

Université de Montréal

Évolution de la coopération au sein d'une population dans un  
environnement spatial

par  
Xavier Thibert-Plante

Département de géographie  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en géographie

Septembre, 2005

© Xavier Thibert-Plante, 2005.



G

59

U54

2005

V. 009

## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Évolution de la coopération au sein d'une population dans un  
environnement spatial**

présenté par:

Xavier Thibert-Plante

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

François Courchesne,	président-rapporteur
Lael Parrott,	directrice de recherche
Paul Charbonneau,	membre du jury

Mémoire accepté le: 21. septembre. 2005

## RÉSUMÉ

Le dilemme du prisonnier est une référence dans l'étude de l'évolution de la coopération. Il est la métaphore des dilemmes frustrants, représentant la tentation d'une récompense à court terme et un plus grand bénéfice à long terme moyennant un investissement. Les réseaux *small-world* sont des structures émergentes pour divers réseaux complexes, incluant des réseaux sociaux tels que la collaboration entre scientifiques et la collaboration entre acteurs de cinéma. Dans cette étude, on analyse l'évolution de la coopération dans les réseaux *small-world*, dont le paramètre de désordre est inférieur ou égal à 12%, avec le modèle du dilemme du prisonnier. L'objectif est de comprendre le rôle des structures spatiales dans l'évolution de la coopération. Les performances et les stratégies des individus sont analysées en fonction de leur emplacement dans le réseau à l'aide de mesures se référant au phénomène de grappe. On découvre que les stratégies émergentes sont les mêmes pour les différents réseaux *small-world*, mais que leur importance varie en fonction du degré de désordre du réseau. De plus, les noeuds modifiés ont des performances inférieures aux noeuds qui ont conservé leur configuration d'origine. Ces résultats soulignent l'importance d'étudier les fonctions de distribution des probabilités dans leur ensemble ainsi que les caractéristiques de chacun des noeuds d'un réseau.

Mots clés : Réseaux *small-world*, évolution de la coopération, dilemme du prisonnier, grappes.

## ABSTRACT

The prisoner's dilemma is the standard paradigm for the study of the evolution of cooperation. It serves as a metaphor for frustrating dilemmas where an immediate gain is easily accessible, but a bigger outcome is possible with an investment. Small-world networks are emergent structures for many types of complex networks, including social networks like the collaboration graph of scientists and the collaboration graph of film actors. In this study, an analysis of the evolution of cooperation on small-world networks with a rewiring probability less or equal 12% is done through the prisoner's dilemma game. The aim is to understand the role of spatial structures in the evolution of cooperation. The fitness and the strategies of individuals are analysed as a function of their position on the network using measures of the clustering phenomena. We found that emergent strategies are the same for different small-world networks, but their frequency varies as a function of the degree of randomness in the network. In addition, the performance of the modified nodes is inferior to the nodes with their original configuration. These results highlight the importance of studying the probability distribution function for the whole population as well as the characteristics of each individual node of the network.

Keywords : Small-world networks, evolution of cooperation, prisoner's dilemma, clusters.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ . . . . .	iv
ABSTRACT . . . . .	v
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vi
LISTE DES FIGURES . . . . .	viii
LISTE DES NOTATIONS . . . . .	xiv
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvi
REMERCIEMENTS . . . . .	xvii
INTRODUCTION . . . . .	1
<b>1 Revue bibliographique . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction à la théorie des jeux . . . . .	3
1.1.1 Rationnel . . . . .	4
1.1.2 La main tremblante . . . . .	4
1.2 Théorie des jeux évolutifs . . . . .	4
1.2.1 Roche-papier-ciseaux . . . . .	5
1.2.2 Faucon-colombe . . . . .	5
1.3 Le jeu du dilemme du prisonnier . . . . .	7
1.3.1 Où le trouve-t-on ? . . . . .	9
1.3.2 Types de stratégies . . . . .	10
1.3.3 Exemples de stratégies . . . . .	12
1.3.4 Les meilleures stratégies . . . . .	14
1.3.5 Stabilité et équilibre . . . . .	15

1.3.6	Chaos . . . . .	16
1.3.7	Représentations de l'espace . . . . .	16
1.3.8	Le dilemme du prisonnier dans un réseau . . . . .	20
1.4	Réseaux <i>small-world</i> . . . . .	20
1.5	Reproduction . . . . .	23
1.5.1	Reproduction proportionnelle . . . . .	23
1.5.2	Mimétisme . . . . .	23
1.5.3	Algorithmes génétiques . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Méthodologie . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1	Objectifs de la recherche . . . . .	29
2.2	Hypothèses . . . . .	30
2.3	Paramètres . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Prisoner's Dilemma and Clusters on Small-World Networks . .</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	The model . . . . .	36
3.3	Results . . . . .	38
3.3.1	Analysis of phenotypes . . . . .	38
3.3.2	Analysis of genotypes . . . . .	49
3.3.3	Strategy switching . . . . .	50
3.3.4	Spatial analysis . . . . .	51
3.4	Discussion and conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>63</b>



## LISTE DES FIGURES

- 1.1 Sous une représentation en arbre, une stratégie réactive prend la branche de droite si l'adversaire a coopéré à la dernière rencontre, la branche de gauche s'il n'a pas coopéré et reste à la racine si c'est la première rencontre entre les deux stratégies. On peut remplacer les # par  $C$  pour coopération ou  $D$  pour non-coopération pour les stratégies déterministes ou par une valeur entre 0 et 1 qui représente la probabilité de coopérer pour les stratégies stochastiques. . . . . 11
- 1.2 Une stratégie dépendant de la récompense prend la branche associée à la valeur qu'elle a reçue à la dernière rencontre ou reste à la racine si c'est la première rencontre entre les deux stratégies. On peut remplacer les # par  $C$  pour coopération ou  $D$  pour non-coopération pour les stratégies déterministes ou par une valeur entre 0 et 1 qui représente la probabilité de coopérer pour les stratégies stochastiques. 12
- 1.3 Figure tirée de Nowak et Sigmung (1993a) qui montre les attracteurs étranges générés par l'évolution des 16 stratégies possibles dans le temps. Les figures montrent l'abondance de deux stratégies  $(r, s, t, p)$  l'une par rapport à l'autre. . . . . 17
- 1.4 Le voisinage des cellules en noir est constitué des cellules en gris. On peut inclure la cellule noire dans le voisinage ou pas. . . . . 17
- 1.5 Résultat du pointage obtenu pour chaque cellule d'une simulation de 400 itérations avec un voisinage de Moore aux bordures périodiques et un pointage  $(S, P, R, T) = (0, 0, 1, 1.83)$ . Les conditions initiales sont une mer de coopérants avec un non-coopérant au centre. Le vert représente un pointage de  $R = 1$ , le bleu foncé  $P = 0$ , les bleus pâles valent entre 0 et 1 et les jaunes sont supérieurs à 1. La grille est de  $69 \times 69$ . . . . . 19

- 1.6 Figure tirée de Watts & Strogatz (1998). Dans le réseau structuré ( $\rho = 0$ ), tous les noeuds sont liés à leur deux plus proches voisins. Dans le réseau *small-world* ( $0 < \rho < 1$ ), on voit encore le réseau structuré initial, mais avec une fraction des liens qui ont été modifiés. Dans le réseau aléatoire ( $\rho = 1$ ), on ne voit plus le réseau initial : les voisins du réseau structuré initial ne sont que marginalement liés ensemble. . . . . 21
- 1.7 Figure tirée de Thibert-Plante et Charbonneau (en préparation). Les barres horizontales grises, au haut et au bas de la figure, indiquent les périodes de stabilité identifiées par deux méthodes distinctes. En *A* et en *C*, on observe des périodes de stabilité : le pointage du meilleur joueur est relativement constant. En *B* une période d'instabilité : grande variation dans le pointage du meilleur joueur. . . . . 28
- 3.1 Boxplots of simulation characteristics as function of the rewiring probability ( $\rho$ ) for memoryless strategies. 50% of the simulations fall within the vertical box, the median is represented by the horizontal line inside the box. (A) mean score, (B) position of the emergent score, (C)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent score, (D) position of the emergent  $p$  and (E)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $p$ . . . . . 39
- 3.2 Boxplots of simulation characteristics as a function of the rewiring probability for reactive strategies. 50% of the simulations fall within the vertical box, the median is represented by the horizontal line inside the box. (A) mean score, (B) position of the emergent score, (C)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent score, (D) position of the emergent  $p$ , (E)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $p$ , (F) position of the emergent  $q$  and (G)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $q$ . . . . . 40
- 3.3 Probability distribution function (PDF) of the score (A) and  $p$  (B) for the entire population of memoryless strategies cumulated over a simulation with  $\rho = 0.1$ . . . . . 41

- 3.4 Probability distribution function (PDF) of the score (A),  $p$  (B), and  $q$  (C) for the entire population of reactive strategies cumulated over a simulation with  $\rho = 0.1$ . . . . . 41
- 3.5 Time evolution of a representative simulation with memoryless strategies at  $\rho = 0.1$ . (A) evolution of the overall population mean score compared to the emergent score, (B) evolution of the overall population mean  $p$  compared to the emergent  $p$ , (C) evolution of the fraction of the population in the emergent score and (D) evolution of the fraction of the population in the emergent  $p$ . . . . . 42
- 3.6 Time evolution of a representative simulation with reactive strategies at  $\rho = 0.1$ . (A) evolution of the overall population mean score compared to the emergent score, (B) evolution of the overall population mean  $p$  compared to the emergent  $p$ , (C) evolution of the overall population mean  $q$  compared to the emergent  $q$ , (D) evolution of the fraction of the population in the emergent score, (E) evolution of the fraction of the population in the emergent  $p$  and (F) evolution of the fraction of the population in the emergent  $q$ . . . . . 43
- 3.7 Neighbourhood of a node in a standard grid configuration. The nodes linked by a dashed line with node  $i$  are in its Moore neighbourhood. Neighbours to the north, south, east and west are 1 unit of distance from node  $i$  and the other neighbours are at a distance of  $\sqrt{2}$  units. The solid lines are the links between the neighbours of node  $i$ . . . . . 45

- 3.8 Phenotypic and genotypic variation as a function of the quantitative network characteristics ( $CC_i$  and  $SoD$ ) for a representative simulation for memoryless strategies at  $\rho = 0.1$ . In (A), (B), (E) and (F) are 2D histograms with the network characteristic ( $CC_i$  or  $SoD$ ) in  $x$  and the score or  $p$  in  $y$ . Frequency of the  $y$ -value is indicated on a gray color scale, with darker values for higher frequencies. The 2D histogram is normalized for the network characteristic (the sum of all values in a vertical line is one), so comparison between network characteristics is possible. Not all  $CC_i$  and  $SoD$  are represented, giving some vertical white areas. The dark horizontal line represents the emergent score or  $p$ . In (C), (D), (G) and (H)  $\Gamma$  of the emergent score or  $p$  is shown as a function of the  $CC_i$  and  $SoD$ . . . . . 47
- 3.9 Phenotypic and genotypic variation as a function of the quantitative network characteristics ( $CC_i$  and  $SoD$ ) for a representative simulation for reactive strategies at  $\rho = 0.1$ . In (A), (B), (C), (G), (H) and (I) are 2D histograms with the network characteristic ( $CC_i$  or  $SoD$ ) in  $x$  and the score,  $p$  or  $q$  in  $y$ . Frequency of the  $y$ -value is indicated on a gray color scale, with darker values for higher frequencies. The 2D histogram is normalized for the network characteristic (the sum of all values in a vertical line is one), so comparison between network characteristics is possible. Not all  $CC_i$  and  $SoD$  are represented, giving some vertical white areas. The dark horizontal line represents the emergent score,  $p$  or  $q$ . In (D), (F), (F), (J), (K) and (L)  $\Gamma$  of the emergent score,  $p$  or  $q$  is shown as a function of the  $CC_i$  and  $SoD$ . . . . . 48

3.10	The mean fraction of time a node switches on and off the emergent score or $p$ and its associated standard deviation for one representative simulation of memoryless strategies. The fraction of time a node (A) in the emergent score switches as a function of the $CC_i$ , (B) in the emergent $p$ switches as a function of the $CC_i$ , (C) in the emergent score switches as a function of the $SoD$ and (D) in the emergent $p$ switches as a function of the $SoD$ . . . . .	52
3.11	The mean fraction of time a node switches on and off the emergent score, $p$ or $q$ and its associated standard deviation for one representative simulation of reactive strategies. The fraction of time a node (A) in the emergent score switches as a function of the $CC_i$ , (B) in the emergent $p$ switches as a function of the $CC_i$ , (C) in the emergent $q$ switches as a function of the $CC_i$ , (D) in the emergent score switches as a function of the $SoD$ , (E) in the emergent $p$ switches as a function of the $SoD$ and (F) in the emergent $p$ switches as a function of the $SoD$ . . . . .	53
3.12	Spatial configuration of the network at one time step for representative simulations with memoryless strategies for various rewiring probabilities ( $\rho$ ). Nodes in black are part of the emergent score (top row) or emergent $p$ (bottom row). . . . .	54
3.13	Spatial configuration of the network at one time step for representative simulations with reactive strategies for various rewiring probabilities ( $\rho$ ). Nodes in black are part of the emergent score (top row), emergent $p$ (middle row) and emergent $q$ (bottom row). . . . .	55
3.14	The mean and standard deviation of the ratio of the perimeter of the emergent zone (the black in figure 3.12) over the area of the emergent zone for each time step for simulations with memoryless strategies as a function of the rewiring probability ( $\rho$ ). The ratio for (A) the emergent score and (B) the emergent $p$ . . . . .	56

3.15 The mean and standard deviation of the ratio of the perimeter of the emergent zone (the black in figure 3.13) over the area of the emergent zone for each time step for simulations with memoryless strategies as a function of the rewiring probability ( $\rho$ ). The ratio for (A) the emergent score, (B) the emergent  $p$  and (C) the emergent  $q$ . 57

## LISTE DES NOTATIONS

**Confrontation** : Rencontre entre deux stratégies qui doivent prendre un certain nombre de décisions au jeu du dilemme du prisonnier.

**Décision** : La réponse que l'on donne au jeu du dilemme du prisonnier, soit coopération ou non-coopération.

**Stratégie stable dans l'évolution** : Une stratégie qui ne peut se faire envahir par d'autres stratégies (Maynard Smith, 1982).

**Tournoi** : Ensemble des confrontations qui s'opèrent dans une population dans le but de déterminer les capacités de chacune des stratégies.

## LISTE DES TABLEAUX

1.1	Une coopération mutuelle récompense les deux joueurs par $R$ points, une non-coopération mutuelle punit les joueurs par $P$ points et un non-coopérant exploitant un coopérant reçoit $T$ points et l'autre $S$ points. . . . .	8
1.2	Classification de quelques stratégies connues dans le jeu du dilemme du prisonnier. Les $\checkmark$ indiquent le type de chacune des stratégies. . .	12
3.1	Similarity between grid and non-grid configurations . . . . .	44



## LISTE DES ANNEXES

I :	Calcul du pointage et chaînes de Markov . . . . .	70
-----	---	----

## REMERCIEMENTS

Je remercie ma directrice, Lael Parrott, pour m'avoir laissé toute la liberté intellectuelle dans le développement de ce travail. Son support, sa disponibilité et sa bonne humeur ont été très appréciés.

Je remercie Paul Chabonneau pour m'avoir introduit à ce dilemme dont je suis devenu prisonnier.

Je remercie le professeur Claude Marois pour les discussions enrichissantes que nous avons eues.

Je tiens à remercier ma famille : Jean, Hélène, Éloi et ma copine Valérie pour leur support et leurs encouragements continus.

Je remercie mes confrères et consocurs de travail Ken Arie, Pascal Côté, Élise Larose-Filotas et Raphaël Proulx pour leurs suggestions et questions qui ont fait travailler nos méninges.

# Introduction

L'évolution de la coopération est un problème fascinant. Si l'on prend la perspective darwinienne, pourquoi un individu voudrait-il améliorer la valeur d'adaptation d'un autre individu avec lequel il est en compétition pour survivre et se reproduire ? Ne serait-il pas plus efficace d'utiliser ses ressources pour améliorer sa propre valeur d'adaptation ? On retrouve des exemples de coopération dans toutes les étapes majeures de l'évolution de la vie : des gènes qui forment des cellules, des procaryotes qui forment des eucaryotes, des unicellulaires qui forment des organismes multi-cellulaires, des individus qui forment une société (Nowak, 2005). Certains individus dans les sociétés de fourmis ou d'abeilles, par exemple, n'ont pas la capacité de se reproduire. Ces individus coopèrent avec ceux qui peuvent se reproduire en exécutant d'autres tâches afin de permettre aux individus sexués de perpétuer la race. Des modèles, comme le jeu du dilemme du prisonnier (Axelrod, 1984), montrent dans quelles circonstances la coopération est plus avantageuse pour l'individu que la non-coopération. Des études se concentrent sur différents types d'interactions entre les individus : tous les individus rencontrent tous les autres individus (Axelrod, 1984), les individus sont placés sur un échiquier et rencontrent leurs voisins immédiats (Nowak & Sigmund, 1992) ou les individus sont placés sur les nœuds d'un réseau et rencontrent les individus auxquels ils sont reliés (Watts & Strogatz, 1998). Chacune des rencontres représente une opportunité de coopération.

Lorsque le dilemme du prisonnier est joué sur un réseau de type *small-world*, on observe moins de coopération que sur un échiquier (Watts & Strogatz, 1998).

Dans cette étude, on analyse le lien entre les caractéristiques des noeuds du réseau et la performance de ce noeud au jeu du dilemme du prisonnier afin d'expliquer la diminution de la coopération.

Dans la première partie, l'état des connaissances sur la théorie des jeux dans les réseaux est exposé. On y retrouve des notions de théorie des jeux, quelques jeux classiques dont le dilemme du prisonnier. En particulier, on discute des types de stratégies et des performances de stratégies qui ont façonné l'histoire des premiers tournois du dilemme du prisonnier. Ensuite, on discute du dilemme du prisonnier dans l'espace et dans les réseaux. L'emphase est mise sur les réseaux de type *small-world* qui sont présentés par la suite. Finalement, on brosse un portrait des modes de reproduction utilisés en théorie des jeux.

Dans la deuxième partie, les objectifs et hypothèses de recherche sont présentés.

La troisième partie est le chapitre central de cette étude. Le modèle et les paramètres des simulations y sont détaillés. Les résultats de l'analyse des performances des stratégies du dilemme du prisonnier en fonction des caractéristiques des noeuds pour différents réseaux *small-world* sont présentés et discutés.

La quatrième partie est une discussion des aspects les plus importants de cette étude placés dans le cadre plus général des sciences naturelles et biologiques.

# Chapitre 1

## Revue bibliographique

Dans ce chapitre, on présente quelques notions de théorie des jeux. L'emphase est mise sur le jeu du dilemme du prisonnier : les stratégies, les performances et les tournois qui ont marqué l'histoire. Par la suite, on présente les réseaux *small-world* et les mécanismes de reproduction employés dans l'étude de populations par la théorie des jeux.

### 1.1 Introduction à la théorie des jeux

von Neumann & Morgenstern (1944) ont appliqué le concept de théorie des jeux à l'économie. Ils discutent mathématiquement des conflits d'intérêts de type compétition-coopération. Maynard Smith (1982) a réalisé que cet ouvrage avait potentiellement plus d'implications dans l'étude des comportements animaux en biologie qu'en économie. En effet, l'évolution des populations en biologie n'est pas un problème d'optimisation classique puisque tous les individus, en plus de l'environnement, déterminent la fonction de la valeur d'adaptation (Nowak & Sigmund, 2004). Ainsi, en valorisant un trait qui augmente la valeur d'adaptation des individus le possédant, la population peut réduire ou même annuler l'avantage de ce trait.

### 1.1.1 Rationnel

À l'origine, l'étude de la théorie des jeux se concentrait sur le comportement des joueurs rationnels. Le joueur rationnel prend des décisions qui le mènent vers son but : maximiser sa valeur d'adaptation. Il suppose que les autres joueurs adoptent aussi une stratégie (ensemble de règles qui déterminent les décisions à prendre) rationnelle. Il ne fait jamais d'erreur, interprète toujours correctement la décision de l'adversaire et le résultat de la partie.

### 1.1.2 La main tremblante

En réalité, des erreurs peuvent se produire, par exemple une mauvaise implémentation des décisions. On appelle ce phénomène : la main tremblante. La possibilité de faire des erreurs change significativement le comportement des stratégies créant ainsi une nouvelle dynamique dans le jeu.

