

Université de Montréal

Mise en œuvre des mécanismes de Vickrey-Clarke-Groves sur des réseaux

par
Sébastien Lannez

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

Juillet 2007

© Sébastien Lannez, 2007.



QA

76

US4

2007

V.034

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Mise en œuvre des mécanismes de Vickrey-Clarke-Groves sur des réseaux

présenté par:

Sébastien Lannez

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Patrice Marcotte,	président-rapporteur
Michel Gendreau,	directeur de recherche
Teodor Gabriel Crainic,	codirecteur
Jacques A. Ferland,	membre du jury

Mémoire accepté le 31 août 2007

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous proposons la mise en œuvre d'un mécanisme de Clarke, généralisation des enchères de Vickrey, afin de créer une place de marché permettant la vente de capacité point à point sur un réseau.

L'application d'une tarification « juste » est non triviale pour un grand nombre de problématiques reposant sur des réseaux. Sur ce type de structure, les participants sont liés les uns aux autres par l'intermédiaire des arcs qu'ils convoitent. Ces relations deviennent complexes lorsqu'ils sont en compétition pour l'obtention de chemins. Bien que ces chemins soient souvent différents, ils peuvent avoir des arcs en communs. C'est cette caractéristique qui peut rendre difficile la création d'un système de paiement.

Comme nous le verrons avec l'enchère de Vickrey et plus généralement avec les mécanismes de Vickrey-Clarke-Groves, il existe des mécanismes qui assurent une allocation et des paiements justes envers tous.

Mots clefs : Vickrey, réseau de transport, tarification

This master thesis contains a study of Clarke's mechanism which is a generalisation of Vickrey's auction. We applied it to create a marketplace for network capacity selling over point-to-point connections.

Finding a welfare mechanism for pricing these access rights could be difficult when dealing with networks. The interrelated structure of participant willings, through their desired paths, leads to a combinatorial problem. This characteristic makes it difficult to create a payment system for capacity auctions over networks.

As we will see with Vickrey's auction and more generally with the Vickrey-Clarke-Groves mechanism, there exists auction schemes based on the externalities of each participants which ensures welfare maximisation and individual rationality.

Keywords : Vickrey, transportation network, pricing

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
LISTE DES ANNEXES	viii
REMERCIEMENTS	ix
INTRODUCTION	x
CHAPITRE 1 : MARCHÉS ÉLECTRONIQUES ET RÉSEAUX	1
1.1 Places de marché électroniques	1
1.1.1 Trois places de marché électroniques	2
1.2 Enchères	4
1.2.1 Information et préférence	5
1.2.2 Types d'enchères de base	5
1.2.3 Discussion	6
1.3 Mécanismes de Vickrey, Clarke et Groves	7
1.3.1 Théorie de l'implémentation	7
1.3.2 Vickrey	10
1.3.3 Groves et Clarke	12
1.4 Enchères et réseaux	18
1.4.1 Tarification sur les réseaux	19
1.4.2 Réseaux électriques	20
1.4.3 Réseaux de télécommunication	20
1.4.4 Chaînes logistiques	21
1.4.5 Réseaux ferroviaires	21
1.5 Problématique	21
1.5.1 Problème principal	22
1.5.2 Variations	23
1.5.3 Illustration	23

CHAPITRE 2 : TRAVAUX ANTÉRIEURS	28
2.1 Enchère sur réseau et mécanisme VCG	28
2.1.1 Mécanismes d'enchère sur réseau	28
2.1.2 Mises en œuvre	30
2.1.3 Mécanismes de VCG	33
2.1.4 Conclusion	34
2.2 Vickrey et les réseaux à une commodité	35
2.2.1 Arbre de recouvrement de poids minimum	35
2.2.2 Problème d'affectation	36
2.2.3 Plus court chemin sur un graphe	38
2.2.4 Problème de transport	41
CHAPITRE 3 : MODÉLISATION	43
3.1 Mises	43
3.1.1 Réseau	43
3.1.2 Notation	45
3.1.3 Valeur et utilité	46
3.2 Détermination des gagnants	48
3.2.1 Modèle « plusieurs-vers-un »	48
3.2.2 Modèle « un-vers-plusieurs »	52
3.2.3 Modèle « plusieurs-vers-plusieurs »	54
3.3 Détermination des prix	55
3.3.1 Modèle « plusieurs-vers-un »	56
3.3.2 Modèle « un-vers-plusieurs »	57
3.3.3 Modèle « plusieurs-vers-plusieurs »	58
CHAPITRE 4 : RÉOLUTION DE « PLUSIEURS-VERS-UN »	65
4.1 Décomposition mathématique	65
4.1.1 Décomposition de Benders	65
4.1.2 Génération de colonnes	67
4.1.3 Décomposition lagrangienne	68

4.2 Réseaux de télécommunications	69
4.2.1 Sous problèmes	69
4.2.2 Coupes initiales	72
4.3 Réseaux ferroviaires	74
4.3.1 Algorithme trivial	75
4.3.2 Ensemble de chemins	75
4.3.3 Un ensemble de chemins parmi plusieurs	80
CHAPITRE 5 : TESTS NUMÉRIQUES	82
5.1 Création des jeux de tests	82
5.1.1 Le graphe sous-jacent	82
5.1.2 Les mises	82
5.1.3 Génération des jeux de tests	83
5.2 Résultats	83
5.2.1 Description	83
5.2.2 pbl-05-40x400 (I)	85
5.2.3 pbl-05-40x400 (II)	85
5.2.4 Analyse	90
CONCLUSION	92
BIBLIOGRAPHIE	xxi

LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Décomposition de Benders	xii
I.1	Notation	xii
I.2	Procédure de relaxation	xii
I.3	Description	xiii
I.3.1	Algorithme de Benders	xv
I.4	Optimalité de l'algorithme	xvii
I.5	Raffinements pratiques	xix
I.5.1	Coupes de Benders plus fortes	xix
I.5.2	Recherche locale	xx
I.5.3	Arbre de recherche persistant	xx
I.5.4	Mc Daniel et Devine	xxi

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier Michel Gendreau et Teodor Gabriel Crainic de m'avoir accompagné et encadré tout au long de ma maîtrise au sein du Centre de Recherche sur les Transports de l'Université de Montréal.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une reconnaissance toute particulière pour Christian Artigues qui, il y a quelques années, m'a initié à la recherche opérationnelle.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis de m'avoir soutenu et encouragé pendant mes années d'études à Montréal.

INTRODUCTION

Un article récent paru dans *The Economist* (2006) fait un tour d'horizon des entreprises de transport logistique et de leur fonctionnement. Il souligne l'importance d'une gestion globalisée des processus logistiques et fait le lien entre l'état financier de certaines compagnies et leurs innovations dans le domaine de la gestion de la chaîne de transport. La mondialisation impose pour beaucoup d'entre elles la possession de systèmes de gestion logistique permettant de capitaliser leurs coûts. Historiquement, les accords de commerce passés entre les fournisseurs et consommateurs de ces services ont été des contrats à moyen ou long terme. De nos jours, la nécessité de flexibilité imposée par les clients et l'augmentation de la concurrence imposent l'utilisation de contrats à court terme et une tarification à l'acte.

Une des tâches logistiques incombant aux entreprises est de satisfaire une demande : transporter des marchandises d'un endroit vers un autre. Ce déplacement peut être effectué par un transporteur qui s'acquittera de la tâche en échange d'une rémunération. L'utilisation d'une place de marché, qui peut mettre en œuvre des mécanismes d'enchères, pour réaliser cette négociation permet de mettre en commun des ensembles de ressources et des ensembles de demandes. Ceci augmente les possibilités d'optimisation, car on traite alors un problème plus global. Comme le montrent Pindyck et Rubinfeld (2005), les systèmes d'enchères sont des processus ayant un coût de mise en œuvre relativement bas et sont souvent bien accueillis par les clients.

Nous avons articulé ce mémoire autour de cette problématique pour proposer des places de marché facilitant la mise en commun des capacités et des demandes de transport ou de télécommunication. Notre objectif est de proposer un système dans lequel les participants sont incités à utiliser une stratégie identique et connue *a priori*. Cela leur évite une étude approfondie pour trouver la meilleure attitude à adopter pendant le déroulement de l'enchère.

Nous concentrerons nos recherches sur le cas où le commissaire priseur souhaite vendre la capacité de son réseau, qui peut représenter des droits de passage ou des

contrats de transports. Nous présenterons une implantation à l'aide de la décomposition de Benders et montrerons l'intérêt de cette méthode pour notre place de marché. Nous proposerons également un algorithme de programmation dynamique permettant de déterminer les gagnants et les prix.

Le premier chapitre de ce mémoire introduira les places de marché électroniques, ainsi que différents types d'enchères. Nous y définirons les mécanismes de Vickrey-Clarke-Groves (VCG) et présenterons le problème que l'on souhaite résoudre. Dans le chapitre suivant, nous commencerons par faire un état de la recherche sur les mécanismes de Vickrey et leurs applications aux réseaux, puis nous présenterons les intérêts de ces mécanismes pour les réseaux à capacité finie. Le troisième chapitre sera consacré à la modélisation mathématique de la place de marché que nous proposons. Le quatrième chapitre sera consacré aux méthodes de résolution pouvant être utilisées pour implémenter notre enchère. Des tests numériques, ainsi que leur analyse, seront présentés dans le cinquième chapitre. La conclusion ouvrira quelques pistes de recherche et synthétisera notre contribution aux problèmes d'enchères de Vickrey sur les graphes.

CHAPITRE 1

MARCHÉS ÉLECTRONIQUES ET RÉSEAUX

Ce chapitre vise à présenter les principales notions de base que nous utiliserons par la suite dans ce mémoire. Il débute par une première section sur les places de marché électroniques. La deuxième section présentera quelques enchères pour que le lecteur puisse appréhender la description des enchères de Vickrey et des mécanismes de Clarke-Groves qui sera faite dans la troisième section. La quatrième sera consacrée à la présentation de quelques applications d'enchères sur les réseaux de télécommunication, d'énergie et de transport. Nous terminerons par la présentation de notre problématique.

1.1 Places de marché électroniques

De plus en plus de compagnies utilisent des places de marché électroniques pour l'acquisition de biens ou de services. Les gouvernements aussi commencent à favoriser les enchères au détriment des appels d'offres pour certains marchés publics. Cet intérêt vient de l'impression de justesse et d'équité qui émanent des enchères et de la facilité de réunion qu'offrent les télécommunications électroniques. En France, la définition d'un cadre juridique pour l'information électronique, et notamment la reconnaissance de la signature électronique, a permis au gouvernement d'amorcer la dématérialisation des processus d'approvisionnement, comme les achats de fournitures bureautiques, à l'aide d'enchères électroniques accessibles par le Web (<http://www.achatpublic.com>).

L'avènement de l'ère électronique et des télécommunications a permis d'améliorer les places de marché à l'aide d'une plus grande puissance de calcul et des méthodes de communication rapide. La valeur d'un système économique peut être vue comme le produit de la quantité d'argent échangée avec la vitesse des transferts : à quantité d'argent constante, plus l'argent circule vite, plus il se crée de valeur ajoutée.

Les *places de marché électroniques* sont issues de places de marchés traditionnelles, mais bénéficient d'avancées technologiques importantes, d'une part, en augmentant le nombre de participants potentiels et donc la quantité de transfert numéraire potentiel, d'autre part en améliorant la communication (plus rapide, plus pratique, plus sécurisée, moins onéreuse) et donc les échanges entre les protagonistes.

Elles sont au carrefour de plusieurs disciplines : économie, informatique, recherche opérationnelle, télécommunication, conception d'enchères et théorie des jeux. Sous cette expression se cachent des réalisations ayant des buts économiques différents. Dans son sens le plus large, la désignation de place de marché électronique s'applique autant à des sites Web portails qu'à des enchères électroniques. Leur caractéristique commune est qu'elles favorisent les échanges économiques.

L'évolution de la communication entre les entreprises depuis l'arrivée d'Internet nous permet de supposer qu'elles vont devenir une composante incontournable des systèmes d'information d'entreprise. Nous étayons ceci par le fait que les modes de négociation interentreprises évoluent depuis quelques années. En France, Langlois et Gasch (2001) ont montré que 98% des ventes et achats sur Internet sont effectués entre entreprises. La mise en place des systèmes EDI (Échange de Données Informatisé), est souvent contraignante pour les PME/PMI (Petites et Moyennes Entreprises/Industries) et ces systèmes ne bénéficient pas de la flexibilité de négociation et de décentralisation qu'offre une place de marché. Bien que des extensions aient été développées pour utiliser le Web, les places de marché électroniques, qui sont des mécanismes intuitifs pour l'homme, représentent des moyens de communication et d'échange qui peuvent être plus simples à mettre en place et posséder plus de fonctionnalités que les historiques EDI.

1.1.1 Trois places de marché électroniques

Pour illustrer la diversité des places de marché électroniques, nous en présentons trois types : les portails, les sites d'enchères non combinatoires et les enchères combinatoires. Cette présentation, qui n'a pas pour but l'exhaustivité des types de places de marché électroniques, permettra de souligner les différences dans le but à atteindre de différents marchés électroniques. Cette chronologie suit l'engouement et la difficulté de mise en

œuvre de ces places de marchés. Beaucoup d'entreprises sont aujourd'hui équipées d'un portail Internet, tandis que peu se risquent dans la création d'un système d'enchères.

Les portails sont aujourd'hui d'importantes vitrines pour les entreprises. Internet et ses possibilités d'interaction ont rendu ce moyen de communication très attractif pour les entreprises. L'évolution du mode de consommation des personnes et des entreprises, qui magasinent et achètent de plus en plus sur le Web, sont là pour le démontrer. Les portails multi-entreprises sont des sites regroupant sous une même bannière un ensemble de producteurs différents. Ils permettent à un groupe d'entreprises de se doter d'une *vitrine conviviale* offrant des produits ou services complémentaires, tout en capitalisant les frais de création et d'entretien de la place de marché. Ces portails sont des vitrines où le client peut consulter et acheter de façon conviviale : accès à l'ensemble du catalogue, pas de déplacement, interactivité, livraison, etc., mais sans aucune possibilité de négociation.

Les sites d'enchères non combinatoires permettent la vente au plus offrant d'un bien ou d'un service. Les sites d'enchères d'eBay, Amazon, UBid et autres, ont bien réussi dans ce domaine en utilisant des enchères de second prix. Ces enchères sont aujourd'hui encore non combinatoires, car il n'y a qu'un seul lot indivisible aux enchères. Ces places de marché bénéficient largement de la ressource électronique en favorisant la rencontre d'un grand nombre de participants, ce qui induit une augmentation de la valeur économique du système. Cependant, elles contraignent les participants à faire des mises qui ne reflètent pas toujours leurs préférences. Par exemple, une enchère non combinatoire ne permet pas d'exprimer une préférence de la forme : « Je souhaite acquérir l'ensemble A et B ou l'ensemble C et D, mais pas les deux ». Les détracteurs de ces places rappellent aussi à loisir leurs problèmes de sécurité : aucune vérification possible du lot avant achat, possibilité de quitter ou entrer dans l'enchère à tout moment, impayé, mise de dernière minute, système d'enchères propriétaire, etc.

Les enchères combinatoires sont utilisées pour la vente de biens indivisibles lorsque la valeur de l'acquisition d'un paquet de biens est différente de la valeur de l'acqui-

sition séparée de ces biens. Chaque participant exprime sa valeur pour des sous-ensembles de biens et l'enchère détermine les affectations ainsi que les paiements. Ce type d'enchère est déjà mis en place par certaines entreprises pour la négociation de la tarification de services logistiques tels que le transport routier, comme le montre Sheffi (2004). Des langages de mises sont alors mis en place pour faciliter l'expression des préférences des participants, en leur évitant d'explicitier toutes les combinaisons possibles. Elles bénéficient largement de la ressource électronique, qui lui fournit la puissance de calcul indispensable à leur mise en œuvre.

1.2 Enchères

Les enchères sont utilisées pour la négociation tarifaire de biens ou services. Elles permettent à un commissaire priseur de vendre ou d'acheter des biens (ou services). Lorsqu'il achète des biens, on parlera d'*enchère inversée* (ou *enchère d'approvisionnement*), tandis que le terme d'*enchère* désigne historiquement la vente par le commissaire priseur. Un cas particulier d'enchères arrive quand la place de marché regroupe plusieurs acheteurs et plusieurs vendeurs, on parle alors d'*enchères d'échange*. Des théorèmes d'impossibilité, que nous présenterons plus loin, ont montré les limites théoriques de ce type d'enchère.

Dans bien des cas, les acheteurs (ou vendeurs) ne connaissent pas la valeur de vente (ou d'achat) des biens, mais peuvent la découvrir pendant le déroulement de l'enchère. En observant les mises des autres participants, ils affinent leur estimation de la valeur du bien. C'est souvent le cas pour les enchères d'objets d'art par exemple.

La mise en place d'une enchère nécessite que le commissaire priseur choisisse parmi un grand nombre laquelle est la plus appropriée en fonction de critères tels que : le revenu engendré, l'efficacité de l'allocation, le temps et l'effort nécessaire pour y prendre part.

1.2.1 Information et préférence

Dans la théorie des enchères, on distingue la valeur des biens pour chaque participant en fonction de l'information qu'il possède sur ceux-ci. Pendant le déroulement de l'enchère, les participants ne connaissent pas forcément avec certitude les préférences des concurrents ; ils ne connaissent d'ailleurs même pas toujours la leur.

Le but d'un acheteur est de payer un prix inférieur à sa valeur pour le bien. Celle-ci peut être privée, interdépendante ou commune. La différence entre le prix payé et la valeur correspond à *l'utilité* (bénéfice) de l'acquisition du bien.

Les enchères de *valeurs privées* se déroulent lorsque chaque participant connaît la valeur que lui procurera l'acquisition du bien et qu'elle n'est pas fonction de celle de ses concurrents. C'est typiquement le cas lors d'acquisition de biens consommés après l'enchère, sans revente. L'achat d'un gâteau qui sera consommé par l'acheteur en est un bon exemple.

Lorsqu'il y a des *valeurs interdépendantes*, la valeur des biens pour chaque participant n'est pas connue a priori, mais se découvre au fur et à mesure du déroulement de l'enchère, à l'aide d'estimations sur les préférences des concurrents. Ce sera le cas des enchères d'objets d'art où le prix que les participants sont prêts à payer pour l'objet est fonction de ce que les concurrents sont aussi prêts à payer.

Enfin, l'enchère de *valeur commune* s'applique lorsque tous les participants ont la même valeur pour le bien. Elle peut-être connue a priori ou les participants peuvent n'en posséder qu'une estimation. C'est le cas typique d'enchères de droit d'exploitation pétrolier, où les compagnies ont une estimation de la quantité de pétrole présent dans le gisement, mais n'en connaîtront la vraie valeur que lorsqu'ils l'auront exploité.

1.2.2 Types d'enchères de base

Il existe quatre types d'enchères de base, définis par la méthode de proposition des mises et le calcul des paiements. Il existe deux méthodes de proposition de mise qui sont

l'enchère à enveloppe ouverte ou fermée ; les deux principales méthodes de paiements sont les paiements de premier prix et les paiements de second prix.

Enchères ouvertes. Elles peuvent être *ascendantes* ou *descendantes*. L'*enchère anglaise* est une enchère ascendante. À chaque tour, les participants peuvent surenchérir en proposant une mise de valeur supérieure à la meilleure offre. Le gagnant est celui qui a proposé la dernière meilleure offre. L'enchère descendante, aussi appelée *enchère hollandaise*, commence avec une valeur du bien très haute et à chaque itération celle-ci décroît. Le gagnant est le premier participant qui souhaite se rendre acquéreur du bien au prix courant. Les participants connaissent tous les mises de chaque participant à chaque tour.

Enchères fermées. Elles sont principalement de deux types : les *enchères de premier prix* et les *enchères de second prix*. Dans le premier cas, chaque participant propose une seule mise indépendamment des autres. Le bien est alloué au plus offrant et il devra payer la valeur de sa mise. Dans l'autre type, chaque participant propose une seule mise indépendamment des concurrents et le bien est aussi alloué au plus offrant. Néanmoins, il paiera la valeur de la seconde meilleure offre. Cette dernière enchère, bien que moins utilisée possède des propriétés théoriques très intéressantes.

1.2.3 Discussion

Les enchères ouvertes sont des mécanismes synchrones qui nécessitent la présence physique ou électronique de tous les participants. Un système de communication efficace doit alors être employé entre eux et le commissaire priseur.

Les enchères à enveloppe scellée ont l'avantage de ne pas contraindre les participants à être présents au même instant, puisque le processus de soumission des mises est asynchrone et que le seul retour d'information vers les participants consiste à annoncer qui a gagné et perdu et indiquer les paiements.

Les enchères scellées sont donc très utiles lorsque les moyens de communication sont limités (courriel, courrier, etc.) ou qu'il est difficile de s'assurer de la présence simultanée de l'ensemble des participants. Le décalage horaire ou l'impossibilité d'investir dans des systèmes de communication rapides peuvent être les causes de ces problèmes.

Malheureusement, elles s'appliquent difficilement au cas des valeurs non privées, puisqu'il faut alors ajouter un mécanisme favorisant leur découverte.

Les enchères ouvertes, ou enchères multi rondes, ont l'avantage de pouvoir être utilisées pour pallier ce problème. Malheureusement, comme le souligne Klemperer (2002), la possibilité de découvrir au fur et à mesure les valeurs des concurrents peut mener à des ententes de prix tacites, appelées *collusions*.

1.3 Mécanismes de Vickrey, Clarke et Groves

Nous présenterons ici les mécanismes de Vickrey, Clarke et Groves (VCG) qui permettent d'implémenter des enchères de second prix. Nous commencerons par définir ce qu'est un mécanisme, puis nous exposerons les hypothèses de base pour leur mise en œuvre. Nous décrirons ensuite l'enchère de Vickrey, puis deux généralisations au cas avec plusieurs biens : le mécanisme de Groves et le mécanisme de Clarke. Cette section se terminera par une présentation des propriétés de ces mécanismes.

1.3.1 Théorie de l'implémentation

1.3.1.1 Les mécanismes

Les chercheurs issus de la *théorie des jeux* ont développé le domaine de la *conception de mécanisme* ou *théorie de l'implémentation*, afin d'étudier la création de processus mimant le comportement d'un autre processus.

L'enchère de Vickrey, que nous présenterons ensuite, a été généralisée par un mécanisme appelé « taxe de Clarke », lui-même généralisé par le mécanisme de Groves. Ils ont permis de garder les propriétés d'incitation des enchères de Vickrey et donc d'implémenter celle-ci dans un cadre plus large où le nombre de biens et la définition des

mises peuvent être améliorés. Ce sont des clés de voûte de la théorie de l'implémentation, car dans certains cas ce sont les seuls mécanismes incitant à agir comme l'a prévu leur créateur.

1.3.1.2 Définitions

Pour pouvoir discuter des propriétés et de l'importance de ces mécanismes incitatifs, nous énonçons quelques définitions indispensables.

Efficienc

Elle caractérise l'allocation des biens faites par le mécanisme. On dit qu'un mécanisme est efficient s'il alloue les biens aux participants pour qui ils ont la plus grande valeur. L'allocation maximise alors le *bien-être social*.

Puisque les opérateurs de marché souhaitent posséder un mécanisme d'enchère dans lequel il y a un intérêt à participer, l'efficienc devient une condition nécessaire pour tout mécanisme. Sans celle-ci, il est peu probable que les participants acceptent de se joindre à une enchère où proposer une mise d'achat avec un prix élevé n'augmente pas toujours les chances de gagner.

Information et stratégie

Les mécanisme VCG sont des jeux à *information imparfaite*. Tous Les participants connaissent les biens mis aux enchères, la valeur que leur procurera leur acquisition, ainsi qu'une information de type probabiliste sur les préférences de leurs concurrents. Si au lieu d'avoir cette information probabiliste, il leur était possible de connaître les véritables préférences des autres participants, nous parlerions de jeux à *information parfaite*. Ce manque d'information oblige chaque participant à deviner les valeurs des autres.

À chaque ronde, les participants choisissent leur *stratégie* (une règle pour déterminer leurs mises) en fonction de l'information acquise avant l'enchère ou pendant les rondes précédentes. Lorsqu'il y a une ronde durant laquelle aucun participant n'a modifié sa mise, on dit que l'on a atteint un *équilibre de Nash* : la stratégie actuelle de chaque par-

participant est la meilleure qu'il puisse adopter compte tenu des stratégies choisies par les autres participants. Pour certains mécanismes, il existe une *stratégie dominante*, c'est-à-dire une stratégie qui s'avère toujours la meilleure quelles que soient les stratégies retenues par les autres participants. C'est une propriété très intéressante, car elle n'impose pas aux participants de devoir, à chaque étape, chercher la meilleure stratégie, puisqu'ils connaissent dès le départ la façon d'agir lors de chacune des rondes.

Lorsqu'un mécanisme incite les participants à réagir de la manière prévue et que cette stratégie dominante est de dire la vérité, il est qualifié de *mécanisme implémentable de façon sincère en stratégie dominante*. C'est une des propriétés qui fait le principal intérêt des mécanismes VCG. Par exemple, elle permet d'éviter le phénomène de *malédiction du gagnant* qui apparaît lorsque l'enchère conduit à la sous-évaluation (respectivement surévaluation) des mises des perdants (respectivement des gagnants), en incitant tout simplement les participants à donner leur vraie valeur.

1.3.1.3 Les hypothèses

L'implémentation des mécanismes VCG nécessite que chaque participant connaisse la valeur de l'acquisition du bien qu'il convoite. Comme nous l'avons vu dans la section sur les enchères, cette hypothèse est difficile à satisfaire et dépend des biens mis aux enchères. Les mécanismes d'enchères sont en effet souvent utilisés pour faire découvrir aux participants leur propre préférence, qui peut être dépendante des préférences des concurrents. Les propriétés des mécanismes VCG sont vérifiées tant qu'il n'y a pas de collusion entre les participants. Cette hypothèse est très souvent utilisée dans l'implémentation d'enchères, car la plupart d'entre elles sont vulnérables aux coalitions.

