

Université de Montréal

Développement d'anomalies d'abondances dans les étoiles de la branche horizontale en
présence de circulation méridienne

par

Delphine Quievy

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Août, 2006



©Delphine Quievy, 2006

dc

3

U54

2006

V-029

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Développement d'anomalies d'abondances dans les étoiles de la branche horizontale en
présence de circulation méridienne

présenté par:

Delphine Quievy

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Pierre Bergeron,	président-rapporteur
Georges Michaud et Paul Charbonneau,	co-directeurs de recherche
Gilles Fontaine,	membre du jury

Mémoire accepté le: _____

à mon père, le premier à avoir su me captiver pour cette science.

Sommaire

Chez les étoiles de la branche horizontale (HB), la description des abondances chimiques photosphériques en fonction de la température effective (T_{eff}) est remarquable. L'explication la plus évidente est que ces anomalies se développent sous l'effet des processus de diffusion, notamment le tri gravitationnel et la lévitation radiative. Cependant, la disparition abrupte sur la HB de ces anomalies vers 11500K suggère qu'un autre facteur joue un rôle appréciable. Notre hypothèse se fonde sur une extension du modèle de diffusion pour les étoiles HgMn de la séquence principale, où de fortes anomalies peuvent se développer uniquement chez les rotateurs les plus lents, pour lesquels le tri gravitationnel de l'hélium mène à la disparition de la zone de convection, tel que la lévitation des métaux puisse avoir libre cours dans ces régions atmosphériques. Plus spécifiquement, nous calculons la vitesse critique pour laquelle la circulation méridienne empêche le tri gravitationnel de faire diminuer la concentration d'hélium jusqu'au taux critique de la disparition de sa zone convective, pour une série de six modèles échantillonnés à des T_{eff} disparates. Nos calculs d'évolution des abondances montrent que pour les modèles de moins de 12000K, correspondant typiquement à des étoiles du même type de métallicité que les étoiles géantes, la circulation méridienne est assez efficace pour supprimer le tri de l'hélium, et donc le développement d'abondances métalliques, pour des vitesses de rotation en accord avec les valeurs observées.

Mots clefs:

diffusion – circulation méridienne – convection – étoiles : abondances – étoiles : branche horizontale – étoiles : rotation

Abstract

Photospheric chemical abundances on the Horizontal branch (HB) show some striking variations with effective temperature (T_{eff}). The most straightforward explanation is that these anomalies develop through diffusion processes, in particular gravitational settling and radiative levitation. However, the abrupt disappearance of strong abundance anomalies as one moves below about 11,500K on the HB suggests that another factor plays an important role. Our working assumption is an extension to the HB of the diffusion model for main-sequence HgMn stars, where strong anomalies can only develop in the slower rotators, for which the gravitational settling of helium leads to the disappearance of its superficial convection zone, so that metal levitation can occur in atmospheric regions. More specifically, we calculate the critical rotational velocity at which He settling is prevented, in a suite of stellar models spanning the HB. Our abundance evolution calculations show that for models with T_{eff} less than 12,000K, corresponding to stars typically observed with the same metal composition as giants, meridional circulation is efficient enough to suppress He settling, and thus the development of metallic overabundances, for rotational velocities in good agreement with observed values.

Subject headings:

diffusion – meridional circulation – convection – stars : abundances – stars : horizontal branch
– stars : rotation

Table des matières

Sommaire	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
1 Étoiles de la branche horizontale	1
1.1 Une branche d'étoiles, mais ramifiée	1
1.1.1 Leur histoire: celle de leur découverte	1
1.1.2 Leur histoire: celle de leur parcours physique	2
1.1.3 Familiarisation avec les ordres de grandeur, et sous-branches	6
1.2 Aborder la description de la HB par ses anomalies	8
1.2.1 Discontinuités photométriques	8
1.2.2 Bas $\log g$	9
1.2.3 Anomalies d'abondances	9
1.2.4 Rotateurs rapides	10
1.3 ...mais distribuées dans des proportions qui varient d'un amas à un autre	12
1.4 Expliquer ces anomalies et ces variations.	14
1.4.1 Expliquer les anomalies d'abondances	14
1.4.2 Expliquer les discontinuités photométriques.	15

1.4.3	Expliquer les faibles $\log g$	16
1.5	Étoiles HgMn et mon projet	16
2	Équation du transport avec circulation méridienne	18
2.1	L'équation du transport	18
2.2	Rotation et circulation méridienne	22
2.2.1	La rotation dans les équations	22
2.2.2	Rotation solide et cas stationnaire	23
2.2.3	Composantes de la vitesse de circulation méridienne	25
2.3	Calcul de $u(r)$	27
2.3.1	Grandes lignes de la dérivation de $u(r)$	27
2.3.2	Construire $u_s(r)$	29
2.3.3	Conditions aux bords et zone de convection	36
2.4	Solution numérique	40
2.4.1	Équation à résoudre numériquement	40
2.4.2	Maillage	46
2.4.3	Conditions initiales	46
2.4.4	Conditions limites	46
2.4.5	Deux types de circulation méridienne	47
2.4.6	Critères d'arrêt	47
3	Effet de la circulation	48
3.1	Évolution dans le temps de la concentration	48
3.1.1	Temps caractéristique	48
3.1.2	Affichage des résultats en 2D	50
3.1.3	Affichage des résultats en 1D	53
3.2	Vitesse de rotation v_e limite	56
3.2.1	v_e , un calibrateur	56
3.2.2	v_e critique et résultat final	58

TABLE DES MATIÈRES	vi
4 Discussion et conclusion	64
4.1 Résultats dans la littérature pour les étoiles HgMn	64
4.2 Comparaison entre étoiles de la HB et étoiles HgMn	65
4.3 Discussion critique	67
Bibliographie	69
Remerciements	71
Annexe A	72
A Les éléments finis	72
A.1 Démarche	72
A.2 Exemple pour la diffusion en 1D	75
A.2.1 D'une équation analytique à un système matriciel discrétisé	76
A.2.2 Former un système de n équations	77
A.3 Code	79
A.4 Différences entre UNAFEM et notre code	82
Annexe B	84
B Stabilité numérique	84
B.1 L'importance du maillage	84
B.2 Comment optimiser?	85
B.2.1 Anticiper l'instabilité	85
B.2.2 Détecter l'instabilité	85
B.3 Maillage spatial	87
B.3.1 Sa construction	87
B.3.2 Optimisation	88
B.4 Incréments temporels	89
B.4.1 Lesquels	89
B.4.2 Optimisation	90

Liste des figures

1.1	À l'intérieur d'une étoile HB	3
1.2	Diagramme CMD de NGC5904	4
1.3	"Sous-branches"	7
1.4	$\log g$ vs T_{eff}	10
1.5	Illustration des anomalies d'abondances pour M31	11
1.6	$v \sin i$ vs T_{eff}	12
1.7	Morphologie de la HB d'un amas à un autre	13
2.1	Illustration de la circulation méridienne	25
2.2	Évolution des modèles fournis	31
2.3	Modèles dont la grille de données est fournie: T_{eff} versus M	32
2.4	La fonction d'écoulement $\Psi(r, \theta)$	41
2.5	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 26300K	42
2.6	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 14618K	43
2.7	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 13196K	43
2.8	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 26300K	44
2.9	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 10586K	44

2.10	Ajout de la couche limite, soit juste en dessous de la zone de convection, soit juste en dessous de la surface, pour le modèle à 9365K	45
3.1	Contours de la concentration sur le plan $(r/R, \theta)$, pour divers temps, pour le modèle à 26300K, à $v_e = 50 \text{ kms}^{-1}$	51
3.2	Contours de la concentration sur le plan $(r/R, \theta)$, pour divers temps, pour le modèle à 13190K, à $v_e = 11 \text{ kms}^{-1}$	52
3.3	Évolution temporelle de la concentration en fonction du rayon, à 0° , 45° , et 90° , pour le modèle à 26300K	54
3.4	Comparaison entre la calcul avec u_{tri} et $u_{tri} + u_{CM}$, pour le modèle à 26300K .	55
3.5	Évolution temporelle de la concentration en fonction de la colatitude, pour le modèle à 26300K	56
3.6	Pour le modèle à 26300K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	57
3.7	Pour le modèle à 14618K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	58
3.8	Pour le modèle à 13190K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	59
3.9	Pour le modèle à 11297K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	60
3.10	Pour le modèle à 10586K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	61
3.11	Pour le modèle à 9365K, évolution temporelle de la concentration à différents v_e	62
3.12	Résumé des résultats pour les 6 modèles	63
A.1	Exemple d'une solution approchée discontinue	73
A.2	Exemple d'une solution approchée continue	74
B.1	Illustration d'un symptôme d'instabilité numérique	86
B.2	Illustration d'un autre symptôme d'instabilité numérique	86
B.3	Illustration d'un maillage	89
B.4	Illustration des incréments temporels	90

Liste des tableaux

1.1	Ordres de grandeur selon T_{eff}	8
1.2	Discontinuités dans le plan UV	9
2.1	Unités des paramètres de (2.53)	35
2.2	Résultats de (2.53) pour la grille (unités CGS, cf. Tableau 2.1) du modèle à 26300K	36
2.3	u final pour le modèle à 26300K (u_s ajusté avec la couche limite)	40
3.1	Temps caractéristiques	50
B.1	Choix du coefficient turbulent dans la zone de convection	87
B.2	Symptôme d'instabilité selon la grille	89
B.3	Choix du pas de temps	90

Chapitre 1

Étoiles de la branche horizontale

1.1 Une branche d'étoiles, mais ramifiée

1.1.1 Leur histoire: celle de leur découverte

C'est l'amas M3 qui sert de laboratoire astronomique dans la découverte des étoiles de la branche horizontale. Pour les faire apparaître, il a fallu que Bruggencate, en 1927, trace les données -âgées de 12 ans, et prises par Shapley- sur un diagramme magnitude-couleur. C'est sous cette forme (qui porte le nom de diagramme CMD, plus à l'usage que *Farbenhelligkeitsdiagramm*), que l'appellation soulignant l'horizontalité de la branche prend son sens. Il nota en effet un prolongement d'une branche de géantes rouges, vers de plus faibles magnitudes, à niveau sur le bleu. Après l'observation vint l'interprétation, reportée à 1955, et livrée par Hoyle et Schwarzschild. Ils associèrent les étoiles de la branche horizontale (acronyme à suivre: HB) au stade où les étoiles de la branche des géantes rouges (RGB de ses initiales en anglais, mais on y vient au paragraphe suivant) brûlent de l'hélium dans leur coeur. La compréhension actuelle rejoint cette description, et l'ingère dans un modèle évolutif qui a gagné en détails, et en énigmes.

1.1.2 Leur histoire: celle de leur parcours physique

Atteindre la HB

Puisque pour une étoile, il n'est pas question d'entrer sur la HB si elle n'est pas déjà engagée sur la RGB, survolons comment, au terme de sa course sur la séquence principale, une étoile devient géante, et rouge. La perpétuelle contraction du cœur stimule la production d'énergie, et par là, la luminosité: l'étoile quitte alors la séquence principale. La couche de combustion se déplace lentement vers l'extérieur et l'enveloppe s'étend. La marche vers le géant s'annonce. Pour une même luminosité, l'expansion est un processus refroidissant pour les régions superficielles. Un diagramme HR raconte ce changement de comportement luminosité versus température par le "turn off": la marche vers le rouge est amorcée.

La suite (et la plus grande part) du tracé de la RGB est verticale sur un diagramme HR. Pour le comprendre, introduisons la notion de convection -surtout parce qu'elle nous sera dorénavant utile. En présence de gravité, la situation stable est celle où un fluide de densité plus faible est au dessus du plus dense. Si un évènement produit le cas contraire (par exemple, un chauffage local, qui alors produit des différences de densité, qui pourraient s'opposer à la gravité) un mouvement spontané cherchera à inverser la situation. Si la densité n'est pas assez vite uniformisée, ce mouvement entraînera le fluide par un écoulement à grande échelle, dit convectif. Rappelant l'organisation en couches d'un oignon, une étoile est un milieu stratifié, avec pour chaque couche de l'étoile ses propriétés, et où les couches de densité plus faible se retrouvent au dessus des plus denses. En fait, jusque là, on est dans la situation où la stratification en densité est stable. Mais dans une étoile, les fluides les plus chauds sont aussi les fluides les plus denses. Si le gradient de température entre chaque couche est marqué (ou devient brusquement marqué) cette stratification en température, elle, en revanche, est instable (par le critère de *Rayleigh-Bénard*). Spontanément, un flux de chaleur vers le haut cherchera alors à se mettre en place. Mais alors, cette inversion ira à l'encontre de la stabilité de la stratification en densité, qui lui opposera une force de rappel. Lequel l'emportera, le mouvement spontané en faveur de la stabilité de la stratification en température, ou celui (la convection) en faveur de la stabilité de la stratification en densité? Si les propriétés de la

stratification de l'étoile font que la force de rappel se fasse "ressentir" sur un élément du fluide déplacé (de façon adiabatique) par le flux de chaleur (on parle de *la condition d'instabilité du critère d'instabilité de Schwarzschild*), le second mouvement l'emporte sur le premier, et il y aura convection. Alors pour revenir aux étoiles de la RGB après le "turnoff", tandis que la température effective continue à chuter, la convection, d'abord localisée dans une enveloppe superficielle, gagne du terrain. Une fois l'étoile totalement convective, la température effective ne peut plus diminuer davantage. En revanche, la combustion en couche avive les réactions nucléaires, et l'augmentation de la luminosité donne le pas à l'escalade du diagramme HR. Durant cette ascension, l'hélium dans le coeur baigne dans un milieu dégénéré, c'est à dire où l'augmentation de la température ne se compense pas par un changement de pression. On devine la suite: la température augmente dans le coeur, l'engrenage se poursuit, et il s'emballe. Quand la masse du coeur d'hélium atteint $0.45 M_{\odot}$, la combustion de l'hélium est initiée. Le terme anglais "flash" est révélateur de la vivacité de cet allumage. Il en résulte une étoile farcie d'un coeur d'hélium en fusion, et flanquée d'une couche d'hydrogène arrimée vers la surface (figure 1.1). On verra plus tard (section 1.1.3 page 6) que des processus physiques

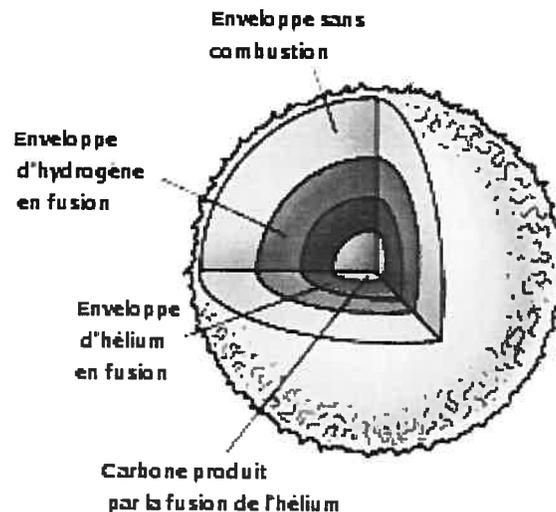


FIGURE 1.1 – Couches de fusion d'une étoile H. Cette figure est tirée de <http://web1.pas.rochester.edu/afrank/A105/LectureX/LectureX.html>

mal connus, agissant sur une période incertaine entre la traversée de la RGB et après le flash,

pourraient être responsables de la perte observée de masse de la couche d'hydrogène.

La combustion de l'hélium central finit par entrer dans un mode de fonctionnement optimal. Cela n'est pas voué à durer, les réserves dans le coeur désormais pratiquement épuisées. Le coeur de nouveau se refroidit, et alors se contracte. Sa position sur le diagramme HR pour les quelques centaines de millions d'années à venir est conditionnée par son capital en éléments lourds. Si elle en est riche (pop I), sa température est fixe, et à même luminosité, son tracé sur un diagramme HR est donc un point (ou du moins, un agglomérat). Elle s'agglutine ainsi dans le "red giant clump". Si, en revanche, elle en est pauvre (pop II), l'étoile atterrit sur la branche horizontale (voir figure 1.2).

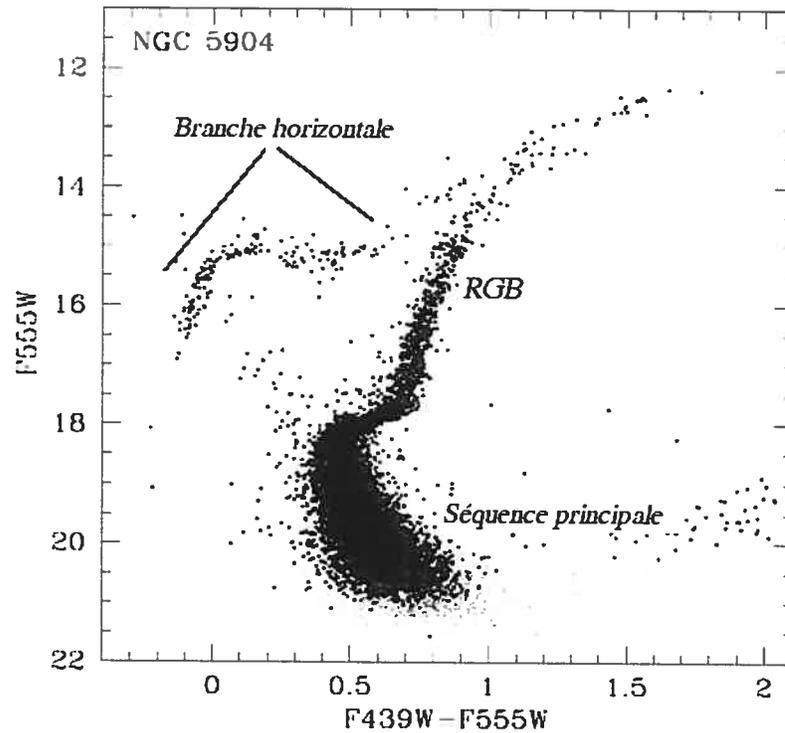


FIGURE 1.2 – Diagramme CMD de NGC5904, adapté de Piotto et al. (2002) illustrant la position de la branche horizontale par rapport à la RGB et la séquence principale sur un CMD.

Chausser la HB

Entre la première flambée d'hélium -le flash- et le régime de combustion optimal, l'étoile quitte rapidement la RGB pour aller se positionner à une T_{eff} donnée sur le diagramme HR.

C'est seulement à cette position, pour laquelle le brûlage d'hélium est à son régime optimal, que l'étoile rentre dans la HB. En définitive, retenons que le cheminement entre le flash et ce régime optimal est une autre histoire. Calibrons alors la nouvelle naissance à titre d'étoile de la HB à ce "commencement de la combustion optimale de l'hélium". Voici donc cette étoile au stade de ZAHB -dont les deux premières initiales invoquent l'âge zéro.

Il faut ensuite mettre au clair que la HB ne décrit pas une trajectoire évolutive typique d'une étoile, mais une zone (en forme de branche) qui regroupe toutes les alternatives existantes en magnitude-couleur d'étoiles de l'âge de l'amas globulaire. Il faut donc discerner, d'une part, la HB tracée pour un amas globulaire, et de l'autre, la séquence évolutive d'une étoile qui "passe" par cette zone du diagramme.

Le tracé évolutif, lui, est fort mal connu. Il semblerait qu'il partirait de la ZAHB vers des températures plus froides (donc de la gauche vers la droite, selon l'orientation conventionnelle d'un diagramme HR), dans une région du diagramme HR voisine de la HB, ou qui la traverse partiellement. Différentes phases, rythmées par des formations successives de zones de convection, orchestrent l'évolution interne de l'étoile. La "zone, ou enveloppe, de convection" jouera un rôle clé dans notre étude. Ce titre est assigné à la première région convective rencontrée en pénétrant au sein d'une étoile, pourvu que celle-ci soit proche de la surface. En général, au moins un élément chimique abondant (He ou H) s'ionise dans la région sub-photosphérique, de telle sorte que le gradient adiabatique est amoindri (en défaveur du critère de stabilité de Schwarzschild, évoqué au 1.1.2). Il est donc fréquent de retrouver de telles régions fonctionnant au régime convectif.

La construction de modèles d'évolution stellaire a pris du regain depuis ce quart de siècle. Si différentes hypothèses ont été testées, des articles comme celui de Serenelli & Weiss (2005) permettent de les comparer, et de retenir quelle est la méthode de simulation la plus fiable. Pour qu'une simulation soit "fiable", par exemple, il faut qu'elle puisse reproduire la période entre le flash d'hélium et la ZAHB, affectée par la sévère perte de masse. Étant donnés les courts pas de temps numériques qui doivent prendre en compte la série de "fuites thermiques" qui rythment cette période, et l'instabilité en sus, seulement les dernières années ont compté des codes aptes à la reproduire. Dans cet article, les auteurs profitent de cette avancée pour

la comparer avec les méthodes qui, au lieu de simuler l'évolution temporelle de cette perte de masse, estiment son effet par le jeu de paramètres libres.

1.1.3 Familiarisation avec les ordres de grandeur, et sous-branches

La forme même d'une branche -et non d'un "point"-, pour le tracé du diagramme HR (ou CMD) d'un amas globulaire, étale la variété de propriétés disponibles pour les étoiles résidentes (qui sont supposées avoir le même âge). Si on s'intéresse aux températures, la fourchette ramasse les ~ 4000 à plus de 30000K . D'ailleurs, la HB tracée jusqu'à cet extrême (comme sur la figure 1.3), est loin de mériter son étiquette "horizontale". Au sein de cette palette de températures, des distinctions (figure 1.3 pour la galaxie Carina) sont admises: une classe "plus" froide (4000 à 6000K), donc plus rouge (RHB), une autre intermédiaire (6000 à 7500K) interceptant la bande d'instabilité (alternance entre contraction et expansion de l'enveloppe due à l'ionisation de l'hydrogène, et de ses répercussions sur l'opacité). C'est là qu'on retrouve les étoiles HB RR Lyrae. Au dessus de cette bande (7500 à 20000K), la classe des étoiles "plus" chaudes -ou plus bleues (BHB), est divisée en BHBA ($<10000\text{K}$) et BHBB ($>10000\text{K}$), l'usage de l'alphabet en accord avec la classe spectrale, ainsi qu'une certaine extension dans le bleu ("blue-tail" BT). Un traitement singulier est attribué aux étoiles excédant les 20000 degrés, référées à des HB extrêmes (EHB), dont la forte perte en masse pourrait, -du moins partiellement - avoir réduit la couche d'hydrogène. L'intérêt pour ces étoiles est renforcé par l'implication en physique galactique des EHB, suspectées d'être responsables pour l'excès de flux UV attaché aux spectres de galaxies elliptiques. Puisque cette classe se situe sous la séquence principale, on assigne parfois ces étoiles à des sous-naines chaudes. Au delà d'une classification photométrique qui facilite l'échelonnement en températures, la terminologie en BHB, RHB, EHB désigne en fait des sous-branches, chacune contribuant à cerner la morphologie de la branche dans son ensemble. On verra que la recherche de cette description d'ensemble est semée de difficultés.

Si on s'intéresse à la masse d'une étoile HB, pour une composition fixe, cette étoile a un coeur de masse M_c fixe déterminée par le flash d'hélium. En revanche la masse M_{env} de l'enveloppe d'hydrogène est variable, selon ce qui a pu être conservé après la perte de

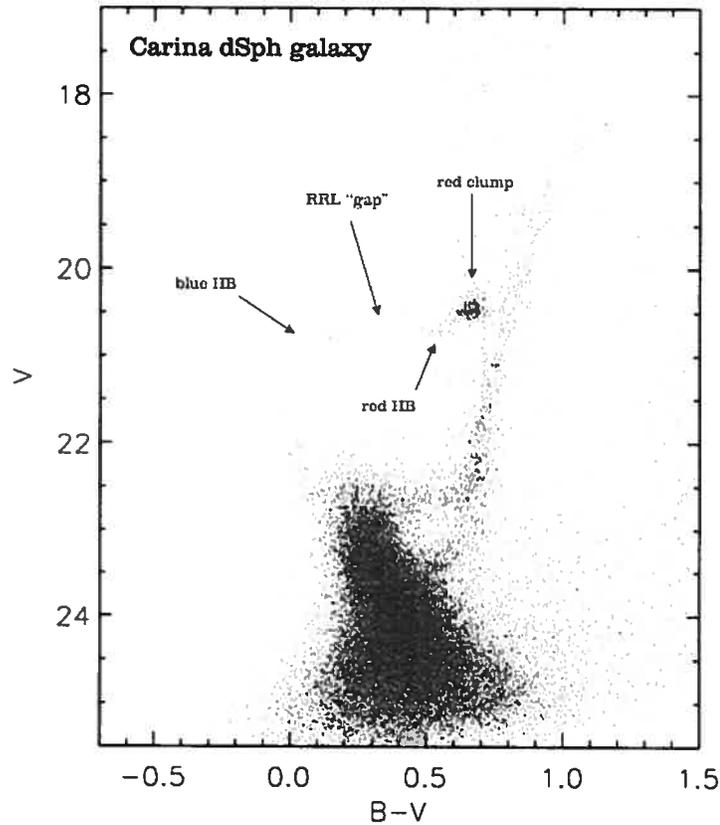


FIGURE 1.3 – Diagramme CMD de la galaxie naine Carina, avec légende des “sous-branches” de la HB. Cette figure est adaptée de Monelli et al. (2003).

masse à la fin de la RGB. En effet, on observe que M_{env} est inférieure à celle observée typiquement sur la RGB, mais avec une fraction qui change d’une étoile à l’autre. Aussi majeure cette perte puisse-t-elle être -jusqu’à 40% de M_{env} avant le flash-, les causes sont néanmoins incertaines. Le débat accuse principalement les vents stellaires et/ou l’échange matériel dans des systèmes binaires, mais il est affaibli par l’inconnue sur le “pourquoi cette perte ne touche pas uniformément toutes les étoiles de cette génération?”. Puisque c’est la variable majeure, c’est M_{env} qui conditionne la position d’une étoile sur la branche, donc à savoir si elle atterit dans la RHB, BHB etc. L’aspect quantitatif prend forme dans le tableau 1.1 (références: Moehler et al. (2001) et Moehler (2004)).

Comprendre la diversité en température, et plus encore, les propriétés des sous-branches qui s’y réfèrent, c’est avoir compris celle en M_{env} . Mais au préalable, encore faut-il avoir compris les causes de la perte de masse. Morphologie de la HB et évolution stellaire pour les

TABLEAU 1.1 – Ordres de grandeur selon T_{eff}

T_{eff}	3500	...	6000	...	7500	...	10000	...	20000	...	35000
<i>sous – branches</i>	RHB		RR Lyrae		BHB(A)		BHB(B)				EHB
$M_{\text{envH}}/M_{\odot}$	> 0.5		0.1-0.4		< 0.2		< 0.1				< 0.02
M_{He}/M_{\odot}	~ 0.5		~ 0.5		~ 0.5		~ 0.5				~ 0.5
temps de vie	des centaines de millions selon la masse sur la SP (Sweigart & Gross (1976))										
$\log g$ (cf. figure 1.4)	< 3.		< 3.		~ 3.		3.4 – 4.6				4.6 – 6.1

géantes sont bien emmêlées.

