

Université de Montréal

Étude de la violation CP du modèle standard et au-delà dans les
désintégrations $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$

par
Maxime Imbeault

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Août, 2005

© Maxime Imbeault, 2005.



QC

3

U54

2005

V. 031



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Étude de la violation CP du modèle standard et au-delà dans les
désintégrations $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$**

présenté par:

Maxime Imbeault

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Georges Azuelos,	président-rapporteur
David London,	directeur de recherche
Paul Taras,	membre du jury

RÉSUMÉ

Ce mémoire comporte trois grandes parties. La première partie se veut être un très bref survol des concepts de base concernant la violation CP dans le modèle standard (MS) et quelques notions de phénoménologie des mésons B . Dans la deuxième partie, nous présentons une méthode pour extraire tous les angles du triangle unitaire en utilisant les données expérimentales provenant des désintégrations $B \rightarrow \pi K$ seulement. Le but de cette méthode est de tester le MS. Dans la dernière partie, nous présentons une méthode pour mesurer directement des paramètres de nouvelle physique (NP) en utilisant les mesures expérimentales provenant de $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$. Différents scénarios tels la NP générale, celle qui préserve l'isospin et celle de forme Z -FCNC sont étudiés. L'objectif visé par cette méthode est de tester le MS et des scénarios de NP.

Mots clés : phénoménologie, violation CP, méson B , modèle standard, nouvelle physique.

ABSTRACT

This master's thesis contains three parts. In the first part, we review very briefly some of main concepts of CP violation in the standard model and some notions of phenomenology with B mesons. In the second part, we present a method to extract the full unitarity triangle using only experimental data from the $B \rightarrow \pi K$ system. The goal of this method is to test the standard model. In the last part, we present a method for measuring directly some parameters of new physics using experimental data from the $B \rightarrow \pi K$ and $B \rightarrow \pi\pi$ systems. Some scenarios of new physics are studied : the general case, isospin-conserving new physics and Z -FCNC type new physics. The objective of this method is to test the standard model and some scenarios of new physics.

Keywords : phenomenology, CP violation, B mesons, standard model, new physics.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES ANNEXES	viii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xi
REMERCIEMENTS	xii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : NOTIONS PRÉLIMINAIRES	3
1.1 La violation CP dans le Modèle Standard	3
1.2 Convention	7
1.3 Mélange $B^0 - \bar{B}^0$ et $K^0 - \bar{K}^0$	7
1.4 Phénoménologie	10
1.5 Zoologie des diagrammes de Feynman	13
1.6 L'hamiltonien effectif	17
1.7 Hiérarchie des diagrammes	19
1.8 Isospin	20
CHAPITRE 2 : MÉTHODE NIR ET QUINN	21
CHAPITRE 3 : MESURER TOUT LE TRIANGLE UNITAIRE AVEC $B \rightarrow \pi K$ SEULEMENT	24

3.1	Relations entre les pingouins électrofaibles et les <i>arbres</i>	24
3.2	Résolution du système d'équations	26
3.3	Résultats numériques	29
3.4	Analyse des erreurs théoriques	31
	CHAPITRE 4 : DETECTER ET MESURER LA NOUVELLE PHY-	
	SIQUE	34
4.1	Approximation concernant la nouvelle physique	34
4.2	Applications avec $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$	35
4.2.1	Scénario 1 : Cas général mais avec nouvelle physique seule- ment dans $B \rightarrow \pi K$	35
4.2.2	Scénario 2 : nouvelle physique qui préserve l'isospin dans $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$	37
4.2.3	Scénario 3 : nouvelle physique de type FCNC dans $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$	39
4.3	Conclusion du chapitre	40
	CONCLUSION	42
	BIBLIOGRAPHIE	43

LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Développements mathématiques	45
I.1	Démonstration de l'équation 1.19	45
I.2	Démonstration de l'équation 1.21	49
I.3	Idée de la preuve de l'équation 1.33	50
I.4	Comment écrire ϕ en fonction de d ?	51

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Données expérimentales des rapports d'embranchement moyens et des asymétries CP directes pour $B \rightarrow \pi K$. ^[13]	12
3.1	Résultats numériques pour les 8 solutions que nous avons trouvés pour des valeurs expérimentales fictives et sans incertitudes (voir détails dans le texte).	30

LISTE DES FIGURES

1.1	Exemples de vertex ubW et $\bar{u}\bar{b}W$	4
1.2	Le triangle unitaire.	6
1.3	Diagrammes de Feynman en boîte représentant le mélange $B^0 - \bar{B}^0$	8
1.4	Exemple d'arbre (à gauche) et d'arbre réduit de couleur (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$	14
1.5	Exemple de diagramme d'annihilation (à gauche) et de pingouin gluonique (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$	14
1.6	Exemple de diagramme PEF (à gauche) et PEF réduit de couleur (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$	15
2.1	Schéma du <i>quadrilatère</i> et du <i>quadrilatère tilde</i> dans le plan complexe	23

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

- CDQ - Chromodynamique Quantique
CKM - Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
PEF - Pingouins Électrofaibles
FCNC - de l'anglais Flavor Changing Neutral Current
GPY - Gronau-Pirjol-Yan
MS - Modèle Standard
NP - Nouvelle Physique
NQ - Nir et Quinn
NR - Neubert-Rosner

REMERCIEMENTS

Premièrement, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de recherche David London pour sa grande disponibilité, sa patience, son encadrement de qualité et pour sa collaboration cordiale. De plus j'aimerais le remercier pour la totale liberté d'esprit dont j'ai bénéficié au cours de mes études de maîtrise, chose que j'apprécie particulièrement.

En second lieu, je tiens à remercier mes collaborateurs immédiats pour mon projet de maîtrise : Alexandre Lemerle et Véronique Pagé.

De plus, puisque j'ai passé une partie de ma scolarité à l'étranger, je tiens à remercier tous les gens que j'ai côtoyés au Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique Théorique en France pour leur formidable hospitalité, spécialement Fawzi Boudjema et Geneviève Bélanger. Pour la même raison, je tiens également à remercier tous les gens que j'ai côtoyés à l'université de Siegen en Allemagne, spécialement Thomas Mannel et Thorsten Feldmann.

Finalement, je veux aussi remercier famille, amis et collègues étudiants pour leur support souvent inconscient, mais non moins important.

À tous, merci beaucoup!

INTRODUCTION

Les lignes directrices que nous tentons de suivre dans ce mémoire de maîtrise sont la simplicité, la concision et la rigueur. Ce texte se veut complet, mais les digressions s'écartant du sujet principal sont généralement évitées et nous ne nous attardons aux détails que lorsque c'est important de le faire.

Comme c'est clairement mentionné dans le titre et le résumé, le sujet de ce mémoire est l'étude de la violation CP dans les désintégrations des mésons B dans le cadre du MS et au-delà. Nous nous intéressons plus particulièrement aux désintégrations des mésons B en un pion et un kaon ($B \rightarrow \pi K$) sauf pour le dernier chapitre où nous nous intéressons aussi aux désintégrations des B en une paire de pions ($B \rightarrow \pi\pi$).

La seule source de violation CP dans le MS est une phase dans la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), ou de façon équivalente le triangle unitaire. En d'autres mots, selon le MS toute violation CP observée devrait pouvoir être expliquée par deux paramètres théoriques, ce qui laisse peu de marge de manoeuvre. Pour cette raison, l'extraction de ces paramètres théoriques à partir des données expérimentales constitue un test très important pour le MS. En effet, une des façons de tester le MS est de mesurer ces paramètres théoriques de plusieurs façons indépendantes et tout simplement de comparer les résultats. Tout écart important entre ces différentes mesures suggère que le MS est incorrect et/ou incomplet.

Depuis quelques années, beaucoup d'efforts ont été investis en ce sens avec notamment les expériences BaBar et Belle. Mais la violation CP étant un phénomène extrêmement subtil, les mesures expérimentales sont très difficiles à prendre et les résultats sont généralement très imprécis. On ne peut donc pas encore prétendre avoir pris à défaut le MS. Cependant il y a de plus en plus de signes de NP, des phénomènes que le MS n'arrive pas à expliquer de façon satisfaisante. La violation CP est donc encore aujourd'hui un phénomène relativement mal connu et nous travaillons donc sur un terrain potentiellement très fertile à une prospection visant à trouver des failles au MS. C'est le but principal de ce mémoire, tester le MS.

Le corps du texte est divisé en quatre chapitres, chacun étant court et bien délimité au niveau du contenu. Les deux premiers chapitres, complètement introductifs, sont en quelque sorte un condensé de ce que l'on peut retrouver dans la littérature concernant ce sujet alors que les deux derniers chapitres traitent de ma contribution au sujet.

Notre point de départ est le MS. Dans le chapitre 1, nous verrons très rapidement la source de la violation CP dans le MS. Nous traiterons également des bases des désintégrations des mésons B dans le MS et de quelques aspects phénoménologiques généraux. Dans le chapitre 2, nous verrons en détails la méthode de Nir et Quinn (NQ) qui était jusqu'à présent le mieux qui avait été fait (même si désuète) en ce qui concerne l'extraction des angles du triangle unitaire à partir de $B \rightarrow \pi K$ seulement. Dans le chapitre 3, nous verrons quelques résultats importants utilisant la symétrie de saveur SU(3) et nous l'utiliserons pour améliorer l'analyse de NQ et extraire tout le triangle unitaire à partir des désintégrations de $B \rightarrow \pi K$. Mais ceci au prix d'approximations beaucoup moins coûteuses que celles de NQ. Dans le dernier chapitre, nous verrons qu'en joignant les mesures de $B \rightarrow \pi K$ avec celles de $B \rightarrow \pi\pi$ et en acceptant quelques approximations, nous possédons suffisamment d'information pour extraire directement quelques paramètres théoriques d'une hypothétique présence de NP. On peut donc mesurer presque directement la NP à partir des désintégrations des mésons B ! Nous étudierons différents scénarios de NP tels le cas général, la NP qui préserve l'isospin et la NP médiée par un courant neutre qui change la saveur des quarks (Z -FCNC (de l'anglais Flavor Changing Neutral Current)). Mais tout au long de ce mémoire, l'important est de toujours garder à l'esprit que le but derrière notre étude est de tester le MS.

Finalement, bien que le mode de présentation classique ait été adopté pour ce mémoire (par opposition au mode de présentation par articles), le fait demeure que les parties principales de ce mémoire sont en grande partie une réécriture des références ^[1-3].

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans les sections suivantes, nous présentons plusieurs concepts qui seront utiles dans les chapitres 2, 3 et 4. Il s'agit d'un très court résumé et l'ordre ne suit aucune logique particulière. Pour une revue complète de la violation CP et de la phénoménologie des mésons B et de la violation CP, consulter par exemple les références [4-8].

1.1 La violation CP dans le Modèle Standard

La densité lagrangienne de l'interaction faible pour les quarks peut s'écrire [5,8] :

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma_\mu W^{+\mu} V D_L + h.c. , \quad (1.1)$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} , \quad (1.2)$$

et où g est une constante de couplage et V la célèbre matrice CKM qui mélange les différentes saveurs de quarks et qui doit être unitaire de par la construction de ce lagrangien (et parce qu'à la base c'est une matrice de rotation). Nous appellerons les quarks u, c et t de *type up* puisqu'ils ont la même charge électrique que le quark up ($+2/3$) et les quarks d, s , et b de *type down* puisqu'ils ont la même charge électrique que le quark $down$ ($-1/3$). Finalement, les indices L indiquent une projection sur les composantes d'hélicité gauchère :

$$U_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} U . \quad (1.3)$$

En toute généralité, on peut écrire la matrice CKM de la façon suivante :

$$U = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

En termes simples, on peut tout simplement dire que dans un diagramme de Feynman, le vertex reliant les quarks i, j et un boson de jauge W^+ ou W^- (selon le cas) se voit affliger un facteur V_{ij} ou V_{ij}^* . Par exemple, considérons les deux vertex suivants ¹ :

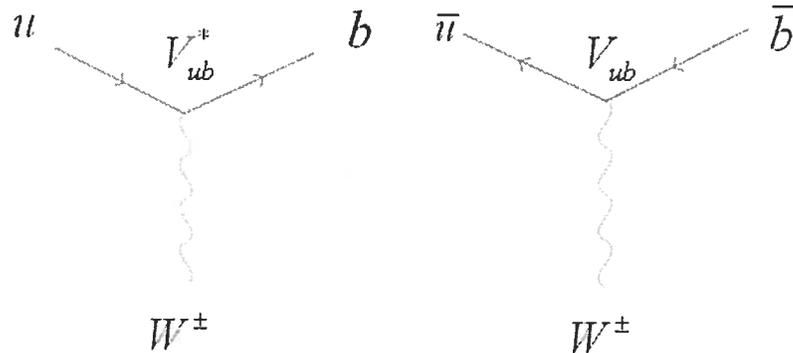


FIG. 1.1 – Exemples de vertex ubW et $\bar{u}\bar{b}W$

Dans la partie de gauche de la figure 1.1, la conjugaison complexe vient du fait que le champ entrant (le quark u) est de type up, alors que le champ sortant (le quark b) est de type down. C'est donc la partie $\ll h.c. \gg$ de l'équation 1.1 qui est impliquée. Il y a donc un terme V^\dagger au lieu de V , d'où la conjugaison complexe du vertex de la figure 1.1. Cette conjugaison complexe est importante car c'est la source de la violation CP dans le MS.

On peut paramétriser les éléments de la matrice CKM de façon complètement générale en ayant recours aux angles d'Euler. Cependant, il est devenu standard d'utiliser la paramétrisation de Wolfenstein ^[9]. Bien que ce soit une approximation,

¹Pour tous les diagrammes de Feynman dans ce mémoire, le temps est horizontalement et l'espace est verticalement.

les calculs en sont grandement simplifiés. Sous cette paramétrisation, la matrice CKM prend la forme :

$$U = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4). \quad (1.5)$$

Le paramètre d'expansion λ est bien connu et de l'ordre de 20%, donc l'erreur de l'expansion de l'ordre de λ^4 ($\approx 0.16\%$) est relativement petite. Pour l'utilisation que nous souhaitons en faire dans les prochains chapitres, l'approximation jusqu'à λ^3 est suffisante. Cependant, en cas de besoin l'expansion pourrait être continuée à des ordres supérieurs pour réduire l'erreur due au choix de la paramétrisation de Wolfenstein.