## 1.2 Théorie des jeux évolutifs

La théorie des jeux évolutifs permet de simuler l'évolution des populations. À chaque génération, plus les individus ont une valeur d'adaptation élevée, plus ils ont d'opportunités de se reproduire et à l'inverse, plus leur valeur d'adaptation est faible, moins ils peuvent se reproduire.

Dans les problèmes d'optimisation statiques, par exemple trouver la valeur maximale de  $f(x)$  dans l'intervalle  $a < x < b$  où  $\{a, b\} \in \mathbb{R}$ , la solution est indépendante des  $x$  que l'on calcule et de l'ordre dans laquelle on procède. Pour les problèmes de théorie des jeux, la valeur d'une stratégie dépend des autres stratégies à laquelle elle est confrontée. Contrairement aux problèmes statiques, la stratégie qui obtient la meilleure valeur d'adaptation peut changer d'une génération à l'autre. On observe des dynamiques intéressantes dans les jeux roche-papier-ciseaux, faucon-colombe et le dilemme du prisonnier, sujet principal de cette étude.

### 1.2.1 Roche-papier-ciseaux

Le jeu de roche-papier-ciseaux est bien connu. Aucune décision n'est imbattable : la roche bat le ciseau, le ciseaux bat le papier et le papier bat la roche. La confrontation de deux décisions identiques donne une partie nulle, comme l'indique la matrice de distribution des récompenses. On accorde la récompense inscrite dans la matrice à la stratégie dans la colonne de gauche lorsqu'elle confronte la stratégie correspondante dans la ligne d'en tête.

	Roche	Papier	Ciseau	
Roche	0	-	+	(1.1)
Papier	+	0	-	
Ciseau	-	+	0	

Dans ce jeu, on observe des cycles : quand une stratégie devient dominante, disons roche, il devient avantageux d'utiliser la stratégie papier, qui devient dominante. Papier est vulnérable à la stratégie ciseau, donc ciseau va s'implanter et ainsi de suite. La bactérie *E. coli* joue à roche-papier-ciseaux autour d'une toxine nommée colicine. Une bactérie *E. coli* prend différentes formes : *R* est résistante à la toxine, *S* est sensible à la toxine et *P* produit la toxine (Kerr *et al.*, 2002). Quand *P* produit la toxine, *S* meurt. Lorsque *P* domine, *R* augmente son effectif, car il produit plus de descendante que *P* étant donné qu'il y a un coût associé à la production de la toxine que *R* n'a pas à défrayer et qu'il utilise pour se reproduire. *S* a un avantage sur *R* lorsque *P* est peu présent puisque *S* n'a pas à payer le coût pour devenir résistant et peut utiliser ses ressources pour se reproduire.

### 1.2.2 Faucon-colombe

Le jeu faucon-colombe analysé dans Maynard Smith (1982) modélise l'escalade de la violence. Deux individus convoitant une même ressource peuvent provoquer l'adversaire, stratégie faucon, ou lui concéder la victoire, stratégie colombe. En provoquant l'adversaire, on s'expose à un coût si l'adversaire riposte à la provocation,

comme une blessure suite à la bagarre ou au gain de la ressource si l'adversaire capitule. Si personne ne capitule le jeu peut se répéter entraînant des blessures à chacun des adversaires. La matrice donne le pointage reçu par un individu (colonne) en terme du comportement de son adversaire (ligne), et le pointage de ce dernier est donné par la matrice transposée.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{Colombe} & \text{Faucon} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Colombe} \\ \text{Faucon} \end{array} & \begin{array}{cc} R & S \\ T & P \end{array}
 \end{array} \tag{1.2}$$

Les points doivent respecter l'inégalité suivante :  $T > R > S > P$ .

Une autre façon de représenter ce jeu est de voir deux conducteurs bloqués en voiture de chacun des côtés d'un banc de neige. Si les deux conducteurs restent dans leur voiture, stratégie faucon, personne ne s'en sortira avant le printemps. Si les deux pelletent la neige, stratégie colombe, les deux vont bénéficier ( $b$ ) du passage et se partageront le coût de l'opération ( $c$ ). Si un conducteur pelle pendant que l'autre reste dans sa voiture, les deux vont bénéficier du passage et le pelleteur va défrayer tous les coûts de l'opération à lui seul, tel que présenté dans la matrice :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{Colombe} & \text{Faucon} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Colombe} \\ \text{Faucon} \end{array} & \begin{array}{cc} b - c/2 & b - c \\ b & 0 \end{array}
 \end{array} \tag{1.3}$$

où  $b > c > 0$ .

Dans une population de faucons, il est avantageux d'adopter la stratégie colombe, car la valeur d'adaptation d'une colombe face à un faucon ( $b - c$ ) est supérieure à zéro (la valeur d'adaptation d'un faucon face à un autre faucon). À l'inverse, dans une population de colombes, le faucon aura l'avantage de ne pas déboursier le coût ( $c$ ) et de profiter des mêmes bénéfices ( $b$ ) que les colombes. Le faucon aura donc un avantage sur sa valeur d'adaptation dans une population de colombes ( $b > b - \frac{c}{2}$ ). La coexistence de faucons et de colombes dans une population



est donc possible. En plus, il existe un équilibre où les faucons et les colombe ont la même valeur d'adaptation ( $VA$ ). À l'équilibre, on a une fraction de la population qui est colombe ( $x$ ) et le reste est composé de faucons ( $y$ ) où  $x + y = 1$ .

$$VA(\text{colombe}) = x(b - \frac{c}{2}) + y(b - c) \quad (1.4)$$

$$VA(\text{faucon}) = xb + y0 \quad (1.5)$$

À l'équilibre,  $VA(\text{colombe}) = VA(\text{faucon})$  si  $x = x_{eq} = \frac{1}{\frac{c}{2(b-c)} + 1}$  et  $y = y_{eq} = \frac{1}{\frac{2(b-c)}{c} + 1}$ . Sous l'autre notation  $x_{eq} = \frac{1}{\frac{R-T}{P-S} + 1}$  et  $y_{eq} = \frac{1}{\frac{P-S}{R-T} + 1}$ . Si  $x > x_{eq}$ , alors les faucons sont favorisés et si  $y > y_{eq}$  les colombe sont favorisées, donc la population tend vers l'équilibre.

### 1.3 Le jeu du dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier (Axelrod, 1984) est un jeu qui se joue à deux personnes et où la somme des points n'est pas zéro. Le but du jeu est d'accumuler le plus de points. Le pointage accordé à chacun des joueurs est fonction de leur réponse et de celle de leur adversaire. Chacun d'eux peut coopérer ou ne pas coopérer, mais ils doivent prendre leur décision simultanément. Le tableau 1.1 montre comment sont distribués les points aux joueurs  $A$  et  $B$  selon leur réponse. Les points doivent respecter les équations (1.6) et (1.7). Une combinaison possible et grandement utilisée est  $(S, P, R, T) = (0, 1, 3, 5)$ .

$$T > R > P > S \quad (1.6)$$

$$2R > T + S \quad (1.7)$$

Le jeu porte le nom de dilemme du prisonnier, car on l'explique souvent par la situation où deux individus sont arrêtés par la police et sont soupçonnés de complicité pour un crime. Durant l'interrogatoire, ils sont isolés l'un de l'autre de sorte qu'ils ignorent ce que l'autre répond. Chacun d'eux n'a que deux choix, soit

A \ B	Coopération	Non-coopération
Coopération	R / R	T / S
Non-coopération	S / T	P / P

TAB. 1.1 – Une coopération mutuelle récompense les deux joueurs par  $R$  points, une non-coopération mutuelle punit les joueurs par  $P$  points et un non-coopérant exploitant un coopérant reçoit  $T$  points et l'autre  $S$  points.

de coopérer avec l'adversaire et de plaider l'ignorance ou de ne pas coopérer en le dénonçant. Les combinaisons de réponses entraînent les conséquences suivantes :

- Les deux individus coopèrent, alors la police n'a pas plus d'information et les deux individus sont récompensés par  $R$  points chacun.
- Les deux individus se dénoncent mutuellement : la police possède assez d'information pour punir les deux individus de  $P$  points chacun.
- Si un des individus coopère et l'autre le dénonce, celui qui a dénoncé s'en tire très bien avec  $T$  points et l'autre s'est fait avoir et mérite un maigre  $S$  points.

Le jeu est simple et la meilleure stratégie est imbattable. Pour ne pas perdre à tous les coups, il ne faut pas coopérer, car on va avoir autant de points que son adversaire s'il ne coopère pas ( $P = P$ ) ou plus s'il coopère ( $T > S$ ).

Le jeu du dilemme du prisonnier répété  $N$  fois possède la même solution que le jeu non-itéré. La  $N$ ième décision n'influencera aucune décision subséquente, il ne faut donc pas coopérer pour les mêmes raisons que le jeu non-itéré. On retrouve maintenant le dilemme du prisonnier répété  $N - 1$  fois. On applique le même raisonnement jusqu'à  $N = 1$ . La décision rationnelle pour le jeu répété  $N$  fois pour un  $N$  fini et connu est de ne pas coopérer.

Une variante qui complique grandement l'élaboration des stratégies consiste à simplement répéter le jeu du dilemme du prisonnier pour une durée indéterminée. Il y a une probabilité  $w$  que les joueurs se rencontrent à nouveau, c'est ce qu'on appelle de l'ombre sur le futur. Dès maintenant, lorsqu'on parle du dilemme du

prisonnier, on fait référence à cette variante que l'on nomme aussi le dilemme du prisonnier itéré. Les joueurs sont maintenant confrontés à une tentation de ne pas coopérer (Eq. 1.6) tout en sachant qu'une coopération mutuelle à long terme est plus bénéfique non seulement pour la collectivité, mais aussi pour leur propre profit (Eq. 1.7).

Étant donné que les stratégies n'ont pas de valeur propre, il faut les confronter entre elles afin qu'elles obtiennent une valeur. Par conséquent, la valeur d'une stratégie dépend de son environnement (les stratégies auxquelles elle va être confrontée).

### 1.3.1 Où le trouve-t-on ?

Le dilemme du prisonnier est la métaphore des dilemmes frustrants qui sont les conflits entre les intérêts présents et les bénéfiques à long terme. On le trouve dans plusieurs domaines : économie, biologie, politique, psychologie, etc.

On note dans Axelrod (1980a) que l'Union Soviétique et les États-Unis ont longtemps joué au dilemme du prisonnier l'un contre l'autre. Que ce soit dans la course aux armements, les concessions commerciales et le déploiement de troupes, on pouvait suivre leurs décisions dans leur budget annuel et dans le développement des conflits internationaux.

Axelrod (1984) consacre un chapitre de son livre à la coopération qui s'établit dans les tranchées durant la Première Guerre Mondiale. Au premier abord, on a le dilemme du prisonnier non-itéré : on rencontre un ennemi, il nous tue ou on le tue. Cependant, des bastions qui avaient à garder des secteurs sur la ligne de front étaient confrontés à plus long terme au même ennemi. Une attaque mutuelle occasionne moins de perte que se faire attaquer sans répliquer ( $P > S$ ), une attaque où l'ennemi ne réplique pas est plus avantageuse qu'une trêve mutuelle ( $T > R$ ). Les dommages sont plus désavantageux lors d'une attaque que le *statu quo* ( $R > P$ ). En plus, le *statu quo* est préférable à une alternance d'attaque sans réplique ( $2R > S + T$ ). Une fois les deux parties campées aux frontières du *no-man's land*, le jeu du dilemme du prisonnier commence. Ouvrir le feu n'est pas avantageux pour les

raisons énumérées, mais pour qu'un régime de coopération mutuelle s'installe, il doit commencer. Axelrod propose quelques raisons pour l'ignition de la coopération :

- les repas étaient servis en même temps des deux côtés ;
- ils dorment et se réveillent en même temps ;
- lorsque le temps est mauvais, il est désavantageux pour les deux partis de mener une offensive.

Durant ces périodes, il n'y a pas d'offensive, alors on se trouve dans la situation où les deux parties reçoivent  $R$  points chacun.

Dans la revue de Brems (1996), on présente d'autres exemples tirés de la biologie : les chauves-souris vampires qui partagent leur repas avec celles qui n'ont pas trouvé à manger ou les primates qui s'entraident lors d'un combat avec un prédateur. Brems souligne la difficulté de valider la valeur des paramètres  $S$ ,  $P$ ,  $R$  et  $T$  afin de vérifier que les règles du dilemme du prisonnier sont respectées.

### 1.3.2 Types de stratégies

Les stratégies du dilemme du prisonnier peuvent être réactives ou dépendantes de la récompense et déterministes ou stochastiques. Les stratégies sont représentées par des arbres que l'on parcourt en commençant par la racine et en descendant par la branche correspondante au comportement de façon récursive jusqu'à ce que la mémoire soit vide (Fig. 1.1 et 1.2). La mémoire contient les paramètres d'entrée de la stratégie, car une stratégie n'est pas une séquence de réponses, mais un protocole qui est programmé pour réagir à des stimuli. La mémoire contient les dernières réponses de l'adversaire ou les dernières récompenses reçues lors des dernières décisions contre cet adversaire. La grandeur de la mémoire peut varier, ainsi sans mémoire on répond toujours la même chose ou de façon aléatoire. La mémoire permet l'élaboration de stratégies plus performantes.

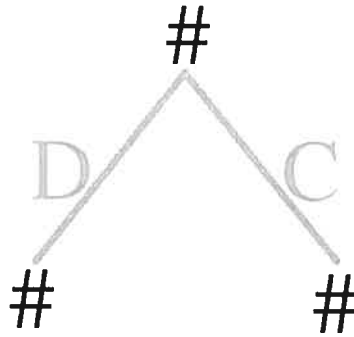


FIG. 1.1 – Sous une représentation en arbre, une stratégie réactive prend la branche de droite si l’adversaire a coopéré à la dernière rencontre, la branche de gauche s’il n’a pas coopéré et reste à la racine si c’est la première rencontre entre les deux stratégies. On peut remplacer les # par  $C$  pour coopération ou  $D$  pour non-coopération pour les stratégies déterministes ou par une valeur entre 0 et 1 qui représente la probabilité de coopérer pour les stratégies stochastiques.

### 1.3.2.1 Réactive

Les stratégies réactives se basent sur les dernières décisions prises par l’adversaire. On peut représenter ces stratégies par des arbres binaires complets (Fig. 1.1).

### 1.3.2.2 Dépendante de la récompense

Sous une représentation en arbre, les stratégies dépendantes de la récompense se basent sur les dernières récompenses obtenues contre l’adversaire. On peut représenter ces stratégies par des arbres à quatre branches complets (Fig. 1.2). Si pour chaque quadruplet  $(S, P, R, T)$ ,  $S = R$  et  $P = T$ , alors la stratégie est réactive.

### 1.3.2.3 Déterministe

Dans les stratégies déterministes, les noeuds des arbres sont des réponses *coopération* ou *non-coopération*.

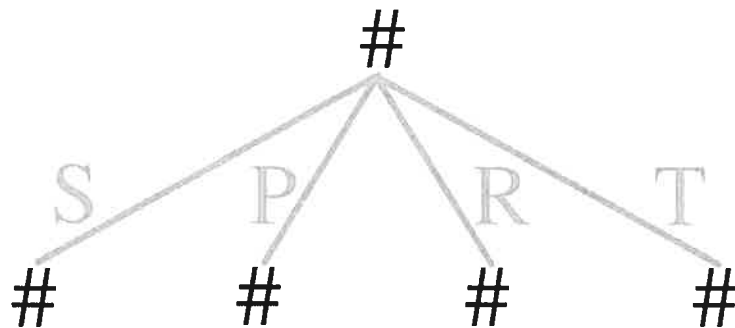


FIG. 1.2 – Une stratégie dépendant de la récompense prend la branche associée à la valeur qu'elle a reçue à la dernière rencontre ou reste à la racine si c'est la première rencontre entre les deux stratégies. On peut remplacer les # par  $C$  pour coopération ou  $D$  pour non-coopération pour les stratégies déterministes ou par une valeur entre 0 et 1 qui représente la probabilité de coopérer pour les stratégies stochastiques.

	Réactive	Dépendante de la récompense	Déterministe	Stochastique
TFT	✓		✓	
TF2T	✓		✓	
Pavlov		✓	✓	
GTFT	✓			✓

TAB. 1.2 – Classification de quelques stratégies connues dans le jeu du dilemme du prisonnier. Les ✓ indiquent le type de chacune des stratégies.

#### 1.3.2.4 Stochastique

Les stratégies stochastiques portent une valeur entre 0 et 1 à chaque noeud qui représente la probabilité de coopérer. Si chacun des noeuds porte la valeur 0 ou 1, alors la stratégie est déterministe.

#### 1.3.3 Exemples de stratégies

Le tableau 1.2 classe des stratégies selon leur type.

### 1.3.3.1 TFT

Tit-For-Tat (TFT) est une stratégie simple avec une mémoire limitée à la dernière réponse de l'adversaire. Elle est sympathique : elle coopère au premier coup, elle se venge si l'adversaire ne coopère pas et pardonne si l'adversaire coopère à nouveau.

### 1.3.3.2 TF2T

Tit-For-2-Tat est une variante de TFT qui a deux fois plus de mémoire et qui est plus tolérante. Elle ne coopère pas si et seulement si l'adversaire ne coopère pas deux fois de suite.

### 1.3.3.3 Pavlov

Pavlov est une stratégie qui n'est pas fonction de la décision de l'adversaire, mais du résultat de la confrontation. Pavlov coopère après avoir reçu  $R$  et  $P$  et ne coopère pas sinon.

### 1.3.3.4 GTFT

Tit-For-Tat généreux (GTFT) est une variante de TFT, mais elle coopère parfois après une non-coopération de l'adversaire. La générosité est mesurée par la fraction du temps où elle pardonne la non-coopération de l'adversaire en coopérant à la prochaine décision.

### 1.3.3.5 Stratégies sans mémoire

Toujours coopérer (ALLC) et jamais coopérer (ALLD) sont deux stratégies déterministes sans mémoire. Elles ne considèrent pas les décisions antérieures de l'adversaire ou les précédentes récompenses reçues. On peut les considérer comme un cas particulier des stratégies réactives où tous les noeuds de l'arbre sont égaux. D'autres stratégies sans mémoire sont stochastiques : elles coopèrent une fraction du temps.

### 1.3.4 Les meilleures stratégies

#### 1.3.4.1 Premier tournoi d'Axelrod

Dans la décennie 1970-1980, le dilemme du prisonnier a été grandement étudié. On compte plus de 350 citations de ce sujet dans *Psychological Abstracts* durant cette période. Par contre, cette littérature ne dit pas comment bien jouer au dilemme du prisonnier ou quelle est la meilleure stratégie à adopter. Axelrod demande à des auteurs d'articles sur la théorie des jeux, ou plus spécifiquement sur le dilemme du prisonnier, de soumettre une stratégie afin de faire un tournoi (Axelrod, 1980a). Il en reçoit d'auteurs de différentes spécialités : économie, mathématique, sciences politiques, psychologie et sociologie.

Le gagnant du premier tournoi, qui compte 14 stratégies et un joueur virtuel qui répond de façon aléatoire, est TFT soumis par le professeur Rapoport. Des caractéristiques communes aux stratégies les plus performantes sont tirées des résultats de ce tournoi.

Premièrement, les huit meilleures stratégies du tournoi sont des stratégies sympathiques, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas les premières à ne pas coopérer. Par conséquent, les huit stratégies sympathiques coopèrent mutuellement tout au long du tournoi, ce qui apporte un nombre considérable de points à chacune d'elle.

Deuxièmement, un atout du gagnant est qu'il est le plus enclin à pardonner à un adversaire qui ne coopère pas. En effet, TFT a une mémoire d'une seule rencontre. Ainsi, dès que l'adversaire coopère TFT répond en coopérant au prochain tour. Ainsi, TFT ne tombe pas dans des cercles vicieux de vengeance à long terme qui pousse les individus à ne pas coopérer.

#### 1.3.4.2 Deuxième tournoi d'Axelrod

Axelrod organise un deuxième tournoi ouvert à tous (un jeune adepte de l'informatique de 10 ans soumet une stratégie). Cette fois, 62 stratégies sont soumises par des personnes de six pays différents. Le professeur Rapoport soumet la même stratégie et gagne à nouveau le tournoi.



Être irritable se révèle une caractéristique importante du gagnant de ce tournoi. Il vaut mieux réagir immédiatement à la non-coopération de l'adversaire en ne coopérant pas avec lui à la prochaine décision (Axelrod, 1980b).