1.2 Aborder la description de la HB par ses anomalies

L’avancée de l’astrophysique stellaire relève de la fiabilité des modèles atmosphériques. Les observations fournissent des indices sur les phénomènes physiques à inclure dans les modèles, ces modèles prédisent des valeurs à observer, puis d’autres observations testent ces valeurs. Les mesures rapportées des atmosphères des étoiles de la HB trahissent de tels indices. Ils se traduisent via de multiples paramètres, dont les valeurs s’éloignent de valeurs initiales ou prévues, de sorte qu’elles sont répertoriées comme “anomalies”. Le lien entre ces différentes manifestations d’anomalies n’est pas révélé dans cette section, qui n’a qu’un but descriptif. Systématiquement, chez les étoiles HB, la distribution de telles anomalies se décrit selon T_{eff} .

1.2.1 Discontinuités photométriques

Une fois complété pour un amas donné, un CMD de la HB a l’allure poreuse: des vides trahissent l’exclusion de certaines rencontres entre couleur et magnitude. Le plan BV (abordé classiquement) n’apporte pas sur ce point les mêmes informations que le plan UV, puisqu’il ne compte pas les mêmes discontinuités photométriques. Le second plan apparaît alors comme une somme discrète de segments, dont le schéma peut varier d’un amas à l’autre. Ainsi baptisés (Grundahl et al. (1998)) G_1 , G_2 , G_3, G_0 , les fossés fracturent le plan $u - (u - v)$ tel que illustré à la figure 5 de Ferraro et al. (1998). Pour les valeurs en couleurs et températures, il faut se reporter au tableau 1.2.

Dans le (dés)ordre de cette terminologie, il faut ajouter le G_{99} à 11500 K dans le plan $u - (u - y)$

TABLEAU 1.2 – Discontinuités dans le plan UV

fossé	G_0	G_1	G_2	G_3
$m_{1620} - v$	~ 0	~ -1	"espace constant"	~ -3.3
T_{eff} dans M13	6500	11000	...	19000
M80	9500	11000	12000	18000
NGC6681	8700	11000
M79	9900
NGC 7652	18000
M15	9000
NGC2808	17000	25000
ω Cen	16000

(Grundahl et al. (1999)). Finalement, l'appellation de second saut (puisque détaché de la somme discrète des G_i) vient plus tard (découvert par Momany et al. (2002) pour NGC 6752), et plus chaud, à 21000 ± 3000 K. Ce "second U-jump", attaché donc aux EHB, s'incarne dans la discontinuité de $U - V \sim -1.0$ à découvert dans un plan U vs. $(U - V)$ à cette température.

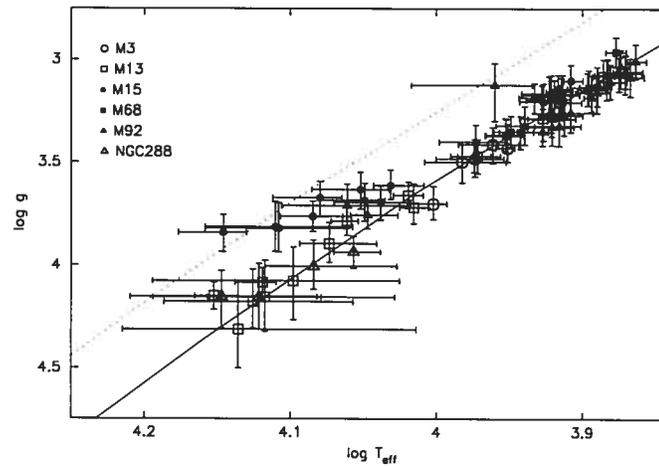
Sans plus noyer l'attention dans un catalogue organisé en G_i , aiguillons-la vers: qu'est ce qu'une discontinuité sur un CMD, sinon une séparation de ce plan en diverses catégories photométriques? Or la photométrie est l'étude de la manifestation de la structure atmosphérique (plus approfondi au 1.4.2). On peut déjà déduire que, non seulement la structure atmosphérique peut varier d'une étoile de la HB à l'autre, mais surtout, qu'elle le fait de façon discontinue. On compte ainsi autant de catégories d'étoiles associées à une certaine structure atmosphérique que de "segments" sur un CMD.

1.2.2 Bas $\log g$

Entre ces deux niveaux de températures, les 12000 à 20000 Kelvins comptent leur lot de discontinuités et anomalies, cette fois concernant aussi des $\log g$ relativement bas (figure 1.4).

1.2.3 Anomalies d'abondances

Outre ces observations photométriques et ces paramètres inattendus, les abondances chimiques observées ne sont pas toujours compatibles avec celles évaluées sur la RGB. Ces abondances chimiques auraient donc évolué depuis la séquence des géantes rouges, mais pas chez toutes les étoiles. Ici encore, ce comportement est fonction de T_{eff} . Illustration: pour les étoiles étudiées par Behr (2003a), $[\text{Fe}/\text{H}]$, $[\text{Ti}/\text{H}]$, $[\text{Mn}/\text{H}]$, $[\text{Cr}/\text{H}]$, et $[\text{P}/\text{H}]$ arborent des valeurs

FIGURE 1.4 – Distribution de $\log g$ vs T_{eff} . figure 9 de Behr (2003a).

standards (celles des géantes) en dessous de ~ 11200 K, alors qu’elles sont augmentées par des facteurs respectivement de 30-300, 10-100, 30-3000, 30-300, 3.5 en deçà. Cette tendance épargne toutefois certains éléments, tels que le magnésium et le silicium, tout à fait invariants. Ces chiffres confirment un bon nombre d’observations antérieures (Glaspey et al. (1989), Moehler et al. (1999), Behr et al. (1999), dont la figure 1.5 est jointe, etc...). Si les métaux sont sur-abondants, de l’hélium, en revanche, fait défaut dans les couches de la photosphère des étoiles excédant les 11000 K (par un facteur atteignant ~ 300 dans ce même article de Behr et al., où le standard est la valeur solaire). Retenons en particulier cette dernière catégorie d’anomalie, puisque c’est elle qui est à l’étude dans ce projet.

1.2.4 Rotateurs rapides

Parmi la liste des valeurs qui échappent à la prédiction, celles des vitesses de rotation en sont de celles qui absorbent des études intensives depuis plus de vingt ans. On remonte donc à 1983, avec Peterson qui entreprenait de déterminer $v \sin i$. Elle a noté la diversité, la tendance binaire -avec 1/3 de plus de 20 km/s (on parle maintenant de $35-40$ km/s), et 2/3 de 15 à 20 km/s, le lien de cette dichotomie avec T_{eff} et les anomalies d’abondance. De tels constats ont été appuyés par la suite: Grundahl et al. (1999), Behr et al. (1999), Behr et al. (2000), Kinman et al. (2000), Recio-Blanco et al. (2004), et la liste se prolonge. Il faut bien peser que, l’ordre de valeur même du maximum “ 40 km/s”, peut poser un problème délicat.

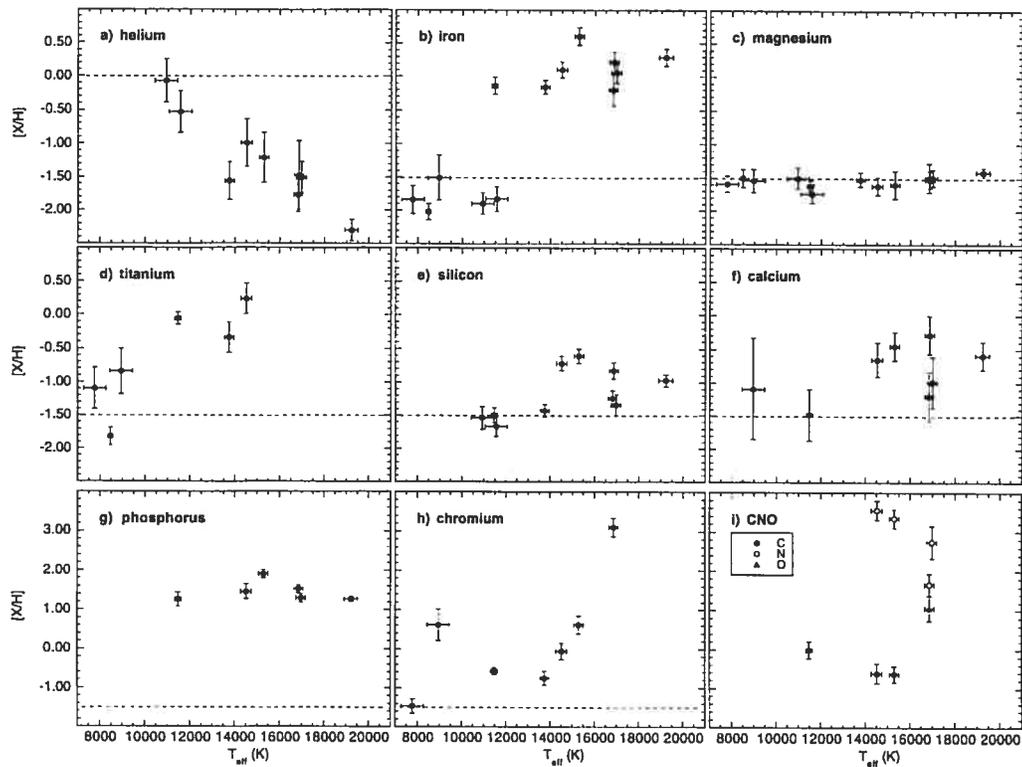


FIGURE 1.5 – Illustration des anomalies d’abondances pour M31. La ligne pointillée fait référence à la valeur standard, c’est à dire -1.51dex de la valeur solaire pour les métaux, et les valeurs solaires pour l’hélium, tel que typiquement mesuré chez les étoiles géantes rouges. Il s’agit de la Figure 1.b) de Behr et al. (1999).

C’est en fait un problème lorsque confronté à certaines suppositions théoriques. Celles-là postulent que, durant la séquence principale, et peut-être encore, durant la RGB, des vents magnétiques devraient supposément prélever du moment angulaire de l’étoile, de sorte que, au sortir de la séquence principale, sa vitesse de rotation pourrait être franchement réduite. En termes plus quantitatifs, elle ne devrait pas excéder 10km/s , si on se fie aux simulations de rotation représentant l’étoile comme un corps solide, dans Cohen & McCarthy (1997). Sills et Pinsonneault (2000) ont sophistiqué le calcul, obtenant un maximum de 4 km/s . Par ailleurs, puisque sont souvent associés les rotateurs lents avec les étoiles bleues, et les rotateurs rapides avec les étoiles rouges, retenons l’affinité entre la bimodalité en vitesse et bimodalité en couleur. Si par dessus on ramène la bimodalité en abondances anormales/normales selon la

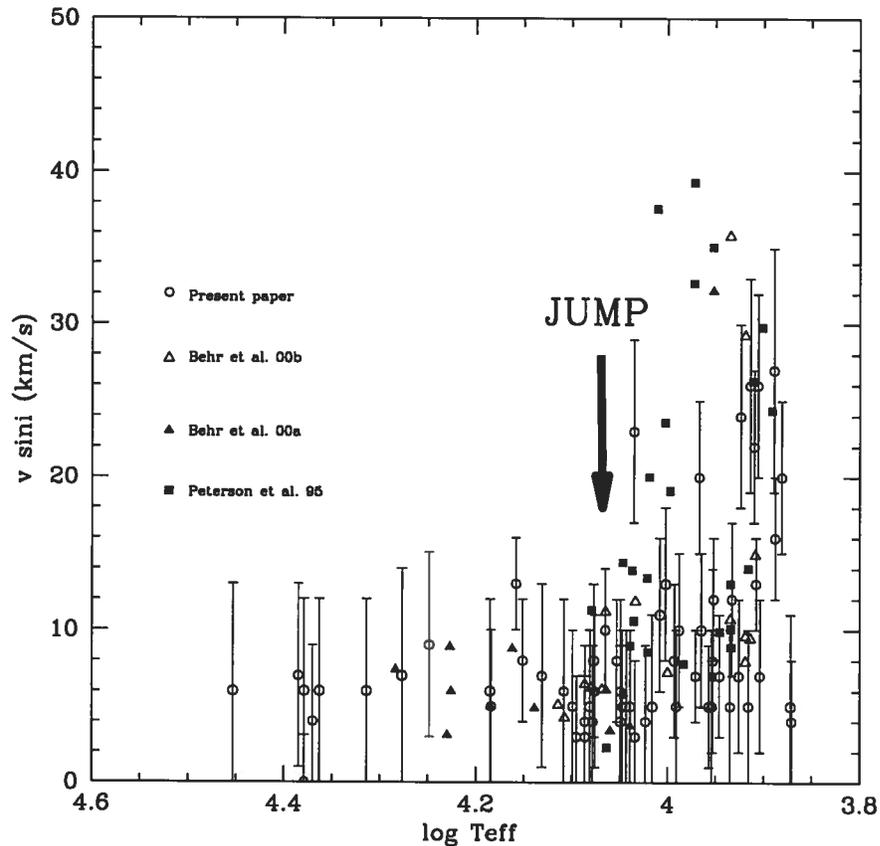


FIGURE 1.6 – Distribution de $v \sin i$ vs T_{eff} . Cette figure tirée de Recio-Blanco et al. (2004) illustre la bimodalité de cette distribution, dont la transition discontinue est indiquée par la flèche.

couleur (1.2.3), il devient aussi facile qu'intrigant de constater le pattern: “chaud, rotateur lent, anomalies d’abondances” contre “froid, rotateur rapide, abondances normales”.

1.3 ...mais distribuées dans des proportions qui varient d’un amas à un autre

Puisqu’il est raisonnable de supposer l’équivalence en âge, en abondances initiales, et en distance à la Terre de ses étoiles, un amas globulaire est un terrain d’observation révélateur. Il est alors interpellant de jauger une différence du rapport RHB sur BHB et un schéma de discontinuité photométrique d’un amas à l’autre (notamment G_0 et G_1 qui n’ont pas lieu

dans tous les amas), une grande variété de $v \sin i$ parmi les différents amas, somme toute, leur variété morphologique. La figure 1.7 passe en revue quelques types de morphologie rencontrés. En fait, confronter cette variété en morphologie avec celle en métallicité mène à une réponse

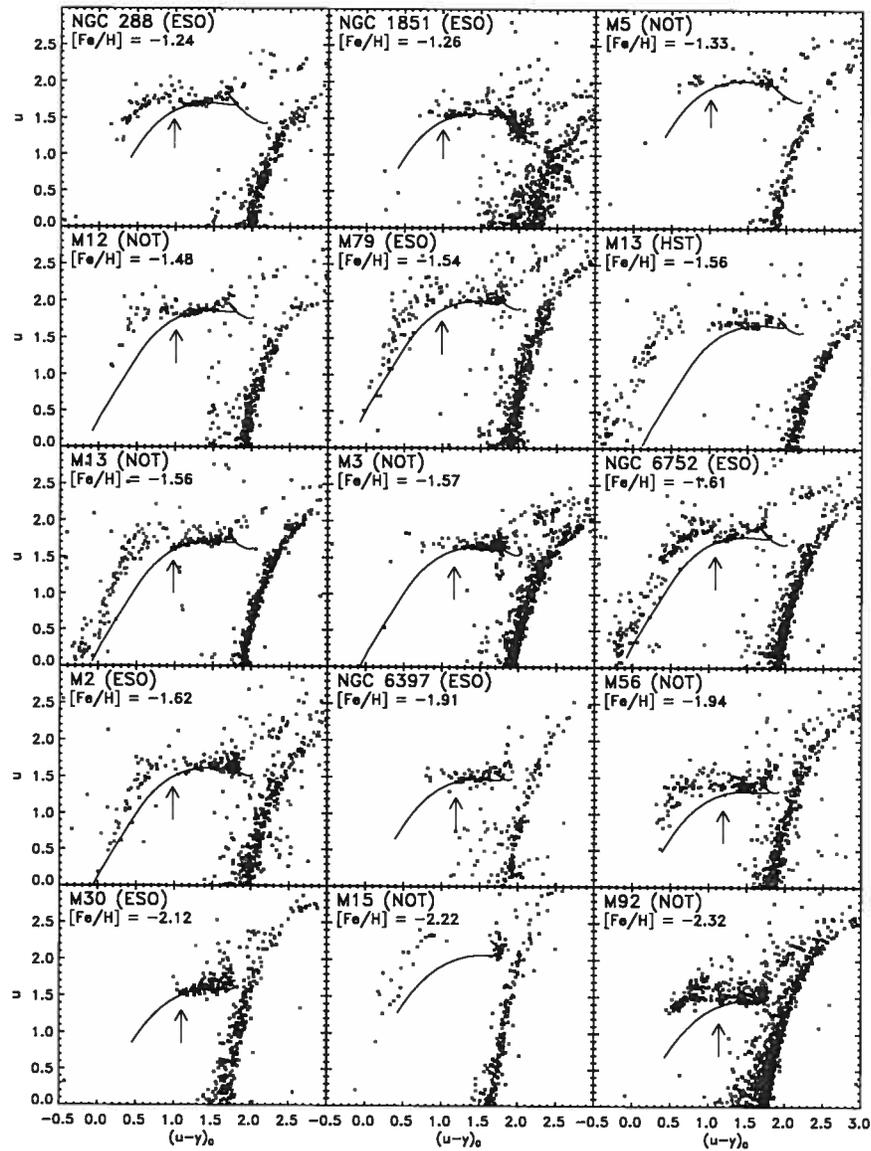


FIGURE 1.7 – Morphologie de la HB d'un amas à un autre. Cette figure, tirée de Grundahl et al. (1999), illustre comment la métallicité, jaugée par la teneur en Fe, varie d'un amas à un autre pour la même position fléchée du CMD. La flèche indique à chaque fois la position de la discontinuité du plan $(u, u-y)$.

(proposée en 1953), puisque l'une est fonction de l'autre (figure 1.7). Elle n'est pas suffisante pour autant. Pour cause: on trouve des exemples, tels les illustres exemples NGC 362 et NGC 288, de deux amas de même métallicité, mais de distribution en couleur différente. En bilan, au "premier" paramètre -la métallicité-, la recherche d'un "deuxième paramètre" est au centre de divers travaux et polémiques.

1.4 Expliquer ces anomalies et ces variations.

Puisque les explications ne sont pas définitives, je mentionne quelques suggestions dans cette section.

1.4.1 Expliquer les anomalies d'abondances

Si les observations procurent des indices sur les mécanismes à inclure dans les modèles, ici, les anomalies d'abondances indiquent l'action de forces physiques responsables du déplacement d'éléments, vers, ou à partir de la couche photosphérique d'où les mesures sont collectées. Supposons une atmosphère stable et non magnétisée, où tout processus de mélange est exclu, y compris la convection. Le bilan des forces exercées sur les éléments ne compte alors que tri gravitationnel, accélération radiative, et diffusion thermique. Si on néglige la troisième, pour l'hélium, le premier gagne sur la seconde, attirant vers lui l'hélium vers l'intérieur de l'étoile. Sur un spectre, cet appauvrissement en hélium des couches photosphériques devrait alors se traduire par des raies d'absorption d'hélium plus faibles. À l'opposé, les éléments qui absorbent relativement plus de photons seront proies à l'accélération radiative (g_{rad}). Celle-ci étant orientée vers l'extérieur de l'étoile, les éléments concernés devraient suivre cette direction, via la lévitation radiative, vers les couches accessibles à la spectroscopie. On prévoit alors des abondances métalliques de 10^3 , 10^4 fois les abondances initiales de la même étoile. Ce scénario -désormais adopté par la modélisation stellaire- est l'oeuvre de G. Michaud (1970). Déficit et surplus d'éléments résulteraient donc, au moins partiellement, du jeu de g_{grav} lié au poids moléculaire du composé, contre g_{rad} sur sa section efficace. Néanmoins, la condition nécessaire à ce scénario est restrictive: elle exclut tout mélange.

Non seulement, sans concurrence du mélange, le tri gravitationnel fait couler l'hélium vers

le coeur, et la radiation fait “léviter” les métaux vers la surface, mais en plus, le premier phénomène peut encourager le second -au sein d’une zone de convection de l’hélium. En effet, si le tri gravitationnel parvient à réduire la concentration d’hélium, celui-ci ne peut plus affecter l’opacité, et le régime convectif n’a plus lieu d’être. Là où la convection s’opposait jusqu’alors à la séparation chimique, celle-ci peut maintenant s’affirmer. Cette séparation chimique redistribue les métaux en faveur des couches photosphériques d’où on ne peut que constater des abondances anormalement plus élevées (que les valeurs observées chez les géantes rouges).

1.4.2 Expliquer les discontinuités photométriques.

Plutôt qu’une autre catégorie d’anomalies à répertorier, il faudrait considérer les discontinuités photométriques comme l’expression en surface des anomalies d’abondances. On s’en rend compte sitôt le changement d’abondance associé à celui de l’opacité, dont dépend la distribution d’énergie spectrale SED (soit la façon dont la radiance est distribuée en fonction de la longueur d’onde. La radiance est une énergie par unité de temps, surface, angle solide et fréquence. L’analyse d’une SED est une démarche du ressort de la photométrie). Si le lien avec la photométrie est dès lors évident, les détails de l’influence du changement d’opacité sur la SED ont néanmoins été révisés. Un premier enchaînement d’hypothèses s’est articulé en partant de la forte teneur en métaux, supposée enfler l’enveloppe, et, par là même, la refroidir -ce qui en photométrie, se traduit en rouge. Puisque, au contraire, les mesures photométriques penchent du côté de l’UV, il a bien fallu chercher une autre explication. Grundahl s’en est chargé en 1999, puis Moehler, et puis Behr la même année, qui ont proposé le scénario suivant: plus importante est la contribution des métaux à l’opacité dans l’UV, moins l’est, en relatif, celle de l’hydrogène. Or, c’est l’élément par excellence responsable du saut de Balmer. Bout à bout: l’augmentation de l’opacité métallique accompagne celle du flux UV. Cette affirmation est en fait teintée de quelques doutes, alimentés par des situations où des abondances métalliques ne pourraient pas justifier certains sauts -comme ceux des CMD de M15 et M92, trop larges, légèrement trop rouges. Au moins pour ces exemples, il faudra trouver des explications complémentaires, ou supplémentaires, au saut de métallicité. Même s’il reste à enrichir

le scénario par d'autres chaînons explicatifs, les simulations de Hui-Bon-Hoa et al. (2000), pour la plupart des étoiles, le valident.

1.4.3 Expliquer les faibles $\log g$

Ici encore, il faut faire le lien avec les anomalies d'abondances. C'est du moins ce qu'ont fait Moehler et al. (1999) pour des étoiles plus chaudes que ~ 11500 K, à condition de prendre en compte le mélange de l'hélium dans la couche de combustion de l'hydrogène. La même étude de Hui-Bon-Hoa et al. (2000) pour simuler les sauts photométriques renvoie une diminution de 0.5 dex pour $\log g$, en bonne voie de rencontrer les observations.

1.5 Étoiles HgMn et mon projet

La diffusion justifie globalement les anomalies d'abondances. Mais qu'en est-il des étoiles aux abondances standards: pourquoi ont-elles été épargnées par la diffusion ? Quelle forme de concurrence s'est opposée à la diffusion, et pourquoi de façon bimodale -efficace, ou pas ? Ce questionnement n'a pas émergé avec les étoiles de la branche horizontale. Il a d'abord intrigué avec les étoiles HgMn. Ce sont des étoiles A ou B de la séquence principale qui doivent leur nom au fait qu'elles présentent des anomalies d'abondances particulièrement élevées en mercure et manganèse. Encore là, on retrouve un caractère bimodal: on a d'une part les étoiles A standards dont la vitesse de rotation est (relativement) rapide, et de l'autre les étoiles HgMn, qui tournent lentement. Le lien entre la rotation et la diffusion a alors suggéré que la circulation méridienne, une conséquence de la rotation dont la définition sera approfondie à la section 2.2, pouvait concurrencer la diffusion. La circulation méridienne dépend de la vitesse de rotation à l'équateur, et au-dessus d'une valeur critique de celle-ci, il a été montré (Michaud et al. (1983b), Charbonneau et Michaud (1988) et Charbonneau et Michaud (1991)) qu'elle pouvait empêcher la diffusion (le tri gravitationnel) de diminuer la concentration d'hélium jusqu'au taux critique de la disparition de sa zone convective. Rappelons (section 1.4.1) que d'empêcher cette disparition de la zone convective, c'est aussi empêcher (par la convection) la lévitation des éléments Hg et Mn dans l'atmosphère, et donc, c'est maintenir des valeurs standards de Hg et Mn.

Ensemble, diffusion et circulation méridienne ont pu substantiellement justifier l'aspect bimodal étoile A versus HgMn. Le lien avec les étoiles de la HB? D'abord le fait qu'on retrouve la distribution "rotateur rapide, abondances standards" versus "rotateur lent, abondances anormales". On est déjà tenté de penser à la circulation méridienne. Ensuite parce que les étoiles de la HB croisent les étoiles HgMn sur un diagramme HR, laissant entendre qu'il puisse y avoir des paramètres communs en surface, et qui sait, des comportements semblables vis à vis de la diffusion et de la circulation méridienne. À vérifier. C'est pourquoi ce projet se propose de simuler en 2D le transport de l'hélium sous l'effet du tri gravitationnel et de la circulation méridienne pour des modèles représentant théoriquement des étoiles de la HB.

En jouant sur la vitesse de rotation, on cherchera à moduler la circulation méridienne pour voir quand celle-ci passe de trop faible, à assez forte pour empêcher le tri gravitationnel de réduire la concentration d'hélium en dessous du taux critique de la disparition de sa zone de convection. On pourra garder à l'esprit que le premier cas (parvient à faire disparaître la zone de convection) correspondrait à l'émergence de métaux à la surface, et le deuxième (ne la fait pas disparaître) au cas où les abondances resteraient standards. À la lumière de six modèles d'étoiles échantillonnés à des T_{eff} disparates, ce projet vise ainsi à évaluer cette vitesse critique (au dessus de laquelle la zone de convection disparaît) en fonction de T_{eff} . Le calcul de la circulation méridienne pesant son lot dans ce projet, il mérite la première partie de ce mémoire. Les résultats seront étalés sous leurs divers revers dans le chapitre suivant, qui seront discutés, en parallèle avec les simulations antérieures dans le contexte des étoiles HgMn, pour conclure dans le dernier chapitre.

Chapitre 2

Équation du transport avec circulation méridienne

2.1 L'équation du transport

Sa spécification au “transport” annonce que cette équation est consacrée à prédire comment des constituants chimiques se meuvent. Le “comment” est vague. En fait, ce n'est pas tellement le déplacement de constituants chimiques indépendants qui intéressent une telle équation, mais celui de constituants par rapport à d'autres . En fait, le sens de cette équation est encore plus spécifique dans notre situation: l'une des composantes est dominée par l'(les) autre(s), si bien qu'on étudie sa propagation en tant que quantité trace. L'espèce dominante P est soudée en un milieu continu (liquide ou gaz) de ses composantes “relativement infinitésimales”. La mise en scène se dessine: un fluide de densité ρ dans laquelle circule l'espèce trace T de concentration c telle que

$$c \equiv \frac{N_T}{N_P} \quad (2.1)$$

où N est la quantité du constituant. On utilise aussi parfois le rapport de masse, soit le rapport de $N_T m_T$ sur $N_P m_P$, où m est la masse du constituant.

Cette espèce trace est alors en prise à la fois avec des processus qui agissent spécifiquement

sur elle, et avec d'autres qui concernent aussi l'espèce dominante, et l'emportent dans un écoulement général.