Les paramètres de la matrice CKM dans la paramétrisation de Wolfenstein prennent les valeurs suivantes ^[11] :

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.22622 \pm 0.00100, \\ A &= 0.825_{-0.019}^{+0.011}, \\ \bar{\rho} = \rho(1 - \lambda^2/2) &= 0.207_{-0.043}^{+0.036}, \\ \bar{\eta} = \eta(1 - \lambda^2/2) &= 0.340 \pm 0.023. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Bien que cette précision soit suffisante dans certains contextes, elle reste insuffisante pour constituer un véritable test pour le MS. Il est donc pertinent de chercher à l'améliorer.

Concrètement, l'effet de l'opérateur CP dans la matrice CKM n'est qu'une simple conjugation complexe. Donc seuls V_{ub} et V_{td} sont directement impliqués. Il est facile de voir que $\eta \neq 0$ implique automatiquement qu'il doit y avoir de la violation CP dans l'Univers. En effet, si η est nul, alors tous les éléments de la matrice CKM sont réels. Inversement, s'il y a de la violation CP dans l'Univers, le MS ne peut l'expliquer que par $\eta \neq 0$ puisque toute la violation CP du MS est

complètement contenue dans la matrice CKM. De plus, pour expliquer quantitativement la violation CP, une bonne connaissance des paramètres ρ , η , λ et A est requise. C'est pourquoi les paramètres de la matrice CKM jouent un rôle si important et qu'on souhaite connaître leur valeur avec le plus de précision possible.

Puisque c'est une matrice de rotation, la matrice CKM se doit d'être unitaire. La propriété suivante doit donc être vérifiée :

$$\sum_i V_{ij} V_{ik}^* = \delta_{jk} , \quad (1.7)$$

et en particulier, on doit avoir

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 . \quad (1.8)$$

Dans le plan complexe, l'équation précédente forme un triangle. En renormalisant chaque coté du triangle par $V_{cd}V_{cb}^*$ on trouve le *triangle unitaire*.

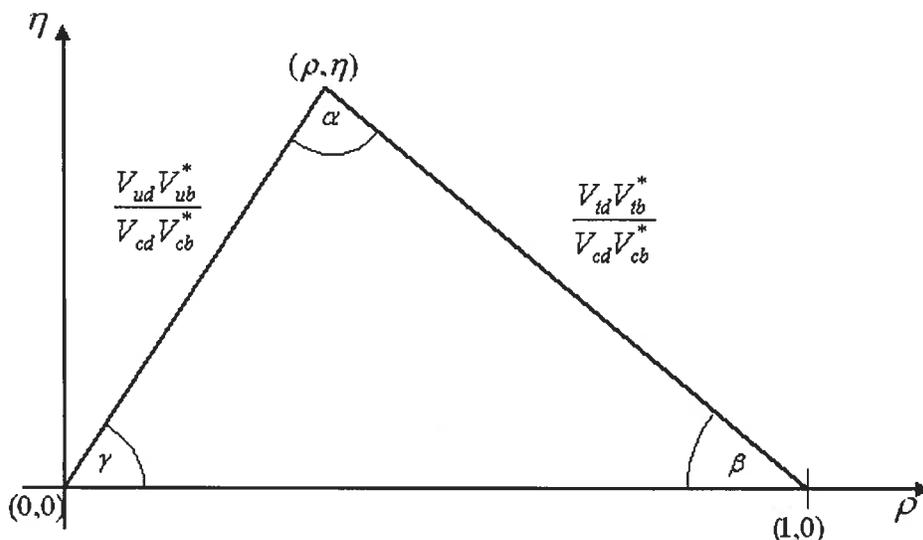


FIG. 1.2 – Le triangle unitaire.

Au lieu d'utiliser ρ et η comme paramétrisation, on peut utiliser les angles α , β et γ du triangle unitaire. Comme seulement deux des trois angles sont indépendants,

les deux paramétrisations sont complètement équivalentes. C'est ce que nous ferons la plupart du temps.

1.2 Convention

Dans le reste de ce mémoire, nous utiliserons des définitions légèrement différentes de celles du *Particle Data Group* ^[12] pour les mésons. La raison est très simple. En absorbant quelques signes négatifs ici et là dans les définitions des mésons, ils ne nous embêtent plus pour le reste des calculs. Un des avantages de ces définitions est que tous les éléments de tous les multiplets d'isospin vont être positifs (comme nous le verrons dans la section 1.8). Mais le principal avantage est d'éviter la confusion car la plupart des publications dans ce domaine utilisent cette convention.

Nous définissons donc les mésons B par :

$$\begin{aligned} B^+ &= u\bar{b}, & B^- &= -\bar{u}b, \\ B^0 &= d\bar{b}, & \bar{B}^0 &= \bar{d}b, \end{aligned} \quad (1.9)$$

les mésons K par :

$$\begin{aligned} K^+ &= u\bar{s}, & K^- &= -\bar{u}s, \\ K^0 &= d\bar{s}, & \bar{K}^0 &= \bar{d}s, \end{aligned} \quad (1.10)$$

et finalement les pions par :

$$\pi^+ = u\bar{d}, \quad \pi^- = -d\bar{u}, \quad \pi^0 = -\frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}. \quad (1.11)$$

1.3 Mélange $B^0 - \bar{B}^0$ et $K^0 - \bar{K}^0$

À cause du mélange des saveurs de quarks, un B^0 peut devenir un \bar{B}^0 (et inversement) simplement par l'échange de deux bosons W^\pm (voir figure 1.3).

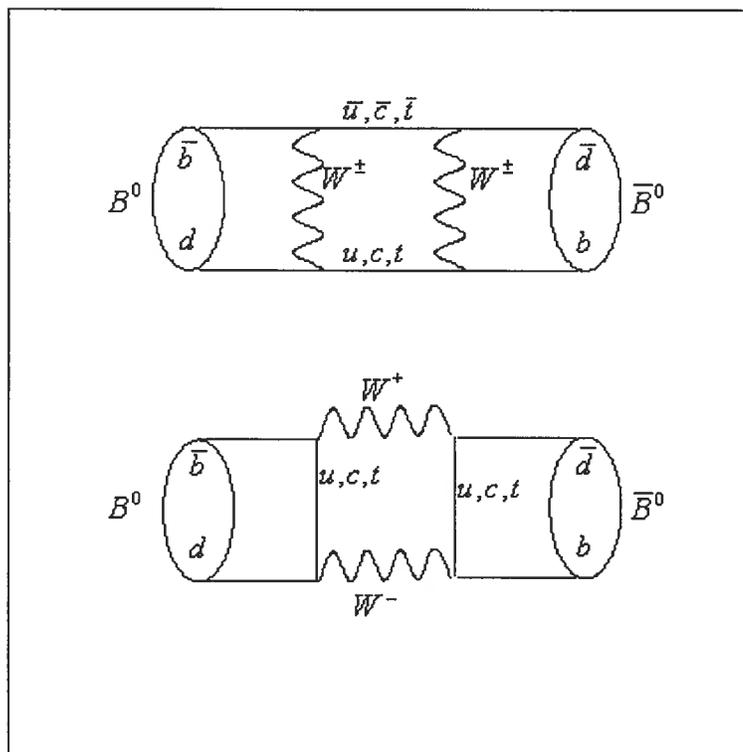


FIG. 1.3 – Diagrammes de Feynman en boîte représentant le mélange $B^0 - \bar{B}^0$.

Les deux quarks de l'état intermédiaire peuvent être indépendamment des quarks u , c ou t . Cependant, il est facile de voir que les cas avec des quarks u ou c sont négligeables comparativement au cas avec deux quarks t . En effet, l'amplitude d'un diagramme en boîte avec des quarks internes x et y ($x, y = u, c, t$) est proportionnelle à $m_x V_{xd} V_{xb}^* \cdot m_y V_{yd} V_{yb}^*$, où m_i est la masse du quark i (les facteurs CKM viennent des constantes des couplages aux vertex et les masses proviennent des propagateurs). Pour les différentes combinaisons possibles de quarks, le mélange

$B^0 - \bar{B}^0$ est donc proportionnellement de l'ordre de (en puissances de λ) :

$$\begin{aligned}
u, u &: m_u^2 \lambda^6, \\
u, c &: m_u m_c \lambda^6, \\
u, t &: m_u m_t \lambda^6, \\
c, c &: m_c^2 \lambda^6, \\
c, t &: m_c m_t \lambda^6, \\
t, t &: m_t^2 \lambda^6.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Il est donc clair que le cas où les quarks internes dans les diagrammes en boîte sont des quarks t domine largement les autres puisque la masse du quark t est beaucoup plus grande que celle des quarks u ou c . Nous allons donc toujours supposer que les quarks internes sont des quarks t pour le mélange $B^0 - \bar{B}^0$. Ainsi, le facteur CKM approprié pour la transition $|B^0\rangle \rightarrow |\bar{B}^0\rangle$ est $(V_{tb}V_{td}^*)^2$.

En ce qui concerne le mélange $K^0 - \bar{K}^0$, c'est exactement le même principe, pour les différentes combinaisons de quarks internes, les diagrammes en boîte sont de l'ordre de (toujours en puissance de λ) :

$$\begin{aligned}
u, u &: m_u^2 \lambda^2, \\
u, c &: m_u m_c \lambda^2, \\
u, t &: m_u m_t \lambda^6, \\
c, c &: m_c^2 \lambda^2, \\
c, t &: m_c m_t \lambda^6, \\
t, t &: m_t^2 \lambda^{10}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Même si la masse du quark t est beaucoup plus grande que celle des quarks u et c , ceci n'est pas suffisant pour compenser les facteurs λ . Donc pour le mélange $K^0 - \bar{K}^0$, le mélange est dominé par des quarks internes c . Donc, le mélange $K^0 - \bar{K}^0$ contient un facteur CKM $(V_{cd}V_{cs}^*)^2$. Comme il s'agit d'un nombre réel, la discussion

du mélange $K^0 - \bar{K}^0$ dans le problème qui nous intéresse pour le reste du mémoire sera à toute fin pratique triviale.

1.4 Phénoménologie

Considérons un processus $B \rightarrow f$ et son conjugué CP $\bar{B} \rightarrow \bar{f}$, où f est un état final quelconque. On peut mesurer $\Gamma(B \rightarrow f)$ et $\Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})$ qui sont les taux de désintégration de ces deux processus. De ces mesures, on peut extraire les informations suivantes :

- *Taux de désintégration moyen* : C'est trivialement la moyenne des taux de désintégration d'un processus et de son conjugué CP :

$$\frac{\Gamma(B \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})}{2} . \quad (1.14)$$

- *Asymétrie CP indépendante du temps (ou directe)* : Mesure directe de l'asymétrie CP dans les taux de désintégration :

$$\frac{\Gamma(B \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(B \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})} . \quad (1.15)$$

- *Asymétrie CP dépendante du temps (ou indirecte)* : Pour illustrer cette asymétrie, prenons l'exemple du processus $B^0 \rightarrow \pi^0 K^0$ et son conjugué $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$. Le premier processus peut se produire directement :

$$B^0 \rightarrow \pi^0 K^0 , \quad (1.16)$$

ou en passant par le mélange des mésons et le processus conjugué :

$$B^0 \rightarrow \bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0 \rightarrow \pi^0 K^0 . \quad (1.17)$$

L'interférence entre ces deux possibilités est mesurable. Pour être précis, mentionnons que l'état final n'est pas $\pi^0 K^0$, mais $\pi^0 K_S^0$. Ceci vient du fait que K^0 et \bar{K}^0 ne sont pas des états propres de l'opérateur CP. Mais K_S et K_L , deux

combinaisons linéaires de K^0 et \bar{K}^0 , sont des états propres de l'opérateur CP. Physiquement, c'est le K_S et K_L qui sont observés. On définit l'asymétrie CP dépendante du temps par :

$$a_{CP}(t) \equiv \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow \bar{f})}. \quad (1.18)$$

Pour l'état final $\pi^0 K_S$ on a bien entendu que $f = \bar{f}$. De plus il est relativement facile de montrer que ² :

$$\begin{aligned} a_{CP}(t) &= \frac{1 - |\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \cos(\Delta Mt) - \frac{2Im\lambda}{1 + |\lambda|^2} \sin(\Delta Mt) \\ &= C(\lambda) \cos(\Delta Mt) - S(\lambda) \sin(\Delta Mt), \end{aligned} \quad (1.19)$$

où ΔM est la différence de masse entre les deux états propres CP des mésons B et

$$\lambda = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}}{A}. \quad (1.20)$$

A et \bar{A} sont les amplitudes du processus $B \rightarrow f$ et de son conjugué. Le quotient q/p vient des facteurs CKM du mélange $B^0 - \bar{B}^0$. Dans l'approximation où on ne considère que les quarks internes t , on a ³ :

$$\frac{q}{p} = \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{tb} V_{td}^*} = e^{-2i\beta}. \quad (1.21)$$

Bref, pour $B \rightarrow \pi K$, l'asymétrie CP dépendante du temps est une mesure indirecte de β mais requiert la connaissance de \bar{A}/A qui n'est pas triviale. ⁴

²La preuve est faite dans l'annexe I.

³La preuve est faite dans l'annexe I.

⁴Mais ce n'est pas toujours le cas. Pour la désintégration $B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ par exemple, il est facile de montrer qu'à une bonne approximation ^[5] $\bar{A}/A = e^{-2i\gamma}$, donc $\lambda = e^{-2i(\beta+\gamma)} = e^{2i\alpha}$ et il l'asymétrie indirecte est alors une mesure indirecte de α , et non β .