Nous supposerons toujours par la suite que les participants sont *raisonnables*, c'est-à-dire qu'ils agissent dans le but de maximiser leur utilité et qu'ils ne prennent pas de risque pour cela.

1.3.2 Vickrey

L'enchère de Vickrey (1961) est une enchère de second prix dite à enveloppe scellée : les gagnants paient le *second meilleur prix* et les mises des concurrents *ne sont pas connues*. Elle est utilisable pour la vente de biens dont la valeur d'acquisition n'est pas fonction de l'acquisition d'autres biens. La méthode de calcul des paiements de Vickrey (paiements des gagnants) induit que les participants n'ont aucun intérêt à mentir sur le prix qu'ils sont prêts à payer, car dans les faits, le prix à payer est uniquement fonction des intentions de paiements des concurrents.

Le déroulement d'une enchère de Vickrey se fait en 3 étapes principales :

1. Chaque participant $i \in I$ met dans une enveloppe le prix qu'il est prêt à payer pour acquérir l'objet aux enchères.
2. Le commissaire-priseur récupère toutes les enveloppes et désigne le gagnant (celui qui aura fait la mise la plus haute) sans donner aux participants le prix indiqué dans l'enveloppe.
3. Le commissaire-priseur recherche alors la seconde meilleure offre (qui est la meilleure offre en retirant l'offre gagnante). C'est le prix de celle-ci qui définira le transfert de numéraire.

Prix de réserve

Le fait que les paiements soient basés sur la seconde meilleure offre peut conduire à des situations où les prix de Vickrey sont très bas, voire nuls.

Prenons l'exemple où deux participants souhaitent acquérir le même bien. Le premier est prêt à payer une très forte somme. Le second ne porte que peu d'intérêt pour le bien et propose une mise dérisoire. Comme le paiement est fonction de la deuxième meilleure offre, il sera dérisoire et pourra entraîner une perte pour le commissaire-priseur.

Il serait donc intéressant de pouvoir limiter la valeur de la plus petite mise acceptable. Cette limite est fixée grâce à un *prix de réserve*, qui représente le transfert minimum que

doit recevoir le commissaire priseur pour ne pas avoir de perte. Comme l'ont montré Ausubel et Cramton (1999), l'utilisation d'un prix de réserve dans les enchères de second prix conserve les propriétés d'incitation.

Nous allons montrer par un exemple à deux participants l'intérêt des prix de réserve et pourquoi ils permettent de maximiser le revenu de l'enchère.

Supposons que les valeurs des mises x_i des participants sont distribuées selon une loi uniforme $U[0, 1]$ et sont privées. Cette dernière propriété nous assure l'indépendance des variables aléatoires représentant les mises. Soit $F_i(r) = P[x_i \leq r] = r$, la probabilité que la valeur x_i de la mise du participant i soit inférieure à $r \in [0, 1]$ et $f_i(r) = 1$ la fonction de densité correspondante. Soit la variable aléatoire R , le revenu du commissaire priseur s'il utilise un prix de réserve r et R' son revenu s'il n'utilise pas de prix de réserve.

- Si les deux mises sont supérieures à r le prix de réserve n'influence pas le revenu du commissaire priseur et il ne subira pas de perte. La probabilité d'un tel événement est donc identique dans les deux cas et vaut

$$P[R \geq r] = P[R' \geq r] = (1 - F_1(r))(1 - F_2(r)) = (1 - r)^2.$$

- Si les deux mises sont inférieures au prix de réserve, le commissaire priseur subira une perte maximum de r , car il ne recevra aucun paiement. La probabilité d'un tel événement est

$$P[R = 0] = F_1(r)F_2(r) = r^2.$$

- Si une seule mise est inférieure au prix de réserve, alors le second prix aura pour valeur le prix de réserve. La probabilité d'un tel événement est

$$P[R = r] = (1 - F_1(r))F_2(r) + F_1(r)(1 - F_2(r)) = 2r(1 - r).$$

Puisque lorsque les deux mises sont supérieures à r , le prix de réserve n'influence

pas le revenu, nous allons calculer les espérances conditionnelles de revenu avec et sans prix de réserve lorsque le revenu n'est pas supérieur à r . Pour simplifier les calculs, nous évaluerons en fait le produit de ces espérances conditionnelles par la probabilité $P[R \leq r] = P[R' \leq r]$.

Avec le prix de réserve, le revenu est égal soit à r , soit à 0, et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R|R \leq r]P[R \leq r] &= \mathbb{E}[R|R = 0]P[R = 0] + \mathbb{E}[R|R = r]P[R = r] \\ &= 2r^2(1 - r).\end{aligned}$$

Sans prix de réserve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R'|R' \leq r]P[R' \leq r] &= \int_{t=0}^{t=r} [P(x_1 = t)P(x_2 \geq t) + P(x_1 > t)P(x_2 = t)] t dt \\ &= \int_{t=0}^{t=r} 2tf(t)(1 - F(t)) dt \\ &= \int_{t=0}^{t=r} 2t(1 - t) dt \\ &= 2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^r \\ &= r^2 \left(1 - \frac{2}{3}r \right).\end{aligned}$$

Nous avons tracé dans la figure 1.1 les courbes correspondant à l'évolution de ces quantités en fonction de r . On remarque que pour un prix de réserve inférieur à $3/4$, l'espérance du revenu avec prix de réserve est supérieure à celle sans prix de réserve.

1.3.3 Groves et Clarke

Tout le matériel de cette section est tiré du livre de microéconomie de Mas-Colell, Whinston et Green (1995), principalement le chapitre 23.C. Nous avons gardé la même notation pour rester fidèle à leurs explications. Nous présentons en premier le mécanisme de Groves, puis celui de Clarke qui est un cas particulier.

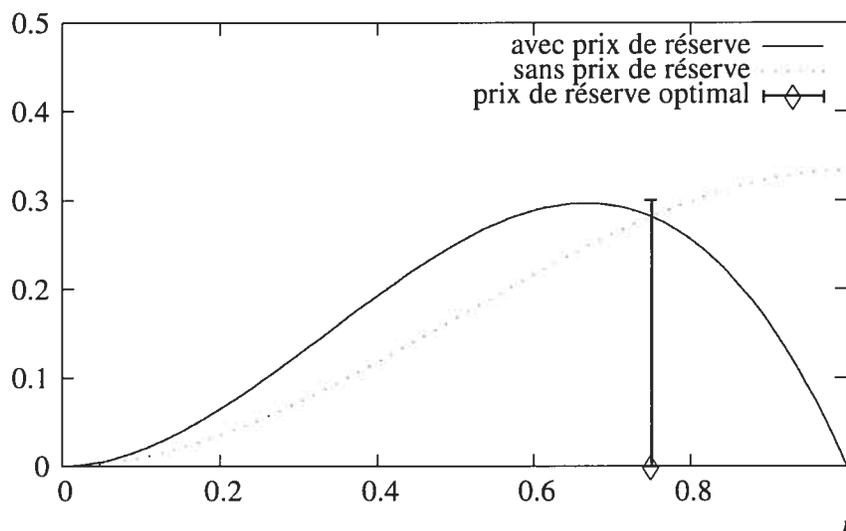


Figure 1.1 – Espérance conditionnelle pondérée d’un revenu inférieur à r avec et sans prix de réserve pour une enchère de second prix à deux participants.

1.3.3.1 Mécanisme de Groves

Soit I l’ensemble des participants (ou agents) et K l’ensemble de toutes les affectations possibles des biens aux participants. Les préférences des agents sont modélisées par le biais de *types* abstraits. Dans le cas d’une enchère d’un seul bien, le type θ_i de l’agent i correspondra habituellement à la valeur du bien pour lui. Dans le cas d’une enchère de plusieurs biens, le type de l’agent i correspondra plutôt au vecteur des valeurs qu’il associe à la possession de chaque sous-ensemble possible de ces biens. Ainsi, si trois biens A, B et C sont vendus dans le cadre de l’enchère, le type d’un agent peut être exprimé par un vecteur donnant les valeurs des $2^3 = 8$ combinaisons des biens A, B et C qui pourraient lui être attribuées. On dénote par θ le vecteur des préférences de tous les participants et par Θ l’espace des préférences des agents.

Soit $\theta \in \Theta$ le vecteur des préférences de tous les participants, défini par $\theta = (\theta_i)_{i \in I}$. On note θ_{-i} le vecteur des préférences de tous les participants hormis i , $\theta_{-i} = (\theta_{i'})_{i' = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, |I\}}$.

Normalement, l’agent i est le seul à connaître parfaitement ses préférences ; on dit alors que son type θ_i est une *information privée* de cet agent. Dans le cadre de négo-

ciations, il est habituellement avantageux pour les agents de ne pas révéler aux autres participants l'information privée qu'ils détiennent. Ainsi, un éventuel locataire n'a pas avantage à révéler à son futur propriétaire le loyer maximum qu'il serait prêt à payer pour un appartement (qui est son type), car il peut espérer louer à moindre coût. Il est donc important de distinguer entre le type réel d'un agent et ses *préférences révélées* qui correspondent à ce qu'il a laissé savoir aux autres participants. Dans le cadre d'une enchère, la *préférence révélée* d'un agent pour un bien correspondra à la mise la plus élevée qu'il a annoncée pour ce bien.

Soit $t_i(\theta) \in \mathbb{R}$ le transfert de numéraire (« argent ») vers l'agent i dans le cadre de l'enchère. Une valeur négative de $t_i(\theta)$ indique un paiement de l'agent i , tandis qu'une valeur positive représente un montant qui lui sera versé.

La valeur de l'affectation $k \in K$ pour le participant $i \in I$ est définie par la fonction de valeur $v_i(k, \theta_i)$. Le bénéfice qu'il va retirer de sa participation à l'enchère, aussi appelé *utilité*, dépend de sa fonction de valeur et des transferts qu'il devra effectuer. Cette fonction est notée $u_i(k, \theta_i)$ et est définie par

$$u_i(k, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + t_i(\theta) - \bar{m}_i,$$

avec \bar{m}_i un droit d'entrée dans l'enchère, payable par l'agent i .

Fonction de choix social

Nous savons déjà que chaque participant possède une préférence individuelle, représentée par θ_i pour l'agent i , relativement aux affectations possibles des biens entre les participants. De manière générale, en théorie économique, le résultat de la confrontation des préférences de l'ensemble des agents dans un contexte donné correspond à ce que l'on appelle le *choix social*. Dans le cas d'enchères de biens, ce résultat est constitué tout simplement d'une affectation des biens aux participants, ainsi que des transferts de numéraires correspondants. La *fonction de choix social* d'une enchère associera donc à tout vecteur $\theta \in \Theta$ une affectation des biens $k(\theta)$. Il est important de remarquer qu'une

fonction de choix social donne le résultat de la confrontation des *préférences révélées* des participants.

Dans la suite, nous supposons que le mécanisme d'enchère induit une fonction de choix social f , définie par

$$f(\theta) = (k(\theta), t_1(\theta), \dots, t_{|I|}(\theta)),$$

où, pour tout $\theta \in \Theta$, $k(\theta) \in K$ est l'affectation donnée par la fonction et $t_i(\theta)$, $i \in I$, le transfert au participant i .

Pour être viable sur le plan économique, la fonction de choix social doit satisfaire la condition $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$ afin que les paiements puissent couvrir les recettes. Notons que si l'allocation des biens par le mécanisme d'enchère est *efficient*, alors la fonction de choix social $f(\theta)$ satisfera pour tout $\theta \in \Theta$

$$\sum_{i \in I} v_i(k(\theta), \theta_i) \geq \sum_{i \in I} v_i(k, \theta_i) \quad \forall k \in K.$$

Stratégie dominante

Nous présentons maintenant un résultat qui identifie une classe de fonctions de choix social qui satisfont les conditions précédentes et permettent d'implémenter des mécanismes dont la stratégie dominante est de dire la vérité.

Proposition 1.1. *Soit $f(\theta) = (k(\theta), t_1(\theta), \dots, t_{|I|}(\theta))$ une fonction de choix social qui correspond à une affectation efficiente des biens. On dit que $f(\theta)$ est **implémentable de façon sincère en stratégie dominante**, autrement dit, est telle que tout agent a avantage à révéler ses préférences vraies, si pour tout $i \in I$,*

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k(\theta), \theta_j) \right] + h_i(\theta_{-i}),$$

où $h_i(\theta_{-i})$ est une fonction arbitraire sur le domaine des préférences de tous les participants sauf i .

Démonstration. Nous allons montrer que si un participant ne révèle pas ses préférences véritables, il n'augmentera pas son utilité si $f(\theta)$ satisfait les hypothèses de la proposition.

Soit i un participant de l'enchère, θ le vecteur des vraies préférences de tous les participants, $\hat{\theta}_i$ la préférence révélée par le participant i telle que $\hat{\theta}_i \neq \theta_i$ et le vecteur $\hat{\theta} = (\theta_{-i}, \hat{\theta}_i)$.

S'il existe un participant i pour qui dire la vérité n'est pas une stratégie dominante, cela implique que son utilité sera supérieure à celle qu'il aurait obtenu s'il avait donné sa vraie préférence.

Soit u_i son utilité s'il dit la vérité et \hat{u}_i s'il ment. S'il peut augmenter son utilité en mentant, alors il existe $\hat{\theta}_i \neq \theta_i$ tel que $\hat{u}_i > u_i$. On aurait alors

$$\hat{u}_i = v_i(k(\hat{\theta}), \theta_i) + t_i(\hat{\theta}) > v_i(k(\theta), \theta_i) + t_i(\theta) = u_i.$$

En substituant $t_i(\theta)$ et $t_i(\hat{\theta})$ à l'aide de l'équation de la proposition 1.1, on obtient

$$\hat{u}_i = \sum_{j \in I} v_j(k(\hat{\theta}), \theta_j) > \sum_{j \in I} v_j(k(\theta), \theta_j) = u_i.$$

Or, cette relation contredit le fait que f soit efficiente. Donc, $f(\theta)$ implique comme stratégie dominante de dire la vérité.

□

Un mécanisme de révélation directe satisfaisant ces conditions est dit *mécanisme de Groves* ou *schéma de Groves*. Dans un mécanisme de Groves (1973), le transfert de numéraire de l'agent i n'est pas déterminé par sa mise, mais par celle de ses concurrents. Il reflète les externalités imposées à la concurrence.

Équilibrage du budget

Tel que défini précédemment, le mécanisme de Groves ne satisfait pas toujours la contrainte d'équilibre de budget, qui stipule que la somme des transferts numéraires est nulle :

$$\sum_{i \in I} t_i(\theta) = 0.$$

C'est une condition importante, car elle assure que le système économique est fermé, qu'il n'y a ni perte d'argent, ni besoin de financement extérieur. Pour le réaliser, il suffit que le transfert de numéraire du commissaire priseur soit égal à la somme des transferts dans le système. Ceci n'est malheureusement possible que s'il ne possède aucune préférence. Soit 0 l'indice représentant le commissaire priseur, son transfert est donné par

$$t_0(\theta) = - \sum_{i \in I} t_i(\theta).$$

1.3.3.2 Mécanisme de Clarke

Un cas particulier du mécanisme de Groves a été découvert par Clarke (1971) et est connu sous le nom de *mécanisme de Clarke*. C'est lui que nous allons utiliser pour la création de notre enchère de capacité. Il est obtenu en définissant la fonction $h_i(\cdot)$ du mécanisme de Groves par :

$$h_i(\theta_{-i}) = \sum_{j \neq i} v_j(k_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j),$$

où pour tout $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$, $k_{-i}(\theta_{-i})$, satisfait

$$\sum_{j \neq i} v_j(k_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j) \geq \sum_{j \neq i} v_j(k, \theta_j) \quad \forall k \in K.$$

Ainsi $k_{-i}(\theta_{-i})$ est une affectation Pareto optimale qui ne considère que l'ensemble des agents $j \neq i$. Le transfert de l'agent i dans le mécanisme de Clarke est alors donné par

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k(\theta), \theta_j) \right] - \left[\sum_{j \neq i} v_j(k_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j) \right].$$

1.3.3.3 Remarques

Dans le mécanisme de Clarke, le transfert du participant i sera nul si son annonce n'influence pas les affectations des autres participants et non nul si elle les influence. On parlera d'un *participant isolé* dans le premier cas et d'un *participant pivot* dans le second.

On notera aussi que la fonction de choix social du mécanisme de Clarke satisfait la condition de réalisabilité $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$ pour tout θ , $i \in I$, tel que $v_i(k(\theta), \theta_i) \geq 0$. En examinant la proposition 1.1 nous remarquons qu'une condition suffisante pour qu'un mécanisme de Groves satisfasse la condition $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$ pour tout θ est

$$h_i(\theta_{-i}) \leq - \sum_{j \neq i} v_j(k_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j) \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}.$$

Sandholm (1996) a répertorié certaines des mauvaises propriétés des enchères de Vickrey. Il remarque entre autres des problèmes dûs aux collusions, à un commissaire priseur non sincère et aux mensonges dans des enchères de valeurs non privées.

Brandt et Weiss (2001) ont montré que l'existence d'un participant *antisocial*, c'est-à-dire essayant uniquement de diminuer l'utilité des autres participants, ne garantit plus non plus l'incitation.

Une condition nécessaire pour que la proposition 1.1 soit vraie est l'obtention de solutions Pareto optimales pour la fonction de choix social. Il est donc impossible d'utiliser des algorithmes d'optimisation qui n'assurent pas la non dominance des solutions trouvées. Nous avons donc concentré nos efforts sur l'utilisation d'algorithmes exacts.

La révélation des valeurs peut être un problème majeur lors de l'utilisation d'un mécanisme VCG. Selon Sandholm (1996), c'est, avec le problème de non-sincérité du commissaire priseur, son principal défaut.

1.4 Enchères et réseaux

Il existe aujourd'hui un grand nombre de réseaux. Leur diversité de caractéristiques impose la création de systèmes de tarification adaptés à leurs spécificités. Les méca-

nismes d'enchère deviennent peu à peu des processus de négociation privilégiés pour réaliser cette tâche.

1.4.1 Tarification sur les réseaux

Mis à part les enchères, il y a trois méthodes principales de tarification sur les réseaux : ce sont les tarifications au forfait ou à l'utilisation, et la négociation.

Le forfait est aujourd'hui le mode de tarification préféré des opérateurs de télécommunication (Internet, téléphonie mobile). Il possède l'énorme désavantage de favoriser la surcharge du réseau en incitant les utilisateurs à utiliser l'ensemble de leur forfait, alors qu'une tarification « à la congestion » permettrait de limiter les problèmes de goulot d'étranglement. C'est un mode de paiement qui n'est viable que lorsque le coût de transport n'est pas très élevé en comparaison avec le coût d'acquisition ou de création du réseau. C'est sûrement la raison pour laquelle c'est le contrat préféré des abonnements Internet haut débit.

Les réseaux de télécommunication actuels étant largement surdimensionnés, il n'y a pas encore d'importants problèmes de congestion, mais la mise en place de la qualité de service sur Internet pourrait largement bénéficier des systèmes d'enchères de second prix (comme le montre la quantité de travail sur ce domaine).

La négociation s'effectue entre un petit groupe de protagonistes. Elle est intéressante, car elle permet aux participants de prendre en compte des qualités difficilement quantifiables, comme la notoriété d'un vendeur, l'empathie, etc. Elle favorise des paiements justes, où la majorité est contente de son choix, en autorisant les participants à argumenter.

En contrepartie, elle ne permet pas de disposer d'un mécanisme égalitaire envers tous les participants, puisque la subjectivité est sa principale qualité. De plus, il paraît difficile de gérer une négociation lorsque le nombre de participants devient trop important.

La tarification à l'utilisation est utilisée pour faire payer l'acheteur en fonction de son débit. Chaque unité de capacité utilisée par le consommateur est payée. C'est un

mode de paiement simple, mais rigide. Il convient parfaitement lorsque les utilisateurs sont occasionnels. Elle est très peu adaptée lorsque la fréquence et le mode d'utilisation de chacun sont très différents, car elle impose la création et la gestion de règles tarifaires différentes en fonction du type d'usage.

Chaque méthode est adaptée pour un cas précis d'utilisation. Néanmoins, aucune n'est capable de fournir la flexibilité de tarification qu'offre la négociation, avec la possibilité de prendre en compte un grand nombre d'acheteurs potentiels comme la tarification au forfait ou à l'utilisation.

Les enchères sont dans ce cas des méthodes appropriées qui favorisent l'entrée des participants et permettent d'obtenir une tarification en fonction de leur utilité.

1.4.2 Réseaux électriques

Le domaine dont l'infrastructure est en réseau et qui profite le plus des mécanismes d'enchères est sûrement aujourd'hui l'électricité et ses opérateurs de régulation. Leur nécessité d'équilibrer la consommation et la génération pour éviter des surcharges du réseau est autant une question d'intérêt économique que de sécurité. Depuis maintenant plus de dix ans, les opérateurs de régulation électrique de différents pays assurent la sécurité de leur réseau à l'aide de places de marché où chacun propose la vente ou l'achat de puissance. Les mécanismes sont souvent assez simples pour des raisons de temps de réponse et de facilité de participation. En Europe, ces places de marché permettent l'achat et la vente aussi bien au niveau national qu'international.

1.4.3 Réseaux de télécommunication

Dans une moindre mesure, les liaisons de télécommunications sont aussi négociées à l'aide de mécanismes. Dans ce domaine, par contre, beaucoup de travaux théoriques ont été effectués, mais il semblerait que peu d'applications pratiques aient été tentées. La plupart des contrats pour les particuliers et les professionnels sont aujourd'hui des contrats au forfait ou à l'utilisation.

1.4.4 Chaînes logistiques

Le coût de plus en plus important de l'essence ainsi que l'accroissement de la concurrence dans une économie globalisée, pousse les entreprises fortement consommatrices de services logistiques, à rechercher de nouveaux systèmes de procuration de service de transport. C'est naturellement que ces grands groupes adoptent des systèmes d'enchères pour diminuer leur coût et augmenter leur flexibilité de procuration.

1.4.5 Réseaux ferroviaires

Un autre domaine dans lequel encore peu d'applications ont été présentées est le domaine ferroviaire. Bien que quelques implantations aient été réalisées, comme en Allemagne, l'approche ne s'est pas encore généralisée. Néanmoins, la libéralisation des réseaux ferrés européens et l'engouement de l'administration européenne devraient favoriser l'acceptation d'une telle approche par les compagnies de gestion des différents réseaux nationaux, comme il en a été pour les réseaux électriques.

La commission européenne œuvre depuis plusieurs années à l'ouverture totale des réseaux à la concurrence. Le principal obstacle auquel se heurtent leurs gestionnaires vient de la difficulté d'obtenir une utilisation optimum de la capacité du réseau. Par exemple, en Allemagne, les droits de passages sont accordés en fonction de certaines règles de priorité. Lorsqu'il y a un conflit entre deux entités ayant des priorités égales, le plus offrant remporte le droit. Ce type de tarification n'est pas efficient, surtout lorsqu'il y a congestion. En effet, l'acquisition d'un goulot d'étranglement (zone de congestion) peut éviter des affectations de priorités plus faibles, mais possiblement plus nombreuses.

1.5 Problématique

Nous souhaitons principalement développer un mécanisme d'enchère facile d'accès, utilisable par un état ou une entreprise privée de gestion pour négocier la vente de contrats d'utilisation sur des tronçons d'un réseau. Nous décrirons les formulations de

trois places de marché. Une de ces places de marchés sera ensuite étudiée plus en profondeur et une implémentation à l'aide d'un algorithme pertinent sera proposée.

1.5.1 Problème principal

Nous souhaitons étudier dans ce mémoire la mise en œuvre d'un mécanisme de Clarke pour la vente de capacité point à point sur des réseaux de transport. Nous focalisons notre étude sur le cas des réseaux ferroviaires et de télécommunications, mais celle-ci peut être appliquée à d'autres domaines.

L'unique vendeur possède le réseau mis aux enchères. Les acheteurs potentiels disposent d'une demande à transporter entre deux nœuds du réseau. Ils misent pour l'acquisition d'un droit de transport. Le vendeur peut imputer un coût d'utilisation en fonction de la quantité de ressources traversant chaque arc de son réseau. Ce coût peut être utilisé pour modéliser une taxe de pollution ou d'entretien.

L'opérateur de marché conduit l'enchère, affecte les droits de passage aux gagnants et définit leurs paiements.

Plusieurs acheteurs / un vendeur Nous nommons ce problème « plusieurs-vers-un ». Les participants disposent d'une quantité de biens, en un certain site, qu'ils souhaitent déplacer vers un autre site. Pour ce faire, chaque acheteur est prêt à payer un certain prix au commissaire priseur s'il est capable d'autoriser le transport de la totalité de sa demande entre les deux sites.

Les problèmes de tarification au routage dans un réseau monopolistique (détenu par une seule entité, comme l'état ou une compagnie) sont tout à fait susceptibles d'utiliser une telle modélisation.

Chaque arc du réseau possède un coût unitaire, égal au coût nécessaire au transport d'une unité de produit sur l'arc. Pour les réseaux de télécommunications, ce sera le temps de transfert ou le coût des communications. Pour les réseaux de transport, ce sera des coûts de transports ou d'entretien.

Chaque arc possède une capacité maximale de transfert. Il n'y a pas de coût fixe d'utilisation des arcs comme ce pourrait être le cas sur le réseau autoroutier français.

1.5.2 Variations

1.5.2.1 Un acheteur / plusieurs vendeurs

Le modèle « un-vers-plusieurs » est à l'opposé du précédent. Dans cette place de marché, les participants sont des vendeurs et le seul acheteur est le commissaire priseur. Il a des biens ou des informations à transporter entre des couples de nœuds origine et destination. Les vendeurs connaissent les demandes et proposent d'en autoriser un sous-ensemble. Les entreprises de grande distribution rencontrent des problèmes similaires.