La diffusion atomique regroupe tous les processus qui n'agissent que sur la composante qui présente un gradient de concentration, donc ici, qui n'agissent que sur l'espèce trace. Même si le très usité exemple de la propagation d'une fragrance offre une compréhension sensoriellement intuitive, il n'est pas si évident de la rattacher à une loi physique tant que l'échelle d'analyse n'est pas microscopique. Au même titre que la diffusion de la chaleur, la statistique conditionnée par les collisions inter-particules est alors en mesure de fournir la théorie, et d'évaluer l'efficacité de cette diffusion par un coefficient D (unités: cm^2s^{-1}), conditionnant le flux diffusif ϕ_D par la loi de Fick:

$$\phi_D = -\rho D \nabla c . \quad (2.2)$$

Ces processus transportent l'espèce trace avec une vitesse \vec{u}_T , et s'opposent au gradient de concentration.

Par ailleurs, le mouvement du ou des éléments dominants, peut être rapporté par un écoulement \vec{u}_P dans lequel circule l'élément trace. Tous les ingrédients sont disponibles pour définir le courant de masse de la substance trace:

$$\phi_T = \rho c \vec{u} \quad [\text{gcm}^{-2}\text{s}^{-1}] \quad (2.3)$$

si

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_P \quad (2.4)$$

(où ϕ_D de (2.2) est contenu dans le terme avec \vec{u}_T , comme on le verra avec le dernier terme de (2.13)). Le courant de masse traversant une surface est opposé au taux de variation $\frac{\partial}{\partial t}$ de la masse $\int_V \rho c dV$ (volume V) de l'élément trace. Cette affirmation a une traduction analytique,

qui si retouchée par le théorème de la divergence débouche vite sur:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \vec{u}) = 0 . \quad (2.5)$$

Voici délivrée l'équation du transport. On peut manipuler la partie gauche de cette dernière équation selon:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \vec{u}) = \rho \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial t} + c \nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot (\nabla c) . \quad (2.6)$$

Encore peut-on éliminer le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, puisque dans notre situation, la densité ne varie pas dans le temps. On a aussi la conservation de la masse qui s'applique sur l'espèce dominante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_P) = 0 \quad (2.7)$$

donc, (2.5) revient à:

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot (\nabla c) + c \nabla \cdot (\rho \vec{u}_T) = 0 . \quad (2.8)$$

C'est sous cette forme que l'équation du transport sera résolue dans ce projet. Reste à expliciter D , et \vec{u} . Pour $D = D_i$ d'un élément i , ralenti par des protons, on a que

$$D_i = \frac{t_{si} k T}{A_i m_p} \quad (2.9)$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température, A_i le nombre de masse et t_{si} le temps de ralentissement de l'élément i , m_p la masse d'un proton. On a aussi que:

$$t_{si} = \frac{12 A_i T^{1.5}}{n_p Z_i^2 \ln \Lambda} \quad (2.10)$$

où on peut trouver la densité de protons sachant la fraction de masse de l'hydrogène X_H par

$$n_p = \frac{\rho X_H}{m_p} \quad (2.11)$$

et

$$\Lambda = \frac{3(kT)^{3/2}}{(2e^3\sqrt{\pi n_e e^2})} \quad (2.12)$$

où e est la charge d'un électron, et n_e leur densité.

Il faut expliciter les composantes de \vec{u} (2.4). On a vu que la diffusion était responsable de \vec{u}_T . En se référant (par exemple) à Michaud (1987):

$$\vec{u}_T = \vec{u}_{diff} = D_i \left[\frac{(1 - 2A_i + Z_i)m_p g}{2kT} + \frac{A_i m_p g_{rad}}{kT} - k\nabla T - \nabla \ln c \right] \quad (2.13)$$

où on peut identifier le premier terme comme la vitesse du tri gravitationnel \vec{u}_{tri} (avec l'accélération gravitationnelle g), le second comme la vitesse due à l'accélération radiative, la troisième comme la diffusion thermique, et le dernier comme le terme diffusif. Or l'HeIII, dans l'enveloppe, n'a pas d'électron sur les orbitales, et ne subit presque pas de radiation. La diffusion thermique est négligée. On peut donc se contenter de

$$\vec{u}_{diff} \approx \vec{u}_{tri} - D_i \nabla \ln c . \quad (2.14)$$

Quant à l'espèce dominante, le coeur de ce projet est de prendre comme écoulement celui de la circulation méridienne tel que

$$\vec{u}_P = \vec{u}_{CM} . \quad (2.15)$$

Il reste à expliciter \vec{u}_{CM} .

2.2 Rotation et circulation méridienne

2.2.1 La rotation dans les équations

Déviations de la symétrie sphérique

La rotation influe sur les paramètres de l'étoile principalement par l'action de la force centrifuge (symbolisée par l'indice Ω). Désormais le potentiel

$$V = V_{grav} + V_{\Omega} \quad (2.16)$$

et à l'équivalent, l'accélération:

$$\vec{g} = g\hat{r} + g_{\Omega}\hat{\omega} \quad (2.17)$$

dans le système de coordonnées sphériques $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ et où $\bar{\omega} \equiv r \sin \theta$. Or, g_{Ω} dépend de la colatitude θ , donc \vec{g} aussi, plus forte au pôle qu'à l'équateur. Cette description suffit pour se figurer la forme de l'étoile -aplatie aux pôles- et de renoncer à la symétrie sphérique.

Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie veille à ce que le taux de production de l'énergie totale dans un volume fini égale le taux de travail fait dans ce volume plus le taux auquel la chaleur et la radiation sont conduits dans ce volume. Un exercice de physique classique (section 3.4 de Tassoul (1978)) amène à traduire cette affirmation sous l'équation de la conservation de l'énergie:

$$\rho \epsilon_{Nuc} = \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho \vec{u}_P \cdot T \nabla S + \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} \quad (2.18)$$

où on reconnaît S pour l'entropie, ϵ_{Nuc} pour le taux d'énergie nucléaire, $\vec{\mathcal{F}}$ pour le flux radiatif, \vec{u}_P le vecteur vitesse du fluide (donc celui de l'espèce dominante). Dans un cas idéalisé stationnaire où règne l'équilibre radiatif, les dérivées temporelles ($\frac{\partial}{\partial t}$ et \vec{u}_P) s'éliminent, et

alors:

$$\rho \epsilon_{Nuc} = \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} . \quad (2.19)$$

2.2.2 Rotation solide et cas stationnaire

Paradoxe de Von Zeipel

Peut-on concevoir une étoile chimiquement homogène sujette à de la rotation statique en équilibre radiatif et hydrostatique? D'emblée, la réponse est non. La démonstration analytique de Von Zeipel conduit à cette conclusion (Tassoul (1978)), par l'étude de la variation de la brillance de surface en équilibre radiatif:

$$\vec{\mathcal{F}} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T \quad (2.20)$$

où c est la vitesse de la lumière, a la constante de pression radiative, κ l'opacité. Que fait-on de ∇T , ou de quoi T est elle fonction? L'équation d'état des gaz parfaits

$$\frac{T}{\mu} = \frac{P}{\rho \mathcal{R}} \quad (2.21)$$

rend pour verdict $T = T(P, \rho, \mu)$. Pour une surface chimiquement homogène, $T = T(P, \rho)$. Quant à ρ et P , elles sont reliées pour un équilibre hydrostatique par

$$\nabla P = -\rho \nabla V . \quad (2.22)$$

Non seulement on en tire que $\rho = \rho(P)$, mais aussi que les surfaces isobariques sont parallèles aux équipotentielles. Somme toute, sur des surfaces chimiquement homogènes et équipotentielles, $T = T(V)$, et:

$$\vec{\mathcal{F}} = f(V) \nabla V \quad (2.23)$$

où

$$f(V) = -\frac{4ac T^3}{3 \kappa \rho} \frac{dT}{dV}. \quad (2.24)$$

En étudiant la divergence de cette brillance:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} = f'(V)(\nabla V)^2 + f(V)\nabla^2 V \quad (2.25)$$

où $\nabla V = -\vec{g}$ et

$$\nabla^2 V = \nabla^2 V_{grav} + \nabla^2 V_{\Omega} = 4\pi G\rho - \frac{1}{\omega} \frac{d(\Omega^2 \omega^2)}{d\omega}. \quad (2.26)$$

Il est temps de rappeler l'équation (2.19). Avec (2.25), on a:

$$f'(V)g^2 + f(V)\left(4\pi G\rho - \frac{1}{\omega} \frac{d(\Omega^2 \omega^2)}{d\omega}\right) = \rho \epsilon_{Nuc}. \quad (2.27)$$

Sur une équipotentielle, les trois derniers termes sont constants, le premier doit donc l'être aussi. Or on a dit (suite à (2.17)) que \vec{g} dépendait de la colatitude. Il faut donc que $f'(V) = 0$, permettant d'isoler le taux de réaction nucléaire:

$$\epsilon_{Nuc} \propto \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right). \quad (2.28)$$

Il semble alors que rien ne spécifie le fait que ϵ_{Nuc} devrait être concentré au coeur. De surcroît, si la vitesse angulaire Ω est constante, l'équation (2.28) annonce en toute absurdité un taux de production d'énergie négatif près de la surface (avec $\rho \rightarrow 0$). D'où l'intitulé "paradoxe de Von Zeipel".

Rotation solide et cas non stationnaire

Dès qu'une étoile tourne comme un corps solide, on comprend que cette étoile ne peut pas avoir une température homogène sur les équipotentielles.

De retour à l'équation (2.18). Pour équilibrer le gradient de température par rapport aux

équipotentielles apporté par $\nabla \cdot \vec{\mathcal{F}}$, il faut garder le terme $\vec{u}_P \cdot \nabla S$. En d'autres termes, un écoulement se forme en opposition au gradient de température, pour permettre une expansion vers l'extérieur (au pôle) pour l'excédent de température, et une compression vers l'intérieur pour chauffer tout déficit (à l'équateur). Par conservation de la masse, ce mouvement du pôle vers l'équateur se généralise dans un écoulement à grande échelle. Il opère sur le plan méridien, et justifie son titre de circulation méridienne (figure 2.1). Désormais, \vec{u}_P de (2.18) devient \vec{u}_{CM} .

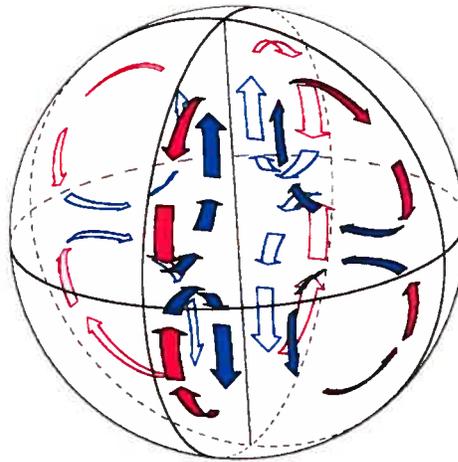


FIGURE 2.1 – Illustration 3D de l'écoulement de la circulation méridienne. Cette figure est tirée de <http://earth.leeds.ac.uk/~earaj/KRdynamo/kr.html>

2.2.3 Composantes de la vitesse de circulation méridienne

Plutôt que de renoncer à l'équilibre hydrostatique, on le corrige en y accolant des perturbations. On prend donc une expansion autour de cet équilibre en puissance du rapport ε entre forces centrifuge et gravitationnelle à l'équateur.

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 R^3}{GM} \quad (2.29)$$

avec R et M le rayon et la masse de l'étoile. Cette expansion pour \vec{u}_{CM} , p , ρ , T , V (le potentiel), est de la forme (2.30) commune à chacune de ces variables symbolisées \mathcal{V} .

$$\mathcal{V}(r, \mu) = \mathcal{V}_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_{2k}(r) P_{2k}(\mu) \quad (2.30)$$

où P_{2k} est un polynôme de Legendre de degré $2k$, avec le 2 imposé pour respecter la symétrie par rapport au plan équatorial et

$$\mu = \cos \theta . \quad (2.31)$$

On considère le premier ordre ($k = 1$), et on allège la notation en laissant tomber les indices 2 pour les variables \mathcal{V} . Ainsi, pour les composantes u_r et u_θ de \vec{u}_{CM} :

$$u_r(r, \mu) = \varepsilon u(r) P_2(\mu) . \quad (2.32)$$

Avec (2.32) et la conservation de la masse (2.7) où $\vec{u}_P = \vec{u}_{CM}$, on en déduit

$$u_\theta(r, \mu) = \frac{-r}{\sin \theta} \varepsilon v(r) (1 - \mu^2) \frac{P_2(\mu)}{d\mu} \quad (2.33)$$

avec

$$v(r) = \frac{1}{6} \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} (\rho r^2 u) \quad (2.34)$$

et

$$P_2(\mu) = \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2} . \quad (2.35)$$

La fonction $u(r)$ (à ne pas confondre avec la composante $u_r(r, \mu)$) sera dérivée à la section suivante.

La fonction d'écoulement Ψ couple (2.32) et (2.33), ainsi que toute l'information qu'elles

renferment.

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{2} \epsilon u \rho r^2 \mu (1 - \mu^2) . \quad (2.36)$$

2.3 Calcul de $u(r)$

2.3.1 Grandes lignes de la dérivation de $u(r)$

Puisque le développement de ce calcul date de plus d'un demi-siècle (1950), entrepris par Sweet, corrigé ponctuellement par Mestel (1953), puis révisé à plusieurs reprises aux conditions aux bords par Tassoul et Tassoul (article I (1982) à XI), il n'est pas question de répéter ici la démarche. Pour mieux cerner le contexte d'une solution, il est toutefois avantageux de rappeler les hypothèses et les définitions qui participent à sa fondation. Dans ce sens, l'expansion perturbative (2.30) autour du cas d'équilibre hydrostatique, substituée pour chaque variable dans les équations gouvernant les zones radiatives ((2.37) à (2.43)), est la clef de voûte de cette démonstration.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}_{CM}) = 0 \quad (2.37)$$

$$\vec{u}_{CM} \cdot \nabla \vec{u}_{CM} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla V + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau \quad (2.38)$$

$$\rho T \vec{u}_{CM} \cdot \nabla S = \nabla \cdot (\chi_r \nabla T) \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho \quad (2.40)$$

$$\chi_r = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (2.41)$$

$$4\pi r^2 \chi_0 T'_0 = -L \quad (2.42)$$

$$\mu_r = \frac{4aT_0^4}{15c\kappa\rho_0} = \mu_0 \quad (2.43)$$

où les indices "0" réfèrent au cas hydrostatique, les primes des dérivées par rapport à r , τ le tenseur de stress, S l'entropie, Φ_v la fonction de dissipation, et ces deux derniers sont proportionnels à μ_r le coefficient de viscosité radiative, χ_r le coefficient de conductivité radiative, L la luminosité totale.

Pour trouver une solution explicite aux variables concernées par (2.30), $k = 1$, il a fallu perdre de la généralité de (2.30) pour V , en supposant un cas barotrope, et donc en posant (Krogdahl (1942)):

$$V = A\Phi(r) - \frac{1}{3}\omega_0^2 r^2 \quad (2.44)$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{\Omega^2}{\varepsilon} = \frac{GM}{R^3} \quad (2.45)$$

et où Φ répond à

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{6}{r^2} \Phi + 4\pi G \frac{\rho\rho'}{p'} \Phi \quad (2.46)$$

et

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0 \quad (2.47)$$

et

$$A = \frac{1}{3}\omega_0^2 \frac{5R^2}{3\Phi(R) + R\Phi'(R)} \quad (2.48)$$

Jouer avec les relations (2.30) et (2.37) à (2.43) (dans les étapes de calcul de Tassoul & Tassoul (1982), les équations précédentes permettent d'établir dans leur numérotation les équations (25), (26), (35), qui, avec la nouvelle définition pour V donnent (71), (72), (73), utilisées à leur tour dans (37)) mène à l'équation différentielle:

$$\mathcal{L}^{VI}u - \frac{4\pi G^3 m^3 \rho^3}{L p r^4} \frac{n - \frac{3}{2}}{n + 1} u = -\frac{8\pi G \rho^3}{p} \left[h' + \left(\frac{2}{r} - \frac{m'}{m} \right) h \right] \quad (2.49)$$

où

$$h = A\Phi(r) \quad (2.50)$$

$$m' = 4\pi \rho r^2 \quad (2.51)$$

$$n = \frac{\rho' T}{\rho T'} \quad (2.52)$$

et $\mathcal{L}^{VI}u$ est fonction de dérivées de u (par rapport à r) à divers ordres et est défini dans Tassoul & Tassoul (1982) ((76), avec (27), (28) et (77) à (82)).

La solution finale peut enfin être livrée:

$$u_s(r) = \frac{2Lr^4}{G^2 m^3} \frac{n + 1}{n - 3/2} \left[h' + \left(\frac{2}{r} - \frac{m'}{m} \right) h \right]. \quad (2.53)$$

2.3.2 Construire $u_s(r)$

Pour connaître $u_s(r)$, il faut connaître: $m(r)$, $n(r)$ donc $\rho(r)$ et $T(r)$, L , $h(r)$ donc A (donc R et M) et $\Phi(r)$ donc $p(r)$. Il faut alors:

Une grille de modèles

Pour chaque r , une grille de modèles pour une étoile (M , Y , Z) fournit L , R , $m(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$, et $p(r)$. Sur six modèles, un a été généré par Ben Dorman, les cinq autres par Jacques Richer. La physique à la base du premier modèle, une étoile de la EHB (à 26300K,

donc sous-naine), est résumée dans Dorman et al. (1993). Pour les cinq autres modèles, il a fallu d'abord obtenir une géante rouge évoluée jusqu'au flash d'hélium. Une fois stabilisée, cette géante comptabilise alors une masse totale M_{GR} ainsi qu'une masse au coeur M_C . Sur la branche horizontale, on reconverge une étoile de masse M , de masse au coeur M_C et de masse de l'enveloppe $M - M_C < M_{GR} - M_C$. L'effet de la perte de masse est ainsi supposé arbitrairement via la réduction de masse de M_{GR} à M . Mais cette perte de masse n'a pas été simulée étant donné le niveau de difficulté et le manque de connaissance sur le détail des processus physiques. Les cinq étoiles alors calibrées à la ZAHB (1.1.2) ont la même masse au coeur de $0.4845 M_{\odot}$. Ces calculs ont été produits sans diffusion, et par conséquent, sans forces radiatives. Cependant, des opacités monochromatiques ont été utilisées pour calculer l'opacité de Rosseland. La table d'opacité est la table monochromatique d'OPAL (décrite dans Richer et al. (1998)), qui a l'avantage de prendre en compte la composition chimique de chaque couche (variant seulement sous l'effet des réactions nucléaires et des changements de composition causés par les déplacements des zones convectives) dans le calcul de l'opacité. L'équation d'état est celle de Eggleton, Faulkner, et Flannery corrigée (CEFF) décrite dans Rogers et al. (1996). L'évolution de ces modèles en fonction du temps est représentée dans la figure 2.2. Pour obtenir de telles étoiles évoluées, il n'a toutefois pas été évident de stabiliser T_{eff} (figure 2.3). La priorité a été en effet de chercher à obtenir une étoile à un âge (depuis le flash de l'hélium) "calme" (le stade évolutif exact n'était pas toujours le même), ne laissant pas une grande marge de manoeuvre pour stabiliser T_{eff} . Par ailleurs, des difficultés ont été éprouvées face à des discontinuités à la frontière mobile de la zone de convection de surface.

Quelques valeurs clés de ces grilles de données sont récapitulées au Tableau 3.1 au chapitre suivant.

Résoudre (2.46) et (2.47)

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire, du second degré et linéaire. Le coefficient du dernier terme de la RHS étant fonction de r , la résolution d'une telle équation doit être numérique. La méthode des différences finies est tout indiquée dans cette situation.

Deux conditions limites sont exigées pour résoudre la solution unique d'une équation différentielle

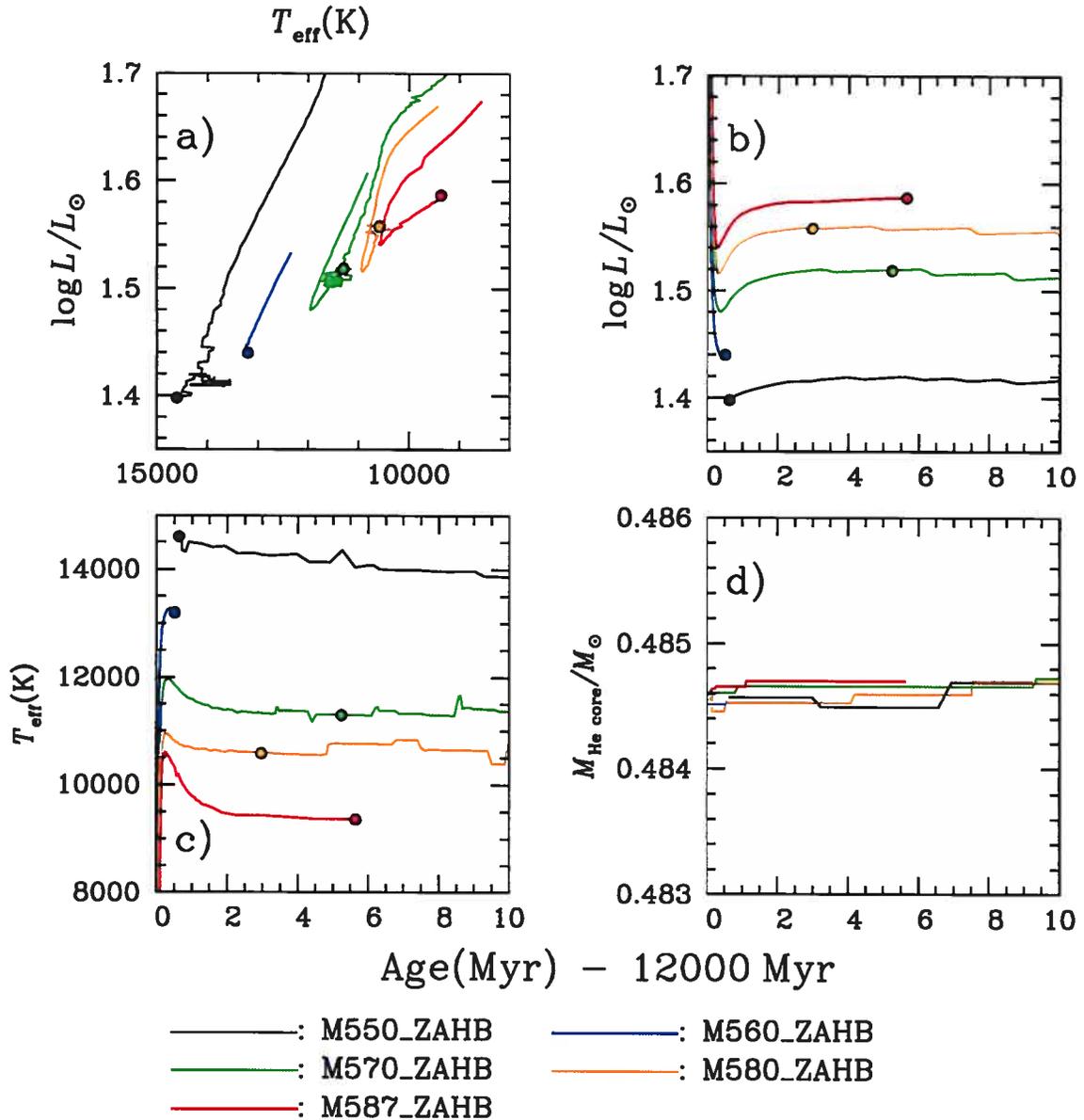


FIGURE 2.2 – Évolution des modèles fournis. L'âge zéro correspond à un âge de l'étoile de 12 milliards d'années (et de b) à d), les temps sont en 10^6 années à partir cet âge zéro). Les modèles dont la grille de modèles est fournie sont ceux repérés par les points de couleur.

du second degré. À première vue, $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ (2.47) sont les deux contraintes recherchées. Appliquées toutefois pour (2.46) (une fois multipliée par r^2) à $r = 0$, la RHS est nulle quelque soit la valeur prise par $\Phi''(0)$. On n'a donc pas de contrainte sur $\Phi''(0)$. L'application de ces conditions est problématique lorsque introduites dans le développement en différences finies. Pour faciliter le suivi de l'argumentation, quelques rappels sur cette méthode

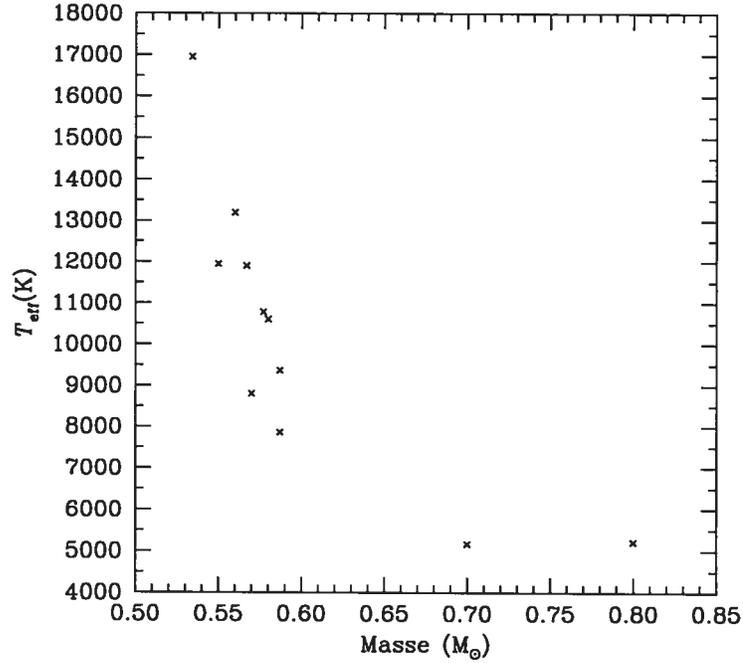


FIGURE 2.3 – Modèles dont la grille de données est fournie (pas toutes traitées): T_{eff} versus M .

sont introduits ici.