Dans le système $B \rightarrow \pi K$ il y a 8 canaux de désintégration :

$$\begin{aligned} B^+ &\rightarrow \pi^+ K^0, & B^+ &\rightarrow \pi^0 K^+, \\ B^0 &\rightarrow \pi^- K^+, & B^0 &\rightarrow \pi^0 K^0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

et leur conjugué CP. On peut donc en extraire 4 rapports d'embranchement moyens, 4 asymétries CP directes et une asymétrie CP indirecte pour un total de 9 mesures expérimentales. À titre informatif, des données expérimentales récentes sont présentées dans le tableau 1.1. De plus, l'asymétrie CP indirecte est $S_{\pi^0 K_S^0} = 0.34_{-0.29}^{+0.27}$ [13]⁵. En examinant le tableau 1.1 et la valeur de l'asymétrie CP indirecte, on constate que les erreurs expérimentales sont très grandes. On ne doit donc pas s'attendre à des miracles, mais c'est le matériel dont nous disposons.

	Rapport d'embranchement moyen(10^{-6})	a_{CP}
$B^0 \rightarrow \pi^0 K^0$	11.5 ± 1.0	0.09 ± 0.14
$B^0 \rightarrow \pi^- K^+$	18.2 ± 0.8	-0.109 ± 0.019
$B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$	12.1 ± 0.8	0.04 ± 0.04
$B^+ \rightarrow \pi^+ K^0$	24.1 ± 1.3	-0.02 ± 0.034

TAB. 1.1 – Données expérimentales des rapports d'embranchement moyens et des asymétries CP directes pour $B \rightarrow \pi K$. [13]

Finalement, pour conclure cette section, discutons brièvement des notions de phase faible et phase forte puisque nous les utiliserons constamment dans les chapitres suivants. Considérons encore une fois le processus quelconque $B \rightarrow f$ et son conjugué CP. Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'effet de l'opérateur CP en pratique n'est que de changer le signe des angles du triangle unitaire. Nous les appellerons *phases faibles*. En contrepartie, tout le reste se doit d'être inchangé car c'est relié à l'interaction nucléaire forte et donc invariant sous l'opérateur CP. Nous pouvons donc écrire de façon complètement générale toute amplitude A sous

⁵La dépendance du temps est contenue dans le $\sin(\Delta Mt)$ que multiplie $S_{\pi^0 K_S^0}$.

la forme

$$A = \sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{i\phi_i} , \quad (1.23)$$

où ϕ_i est la *phase faible* et δ_i la *phase forte*. Comme l'effet de CP n'est que de changer le signe de la phase faible, on peut directement écrire l'amplitude conjuguée \bar{A} sous la forme

$$\bar{A} = \sum_i A_i e^{i\delta_i} e^{-i\phi_i} . \quad (1.24)$$

1.5 Zoologie des diagrammes de Feynman

Même si on se restreint aux diagrammes de Feynman contenant deux vertex électrofaibles, il y en a quand même plusieurs qui sont impliqués dans les désintégrations $B \rightarrow \pi K$. Voici la liste des diagrammes impliqués au premier ordre électrofaible :

1. Les diagrammes les plus simples sont les diagrammes en arbre (voir figure 1.4). Les arbres apparaissent sous deux formes : *arbre* et *arbre réduit de couleur*. Cette distinction est due au confinement de couleur des mésons qui restreint certaines possibilités de coloration des quarks dans le diagramme arbre réduit de couleur. Dans les équations, l'arbre sera désigné par T (de l'anglais *tree*) et l'arbre réduit de couleur par C . Les arbres ont un facteur CKM $V_{us}V_{ub}^*$ et donc une phase faible γ .
2. L'*annihilation* (voir figure 1.5 à gauche) est simplement un B^+ qui devient un W^+ qui devient d'autres particules. Nous noterons dans les équations l'annihilation par A . Tout comme les arbres, ce diagramme a aussi un facteur CKM $V_{us}V_{ub}^*$ et donc aussi une phase faible γ .
3. Le *pingouin gluonique* (voir figure 1.5 à droite), que nous noterons par P , contient une boucle avec un boson W et un gluon. Le quark de la boucle peut être de saveur u , c ou t . À cause du petit facteur CKM⁶, on peut aisément

⁶Puisque $|V_{ts}V_{tb}^*| \gg |V_{us}V_{ub}^*|, |V_{cs}V_{cb}^*|$.

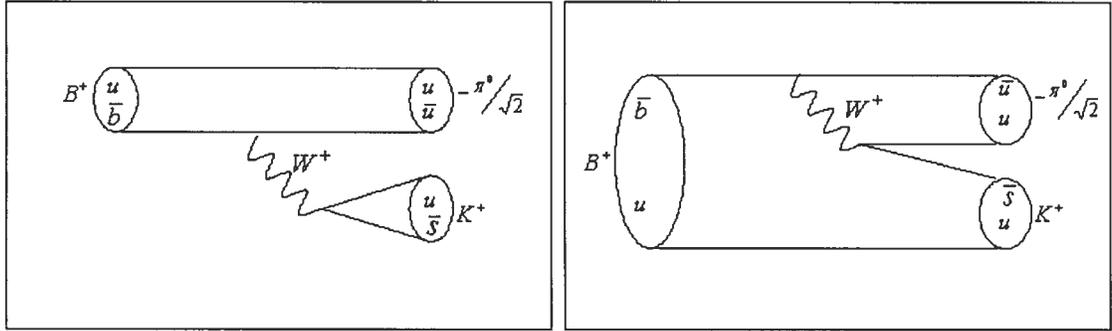


FIG. 1.4 – Exemple d'arbre (à gauche) et d'arbre réduit de couleur (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$.

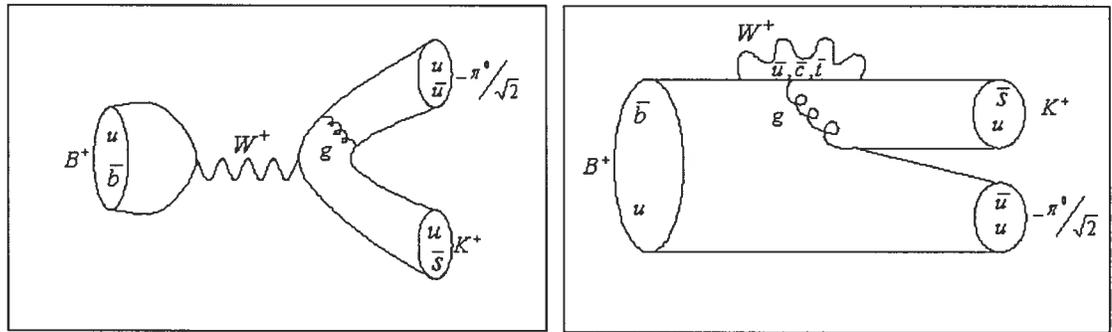


FIG. 1.5 – Exemple de diagramme d'annihilation (à gauche) et de pingouin gluonique (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$.

négliger la partie avec le quark u . De plus, en utilisant l'unitarité du triangle unitaire, on peut absorber la partie avec le quark c dans celle avec le quark t . Il ne reste donc qu'une contribution du quark t et le problème est ainsi légèrement simplifié. Son facteur CKM est donc $V_{ts}V_{tb}^*$ et sa phase faible est nulle. P n'est présent que sous la forme réduit de couleur puisque dans l'autre cas, un gluon d'isospin 0 devrait être couplé à un méson d'isospin non nul. C'est impossible puisque la force forte préserve l'isospin dans le MS.

4. Ensuite viennent les *pingouins électrofaibles* (PEF) qui sont illustrés à la figure 1.6. Il y a le *PEF* P_{EF} (à gauche) et le *PEF réduit de couleur* P_{EF}^c (à droite). Les PEF sont très semblables au pingouin gluonique, mais le gluon est remplacé par un Z^0 ou un photon. Comme dans le cas du pingouin gluonique, nous présumons que le quark interne t est dominant puisque le diagramme

avec un quark q est proportionnel à m_q^2/M_Z^2 . Leur facteur CKM est donc aussi $V_{ts}V_{tb}^*$ et ils ont aussi une phase faible nulle. De plus, nous ne considérons explicitement que le couplage du Z^0 avec la charge des quarks. Son couplage avec l'isospin est implicitement absorbé dans le pingouin gluonique.

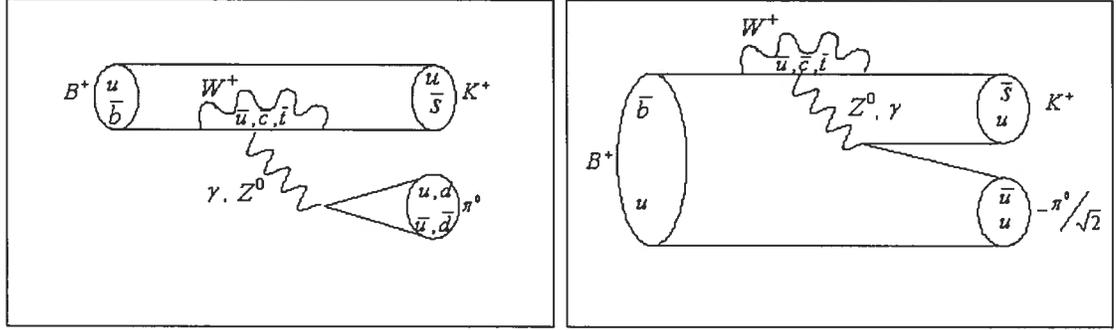


FIG. 1.6 – Exemple de diagramme PEF (à gauche) et PEF réduit de couleur (à droite) dans le processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$.

5. Finalement, il y a d'autres types de diagrammes tels l'échange (E) ou le pingouin-annihilation (PA). Mais comme ils ne sont pas impliqués directement dans les processus $B \rightarrow \pi K$ nous n'en parlerons pas ici. Par contre E va apparaître quelques fois dans les chapitres suivants puisque quand on travaille avec la symétrie $SU(3)$ il y a un diagramme E provenant de $B \rightarrow \pi\pi$ qui apparaît dans les équations.

En examinant les dessins pour chacune des huit désintégrations possibles, on peut facilement retrouver les expressions suivantes pour les amplitudes :

$$\begin{aligned}
 A^{+0} &= P - \frac{1}{3}P_{EF}^C + Ae^{i\gamma}, \\
 \sqrt{2}A^{0+} &= -P - Te^{i\gamma} - Ce^{i\gamma} - P_{EF} - \frac{2}{3}P_{EF}^C - Ae^{i\gamma}, \\
 \sqrt{2}A^{00} &= P - Ce^{i\gamma} - P_{EF} - \frac{1}{3}P_{EF}^C, \\
 A^{-+} &= -P - Te^{i\gamma} - \frac{2}{3}P_{EF}^C,
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

où $A^{ij} = A(B^{i+j} \rightarrow \pi^i K^j)$. Pour les amplitudes conjuguées, il suffit d'inverser le signe des phases faibles ($e^{i\gamma} \rightarrow e^{-i\gamma}$). Un point important : pour dériver ces rela-

tions, on suppose l'isospin. C'est à dire qu'on prend pour acquis que le propagateur d'un quark u est équivalent au propagateur d'un quark d . Ceci vient simplement du fait que le propagateur d'un fermion dépend seulement de la masse et de l'impulsion du fermion. Comme sous l'isospin, les quarks u et d ont la même masse, le reste s'en suit. C'est pour cette raison que les P , T , C , ... sont les mêmes dans les 4 processus, par opposition à P^{00} , P^{-+} , P^{0+} , P^{+0} , T^{00} , etc.

Discutons par exemple de la deuxième des équations 1.25 qu'on peut réécrire

$$A^{0+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(P + Te^{i\gamma} + Ce^{i\gamma} + P_{EF} + \frac{2}{3}P_{EF}^C + Ae^{i\gamma}) . \quad (1.26)$$

Cette équation décrit l'amplitude de désintégration du processus $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$. C'est d'ailleurs cet exemple qui est illustré dans les figures 1.4, 1.5 et 1.6.

- Le facteur $-1/\sqrt{2}$ provient de notre définition du méson π^0 (équations 1.11). En effet, dans les diagrammes de Feynman illustrés précédemment, on voit que l'état final contient un terme $\bar{u}u$. Quand on fait la projection de $\bar{u}u$ sur $(\bar{d}d - \bar{u}u)/\sqrt{2}$, il reste le facteur $-1/\sqrt{2}$. De même, pour un état $\bar{d}d$ il y a un facteur $1/\sqrt{2}$.
- Pour les PEF, la seule chose qui peut distinguer un P_{EF} (ou P_{EF}^C) d'un processus à un autre est le couplage du Z^0 ou du photon à la charge électrique des quarks. C'est pour cette raison qu'on définit P_{EF} (ou P_{EF}^C) tel que le couplage à la charge électrique est écrit explicitement. Il n'est donc pas inclut dans la définition du paramètre P_{EF} (ou P_{EF}^C). Pour que les équations 1.25 soient complètes, il faut donc écrire explicitement la charge. Dans le cas du PEF réduit de couleur dans $B^+ \rightarrow \pi^0 K^+$, le boson électrofaible se couple à un quark u , d'où le facteur $2/3$. Dans le cas du PEF, il y a deux possibilités : $\bar{u}u$ ou $\bar{d}d$. Il y a donc un facteur

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{2}{3}\right)_{\text{venant de } \bar{u}u} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{-1}{3}\right)_{\text{venant de } \bar{d}d} = \frac{-1}{\sqrt{2}} . \quad (1.27)$$

- Les facteur $e^{i\gamma}$ est présent parce que nous avons voulu sortir les phases faibles

explicitement des définitions de T , C et A . Similairement, pour le pingouin gluonique et les PEF il y a un facteur $e^0 = 1$.

- Une fois qu'on a tenu compte explicitement des facteurs venant des définitions des quarks, du couplage avec la charge et des phases faibles, il ne reste que la définition de P , T , C , ... qui est identique pour tous ces processus. Souvent, certaines possibilités sont impossibles. Exemple : le diagramme d'annihilation requiert l'annihilation des quarks \bar{b} et u en un W^+ et ceci est clairement impossible pour les désintégration d'un méson B^0 . Il suffit d'étudier toutes les possibilités et on retrouve les équations 1.25.

Bien que cette méthode graphique puissent sembler plus ou moins rigoureuse, on peut redériver les équations 1.25 de d'autres façons. Par exemple on peut considérer toutes les contractions de Wick possibles de tous les opérateurs de l'hamiltonien effectif [18].

