiniment divisible. Plusieurs lois furent utilisées, mais elles appartiennent pour la plupart à la famille des lois hyperboliques généralisées. Celles-ci furent appliquées la même année en finance tout d'abord pour deux cas particuliers : les lois normales inverses gaussiennes par Barndorff-Nielsen [1995] et hyperboliques par Eberlein et Keller [1995]. Elles furent ensuite étudiées dans toute leur généralité par Eberlein et Raible [2001], Raible [2000] et Prause [1999]. Cette famille permet de construire des modèles très efficaces et sera celle privilégiée dans ce mémoire.

Évaluer des options dans des modèles exponentiels-Lévy présente plusieurs défis et des solutions analytiques à ces problèmes sont rarement obtenues. Le but principal de ce mémoire est de construire une série d'approximations en temps continu $\{S_t^n\}_{t \geq 0}$ convergeant, dans un sens qui sera défini plus loin, vers des processus hyperboliques généralisés. Leur construction s'appuiera sur l'idée de subordination de mouvement brownien et généralisera le modèle des arbres binomiaux. En effet, si les modèles binomiaux utilisent des approximations de la forme $S_t^n = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor tn \rfloor} X_{n,k}}$ pour un certain $n > 0$, le nombre de saut permis ne sera maintenant plus déterministe, mais aléatoire. Donc de la forme $S_t^n = S_0 e^{\sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}}$ où $N^n = \{N_t^n\}_{t \geq 0}$ sera un processus de Poisson composé. Ce modèle permettra d'approximer le comportement des prix dans le cas où $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ est un processus hyperbolique généralisé car il sera montré que les processus $L^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \right\}_{t \geq 0}$ convergent faiblement vers le processus L .

Le deuxième objectif de ce mémoire est de dériver, à partir des approximations, un moyen efficace d'obtenir un prix pour une option d'achat européenne H . Celle-ci est un produit dérivé donnant le privilège à son détenteur d'acheter une certaine action, dont le prix est représenté par le processus $\{S_t\}_{t \geq 0}$, à un temps d'échéance T à un prix fixe K appelé prix d'exercice. Le détenteur obtiendra

donc un profit à échéance de $H = \max\{S_T - K, 0\}$ et la question à considérer est celle du prix à lequel cette option doit être vendue. L'une des approches classiques est celle de l'évaluation martingale donnant le prix risque-neutre de l'option. Pour effectuer celle-ci et en supposant que le taux d'intérêt sans risque du marché est de r , il faut déterminer une nouvelle mesure de probabilité \mathbb{Q} , appelée mesure martingale équivalente ou risque-neutre, sous laquelle le processus de prix escompté $\{e^{-rt} S_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale. Par la suite, le prix $\Pi_0(H)$ s'obtient simplement par la prise de l'espérance de la valeur escomptée de H , c'est-à-dire que $\Pi_0(H) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$. Ce mémoire présentera donc comment obtenir, en utilisant les processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ et par l'évaluation martingale sur chacun des processus S^n , une suite de prix $\{\Pi_0^n(H)\}_{n \geq 1}$ qui approximera $\Pi_0(H)$.

Ma contribution portera sur deux aspects. Si cette approche est développée dans quelques articles par, entre autre, Rachev et Rushendorf [1994], Weron [2002] ou Becker-Kern et al. [2004], ce mémoire poursuivra leurs travaux. En effet, il dépasse la méthode des deux premiers : la théorie qui y est développée permettra d'obtenir la convergence faible, et plus précisément la convergence faible vers des processus hyperboliques généralisés, alors que leur méthode ne le permet pas nécessairement. En effet, les approximations construites dans ces articles sont de la forme $\left\{ \sum_{k=1}^{\lfloor tY^n \rfloor} X_{n,k} \right\}_{n \geq 1}$ où Y^n sont des variables aléatoires convergeant en loi vers une variable aléatoire inverse gaussienne généralisée. Les approximations de ce mémoire sont plutôt de la forme $\left\{ \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \right\}_{n \geq 1}$ où N_t^n converge faiblement en tant que processus vers un processus inverse gaussien généralisé. De plus, ce mémoire offre une construction explicite d'approximations à partir de processus de Poisson composés permettant d'obtenir le processus limite et ses paramètres par le biais de preuves, quoique inspirées par une littérature déjà existante, propres à ce mémoire. Le deuxième aspect touchera l'évaluation, sous ce modèle, d'options européennes. Il sera montré comment obtenir, pour chaque processus S^n , une mesure risque-neutre dont la littérature ne semble pas faire mention et permettant d'obtenir comme limite le prix d'option sous un modèle exponentiel-Lévy basé sur un processus hyperbolique généralisé.

Pour effectuer ceci, un premier chapitre sera consacré à la présentation des notions de base nécessaires ainsi que des principaux théorèmes utilisés. Tout d'abord, les notions de convergence de variables aléatoires et de convergence faible de processus stochastiques dans l'espace $\mathbb{D}[0, \infty)$ seront abordées. Suivra une introduction aux processus de Lévy et particulièrement à deux familles utilisées dans ce mémoire, les processus inverses gaussiens généralisés et hyperboliques généralisés. Par la suite une brève présentation des concepts primordiaux de la théorie de l'arbitrage et de l'évaluation de produits dérivés sous des modèles exponentiels-Lévy sera effectuée. Cette partie se terminera par une introduction aux tableaux triangulaires et par l'exposition du désormais classique modèle de Cox-Ross-Rubinstein et de ses dérivés.

Le deuxième chapitre, quant à lui, présentera le modèle général des arbres binomiaux et leur convergence. Les processus S^n tels que $S_t^n = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}}$ seront définis, les limites en distribution des variables aléatoires S_t^n pour un temps fixe t déterminé et la convergence faible des approximations vers un mouvement brownien géométrique démontrée. Finalement, la formule de Black-Scholes sera obtenue comme limite des prix calculés sous ces approximations. Le chapitre suivant portera sur les approximations permettant un nombre aléatoire de sauts, c'est-à-dire de la forme $\{S_t^n\}_{t \geq 0} = \{S_0 e^{L_t^n}\}_{t \geq 0}$ où $L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}$. Après avoir montré la convergence en distribution des variables aléatoires L_t^n vers les variables L_t , nous déterminerons précisément vers quelle loi celles-ci doivent tendre en déterminant la loi et les paramètres de la distribution limite L_1 . Finalement, il sera démontré que les processus L^n sont eux-mêmes des processus de Lévy, ce qui permettra d'établir la convergence faible vers des processus hyperboliques généralisés déterminés par la loi de L_1 .

Pour terminer, le dernier chapitre sera consacré à l'évaluation de produits dérivés en utilisant les approximations du chapitre précédent. Un résumé du modèle de marché utilisé sera fait et la méthode pour obtenir des mesures risque-neutres lorsque les processus S^n modélisent le prix de l'action sera présentée. Une fois celles-ci déterminées, une méthode théorique d'évaluation des prix d'une option européenne à l'aide de ces mesures sera mise en place. Une dernière section sera

consacrée à des calculs numériques appliquant les méthodes développées dans ce chapitre et permettant d'observer la convergence théorique des processus et des prix d'une option.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter les différentes notions utilisées au cours de ce mémoire. Ceci sera fait dans le but d'inclure les définitions et résultats nécessaires tout en clarifiant la notation utilisée. La présentation se veut succincte et complète. Elle portera sur les notions de convergence de variables aléatoires et de processus stochastiques, de processus de Lévy, d'évaluation de produits dérivés sous des modèles exponentiel-Lévy et se terminera par une introduction à la notion de tableaux triangulaires et d'arbres binomiaux.

1.1. PROCESSUS STOCHASTIQUES ET CONVERGENCE

Cette section permettra de spécifier le sens à donner à la notion de convergence faible de processus. Un rappel sur les éléments et les variables aléatoires sur des espaces métriques généraux sera d'abord fait et la définition de convergence en distribution abordée. Ensuite seront définis les processus et l'espace métrique adéquat à leur analyse. Finalement, la convergence faible des processus comme fonction aléatoire, au sens de convergence en distribution dans l'espace de Skorohod, sera présentée.

1.1.1. Convergence faible et en distribution

Nous suivrons ici Billingsley [1999] pour la présentation générale de la convergence. Soit (\mathbb{S}, d) un espace métrique noté \mathbb{S} , $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ sa tribu borélienne définie à l'aide de la distance d et $C(\mathbb{S})$ l'ensemble des fonctions réelles bornées et continues sur \mathbb{S} . Nous considérerons tout d'abord la convergence faible de mesures.

Définition 1.1.1. Soit \mathbb{S} un espace métrique et μ_n, μ des mesures de probabilité sur l'espace topologique $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$. Alors μ_n converge faiblement vers μ , noté $\mu_n \Longrightarrow \mu$ si pour toute fonction f appartenant à $C(\mathbb{S})$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{S}} f d\mu.$$

Rappelons maintenant que si $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ est un espace probabilisé, une fonction mesurable X de $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ vers $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$ est appelée élément aléatoire. Si $\mathbb{S} = \mathbb{R}$, il s'agit d'une variable aléatoire et si $\mathbb{S} = \mathbb{R}^k$, d'un vecteur aléatoire (\mathbb{R} et \mathbb{R}^k comme espace euclidien). Sa distribution est la mesure de probabilité $\mu_X = \mathbb{P}X^{-1}$ sur $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$. Celle-ci sera notée $\mathcal{L}(X)$. La convergence en distribution d'éléments aléatoires se ramène alors à la convergence faible de mesure.

Définition 1.1.2. Soit X_n, X des éléments aléatoires sur des espaces probabilisés $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n \rangle$ et $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ allant vers un même espace topologique $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$ et μ_{X_n}, μ_X leur distribution respective. Alors la suite X_n converge en distribution ou en loi vers X dans \mathbb{S} , noté $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{S})} X$, si $\mu_{X_n} \Longrightarrow \mu_X$.

Rappelons maintenant que pour toute distribution μ sur $\langle \mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rangle$ nous pouvons définir sa fonction caractéristique

$$\phi_\mu(u) = \int e^{i\langle u, x \rangle} \mu(dx) \quad u \in \mathbb{R}^k, \quad (1.1.1)$$

où $\langle u, x \rangle$ est le produit scalaire usuel. L'exposant caractéristique est la fonction $\psi(u) = \ln \phi(u)$. Aussi, si X est une variable aléatoire, sa fonction caractéristique est celle de sa distribution μ_X et est équivalente à sa définition standard $\phi_X(u) = \mathbb{E}_{\mu_X} [e^{iuX}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [e^{iuX}]$. De plus, si X et Y sont des variables aléatoires, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$ si et seulement si $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$. Finalement, la notion de transformée de Laplace est souvent utilisée pour une distribution positive. Soit μ une distribution sur $[0, \infty)$. Alors sa transformée de Laplace est la fonction

$$\varphi_\mu(u) = \int_0^\infty e^{-ux} \mu(dx) \quad u \geq 0. \quad (1.1.2)$$

1.1.2. L'espace métrique $\mathbb{D}[0, \infty)$ et la topologie de Skorohod

Comme le but de ce mémoire est d'approximer des processus de Lévy, processus pouvant contenir des sauts et des discontinuités, l'espace utilisé devra être plus général que celui des fonctions continues. Pour cette partie, l'exposé suivra Prigent [2003] qui résume Billingsley [1999] tout en l'étendant au réel positif. Mais tout d'abord donnons une première définition d'un processus stochastique.

Définition 1.1.3. *Un processus stochastique X est une famille de variables aléatoires $\{X_t : t \geq 0\}$ définies sur un même espace probabilisé $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$ pour $t \geq 0$.*

Nous introduirons également la notion de processus stochastique adapté à une filtration, notion qui sera principalement utilisée lors de l'évaluation martingale d'option.

Définition 1.1.4. *Soit X un processus stochastique et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration. Alors X est adapté à \mathbb{F} si pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable. Nous disons alors que X est défini sur l'espace probabilisé filtré $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P} \rangle$.*

Pour l'instant, nous nous concentrerons seulement sur la notion de processus stochastique pour revenir sur les filtrations à l'intérieur de la **section 1.3**. La définition de processus comme famille de variables aléatoires ne permet pas de définir adéquatement la convergence. Il faut donc s'attarder à la notion de trajectoire.

Définition 1.1.5. *Une trajectoire d'un processus stochastique X est une fonction de $[0, \infty)$ dans \mathbb{R} telle que $t \mapsto X_t(\omega)$ pour un certain $\omega \in \Omega$. Nous noterons une trajectoire $X(\omega)$.*

Il est donc légitime de s'attarder à l'espace auquel les trajectoires d'un processus X appartiennent, et plus particulièrement celui pour les trajectoires d'un processus de Lévy. Il s'agit de l'espace $\mathbb{D} = \mathbb{D}[0, \infty)$, l'ensemble des fonctions continues à droite et possédant une limite à gauche (càdlàg) sur $[0, \infty)$. Pour pouvoir utiliser cet ensemble et les notions de la **sous-section 1.1.1**, il faut le munir d'une métrique pour construire une topologie à l'aide de ses boréliens. Diverses topologies peuvent être introduites par différentes métriques, la plus naturelle étant la métrique uniforme, c'est-à-dire que pour $x, y \in \mathbb{D}$

$$d_u(x, y) = \sup_{t \geq 0} |x(t) - y(t)|.$$

Nous utiliserons cependant une autre métrique, celle de Skorohod (plus précisément la J_1) plutôt que l'uniforme, la notion de convergence associée à cette dernière ne permettant pas de traiter adéquatement les discontinuités. En effet, en observant la définition, nous pouvons remarquer que si une discontinuité des deux fonctions n'est pas exactement au même temps t , cette distance peut être très grande et cela même si les sauts sont très près. Ce fait, appliqué à une suite de fonction, peut empêcher la convergence. La définition de la métrique de Skorohod est fournie en annexe, et la topologie qui lui est associée peut être vue comme l'ensemble des boréliens de $\mathbb{D}[0, \infty)$ lorsque l'espace $\mathbb{D}[0, \infty)$ est muni de la métrique de Skorohod d . Une exposition plus complète de cette métrique sur $\mathbb{D}[0, \infty)$ peut être trouvée dans Prigent [2003] ou Pollard [1984]. Nous avons donc un espace métrique $(\mathbb{D}[0, \infty), d) = \mathbb{D}$ et un espace topologique $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$ appelé topologie (J_1) de Skorohod.

Maintenant, si toutes les trajectoires $X(\omega)$ d'un processus stochastique X appartiennent à l'espace \mathbb{D} , nous pouvons énoncer une seconde définition de ces processus où ceux-ci sont vus comme des éléments aléatoires définis tels qu'à la **sous-section 1.1.1**.

Définition 1.1.6. *Un processus stochastique X à trajectoires càdlàg est un élément aléatoire, c'est-à-dire une fonction mesurable, de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$.*

Pour chaque élément $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \mathbb{D}$ est donc une fonction càdlàg sur $[0, \infty)$ que nous pouvons évaluer pour un temps fixe t . Ceci sera noté $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$. Plus formellement, pour un ensemble fini $T = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ tel que $0 \leq t_1 < t_2, \dots, t_k$, la projection naturelle $\pi_T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^k$ est la fonction donnée par $\pi_T(x) = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k))$ pour $x \in \mathbb{D}$. Ces fonctions sont mesurables [Billingsley, 1999] et $X_t = \pi_{\{t\}} \circ X$ est donc une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers \mathbb{R} , ce qui rejoint la première définition de processus stochastique, alors que $\pi_T \circ X = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ est un vecteur aléatoire.

La forme de convergence qui sera la plus utilisée et que nous nommerons convergence faible de processus est équivalente à la convergence faible de leur distribution comme mesure de probabilité sur l'espace \mathbb{D} .

Définition 1.1.7 (Convergence faible de processus). Soit X_n, X des processus stochastiques comme éléments aléatoires sur des espaces probabilisés $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers \mathbb{D} . Leur distribution est la mesure de probabilité $\mu_n = \mathbb{P}_n \circ X_n^{-1}$ et $\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ sur $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$. Alors X^n converge faiblement vers X si $\mu_n \rightrightarrows \mu$, donc si $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X$.

Maintenant que les espaces sur lesquels sont définis les processus et le type de convergence qui sera principalement utilisé sont énoncés, il convient de définir la famille de processus dont ce mémoire est le sujet, les processus de Lévy.

1.2. PROCESSUS DE LÉVY

Cette section sera consacrée aux processus de Lévy et fournira une introduction succincte tout en énonçant les définitions et résultats nécessaires à cet exposé. La présentation ne sera faite que sur des processus à valeur réelle, c'est-à-dire des processus à une dimension. Nous suivrons Sato [1999] alors que d'autres ouvrages de référence sont Applebaum [2004] et Bertoin [1996]. Nous présenterons d'abord les processus de Lévy et leurs liens avec les distributions infiniment divisibles ainsi qu'avec l'espace \mathbb{D} , avant d'évoquer la représentation de Lévy-Khintchine et la décomposition de Lévy-Itô. Par la suite seront abordés les processus de Poisson composés, les subordinateurs et la notion de subordination ainsi que quelques exemples de processus de Lévy utilisés à l'intérieur de ce mémoire.

1.2.1. Présentation des processus de Lévy

Soit $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Par la **définition 1.1.3**, un processus stochastique X est une famille $\{X_t : t \geq 0\}$ de variables aléatoires définie sur cet espace et prenant leur valeur dans \mathbb{R} . Énonçons la définition de l'une des propriétés d'un processus de Lévy.

Définition 1.2.1. Un processus stochastique X sur \mathbb{R} est stochastiquement continu ou continu en probabilité si, pour tout $t \geq 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0. \quad (1.2.1)$$

Les processus de Lévy ne sont donc pas nécessairement à trajectoires continues. Cette propriété assure simplement que pour un temps fixe t , la probabilité

d'avoir un saut à cet instant est nulle et permet d'assurer que les trajectoires seront d'un type particulier, c'est-à-dire càdlàg.

Un processus de Lévy est un processus stochastique à accroissements indépendants et stationnaires et qui est continu en probabilité. Nous utiliserons la définition de Sato même si celui-ci fait une distinction entre processus de Lévy en loi (la définition que je présenterai ici) et processus de Lévy. Cependant, cette distinction s'estompe car, comme il le sera présenté plus bas, il existe toujours une version d'un processus de Lévy en loi qui est un processus de Lévy.

Définition 1.2.2. *Un processus stochastique $L = \{L_t : t \geq 0\}$ sur \mathbb{R} est un processus de Lévy s'il satisfait aux conditions suivantes*

- (1) *Pour tout $n \geq 0$ et toute partition $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $L_{t_1} - L_{t_0}, L_{t_2} - L_{t_1}, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ sont indépendantes. (Propriété des accroissements indépendants).*
- (2) $\mathbb{P}(L_0 = 0) = 1$, noté $L_0 = 0$ presque sûrement (p.s.).
- (3) *La distribution de $L_{t+s} - L_s$ ne dépend pas de s , c'est-à-dire que $L_{t+s} - L_s \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} L_{t-s}$.*
- (4) *L est continu en probabilité.*

Le mouvement brownien est l'un des principaux exemples de processus de Lévy et quelques autres seront présentés plus loin. Mais l'une des particularités primordiales des processus de Lévy et l'une des méthodes efficaces pour en obtenir sont leurs liens avec la famille des lois infiniment divisibles.

1.2.2. Lois infiniment divisibles

Les lois infiniment divisibles forment une vaste famille qui nous permettra d'obtenir des processus de Lévy et des informations sur leur nature. Nous les définirons par le biais de leur fonction caractéristique.

Définition 1.2.3. *Une distribution μ de fonction caractéristique $\phi_\mu(u)$ est dite infiniment divisible si pour tout $n \geq 1$ entier, il existe une distribution μ_n de fonction caractéristique $\varphi_{\mu_n}(u)$ tel que $\phi_\mu(u) = \varphi_{\mu_n}^n(u)$.*

La famille des distributions infiniment divisibles est très large et comprend en outre les lois normales et de Poisson. Elles peuvent être caractérisées de manière

précise. Si nous notons $\psi(u) = \ln \phi(u)$ l'exposant caractéristique d'une loi, celui-ci a une forme particulière donnée par la formule de Lévy-Khintchine tirée ici de Sato [1999].

Théorème 1.2.1 (Formule de Lévy-Khintchine). *Si μ est une distribution infiniment divisible d'exposant caractéristique $\psi(u)$, alors*

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}}) \nu(dx) \quad (1.2.2)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ et ν est une mesure sur \mathbb{R} telle que

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty.$$

De plus, cette représentation par γ , σ^2 et ν est unique et chaque représentation de ce type définit une distribution infiniment divisible. $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$ est appelé triplet générateur de μ .

Voici une proposition qui spécifie comment obtenir des fonctions caractéristiques à partir d'une loi infiniment divisible.

Proposition 1.2.1 (Sato [1999]). *Soit μ une loi infiniment divisible et $\phi_\mu(u)$ sa fonction caractéristique. Alors $(\phi_\mu(u))^t$ est une fonction caractéristique.*

Cette proposition valide cette définition permettant d'obtenir cette fois des lois.

Définition 1.2.4. *Soit μ une loi infiniment divisible et $\phi_\mu(u)$ sa fonction caractéristique. Alors μ^t est définie comme la distribution telle que sa fonction caractéristique est donnée par $\phi_{\mu^t} = (\phi_\mu(u))^t$.*

Finalement, cette définition de μ_t permet d'associer à tout processus de Lévy une loi infiniment divisible.

Théorème 1.2.2 (Sato [1999]). (1) *Si L est un processus de Lévy tel que*

$$\mu_t = \mathcal{L}(L_t), \text{ alors } \mu_t \text{ est infiniment divisible et } \mu_t = \mu_1^t.$$

(2) *Inversement, si μ est une loi infiniment divisible sur \mathbb{R} , alors il existe un processus de Lévy L tel que $\mu = \mathcal{L}(L_1)$ et alors $\mathcal{L}(L_t) = \mu_1^t$ où μ_1^t est donnée par la **définition 1.2.4**.*

(3) *Si L et L' sont deux processus de Lévy tels que $\mathcal{L}(L_1) = \mathcal{L}(L'_1)$, alors L et L' sont de même loi.*

Comme une loi infiniment divisible μ , par la formule de Lévy-Khintchine, est complètement déterminée par son triplet générateur $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$, il en est de même pour un processus de Lévy. Ce triplet est alors nommé triplet de Lévy. La mesure $\nu(dx)$ est appelée mesure de Lévy et si elle est de la forme $\nu(dx) = u(x)dx$, $u(x)$ est appelé densité de Lévy. La constante γ est associée à la partie déterministe du processus alors que σ^2 l'est à la partie gaussienne. De plus, pour cette distribution μ , le triplet de Lévy de la loi μ^t est $[\gamma t, \sigma^2 t, t\nu(dx)]$ et nous pouvons exprimer la partie (1) du théorème précédent dans le langage des fonctions caractéristiques. En effet, si $\phi_1(u) = e^{\psi(u)}$ est la fonction caractéristique de L_1 , donc de la loi μ , alors $\phi_t(u) = e^{t\psi(u)}$ est la fonction caractéristique de L_t .