Elle découle du développement en série de Taylor combiné à des choix de troncature. Pour $\Delta r = \Delta$ constant (donc à maillage régulier):

$$\Phi(r + \Delta) = \Phi(r) + \Delta\Phi'(r) + \frac{(\Delta)^2}{2}\Phi''(r) + \dots \quad (2.54)$$

$$\Phi(r - \Delta) = \Phi(r) - \Delta\Phi'(r) + \frac{(\Delta)^2}{2}\Phi''(r) - \dots \quad (2.55)$$

Ces deux équations peuvent être traduites sous forme discrète, adéquatement au langage de programmation. Ainsi, $\Phi''(r)$ devient Φ''_i , $\Phi''(r + \Delta)$ devient Φ''_{i+1} , $\Phi''(r - \Delta) \rightarrow \Phi''_{i-1}$, $r \rightarrow r_i$, et $\Delta \rightarrow r_{i+1} - r_i$. On peut donc substituer cette notation et ces dérivées dans (2.46). Un choix de combinaison de (2.54) et (2.55) permet d'isoler Φ'_i et Φ''_i . À noter que leur valeur exacte diffère d'un choix de combinaison à un autre, puisque (2.54) et (2.55) sont tronquées. Plus l'ordre de troncature est grand et Δ petit, plus l'erreur, et donc l'approximation de Φ'_i

et Φ_i'' et de la solution Φ_i elle-même, est négligeable. Si on choisit par exemple la combinaison (2.54)-(2.55) et (2.54)+(2.55), on se retrouve avec:

$$\Phi_i' = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta} \quad (2.56)$$

$$\Phi_i'' = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta^2}. \quad (2.57)$$

Jusqu'ici, il a été question de maillage régulier. Or la résolution de (2.46) fait appel à une grille de modèle construite à intervalles de r irréguliers (voir Annexe C). Cette correction n'est aucunement problématique, puisqu'il suffit simplement de substituer $\Delta = r_{i+1} - r_i$ dans (2.54) et $\Delta = r_i - r_{i-1}$ dans (2.55). Pour le reste, on suit les mêmes manoeuvres que dans le cas d'un maillage régulier, mais alourdis par un nombre additionnel de termes. Dans ce projet, j'ai choisi de combiner (2.54) et (2.58):

$$\Phi_{i+2} = \Phi_i + (r_{i+2} - r_i)\Phi_i' + \frac{(r_{i+2} - r_i)^2}{2}\Phi_i'' + \dots \quad (2.58)$$

qui débouchent sur:

$$\Phi_{i+2} = \frac{-\Phi_{i+1}D_i - \Phi_iE_i}{F_i} \quad (2.59)$$

et

$$\begin{aligned}
 D_i &= \frac{1}{C_i} + \frac{B_i}{C_i(r_{i+2} - r_{i+1})} \left(1 + \frac{2A_i}{r_i}\right) - \frac{2}{r_i(r_{i+2} - r_{i+1})} \\
 E_i &= \frac{-2}{C_i} + \frac{-4A_i}{C_i r_i} - \frac{6}{r_i^2} + 4\pi G \frac{\rho'_i p_i}{p'_i} \\
 F_i &= \frac{1}{C_i} - \frac{B_i}{C_i(r_{i+2} - r_{i+1})} \left(1 + \frac{2A_i}{r_i}\right) - \frac{2}{r_i(r_{i+2} - r_{i+1})} \\
 A_i &= \frac{1}{2} \left[\frac{(r_{i+1} - r_i)^2 - (r_{i+2} - r_i)^2}{r_{i+2} - r_{i+1}} \right] \\
 B_i &= r_{i+2} + r_{i+1} - 2r_i \\
 C_i &= A_i B_i + \frac{1}{2} [(r_{i+1} - r_i)^2 + (r_{i+2} - r_i)^2]
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sans porter plus attention à l'écriture lourde, on sait relier Φ_{i+2} aux deux valeurs précédentes. Or, on sait que $\Phi_0 = 0$, d'où une relation entre Φ_1 et Φ_2 . La relation de Φ_0'' ne nous avance pas, puisqu'on n'a pas de contrainte sur celle-ci. La seule information encore non exploitée est alors $\Phi'(0) = 0$ (par (2.47)). Or, une fois cette valeur substituée dans la relation équivalente à (2.56) pour le maillage irrégulier (obtenue par la combinaison de ((2.54) et (2.58)), et qu'on a utilisé pour trouver (2.59)), on se retrouve à nouveau avec une relation entre Φ_2 et les deux valeurs précédentes (pas exactement la même que (2.59), étant donnée encore l'approximation de la troncature au départ). Peu importe le choix de combinaison et la façon d'utiliser les deux contraintes, ces deux dernières nous avancent sur: Φ_0 , une relation entre Φ_1 et Φ_2 , et rien de plus. Quoiqu'il en soit, il manque une condition pour contraindre un second terme (en plus de Φ_0). Or, un développement asymptotique pour $r \rightarrow 0$ amène à approximer le dernier terme de la partie gauche de (2.46), puisque $\rho \simeq cste$ ou $\rho' \rightarrow 0$, et donc à approximer:

$$\Phi(r) \propto r^2 \quad r \rightarrow 0. \tag{2.61}$$

On supposera dans ce sens que $\Phi_1 \simeq r_1^2$.

Une fois que Φ est calculé en fonction des r de la grille de modèle, on en déduit $h(r)$. Dans la notation discrète où une fonction est un vecteur de dimension n , avec des éléments i , voici la

formulation explicite de h :

$$h_i = \frac{5}{3} \frac{GM}{R} \frac{1}{3\Phi_n + R\Phi'_n} \Phi_i. \quad (2.62)$$

Ceci complète la liste des composantes de $u_s(r)$. On fait attention aux unités, selon le Tableau 2.1, où $[L] \rightarrow$ longueur, $[M] \rightarrow$ masse, et $[T] \rightarrow$ temps, vérifiant $[u_s] = [LT^{-1}]$. Chaque valeur

TABLEAU 2.1 – Unités des paramètres de (2.53)

paramètre	dimension
G	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$
p	$[ML^{-1}T^{-2}]$
ρ	$[ML^{-3}]$
$G\rho\rho'/p'$	$[L^{-2}]$
Φ	pas d'unité
A	$[L^2T^{-2}]$
h	$[L^2T^{-2}]$
L	$[ML^2T^{-3}]$
m'	$[ML^{-1}]$
h'	$[LT^{-2}]$

de h , h' et u_s sur 10 obtenues, est tabulée dans le Tableau 2.2.

TABLEAU 2.2 – Résultats de (2.53) pour la grille (unités CGS, cf. Tableau 2.1) du modèle à 26300K

r/R	m/M_{\odot}	ρ	p	T(K)	n	h	h'	u_s
0.4079E+00	0.4759E+00	0.2188E+02	0.1592E+17	0.1121E+08	0.8296E+01	0.2725E+15	0.1035E+06	0.6477E-05
0.4098E+00	0.4760E+00	0.1624E+02	0.1483E+17	0.1106E+08	0.3440E+02	0.2751E+15	0.1039E+06	0.5226E-05
0.4108E+00	0.4760E+00	0.1343E+02	0.1441E+17	0.1099E+08	0.2961E+02	0.2764E+15	0.1042E+06	0.5361E-05
0.4117E+00	0.4761E+00	0.1178E+02	0.1407E+17	0.1094E+08	0.2595E+02	0.2777E+15	0.1044E+06	0.5491E-05
0.4129E+00	0.4761E+00	0.1052E+02	0.1370E+17	0.1088E+08	0.1467E+02	0.2793E+15	0.1048E+06	0.6017E-05
0.4146E+00	0.4761E+00	0.9599E+01	0.1323E+17	0.1080E+08	0.8495E+01	0.2815E+15	0.1052E+06	0.7004E-05
0.4272E+00	0.4764E+00	0.7559E+01	0.1028E+17	0.1024E+08	0.3722E+01	0.2990E+15	0.1089E+06	0.1276E-04
0.4513E+00	0.4768E+00	0.5196E+01	0.6412E+16	0.9294E+07	0.3889E+01	0.3337E+15	0.1147E+06	0.1612E-04
0.4739E+00	0.4771E+00	0.3663E+01	0.4139E+16	0.8512E+07	0.3987E+01	0.3679E+15	0.1205E+06	0.2014E-04
0.4975E+00	0.4773E+00	0.2543E+01	0.2628E+16	0.7783E+07	0.4081E+01	0.4056E+15	0.1264E+06	0.2518E-04
0.5211E+00	0.4775E+00	0.1768E+01	0.1674E+16	0.7129E+07	0.4104E+01	0.4449E+15	0.1325E+06	0.3161E-04
0.5444E+00	0.4776E+00	0.1236E+01	0.1075E+16	0.6544E+07	0.4124E+01	0.4856E+15	0.1385E+06	0.3916E-04
0.5678E+00	0.4777E+00	0.8627E+00	0.6891E+15	0.6008E+07	0.4114E+01	0.5281E+15	0.1444E+06	0.4839E-04
0.5930E+00	0.4778E+00	0.5849E+00	0.4259E+15	0.5476E+07	0.4143E+01	0.5761E+15	0.1506E+06	0.5974E-04
0.6153E+00	0.4778E+00	0.4132E+00	0.2768E+15	0.5038E+07	0.4060E+01	0.6204E+15	0.1565E+06	0.7308E-04
0.6406E+00	0.4779E+00	0.2779E+00	0.1691E+15	0.4576E+07	0.4028E+01	0.6724E+15	0.1628E+06	0.8986E-04
0.6634E+00	0.4779E+00	0.1933E+00	0.1076E+15	0.4183E+07	0.3958E+01	0.7211E+15	0.1685E+06	0.1085E-03
0.6867E+00	0.4779E+00	0.1326E+00	0.6709E+14	0.3802E+07	0.3808E+01	0.7726E+15	0.1744E+06	0.1332E-03
0.7398E+00	0.4780E+00	0.5418E-01	0.2138E+14	0.2968E+07	0.3172E+01	0.8968E+15	0.1886E+06	0.2319E-03
0.8119E+00	0.4780E+00	0.1335E-01	0.3389E+13	0.1908E+07	0.3047E+01	0.1080E+16	0.2067E+06	0.3867E-03
0.8663E+00	0.4780E+00	0.3243E-02	0.5371E+12	0.1242E+07	0.3303E+01	0.1230E+16	0.2203E+06	0.4876E-03
0.9065E+00	0.4780E+00	0.7610E-03	0.8512E+11	0.8361E+06	0.3707E+01	0.1346E+16	0.2303E+06	0.5466E-03
0.9364E+00	0.4780E+00	0.1731E-03	0.1349E+11	0.5788E+06	0.3838E+01	0.1437E+16	0.2378E+06	0.6236E-03
0.9584E+00	0.4780E+00	0.3976E-04	0.2138E+10	0.3961E+06	0.3518E+01	0.1505E+16	0.2433E+06	0.7575E-03
0.9740E+00	0.4780E+00	0.9320E-05	0.3389E+09	0.2655E+06	0.3283E+01	0.1554E+16	0.2472E+06	0.8810E-03
0.9845E+00	0.4780E+00	0.2363E-05	0.5371E+08	0.1662E+06	0.2491E+01	0.1588E+16	0.2498E+06	0.1363E-02
0.9911E+00	0.4780E+00	0.6129E-06	0.8512E+07	0.1020E+06	0.3055E+01	0.1609E+16	0.2514E+06	0.1043E-02
0.9953E+00	0.4780E+00	0.1450E-06	0.1349E+07	0.6782E+05	0.3575E+01	0.1623E+16	0.2525E+06	0.9010E-03
0.9963E+00	0.4780E+00	0.9032E-07	0.7437E+06	0.5971E+05	0.3561E+01	0.1627E+16	0.2522E+06	0.9079E-03
0.9971E+00	0.4783E+00	0.6329E-07	0.4693E+06	0.5382E+05	0.3138E+01	0.1629E+16	0.2521E+06	0.1038E-02
0.9985E+00	0.4780E+00	0.2951E-07	0.1479E+06	0.3829E+05	0.2243E+01	0.1634E+16	0.2524E+06	0.1810E-02
0.9999E+00	0.4780E+00	0.8304E-08	0.2952E+05	0.2702E+05	0.7792E+01	0.1638E+16	0.2525E+06	0.5829E-03
0.1000E+01	0.4780E+00	0.6856E-08	0.2399E+05	0.2643E+05	0.1007E+02	0.1639E+16	0.2527E+06	0.5395E-03

2.3.3 Conditions aux bords et zone de convection

Puisque sur les temps de calculs prévus, les variations d'abondances sont négligeables en profondeur, il n'est pas nécessaire d'étudier l'écoulement dans cette région. Ceci facilite le calcul, puisqu'on se décharge de l'application d'une couche limite au coeur.

En revanche, la zone de convection de surface est un changement radical de conditions physiques par rapport aux couches juxtaposées. Tout gradient de concentration amené par tout type de transport en faveur de la séparation chimique est annihilé par les mouvement convectifs. Dans l'enjeu de cette simulation, la seule préoccupation est d'imiter la suprématie du mélange convectif dans cette zone, en y appliquant un coefficient de diffusion turbulent supplémentaire. Le choix de sa valeur retourne du compromis entre celle suffisante pour effacer le plus instantanément tout gradient (idéalement $D_{conv} = 10^{10}D$), et, ne pas dépasser une valeur qui induirait une instabilité numérique (Cf. Annexe B.2.2). Cette concession s'ajuste pour mon programme à $D_{conv} = 10^4D$. En outre, l'effet de ce mélange aléatoire est de briser tout courant de circulation. Pour représenter cet effet, on pose que $u_s = 0$ dans les couches

convectives. En revanche, tout passage abrupt d'une couche où $u_s \neq 0$ à la suivante pour $u_s = 0$ ne respecte pas la continuité hydrodynamique. On fait appel à une couche limite qui, sur une étendue δ_{zc} en rayon infinitésimale ($\delta_{zc} \ll R_{zc}$, où R_{zc} est le rayon juste en dessous de la zone de convection), conduit progressivement à la solution u_s vers zéro, par $u(r) = u_{zc}(r)$, pour r qui va de $R_{zc} - \delta_{zc}$ à R (et $u(r) = u_s(r)$ pour tous les rayons précédents). La fonction $u(r)$ qui regroupe ainsi $u_s(r)$, pour r de sa valeur minimale (fixée tel que expliqué section 2.4.2) à $R_{zc} - \delta_{zc}$, et $u_{zc}(r)$, de $R_{zc} - \delta_{zc}$ à R , est notre fonction $u(r)$ finale qui rentre dans (2.32) et (2.33).

Puisque la situation est comparable à la construction de la couche limite près du coeur convectif dans la description de Tassoul & Tassoul (1982), le raisonnement sera juxtaposé et adapté ici (avec des signes opposés puisque les rayons sont ici inférieurs au rayon limite, plutôt que supérieurs dans le cas de l'analyse au dessus du coeur). Rappelons que le raisonnement tient dans la substitution de la simplification

$$n(r) = \frac{3}{2} + n'(R_{zc})(R_{zc} - r) \quad (2.63)$$

dans (2.49), débouchant sur

$$\delta_{zc}^7 \frac{d^6 u_{zc}}{dr^6} - (R_{zc} - r) = -\nu \quad (2.64)$$

avec

$$\delta_{zc}^7 = \frac{LR_{zc}^6}{24\pi G^3} \frac{\mu_0 p (n+1)^2}{m^3 \rho^3 n'} \quad (2.65)$$

$$\nu = \left[\frac{(n - 3/2)u_s}{n'} \right] \quad (2.66)$$

$$n' = -(n+1) \left[\frac{m'}{m} + \frac{Gm\rho}{pr^2} \frac{n(1+\alpha) - (3+\beta)}{n+1} \right] \quad (2.67)$$

où, pour les trois dernières équations, m , p , r , ρ , m' , et n sont évalués à $r = R_{zc}$. Voici une écriture compacte de (2.64):

$$\frac{d^6 y}{dx^6} - xy = -1 \quad (2.68)$$

avec

$$y = \frac{\delta_{zc} u_{zc}}{\nu} \quad (2.69)$$

et

$$x = \frac{R_{zc} - r}{\delta_{zc}} . \quad (2.70)$$

((2.64), (2.65), (2.66), (2.68), (2.69), (2.70) correspondent respectivement à (90), (91), (92), (95), (93), et (94) dans la numérotation de l'article.)

Il faut encore puiser dans la grille de modèle (section 2.2) pour satisfaire au calcul de

$$u_{zc} = \frac{y\nu}{\delta_{zc}} \quad (2.71)$$

pour chaque

$$r = -x\delta_{zc} + R_{zc} . \quad (2.72)$$

On a pris α et β de Kramer. À ce point, il faut évaluer μ_0 pour calculer δ_{zc} . L'occasion de calculer, à la lumière de Tassoul & Tassoul (1982) p331:

$$\mu_t = 10^q \mu_0(r) . \quad (2.73)$$

On apprend dans ce même article (p332) que, si on peut remplacer μ_0 par μ_t dans δ_{zc} , le choix de q n'influence guère le résultat sur u_{zc} . Si faible est cette influence, que le choix même de δ_{zc} est relativement arbitraire. On se prévaut de cette liberté, et on se permet d'adapter cette

longueur de la zone (à la place de (2.65)) afin de lisser le plus convenablement la jonction entre u_s et u_{zc} .

Puisqu'on ne peut pas assurer le fait que la circulation méridienne ne pénètre pas la zone de convection, deux cas extrêmes ont été choisis pour encadrer la marge d'erreur: le cas où la couche limite est juxtaposée au bas de la zone de convection, et celui où on l'arrime à la surface, tel que la circulation méridienne pénètre librement la zone de convection.

Un exemple parmi d'autres, pour le cas de la couche limite définie en dessous de la zone de convection pour le modèle à 26300K, le résultat final (chaque 10 valeurs) est tabulé dans le Tableau 2.3. Les contours sur (r, θ) de la fonction d'écoulement $\Psi(r, \theta)$ dérivé par (2.36) sont affichés pour chaque modèle à la figure 2.4, et le détail de l'ajout de la couche limite aux figures 2.5 et 2.10. Selon une procédure semblable, la calcul a été reproduit avec une couche limite directement à la surface telle que présenté dans ces mêmes figures.

Sur la figure 2.4, quelques lignes d'écoulement vers la surface semble dévier pour les modèles à $M = 0.580 M_{\odot}$ et $M = 0.587 M_{\odot}$. Ces lignes sont réelles. On les retrouve sur les figures 2.9 et 2.10, quand la couche limite a été calculée directement à la surface (fenêtre du bas à gauche à chaque fois), mais aussi chez les autres modèles quand on focalise sur la région près de la zone de convection. À chaque fois, cette déviation des lignes de la fonction d'écoulement correspond au pic de u à ces rayons (visible dans la fenêtre de droite associée). Ce pic calque la tendance dessinée par $\frac{n+1}{n-3/2}$ en fonction du rayon (d'où l'influence sur $u_s(r)$ par (2.53)), et résulte d'un changement de conditions physiques qui influence le facteur n (par l'équation (2.52)).

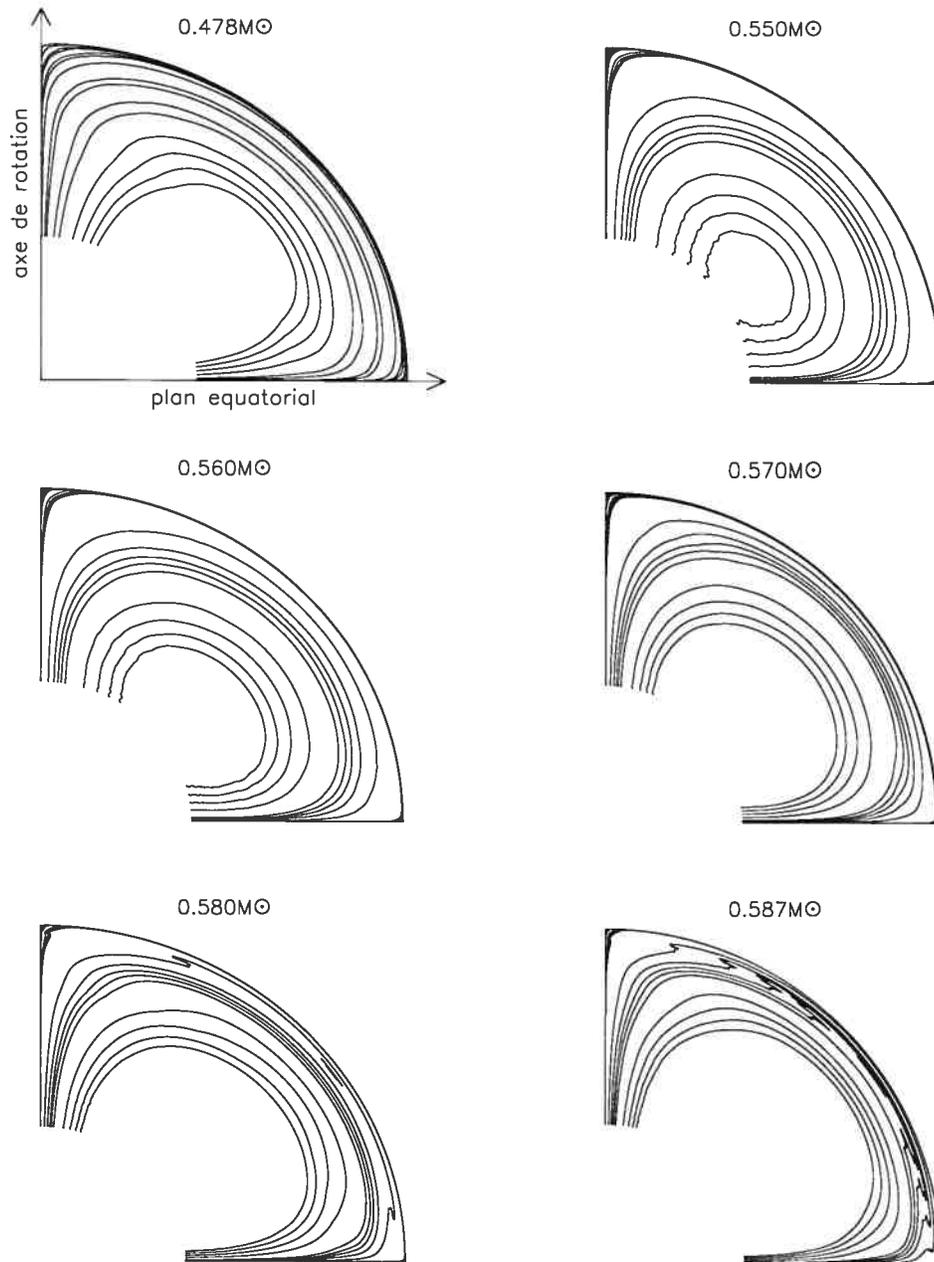
TABLEAU 2.3 – u final pour le modèle à 26300K (u_s ajusté avec la couche limite)

r/R	u
0.4079E+00	0.6477E-05
0.4098E+00	0.5226E-05
0.4108E+00	0.5361E-05
0.4117E+00	0.5491E-05
0.4129E+00	0.6017E-05
0.4146E+00	0.7004E-05
0.4272E+00	0.1276E-04
0.4513E+00	0.1612E-04
0.4739E+00	0.2014E-04
0.4975E+00	0.2518E-04
0.5211E+00	0.3161E-04
0.5444E+00	0.3916E-04
0.5678E+00	0.4839E-04
0.5930E+00	0.5974E-04
0.6153E+00	0.7308E-04
0.6406E+00	0.8986E-04
0.6634E+00	0.1085E-03
0.6867E+00	0.1332E-03
0.7398E+00	0.2319E-03
0.8119E+00	0.3867E-03
0.8663E+00	0.4876E-03
0.9065E+00	0.5466E-03
0.9364E+00	0.6236E-03
0.9584E+00	0.7575E-03
0.9740E+00	0.8810E-03
0.9845E+00	0.1363E-02
0.9911E+00	0.1043E-02
0.9953E+00	0.9010E-03
0.9963E+00	0.8750E-03
0.9967E+00	0.5382E-03
0.9971E+00	0.9786E-04
0.9979E+00	0.0000E+00
0.9987E+00	0.0000E+00
0.9989E+00	0.0000E+00
0.9990E+00	0.0000E+00
0.9992E+00	0.0000E+00
0.9993E+00	0.0000E+00
0.9995E+00	0.0000E+00
0.9996E+00	0.0000E+00
0.9997E+00	0.0000E+00
0.9998E+00	0.0000E+00
0.9999E+00	0.0000E+00
0.1000E+01	0.0000E+00

2.4 Solution numérique

2.4.1 Équation à résoudre numériquement

Concrètement, il faut résoudre (2.8). En coordonnées sphériques (et en multipliant par $r^2 \sin \theta$), elle s'écrit:


 FIGURE 2.4 – Les contours sur r, θ de la fonction d'écoulement $\Psi(r, \theta)$, pour les 6 modèles.

$$\begin{aligned}
 \rho(r)r^2 \sin \theta \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho(r)D(r)r^2 \sin \theta \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho(r)D(r) \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad - \rho(r) \left(u_r(r, \theta) + u_{tri}(r) \right) r^2 \sin \theta \frac{\partial c}{\partial r} - \rho(r) u_\theta(r, \theta) r \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \\
 &\quad - \left(2\rho(r) \bar{u}_{tri}(r) \frac{1}{r} + \rho(r) \frac{d\bar{u}_{tri}}{dr} + \bar{u} \right) r^2 \sin \theta c. \tag{2.74}
 \end{aligned}$$

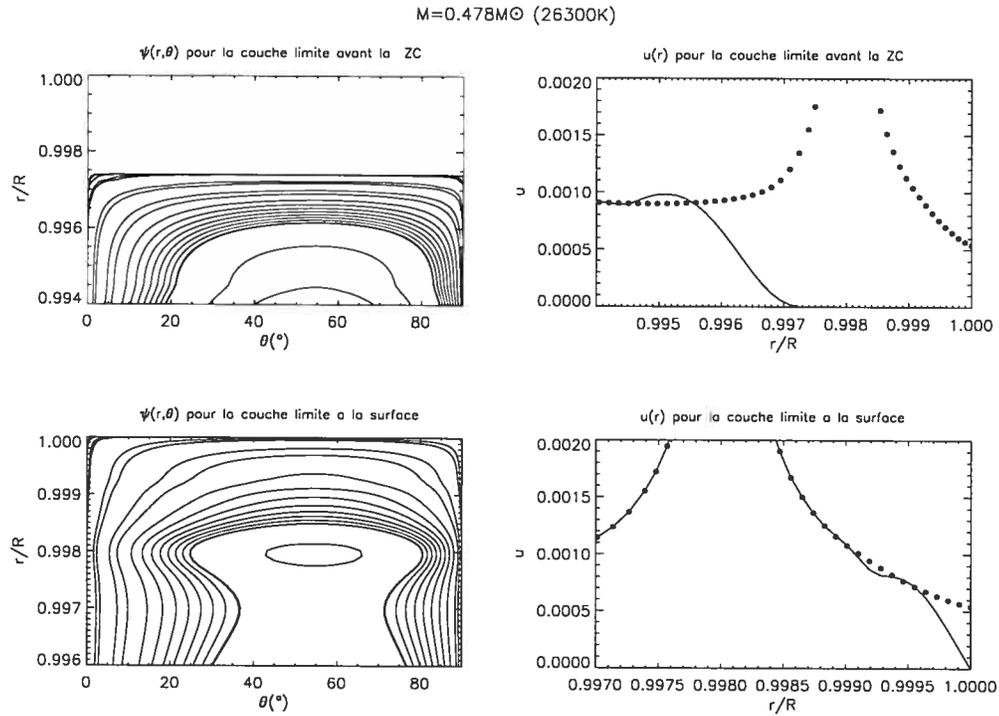


FIGURE 2.5 – Pour le modèle à 26300K, les 4 fenêtres permettent de visualiser l’ajout de la couche limite: les 2 du dessus pour son ajout juste en dessous de la zone de convection, les 2 du dessous pour son ajout juste en dessous de la surface. La fonction d’écoulement tracée par contours en 2D figure sur les 2 fenêtres de gauche, et les 2 de droite représentent u en fonction de r : $u_s(r)$ en petits cercles pleins, et $u(r)$ (donc couche limite comprise) en continu. La forme rectangulaire de chaque fenêtre correspond à une projection du plan méridien.