1.6 L'hamiltonien effectif

Bien que nous n'utiliserons jamais l'hamiltonien effectif explicitement dans notre étude, c'est quand même utile de le voir au moins une fois surtout pour bien comprendre quelques approximations que nous ferons plus tard. L'idée est simple : dans la section précédente, nous avons vu qu'il y a beaucoup de diagrammes de Feynman impliqués dans les désintégrations $B \rightarrow \pi K$. Et au niveau des calculs, chacun de ces diagrammes est assez compliqué. Ici, on veut donc remplacer les opérateurs compliqués impliquant l'échange de bosons et des boucles par un simple opérateur effectif couplant directement 4 quarks. Tous les effets courte distance (échange de bosons et boucles) sont calculables en théorie des perturbation et le résultat devient la constante de couplage (que nous appellerons maintenant les coefficients de Wilson) des opérateurs effectifs. Ainsi, les opérateurs effectifs contiennent les effets longue distance, qui ne sont pas facilement calculables en général. La frontière entre «courte distance» et «longue distance» prend la forme d'une échelle de renormalisation μ . Bien que les coefficients de Wilson et les opérateurs longue distance

dépendent de μ , cette dépendance s'annule dans le produit des deux parties quand on fait le calcul à des ordres suffisamment élevés. Cette technique porte le nom de *operator product expansion*. En faisant ceci, on peut écrire l'hamiltonien effectif comme une combinaison linéaire d'opérateurs simple^[14,15] :

$$H_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=d,s} \left((V_{ub}^* V_{uq})(c_1 O_1 + c_2 O_2) - V_{tb}^* V_{tq} \sum_{i=3}^{10} c_i O_i \right) , \quad (1.28)$$

où

$$\begin{aligned} O_1 &= (\bar{b}_\beta u_\alpha)_{V-A} (\bar{u}_\alpha q_\beta)_{V-A} , & O_2 &= (\bar{b}u)_{V-A} (\bar{u}q)_{V-A} , \\ O_3 &= (\bar{b}q)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V-A} , & O_4 &= (\bar{b}_\beta q_\alpha)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V-A} , \\ O_5 &= (\bar{b}q)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V+A} , & O_6 &= (\bar{b}_\beta q_\alpha)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V+A} , \\ O_7 &= \frac{3}{2} e_{q'} (\bar{b}q)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V+A} , & O_8 &= \frac{3}{2} e_{q'} (\bar{b}_\beta q_\alpha)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V+A} , \\ O_9 &= \frac{3}{2} e_{q'} (\bar{b}q)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}' q')_{V-A} , & O_{10} &= \frac{3}{2} e_{q'} (\bar{b}_\beta q_\alpha)_{V-A} \sum_{q'} (\bar{q}'_\alpha q'_\beta)_{V-A} . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les paramètres c_1 à c_{10} sont les coefficients de Wilson tandis que O_1 à O_{10} sont les opérateurs. Les coefficients de Wilson ont été calculés en théorie des perturbations jusqu'au deuxième ordre. Les opérateurs O_1 et O_2 sont les arbres (incluant l'annihilation), les opérateurs O_3 à O_6 sont les pingouins gluoniques alors que les opérateurs O_7 à O_{10} sont les PEF. Bien qu'il serait inutile de faire la liste des valeurs exactes des coefficients de Wilson ici, faisons le quand même pour les PEF :

$$\begin{aligned} c_7 &= 3.49 \times 10^{-4} , & c_8 &= 3.72 \times 10^{-4} , \\ c_9 &= -9.92 \times 10^{-3} , & c_{10} &= 2.54 \times 10^{-3} . \end{aligned} \quad (1.30)$$

Notons seulement que c_7 et c_8 sont négligeables par rapport à c_9 et c_{10} . Donc à une bonne approximation, les PEF sont purement de structure $(V - A) \times (V - A)$

comme les arbres. Nous utiliserons ce fait plus tard pour relier théoriquement les PEF et les arbres.

1.7 Hiérarchie des diagrammes

Sans entrer dans les détails, on peut estimer plus ou moins grossièrement chacun des diagrammes ^[17]. La façon la plus simple de faire est de présumer chacun des éléments de matrice⁷ du même ordre de grandeur et d'ajouter des coefficients appropriés à chaque diagramme. Par exemple, un pingouin gluonique se voit affecter un coefficient $\alpha_s(m_B) \approx \bar{\lambda}$ (où $\bar{\lambda}$ est de l'ordre de 0,2) à cause de la boucle et du gluon. La réduction de couleur est estimée être de l'ordre de grandeur de $\bar{\lambda}$. Alors que A contient un facteur $f_B/m_B \approx \bar{\lambda}^2$ à cause de l'implication du quark spectateur. En ajoutant les ordres de grandeur des facteurs CKM, on trouve

$$\begin{aligned}
 O(1) & : |P| , \\
 O(\bar{\lambda}) & : |T| , |P_{EF}| , \\
 O(\bar{\lambda}^2) & : |C| , |P_{EF}^C| , \\
 O(\bar{\lambda}^3) & : |A| , |E| .
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Bien que cette estimation soit très naïve, des estimations plus sophistiquées utilisant par exemple la factorisation CDQ diffère relativement peu de ces ordres de grandeurs ^[15]. De toute façon, l'important ici est surtout de noter les deux observations suivantes :

- Les PEF ne sont pas négligeables,
- A et E sont petits.

Le reste n'est pas vraiment important pour ce que nous souhaitons en faire. En effet, nous ne tenterons pas de calculer ces paramètres dans ce mémoire. Ils vont toujours rester des inconnus et le but est de trouver leurs valeurs en utilisant les

⁷Il s'agit des éléments de matrice de l'hamiltonien effectif auquel on applique des états initiaux et finaux, et non de la matrice CKM.

données expérimentales.

1.8 Isospin

Afin de conclure ce chapitre de notions préliminaires, puisque la symétrie d'isospin est une assez bonne symétrie il est intéressant d'introduire son utilisation dans le problème de $B \rightarrow \pi K$. Les mésons B , π et K forment les multiplets d'isospin suivant ⁸ :

$$\begin{pmatrix} B^+ \\ B^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Donc ces mésons B sont d'isospin $1/2$, les pions d'isospin 1 et ces kaons d'isospin $1/2$. Pour conjugués CP, on a l'équivalent. De plus, en examinant attentivement l'hamiltonien effectif (équation 1.28), on remarque que tous les opérateurs à quatre quarks sont de la forme $\Delta I_3 = 0$ et $\Delta I = 0$ ou 1 . Il est donc facile en ayant recourt au théorème de Wigner-Eckart de dériver les équations suivantes ^{[19] 9} :

$$\begin{aligned} A^{+0} + \sqrt{2}A^{0+} &= \sqrt{2}A^{00} + A^{-+}, \\ \bar{A}^{+0} + \sqrt{2}\bar{A}^{0+} &= \sqrt{2}\bar{A}^{00} + \bar{A}^{-+}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Dans le plan complexe, ces équations forment deux quadrilatères d'isospin, que nous appellerons *quadrilatère* et *quadrilatère bar*.

⁸Si nous avons utilisé les définitions standard des mésons, il y aurait quelques signes négatifs dans l'équation 1.32.

⁹L'idée de la preuve est présentée dans l'annexe I.

CHAPITRE 2

MÉTHODE NIR ET QUINN

Avant de refaire l'analyse de Nir et Quinn ^[20] (NQ), faisons rapidement un comptage des quantités théoriques et expérimentales qui sont impliquées dans le problème. Comme nous l'avons vu dans la section sur la zoologie des diagrammes de Feynman, il y a six amplitudes impliquées dans le système $B \rightarrow \pi K : P, T, C, A, P_{EF}$ et P_{EF}^C . Chacune de ces amplitudes étant un nombre complexe, nous avons donc 6 normes et 5 phases relatives. En ajoutant à ceci la phase faible γ qui est indépendante des paramètres hadroniques, nous avons un total de 12 paramètres théoriques inconnus et *a priori* indépendants. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, nous ne disposons que de 9 mesures expérimentales (voir section 1.4). Conséquence de ceci : il est mathématiquement impossible de résoudre pour tous les paramètres théoriques et quelques approximations s'imposent donc.

Dans leur analyse, NQ ont choisi de négliger complètement les PEF. À l'époque, on ne soupçonnait pas encore l'importance des PEF. Ce faisant, il ne reste que 8 paramètres théoriques indépendants et on peut espérer pouvoir résoudre le système d'équations. Dans le cas où on néglige les PEF, il est utile de remarquer que les diagonales des deux quadrilatères d'isospin ont la même longueur. En effet, on a d'après les équations 1.25

$$\begin{aligned} D_1 &= A^{-+} + \sqrt{2}A^{00} = (T + C)e^{i\gamma} , \\ \bar{D}_1 &= \bar{A}^{-+} + \sqrt{2}\bar{A}^{00} = (T + C)e^{-i\gamma} . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Il est donc facile de remarquer qu'en faisant subir une rotation de 2γ au *quadrilatère bar* ($\tilde{A}^{ij} = e^{2i\gamma}\bar{A}^{ij}$), les 2 diagonales sont confondues. Nous appellerons le résultat de la rotation le *quadrilatère tilde*, et nous avons donc :

$$\tilde{D}_1 = \tilde{A}^{-+} + \sqrt{2}\tilde{A}^{00} = e^{2i\gamma}\bar{D}_1 = e^{2i\gamma}(T + C)e^{-i\gamma} = D_1 . \quad (2.2)$$

Une seconde observation intéressante est que les autres diagonales sont des bissectrices puisqu'à partir des l'équations 1.25 on trouve facilement

$$A^{00} + A^{0+} = \tilde{A}^{00} + \tilde{A}^{0+} . \quad (2.3)$$

On peut voir ceci avec un peu de gymnastique visuelle (voir figure 2.1). En effet, la somme $\frac{A^{00}+A^{0+}}{2}$ correspond au vecteur reliant le sommet de gauche de la figure 2.1 au point p qui est le centre de la diagonale D_2 . Donc l'équation 2.3 implique que $p = \tilde{p}$ et donc que les diagonales sont des bissectrices.

Les longueurs de tous les côtés des deux quadrilatères sont connues par les valeurs expérimentales. Cependant les longueurs des diagonales sont inconnues *a priori*. Par contre, les deux observations précédentes sont suffisantes pour fixer la longueur des diagonales de façon unique. Ce faisant, nous pouvons donc déterminer la valeur de la phase $\theta = Arg(\tilde{A}^{00}/A^{00})$ à partir de la construction géométrique au prix de quelques ambiguïtés discrètes. Les ambiguïtés discrètes proviennent du simple fait que la façon de tracer les deux quadrilatères n'est pas unique (exemple : deux côtés «du haut» peuvent être descendu «en bas», les angles sont alors différents et la solution est différente). De plus, comme nous l'avons vu dans l'équation 1.19, en utilisant la mesure de l'asymétrie indirecte, on connaît la quantité

$$Im(\lambda) = Im\left(\frac{q \tilde{A}}{p A}\right) = Im\left(e^{-2i\beta} e^{-2i\gamma} \frac{\tilde{A}}{A}\right) = \left|\frac{\tilde{A}}{A}\right| Im(e^{i(2\alpha+\theta)}) = \left|\frac{\tilde{A}}{A}\right| sin(2\alpha + \theta) . \quad (2.4)$$

Dans l'équation précédente, le seul paramètre encore inconnu est la phase faible α . Nous pouvons donc extraire α avec quelques ambiguïtés discrètes en utilisant cette construction géométrique. C'est le résultat de NQ.

Cependant, cette valeur extraite de α est incorrecte. En effet, comme nous l'avons vu, la prémisse de base de NQ est incorrecte. Tous les indices suggèrent que les PEF ne sont pas négligeables. Dans le chapitre 3, nous verrons une méthode très similaire et plus compliquée, mais en incluant les PEF en utilisant la symétrie de saveur SU(3). C'est pourquoi il était intéressant de d'abord revoir l'analyse de

NQ.

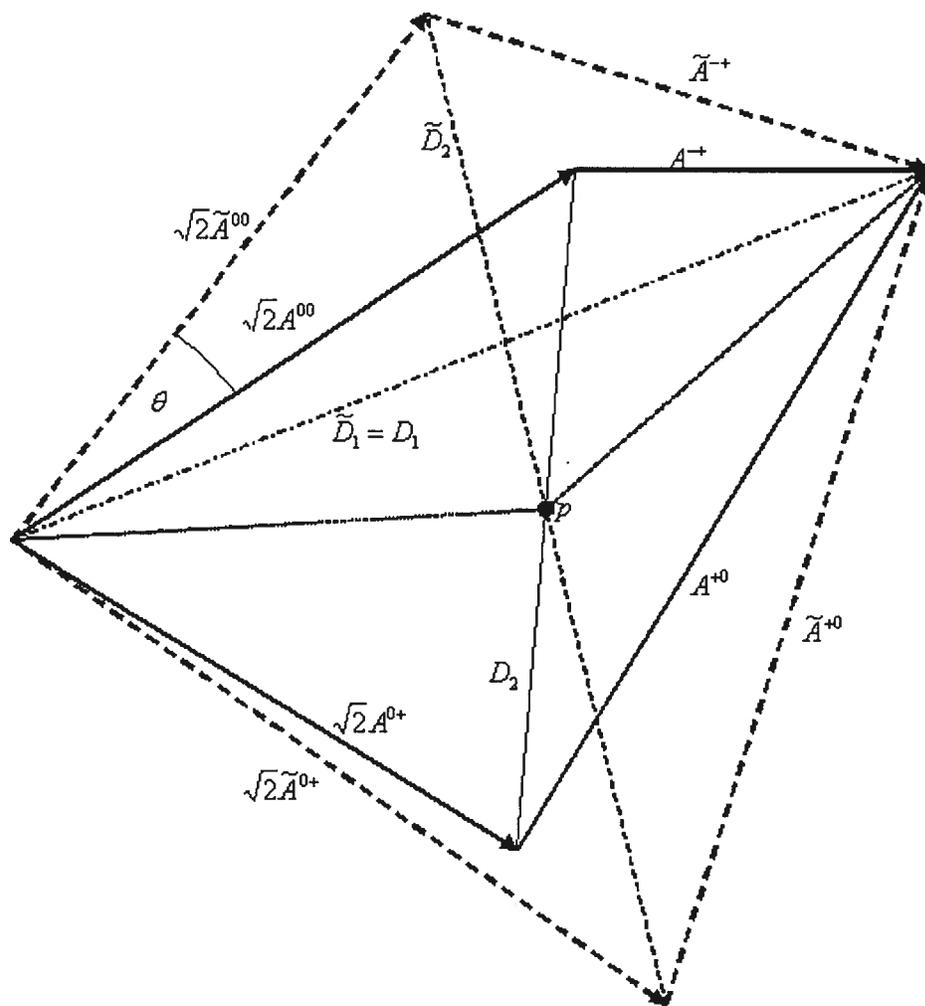


FIG. 2.1 – Schéma du quadrilatère et du quadrilatère tilde dans le plan complexe

CHAPITRE 3

MESURER TOUT LE TRIANGLE UNITAIRE AVEC $B \rightarrow \pi K$ SEULEMENT

Le contenu de ce chapitre est complètement basé sur la référence ^[1].