Par souci de clarification de la notation, si L est un processus de Lévy, nous noterons $\nu_L(dx)$ sa mesure de Lévy et $u_L(x)$ sa densité de Lévy si celle-ci existe. De plus, nous noterons $\psi_L(u) = \psi_{L_1}(u)$ l'exposant caractéristique du processus L qui correspond en fait à l'exposant caractéristique de la variable aléatoire exprimant la valeur du processus lorsque $t = 1$. Voici un résultat utile sur la mesure de Lévy d'un processus obtenu directement de la formule de Lévy-Khintchine.

Proposition 1.2.2 (Sato [1999]). *Soit $\nu(dx)$ et $\epsilon > 0$ quelconque. Alors*

$$\nu((-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, \infty)) < \infty.$$

Établissons maintenant le lien entre les processus de Lévy et l'espace \mathbb{D} . Une modification d'un processus X est un second processus Y défini sur le même espace probabilisé tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0$. Tout processus de Lévy L peut être vu comme une fonction aléatoire de $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vers $(\mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}))$, puisqu'il possède une modification càdlàg.

Théorème 1.2.3 (Applebaum [2004]). *Tout processus de Lévy possède une modification càdlàg qui est un processus de Lévy.*

De plus, si L' est une version de L , alors ils possèdent les mêmes distributions finies et le même triplet de Lévy. Nous pouvons donc parler sans perdre de précision du fait que les trajectoires d'un processus de Lévy sont càdlàg. Exposons maintenant un théorème montrant sous quelles conditions la fonction génératrice des moments d'un processus de Lévy existe, tiré de Cont [2004].

Théorème 1.2.4. Soit $\{L_t : t \geq 0\}$ un processus de Lévy. Alors $\mathbb{E} [e^{uL_t}]$ est fini pour tout $t \geq 0$ si et seulement si $\int_{|x| \geq 1} e^{ux} \nu_L(dx) < \infty$. Dans ce cas

$$\mathbb{E} [e^{uL_t}] = e^{t\psi_L(-iu)}$$

où $\psi_L(u)$ est l'exposant caractéristique du processus L .

La formule de Lévy-Khintchine et les lois infiniment divisibles permettent de comprendre la nature des lois marginales d'un processus de Lévy L . Nous nous attarderons maintenant à la décomposition Lévy-Itô avec une notation simplifiée pour présenter l'essentiel.

Proposition 1.2.3 (Décomposition de Lévy-Itô [Sato, 1999]). *Tout processus de Lévy $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ peut être écrit sous la forme*

$$L_t = \gamma t + \sigma B_t + J_t$$

où γ et $\sigma \geq 0$ sont des constantes, $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et $\{J_t\}_{t \geq 0}$ représente la partie de sauts purs du processus.

Le processus $J = \{J_t\}_{t \geq 0}$ dépend de la mesure de Lévy ν_L du processus. Cette décomposition permet de classier les processus de Lévy selon quatre types. Tout d'abord si $\sigma > 0$, le processus possède une partie gaussienne avec possiblement un certain nombre de sauts. Si $\sigma = 0$, le processus est dit de purs sauts. Si celui-ci effectue un nombre infini de sauts sur tout intervalle, il est dit d'activité infinie. De plus, rappelons qu'un processus est à variation finie si $\sup \sum_{i=1}^n |T_{t_i} - T_{t_{i-1}}| < \infty$ presque sûrement où le supremum est pris sur les partitions finies d'un intervalle $[a, b]$. Nous pouvons maintenant classier les processus de purs sauts selon trois types définis par la mesure de Lévy. Si $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - 0$, nous avons :

- (1) Type A : Si $\int_{\mathbb{R}_0} \nu_L(dx) < \infty$, alors L est un processus de Poisson composé.
- (2) Type B : Si $\int_{\mathbb{R}_0} \nu_L(dx) = \infty$ et que $\int_{\mathbb{R}_0} (1 \wedge |x|) \nu_L(dx) < \infty$, alors le processus est à activité infinie mais à variation finie.
- (3) Type C : Si $\int_{\mathbb{R}_0} \nu_L(dx) = \infty$ et que $\int_{\mathbb{R}_0} (1 \wedge |x|) \nu_L(dx) = \infty$, alors le processus est à activité infinie et à variation infinie pour tout intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$.

Finalement, il est bon de remarquer que puisqu'un mouvement brownien standard est de variation finie, tout processus de Lévy dont $\sigma > 0$ est à variation infinie.

Attardons-nous maintenant sur le premier type de processus de Lévy, les processus de Poisson composé.

1.2.3. Processus de Poisson composés

Les processus de Poisson et de Poisson composés sont des exemples classiques de processus de Lévy que nous utiliserons plus loin pour construire des approximations. Voici donc une brève présentation des définitions et de construction de ces processus.

Définition 1.2.5. *Un processus stochastique $X = \{X_t : t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ s'il est un processus de Lévy et, pour $t > 0$, X_t est une loi de Poisson de moyenne λt .*

Voici une construction simple des processus de Poisson

Théorème 1.2.5. *Soit τ_n pour $n > 0$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de moyenne λ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ appelées temps d'attente avec $\tau_0 = 0$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \tau_k$. Alors le processus $M_t = \inf \{n \geq 0 : T_n > t\} - 1$ est un processus de Poisson de moyenne λ .*

Les processus de Poisson composés sont une généralisation des processus de Poisson.

Définition 1.2.6. *Soit $\lambda > 0$ et J une distribution sur \mathbb{R} telle que $J(\{0\}) = 0$. Un processus stochastique $X = \{X_t : t \geq 0\}$ sur \mathbb{R} est appelé processus de Poisson composé $Pc(\lambda, \sigma)$ s'il est un processus de Lévy tel que pour $t > 0$, X_t est une distribution de Poisson composée, c'est-à-dire que son exposant caractéristique est de la forme*

$$\psi_{X_t}(u) = t\lambda(\phi_J(u) - 1) \quad \text{pour } u \in \mathbb{R}. \quad (1.2.3)$$

où $\phi_J(u)$ est la fonction caractéristique de la loi σ .

De la même façon, il existe une construction des processus de Poisson composés.

Théorème 1.2.6. *Soit $M = \{M_t : t \geq 0\}$ un processus de Poisson de moyenne λ , J_k des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ_J*

indépendantes de M_t . Si $\mu_J(\{0\}) = 0$, alors

$$Y_t = \sum_{k=0}^{M_t} J_k \quad (1.2.4)$$

est un processus de Poisson composé $Y = Pc(\lambda, \mu_J)$.

Voici une proposition résumant quelques propriétés des processus de Poisson composés.

Proposition 1.2.4. *Soit $N = Pc(\lambda, \mu_J)$ un processus de Poisson composé. Alors*

- (1) *sa mesure de Lévy $\nu_N(dx)$ est donnée par $\nu_N(dx) = \lambda \mu_J(dx)$,*
- (2) *$\nu_N(\mathbb{R}) < \infty$,*
- (3) *Son exposant caractéristique est de la forme $\psi_N(u) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \mu_J(dx)$,*
- (4) *Si N est à saut positif, c'est-à-dire que $\mu_J((-\infty, 0]) = 0$, alors la transformée de Laplace existe et l'exposant de Laplace de N est $\Psi_N(u) = \lambda \int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1) \mu_J(dx) = \psi_N(iu)$.*

Maintenant que ces quelques faits primordiaux sur les processus de Poisson composés sont mis en lumière, les processus de Lévy appelés subordonateurs ainsi que la notion de subordinations seront abordés dans la prochaine sous-section.

1.2.4. Subordonateurs et subordinations

Ici seront présentés de façon générale les notions de subordonateurs et de subordinations. Commençons par une famille spécifique de processus de Lévy, les subordonateurs. Pour une discussion sur les subordonateurs, voir Bertoin [1996].

Définition 1.2.7. *Un processus de Lévy $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ est appelé subordonateur s'il est non-décroissant, c'est-à-dire que les trajectoires $Y(\omega)$ sont non-décroissantes presque sûrement.*

Donc un subordonateur possède une version non-décroissante pour tout $\omega \in \Omega$ et sans perdre de généralité, nous utiliserons maintenant celle-ci. Les subordonateurs sont souvent associés à un rythme d'évolution temporel. L'un des principaux exemples de subordonateur sont les processus de Poisson composés à sauts positifs, les subordonateurs pouvant être vus comme des généralisations de ceux-ci. Leur triplet caractéristique et leur mesure de Lévy prennent une forme particulière.

Proposition 1.2.5 (Cont [2004]). *Soit Y un subordonateur. Alors son triplet de Lévy est donné par $[\gamma, 0, \nu_Y(dx)]$ et il n'a pas de partie gaussienne. De plus, $\gamma \geq 0$, $\nu(-\infty, 0] = 0$, et $\int_0^\infty (x \wedge 1) \nu_Y(dx) < \infty$.*

Cette proposition implique que les subordonateurs sont des processus à variation finie (voir Cont [2004]). Dans ce cas, la décomposition de Lévy-Itô et la formule de Lévy-Khintchine admettent une représentation plus simple.

Corollaire 1.2.1 (Cont [2004]). *Soit $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à variation finie de triplet de Lévy $[\gamma, 0, \nu_X(dx)]$. Alors X peut-être exprimé comme la somme de ses sauts entre 0 et t et un terme linéaire :*

$$X_t = bt + \sum_{s \in [0, t]}^{\Delta X_s \neq 0} \Delta X_s,$$

où $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$. De plus, son exposant caractéristique est de la forme

$$\psi(u) = ibu + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu_X(dx)$$

avec $b = \gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu_X(dx)$.

Donc les subordonateurs, puisqu'à variation finie, admettent une décomposition de cette forme. De plus, leur transformée de Laplace existe toujours et leur exposant de Laplace est de la forme, pour un subordonateur Y ,

$$\mathbb{E} [e^{-uY_1}] = e^{\Psi_Y(u)} = e^{bu + \int_0^\infty (e^{-ux} - 1) \nu_Y(dx)} \quad \text{pour } u \geq 0. \quad (1.2.5)$$

La subordination est une notion fortement liée aux subordonateurs qui permet d'obtenir de nouveaux processus. Supposons un processus de Lévy $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ et un subordonateur $T = \{Y_t\}_{t \geq 0}$. L'évolution dans le temps du processus L ne dépend que de t . Comme les subordonateurs sont non-décroissants, ils peuvent représenter un rythme d'évolution temporelle que nous pourrions substituer à t . Nous subordinerions l'évolution de L à celle de Y . Comme le démontre le théorème suivant, le nouveau processus ainsi obtenu est toujours un processus de Lévy.

Théorème 1.2.7 (Applebaum [2004]). *Soit L un processus de Lévy et Y un subordonateur indépendant de L et défini sur le même espace probabilisé. Si Z est un nouveau processus stochastique tel que $Z_t = L_{Y_t}$ pour $t \geq 0$, c'est-à-dire que*

$$Z_t(\omega) = X_{Y_t(\omega)}(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega,$$

alors Z est un processus de Lévy appelé subordination de L par Y .

Les processus dont les approximations seront construites à l'intérieur de ce mémoire sont des subordinations alors que l'idée générale de la construction repose sur la subordination de marches aléatoires par des processus de Poisson composés. La sous-section suivante est justement dévolue aux processus de Lévy utilisés : les processus inverses gaussiens généralisés et hyperboliques généralisés.

1.2.5. Processus GIG et GH

Pour cette sous-section, les densités, fonctions caractéristiques et les mesures de Lévy seront tirés pour la plupart de Schoutens [2003]. Elle a comme objectif de présenter les trois processus utilisés dans ce mémoire. Tout d'abord le mouvement brownien et ensuite le subordonateur qui subordonnera celui-ci, les processus inverses gaussiens généralisés. Finalement le résultat de la subordination, les processus hyperboliques généralisés, sera défini. Le mouvement brownien ne sera pas abordé si ce n'est que pour spécifier qu'un mouvement brownien standard sera noté, tout au long de mémoire, par $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$. Il est appelé standard puisque $\mathcal{L}(B_1) = \mathcal{N}(0, 1)$. De plus, il est évident par la décomposition de Lévy-Itô que son triplet caractéristique est de la forme $[0, 1, 0]$.

Un processus de Lévy peut-être construit à partir de sa loi à l'instant 1. Nous définirons donc tout d'abord la loi inverse gaussienne généralisée notée $gig(\lambda, \alpha, \beta)$. Les paramètres permis sont

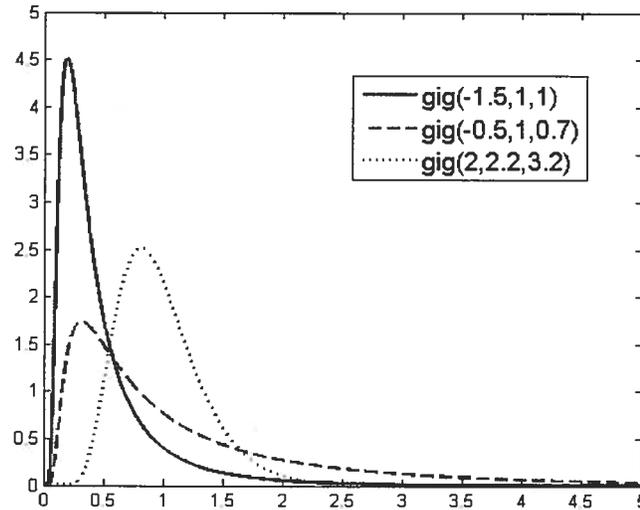
$$\begin{aligned} \alpha \geq 0, \quad \beta > 0 & \text{ si } \lambda > 0, \\ \alpha > 0, \quad \beta > 0 & \text{ si } \lambda = 0, \\ \alpha > 0, \quad \beta \geq 0 & \text{ si } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Il a été montré par Barndorff-Nielsen et Halgreen [1977] que cette loi est infiniment divisible. Sa fonction de densité est connue et donnée par

$$f_{gig(\lambda, \alpha, \beta)}(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\lambda \frac{1}{2K_\lambda(\alpha\beta)} x^{\lambda-1} e^{\frac{1}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \beta^2 x)} \quad \text{pour } x \geq 0,$$

où $K_\lambda(x)$ dénote la fonction de Bessel modifiée du troisième type d'indice λ . Quelques exemples de fonctions de densité de cette loi sont donnés par la **figure 1.1**. Cette distribution possède une propriété qui sera utilisée dans ce mémoire.

FIG. 1.1. Fonctions de densité de lois inverses gaussiennes généralisées



Exemples de fonctions de densité de trois lois inverses gaussiennes généralisées avec différents paramètres

Proposition 1.2.6 (Eberlein et Van Hammerstein [2004]). *Si X a comme distribution une loi $gig(\lambda, \alpha, \beta)$ et soit $c > 0$ une constante, cX a la même distribution qu'une $gig\left(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}}\right)$.*

Nous introduirons maintenant une notation utilisée pour ce mémoire. La notation $gig(\lambda, \alpha, \beta)$ sera utilisée pour désigner une loi inverse gaussienne généralisée alors que $GIG(\lambda, \alpha, \beta) = \{GIG_t(\lambda, \alpha, \beta) : t \geq 0\}$ désignera un processus inverse gaussien généralisé. Les formes minuscule et majuscule seront également utilisées pour les autres processus de ce mémoire.

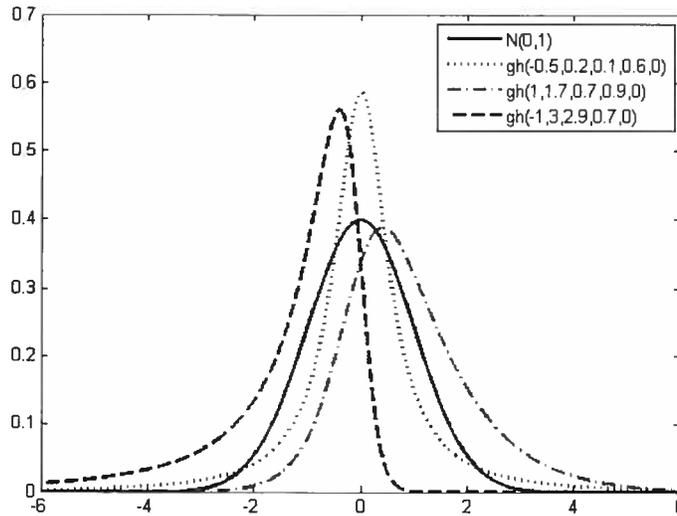
Comme la loi inverse gaussienne généralisée est infiniment divisible, par le **théorème 1.2.2** il existe un processus de Lévy $Y = GIG(\lambda, \alpha, \beta)$ tel que $\mathcal{L}(Y_1) = gig(\lambda, \alpha, \beta)$. Ce processus est un subordonateur [Eberlein et Van Hammerstein, 2004] et son triplet de Lévy est de la forme $[\gamma, 0, \nu_{GIG}(dx)]$ tel que $\gamma = \int_0^1 x \nu_{GIG}(dx)$. Il possède une densité de Lévy et alors $\nu_{GIG}(dx) = u_{GIG}(x)dx$ où

$$u_{GIG}(x) = x^{-1} e^{-\frac{1}{2}\beta^2 x} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{g(z)} dz + \max\{0, \lambda\} \right) \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x) dx, \quad (1.2.6)$$

et

$$g(z) = \pi^2 z (J_{|\lambda|}^2(\alpha\sqrt{2z}) + N_{|\lambda|}^2(\alpha\sqrt{2z}))$$

FIG. 1.2. Fonctions de densité de lois hyperboliques généralisées



Exemples de fonctions de densité de trois lois hyperboliques généralisées avec différents paramètres et d'une loi normale centrée réduite.

et $J_{|\lambda|}(y)$, $N_{|\lambda|}(y)$ sont des fonctions de Bessel de premier et deuxième type. Puisque la valeur de γ est donnée par $\gamma = \int_0^1 x \nu_{GIG}(dx)$, nous avons que $b = 0$ dans la décomposition de Lévy-Itô pour les processus à variation finie (voir **corollaire 1.2.1**). Donc si $Y = GIG(\lambda, \alpha, \beta)$, nous avons que

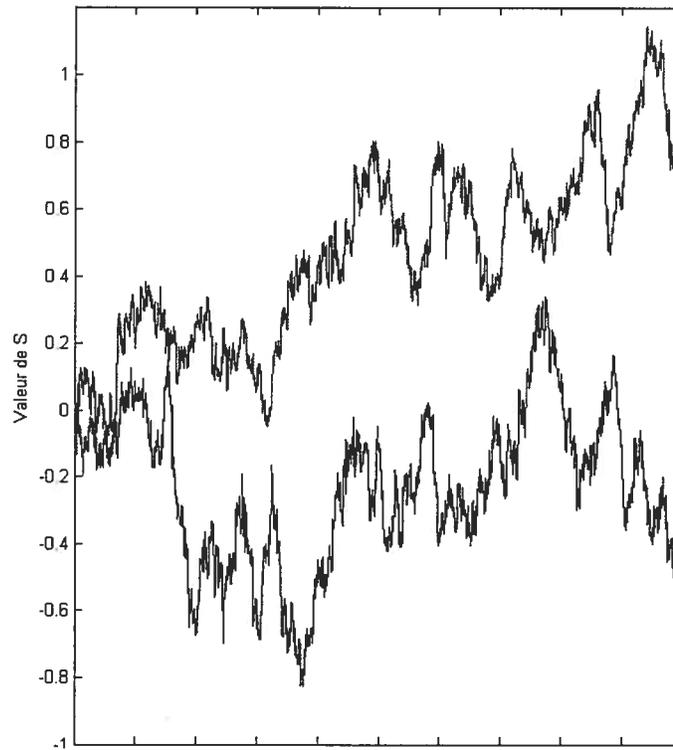
$$Y_t = \sum_{s \in [0,t]}^{\Delta Y_s > 0} \Delta Y_s \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.2.7)$$

Maintenant que le subordonateur qui sera utilisé est défini, abordons la subordination. Supposons B un mouvement brownien standard, X un processus tel que $X_t = at + cB_t$ et $Y = GIG(\lambda, \alpha, \beta)$. Comme X et Y sont des processus de Lévy, nous pouvons définir un nouveau processus Z comme la subordination de X par Y , c'est-à-dire que

$$Z_t = X_{Y_t} = aY_t + cB_{Y_t}$$

Ce nouveau processus est une subordination et donc un processus de Lévy. En fait, cette famille de processus se nomme processus hyperboliques généralisés. Mais nous définirons tout d'abord la distribution hyperbolique généralisée, qui fut définie et utilisée pour la première fois par Barndorff-Nielsen [1977] comme

FIG. 1.3. Exemple de trajectoire d'un processus hyperbolique généralisé



Des trajectoires d'un processus hyperbolique généralisé.

modèle pour la distribution de la taille de grains de sable. Nous la noterons $gh(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ où les paramètres permis sont

$$\alpha > 0, 0 \leq |\beta| < \alpha, \mu \in \mathbb{R}, \delta > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'autres paramétrisations sont possibles mais nous suivons ici Eberlein et Van Hammerstein [2004]. Il fut établi que cette loi est infiniment divisible par Barndorff-Nielsen et Halgreen [1977]. Sa densité est explicitement connue mais elle sera exprimée ici comme une mixture de loi normale et de loi inverse gaussienne généralisée. En effet, tiré de Eberlein et Van Hammerstein [2004],

$$f_{gh(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)}(x) = \int_0^{\infty} f_{N(\mu + \beta y, y)}(x) f_{gig(\lambda, \delta, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}(y) dy$$

où $N(\mu + \beta y, y)$ est une loi normale de moyenne $\mu + \beta y$ et de variance y . La **figure 1.2** représente différentes fonctions de densité. La loi normale servant de référence,

le caractère leptokurtique de ces lois est bien visible. Puisque cette loi est infiniment divisible, il est possible de construire un processus $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)$ dont la **figure 1.3** fournit des exemples de trajectoires. Nous n'élaborerons pas sur ces processus, tout en spécifiant que leur triplet de Lévy est de la forme $[\gamma, 0, \nu_{GH}(dx)]$, qu'ils n'ont pas de partie gaussienne mais qu'ils sont à variation infinie. Ils incluent plusieurs cas particuliers dont les processus hyperboliques lorsque $\lambda = 1$ qui furent appliqués en finance par Eberlein et Keller [1995] alors que lorsque $\lambda = -\frac{1}{2}$ il s'agit de normal inverse gaussien étudié par Barndorff-Nielsen [1995]. Ces processus furent étudiés dans toutes leur généralité par Eberlein et Raible [2001], Raible [2000] et Prause [1999].