On peut définir x et y sans unités dans le programme, tel que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\theta}{\pi/2} \\ y &= r/R. \end{aligned} \tag{2.75}$$

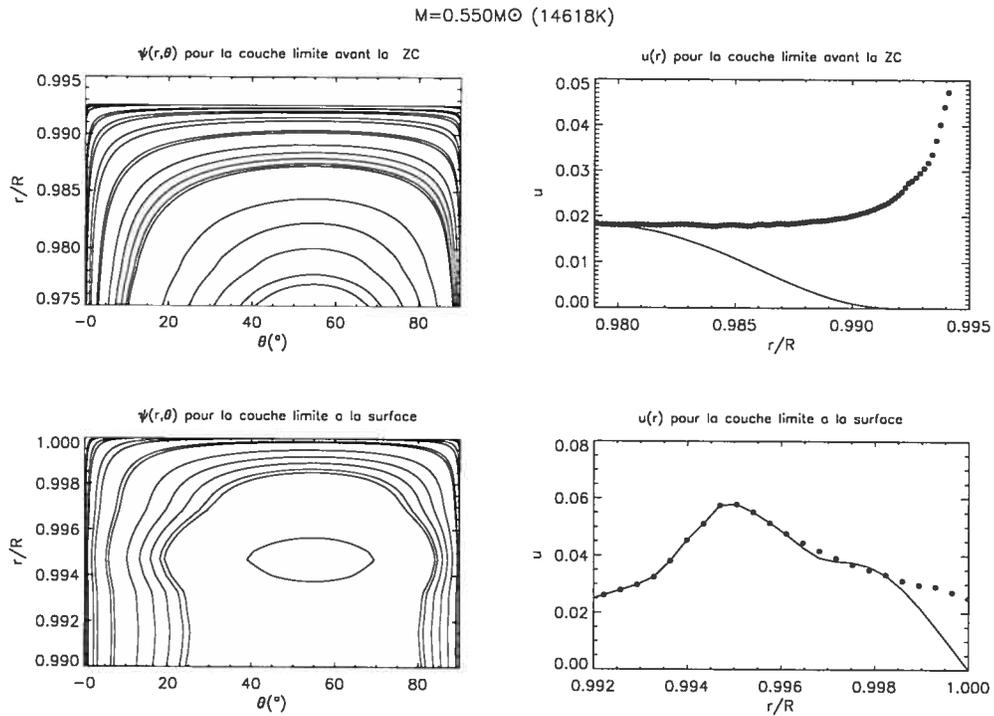


FIGURE 2.6 – Même chose qu'à la figure 2.5 mais pour le modèle à 14618K.

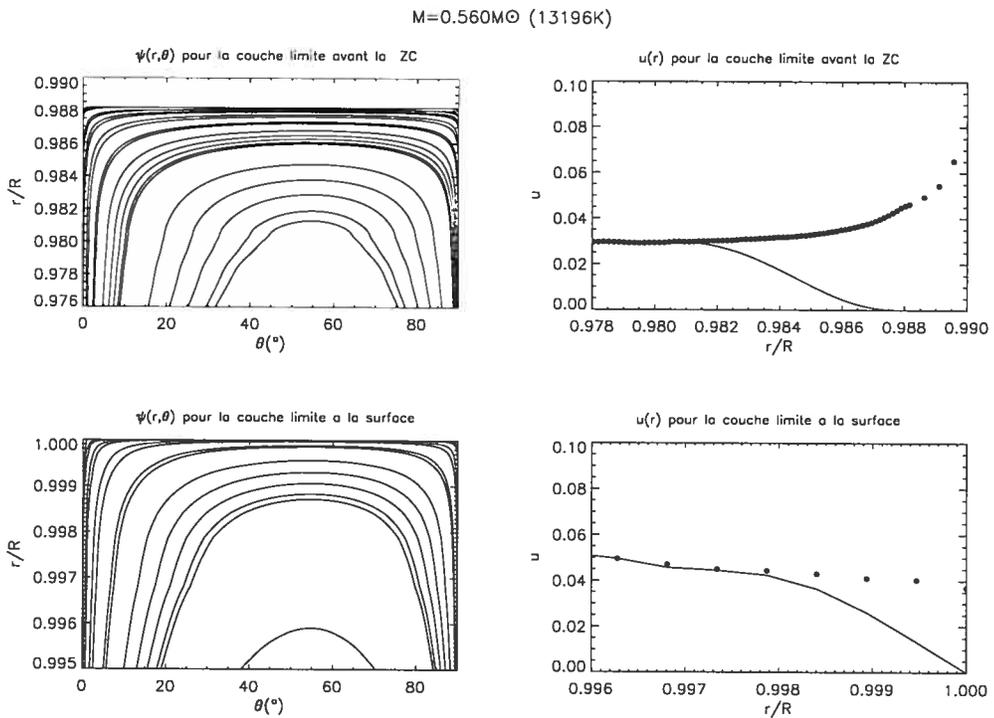


FIGURE 2.7 – Même chose qu'à la figure 2.5 mais pour le modèle à 13196K.

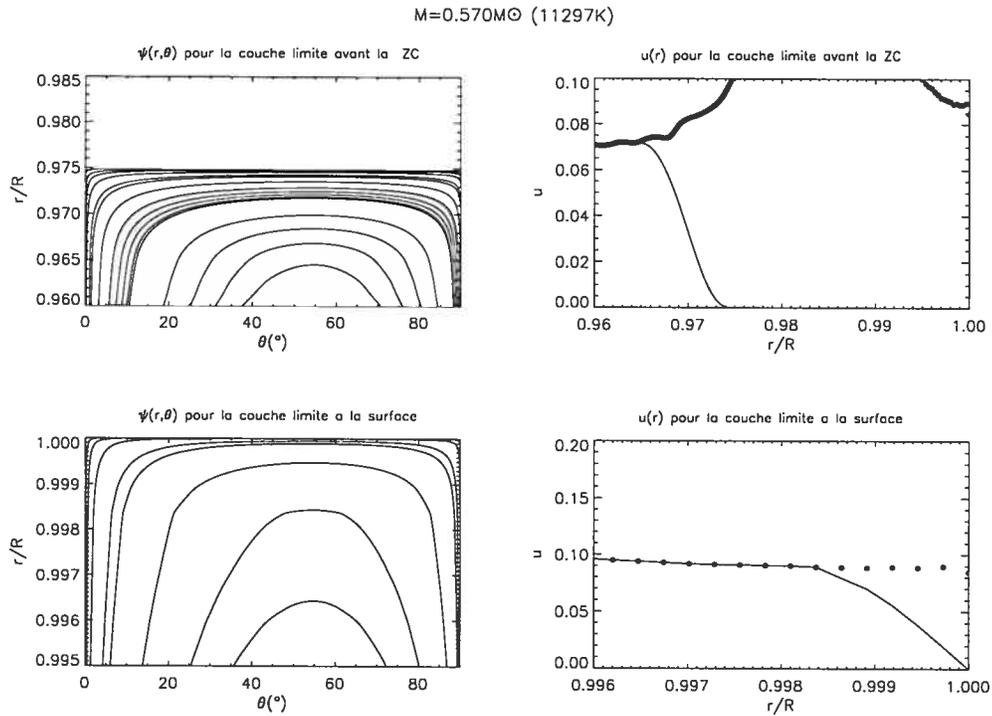


FIGURE 2.8 – Même chose qu'à la figure 2.5 mais pour le modèle à 11297K.

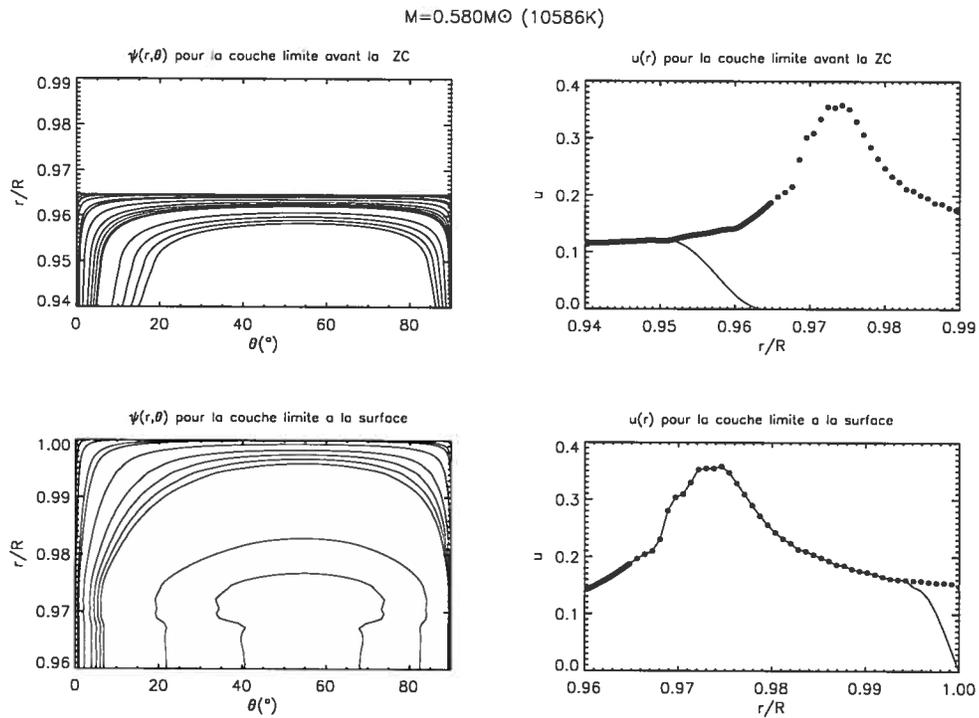


FIGURE 2.9 – Même chose qu'à la figure 2.5 mais pour le modèle à 10586K.

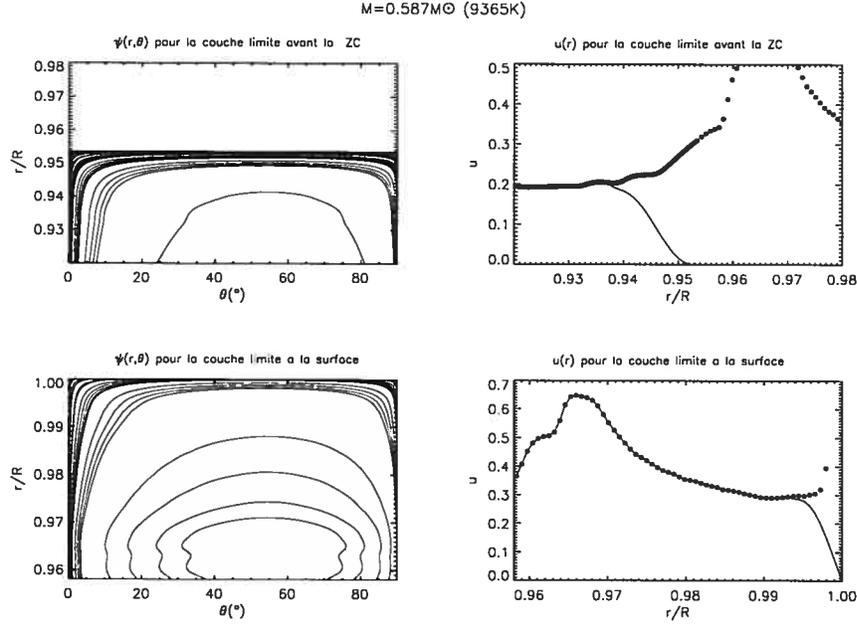


FIGURE 2.10 – Même chose qu'à la figure 2.5 mais pour le modèle à 9365K.

On peut alors définir (pour absorber certains termes de (2.74), mais en n'oubliant pas les facteurs R et $\frac{\pi}{2}$ issus des dérivées $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$):

$$\begin{aligned}
 \mu &= \rho y^2 \sin \theta \\
 \alpha_y &= \rho(r) D(r) r^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \\
 \alpha_x &= \rho(r) D(r) \frac{4}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \\
 \gamma_y &= -\rho(r) \left(u_r(r, \theta) + u_{tri}(r) \right) y^2 R \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \\
 \gamma_x &= -\rho(r) u_\theta(r, \theta) y R \left(\frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \\
 \beta &= 2\rho(r) \bar{u}_{tri}(r) \frac{1}{r} + \rho(r) \frac{d\bar{u}_{tri}}{dr} + \bar{u}_{tri}(r) \frac{d\rho}{dr} (yR)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

et donc à la place de (2.74):

$$\mu \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \gamma_y \frac{\partial c}{\partial y} + \gamma_x \frac{\partial c}{\partial x} + \beta c. \quad (2.77)$$

Il faut donc résoudre (2.77) avec les six définitions de (2.76) numériquement. La méthode choisie est celle des éléments finis, dont un aperçu est livré à l'annexe A. On reconnaît (A.4) mais en 2D, avec des termes (advectifs) de degré 1 et où $f = 0$, et U est remplacé par c .

Cette formulation (2.77) a l'avantage de fonctionner aussi bien en cartésien qu'en sphérique, toute l'information "sphérique" étant contenue dans (2.76). L'aspect du programme a facilité cette démarche, puisqu'il a suffi de substituer ces définitions de μ , α_y , α_x , γ_y , γ_x , β dans la partie du code (voir tableau A.3, routine "gaussp") où ces dernières sont fixées en fonction des noeuds.

2.4.2 Maillage

Dans (2.77), l'équation est spécifiée avec x et y , qui normalisent r et θ . Donc x est un vecteur défini de 0 à 1, et y de r_{lim}/R à 1. La valeur r_{lim} correspond au rayon en dessous duquel \vec{u}_{tri} ne peut pas être défini, puisque l'abondance en hydrogène est nulle (donc n_p est nulle par (2.11), et t_{si} diverge par (2.11), alors D_i selon (2.10) ne peut pas être défini, ni \vec{u}_{tri} par conséquent selon (2.13)). De toute façon, on a vu (au commencement de la section 2.3.3) que pour notre cause, il n'était pas nécessaire d'appliquer le calcul en profondeur vers le coeur ($x \rightarrow 0$). On peut d'ailleurs voir sur la figure 2.4 la limite inférieure du maillage en y (qui est projeté en r sur cette figure), puisque en dessous, la fonction d'écoulement est absente.

En x et y , la grille est décrite en annexe B.3. Rappelons que le maillage final choisi (tableau B.2) est de 160 éléments en x , 256 en y , et que le maillage est irrégulier (voir B.3.1).

2.4.3 Conditions initiales

La concentration d'hélium au temps zéro (donc $c(x, y, t)$ pour $t = 0$) est fixée à 1. Cette valeur est arbitraire, mais l'équation (2.77) étant linéaire, et la concentration étant présentée dans nos résultats comme le rapport de la concentration au temps t sur la concentration initiale, la valeur choisie n'a pas d'incidence.

2.4.4 Conditions limites

Sur les quatre limites spatiales, la concentration est fixée à 1 pour $y = 0$, et $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$ pour $x = 0$, $x = 1$, et $y = 1$. Puisque les vitesses sont nulles pour $y = 1$, alors il n'y a pas de flux entrant. Ceci revient à laisser la cellule s'écouler par le bas, le reste de ses "parois" laissées hermétiques.

2.4.5 Deux types de circulation méridienne

On a décidé (au 2.3.3 page 39) d'appliquer deux cas "extrêmes":

- 1) la circulation méridienne ne pénètre pas la zone de convection (couche limite juste en dessous de la zone de convection).
- 2) Elle la pénètre, et alors on l'applique jusqu'à la surface (couche limite à la surface).

Dans le cas 1), il faut se méfier du choix de zone de convection puisque, pour certains modèles, il y en a deux à la surface. On a pris la plus profonde (mais à la surface) à chaque fois (celle de l'HeIII). Cette zone est de plus en plus proche de la surface avec des modèles d'étoile de T_{eff} de plus en plus forte.

2.4.6 Critères d'arrêt

L'annexe B est consacré à l'étude de la (in)stabilité. On arrête l'évolution temporelle de la concentration dès que les signes d'instabilité se font ressentir (décrits dans le même annexe, en suivant l'affichage en deux dimensions sur (x, y) de $c(x, y, t)$ pour chaque t , comme sur la figure B.1), le signe le plus radical étant lorsque la courbe du logarithme de la concentration en fonction du temps (du même type que les figures 3.6 à 3.11) dévie abruptement.

Chapitre 3

Effet de la circulation

3.1 Évolution dans le temps de la concentration

3.1.1 Temps caractéristique

Si on veut observer l'hélium se mouvoir sous l'effet de la diffusion, mieux vaut anticiper l'ordre de grandeur de temps qu'il faudra attendre pour voir cette diffusion active. Point de départ: on veut savoir comment l'élément trace, sa masse, va varier dans le temps, sous l'effet de la diffusion. On sait que, par continuité, cette variation sera égale au flux de masse traversant toute surface perpendiculaire (à l'écoulement). Traduction:

$$\frac{d}{dt}(X\Delta M) = \oint (X\rho\vec{u}_{tri}) \cdot \hat{n}dS \quad (3.1)$$

où X représente l'abondance d'un élément donné, ΔM la masse comprise au dessus du rayon d'intérêt (où l'élément traverse la surface étudiée), dS un élément de surface infinitésimal (puisque l'intégrale est sur la surface), \hat{n} le vecteur unitaire normal à cette surface. On peut aussi directement écrire

$$\frac{d}{dt}(X\Delta M) = \int (X\rho\vec{u}_{tri}) \cdot \hat{n}dS \quad (3.2)$$

où l'intégrale se fait sur la sphère, et à condition qu'il n'y ait pas d'accrétion ou de perte de masse en surface. On résout donc la dernière équation:

$$\begin{aligned}
 \Delta M \frac{dX}{dt} &= -X \rho u_{tri} 4\pi R^2 \\
 \frac{1}{X} \frac{dX}{dt} &= -\frac{\rho u_{tri} 4\pi R^2}{\Delta M} \\
 \int_{X_0}^X \frac{1}{X} dX &= -\frac{\rho u_{tri} 4\pi R^2}{\Delta M} \int_0^t dt \\
 \ln\left(\frac{X}{X_0}\right) &= -\frac{\rho u_{tri} 4\pi R^2}{\Delta M} t \\
 X &= X_0 \exp\left(\frac{-\rho u_{tri} 4\pi R^2}{\Delta M} t\right). \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

On reconnaît la forme :

$$X = X_0 \exp(-t/\tau)$$

où τ est le temps caractéristique. Le rayon qui nous intéresse est celui juste en dessous de la zone de convection. Pour que (3.2) s'applique juste en dessous de la zone de convection (au lieu de (3.1)), rappelons qu'il ne faut pas d'accrétion ou de perte de masse en surface. Pour que ce soit vrai, il faut aussi que la zone de convection soit bien mélangée par la convection. En fait, il faudrait voir la zone de convection comme un réservoir qui se vide par le bas. Avec M_{zc} la masse confinée dans la zone de convection alors:

$$\tau = \frac{M}{\rho u_{tri} 4\pi r^2} \Big|_{r=R_{zc}}. \tag{3.4}$$

“Caractéristique” est ce temps s'il mesure celui pour que $1/e$ de la matière initialement dans la zone de convection soit déplacée en dessous par le tri gravitationnel. On peut suivre l'évolution temporelle de la concentration d'hélium ressortant de l'équation de transport, et noter à quel temps $t_0 + t$ la masse d'hélium initiale intégrée sur le volume occupé par la zone de convection

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_{zc}}^{R_*} \rho c(t_0) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

a diminué de ce facteur. Si ce temps concorde avec τ , voilà au moins un test numérique validé.

Pour les six modèles, les temps sont délivrés au Tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Temps caractéristiques

T_{eff} [K]	26300K	14618K	13196K	11297K	10586K	9365K
M/M_{\odot}	0.478	0.550	0.560	0.570	0.580	0.587
R [cm]	1.292E10	5.325E10	6.728E10	1.012E11	1.377E11	1.744E11
$\log g$ [cms^{-2}]	5.669	4.439	4.236	3.881	3.614	3.408
M_{zc}/M_{\odot}	1.057E-12	1.848E-10	4.809E-10	2.450E-9	6.947E-9	1.797E-8
$\rho(R_{zc})$ [gcm^{-3}]	6.112E-8	4.458E-8	4.257E-8	4.442E-8	3.809E-8	3.915E-8
$\vec{u}_{tri}(R_{zc})$ [cms^{-1}]	-2.136E-4	-1.655E-5	-1.112E-5	-5.218E-6	-3.211E-6	-2.071E-6
R_{zc} [cm]	1.289E10	5.286E10	6.649E10	9.877E10	1.313E11	1.669E11
temps caractéristique (10^6 ans)	0.003	0.837	4.036	6.565	7.701	47.836
âge depuis la ZAHB (10^6 ans)	?	1.346	0.517	5.241	2.972	5.644
Les temps de vie sont de l'ordre de 100×10^6 ans (d'après Sweigart & Gross (1976))						

Évidemment, la diffusion aura un effet observable seulement si le temps caractéristique est inférieur au temps de vie, ce pourquoi celui-ci est précisé dans le même tableau. En revanche, il n'a pas été possible de préciser ce temps de vie pour chaque étoile, puisqu'il semblerait (notamment dans Sweigart & Gross (1976)) que les différences de temps de vie entre chaque étoile soient moins notables que celles calculées d'un type de calcul à l'autre (avec semi-convection ou non, par exemple).

Si on lit ce tableau de gauche à droite, on devrait s'attendre à: une augmentation de la masse totale, diminution de la gravité, augmentation de la masse de la zone convective, diminution de la densité et du tri gravitationnel, augmentation du rayon sous la zone convective, et finalement, augmentation du temps caractéristique -le tout de façon monotone avec la température. Cette tendance est respectée, à l'exception de la densité, dont la légère fluctuation reflète la difficulté à obtenir des grilles de modèles du même âge, ainsi que l'erreur propagée par les fluctuations en T_{eff} (voir la section 2.3.2 page 29).

3.1.2 Affichage des résultats en 2D

Une fois que l'équation du transport est résolue (par les éléments finis, annexe A) pour une concentration c à un temps t_i , pour tout rayon r et tout angle polaire θ , on peut tracer $c(r, \theta, t_i)$ pour ce t_i . En 2D, le graphe d'une fonction de deux variables se reporte par courbes de niveaux, ainsi tracé sur chaque vignette rectangulaire figée dans le temps. La forme en

rectangle n'est qu'une projection du plan méridien où on retrouve les valeurs près de la surface de r/R verticalement et θ horizontalement. La progression temporelle de la concentration prend finalement l'allure d'une "bande dessinée" (deux exemples: figures 3.1 et 3.2). Chaque "vignette temporelle" est en fait deux fenêtres: celle du dessus représente la concentration d'hélium calculée avec le tri gravitationnel seulement, et celle du dessous avec le tri gravitationnel et la circulation méridienne, puisque l'objectif est de mesurer l'effet de la circulation méridienne sur le tri gravitationnel.

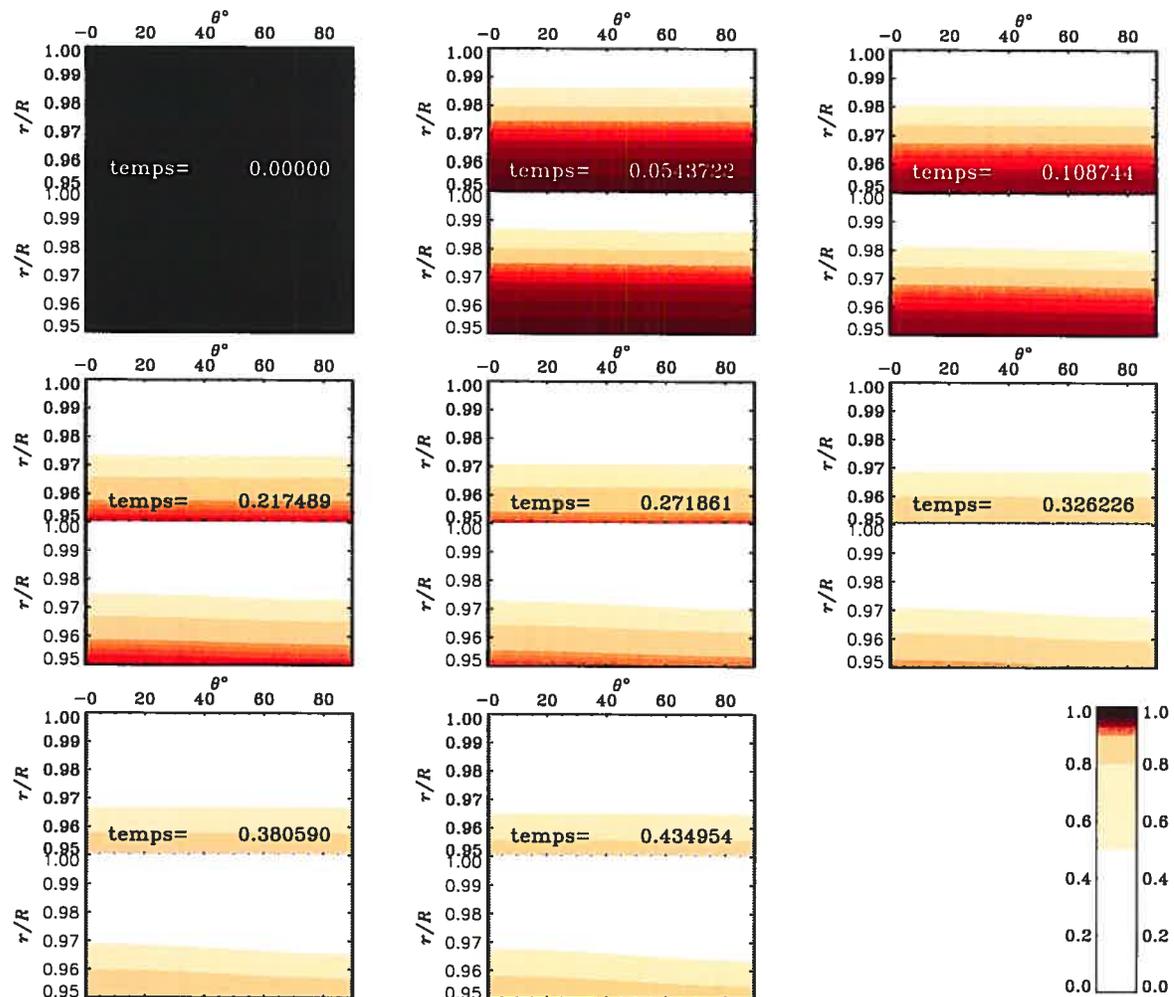


FIGURE 3.1 – Pour le modèle à 26300K, évolution temporelle de c/c_0 sous forme de contours de la concentration (selon les niveaux de concentration représentés sur la légende) sur le plan $[r/R, \theta]$. Chaque vignette affiche la concentration à un temps donné (tel que affiché, en 10^6 années) et chacune réunit deux fenêtres: au dessus, la concentration calculée avec u_{tri} et en dessous avec $u_{tri} + u_{CM}$, à $v_e = 50 \text{ km s}^{-1}$. Le calcul prend en compte une circulation méridienne qui ne pénètre pas la zone de convection.