3.1 Relations entre les pingouins électrofaibles et les *arbres*

Au début du chapitre précédent, nous avons compté le nombre de paramètres théoriques indépendants et le nombre de mesures expérimentales. Nous avons conclu que nous sommes devant une impasse : il y a trop de paramètres théoriques pour le nombre de mesures dont nous disposons. La première façon de contourner cette impasse est d'omettre certains paramètres théoriques qu'on croit être négligeables. C'est ce qu'ont fait NQ. Cependant, une autre façon de faire est de trouver des relations entre les différents paramètres théoriques afin qu'ils ne soient plus indépendants et ainsi réduire le nombre de paramètres indépendants.

En utilisant la symétrie de saveur $SU(3)$, on peut ainsi relier les diagrammes des arbres et ceux des PEF. Ce calcul a été fait par Neubert et Rosner (NR) ^[21] et de façon plus générale par Gronau, Pirjol et Yan (GPY) ^[22]. Comme nous l'avons vu lors de la présentation de l'hamiltonien effectif, à une bonne approximation ($c_7, c_8 \ll c_9 c_{10}$) les opérateurs des PEF sont presque purement $(V - A) \times (V - A)$ comme ceux des arbres. En présupposant la symétrie de saveur $SU(3)$, les opérateurs O_1, O_2, O_9 et O_{10} ont tous exactement la même forme à une transformation de Fierz près. Il n'est donc pas surprenant qu'on puisse relier PEF et les arbres.

Le calcul est très long et compliqué même si le principe est très simple. Comme ce n'est pas l'objectif de ce mémoire de refaire ce calcul, nous allons tout simplement

citer les résultats que nous utiliserons par la suite ^[22] :

$$\begin{aligned}
P^{EF}(B^+ \rightarrow \pi^+ K^0) + \sqrt{2}P^{EF}(B^+ \rightarrow \pi^0 K^+) &= -\frac{3c_9 + c_{10}}{2c_1 + c_2} \frac{(T + C)}{|V_{ub}^* V_{us}|}, \\
P^{EF}(B^0 \rightarrow \pi^- K^+) + P^{EF}(B^+ \rightarrow \pi^+ K^0) &= \frac{3c_9 - c_{10}}{4c_1 - c_2} \frac{(T - C)}{|V_{ub}^* V_{us}|} \\
&\quad - \frac{3c_9 + c_{10}}{4c_1 + c_2} \frac{(T + C)}{|V_{ub}^* V_{us}|}, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

où nous avons négligé les diagrammes A et E parce qu'ils sont d'ordre $\bar{\lambda}^3$ selon notre hiérarchie approximative. De plus, un terme $P^{EF}(B \rightarrow f)$ ¹ désigne la contribution totale des PEF dans le processus $B \rightarrow f$ et les c_i sont les coefficients de Wilson. De ces deux équations, il est facile de dériver :

$$\begin{aligned}
P_{EF} &= \frac{3c_9 + c_{10}}{4c_1 + c_2} R(T + C) + \frac{3c_9 - c_{10}}{4c_1 - c_2} R(T - C), \\
P_{EF}^C &= \frac{3c_9 + c_{10}}{4c_1 + c_2} R(T + C) - \frac{3c_9 - c_{10}}{4c_1 - c_2} R(T - C), \quad (3.2)
\end{aligned}$$

où $R = |V_{tb}^* V_{ts} / V_{ub}^* V_{us}| = (\lambda^2 \sqrt{\rho^2 + \eta^2})^{-1}$. On trouve l'expression des $P^{EF}(B \rightarrow f)$ à partir des équations 1.25. En d'autres mots, nous avons écrit les PEF en termes d'arbres, de facteurs CKM et de constantes connues. Les PEF ne sont donc plus des paramètres théoriques indépendants et le comptage des paramètres est complètement différent. Maintenant il ne reste que 3 amplitudes indépendantes : P , T et C . Nous avons donc 3 normes, 2 phases fortes relatives et 2 paramètres CKM (ρ et η) pour un grand total de 7 paramètres théoriques indépendants.

Du côté des quantités mesurables il y a de petits changements aussi. En effet, le fait de présumer que l'annihilation est nulle ($A = 0$) impose automatiquement que l'asymétrie CP directe de $B^\pm \rightarrow \pi^\pm K^0(\bar{K}^0)$ est trivialement nulle. Nous ne disposons donc que de 8 mesures expérimentales au lieu de 9 comme précédemment. Mais peu importe, en principe il y a suffisamment d'information pour tout résoudre !

¹Dans cette notation $P^{EF}(B \rightarrow f)$ inclut les termes CKM, contrairement aux diagrammes P_{EF} et P_{EF}^C . D'où l'apparition d'un terme $V_{tb}^* V_{ts}$ dans l'équation suivante.

Autre point important : comme nous le verrons dans la section suivante il est possible de résoudre le système d'équations sans connaître la valeur de l'asymétrie CP indirecte, qui est de loin la mesure la plus imprécise. En effet, comme nous disposons de 8 mesures expérimentales pour trouver 7 paramètres théoriques, il y a une mesure superflue. Donc contrairement à NQ notre méthode ne requiert pas une connaissance de l'asymétrie CP indirecte, même que nous pouvons prédire sa valeur.

3.2 Résolution du système d'équations

La résolution de ce système d'équations, bien que plus compliquée, est très similaire à la méthode de NQ. Encore une fois nous utiliserons une construction géométrique pour déterminer les phases des amplitudes et en extraire les paramètres CKM.

A priori, l'ajout des PEF implique que les diagonales ne sont pas forcément de la même longueur et rend presque impossible une construction géométrique utile. En effet, d'après les équations 1.25 les expressions des diagonales sont :

$$\begin{aligned} D_1 &= -(T + C)e^{i\gamma} - P_{EF} - P_{EF}^C, \\ \bar{D}_1 &= -(T + C)e^{-i\gamma} - P_{EF} - P_{EF}^C. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donc de façon générale, $|D_1| \neq |\bar{D}_1|$. Cependant, en écrivant les PEF en termes d'arbres avec la symétrie de saveur SU(3) comme nous l'expliquons dans la section précédente, on retrouve à nouveau des diagonales de même longueur :

$$\begin{aligned} D_1 &= -(T + C) \left[e^{i\gamma} + \frac{3c_9 + c_{10}}{2c_1 + c_2} R \right], \\ \bar{D}_1 &= -(T + C) \left[e^{-i\gamma} + \frac{3c_9 + c_{10}}{2c_1 + c_2} R \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Comme les coefficients de Wilson sont des nombres réels, on a bel et bien égalité

entre les deux longueurs des diagonales. Par contre, contrairement à NQ, il ne suffit plus d'une simple rotation de 2γ pour les faire coïncider. Il faut plutôt faire une rotation d'un angle qui dépend de plusieurs paramètres inconnus. Alors appelons cette rotation ϕ et laissons la comme un inconnu pour l'instant. Nous faisons donc subir une rotation de ϕ au *quadrilatère bar* et la résultante est le *quadrilatère tilde*, dont la diagonale coïncide parfaitement avec celle du *quadrilatère*.

Que pouvons nous apprendre de cette construction ? Pour l'instant rien puisque nous ne connaissons pas encore la longueur des diagonales et les quadrilatères ne sont donc pas fixés. Mais nous pouvons laisser la longueur de la diagonale comme une variable inconnue (appelons la d) et écrire tout le reste en fonction de d et à la fin nous aurons des contraintes disponibles pour déterminer la valeur de d :

1. En utilisant la trigonométrie, nous pouvons écrire les phases relatives de toutes les *amplitudes* et les *amplitudes tildes* (A^{+-} , A^{00} , A^{+0} , A^{0+} , \tilde{A}^{+-} , \tilde{A}^{00} , \tilde{A}^{+0} , \tilde{A}^{0+}) en fonction de d . Il y a bien entendu des ambiguïtés discrètes telles qu'attendues.
2. Nous pouvons écrire ϕ en fonction de d ². En effet, avant la rotation A^{+0} et \tilde{A}^{+0} coïncident, donc la différence de phase entre A^{+0} et \tilde{A}^{+0} est égale à ϕ . Il y a bien sur quelques ambiguïtés discrètes puisque la façon de placer les quadrilatères n'est pas unique.
3. 1. et 2. implique que nous pouvons écrire toutes les *amplitudes bar* aussi en fonction de d .

Maintenant, examinons à nouveau les équations 1.25. Il y a 4 équations plus les 4 équations conjuguées CP, pour un total de 8. De ces 8 équations, 2 ne sont pas linéairement indépendantes à cause des 2 relations quadrilatérales d'isospin (équations 1.33). Il reste donc 6 équations indépendantes. De plus, à cause de l'approximation de négliger l'annihilation, on a trivialement $A^{+0} = \tilde{A}^{+0}$ et il ne reste donc à la fin que 5 équations linéairement indépendantes et ces équations sont de nature complexe. Maintenant, si on écrit les PEF en terme d'arbres, ces

²Pour plus de détails sur ce point, voir I.

équations contiennent 5 variables inconnues (P , T , C et 2 paramètres CKM). De ces 5 paramètres théoriques, 3 sont complexes et 2 réels.

Ici il y a une observation intéressante : ce serait plus simple si tous les paramètres théoriques étaient complexes. En effet, nous aurions alors 5 équations complexes avec 5 inconnus complexes. Nous pourrions donc résoudre ces 5 paramètres en fonction des amplitudes complexes (les A^{ij} 's) que nous avons déjà écrites en fonction de d . C'est exactement ce que nous allons faire ! Mais pour ce faire, nous devons d'abord accorder aux deux paramètres réels une fausse liberté dans le plan complexe. À la fin, nous utiliserons cette fausse liberté comme contrainte pour déterminer la valeur de d .

Nos 5 paramètres «complexes» sont donc P , T , C , $e^{i\gamma}$ et $\sqrt{\rho^2 + \eta^2}$. Les deux derniers paramètres sont choisis de façon à simplifier les équations, mais d'autres choix équivalents existent et sont aussi bons en principe.

Ceci étant, nous pouvons ainsi inverser les 5 équations complexes et écrire P , T , C , $e^{i\gamma}$ et $\sqrt{\rho^2 + \eta^2}$ en fonction des amplitudes (les A^{ij} 's), et donc en fonction de d et des valeurs expérimentales. Le résultat est un ensemble de grandes équations algébriques inintelligibles et il serait totalement inutile de les écrire ici. Cependant, on peut quand même travailler avec ces équations en utilisant une assistance informatique appropriée³. Finalement, il suffit d'imposer les deux contraintes suivantes pour trouver les valeurs possibles de d :

$$\begin{aligned} |e^{i\gamma}| &= 1, \\ \text{Im}(\sqrt{\rho^2 + \eta^2}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Analytiquement, on ne peut pas résoudre les équations 3.5 puisque les solutions pour les valeurs de d sont en général non algébriques. Mais numériquement, ce

³La résolution de ce système d'équation a requis la conception d'un code utilisant le langage *Mathematica*. Ce code reprend exactement la méthode décrite dans cette section. Les algorithmes standards pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires ne permettent pas une étude exhaustive des ambiguïtés discrètes puisqu'on ne peut jamais être certain d'avoir trouvé toutes les solutions. D'où l'utilité d'un code pour la résolution de ce système d'équations.

n'est pas un problème.

Comme nous avons écrit tout le reste en terme de d et que nous connaissons maintenant sa valeur, nous avons résolu le système d'équation (en principe)!

3.3 Résultats numériques

Nous avons résolu ce système d'équations pour des valeurs expérimentales fictives et sans incertitudes. Pour générer ces fausses valeurs expérimentales, nous avons supposé que les paramètres théoriques prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} |P| &= 1.0, \quad \delta_P = -18.0^\circ, \quad |T| = 0.3, \quad \delta_T = 2.0^\circ \\ |C| &= 0.05, \quad \delta_C = 102.0^\circ, \quad \rho = 0.18, \quad \eta = 0.38, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où les δ 's sont les phases de P , T et C . À ce niveau ci, il n'y a pas de physique, c'est mathématique. Tout autre choix aurait été aussi bon dans les équations 3.6. En utilisant ces valeurs et les équations 1.25, on trouve facilement les fausses mesures suivantes pour les amplitudes :

$$\begin{aligned} |A^{+0}| &= |\bar{A}^{+0}| = 1.00, \\ |A^{0+}| &= 0.86, \quad |\bar{A}^{0+}| = 1.00, \\ |A^{00}| &= 0.62, \quad |\bar{A}^{00}| = 0.57, \\ |A^{-+}| &= 1.07, \quad |\bar{A}^{-+}| = 1.22. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le but est de prendre comme point de départ ces fausses mesures absolues et de retrouver les paramètres théoriques hypothétiques de départ (équations 3.6). Ainsi, on peut faire la preuve qu'on peut effectivement résoudre le système d'équations et on peut étudier l'importance des ambiguïtés discrètes.

En appliquant la méthode décrite dans la section précédente, nous avons trouvé 8 solutions et elles sont détaillées dans le tableau 3.1.