1.2.6. Processus de Lévy et convergence

Avant de terminer cette section, il convient d'énoncer un théorème primordial utilisé dans ce mémoire. Il permet de déterminer sous quelles conditions des processus de Lévy convergent faiblement vers un autre processus de Lévy. Soit (μ_n) et μ des distributions infiniment divisibles sur \mathbb{R} de triplet caractéristique $[\gamma_n, \sigma_n^2, \nu_n(dx)]$ et $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$. Nous nommerons les trois conditions énumérées ci-dessous conditions de convergence des triplets de Lévy.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(f) = \nu(f)$ pour tout $f \in C_2(\mathbb{R})$

où $C_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions bornées et continues de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui sont nulles autour de 0. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de Jacod et Shiryaev [2003].

Théorème 1.2.8 (Jacod et Shiryaev [2003]). *Soit X^n et X des processus à accroissements indépendants et stationnaires de triplet caractéristique $[\gamma_n, \sigma_n^2, \nu_n(dx)]$ et $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$. Alors les trois énoncés suivant sont équivalents*

- (1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X$,
- (2) $X_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} X_1$,
- (3) *les conditions de convergence des triplets de Lévy sont remplies.*

Ce théorème, appliqué aux processus de Lévy, implique que la convergence faible de processus de Lévy est équivalente à la convergence en distribution des variables aléatoires du processus au temps $t = 1$. En effet, les processus de Lévy sont par définition des processus à accroissements stationnaires et indépendants de triplet de Lévy de la forme $[\gamma, \sigma^2, \nu(dx)]$. Nous présenterons finalement un dernier théorème, le théorème de Portemanteau, pour obtenir différentes conditions pour la convergence faible de mesures et qui seront utiles pour obtenir la condition de convergence de triplet de Lévy. Cette version provient de Billingsley [1999]

Théorème 1.2.9 (Théorème de Portemanteau). *Soient \mathbb{S} un espace métrique et $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$ l'espace topologique où $\mathcal{B}(\mathbb{S})$ sont les boréliens de \mathbb{S} . Si μ_n, μ sont des mesures de probabilité définies sur $\langle \mathbb{S}, \mathcal{B}(\mathbb{S}) \rangle$, alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{S}} f d\mu \text{ pour toute fonction } f \text{ réelle bornée et continue.}$$

$$(2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F) \text{ pour tout ensemble fermé } F \subseteq \mathbb{S}.$$

$$(3) \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U) \text{ pour tout ensemble ouvert } U \subseteq \mathbb{S}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A) \text{ pour tout ensemble } \mu\text{-continu de } \mathbb{S}.$$

Ceci termine cette section alors que la prochaine théorie présentée sera celle de l'évaluation de produits dérivés justement lorsque l'évolution du sous-jacent est de la forme $S_t = S_0 e^{L_t}$ où $\{L_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy.

1.3. PRIX DE PRODUITS DÉRIVÉS DANS UN MODÈLE EXPONENTIEL-LÉVY

Cette section permettra de présenter quelques concepts primordiaux de l'évaluation de produits dérivés sous la perspective de l'évaluation martingale. Tout d'abord, les notions d'arbitrage, de produits dérivés et de mesure martingale équivalente ainsi que les liens entre celles-ci seront présentés. Par la suite, ces notions seront appliquées au cas du mouvement brownien géométrique et la formule de Black-Scholes sera exposée. Finalement, ceci sera étendu au cas du modèle

exponentiel-Lévy. L'ensemble de cet exposé suivra Cont [2004] alors que des travaux classiques sur ce sujet sont Harrison et Kreps [1979], Harrison et Pliska [1981] et Dalbean et Schachermayer [1998].

1.3.1. Présentation générale

Tout d'abord, le modèle de marché que nous utiliserons sera un modèle à deux actifs, l'un, S , représentant le prix d'un actif avec risque, sera appelé le sous-jacent et l'autre, B , sera l'actif sans-risque. Tout les deux seront des processus stochastiques càdlàg $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ et $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ adaptés à \mathcal{F} sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, ce qui nous permettra plus loin d'utiliser cette théorie avec les processus développés dans ce mémoire. La filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ représentera le flux d'informations générées par l'évolution de l'actif avec risque S . Nous utiliserons donc simplement la filtration générée par le processus S , c'est-à-dire que $\mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{s \leq t} S_s)$. De plus, nous considérerons ici que le placement sans risque est de la forme $B = \{e^{rt}\}_{t \geq 0}$ où r représente le taux d'intérêt du marché. Définissons maintenant un produit dérivé et le processus associé à son prix.

Définition 1.3.1. *Un produit dérivé H est une fonction \mathcal{F} -mesurable de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sa valeur au temps t , si celle-ci peut être évaluée, sera représentée par $\Pi_t(H)$.*

Le produit dérivé qui sera étudié à l'intérieur de ce mémoire est l'un des plus simples, l'option d'achat européenne sur un sous-jacent S . Celle-ci donne la possibilité au détenteur de l'option d'acheter au temps de maturité T l'actif S à un prix fixe K appelé prix d'exercice. C'est-à-dire que

$$H = \max \{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Donc si le prix de l'actif au temps T est supérieur à K , le détenteur de l'option l'exerce pour acheter l'actif au prix K qu'il revend par la suite sur le marché au prix S_T , réalisant un profit de $S_T - K$. Si S_T , le prix, est inférieur à K , l'option n'est pas exercée et le détenteur ne réalise pas de profit. Un autre produit dérivé, l'option de vente européenne, sera également utilisé. Cette option donne le droit de vendre le sous-jacent S au temps d'échéance T à un prix d'exercice K . Le détenteur, si le prix S_T au temps T est inférieure à K , achète donc le sous-jacent sur le marché et le vend ensuite au prix K , réalisant ainsi un profit de $K - S_T$. Si

le prix est supérieur, il n'exerce pas son option. La fonction associée à ce produit dérivé est donc

$$V = \max \{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+.$$

L'un des principaux concepts pour l'évaluation est la notion d'arbitrage, que nous n'exposerons pas ici du point de vue mathématique. Une situation d'arbitrage est, en quelques mots, une situation où il y a possibilité de réaliser un profit sans assumer de risque. La notion d'arbitrage permet de déduire un résultat liant le prix d'une option d'achat à celui d'une option de vente européenne, résultat qui sera utilisé plus loin et qui est tiré ici de Bjork [2004].

Théorème 1.3.1 (Parité vente-achat). *Soit S un sous-jacent ainsi qu'une option d'achat et de vente européennes toutes les deux de prix d'exercice K et venant à échéance au temps T . Alors si le taux d'intérêt du marché est r et que le prix des options au temps $0 \leq t \leq T$ est respectivement de c_t et de p_t , nous avons toujours*

$$c_t = p_t + S_t - K e^{-r(T-t)}. \quad (1.3.1)$$

Nous relierons maintenant la notion d'arbitrage à celle de mesure martingale équivalente. Deux mesures \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont dites équivalentes par rapport à \mathcal{F} si

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0,$$

donc si les événements possibles sont les mêmes sous les deux mesures de probabilité. La notion de mesure martingale équivalente peut maintenant être définie.

Définition 1.3.2. *Soit $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ représentant un actif et r un taux d'intérêt. Alors une mesure \mathbb{Q} est dite martingale équivalente, ou mesure risque-neutre, si elle est équivalente à \mathbb{P} et si le processus représentant le prix de l'actif escompté, $\{e^{-rt} S_t\}_{t \geq 0}$ est une \mathbb{F} -martingale, c'est-à-dire que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rt} S_t | \mathcal{F}_s] = e^{-rs} S_s \quad \text{pour tout } t > s \geq 0. \quad (1.3.2)$$

Le théorème suivant relie la notion d'arbitrage et de mesure martingale équivalente est tiré de Cont [2004].

Théorème 1.3.2 (Premier théorème fondamental d'évaluation). *Soit un marché défini par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, un processus à trajectoire càdlàg S et un taux d'intérêt r .*

Alors ce marché est sans-arbitrage si et seulement s'il existe une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} .

Maintenant, cette mesure, si elle existe, permet de déterminer ce qu'il est convenu d'appeler le prix risque-neutre d'un produit dérivé.

Proposition 1.3.1 (Évaluation risque-neutre [Cont, 2004]). *Dans ce marché, toute méthode d'évaluation sans-arbitrage d'un produit dérivé H venant à échéance au temps T est de la forme*

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_t] \quad (1.3.3)$$

où \mathbb{Q} est une mesure martingale équivalente à \mathbb{P} .

Maintenant que cette partie de la théorie de l'évaluation a été présentée de manière abstraite, il convient maintenant de spécifier le modèle utilisé pour modéliser l'évolution du processus S .

1.3.2. Modèle exponentiel-Lévy et mouvement brownien géométrique

Les principaux modèles qui seront utilisés au cours de ce mémoire sont les modèles exponentiel-Lévy, c'est-à-dire que les processus utilisés seront de la forme $\{S_0 e^{L_t}\}_{t \geq 0}$ où S_0 est une constante positive et $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ un processus de Lévy. Les principaux cas particuliers seront ceux du mouvement brownien géométrique, c'est-à-dire où $L_t = \mu t + \sigma B_t$ avec $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et le cas où L est un processus hyperbolique généralisé. Mais tout d'abord, statuons l'existence d'une mesure martingale équivalente dans ce type de marché.

Proposition 1.3.2 (Absence d'arbitrage [Cont, 2004]). *Soit L un processus de Lévy sous une mesure \mathbb{P} . Si L n'est ni non-décroissant ou non-croissant, alors le modèle exponentiel-Lévy donné par $S_t = S_0 e^{L_t}$ et r un taux d'intérêt est sans-arbitrage et il existe donc une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} .*

Donc dans un modèle de type exponentiel-Lévy, il existe toujours au moins une mesure martingale équivalente permettant de faire de l'évaluation risque-neutre. Cependant, son unicité n'est pas garantie. En effet, si L est un mouvement brownien, il a été montré qu'il existe une unique mesure martingale équivalente permettant donc d'obtenir un unique prix risque-neutre. Cependant, celle-ci n'est pas unique en général. L'une des manières d'envisager une mesure martingale

équivalente dans le cas de ce modèle est de considérer une nouvelle mesure \mathbb{Q} . Cette mesure induit une nouvelle dynamique, ou une nouvelle distribution sur l'espace \mathbb{D} , déterminant ainsi un nouveau processus \mathbf{S} sur, cette fois, l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$. Ce processus sera une martingale, ce qui permettra de faire l'évaluation risque-neutre à l'aide de celui-ci. Le cas du mouvement brownien géométrique, le processus encore le plus largement utilisé, permet d'illustrer ceci. Il est possible de montrer [Black et Scholes, 1973] que si nous avons un processus représentant le sous-jacent de la forme $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$ défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et un taux d'intérêt r , alors il existe une unique mesure risque-neutre \mathbb{Q} et qu'alors, si $\mathbf{S}_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$ est un second processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, l'évaluation risque-neutre est équivalente à évaluer sous le nouveau processus $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_t\}_{t \geq 0}$. Ce qui signifie, si nous prenons le cas d'une option d'achat européenne H , que

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(\mathbf{S}_T - K)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Il existe un résultat analytique pour cette expression, la fameuse formule de Black-Scholes.

Théorème 1.3.3 (Formule de Black-Scholes [Black et Scholes, 1973]). *Soit H une option d'achat européenne venant à échéance au temps T alors le prix risque-neutre sous un mouvement brownien géométrique $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$ avec un taux d'intérêt r est donné par*

$$\Pi_t(H) = S_t F_N(d_1(t, S_t)) - e^{-r(T-t)} K F_N(d_2(t, S_t)) = \mathcal{C}_T$$

où $F_N(x)$ est la fonction de répartition d'une lois $N(0, 1)$ et

$$d_1(t, S_t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left\{ \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right) \right\},$$

$$d_2(t, S_t) = d_1(t, S_t) - \sigma \sqrt{T-t}.$$

1.4. TABLEAUX TRIANGULAIRES

Les tableaux triangulaires sont les objets qui permettront de construire les approximations nécessaires. Ils seront utilisés pour construire des processus convergent faiblement vers des mouvements browniens. Seulement quelques notions primordiales tirées de Prigent [2003] seront exposées ici ainsi que deux résultats

sur la convergence de ces schémas. Finalement, un théorème de Gnedenko [1983] nommé théorème de transfert sera explicité.

Définition 1.4.1. *Un tableau triangulaire à rangées indépendantes T est une suite $\{K_n\}_n$ telle que $K_n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et une suite d'espaces probabilisés $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n \rangle$ sur lesquels sont définies des suites indépendantes de variables aléatoires $\{X_{n,k}\}_{0 \leq k \leq K_n}$ indépendantes.*

Voici un exemple de tableau triangulaire qui est en fait une suite de suites de différentes grandeurs.

$$\begin{array}{cccccc} X_{1,1}, & X_{1,2}, & \cdots & X_{1,k_1} & & \\ X_{2,1}, & X_{2,2}, & X_{2,3}, & \cdots & X_{2,k_2} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \\ X_{n,1}, & X_{n,2}, & \cdots & X_{n,n}, & \cdots & X_{n,k_n} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \end{array}$$

Nous imposerons cependant une condition supplémentaire pour ce mémoire en supposant que $K_n < \infty$ pour tout n . L'une des conditions importantes à imposer pour obtenir des limites gaussiennes est la condition de Lindeberg.

Définition 1.4.2. *Un tableau triangulaire $\{X_{n,k}\}_{1 \leq k \leq K_n}$ satisfait la condition de Lindeberg si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E} \left[|X_{n,k}| 1_{\{|X_{n,k}| > \epsilon\}} \right] = 0. \quad (1.4.1)$$

Définissons la variable aléatoire X^n comme la somme d'une ligne d'un tableau triangulaire

$$X^n = \sum_{k=1}^{K_n} X_{n,k}$$

Nous pouvons maintenant citer l'un des théorèmes primordiaux sur les tableaux triangulaires adapté de Prigent [2003].

Théorème 1.4.1 (Théorème de Lindeberg-Feller). *Soit $\{X_{n,k}\}_{1 \leq k \leq K_n}$ un tableau triangulaire satisfaisant $K_n < \infty$ et la condition de Lindeberg. Alors*

- (1) *Si la suite $\{X^n\}_{n \geq 1}$ converge en distribution vers une loi μ , alors μ est une loi normale.*

(2) Si μ est une loi normale $\mathcal{N}(b, c)$ de moyenne b et de variance c , alors

$$\mathcal{L}(X^n) \Longrightarrow \mu \quad (1.4.2)$$

si et seulement si

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E}[X_{n,k}] = b,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2] = c$$

Après avoir obtenu la convergence des variables aléatoires, il est légitime d'analyser la convergence faible d'un certain processus. Pour cela, il faut définir un processus $X^n = \{X_t^n\}_{0 \leq t}$ par

$$X_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k} \quad (1.4.3)$$

pour $t \geq 0$. Ce processus est évidemment càdlàg car $\mathbb{P}(X^n(\omega) \in \mathbb{D}) = 1$. Chaque trajectoire est une fonction étagée dont la **figure 2.1** fournit un exemple. Voici un théorème concernant la convergence faible.

Théorème 1.4.2 (Prigent [2003]). *Supposons un tableau triangulaire satisfaisant la condition de Lindeberg et les processus X^n tels que définis en (1.4.3). Soit également un processus X où $X_t = bt + \sqrt{c}B_t$ avec $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Alors X^n est un processus à accroissements indépendants et*

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X \quad \text{si et seulement si :}$$

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[X_{n,k}] - bt \right| = 0,$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2] = ct$ pour tout t d'un certain sous-ensemble dense de \mathbb{R}^+ .

Pour clore cette section voici le théorème qui établira le lien entre les tableaux triangulaires et la subordination.

Théorème 1.4.3 (Théorème de transfert [Gnedenko, 1983]). *Soit $\{X_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire et $\{N_n\}_{n \geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires entières et positives. S'il existe deux variables aléatoires X et Y telles que*

$$\sum_{k=1}^n X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} X \quad \text{et} \quad \frac{N_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Y \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{N_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Z \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

où la fonction caractéristique de Z est donnée par

$$\phi_Z(u) = \int_0^\infty (\phi_X(u))^z \mu_Y(dz)$$

avec $\phi_X(u)$ la fonction caractéristique de X et μ_Y la loi de Y .

Pour terminer ce chapitre récapitulatif, la base des arbres binomiaux, qui ne sont en fait que des tableaux triangulaires, sera exposé.

1.5. LES ARBRES BINOMIAUX

À l'intérieur de cette section seront présentés les arbres binomiaux, des processus à temps discrets développés pour la première fois par Cox et al. [1979]. Ceux-ci furent introduits principalement dans l'optique d'approximer le modèle de Black-Scholes. Ce concept sera présenté tout d'abord pour un arbre à une période avant d'être généralisé à plusieurs en suivant Bjork [2004]. Supposons une période de temps h , un taux d'intérêt r et deux actifs, le premier sans risque, c'est-à-dire que $B_0 = 1$ et $B_1 = e^{rh}$ et le deuxième avec risque suivant la dynamique suivante

$$\begin{array}{l} \nearrow S_1 = uS_0 \quad \text{avec probabilité } p \\ S_0 \\ \searrow S_1 = dS_0 \quad \text{avec probabilité } 1 - p = q \end{array}$$

c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(S_1 = uS_0) = p = 1 - \mathbb{P}(S_1 = dS_0).$$

Ce modèle est sans arbitrage sous une certaine condition.

Proposition 1.5.1 (Bjork [2004]). *Le modèle suivant est sans-arbitrage si et seulement si $d \leq e^{rh} \leq u$*

Comme ce modèle est sans-arbitrage, il existe alors une mesure martingale équivalente \mathbb{Q} par le **théorème 1.3.2**.

Proposition 1.5.2. *Si ce modèle est tel que $d \leq e^{rh} \leq u$, alors la mesure équivalente martingale \mathbb{Q} est donnée par*

$$q_u = \frac{e^{rh} - d}{u - d} \quad \text{et} \quad q_d = \frac{u - e^{rh}}{u - d}. \quad (1.5.1)$$

C'est-à-dire que $\mathbb{Q}(S_1 = uS_0) = q_u = 1 - q_d = \mathbb{Q}(S_1 = dS_0)$.

Soit maintenant une option européenne H de prix d'exercice K venant à échéance après une seule période de durée h . Supposons de plus que $d \leq e^{rh} \leq u$. Il est clair alors que sous la mesure risque-neutre, le détenteur de l'option réalisera un profit $uS_0 - K$ avec probabilité q_u et 0 avec probabilité q_d . Son prix devra donc être l'espérance sous \mathbb{Q} du profit réalisé et escompté par le taux d'intérêt, c'est-à-dire que de manière générale, nous avons que

$$\Pi_0(H) = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - K)^+]. \quad (1.5.2)$$

Si nous généralisons ce modèle à un nombre n de périodes de temps de longueur h , nous obtenons un arbre binomial avec une dynamique du type

$$\begin{array}{l} \nearrow S_{k+1} = uS_k \quad \text{avec probabilité } p \\ S_k \\ \searrow S_{k+1} = dS_k \quad \text{avec probabilité } 1 - p = q \end{array}$$

pour $0 \leq k \leq n - 1$. C'est-à-dire que nous avons une mesure de probabilité sur l'arbre donnée par

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = uS_k | S_k) = p = 1 - \mathbb{P}(S_{k+1} = dS_k | S_k) \quad (1.5.3)$$

L'idée générale pour ce type d'arbre est de traiter chaque embranchement comme un arbre à une étape. Nous aurons ainsi, pour tous les embranchements une nouvelle mesure de probabilité identique qui sera donnée par (1.5.1). Ceci permet de définir une mesure de probabilité \mathbb{Q} telle que, par exemple dans l'arbre à trois périodes, nous avons que $\mathbb{Q}(S_3 = u^3 S_0) = q_u^3$. Le prix d'une option européenne peut alors être donné par l'évaluation martingale. Voici une proposition qui résume l'évaluation sous un arbre binomial à n périodes et qui fournit une formule explicite pour le prix d'une option d'achat européenne.

Proposition 1.5.3 (Bjork [2004]). *Si un arbre binomial à n périodes de longueur h suit la dynamique (1.5.3) et que le taux d'intérêt du marché est r avec $d \leq$*

$e^{rh} \leq u$, alors la mesure martingale équivalente, ou risque-neutre, est donnée par la dynamique

$$\mathbb{Q}(S_{k+1} = uS_k | S_k) = q_u = 1 - q_d = 1 - \mathbb{Q}(S_{k+1} = dS_k | S_k) \quad (1.5.4)$$

où

$$q_u = \frac{e^{rh} - d}{u - d} \quad \text{et} \quad q_d = \frac{u - e^{rh}}{u - d}.$$

De plus, si H est une option d'achat européenne venant à échéance à la période n et de prix d'exercice K , donc $H = (S_n - K)^+$, son prix risque-neutre est donné par

$$\Pi_0(H) = e^{-rnh} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] = S_0 \Psi(a, n, q_u) - K e^{-rhn} \Psi(a, n, q'_u), \quad (1.5.5)$$

où

$$q'_u = u e^{-rh} q_u, \quad a = 1 + \left\lfloor \frac{\ln \frac{K}{S_0 d^n}}{\ln \frac{u}{d}} \right\rfloor, \quad \Psi(a, n, p) = \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \geq 0 \right)$$

avec $\{\xi_k\}_{1 \leq k \leq n}$ des variables de Bernouilli indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_k = 0)$. Nous noterons ce prix $C_{n,h}^r$.

Nous pouvons voir que, comme il est fait mention dans la **section 1.3** sur l'évaluation martingale, l'évaluation sous la nouvelle mesure de probabilité \mathbb{Q} correspond en fait à évaluer l'option sur un nouveau processus, l'arbre binomial donné par la dynamique décrite en (1.5.4). Donc si nous notons S_n le prix au temps n sous l'arbre avec la mesure \mathbb{P} et \mathbf{S}_n celui sous la mesure \mathbb{Q} , nous avons que

$$\Pi_0(H) = e^{-rhn} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_n - K)^+] = e^{-rhn} \mathbb{E}[(\mathbf{S}_n - K)^+].$$

Pour terminer, il peut être utile de mentionner que différents modèles d'arbres binomiaux ont été suggérés au cours des années par différentes spécifications de u , d et de la mesure de probabilité \mathbb{P} . Cependant, comme la seule mesure risque-neutre \mathbb{Q} est importante, les mesures définies par ces modèles ont été choisies pour être directement des mesures martingales équivalentes pour un taux d'intérêt r , ce qui revient à dire que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$. De plus, si le temps d'échéance de l'option à évaluer est T , la période h est choisie telle que $h = \frac{T}{n}$. Sous ces trois modèles, le

paramètre σ est une constante réelle positive représentant la volatilité du modèle.