#### 1.3.4.3 De l'ombre sur TFT

Nowak & Sigmund (1992) ont montré qu'avec des stratégies réactives stochastiques, la domination de TFT n'est pas l'état final. En fait, TFT est un catalyseur qui permet d'éliminer les stratégies non-coopératives au début de la simulation. Par la suite, il laisse sa place à des stratégies qui lui ressemblent, mais plus généreuses qui pardonnent une fois sur trois la non-coopération de l'adversaire (GTFT  $(d, c) \approx (\frac{1}{3}, 1)$ ).

#### 1.3.4.4 Défaite de TFT et la proclamation de Pavlov

Nowak & Sigmund (1993b) ont fait des simulations avec des stratégies dépendantes de la récompense et stochastiques. Dans leurs simulations, plus le pointage d'un individu est élevé, plus sa fréquence dans la population va augmenter. D'autre part, si la fréquence tombe sous une valeur critique, la stratégie est éliminée. On introduit des stratégies mutantes à chaque 100 générations en moyenne.

Au début des simulations, la non-coopération domine, ensuite un mutant de TFT vient faire évoluer la coopération et établir des GTFT. Après quelques perturbations de mutants, Pavlov s'installe et maintient son statut dominant.

#### 1.3.5 Stabilité et équilibre

L'équilibre de Nash se produit lorsque pour toutes les stratégies, il n'est pas avantageux de changer de stratégie si les autres stratégies ne changent pas (Nash, 1950). L'équilibre de Nash se produit dans le dilemme du prisonnier lorsque toutes les stratégies ne coopèrent jamais ou lorsque toutes jouent *TFT* dans un environnement où les stratégies réactives seulement peuvent exister.

Il n'existe pas de stratégie imbattable pour le dilemme du prisonnier itéré, car

les stratégies sont dépendantes de l'environnement. On peut par contre se demander s'il existe une stratégie stable dans l'évolution (Maynard Smith, 1982), c'est-à-dire une stratégie qui ne peut pas être envahie par une autre stratégie si elle occupe toute la population. Boyd & Lorberbaum (1987) ont montré qu'aucune stratégie réactive et déterministe n'est stable dans l'évolution et Lorberbaum (1994) a montré qu'aucune stratégie réactive et stochastique n'est stable dans l'évolution lorsqu'on tient compte des interactions futures possibles.

### 1.3.6 Chaos

Nowak & Sigmund (1993a) ont observé le chaos dans l'évolution des seize stratégies déterministes, et dépendantes de la récompense, sujettes à de petites erreurs. Ils ont fait l'approximation d'une infinité de décisions par rencontre, ce qui élimine l'importance de la première décision de l'ensemble. Ils ont montré que l'évolution temporelle de l'abondance des stratégies est chaotique. Les graphiques de l'abondance relative des différentes stratégies forment des attracteurs étranges (Fig. 1.3).

### 1.3.7 Représentations de l'espace

L'espace est souvent représenté par un territoire que l'on sépare par des lignes perpendiculaires. Cette configuration permet de représenter plus qu'un territoire plat. Un espace cylindrique est formé si on place des bordures périodiques à deux arêtes n'ayant pas de sommet commun. Si les deux autres arêtes sont périodiques elles aussi, on a un tore. Les interactions entre les cellules sont limitées à un certain voisinage qui spécifie le nombre et l'emplacement des voisins qui ont une influence sur la cellule. Il y a plusieurs types de voisinages possibles avec un espace quadrillé : Moore, von Neumann, dépendant du rayon (Fig. 1.4).

L'espace peut aussi être représenté par d'autres polygones : triangles, hexagones (Nowak & May, 1993), etc.

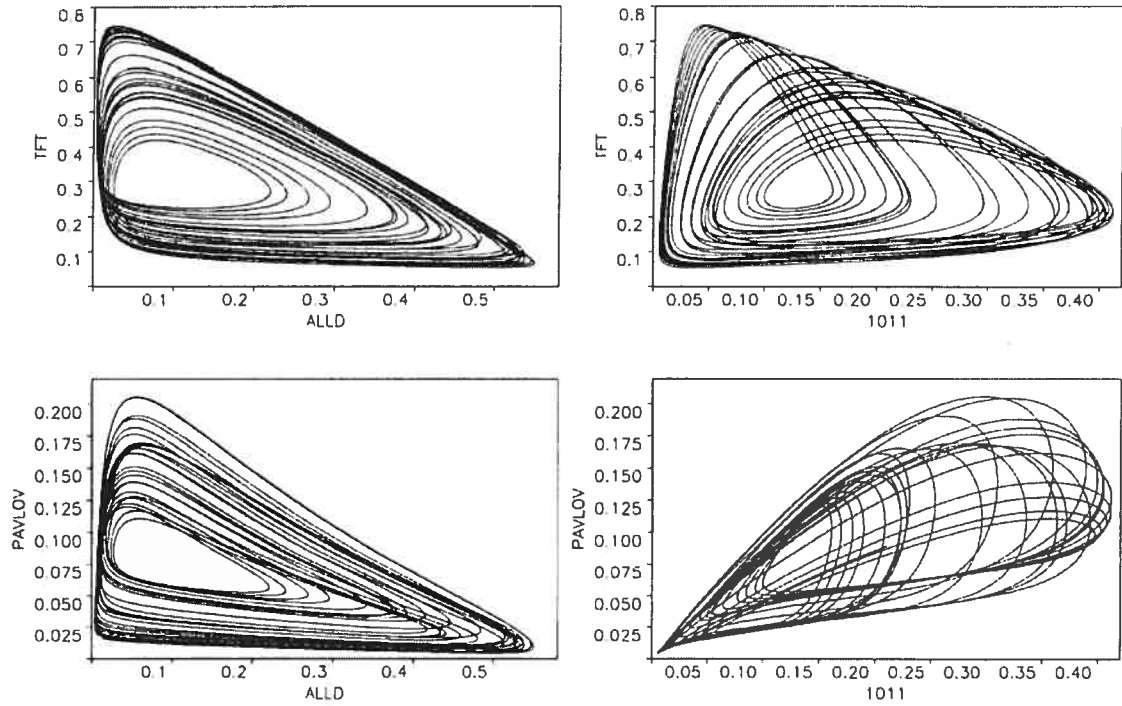


FIG. 1.3 – Figure tirée de Nowak et Sigmund (1993a) qui montre les attracteurs étranges générés par l'évolution des 16 stratégies possibles dans le temps. Les figures montrent l'abondance de deux stratégies ( $r, s, t, p$ ) l'une par rapport à l'autre.

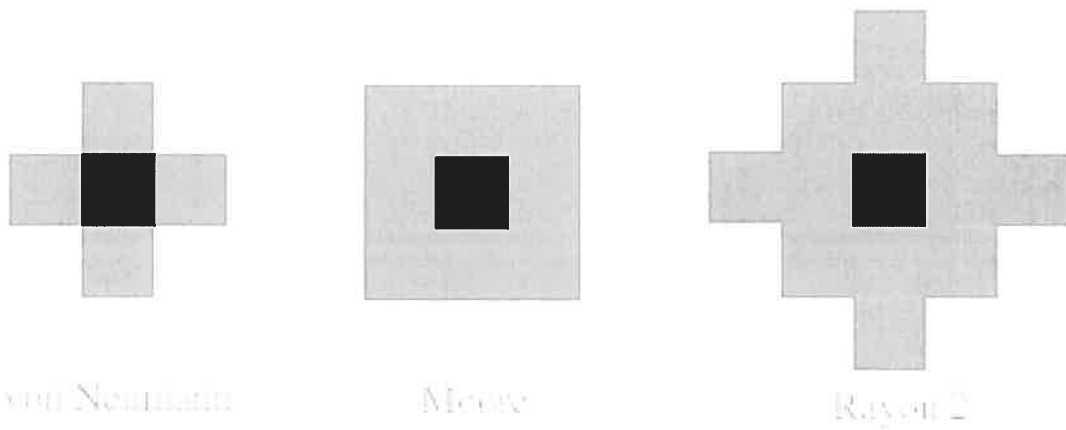


FIG. 1.4 – Le voisinage des cellules en noir est constitué des cellules en gris. On peut inclure la cellule noire dans le voisinage ou pas.

### 1.3.7.1 Le dilemme du prisonnier spatial

Simulé pour une des premières fois dans le très populaire livre d'Axelrod (1984), *The Evolution of Cooperation*, les stratégies du dilemme du prisonnier peuvent être placées sur une grille et uniquement confronter leurs voisins. Dans les simulations préliminaires d'Axelrod, TFT confronte ALLD et la stratégie qui accumule le plus de points dans le voisinage, occupe le centre de ce voisinage à la prochaine itération. Cette configuration du jeu forme des figures fractales qui évoluent dans le temps. Le dilemme du prisonnier spatial reste latent pendant quelques années avant que Nowak & May (1992) montrent que, sous certaines valeurs de  $T$ , le système est critique pour les deux stratégies élémentaires (toujours coopérer et ne jamais coopérer), c'est-à-dire que ces deux stratégies peuvent s'envahir mutuellement. On a dans ce cas l'émergence de structures spatiales de type fractales particulièrement jolies (Fig. 1.5). De plus, lorsqu'on change le type de voisinage : Moore à von Neumann, la valeur de  $T$  critique change. Les simulations sont insensibles à l'introduction des rétroactions individuelles (un joueur qui joue contre lui-même).

Grim (1995) a remarqué que l'introduction de l'espace avec des stratégies réactives stochastiques produit une convergence vers GTFT. La générosité de GTFT dans sa version spatiale est presque le double que dans la version non spatiale ( $\text{GTFT}(d, c) \approx (\frac{2}{3}, 1)$ ). Dans ce cas, l'espace encourage la générosité de GTFT.

Brauchli *et al.* (1999) ont étendu l'étude de Grim en utilisant des stratégies dépendantes de la récompense dans l'espace. Pavlov et ses variantes généreuses sont très performantes dans le contexte spatial. En plus, les auteurs ont mesuré l'impact de l'espace en effectuant leurs simulations spatiales et non spatiales (les joueurs prennent des décisions contre des adversaires pris au hasard) avec exactement les mêmes paramètres. Ils ont réalisé que l'environnement spatial structuré encourageait la coopération et rendait l'évolution moins chaotique que dans une population non structurée.

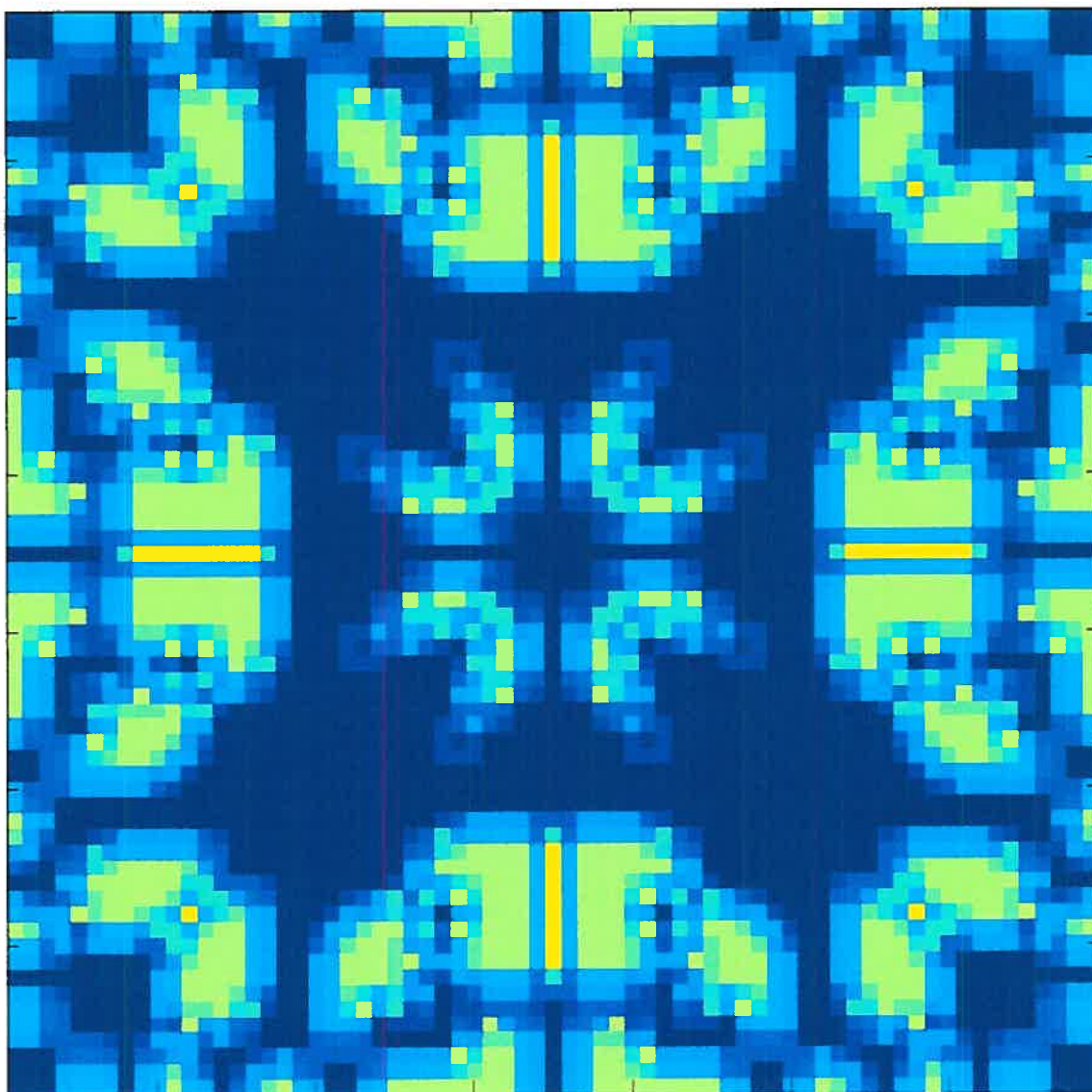


FIG. 1.5 – Résultat du pointage obtenu pour chaque cellule d’une simulation de 400 itérations avec un voisinage de Moore aux bordures périodiques et un pointage  $(S, P, R, T) = (0, 0, 1, 1.83)$ . Les conditions initiales sont une mer de coopérants avec un non-coopérant au centre. Le vert représente un pointage de  $R = 1$ , le bleu foncé  $P = 0$ , les bleus pâles valent entre 0 et 1 et les jaunes sont supérieurs à 1. La grille est de  $69 \times 69$ .

### 1.3.8 Le dilemme du prisonnier dans un réseau

Plus généralement, les représentations spatiales sont des cas particuliers des réseaux. Un réseau est un ensemble de noeuds (cellules) et un ensemble d'arcs (liens), chaque arc est associé à une paire de noeuds. Les espaces sont des réseaux où les voisinages sont très corrélés.

Axelrod *et al.* (2002) ont placé des stratégies réactives avec une mémoire d'une décision dans un réseau. Les stratégies affrontent leurs huit voisins au jeu du dilemme du prisonnier dans une confrontation de quatre décisions. À la génération suivante, chacune des stratégies adopte la meilleure stratégie à laquelle elle est liée directement si elle est plus performante qu'elle, sinon elle ne change pas. Si les liens entre les individus changent à toutes les générations, il n'y a pas émergence de la coopération. Par contre, si les liens sont permanents, la coopération émerge.

### 1.4 Réseaux *small-world*

Soit un réseau  $G = (V, E)$  constitué de noeuds  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et de liens entre les noeuds  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  où  $e_i = (v_j, v_k)$  est un lien entre les noeuds  $v_j$  et  $v_k$ . On place tous les noeuds sur un cercle, chacun des noeuds est lié à ces quatre plus proches voisins. Dans ce réseau structuré  $G_{\text{structuré}}$ , tous les noeuds ont le même nombre de liens. Le diamètre de ce réseau, la longueur du plus court chemin entre les deux noeuds les plus éloignés, est de l'ordre du nombre de noeuds. Il y a par contre une influence locale très forte, car les voisins de noeuds voisins ont de fortes chances d'être connectés entre eux. À l'opposé, on prend un réseau  $G_{\text{aléatoire}} = (V, E)$  avec le même nombre de liens et de noeuds que  $G_{\text{structuré}}$ , mais on place les liens aléatoirement. Ce réseau a un diamètre faible dû à la présence de raccourcis partout dans le réseau, mais n'aura peu ou pas d'influence locale puisque la corrélation du voisinage sera faible (Watts & Strogatz, 1998) (Fig. 1.6). Le diamètre du réseau renseigne sur le temps que prendra l'information pour parcourir tout le réseau si à chaque pas de temps tous les noeuds au courant de l'information en informent leurs voisins. Un diamètre grand, de l'ordre du nombre de noeuds si-

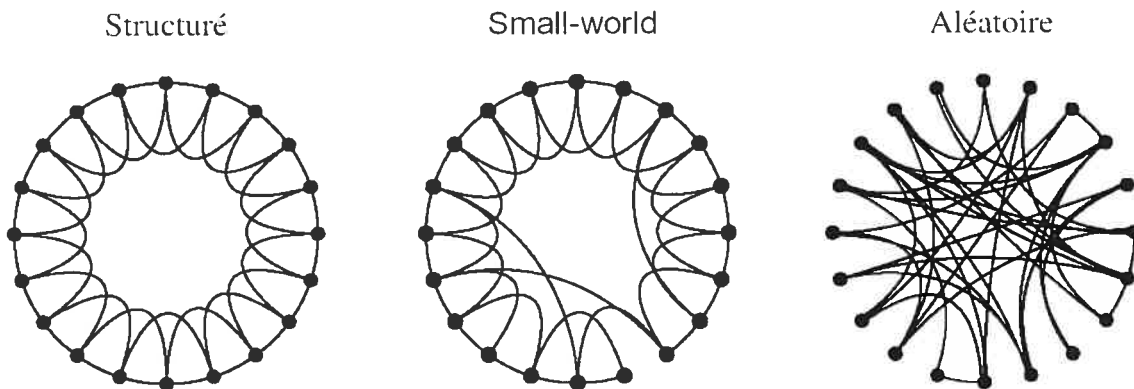


FIG. 1.6 – Figure tirée de Watts & Strogatz (1998). Dans le réseau structuré ( $\rho = 0$ ), tous les noeuds sont liés à leur deux plus proches voisins. Dans le réseau *small-world* ( $0 < \rho < 1$ ), on voit encore le réseau structuré initial, mais avec une fraction des liens qui ont été modifiés. Dans le réseau aléatoire ( $\rho = 1$ ), on ne voit plus le réseau initial : les voisins du réseau structuré initial ne sont que marginalement liés ensemble.

gnifie que l'information aura à passer par pratiquement tous les noeuds, un à la fois, avant que tous les noeuds aient reçu l'information. Un diamètre plus faible permet d'informer tous les liens en moins de temps. On peut remplacer dans l'exemple l'information par un virus ou un influx nerveux.

Avant Watts & Strogatz (1998), il n'y avait pas de moyen efficace de modéliser un réseau ayant une forte corrélation dans le voisinage en même temps qu'un diamètre faible. Les réseaux *small-world* (Watts & Strogatz, 1998) sont des réseaux ayant la propriété d'avoir un diamètre faible et une corrélation dans le voisinage forte. Ils sont construits à partir des réseaux structurés desquels on modifie une fraction  $\rho$  des liens. La modification d'un lien consiste à remplacer un des noeuds auquel il est lié par un autre choisit au hasard. Le nouveau lien créé ne doit pas déjà exister. La modification du lien  $e_i = (v_p, v_q)$ ,  $e_i^! = (v_p, v_r)$ , remplace  $e_i$  dans  $E$  si  $e_i^! \notin E$  et  $r \notin \{p, q\}$  (Fig. 1.6).

Watts & Strogatz (1998) ont développé une mesure qui renseigne sur la présence des grappes et de leur importance : le coefficient de grappe ( $CC$ ). Le coefficient de

grappe du noeud  $v_i$  est

$$CC_i = 2 \frac{|(v_j, v_k)|}{w(w-1)} \quad (1.8)$$

où  $|(v_j, v_k)|$  sont les liens présents dans  $E$ ,  $v_j, v_k$  sont les noeuds dans le voisinage de  $v_i$ ,  $w$  est le nombre de voisins que possède  $v_i$  et  $\frac{w(w-1)}{2}$  est le nombre total de liens possibles entre tous les voisins de  $v_i$ . Le coefficient de grappe  $CC$  est la moyenne de tous les  $CC_i$

$$CC = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m CC_i \quad (1.9)$$

où  $m$  est le nombre de noeuds dans le réseau.

Les réseaux *small-world* font l'objet de bien des études dans plusieurs disciplines des sciences sociales et naturelles (Watts & Strogatz, 1998; Watts, 1999).