	$ P $	$ T $	$ C $	$(\delta_P - \delta_T)$	$(\delta_T - \delta_C)$
(1)	0.96	0.42	0.33	-126.5°	-28.0°
(2)	0.98	1.97	1.74	-21.0°	-149.2°
(3)	1.0	0.3	0.05	-20.0°	-100.0°
(4)	1.01	1.90	0.43	-31.9°	-55.0°
(5)	1.02	1.70	0.55	-46.7°	-26.7°
(6)	1.02	1.60	0.23	-4.6°	-8.6°
(7)	1.08	2.05	0.59	-5.1°	-2.4°
(8)	1.38	3.12	1.18	-5.5°	-0.6°

	ρ	η	$\sin 2\beta$	$\sqrt{\rho^2 + \eta^2}$	$A_{\pi K}^{indir}$
(1)	-0.56	0.17	0.21	0.59	-0.41
(2)	-7.33	0.99	0.23	7.40	0.31
(3)	0.18	0.38	0.76	0.42	-0.80
(4)	-1.91	0.18	0.12	1.91	-0.09
(5)	-0.96	0.07	0.07	0.96	-0.03
(6)	-0.88	0.91	0.78	1.27	-0.48
(7)	-0.68	0.37	0.42	0.77	0.24
(8)	-0.28	0.06	0.10	0.29	-0.67

TAB. 3.1 – Résultats numériques pour les 8 solutions que nous avons trouvés pour des valeurs expérimentales fictives et sans incertitudes (voir détails dans le texte).

On constate que la solution (3) est effectivement notre supposition de départ. Pour être précis, mentionnons qu'il y a plus que 8 solutions. En effet, chaque solution écrite dans le tableau 3.1 en représente 4. Nous en avons écrits que 8 pour alléger le tableau. Ceci est dû au simple fait que connaissant une solution, on peut en construire 3 autres en utilisant la transformation

$$P \rightarrow P, T \rightarrow -T, C \rightarrow -C, e^{i\gamma} \rightarrow -e^{i\gamma}, \sqrt{\rho^2 + \eta^2} \rightarrow -\sqrt{\rho^2 + \eta^2}, \quad (3.8)$$

ou

$$P \rightarrow P^*, T \rightarrow T^*, C \rightarrow C^*, e^{i\gamma} \rightarrow e^{-i\gamma}, \sqrt{\rho^2 + \eta^2} \rightarrow \sqrt{\rho^2 + \eta^2}. \quad (3.9)$$

C'est à dire que pour chaque solution, il y a toujours une solution équivalente dans chacun des quadrants du plan (ρ, η) . Les solutions avec $\eta < 0$ peuvent être ignorées en utilisant les connaissances acquises de la désintégration des kaons ^[6].

Il est important de rappeler que nous n'avons pas encore utilisé l'asymétrie CP indirecte dans la résolution du système d'équations. Elle se révèle être très utile puisque en principe, si elle est suffisamment précise, elle permet d'éliminer presque toutes les ambiguïtés discrètes. En effet, dans cet exemple numérique non physique nous connaissons la *bonne solution*. Par contre, en situation réelle avec des vraies valeurs expérimentales nous n'avons pas ce privilège. Il est donc important d'avoir encore des munitions pour discriminer les *mauvaises solutions* dans le lot. De plus, si l'asymétrie CP indirecte n'est pas suffisante, on peut aussi supposer $\sin(2\beta)$ et/ou $\sqrt{\rho^2 + \eta^2}$ connus⁴ par exemple pour éliminer les ambiguïtés discrètes restantes. À la fin il est donc réaliste d'espérer avoir une solution unique malgré les erreurs expérimentales très larges dont nous disposons.

3.4 Analyse des erreurs théoriques

Finalement, bien que cette méthode soit belle en principe, il est capital de ne pas oublier les quelques approximations que nous avons dû faire pour arriver à résoudre le problème. Ceci n'est pas une analyse rigoureuse de la propagation des erreurs. L'étude exacte de la propagation des erreurs doit se faire numériquement dans la solution, mais nous n'avons pas fait cette analyse puisque ce n'était pas le but visé. Mais on veut quand même avoir une idée de l'ordre de grandeur des erreurs associées à nos approximations.

1. Pour relier les PEF et les arbres, nous devons négliger les opérateurs 7 et 8 de l'hamiltonien effectif. L'argument est que leurs coefficients de Wilson sont

⁴Ces valeurs peuvent être prises des références ^[11] ou ^[13] par exemple.

petits. En effet, ils prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} c_7 &= 3.49 \times 10^{-4} \quad , \quad c_8 = 3.72 \times 10^{-4} \quad , \\ c_9 &= -9.92 \times 10^{-3} \quad , \quad c_{10} = 2.54 \times 10^{-3} \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il est clair que c_9 domine largement. En supposant naïvement⁵ que les éléments de matrice sont du même ordre de grandeur, l'erreur commise en négligeant c_7 et c_8 est donc de l'ordre de 4%.

2. Pour relier les PEF est les arbres, il faut aussi présumer la symétrie de saveur SU(3). Ceci est probablement notre approximation la plus délicate puisque typiquement l'erreur commise en présumant SU(3) est de l'ordre de 20 %. Cependant il semblerait que l'erreur de SU(3) soit beaucoup plus petite dans le cas particulier de $B \rightarrow \pi K$ et elle serait plutôt de l'ordre de 5 % selon les estimations de Neubert et Rosner⁶ (NR) ^[21]. Par contre, il y a un petit bémol au sujet de cette estimation. En effet, c'est une estimation directe de la brisure SU(3) de la première des deux équations 3.1 seulement, ne donnant aucune indication sur la brisure SU(3) de la deuxième équation. Il est aussi important de mentionner que d'autres estimations plus poussées mais imprécises suggèrent que la brisure SU(3) pourrait être grande ^[23]. Bref, l'estimation de NR est possiblement optimiste.

Cependant, il est important de rappeler que la seule façon (indépendante de modèle théorique) de travailler avec les désintégrations $B \rightarrow \pi K$ en prenant en compte l'effet des PEF est la symétrie de saveur SU(3)⁷. Toutes les analyses récentes concernant les PEF dans $B \rightarrow \pi K$ utilisent SU(3). Donc même si on court le risque que la brisure SU(3) soit plus grande qu'escomptée, c'est vraiment le mieux qui puisse être fait pour l'instant.

3. De plus, nous avons aussi négligé la contributions des diagrammes d'annihili-

⁵C'est une supposition raisonnable puisque les opérateurs sont presque identiques.

⁶Ils ont utilisés une théorie effective appelée la *factorisation naïve* pour estimer la brisure SU(3).

⁷Si on fait abstraction de travaux en cours.

lation (A) et d'échange (E). Selon notre hiérarchie approximative, ils sont supprimés d'un facteur $\bar{\lambda}^3$ (≈ 0.008) par rapport aux diagrammes dominants. On estime donc cette erreur comme étant de l'ordre de 1%.

4. Finalement, nous avons aussi négligé les quarks u et c dans les boucles de tous les pingouins et PEF. Cette erreur est de l'ordre de $|V_{ub}^* V_{us} / V_{tb}^* V_{ts}| \approx 2\%$.

En considérant toutes ces approximations, on en conclut une erreur théorique *grosso modo* au minimum de l'ordre de 10%. Mais il est important de garder à l'esprit qu'une brisure $SU(3)$ plus grande qu'attendue ne ferait sursauter personne. Cette estimation est donc relativement optimiste, mais pour l'instant c'est le mieux qu'on peut faire avec les mesures de $B \rightarrow \pi K$ seulement!

Ma contribution à ce résultat est d'avoir développé en collaboration avec David London et Alexandre Lemerle la méthode pour résoudre le système d'équations décrite à la section 3.2. De plus j'ai développé le code en langage *Mathematica* pour appliquer numériquement la méthode et obtenir les résultats numériques présentés à la section 3.3.

CHAPITRE 4

DETECTER ET MESURER LA NOUVELLE PHYSIQUE

Le contenu de ce chapitre provient essentiellement de la référence [2].

4.1 Approximation concernant la nouvelle physique

Cette section traite d'une approximation utile introduite par Datta et London [24]. Les indices suggérant la présence de nouvelle physique (NP) pointent en particulier vers les pingouins $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$ [25]. Il est donc raisonnable de chercher une présence de NP ayant cette forme. Nous allons donc considérer les 20 possibilités d'opérateurs de la forme $\mathcal{O}_{NP}^{ij,q} \sim (\bar{s}\Gamma_i b)(\bar{q}\Gamma_j q)$ ($q = u, d, s, c$), où $\Gamma_{i,j}$ peut être n'importe quelle structure de Lorentz et où nous avons omis les indices de couleur. En principe, chaque amplitude de NP résultante peut avoir une phase forte et une phase faible distincte. Mais le point important à mentionner ici est qu'à une bonne approximation, on peut négliger les phases fortes relatives des amplitudes de NP. Cette hypothèse permet des simplifications importantes. En effet, on peut alors rassembler une combinaison linéaire d'amplitudes de NP en une seule amplitude de NP effective et une seule phase faible effective

$$\sum_{i,j} \langle f | \mathcal{O}_{NP}^{ij,q} | B \rangle = \mathcal{A}^q e^{i\Phi_q} , \quad (4.1)$$

réduisant ainsi considérablement le nombre de paramètres théoriques libres. L'origine de cette approximation est que les phases fortes proviennent principalement des rediffusions (rescattering). Dans le MS, la contribution des rediffusions est typiquement de l'ordre de 5%. Il est tout à fait raisonnable de supposer que c'est le cas aussi pour la NP et ainsi on peut aisément présumer que les différences des phases fortes sont négligeables et que l'erreur commise est de l'ordre de 5%.

4.2 Applications avec $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que la symétrie de saveur $SU(3)$ permet de relier les PEF et les arbres. Mais il s'agit là d'une utilisation minimale de $SU(3)$. En effet, sous $SU(3)$ les mésons K et π ne sont que différents états d'un même objet. On peut donc relier les désintégrations $B \rightarrow \pi K$ avec $B \rightarrow \pi\pi$ et d'autres plus exotiques. Nous disposons donc d'un bassin beaucoup plus grand de mesures expérimentales disponibles et nous pouvons ainsi espérer pouvoir extraire plus de paramètres théoriques. Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'il est possible d'extraire certains paramètres de NP et donc de mesurer la NP directement à partir des désintégrations des mésons B . Par contre, il est certain que l'erreur théorique ainsi commise est importante et plus ou moins contrôlable.

4.2.1 Scénario 1 : Cas général mais avec nouvelle physique seulement dans $B \rightarrow \pi K$

Pour le reste de ce chapitre, nous désignerons les diagrammes dans $B \rightarrow \pi K$ avec un prime(') et celles dans $B \rightarrow \pi\pi$ sans prime. De plus, contrairement à ce que nous avons fait dans les chapitres précédents, nous ne présumerons pas qu'il ne peut y avoir qu'un quark t à dans la boucle des pingouins gluoniques. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 P &= P_u V_{ub}^* V_{ud} + P_c V_{cb}^* V_{cd} + P_t V_{tb}^* V_{td} \\
 &= (P_u - P_t) V_{ub}^* V_{ud} + (P_c - P_t) V_{cb}^* V_{cd} \\
 &\equiv P_{ut} e^{i\gamma} + P_{ct} ,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

et pareillement dans $B \rightarrow \pi K$. Pour les processus $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$, on a aussi que $|P'_{ut}| \ll |P'_{ct}|$ puisque $|V_{ub}^* V_{us} / V_{cb}^* V_{cs}| \simeq 2\%$. En procédant de la même façon qu'avec le modèle

standard, on trouve facilement les expressions des amplitudes :

$$\begin{aligned}
A(B^+ \rightarrow \pi^+ K^0) &= P'_{ct} - \frac{1}{3} P'_{EF} + \mathcal{A}'^{c,d} e^{i\Phi'_d} , \\
\sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^0 K^+) &= -P'_{ct} - T' e^{i\gamma} - C' e^{i\gamma} - P'_{EF} \\
&\quad - \frac{2}{3} P'_{EF} - \mathcal{A}'^{u} e^{i\Phi'_u} + \mathcal{A}'^{d} e^{i\Phi'_d} - \mathcal{A}'^{c,u} e^{i\Phi'_c} , \\
A(B_d^0 \rightarrow \pi^- K^+) &= -P'_{ct} - T' e^{i\gamma} - \frac{2}{3} P'_{EF} - \mathcal{A}'^{c,u} e^{i\Phi'_c} , \\
\sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0 K^0) &= P'_{ct} - C' e^{i\gamma} - P'_{EF} - \frac{1}{3} P'_{EF} \\
&\quad - \mathcal{A}'^{u} e^{i\Phi'_u} + \mathcal{A}'^{d} e^{i\Phi'_d} + \mathcal{A}'^{c,d} e^{i\Phi'_c} , \tag{4.3}
\end{aligned}$$

où nous avons encore négligé l'annihilation pour les même raisons que dans le chapitre précédent. Pour le comptage des paramètres, il est important de se rappeler que les paramètres de la NP (\mathcal{A}'^{d} , \mathcal{A}'^{u} et $\mathcal{A}'^{c,d}$) ont la même phase forte et que les PEF ne sont pas indépendants des arbres. De plus, $\mathcal{A}'^{u} e^{i\Phi'_u}$ et $\mathcal{A}'^{d} e^{i\Phi'_d}$ apparaissent toujours dans la même combinaison linéaire et ne peuvent pas être distingués. On écrit donc $\mathcal{A}'^{comb} e^{i\Phi'} \equiv -\mathcal{A}'^{u} e^{i\Phi'_u} + \mathcal{A}'^{d} e^{i\Phi'_d}$. Comptons le nombre de paramètres libres : il y a 6 normes ($|P'_{ct}|$, $|T'|$, $|C'|$, $|\mathcal{A}'^{comb}|$, $|\mathcal{A}'^{c,d}|$ and $|\mathcal{A}'^{c,u}|$), 3 phases fortes relatives, 2 phases faibles du MS et 3 phases faibles de la NP. Le total est donc de 14 paramètres libres et nous ne disposons que de 9 mesures dans $B \rightarrow \pi K$. Il est donc clair qu'on ne peut pas extraire les paramètres de NP en utilisant $B \rightarrow \pi K$ seulement. Cependant, grâce à SU(3), nous pouvons obtenir beaucoup d'informations utile à partir de $B \rightarrow \pi\pi$. Dans ce scénario nous présumons que la NP n'affecte pas les désintégrations de $B \rightarrow \pi\pi$ puisqu'elles sont des processus $\bar{b} \rightarrow \bar{d}$. On peut donc écrire les amplitudes de $B \rightarrow \pi\pi$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= -T e^{i\gamma} - C e^{i\gamma} , \\
A(B_d^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= -T e^{i\gamma} - P_{ut} e^{i\gamma} - P_{ct} , \\
\sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= -C e^{i\gamma} + P_{ut} e^{i\gamma} + P_{ct} . \tag{4.4}
\end{aligned}$$