Nous avons ainsi le premier modèle de Cox et al. [1979] où

$$u = e^{\sigma\sqrt{h}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{h}}, \quad p = \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{h}.$$

Un second modèle est celui de Jarrow et Rudd [1983], où

$$u = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)h + \sigma\sqrt{h}}, \quad d = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)h - \sigma\sqrt{h}}, \quad p = \frac{1}{2}.$$

Un dernier modèle, celui qui sera utilisé dans ce mémoire, a été construit par Trigeorgis [1991] et sera présenté dans le prochain chapitre.

Chapitre 2

APPROXIMATIONS ET MOUVEMENT BROWNIEN GÉOMÉTRIQUE

À l'intérieur de ce chapitre une approche générale des arbres binomiaux sera présentée, c'est-à-dire que nous construirons une série de processus $S^n = \{S_t^n\}_{0 \leq t}$ de la forme

$$S^n = S_0 e^{X_t^n} = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}} \quad \text{pour } t \geq 0$$

qui généralise l'approche par arbres binomiaux de Cox et al. [1979]. Tout d'abord, il sera montré comment, pour un instant fixé $t \geq 0$, les variables aléatoires $\{X_t^n\}_{n \geq 1}$ pour un temps fixe t convergent en distribution vers une loi normale. Par la suite, la convergence faible des processus S^n vers un mouvement brownien géométrique sera établie ainsi que la convergence des prix d'options de type européennes. Tout au long de ce chapitre, un exemple sur un modèle particulier sera développé et permettra une dérivation de la formule de Black-Scholes. Ce chapitre constituera donc une présentation succincte et complète d'une théorie désormais classique à l'aide de preuves basées sur le concept de tableaux triangulaires et propres à ce mémoire.

2.1. MODÈLE GÉNÉRAL ET CONVERGENCE EN DISTRIBUTION

Nous présenterons tout d'abord à l'intérieur de cette section le modèle binomial introduit pour la première fois par Cox, Ross, et Rubinstein [1979] en suivant l'approche plus générale de Rachev et Rushendorf [1994]. Par la suite,

nous montrerons, avec l'aide des tableaux triangulaires, que les variables aléatoires $\{X_t^n\}_{n \geq 1}$ définies pour un temps fixe t convergent en distribution vers une variable aléatoire de loi normale dont nous déterminerons les paramètres.

Comme l'idée générale est de construire des processus à temps continu selon la dynamique d'un arbre binomial, ils devront suivre le schéma suivant. Ce schéma ne constituant qu'une approche informelle, la définition des processus se fera un peu plus loin lors de cette section. Posons, pour $n \geq 1$, $h_n := \frac{1}{n}$ la longueur par laquelle sera partitionnée la droite réelle positive. Nous pouvons ainsi obtenir un processus à temps discret $\{S_{n,k}\}_{k \geq 0}$ représentant le cours du sous-jacent à modéliser qui sera un arbre binomial dont l'évolution se fera selon le schéma suivant

$$S_{n,k+1} = \begin{cases} u_n S_{n,k} & \text{avec probabilité } p_n, \\ d_n S_{n,k} & \text{avec probabilité } q_n = 1 - p_n. \end{cases}$$

Pour $k \geq 0$, $u_n > 1 > d_n$ des constantes pour n fixe et $S_0 > 0$ une valeur initiale. À partir de ces processus à temps discret, nous pouvons construire des processus à temps continu $S^n = \{S_t^n\}_{t \geq 0}$ tel que $S_t^n = S_{n,k}$ pour $t \in [kh_n, (k+1)h_n)$. Les trajectoires de ces processus à temps continu seront des fonctions étagées càd-làg où le prix reste constant sauf aux instants de saut associés au modèle discret. Donc nous aurons que $S^n(\omega) \in \mathbb{D}$.

Les définitions formelles de ces processus peuvent dès lors être faites pour obtenir ce type de schéma. Posons, en supposant que ces limites existent,

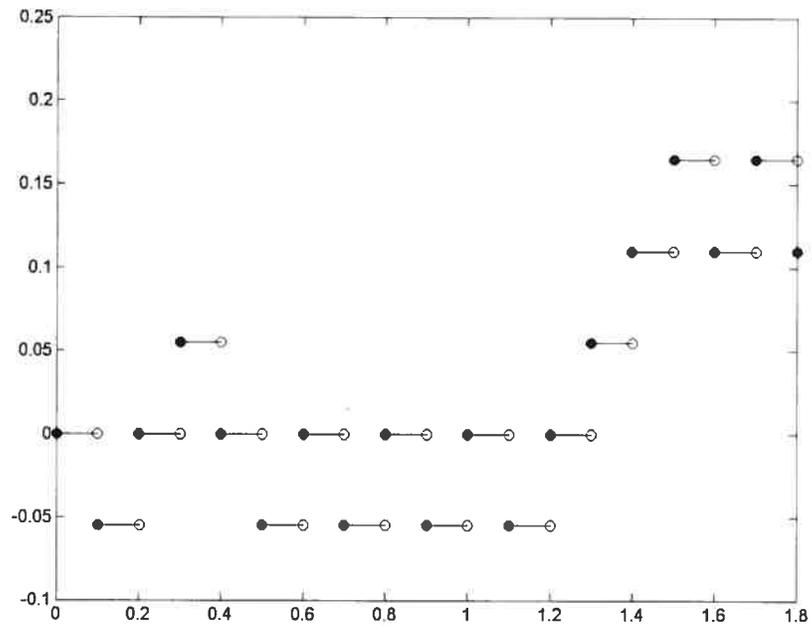
$$U_n = \ln u_n, \quad D_n = \ln d_n \quad (2.1.1)$$

$$\mathfrak{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n, \quad \mathfrak{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n \quad (2.1.2)$$

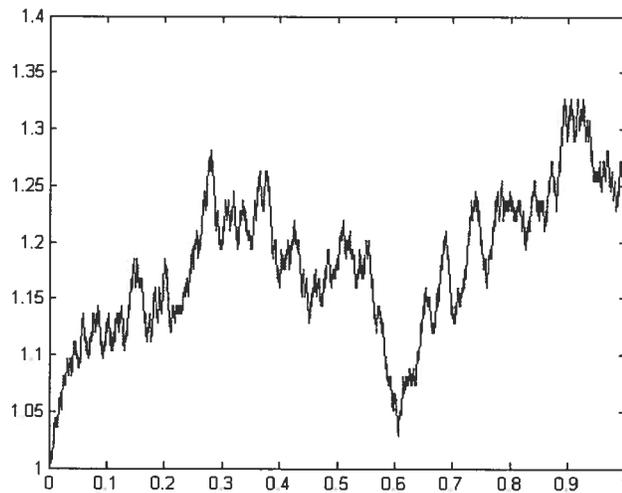
et pour $k \geq 1$ définissons des variables de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (iid) $\xi_{n,k}$ définies, pour $n \geq 1$, sur un même espace de probabilité $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n \rangle$ et telles que

$$P(\xi_{n,k} = 1) = p_n = 1 - P(\xi_{n,k} = 0) = 1 - q_n. \quad (2.1.3)$$

Nous pouvons maintenant définir les variables aléatoires et les processus primordiaux de ce chapitre, alors que la **figure 2.1** fournit un exemple de trajectoire

FIG. 2.1. Exemple d'une trajectoire de X^n 

Exemple d'une trajectoire d'un processus X^n où $n = 10$,
 $U_{10} = 0.055 = -D_{10}$ et $p_{10} = 0.532$.

FIG. 2.2. Exemple d'une trajectoire de S^n 

Exemple d'une trajectoire d'un processus S^n où $n = 1000$,
 $S_0 = 1$ $U_{1000} = 0.007 = -D_{1000}$ et $p_{10} = 0.502$.

des processus X^n et que la **figure 2.2** est un exemple d'un processus S^n pour une valeur de n beaucoup plus élevée.

Définition 2.1.1. Soit p_n , U_n et $\xi_{n,k}$ tels que définis en (2.1.3). Alors

- (1) les variables $X_{n,k}$ seront indépendantes et identiquement distribuées telles que $X_{n,k} := U_n \xi_{n,k} + (1 - \xi_{n,k}) D_n$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_{n,k} = U_n) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_{n,k} = D_n)$,
- (2) les processus $\{X^n\}_{n \geq 1}$ seront donnés par $X_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}$,
- (3) les processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ seront donnés par $S_t^n = S_0 e^{X_t^n}$

Nous nous intéresserons maintenant à la distribution limite des variables aléatoires $\{X_t^n\}_{n \geq 1}$ et $\{S_t^n\}$ pour un temps fixe $t \geq 0$. Nous utiliserons la notion de tableau triangulaire développée à la **section 1.4**. En effet, en posant $K_n = \lfloor nt \rfloor$, la famille de variables aléatoires $T = \left\{ \{X_{n,k}\}_{0 \leq k \leq \lfloor nt \rfloor} \right\}_{n > 0}$ est un tableau triangulaire tel que $K_n < \infty$ pour tout n positif. Celui-ci est de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} X_{1,1}, & X_{1,2}, & \cdots & X_{1,\lfloor t \rfloor} & & & \\ X_{2,1}, & X_{2,2}, & X_{2,3}, & \cdots & X_{2,\lfloor 2t \rfloor} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \\ X_{n,1}, & X_{n,2}, & \cdots & X_{n,n}, & \cdots & X_{n,\lfloor nt \rfloor} & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \end{array}$$

Imposons une première condition sur nos variables aléatoires, par le biais des limites (2.1.1).

Condition 2.1.1. Les constantes U_n et D_n seront telles que les limites

$$\mathfrak{U} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$$

existent avec $\mathfrak{U} = \mathfrak{D} = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1.$$

Un tel tableau satisfait bien la condition de Lindeberg.

Proposition 2.1.1. Un tableau triangulaire T remplissant la **condition 2.1.1** satisfait la condition de Lindeberg donnée par la **définition 1.4.2**.

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$. Nous avons que

$$|X_{n,k}| \leq \max \{|U_n|, |D_n|\}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$, il existe n_ϵ tel que $|U_n| < \epsilon$ et $|D_n| < \epsilon$ pour $n > n_\epsilon$. Donc $|X_{n,k}| < \epsilon$ et $1_{\{|X_{n,k}| > \epsilon\}} = 0$ pour $n > n_\epsilon$ et alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E} \left[|X_{n,k}^2| 1_{\{|X_{n,k}| > \epsilon\}} \right] = 0.$$

□

Nous pouvons maintenant, grâce au théorème de Lindeberg-Feller, déterminer vers quelle loi convergent les variables aléatoires S_t^n .

Théorème 2.1.1. *Si le tableau triangulaire T est formé des familles $\{X_{n,k}\}_{1 \leq k \leq [nt]}$ pour $n > 0$ données par la **définition 2.1.1** et que $\mathbf{u} = \mathfrak{D} = 0$, alors les seules limites possibles pour les variables aléatoires $X_t^n = \sum_{k=1}^{[nt]} X_{n,k}$ sont les lois normales telles que*

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} X_{n,k} \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(\alpha_t, \sigma_t^2), \quad (2.1.4)$$

où $\mathcal{N}(\alpha_t, \sigma_t^2)$ est la distribution d'une normale d'espérance α_t et de variance σ_t^2 , si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [nt] (q_n D_n + p_n U_n) = \alpha_t \quad (2.1.5)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [nt] (q_n D_n^2 + p_n U_n^2) = \sigma_t^2. \quad (2.1.6)$$

Nous avons alors que

$$\ln \frac{S_t^n}{S_0} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} N(\alpha_t, \sigma_t^2).$$

Démonstration. Comme le tableau triangulaire T satisfait la condition de Lindeberg et que $K_n = [nt] < \infty$, nous pouvons utiliser le théorème de Lindeberg-Feller (**théorème 1.4.1**) auquel il ne suffit que de vérifier les conditions (2a) et

(2b). Nous avons pour la première que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E}[X_{n,k}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{E}[X_{n,1}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor nt \rfloor (q_n D_n + p_n U_n) = \alpha_t \end{aligned}$$

par hypothèse. De la même façon

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor nt \rfloor (q_n D_n^2 + p_n U_n^2) \\ &= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

également par hypothèse. D'où le résultat. \square

Ce théorème démontre comment obtenir des lois normales comme distribution limite de famille de variables aléatoires et permet également de déterminer les paramètres de cette loi. Il démontre également que plusieurs combinaisons des constantes u_n , d_n et p_n déterminant des familles différentes peuvent mener à la même distribution limite. C'est pourquoi plusieurs modèles dont ceux présentés à la **section 1.5**, c'est-à-dire ceux de Cox, Ross et Rubinstein [Cox et al., 1979] et de Jarrow et Rudd [1983] permettent d'obtenir des résultats équivalents. L'exemple présenté ici est un modèle développé par Trigeorgis [1991] qui possède les avantages d'avoir été développé dans l'optique de travailler avec le logarithme des retours et que les constantes p_n sont toujours des probabilités, ce qui n'est pas toujours le cas pour d'autres modèles. De plus, il converge avec plus de rapidité vers une loi normale.

Exemple 2.1.1. Modèle de Trigeorgis [1991]

Soit r qui sera plus loin le taux d'intérêt du marché et $\tilde{\sigma} \geq 0$ des constantes. Posons $v = r - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2$, $U_n = -D_n = \sqrt{\tilde{\sigma}^2 h_n + v^2 h_n^2}$, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v h_n}{U_n}$ où $h_n = \frac{1}{n}$. Nous avons bien que $\mathbf{u} = \mathfrak{D} = 0$ car

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n} + \frac{v^2}{n^2}} = 0. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'observer les limites (2.1.5) et (2.1.6) du **théorème 2.1.1** pour déterminer vers quelle distribution convergent les variables aléatoires

$$\{X_t^n\}_{n \geq 1} = \left\{ \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k} \right\}_{n \geq 1} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \lfloor nt \rfloor (q_n D_n + p_n U_n) &= \lfloor nt \rfloor (p_n U_n - q_n U_n) \\ &= \lfloor nt \rfloor \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v}{n U_n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v}{n U_n} \right) \\ &= \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} v. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} v = vt$. Pour la seconde limite nous avons que

$$\begin{aligned} \lfloor nt \rfloor (p_n U_n^2 + q_n D_n^2) &= \lfloor nt \rfloor (pn + qn) U_n^2 \\ &= \lfloor nt \rfloor \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{n} + \frac{v^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \tilde{\sigma}^2 + \frac{\lfloor nt \rfloor}{n^2} v^2. \end{aligned}$$

Donc $\sigma_t^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \tilde{\sigma}^2 + \frac{\lfloor nt \rfloor}{n^2} v^2 = \tilde{\sigma}^2 t$ et par le théorème précédent

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k} \right) \Longrightarrow \mathcal{N} \left[\left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t, \tilde{\sigma}^2 t \right]$$

pour un temps $t \geq 0$ fixe. De plus, nous avons que

$$S_t^n = S_0 e^{X_t^n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} S_0 e^{\left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} B_t} \quad \text{pour } t \geq 0 \text{ fixe.}$$

où B_t est la variable aléatoire d'un mouvement brownien standard évalué en t car

$$\mathcal{L} \left(\left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} B_t \right) = \mathcal{N} \left[\left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t, \tilde{\sigma}^2 t \right]$$

2.2. CONVERGENCE FAIBLE DANS \mathbb{D}

Dans cette courte section, nous continuerons l'analyse de cette construction en abordant la convergence faible. Les processus $\{X^n\}_{n \geq 1}$ et $\{S^n\}_{n \geq 1}$ sont évidemment à trajectoire càdlàg, puisque pour tout $\omega \in \Omega_n$, $S^n(\omega) \in \mathbb{D}$. Ceux-ci sont donc des fonctions aléatoires de $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n \rangle$ vers $\langle \mathbb{D}, \mathcal{B}(\mathbb{D}) \rangle$. La convergence faible

vers un mouvement brownien géométrique s'obtient par une simple adaptation du **théorème 1.4.2**.

Corollaire 2.2.1. *Soit $\{S^n\}_{n \geq 1}$ les processus définis en 2.1.1 à travers le tableau triangulaire T satisfaisant les hypothèses du **théorème 2.1.1** et supposons que pour tout t positif, les limites (2.1.5) et (2.1.6), notées α_t et σ_t^2 , existent et sont de la forme $\alpha_t = bt$ et $\sigma_t^2 = ct$ pour $b \in \mathbb{R}$ et $c \geq 0$ des constantes. Alors*

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X \quad \text{et} \quad S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S_0 e^X$$

où $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ est un processus tel que $X_t = bt + \sqrt{c}B_t$ avec $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le **théorème 1.4.2** dont il faut vérifier les conditions (1) et (2). La condition (2) est remplie car impliquée par l'existence pour tout $t \geq 0$ de la limite α_t sous la forme ct . Pour la condition (1), puisque

$$\sup_{s \leq t} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbb{E}[X_{n,k}] - bs \right| = \sup_{s \leq t} | \lfloor ns \rfloor (q_n D_n + p_n U_n) - bs |$$

et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor ns \rfloor (q_n D_n + p_n U_n) = bs$ pour tout $s \geq 0$, nous avons bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathbb{E}[X_{n,k}] - bs \right| = 0$ et le résultat. \square

Pour terminer cette section, nous continuerons l'**exemple 2.1.1** de la section précédente.

Exemple 2.2.1 (Convergence faible du modèle de Triorgeodis). *Si nous reprenons la construction de l'**exemple 2.1.1**, nous avons que, pour tout $t \geq 0$,*

$$\alpha_t = vt = \left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t, \quad \sigma_t^2 = \tilde{\sigma}^2 t.$$

Donc $b = r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$ et $c = \tilde{\sigma}^2$ et par le **corollaire 2.2.1**, $S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S$ où

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) t + \tilde{\sigma} B_t} \quad (2.2.1)$$

où B est un mouvement brownien standard. Donc S^n converge faiblement vers un mouvement brownien géométrique.

2.3. PRIX D'UNE OPTION EUROPÉENNE

Cette dernière section démontrera tout d'abord comment calculer le prix d'une option européenne à l'aide des processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ pour obtenir une suite de prix Π_0^n à l'aide de l'évaluation martingale. Par la suite, la convergence de ces prix sera montrée et finalement, par le biais de notre exemple, la formule de Black-Scholes sera obtenue comme résultat limite. Avant de débiter, il peut être pertinent de mentionner que l'une des références classiques sur la convergence des prix d'une option sous des modèles binomiaux est Schachermayer [1994].

Définissons tout d'abord le modèle de marché tel qu'à la **section 1.3**. Supposons, pour un certain $n \geq 1$, un actif avec risque suivant le modèle défini à la section précédente $S_t^n = S_0 e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}}$ sur l'espace filtré $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}_n, \mathbb{P}_n \rangle$ où \mathbb{F}_n est la filtration naturelle du processus S^n . Puisque l'évolution de ce processus se fait par sauts, il devra en être de même pour le placement sans risque qui sera donc de la forme $B^n = \{e^{r \lfloor nt \rfloor h_n}\}_{t \geq 0}$ où r est le taux d'intérêt du marché et $h_n = \frac{1}{n}$. Puisque la structure discrète de ce modèle est celle d'un arbre binomial, nous pouvons appliquer les résultats de la **section 1.5** à ce modèle. La mesure risque-neutre \mathbb{Q}_n sera donc donnée par la **proposition 1.5.3**, c'est-à-dire par de nouvelles probabilités

$$q_u^n = \frac{e^{r h_n} - e^{D_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}}, \quad q_d^n = \frac{e^{U_n} - e^{r h_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}}. \quad (2.3.1)$$

Celles-ci définissent un nouveau processus S^n sur l'espace $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}_n, \mathbb{Q}_n \rangle$ par de nouvelles variables aléatoires

$$\mathbb{Q}(\mathbf{X}_k^n = U_n) = q_u = 1 - \mathbb{P}(\mathbf{X}_k^n = D_n) \quad (2.3.2)$$

Nous traiterons tout d'abord le cas d'un produit dérivé $F(S_T^n)$ venant à échéance au temps T de style européen que l'on supposera continu et borné. Par l'évaluation martingale, son prix risque neutre $\Pi_0^n(F)$ est donné par

$$\Pi_0^n(F(S_T^n)) = e^{-r \lfloor nT \rfloor h_n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[F(S_T^n)] = e^{-r \lfloor nT \rfloor h_n} \mathbb{E}[F(S_T^n)] \quad (2.3.3)$$

Nous aurons que si les processus S^n convergent faiblement vers un processus S , les prix convergeront également.

Théorème 2.3.1. Soient $\{S^n\}_{n \geq 1}$ des processus donnés par la **définition 2.1.1**. Alors les mesures risque-neutres \mathbb{Q}_n sont données par (2.3.1). Ces mesures définissent de nouveaux processus $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$ et alors le prix risque-neutre donné par l'évaluation martingale d'une option européenne $F(S_T^n)$ est donné par (2.3.3).

De plus, si F est continu et borné et que

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} [nt] \left(\frac{e^{U_n} - e^{\tau h_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} D_n + \frac{e^{\tau h_n} - e^{D_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} U_n \right) = bt,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [nt] \left(\frac{e^{U_n} - e^{\tau h_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} D_n^2 + \frac{e^{\tau h_n} - e^{D_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} U_n^2 \right) = ct,$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (H(S_T^n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-r[nT]h_n} \mathbb{E}[H(\mathbf{S}_T^n)], \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}[H(\mathbf{S}_T)], \end{aligned}$$

où le processus $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_t\}_{t \geq 0}$ est donné par $\mathbf{S}_t = S_0 e^{bt + \sqrt{c}B_t}$.

Démonstration. Tout d'abord, vérifions la convergence faible des processus $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$. Comme, par hypothèse, et par la définition des q_u^n et q_d^n , nous avons que

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} [nt] (q_d^n D_n + q_u^n U_n) = bt,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [nt] (q_d^n D_n^2 + q_u^n U_n^2) = ct$$

et par le **corollaire 2.2.1**,

$$\mathbf{S}^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} \mathbf{S}$$

où $\mathbf{S}_t = S_0 e^{bt + \sqrt{c}B_t}$. Rappelons que la convergence faible de processus est en fait la convergence faible des distributions $\mu_{\mathbf{S}^n}$ et $\mu_{\mathbf{S}}$ comme mesure sur l'espace \mathbb{D} . Donc $\mathbf{S}^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} \mathbf{S}$ implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} f \mu_{\mathbf{S}^n} = \int_{\mathbb{D}} f \mu_{\mathbf{S}},$$

où f est une fonction continue et bornée de \mathbb{D} dans \mathbb{R} . Mais soit $\pi_{\{T\}}$ la projection du processus au temps T . Puisque F est continue et bornée $F \circ \pi_{\{T\}}$ l'est et nous

pouvons appliquer le résultat sur la convergence. Ceci donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (F(\mathbf{S}_T^n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{r[nT]h_n} \mathbb{E} [F \circ \pi_{\{T\}} (\mathbf{S}^n)] \quad (2.3.4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-r \frac{[nT]}{n}} \int_{\mathbb{D}} F \circ \pi_{\{T\}} \mu_{\mathbf{S}^n} \quad (2.3.5)$$

$$= e^{-rT} \int_{\mathbb{D}} F \circ \pi_{\{T\}} \mu_{\mathbf{S}} \quad (2.3.6)$$

$$= e^{-rT} \mathbb{E} [F(\mathbf{S}_T)]. \quad (2.3.7)$$

□

De ceci nous pouvons tirer un corollaire.