Ces réseaux sont associés au phénomène de six degrés de séparation qui stipule que nous sommes tous à six poignées de main de n'importe qui dans le monde. Autrement dit, en prenant deux personnes au hasard dans le monde, il ne devrait pas y avoir plus de cinq intermédiaires pour relier les deux individus en prenant le réseau formé par les liens de connaissance de toutes les personnes impliquées dans la chaîne (Milgram, 1967).

Le réseau de collaboration entre scientifiques est aussi un réseau de type *small-world* (Newman, 2001). On considère un lien entre deux scientifiques s'ils sont co-auteurs d'un article ou plus. Une mesure amusante dans le réseau de scientifiques est le nombre de Erdős. Paul Erdős (1913-1996) est un mathématicien itinérant, co-fondateur de la théorie des réseaux aléatoires. Il a publié plus de 1400 articles durant sa vie avec un nombre impressionnant de collaborateurs (Newman, 2001). Le nombre de Erdős ( $EN$ ) est, pour chaque scientifique, le nombre de collaborateurs qui le sépare de Paul Erdős. Paul Erdős a un nombre de Erdős  $EN = 1$ , Amnon Bracha-Barak  $EN = 2$  (Bracha-Barak & Erdős, 1984), Paul E. Saylor  $EN = 3$  (Bracha-Barak & Saylor, 1973), Linda R. Ptezold  $EN = 4$  (Ashby *et al.*, 1996), David A. Yuen  $EN = 5$  (Van Keken *et al.*, 1995) et Xavier Thibert-Plante  $EN = 6$  (Thibert-Plante *et al.*, 2003). On peut ainsi lier la majorité des mathématiciens qui sont dans le réseau avec un  $EN$  moyen de 4.7 (Grossman, 2002).



D'autres réseaux, comme le réseau électrique de l'ouest des États-Unis et le réseau de neurones du ver *C. elegans* sont des réseaux de type *small-world* (Watts & Strogatz, 1998).

## 1.5 Reproduction

Il existe différents modèles pour représenter la reproduction dans un contexte évolutif. Pour des populations que l'on veut de taille fixe, des choix s'offrent à nous : la reproduction proportionnelle à la valeur d'adaptation, le mimétisme local et les algorithmes génétiques. D'autres modèles proposent des populations à taille variables, mais ils ne seront pas considérés dans cette étude pour fin de simplicité.

### 1.5.1 Reproduction proportionnelle

La reproduction proportionnelle à la valeur d'adaptation calcule le taux de croissance pour chacune des stratégies. Les stratégies qui performant mieux que la moyenne vont augmenter leur effectif et ceux qui performant moins bien que la moyenne vont décroître. Le taux de croissance  $\dot{x}_i$  de la stratégie est fonction de sa valeur d'adaptation  $f(x_i)$  par rapport à la moyenne des valeurs d'adaptation dans la population  $\bar{f}(\vec{x})$ .

$$\dot{x}_i = x_i(f(x_i) - \bar{f}(\vec{x})) \quad (1.10)$$

On peut utiliser la reproduction proportionnelle dans un environnement spatial ou non. Dans le cas spatial, on aura la fraction de la population dans chacune des cellules et un taux de migration entre les cellules. Il y aura donc une dynamique dans chacune des cellules qui influencera la dynamique globale du système.

### 1.5.2 Mimétisme

Le mimétisme pour une population à taille fixe consiste à prendre, pour chacun des individus, la stratégie la plus performante à laquelle elle aura été confrontée. Cette situation est mieux adaptée au contexte spatial, car dans le cas d'un tournoi de type round robin, à la deuxième génération il ne restera plus que la meilleure

stratégie de la première génération et le système n'évoluera plus en absence de bruit.

Pour raffiner le modèle du mimétisme, on peut fractionner la stratégie en ses constituants et appliquer une variante de la reproduction proportionnelle aux constituants de stratégies, cette méthode se nomme les algorithmes génétiques.

### 1.5.3 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont un outil pour les problèmes d'optimisation employés lorsqu'on ne possède pas de solution analytique. Ses principes sont hérités de la biologie avec une vision darwinienne.

Supposons un espace de paramètres plus grand que ce que l'on peut calculer dans le temps alloué, mais borné. On peut associer une valeur (*fitness*) à chaque point de l'espace, le but est de trouver les coordonnées paramétriques de la plus grande valeur. On ne peut pas faire d'énumération explicite à cause de la contrainte temporelle, alors on peut utiliser les algorithmes génétiques pour résoudre le problème.

#### 1.5.3.1 Historique

Les algorithmes génétiques ont été inventés par John H. Holland dans les années 1970. Il jette les bases de cette nouvelle théorie dans son livre *Adaptation in Natural and Artificial Systems : An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence* (Holland, 1975). Une introduction plus accessible peut être trouvée dans Goldberg (1989).

#### 1.5.3.2 Représentation de l'espace des paramètres

On doit représenter les points de l'espace et être capable de les manipuler avec les opérateurs génétiques. Pour le problème à  $n$  paramètres, on peut représenter le point par un  $n$ -tuplet :

$$(\vec{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n). \quad (1.11)$$

Chacun des  $x_i$  doit avoir une valeur dans les bornes définies du problème.

### 1.5.3.3 Initialisation

On prend au hasard  $m$  points dans l'espace des paramètres.

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \quad (1.12)$$

### 1.5.3.4 Évaluation

On évalue et on classe les points selon leur *fitness* afin de pouvoir identifier les meilleurs.

$$f(\vec{x}_i) \geq f(\vec{x}_j) \geq \dots \geq f(\vec{x}_k) \quad (1.13)$$

### 1.5.3.5 Sélection

Les meilleurs points peuvent se reproduire. Il existe différentes méthodes pour satisfaire ce critère :

- on garde uniquement les meilleurs points : pression de sélection très forte ;
- on sélectionne au hasard les points que l'on garde en fonction de leur *fitness*.

Une étude sur l'effet de quelques méthodes de sélection se trouve dans van Bragt *et al.* (2001). On y montre entre autre que le croisement (recombinaison) aide à la stabilité du système dans le dilemme du prisonnier.

### 1.5.3.6 Croisement

Avec les points qu'il reste, on reconstitue une population de la même taille que précédemment. On suppose que la combinaison de deux n-tuplets qui sont parmi les meilleurs ont une forte probabilité de bien faire aussi. L'opération de croisement fragmente et recombine les n-tuplets. Par exemple le croisement des deux points de l'espace des paramètres

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ & (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{aligned} \quad (1.14)$$

donne

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, y_{p+1}, \dots, y_{n-1}, y_n) \\ & (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, y_p, x_{p+1}, \dots, x_{n-1}, x_n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le point de coupe  $p$  est déterminé de façon aléatoire. De plus, on laisse une probabilité pour qu'un couple de points soit reproduit intégralement sans croisement.

### 1.5.3.7 Mutation

La mutation sert à sortir des minima secondaires en introduisant une erreur dans la reproduction. Cette erreur sert à explorer d'autres régions de l'espace des paramètres. Son occurrence est beaucoup moins grande que le croisement de deux points de l'espace. Suite à une mutation à la coordonnée  $q$ , le point

$$(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, x_q, x_{q+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (1.16)$$

devient

$$(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, x_q^1, x_{q+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (1.17)$$

où  $x_q^1$  est une nouvelle valeur dans les bornes du problème.

### 1.5.3.8 Critère d'arrêt

On répète les opérations d'évaluation, de sélection, de croisement et de mutation jusqu'à ce qu'on ait atteint le critère d'arrêt. Les critères peuvent être :

- la convergence : depuis les  $M$  dernières itérations, on a toujours la même valeur optimale ;
- avoir dépassé la limite de temps : après  $N$  itérations, on n'a pas convergé, mais on a tout de même la meilleure valeur qui ait été rencontrée.

### 1.5.3.9 Le dilemme du prisonnier et les algorithmes génétiques

Les stratégies du dilemme du prisonnier sont des points de l'espace des paramètres. Par exemple, GTFT avec une mémoire d'une rencontre est  $(1, 1, \frac{1}{3})$  dans

l'espace des paramètres  $(y, d, c)$ , où  $y, c, d \in \mathbb{R}[0, 1]$  selon la convention de la figure 1.1.

Axelrod (1987) a utilisé les algorithmes génétiques pour faire évoluer des stratégies dépendant de la récompense avec une mémoire de trois rencontres. Il y avait un petit nombre de stratégies présentes dans la population à chaque génération : 20 stratégies. De plus, le nombre de générations dans les simulations est petit : 50. Ces limites sont toutefois nécessaires pour être en mesure de qualifier le comportement de chaque stratégie et de suivre pas à pas l'évolution de la population. Il a trouvé des caractéristiques communes à TFT et aux meilleures stratégies développées par les algorithmes génétiques dans son tournoi.

En utilisant des stratégies représentées par des réseaux de neurones et une évolution par des algorithmes génétiques, Darwen & Yao (2001) ont montré que l'ajout de choix de réponses réduit la coopération. Les choix ajoutés sont intermédiaires à coopération et non-coopération : ils sont passés d'une matrice de rétribution  $2 \times 2$  à  $8 \times 8$ , donc 6 niveaux intermédiaires ajoutés. Par exemple, si on associe la coopération à investir 1\$ et la non-coopération au refus d'investir. On a dans la nouvelle configuration l'opportunité d'investir 0\$,  $\frac{1}{7}$ \$,  $\frac{2}{7}$ \$,  $\frac{3}{7}$ \$,  $\frac{4}{7}$ \$,  $\frac{5}{7}$ \$,  $\frac{6}{7}$ \$ et 1\$. Les auteurs ont observé la spécification de stratégies interdépendantes :  $A$  coopère avec  $B$ , mais pas avec  $A$  et vice-versa.

Dans un cadre plus théorique, Thibert-Plante & Charbonneau (en préparation) ont mesuré l'effet du croisement dans des simulations du dilemme du prisonnier qui évoluent par des algorithmes génétiques. Ils ont employé des stratégies réactives avec une mémoire de cinq décisions et le nombre de générations est de l'ordre du million. Durant la simulation, le pointage de la meilleure stratégie indique des phases très claires de stabilité et d'instabilité (Fig. 1.7). En mesurant ces phases pour différents paramètres génétiques, on remarque une plus grande stabilité lorsque le croisement est présent dans les simulations.

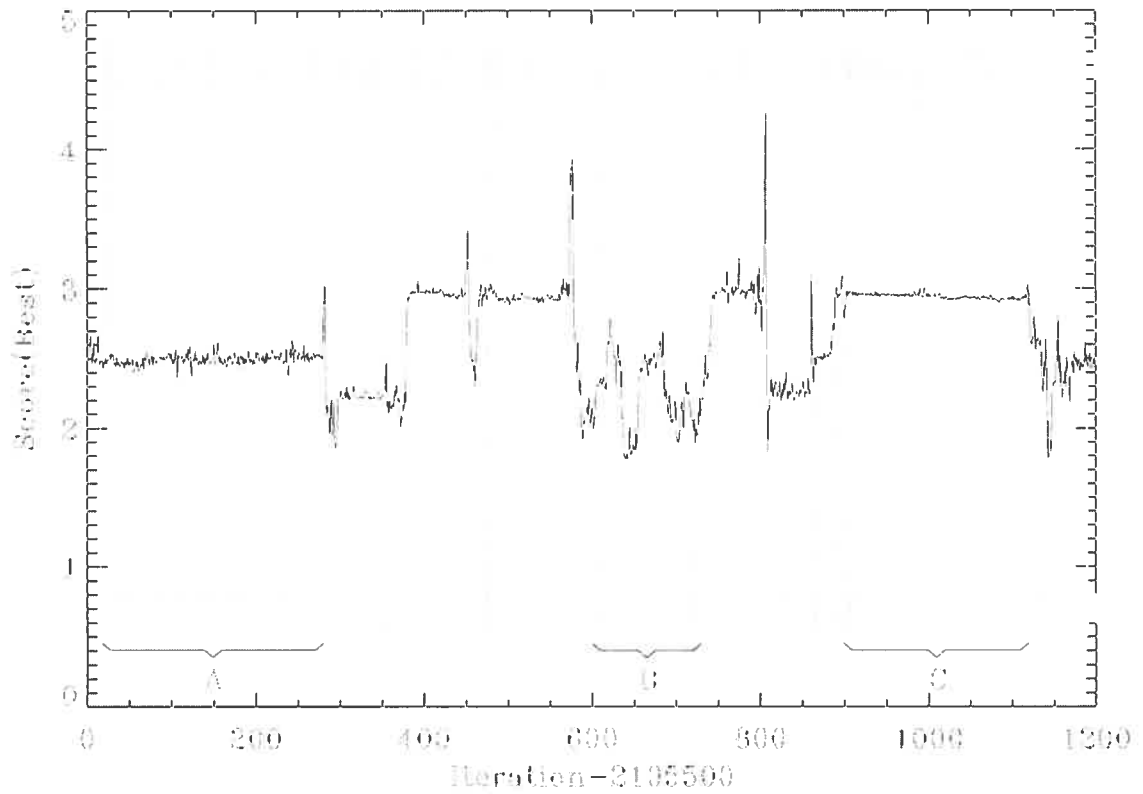


FIG. 1.7 – Figure tirée de Thibert-Plante et Charbonneau (en préparation). Les barres horizontales grises, au haut et au bas de la figure, indiquent les périodes de stabilité identifiées par deux méthodes distinctes. En *A* et en *C*, on observe des périodes de stabilité : le pointage du meilleur joueur est relativement constant. En *B* une période d'instabilité : grande variation dans le pointage du meilleur joueur.

# Chapitre 2

## Méthodologie

L'approche par simulation numérique est utilisée pour modéliser l'évolution de la coopération dans le jeu du dilemme du prisonnier dans les réseaux. L'utilisation de la méthode de reproduction la plus simple possible permet de mettre en évidence l'effet de l'organisation de l'espace sur la dynamique de la population.

### 2.1 Objectifs de la recherche

La compréhension de l'évolution des comportements coopératifs n'est que partielle (Pennisi, 2005). La théorie des jeux est un outil qui permet, dans un cadre formel, d'expérimenter sur le développement des comportements. Le dilemme du prisonnier est le jeu de prédilection pour l'évolution de la coopération. Des tournois du dilemme du prisonnier ont permis de faire émerger la coopération dans une population d'individualistes (Axelrod, 1984). Ensuite, pour mieux comprendre l'effet d'une corrélation spatiale, le dilemme du prisonnier est joué sur une grille (Nowak & May, 1992). Afin de raffiner l'environnement pour le rendre plus fidèle à la structure de la population, le dilemme du prisonnier est joué sur un réseau de type *small-world* qui conjugue corrélation spatiale et désordre (Watts & Strogatz, 1998).

Les objectifs de recherche sont de comprendre l'influence de l'organisation et de la désorganisation de l'espace dans la dynamique du jeu du dilemme du prison-

nier. La répartition des points dans le jeu du dilemme du prisonnier fait en sorte que les joueurs sont confrontés à un dilemme d'individualiste, car la plus grande récompense qu'ils peuvent obtenir pour chaque décision est lorsqu'ils ne coopèrent pas (Eq. 1.6), même si une coopération mutuelle à long terme est plus bénéfique (Eq. 1.7).

Plusieurs études se concentrent sur la simplification du problème en ne considérant que des paires de stratégies parmi : *ne jamais coopérer*, *toujours coopérer* et *Tit-for-tat* (Axelrod, 1984; May *et al.* , 1995; Nowak & May, 1992, 1993; Nowak *et al.* , 1994b,a). Dans cette étude, des stratégies stochastiques sans mémoire et des stratégies réactives seront utilisées. Afin de minimiser les effets de l'aléatoire dans les stratégies, l'approximation du nombre de décisions infini sera utilisée. Le pointage sera donc calculé à l'aide des chaînes de Markov, tel que décrit dans l'annexe I. Plusieurs réseaux de type *small-world* avec différents niveaux de désordre ( $0 \leq \rho \leq 0.12$ ) seront étudiés.

## 2.2 Hypothèses

Les hypothèses de recherche sont :

1. Le passage d'un réseau structuré (grille) vers un réseau aléatoire modifie le comportement d'une petite fraction de la population.
2. Lors du passage d'un réseau structuré vers un réseau aléatoire, la capacité d'accumuler des points varie de façon non uniforme dans la population, en corrélation avec l'ampleur des modifications du noeud.

## 2.3 Paramètres

Les réseaux *small-world* sont une bonne représentation de la structure des réseaux sociaux dans lesquels la coopération se développe. En plus, ils sont une variante des réseaux ordonnés : une structure où l'évolution de la coopération est grandement étudiée (Nowak & May, 1992; Grim, 1995; Brauchli *et al.* , 1999). Les réseaux *small-world* sont modélisés en introduisant des modifications aléatoires à



un réseau ordonné. On utilisera donc différents taux de modification  $\rho$  pour les réseaux afin de voir leur effet sur la population au jeu du dilemme du prisonnier. Ce paramètre sera le seul qui sera varié.

Le pointage moyen par décision de chacun des joueurs sera associé aux caractéristiques du noeud dans le réseau et non aux caractéristiques globales du réseau. On pourra donc observer l'influence des caractéristiques du noeud du réseau sur la performance des joueurs. Les caractéristiques des noeuds du réseau seront reliées au phénomène de grappe qui aurait tendance à améliorer la performance des joueurs qui s'y trouvent (Brauchli *et al.* , 1999).

Afin de mettre en relief l'effet de l'espace, on utilisera des stratégies stochastiques simples, sans mémoire et réactives. Le mode de reproduction élémentaire utilisé pour ne pas interférer avec l'effet de l'espace sera le mimétisme : les joueurs vont adopter la stratégie la plus payante avec laquelle ils sont en contact.

# Chapitre 3

## Prisoner's Dilemma and Clusters on Small-World Networks

### Abstract

Small-world networks have been associated with collective dynamics in complex systems. In the special case of the prisoner's dilemma played on a small-world network, the average score of the population decreases as we increase the probability of rewiring. In this study, we show that the decrease of the average score is caused by a minority of the population. The majority of the population is still not influenced by the transition from a grid to a small-world network.

**Keywords :** Small-World Networks, Prisoner's Dilemma, Clusters.

### 3.1 Introduction

Small-world network structure commonly emerges in complex systems (Watts & Strogatz, 1998). In this study, we explore the effect of this topology on the evolution of cooperative behavior with an individual based approach, using a model in which each node of the network is a strategy in the iterated prisoner's dilemma game.

Small-world networks (Watts & Strogatz, 1998) are playgrounds to study complex systems. They merge a strong local dynamics with large scale interactions. They are between regular grids and random networks, sharing their small characteristic path length with random graphs and their high degree of clustering with regular lattices. They are associated with the concept of six degrees of separation : there is a path connecting any two randomly chosen people in the world with five intermediates or less in the acquaintance network. They are also associated with synchronized dynamics, the result of fast diffusion in a highly correlated environment (Strogatz, 2001). The small-world network topology is a good model to represent various emergent networks like the power grid of the western United States, the neural network of *Caenorhabditis elegans*, collaboration graphs of film actors and scientists and the process of propagation of infectious disease (Watts & Strogatz, 1998; Watts, 1999). Following the method of Watts & Strogatz (1998), we can build a small-world network with only small modifications to a regular grid. For a grid  $G = (V, E)$  with  $n$  nodes  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  and  $m$  undirected edges  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  linking two nodes  $e_k = (v_i, v_j)$ . For each  $e_k \in E$  there is a small probability ( $\rho$ ) that one of the nodes associated with it, say  $v_i$ , will be replaced by a random one  $v_{rand}$ , where  $(v_{rand}, v_j) \notin E$ .

The prisoner's dilemma has become the standard paradigm for studying the evolution of cooperation among selfish individuals (Axelrod & Hamilton, 1981). It is a simple two player game where each player is confronted with a choice : to cooperate or not with the opponent. If both players cooperate they are rewarded by  $R$  points each ; if both defect, they are punished by  $P$  points each. If one cooperates while the other defects, the cooperator gets the sucker tax ( $S$ ) and the defector gets  $T$  points for the temptation to defect. By convention,  $T > R > P > S$  and  $2R > T$  (Axelrod, 1984). Thus when two opponents meet for a single confrontation it's always better to defect : each gets at least the same amount of points as his opponent  $T > S$  or  $P = P$ . The dilemma arises if the players can meet again with a non-zero probability ; this scenario is called the iterated prisoner's dilemma (IPD). The IPD also includes the case where the number of encounters is finite and known

between two players, but we do not consider this case in this study. In the IPD, the better strategy is not trivial anymore, and cooperation amongst players can emerge. The IPD has been used to model the evolution of cooperation in populations of fish (sticklebacks) (Milinski, 1987), vampire bats (Wilkinson, 1984) and primates (Packer, 1977; Brems, 1996). Even if the rules of the game are simple, the dynamics generated by different strategies in different environments (how players meet each other, the numerical values of the payoff) is complex.