1.5.2.2 Plusieurs acheteurs / plusieurs vendeurs

Nous avons proposé des places de marché où il y avait un unique vendeur ou un unique acheteur. L'enchère que nous nommons « plusieurs-vers-plusieurs » est une synthèse de ces deux approches. Elle implémente une bourse d'échange où des acheteurs et des vendeurs se rencontrent pour mettre en commun des offres et des demandes. Les acheteurs possèdent des demandes entre des sites et les vendeurs proposent de les satisfaire.

1.5.3 Illustration

La place de marché est composée de vendeurs qui possèdent un réseau de distribution et d'acheteurs qui souhaitent déplacer une demande entre certains sites d'un réseau de transport.

Le réseau de transport est schématisé à l'aide d'arcs représentant des routes possibles entre deux sites. Il y a sur le réseau trois types de nœuds selon la nature du site géographique représenté : les centres de production, les sites de consommation et les plates-formes. Les produits doivent être déplacés des centres de production vers les centres de consommation. Durant leur transport, il est possible de les entreposer dans des plates-formes et d'y changer de transporteur.

Dans le cadre de réseau de transport, les acheteurs doivent posséder un certain contrôle sur les routes qu'ils autorisent pour le transport de leur produit. Tous les modes de transport ne conviennent pas à tous les produits ; par exemple, il serait inutile de faire transiter le courrier urgent, ou des denrées très périssables, par la voie maritime. Des restrictions légales peuvent aussi limiter les routes acceptables : il y a des substances qui sont autorisées dans des pays et pas dans d'autres ; dans les villes, il y a des routes où l'on ne doit pas faire transiter de matières dangereuses.

Pour illustrer notre problématique, nous présentons deux exemples. Le premier est basé sur un réseau de transport et illustre les concepts, tandis que le second propose un exemple numérique plus simple.

Exemple 1

La place de marché est composée de trois vendeurs et de deux acheteurs. Chaque vendeur possède un réseau de distribution : le premier détient une liaison aérienne entre New York et Moscou, le second quatre liaisons maritimes et le dernier un réseau de transport routier. Les acheteurs sont des compagnies qui souhaitent faire acheminer leur produit entre les centres de production et ceux de consommation.

La figure 1.2 schématise simplement le problème de transport.

L'enchère commence par la soumission des préférences de chacun : les demandes et le prix que les acheteurs sont prêts à payer ainsi que les plans de transport et coût des vendeurs. Une fois cette soumission faite, les gagnants ainsi que l'affectation des demandes aux transporteurs sont calculés par le commissaire priseur.

Dans le cadre d'un mécanisme VCG, les paiements de chaque participant seront égaux à la valeur de l'enchère avec tous les participants retransché de la valeur de l'affectation pour le participant et de celle de l'enchère sans ce participant.

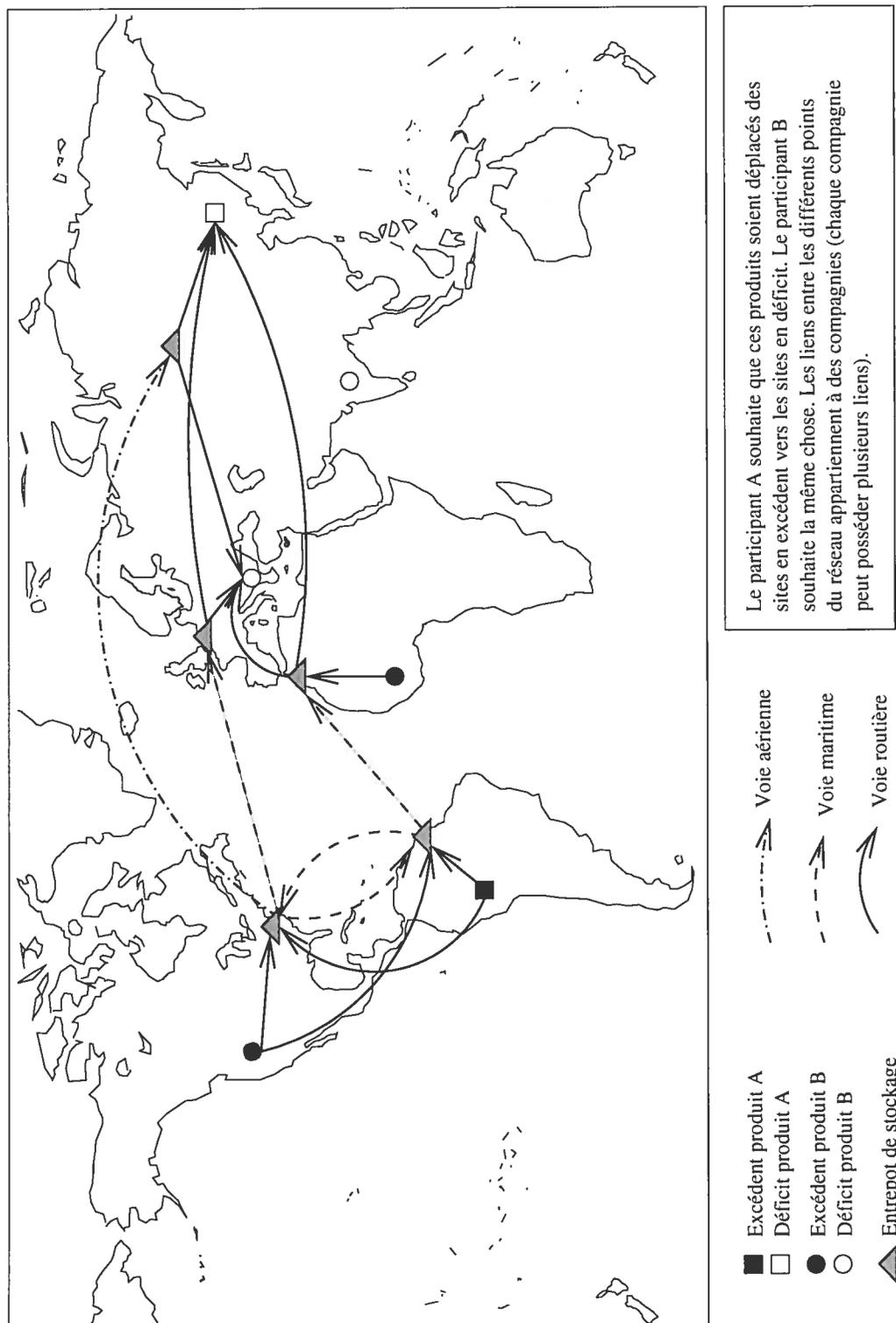


Figure 1.2 – Exemple d’application d’une bourse de capacité

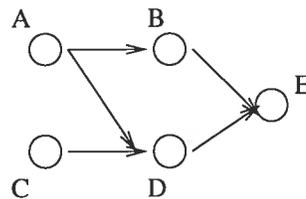


Figure 1.3 – Réseau de l'exemple 2

Exemple 2

La place de marché est composée de quatre acheteurs et d'un unique vendeur. Le vendeur possède l'ensemble des arcs du réseau et chaque arc a une capacité unitaire. Les acheteurs ont tous une demande d'une seule unité à faire transiter entre deux nœuds du réseau. Le réseau est illustré dans la figure 1.3.

Les préférences de chaque participant sont présentées dans le tableau suivant :

Acheteur	Origine	Destination	Prix
1	A	E	9
2	B	E	5
3	C	E	10
4	D	E	10

Comme toutes les demandes se dirigent vers le sommet E et que la capacité totale des arcs est égale à deux, on ne peut satisfaire plus que deux demandes. De plus, on remarque que les demandes des acheteurs 3 et 4 sont incompatibles. L'affectation optimale retient donc comme gagnants les participants 1 et 4. La valeur de l'enchère est alors 19. Si on retire le participant 1, la valeur de l'enchère passe à 15. Son paiement dans un mécanisme de Clarke est alors $19 - 9 - 15 = -5$, il doit payer 5 au commissaire priseur. Par contre, le retrait du participant 4 ne change rien à la valeur de l'enchère, car le participant 3 a fait une mise de même valeur. Il devra alors payer le prix maximum ($19 - 10 - 19 = -10$),

soit 10, car il a imposé un manque à gagner important au participant 3 qui avait fait une mise équivalente.

CHAPITRE 2

TRAVAUX ANTÉRIEURS

2.1 Enchère sur réseau et mécanisme VCG

Nous allons maintenant montrer quelques mécanismes et applications parus dans la littérature traitant des places de marché électronique sur les réseaux.

2.1.1 Mécanismes d'enchère sur réseau

2.1.1.1 « Progressive Second Price »

Lazar et Semret (1997) ont proposé un mécanisme itératif généralisant l'enchère de Vickrey à la vente d'un bien infiniment divisible. Leur mécanisme, dénommé Progressive Second Price (PSP), est un mécanisme itératif. Chacun des n acheteurs $i, i \in N$, souhaite acquérir une partie de la capacité C d'un même lien. Les gagnants se voient attribuer le minimum entre la capacité demandée d_i et la capacité résiduelle sur le lien une fois allouée la capacité des participants ayant fait une mise supérieure. Le prix payé par chaque gagnant i est noté π_i et les mises sont ordonnées par ordre croissant, $p_i > p_j$ si $i > j$.

La quantité q_i allouée au participant i est donc déterminée par

$$q_i(N) = \min \left\{ d_i, \left[C - \sum_{\{j \in N: p_j > p_i\}} q_j \right]^+ \right\}.$$

Le prix payé par le gagnant i est

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{\sum_{j \neq i} p_j [q_j(N \setminus \{i\}) - q_j(N)]}{\sum_{j \neq i} [q_j(N \setminus \{i\}) - q_j(N)]}, & \text{si } q_i > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intuition derrière ce mécanisme est un principe de compensation d'exclusion : le paiement du gagnant i prend en compte le manque à gagner imposé aux concurrents.

Cette règle d'affectation et de calcul des paiements n'est pas très gourmande en temps de calcul. Le tri des mises nécessite $\mathcal{O}(n \log n)$ opérations élémentaires, l'affectation de capacité est résolue en temps linéaire, $\mathcal{O}(n)$ et le système d'équations linéaires de détermination des paiements est résolu avec $\mathcal{O}(n^2)$ opérations élémentaires.

Les auteurs montrent que ce mécanisme possède une stratégie dominante consistant à révéler la vérité sur ses préférences. Ils démontrent aussi que cette stratégie mène à un équilibre. Ils montrent aussi que le PSP appliqué à un arbre (graphe orienté sans cycle) conserve ses propriétés.

2.1.1.2 PSP et mises-combinées

Maillé et Tuffin (2003) ont proposé la généralisation du PSP aux environnements stochastiques. Ensuite, Maillé et Tuffin (2004) ont exposé un mécanisme lui aussi inspiré du PSP, pour l'allocation de bande passante dans les réseaux de télécommunications. Leur enchère permet de réguler la congestion et est un mécanisme à un seul tour, réduisant considérablement la quantité de données à envoyer au commissaire priseur.

Les préférences des utilisateurs sont exprimées à l'aide de fonctions en escalier. Les mises sont composées de blocs, décrivant le prix qu'est prêt à payer un acheteur pour la satisfaction d'une certaine quantité de sa demande. Ils permettent de modéliser des préférences non linéaires.

2.1.1.3 « Smart Pay Admission Control »

Shu et Varaiya (2003) proposent le mécanisme SPAC pour la tarification du trafic sur Internet. Il est basé sur une « taxe de congestion ». Toutes les connexions demandées sont satisfaites, les mises portant sur la qualité de service voulue. Il permet de réaliser la qualité de service en contrôlant la congestion et est un mécanisme incitatif comme les enchères de Vickrey.

2.1.1.4 Plus court chemin

Hershberger et Suri (2001) ont proposé une méthode de résolution pour une enchère de Vickrey sur le plus court chemin d'un graphe. Chaque participant possède un arc du graphe et vend un droit de passage dessus. Le commissaire priseur tente d'acquérir le chemin le moins cher entre deux points fixés du graphe. L'enchère est résolue en utilisant un programme dynamique pour trouver le plus court chemin et combine ces calculs pour déterminer les paiements de Vickrey.

2.1.1.5 Transport

Song et Regan (2003) ont proposé un mécanisme d'enchère pour les petits et moyens transporteurs qui modélise un marché secondaire où chacun peut revendre les contrats acquis précédemment. Les participants tentent alors de maximiser l'utilisation de leur ressource en limitant les trajets à vide (repositionnements) et les destinations peu rentables pour eux. Les règles d'entrée de certaines enchères empêchent la participation de certains transporteurs qui ne satisfont pas leurs critères, même s'ils sont compétitifs. L'utilisation de marchés secondaires, moins restrictifs, permet de restaurer une certaine équité en leur donnant la possibilité de récupérer les contrats sur lesquels ils sont les plus efficaces.

2.1.2 Mises en œuvre

2.1.2.1 Énergie

Les mécanismes d'enchère sur les réseaux d'énergie sont étudiés depuis plusieurs années maintenant. Bohn, Caramanis et Schweppe (1984) proposent un mécanisme d'enchère sur un réseau électrique permettant de donner un prix en fonction de l'emplacement du client et de l'heure. Ils utilisent une relaxation lagrangienne des contraintes du problème et en dérivent une fonction de calcul du prix.

En Europe, certains pays utilisent déjà depuis quelques années des mécanismes d'enchère pour négocier leur approvisionnement énergétique : par exemple, l'Allemagne pour son réseau électrique ou l'Angleterre pour son réseau de gaz. La libéralisation du

marché énergétique européen encourage l'utilisation d'enchère dans les échanges énergétiques (voir à ce sujet le site Web de l'ETSO). Comme le montre Newbery (2002), ce sont pour la plupart des enchères de premier prix capable de prendre en compte un grand nombre de contraintes fonctionnelles (incertitude de la demande, inertie du contrôle de la production, contraintes de transfert, équilibre énergétique, etc.).

2.1.2.2 Télécommunications

Les télécommunications ont bénéficié d'un grand nombre de travaux théoriques. Depuis la publication de Shenkar, Clark et Herzog (1996), des travaux importants ont été effectués sur les mécanismes d'enchère de second prix dans le domaine de la transmission d'informations. La majeure partie des télécommunications actuelles (téléphonie, Internet) utilise des protocoles supposant que tous les opérateurs vont agir pour le bien de tous. Cette hypothèse est viable si les ressources ne sont pas rares. Elle devient caduque dès lors que les opérateurs sont égoïstes et tentent d'obtenir le maximum de débit, au dépens des autres.

Par exemple, nous pouvons montrer que pour des protocoles comme TCP, une simple modification du mode de gestion de l'envoi des paquets suffit à augmenter la bande passante utilisable au détriment des autres utilisateurs du réseau.

Pour pallier ce problème, MacKie-Mason (1997) a créé le mécanisme Smart Market. L'ensemble des routes demandées est connu avant l'enchère. Elle a lieu sur la qualité de service demandée par chaque participant sur chaque arc. Il montre que ce type de mécanisme permet de limiter la congestion en faisant payer les utilisateurs en fonction de la charge qu'ils imposent au réseau. Jarray et Wynter (2001) proposent un modèle basé sur le Smart Market et calculant simultanément l'allocation optimale et les prix de Vickrey.

Yuen et Li (2004) ont proposé et simulé un mécanisme d'enchère incitatif pour les réseaux de diffusions « multicast » ayant une structure d'arbre.

2.1.2.3 Transport ferroviaire

Brewer et Plott (1996) proposent le mécanisme (BICAP) afin de vérifier la possibilité d'utiliser un mécanisme d'enchère pour résoudre des problèmes d'affectation de trains. Ils utilisent un mécanisme itératif d'enchère croissante, l'objet de la mise étant l'affectation d'un train. Ils remarquent le manque de théorie existant sur le sujet des mécanismes d'enchère sur réseau. Plus récemment, Brewer et Plott (2002) ont étudié de façon empirique un système d'enchère dans lequel un producteur souhaite déplacer des produits entre différents sites. Le coût de stockage, les besoins et les disponibilités sont connus a priori.

Le problème d'ordonnement de trains et d'affectation de voitures a été traité en utilisant un mécanisme d'enchère par Kraft (2002). Il propose un mécanisme d'enchère inspiré de la programmation à deux niveaux et permettant de résoudre des problèmes d'ordonnement de trains. La résolution est décomposée en deux parties. La première phase est un mécanisme dynamique d'ordonnement. La deuxième calcule le prix de chaque train en fonction de la demande origine/destination (O/D). Le mécanisme boucle sur ces deux phases jusqu'à atteindre un équilibre.

Nilsson (2002) propose et discute l'application d'un mécanisme d'enchère de second prix pour la dérégulation du réseau ferroviaire européen. Il soulève le fait qu'en pratique les opérateurs ferroviaires amortissent sur plusieurs dizaines d'années leurs infrastructures et qu'il est alors difficile pour eux de quantifier de façon précise le coût d'exploitation d'un train. Une enchère sur des droits d'exploitation, même pour des contrats à moyen terme de l'ordre de l'année, les mettrait dans le doute et ne pourrait sûrement pas leur permettre d'investir dans de nouvelles ressources (voitures, locomotives, ...).

2.1.2.4 Transport routier

Certaines compagnies fortement consommatrices de services de logistique font aussi appel aux enchères pour se procurer de la capacité afin d'assurer leur flot de marchandise. Elles utilisent de plus en plus les enchères pour négocier l'achat de service de transport. Elmaghraby et Keskinocak (2002) rapportent l'utilisation d'enchères combinatoires par

The Home Depot Inc., avec une solution de i2, par Wal-Mart Stores, Compaq Computer Corporation, Staples, The Limited et plusieurs autres compagnies, avec une solution de Logistics.com. de Vries et Vohra (2003) notent l'utilisation d'une solution de Logistics.com pour K-Mart Corporation ainsi que pour Ford Motor Company. Leur article contient aussi des références aux compagnies Saitech, Manugistics et Schneider Logistics comme ayant des solutions logicielles pour des enchères combinatoires de services de transport. Plus récemment, Cargill a adopté, en mai 2005, un système d'enchère de chez VerticalNet pour le sous-traitement de son transport. L'entreprise a rapporté un gain de six pour cent sur ses coûts de transport tout en construisant des relations durables dans une période où l'augmentation du prix de l'essence fait grimper les coûts.

Sheffi (2004) a fait un état des mécanismes actuellement utilisés dans différents processus d'acquisition de service de transport. Le réseau sur lequel a lieu l'enchère est le réseau de transport de l'expéditeur et chaque transporteur essaie d'obtenir l'exploitation de certaines parties de ce réseau. L'entité achetée est un paquet de couples O/D. Le mécanisme est itératif et utilise un problème d'affectation de lots.

2.1.3 Mécanismes de VCG

Rothkopf, Teisberg et Kahn (1990), ainsi que Ausubel et Milgrom (2004), ont montré quelques difficultés dans l'application pratique des mécanismes VCG. Ils soulignent tout de même leur intérêt théorique pour l'élaboration de mécanismes plus complexes.

Nisan et Ronen (1999) ont prouvé que l'utilisation de méthodes approchées pour la résolution des mécanismes VCG ne permet pas toujours de garder les propriétés de ces mécanismes. Nous verrons par la suite, que l'optimalité de l'affectation des gagnants est une condition nécessaire.

Le problème de la divulgation des préférences a été étudié dans la thèse de doctorat de Brandt (2003) qui a proposé un mécanisme d'enchère implémentant une enchère de Vickrey et limitant la transmission d'informations entre les participants et le commissaire priseur. L'article de Nisan (1999) propose une étude de l'application pratique des mécanismes VCG à certains problèmes d'optimisation.

2.1.3.1 Programmation linéaire

Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001) ont montré de quelle manière il est possible de calculer efficacement les prix de Vickrey et les affectations des gagnants, pour des programmes linéaires ayant certaines propriétés. Celles-ci sont l'intégralité du polytope et ce qu'ils nomment la « condition de substituabilité des agents ». Elle est vérifiée lorsque :

$$V(N) - V(N') \geq \sum_{n \in N'} V(N) - V(N \setminus \{n\}),$$

avec N l'ensemble de tous les participants et $V(N)$ la valeur de l'enchère lorsque l'ensemble des participants est $N' \subseteq N$.

L'utilisation d'un algorithme primal-dual pour résoudre ces programmes détermine les gagnants à l'aide de la solution optimale primale et les prix de Vickrey à l'aide de la solution optimale duale d'un programme linéaire. Il est découlé une classe d'enchère basée sur des problèmes linéaires pouvant être efficacement résolue.

2.1.4 Conclusion

Une grande partie des mécanismes utilisés sur les réseaux de transport sont des mécanismes itératifs. Ils requièrent de faire des offres en temps continu. Ceci a le désavantage d'exiger un système de transmission de l'information rapide pour que chaque participant puisse réagir en temps réel. Ils restreignent l'ensemble des participants éligibles à ceux disposant d'une infrastructure de télécommunication spécifique. Il apparaît aussi très clairement que l'utilisation des mécanismes de VCG sur les réseaux est un domaine de recherche très actif pour la tarification sur les réseaux de télécommunication, mais paraît peu appliqué aux autres réseaux de transport. Les mécanismes utilisés sur ces derniers utilisent principalement une fonction de coût marginal, préférée pour la simplicité d'implantation, mais souvent inefficace lorsqu'il n'y a pas de congestion.

2.2 Vickrey et les réseaux à une commodité

Nous présenterons dans cette section des algorithmes pour résoudre certaines enchères de Vickrey sur réseaux. Cette présentation a pour but de montrer les difficultés rencontrées et des approches de résolution.

Depuis l'article de Nisan et Ronen (2000) qui soulèvent la question de la résolution efficace des enchères de Vickrey sur les réseaux, nombre de travaux ont été effectués afin de résoudre efficacement les n problèmes de détermination des prix de Vickrey.

Nous présentons des méthodes issues de la littérature, pour implémenter des enchères sur des arbres de recouvrement de poids maximum, des affectations de tâches et des plus courts chemins. Nous verrons ensuite la difficulté d'utiliser ces approches sur le problème plus général de flot compatible à coût minimum.

Nous renvoyons le lecteur au travail de Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001) pour l'utilisation des variables duales en programmation linéaire afin de calculer les prix de Vickrey de certains problèmes sur les graphes (entre autres certains plus courts chemins et l'arbre de recouvrement).

2.2.1 Arbre de recouvrement de poids minimum

Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2005) proposent un mécanisme VCG pour la vente d'un arbre de recouvrement de poids minimum. Cette enchère peut être utilisée pour des problèmes de diffusion. Nous l'illustrons à l'aide d'un exemple simple.

Exemple

La compagnie Québec-Hydrogène souhaite sous-traiter la création d'un réseau de distribution de son hydrogène liquide. Elle veut que tous ses centres de distribution soient connectés. Chaque participant propose la connexion de deux sites. Le coût de chaque arc représente le prix que le sous-traitant demande pour assurer la création de la liaison.

Le problème à résoudre pour désigner les gagnants est un *problème d'arbre de recouvrement de poids minimum* sur un graphe.

Les auteurs souhaitent disposer d'un mécanisme itératif afin d'offrir la possibilité de découvrir leur valeur. Ils supposent qu'aucun participant ne possède de monopole (aucun vendeur ne détient une coupe du graphe).

Ils montrent que l'utilisation de l'algorithme glouton qui sélectionne l'ensemble des arcs du graphe et retire un à un, par valeur non décroissante, les arcs qui ne déconnectent pas le graphe, permet de calculer dans le même temps asymptotique, l'affectation et les paiements de Vickrey. Leur algorithme reste valide si les participants veulent obtenir des droits sur plusieurs arcs.

Travaux connexes. Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001) ont montré que la condition qu'ils appellent « *de substituabilité des agents* » est vérifiée pour le problème d'arbre de recouvrement de poids minimum. Les prix de Vickrey peuvent donc être calculés à l'aide des variables duales du programme linéaire.

2.2.2 Problème d'affectation

Holland et O'Sullivan (2003) ont proposé la méthode de calcul des prix de Vickrey pour les problèmes d'affectation que nous allons exposer dans cette section. Ils motivent leur recherche par l'utilisation d'un mécanisme d'enchère pour le calcul distribué aussi appelé « calcul sur grille ».

Le problème d'affectation de ressources qu'ils traitent se modélise à l'aide d'un graphe bipartite. Il consiste à affecter un ensemble de tâches à des ressources, toutes les tâches devant être affectées. Chaque tâche ne peut être affectée qu'à une seule ressource et chaque ressource ne peut être utilisée que pour réaliser une seule tâche à la fois.

Exemple

Le calcul sur grille nécessite d'affecter les tâches à effectuer aux machines libres. Les propriétaires de chaque machine reçoivent un

paiement fonction de la tâche qu'elle réalise. Elles sont donc des fournisseurs de service égoïstes, car elles préféreront maximiser leur gain personnel plutôt que de minimiser le coût total des tâches réalisées. L'utilisation d'un mécanisme incitatif et efficient palliera ce problème.

Dans le cas d'affectation de tâches, chaque participant possède un ensemble de ressources et il propose une mise pour chacune des tâches qu'il peut traiter. Les participants ne peuvent pas proposer de mise pour une tâche qu'ils ne peuvent pas remplir. Chaque participant propose pour chaque tâche qu'il peut remplir le paiement nécessaire à sa réalisation.

La résolution de l'affectation à l'aide de la méthode hongroise a une complexité en $\mathcal{O}(nS(n, m))$ (m est le nombre de ressources, n le nombre de tâches et $S(n, m)$ la complexité de résolution d'un problème de plus court chemin). La méthode naïve de calcul des prix de Vickrey est donc en $\mathcal{O}(mnS(n, m))$.