Corollaire 2.3.1 (Convergence d'options de ventes et d'achats européennes). *Soit S^n , \mathbf{S}^n et \mathbf{S} les processus du théorème précédent. Soit V une option de vente européenne et H une option d'achat européenne toutes les deux de prix d'exercice K et venant à échéance au temps T . Alors nous aurons la convergence des prix de ces produits dérivés, c'est-à-dire que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (V(S_T^n)) = \Pi_0^n (V(\mathbf{S}_T)) \quad (2.3.8)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (H(S_T^n)) = \Pi_0^n (H(\mathbf{S}_T)). \quad (2.3.9)$$

Démonstration. Remarquons que la fonction $V = \max \{K - x, 0\}$ est continue et bornée par K pour $x \geq 0$. Comme S_T^n est toujours positif, la convergence est obtenue par le **théorème 2.3.1**. Pour la convergence des prix de l'option d'achat, nous avons par la parité vente-achat (1.3.1) que, pour tout n ,

$$\Pi_0^n (H(S_T^n)) = \Pi_0^n (V(S_T^n)) + S_0^n - K e^{-rT}. \quad (2.3.10)$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (H(S_T^n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (V(S_T^n)) + S_0 - K e^{-rT} \\ &= \Pi_0 (V(\mathbf{S}_T)) + S_0 - K e^{-rT} \\ &= \Pi_0 (H(\mathbf{S}_T)), \end{aligned}$$

également par le **théorème 1.3.1**. □

Nous concluons finalement l'exemple développé tout au long de ce chapitre en mettant en évidence certaines de ces caractéristiques.

Exemple 2.3.1 (Modèle de Trigeorgis [1991] et mesure risque-neutre). *Supposons un marché avec un taux d'intérêt r et des processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ construits selon le modèle de Trigeorgis [1991], c'est-à-dire que si $v = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ et $h_n = \frac{1}{n}$,*

$$U_n = -D_n = \sqrt{\sigma^2 h_n + v^2 h_n^2}$$

et la mesure de probabilité est donnée par

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v h_n}{U_n}, \quad q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{v h_n}{U_n}.$$

Puisque

$$\frac{e^{r h_n} - e^{D_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} \cong \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v h_n}{U_n} \quad \text{et que} \quad \frac{e^{U_n} - e^{r h_n}}{e^{U_n} - e^{D_n}} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{v h_n}{U_n}$$

pour h_n assez petit grâce à la formule de Taylor, nous avons que p_n et q_n déterminent directement la mesure risque-neutre \mathbb{Q}_n pour ce marché. De ce fait, nous avons que les processus $\{e^{-r[nt]h} S_t^n\}_{t \geq 0}$ sont des martingales, donc que

$$\mathbb{E} [e^{-r[nt]h} S_t^n | e^{-r[ns]h} S_s^n] = e^{-r[ns]h} S_s^n. \quad (2.3.11)$$

De plus, si H est une option d'achat européenne de prix d'exercice K venant à échéance au temps T , par la **proposition 1.5.3** de la **section 1.5** sur les arbres binomiaux nous avons que

$$\Pi_0^n (H(S_T^n)) = C_{[nT], h_n}^r, \quad (2.3.12)$$

où $C_{[nt], h_n}^r$ est donné par l'équation (1.5.5) de la **proposition 1.5.3**.

Finalement, nous avons que $S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S$ où

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

et $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard par l'**exemple 2.2.1**. De plus, par le **corollaire 2.3.1**, les prix des options de vente et d'achat européennes

convergent et en particulier nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n (H(S_T^n)) &= e^{-rT} \mathbb{E} [H(S_T)], \\ &= C_T, \end{aligned}$$

C_T étant la valeur donnée par la formule de Black-Scholes (voir **théorème 1.3.3**).

Nous avons donc dans ce chapitre développé une approche générale des arbres binomiaux à l'aide de tableaux triangulaires et de processus à temps continus. De plus il a été montré que des processus du type $X_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}$ convergent faiblement, ce qui a démontré que les processus $S^n = S_0 e^{X^n}$ convergent également vers des mouvements browniens géométriques. Finalement, la convergence des prix d'une option d'achat européenne calculés sous ces modèles vers la formule de Black-Scholes a été obtenue.

Chapitre 3

ARBRES BINOMIAUX À TEMPS ALÉATOIRE

Pour obtenir une gamme plus large de limites à partir du modèle binomial, deux approches peuvent être considérées pour obtenir des processus de Lévy. La première, développée entre autre par Këllezi et Webber [2004], consiste à utiliser des arbres multinomiaux. Nous généraliserons plutôt en admettant que les temps d'attente entre deux sauts ne seront plus déterministes, mais aléatoires. De nouveaux processus de la forme

$$S_t^n = S_0 e^{L_t^n} = S_0 e^{\sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}} \quad (3.0.13)$$

où $\{N^n\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Poisson composés seront introduits. Cette extension du modèle du chapitre précédent présente ainsi comme principale particularité que le nombre de sauts effectués sur un certain intervalle n'est plus déterministe, mais fixé par un processus $N^n = \{N_t^n\}_{t \geq 0}$.

Il sera montré, dans l'espace \mathbb{D} , qu'il est possible d'obtenir comme limites faibles de ces processus $L^n = \{L_t^n\}_{t \geq 0}$ des subordinations et plus particulièrement des processus hyperboliques généralisés. Ceci sera fait en démontrant tout d'abord la convergence en distribution des variables aléatoires $\{L_t^n\}_{n \geq 1}$ et par l'obtention des paramètres du processus par une analyse de la convergence des variables $\{L_1^n\}_{n \geq 1}$ si certaines conditions sont imposées aux processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$. Ensuite, la construction de ceux-ci comme processus de Poisson composés convergeant faiblement vers un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$ sera exposée. Le fait que les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Lévy sera démontré et ceci permettra d'obtenir la convergence faible vers des processus hyperboliques généralisés.

Finalement, deux remarques seront faites. Tout d'abord, que ce modèle possède une interprétation économique intuitive intéressante. Par la suite, il sera montré en quoi ce modèle, construit d'une manière propre à ce mémoire, diffère des modèles proposés par Rachev et Rushendorf [1994] et Weron [2002]. Cette explication se fera de manière continue tout au long de ce chapitre mais une récapitulation sera faite lorsque les processus présents à l'intérieur de ce travail seront complètement exposés.

3.1. CONVERGENCE EN DISTRIBUTION DES VARIABLES L_t^n

À l'intérieur de cette section, nous définirons les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ et déterminerons les conditions à imposer aux processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ pour obtenir les limites voulues. Tout d'abord, donnons une définition des processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ et $\{L^n\}_{n \geq 1}$.

Définition 3.1.1. Soient les variables aléatoires $\left\{ \{X_{n,k}\}_{k \geq 1} \right\}_{n \geq 1}$ et les processus $\{X^n\}_{n \geq 1}$ avec $X^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}$ donné par la **définition 2.1.1** satisfaisant les hypothèses du **corollaire 2.2.1**, c'est-à-dire que

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X \quad \text{où} \quad X_t = bt + \sqrt{c}B_t$$

De plus, soient les processus de Poisson composés $\{N^n\}_{n \geq 1}$ qui seront explicités par la **définition 3.2.2** de la **section 3.2**. Alors nous avons que, pour tout n positif,

(1) les processus $L^n = \{L_t^n\}_{t \geq 0}$ sont tels que

$$L_t^n = X_{\frac{N_t^n}{n}}^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (3.1.1)$$

(2) les processus $S^n = \{S_t^n\}_{t \geq 0}$ sont tels que $S_t^n = S_0 e^{L_t^n}$.

Pour que ces définitions soient valides, certaines conditions doivent être imposées aux processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$. En effet, pour que la somme $\sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}$ soit bien définie, il faut que les processus N^n soient à valeur entière, positive, donc non-décroissants. En effet, les processus N^n représentant le nombre de sauts, il est clair que celui-ci doit être entier, positif et qu'il ne peut décroître.

Condition 3.1.1. Pour que la **définition 3.1.1** soit valide, les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ devront être tels que

(1) $N_t^n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$,

(2) $N_s^n \leq N_t^n$ pour $s \leq t$.

Il est légitime de s'intéresser tout d'abord à la convergence en distribution des variables aléatoires $\{L_t^n\}_{n \geq 1}$ pour un certain $t \geq 0$. Voici maintenant une proposition pour montrer sous quelles conditions la convergence en distribution survient.

Proposition 3.1.1. *Soient les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ de la définition 3.1.1 et des processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ satisfaisant la condition 3.1.1. S'il existe un subordonateur $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ tel que, pour tout $t \geq 0$,*

$$\frac{N_t^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Y_t. \quad (3.1.2)$$

Alors pour tout $t \geq 0$

$$L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} L_t \quad (3.1.3)$$

où $L_t \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} X_{Y_t} = bY_t + \sqrt{c}B_{Y_t}$.

Démonstration. Puisque $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X$, nous avons par le théorème 1.2.8 que $X_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} X_1$, donc que

$$X_1^n = \sum_{k=1}^{\lfloor n \rfloor} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} X_1, \quad (3.1.4)$$

avec $\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{N}(b, c)$. Les hypothèses du théorème de transfert (théorème 1.4.3) sont satisfaites pour tout t , et il existe L_t tel que

$$\sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} L_t \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

où la fonction caractéristique de L_t est donné par

$$\phi_{L_t}(u) = \int_0^\infty (\phi_{X_1}(u))^z \mu_{Y_t}(dz)$$

avec $\phi_{X_1}(u)$ la fonction caractéristique de X_1 et μ_{Y_t} la loi de Y_t . Comme $\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{N}(b, c)$, nous avons $(\phi_{X_1}(u))^z = e^{ibz - u^2 \frac{z}{2}} = \phi_{X_z}(u)$ car $\mathcal{L}(X_z) = \mathcal{N}(bz, cz)$. Alors

$$\begin{aligned}\phi_{L_t}(u) &= \int_0^\infty \phi_{X_z}(u) \mu_Y(dz) \\ &= \mathbb{E}_{\mu_{Y_t}} [\mathbb{E} [e^{iuX_z}]] \\ &= \mathbb{E} [e^{iuX_{Y_t}}] = \phi_{X_{Y_t}}(u) \quad \text{pour tout } t \geq 0.\end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

La distribution de L_1 peut maintenant être dérivée pour le cas où Y est un processus inverse gaussien généralisé, ce qui permettra de montrer qu'il s'agit d'une loi hyperbolique généralisée et d'en déterminer les paramètres.

Corollaire 3.1.1. *Soit les hypothèses de la proposition précédente avec $\frac{N_1^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})}$ $gig(\lambda, \alpha, \beta)$. Alors*

$$\mathcal{L}(L_1) = gh \left(\lambda, \sqrt{\frac{\beta^2}{c} + \frac{b^2}{c^2}}, \frac{b}{c}, \sqrt{c}\alpha, 0 \right) \quad (3.1.5)$$

DÉMONSTRATION. Par le théorème de transfert,

$$\phi_{L_1}(u) = \int_{\mathbb{R}} (\phi_X(u))^z \mu_{Y_1}(dz).$$

Puisque $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(b, c)$, nous avons que $(\phi_X(u))^z = e^{i\alpha uz - \frac{\sigma^2}{2} u^2 z}$ et

$$\begin{aligned}\phi_{L_1}(u) &= \int_0^\infty e^{ibuz - \frac{c}{2} u^2 z} \mu_{gig(\lambda, \alpha, \beta)}(dz) \\ &= \int_0^\infty e^{ibuz - \frac{c}{2} u^2 z} f_{gig(\lambda, \alpha, \beta)}(z) dz \\ &= \int_0^\infty e^{i \frac{by}{c} u - \frac{y}{2} u^2} \frac{1}{c} f_{gig(\lambda, \alpha, \beta)} \left(\frac{y}{c} \right) dy\end{aligned}$$

par le changement de variable $y = cz$. Mais comme $f_{cX}(y) = \frac{1}{c} f_X \left(\frac{y}{c} \right)$ pour $c > 0$ et que par la **proposition 1.2.6** $c * gig(\lambda, \alpha, \beta) = gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})$, nous avons

$\frac{1}{c} f_{gig(\lambda, \alpha, \beta)}\left(\frac{x}{c}\right) = f_{gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})}(y)$. D'où

$$\begin{aligned}\phi_{L_1}(u) &= \int_0^{\infty} e^{i\frac{by}{c}u - \frac{y}{2}u^2} f_{gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_{N(\frac{by}{c}, y)}(x) dx f_{gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})}(y) dy\end{aligned}$$

car

$$e^{i(\frac{by}{c})u - \frac{1}{2}yu^2} = \phi_{N(\frac{by}{c}, y)}(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_{N(\frac{by}{c}, y)}(x) dx.$$

Donc

$$\phi_{L_1}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \int_0^{\infty} f_{N(\frac{by}{c}, y)}(x) f_{gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})}(y) dy dx \quad (3.1.6)$$

Puisque qu'une loi hyperbolique généralisée est une mixture de loi normale et de loi gaussienne inverse généralisée, nous avons par (1.2.5) que

$$f_{gh(\lambda, \sqrt{\frac{\beta^2}{c} + \frac{b^2}{c^2}}, \frac{b}{c}, \sqrt{c}\alpha, 0)}(x) = \int_0^{\infty} f_{N(\frac{by}{c}, y)}(x) f_{gig(\lambda, \sqrt{c}\alpha, \frac{\beta}{\sqrt{c}})}(y) dy.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\phi_{L_1}(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_{gh(\lambda, \sqrt{\frac{\beta^2}{c} + \frac{b^2}{c^2}}, \frac{b}{c}, \sqrt{c}\alpha, 0)}(x) dx \\ &= \mathbb{E}[e^{iuZ}] = \phi_Z(u)\end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(Z) = gh(\lambda, \sqrt{\frac{\beta^2}{c} + \frac{b^2}{c^2}}, \frac{b}{c}, \sqrt{c}\alpha, 0)$ □

Comme nous voulons approximer un processus $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$, nous utiliserons plutôt la notation suivante, équivalente à ce corollaire.

Remarque 3.1.1. Dans le *corollaire 3.1.1* si, pour un paramètre $\sigma > 0$, nous utilisons plutôt

$$gig(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\beta\sigma^2, \sigma^2) = \mathcal{N}(b, \sigma^2),$$

nous obtenons

$$\mathcal{L}(L_1) = gh(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0). \quad (3.1.7)$$

Nous pouvons aussi remarquer que nous pouvons construire plusieurs suites différentes pour approximer une certaine loi. Il suffit d'ajuster le troisième paramètre de la loi inverse gaussienne généralisée en fonction du paramètre σ représentant la variance de la loi normale vers laquelle convergent les lois $\mathcal{L}(\sum_{k=1}^n X_{n,k})$. Évidemment, celui-ci pourrait être négligé en le fixant à une valeur arbitraire telle que 1 mais nous le garderons cependant puisqu'il revêtira une certaine importance plus loin et apporte de la flexibilité au modèle. En effet, celui-ci permet de choisir plus librement les variables aléatoires $X_{n,k}$. L'importance du paramètre σ sera discutée tout au long de ce mémoire.

Puisque la convergence en loi des variables aléatoires $\{L_t^n\}_{t \geq 0}$ a été montrée sous les **conditions 3.1.1** imposées aux processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$, il convient maintenant de construire des processus adéquats, ce qui sera fait au cours de la prochaine section.

3.2. CONSTRUCTION DES PROCESSUS N^n

Le but de cette section est de définir adéquatement les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ comme des processus de Poisson composés satisfaisant la **conditions 3.1.1** et l'hypothèse de convergence de la **proposition 3.1.1**. Un fait intéressant à remarquer est que, jusqu'à maintenant, la convergence en distribution des variables aléatoires $\{L_t^n\}_{n \geq 1}$ ne repose que sur un nombre minime de conditions sur les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$. Plusieurs constructions différentes pourraient être envisagées, mais rappelons qu'il faut que les processus N^n soient à valeurs entières et positives et tels que $\frac{N_t^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Y_1$ où $\mathcal{L}(Y_1) = \text{gig}(\lambda, \alpha, \beta)$. De plus, les processus N^n doivent être non-décroissants.

Ce mémoire propose d'utiliser des processus de Poisson composés, inspirés par Morales [2007], mais uniques à ce mémoire. Ils diffèrent de ceux utilisés par Rachev et Rushendorf [1994] et Weron [2002] qui, plutôt que de construire véritablement des processus N^n , utilisent des variables aléatoires $\{Y^n\}_{n \geq 1}$ telles que $\{\frac{Y^n}{n}\}_{n \geq 1}$ convergent en distribution vers une variable Y de loi $\text{gig}(\lambda, \alpha, \beta)$, c'est-à-dire que $\frac{Y^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Y$. Par la suite, ils construisent des processus de la forme $\left\{\frac{\lfloor tY^n \rfloor}{n}\right\}_{t \geq 0}$ qui ne convergent pas faiblement vers un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$. La construction

proposée dans ce mémoire convergera faiblement et nous aurons donc que

$$\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} Y$$

où Y est un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$. Elle repose sur la représentation de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy à variation finie. En effet, si $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ est un subordonateur de triplet de Lévy $[\gamma, 0, \nu_Y(dx)]$, celui-ci étant un processus de variation finie, il admet une décomposition de la forme

$$Y_t = bt + \sum_{s \in [0, t]}^{\Delta Y_s \neq 0} \Delta Y_s \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (3.2.1)$$

où $b = \gamma - \int_{|x| \leq 1} x \nu_Y(dx)$. Donc si Y est un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$ de triplet

$$\left[- \int_0^1 x \nu_n(dx), 0, \nu_{GIG}(dx) \right], \quad (3.2.2)$$

nous avons que

$$GIG_t(\lambda, \alpha, \beta) = \sum_{s \in [0, t]}^{\Delta GIG_s(\lambda, \alpha, \beta) \neq 0} \Delta GIG_s(\lambda, \alpha, \beta) \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Il est légitime alors d'utiliser, pour approximer Y , des processus de Poisson composés N^n de la forme

$$N_t^n = \sum_{k=1}^{M_t^n} J_k^n \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (3.2.4)$$

où M^n sera un processus de Poisson représentant la fréquence des sauts et les variables aléatoires J_k^n l'amplitude de ces sauts.

Remarquons que la mesure de Lévy d'un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$, puisque celui-ci possède une densité de Lévy $u_{GIG}(x)$ donnée par (1.2.6), est de la forme $\nu_{GIG}(dx) = u_{GIG}(x)dx$. Posons maintenant pour tout n positif

$$\lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \nu_{GIG}(ds) = \nu_{GIG}([1/n, \infty)) = \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} u_{GIG}(s) ds. \quad (3.2.5)$$

Proposition 3.2.1. *Pour tout n assez grand, $0 < \lambda_n < \infty$.*

Démonstration. Nous avons tout d'abord que $\nu_{GIG}([0, \infty)) = \infty$. Donc il est évident que pour n assez grand, $0 < \lambda_n$. Par la **proposition 1.2.2**, pour toute mesure de Lévy ν et tout ϵ positif, nous avons $\nu((-\infty, \epsilon] \cup [\epsilon, \infty)) < \infty$. Donc $\nu_{GIG}([1/n, \infty)) < \infty$. \square

Nous pouvons donc définir adéquatement et légitimement les processus $\{M^n\}_{n \geq 1}$.

Définition 3.2.1. *Définissons $M^n = \{M_t^n\}_{t \geq 0}$ comme un processus de Poisson de paramètre λ_n pour tout n positif.*

Les variables aléatoires J_k^n , qui doivent être indépendantes et identiquement distribuées et dont nous noterons la loi μ_{J^n} , représentent l'amplitude des sauts des processus de Poisson composés N^n . Pour s'assurer que ceux-ci soient des processus à valeurs entières, nous définirons la loi μ_{J^n} sur les entiers exclusivement. Posons ainsi pour tout n positif,

$$(1) \quad m_{n,i} = \nu_{GIG}\left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right)\right) = \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n} + \frac{1}{n}} \nu_{GIG}(dx) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq \infty,$$

$$(2) \quad p_{n,i} = \frac{m_{n,i}}{\lambda_n} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq \infty,$$

Définissons maintenant la mesure μ_{J^n} par

$$\mathbb{P}(J_k^n = k) = p_{n,i}, \quad (3.2.6)$$

c'est-à-dire que

$$\mu_{J^n}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{x=i}(x) p_{n,i} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.2.7)$$

Cette mesure est bien une mesure de probabilité.

Proposition 3.2.2. *Les mesures μ_{J^n} définies en (3.2.7) sont des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^+ .*

Démonstration. Tout d'abord, nous avons pour tout n et pour tout i que

$$0 \leq m_{n,i} \leq \lambda_n < \infty \quad \text{car} \quad \left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) \subseteq [1/n, \infty).$$

Donc $0 \leq p_{n,i} \leq 1$. Aussi,

$$\begin{aligned}
 \mu_{J^n}(\mathbb{R}^+) &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty \mathbb{I}_x(x=i) p_{n,i} dx, \\
 &= \sum_{i=1}^\infty p_{n,i} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^\infty m_{n,i} \\
 &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^\infty \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda_n} \nu_{GIG}([1/n, \infty)) = 1.
 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant définir les processus $\{N^n\}_{n \geq 1} = \{\{N_t^n\}_{t \geq 0}\}_{n \geq 1}$.

Définition 3.2.2. Soit $\{M^n\}_{n \geq 1}$ des processus de Poisson tels que donnés par la **définition 3.2.1** et $\{\{J_k^n\}_{k \geq 1}\}_{n \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tel que $\mathcal{L}(J_k^n) = \mu_{J^n}$ où μ_{J^n} est donnée par (3.2.7). Alors les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ sont définis comme des processus de Poisson composés $Pc(\lambda_n, \mu_{J^n})$, c'est-à-dire que

$$N_t^n = \sum_{k=1}^{M_t^n} J_k^n. \quad (3.2.8)$$

Ces processus N^n , étant des processus de Poisson composés, sont donc des processus de Lévy. De plus, puisque la distribution μ_{J^n} est sur les entiers positifs, ils sont non-décroissants, donc des subordonateurs, et à valeurs entières. La **condition 3.1.1** à imposer aux processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ est donc remplie avec une telle définition.