Tit-For-Tat is a classical strategy in the iterated prisoner's dilemma : it cooperates on the first move and then does what the opponent did during the previous move. This strategy won the two numerical tournaments organized by Axelrod (1984) where people (academic and non academic) were invited to submit strategies of the IPD game. Nowak & Sigmund (1992) subsequently showed that Tit-For-Tat is not the final state, a generous variation, Generous Tit-for-Tat (GTFT) that cooperates one time out of three after the opponent defects, performs well in a noisy environment (when misperception and mis-implementation of decisions are probable, i.e. for stochastic strategies). TFT and GTFT are reactive strategies, they make their decisions as a function of the opponent's previous move; other types of strategies include general strategies that base their decision on their previous reward and memoryless strategies that take nothing into account when making a decision. Pavlov, a general strategy, outperforms Tif-for-Tat (Nowak & Sigmund, 1993b). Pavlov keeps the same decision (cooperate or defect) as long as it pays (reward is  $T$  or  $R$ ) and switches otherwise.

The model can be extended to a spatial version where the game is played on a  $n \times n$  chessboard. In this case, each player occupies a square on the chessboard and the game is played between nearest neighbours. At the end of each game, each player adopts the best scoring strategy in its neighbourhood for the next game. The introduction of space changes the dynamics of the game : coexistence of some strategies becomes possible and the best strategies in the spatial context are not the same for the same parameters in the non-spatial version. Nowak & May (1992) showed that simple strategies of the prisoner's dilemma that always

cooperate (*ALLC*) and always defect (*ALLD*) create beautiful fractals when they coexist. Grim (1995) showed that GTFT is more generous in a spatial environment; it cooperates twice as often when the opponent defects.

The discovery that space can have important effects on the dynamics of the model has led to a series of studies exploring the role of population structure on the emergence of cooperation in the prisoner's dilemma. Brauchli *et al.* (1999) investigated the difference between structured populations (grid configuration as per a chessboard) and random networks, where all players have the same number of neighbours, for general stochastic strategies of the IPD. They observed that the average score was higher in spatially structured populations because the grid allowed clusters of cooperators to emerge and stabilize the population. Since clusters seem to have an important impact on the dynamics of the game, Axelrod *et al.* (2002) studied the effect of a clustered network versus a persistent random network. They showed that both can allow cooperation to emerge with reactive stochastic strategies.

The role of clusters on the dynamics of small-world networks was first explored by Watts & Strogatz (1998) in their study of the region between structured and random populations. They showed in the context where the population is only composed of fully cooperative (*ALLC*) or fully defective (*ALLD*) strategies that the fraction of cooperators decreases as the amount of randomness introduced in the graph ( $\rho$ ) increases. These observations were confirmed by Abramson & Kuperman (2001), who looked at the fractions of *ALLC* and *ALLD* that emerge under different values of  $T$  (temptation of defection) and  $\rho$  (rewiring probability). They found that the fraction of *ALLC* decreases when  $\rho$  or  $T$  increases. The score, in particular the temptation to defect ( $T$ ), was shown to have a major effect on the fraction of *ALLC* for different values of  $\rho$ .

To investigate the role of hubs in complex networks, Kim *et al.* (2002) added one "influential node" in small-world networks of *ALLC* and *ALLD*. The "influential node" is a node, taken at random in the network, to which additional directed links are added. These links have an effect on a large fraction of the population, but not

the inverse. Kim *et al.* (2002) showed that this type of node creates an instability in the system, having a great effect when it switches strategy from *ALLC* to *ALLD*. When the influential node flips to non-cooperation, the fraction of cooperators in the population decreases significantly. This shows that the characteristics of a single node can affect the dynamics of the whole system.

In this study, the evolution of stochastic strategies in the prisoner's dilemma played on small-world networks will be analyzed to identify the effect of the network structure ( $\rho$ ) and individual node characteristics (clustering coefficient, sum of euclidean distances) on the dynamics of each node (strategies and score).

While previous studies concentrated on macroscopic characteristics of networks and associated them to the average score or the presence or absence of certain strategies in the population, in this study, we monitor the whole population in a steady state to see the influence of the characteristics of each individual node (clustering coefficient and sum of euclidean distance) on the model. We look at the score (phenotype) given by different stochastic strategies (genotypes :  $(p)$  and  $(p, q)$ ) as a function of each node characteristic for small-world networks with different degrees of randomness ( $\rho$ ). We observe a marked difference in behaviors between nodes that remain in the highly clustered grid configuration and those that are randomly rewired, suggesting that small-world structure does not affect the dynamics of all nodes in a network uniformly.

### 3.2 The model

In this study we used a  $32 \times 32$  grid with periodic boundary conditions to explore the role of the structure of the network on the dynamics of the population. The initial network is the standard grid with a Moore neighbourhood (the neighbours of a node are all nodes accessible by the king's move on a chessboard), every node is also linked to itself. We then modify the network with the rewiring process of Watts & Strogatz (1998) for different probabilities ( $\rho = \{0, 0.01, 0.02, \dots, 0.12\}$ ). The network structure is constant during a given simulation.

Every node on the graph is a stochastic strategy of the prisoner's dilemma game. Two different types of strategies are studied here : strategies without memory and reactive strategies. The strategy without memory is a number ( $p$ ) that represents the probability of cooperation at every moment. The reactive strategies are represented by two numbers : the first ( $p$ ) represents the probability of cooperation after the opponent cooperates, the second ( $q$ ) represents the probability of cooperation after the opponent defects. To avoid error-free strategies, the probability of cooperation is exclusively between zero and one, such that every probability ( $p$  or  $q$ ) is restricted to  $(\epsilon, 1 - \epsilon)$ , where  $\epsilon > 0$  is small. We use the same payoff function as Axelrod (1984) :  $(S, P, R, T) = (0, 1, 3, 5)$ . Each simulation is initialized with a population in which all  $p$  and  $q$  are uniformly distributed random numbers between zero and one exclusively.

The genotype is the strategy of a node ( $p$ ) or  $(p, q)$  and the phenotype is the genotype's average score per decision (payoff) resulting from confrontations with all the strategies in its neighbourhood.

Every round, each strategy effectively plays an infinite number of iterations against all the strategies that are linked to it (its neighbours). After the end of each round, every node adopts the strategy in its neighbourhood that obtained the best average score per decision. This update is done simultaneously over the whole network.

To avoid convergence and mitigate the effects of the initial conditions, there is a small probability of mutation (0.002 per gene :  $p$  and  $q$ ) that is constant during the simulation. The mutation operation changes the value of the gene to a random number on the range  $(\epsilon, 1 - \epsilon)$  and is performed after the nodes are updated.

Simulations were run for 1000 iterations (round) and 30 replicates were done for each simulation. While the system usually takes about 20 iterations to reach the steady state, all the analyses are done with the last 900 iterations to fully eliminate the transient period at the beginning of each simulation.

### 3.3 Results

#### 3.3.1 Analysis of phenotypes

The overall mean score (sum of all scores per decision divided by the number of nodes) decreases as the rewiring probability ( $\rho$ ) increases for both reactive and memoryless strategies (Fig. 3.1 (A) and 3.2 (A)) as Watts & Strogatz (1998), Watts (1999) and Abramson & Kuperman (2001) observed, suggesting that cooperation decreases in small-world networks. However, a study of the frequency distribution of scores clearly shows that distribution is not normal (Fig. 3.3 (A) and 3.4 (A)), the mean score is neither the median, nor the first moment. In all simulations, a prominent bin containing a large fraction of the population is present in the histogram. This bin is never equivalent to the mean score and, unlike the mean score, its position remains stable throughout a simulation (Fig. 3.5 (A) and 3.6 (A)). We call this bin the "emergent score". The mean score varies in synchronization with the the fraction of the population in the emergent score since the mean score is highly influenced by the fraction of the population in the emergent score (Fig. 3.5 (C) and 3.6 (D)).

The position of the emergent score as a function of the rewiring probability ( $\rho$ ) is constant over all simulations and represents random behavior (50 % cooperate, 50 % defect) versus random behavior for memoryless strategies (Fig. 3.1 (B)) and mutual cooperation for reactive strategies (Fig. 3.2 (B)). As the rewiring probability ( $\rho$ ) increases, the total fraction of the population over a simulation in the emergent score ( $\Gamma_{tot}(score)$ ) decreases (Fig. 3.1 (C) and 3.2 (C)) for both types of simulations. The transition from a grid to a small-world network doesn't affect the position of the emergent score, but changes its accessibility.

Is the introduction of randomness in the network creating different classes of node? Some nodes after the rewiring remain in a grid configuration : no links that are related to the node have been added, removed, modified and the neighbours are still connected together after the rewiring process. We compared the score probability distribution function (PDF) between two successive time steps for the



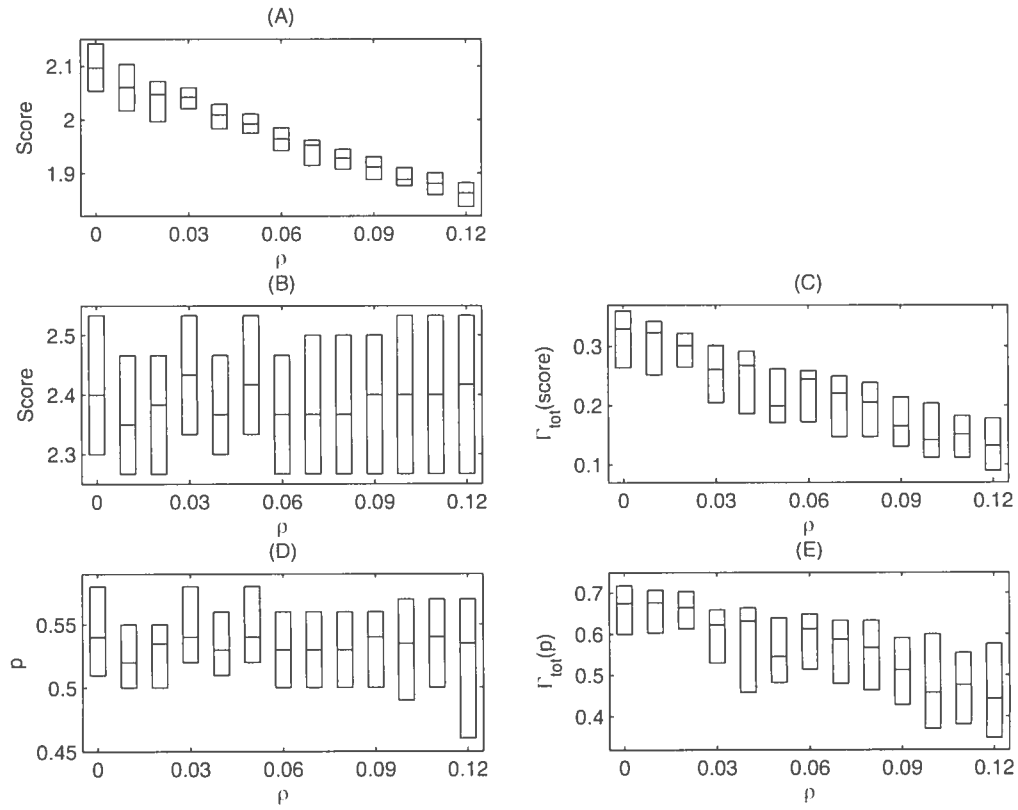


FIG. 3.1 – Boxplots of simulation characteristics as function of the rewiring probability ( $\rho$ ) for memoryless strategies. 50% of the simulations fall within the vertical box, the median is represented by the horizontal line inside the box. (A) mean score, (B) position of the emergent score, (C)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent score, (D) position of the emergent  $p$  and (E)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $p$ .

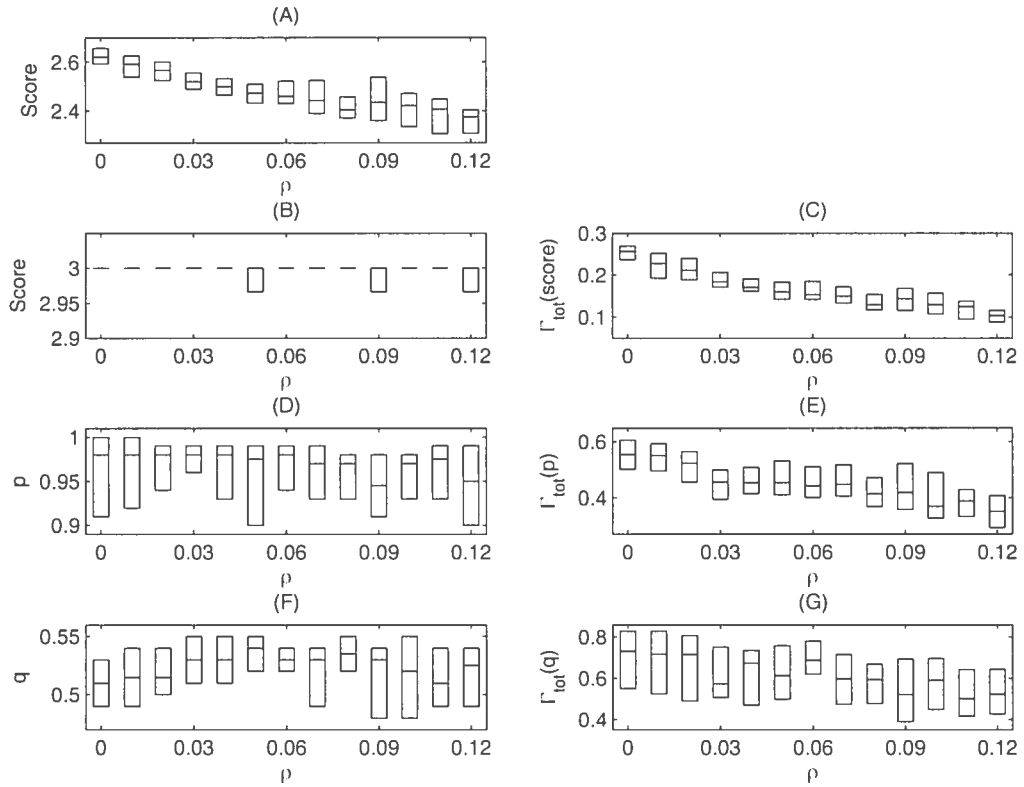


FIG. 3.2 – Boxplots of simulation characteristics as a function of the rewiring probability for reactive strategies. 50% of the simulations fall within the vertical box, the median is represented by the horizontal line inside the box. (A) mean score, (B) position of the emergent score, (C)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent score, (D) position of the emergent  $p$ , (E)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $p$ , (F) position of the emergent  $q$  and (G)  $\Gamma_{tot}$  of the emergent  $q$ .

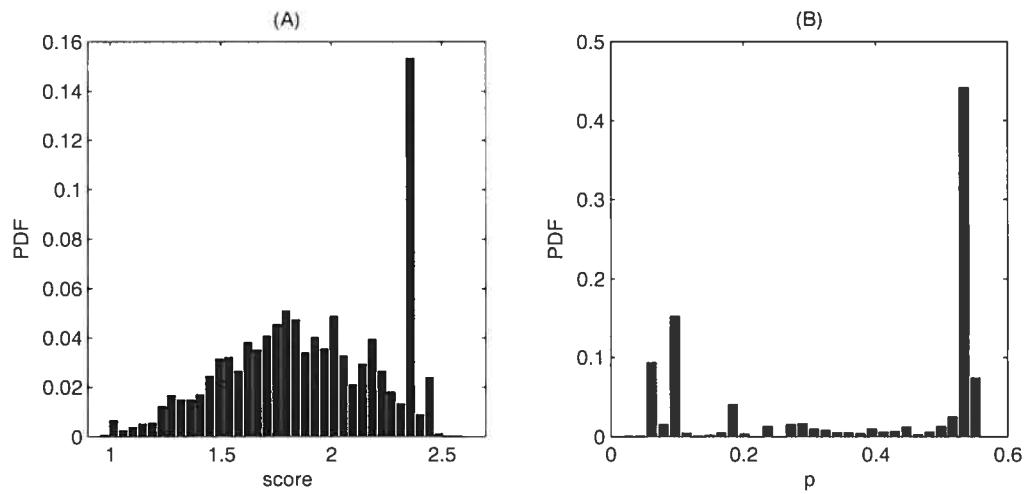


FIG. 3.3 – Probability distribution function (PDF) of the score (A) and  $p$  (B) for the entire population of memoryless strategies cumulated over a simulation with  $\rho = 0.1$ .

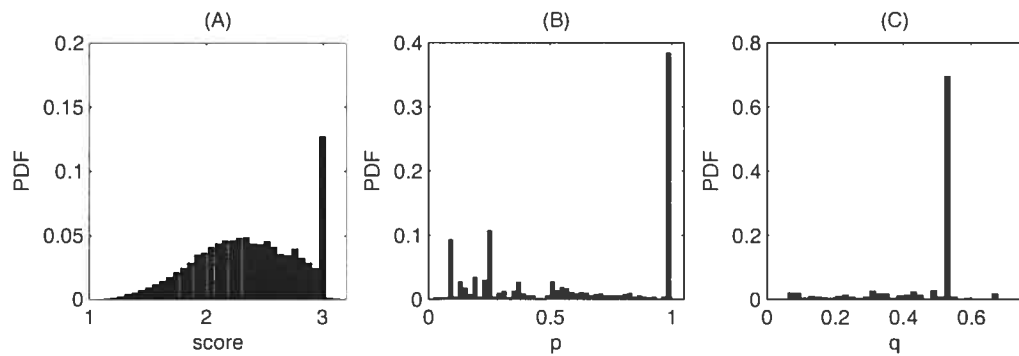


FIG. 3.4 – Probability distribution function (PDF) of the score (A),  $p$  (B), and  $q$  (C) for the entire population of reactive strategies cumulated over a simulation with  $\rho = 0.1$ .

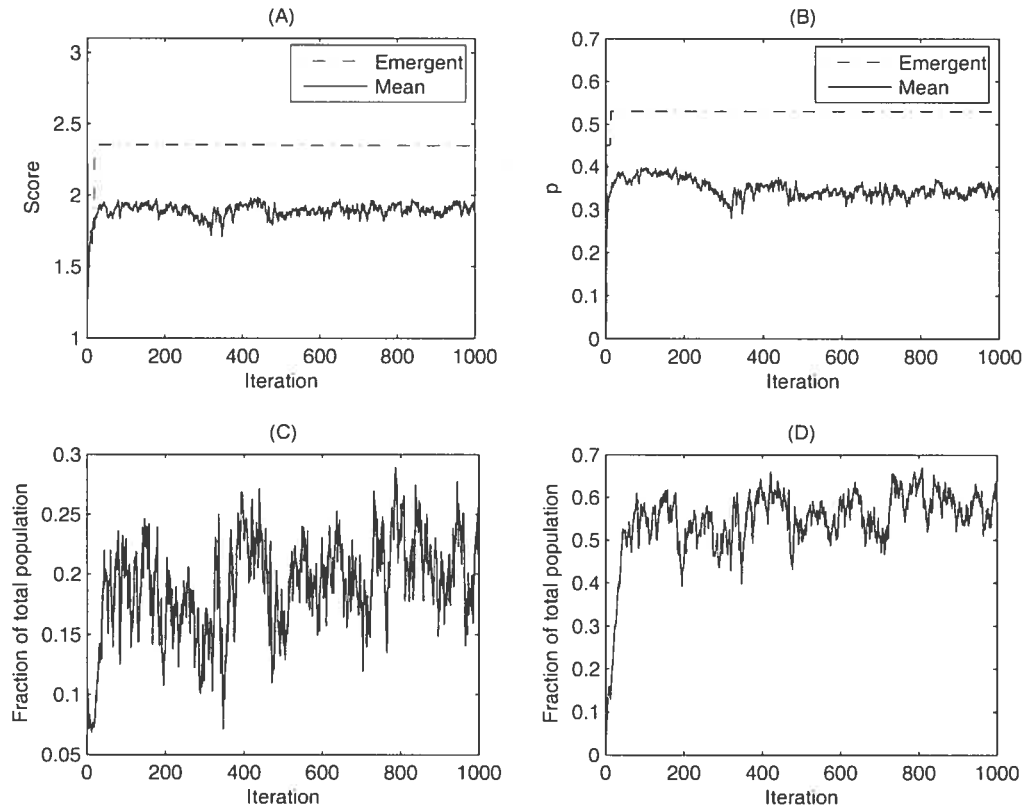


FIG. 3.5 – Time evolution of a representative simulation with memoryless strategies at  $\rho = 0.1$ . (A) evolution of the overall population mean score compared to the emergent score, (B) evolution of the overall population mean  $p$  compared to the emergent  $p$ , (C) evolution of the fraction of the population in the emergent score and (D) evolution of the fraction of the population in the emergent  $p$ .