Théorème 2.1. *Soit une solution optimale d'un problème de flot à coût minimum. On retire une unité de capacité à l'arc (i, j) . Si le flot sur l'arc (i, j) devient strictement supérieur (d'une unité) à la capacité de l'arc (i, j) , alors il est possible de retrouver la solution optimale en envoyant l'unité de flot en excès sur le plus court chemin entre i et j dans le graphe résiduel.*

Puisque ce problème d'affectation à coût minimum se modélise à l'aide d'un graphe dont les arcs ont une capacité unitaire, le calcul des prix de Vickrey requiert autant de recherche de plus courts chemins qu'il y a d'arcs, soit une complexité en $\mathcal{O}(mS(n, m))$. Or, on sait qu'une tâche n'est affectée qu'à un seul fournisseur. Il y a donc au plus n problèmes de calcul des prix de Vickrey. La résolution des prix de Vickrey est alors en $\mathcal{O}(nS(n, m))$, ce qui est identique à la complexité de la résolution de l'affectation.

Travaux connexes. Hung, Hsu et Sung (1993) proposent un algorithme ayant la même complexité et pouvant être utilisé avec tous les algorithmes d'affectation optimale. Son avantage est qu'il permet de bénéficier des améliorations des méthodes d'affectation. En

contrepartie, il nécessite la modification du graphe original. Comme pour le problème de base de matroïde, Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001) ont montré que la condition nécessaire « *de substituabilité des agents* », est vérifiée pour le problème d'affectation.

2.2.3 Plus court chemin sur un graphe

Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001) ont montré que *le problème de plus court chemin* dans un graphe ne satisfait pas toujours la condition de « *substituabilité des agents* », condition nécessaire pour obtenir les prix de Vickrey à l'aide des variables duales.

Hershberger et Suri (2001) ont développé une méthode permettant de calculer les prix de Vickrey dans le cas où les participants possèdent exactement un arc du graphe et que le commissaire priseur souhaite acquérir un droit de passage sur le plus court chemin du graphe. Ils montrent que leur algorithme a la même complexité asymptotique que l'algorithme de recherche du plus court chemin, soit $\mathcal{O}(m + n \log n)$ si les arcs ont des coûts non négatifs et $\mathcal{O}(nm)$ si les arcs ont des coûts négatifs (mais pas de cycles négatifs).

Illustrons l'intérêt d'une telle recherche à l'aide de deux exemples simples.

Exemple 1

Nous considérons un réseau de télécommunication. Les fournisseurs d'accès possèdent les arcs. L'utilisation de chaque arc engendre un coût fixe. Le commissaire priseur souhaite acquérir les droits pour une liaison entre deux points du réseau. Le plus court chemin entre ces deux points représente sa solution économique.

Exemple 2

La compagnie Maison-Carcajou sous-traite la construction de ses immeubles. Elle souhaite utiliser un système d'enchère pour son prochain bâtiment. Il y a des règles de précedence dans l'exécution des tâches : la construction de la toiture ne peut pas commencer tant que

les étages ne sont pas finis. Chacun des sous-traitants propose la réalisation d'une tâche (l'ensemble des tâches étant donné par la compagnie), donne un prix, une date de début au plus tôt et une date de fin au plus tard. Maison-Carcajou souhaitera appliquer une politique tarifaire prenant en compte le retard que chacun impose aux autres. Un tel problème d'ordonnancement pourrait être modélisé à l'aide d'un *problème de plus court chemin dans un graphe sans circuit*. C'est une extension du problème original pour lequel la taxe de Clarke a été créée. Les rétributions que reçoivent les entrepreneurs sont fonction du retard qu'ils imposent aux autres.

Nous présentons maintenant un exemple numérique d'un tel problème.

	Soustraitant	début	fin	coût
Étage				
	S1	10	20	10
	S2	30	40	15
Toiture				
	S3	30	50	10
	S4	30	50	15
	S5	40	60	17

L'affectation optimale ainsi que le calcul des paiements pour les deux gagnants sont représentés dans la figure 2.1. Dans cet exemple, un transfert de numéraire négatif correspond à un encaissement.

Dans cet exemple, S1 reçoit plus d'argent que S3, bien que le prix soumis par les deux soit identique. Ceci s'explique par le fait que si S1 n'est pas choisit pour participer au projet, alors S3 ne le sera pas non plus à cause de la date de début qu'il a soumise, qui est antérieure à la date de fin de la réalisation de l'étage par S2. Il est donc normal que S1 soit plus retribué que S3.

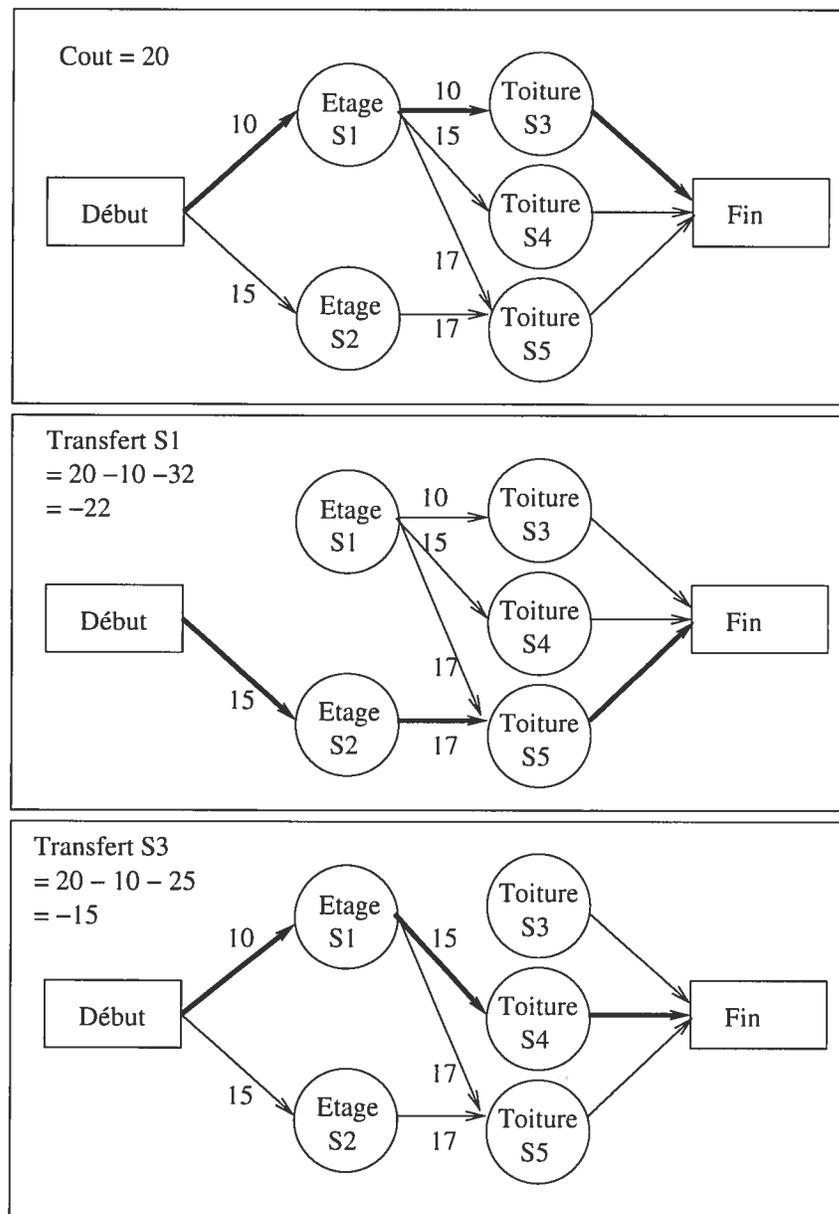


Figure 2.1 – Exemple d'application des mécanismes VCG à un problème d'ordonnement

La détermination des gagnants est donnée par le plus court chemin de s à t . Le paiement à verser au propriétaire d'un arc e correspond à la différence de la longueur de ce plus court chemin et de celle du plus court chemin qu'on obtient quand on supprime l'arc e du graphe. On peut calculer efficacement les paiements, à partir du calcul des plus courts chemins de s vers les autres sommets, puis de tous les sommets vers t . En effet, une combinaison des résultats de ces deux calculs donne le prix de Vickrey pour chaque arc du plus court chemin. Ce résultat montre que les paiements de Vickrey, dans des enchères dont le problème de détermination des gagnants est résolu par un programme dynamique, sont susceptibles de pouvoir être calculés en un temps qui est de l'ordre du double de celui requis pour déterminer les gagnants.

2.2.4 Problème de transport

Les vendeurs possèdent un arc du réseau tandis que l'unique acheteur souhaite acquérir la capacité nécessaire au transport de produits indifférenciés entre des sites de production et de stockage. Le problème de détermination des gagnants est alors un problème de *circulation à coût minimum* (aussi appelé problème de flot compatible à coût minimum). Comme l'ont montré Bikhchandani, de Vries, Schummer et Vohra (2001), le problème de flot ne possède pas la propriété de substituabilité des agents. Les prix de Vickrey ne peuvent donc pas être calculés à l'aide des variables duales du programme linéaire.

Exemple

Cette enchère pourrait être utilisée dans des cas de procuration de service logistique pour les entreprises de grande distribution, lorsque les biens transportés sont indifférenciés.

Modèle mathématique. $G = (V, A)$ est le graphe composé de l'ensemble des nœuds V et de l'ensemble des arcs A . Ce graphe comporte m arcs et n nœuds.

Soit $A^+(v)$ (respectivement $A^-(v)$) l'ensemble des arcs incidents vers l'extérieur (respectivement intérieur) du nœud v . x_a représente la quantité de flot sur l'arc a , c_a le coût unitaire, de transmission de flot sur l'arc a et u_a est la capacité maximale de l'arc a .

b_v représente la demande (respectivement l'offre) au nœud v si $b_v < 0$ (respectivement $b_v > 0$).

$$\min \sum_{a \in A} c_a x_a \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A^+(v)} x_a - \sum_{a \in A^-(v)} x_a = b_v \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

$$x_a \leq u_a \quad \forall a \in A \quad (2.3)$$

$$x_a \geq 0 \quad \forall a \in A \quad (2.4)$$

2.2.4.1 Réseaux à capacité unitaire

Pour les réseaux à capacité unitaire, d'après le théorème 2.1, il est possible d'obtenir les prix de Vickrey en résolvant au maximum m problèmes de plus courts chemins. La complexité de cet algorithme est donc en $\mathcal{O}(m(m + n \log n))$.

La meilleure borne actuelle pour la résolution d'un problème de flot maximum à coût minimum est

$$\mathcal{O} \left(\min \left\{ \begin{array}{l} nm \log(n^2/m) \log(nC), \\ nm(\log \log U) \log(nC), \\ (m \log n)(m + n \log n) \end{array} \right\} \right),$$

avec U la valeur de la coupe minimum du graphe, C la capacité maximale d'un arc, n le nombre de nœuds et m le nombre d'arcs.

Corollaire 2.2. *Pour les problèmes de flot à coût minimum de capacité unitaire, tel que $\min\{\log(n^2/m), \log \log U\} \gg m/(n \log n)$, il est possible de calculer les prix de Vickrey dans le même temps asymptotique que la résolution du problème de détermination des gagnants.*

Nous en déduisons que pour les problèmes de capacité unitaire très peu denses ($\log(n^2/m)$ grand) et ayant une coupe minimum de grande capacité ($\log \log U$ grand), il est possible de déterminer les prix de Vickrey de façon efficace en recalculant les plus courts chemins.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION

Nous présenterons dans ce chapitre trois types de places de marché, ainsi que leur modèle mathématique.

La première section détaillera la façon dont sont définies les préférences des participants. Dans la seconde section, nous exposerons trois places de marché. La première contient plusieurs acheteurs de capacité et un vendeur possédant l'ensemble du réseau de transport. La seconde est composée de vendeurs détenant des réseaux de transport et d'un acheteur souhaitant voir satisfait l'ensemble de ses demandes. La troisième permet la mise en place d'une « bourse de capacité » dans une économie fermée composée d'acheteurs et de vendeurs de capacité. La troisième section montrera les propriétés des paiements dans ces différents modèles.

3.1 Mises

3.1.1 Réseau

Le réseau sur lequel a lieu l'enchère est constitué de nœuds qui modélisent des sites et d'arcs qui représentent les liaisons entre ces derniers. Il résulte de l'union de l'ensemble des liaisons mises aux enchères par les vendeurs. Pour pouvoir limiter les changements d'opérateur (vendeur), il y a deux types de nœuds. Les « nœuds simples », qui n'autorisent pas le flot à changer de réseau, et les « nœuds d'échanges » qui sont utilisables pour faire transiter les demandes entre certains vendeurs. Ceci permet de modéliser des plateformes de chargement et déchargement, des routeurs optiques changeant la longueur d'onde d'une connexion ou encore des gares inter modales.

3.1.1.1 Réseau détenu par les vendeurs

Les sites sont connus a priori et les vendeurs proposent des liaisons entre eux. Suivant le type de problème, ces liaisons pourront être des voies de chemins de fers, des trains,

des routes, de la fibre optique ou tout autre type de liaison supportant le transport d'une demande. Si les vendeurs ont la possibilité de créer des liaisons, comme ce pourrait être le cas dans un réseau de télécommunication ou de trains, une phase de reconnaissance des préférences des acheteurs devra être mise en place pour découvrir les liaisons intéressantes pour les participants.

À chaque réseau est associé un vendeur. Si un vendeur possède des liaisons indépendantes (plusieurs trains ou camions par exemple), il faudra utiliser des vendeurs fictifs pour les représenter.

3.1.1.2 Réseau admissible des acheteurs

Les acheteurs souhaitent acquérir des ensembles de droits de passage leur permettant de satisfaire le transport d'une demande entre deux sites. L'ensemble des « contrats de liaisons » autorisés par le participant définit son *réseau admissible*. Il contient l'ensemble des arcs pouvant supporter sa demande. Il est utilisé pour restreindre le transport, par exemple, éviter des changements de frontières ou empêcher les affectations à un ensemble de liaisons n'assurant pas la qualité de service adéquate.

Pour les problèmes de transport, la demande modélise un flux de produits ou de ressources (camions, trains, wagons, etc.), tandis que dans les télécommunications elle représente un transfert d'information.

Nous avons fait le choix de traiter dans un premier temps de *flots substituables continus* pouvant être bifurqués. C'est le cas lorsque la demande de chaque participant est constituée de biens indifférenciés et qu'elle peut être divisée sur plusieurs chemins. C'est un choix pertinent pour des demandes modélisant des flux de matières premières : par exemple, chaque demande représente une compagnie et un type de matière première. Ils sont aussi une représentation intéressante lorsque les demandes, bien que composées de produits indissociables (personne, paquet TCP/IP, etc.), sont grandes et peuvent être approximées à l'aide d'un flot continu.

Dans un second temps, nous présenterons une résolution pour des problèmes dans lesquels l'acheteur propose les capacités qu'il souhaite acquérir sur les arcs du réseau. Il n'y a alors plus de contrainte sur le type de flot, puisque c'est à l'acheteur de s'assurer que le routage de sa demande suit ses prérogatives.

3.1.2 Notation

N est l'ensemble des participants. $N = I \cup J$ avec I l'ensemble des acheteurs et J l'ensemble des vendeurs. Le réseau sur lequel a lieu l'enchère est représenté par le graphe $G = (V, A)$. Chaque acheteur $i \in I$ souhaite que sa demande soit transportée sur le sous-réseau décrit par le graphe $G^i = (V^i, A^i) \subseteq G$. Les réseaux des vendeurs sont notés $G^j = (V^j, A^j)$, pour tout $j \in J$. Pour chaque nœud $v \in V^j$ nous définissons les ensembles d'arcs lui étant incidents vers l'extérieur $A_+^j(v)$ et l'intérieur $A_-^j(v)$.

Le prix que l'acheteur $i \in I$ est prêt à payer pour obtenir la capacité demandée est noté p_i et est positif. Le coût du vendeur $j \in J$ pour l'ouverture de son réseau est noté p_j et est négatif. Si les vendeurs $j \in J$ ont des coûts qui sont dépendant de la quantité de produits et du chemin emprunté, ils sont exprimables à l'aide du paramètre c_{ja} défini pour chaque arc $a \in A^j$.

Chaque acheteur $i \in I$ peut imposer une capacité d'utilisation minimum et maximum sur certains arcs, dans le cas où sa mise serait acceptée. Il en est de même pour les vendeurs qui peuvent ainsi forcer une allocation minimum sur leur réseau, dans le cas où une demande leur est affectée.

Puisque nous avons fait l'hypothèse que pour chaque mise le flot peut bifurquer, nous pouvons ajouter des nœuds dans le graphe de sorte que tous les acheteurs ont un nœud origine et un nœud destination entre lesquels doit transiter leur demande.

Mises des acheteurs

Les préférences des participants sont exprimées au travers de leur mise. La mise de l'acheteur $i \in I$ contient le prix qu'il est prêt à payer, le couple de nœuds origine et des-

tion, la quantité de flot à transférer entre eux, le graphe admissible et des contraintes de bornes sur les arcs. La mise d'un acheteur est modélisée à l'aide de l'ensemble de vecteurs suivants :

$$(p_i, O_i, D_i, d_i, G^i, l^i, u^i),$$

avec p_i le prix maximum que l'acheteur $i \in I$ est prêt à payer, O_i le nœud possédant un excès de d_i unités et D_i le nœud destination ayant un déficit de d_i unités. $G^i = (V^i, A^i)$ contient la représentation du réseau admissible de i . l^i est le vecteur des bornes inférieures de la valeur du flot du participant i sur les arcs de A^i , si i remporte sa mise. u^i est le vecteur des bornes supérieures de la valeur du flot du participant i sur les arcs de A^i .

Mises des vendeurs

La mise d'un vendeur $j \in J$ décrit le prix minimum qu'il est prêt à accepter. Elle contient une partie fixe (p_j) qui correspond au coût d'engagement de ses ressources et un coût variable (c_{ja}) définissant le prix à payer pour traverser un de ses arcs (a), le graphe qu'il propose ainsi que des bornes sur la capacité de ses arcs. La préférence d'un vendeur est donc dépendante de ce prix minimum, de son vecteur de coût et du graphe qu'il soumet. Nous notons toutes ses informations par l'ensemble de vecteurs :

$$(p_j, c_j, G^j, l^j, u^j),$$

avec p_j le prix minimum que doit recevoir le vendeur j pour ouvrir son réseau, c_j un vecteur de coût, G^j la description du réseau qu'il possède, et les vecteurs l^j et u^j respectivement les bornes inférieures et supérieures sur la quantité de flot sur ses arcs.

3.1.3 Valeur et utilité

En théorie des jeux, la *valeur d'un bien* est une quantité qui représente l'intérêt d'un participant pour ce bien. Par exemple, si le bien peut être revendu, ce sera typiquement le prix de vente qu'il pourra obtenir. Le bénéfice qu'il obtiendra de l'acquisition puis de

la revente (ou consommation) du bien est appelé l'*utilité*. Elle est égale à la valeur du bien pour le participant retranchée des paiements nécessaires à son acquisition.

Pour chaque participant $i \in I \cup J$, nous notons $u_i(k(\theta), \theta_i)$ son utilité et $v_i(k(\theta), \theta_i)$ sa valeur pour l'affectation $k(\theta)$. $k(\theta)$ est l'affectation déterminée par l'enchère en fonction des préférences θ des participants. $t_i(\theta)$ est son transfert de numéraire¹. m_i est un coût d'entrée pour la participation à l'enchère.

La fonction d'utilité de chaque participant $i \in I \cup J$ est alors définie par

$$u_i(k(\theta), \theta_i) = v_i(k(\theta), \theta_i) + t_i(\theta) + m_i.$$

Sans perte de généralité dans notre problème, nous supposons qu'il n'y a pas de coût d'entrée : ces paiements étant constants, ils n'influencent pas les problèmes de décision.

Valeur des droits de passage pour un acheteur

Nous supposons que la valeur de l'acquisition de droits de passage pour l'acheteur $i \in I$ est nulle s'il n'est pas possible de satisfaire entièrement sa demande et vaut p_i si la totalité de sa demande est satisfaite,

$$v_i(k(\theta), \theta_i) = p_i y_i(\theta), \forall i \in I,$$

avec $y_i(\theta)$ qui est la composante i du vecteur d'affectation optimal, valant 1 si la mise i est gagnante et 0 sinon.

Valeur des liaisons pour un vendeur

Nous supposons que la vente des droits de passage engendre des coûts pour les vendeurs (engagement de ressources, usure, carburant, etc.). La valeur des liaisons vendues

¹Notre convention est qu'un transfert positif correspond à un paiement et un transfert négatif à un encaissement.

$v_j(k(\theta), \theta_j)$ est alors négative pour eux et vaut pour chaque vendeur

$$v_j(k(\theta), \theta_j) = p_j y_j(\theta) + \sum_{a \in A^j} \sum_{i \in I} c_{ja} x_{ia}(\theta), \forall j \in J,$$

avec $y_j(\theta)$ qui vaut 1 si au moins une liaison du vendeur j est utilisée et $x_{ia}(\theta)$ qui est égal à la capacité octroyée au participant $i \in I$ sur l'arc $a \in A^j$.

Remarque. La valeur des vendeurs se limitera à $p_j y_j(\theta)$, s'ils ne veulent pas diffuser trop d'information sur leur coût de fonctionnement.

3.2 Détermination des gagnants

Nous allons maintenant présenter les modèles mathématiques décrivant les enchères. Nous commencerons par mettre en lumière notre problème principal avec le modèle « plusieurs-vers-un ». Celui-ci est composé de plusieurs acheteurs et d'un seul vendeur. Ensuite nous exposerons deux variations. La première est « un-vers-plusieurs », un modèle pour un unique acheteur et plusieurs vendeurs. La seconde est le modèle « plusieurs-vers-plusieurs » qui implémente une bourse de capacité avec plusieurs vendeurs et plusieurs acheteurs.

3.2.1 Modèle « plusieurs-vers-un »

Description

Le commissaire priseur détient un réseau de transport et souhaite créer une enchère pour vendre des droits de passages. Il invite un des acheteurs potentiels, qui souhaitent acquérir la possibilité de faire transporter une demande entre deux nœuds de son réseau, à participer à cette enchère.

Cette situation peut s'appliquer au cas d'une enchère tenue par une compagnie de transport qui souhaite rentabiliser au maximum l'utilisation de ses ressources en vendant aux enchères la capacité non utilisée de son réseau de transport. Ce sera aussi un modèle

utile pour les compagnies de gestion des voies ferrées ou les opérateurs qui détiennent un réseau de télécommunication.

Modèle mathématique

L'ensemble des acheteurs est noté I . L'unique vendeur de cette enchère est le commissaire priseur. x_{ia} est la valeur du flot du participant $i \in I$ sur l'arc $a \in A$. y_i vaut 1 si la mise du participant i est acceptée et 0 si elle ne l'est pas. l_{ia} (u_{ia}) représente la quantité minimum (maximum) de flot que l'acheteur i requiert sur l'arc a . u_a est la capacité maximale de l'arc a . $A_+^i(v)$ et $A_-^i(v)$ sont respectivement l'ensemble des arcs incidents vers l'extérieur et l'intérieur du nœud $v \in V$.

Pour tout couple participant nœud (i, v) , on dénote par b_{iv} la quantité nette de produit que veut introduire l'acheteur i au nœud v , autrement dit,

$$b_i^v = \begin{cases} d_i & \text{si } v = O_i \\ -d_i & \text{si } v = D_i \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Le problème de détermination des gagnants, qui consiste à choisir les mises qui seront retenues, est décrit par le modèle suivant,

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i \in I} p_i y_i - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A^i} c_{ia} x_{ia} \\ \text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_+^i(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A_-^i(v)} x_{ia} - b_i^v y_i &= 0 \quad \forall i \in I, \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ia} \leq u_a \quad \forall a \in A \quad (3.2)$$

$$l_{ia} y_i - x_{ia} \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall a \in A^i \quad (3.3)$$

$$x_{ia} - u_{ia} y_i \leq 0 \quad \forall i \in I, \forall a \in A^i \quad (3.4)$$

$$x_{ia} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in I, a \in A^i \quad (3.5)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I. \quad (3.6)$$

Les contraintes (3.1) sont appelées contraintes de conservation de flot, car elles assurent que les quantités de flots entrant et sortant de chaque nœud $v \in V^i \setminus \{O_i, D_i\}$ sont identiques. Elles assurent aussi que le flot sortant des nœuds origines et entrant dans les nœuds destinations est équivalent à la demande de chaque client. Les contraintes de capacité (3.2) contraignent la quantité de flots sur chaque arc à être inférieure à la capacité maximale de l'arc, tandis que les contraintes (3.3) et (3.4) impose une borne inférieure et supérieure à certains arcs, lorsque i est un gagnant.

L'ensemble \mathbb{X} permet de définir l'ensemble des quantités de flot sur chaque arc. Pour des problèmes où la quantité de flot prend ses valeurs dans l'ensemble des réels, nous aurons $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{|I| \times |A|}$, tandis que si la quantité de flot est entière $\mathbb{X} = \mathbb{N}^{|I| \times |A|}$. \mathbb{Y} est l'ensemble de définition des mises. En l'absence de contrainte d'exclusion directe entre les mises, il est égal à l'ensemble des vecteurs binaires de taille $|I|$, $\mathbb{Y} = \{0, 1\}^{|I|}$.

Complexité

Nous allons nous intéresser à la complexité du problème de détermination des gagnants. Ce problème est *NP*-difficile parce qu'il contient, comme cas particulier, le problème de sac à dos en nombre entiers. Si on considère l'affectation de capacité sur un seul arc, on remarque que c'est un problème de sac à dos qui, comme l'a montré Garey et Johnson (1979), est *NP*-difficile,

Soit le problème de sac à dos

$$\begin{aligned} \max z = & \sum_{i \in N} \alpha_i y_i \\ \text{s.a.} & \sum_{i \in N} \beta_i y_i \leq c \\ & y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \end{aligned}$$

avec N l'ensemble des objets, α_i le gain de chaque objet emporté dans le sac, β_i le poids de chaque objet i et c le poids maximum qui peut être transporté. y_i est une variable binaire qui est nulle lorsque l'objet n'a pas été sélectionné.