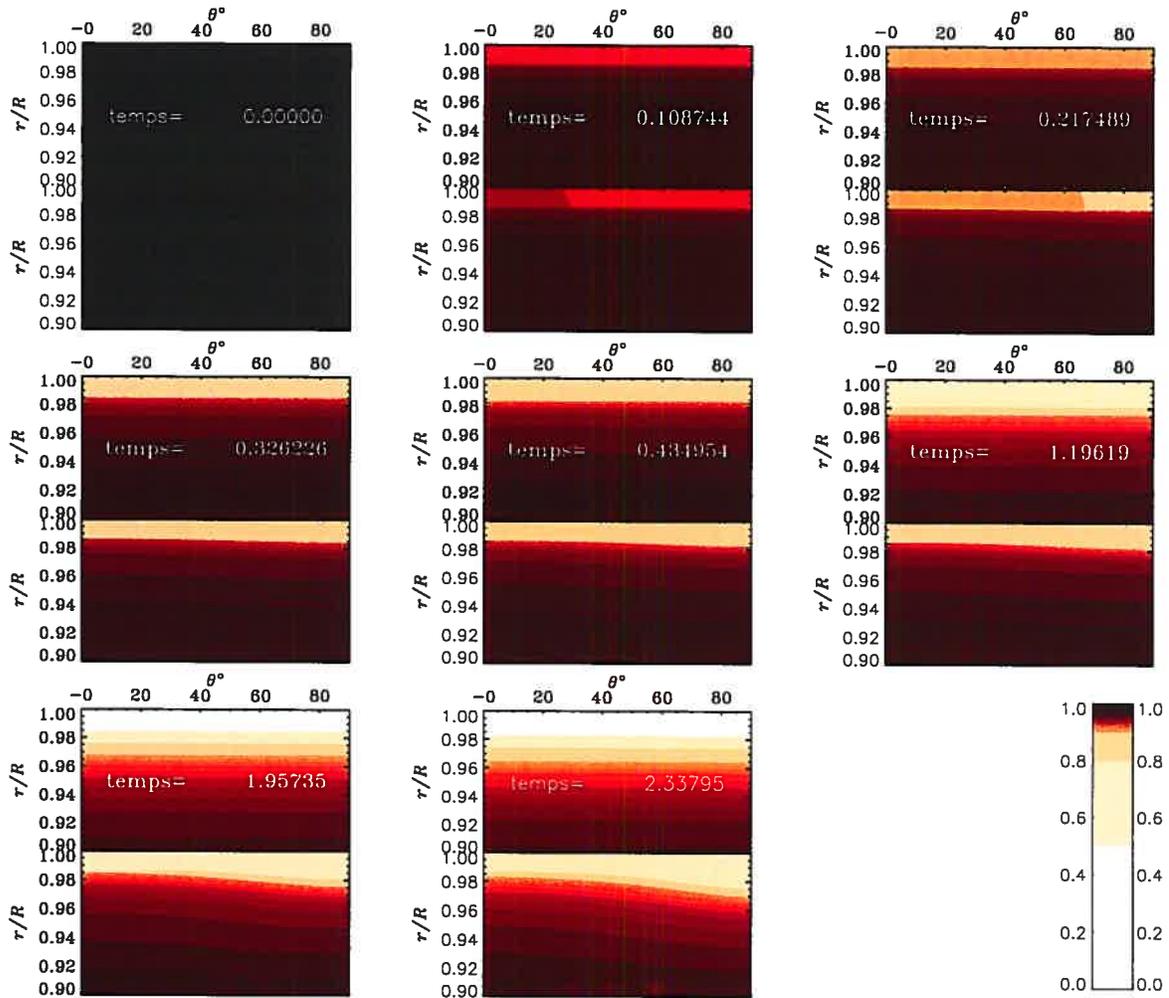


FIGURE 3.2 – Même chose qu’à la figure 3.1, mais pour le modèle à 13190K, à $v_e = 11 \text{ km s}^{-1}$, où cette fois, la circulation méridienne pénètre la zone de convection.

Déjà, cette comparaison très qualitative dénonce l’effet de la circulation méridienne, bien que très timide pour le modèle le plus chaud (à $v_e = 50 \text{ km s}^{-1}$). Que la circulation méridienne semble parvenir à maintenir l’hélium (figure 3.1) ou non (figure 3.2), une dépendance en θ se manifeste. Une visualisation par contours peut manquer toutefois d’information. Alors avant de commenter davantage la dépendance en θ , découpons-y plutôt des tranches latérales stratégiques, et analysons $c(r)$.

3.1.3 Affichage des résultats en 1D

Tranches latérales

Aux mêmes temps qu'en 2D, on trace $\log(c/c_0)$ où c_0 est la concentration initiale, en fonction de r/R , chaque fois pour $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (exemple pour le modèle à 26300K: figure 3.3). L'idée est de comparer les trois fenêtres inférieures (concentration obtenue sous l'effet du tri gravitationnel et de la circulation méridienne) avec la première (tri gravitationnel mais sans circulation méridienne, indépendamment de l'angle). Question de renforcer cette comparaison, à la figure suivante, chacune des ces trois fenêtres a été soustraite de la première, c'est à dire que la concentration d'hélium sous forme logarithmique, calculée sous l'effet du tri gravitationnel seulement, a été soustraite à celle calculée avec le tri gravitationnel et la circulation méridienne.

L'effet au pôle ($\theta = 0^\circ$) et à l'équateur ($\theta = 90^\circ$) est remarquable. Ce comportement est prédictible mathématiquement, et justifié physiquement. Par l'approche abstraite, on pouvait aussitôt s'en rendre compte avec les équations (2.32) et (2.33). Au pôle ($\mu = \cos(\theta) = 1$):

$$u_r(r, 1) = \varepsilon u(r) \quad (3.5)$$

$$u_\mu(r, 1) = 0 \quad (3.6)$$

À l'équateur ($\mu = 0$):

$$u_r(r, 0) = -(1/2)\varepsilon u(r) = -(1/2)u_r(r, 1) \quad (3.7)$$

$$u_\mu(r, 0) = 0 . \quad (3.8)$$

En somme, la circulation méridienne aide le tri gravitationnel à l'équateur, avec une grandeur absolue deux fois plus faible que celle avec laquelle elle contre le tri gravitationnel au pôle. Un suivi imaginaire de la matière le long des lignes d'écoulement de la figure 2.4 peut confirmer

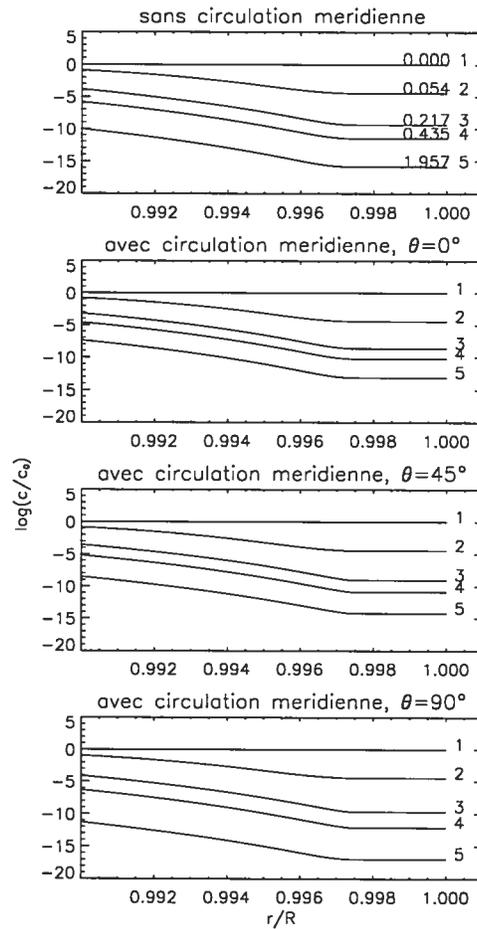


FIGURE 3.3 – Pour le modèle à 26300K, évolution temporelle du logarithme de la concentration en fonction du rayon. Pour la fenêtre du haut, calcul avec u_{tri} , et les trois autres, avec $u_{tri} + u_{CM}$ aux angles indiqués (au dessus). Seul $\theta = 45^\circ$ est affiché dans le cas sans circulation méridienne, puisque la courbe obtenue pour d’autres angles est foncièrement la même. La valeur du temps en 10^6 années accompagne chaque courbe correspondante, et des numéros y sont associés en substitut de légende pour la figure 3.4.

visuellement cette tendance: au pôle, la matière “fraîchement” exhumée des régions plus profondes s’écoule juste en dessous de la zone de convection, et y navigue avec pour cap l’équateur. Alors que la direction de cet écoulement s’oppose directement au tri gravitationnel au pôle, elle s’aligne avec lui à l’équateur. Par ailleurs, cette transition entre la remontée radiale au pôle, et cette propagation latérale direction l’équateur occasionne une certaine congestion de matière au pôle. On se figure une concentration à l’équateur appauvrie par l’agglutination en aval. Il y a donc plus d’hélium à empêcher de couler au pôle, que de matière à aider à écouler

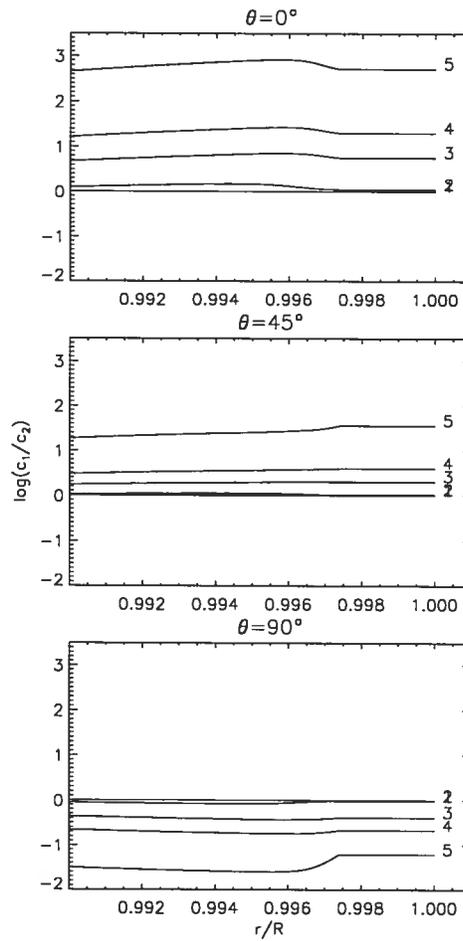


FIGURE 3.4 – Pour le modèle à 26300K, différence entre le logarithme de la concentration calculé avec u_{tri} (indice 1) et celui avec $u_{tri} + u_{CM}$ (indice 2) (soit le logarithme du rapport des concentrations), tracée en fonction du rayon, pour 0° , 45° , et 90° . Les numéros indiqués correspondent aux temps affichés à la figure 3.3

à l'équateur.

Tranches radiales

Examinons $\log(c/c_0)$ en fonction de θ juste en dessous de la zone de convection. La figure 3.5 confirme la différence entre le pôle et l'équateur, et on peut évaluer la progression entre ces deux extrêmes.

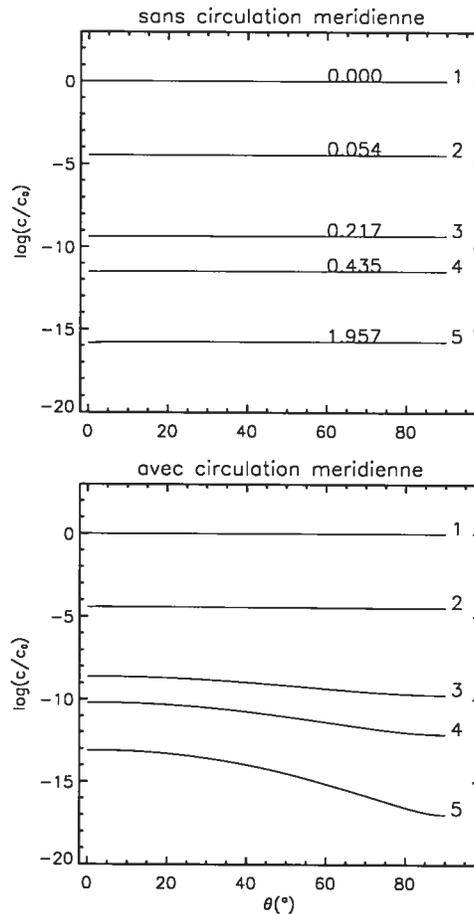


FIGURE 3.5 – Pour le modèle à 26300K, évolution temporelle du logarithme de la concentration en fonction de la colatitude, calculé sur la fenêtre du haut avec u_{tri} , juste en dessous de la zone de convection. La valeur du temps en 10^6 années accompagne chaque courbe correspondante. Dans la fenêtre du bas, le calcul a été effectué avec $u_{tri} + u_{CM}$. Les temps correspondants sont indiqués par les mêmes numéros que sur la fenêtre supérieure.

3.2 Vitesse de rotation v_e limite

3.2.1 v_e , un calibrateur

La circulation méridienne dépend de ε (relations (2.32) et (2.33), ou (2.36)), qui à son tour dépend de v_e (par l'équation (2.29)), la vitesse de rotation à l'équateur. La concentration c dépend donc de v_e . Intéressons-nous à cette affirmation. Les figures 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 tracent l'évolution temporelle de la moyenne spatiale de la concentration d'hélium dans la zone de convection pour diverses vitesses de rotation, pour les six modèles à l'étude. La

courbe pointillée horizontale indique une baisse de $[\text{He}]$ d'un facteur 2.5. Ce facteur correspond au facteur limite en dessous duquel la convection s'arrête dans ce qui était alors la zone de convection de l'hélium.

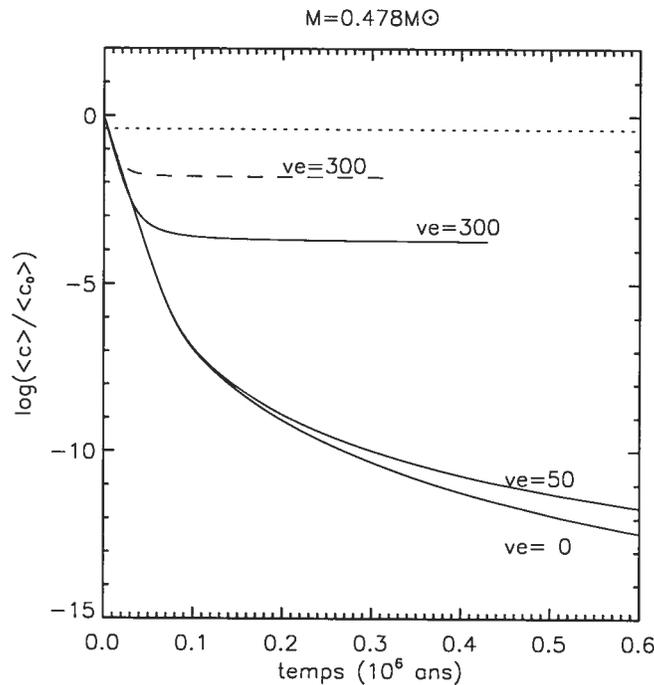


FIGURE 3.6 – Pour le modèle à 26300K, évolution temporelle de la moyenne spatiale de la concentration d'hélium, calculée à différents v_e en kms^{-1} . En tirets, le calcul laisse la circulation pénétrer la zone de convection, alors que les lignes continues indiquent un calcul où la couche limite est définie juste en dessous de la zone de convection. Certaines courbes sont coupées avant le développement de l'instabilité que cette trop grande valeur cause.

D'un même départ temporel, l'évolution se ramifie entre des plateaux pour les vitesses supérieures, et des pentes négatives aux vitesses inférieures. Charbonneau et Michaud (1988) avaient déjà reconnu ce phénomène dans leur étude de l'influence de la circulation méridienne. Alors que dans un premier temps la zone de convection se vide efficacement sous l'action de la circulation méridienne, c'est encore au pôle qu'il reste un afflux d'hélium. Pour le comprendre, rappelons qu'au pôle, la circulation méridienne oppose directement le tri gravitationnel. Vient un moment où la concentration a diminué au point que la valeur du flux ascendant d'hélium -amené par la circulation méridienne au pôle- oppose exactement celui descendant amené par

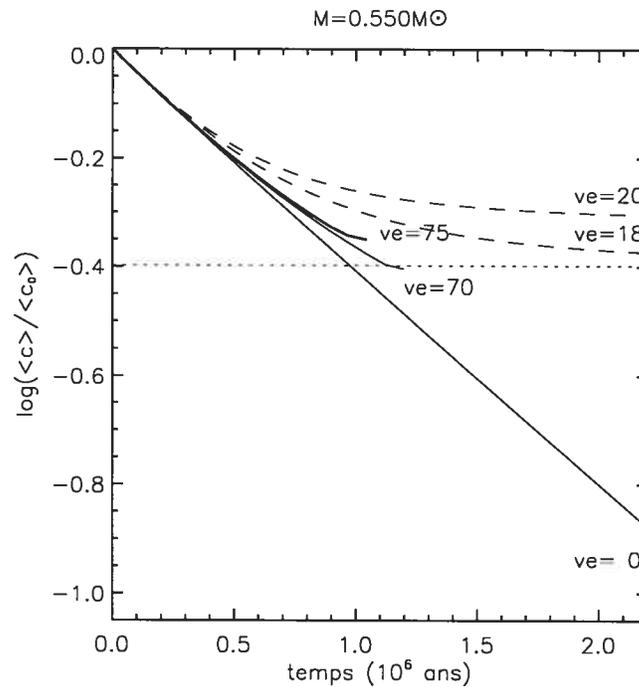


FIGURE 3.7 – Même chose qu'à la figure 3.6, mais pour le modèle à 14618K.

le tri gravitationnel, et la concentration se stabilise. D'où le plateau. Plus vite tourne l'étoile, plus vite cet écoulement natif du pôle conduira la matière à compenser l'hélium. Plus vite tourne l'étoile, plus vite la concentration d'hélium se stabilise. Ainsi, toutes les courbes du $\log(c/c_0)$ en fonction du temps finiront par atteindre un plateau, sauf celle où la circulation méridienne ne participait pas au calcul ($v_e = 0$). Mais ce plateau n'est pas encore apparu dans les échelles de temps affichées dans les figures 3.6 à 3.11, pour les courbes associées à de plus faibles vitesses de rotation.

3.2.2 v_e critique et résultat final

Il faut déterminer à quelle vitesse v_e critique, pour chaque modèle, la circulation méridienne peut empêcher le tri gravitationnel de faire disparaître la zone de convection de l'hélium. En pratique, il faut repérer la courbe associée à un v_e la plus proche de la ligne horizontale pointillée (qui indique une baisse de $[\text{He}]$ d'un facteur 2.5), au dessus de celle-ci. Cet exercice

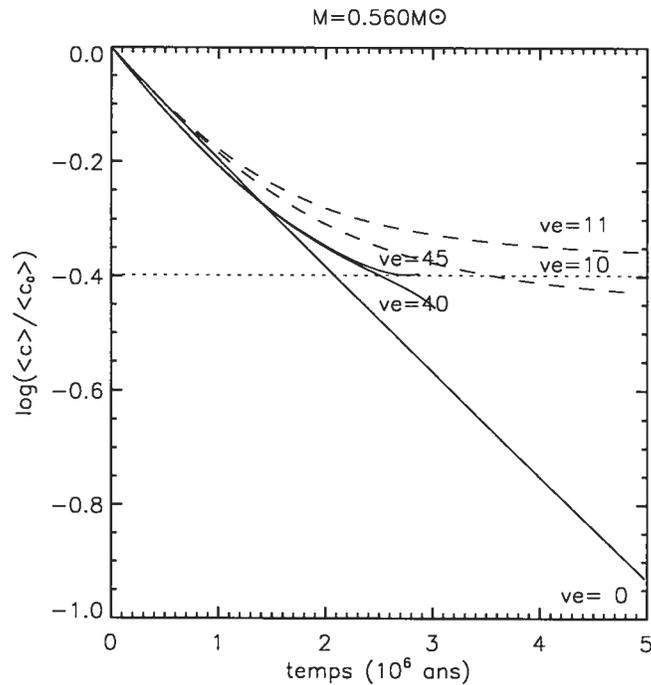


FIGURE 3.8 – Même chose qu'à la figure 3.6, mais pour le modèle à 13190K.

est à accomplir deux fois par modèle, soit pour les deux types de calcul: un pour la circulation méridienne pénétrant la zone de convection (tirets), un pour le cas où celle-ci est stoppée juste en dessous de la zone de convection par une couche limite (lignes continues). À noter que pour le modèle à 26300K, sans même chercher la valeur nominale de la vitesse critique, on sait qu'il faut (bien) plus que $v_e = 300 \text{ kms}^{-1}$ à la circulation méridienne pour maintenir la zone de convection d'hélium, déjà clairement irréaliste. Le verdict est présenté dans la figure 3.12. Cette figure 3.12 est l'essence de ce projet.

Elle résume pour quelle v_e , théoriquement, la circulation méridienne peut empêcher le tri gravitationnel de faire disparaître la zone de convection de l'hélium, facilitant la lévitation des métaux. Pour comprendre comment les barres d'erreur ont été calculées, prenons l'exemple de la figure 3.10. Pour la circulation méridienne ne pénétrant pas la zone de convection, si $v_e = 15 \text{ kms}^{-1}$ conduit à une abondance plus élevée que la vitesse critique, et $v_e = 13 \text{ kms}^{-1}$ à une abondance inférieure, alors l'erreur estimée est de plus ou moins $(15 - 13)/2 = 1 \text{ kms}^{-1}$.

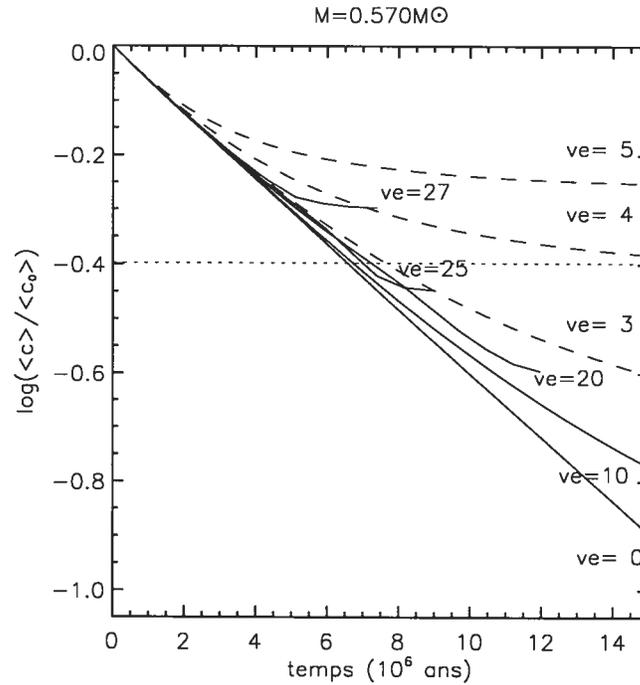


FIGURE 3.9 – Même chose qu'à la figure 3.6, mais pour le modèle à 11297K.

En prime, les observations sont superposées pour comparer théorie et observations. Celles-ci sont repérées par la démarcation en pointillés et les zones de couleur, où la première indique le $v \sin i$ maximal observé à ces T_{eff} (figure 23 de Behr (2003a), figure 8 de Behr (2003b), et figure 5 de Recio-Blanco et al. (2004)), et les zones résument en couleur si pour de telles étoiles, on observe ou non des anomalies d'abondances. La recette pour lire ces résultats en (a): si pour un modèle (incluant les deux types de calcul), la marque (cercle) de v_e critique est en dessous de la ligne pointillée, alors la circulation méridienne peut, en théorie, maintenir des valeurs d'abondances standards. Si cette marque est au dessus: la vitesse de rotation pour rendre la circulation méridienne efficace est moins probable. Dans ce cas, les anomalies d'abondances sont donc théoriquement favorisées.

La question: est-ce que la région où les marques sont en dessous de la ligne pointillée correspond à la zone de couleur associée aux abondances standards en observation (jaune, ou à la limite, orange)? Est-ce que la région où les marques sont au dessus de la ligne pointillée correspond

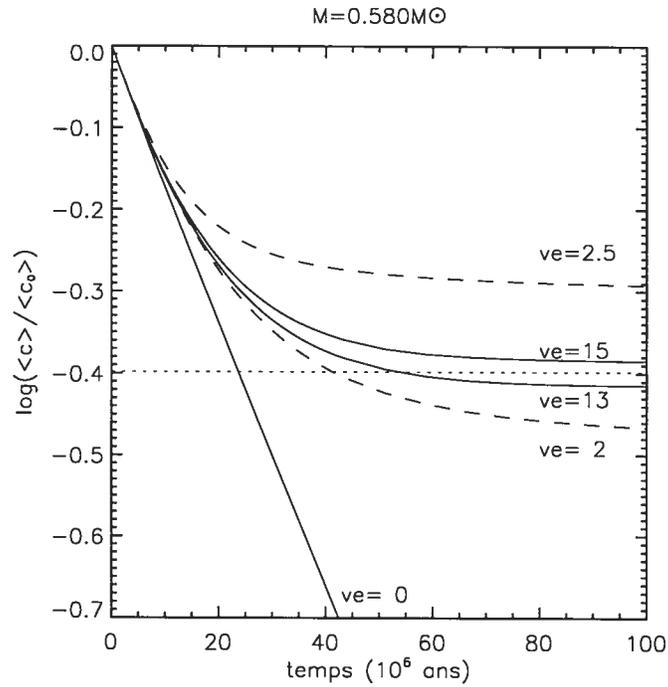


FIGURE 3.10 – Même chose qu'à la figure 3.6, mais pour le modèle à 10586K.

à la zone de couleur associée aux anomalies d'abondances en observation (rouge) ? La réponse étant positive, la théorie et les observations sont en accord, du moins pour ces six modèles. Le résultat en (b) permet de vérifier si nos résultats de v_e (en (a)), obtenus théoriquement par la simulation numérique, répondent à la prévision (elle aussi théorique) donnée pour un modèle (T_{eff} , $\log g$) par l'équation (4.1). Cette vérification est discutée dans le suivant et dernier chapitre.

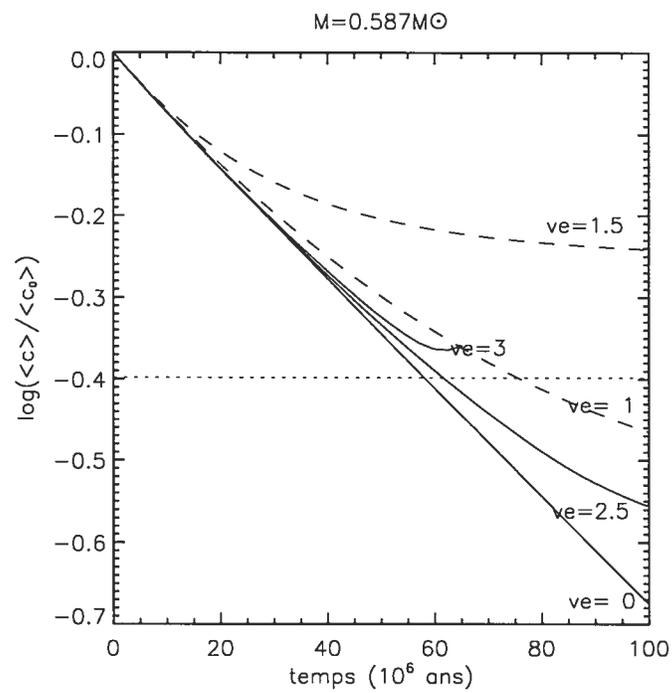


FIGURE 3.11 – Même chose qu'à la figure 3.6, mais pour le modèle à 9365K.