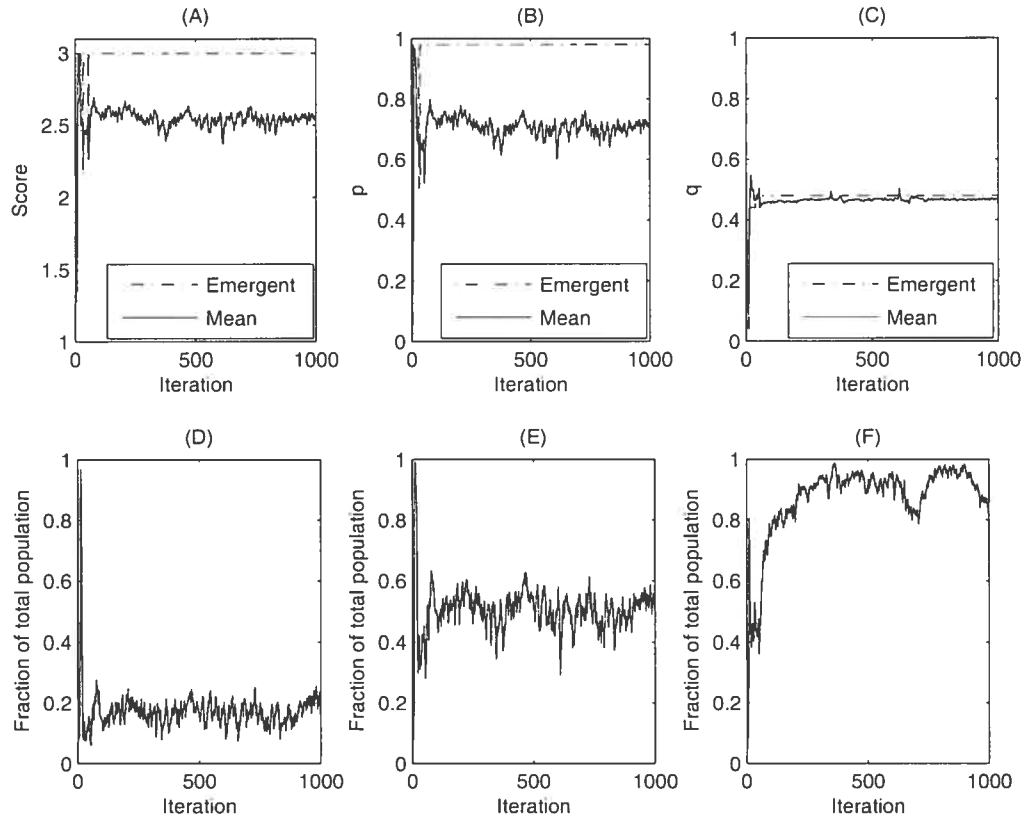


FIG. 3.6 – Time evolution of a representative simulation with reactive strategies at  $\rho = 0.1$ . (A) evolution of the overall population mean score compared to the emergent score, (B) evolution of the overall population mean  $p$  compared to the emergent  $p$ , (C) evolution of the overall population mean  $q$  compared to the emergent  $q$ , (D) evolution of the fraction of the population in the emergent score, (E) evolution of the fraction of the population in the emergent  $p$  and (F) evolution of the fraction of the population in the emergent  $q$ .

TAB. 3.1 – Similarity between grid and non-grid configurations

	Without memory			Reactive		
	Grid vs non-grid	Grid vs grid	Two time steps	Grid vs non-grid	Grid vs grid	Two time steps
Score	1%	31%	14%	2%	29%	14%
$p$	20%	80%	53%	12%	76%	48%
$q$	-	-	-	40%	87%	71%

The average fraction of time after the transient period that the two PDFs are the same with a Kolmogorov-Smirnov test with an interval of confidence of 95%. The grid-grid comparison is between two successive time steps of the nodes that are still in a grid configuration in a simulation. These are the cumulative results for all simulations.

whole PDF and for nodes in the grid configuration only and between grid and non-grid configurations for the same time step. We used a Kolmogorov-Smirnov test for this purpose. Since this is a dynamic process, we don't expect a full confirmation that every PDF is from the same distribution. The Kolmogorov-Smirnov test with 5% error shows that the PDF of the nodes in the grid configuration is more similar than the PDF of the whole population. The comparison between grid and non-grid configurations is accepted only rarely. Table 3.1 shows the results in more detail. The dynamics of the phenotypic evolution is thus different for different network characteristics of the node.

We quantify the difference between nodes in the grid configuration and modified nodes to study the impact of these quantities on the performance (score) of nodes. In general, the performance of cooperators is enhanced in clusters because they are more likely to face other cooperators (Brauchli *et al.*, 1999). We look at two quantitative variables associated with network structure and the cluster phenomena : the individual clustering coefficient and the sum of distances, to investigate their relationship with the score.

The individual clustering coefficient ( $CC_i$ ) is a measure of the correlation in the neighbourhood of a node. When its value is high, neighbours are linked together.

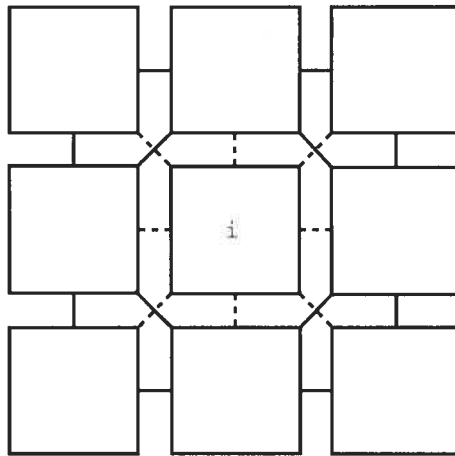


FIG. 3.7 – Neighbourhood of a node in a standard grid configuration. The nodes linked by a dashed line with node  $i$  are in its Moore neighbourhood. Neighbours to the north, south, east and west are 1 unit of distance from node  $i$  and the other neighbours are at a distance of  $\sqrt{2}$  units. The solid lines are the links between the neighbours of node  $i$ .

It varies from 0 to 1, where 0 means no neighbours of a node are linked together and 1 means all neighbours of a node are linked together. The clustering coefficient ( $CC_i$ ) of  $v_i$  is

$$CC_i = 2 \frac{|(v_j, v_k)|}{n(n-1)} \quad (3.1)$$

where  $|(v_j, v_k)|$  is the number of links present in the set of all edges in the network ( $E$ ),  $v_j, v_k$  are nodes in the neighbourhood of  $v_i$ ,  $n$  is the number of nodes present in the neighbourhood of  $v_i$  and  $\frac{n(n-1)}{2}$  is the total number of links possible between the neighbours of  $v_i$ . This equation holds for undirected edges (Watts, 1999). The nodes in the grid configuration have eight neighbours, which have 12 links between them (Fig. 3.7), giving a clustering coefficient of :

$$CC_i = 2 \frac{12}{56} = \frac{3}{7} \quad (3.2)$$

2D histograms of the score ( $y$  axis) and  $CC_i$  ( $x$  axis) contain all normalized score histograms in the vertical for every  $CC_i$ . Frequency is indicated on a gray

scale, with darker values for higher frequencies (Fig. 3.8 (A) and 3.9 (A)). The horizontal darkest line of the 2D histogram is the emergent score. The position of the emergent score remains the same for all  $CC_i$  (Fig. 3.8 (A) and 3.9 (A) for representative simulation results).  $\Gamma(score)$  is the frequency of the 2D histogram at the emergent score, here  $\Gamma(score)$  is a function of  $CC_i$ .  $\Gamma(score)$  changes as a function of  $CC_i$ , (Fig. 3.8 (C) and 3.9 (D) for representative simulation results). As the  $CC_i$  increases  $\Gamma(score)$  increases, but it is not a linear or a simple polynomial function (Fig. 3.8 (C) and 3.9 (D)). We used a linear robust fit to determine the sign of the slope of the  $\Gamma(score)$  as a function of the  $CC_i$ . The sign of the slope confirms the tendency of the increasing  $\Gamma(score)$  as a function of increasing  $CC_i$ , more extensive tests for all simulations and all  $\rho$  show that this trend is universal. In general the mean score of nodes with high  $CC_i$  will be higher, not because they score high values, but because they score well more often. For lower values of  $CC_i$  there is more noise in the values (Fig. 3.8 (C) and 3.9 (D)). The increased noise for highly modified nodes (low  $CC_i$ ), is due to the smaller amount of nodes who have the same characteristics : one point on the graph can be the behavior of a single node, since there are no other nodes who share this network characteristic.

Another way of characterizing a node is by studying its geographic location relative to its neighbours. When the network is a modification of a grid, the initial Cartesian position (before the rewiring process) of the node is used to characterize the geometric distance between the node and its neighbours. The sum of the geometric distance between a node and all its neighbours is called the Sum of Distances (hereafter  $SoD$ ). In the grid configuration, the sum over all neighbours is  $SoD = 4(1) + 4\sqrt{2}$  for each node (Fig. 3.7). If there is one more link from this node to another 5 units further, the  $SoD$  will become  $SoD = 5 + 4(1) + 4\sqrt{2}$ . In general as the  $SoD$  increase, the  $CC_i$  decreases for a node.

The position of the emergent score is the same for all  $SoD$ , but the  $\Gamma(score)$  decreases while the  $SoD$  increases, the tendency is shown for representative simulations (Fig. 3.8 (E and G) and 3.9 (G and J)). Thus, nodes with geographically close neighbours score well more often than nodes with geographically far neigh-



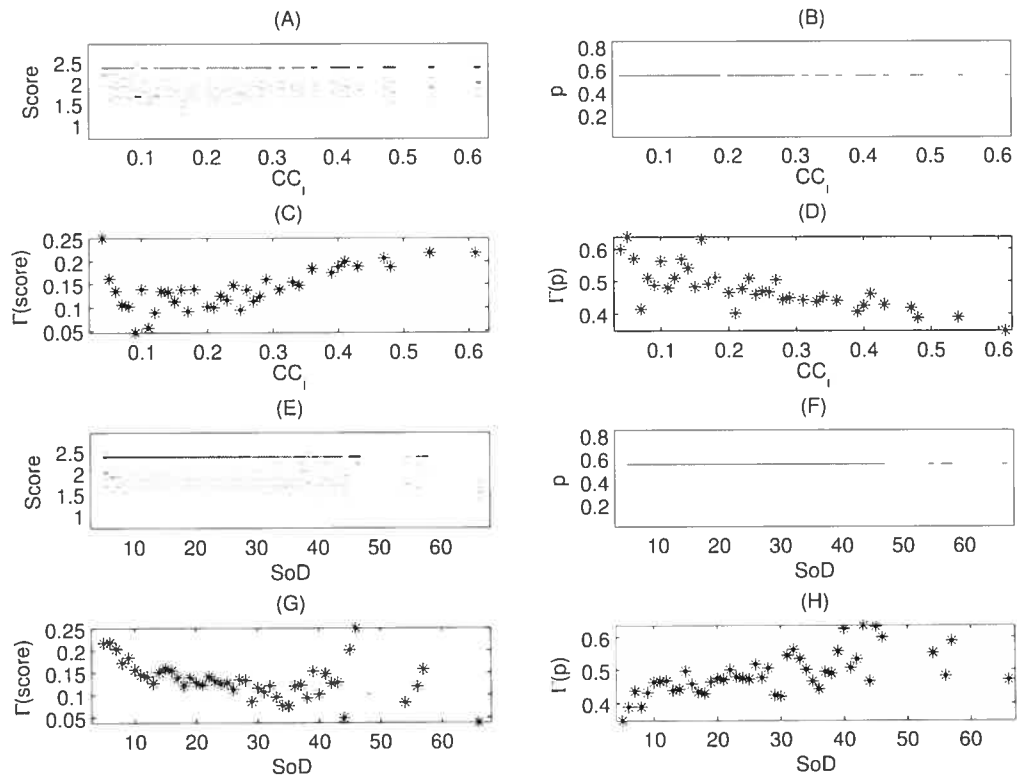


FIG. 3.8 – Phenotypic and genotypic variation as a function of the quantitative network characteristics ( $CC_i$  and  $SoD$ ) for a representative simulation for memoryless strategies at  $\rho = 0.1$ . In (A), (B), (E) and (F) are 2D histograms with the network characteristic ( $CC_i$  or  $SoD$ ) in  $x$  and the score or  $p$  in  $y$ . Frequency of the  $y$ -value is indicated on a gray color scale, with darker values for higher frequencies. The 2D histogram is normalized for the network characteristic (the sum of all values in a vertical line is one), so comparison between network characteristics is possible. Not all  $CC_i$  and  $SoD$  are represented, giving some vertical white areas. The dark horizontal line represents the emergent score or  $p$ . In (C), (D), (G) and (H)  $\Gamma$  of the emergent score or  $p$  is shown as a function of the  $CC_i$  and  $SoD$ .

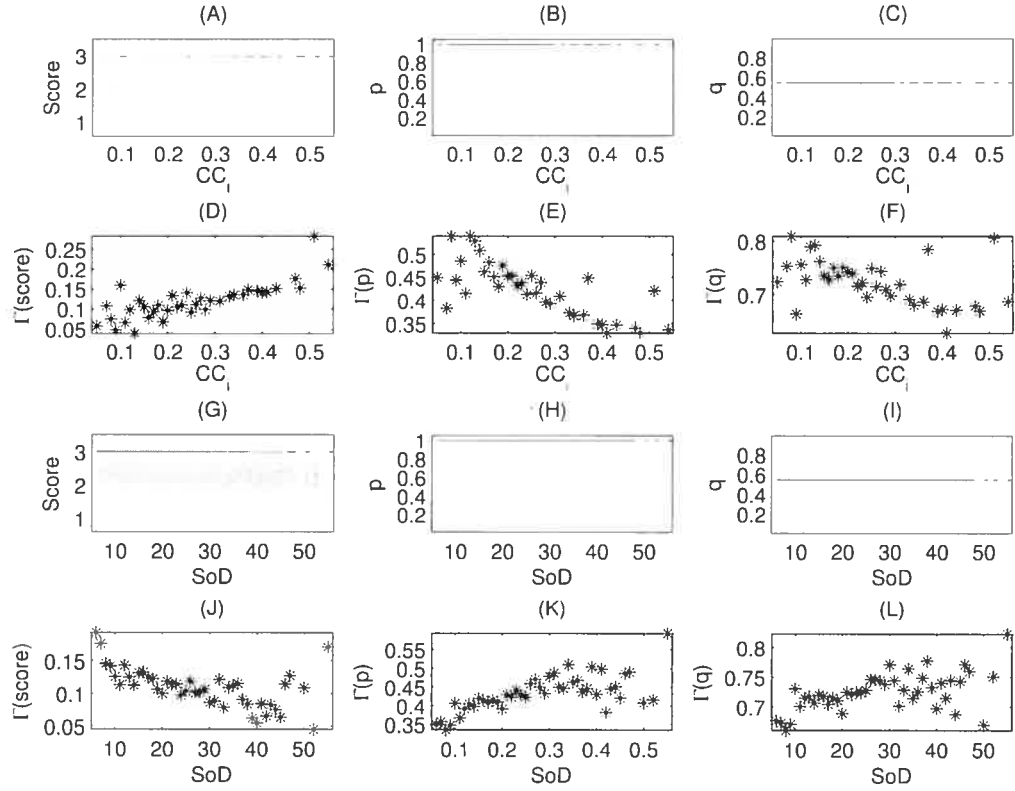


FIG. 3.9 – Phenotypic and genotypic variation as a function of the quantitative network characteristics ( $CC_i$  and  $SoD$ ) for a representative simulation for reactive strategies at  $\rho = 0.1$ . In (A), (B), (C), (G), (H) and (I) are 2D histograms with the network characteristic ( $CC_i$  or  $SoD$ ) in  $x$  and the score,  $p$  or  $q$  in  $y$ . Frequency of the  $y$ -value is indicated on a gray color scale, with darker values for higher frequencies. The 2D histogram is normalized for the network characteristic (the sum of all values in a vertical line is one), so comparison between network characteristics is possible. Not all  $CC_i$  and  $SoD$  are represented, giving some vertical white areas. The dark horizontal line represents the emergent score,  $p$  or  $q$ . In (D), (F), (F), (J), (K) and (L)  $\Gamma$  of the emergent score,  $p$  or  $q$  is shown as a function of the  $CC_i$  and  $SoD$ .

hours. The relation between the  $SoD$  and  $\Gamma(score)$  is also neither linear, nor a simple polynomial, but by evaluating the sign of the slope with the same fitting function as for the  $CC_i$ , the signs shows that this trend is universal. For  $SoD$  larger than the radius of the initial grid ( $radius \approx 24$ ) there is more noise in the results (Fig. 3.8 (G) and 3.9 (J)). In addition, nodes with  $SoD$  bigger than the radius of the grid must have more than one rewired links, and therefore a small  $CC_i$ , which diminishes the local influence and correlation.

### 3.3.2 Analysis of genotypes

The same analyses were also done for the genotypes : ( $p$ ) for memoryless strategies and ( $p, q$ ) for reactive strategies. The frequency distribution of  $p$  and  $q$  show that the distributions are not normal and there is a prominent bin containing a large fraction of the population for every  $p$  and  $q$ , those bins will be called the emergent  $p$  and emergent  $q$  respectively (Fig. 3.3 (B) and 3.4 (B and C)). For the purpose of simplification, we use the term emergent genotype to designate both emergent  $p$  and emergent  $q$  without distinction if nothing else is stated. For memoryless strategies the emergent genotype is called emergent  $p$ , for reactive strategies, there are two emergent genotypes : emergent  $p$  and emergent  $q$ .

Emergent genotypes are different from the mean genotypes and are more stable in time (Fig. 3.5 (B) and 3.6 (B and C)). There is a synchronization in the variation of the mean genotype and the fraction of the population in the emergent genotype(s) (Fig. 3.5 (D) and 3.6 (E and F)), since the mean genotype(s) are influenced by the fraction of the population in the emergent genotype. The emergent  $p$  for memoryless strategies is around  $p = 50\%$  which represents a coin flipping strategy (50% cooperate, 50% defect) (Fig. 3.1 (D)). For the reactive strategies the emergent  $p$  is more cooperative and is close to 1 (Fig. 3.2 (D)) and the reaction to defection by the opponent, emergent  $q$ , is around  $q = 50\%$  (Fig. 3.2 (F)). As the rewiring probability ( $\rho$ ) increases, the fraction of the population in emergent  $p$  ( $\Gamma(p)$ , same definition as  $\Gamma(score)$ , but transposed to  $p$ ) decreases for memoryless strategies (Fig. 3.1 (E)) and reactive strategies (Fig. 3.2 (E)). An interesting

feature of  $p$  is the emergence of other emergent genotypes in both memoryless and reactive strategies, so when a node is not in the emergent  $p$ , it is probably in another emergent  $p$  and not necessarily in the noisy region around the emergent  $p$  (Fig. 3.3 (B) and 3.4 (B)). In opposition, the  $q$  value is adopted by almost all the population (40% to 80%) (Fig. 3.2 (G)) and there is no other emergent  $q$  (Fig. 3.4 (C)).

There is a difference again if the node is in a "grid configuration" or not. Since the neighbours don't affect the genotype during a round, the Kolmogorov-Smirnov test between the grid configuration and non-grid configuration are more often accepted (Table 3.1). There is more similarity again in the grid vs grid comparison than the whole PDF for two time steps and the grid versus non grid is accepted less often. There is thus a difference in the dynamics of the genotype for different network characteristics of a node.

The value of  $CC_i$  for nodes also has an effect on  $\Gamma(p)$  and  $\Gamma(q)$ . (Fig. 3.8 (B) and 3.9 (B and C)). For high  $CC_i$ , nodes are less often in the emergent  $p$  and  $q$ . As  $CC_i$  increases,  $\Gamma(p)$  and  $\Gamma(q)$  decreases (Fig. 3.8 (D) and 3.9 (E)), this trend is universal for all  $\rho$ . For  $q$  a large fraction of the population adopts the emergent  $q$  (Fig. 3.2 (G)). As the  $CC_i$  increases,  $\Gamma(q)$  decreases (Fig. 3.9 (F)), but it remains high (more than 40%). This tendency is present for all  $\rho$ . Nodes with high  $CC_i$  tend to be more often in the emergent genotype.