Nous utilisons la transformation illustrée par la figure 3.1, pour obtenir une instance de notre problème de détermination des gagnants. Cette instance est décrite par le modèle

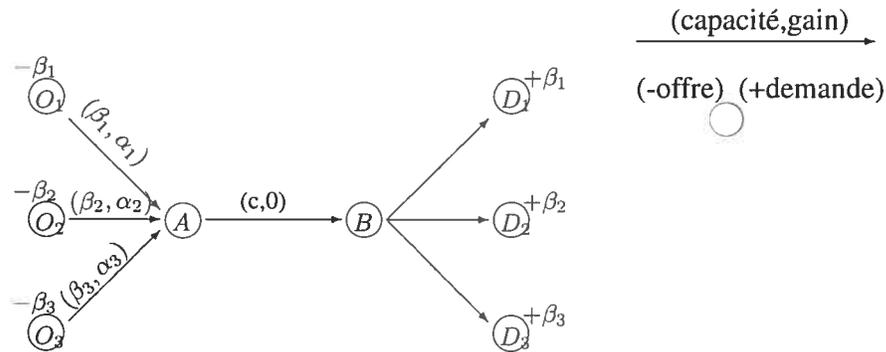


Figure 3.1 – Illustration de la transformation d'un problème de sac à dos en une instance d'un problème de détermination des gagnants pour l'enchère « plusieurs-vers-un ».

suisant.

$$\begin{aligned}
 \max z = & \sum_{i \in N} \alpha_i y_i \\
 \text{s.a.} & \sum_{a \in A^+(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A^-(v)} x_{ia} - b_i^v y_i = 0 \quad \forall i \in N, \forall v \in V \\
 & \sum_{i \in N} x_{ia} \leq c \quad a = (A, B) \\
 & y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \\
 & x_{ia} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in N, a \in A,
 \end{aligned}$$

$$b_i^v = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \{A, B\} \\ \beta_i & \text{si } v = O_i \\ -\beta_i & \text{si } v = D_i \end{cases} \quad \forall i \in N, v \in V.$$

Cette instance contient $\mathcal{O}(n^2)$ contraintes, n étant le nombre d'objets disponibles à mettre dans le sac à dos. Toutes ces contraintes sont générées en temps linéaire sur le nombre d'objets. La transformation peut donc se faire en temps polynomiale.

3.2.2 Modèle « un-vers-plusieurs »

Description

Dans le modèle précédent, un certain nombre d'acheteurs souhaitent acquérir, auprès d'un unique vendeur, les droits passages permettant le transport de leur demande entre deux points du réseau.

Dans le modèle « un-vers-plusieurs », c'est la configuration inverse. Plusieurs vendeurs mettent aux enchères des droits d'accès et l'unique acheteur mise pour acquérir ceux qu'il l'intéresse. Il détient différentes demandes entre différents nœuds et il veut toutes les satisfaire.

Afin que notre modèle s'applique à des problématiques générales de logistique, nous supposons que le réseau contient plusieurs nœuds permettant à une demande de changer de vendeur. Nous assimilons cette action à un changement de réseau. Elle modélise une modification du mode de transport (transport intermodal) ou un changement de compagnie.

La satisfaction d'une demande implique le transport d'une certaine quantité. Lorsqu'il est effectué à l'aide de véhicule, la dépense énergétique est une fonction non linéaire de la distance parcourue et du poids à déplacer. Dans notre modèle nous approximons ce coût à l'aide d'une fonction affine. Notre modèle prend aussi en compte un coût fixe par vendeur. Ce coefficient est une agrégation des coûts engendrés par la préparation des ressources ou par leur achat.

Modèle mathématique

I est l'ensemble des indices des différents types de flux du commissaire priseur. O_i représente l'origine du flux $i \in I$, D_i sa destination et d_i la quantité totale de flux à transporter entre O_i et D_i . A^i est l'ensemble des arcs autorisés pour le flux de type i . Le coût d'exploitation unitaire de chaque arc a pour le flot i est c_{ia} . x_{ia} est la quantité de flot i sur l'arc a .

Chaque vendeur $j \in J$ propose la satisfaction d'un certain ensemble de demandes en décrivant le réseau qu'il peut mettre à disposition.

V_0 est l'ensemble des nœuds permettant un changement de mode (participant) et V_1 l'ensemble des nœuds ne le permettant pas. $A_+^n(v)$ et $A_-^n(v)$ sont respectivement l'ensemble des arcs incidents vers l'extérieur et l'intérieur du nœud v , autorisés pour le flux de type n si $n \in I$ ou possédés par le participant n si $n \in J$. L'ensemble des arcs du vendeur j autorisés par le commissaire priseur pour le transport du produit i est $A_+^{ij}(v)$ pour les arcs incidents vers l'extérieur du nœud v et $A_-^{ij}(v)$ pour les arcs incidents vers l'intérieur.

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j \in J} y_j p_j - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A^i} c_{ia} x_{ia} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A_+^i(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A_-^i(v)} x_{ia} = b_i^v \quad \forall i \in I, \forall v \in V_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\sum_{a \in A_+^{ij}(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A_-^{ij}(v)} x_{ia} = b_i^v \quad \forall (i, j) \in I \times J, v \in V_1 \quad (3.8)$$

$$l_a y_j - \sum_{i \in I} x_{ia} \leq 0 \quad \forall j \in J, \forall a \in A^j \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ia} - u_a y_j \leq 0 \quad \forall j \in J, \forall a \in A^j \quad (3.10)$$

$$x_{ia} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall i \in I, a \in A^i \quad (3.11)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (3.12)$$

Le premier ensemble de contraintes (3.7) définit un problème de multiflot sur les nœuds permettant des échanges entre participants, tandis que le deuxième groupe (3.8) assure la conservation de flot aux nœuds ne permettant d'échange de mode de transport. Les contraintes (3.9) et (3.10) permettent aux vendeurs de définir des bornes supérieures et inférieures sur l'utilisation de leurs arcs et assurent que la capacité maximale et minimale d'un arc appartenant à un vendeur j qui a perdu ($y_j = 0$) est nulle.

3.2.3 Modèle « plusieurs-vers-plusieurs »

Description

Ce modèle est une synthèse des deux modèles précédents. Il permet la création d'une place de marché avec plusieurs acheteurs qui souhaitent transférer certains produits entre deux nœuds d'un réseau et plusieurs vendeurs qui possèdent une infrastructure de transport et permettent le transfert des demandes moyennant certains coûts.

Dans les enchères précédentes, le commissaire priseur faisait partie des participants de l'enchère en tant que vendeur ou acheteur. Dans le modèle « plusieurs-vers-plusieurs », le commissaire priseur est une entité neutre, ni acheteur ni vendeur, qui centralise le déroulement de l'enchère. Ce sera typiquement l'État ou une compagnie tiers responsable de son bon déroulement.

Modèle mathématique

I est l'ensemble des participants qui souhaitent acquérir de la capacité (acheteurs) et J l'ensemble des participants qui possèdent une infrastructure de transport (vendeurs). x_{ija} représente la quantité de flot de l'acheteur $i \in I$ traversant l'arc a et transporté par le vendeur $j \in J$. J^i est l'ensemble des vendeurs désignés par $i \in I$ et autorisés à transporter sa demande. L'ensemble des arcs du vendeur j autorisés par le commissaire priseur pour le transport du produit i est $A_+^{ij}(v)$ pour les arcs incidents vers l'extérieur du nœud v et $A_-^{ij}(v)$ pour les arcs incidents vers l'intérieur.

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i \in I} y_i p_i + \sum_{j \in J} y_j p_j - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J^i} \sum_{a \in A^{ij}} c_{ija} x_{ija} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J^i} \sum_{a \in A_+^{ij}(v)} x_{ija} - \sum_{a \in A_-^{ij}(v)} x_{ija} - b_i^v y_i = 0 \quad \forall i \in I, v \in V_0 \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\sum_{a \in A_+^{ij}(v)} x_{ija} - \sum_{a \in A_-^{ij}(v)} x_{ija} - b_i^v y_i = 0 \quad \forall i \in I, j \in J^i, v \in V_1 \quad (3.14)$$

$$l_{ja} y_j - \sum_{i \in I} x_{ija} \leq 0 \quad \forall j \in J, a \in A^j \quad (3.15)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ija} - u_{ja} y_j \leq 0 \quad \forall j \in J, a \in A^j \quad (3.16)$$

$$l_{ia} y_i - \sum_{j \in J^i} x_{ija} \leq 0 \quad \forall i \in I, a \in A^i \quad (3.17)$$

$$\sum_{j \in J^i} x_{ija} - u_{ia} y_i \leq 0 \quad \forall i \in I, a \in A^i \quad (3.18)$$

$$x_{ija} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (i, j) \in I \times J, a \in A^j \quad (3.19)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in I \cup J \quad (3.20)$$

Le premier groupe de contraintes (3.13) assure la conservation du flot et la satisfaction de la demande aux nœuds permettant des changements. Le deuxième groupe de contraintes (3.14) modélise la conservation du flot et la satisfaction des demandes aux nœuds ne permettant ces changements. Les contraintes (3.15) et (3.16) permettent aux vendeurs de définir des bornes sur l'utilisation de la capacité de chaque arc. Les contraintes (3.17) et (3.18) permettent aux acheteurs de définir des bornes sur les arcs qu'ils souhaitent.

3.3 Détermination des prix

Le grand défi de l'utilisation des mécanismes VCG vient de la difficulté d'obtenir les paiements. Lorsque la structure du problème le permet, il est possible de réutiliser les résultats des calculs obtenus pendant la phase de détermination des gagnants, pour trouver plus efficacement les paiements.

Nous montrons dans cette section quelques résultats théoriques sur les paiements de notre mécanisme. Pour chacun nous présentons les bornes des transferts numériques et vérifions que la stratégie dominante existe.

3.3.1 Modèle « plusieurs-vers-un »

Nous allons définir les bornes des transferts de chaque participant.

Soit $t_i(\theta)$ le transfert de numéraire² du participant $i \in I$ (acheteur) et $V(I)$ la valeur de l'enchère avec les participants I . Soit $k(\theta)$ la solution de l'enchère pour les préférences θ . Cette solution est composée du vecteur $y(\theta)$ dont chaque composante $y_i(\theta)$ vaut 1 si i est un gagnant et $x(\theta)$ qui correspond à la quantité de flot sur chaque arc. Nous montrons que le prix payé par chaque participant est compris entre 0 et la valeur de la mise du participant.

$$\begin{aligned} t_i(\theta) &= V(I) - v_i(k(\theta), \theta_i) - V(I \setminus i) \\ V(I) &\geq V(I \setminus i) \geq V(I) - v_i(k(\theta), \theta_i) \end{aligned}$$

La relation $V(I) - v_i(k(\theta), \theta_i) \leq V(I \setminus i)$ est vraie car si $y(\theta)$ est la solution optimale du problème de détermination des gagnants, alors le vecteur \bar{y} tel que $\bar{y}_{i'} = y_{i'}(\theta)$ pour tout $i' \neq i$ et $\bar{y}_i = 0$ est réalisable pour $V(I \setminus i)$.

Nous pouvons donc borner le transfert de numéraire $t_i(\theta)$, du participant $i \in I$ par

$$0 \geq t_i(\theta) \geq -v_i(k(\theta), \theta_i).$$

3.3.1.1 Équilibre du budget

Le budget n'est pas toujours équilibré. Dans le cas du modèle « plusieurs-vers-un », la somme des transferts est non positive, le budget de l'enchère (sa valeur) n'est donc jamais déficitaire,

$$0 \geq \sum_{i \in I} t_i(\theta) \geq - \sum_{i \in I} v_i(k(\theta), \theta_i).$$

²Un transfert de numéraire est négatif lorsqu'il y a paiement et positif lorsqu'il y a encaissement.

L'enchère est donc réalisable.

3.3.1.2 Conclusion

Nous sommes assuré que les paiements sont inférieurs à la valeur de la mise. Seul le commissaire priseur gagne de l'argent et son revenu est égal à la somme des paiements. Ce mécanisme d'enchère incite à être sincère et à participer. Il a aussi comme propriété de maximiser le bien-être social en affectant les mises aux plus offrants.

3.3.2 Modèle « un-vers-plusieurs »

Dans l'enchère « un-vers-plusieurs », un unique acheteur, représenté par le commissaire priseur, possède des demandes qu'il va tenter de satisfaire en se procurant de la capacité sur des réseaux. Ce sont les vendeurs, qui détiennent les réseaux, qui misent en proposant le prix minimum qu'ils veulent pour autoriser le commissaire priseur à utiliser leur réseau.

Nous montrons que les paiements reçus ne sont pas inférieurs à la valeur des mises des vendeurs. Cela implique donc que le commissaire priseur paiera plus cher que la somme des offres des gagnants. Néanmoins, il s'assure que les participants n'ont aucun intérêt à surestimer leur mise.

Soit $t_j(\theta)$ le transfert du vendeur $j \in J$. Il est égal à la valeur optimale du problème d'optimisation, retranchée du prix de sa mise et de la valeur du même problème d'optimisation sans sa participation.

$$t_j(\theta) = V(J) - v_j(k(\theta), \theta_j) - V(J \setminus j).$$

Si l'enchère reste réalisable en retirant le participant j , alors la valeur $V(J \setminus j)$ est majorée par $V(J)$ et le transfert de $t_j(\theta)$ est borné par

$$0 \leq -v_j(k(\theta), \theta_j) \leq t_j(\theta).$$

3.3.2.1 Équilibre du budget

La somme des transferts sans le participant 0 est non négative :

$$\sum_{j \in J} t_j(\theta) \geq 0.$$

La condition de réalisabilité n'est donc pas satisfaite : le système peut « manquer » d'argent. Il faut donc que le commissaire priseur, dont nous fixons l'indice à 0, comble ce déficit budgétaire.

Le transfert du commissaire priseur est $t_0(\theta) = -\sum_{j \in J} t_j(\theta)$, le commissaire priseur paye donc un prix supérieur à la somme des valeurs des mises des vendeurs. En contrepartie, il s'assure que les vendeurs n'ont pas intérêt à mentir sur leur préférence.

3.3.2.2 Conclusion

Chaque gagnant reçoit un paiement supérieur à sa mise et le commissaire priseur paiera plus que la somme de leurs valeurs. Ce paiement supplémentaire correspond intuitivement au prix que le détenteur de l'enchère doit payer pour inciter les participants à révéler leur vraie préférence.

3.3.3 Modèle « plusieurs-vers-plusieurs »

Dans les mécanismes avec plusieurs vendeurs et plusieurs acheteurs, l'astuce pour équilibrer le budget à l'aide d'un participant sans préférence ne fonctionne plus, car tous les participants possèdent des préférences. Les deux théorèmes suivants, dont nous omettons les preuves, nous montrent que les mécanismes d'échange ne maximisent pas le bien-être social et ne possèdent pas de stratégie dominante implémentant la fonction de choix social du mécanisme, même dans des cadres moins restreignants que l'implémentation en stratégie dominante.

L'équilibre Bayes-Nash est atteint lorsque la meilleure stratégie de chaque participant en fonction des prévisions des actions des concurrents ne change plus. C'est un

équilibre moins restreignant que celui atteint par une implémentation en stratégie dominante, où aucune prévision sur les actions des participants ne doit être prise en compte.

Théorème 3.1 (Théorème d'impossibilité de Myerson-Satterthwaite). *Il n'y a pas de mécanisme réalisant un équilibre Bayes-Nash qui implémente une fonction de choix social efficiente, assurant l'équilibre de budget et rationnel pour les participants, dans des économies d'échange simple avec des préférences quasi linéaires.*

Théorème 3.2 (Théorème d'impossibilité d'Hurwicz). *Il n'existe pas de mécanisme d'échange qui possède une stratégie dominante, implémente une fonction de choix social efficiente et assure l'équilibre de budget dans une économie d'échange avec des préférences quasi linéaires.*

Les preuves de ces deux résultats sont disponibles dans le livre de microéconomie de Mas-Colell, Whinston et Green (1995) et dans la thèse de doctorat de Parkes (2001).

3.3.3.1 Borne des transferts

Soit I l'ensemble des acheteurs, J l'ensemble des vendeurs et $N = I \cup J$ l'ensemble de tous les participants.

La borne inférieure de $V(N \setminus j)$ est atteinte lorsque le vendeur j possède une coupe du graphe qui déconnecte l'ensemble des sources et destinations : son retrait empêche toute circulation de flot entre les sources et les destinations, la valeur de $V(N \setminus j)$ est alors nulle. La borne supérieure est atteinte s'il y a un vendeur qui possède un réseau équivalent à celui de j (permettant d'acheminer les mêmes flots au même coût), et vaut alors $V(N)$.

$$t_j(\theta) = V(N) - v_j(k(\theta), \theta_j) - V(N \setminus j)$$

$$V(N) \geq V(N \setminus j) \geq 0,$$

Les bornes du transfert d'un vendeur sont donc,

$$V(N) - v_j(k(\theta), \theta_j) \geq t_j(\theta) \geq -v_j(k(\theta), \theta_j) \geq 0.$$

Le même résultat est obtenu pour les acheteurs.

$$|I||J|V(n) - \sum_{n \in I \cup J} v_j(k(\theta), \theta_n) \geq \sum_{i \in I} t_i(\theta) + \sum_{j \in J} t_j(\theta) \geq - \underbrace{\sum_{n \in I \cup J} v_n(k(\theta), \theta_n)}_{\leq 0}.$$

Dans le cas général, elle n'est donc pas toujours nulle, comme le montre l'exemple de la figure 3.2. Lorsque la somme des transferts est négative, cela indique que le commissaire priseur gagne de l'argent (participant 0), mais dans le cas contraire, cela implique que le participant 0 doit ajouter de l'argent dans le système pour combler les paiements.

Nous venons de montrer que l'utilisation d'un mécanisme de Clarke n'implique pas une balance négative des transferts numéraires pour cette enchère. Le système économique peut donc « manquer d'argent ».

3.3.3.2 Équilibre du budget

Pour pallier le non-équilibre du budget, qui est un préalable important pour la création d'une place de marché, nous proposons un système de paiement assurant l'équilibre du budget et minimisant la distance entre les paiements réels et les paiements du mécanisme de Clarke. Une étude plus approfondie de ce mécanisme montrera si la stratégie dominante est la même que pour le mécanisme original.

La mesure de distance choisie est la distance quadratique, car elle possède des propriétés qui facilitent son utilisation dans les problèmes d'optimisation. Nous contrainsons les paiements réels à satisfaire *l'équilibre du budget* et la *rationalité individuelle*. C'est-à-dire que la somme des paiements doit être nulle et que ces derniers doivent satisfaire les préférences de chacun.

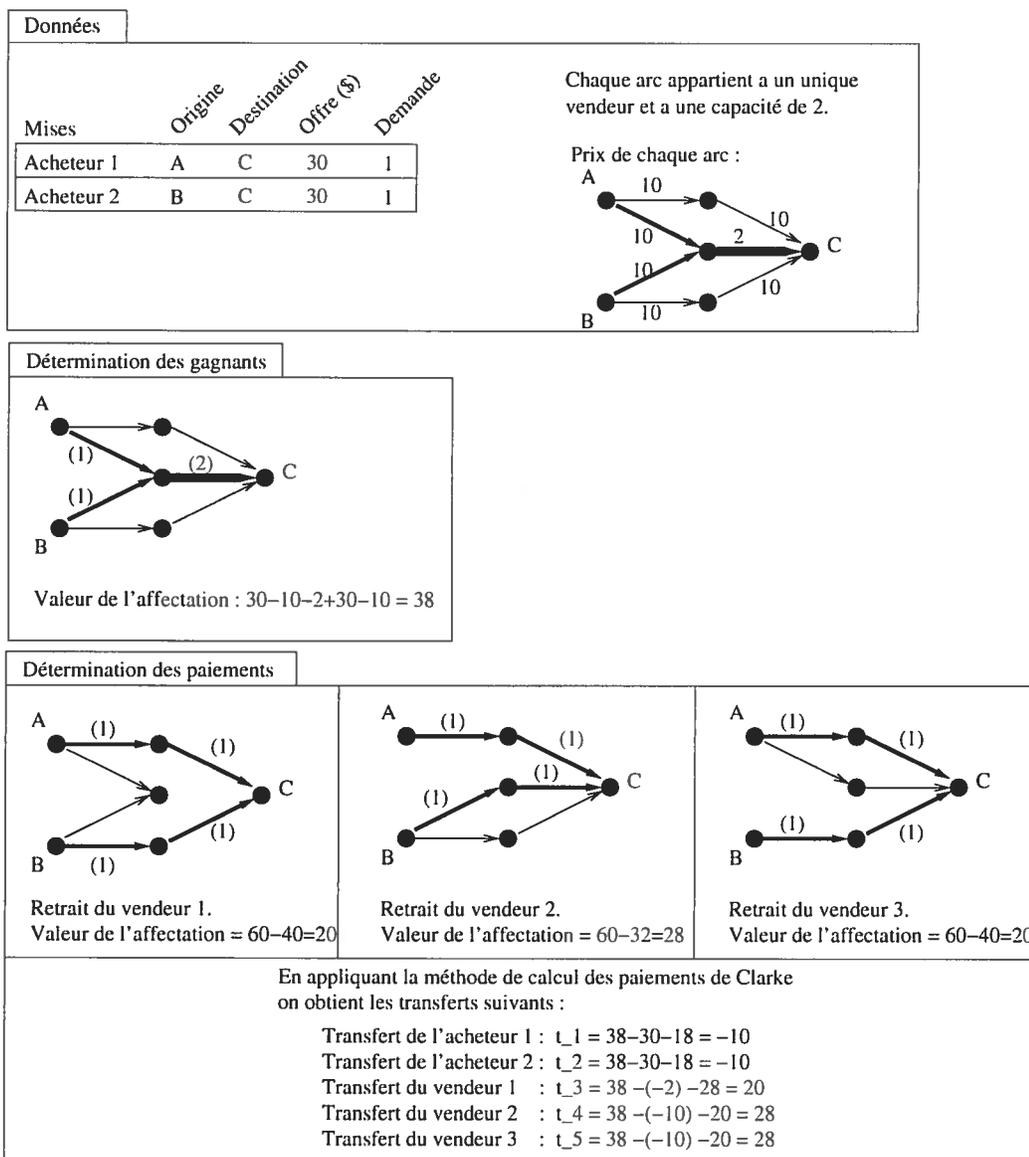


Figure 3.2 – Non négativité des transferts pour le modèle « plusieurs-vers-plusieurs ». Chaque arc a une capacité de 2. Le coût sur les arcs représente le coût fixe pour le participant correspondant pour « ouvrir » le lien. Le participant 1 est prêt à payer 30 pour obtenir une capacité unitaire entre A et C. Le participant 2 est prêt à payer 30 pour obtenir une capacité unitaire entre B et C. On voit bien que la somme des transferts est non négative, les sommes reçues des acheteurs ne couvrent pas les paiements aux vendeurs.

Soit $t_i(\theta)$ le paiement du mécanisme de Clarke et π_i le transfert réel que nous allons calculer pour le participant $i \in I \cup J$ et qui assurera l'équilibre du budget.

$$\begin{aligned} \min f(\pi) &= \sum_{i \in I \cup J} (t_i(\theta) - \pi_i)^2 \\ \text{s.a. } g(\pi) &= \sum_{i \in I \cup J} \pi_i \leq 0 \\ h_i(\pi) &= \pi_i - v_i(k(\theta), \theta_i) \leq 0 & \forall i \in I \cup J, y_i(\theta) = 1 \\ \pi_i &= 0 & \forall i \in I \cup J, y_i(\theta) = 0 \end{aligned}$$

La minimisation de la fonction objectif nous permet de limiter l'écart entre des transferts assurant que le système n'aura pas besoin de financement extérieur et les paiements proposés par le mécanisme de Clarke.

La première contrainte, g , nous assure que la somme des transferts sera non positive, donc que le système économique n'aura pas besoin de financement extérieur. Les bornes sur les transferts, h_i pour $i \in I \cup J$, nous assurent que l'utilité de chaque participant sera positive, ce sont les contraintes de *rationalité individuelle*.

Nous définissons L , l'ensemble des indices des participants gagnants par

$$L = \{i \in I \cup J : y_i(\theta) = 1\}.$$

Les dérivées partielles de ces fonctions par rapport aux variables π_i , pour $i \in L$ sont

$$\begin{aligned} \nabla_i f(\pi) &= \frac{\partial f(\pi)}{\partial \pi_i} = 2(\pi_i - t_i(\theta)), \\ \nabla_i g(\pi) &= \frac{\partial g(\pi)}{\partial \pi_i} = 1, \\ \nabla_i h_{i'}(\pi) &= \frac{\partial h_{i'}(\pi)}{\partial \pi_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 3.3. *Ce programme est convexe.*

Démonstration. Les contraintes sont linéaires, donc convexes.

La fonction objectif est une somme de carrés. Elle est donc convexe.

Puisque la fonction objectif et les contraintes du programme sont des fonctions convexes définies sur l'ensemble convexe \mathbb{R}_+^n , le programme est convexe. \square

Puisque notre programme est convexe et que les contraintes sont linéaires, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) sont nécessaires et suffisantes pour démontrer l'optimalité globale d'un optimum local.

Soit u et w des vecteurs de multiplicateurs, les conditions de KKT en un point π^* réalisable sont données par

$$\begin{aligned}\nabla_i f(\pi^*) + \nabla_i g(\pi^*)^t u + \nabla_i h_i(\pi^*)^t w &= 0, \\ g(\pi^*)^t u &= 0, \\ h_i(\pi^*)^t w &= 0, \forall i \in L \\ u, w &\geq 0\end{aligned}$$

La solution optimale de notre problème est donc atteinte en un point π^* vérifiant les équations suivantes

$$2(\pi_i - t_i(\theta)) + u + w_i = 0, \forall i \in L \quad (3.21)$$

$$u \sum_{i \in L} \pi_i = 0 \quad (3.22)$$

$$w_i (\pi_i - v_i(k(\theta), \theta_i)) = 0, \forall i \in L \quad (3.23)$$

$$u \geq 0 \quad (3.24)$$

$$v_i \geq 0, \forall i \in L \quad (3.25)$$

Soit u^*, w^* des multiplicateurs optimaux. Nous posons $w_i^* = 0$ et cherchons le multiplicateur optimal u^* correspondant.