Il convient maintenant de s'attarder sur les processus $\{\frac{N^n}{n}\}_{n \geq 1}$ puisque ce sont ceux-ci qui doivent converger vers un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$. Nous pouvons remarquer que

$$\frac{N_t^n}{n} = \sum_{k=1}^{M_t^n} \frac{J_k^n}{n}, \quad (3.2.9)$$

ce qui permet d'obtenir certaines de leurs caractéristiques telles que leur mesure et leur triplet de Lévy ainsi que leur exposant de Laplace.

Proposition 3.2.3. Les processus $\{\frac{N^n}{n}\}_{n>0}$ sont des processus de Poisson composés $Pc(\lambda_n, \mu_{\frac{J^n}{n}})$ de mesure de Lévy

$$\nu_n(dx) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) \mathbb{I}_{x=\frac{i}{n}}(x) \right) dx \quad (3.2.10)$$

de triplet de Lévy $[\gamma_n, 0, \nu_n(dx)]$ où $\gamma_n = \int_0^1 x \nu_n(dx)$. De plus, les exposants de Laplace sont donnés par

$$\Psi_n(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{-u\frac{i}{n}} - 1 \right) \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) \quad (3.2.11)$$

Démonstration. Par (3.2.9), il est clair que les processus $\{\frac{N^n}{n}\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Poisson composés $Pc(\lambda_n, \mu_{\frac{J^n}{n}})$. Remarquons aussi que

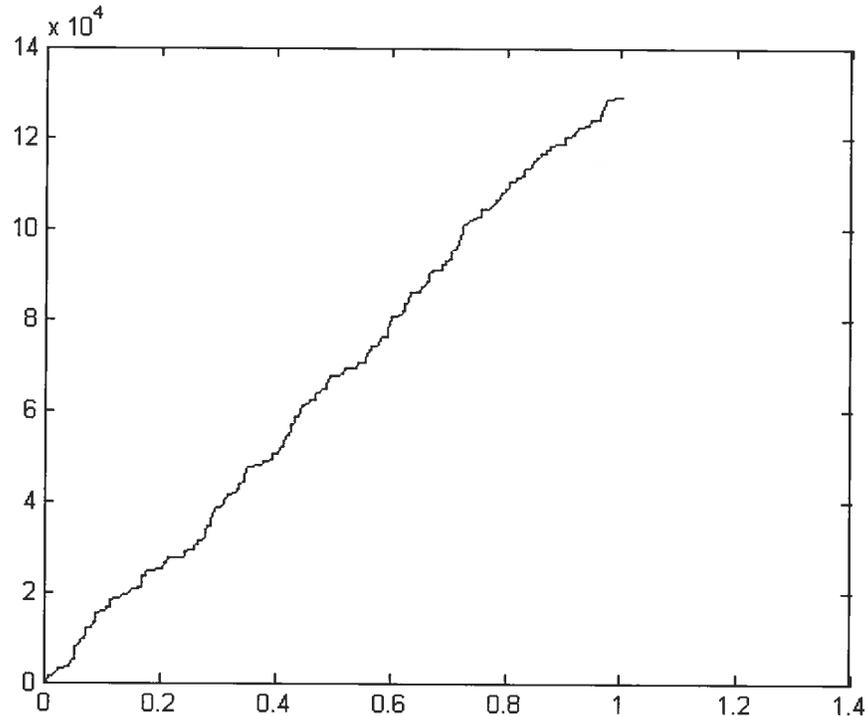
$$\mathbb{P} \left(\frac{J^n}{n} = \frac{i}{n} \right) = \mathbb{P}(J^n = i) = p_{n,i}.$$

Par la **proposition 1.2.4**, nous avons que

$$\begin{aligned} \nu_n(dx) &= \lambda_n \mu_{\frac{J^n}{n}}(dx) \\ &= \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{x=\frac{i}{n}}(x) \mathbb{P} \left(\frac{J^n}{n} = \frac{i}{n} \right) \right) dx \\ &= \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{x=\frac{i}{n}}(x) \frac{m_{n,i}}{\lambda_n} \right) dx \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) \mathbb{I}_{x=\frac{i}{n}}(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Par la **proposition 1.2.4**, nous avons bien que le triplet de Lévy est donné par $[\gamma_n, 0, \nu_n(dx)]$ et finalement

$$\begin{aligned} \Psi_{\frac{N^n}{n}}(u) &= \int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1) \nu_n(dx) \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) \mathbb{I}_{x=\frac{i}{n}}(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{-u\frac{i}{n}} - 1 \right) \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right). \end{aligned}$$

FIG. 3.1. Exemple d'une trajectoire de N^n 

Exemple d'une trajectoire du processus $N^n = \{N_t^n\}_{t \geq 0}$

□

Il convient maintenant de s'attarder à leur convergence qui s'obtiendra par le **théorème 1.2.8** et celui de Portemanteau (**théorème 1.2.9**).

Théorème 3.2.1. *Les processus $\{\frac{N^n}{n}\}_{n \geq 1}$ où les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ sont donnés par la **définition 3.2.2** à l'aide d'un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$ convergent faiblement vers celui-ci, c'est-à-dire que*

$$\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG(\lambda, \alpha, \beta).$$

Démonstration. Ceci sera prouvé à l'aide du **théorème 1.2.8** de Jacod et Shiryaev [2003], dont nous montrerons les conditions de convergence des triplets de Lévy. Il suffit alors de montrer que

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma,$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2 = \sigma^2,$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(f) = \nu(f) \quad \text{pour tout } f \in C_2(\mathbb{R})$$

où $C_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions bornées et continues de \mathbb{R} vers \mathbb{R} qui sont nulles autour de 0. Si ceci est montré, alors par le **théorème 1.2.8** la convergence faible est obtenue, donc

$$\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG(\lambda, \alpha, \beta).$$

Les triplets de Lévy des processus $\frac{N^n}{n}$ sont $[\gamma_n, 0, \nu_n(dx)]$ et donnés par la **proposition 3.2.3** alors que celui d'un processus $GIG(\lambda, \alpha, \beta)$ est $[\gamma, 0, \nu_{GIG}(dx)]$. Comme tous ces processus ne possèdent pas de partie gaussienne, la condition (2) est trivialement remplie. Pour la condition (3) portant sur les mesures de Lévy, le théorème de Portemanteau sera utilisé. Soit (a, b) un intervalle ouvert de \mathbb{R}^+ , le domaine de définition de ces mesures. Pour n assez grand, nous avons que $\frac{1}{n} \leq a$.

Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \nu_n((a, b)) &= \nu_n\left(\left\{\frac{k}{n} : \frac{k}{n} \in (a, b)\right\}\right), \\ &= \sum_{\frac{k}{n} \in (a, b)} \nu_n\left(\left\{\frac{k}{n}\right\}\right), \\ &= \sum_{\frac{k}{n} \in (a, b)} \nu_{GIG}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)\right), \\ &= \nu_{GIG}\left(\left[\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{1}{n}, \frac{\lfloor bn \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)\right), \\ &\geq \nu_{GIG}\left(\left(\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{1}{n}, \frac{\lfloor bn \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)\right), \\ &= \int_{\left(\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)^-}^{\left(\frac{\lfloor bn \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)^-} u_{GIG}(x) dx. \end{aligned}$$

Nous voyons maintenant que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n((a, b)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\left(\frac{\lfloor an \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)^-}^{\left(\frac{\lfloor bn \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)^-} u_{GIG}(x) dx, \\ &= \int_{a^-}^{b^-} u_{GIG}(x) dx = \nu_{GIG}((a, b)). \end{aligned}$$

Puisque les intervalles de la forme (a, b) déterminent complètement les boréliens de \mathbb{R}^+ , nous avons que pour tout $U \subseteq \mathbb{R}^+$ ouvert,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U) \geq \nu_{GIG}(U).$$

Par le théorème de Portemanteau, nous avons alors, pour toute fonction f continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ensemble dont $C_2(\mathbb{R})$ fait partie, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(f) = \nu(f) \quad \text{pour tout } f \in C_2(\mathbb{R}).$$

Donc que la condition (3) est obtenue. Pour la condition (1), elle s'obtient directement de ce qui précède et du fait que

$$\gamma_n = \int_0^1 x \nu_n(dx) \quad \text{et} \quad \gamma = \int_0^1 x \nu_{GIG}(dx).$$

Comme la fonction $f : x \mapsto x$ est continue et bornée sur le compact $[0, 1]$, nous avons par la convergence faible des mesures ν_n que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x \nu_n(dx) = \int_0^1 x \nu_{GIG}(dx).$$

Les trois conditions de convergence de triplet sont donc remplies et nous avons bien que

$$\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG(\lambda, \alpha, \beta).$$

□

Nous avons donc bien construit une suite de processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ qui sont des subordonateurs à valeurs entières tels que $\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG(\lambda, \alpha, \beta)$, ce qui permet d'obtenir les hypothèses de la **proposition 3.1.1** et du **corollaire 3.1.1**. Ceux-ci permettront, lors de la prochaine section, d'obtenir la convergence faible des processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$.

3.3. CONVERGENCE FAIBLE ET DESCRIPTION DES PROCESSUS

Il est maintenant possible de construire adéquatement les processus qui approximeront un processus hyperbolique généralisé. Nous utiliserons la notation de la **remarque 3.1.1**. Soit $L = \{L_t : t \geq 0\}$ le processus hyperbolique généralisé

$GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$ à approximer. De plus, soit $\sigma > 0$ et $Y = \{Y_t : t \geq 0\}$ un processus inverse gaussien généralisé $GIG(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ et $\{N^n\}_{n \geq 1}$ les processus donnés à la section 3.2 par les définitions 3.2.1 et 3.2.2 tels que $\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} Y$. Les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ seront donnés par la définition 3.1.1 où $b = \beta\sigma^2$ et $c = \sigma^2$, c'est-à-dire que

$$L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \quad \text{pour } t > 0 \quad (3.3.1)$$

avec $L_0^n = 0$ et

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X \quad \text{où } X_t = \beta\sigma^2 t + \sigma B_t. \quad (3.3.2)$$

Nous remarquons que le paramètre σ peut paraître arbitraire, mais qu'il permet une certaine flexibilité lors de la définition des processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ même s'il n'influence pas le processus limite L . Comme $L_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} L_1$ par le corollaire 3.1.1, nous aurons, si les processus L^n sont des processus de Lévy, que $L^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} L$, c'est-à-dire la convergence faible vers un processus hyperbolique généralisé par le théorème 1.2.8. Le fait que les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ soient des processus de Lévy repose simplement sur celui que les processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ sont eux-mêmes des processus de Lévy étant des processus de Poisson composés. De plus, un autre élément primordial est que les variables aléatoires $X_{n,k}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Proposition 3.3.1. *Les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Lévy, c'est-à-dire qu'ils sont à accroissements indépendants et stationnaires et continus en probabilité.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les quatre conditions de la définition 1.2.2 d'un processus de Lévy. L'une est trivialement remplie car $L_0^n(\omega) = 0$ pour $\omega \in \Omega_n$. Pour la stationnarité des accroissements, supposons $t, s \geq 0$ deux réels positifs. Il suffit de voir que $\mathcal{L}(N_{t+s}^n - N_t^n) = \mathcal{L}(N_s^n)$ puisque N^n est un processus de Lévy. Donc le nombre de sauts sur une certaine période de temps a toujours la même distribution. De plus, les variables aléatoires $X_{n,k}$ sont identiquement distribuées, donc celles prises en compte lors de la sommation n'est pas un fait

important. De ceci nous avons

$$\begin{aligned}
L_{t+s}^n - L_t^n &= \sum_{k=1}^{N_{t+s}^n} X_{n,k} - \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \\
&= \sum_{k=N_t^n+1}^{N_{t+s}^n} X_{n,k} \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=1}^{N_{t+s}^n - N_t^n} X_{n,k} \\
&\stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=1}^{N_s^n} X_{n,k} \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} L_s^n.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'indépendance des accroissements, nous utiliserons un argument similaire. Soit $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ et

$$L_{t_1}^n - L_{s_1}^n = \sum_{k=N_{s_1}^n+1}^{N_{t_1}^n} X_{n,k} \quad \text{et} \quad L_{t_2}^n - L_{s_2}^n = \sum_{k=N_{s_2}^n+1}^{N_{t_2}^n} X_{n,k}.$$

$N_{t_1}^n - N_{s_1}^n$ et $N_{t_2}^n - N_{s_2}^n$ sont indépendants. Donc le nombre de sauts effectués durant ces deux accroissements est indépendant. De plus, s'il se produit des sauts lors d'un accroissement, les variables $X_{n,k}$ utilisées seront différentes et indépendantes par hypothèse. D'où l'indépendance de deux accroissements alors qu'un argument similaire peut être utilisé pour un nombre quelconque d'accroissements. Il reste à vérifier la continuité en probabilité (voir la **définition 1.2.1**), c'est-à-dire que

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|L_t^n - L_s^n| > \epsilon) = 0.$$

Nous avons $L_t^n - L_s^n \stackrel{\mathcal{L}(\mathbb{R})}{=} \sum_{k=1}^{N_t^n - N_s^n} X_{n,k} = 0$ si $N_t^n = N_s^n$. Donc

$$\mathbb{P}(|L_t^n - L_s^n| \leq \epsilon) \geq \mathbb{P}(N_t^n = N_s^n). \quad (3.3.3)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|L_t^n - L_s^n| > \epsilon) &= \lim_{s \rightarrow t} 1 - \mathbb{P}(|L_t^n - L_s^n| \leq \epsilon) \\
&\leq \lim_{s \rightarrow t} 1 - \mathbb{P}(N_t^n = N_s^n) \\
&= \lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(N_t^n \neq N_s^n) = 0
\end{aligned}$$

puisque N^n est un processus de Lévy. Donc les processus L^n satisfont la définition de processus de Lévy. \square

Que les processus L^n soient des processus de Lévy sera un fait utile par lui-même, mais pour l'instant, il permet d'obtenir la convergence faible vers un processus hyperbolique généralisé. Nous énoncerons ici ce théorème de manière à rappeler comment sont obtenus tous les paramètres.

Théorème 3.3.1. *Soit un processus $L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$, $\sigma > 0$ une constante et les variables aléatoires $X_{n,k}$ telles qu'à la **définition 2.1.1** avec*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(q_n D_n + p_n U_n) = \sigma^2 \beta \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(q_n D_n^2 + p_n U_n^2) = \sigma^2. \quad (3.3.4)$$

Soient également les processus $\{N_t^n\}_{n \geq 1}$ définis à la **section 3.2** à partir d'un processus $Y = GIG(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma \sqrt{\alpha^2 - b^2})$ et de la **définition 3.2.2**. Alors si les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ et $\{S^n\}_{n \geq 1}$ sont donnés par la **définition 3.1.1**, c'est-à-dire que

$$L^n = \left\{ \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \right\}_{t \geq 0} \quad \text{et} \quad S^n = \{S_0 e^{L_t^n}\}_{t \geq 0}.$$

Alors

$$L^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} L \quad \text{et} \quad S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S$$

où

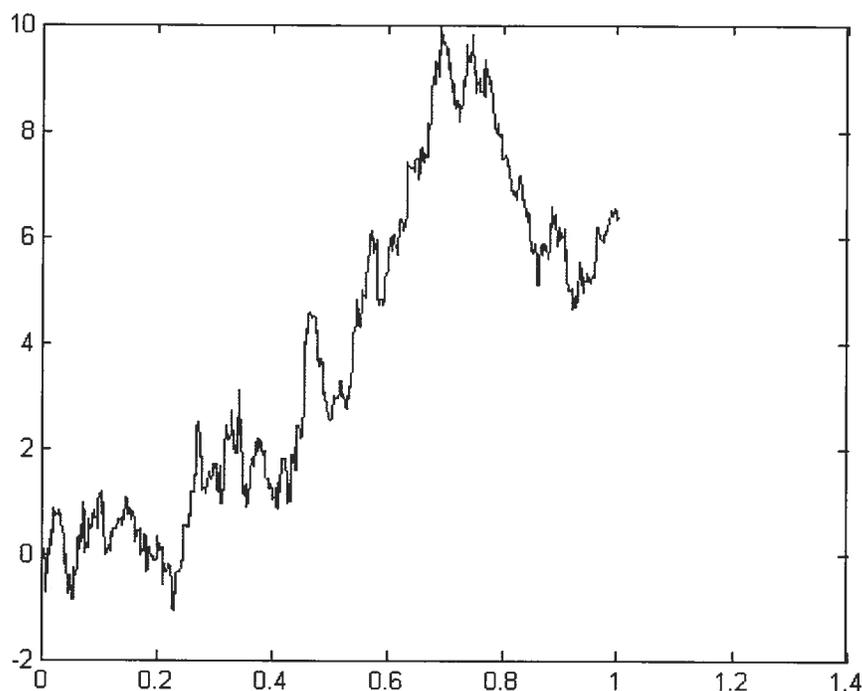
$$L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0) \quad \text{et} \quad S = S_0 e^L.$$

Donc $\{L^n\}_{n \geq 1}$ converge faiblement vers un processus hyperbolique généralisé. Celui-ci est également donné par

$$L_t = \beta \sigma^2 Y_t + \sigma B_{Y_t} \quad \text{pour } t \geq 0, \quad (3.3.5)$$

donc une subordination de $\{X_t\}_{t \geq 0} = \{\beta \sigma^2 t + \sigma B_t\}_{t \geq 0}$, où $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard, par un processus inverse gaussien généralisé.

DÉMONSTRATION. Par la **proposition 3.3.1**, les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Lévy. Par le **corollaire 3.1.1**, nous avons que $L_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} L_1$. Puisque, par le **théorème 1.2.8**, $L_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} L_1$ est équivalent à $L^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} L$ pour les processus de Lévy, le résultat voulu est obtenu. \square

FIG. 3.2. Exemple d'une trajectoire de L^n Une trajectoire d'un processus $L^n = \{L_t^n\}_{t \geq 0}$

Nous avons donc, à l'intérieur de ce chapitre, construit explicitement des processus convergeant vers des processus hyperboliques généralisés. De plus, ces processus sont eux-mêmes des processus de Lévy auxquels pourront être appliquées la théorie et les méthodes de la **section 1.3**. La **figure 3.2** représente un exemple d'une trajectoire de ce processus et met en évidence la discontinuité des trajectoires ainsi que la présence répétée de variations importantes sur un court laps de temps, donc du caractère leptokurtique des accroissements. De plus, nous pouvons remarquer que l'approche développée dans ce mémoire se démarque de celle de Rachev et Rushendorf [1994]. En effet, les approximations construites à l'intérieur de ce mémoire sont des processus de Lévy de la forme $L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}$ convergeant faiblement vers un processus hyperbolique généralisé L tel que $\mathcal{L}(L_t) = \mathcal{L}(bY_t + \sqrt{c}B_{Y_t})$. L'approche de Rachev et Rushendorf [1994] est plutôt de prendre des lois Y^n convergeant en distribution vers une loi Y inverse gaussienne généralisée, c'est-à-dire que $Y^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R})} Y$. Par la suite, de construire des

approximations de la forme $Z_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor tY^n \rfloor} X_{n,k}$ et d'étudier la limite faible Z de ces processus. Les approximations Z^n ne sont pas des processus de Lévy et Z ne l'est pas nécessairement, comme le démontre Eberlein et Van Hammerstein [2004]. De plus, Rachev et Rushendorf [1994] démontrent que $\mathcal{L}(Z_t) = \mathcal{L}(btY + \sqrt{c}B_{tY})$, ce qui ne correspond pas aux lois des variables aléatoires formant un processus hyperbolique généralisé, car $\mathcal{L}(btY + \sqrt{c}B_{tY})$ est une loi hyperbolique généralisée pour tout t positif, alors que si L est un processus hyperbolique généralisé, $\mathcal{L}(L_t)$ n'est pas une loi hyperbolique généralisée si t n'est pas entier.

Avant de clore ce chapitre, il est intéressant de remarquer que nous pouvons offrir une interprétation économique intuitive des processus L^n qui généralise celle des arbres binomiaux de l'approche de Cox, Ross et Rubinstein [Cox et al., 1979]. Dans les arbres binomiaux, chaque embranchement peut être vu comme l'instant d'un changement du prix et ces variations sont modélisées par les variables aléatoires $X_{n,k}$. Ces changements de prix sont interprétés comme le résultat de transactions sur le marché, donc comme conséquences de sa vente ou de son achat. Dans les arbres binomiaux, le nombre d'actions vendues, le volume de transaction, ne dépend que du temps. Dans le modèle présenté dans ce mémoire, un processus de Poisson composé détermine le comportement aléatoire du volume d'échange. De plus, celui-ci est déterminé par un paramètre λ_n pouvant représenter la fréquence moyenne d'échanges des acteurs financiers alors que les variables aléatoires J_k^n de ce processus peuvent exprimer la quantité d'actions échangées lorsqu'une personne effectue un achat ou une vente. Nous avons donc un prix qui ne varie plus directement en fonction du temps, mais plutôt en fonction de la quantité échangée modélisée par les processus N^n . Quantité qui dépend de la fréquence d'échange et de la quantité échangée par les acteurs financiers.

Maintenant que la construction des processus est terminée et la convergence faible obtenue, il convient d'analyser comment les prix d'options européennes peuvent être calculés lorsque les processus L^n sont utilisés et de déterminer si ceux-ci permettent d'approximer adéquatement les prix obtenus sous un modèle exponentiel-Lévy de la forme $S_t = S_0 e^{L_t}$ où $\{L_t\}_{t \geq 0}$ est un processus hyperbolique généralisé.

Chapitre 4

ÉVALUATION D'OPTIONS EUROPÉENNES

Ce chapitre a pour objectif l'évaluation de produits dérivés en utilisant les processus construits tout au long de ce mémoire. En effet, le but visé étant de faire l'évaluation d'options d'achat européennes sous des modèles exponentiel-Lévy où $S = S_0 e^L$ avec $L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$, nous utiliserons pour ceci les modèles $\{S^n\}_{n \geq 1} = \{S_0 e^{L^n}\}_{n \geq 1}$ construits au chapitre 3. Nous pouvons tout d'abord remarquer que le dernier paramètre $\mu = 0$ du processus hyperbolique généralisé pourrait être aisément modifié. En effet, si nous posons $\bar{L}_t = mt + L_t$, nous obtenons que le nouveau processus L est également un processus hyperbolique généralisé mais maintenant tel que $\bar{L} = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, m)$. Il suffirait donc pour avoir la convergence faible de définir une nouvelle suite de processus $\{\bar{L}^n\}_{n \geq 1}$ tels que $\bar{L}_t^n = mt + L_t^n$. Nous nous concentrerons cependant sur les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ et L .

Les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ étant des processus de Lévy, il sera possible d'utiliser l'évaluation martingale présentée à la **section 1.3** sur ces modèles. Ceci sera effectué tout d'abord par un bref résumé des processus et du modèle de marché utilisé. La deuxième section sera consacrée à la détermination d'une mesure martingale équivalente par le biais de la définition d'un nouveau processus. Finalement, la troisième section exposera de manière théorique la méthode d'évaluation et la dernière section sera consacrée aux calculs numériques permettant d'évaluer une option.