As the  $SoD$  increases,  $\Gamma(p)$  increases (Fig. 3.8 (F and H) and 3.9 (H and K)). The increasing tendency is confirmed for all  $\rho$ . For emergent  $q$ , the same tendency is observed for all simulations, but at another range of values, in fact  $\Gamma(q)$  is higher than the  $\Gamma(p)$  (Fig. 3.9 (I and L)). Nodes with low  $SoD$  tend to be in the emergent genotype more often.

### 3.3.3 Strategy switching

Nodes falling into the emergent score/genotype don't stay there forever, they switch on and off the emergent score/genotype. The fraction of time a node switches in and out the score/genotype is an indirect measure of how long it can keep the

emergent score/genotype. There is no clear tendency between the fraction of time a node switches on and off the emergent score and the network characteristics  $CC_i$  and  $SoD$  since the score of a strategy is determined by its own genotype and the genotype of all its neighbours (Fig. 3.10 (A and C) and 3.11 (A and D)). There are more factors that influence the fraction of time a node switches on and off the emergent score than for the fraction of time a node switches on and off the emergent genotype. In contrast, a node will switch its behavior only if a neighbour performs better than it (we neglect the mutation that occurs only rarely). As the  $CC_i$  increases, the fraction of time nodes switch on and off the emergent genotype(s) decreases (Fig. 3.10 (B) and 3.11 (B and C)). In opposition, as the  $SoD$  increases the fraction of time they switch increases (Fig. 3.10 (D) and 3.11 (E and F)). More extensive tests for all simulations and all  $\rho$  show that this trend is universal. Rewired nodes are thus more likely than nodes in the grid to switch on and off the emergent genotype. For low  $CC_i$  and high  $SoD$  there is more noise in the results.

### 3.3.4 Spatial analysis

To visualize the system, we plot the nodes in their initial Cartesian positions, not as a function of their links after the rewiring process. Because small-world networks maintain strong local interactions, this "relaxed network" is a good two dimensional representation of the network (Fig. 3.12 and 3.13).

The fraction of the population in the emergent score/genotype at a given time can be calculated as the total area occupied by the emergent score/genotype. On the "relaxed network", we can measure the perimeter associated with the area. We consider all nodes as one unit squares, so the perimeter of a node is four units (north, south, east and west). Only edges between a node in the emergent score/genotype and one outside it count in the calculation of the perimeter of the emergent area.

As seen before, as the rewiring probability ( $\rho$ ) increases the fraction of the population in the emergent score/genotype decreases. In other terms, the area of nodes in the emergent score/genotype decreases. In figures 3.12 and 3.13 we see more and more fragmentation as  $\rho$  increases. To measure this fragmentation, we

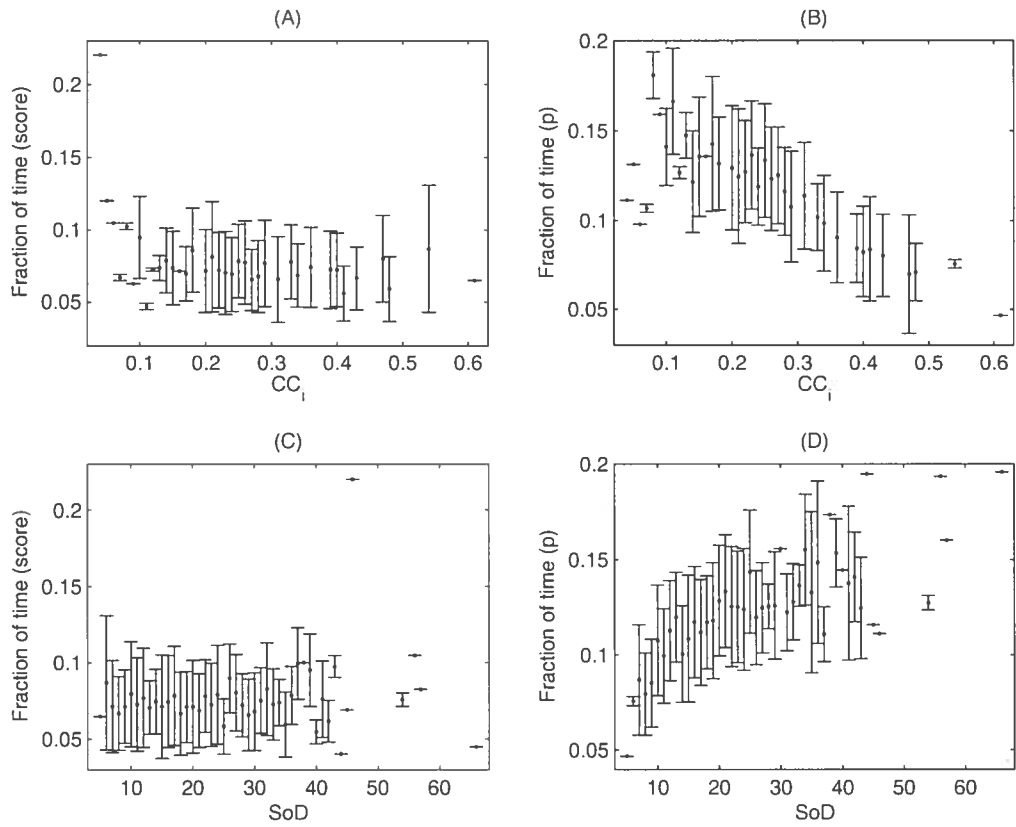


FIG. 3.10 – The mean fraction of time a node switches on and off the emergent score or  $p$  and its associated standard deviation for one representative simulation of memoryless strategies. The fraction of time a node (A) in the emergent score switches as a function of the  $CC_i$ , (B) in the emergent  $p$  switches as a function of the  $CC_i$ , (C) in the emergent score switches as a function of the  $SoD$  and (D) in the emergent  $p$  switches as a function of the  $SoD$ .

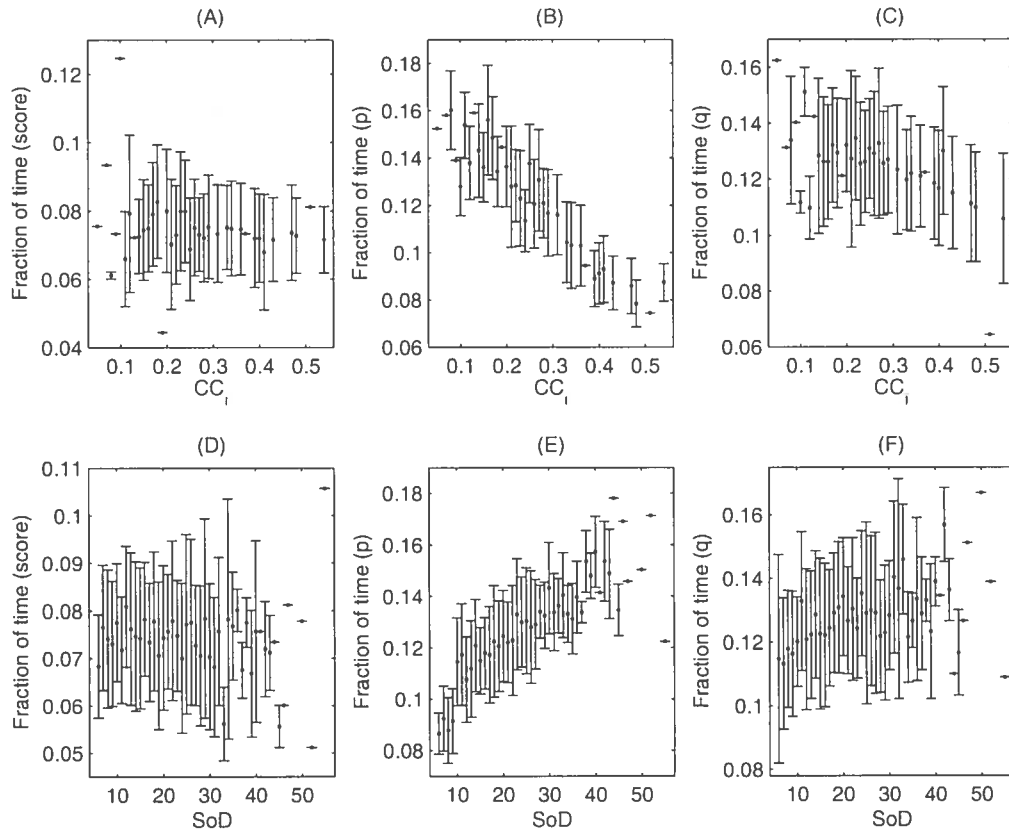


FIG. 3.11 – The mean fraction of time a node switches on and off the emergent score,  $p$  or  $q$  and its associated standard deviation for one representative simulation of reactive strategies. The fraction of time a node (A) in the emergent score switches as a function of the  $CC_i$ , (B) in the emergent  $p$  switches as a function of the  $CC_i$ , (C) in the emergent  $q$  switches as a function of the  $CC_i$ , (D) in the emergent score switches as a function of the  $SoD$ , (E) in the emergent  $p$  switches as a function of the  $SoD$  and (F) in the emergent  $q$  switches as a function of the  $SoD$ .

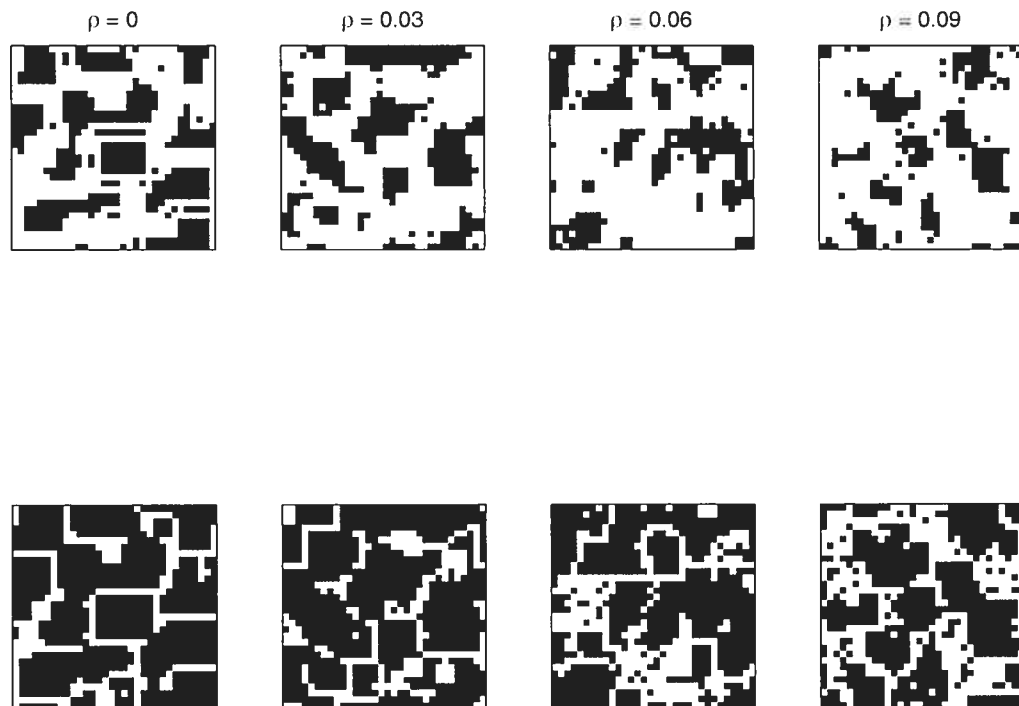


FIG. 3.12 – Spatial configuration of the network at one time step for representative simulations with memoryless strategies for various rewiring probabilities ( $\rho$ ). Nodes in black are part of the emergent score (top row) or emergent  $p$  (bottom row).



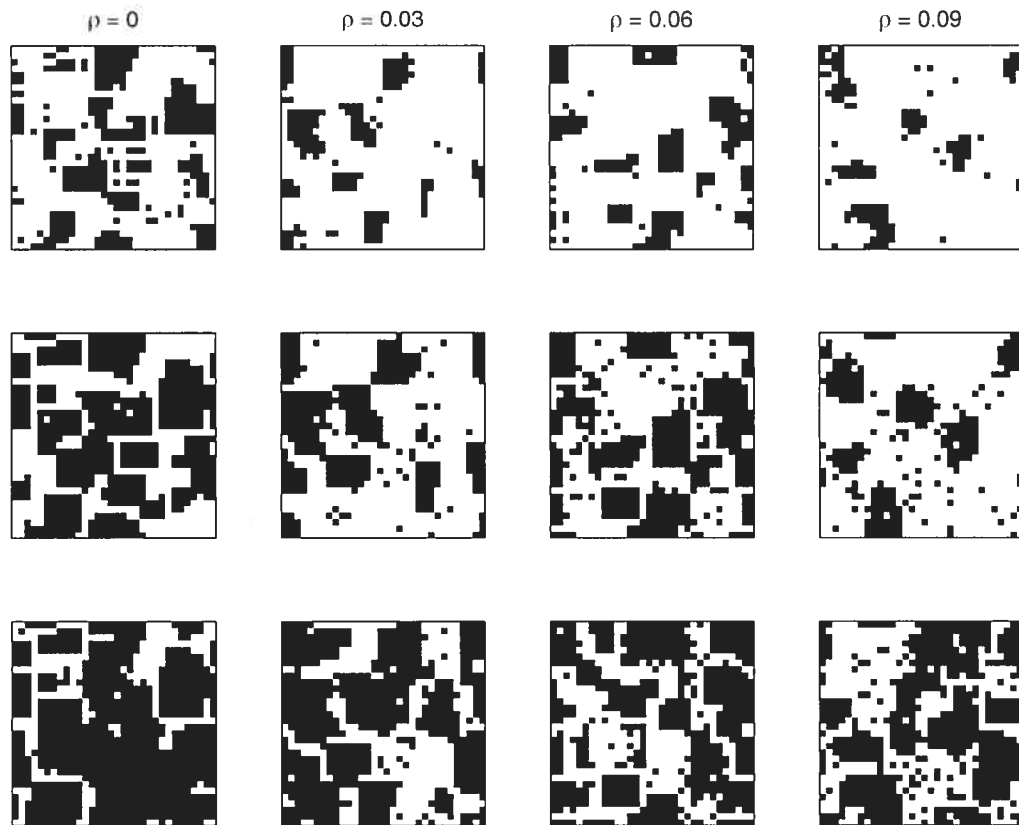


FIG. 3.13 – Spatial configuration of the network at one time step for representative simulations with reactive strategies for various rewiring probabilities ( $\rho$ ). Nodes in black are part of the emergent score (top row), emergent  $p$  (middle row) and emergent  $q$  (bottom row).

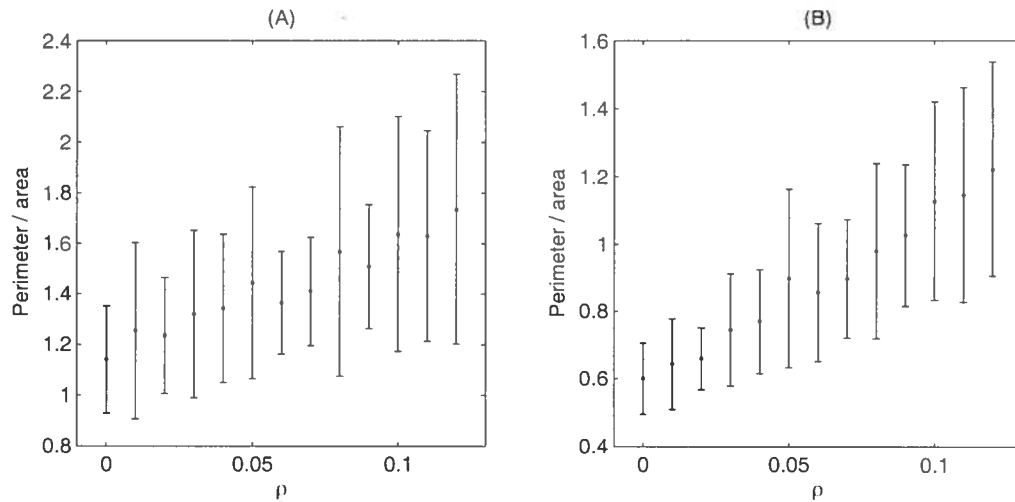


FIG. 3.14 – The mean and standard deviation of the ratio of the perimeter of the emergent zone (the black in figure 3.12) over the area of the emergent zone for each time step for simulations with memoryless strategies as a function of the rewiring probability ( $\rho$ ). The ratio for (A) the emergent score and (B) the emergent  $p$ .

used the perimeter over area ratio of the nodes in the emergent score/genotype. The plot of the total perimeter over the total area at each time step for nodes in the emergent score/genotype increases as the rewiring probability ( $\rho$ ) increases (Fig. 3.14 and 3.15). There are still identifiable clusters in the small-world network, because a strong local correlation remains. As  $\rho$  increases the mean perimeter of nodes in the relaxed network increases, because the clusters are more fragmented.

### 3.4 Discussion and conclusion

The mean performance changes with the rewiring probability ( $\rho$ ), but this apparent decrease in overall performance is not caused by a drift of the whole population to another state. The fraction of the population in the emergent score is decreasing while the  $\rho$  is increasing since the rewiring affects only a small fraction of the population, macroscopic measures like the mean score are affected.

Nodes with different network characteristics behave differently. Nodes that keep

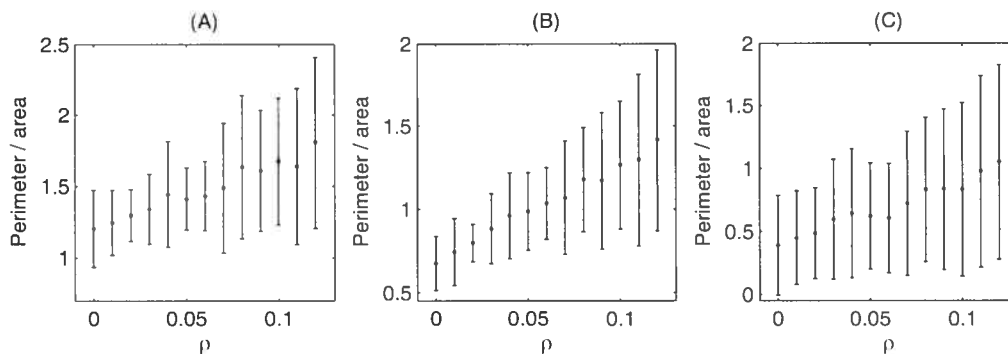


FIG. 3.15 – The mean and standard deviation of the ratio of the perimeter of the emergent zone (the black in figure 3.13) over the area of the emergent zone for each time step for simulations with memoryless strategies as a function of the rewiring probability ( $\rho$ ). The ratio for (A) the emergent score, (B) the emergent  $p$  and (C) the emergent  $q$ .

their original grid configuration usually perform well more often than those which are highly modified (low  $CC_i$  and high  $SoD$ ), even if highly modified nodes are more often in the emergent genotype(s). Highly modified nodes are more often in the emergent genotype(s) because they switch on and off of it more often : they are less able to stay in the emergent genotype(s) and perform well enough to stay there.

Explanation of decreased overall cooperation requires more than a simple study of the presence or absence of clusters in a network (Brauchli *et al.*, 1999; Axelrod *et al.*, 2002) and of nodes in or out of clusters. There are different levels of clustering that can be quantified by the  $CC_i$  and  $SoD$ . The  $CC_i$  is a good measure for highly correlated clusters (a lot of neighbours from a node are neighbours together). For networks containing nodes with low  $CC_i$ , like a von Neumann grid (neighbours of a node are the four closest nodes : north, south, east and west) for which  $CC_i = 0$  for all nodes, this measure is not useful. Even after the rewiring process, in which  $CC_i$  usually decreases, here  $CC_i$  is already at the lower bound. In contrast, the  $SoD$  is still a good measure for low and even zero  $CC_i$ , because  $SoD$  will not be zero unless the node is isolated. This measure, which considers spatial proximity

on a network, is thus a very useful method of characterising the local structure of less-connected networks.

Every node in the network tries to maximize its score. To achieve this, a node adopts the most effective strategy it is in contact with. The optimal strategy of a node might depend on its network characteristic. Since all nodes don't have the same network characteristics, there are multiple optimization processes running at the same time and interacting with each other. The interactions cause interference, because they share information about potentially different problems and try to use this information on another problem. The group with the largest number of members contains the nodes in the grid configuration, so there is more information in the network about how to optimize nodes in a grid configuration. Members of other groups will use this information and fail to improve their score with it, so they switch strategies more often.