En utilisant l'équation (3.21) nous savons que

$$u^* = -2(\pi_i^* - t_i(\theta)), \forall i \in L.$$

1. Si nous supposons que $\sum_{i \in L} \pi_i^* < 0$, alors les équations (3.21) et (3.22) impliquent

$$u^* = 0 \Rightarrow \pi_i^* = t_i(\theta).$$

2. Supposons que $\sum_{i \in L} \pi_i^* = 0$. Alors les équations (3.21) impliquent que

$$\pi_i = -\frac{1}{2}u^* + t_i(\theta), \forall i \in L$$

Alors

$$\sum_{i \in L} \pi_i^* = \sum_{i \in L} \left(t_i(\theta) - \frac{1}{2}u^* \right) = 0$$

et

$$u^* = \frac{2}{|L|} \sum_{i \in L} t_i(\theta)$$

sous l'hypothèse que $\sum_{i \in L} \pi_i^* = 0$.

Nous remarquons que u^* est non négative ssi la somme des paiements de Clarke est non négative, soit ssi l'équilibre de budget n'est pas satisfait.

Ceci nous assure que la valeur de π_i^* est toujours inférieure ou égale au paiement de Clarke ($t_i(\theta)$).

Proposition 3.4. *Il est possible d'atteindre un équilibre de budget minimisant la distance quadratique entre les paiements de Clarke ($t_i(\theta)$) et les paiements nécessaires à l'équilibre (π_i^*).*

Ces transferts de numéraires sont obtenus en ajoutant une valeur aux paiements de Clarke.

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= t_i(\theta) - \frac{1}{2}u^* \\ &= t_i(\theta) - \frac{\sum_{i' \in L} t_{i'}(\theta)}{|L|} \end{aligned}$$

Remarque. Une étude théorique plus approfondie permettrait de vérifier le comportement des participants face à un tel mécanisme.

CHAPITRE 4

RÉSOLUTION DE « PLUSIEURS-VERS-UN »

La première section de ce chapitre sera consacrée à l'exposition de quelques méthodes de résolution pour notre place de marché. Nous avons concentré nos efforts sur des algorithmes fournissant des résultats facilement réutilisables pour le calcul des paiements. Dans la deuxième section, nous présenterons la méthode de décomposition de Benders que nous avons implantée pour résoudre l'enchère « plusieurs-vers-un » pour des problèmes où les différents types de flots peuvent bifurquer. La troisième section portera sur l'application d'un programme dynamique permettant d'implanter une enchère « plusieurs-vers-un » pour des flots entièrement définis dans la mise.

4.1 Décomposition mathématique

Nous avons fait le choix de la décomposition de Benders, car les coupes générées durant la résolution sont facilement réutilisables pour calculer les paiements. De plus, elle a été utilisée avec succès pour résoudre des problèmes d'optimisation ayant une structure proche de celle des enchères que nous traitons. En effet, le modèle de l'enchère « plusieurs-vers-un » ressemble beaucoup à un problème de conception de réseau, dont certains arcs (symbolisant l'acceptation des mises) sont toujours saturés à leur borne supérieure ou inférieure. Or comme le montre Costa (2005) dans un article sur la résolution des problèmes de dimensionnement de réseau, la décomposition de Benders s'applique bien aux problèmes de conception de réseau.

4.1.1 Décomposition de Benders

4.1.1.1 Introduction

Soit \mathbb{Y} l'ensemble de valeur des variables entières et \mathbb{X} l'ensemble des valeurs des variables réelles non négatives.

On suppose que le modèle est de la forme suivante,

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{i \in I} p_i y_i + \sum_{a \in A} c_{ia} x_{ia} \\ \text{s.a.} \quad & Ax - F(y) \leq b \\ & x \in \mathbb{X} \\ & y \in \mathbb{Y}. \end{aligned}$$

La décomposition de Benders permet de résoudre notre problème en optimisant deux sous problèmes : un problème en variables entières et continues et un autre problème ne contenant que des variables continues.

Ce type de décomposition est particulièrement intéressant lorsque le sous-problème en variables continues possède une certaine structure ou lorsqu'il y a des contraintes ne contenant que des variables entières qui peuvent alors être directement ajoutées au problème maître.

4.1.1.2 Sous-problème

Le sous-problème correspond à la projection du modèle sur l'espace des variables entières, que l'on nomme *variables complicantes*. Pour une solution donnée \bar{y} , le sous-problème s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & (P_{\bar{y}}) \\ \max \quad & \sum_{i \in I} \sum_{a \in A} c_{ia} x_{ia} \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b + F(\bar{y}) \\ & x \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

4.1.1.3 Problème maître.

Les contraintes du problème maître sont générées en utilisant les solutions du sous-problème. À chaque itération, il est augmenté d'une coupe, obtenue à l'aide d'un rayon ($t \in T_0$) ou point extrême ($t \in T_1$) du dual du sous-problème. Soit u^t une solution du sous-problème à l'itération t , le problème maître est alors

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} p_i y_i + \omega \\ \text{s.a.} \quad & (F(y) + b)u^t \geq \begin{cases} 0 & \text{si } t \in T_0 \\ \omega & \text{si } t \in T_1 \end{cases} \\ & y \in \mathbb{Y} \\ & \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.1.1.4 Intérêt

Les problèmes de détermination des paiements sont des restrictions (retrait de variables) du problème de détermination des gagnants. Ceci va nous permettre de réutiliser des coupes de Benders générées pendant la résolution de l'affectation des mises afin de créer les problèmes de détermination des paiements.

4.1.2 Génération de colonnes

Il serait aussi très intéressant de voir comment se comporte la génération de colonnes en comparaison avec la génération de lignes. Le modèle pratique pour ce cas-là est la représentation arc/chemin du modèle « plusieurs-vers-un ». Chaque colonne à générer est un chemin entre l'origine et la destination d'un participant.

Le sous-problème consiste alors à chercher sur un ensemble de chemins donnés, un nouveau chemin permettant d'augmenter la valeur du système. On pourra s'inspirer du travail de Larsson et Yuan (2004) qui génère des colonnes à l'aide d'un sous-problème obtenu par dualisation lagrangienne ou laisser le soin aux participants de proposer et d'augmenter l'ensemble des chemins pris en compte au cours de l'enchère.

4.1.3 Décomposition lagrangienne

Les problèmes de multiflot de grande taille sont résolus avec succès en utilisant la décomposition lagrangienne (voir par exemple Frangioni (1993), Crainic, Frangioni et Gendron (1999) ou Larsson et Yuan (2004)) La dualisation des contraintes de capacité conjointe permet de décomposer le modèle en autant de sous problèmes qu'il y a de types de flots. Elle assure aussi que les paiements sont fonction de la congestion imposée sur les arcs.

La capitalisation des calculs pour la détermination des paiements peut être effectuée en réutilisant comme solution de départ des problèmes de prix, les valeurs des variables duales optimales - obtenues lors de l'élection des gagnants. Cette approche sera efficace si les variables duales optimales des problèmes de prix sont proches de celle du problème de détermination des gagnants. Par exemple lorsque les arcs congestionnés sont les mêmes dans les deux problèmes.

Néanmoins, l'algorithme de la dualité lagrangienne ne nous assure pas la réalisabilité primale de la solution. L'utilisation d'une heuristique devient alors indispensable. Le lecteur pourra se référer à l'article de Fisher (1981) pour une introduction à la relaxation lagrangienne des problèmes en nombres entiers.

Cette méthode duale est tout de même utilisable pour résoudre les problèmes de détermination des paiements, puisqu'ils nécessitent seulement de connaître la valeur d'une certaine fonction objectif. Nous avons remarqué que dans la littérature sur les places de marchés électriques, il existe des méthodes de tarification basées sur ce coût marginal, comme le montrent Altman et Wynter (2004).

Malheureusement, les multiplicateurs optimaux ne sont non nuls que pour les arcs saturés. C'est pourquoi n'est alors plus viable pour des réseaux où il n'y a que très peu, voire pas de congestion.

4.2 Réseaux de télécommunications

Nous présentons maintenant la méthode de décomposition de Benders appliquée au modèle « plusieurs-vers-un ». Nous l'avons implémenté à l'aide de la bibliothèque d'optimisation COIN-OR (sous licence CPL¹) et Paeger (sous licence « scientifique »²)

Le flot sur chaque arc représente des transferts d'information avec un protocole par paquet, par exemple TCP/IP. Nous faisons l'hypothèse que la quantité de bande passante exigée pour une connexion est assez importante pour que le nombre de paquets puisse être réel. Le flot sur les n arcs est donc continu ($X \in \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i \in n, x_i \geq 0\}$). Les protocoles par paquet facilitent la division des flots. Chaque paquet peut suivre une route différente. Le flot est dit bifurqué.

L'approche utilisant la décomposition de Benders est une approche descendante, c'est-à-dire que l'on va tenter de résoudre d'abord le problème d'affectation, puis ensuite les problèmes de détermination des paiements. Les problèmes de prix étant des restrictions du problème de détermination des gagnants, une grande partie des contraintes générées durant la phase de détermination des gagnants est réutilisable lors de la phase de calcul des prix de Vickrey. En effet, le retrait du participant i de l'enchère, revient à retirer la variable de décision y_i du modèle ou de façon équivalente à fixer sa valeur à zéro. Nous verrons que cette restriction n'invalide pas l'ensemble des contraintes.

4.2.1 Sous problèmes

Les sous problèmes sont utilisés pour générer des contraintes qui seront ajoutées au problème maître. L'enveloppe convexe de ce dernier va alors décrire l'espace des solutions de notre modèle de plus en plus précisément.

Nous présentons le sous-problème (P_y), la projection du problème original sur les variables complicantes y .

¹Common Public License, gratuité pour tous usages

²Gratuité pour un usage non commercial.

(P_y)

$$\max \quad - \sum_{i \in I} \sum_{a \in A^i} c_{ia} x_{ia}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{a \in A_+^i(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A_-^i(v)} x_{ia} = b_i^v \bar{y}_i \quad \forall i \in I, \forall v \in V^i \quad (\alpha_{iv}) \quad (4.1)$$

$$-x_{ia} \leq -l_{ia} \bar{y}_i \quad \forall i \in I, \forall a \in A^i \quad (\beta_{ia}^l) \quad (4.2)$$

$$x_{ia} \leq -u_{ia} \bar{y}_i \quad \forall i \in I, \forall a \in A^i \quad (\beta_{ia}^u) \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ia} \leq u_a \quad \forall a \in A \quad (\mu_a) \quad (4.4)$$

$$x \in \mathbb{X},$$

avec le paramètre b_i^v défini comme précédemment par

$$b_i^v = \begin{cases} d_i & \text{si } v = O_i \\ -d_i & \text{si } v = D_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(D_{\bar{y}})$ le dual de ce sous problème
(D_y)

$$\min \quad \sum_{i \in I} \bar{y}_i \left[d_i (\alpha_{iO} - \alpha_{iD}) - \sum_{a \in A^i} u_{ia} \beta_{ia}^u + l_{ia} \beta_{ia}^l \right] + \sum_{a \in A} u_a \mu_a$$

$$\text{s.a.} \quad \alpha_{iu} - \alpha_{iv} + \beta_{ia}^u - \beta_{ia}^l + \mu_a \geq -c_{ia} \quad \forall i \in I, \forall a = (u, v) \in A^i \quad (4.5)$$

$$\beta, \mu_a \geq 0.$$

Pour simplifier l'écriture nous utilisons le changement de variable (u_i^t, Λ^t) , avec les variables du problème dual optimales à l'itération t

$$u_i^t = \left[d_i (\alpha_{iO}^* - \alpha_{iD}^*) - \sum_{a \in A^i} u_{ia} \beta_{ia}^{u*} + l_{ia} \beta_{ia}^{l*} \right]$$

$$\Lambda^t = \sum_{a \in A} u_a \mu_a^*.$$

Soit P_1 l'ensemble des itérations où le vecteur \bar{y}_i était irréalizable ($(D_{\bar{y}})$ non borné) et P_2 l'ensemble des itérations où il était réalisable, mais non optimal ($(D_{\bar{y}})$ optimal). Le problème équivalent peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 & (EP) \\
 \max \quad & \sum_{i \in I} p_i y_i + \omega \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{i \in I} y_i u_i^t \geq -\Lambda^t & \forall t \in P_1 \\
 & \sum_{i \in I} y_i u_i^t - \omega \geq -\Lambda^t & \forall t \in P_2 \\
 & y \in \mathbb{Y} \\
 & \omega \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

4.2.1.1 Validité des coupes pour les problèmes de paiements

Coupes d'irréalizabilité

Le problème de paiement pour le participant i est obtenu en fixant la variable de décision représentant l'affectation du participant (y_i) à 0. Ces problèmes sont donc des restrictions du problème original. De ce fait, l'ensemble des coupes d'irréalizabilité générées pendant la détermination des gagnants restent valides pour ces restrictions.

Coupes d'optimalité

En ce qui concerne les coupes d'optimalité, on peut montrer que pour tout $t \in P_2$, les coefficients u_i^t sont non positifs. Le fait de fixer à zéro une des variables binaires (y_i) de ces coupes ne les invalide donc pas.

Proposition 4.1. *Pour tout $t \in P_2$, $u_i^t \leq 0$.*

Démonstration. Montrons que $\alpha_{iO}^t - \alpha_{iD}^t \leq 0$ et donc que $(D_{\bar{y}})$ a pour solution optimale un vecteur u_i^t non positif.

Pour tout $t \in P_2$, on a $\alpha_{iu}^t - \alpha_{iv}^t \geq -c_{ia} - \mu_a^t + \beta_{ia}^{lt} - \beta_{ia}^{ut}$.

On fixe la variable μ_a^t pour étudier les valeurs possibles à l'optimum des vecteurs α^t et β^t ,

$$\alpha_{iu}^t - \alpha_{iv}^t \geq -c_{ia} - \bar{\mu}_a^t - \beta_{ia}^{ut} + \beta_{ia}^{lt}.$$

En sommant cette inégalité sur tous les arcs de A^i contenus dans un chemin entre O_i et D_i , et puisque $(D_{\bar{y}})$ est une minimisation avec $d_i \geq 0$, on obtient pour tout chemin p reliant O_i à D_i ,

$$\alpha_{iO}^t - \alpha_{iD}^t \geq \sum_{a \in p} -c_{ia} - \bar{\mu}_a^t - \beta_{ia}^{ut} + \beta_{ia}^{lt},$$

donc

$$\alpha_{iO}^t - \alpha_{iD}^t = \max_p \sum_{a \in p} -c_{ia} - \bar{\mu}_a^t - \beta_{ia}^{ut} + \beta_{ia}^{lt}.$$

Donc pour tout $\bar{\mu}_a^t, \beta_{ia}^{lt} = \beta_{ia}^{ut} = 0$ est réalisable et implique à l'optimum $u_i^t \leq 0$.

Puisque pour tout μ_a^t réalisable il existe une solution de $(D_{\bar{y}})$ tel que $u_i^t \leq 0$, on en déduit que le vecteur u^t optimal est non positif. \square

4.2.2 Coupes initiales

En pratique, il est possible d'initialiser le problème maître avec des coupes générées à partir des contraintes du problème.

4.2.2.1 Coupes de capacité dans le graphe

Soit (V_l, \bar{V}_l) une partition des nœuds V . Nous définissons la coupe de capacité $C(V_l, \bar{V}_l)$, qui contient l'ensemble des arcs séparant les deux ensembles de nœuds V_l et \bar{V}_l

$$C(V_l, \bar{V}_l) = \{a \in A \mid a = (v, v'), v \in V_l, v' \in \bar{V}_l\},$$

et $I(V_l, \bar{V}_l)$ l'ensemble des indices des participants ayant leur origine dans V_l et leur destination dans \bar{V}_l

$$I(V_l, \bar{V}_l) = \{i \in I \mid O_i \in V_l, d_i \in \bar{V}_l\}.$$

La capacité maximale de cette coupe, en prenant en compte les demandes et les graphes admissibles des participants est $\phi(V_l)$:

$$\begin{aligned}
 \phi(V_l) = \max \quad & \sum_{i \in I(V_l, \bar{V}_l)} d_i y_i \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A^+ \cap C(V_l, \bar{V}_l)} x_{ia} = d_i y_i \quad \forall i \in I(V_l, \bar{V}_l) \\
 & \sum_{i \in I(V_l, \bar{V}_l)} x_{ia} \leq u_a \quad \forall a \in C(V_l, \bar{V}_l) \\
 & x \in \mathbb{X}, \quad y \in \mathbb{Y}.
 \end{aligned}$$

La coupe valide pour notre problème est alors

$$\sum_{i \in I(V_l, \bar{V}_l)} y_i d_i \leq \phi(V_l).$$

En pratique, il est intéressant de générer les coupes pour l'ensemble des partitions telles que V_l ou \bar{V}_l contiennent un seul nœud. Ces coupes ne sont pas les plus fortes que l'on puisse générer, mais sont utiles lorsque $\phi(V_l) < \sum_{i \in I(V_l, \bar{V}_l)} d_i$.

Ces coupes sont très efficaces lorsque le graphe est peu connecté ou que le rapport entre la quantité de flot pouvant sortir et la somme des demandes sortant de ce nœud est faible.

4.2.2.2 Borne inférieure sur la valeur d'un flot

Pour chaque acheteur $i \in I$, on propose de résoudre le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{a \in A^+} c_{ia} x_{ia} \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{a \in A^+_+(v)} x_{ia} - \sum_{a \in A^+_-(v)} x_{ia} = b_i^v \quad \forall v \in V^i \setminus \{O_i, D_i\} \\
 & x \in \mathbb{X}.
 \end{aligned}$$

La solution optimale de ce problème de flot nous permet d'obtenir une borne inférieure sur le coût engendré par la satisfaction de la mise du participant $i \in I$.

4.2.2.3 Borner le nombre de gagnants

Il est possible de générer des coupes pour borner le nombre minimum et maximum de gagnants de l'enchère si on possède un encadrement de la valeur optimale de notre problème. Il faut remplacer la fonction objectif de l'enchère par la somme des y_i et contraindre la fonction objectif originale à prendre ses valeurs dans cet intervalle.

La minimisation et la maximisation de ce problème nous permettent d'obtenir respectivement une borne inférieure et supérieure du nombre de gagnants.

4.3 Réseaux ferroviaires

Nous présentons ici la résolution d'un cas particulier du modèle « plusieurs-vers-un », applicable aux réseaux ferroviaires ou à tout autre type de réseau dont les participants souhaitent acquérir des droits de passages sur des chemins fixés.

Les participants spécifient dans leur mise l'ensemble des chemins qu'ils souhaitent acquérir et la capacité demandée sur chacun d'entre eux. Nous proposons aussi une variation dans laquelle il est possible de spécifier plusieurs mises composées chacune d'ensemble de chemins et de capacité, mais dont une seule sera satisfaite.

Dans la première section nous présentons la résolution du problème de sac à dos à une contrainte, correspondant à une enchère sur un arc, ainsi que le calcul des paiements. La seconde section est consacrée à l'extension de ce résultat au cas avec plusieurs contraintes, correspondant à une enchère sur un graphe général.

L'intérêt des programmes dynamiques pour les enchères sur plus d'un arc est assez limité, car ils n'ont pas une complexité polynomiale sur la topologie du réseau. En revanche leur complexité est linéaire sur le nombre de mises et le nombre de chemins autorisés. De plus, il est intéressant de remarquer que la complexité du problème de détermination des gagnants et du calcul des paiements est asymptotiquement identique.

Une grande partie des résultats de cette section ont été inspirés par le livre de Martello et Toth (1997) sur les problèmes de sac à dos et par l'article de Hershberger et Suri (2001) sur le calcul des paiements de Vickrey pour une enchère sur le plus court chemin.

4.3.1 Algorithme trivial

Un algorithme trivial pour la résolution de ce problème consiste à énumérer toutes les affectations de chemins réalisables sur l'espace des mises. Soit P_i le nombre d'ensembles de chemin que le participant i soumet. Chaque participant gagnant se voit attribuer un seul des ensembles de chemin qu'il soumet. L'algorithme trivial a une complexité en

$$\mathcal{O}\left(\prod_{i \leq n} (P_i + 1)\right).$$

4.3.2 Ensemble de chemins

Nous supposons que les mises des participants définissent des affectations de flots uniques. C'est-à-dire qu'elles imposent le routage de la demande et ne laissent pas aux opérateurs de réseau la possibilité de le modifier.

4.3.2.1 Cas mono-ressource (arc)

Le cas mono ressource (arc) est modélisé à l'aide d'un problème de sac à dos. Un algorithme de programmation dynamique simple pour le résoudre consiste à chaque étape à ajouter un nouvel objet et à parcourir pour cet ajout l'ensemble des affectations réalisables. Par analogie avec notre enchère, les objets représentent les participants de l'enchère et le sac à dos correspond à l'arc.

I est l'ensemble des participants. Le scalaire d_i est égal à la quantité de ressources demandées par le participant $i \in I$ sur l'arc. u est la quantité maximale de ressources disponibles.

4.3.2.1.1 Algorithme de détermination des gagnants Soit la fonction $f_m(\hat{u})$ qui nous donne la solution optimale pour le sous-ensemble de participants, défini par m ,

pour une quantité de ressources \hat{u} fixée.

$$f_m(\hat{u}) = \left\{ \max \sum_{i \in m} p_i y_i : \sum_{i \in m} y_i d_i \leq \hat{u}, y \in \{0, 1\}^n \right\}.$$

Le programme dynamique pour résoudre ce problème est décrit par

$$f_{m \cup \{i\}}(\hat{u}) = \begin{cases} f_m(\hat{u}) & \text{si } d_i > \hat{u} \\ \max\{f_m(\hat{u}), f_m(\hat{u} - d_i) + p_i\} & \text{sinon, } (d_i \leq \hat{u}) \end{cases},$$

avec $f_0(\cdot) = 0$ et $f_I(u)$ la valeur de la solution optimale.

L'algorithme se déroule alors de la façon suivante :

1. $m \leftarrow \emptyset$, ordonner I .
2. Pour tout participant $i \in I \setminus m$,
 - (a) $m \leftarrow m \cup i$, $\hat{u} \leftarrow 0$.
 - (b) Tant que $\hat{u} < u$, incrémenter \hat{u} et calculer $f_m(\hat{u})$.

Théorème 4.2. *Cet algorithme permet de résoudre le problème de sac à dos avec un nombre maximum de $\mathcal{O}(nu)$ itérations. n est le nombre d'objets (participants) et u le nombre de ressources disponibles (capacité maximale de l'arc).*

Démonstration. Nous visitons tous les participants et pour chaque participant, nous calculons au plus u fois la valeur de la fonction f_m . □

4.3.2.1.2 Algorithme de détermination des gagnants et des paiements En s'inspirant de la méthode de calcul des prix de Vickrey pour le plus court chemin, présentée dans Hershberger et Suri (2001), nous proposons l'algorithme suivant pour calculer les paiements.

1. Résoudre le programme dynamique pour les participants de 1 à $|I|$,
2. puis pour les participants de $|I|$ à 1.
3. Calculer les paiements en combinant les résultats des programmes dynamiques précédents.

Soit $f_m(\hat{u})$ les résultats du premier passage et $g_m(\hat{u})$ les résultats du second passage.

Proposition 4.3. *La valeur optimale du problème de sac à dos sans l'objet k et pour une quantité de ressources maximales de u est donnée par*

$$h_k(u) = \left\{ \max_{\hat{u} \leq u} f_{m_k}(\hat{u}) + g_{m'_k}(u - \hat{u}) \right\},$$

avec $m_k \cup m'_k = M \setminus k$ et $m_k \cap m'_k = \emptyset$.

Pour chaque participant, on parcourt l'ensemble des partitions possibles de l'espace des ressources. Ce qui dans notre cas donne u itérations. Le calcul des paiements pour tous les participants s'effectue en $\mathcal{O}(nu)$ lorsque l'on dispose des valeurs optimales des fonctions f et g .

Théorème 4.4. *La détermination des gagnants et le calcul des paiements d'un mécanisme VCG basé sur un problème de sac à dos peuvent être faits dans le même temps asymptotique que la résolution de l'affectation seule, soit*

$$\mathcal{O}(nu).$$

Corollaire 4.5. *Cet algorithme permet de résoudre le mécanisme VCG pour une enchère sur un arc, avec une complexité en $\mathcal{O}(nu)$.*

Remarque. Le livre de Martello et Toth (1997) contient des programmes dynamiques plus sophistiqués et la description d'états dominés pouvant être utilisés pour améliorer les temps de résolution. Pour des problèmes de sac à dos, ils notent la supériorité de la programmation dynamique par rapport aux méthodes de séparation-et-évaluation, pour certains problèmes de grande taille.

4.3.2.2 Cas multi-ressources (réseau)

Dans le cas multi-ressources, u est un vecteur. Chacune des m composantes u_a pour $a \in A$, vaut la quantité de ressource disponible de type a . Si a est un arc, alors u_a

représente la capacité maximale de l'arc. d_{ia} représente la consommation de ressource de type a - capacité demandée sur l'arc a - par le participant $i \in I$ lorsque ce dernier gagne l'enchère. Le vecteur d_i est défini par $d_i = (d_{ia})_{a \in A}$.

Notre problème de détermination des gagnants s'écrit alors

$$f_m(\hat{u}) = \left\{ \max \sum_{i \in m} p_i y_i : \sum_{i \in m} y_i d_{ia} \leq \hat{u}_a, a \in A, y \in \{0, 1\}^n \right\},$$

et la solution optimale est donnée par $f_I(u)$.