La méthode développée à l'intérieur de ce chapitre en est une originale à ce mémoire. Quoique Rachev et Rushendorf [1994] ou Weron [2002] utilisent à partir

de leur construction une méthode basée sur le prix moyen d'arbres binomiaux, ils ne déterminent pas de mesure martingale équivalente et utilisent directement le taux d'intérêt r du marché, ce qui n'est pas le cas ici. De plus, comme il a été mentionné plus haut, leurs processus ne convergent pas faiblement vers un processus hyperbolique généralisé, donc le prix et la formule obtenue ne peuvent être considérés comme le prix sous un modèle exponentiel-Lévy. Une discussion plus approfondie de ces différences sera effectuée tout au long de ce chapitre lorsque la méthode utilisée dans ce mémoire aura été présentée.

4.1. RÉSUMÉ DU MODÈLE ET DES PROCESSUS

Spécifions tout d'abord le modèle de marché qui sera utilisé. Nous aurons tout d'abord un taux d'intérêt r et le placement sans risque sera donc de la forme $\{e^{rt}\}_{t \geq 0}$. Ensuite, le processus dont les approximations seront le sujet sera noté

$$S = S_0 e^L \quad \text{où} \quad L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0). \quad (4.1.1)$$

L'option à évaluer sera donnée par $H = (S_T - K)^+$, c'est-à-dire qu'il s'agira d'une option européenne dont le prix d'exercice sera K et le temps d'échéance T . Pour ceci nous utiliserons les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ et $\{S^n\}_{n \geq 1}$ tels que donnés par la **définition 3.1.1** et convergeant faiblement respectivement vers S et L . C'est-à-dire que nous aurons

$$S_t^n = S_0 e^{L_t^n} \quad \text{avec} \quad L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k}, \quad (4.1.2)$$

où le processus N^n est défini tel qu'en 3.2.2 avec

- (1) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} X$ où $X_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k}$ et $X_t = \sigma^2 \beta t + \sigma B_t$,
- (2) $N^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG\left(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$

où $\sigma > 0$ est une constante qui jouera un rôle lors de la détermination de mesures martingales équivalentes. Par le **théorème 3.3.1**, nous avons bien la convergence faible vers un processus hyperbolique généralisé, donc

$$L^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} L \quad \text{et} \quad S^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S.$$

Ces processus seront également définis sur les espaces filtrés $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}^n, \mathbb{P}_n \rangle$ où $\mathbb{F}^n = \{\mathcal{F}_t^n\}_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle associée aux processus S^n . Pour faire de l'évaluation martingale, il suffit maintenant de déterminer une mesure martingale équivalente.

4.2. DÉTERMINATION D'UNE MESURE MARTINGALE ÉQUIVALENTE

À l'intérieur de cette section, des mesures martingales équivalentes \mathbb{Q}_n seront données explicitement par le biais de nouveaux processus $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$ sur l'espace $\langle \Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}^n, \mathbb{Q}_n \rangle$ dont les valeurs escomptées seront elles-mêmes des martingales, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E} \left[e^{-rt} \mathbf{S}_t^n \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] = e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \quad \text{pour } t > s \geq 0.$$

Ceux-ci, pour tout n positif, permettront d'évaluer l'option H . Il sera alors possible de déterminer une suite de prix

$$\Pi^n(H) = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} [(S_T^n - K)^+] = e^{-rT} \mathbb{E} [(\mathbf{S}^n - K)^+] \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Voici tout d'abord une proposition touchant de nouvelles variables aléatoires qui seront utilisées plus loin pour définir ces processus.

Proposition 4.2.1. *Soit r le taux d'intérêt du marché et $\{\bar{r}_n\}_{n \geq 1}$ tel que*

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{\bar{r}_n \frac{i}{n}} - 1 \right) \nu_{GIG} \left(\left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right) \right) \quad (4.2.1)$$

où ν_{GIG} est la mesure de Lévy d'un processus GIG $(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$. De plus, soit $v_n = \bar{r}_n - \frac{1}{2}\sigma^2$,

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_n}{n U_n} \quad \text{et } U_n = -D_n = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{v_n^2}{n^2}}.$$

Alors si les variables aléatoires $\mathbf{X}_{n,k}$ sont donnés par la **définition 2.1.1**,

$$\mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} \right] = e^{\bar{r}_n \frac{m}{n}}. \quad (4.2.2)$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que, par l'exemple 2.3.1, la définition de p_n et U_n est celle du modèle de Trigeorgis [1991] et implique que les processus escomptés $\left\{ e^{-\bar{r}_n \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbf{X}_{n,k}} \right\}_{t \geq 0}$ sont des martingales, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E} \left[e^{\bar{r}_n \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbf{X}_{n,k}} \right] = e^0 e^{\sum_{k=1}^0 \mathbf{X}_{n,k}} = 1.$$

Donc $\mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbf{X}_{n,k}} \right] = e^{\bar{r}_n \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}}$. D'où

$$\mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} \right] = \mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^{\lfloor n \frac{m}{n} \rfloor} \mathbf{X}_{n,k}} \right] = e^{\bar{r}_n \frac{\lfloor n \frac{m}{n} \rfloor}{n}} = e^{\bar{r}_n \frac{m}{n}}. \quad (4.2.3)$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème permettant de construire de nouveaux processus qui seront des martingales.

Théorème 4.2.1. *Soient S^n et L^n tels qu'en (4.1.2), c'est-à-dire construits à l'aide de la définition 3.1.1 pour approximer un processus*

$$S = S_0 e^L \quad \text{où} \quad L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0).$$

et soient également les constantes $\{\bar{r}_n\}_{n \geq 1}$ données par (4.2.1) et les variables aléatoires $\mathbf{X}_{n,k}$ de la proposition 4.2.1. Alors les nouveaux processus $\{\mathbf{L}^n\}_{n \geq 1}$ et $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$ définis par

$$\mathbf{L}_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} \mathbf{X}_{n,k}, \quad \mathbf{S}_t^n = S_0 e^{\mathbf{L}_t^n} \quad (4.2.4)$$

sont tels que

$$\mathbb{E} \left[e^{-rt} \mathbf{S}_t^n \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] = e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \quad \text{pour } t > s \geq 0.$$

Démonstration. Nous avons, pour tout processus de Lévy L^n , que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{-rt} \mathbf{S}_t^n \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] &= \mathbb{E} \left[e^{-rt} S_0 e^{\mathbf{L}_t^n} \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] \\
&= e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \left[e^{-rs} S_0 e^{\mathbf{L}_t^n - \mathbf{L}_s^n} e^{\mathbf{L}_s^n} \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] \\
&= e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \left[e^{-rs} \mathbf{S}_s^n e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] \\
&= e^{-r(t-s)} (e^{-rs} \mathbf{S}_s^n) \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] \\
&= e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \right] (e^{-rs} \mathbf{S}_s^n)
\end{aligned}$$

Donc il faut que $e^{-r(t-s)} \mathbb{E} \left[e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \right] = 1$, c'est-à-dire que $\mathbb{E} \left[e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \right] = e^{r(t-s)}$ pour que $\mathbb{E} \left[e^{-rt} \mathbf{S}_t^n \mid e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \right] = e^{-rs} \mathbf{S}_s^n$. Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[e^{\mathbf{L}_{t-s}^n} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^{N_{t-s}^n} \mathbf{X}_{n,k}} \mid N_{t-s}^n = m \right] \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} \mid N_{t-s}^n = m \right] \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} \right] \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} e^{\bar{r}_n \frac{m}{n}} \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m) \\
&= \mathbb{E} \left[e^{\bar{r}_n \frac{N_{t-s}^n}{n}} \right].
\end{aligned}$$

Ceci par la **proposition 4.2.1** et la définition de l'espérance. Mais cette dernière expression est la fonction génératrice des moments évaluée en \bar{r}_n de la variable aléatoire $\frac{N_{t-s}^n}{n}$ qui est donnée, par le **théorème 1.2.4**, par

$$\mathbb{E} \left[e^{u \frac{N_{t-s}^n}{n}} \right] = e^{(t-s) \psi_{\frac{N^n}{n}}(-iu)}$$

où $\psi(u)$ est l'exposant caractéristique du processus $\frac{N^n}{n}$. Il reste donc à montrer que $e^{(t-s) \psi_{\frac{N^n}{n}}(-i\bar{r}_n)} = e^{r(t-s)}$, c'est-à-dire en prenant le logarithme, que $r = \psi_{\frac{N^n}{n}}(-i\bar{r}_n)$. Mais par la **section 3.2**, les processus $\frac{N^n}{n}$ sont des processus de

Poisson composés, leur mesure de Lévy $\nu_n(dx)$ est connue et leur exposant caractéristique est donné par la **proposition 1.2.4**. Nous avons donc que

$$\begin{aligned}\psi_{\frac{N^n}{n}}(-i\bar{r}_n) &= \int_{\mathbb{R}} (e^{\bar{r}_n x} - 1) \nu_n(dx) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (e^{\bar{r}_n \frac{i}{n}} - 1) \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) \\ &= r\end{aligned}$$

par hypothèse et définition de \bar{r}_n . Donc

$$\mathbb{E} \left[e^{\bar{r}_n \frac{N_{t-s}^n}{n}} \right] = e^{(t-s)\psi_{\frac{N^n}{n}}(-i\bar{r}_n)} = e^{r(t-s)},$$

et nous obtenons bien finalement que

$$\mathbb{E} [e^{-rt} \mathbf{S}_t^n | e^{-rs} \mathbf{S}_s^n] = e^{-rs} \mathbf{S}_s^n \quad \text{pour } t > s \geq 0.$$

□

Ce qui est intéressant par cette méthode d'obtention de nouveaux processus $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$ est une observation qu'il est possible de faire à partir de différentes équations de la preuve précédente, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}e^{r(t-s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} \right] \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{\bar{r}_n \frac{m}{n}} \mathbb{P} (N_{t-s}^n = m).\end{aligned}$$

Les constantes \bar{r}_n peuvent donc être vues comme le taux d'intérêt qu'il faut choisir d'imposer pour que le taux moyen impliqué par $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}$ soit r , où le poids d'un certain m est donné par $\mathbb{P} (N_{t-s}^n = m)$. Si nous prenons par exemple l'intervalle $[0, 1]$, donc $t = 1$ et $s = 0$, un arbre binomial standard impliquerait n baisses ou hausses du prix, c'est-à-dire n variables aléatoires $\mathbf{X}_{n,k}$ dont il faudrait choisir les p_n et U_n pour obtenir un taux moyen r . Dans un processus de la forme $\sum_{k=1}^{N_1^n} \mathbf{X}_{n,k}$, ceux-ci ne peuvent plus être choisis de cette manière. Il s'agit plutôt de les choisir selon un taux d'intérêt \bar{r}_n pour que, selon le nombre de changements de prix N_1^n , le taux d'intérêt pondéré soit r . Ceci fournit donc une explication

économique au choix d'une nouvelle mesure martingale équivalente qui peut autrement paraître arbitraire. Une discussion sur la difficulté computationnelle du calcul de ces constantes \bar{r}_n sera également faite lors de la **section 4.4**.

Un autre fait à prendre en compte est que cette méthode détermine une famille entière de nouveaux processus. En effet, lors de la détermination des processus L^n permettant d'approximer un processus $GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$, il est possible de remarquer par le **théorème 3.3.1** que le paramètre σ^2 peut être choisi de manière arbitraire s'il est positif. Ceci provient du fait que nous obtenons, par le **corollaire 3.1.1**, deux choix de paramètres par la loi normale et trois par le biais du processus inverse gaussien généralisé. Donc le paramètre σ^2 peut être choisi arbitrairement. Cependant, selon ce choix, les nouveaux processus $\mathbf{L}^n = \sum_{k=1}^{N^n} \mathbf{X}_{n,k}$, eux, seront différents et dépendront désormais de tous les paramètres. Donc cette famille de processus détermine à son tour une famille de mesures martingales équivalentes, ce qui correspond bien au fait que la mesure risque-neutre dans un modèle exponentiel-Lévy n'est pas unique. Ce modèle, par le paramètre σ , nous laisse donc une certaine flexibilité quant au choix de la mesure que nous pouvons utiliser pour déterminer le prix risque-neutre d'une option. Ceci sera plus explicite à l'intérieur de la prochaine proposition qui s'intéresse à la limite de ces nouveaux processus $\{\mathbf{L}^n\}_{n \geq 1}$ et $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$.

Proposition 4.2.2. *Les processus $\{\mathbf{L}^n\}_{n \geq 1}$ définis à l'intérieur du **théorème 4.2.1**, c'est-à-dire où*

$$v_n = \bar{r}_n - \frac{1}{2}\sigma^2, p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v}{nU_n} \text{ et } U_n = -D_n = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{v^2}{n^2}}$$

*et les processus N^n construits selon un processus $GIG\left(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$ par la **définition 3.2.2** convergent faiblement vers un processus*

$$\mathbf{L} = GH\left(\lambda, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \left(\bar{r} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}, \frac{\bar{r}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \delta, 0\right), \quad (4.2.5)$$

tel que

$$r = \psi_{GIG}(-i\bar{r}) = \int_0^{\infty} (e^{\bar{r}x} - 1) \nu_{GIG}(dx)$$

où $\sigma > 0$ est une constante positive au choix et $\psi_{GIG}(u)$ est l'exposant caractéristique du processus $GIG\left(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$. De plus,

$$\mathbf{S}^n = S_0 e^{\mathbf{L}^n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S_0 e^{\mathbf{L}} = \mathbf{S}.$$

Démonstration. Tout d'abord remarquons que

$$\frac{N^n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} GIG\left(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)$$

par le **théorème 3.2.1**. Par le **théorème 1.2.8** ceci est équivalent à

$$\mathcal{L}\left(\frac{N_1^n}{n}\right) \implies \mathcal{L}\left(GIG_1\left(\lambda, \frac{\delta}{\sigma}, \sigma\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)\right).$$

Comme la convergence en loi de variables aléatoires entraîne la convergence des fonctions caractéristiques, nous avons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\frac{N^n}{n}}(u) = \psi_{GIG}(u).$$

L'hypothèse du **théorème 4.2.1** précédent devient donc à la limite

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\frac{N^n}{n}}(-i\bar{r}_n) = \psi_{GIG}(-i\bar{r}).$$

Ceci implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \bar{r} - \frac{1}{2}\sigma^2 = v$. Par l'**exemple 2.2.1** sur la convergence faible du modèle de Triorgeodis, nous avons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(q_n D_n + p_n U_n) = v \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(q_n D_n^2 + p_n U_n^2) = \sigma^2. \quad (4.2.6)$$

Par le **théorème 3.3.1** sur la convergence faible, nous obtenons facilement que

$$\mathbf{L}^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} \mathbf{L} = GH\left(\lambda, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \left(\bar{r} - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}, \frac{\bar{r}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \delta, 0\right).$$

□

Il apparaît clairement que la constante σ joue un rôle primordial lors de la détermination du processus limite et qu'ainsi une famille complète de mesures martingales équivalentes est déterminée par cette méthode. Nous avons donc, pour un processus $L = GH(\lambda, \alpha, \beta, \delta, 0)$ et à l'aide du paramètre σ , construit une famille de suites de processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ convergeant vers L . Ce paramètre permet par la suite d'obtenir plusieurs processus \mathbf{L}^n , donc une famille de mesures martingales

équivalentes, qui convergeront faiblement vers des processus hyperboliques L distincts. Ces processus donneront la possibilité, comme il le sera montré dans la prochaine section, de déterminer une gamme de prix risque-neutre pour une option H conformément à la possibilité théorique d'obtenir plusieurs prix sous un modèle exponentiel-Lévy.

4.3. MÉTHODE THÉORIQUE D'ÉVALUATION

Au cours de cette section une méthode d'évaluation du prix d'une option d'achat européenne H de prix d'exercice K venant à échéance au temps T sera présentée. Il est légitime de vouloir trouver une suite de prix $\{\Pi^n(H)\}_{n \geq 1}$ lorsque les processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ modélisent le cours du sous-jacent. De plus, par le **théorème 4.2.1**, nous avons que

$$\Pi^n(H(S^n)) = e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} [(S_T^n - K, 0)^+] = e^{-rt} \mathbb{E} [(S_T^n - K, 0)^+],$$

où les processus $\{S^n\}_{n \geq 1}$ sont définis sur les espaces probabilisés $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}^n, \mathbb{Q}_n)$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer des valeurs pour $e^{-rt} \mathbb{E} [(S_T^n - K, 0)^+]$.

Proposition 4.3.1. *Soit $\{S^n\}_{n \geq 1}$, $\{S^n\}_{n \geq 1}$ les processus du **théorème 4.2.1**, r le taux sans risque du marché et $\{\bar{r}_n\}_{n \geq 1}$ les taux du **théorème 4.2.1**. Si H est une option d'achat européenne de prix d'exercice K venant à échéance au temps T , alors*

$$\Pi^n(H(S^n)) = e^{-rt} \mathbb{E} [(S_T^n - K, 0)^+] = e^{-rt} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\bar{r}_n m} C_{m, h_n}^{\bar{r}_n} \mathbb{P}(N_T^n = m).$$

où $h_n = \frac{1}{n}$ et $C_{m, h_n}^{\bar{r}_n}$ est donné à l'intérieur de la **proposition 1.5.3** ou de l'**exemple 2.3.1**, c'est-à-dire qu'il s'agit du prix risque-neutre sous un arbre binomial tel que la longueur d'une période est $\frac{1}{n}$, qu'il y a m changements de prix et que le taux d'intérêt est \bar{r}_n .

Démonstration. Il suffit de déterminer $e^{-rt} \mathbb{E}[(S_T^n - K, 0)^+]$ en utilisant les résultats du **théorème 4.2.1**.

$$\begin{aligned}
 e^{-rt} \mathbb{E}[(S_T^n - K, 0)^+] &= e^{-rt} \mathbb{E} \left[(S_0 e^{\sum_{k=1}^{N_T^n} \mathbf{X}_{n,k}} - K)^+ \right] \\
 &= e^{-rt} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[(S_0 e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} - K)^+ \right] \mathbb{P}(N_T^n = m) \\
 &= e^{-rt} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\bar{r}_n m} \mathbb{E} \left[e^{-\bar{r}_n m} (S_0 e^{\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_{n,k}} - K)^+ \right] \mathbb{P}(N_T^n = m) \\
 &= e^{-rt} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\bar{r}_n m} C_{m, h_n}^{\bar{r}_n} \mathbb{P}(N_T^n = m),
 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. □

Cette proposition donne explicitement une méthode de calcul pour une option d'achat européenne fondée sur l'évaluation martingale. Il est également possible d'offrir une interprétation économique de cette méthode, en rappelant que le taux \bar{r}_n est un taux permettant d'obtenir le taux r du marché comme moyenne pondérée et que

$$\Pi^n(H(S^n)) = e^{-rt} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\bar{r}_n m} C_{m, h_n}^{\bar{r}_n} \mathbb{P}(N_T^n = m).$$

En effet, le prix obtenu peut être interprété comme valeur moyenne des prix calculés sous des arbres binomiaux basés sur le taux \bar{r}_n et dont le nombre de sauts dépend des processus N^n alors que le temps entre deux sauts h_n est identique. Cette approche se démarque également de Rachev et Rushendorf [1994] et Weron [2002], qui utilise une méthode du type

$$\Pi^n = \sum_{m=1}^{\infty} C_{m, \frac{1}{m}}^r \mathbb{P}(\lfloor TY^n \rfloor = m).$$

Tout d'abord, rien ne garantit que cette méthode correspond à une évaluation martingale. De plus, $\{\lfloor tY^n \rfloor\}_{t \geq 0}$ est un processus très différent d'un processus de Poisson composé et le taux utilisé est directement celui du marché. Finalement, une dernière chose qui peut être intéressante à remarquer est que leur méthode calcule les prix $C_{m, \frac{1}{m}}^r$. Donc pour tout m , l'intervalle $[0, T]$ est séparé en m périodes

de longueur $\frac{1}{m}$ et le prix est ensuite calculé sur cet arbre. La méthode proposée dans ce mémoire utilise des prix $C_{m,h_n}^{\bar{r}_n}$. C'est-à-dire que même si le nombre de sauts varie selon m , la période entre deux sauts est toujours fixe et de longueur $\frac{1}{n}$ pour tout m . Maintenant qu'une méthode de calcul a été exposée, il convient de s'attarder à la convergence de ces prix par une méthode similaire à celle du **théorème 2.3.1**.

Théorème 4.3.1. *Soient $\{S^n\}_{n \geq 1}$ et $\{\mathbf{S}^n\}_{n \geq 1}$. Alors si*

$$\Pi_0^n(H(S^n)) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(S_T^n - K)^+] = e^{-rT} \mathbb{E} [(\mathbf{S}_T^n - K)^+] \quad (4.3.1)$$

et que $\Pi_0^n(H(S^n))$ est donné par la **proposition 4.3.1**, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(H(S^n)) = \Pi(H(\mathbf{S})),$$

où $\mathbf{S} = S_0 e^{\mathbf{L}}$ et

$$\mathbf{L} = GH \left(\lambda, \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \left(\bar{r} - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2}, \frac{\bar{r}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \delta, 0 \right). \quad (4.3.2)$$

Démonstration. Nous avons que

$$\mathbf{S}^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} \mathbf{S}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} f \mu_{\mathbf{S}^n} = \int_{\mathbb{D}} f \mu_{\mathbf{S}},$$

pour f une fonction continue et bornée de \mathbb{D} dans \mathbb{R} . Mais soit $\pi_{\{T\}}$ la projection du processus au temps T et V une option de vente européenne de prix d'exercice K et venant à échéance à T . Puisque $V = (K - x)^+$ est continue $V \circ \pi_{\{T\}}$ l'est. De plus, $V \leq K$ car \mathbf{S}^n_T et \mathbf{S}_T sont toujours positifs. Donc $V \circ \pi_{\{T\}}$ est bornée

et continue et nous pouvons appliquer le résultat sur la convergence. Ceci donne

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(V(\mathbf{S}_T^n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rT} \mathbb{E}[V \circ \pi_{\{T\}}(\mathbf{S}^n)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-rT} \int_{\mathbb{D}} V \circ \pi_{\{T\}} \mu_{\mathbf{S}^n} \\
 &= e^{-rT} \int_{\mathbb{D}} V \circ \pi_{\{T\}} \mu_{\mathbf{S}} \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}[V(\mathbf{S}_T)] \\
 &= \Pi_0(V(\mathbf{S}_T)).
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la convergence des prix d'une option de vente. Pour la convergence des prix de l'option d'achat, nous avons par la parité vente-achat (1.3.1) que, pour tout n ,

$$\Pi_0^n(H(S_T^n)) = \Pi_0^n(V(S_T^n)) + S_0^n - K e^{-rT}. \quad (4.3.3)$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(H(S_T^n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(V(S_T^n)) + S_0 - K e^{-rT} \\
 &= \Pi_0(V(\mathbf{S}_T)) + S_0 - K e^{-rT} \\
 &= \Pi_0(H(\mathbf{S}_T)),
 \end{aligned}$$

également par le **théorème 1.3.1**.