À noter qu'on peut absorber P_{ut} dans T et C en définissant :

$$\tilde{T} = T + P_{ut} , \quad \tilde{C} = C - P_{ut} , \quad (4.5)$$

réduisant ainsi le nombre de paramètres libres. Naturellement, en présumant la symétrie SU(3) parfaite, les parties hadroniques des diagrammes et les diagrammes primes sont identiquement égales, seuls leurs facteurs CKM sont différents. Donc, on a les rapports suivant

$$\frac{\tilde{T}'}{\tilde{T}} = \frac{\tilde{C}'}{\tilde{C}} = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2/2} , \quad \frac{P_{ct}}{P'_{ct}} = \frac{P_{EF}}{P'_{EF}} = \frac{P_{EF}^C}{P'_{EF}^C} = -\frac{\lambda}{1 - \lambda^2/2} , \quad (4.6)$$

Si on ne présume pas SU(3) parfait, la brisure SU(3) de ces relations est calculable en ayant recourt par exemple la factorisation CDQ ou autres théories effectives. Mais comme ici nous ne nous intéressons qu'au comptage des paramètres, nous supposons SU(3) parfait. En procédant ainsi, nous avons donc encore 6 normes ($|P'_{ct}|$, $|\tilde{T}'|$, $|\tilde{C}'|$, $|\mathcal{A}'^{c,d}|$, $|\mathcal{A}'^{c,u}|$ et $|\mathcal{A}'^{comb}|$), 3 phases fortes relatives, 2 phases faibles du MS et 3 phases faibles de NP. Donc un total de 14 paramètres et 16 mesures (9 venant de $B \rightarrow \pi K$, 6 de $B \rightarrow \pi\pi$ et la valeur de β venant de $B_d^0(t) \rightarrow J/\psi K_S$ qu'on présume ne pas être affectée par la NP). En principe on peut donc extraire toutes l'information de la NP et ainsi tester le MS.

4.2.2 Scénario 2 : nouvelle physique qui préserve l'isospin dans $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$

Pour des raisons évidentes, il peut s'avérer plus utile d'étudier des scénarios de NP un peu plus restreints que le cas général. Le nombre de paramètres théoriques libres est significativement inférieur, facilitant ainsi l'analyse numérique. Nous considérons donc ici le cas où la NP préserve la symétrie d'isospin. La conséquence immédiate de cette supposition est trivialement

$$\mathcal{A}'^{u} e^{i\Phi'_u} = \mathcal{A}'^{d} e^{i\Phi'_d} , \quad \mathcal{A}'^{c,u} e^{i\Phi'_u} = \mathcal{A}'^{c,d} e^{i\Phi'_d} \equiv \mathcal{A}'^c e^{i\Phi'^c} , \quad (4.7)$$

qui implique automatiquement que $\mathcal{A}'^{comb} e^{i\Phi'}$ est nulle. Les équations des amplitudes dans $B \rightarrow \pi K$ deviennent donc

$$\begin{aligned}
A(B^+ \rightarrow \pi^+ K^0) &= P'_{ct} + \mathcal{A}'^C e^{i\Phi'^C}, \\
\sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^0 K^+) &= -P'_{ct} - \tilde{T}' e^{i\gamma} - \tilde{C}' e^{i\gamma} - P'_{EF} - \mathcal{A}'^C e^{i\Phi'^C}, \\
A(B_d^0 \rightarrow \pi^- K^+) &= -P'_{ct} - \tilde{T}' e^{i\gamma} - \mathcal{A}'^C e^{i\Phi'^C}, \\
\sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0 K^0) &= P'_{ct} - \tilde{C}' e^{i\gamma} - P'_{EF} + \mathcal{A}'^C e^{i\Phi'^C},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

alors que le système $B \rightarrow \pi\pi$ n'est toujours pas affecté. Comptons à nouveau le nombre de paramètres libre. Nous avons maintenant 4 normes ($|P'_{ct}|$, $|\tilde{T}'|$, $|\tilde{C}'|$ et $|\mathcal{A}'^C|$), 3 phases fortes relatives, 2 phases faibles du MS et une seule phase faible de NP. Donc un total de 10 paramètres et 16 mesures. Il est donc assez raisonnable de penser que ce système puisse être résolu numériquement et que le résultat ait relativement peu d'ambiguïtés discrètes puis que le système possède en principe beaucoup de contraintes superflues.

Il est également intéressant de noter que dans le cadre de ce scénario de NP, il y a suffisamment d'information pour ajouter aisément une présence de NP dans les pingouins $\bar{b} \rightarrow \bar{d}$ et donc dans $B \rightarrow \pi\pi$. Si on ajoute une telle présence de NP en utilisant l'approximation de négliger les différences de phase forte de la NP, les équations pour $B \rightarrow \pi\pi$ deviennent alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= -\tilde{T}' e^{i\gamma} - \tilde{C}' e^{i\gamma} + \mathcal{A}^{comb} e^{i\Phi} - \mathcal{A}^{C,u} e^{i\Phi_u^C} + \mathcal{A}^{C,d} e^{i\Phi_d^C}, \\
A(B_d^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= -\tilde{T}' e^{i\gamma} - P_{ct} - \mathcal{A}^{C,u} e^{i\Phi_u^C}, \\
\sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= -\tilde{C}' e^{i\gamma} + P_{ct} + \mathcal{A}^{comb} e^{i\Phi} + \mathcal{A}^{C,d} e^{i\Phi_d^C},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\mathcal{A}^{comb} e^{i\Phi} \equiv -\mathcal{A}^u e^{i\Phi_u} + \mathcal{A}^d e^{i\Phi_d}$. En présumant que la NP préserve l'isospin, on assiste aux mêmes simplifications que pour $B \rightarrow \pi K$. L'effet de la NP est alors d'ajouter une norme et une phase faible. En refaisant le comptage on a alors 12 paramètres théoriques pour 16 mesures expérimentales. Il est donc encore raisonnable d'espérer pouvoir tout résoudre numériquement dans ce scénario.

4.2.3 Scénario 3 : nouvelle physique de type FCNC dans $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$

Finalement, considérons le cas où la NP prend la forme d'un courant neutre qui change la saveur des quarks. Dans un tel scénario, la NP peut en principe avoir une phase faible associée au nouveau vertex effectif $Z\bar{s}b$. Alors, la phase faible de NP se doit d'être la même pour tous les opérateurs de NP que nous avons considérés. Il est aussi important de noter que pour cette classe de scénarios de NP, il n'est pas nécessaire d'avoir recourt à l'approximation de négliger les différences de phase forte de la NP. En effet, comme toutes les contributions de la NP possèdent déjà la même phase faible, le regroupement en un seul terme est automatique.

Posons que r est le rapport entre le couplage du Z -FCNC hypothétique avec les quarks u et d . De façon général, la constante r est inconnue, mais si on s'intéresse à un modèle particulier de NP de type Z -FCNC, alors r est connue. Il devient donc évident que les relations suivantes existent :

$$|\mathcal{A}'^{,u}| = r|\mathcal{A}'^{,d}|, \quad |\mathcal{A}'^{C,u}| = r|\mathcal{A}'^{C,d}|, \quad (4.10)$$

et on peut donc définir

$$|\mathcal{A}'_Z| \equiv |\mathcal{A}'^{,comb}| = |\mathcal{A}'^{,d}|(1-r), \quad |\mathcal{A}'^{C}_Z| \equiv |\mathcal{A}'^{C,d}|. \quad (4.11)$$

Les équations des amplitudes pour $B \rightarrow \pi K$ deviennent donc

$$\begin{aligned} A(B^+ \rightarrow \pi^+ K^0) &= P'_{ct} + \mathcal{A}'^{C}_Z e^{i\Phi'^{,Z}}, \\ \sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^0 K^+) &= -P'_{ct} - \tilde{T}' e^{i\gamma} - \tilde{C}' e^{i\gamma} - P'_{EF} \\ &\quad + \mathcal{A}'_Z e^{i\Phi'^{,Z}} - r\mathcal{A}'^{C}_Z e^{i\Phi'^{,Z}}, \\ A(B_d^0 \rightarrow \pi^- K^+) &= -P'_{ct} - \tilde{T}' e^{i\gamma} - r\mathcal{A}'^{C}_Z e^{i\Phi'^{,Z}}, \\ \sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0 K^0) &= P'_{ct} - \tilde{C}' e^{i\gamma} - P'_{EF} + \mathcal{A}'_Z e^{i\Phi'^{,Z}} + \mathcal{A}'^{C}_Z e^{i\Phi'^{,Z}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Encore une fois, il suffit de compter le nombre de paramètres théoriques indépen-

dants : 5 normes ($|P'_{ct}|$, $|\tilde{T}'|$, $|\tilde{C}'|$, $|\mathcal{A}'_z|$ et $|\mathcal{A}'_z{}^C|$), 4 phases fortes relatives, 2 phases faibles du MS et une seule phase faible de NP, pour un total de 12 dans le cas où nous supposons que la NP n'affecte pas $B \rightarrow \pi\pi$.

Mais comme dans le scénario précédent, il y a suffisamment de liberté pour présumer une présence de NP dans $B \rightarrow \pi\pi$. La situation est alors complètement analogue à celle dans $B \rightarrow \pi K$ et on a

$$|\mathcal{A}^u| = r|\mathcal{A}^d|, \quad |\mathcal{A}^{C,u}| = r|\mathcal{A}^{C,d}|, \quad (4.13)$$

et donc

$$|\mathcal{A}_z| \equiv |\mathcal{A}^{comb}| = |\mathcal{A}^d|(1-r), \quad |\mathcal{A}_z^C| \equiv |\mathcal{A}^{C,d}|. \quad (4.14)$$

Les équations des amplitudes de $B \rightarrow \pi\pi$ deviennent alors

$$\begin{aligned} \sqrt{2}A(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0) &= -\tilde{T} e^{i\gamma} - \tilde{C} e^{i\gamma} + \mathcal{A}_z e^{i\Phi^Z} + \mathcal{A}_z^C e^{i\Phi^Z} (1-r), \\ A(B_d^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= -\tilde{T} e^{i\gamma} - P_{ct} - r\mathcal{A}_z^C e^{i\Phi^Z}, \\ \sqrt{2}A(B_d^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) &= -\tilde{C} e^{i\gamma} + P_{ct} + \mathcal{A}_z e^{i\Phi^Z} + \mathcal{A}_z^C e^{i\Phi^Z}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En comptant les paramètres théoriques, on a donc 2 normes, 2 phases fortes de NP et une phase faible de NP en surplus pour un total de 17 paramètres. Il est également à noter que dans ce scénario de NP, le système $B \rightarrow \pi\pi$ nous fournit non pas 6, mais 7 mesures expérimentales puisque la présence de NP fait en sorte que $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ et $B^- \rightarrow \pi^-\pi^0$ ne sont plus identiquement égaux. Nous disposons donc de 17 mesures expérimentales et le système peut être résolu *en principe*. Cependant, en négligeant à nouveau les différences des phases fortes de la NP, on a 3 paramètres de moins, donc 14 et donc plus facilement soluble *en principe*.

4.3 Conclusion du chapitre

Dans les sections précédentes, nous avons montré que l'hypothèse de négliger les phases fortes de la NP jointe à la symétrie SU(3) permet non seulement de

détecter, mais en principe de mesurer directement les contributions de la NP. Dans le meilleur des cas, cette méthode pourrait potentiellement permettre de tester et/ou éliminer certains scénarios de NP. Cependant, il est important de garder à l'esprit que l'erreur théorique associée à cette méthode est grande. Pour ce qui est de la brisure $SU(3)$, la situation est moins réjouissante que dans le cas où on reste dans $B \rightarrow \pi K$ seulement. En effet, en joignant $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$, il y a aucune indication qui suggère que la brisure $SU(3)$ est petite. Même si en principe on peut l'estimer numériquement en ayant recourt à la factorisation CDQ ou une autre théorie effective, ces méthodes ont aussi leur lot de problèmes et ces calculs seraient très imprécis. La brisure $SU(3)$ de notre méthode n'est donc pas sous contrôle. De plus l'approximation de négliger les phases fortes de la NP à cause des rediffusions négligeables est somme toute raisonnable et de l'ordre de 5%. Les quelques autres approximations (négliger l'annihilation et échange, $P_{ut} \ll P_{ct}$) sont aussi raisonnables et causent une erreur de l'ordre de quelques pourcents.

Malgré toutes ces incertitudes additionnelles, on peut quand même appliquer cette méthode en restant conservateur. Le gros avantage est qu'on peut mesurer directement les paramètres de la NP et avec un peu de chance la valeur numérique de ces paramètres exclue peut-être la valeur zéro malgré les incertitudes.

La référence ^[2] contient quelques autres méthodes du même genre. Ma contribution à cet article concerne uniquement la méthode décrite dans le présent chapitre.

CONCLUSION

Pour conclure, survolons à nouveau ce mémoire dans les grandes lignes. Notre point de départ était le MS. De là, nous avons résumé très rapidement les différents concepts utiles pour les introduire les chapitre 3 et 4 qui constituent le corps de l'ouvrage.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté une méthode pour extraire tous les angles du triangle unitaire à partir des mesures expérimentales de $B \rightarrow \pi K$ seulement. L'important est que le but derrière ceci est de tester le MS. Bien que cette méthode comporte quelques erreurs théoriques, c'est encore aujourd'hui le mieux qui puisse être fait dans le système de $B \rightarrow \pi K$ seul.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté une méthode pour mesurer directement les paramètres de la NP en utilisant les mesures expérimentales de $B \rightarrow \pi K$ et $B \rightarrow \pi\pi$ réunies. Encore une fois l'idée derrière est de tester le MS, mais aussi de tester certains scénarios de NP. Les points faibles de cette méthode sont les grandes erreurs théoriques. Bien qu'il soit peu réaliste de pouvoir éliminer des scénarios de NP à partir de cette méthode seule, celle-ci peut être utile pour en préférer certains à d'autres ou à tout le moins à nous orienter.