Par analogie avec le cas à un arc, nous obtenons le programme dynamique suivant :

$$f_{m \cup \{i\}}(\hat{u}) = \begin{cases} f_m(\hat{u}) & \text{si } \exists a \in A, d_{ia} > \hat{u}_a \\ \max\{f_m(\hat{u}), f_m(\hat{u} - d_i) + p_i\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $f_0(\cdot) = 0$ et $f_I(u)$ la valeur de la solution optimale.

Nous reprenons le même algorithme que précédemment, sauf qu'au lieu d'incrémenter \hat{u} , on parcourt l'espace des affectations de capacité sur les arcs. Cet espace contient $\prod_{a \in A} (u_a + 1)$ éléments distincts.

Théorème 4.6. *La complexité de cet algorithme est en*

$$\mathcal{O} \left(nm \prod_{a \in A} (u_a + 1) \right),$$

avec n le nombre de participants, m le nombre d'arcs et u_a la capacité de l'arc $a \in A$.

Démonstration. Pour chaque participant on parcourt l'ensemble des affectations de capacité sur les arcs, soit $\mathcal{O}(n \prod_{a \in A} (u_a + 1))$ itérations. À chacune de ces itérations, on fait au plus m opérations élémentaires (soustraction du vecteur de demande). La complexité de l'algorithme est donc en

$$\mathcal{O} \left(nm \prod_{a \in A} (u_a + 1) \right).$$

□

Si on peut représenter le problème à l'aide de coupes dans le graphe, on peut alors énumérer les conflits et représenter notre problème avec possiblement moins de contraintes. Cette représentation n'est pas toujours possible.

Bien que la complexité de l'algorithme dans le pire cas n'est pas intéressante, l'utilisation d'heuristiques pour réduire l'espace de recherche (espace des vecteurs de capacité) peut rendre cet algorithme utilisable en pratique. En pratique les problèmes de sac à dos à plusieurs contraintes sont actuellement résolus de façon approchée, comme le montrent par exemple, les travaux de Vasquez et Vimont (2005) et de Puchinger, Raidl et Gruber (2005).

Théorème 4.7. *Pour tout mécanisme VCG se modélisant à l'aide d'un problème de sac à dos, il est possible de calculer l'affectation ainsi que les paiements dans le même temps asymptotique, soit*

$$\mathcal{O}(nQ(C + 1)^Q).$$

Avec n le nombre de participants, Q le nombre de conflits permettant de représenter notre problème et C le nombre maximum de ressources dans un conflit (ou objet).

4.3.2.3 Heuristiques de réduction de l'espace

Nous supposons que l'ensemble des participants I est classé par ordre non décroissant des indices i .

Espace des ressources

- La composante \hat{u}_a du vecteur \hat{u} est inutile si la somme des demandes pour cet arc n n'est pas strictement supérieure à la capacité maximale, c'est-à-dire si

$$\sum_{i \in m} w_{ia} y_i \leq u_a, \forall y \in \mathbb{Y}.$$

- La composante \hat{u}_a du vecteur \hat{u} est inutile si la contrainte a est dominée ou équi-

valente à une contrainte du problème, c'est-à-dire si

$$\exists a' \in A, \sum_{i \in m} w_{ia} y_i - u_a \leq \sum_{i \in m} w_{ia'} y_i - u_{a'} \leq 0, \forall y \in \mathbb{Y}.$$

Il est alors possible de remplacer la contrainte correspondant à la composante a par celle correspondant à a' .

4.3.3 Un ensemble de chemins parmi plusieurs

L'algorithme présenté précédemment peut être étendu pour modéliser le fait que chaque participant souhaite l'acquisition d'un seul des sous-réseaux qu'il a soumis dans sa mise. Pour ce faire, il suffit de ne plus parcourir uniquement l'espace des sous-ensembles de participants, mais d'itérer aussi sur l'espace des sous-réseaux demandés.

Soit pour chaque participant i , l'ensemble D_i , composé de P_i vecteurs de demande par arcs (ou chemins) ω_{ip} , $1 \leq p \leq P_i$. Le programme dynamique que nous proposons s'écrit

$$f_{m \cup \{i\}, p}(\hat{u}) = \begin{cases} f_m(\hat{u}) & \text{si } \exists a \in A, w_{ia} > \hat{u}_a \\ \max\{f_m(\hat{u}), f_{m-1}(\hat{u} - \omega_{ip}) + p_i\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $f_{m \cup \{i\}}(\hat{u}) = \min_{p \in P_i} f_{m \cup \{i\}, p}(\hat{u})$ et $f_I(u)$ la solution optimale.

Théorème 4.8. *Ce programme dynamique a une complexité de résolution en*

$$\mathcal{O} \left(\sum_{i \leq n} P_i Q m \right),$$

avec Q la taille de l'espace des affectations de capacité sur les arcs et m la taille maximale du vecteur de capacité demandée.

Démonstration. Le calcul de la fonction f_m est effectué pour tous les participants et toutes les affectations de capacité sur les arcs. À chaque itération, il nécessite P_i opérations élémentaires de comparaison pour trouver le minimum. Sa complexité est donc

en

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i \leq n} P_i Q\right).$$

Le calcul de la fonction f_{mp} est effectué pour tous les chemins de chaque participant et pour tous les éléments de l'espace des ressources. À chaque itération, il faut soustraire le vecteur de capacité demandée, de taille maximale m .

Sa complexité est donc en

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i \leq n} P_i Q m\right).$$

□

Corollaire 4.9. *La complexité de l'algorithme de détermination des gagnants et des paiements nécessite dans le pire cas un nombre d'opérations élémentaires en*

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i \leq n} P_i Q m\right).$$

CHAPITRE 5

TESTS NUMÉRIQUES

Nous présenterons dans ce chapitre les tests expérimentaux effectués sur l'implantation de l'enchère avec un vendeur et plusieurs acheteurs, dans le cadre d'un problème de transport avec flot bifurcable.

Nous rappelons que dans cette enchère il y n'a qu'un vendeur, représenté par le commissaire priseur, qui possède l'ensemble du réseau. Les acheteurs misent pour acquérir un droit de passage sur une partie de ce réseau, leur permettant de satisfaire leur demande de transport entre deux points du réseau.

Dans la première section, nous présenterons comment sont générés les différents jeux de donnée de tests, pour les mises et les graphes. La deuxième section sera consacrée à la discussion des résultats de deux jeux de tests.

5.1 Création des jeux de tests

5.1.1 Le graphe sous-jacent

Le graphe sous-jacent de chaque jeu de test est généré à l'aide du logiciel `netgen` développé par Klingman (1974), qui permet de créer des instances de problèmes de transport ou d'affectation. Ce logiciel ayant tendance à créer des graphes complets, nous avons modifié à la main certaines instances. Les instances générées correspondent toutes à des problèmes de transport ou d'affectation réalisables.

5.1.2 Les mises

Les couples origine et destination sont choisis aléatoirement entre les nœuds qui possèdent un excès de demande et ceux qui ont un déficit de demande. Nous vérifions

toujours qu'il existe un chemin entre deux nœuds sélectionnés¹.

Le graphe admissible de chaque participant est extrait à partir du plus court chemin entre le couple de nœuds origine et destination lui correspondant. Le plus court chemin est toujours soumis, puis un certain nombre d'arcs lui étant incidents sont ajoutés pour augmenter le nombre de chemins entre le couple de nœuds. Ces nouveaux chemins sont générés par ordre de coût non décroissant et leur nombre est contrôlé par un paramètre limitant la taille du réseau admissible en nombre d'arcs.

Les valeurs des mises sont générées selon deux distributions :

1. une loi uniforme centrée sur la valeur du flot de coût minimum entre l'origine et la destination et de capacité égale à la demande,
2. ou une loi uniforme centrée sur une constante (1000).

La demande de chaque acheteur est aussi tirée dans une distribution uniforme centrée soit sur la quantité maximale de flots pouvant passer de l'origine vers la destination sur le graphe admissible, soit sur une constante.

Un paramètre de difficulté allant de 0 à 1 permet de contrôler la variance de ces deux distributions.

5.1.3 Génération des jeux de tests

Nous allons présenter des résultats issus d'un jeu de test où l'on fait varier les paramètres de taille de réseaux admissibles (6 valeurs), de variances des distributions de prix (7 valeurs) et de nombre de mises (6 valeurs). La taille des réseaux admissibles est donnée en nombre minimum d'arcs autorisés.

5.2 Résultats

5.2.1 Description

La méthode d'évaluation/séparation s'est avérée très performante pour résoudre notre problème lorsqu'il y avait peu de routage à faire, comme c'est le cas lorsqu'il existe

¹si tel n'est pas le cas, le couple de nœuds est retirés des mises possibles.

un arc entre chacun des couples origine et destination. Par contre, nous verrons que l'utilisation de la décomposition de Benders semble beaucoup plus stable puisqu'elle paraît être peu influencée par la taille du problème de routage des demandes. Les tests ont été effectués en négligeant les coûts variables de transport. Ils modélisent donc une enchère sur un plan de transport déjà existant, où les coûts sont considérés globaux ou non quantifiables.

Nous faisons l'hypothèse que le coût sur les arcs est négligeable par rapport aux coûts fixes.

Remarque. Nous avons effectué des tests en utilisant un coût sur les arcs. Lorsque les valeurs des mises sont corrélées avec ces coûts, la méthode de séparation-et-évaluation est beaucoup plus efficace que la méthode de Benders, car le coût des variables de flots, qui apparaissent dans les sous-problèmes de Benders, peuvent influencer grandement l'affectation des mises.

Les tests présentés ont été effectués sur un réseau généré par le logiciel de Klingman (1974). La première série de tests a été faite en utilisant des mises générées sur ce réseau. Le générateur de graphes ayant tendance à créer des graphes possédant des plus courts chemins avec très peu d'arcs, nous avons fait une deuxième série de tests en utilisant les mêmes jeux de mises, mais en retirant du réseau l'ensemble des arcs reliant directement les couples origine et destination, afin de rendre non trivial le routage. Il y a pour chaque jeu de tests, 252 enchères.

Tous les calculs ont été effectués sur une machine équipée d'un processeur Athlon64 cadencé à 2.4 Ghz, possédant 2Go de mémoire vive et un système d'exploitation Linux. Le temps maximum de résolution est de 2 heures. Les instances non résolues ne sont pas comptabilisées pour le calcul des temps moyens de résolution. Les deux principaux logiciels libres utilisés pour le développement de ce prototype sont la librairie d'optimisation combinatoire COIN-OR et la bibliothèque d'optimisation sur graphe de Paeger. Bien que COIN-OR soit encore très loin des performances d'une librairie commerciale

comme CPLEX, elle offre la possibilité d'implémenter avec peu de frais des projets d'optimisation. Nous avons observé quelques bogues dans cette bibliothèque et la disponibilité du code source a permis de les corriger rapidement ainsi que de comprendre en peu de temps les algorithmes, heuristiques et coupes utilisés dans l'implantation de leur procédure de séparation-et-évaluation.

5.2.2 pbl-05-40x400 (I)

Cette instance de test comporte 40 nœuds et 355 arcs. Les capacités sur les arcs sont comprises entre 1 et 10000. La distance minimum moyenne entre l'origine et la destination de chaque mise est d'environ 2 arcs. Le tableau de la figure 5.1, présente les temps de résolution de l'algorithme de Benders et de la procédure de séparation-et-évaluation. Les temps de résolution moyens sont exprimés en secondes. La colonne A contient le temps moyen pour l'ensemble des instances résolues, tandis que la colonne B contient les temps moyens de résolution pour les instances résolues par les deux méthodes. Le dernier tableau présente le nombre totale d'instances résolues, ainsi que le temps moyen de résolution de toutes les instances.

5.2.3 pbl-05-40x400 (II)

Le graphe sous-jacent de ce jeu a été obtenu en retirant du graphe du jeu (I), les 69 arcs qui reliaient directement des couples origine et destination demandé par les participants. Cette instance de test comporte donc 40 nœuds et 286 arcs. Le graphe sous-jacent du réseau est identique au précédent, hormis le fait que l'ensemble des arcs reliant une origine et une destination d'une même mise a été retiré du graphe, pour augmenter la distance minimum (en nombre d'arcs) entre les couples origine et destination. Les capacités sur les arcs sont comprises entre 1 et 1000. La distance minimum moyenne entre l'origine et la destination de chaque mise est d'environ 5 arcs.

Nombre de mises	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
10	42	42	0,15	0,12	0,15	0,12
50	42	42	248,97	900,09	248,97	900,10
90	30	24	1062,57	1028,84	824,20	982,23
100	27	25	931,67	1342,85	974,13	1287,50
200	8	7	1592,28	931,66	29,81	1628,37
300	7	6	1319,62	168,43		

Taille des sous-réseaux	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
1	40	40	145,75	26,68	5,17	1,57
2	16	26	736,87	778,27	736,87	413,00
5	18	20	1384,21	625,85	1029,25	566,95
10	27	20	610,80	1166,82	366,06	1173,47
50	30	20	804,75	1104,50	147,29	1104,50
100	25	20	251,40	1217,96	141,06	1161,90

	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
Somme	156	146				
Moyenne			573,43	709,62	336,10	677,07

Figure 5.1 – Statistique de résolution pour pbl-05-40x400 (I)

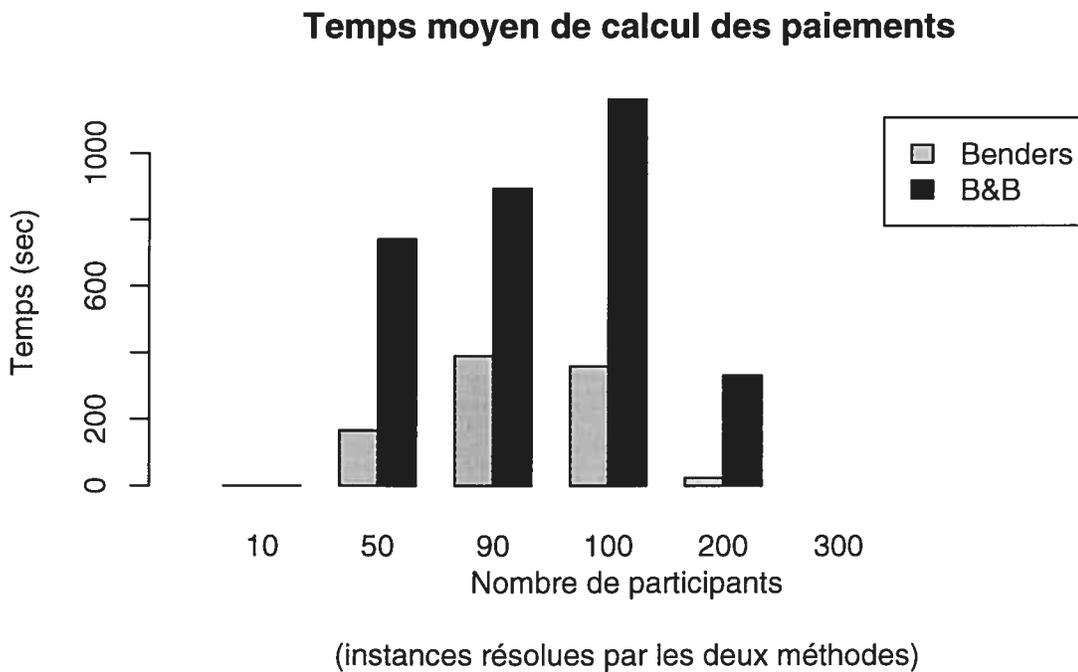
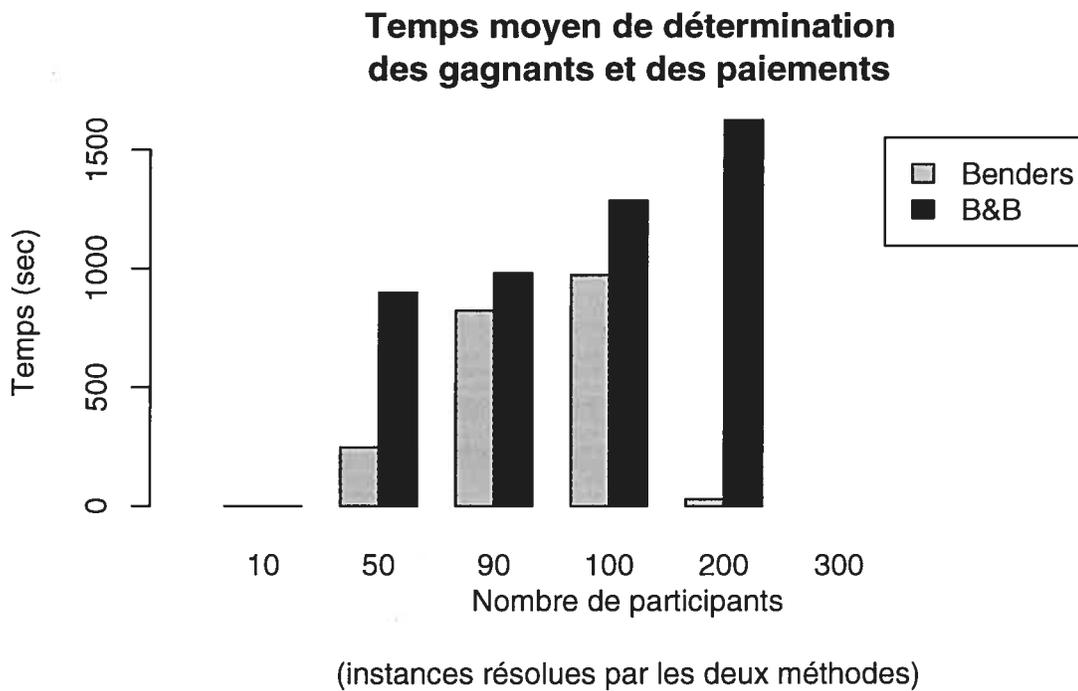


Figure 5.2 – Comparaison des temps de résolution entre Benders et la méthode d'évaluation-et-séparation, pour le premier jeu de test.

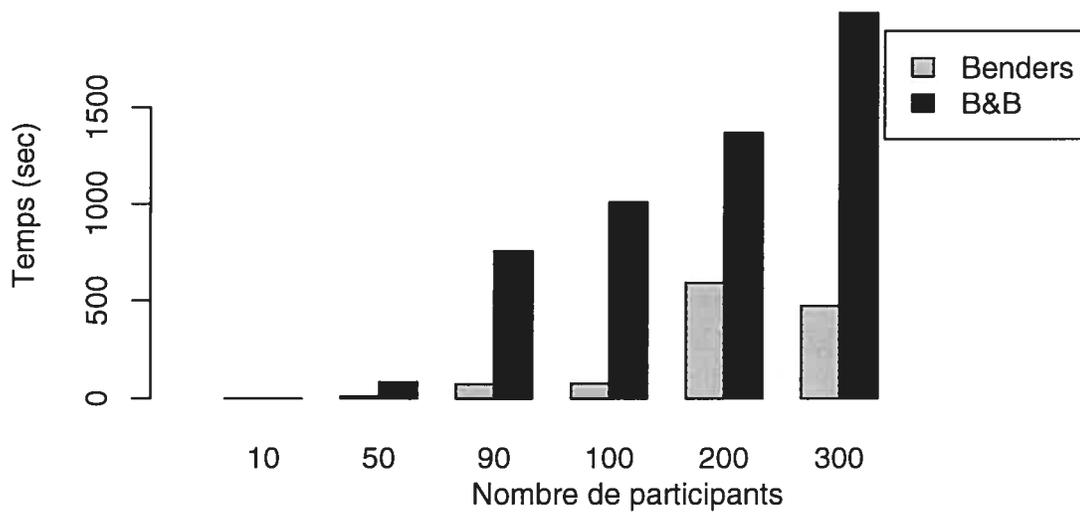
Nombre de mises	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
10	42	42	0,15	0,08	0,15	0,08
50	42	42	11,87	84,38	11,87	84,38
90	42	42	74,41	757,03	74,41	757,03
100	42	40	77,88	1010,29	79,02	1010,29
200	36	27	698,18	1395,24	594,44	1369,69
300	30	22	814,49	1883,76	476,32	1986,48

Taille des sous-réseaux	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
1	42	42	13,79	41,52	13,79	41,52
2	33	38	559,67	401,13	425,54	280,79
5	34	32	498,51	766,30	268,56	630,81
10	42	35	96,71	863,79	104,37	863,79
50	42	33	309,54	1109,68	36,71	1109,68
100	41	35	83,18	1328,81	54,85	1328,81

	Nombre d'instances résolues		Temps de résolution moyens A (sec)		Temps de résolution moyens B (sec)	
	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>	<i>Benders</i>	<i>B&B</i>
Somme	234	215				
Moyenne			241,32	720,32	140,27	690,89

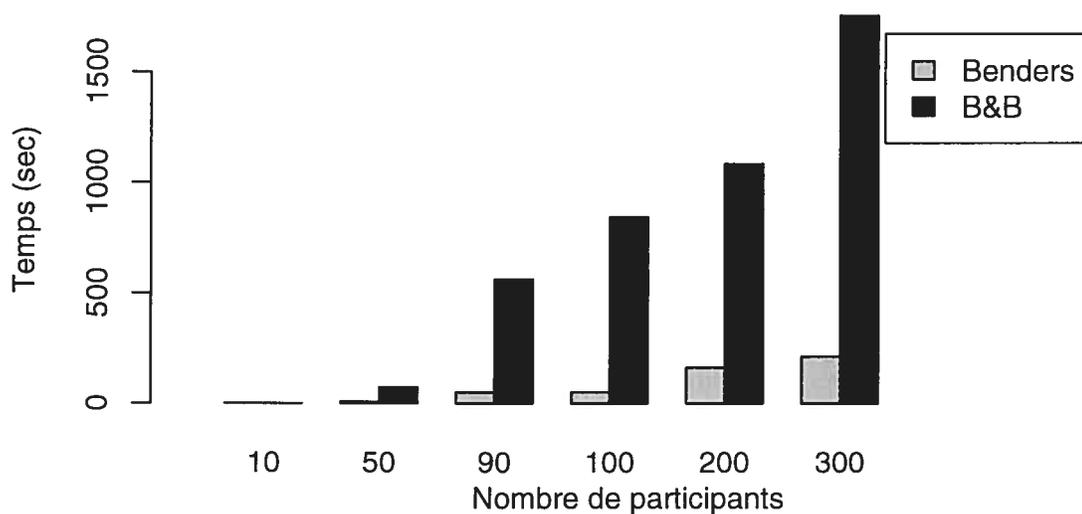
Figure 5.3 – Statistique de résolution pour pbl-05-40x400 (II)

Temps moyen de détermination des gagnants et des paiements



(instances résolues par les deux méthodes)

Temps moyen de calcul des paiements



(instances résolues par les deux méthodes)

Figure 5.4 – Comparaison des temps de résolution entre Benders et la méthode d'évaluation-et-séparation, pour le deuxième jeu de test.

5.2.4 Analyse

Les résultats présentés sur un graphe dense dont les plus courts chemins ont une taille moyenne de deux arcs, et ceux obtenus sur le second jeu de donnée dans lequel les plus courts chemins ont une taille moyenne plus grande, ont montré l'efficacité de la méthode de Benders.

En résolvant 156 des 252 instances du premier jeu de donnée et 234 des 252 instances du second, la méthode de Benders a résolu 29 instances de plus que la méthode de séparation-et-évaluation. Nous remarquons qu'en comparant la moyenne de temps de calcul, pour les instances résolues par les deux méthodes, la méthode de Benders est globalement plus rapide que celle de séparation-et-évaluation. Elle calcule la solution de l'ensemble des instances résolues par les deux méthodes en moitié moins de temps (comme le montre la colonne *Temps de résolution moyens B (sec)* des figures 5.1 et 5.3).

Nous remarquons aussi la supériorité de Benders lors du calcul des paiements mise en relief par les graphiques 5.2 et 5.4.

Un résultat intéressant est mis en valeur dans les tableaux 5.1 et 5.3, aussi bien dans les colonnes *Temps de résolution moyens A* que *Temps de résolution moyens B*. Le temps nécessaire à la résolution de l'enchère pour la méthode de séparation-et-évaluation semble être fortement lié à la taille du problème. En effet, mis à part quelques exceptions, le temps de calcul croît avec le nombre de participants ou la taille des sous-réseaux soumis.

Pour la méthode de Benders, la croissance du temps de calcul en fonction de la taille du problème est beaucoup moins importante. Lors de l'augmentation du nombre de participants, la force de cette méthode réside dans sa capacité à calculer rapidement les paiements, ce qui est le point faible de la méthode de séparation-et-évaluation. L'augmentation de la taille des sous-réseaux, quant à elle, va possiblement amplifier la différence entre la relaxation linéaire du problème et sa version en nombres entiers. Ceci pénalise fortement la résolution à l'aide de la méthode de séparation-et-évaluation, contrairement à la méthode de Benders car la taille des sous-réseaux ne modifie que son sous-problème

qui est un programme linéaire.

CONCLUSION

La déréglementation continue des réseaux, qu'ils soient électriques, ferroviaires ou hydrauliques, laisse présager de l'importance croissante que vont prendre les mécanismes d'enchères pour leur tarification et leur régulation.

Dans ce mémoire, nous avons proposé des places de marchés pour la vente de droits de passage de durée fixe sur des réseaux de télécommunication ou ferroviaires. Nous avons décrit des modèles facilitant la négociation de contrats de transport entre un acheteur et plusieurs vendeurs, plusieurs acheteurs et un unique vendeur et enfin entre plusieurs vendeurs et acheteurs. Les transferts entre les participants de chacun de ces modèles ont été brièvement étudiés. Nous avons ensuite poursuivi l'étude de l'enchère entre un vendeur et plusieurs acheteurs en proposant une version en flot entier (bifurcale ou non) et une version en flot continu. La résolution de cette dernière, à l'aide de l'algorithme de Benders, a montré les avantages de cette décomposition lorsqu'il s'agit de résoudre plusieurs fois des problèmes similaires.