□

Maintenant, nous pouvons remarquer que la complexité de calcul de cette méthode est tributaire du calcul des probabilités $\mathbb{P}(N_T^n = m)$. Il existe cependant un algorithme permettant d'obtenir celles-ci de manière récursive. Il est dû à Panjer et tiré ici de Mikosh [2000]. Mais tout d'abord, les processus doivent satisfaire les deux conditions suivantes

Condition 4.3.1. Soit $N_t^n = \sum_{k=1}^{M_t^n} J_k^n$. Alors voici deux conditions :

- (1) Les J_k^n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(2) Les probabilités sur le nombre de sauts M_t^n sont de la forme

$$q_{n,m} = \mathbb{P}(M_t^n = m) = \left(a + \frac{b}{m}\right) q_{n,m-1}.$$

Et voici maintenant l'algorithme de Panjer.

Théorème 4.3.2 (Schéma récursif de Panjer). *Si les conditions 4.3.1 sont remplies, alors les probabilités $p_{n,m} = \mathbb{P}(N_t^n = m)$ sont données par*

$$p_{n,0} = \begin{cases} q_0 = \mathbb{P}(M_t^n = 0) & \text{si } \mathbb{P}(J_1^n = 0) = 0, \\ \mathbb{E} \left[\mathbb{P}(J_1^n = 0)^{M_t^n} \right] & \text{si } \mathbb{P}(J_1^n = 0) > 0. \end{cases}$$

$$p_{n,m} = \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(J_1^n = 0)} \sum_{i=1}^m \left(a + \frac{bi}{m}\right) \mathbb{P}(J_1^n = i) p_{n,m-i}, \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Comme le fait remarquer Mikosh [2000], si M^n est un processus de Poisson de paramètre λ , alors la représentation de la **condition 4.3.1** est de la forme $a = 0$ et $b = \lambda$. Nous pouvons donc exprimer les probabilités des processus $\{N_t^n\}_{n \geq 1}$ par ce schéma.

Proposition 4.3.2. *Les probabilités $p_{n,m} = \mathbb{P}(N_t^n = m)$ peuvent être calculées par le schéma récursif suivant :*

$$p_{n,0} = \mathbb{P}(M_t^n = 0),$$

$$p_{n,m} = \sum_{i=1}^m \frac{it}{m} \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) p_{n,m-i}, \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Démonstration. Comme les variables J_k^n sont définies comme étant entières et que M_t^n est une variable de Poisson de paramètre $t\lambda_n$ puisque M^n est un processus de Poisson de paramètre λ_n , la **condition 4.3.1** est remplie avec $a = 0$ et $b = t\lambda_n$.

Comme $\mathbb{P}(J_0^n = 0) = 0$, nous avons que $p_{n,0} = \mathbb{P}(M_t^n = 0)$. Finalement,

$$\begin{aligned}
 p_{n,m} &= \frac{1}{1 - a\mathbb{P}(J_1^n = 0)} \sum_{i=1}^m \left(a + \frac{bi}{m} \right) \mathbb{P}(J_1^n = i) p_{n,m-1}, \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{it\lambda_n}{m} \mathbb{P}(J_1^n = i) p_{n,m-1}, \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{it\lambda_n}{m} \frac{\nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right)}{\lambda_n} p_{n,m-1}, \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{it}{m} \nu_{GIG} \left(\left[\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n} \right] \right) p_{n,m-1},
 \end{aligned}$$

□

Jusqu'à maintenant, à l'intérieur de ce chapitre, nous avons déterminé théoriquement des mesures martingales équivalentes à partir de nouveaux processus et une méthode théorique d'évaluation à partir de ceux-ci. Nous terminerons ce mémoire par quelques calculs numériques sur un exemple précis.

4.4. CALCULS NUMÉRIQUES À PARTIR D'UN EXEMPLE

L'objectif de cette section est de fournir un exemple d'un calcul du prix d'une option d'achat européenne illustrant la théorie développée dans ce mémoire. Les résultats obtenus ont pour mission principale de montrer qu'il est possible d'implanter les processus et méthodes d'évaluation exposés jusqu'à maintenant. Ceci sera fait à l'aide du logiciel et langage de programmation *Matlab*. De plus, ces mêmes résultats permettront d'appuyer les preuves théoriques de la convergence des processus et des prix d'options. Il est à noter que nous ne cherchons pas à avoir le prix le plus près possible de celui du marché, ce qui demanderait la calibration du modèle, mais plutôt à illustrer la convergence.

Ceci sera fait par deux méthodes de calcul différentes. Mais tout d'abord, spécifions les processus et paramètres utilisés. Nous utiliserons comme processus de base les processus $S = S_0 e^L$ où $S_0 = 1124,47$ et $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ tel que

$$L = GH(-1.7555, 3.8288, -3.8286, 0.2375, 0).$$

Ces paramètres sont tirés de Schoutens [2003]. Ils ont été choisis simplement pour prendre des paramètres dont l'utilisation est plausible dans le domaine financier. Le paramètre σ a été fixé à 0,04. Sans avoir fait de calibration explicite, il a été choisi de manière à obtenir un résultat probant sur l'option qui sera spécifiée plus loin. Mais comme il a été mentionné plus tôt, le choix du paramètre σ détermine la mesure et le prix obtenus. Donc changer celui-ci permettrait d'obtenir un prix différent et pourrait éventuellement aider à la calibration du modèle. Mais comme nous ne nous intéressons qu'à la convergence, le choix de $\sigma = 0,04$ est satisfaisant. Par le **théorème 3.3.1**, il faudra utiliser des processus $\{N^n\}_{n \geq 1}$ donnés par la **définition 3.2.2** et construits à partir d'un processus

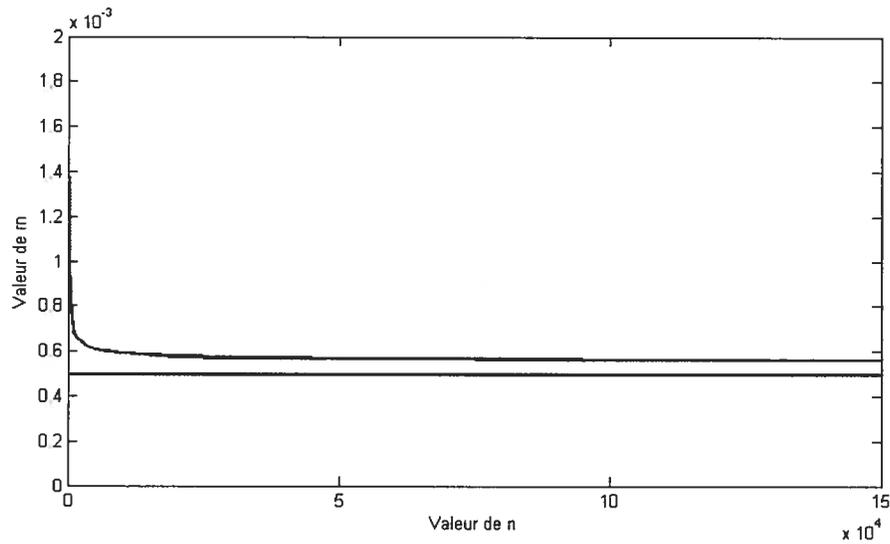
$$Y = GIG(-1.7555, 5.9375, 0.001565).$$

Le taux d'intérêt du marché sera de 0,031, le prix d'exercice de l'option d'achat européenne H sera de 1090 et le temps d'échéance un mois, c'est-à-dire 1/12 d'année. Ces données ont également été tirées de Schoutens [2003] et selon la liste fournie, le prix de cette option sur le marché était de 43,10 dollars. Ce prix est indiqué seulement pour donner une idée globale de l'option, puisque notre intérêt se porte sur la convergence vers un certain prix. Cette option particulière a été choisie principalement pour avoir un temps d'échéance court qui diminue le temps de calcul. La première étape est de déterminer les paramètres \bar{r}_n permettant de déterminer la mesure martingale équivalente par le **théorème 4.2.1**. Ces constantes sont trouvées par l'équation (4.2.1) de la **proposition 4.2.1** par l'implantation de (4.2.1) tout en cherchant, en utilisant différents \bar{r}_n , à obtenir une précision très grande sur la valeur de r voulue. La **figure 4.4** montre les valeurs pour différents n et la convergence vers la valeur limite $\bar{r} = 0,0004983$ obtenue par la **proposition 4.2.2**. Ces valeurs permettent d'obtenir les nouveaux processus $\{S_n\}_{n \geq 1}$ et $\{L_n\}_{n \geq 1}$ par la **proposition 4.2.2** et nous aurons que

$$S^n = S_0 e^{L^n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D})} S_0 e^L = S.$$

où

$$L = GH(-1.7555, 0.03913, -0.15635, 0.2375, 0).$$

FIG. 4.1. Valeurs de \bar{r}_n pour différents n 

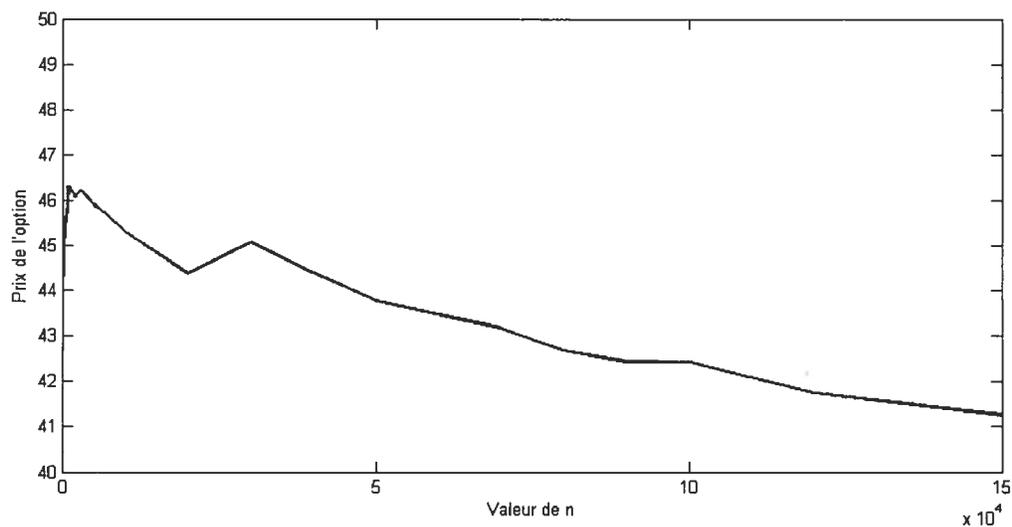
Différentes valeurs de \bar{r}_n afin de montrer la convergence. Le trait plein représente la valeur \bar{r} calculée à partir de la **proposition 4.2.2**.

Les prix de l'option européenne ont été calculés pour différentes valeurs de n représentées dans la **figure 4.4**. Nous pouvons remarquer que les prix semblent bien converger et qu'ils se situent près du prix du marché de 43,10 selon Schoutens [2003]. Donc ce modèle et cette méthode de calcul semblent donner de bons résultats et valider la convergence théorique des processus et des prix d'options.

Une deuxième méthode a été utilisée pour calculer le prix d'une seconde option d'achat européenne F dont le prix d'exercice est cette fois de 1100 dollars. Nous n'avons cependant pas utilisé la mesure martingale équivalente développée dans ce mémoire mais plutôt utilisés directement les processus L^n qui convergent faiblement vers un processus $L = GH(-1.7555, 3.8288, -3.8286, 0.2375, 0)$ et les processus $S^n = S_0 e^{L^n}$. Le but était de vérifier si les approximations construites dans ce mémoire permettaient d'utiliser la méthode de Monte-Carlo. Les prix ont donc été obtenus, pour un certain n fixe, par 20 000 simulations des processus et par la formule de prix $e^{-rT}(S^n - K)^+$. Il est donc légitime de penser que nous approximations de cette manière le prix suivant :

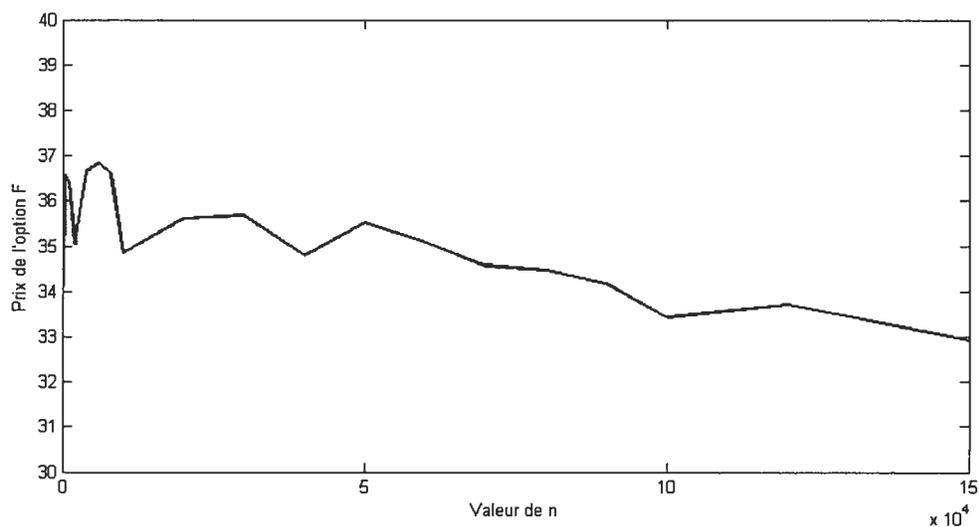
$$\Pi^n(F) = e^{-rT} \mathbb{E} [(S^n - K)^+].$$

FIG. 4.2. Prix risque neutre d'une option européenne



Différents prix de l'option européenne H selon plusieurs valeurs de n .

FIG. 4.3. Prix d'une option européenne par Monte-Carlo



Différents prix de l'option européenne F selon plusieurs valeurs de n .

La **figure 4.4** représente ces valeurs selon différentes valeurs de n . Encore une fois, les valeurs semblent bien converger surtout si nous tenons compte de l'échelle. De plus, comme le prix du marché de cette option était de 35,60, les valeurs approximées semblent être près de la valeur du marché. L'utilisation de méthodes de Monte-Carlo sur les processus L^n , qui approximent L , paraît donc légitime. Il

serait donc possible d'utiliser cette méthode pour évaluer d'autres types d'options et surtout celles dont le prix dépend de l'ensemble de la trajectoire du processus, telles les options américaines.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, une nouvelle méthode d'approximation de processus hyperboliques généralisés a été introduite. Ceci a été fait tout d'abord par une présentation générale exhaustive de tous les théorèmes et concepts nécessaires à son élaboration avec l'objectif de rendre ce mémoire complet. Par la suite, la convergence faible de processus du type

$$X_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_{n,k} \quad \text{pour } t \geq 0$$

a été analysée par l'approche des tableaux triangulaires. Il a été montré sous quelles conditions une limite gaussienne pouvait être obtenue et que le prix d'une option d'achat européenne calculé sous ces approximations convergeait vers celui donné par le modèle de Black-Scholes. Il est bon de remarquer que ce chapitre constitue en soit un résumé complet d'une approche classique par des preuves propres à ce mémoire.

Par la suite, une généralisation de ce modèle a été construite en ayant comme inspiration les travaux de Rachev et Rushendorf [1994] et Weron [2002]. Cependant, comme il le fut remarqué tout au long de ce mémoire, l'approche développée ici dépasse ces travaux. En effet, leur méthode utilise des processus de la forme

$$Z_t^n = \sum_{k=1}^{\lfloor tY^n \rfloor} X_{n,k} \quad \text{pour } t \geq 0$$

où $\{Y^n\}_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires convergeant en loi vers une loi inverse gaussienne généralisée. Comme le démontrent Eberlein et Van Hammerstein [2004], $\{Z^n\}_{n \geq 1}$ ne converge pas faiblement en tant que processus vers un processus hyperbolique généralisé. Il a cependant été montré que les processus construits à

l'aide de la méthode présentée dans ce mémoire convergent faiblement vers un processus hyperbolique généralisé. Ces processus sont du type

$$L_t^n = \sum_{k=1}^{N_t^n} X_{n,k} \quad \text{pour } t \geq 0$$

où $\{N^n\}_{n \geq 1}$ sont des processus de Poisson composés. Une construction explicite originale de ceux-ci a été développée pour obtenir leur convergence faible vers des processus inverses gaussiens généralisés. À partir de ceci, le fait que les processus $\{L^n\}_{n \geq 1}$ soient des processus de Lévy et leur convergence faible vers des processus hyperboliques généralisés ont été montrés.

La question de l'évaluation de prix d'options d'achat européennes a finalement été traitée de manière théorique et appliquée. Des mesures martingales équivalentes ont été explicitement déterminées à l'aide des modèles basés sur les approximations. Ces mesures ont permis l'évaluation d'option comme valeur moyenne de prix obtenus par des arbres binomiaux. Pour terminer ce chapitre, quelques calculs et simulations ont été faits pour vérifier la convergence et le degré de maniabilité de ce développement théorique.

Ce mémoire offre donc une nouvelle approche pour construire des approximations de processus hyperboliques généralisés, une famille de processus de Lévy particulièrement flexible et importante par ses applications en mathématique financière. Cette approche généralise les arbres binomiaux et comme eux possède une interprétation économique intuitive qui valide son utilisation. Ce travail met également en lumière le fait qu'il est possible d'obtenir sous les modèles basés sur ces approximations des mesures martingales équivalentes uniques à ce mémoire et qui admettent une interprétation économique justifiant ce choix de mesure et permettant de trouver une formule explicite du prix d'une option d'achat européenne.

Pour conclure ce mémoire, il convient de préciser quelques pistes de recherche ouvertes par celui-ci. Tout d'abord, il est raisonnable de penser que ce type de construction fondée sur l'idée de subordinations peut être étendue à d'autres types de processus. Aussi, une étude plus approfondie de la convergence de ces schémas par le calcul de prix d'un plus grand nombre d'options pourrait être

intéressante à réaliser. Ceci permettrait, entre autre, de déterminer si une calibration sur plusieurs options de prix d'exercice et de temps d'échéance divers est possible. De plus, la méthode de Monte-Carlo semble fonctionner pour le cas de l'option d'achat européenne et les constructions développées ici permettent de simuler exactement les processus S^n qui convergent faiblement vers un processus hyperbolique généralisé. Donc il semblerait légitime d'utiliser ces approximations et des méthodes de Monte-Carlo pour évaluer d'autres types d'options et particulièrement les options dont le prix dépend de toute la trajectoire du processus, telles que les options américaines.

Bibliographie

- D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*, volume 93 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. ISBN 0-521-83263-2.
- L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1900. ISBN 2-87647-129-9. Théorie mathématique du jeu. [Mathematical theory of games], Reprint of the 1900 original.
- O. Barndorff-Nielsen et C. Halgreen. Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse Gaussian distributions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 38(4) :309–311, 1977.
- O. E. Barndorff-Nielsen. Exponentially decreasing distributions for the logarithme of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London, A* 353 :401–419, 1977.
- O. E. Barndorff-Nielsen. Normal inverse gaussian distributions and the modeling of stock returns. Technical Report 300, Departement of Theoretical Statistics, Aarhus University, 1995.
- P. Becker-Kern, M. M. Meerschaert, et H.-P. Scheffler. Limit theorem for continuous-time random walks with two time scales. *J. Appl. Probab.*, 41(2) : 455–466, 2004. ISSN 0021-9002.
- J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. ISBN 0-521-56243-0.
- P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. ISBN 0-471-19745-9. A Wiley-Interscience Publication.

- T. Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 2004.
- F. Black et M. Scholes. Pricing of options and corporate liabilities. *J. Political Econ.*, 81 :637–654, 1973.
- R. Cont. *Financial Modelling With Jump Processes*. 2004.
- J. C. Cox, S. A. Ross, et M. Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263, 1979.
- F. Dalbean et W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.*, 312 :215–250, 1998.
- E. Eberlein et U. Keller. Hyperbolic distributions in finance. *Bernouilli*, 1 : 281–299, 1995.
- E. Eberlein et S. Raible. Some analytic facts on the generalized hyperbolic model. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 367–378. Birkhäuser, Basel, 2001.
- E. Eberlein et E. A. Van Hammerstein. Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions : limiting cases and approximation of processes. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV*, volume 58 of *Progr. Probab.*, pages 221–264. Birkhäuser, Basel, 2004.
- B. V. Gnedenko. On limit theorems for a random number of random variables. In *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982)*, volume 1021 of *Lecture Notes in Math.*, pages 167–176. Springer, Berlin, 1983.
- J. Harrison et D. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod security markets. *J. Economic Theory*, 2 :381–408, 1979.
- J. Harrison et S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11 :215–260, 1981.
- J. Jacod et A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. ISBN 3-540-43932-3.
- R. Jarrow et A. Rudd. *Option Pricing*. Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois, 1983.

- E. K llezi et N. Webber. Valuing Bermudan options when asset returns are Lévy processes. *Quant. Finance*, 4(1) :87–100, 2004. ISSN 1469-7688.
- M. M. Meerschaert et H.-P. Scheffler. *Limit distributions for sums of independent random vectors*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 2001. ISBN 0-471-35629-8. Heavy tails in theory and practice.
- T. Mikosh. *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer, 2000.
- M. Morales. On the expected discount penalty function for a perturbed risk process driven by a subordinator. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40 :293–301, 2007.
- H. Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin*, 11 :22–26.
- D. Pollard. *Convergence of stochastic processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1984. ISBN 0-387-90990-7.
- K. Prause. *The Generalised Hyperbolic Model : Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. PhD thesis, University of Freiburg, 1999.
- J.-L. Prigent. *Weak convergence of financial markets*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2003. ISBN 3-540-42333-8.
- S. T. Rachev et L. Rushendorf. Models for option prices. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 39(1) :150–190, 1994. ISSN 0040-361X.
- S. Raible. *Lévy Processes in Finance : Theory, Numerics, and Empirical Facts*. PhD thesis, University of Freiburg, 2000.
- K.-i. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. ISBN 0-521-55302-4. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.
- W. Schachermayer. Martingale measures for discrete time processes with infinite horizon. *Mathematical Finance*, 4 :427–462, 1994.
- W. Schoutens. *Lévy Processes in Finance*. Wiley, 2003.

- L. Trigeorgis. A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26(3) :309–326, 1991.
- R. Weron. Pricing European options on instruments with a constant dividend yield : the randomized discrete-time approach. *Probab. Math. Statist.*, 22(2, Acta Univ. Wratislav. No. 2470) :407–418, 2002. ISSN 0208-4147.