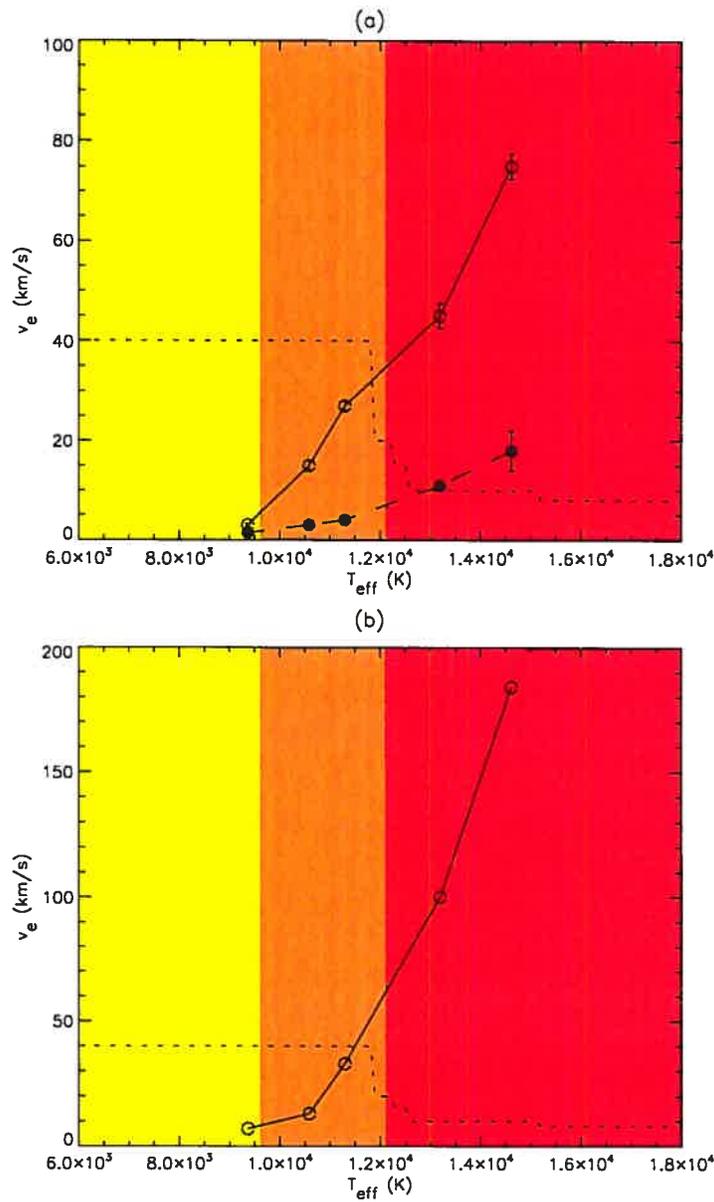


FIGURE 3.12 – (a): v_e critique versus T_{eff} pour chacun des 6 modèles. Le modèle à 26300K n’y figure pas, question de présenter les résultats à une échelle lisible (sa v_e critique dépasse 300 kms^{-1}). Le cercle vide repère le calcul avec la circulation méridienne pénétrant la zone de convection, le cercle plein celui où elle ne la pénètre pas. La démarcation en pointillés et les zones de couleurs se conforment aux observations, où la première indique le $v \sin i$ maximal observé à ces T_{eff} , et les zones résument en couleur si pour de telles étoiles, on observe ou non des anomalies d’abondances. En jaune: valeurs standards. En rouge: anomalies d’abondances. En orange: marge de transition pour prendre en compte la variabilité d’un amas globulaire à un autre. (b): v_e critique selon l’équation (4.1), calculée avec la T_{eff} et le $\log g$ de chaque modèle, avec pour valeur d’ancrage (celle qu’on substitue au facteur de proportionnalité) une v_e de 100 kms^{-1} à 15000 K et $\log g = 4.3$ (à voir dans la section 4.2).

Chapitre 4

Discussion et conclusion

Dans les observations pour les amas globulaires d'étoiles de la HB, la distribution "abondances normales" versus "abondances anormales" fait echo à la distribution bimodale de vitesses.

Le phénomène critique à l'origine de la distribution bimodale d'abondances reposerait dans la concentration critique d'hélium, en dessous de laquelle sa zone convective ne peut plus subsister, laissant alors libre cours à la séparation chimique d'éléments lourds dans cette région. Mais existe-t-il un lien avec la distribution bimodale de vitesse? Cette question fut lancée dans le cadre des étoiles A (et B) pour comprendre l'existence des étoiles HgMn et AmFm où le même caractère bimodal apparaît. L'idée: tester théoriquement l'influence de la circulation méridienne sur le tri gravitationnel, puisque le second est responsable de faire couler l'hélium, alors que le premier peut l'en empêcher, mais à raison d'une certaine vitesse de rotation de l'étoile assez grande. La circulation méridienne pourrait, en ce sens, faire le lien entre les abondances et la vitesse de rotation. Quels sont les résultats chez les étoiles A et B?

4.1 Résultats dans la littérature pour les étoiles HgMn

Dans Michaud (1982), il s'avère manifeste qu'aucune valeur universelle de v_e ne puisse trancher entre "assez", ou, "pas assez d'effet de la circulation méridienne", pour que, en dessous et au dessus de ce seuil, une HgMn se forme, ou non. Cette limite, calculée dans cet article par moyenne spatiale de la circulation méridienne sur 1/3 - 2/3 du plan méridien,

plafonne à 90 kms^{-1} . Toutefois, elle varie de 90 à 4 kms^{-1} avec $\log g = 4.4$ à 3.5 . Cette valeur seuil de v_e pour les étoiles HgMn est donc très couplée à la gravité. Une étude en 2D (Charbonneau & Michaud (1988)) -celle-là même de laquelle ce projet s'inspire- confirme la conclusion dérivée par le transport 1D. Cette fois, pour une étoile de $3 M_{\odot}$, $v_e = 75 \text{ kms}^{-1}$, et $1.8 M_{\odot}$, $v_e = 100 \text{ kms}^{-1}$. Y est publiée aussi leur figure 3, comparable aux figures 3.6 à 3.11 dans ce projet, dans la détermination d'une vitesse v_e critique.

Cette étude a été parallèlement appliquée aux étoiles AmFm dans Michaud et al. (1983a), puis Charbonneau & Michaud (1988) et Charbonneau & Michaud (1991). Ce sont des étoiles A où le calcium et/ou le scandium sont déficients par rapport à la valeur solaire. En revanche, les métaux "lourds" (à partir du pic du fer) sont surabondants, d'où l'intensification des raies métalliques, tel que annoncé par leur appellation.

4.2 Comparaison entre étoiles de la HB et étoiles HgMn

En plus de se rencontrer dans un même voisinage sur un diagramme HR, le fait que les étoiles de la HB partagent la même tendance à présenter des anomalies d'abondances ou non, bien en correspondance avec une distribution bimodale de vitesse de rotation chez les étoiles HgMn, a déclenché l'idée de ce projet. En reprenant le calcul de la circulation méridienne, et notamment de $u(r)$ ((2.49) et la couche limite) pour des modèles d'étoiles évoluées jusqu'à la HB, on reprenait l'idée de Michaud (1982), en cherchant une v_e critique, en dessous de la laquelle le tri gravitationnel serait responsable de la disparition de la zone de convection.

En premier niveau de comparaison, autant les étoiles de la HB aux $T_{\text{eff}} > 12000\text{K}$, que les étoiles HgMn, devraient avoir perdu leur zone de convection d'hélium en faveur de la séparation chimique de certains éléments, parce que ces deux types d'étoiles auraient des vitesses de rotation trop faibles pour rendre la circulation méridienne efficace contre le tri gravitationnel.

En revanche, si on veut pousser la comparaison aux valeurs mêmes de vitesses critiques obtenues, les 100 kms^{-1} , nécessaires pour qu'une étoile HgMn ne se forme pas, sont supérieurs aux 2.5 à 75 kms^{-1} obtenus pour éviter des anomalies d'abondances chez les étoiles de la HB de moins de 14618K . Mais rappelons que ces $v_e = 100 \text{ kms}^{-1}$ obtenus chez les étoiles HgMn venaient avec $\log g = 4.4$. La vitesse critique dépend de la gravité, puisqu'elle conditionne

l'efficacité de la circulation méridienne contre le tri gravitationnel, qui à son tour dépend de la gravité. On vient de voir que Michaud (1982) met l'emphase sur cette dépendance sur la gravité, en montrant comment v_e critique peut passer de 90 à 4 kms⁻¹ avec $\log g$ qui va de 4.4 à 3.5. Pour les étoiles de la HB étudiées ici (le modèle le plus chaud exclu), on passe de 75 à 3 kms⁻¹ avec $\log g$ qui va de 4.4 à 3.4. Déjà, si cette dépendance de v_e sur g ne semble pas être strictement la même pour les deux groupes d'étoiles, au moins les ordres de grandeurs sont cohérents. En fait, une relation entre g et v_e^l (v_e critique) a été proposée dans Michaud et al. (2003) pour ces deux groupes d'étoiles:

$$v_e^l \propto g^{1.75}/T_{\text{eff}}^2 . \quad (4.1)$$

Or, pour $v_{e1}^l = 3 \pm 0.25$ kms⁻¹, et $v_{e2}^l = 75 \pm 2.5$ kms⁻¹,

$$v_{e1}^l/v_{e2}^l \simeq 0.04 \pm 0.005 . \quad (4.2)$$

Par ailleurs, avec $(T_{\text{eff}})_1 \simeq 9365.378\text{K}$, $g_1 \simeq 10^{3.408}\text{cms}^{-2}$, et $(T_{\text{eff}})_2 \simeq 14618.302\text{K}$, $g_2 \simeq 10^{4.439}\text{cms}^{-2}$,

$$\frac{g_1^{1.75}(T_{\text{eff}})_2^2}{g_2^{1.75}(T_{\text{eff}})_1^2} \simeq 0.038 . \quad (4.3)$$

Nos résultats, pris avec deux modèles extrêmes, respectent donc (4.1). Cette relation (4.1) semble, jusqu'ici, plutôt valide chez les deux groupes d'étoiles, renforçant l'hypothèse selon laquelle les couches externes des étoiles HgMn et de la HB sont comparables.

Toutefois, si on étudie chacun de nos modèles avec (4.1), avec, pour valeur d'ancrage (celle qu'on substitue au facteur de proportionnalité), une v_e de 100 kms⁻¹ à 15000 K et $\log g = 4.3$ (proposée dans Michaud et al. (2003)), les résultats ne respectent pas à chaque fois cette équation. La figure 3.12 (b) en témoigne, avec des valeurs prévues par (4.1) supérieures au double des v_e critiques obtenues pour les modèles à 13196 et 14618 K. Ces déviations soulèvent peut-être une différence apportée par le niveau des zones de convection entre les deux groupes d'étoiles (qui serait ainsi évaluée par ce projet), peut-être une erreur dans nos résultats, ou

encore, la portée limitée de (4.1) avec cette valeur d’ancrage. En revanche, on peut vérifier sur cette figure 3.12, que, pour les modèles plus froids, les résultats en (a) s’entendent bien avec ceux de (b). Remarquons que là où la gravité est presque constante sur la ZAMS (âge zéro de la séquence principale) pour une masse d’étoile donnée, tel que seule T_{eff} varie, sur la ZAHB, à la fois T_{eff} et g sont fonctions de cette masse. On ne peut donc pas évaluer indépendamment l’effet de la température et de la gravité dans notre étude.

4.3 Discussion critique

L’ensemble des calculs réalisés dans ce projet se fondent sur les grilles de modèles fournis. Avant de chercher à évaluer l’incertitude sur ces calculs, il faut rendre compte de celle déjà apportée par les grilles. On a vu à la section 2.3.2 page 29 que l’incertitude sur la T_{eff} se reflétait sur le choix de la zone de convection, puis on a pu mesurer à la section 3.1.1 page 50 combien cette erreur pouvait se répercuter légèrement sur la densité.

Par ailleurs, si cinq des modèles fournis (de $0.550 M_{\odot}$ à $0.587 M_{\odot}$) ont été calculé avec le même code, le plus chaud ($0.478 M_{\odot}$) provient d’un programme différent. Ceci n’influence pas le résultat final, puisque le modèle le plus chaud n’apparaît pas dans la Figure 3.12, notre base d’interprétation.

À ce doute, il faut ajouter la précision du choix de différences finies pour résoudre (2.42) et (2.43), de celle de la grille spatiale ou temporelle des éléments finis (voir annexes A et B), de l’estimation visuelle du v_e critique (le nombre de courbes pour les Figure 3.6 à Figure 3.11, le repérage du plateau juste au dessus de la ligne horizontale pointillée etc...), autant d’erreurs qui ont pu infiltrer le résultat.

Quant à l’interprétation de ce résultat, elle dépend aussi de la précision des observations sur les $v \sin i$ maximaux observés, puisqu’on a dû supposer ici une équivalence entre vitesse de rotation, et vitesse de rotation projetée ($\sin i = 1$), pour se repérer sur quelles vitesses critiques étaient “plus probables” pour chaque ensemble de températures. Cette supposition est valable tant que l’échantillonnage d’étoiles dans les amas observés est assez grand pour que l’importance de l’angle de visée diminue avec les statistiques.

Puisqu’il contiendrait le changement d’un mode à l’autre, l’intervalle en température de 9500K

à 13500K mérite une étude attentive. C'est dans cette région qu'un renforcement des études théoriques et en observation pourrait permettre de conclure avec plus de fiabilité. Il n'est pas évident, avec le présent projet, de conclure par le fait que, ensemble, la circulation méridienne et la diffusion sont suffisantes pour expliquer les observations. Le nombre de modèles, non seulement supérieur à six, mais encore permettant de faire une étude échantillonnée de façon quasi continue en T_{eff} , est requis pour attribuer une valeur concluante à la température charnière entre les deux modes. Si une telle étude intensive est concrétisée, il n'est pas exclu que la température charnière théorique obtenue n'épouse pas parfaitement la température charnière observée. Si tel est le cas, il faudra inclure d'autres phénomènes physiques que la diffusion et la circulation méridienne pour justifier les observations.

Toutefois, les résultats de ce projet confirment que l'approche de départ -tester l'effet de la circulation méridienne- est valable: la circulation méridienne peut avoir un effet notable et maintenir la zone de convection de l'hélium dans les étoiles de la HB, avec un rapport entre la diffusion et les vitesses de rotation, non seulement comparable à celui des étoiles HgMn, mais aussi compatible avec le comportement des abondances chimiques sur la branche.

Bibliographie

- Behr, B. B. 2003a, ApJS, 149, 67
- . 2003b, ApJS, 149, 101
- Behr, B. B., Cohen, J. G., McCarthy, J. K., & Djorgovski, S. G. 1999, ApJ, 517, L135
- Behr, B. B., Djorgovski, S. G., Cohen, J. G., McCarthy, J. K., Côté, P., Piotto, G., & Zoccali, M. 2000, ApJ, 528, 849
- Burnett, D. S. 1987, in Addison-Wesley publishing company
- Charbonneau, P. & Michaud, G. 1988, ApJ, 327, 809
- . 1991, ApJ, 370, 693
- Cohen, J. & McCarthy, J. 1997, AJ, 113, 1353
- Dorman, B., Root, R., & O'Connell, R. 1993, ApJ, 419, 596
- Ferraro, F. R., Paltrinieri, B., Pecci, F. F., Rood, R. T., & Dorman, B. 1998, ApJ, 500, 311
- Glaspey, J., Michaud, G., Moffat, A. F. J., & Demers, S. 1989, ApJ, 339, 926
- Golub, G. & V., L. 1996, in Matrix computations, third edition, The Johns Hopkins University Press, London, 152
- Grundahl, F., Catelan, M., Landsman, W. B., Stetson, P. B., & Andersen, M. I. 1999, ApJ, 524, 242
- Grundahl, F., Vandenberg, D. A., & Andersen, M. I. 1998, ApJ, 500, L179
- Hui-Bon-Hoa, A., LeBlanc, F., & Hauschildt, P. H. 2000, ApJ, 535, L43
- Kinman, T., Castelli, F., Cacciari, C., Bragaglia, A., Harmer, D., & Valdes, F. 2000, A&A, 364, 102

- Krogdahl, W. 1942, *ApJ*, 96, 124
- Michaud, G. 1982, *ApJ*, 258, 349
- Michaud, G. 1987, in *Conference on Faint Blue Stars, 2nd*, Tucson, AZ, Schenectady, NY, L. Davis Press, Inc., 249–259
- Michaud, G., Richer, J., & Richard, O. 2003, in *Stellar Rotation, Proceedings IAU Symposium No. 215*, 457–466
- Michaud, G., Tarasick, D., Charland, Y., & Pelletier, C. 1983a, *ApJ*, 269, 239
- Michaud, G., Vauclair, G., & Vauclair, S. 1983b, *ApJ*, 267, 256
- Moehler, S. 2004, *IAU Symposium No. 224.*, Cambridge University Press, 395
- Moehler, S., Sweigart, A. V., & Catelan, M. 1999, *A&A*, 351, 519
- . 2001, *PASP*, 113, 1162
- Monelli, M., Pulone, L., Corsi, C. E., Castellani, M., Bono, G., Walker, A. R., Brocato, E., Buonanno, R., Caputo, F., Castellani, V., Dall’Ora, M., Marconi, M., Nonino, M., Ripepi, V., & Smith, H. A. 2003, *AJ*, 126, 218
- Piotto, G., King, I. R., Djorgovski, S. G., Sosin, C., Zoccali, M., Saviane, I., De Angeli, F., Riello, M., Recio-Blanco, A., Rich, R. M., Meylan, G., & Renzini, A. 2002, *A&A*, 391, 945
- Press, W. H., Vetterling, W. T., Teukolsky, S. A., & Flannery, B. P. 1992, in *Numerical Recipes in Fortran. Second Edition*. Cambridge University Press, 99–122
- Recio-Blanco, A., Piotto, G., Aparicio, A., & Renzini, A. 2004, *A&A*, 417, 597
- Richer, J., Michaud, G., Rogers, F., Iglesias, C., Turcotte, S., & LeBlanc, F. 1998, *ApJ*, 492, 833
- Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, *ApJ*, 456, 902
- Serenelli, A. & Weiss, A. 2005, *A&A*, 442, 1041
- Sweigart, A. V. & Gross, P. G. 1976, *ApJS*, 32, 367
- Tassoul, J. L. 1978, in *Princeton Series in Astrophysics*, Princeton: University Press
- Tassoul, J. L. & Tassoul, M. 1982, *ApJS*, 49, 317

Remerciements

Ce sont deux piliers que mes deux directeurs de recherche ont personnifié. Georges Michaud m'a orientée par son savoir modèle et sa patience apaisante. Paul Charbonneau, qui en plus de collectionner mes stylos, m'a construite par son exigence, tout en me vivifiant par son attitude bouillonnante de bon vivant. Je les remercie de tout coeur tous deux, je reste marquée par leur générosité.

Si chaque courriel répondu à Jacques Richer concluait par un merci et un nombre interminable de points d'exclamation, ils ne suffiront pas à représenter ma gratitude. Pour les grilles de modèles, mais aussi pour le moindre problème technique vis à vis de la production de ce mémoire, Jacques n'a pas hésité à se proposer pour passer des heures de forçat quand son horaire ne le permettait pas.

Au bureau, je remercie mon ami David Munger, pour qui la quasi absence dans le bureau ne correspond pas à la fiabilité de son support. Merci pour leur complicité touchante à Caroline Perrera, André-Nicolas Chené, Mathieu Vick, Frederic Poidevin, Marie-Maude De Denus-Baillargeon, Pier-Emanuel Tremblay, et vive la maîtrise de m'avoir permise de les rencontrer.

Merci à ma famille de croire en moi à ce point. Clin d'oeil à mon père, qui, muni d'une orange et d'un citron, m'a donné dès mes quatre ans le goût des astres. Merci à ma grand-mère qui m'a guidée pour rendre cette maîtrise une maîtrise de moi-même.

C'est évident, mon valeureux époux Alexandre St-Laurent Lemerle mérite la médaille de la patience!

Annexe A

Les éléments finis

Cet annexe n'a pas la prétention d'enseigner comment utiliser les éléments finis. Si tel est l'objectif du lecteur, celui-ci aura tout avantage à lire le manuel de Burnett (1987).

Les deux premières sections de cet annexe visent à donner un aperçu de la démarche des éléments finis, question de mieux se donner une idée de comment les calculs ont été traités dans ce projet. En revanche, les deux suivantes s'adressent au lecteur qui, ayant lu le manuel de Burnett (1987), cherche à voir comment cette méthode s'est adaptée à ce projet dans le contexte des étoiles, pour résoudre l'équation du transport avec la diffusion et la circulation méridienne.

La notation, les équations, et la section A.2 sont inspirées de Burnett (1987).

A.1 Démarche

La méthode consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte par une fonction $\tilde{U}(\vec{x}, t)$ défini par morceaux sur des sous domaines de Ω . Les n sous domaines Ω_e doivent être tels que

$$\bigcup_{e=1}^n \Omega_e = \Omega \text{ et } \tilde{\Omega}_e \cap \tilde{\Omega}_f = \emptyset \quad \forall e \neq f \quad (\text{A.1})$$

où $\tilde{\Omega}_e$ désigne l'intérieur de Ω_e . Autrement dit, les Ω_e sont une partition de Ω . Les fonctions $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$, définies sur chaque sous domaines, sont choisies parmi une famille arbitraire de fonc-

tions (généralement polynomiales). $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ dans chaque sous domaine Ω_e est déterminé par un nombre fini de valeurs (ou de valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous domaine, et appelés noeuds. $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ est une interpolation entre les valeurs aux noeuds. Le sous domaine muni de son interpolation est appelé élément. Chercher une solution par éléments finis consiste donc à déterminer quel $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ on attribue à chaque sous domaine pour que la fonction globale $\tilde{U}(\vec{x}, t)$ obtenue par juxtaposition de ces fonctions locales soit proche de la solution du problème. Parmi les contraintes qu'on impose à la solution approchée cherchée, il y a souvent au moins une continuité simple à la frontière entre les sous domaines (voir la figure A.2). La qualité de la solution approchée dépend de la division en

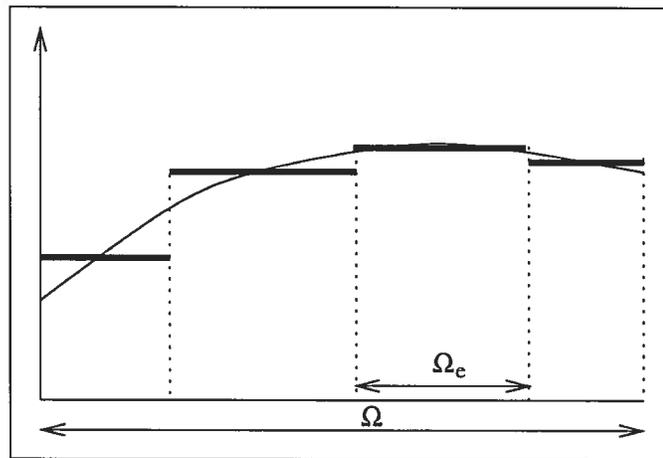


FIGURE A.1 – Solution approchée discontinue d'une fonction scalaire sur un domaine Ω de dimension 1.

sous domaines (nombre et dimensions des sous domaines), du choix de la famille de $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ dans chaque sous domaine, et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous domaines. Une fois ces choix faits, il reste à rechercher une combinaison de $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ qui satisfasse approximativement les équations.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par étapes successives:

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω , avec des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.

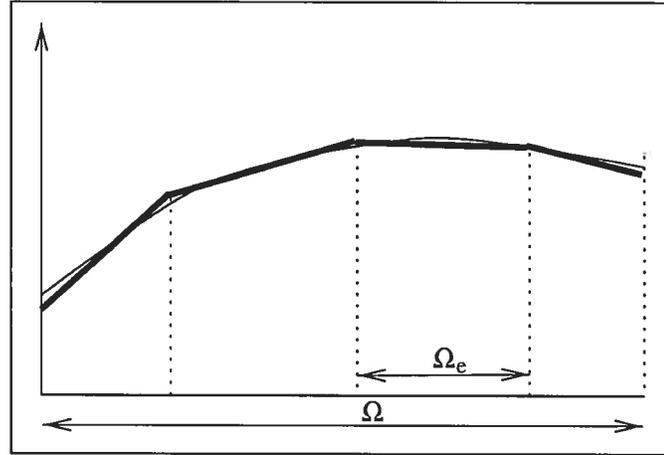


FIGURE A.2 – Solution approchée continue d'une fonction scalaire sur un domaine Ω de dimension 1. Ici, $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ sont des fonctions polynômiales de degré 1.

2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites. Plusieurs formes d'intégrale sont possibles, mais celui de la méthode des résidus de *Galerkin* est préférée dans ce projet (motivé par la page 87 Burnett (1987)). L'idée est de poser $\tilde{U}_e(\vec{x})$ comme une combinaison linéaire de fonctions $\phi(\vec{x})_i$, lesquels on fixe.

$$\tilde{U}(\vec{x}, t; a) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(\vec{x}) \quad (\text{A.2})$$

De cette sommation, seuls les coefficients a_i sont a priori inconnus, et composent ainsi les degrés de liberté de \tilde{U} . On résout alors:

$$\int_{\Omega_e} R(\vec{x}; a_i) \phi_i dx \quad (\text{A.3})$$

où R est le résidu de l'équation différentielle, c'est à dire, que lorsqu'on arrange les termes d'une équation pour que tous les termes se retrouvent du même côté de l'égalité (et donc l'autre côté, c'est zéro), le résidu est défini comme ce premier côté de l'égalité.

3. On divise Ω en sous domaines (on construit le maillage).

4. Par le choix de $\phi_i(\vec{x})$, on a choisit la famille de $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$, c'est à dire à la fois la position des noeuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent $\tilde{U}_e(\vec{x}, t)$ en fonction des valeurs aux noeuds (et des dérivées). La maille complétée par ces informations

est alors appelée *élément*.

5. On ramène le problème à un problème discret: c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux noeuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux noeuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis peut se résumer en deux questions: comment choisir le problème discret dont la solution est "proche" de la solution exacte (?), et, quelle signification donner au mot "proche" (?).

6. On résout le problème discret: c'est la résolution.

7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux noeuds et en déduire d'autres grandeurs.

8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et vérifier si elle satisfait nos critères.

A.2 Exemple pour la diffusion en 1D

Allons-y concrètement. Exploitions l'exemple de l'équation de la diffusion:

$$\mu(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right) + \beta(x) U(x, t) = f(x, t) \quad (\text{A.4})$$

sur $x_a < x < x_b$ et $t > t_0$.

Avec les conditions limites (C.L):

$$\begin{aligned} U(x_a, t) &= U_a(t) && \text{Dirichlet} \\ \left(-\alpha(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right)_{x_a} &= \tau_a(t) && \text{Newmann} \\ U(x_b, t) &= U_b(t) && \text{Dirichlet} \\ \left(-\alpha(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right)_{x_b} &= \tau_b(t) && \text{Newmann} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

et les conditions initiales (C.I):

$$U(x, t_0) = U_0(x) \quad (\text{A.6})$$

L'espace et le temps sont impliqués, si bien qu'on est amené à poser dans un premier temps:

$$\tilde{U}^e(x, t; a) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i^e(x, t) \quad (\text{A.7})$$

Une première idée serait de traiter le temps comme une dimension supplémentaire, qui, avec la dimension en x , conduirait à résoudre les éléments finis en 2D. Il n'en est rien ici. Si, en effet, on change le point de vue de (A.7) par:

$$\tilde{U}^e(x, t; a) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i^e(x) \quad (\text{A.8})$$

cette fois, temps et espace sont séparés. L'espace est résolu par les éléments finis, le temps par différences finies (introduites brièvement à la section 2.3.2). Ainsi soit-il: on relie donc $\{a\}_i$ au temps t_i , à $\{a\}_{i+1}$ au temps t_{i+1} , à partir de a_0 au temps t_0 spécifié par la C.I (A.6). Parmi les diverses méthodes, les différences finies centrées, avec une précision de $O(\Delta(t^2))$ pour $\theta = 1/2$ est populaire. Alors:

$$a(t) \simeq (1 - \theta)a(t_{n-1}) + \theta a(t_n) \quad (\text{A.9})$$

où $\theta = \frac{t-t_{n-1}}{\Delta t_n}$, (instable pour $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$).