Malheureusement, la difficulté de résolution de ces modèles nous empêche de les utiliser pour des systèmes qui nécessitent des temps de réponse très courts. Il reste donc beaucoup de travail à effectuer avant de pouvoir les utiliser pour de la tarification à la connexion (Internet) ou pour des enchères se déroulant en parallèle (vente de billets de train).

Ces difficultés ouvrent des perspectives intéressantes pour poursuivre les travaux que nous avons initiés. L'approche par décomposition de Benders a montré qu'il est possible, pour certains problèmes, d'utiliser des algorithmes capitalisant les résultats obtenus lors de la détermination des gagnants et détermine une base de comparaison pour d'autres algorithmes. Pour le cas avec des flots entiers, le modèle et l'algorithme proposé ne sont pas polynomiaux. Des méthodes de réduction de l'espace de recherche pour le programme dynamique ou une implantation à l'aide d'un algorithme approché dont il est

possible de fixer arbitrairement la distance minimale à l'optimum permettraient d'envisager son implantation. En ce qui concerne l'algorithme de séparation-et-évaluation, il pourrait être amélioré en sauvant l'arbre de branchement généré pendant la détermination des gagnants et en réutilisant les informations contenus dans ses nœuds, pour les calculs des paiements. Pour l'algorithme de Benders, il y a aussi des améliorations possibles au niveau de la génération des coupes de départ et de la résolution du problème maître.

Une autre limitation du mécanisme proposé vient de l'obligation pour les participants de révéler leur vraie valeur à un tiers. Dans de nombreux cas pratiques, cette contrainte va limiter le nombre de participants. C'est un des treizes points faibles relevés par Rothkopf (2007). Pour des implantations pratiques de nos places de marchés, il faudrait autoriser la relaxation de certaines hypothèses, comme nous l'avons fait pour résoudre le problème de non équilibre du budget. Par exemple, le problème de la révélation des valeurs peut être contourné à l'aide d'une relaxation lagrangienne des capacités conjointes sur les arcs, ce qui décompose le problème en autant de sous problèmes que de participants. Les seules informations échangées entre les participants et le commissaire priseur sont les variables duales lagrangiennes et les solutions trouvées. En plus de limiter le transfert d'information, cette décomposition permet de distribuer la résolution. En contrepartie, il faudra trouver comment empêcher les participants de mentir et comment résoudre efficacement les problèmes de paiement.

Pour continuer dans la modélisation des places de marchés pour la vente de capacité sur les réseaux, il serait intéressant d'en étudier une nouvelle. Nous suggérons que les transporteurs (vendeurs) soumettent leur route, leur capacité restante dans les camions et un coût en fonction des écarts de route qu'ils autorisent (prise en compte du retard, du coût de transport). Les acheteurs possèdent les demandes à transporter et le commissaire priseur assigne les modifications de route et les affectations de demande aux participants. La place de marché sert à optimiser l'utilisation des camions ainsi que leur route, en fonction des demandes de dernière minute. Avec les places de marchés présentées

dans ce mémoire, nous disposerions ainsi de mécanismes orientés vers la planification stratégique et d'autres utilisables pour faire de la planification opérationnelle.

Annexe I

Décomposition de Benders

L'utilisation de la décomposition de Benders permet de transformer notre problème de détermination des gagnants en un problème maître (variables entières et continues) et un sous-problème (appelé générateur de lignes) en variables continues. Cette méthode de décomposition fut présentée par Geoffrion (1972) qui a proposé sa généralisation au cas non linéaire. Geoffrion et Graves (1974) ont aussi proposé un article didactique sur son application à un problème de distribution multi-commodités.

Nous introduirons d'abord les notations utilisées, puis expliquerons cette méthode de relaxation qui approxime l'enveloppe convexe par étapes successives.

I.1 Notation

M ensemble des contraintes.

(MP) problème original

(MPL) problème relaxé.

\bar{f} meilleure borne supérieure de la fonction objectif f .

Nous supposons sans perte de généralité que le modèle que l'on souhaite optimiser est composé de I contraintes

$$\begin{aligned} \min C^T x \\ \text{s.a. } f_m(x) \leq 0, & \quad \forall m \in M \\ x \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

I.2 Procédure de relaxation

Étape 0 Soit $\bar{f} = -\infty$. Choisir $L \subseteq M$.

Étape 1 Résoudre (MPL) . Si (MPL) est irréalisable, STOP parce que (MP) est aussi irréalisable. Si (MPL) est non-borné, aller à l'étape 2. Sinon, prendre x^L une solution optimale de (MPL) et aller à l'étape 3.

Étape 2 Si toutes les contraintes avec un indice $m \in M - L$ ne sont pas violées lorsque la valeur de (MPL) tend vers $-\infty$, STOP car le problème original n'est pas borné. Sinon, choisir $V \subseteq M$ avec l'indice d'au moins une contrainte violée lorsque la valeur de (MPL) tend vers $-\infty$. Remplacer L par $L' = L \cup V$ et aller à l'étape 1.

Étape 3 Si pour x^L toutes les contraintes sont satisfaites STOP car x^L est optimal pour (MP) . Sinon, déterminer un sous-ensemble $V \subseteq M$ incluant l'indice d'au moins une contrainte non satisfaite.

Étape 4 Remplacer L par $L' = L \cup V$, \bar{f} par $f(x^L)$, et aller à l'étape 1.

I.3 Description

L'algorithme de Benders est un algorithme de relaxation, puisque le sous-problème ne contient qu'un sous-ensemble des contraintes du problème principal. Nous considérons que le vecteur y est le vecteur des variables complicantes et que le vecteur x est le vecteur des variables de décision réelles.

Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + f(y) \\ \text{s.a.} \quad & Ax - F(y) \geq b \\ & x \geq 0, y \in Y \end{aligned}$$

On fait les hypothèses suivantes

1. La matrice A est de plein rang.
2. (P) possède une solution optimale finie.

Premièrement, faire une projection sur l'espace des variables compliquantes

(EP1)

$$\min_{y \in Y} \{f(y) + \min \{c^T x : Ax \geq F(y) + b\}\}$$

On note Γ l'ensemble des $y \in Y$ tel qu'il existe un $x \geq 0$ avec $Ax \geq F(y) + b$. Alors, (EP2) est équivalent à (EP1) :

(EP2)

$$\min_{y \in Y \cap \Gamma} \{f(y) + \min \{c^T x : Ax \geq F(y) + b\}\}$$

On en dérive les deux problèmes primal-dual suivants :

(P_y)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq F(y) + b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(D_y)

$$\begin{aligned} \max \quad & (F(y) + b)^T u \\ \text{s.a.} \quad & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

On note alors $\{u^1, \dots, u^p\}$ l'ensemble des points extrêmes du polytope de (D) et $\{u^{p+1}, \dots, u^{p+q}\}$ l'ensemble des rayons extrêmes (générateurs du cône).

On peut montrer qu'une réécriture de (EP2) nous permet d'obtenir (EP3)

(EP3)

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ f(y) + \min_{x \geq 0} \{c^T x : Ax \geq F(y) + b\} \right\} \\ \text{s.a.} \quad & (F(y) + b)^T u^j \leq 0, \quad p+1 \leq j \leq p+q \\ & y \in Y \end{aligned}$$

On obtient alors le problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
 (EP) \quad & \min f(y) + y_0 \\
 & \text{s.a. } (F(y) + b)^T u^j \leq y_0 && 1 \leq j \leq p \\
 & (F(y) + b)^T u^j \leq 0 && p + 1 \leq j \leq p + q \\
 & && y \in Y
 \end{aligned}$$

I.3.1 Algorithme de Benders

Dans l'algorithme de Benders (EP) est résolu en utilisant l'approche par relaxation.

Étape 0 Déterminer une première relaxation de (EP) en identifiant un point extrême u^1 de $\{u : A^T u \leq c, u \geq 0\}$ (utilisation de la Phase I de l'algorithme du simplexe sur (D_y) par exemple).

Soit $p' = 1, q' = 0, UB = \infty$; aller à l'étape 1

Étape 1 Résoudre la relaxation de (EP)

$$\begin{aligned}
 (EP_{p'q'}) \\
 \min f(y) + y_0 \\
 \text{s.a. } F(y)^T u^j - y_0 \leq -b^T u^j && 1 \leq j \leq p' \\
 F(y)^T u^j \leq -b^T u^j && p + 1 \leq j \leq p + q' \\
 && y \in Y, y_0 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$LB = f(\bar{y}) + \bar{y}_0$$

Si $UB - LB \leq \varepsilon$, STOP car la solution est ε -optimale.

Étape 2 Pour vérifier si \bar{y}_0, \bar{y} est optimal pour (EP) , résoudre le problème dual $(D_{\bar{y}})$

$(D_{\bar{y}})$

$$\max (F(\bar{y}) + b)^T u$$

$$\text{s.a. } A^T u \leq c$$

$$u \geq 0$$

1. Si $(D_{\bar{y}})$ n'est pas borné, alors au moins une contrainte $(F(y) + b)^T u^j > 0$, pour un certain j tel que $p + 1 \leq j \leq p + q$. Utiliser le dernier tableau du simplexe de la résolution de $(D_{\bar{y}})$ pour obtenir un générateur \bar{u} du cône. Augmenter q' de 1 en ajoutant la contrainte

$$(F(y) + b)^T \bar{u}$$

à la relaxation et aller à l'étape 1.

2. Si $(D_{\bar{y}})$ possède une solution optimale mais que la valeur de la solution optimale $(F(y) + b)^T \bar{u} > \bar{y}_0$, alors la contrainte correspondante n'est pas satisfaite. Augmenter p' de 1 et ajouter la contrainte

$$(F(y) + b)^T \bar{u} \leq y_0$$

à la relaxation.

Mettre à jour la borne supérieure

$$UB = \min \left\{ UB, f(\bar{y}) + (F(\bar{y}) + b)^T \bar{u} \right\}$$

Si $UB - LB \leq \varepsilon$, STOP car la solution associée est ε -optimale. Sinon, aller à l'étape 1.

3. Si $(D_{\bar{y}})$ possède une solution optimale \bar{u} , et que $(F(\bar{y}) + b)^T \bar{u} \leq \bar{y}_0$, alors \bar{y}, \bar{y}_0 sont des solutions optimales de (EP) . De plus, toutes les contraintes de (EP) sont satisfaites en \bar{y}, \bar{y}_0 :

(a)

$$\bar{y} \in \Gamma \Rightarrow (F(\bar{y}) + b)^T u^j \leq 0, p + 1 \leq j \leq p + q$$

(b) pour tout $j, 1 \leq j \leq p,$

$$(F(\bar{y}) + b)^T u^j \leq \max_{1 \leq j \leq p} \left\{ (F(\bar{y}) + b)^T u^j \right\} = (F(\bar{y}) + b)^T \bar{u} \leq \bar{y}_0$$

Aller à l'étape 3.

Étape 3 Déterminer une solution optimale \bar{x}, \bar{y} de (P) en prenant \bar{x} égal aux multiplieurs optimaux de (D_y) ou en résolvant le primal (P_y)

$$\begin{aligned} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \geq F(y) + b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

I.4 Optimalité de l'algorithme

On applique l'algorithme de Benders à la formulation

$$\begin{aligned} \max & c^T x + f(y) \\ \text{s.a.} & Ax - F(y) \leq b \\ & x \geq 0, y \in Y \end{aligned}$$

On note Γ l'ensemble des y réalisables

$$\Gamma = \{y \in Y : \text{il existe } x \geq 0 \text{ tel que } Ax \leq b + F(y)\}$$

Le théorème de résolution de Goldman. On suppose que la matrice des contraintes de D_y est de plein rang.

Soit D l'espace convexe de D_y

$$D = \{u : A^T u \geq c\} = K + C$$

Puisque A est de plein rang

$$\begin{aligned} K &= \text{enveloppe convexe des points extrêmes de } D \\ C &= \{u : A^T u \geq 0\} \end{aligned}$$

On note $\{u^1, \dots, u^p\}$ l'ensemble des points extrêmes du polytope et $\{u^{p+1}, \dots, u^{p+q}\}$ les générateurs du cône C . Ainsi, pour $u \in \{u : A^T u \geq c\}$, alors

$$u = z + t, z \in K, t \in C$$

ou encore

$$u = \sum_{j=1}^p \alpha_j u^j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \beta_j u^j$$

avec $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq p; \beta_j \geq 0, p+1 \leq j \leq p+q$.

Nous présentons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que le dual soit borné.

Théorème I.1. *Pour tout y fixé, le problème dual (D_y) est borné ssi*

$$(F(y) + b) u^j \leq 0, p+1 \leq j \leq p+q$$

Démonstration. – La condition nécessaire est montrée par contradiction. On fait l'hypothèse que pour un certain $k, p+1 \leq k \leq p+q, (F(y) + b)^T u^k > 0$. Soit u une solution réalisable pour (D_y) . Alors, $u = z + t$. Mais il est facile de vérifier que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$t + \lambda u^k \in C$$

et donc

$$z + t + \lambda u^k$$

est réalisable pour (D_y) . Mais, la valeur de la fonction objectif n'est plus bornée

$$(F(y) + b)^T (u + \lambda u^k) = (F(y) + b)^T u + \lambda (F(y) + b)^T u^k \rightarrow_{\lambda \rightarrow \infty} \infty$$

une contradiction puisque (D_y) est supposé borné.

– La condition suffisante découle directement par substitution. Soit,

$$w = z + t = \sum_{j=1}^p \alpha_j u^j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \beta_j u^j$$

avec $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1$; $\alpha_j \geq 0$, $1 \leq j \leq p$; $\beta_j \geq 0$, $p+1 \leq j \leq p+q$. Alors

$$\begin{aligned} (F(y) + b)^T u &= \sum_{j=1}^p \alpha_j (F(y) + b)^T u^j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \beta_j (F(y) + b)^T u^j \\ &\leq \sum_{j=1}^p \alpha_j (F(y) + b)^T u^j \leq M \end{aligned}$$

puisque $(F(y) + b)^T u^j \leq 0$ et $\beta_j \geq 0$, $p+1 \leq j \leq p+q$, et pour $M = \max_{1 \leq j \leq p} \{(F(y) + b)^T u^j\}$.

□

De ce théorème il découle le corollaire suivant

Corollaire I.2. $y \in \Gamma$ ssi $(F(y) + b)^T u^j \leq 0$, pour $p+1 \leq j \leq p+q$.

I.5 Raffinements pratiques

I.5.1 Coupes de Benders plus fortes

Dans la plupart des modèles, il existe un grand nombre de solutions optimales pour chaque sous-problème. Ceci est particulièrement vrai lorsque les solutions du problème maître relaxé contiennent un grand nombre de variables nulles. Il est alors intéressant d'essayer de trouver la meilleure coupe de Benders parmi toutes celles disponibles.

Ceci étant particulièrement difficile, on se contera de trouver une coupe qui n'est pas dominée.

Définition La coupe $f_1(x) \leq y$ est dominée par $f_2(x) \leq y$ si pour tout x $f_1(x) \leq f_2(x) \leq y$.

On a alors que la coupe $f_1(x) \leq y$ n'est pas dominée si il existe \bar{x} tel que $f_2(\bar{x}) \leq f_1(\bar{x}) \leq y$.

Nous proposons la procédure suivante, qui permet de renforcer une coupe de Benders. Dans certains cas cette procédure permet de générer des coupes non dominées.

1. Résoudre à l'optimum le sous problème. Soit u^j la solution optimale.
2. Fixer toutes les variables i tel que le coefficient objectif associé est non nul.
3. Remplacer la fonction objectif du sous problème par $(F(\mathcal{K})+b)^T * u$ et réoptimiser.

On peut annuler les coefficients objectifs des variables ayant été fixées.

Il est facile de montrer que dans tous les cas cette coupe est plus forte que la coupe de Benders normale.

I.5.2 Recherche locale

Rei, Cordeau, Gendreau et Soriano (2005) ont montré l'utilité de l'utilisation d'une heuristique, le branchement local, pour améliorer les temps de résolution. Ils utilisent une méthode de branchement-et-évaluation restreint au voisinage de la meilleure solution courante et réutilise le parcours dans l'arbre pour générer des contraintes de voisinages. Ces contraintes de voisinage permettent de couper un espace autour de la solution courante ne contenant pas la solution optimale.

I.5.3 Arbre de recherche persistant

À chaque itération, il est nécessaire de réoptimiser le problème maître. Or, on sait qu'entre chaque optimisation du problème maître on ne fait qu'ajouter une seule contrainte. Il pourrait donc être très intéressant de sauver les informations pertinentes contenues dans le précédent arbre de séparation-et-évaluation. En fait, il suffit de garder l'information contenue dans les feuilles de l'arbre, lorsque celle ci sont réalisables.

I.5.4 Mc Daniel et Devine

Lors des premières itérations de l'algorithme de Benders, les solutions générées sont de piètre qualité. Il n'est pas très utile de perdre du temps de calcul en recherchant une solution optimale du problème maître au début car, il y a de grandes chances qu'elle soit très éloignée de la solution optimale (voir qu'elle ne soit même pas un point extrême si on n'a pas généré assez de contraintes).

McDaniel et Devine (1977) proposent de résoudre jusqu'à l'optimalité la relaxation linéaire du problème maître. Une fois la solution optimale obtenue, on commence la résolution du programme maître en nombres entiers. On possède ainsi une bonne borne de départ pour l'algorithme de résolution du programme en nombres entiers.

On peut étendre l'idée en ajoutant des coupes qui ne soit pas forcément des faces du polytope si on utilise un algorithme donnant des solutions ε -approchées pour le sous-problème. Ainsi, plus notre problème maître devient précis plus on augmente la précision de la résolution du sous-problème (réduction de ε). Le risque étant que l'on peut alors générer des coupes redondantes, tout simplement parce que la nouvelle solution est plus précise.

BIBLIOGRAPHIE

- E. Altman et L. Wynter. Equilibrium, games, and pricing in transportation and telecommunication networks. *Networks and Spatial Economics*, (4) :7–21, 2004.
- L. Ausubel et P. Cramton. Vickrey auctions with reserve pricing. Technical report, University of Maryland, 1999. URL <http://citeseer.ist.psu.edu/ausubel99Vickrey.html>.
- L. M. Ausubel et P. Milgrom. The lovely but lonely Vickrey auction. 2004.
- D.P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1995.
- S. Bikhchandani, S. de Vries, J. Schummer et R.V. Vohra. Linear programming and Vickrey auctions. In *Mathematics of the Internet : E-Auction and Markets*, 2001.
- S. Bikhchandani, S. de Vries, J. Schummer et Rakesh V. Vohra. An ascending Vickrey auction for selling bases of a matroid. Technical report, May 2005.

- R.E. Bohn, M.C. Caramanis et F.C. Schweppe. Optimal pricing in electrical networks over space and time. *15(3)* :360–376, 1984.
- F. Brandt. *Fundamentals Aspects of Privacy and Deception in Electronic Auctions*. PhD thesis, Institut für Informatik der Technischen Universität München, 2003.
- F. Brandt et G. Weiss. Vicious strategies for Vickrey auctions. In *AGENTS'01*, 2001.
- P. J. Brewer et C. R. Plott. A decentralized, smart market solution to a class of backhaul transportation problems : Concept and experimental test beds. *Interfaces*, *32(5)* : 13–36, 2002.
- P. J. Brewer et C. R. Plott. A binary conflict ascending price (bicap) mechanism for the decentralized allocation of the right to use railroad tracks. *International Journal of Industrial Organization*, *14* :857–886, 1996.
- E. H. Clarke. Multipart pricing of public goods. *Public Choice*, *2* :19–33, 1971.
- COIN-OR. Computational Infrastructure for Operations Research. URL <http://www.coin-or.org>.
- A.M. Costa. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & Operations Research*, *32* :1429–1450, 2005.
- CPLEX. Ilog Software. URL <http://www.ilog.com>.
- T.G. Crainic, A. Frangioni et B. Gendron. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design. Technical report, Centre de Recherche sur les Transports, February 1999.
- S. de Vries et R. V. Vohra. Combinatorial auctions : A survey. *INFORMS Journal Of Computing*, *15(3)* :284–309, 2003.
- W. Elmaghraby et P. Keskinocak. Combinatorial auctions in procurement. Technical report, The Logistics Institute, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 2002.
- ETSO. European Transmission System Operators, ETSO. URL <http://www.etso-net.org>.
- M.L. Fisher. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, *27(1)* :1–18, January 1981.

- A. Frangioni. *Dual-Ascent Methods and Multicommodity Problems*. PhD thesis, Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, 1993.
- Garey et Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, 1979.
- A.M. Geoffrion. Generalized benders decomposition. *JOTA*, 10(4) :237–260, 1972.
- A.M. Geoffrion et G.W. Graves. Multicommodity distribution system design by benders decomposition. *Management Science*, 20 :822–844, 1974.
- T. Groves. Incentives in teams. *Econometrica*, 413 :617–31, 1973.
- J. Hershberger et S. Suri. Vickrey prices and shortest paths : What is an edge worth ? 2001.
- A. Holland et B. O’Sullivan. Fast Vickrey-pricing for the assignment problem. In *ERCIM/COLOGNET Constraints Workshop '03*, 2003.
- Chun-Nan Hung, Lih-Hsing Hsu et Ting-Yi Sung. The most vital edges in a bipartite graph. *Networks*, 23(4) :309 :313, July 1993.
- F. Jarray et L. Wynter. An optimal smart market for the pricing of telecommunications services. Technical report, INRIA, October 2001.
- P. Klemperer. What really matters in auction design. *Journal of Economic Perspectives*, 16(1) :169–189, 2002.
- Darwin Klingman. Network flow problem generator (transportation/assignment), 1974. URL <http://www.netlib.org/lp/generators/netgen>.
- E. R. Kraft. Scheduling railway freight delivery appointments using a bid price approach. *Transportation Research*, A(36) :145–165, 2002.
- M. Langlois et S. Gasch. *Le commerce électronique B to B*. DUNOD, 2001.
- T. Larsson et D. Yuan. An augmented lagrangian algorithm for large scale multicommodity routing. *Computational Optimization and Applications*, 27 :187–215, 2004.
- A.A. Lazar et N. Semret. Auctions for network resource sharing. Technical report, Center for Telecommunications Research, Columbia University, February 1997.

- J.K. MacKie-Mason. A smart market for resource reservation in a multiple quality of service information network. Technical report, University of Michigan and NBER, September 1997.
- P. Maillé et B. Tuffin. The progressive second price mechanism in a stochastic environment. *Netnomics*, 5(2) :119–147, 2003.
- P. Maillé et B. Tuffin. Multi-bid auctions for bandwidth allocation in communication networks. *IEEE INFOCOM*, 2004.
- S. Martello et P. Toth. *Knapsack Problems : Algorithms and computer implementations*. Wiley, 1997.
- Mas-Colell, Whinston et Green. *Microeconomic theory*. Oxford, 1995.
- D. McDaniel et M. Devine. A modified benders' partitioning algorithm for mixed integer programming. *Management Science*, 24(3) :312–319, 1977.
- D. M. Newbery. Network capacity auctions : Promise and problems. In *Auctions of Capacity in Network Industries*, 2002.
- J. Nilsson. Towards a welfare enhancing process to manage railway infrastructure access. *Transportation Research*, 36(5) :419–436, 2002.
- N. Nisan. Algorithms for selfish agents, 1999.
- N. Nisan et A. Ronen. Algorithmic mechanism design. *Games and Economic Behaviour*, 2000.
- N. Nisan et A. Ronen. Computationally feasible VCG mechanisms. In *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory Computing*, 1999.
- OpenCourseWare. Auction theory, 2003. URL <http://ocw.mit.edu/>.
- Christiant Fremuth Paeger. Graph Object Library for Network Programming. URL <http://www.math.uni-augsburg.de/~fremuth/goblin.html>.
- D. C. Parkes. *Iterative Combinatorial Auctions : Achieving Economic and Computational Efficiency*. PhD thesis, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 2001.

- R. Pindyck et D. Rubinfeld. *Microéconomie 6e édition*. Pearson Education, 2005.
- J. Puchinger, G.R. Raidl et M. Gruber. Cooperating memetic and branch-and-cut algorithms for solving the multidimensional knapsack problem. In *The 6th Metaheuristics International Conference*, 2005.
- W. Rei, J. Cordeau, M. Gendreau et P. Soriano. Accelerating benders decomposition by local branching. Technical report, CRT, Université de Montréal and HEC, December 2005.
- M.H. Rothkopf. Thirteen reasons why the Vickrey-Clarke-Groves process is not practical. 55(2) :191–197, 2007.
- M.H. Rothkopf, T.J. Teisberg et E.P. Kahn. Why are Vickrey auctions rare? *The Journal of Political Economy*, 98(1) :94–109, 1990.
- T. Sandholm. Limitations of the Vickrey auction in computational multiagent systems. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Multiagent Systems (ICMAS-96)*, 1996.
- Y. Sheffi. Combinatorial auctions in the procurement of transportation services. *Interfaces*, 34(4) :245–252, 2004.
- S. Shenkar, D.E. Clark et S. Herzog. Pricing in computer networks : Reshaping the research agenda. *ACM Computational Comm. Review*, pages 19–43, 1996.
- J. Shu et P. Varaiya. Pricing network services. In *Proc. IEEE INFOCOM*, 2003.
- J. Song et A. C. Regan. An auction based collaborative carrier network. Technical report, February 2003.
- The Economist. A special report on logistics. 17th-23rd June 2006.
- M. Vasquez et Yannick Vimont. Improved results for the 0-1 multidimensional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, (165) :70–81, 2005.
- VerticalNet. Verticalnet enables transportation sourcing at Cargill, 2005. URL <http://www.verticalnet.com/news/pressreleasetext.asp?id=27>.
- W. Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16(1) :8–37, 1961.

S. Yuen et B. Li. Strategyproof mechanisms for dynamic multicast tree formation in overlay networks. Technical report, University of Toronto, 2004.