Il y a des dizaines d'autres méthodes du genre qui utilisent les mesures expérimentales de dizaines de désintégrations différentes. La plupart sont très imparfaites, mais en mettant tous les morceaux ensemble on espère arriver à voir un peu plus clair...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Imbeault, A. L. Lemerle, V. Page et D. London, Phys. Rev. Lett. **92**, 081801 (2004).
- [2] A. Datta, M. Imbeault, D. London, V. Pagé, N. Sinha et R. Sinha, Phys. Rev. D **71**, 096002 (2005).
- [3] M. Imbeault, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 5485-5492 (2004).
- [4] *The BaBar Physics Book*, eds. P.F. Harrison et H.R. Quinn, SLAC Report 504 (1998).
- [5] S. Stone, *B decays*, Singapore, World Scientific (1994).
- [6] I.I. Bigi, A.I. Sanda, *CP Violation*, Cambridge, Cambridge University Press (2000).
- [7] C. Jarlskog, *CP Violation*, Singapore, World Scientific (1989).
- [8] M.E. Peskin et D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Reading, Westview Press (1995).
- [9] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51**, 1945 (1983).
- [10] M. Battaglia, A.J. Buras, P. Gambino, A. Stocchi *Proceedings of the First Workshop on the CKM Unitarity Triangle*, CERN (2002).
- [11] J. Charles *et al.*, Eur. Phys. J. C **41**, 1-131, (2005).
- [12] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [13] Heavy Flavor Averaging Group, [http ://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/](http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/) (2005).
- [14] G. Buchalla, A.J. Buras et M.E. Lautenbacher, Rev. Mod. Phys. **68**, 1125 (1996).
- [15] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert et C.T. Sachrajda, Phys. Rev. Lett. **83**, 1914 (1999), Nucl. Phys. B **591**, 313 (2000), Nucl. Phys. B **606**, 245 (2001).
- [16] D. Zeppenfeld, Zeit. Phys. C **8**, 77 (1981).

- [17] M. Gronau, O.F. Hernández, D. London et J.L. Rosner, *Phys. Rev. D* **50**, 4529 (1994); *Phys. Rev. D* **52**, 6356 (1995); *Phys. Rev. D* **52**, 6374 (1995).
- [18] M. Imbeault, arXiv :hep-ph/0505254.
- [19] M. Gronau et D. London, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3381 (1990).
- [20] Y. Nir et H.R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 541 (1991).
- [21] M. Neubert et J.L. Rosner, *Phys. Lett. B* **441**, 403 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5076 (1998).
- [22] M. Gronau, D. Pirjol et T.M. Yan, *Phys. Rev. D* **60**, 034021 (1999).
- [23] A. Khodjamirian, T. Mannel et M. Melcher, *Phys. Rev. D* **68**, 114007 (2003).
- [24] A. Datta et D. London, *Phys. Lett. B* **595**, 453-460 (2004).
- [25] par exemple, M. Gronau, J.L. Rosner, *Phys. Rev. D* **71**, 074019 (2005).

Annexe I

Développements mathématiques

I.1 Démonstration de l'équation 1.19

Il faut résoudre l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} B^0 \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} B^0 \\ \bar{B}^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

où $H = M - \frac{i}{2}\Gamma$ ^[5]. M est la matrice de masse et Γ décrit la désintégration exponentielle

$$M = \begin{pmatrix} M & M_{12} \\ M_{12}^* & M \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

Les paramètres M_{12} et Γ_{12} sont calculables en évaluant le diagramme en boîte (figure 1.3) et satisfont $\Delta M \gg \Delta \Gamma$ et $M_{12} \gg \Gamma_{12}$ ^[5]. M_{12} est l'amplitude de transition de $|\bar{B}^0\rangle \rightarrow |B^0\rangle$ alors que $M_{21}(= M_{12}^*)$ est l'amplitude de transition inverse.

En diagonalisant H , on peut calculer ses valeurs propres x . Procédons. Les valeurs propres x doivent satisfaire l'équation

$$\det(H - xI) = \det \begin{pmatrix} M - \frac{i}{2}\Gamma - x & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M - \frac{i}{2}\Gamma - x \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{I.3})$$

et donc

$$x_{1,2} = (M - \frac{i}{2}\Gamma) \pm \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}. \quad (\text{I.4})$$

En définissant

$$\begin{aligned} \Delta M &= 2\text{Re}\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}, \\ \Delta \Gamma &= -4\text{Im}\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}, \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

on peut écrire les valeurs propres de l'hamiltonien de façon plus compacte :

$$x_{1,2} = \left(M \pm \frac{\Delta M}{2}\right) - \frac{i}{2} \left(\Gamma \pm \frac{\Delta \Gamma}{2}\right) . \quad (\text{I.6})$$

Connaissant les valeurs propres, il est maintenant facile de calculer quels sont les états propres de l'hamiltonien. Nous les appellerons ces états $|B_1\rangle$ et $|B_2\rangle$ et ils correspondent respectivement aux valeurs propres x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} |B_1\rangle &= p |B^0\rangle + q |\bar{B}^0\rangle , \\ |B_2\rangle &= p |B^0\rangle - q |\bar{B}^0\rangle , \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

où

$$\begin{aligned} p &= M_{12} - \frac{i}{2} \Gamma_{12} , \\ q &= \frac{1}{2} \left(\Delta M - \frac{i}{2} \Delta \Gamma \right) . \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Considérons l'évolution dans le temps d'un état initialement $|B^0\rangle$.

$$|\psi(0)\rangle = |B^0\rangle = \frac{1}{2p} (|B_1\rangle + |B_2\rangle) . \quad (\text{I.9})$$

et donc

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2p} (e^{-ix_1 t} |B_1\rangle + e^{-ix_2 t} |B_2\rangle) . \quad (\text{I.10})$$

En utilisant les expressions pour les valeurs propres (équation I.6) et pour les états propres (équation I.7), on trouve facilement

$$|B^0(t)\rangle = g_+(t) |B^0\rangle + \left(\frac{q}{p}\right) g_-(t) |\bar{B}^0\rangle , \quad (\text{I.11})$$

où

$$\begin{aligned} g_+(t) &= e^{-i(M-\frac{i}{2}\Gamma)t} \cos\left(\frac{1}{2}(\Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma)t\right), \\ g_-(t) &= ie^{-i(M-\frac{i}{2}\Gamma)t} \sin\left(\frac{1}{2}(\Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma)t\right). \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

On peut refaire la même chose pour l'évolution dans le temps d'un état $|\bar{B}^0\rangle$ et on trouve :

$$|\bar{B}^0(t)\rangle = \left(\frac{p}{q}\right) g_-(t) |B^0\rangle + g_+(t) |\bar{B}^0\rangle. \quad (\text{I.13})$$

Le but est de calculer l'asymétrie indirecte

$$a_{CP}(t) = \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow \bar{f})}. \quad (\text{I.14})$$

Pour ce faire, définissons

$$A \equiv \langle f|H|B^0\rangle, \quad \bar{A} \equiv \langle f|H|\bar{B}^0\rangle, \quad \lambda \equiv \frac{q\bar{A}}{pA}. \quad (\text{I.15})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle f|H|B^0(t)\rangle &= g_+(t)A + \left(\frac{q}{p}\right) g_-(t)\bar{A} = A[g_+(t) + \lambda g_-(t)], \\ \langle f|H|\bar{B}^0(t)\rangle &= \left(\frac{p}{q}\right) g_-(t)A + g_+(t)\bar{A} = A\left(\frac{p}{q}\right)[g_-(t) + \lambda g_+(t)]. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Donc, puis que

$$\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) = |\langle f|H|B^0(t)\rangle|^2, \quad \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) = |\langle f|H|\bar{B}^0(t)\rangle|^2, \quad (\text{I.17})$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned}\Gamma(B^0(t) \rightarrow f) &= |A|^2 e^{-\Gamma t} \left(\frac{1 + |\lambda|^2}{2} + \frac{1 - |\lambda|^2}{2} \cos(\Delta Mt) - \text{Im} \lambda \sin(\Delta Mt) \right), \\ \Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) &= |A|^2 e^{-\Gamma t} \left(\frac{1 + |\lambda|^2}{2} - \frac{1 - |\lambda|^2}{2} \cos(\Delta Mt) + \text{Im} \lambda \sin(\Delta Mt) \right).\end{aligned}\tag{I.18}$$

Finalement, en insérant les équations I.18 dans l'équation I.14, on trouve facilement

$$a_{CP}(t) = \frac{1 - |\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \cos(\Delta Mt) - \frac{2 \text{Im} \lambda}{1 + |\lambda|^2} \sin(\Delta Mt), \tag{I.19}$$

qui est l'équation 1.19.

I.2 Démonstration de l'équation 1.21

D'après les équations I.8 et les approximations mentionnées à la démonstration précédente, nous avons

$$\frac{q}{p} = \frac{\Delta M - \frac{i}{2}\Delta\Gamma}{2(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})} \approx \frac{\Delta M}{2M_{12}}, \quad (\text{I.20})$$

En utilisant les équation I.5 et les mêmes approximations, on a donc

$$\frac{q}{p} \approx \frac{2\text{Re}\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}}{2M_{12}} \approx \sqrt{\frac{M_{12}^*}{M_{12}}} = e^{-2i\Phi_{12}}, \quad (\text{I.21})$$

où Φ_{12} est la phase CKM du mélange $B^0 - \bar{B}^0$. Comme on l'a vu dans la section 1.3, le facteur CKM du mélange $B^0 - \bar{B}^0$ est $M_{12} \propto (V_{tb}V_{td}^*)^2$ et donc

$$\frac{q}{p} = \frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{tb}V_{td}^*} = e^{-2i\beta}. \quad (\text{I.22})$$

C'est l'équation 1.21.

I.3 Idée de la preuve de l'équation 1.33

Quand on examine la forme des opérateurs de l'hamiltonien effectif (équations 1.29), on voit que dans tous les cas, il y a deux quarks (ou aucun) impliqués par l'isospin : $\bar{u}u$, $\bar{d}d$ (ou 1). Donc, partant des doublets d'isospin suivant :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.23})$$

on peut écrire les opérateurs effectifs comme des opérateurs d'isospin. Pour la combinaison $\bar{u}u$, on a

$$I = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1, \quad I_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0, \quad (\text{I.24})$$

et c'est presque pareil pour $\bar{d}d$. Pour les cas où l'opérateur ne contient pas de quarks u ou d , on a trivialement $I = 0$ et $I_3 = 0$. Ce qui est important c'est que tous les opérateurs de l'hamiltonien effectif, écrit en terme d'isospin, ont tous la forme $\mathcal{H}(\Delta I = 0, \Delta I_3 = 0) + \mathcal{H}(\Delta I = 1, \Delta I_3 = 0)$. Donc automatiquement, l'opérateur effectif total s'écrit aussi sous cette forme.

Finalement, il suffit d'écrire tous les états finaux et initiaux en termes d'isospin et d'appliquer le théorème de Wigner-Eckart. Avec une table de coefficient de Clebsch-Gordan et un peu de calculs on retrouve les équations 1.33. (Ce calcul a déjà fait l'objet d'un devoir du cours de mécanique quantique.)

I.4 Comment écrire ϕ en fonction de d ?

Lorsqu'on écrit les PEF en termes d'arbres en utilisant les équations 3.1, les longueurs des diagonales D_1 et \bar{D}_1 (voir figure 2.1) sont les mêmes. En faisant subir une rotation d'un angle ϕ au quadrilatère bar, les diagonales coïncident exactement. Dans cette annexe nous montrons brièvement comment écrire ϕ en fonction de d , la longueur des diagonales 1.

Afin de se simplifier la vie fixons arbitrairement la phase des diagonales D_1 et \bar{D}_1 à zéro. Il n'y a aucune perte de généralité dans ce choix puisque les phases relatives entre les amplitudes sont préservées. Une rotation globale de tout le système ne change rien.

Maintenant considérons par exemple le triangle dont les côtés sont les diagonales 1, $\sqrt{2}A^{00}$ et A^{-+} tel qu'illustré dans la figure 2.1. Connaissant la phase de la diagonale (zéro) et les longueurs de 2 côtés ($|\sqrt{2}A^{00}|$ et $|A^{-+}|$), il est facile d'écrire les phases de $\sqrt{2}A^{00}$ et A^{-+} en fonction de d . En effet, on a

$$\begin{aligned} |\sqrt{2}A^{00}|\cos(\Phi^{00}) + |A^{-+}|\cos(\pi - \Phi^{-+}) &= d, \\ |\sqrt{2}A^{00}|\sin(\Phi^{00}) &= |A^{-+}|\sin(\pi - \Phi^{-+}). \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

On peut facilement résoudre les équations ci-dessus et ainsi écrire Φ^{00} et Φ^{-+} en fonction de d . Bien sur, ces valeurs pour les phases dépendent de la façon dont on place les côtés du triangle (les côtés peuvent en haut ou en bas de la diagonale et on peut inverser $\sqrt{2}A^{00}$ et A^{-+}) et donc des ambiguïtés discrètes, mais on en tient compte. En peut refaire la même chose pour les 8 côtés des 2 quadrilatères et ainsi on a écrit toutes les phases des amplitudes et des amplitudes tildes en fonction de d .

Pour connaître la valeur de ϕ , il ne manque que l'observation suivante : quand on néglige l'annihilation (A), on voit facilement à partir de l'équation 1.25 que $A^{+0} = \bar{A}^{+0}$. Puisque par définition $\tilde{A}^{+0} = e^{i\phi}\bar{A}^{+0}$, on a automatiquement que $\tilde{A}^{+0} = e^{i\phi}A^{+0}$. Finalement, puisqu'on connaît les phases de A^{+0} et \tilde{A}^{+0} en fonction

de d par notre construction géométrique, ceci implique qu'on connaît aussi $\phi(d)$. Analytiquement l'expression serait longue et laide, mais numériquement ce n'est pas un problème.