A.2.1 D'une équation analytique à un système matriciel discrétisé

Il sera toujours avantageux de lire Burnett (1987) pour comprendre comment sa recette en douze étapes participent à construire de façon méthodologique un code d'éléments finis. Ce qui suit n'a qu'un but limité pour reconnaître comment l'équation à résoudre devra être traduite dans un tel code, de manière à être traitée par les éléments finis.

A.2.2 Former un système de n équations

Reprenons l'équation (A.4). Ce n'est pas elle qu'on traite, mais son résidu de Galerkin. Concrètement, on applique (A.3) pour (A.4).

$$\int^e \left[\mu(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial x} \right) + \beta(x) U^e(x, t; a) - f(x, t) \right] \phi_i^e(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.10})$$

La dérivée du plus grand degré est intégrée par partie (par souci de symétrie de $[K]$ par la suite, et surtout pour faire apparaître un degré moindre qui représente explicitement une des conditions limites, celle de Newmann). C'est le second terme de (A.4) qui souffre cette intégration par partie, ce qui défigure cette même équation en:

$$\begin{aligned} \int^e \mu(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial t} + \int^e \frac{d\phi_i^e(x)}{dx} \alpha(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial x} dx \\ + \int^e \phi_i^e(x) \beta(x) U^e(x, t; a) dx = \int^e f(x, t) \phi_i^e(x) dx \\ - \int^e \left[\left(\alpha(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial x} \right) \right] \phi_i^e(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Une fois avoir posé une expression pour $\phi_i^e(x)$, si on substitue (A.8) dans (A.11):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\int^e \phi_i^e(x) \mu(x) \phi_j^e(x) dx \right) \frac{da_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^n \left(\int^e \frac{d\phi_i^e(x)}{dx} \alpha(x) \frac{d\phi_j^e(x)}{dx} dx \right) a_j(t) + \\ + \sum_{j=1}^n \left(\int^e \phi_i^e(x) \beta(x) \phi_j^e(x) dx \right) a_j(t) = \int^e f(x, t) \phi_i^e(x) dx - \\ - \left[\left(\alpha(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial x} \right) \phi_i^e(x) \right]_{x_1}^{x_n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Alors ceci revient à un système de n équations compactées dans une notation matricielle de la forme:

$$\begin{aligned}
[C]^e \left\{ \frac{da(t)}{dt} \right\} + [K]^e \{a(t)\} &= \{F(t)\}^e \\
C_{ij}^e &= \int^e \phi_i^e(x) \mu(x) \phi_j^e(x) dx \\
K_{ij}^e &= \int^e \frac{d\phi_i^e(x)}{dx} \alpha(x) \frac{d\phi_j^e(x)}{dx} dx + \int^e \phi_i^e(x) \beta(x) \phi_j^e(x) dx \\
F_{ij}^e &= \int^e f(x, t) \phi_i^e(x) dx - \left[\left(\alpha(x) \frac{\partial U^e(x, t; a)}{\partial x} \right) \phi_i^e(x) \right]_{x_1}^{x_n} \quad (A.13)
\end{aligned}$$

Assemblage des e systèmes de n équations, en un système

Pour chaque élément (e), il y a un système (A.13). En effet, jusqu'ici, on avait e équations de la forme: $[C]^e \left\{ \frac{da}{dt} \right\}^e + [K]^e \{a\}^e = \{F\}^e$, et l'idée est de les rassembler en une seule $[C] \left\{ \frac{da}{dt} \right\} + [K] \{a\} = \{F\}$.

Résolution du système

Ce système d'équations reformulé, avec l'évolution temporelle, par les n incréments dans le temps (qui ne concernent que les coefficients a_i), peut s'écrire sous la forme:

$$[C] \left\{ \frac{da}{dt} \right\}_n + [K] \{a\}_n = \{F\}_n \quad (A.14)$$

C'est là qu'on utilise (A.9). Alors:

$$\left(\frac{1}{\Delta t_n} [C] + \theta [K] \right) \{a\}_n = \{F\}_{n-\theta} + \left(\frac{1}{\Delta t_n} [C] - \theta [K] \right) \{a\}_{n-1} \quad (A.15)$$

Et si on pose:

$$[K_{eff}] = \frac{1}{\Delta t_n} [C] + \theta [K] \quad (A.16)$$

alors (A.15) équivaut à:

$$[K_{eff}] \{a\}_n = \{F_{eff}\} \quad (A.17)$$

où

$$\{F_{eff}\} = (1 - \theta)\{F\}_{n-1} + \theta\{F\}_n + \left(\frac{1}{\Delta t_n}[C] - (1 - \theta)[K]\right)\{a\}_{n-1} \quad (\text{A.18})$$

où $\{F\}_n$, est lui même issu de $\{F\}_{ns}$ selon l'interpolation linéaire des n intervalles de temps en ns étapes chacun, de telle sorte que ((11.110) Burnett (1987)):

$$F_n = F_0 + \frac{n}{ns}(F_{ns} - F_0) . \quad (\text{A.19})$$

$\{F_{eff}\}$ et $[K_{eff}]$ sont construits et (A.16) est solutionnée à chaque pas de temps.

Grâce à cette reformulation, cette résolution est numériquement sans détour.

Pédagogue exemplaire, David S. Burnett assimile l'écriture de (A.13) à partir de (A.4) en six étapes (les premières de la douzaine). Dans ces 6 étapes "sur papier", il faut aussi avoir choisi une expression pour $\phi_i^e(x)$: de façon directe (interpolation bilinéaire, p159) ou indirecte (isoparamétrique p305 à 361). Les six autres étapes appartiennent à la voie numérique.

David S. Burnett automatise sa formulation au point d'y joindre des codes numériques, adaptables à (presque) tout projet. Le code utilisé pour ce projet est une version adaptée d'un tel code ("UNAFEM") valable pour tout processus de diffusion en 2D.

A.3 Code

La page 805 de Burnett résume le code UNAFEM suggéré, et la page qui la précède renvoie aux bribes de code correspondantes. Il ne reste qu'à personnaliser ce code UNAFEM pour notre cause: la simulation du transport dans une étoile dont on nous fournit une grille de modèle. Voici un organigramme, prévu pour aider à se familiariser avec le squelette du code utilisé dans ce projet.

routines	sous-routines ou étapes résumées	références
header	1. Permet d'afficher à l'écran, durant l'exécution, toutes sortes de détails utiles (rappeler les paramètres choisis, afficher l'évolution temporelle etc.)	"étape 7" de Burnett
mesh2d	<p>2.1. C'est le moment d'appeler la grille de modèle, puisqu'on va déjà avoir besoin de connaître à quels rayons se trouvent l'hydrogène (seulement en présence d'hydrogène, on peut définir une vitesse de diffusion, puisqu'il faut une densité de protons dans (2.9) avec (2.6) et (2.5) et la zone de convection, qu'on va prendre en 2.3.)</p> <p>2.2. Ajout si nécessaire d'éléments dans la grille (pour affiner près de la zone de convection). Il faut donc interpoler les autres propriétés de la grille (densité, température, etc) à ces nouveaux rayons.</p> <p>2.3. Définition de la grille x, y en cartésien.</p>	p647 Burnett
⇒ grid1d	2.4. Génère une grille d'éléments bilinéaires quadrilatéraux et calcule les coordonnées des noeuds et matrices de connectivité.	p609-641 Burnett
⇒ initdt	2.5. Lit les données initiales, met les limites et les points d'intégration.	
⇒ gaussp	<p>2.6.1. Calcule la position des points de gauss,</p> <p>2.6.2. calcule le tri gravitationnel.</p> <p>2.6.3. et la vitesse de circulation méridienne, par:</p> <p>⇒ merid calcul de $u(r)$ ($u_s(r)$ puis ajout de la couche limite)</p> <p>2.6.4. Reste à calculer les coefficients de l'équation différentielle en ces points. Pour ça, il faut interpoler avec:</p>	

	<p>⇔ spline</p> <p>⇔ splint</p>	<p>p109-110</p> <p>Numerical</p> <p>Recipes-</p> <p>Press</p> <p>et al.</p> <p>(1992)</p>
writeout	<p>3. Pour sortir les valeurs des fichiers à exploiter par un autre programme (ex: en IDL).</p>	
boucle sur le temps		
form	<p>4. Forme le système de matrices à partir des équations (e) équation (A.15) à (A.19)).</p>	<p>“étape</p> <p>8” p484-</p> <p>487,</p> <p>Burnett</p>
	<p>⇔ elem23</p> <p>4.1. Type d’élément: voir la référence.</p>	<p>p630-</p> <p>641,</p> <p>Burnett</p>
	<p>⇔ shap23</p> <p>4.2. Évalue la fonction “shape” et les dérivées aux noeuds “parents” (qui interviennent dans l’interpolation isoparamétrique).</p>	
aplybc	<p>5. Modifie le système matriciel pour incorporer les conditions de Dirichlet.</p>	<p>“étape</p> <p>9” p247-</p> <p>249 et</p> <p>p488-</p> <p>490,</p> <p>Burnett</p>

calfun	6. Résout le système (A.17) pour les valeurs de nos fonctions avec θ de (A.9).	“étape 10” p249-255 et p457- 493, Burnett p152 Golub & V. (1996)
	6.1. Contrairement à Burnett, ici, on modifie le système pour pouvoir le résoudre de façon non-symétrique, par:	
⇒ tribu		
⇒ rshbu	6.2. Résolution du système.	
⇒ writeout	6.3. Sort la solution $U_a(x, y)$ au temps t dans le fichier de sortie.	
fin de la boucle sur le temps		

A.4 Différences entre UNAFEM et notre code

Elles apparaissent dans le tableau précédent, quand celui-ci est comparé à la page 805 de Burnett (1987). On peut toutefois dégager trois différences majeures:

1. Les coefficients de l'équation différentielle sont interpolés à partir d'une grille de modèle stellaire (section 2.3.2).
2. À l'équation de diffusion traitée par l'UNAFEM, nous ajoutons un terme d'advection (dérivée du premier degré). Celui-ci a pour effet de rendre la matrice à résoudre (section A.2.2) non-symétrique. Il a donc fallu trouver d'autres méthodes que celle de Burnett (1987) pour diagonaliser la matrice (concrètement, avec les sous-routines "tribu" et "rshbu"). Pour ce faire, contrairement à Burnett, son "étape 11" s'insère dans notre sous-routine "calfun".
3. Le traitement en "entrée" et en "sortie" ne ressemble pas à la description faite par Burnett (1987). Pour les entrées, le traitement a évolué depuis que Burnett a conçu ce manuel. Dans

notre cas, il s'agit d'une grille de données pour un modèle stellaire. Pour les sorties (son étape 12), on se préoccupe davantage de l'affichage de l'évolution de la concentration avec le temps, et de l'interprétation des résultats, que de l'approche scrupuleuse du manuel (à évaluer le taux de convergence etc...), qui relève peut-être plus de l'ingénierie.

Annexe B

Stabilité numérique

B.1 L'importance du maillage

Le choix du maillage se répercute aussi bien sur la validité physique, que sur l'exécution numérique. Pour calculer une intégrale, ou de façon équivalente, une équation différentielle, l'utilisation des éléments finis -ainsi que tout moyen numérique- fait appel à l'approximation d'une somme discrète.

Si la validité mathématique est condamnée dès qu'il y a approximation, la validité physique, elle, est encore acceptée en dessous d'un certain niveau d'approximation. Puisque c'est "l'acceptabilité" qui décide de ce niveau, fixer celui-ci reste à la discrétion de l'exigence des physiciens.

Par ailleurs, le calcul numérique fonctionne comme un engrenage dans lequel une erreur peut se développer, et où une valeur traitée comme infinie peut enrayer un calcul. Dans la liste des erreurs qui peuvent s'amplifier, celle apportée par la troncature est classique (mais peut être aussi amortie), comme celles choisies pour résoudre l'équation (2.44) page 30.

Par ailleurs, pour comprendre comment une erreur peut grossir via le traitement temporel du problème, reprenons l'équation du transport.

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot (\nabla c) = \nabla \cdot (\rho D \nabla c) . \quad (\text{B.1})$$

Ainsi, chaque ∇c_{erreur} synthétisé par une erreur -aussi minime selon “l'exigence des physiciens” soit-elle- participe à $\frac{\partial c}{\partial t}$. Puisque la résolution temporelle de l'équation du transport est séquentielle, à l'élément i , au temps $t + \nabla t$, $c(t + \nabla t)_i$ aura changé par rapport à $c(t)_i$ de $\nabla_i \cdot (\rho_i D_i \nabla_{\text{erreur}} c_i) - \rho \vec{u}_i \cdot (\nabla_{\text{erreur}} c_i)$. Si, par exemple, à l'élément $i + 1$, $c(t + \nabla t)_{i+1}$ n'a pas varié par rapport à $c(t)_{i+1}$, le gradient ∇c_{erreur} au temps $t + \nabla t$ pourrait augmenter par rapport à celui du temps t . D'où le développement de l'erreur avec le temps. En bout de ligne, toute erreur d'approximation joue le rôle d'un gradient dans le transport. L'instabilité numérique vient donc infiltrer les agents physiques dans le processus hydrodynamique, et se mélange au résultat.

Par contre, augmenter indéfiniment la finesse de maillage au nom de la rigueur n'est pas applicable. Non seulement le temps de calcul se retrouverait aussi indéfiniment allongé, mais encore ces erreurs sont peuvent être déjà plus petites que l'erreur de troncature. Entre rigueur et temps d'exécution, l'amélioration laisse place à l'optimisation.

B.2 Comment optimiser?

B.2.1 Anticiper l'instabilité

Dans un premier temps, il faut évaluer les ordres de grandeur impliqués, et anticiper sur les moyens de traitement du processeur. Des relations de stabilité cataloguées dans la littérature informatique peuvent aiguiller cette anticipation.

Puis il faut penser au problème physique même. Par exemple, la transition entre le dessous et le dedans de la couche de convection étant brusque, le raffinement du maillage doit être privilégié pour les éléments critiques de cette zone. Déjà, on pense à la construction d'un maillage spatial irrégulier (Cf B.3.1).

B.2.2 Détecter l'instabilité

Il s'agit de ne pas confondre les gradients numériques avec les gradients physiques. Se familiariser avec ses symptômes permet de diagnostiquer une instabilité numérique.

Visuellement en 2D, certaines formes de propagation de l'élément trace n'ont aucun sens phy-

sique. Le tracé évoquant du gazon (caricatural) sur la figure B.1 n'est ni représentatif de la diffusion, ni de l'advection par la circulation méridienne.

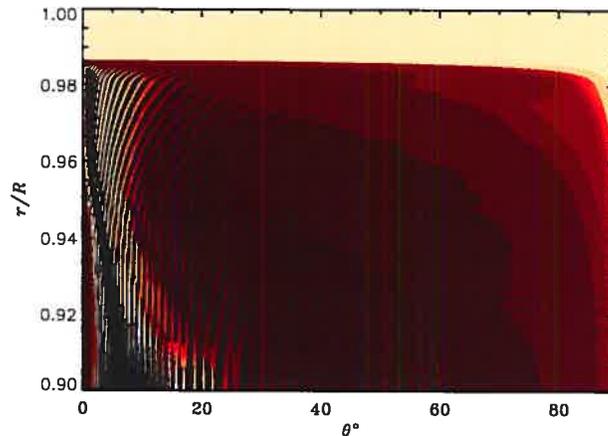


FIGURE B.1 – Illustration d'un symptôme d'instabilité numérique: un gradient latéral évoquant du "gazon", pour représenter les lignes de contours de la concentration $[He]$ sur le plan méridien.

D'ailleurs, supprimer la circulation méridienne permet de trier plus facilement entre le jeu du tri gravitationnel, purement radial, et des effets angulaires nécessairement générés par l'instabilité, comme en témoigne la figure B.2.

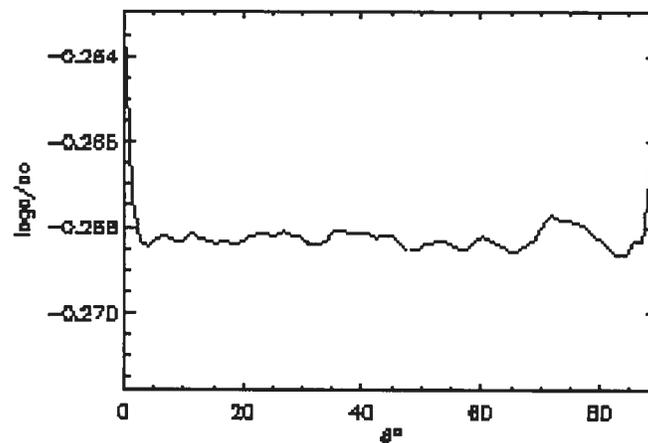


FIGURE B.2 – Illustration d'un symptôme d'instabilité numérique: effets angulaires nécessairement générés par l'instabilité puisque $[He]$ est sous l'effet seul de u_{tri} , qui est purement radial.

Outre les indices visuels, on peut se repérer à des incohérences dans les valeurs calculées.

Ainsi, un coefficient D_T imposé dans la zone de convection (Cf. 2.3.3), d'ordre trop élevé, multipliant un gradient de concentration d'ordre infinitésimal, peut donner un produit incorrect. L'incohérence qu'il porte peut faire augmenter au dessus de $[He] = 1$ la moyenne de la concentration dans la cellule (Tableau B.1). C'est pourquoi la détermination d'un coefficient turbulent assez élevé pour imiter l'advection dans la zone de convection s'est avéré délicat dans ce projet.

TABLEAU B.1 – Choix du coefficient turbulent dans la zone de convection

$D_T[\text{cm}^2\text{s}^{-1}]$	concentration moyennée $\langle [He] \rangle$ (à la 2 ^e itération de temps)	plus tard dans le temps
0	1.00015	stable
10^4	1.00015	stable
10^5	1.00014	stable
10^6	1.00016	stable
10^7	1.00015	stable
10^8	1.00031	augmente
10^9	1.00112	augmente
10^{10}	1.00154	augmente

À noter qu'une variation stable de 3 à 4 chiffres derrière la virgule peut être déjà inférieure aux erreurs de troncature.

Dans la liste des valeurs incohérentes, une instabilité numérique peut conduire à des concentrations négatives ! Ces tests doivent être appliqués méthodiquement, pour chaque paramètre susceptible d'enclencher une instabilité.

B.3 Maillage spatial

B.3.1 Sa construction

Dans une cellule unitaire en 2D, x à l'horizontale, y à la verticale (pour résoudre l'équation (A.4)), on peut resserrer le maillage à l'approche de la zone de convection. Par exemple, on distribue moins d'éléments sur une première région Z_1 en y éloignée du rayon $y = R_{zc}$, qui sont donc plus longs verticalement. Puis, un plus fort pourcentage du nombre d'éléments, qu'on a fixé pour remplir la cellule, est concentré sur Z_2 , encadrant $y = R_{zc}$ de près. Pour s'assurer de l'aspect continu du maillage (lui aussi mettant à l'épreuve la stabilité), il faut

veiller à ce que le dernier élément E_{fZ_1} de Z_1 enchaîne avec le premier élément E_{iZ_2} de Z_2 , de taille pas plus petite que le tiers de E_{fZ_1} . Par exemple, chaque position verticale de la grille en Z_1 , avec un pourcentage $p1$ du nombre d'éléments $nely$ en y , peut être placée comme suit:

$$y_i = y_{fZ_1} \frac{i - 1}{i_{fZ_1} - 1} \quad (\text{B.2})$$

où i est le numéro de l'élément (de 1 à i_{fZ_1}), i_{fZ_1} , le numéro de l'élément E_{fZ_1} pour lequel $\frac{E_{fZ_1}}{nely} = p1$, y_{fZ_1} sa position. On peut faire en sorte que le découpage de Z_2 soit progressif: plus resserré au début, moins à la fin. Par exemple, chaque position verticale de la grille en Z_2 , avec un pourcentage $p2 = 1 - p1$ du nombre d'éléments $nely$ en y , peut être placée comme suit:

$$y_i = (1 - R_{zc}) \left(\frac{i - i_{iZ_2}}{nely - i_{iZ_2}} \right)^{\text{facteur}} + y_{fZ_1} \quad (\text{B.3})$$

Cette fois, i va de i_{iZ_2} à $nely$, où i_{iZ_2} est le numéro de l'élément E_{iZ_2} . Plus le facteur est inférieur à 1, plus la taille des éléments sera relativement plus petite au début de Z_2 qu'à sa fin. Puisque un schéma est toujours plus évocateur qu'une longue rédaction, la figure B.3 permet d'aider la visualisation mentale de ce découpage spatial.

On fait la même chose en x , en resserrant le maillage vers le pôle où la tendance de la matière à plus s'accumuler exige une résolution accrue (cette fois, le "facteur" étant alors supérieur à 1).

B.3.2 Optimisation

Le choix de $nely$, $nelx$, combiné à celui du *facteur*, est déterminant pour chercher la stabilité numérique (Tableau B.2). Si on se fie au Tableau B.2, optimiser revient à choisir les meilleures conditions, codées "1** et 3**", pour $nelx$ et $nely$ les plus faibles possibles (pour minimiser le temps d'exécution). J'ai donc choisi: 160x256 (*angulaire* × *radial*). Le fait qu'il reste des symptômes, aussi faibles que les "***" en témoignent, trahissent la vulnérabilité de la stabilité numérique, si difficile à évincer.

Pour le choix du *facteur*, il variait selon le modèle et la couche limte.

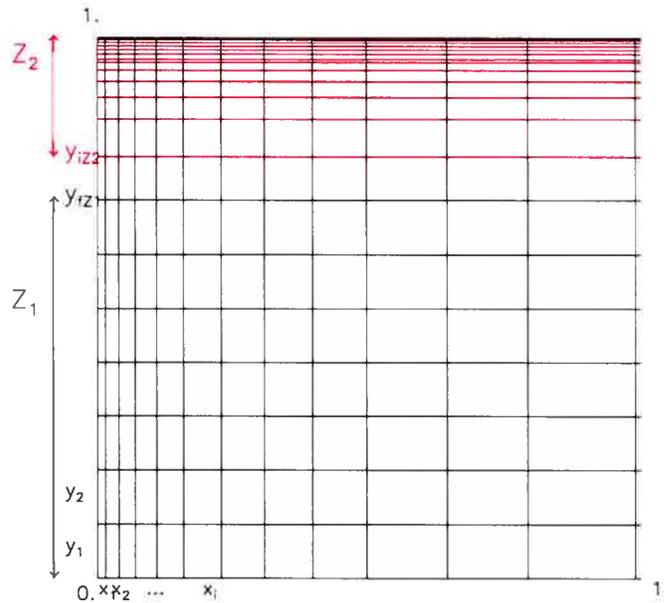


FIGURE B.3 – Illustration très schématique d'un maillage, évoquant sa construction irrégulière, plus raffinée en y près de la zone de convection, et en x près du pôle.

TABLEAU B.2 – Symptôme d'instabilité selon la grille

	$nelx = 64$	$nelx = 100$	$nelx = 128$	$nelx = 160$	$nelx = 200$	$nelx = 256$
$nely = 64$	1, 2 et 3	1, 2 et 3	1*, 2 et 3	1**, 2 et 3	1*, 2 et 3	1*, 2 et 3
$nely = 128$	1, 2* et 3	1, 2* et 3	1*, 2* et 3	1**, 2* et 3	1*, 2* et 3	1*, 2* et 3
$nely = 160$	1 et 3*	1 et 3*	1* et 3*	1** et 3*	1* et 3*	1* et 3*
$nely = 200$	1 et 3**,	1 et 3**	1* et 3**	1** et 3**	1* et 3**	1* et 3**
$nely = 256$	1 et 3**	1, et 3**	1*, et 3**	1**, et 3**	1*, et 3**	1*, et 3**
$nely = 300$	1, et 3**	1, et 3**	1*, et 3**	1**, et 3**	1*, et 3**	1*, et 3**

1 : gradients angulaires avec seulement u_{tri}
 2 : concentration négative au bout d'un certain temps
 3 : "gazon" au bout d'un certain temps
 * : faiblement seulement (et un plus tard)
 ** : très faiblement seulement (ou beaucoup plus tard)

B.4 Incréments temporels

B.4.1 Lesquels

On veut simuler comment l'hélium, à partir de la ZAHB, évolue dans les couches atmosphériques. Or toute diffusion pourra être observée seulement quelques millions d'années.

Fiabilité de la résolution oblige, le premier pas de temps et les quelques consécutifs méritent d'être suffisamment courts pour que la récurrence parte d'un "bon" point de départ. En bref, court au départ, il faut un incrément de temps qui s'élargit ensuite pour atteindre rapidement le début du processus. Soit $\nabla_1 t$ un premier intervalle de temps, succèdent les intervalles $\nabla_2 t$, à $\nabla_n t$, chacun divisé en ns pas $\nabla_{is} t$ (croquis sur la figure B.4), au cours desquels les étapes 8 à 10 sont complétées à chaque fois. On reconnaît le système de notation n , n_s utilisé dans (A.19).

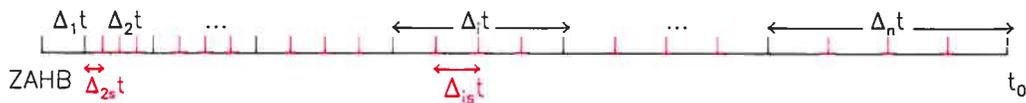


FIGURE B.4 – Illustration très schématique des incréments temporels.

B.4.2 Optimisation

On comprend que pour optimiser la stabilité numérique, les seuls réglages sont ceux de n , (ainsi que la progression irrégulière de leur construction), ns , et le temps final t_0 de la simulation (à partir desquels on définit $\nabla_i t$ et $\nabla_{is} t$). Puisque le maillage spatial et temporel sont rattachés, si on veut augmenter le premier, il faut en faire autant pour le second. On s'en avise, et on règle le pas de temps une fois le nombre d'éléments fixé. Le Tableau B.3 illustre comment, pour ce projet, le pas de temps ns a été augmenté jusqu'à que le résultat ne soit plus influencé par celui-ci. Les résultats décrits dans ce tableau ont été obtenus pour une grille de 160×256 , à $n = 10$. Étant donné le Tableau B.3, le pas retenu a été $ns = 4000$.

TABLEAU B.3 – Influence de l'augmentation de ns observée sur le tracé graphique du rapport de la concentration pour deux choix de ns successifs

[He]	obtenu avec $ns=400$	Effet
	avec $ns=100$	
[He]	obtenu avec $ns=1000$	Effet
	avec $ns=400$	
[He]	obtenu avec $ns=2000$	Effet
	avec $ns=1000$	
[He]	obtenu avec $ns=4000$	Pas d'effet
	avec $ns=2000$	
[He]	obtenu avec $ns=8000$	Pas d'effet
	avec $ns=4000$	