The presence of rewired nodes creates instabilities on the network: they keep changing strategy over and over, so their neighbours have a hard time adapting their strategies as a function of this highly variable neighbour. These instabilities create more fragmentation in the network, because rewired nodes have neighbours in different regions of the grid who are influenced by their changing strategies, such that these instabilities have an effect on non-contiguous regions of the grid.

If there is less cooperation in a small-world network than on a grid, why would small-world structure emerge in social cooperation networks such as networks of scientists? In this study we use the mean score per decision to compare nodes and update their strategies as a function of it. In the real world it's the cumulative score of an individual that matters, not the mean score per decision. Since rewired nodes are more likely to have more neighbours, they have more opportunities to score and thus increase their cumulative score. Another dilemma arises: is it better to have more neighbours and score below the emergent score or to have the standard number of neighbours and score the emergent score, which is usually one of the best scores achieved in the population, more often? We speculate that it's better to have more neighbours. The prisoner's dilemma can be viewed as a cost and

benefit situation. Cooperators pay the cost  $c$  and the opponents get the benefit  $b$ , defectors don't pay the cost. If two nodes cooperate, they each pays the cost  $c$  and gets the benefits  $b$ ; if both defect, nobody pays the cost, so there is no benefit; if one cooperates while the other defects, the cooperator pays the cost while the defector get the benefit  $b$ . If  $b > c > 0$  the prisoner's dilemma equality is respected (Hauert & Doebeli, 2004). In real networks, there is a limit to the number of neighbours that a node can have because there is a cost to create and maintain a cooperative link. In collaboration networks of scientists, the limited amount of time available is probably the main limitation for the maintenance and the expansion of the network.

It could be interesting to look at a real small-world network, like the collaboration graph of scientists, and then associate a physical location to each scientist, for instance their institutional addresses, and investigate the importance of the physical proximity and the individual clustering coefficient in the cooperation graph and on the number of citations.

In summary, the migration from a regular grid to a small-world network does not modify the strategies that are present. As the rewiring probability increases,  $\Gamma(\text{score/genotype})$  decreases, revealing that the fraction of the population in the emergent score/genotype decreases. Since the emergent score is usually one of the best, if not the best, score that is achieved in the population, if  $\Gamma(\text{score})$  decreases, the overall mean score of the population decreases as  $\rho$  increases. Highly modified nodes will switch strategies more often, creating instabilities and fragmentation on the network.

# Chapitre 4

## Discussion

Cette étude permet de mieux comprendre ce qui se passe dans l'évolution de la coopération pour le passage d'une grille à un réseau *small-world*.

Le pointage moyen est une mesure significative, mais il représente une perte d'information par rapport à la fonction distribution des probabilités (PDF). Dans cette étude, les PDF ne sont pas paramétrables. Par conséquent, la moyenne de la distribution n'est pas une information qui nous permet de définir complètement l'ensemble des données. L'étude des PDF dans leur ensemble a permis d'en extraire des informations plus pertinentes que la moyenne, telles que la position du pointage émergent et la fraction de la population représentée par le pointage émergent. Ces informations sont aussi plus pertinentes que la moyenne dans le cas de l'étude du comportement : probabilité de coopération  $p$  et  $q$ . Ainsi, les études qui ne se concentraient que sur la présence ou l'absence de stratégies (Brauchli *et al.*, 1999) ou sur les pointages moyens (Watts & Strogatz, 1998) n'ont pas décelé ces informations qui s'avèrent être corrélées avec les caractéristiques des noeuds des réseaux *small-world*. La position des caractéristiques émergentes est insensible aux modifications du degré de désordre du réseau ( $\rho$ ) tandis que la fraction de la population dans la caractéristique émergente décroît avec l'augmentation du degré de désordre. Les noeuds modifiés par rapport au réseau structuré quittent en plus grand nombre le pointage émergent pour un pointage inférieur, ce qui

explique la diminution de la coopération observée dans Watts & Strogatz (1998). Il serait intéressant de développer d'autres outils formels pour faire l'analyse de PDF marginales comme celles présentes dans cette étude ou d'autres PDF sans phénomène émergent.

Les réseaux *small-world* ne font pas que générer des phénomènes de dynamique collective (Watts & Strogatz, 1998). Dans cette étude, le passage d'une grille vers un réseau *small-world* diminue l'importance du groupe dominant et de son action. Ainsi, les noeuds marginalisés par l'introduction de désordre ont tendance à quitter le pointage émergent ayant comme incidence de diminuer sa valeur.

Bien que valider ces résultats en nature ou en laboratoire s'avère une tâche ardue, il serait intéressant d'être en mesure de modifier la structure des interactions dans des populations d'animaux afin de mesurer l'impact sur l'évolution de la coopération. Par exemple, chez des primates qui coopèrent pour se défendre face à une attaque (Packer, 1977; Brems, 1996), chez des poissons qui coopèrent pour explorer le territoire (Milinski, 1987) ou chez des chauves-souris qui partagent leur nourriture (Wilkinson, 1984). Ces études ne se concentrent que sur des relations de coopération de premier niveau. Elles ne se soucient pas de la structure de la population, ni de la position des individus dans le réseau social. Dans cette étude, on montre que la structure du réseau social a une incidence sur le taux de coopération dans la population. Les prochaines études sur la coopération en nature et en laboratoire doivent donc tenir compte de la structure de la population, en plus des interactions entre individus, pour avoir un meilleur portrait de la situation. Ainsi, est-ce que l'ajout de désordre dans la structure de la population engendre une diminution de la valeur d'adaptation des individus marginalisés tout en conservant les mêmes phénomènes émergents dans des populations d'animaux ?

On sait maintenant que la structure de la population affecte la coopération pour un réseau maintenu constant. Que se passerait-il si les individus pouvaient modifier à leur guise leurs relations avec les autres individus ? Par exemple, s'ils pouvaient mettre fin à une relation infructueuse et en initier une nouvelle avec un individu au hasard. On aurait ainsi un réseau dynamique fascinant à étudier,

en plus des caractéristiques de coopération entre les individus déjà présentes dans cette étude. De plus, des réseaux dynamiques sont plus réalistes que des réseaux constants pour des populations d'animaux, puisqu'il y a des naissances, des morts, de l'immigration et de l'émigration.



# Conclusion

Dans cette étude, l'évolution de la coopération dans les réseaux *small-world* est analysée à l'aide du modèle du dilemme du prisonnier. On tente d'expliquer la baisse de la coopération dans les réseaux *small-world* comparativement aux réseaux structurés, comme les grilles, en analysant les caractéristiques des noeuds des réseaux. Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du paramètre de désordre ( $\rho$ ) dans les réseaux de type *small-world* n'a pas modifié les stratégies présentes. Pour les stratégies sans mémoire, l'aléatoire, soit 50% coopération 50% non-coopération, domine. Pour les stratégies réactives, on retrouve la version spatiale de GTFT qui coopère suite à une coopération de l'adversaire et coopère environ une fois sur deux suite à la non coopération de l'adversaire.

L'introduction de désordre dans le réseau de type *small-world* ne modifie pas les stratégies émergentes. Par contre, l'importance de ces stratégies émergentes est réduite par l'introduction de désordre dans le réseau : une fraction moindre de la population s'y retrouve. L'étude des caractéristiques des noeuds du réseau montre que les noeuds grandement modifiés changent de stratégie continuellement, cette instabilité fragmente les grappes qui se trouvent dans la représentation  $2D$  des réseaux structurés.

Avec l'augmentation du paramètre de désordre ( $\rho$ ), une fraction moindre de la population adopte la stratégie émergente, ce qui confirme la première hypothèse.

Cette étude a permis de mieux comprendre comment l'introduction de désordre dans une grille structurée affecte la coopération. Plus les noeuds sont modifiés (le coefficient de grappe  $CC_i$  tend vers le bas ou la distance avec les voisins  $SoD$  tend

vers le haut), moins leurs performances sont enviables, ce qui confirme la deuxième hypothèse. La baisse de performance des noeuds modifiés s'explique par le mode de reproduction : les noeuds modifiés imitent les noeuds les plus performants, qui sont habituellement les noeuds non modifiés. Les noeuds modifiés imitent donc des noeuds aux caractéristiques différentes des leurs, ce qui ne permet pas d'améliorer leur performance. Ils changent donc continuellement de stratégie, ce qui crée des instabilités dans le réseau et cause sa fragmentation.

Puisque les études sur le dilemme du prisonnier ont longtemps été la recherche des meilleures stratégies, on normalise leur performance par le nombre de décisions qu'elles prennent. Ainsi, on peut comparer deux stratégies qui n'ont pas eu le même nombre de rencontres. Par contre, on peut imaginer un modèle où la stratégie détermine non seulement la décision à prendre, mais qui peut aussi tendre à augmenter ou à diminuer le nombre de voisins. Dans ce nouveau modèle, le pointage cumulatif, et non le pointage moyen par décision, détermine la valeur d'adaptation pour la reproduction. On pourra ainsi peut-être mieux comprendre les réseaux de coopération, comme le réseau de collaboration entre scientifiques, où ce qui importe est la somme des coopérations et non la coopération moyenne.

# Bibliographie

- Abramson, G., & Kuperman, M. 2001. Social games in a social network. *Physical Review E*, **66**(3), 030901.
- Ashby, S. F., Lee, S. L., Petzold, L. R., Saylor, P. E., & Seidel, E. 1996. Computing spacetime curvature via differential algebraic equations. *Applied Numerical Mathematics*, **10**(1-2), 221-234.
- Axelrod, R. 1980a. Effective Choice in the Prisoner's Dilemma. *Journal of Conflict Resolution*, **24**(1), 3-25.
- Axelrod, R. 1980b. More Effective Choice in the Prisoner's Dilemma. *Journal of Conflict Resolution*, **24**(3), 379-403.
- Axelrod, R. 1984. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books : New York.
- Axelrod, R. 1987. The Evolution of Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma. Pages 32-41 of : Davis, L. (ed), *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*. Los Altos, CA : Morgan Kaufmann.
- Axelrod, R., & Hamilton, W. D. 1981. The Evolution of Cooperation. *Science*, **211**(4489), 1390-1396.
- Axelrod, R., Riolo, R. L., & Cohen, M.D. 2002. Beyond Geography : Cooperation with Persistent Links in the Absence of Clustered Neighborhoods. *Personality and Social Psychology Review*, **6**(4), 341-346.

- Boyd, R., & Lorberbaum, J. P. 1987. No pure strategy is evolutionarily stable in the repeated Prisoner's Dilemma game. *Nature*, **327**(6117), 58–59.
- Bracha-Barak, A., & Erdős, P. 1984. On the maximal number of strongly independent vertices in a random acyclic directed graph. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **5**(4), 508–514.
- Bracha-Barak, A., & Saylor, P. E. 1973. A symmetric factorization procedure for the solution of elliptic boundary value problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **10**, 190–206.
- Brauchli, K., Killingback, T., & Doebeli, M. 1999. Evolution of Cooperation in Spatially Structured Populations. *Journal of Theoretical Biology*, **200**(4), 405–417.
- Brembs, B. 1996. Chaos cheating and cooperation : potential solutions to the Prisoner's Dilemma. *OIKOS*, **76**(1), 14–24.
- Darwen, P. J., & Yao, X. 2001. Why More Choices Cause Less Cooperation in Iterated Prisoner's Dilemma. *Pages 987–994 of : Council, IEEE Neural Networks (ed), Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation : Ccc2001. Seoul, Korea : IEEE.*
- Goldberg, David Edward. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Reading, MA. : Addison-Wesley.
- Grim, P. 1995. The Greater Generosity of the Spatialized Prisoner's Dilemma. *Journal of Theoretical Biology*, **173**(4), 353–359.
- Grossman, J. W. 2002. Patterns of Collaboration in Mathematical Research. *SIAM News*, **35**(9), ??–??
- Hauert, Ch., & Doebeli, M. 2004. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, **428**(6983), 643–646.

- Holland, J. H. 1975. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press : Ann Arbor, Michigan.
- Kerr, B., Riley, M. A., Feldman, M. W., & Bohannan, B. J. M. 2002. Local dispersal promotes biodiversity in a real-life game of rock-paper-scissors. *Nature*, **418**(6894), 171–174.
- Kim, B. J., Trusina, A., Holme, P., Minnhagen, P., Chung, J. S., & Choi, M. Y. 2002. Dynamic instabilities induced by asymmetric influence : Prisoner's dilemma game in small-world networks. *Physical Review E*, **66**(2), 021907–1–021907–4.
- Lorberbaum, J. 1994. No Strategy is Evolutionarily Stable in the Repeated Prisoner's Dilemma. *Journal of Theoretical Biology*, **168**(2), 117–130.
- May, R. M., Bonhoeffer, S., & Nowak, M. A. 1995. Spatial Games and Evolution of Cooperation. *Pages 749–759 of* : Moran, F., Moreno, A., Merelo, J. J., & Chacon, P. (eds), *Advances in Artificial Life*. Berlin, Allemagne : Springer.
- Maynard Smith, J. 1982. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press : Cambridge.
- Milgram, S. 1967. The small world problem. *Psychology Today*, **1**(??), 60–67.
- Milinski, M. 1987. TIT FOR TAT in sticklebacks and the evolution of cooperation. *Nature*, **325**(6103), 433–435.
- Nash, J. F. 1950. Equilibrium Points in N-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **36**, 48–49.
- Newman, M. E. J. 2001. The structure of scientific collaboration networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **98**(2), 404–409.
- Nowak, M., & Sigmund, K. 1990. The Evolution of Stochastic Strategies in the Prisoner's Dilemma. *Acta Applicandae Mathematicae*, **20**(3), 247–265.

- Nowak, M., & Sigmund, K. 1993a. Chaos and the evolution of cooperation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **90**(11), 5091–5094.
- Nowak, M. A. 2005. *Why we cooperate*. Online conference at the Royal Society <http://royalsoc.streamuk.com/portals/martinnowak/>.
- Nowak, M. A., & May, R. M. 1992. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, **359**(6398), 826–829.
- Nowak, M. A., & May, R. M. 1993. The Spatial Dilemmas of Evolution. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **3**(1), 35–78.
- Nowak, M. A., & Sigmund, K. 1992. Tit for tat in heterogeneous populations. *Nature*, **355**(6357), 250–253.
- Nowak, M. A., & Sigmund, K. 1993b. A strategy of win-stay, loose-shift that outperforms tit-for-tat in the Prisoner's Dilemma game. *Nature*, **364**(6432), 56–58.
- Nowak, M. A., & Sigmund, K. 2004. Evolutionary Dynamics of Biological Games. *Science*, **303**(5659), 793–799.
- Nowak, M. A., Bonhoeffer, S., & May, R. M. 1994a. More Spatial Games. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **4**(1), 33–56.
- Nowak, M. A., Bonhoeffer, S., & May, R. M. 1994b. Spatial games and the maintenance of cooperation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **91**(11), 4877–4881.
- Packer, C. 1977. Reciprocal altruism in *Papio anubis*. *Nature*, **265**(5593), 441–443.
- Pennisi, E. 2005. What Don't We Know? How Did Cooperative Behavior Evolve. *Science*, **309**(5731), 93.
- Strogatz, S. H. 2001. Exploring complex networks. *Nature*, **410**(6825), 268–276.

- Thibert-Plante, X., & Charbonneau, P. En préparation. Crossover and Evolutionary Stability in the Prisoner's Dilemma. *Evolutionary Computation*.
- Thibert-Plante, X., Yuen, D. A., & Vincent, A. P. 2003. A simple spectral algorithm for solving large-scale Poisson equation in 2D. *Computer Physics Communications*, **154**(2), 89–97.
- van Bragt, D., van Kemenade, C., & Poutré, H. La. 2001. The Influence of Evolutionary Selection Schemes on the Iterated Prisoner's Dilemma. *Computational Economics*, **17**(2-3), 253–263.
- Van Keken, P. E., Yuen, D. A., & Petzold, L. R. 1995. DASPK : a new high order and adaptive time-integration technique with applications to mantle convection with strongly temperature- and pressure-dependent rheology. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, **80**(1-2), 57–74.
- von Neumann, John, & Morgenstern, Oskar. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1980, c1972.
- Watts, D. J., & Strogatz, S. H. 1998. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, **393**(6684), 440–442.
- Watts, Duncan J. 1999. *Small worlds : the dynamics of networks between order and randomness*. Princeton, NJ, USA : Princeton University Press.
- Wilkinson, G. S. 1984. Reciprocal food sharing in the vampire bat. *Nature*, **308**(5955), 181–184.

## Annexe I

### Calcul du pointage et chaînes de Markov

Les chaînes de Markov simplifient le calcul du pointage au jeu du dilemme du prisonnier. Que ce soit pour un nombre de décisions fini ou infini. Pour utiliser les chaînes de Markov, les stratégies doivent être stochastiques. Soit une stratégie  $\vec{s}$  que l'on représente sous forme de vecteur  $\vec{s} = (p^R, p^S, p^T, p^P)$  où chacun des éléments représente la probabilité de coopérer à la prochaine décision lorsque la récompense est  $R, S, T, P$  respectivement.

Pour avoir le résultat d'une confrontation entre deux stratégies  $\vec{s}_1$  et  $\vec{s}_2$  après un nombre infini d'itérations, on trouve le vecteur propre gauche normalisé ( $\vec{E} = (e_{CC}, e_{CD}, e_{DC}, e_{DD})$ ) de la matrice de transition  $M$  dont la valeur propre est un.

$$M = \begin{pmatrix} p_1^R p_2^R & p_1^R (1 - p_2^R) & (1 - p_1^R) p_2^R & (1 - p_1^R) (1 - p_2^R) \\ p_1^S p_2^S & p_1^S (1 - p_2^S) & (1 - p_1^S) p_2^S & (1 - p_1^S) (1 - p_2^S) \\ p_1^T p_2^T & p_1^T (1 - p_2^T) & (1 - p_1^T) p_2^T & (1 - p_1^T) (1 - p_2^T) \\ p_1^P p_2^P & p_1^P (1 - p_2^P) & (1 - p_1^P) p_2^P & (1 - p_1^P) (1 - p_2^P) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1})$$

La première colonne de la matrice  $M$  représente la probabilité de passer de n'importe quel état à une coopération mutuelle. Les colonnes suivantes représentent la probabilité de passer de n'importe quel état à l'exploitation de  $\vec{s}_1$  par  $\vec{s}_2$  ( $CD$ ), à l'exploitation de  $\vec{s}_2$  par  $\vec{s}_1$  ( $DC$ ), à une non coopération mutuelle ( $DD$ ) respectivement.

Le pointage de la stratégie  $\vec{s}_1$  sera  $e_{CC}R + e_{CD}S + e_{DC}T + e_{DD}P$  et  $e_{CC}R + e_{CD}T + e_{DC}S + e_{DD}P$  pour la stratégie  $\vec{s}_2$ . Si tous les éléments de  $M$  sont supérieurs à zéro et que  $M$  est irréductible, selon le théorème de Frobenius il existe une solution unique.

Dans le cas où le nombre de décisions est fini, la première décision de chacun des joueurs est importante. Cette première décision détermine l'état initial  $\vec{E}_1$  qui



est multiplié à la matrice de transition  $M$  pour chacune des décisions suivantes. Pour une confrontation de  $n$  décisions, on calcule le pointage avec le vecteur d'état à l'étape  $n$  ( $\vec{E}_n = \vec{E}_1 \cdot M^{n-1}$ ) et on procède de la même façon qu'avec le vecteur propre gauche  $\vec{E}$ . Une analyse exhaustive du cas où les stratégies sont réactives ( $p^R = p^T$  et  $p^S = p^P$  pour tous  $\vec{s}$ ) se trouve dans Nowak & Sigmund (1990).

Pour les stratégies sans mémoire ( $p = p^R = p^S = p^T = p^P$ ), on peut directement calculer le pointage pour un nombre infini de décisions. La probabilité de coopération de la stratégie  $A$  est  $p_A$  et celle de  $B$  est  $p_B$ . Ainsi le pointage suite à un nombre infini de décisions est  $(p_A p_B)R + (p_A(1-p_B))S + ((1-p_A)p_B)T + ((1-p_A)(1-p_B))P$  pour  $A$  et  $(p_A p_B)R + ((1-p_A)p_B)S + (p_A(1-p_B))T + ((1-p_A)(1-p_B))P$  pour  $B$ . Dans ce cas particulier  $p_A$  et  $p_B$  sont compris entre zéro et un inclusivement.