

Diffusion turbulente anisotrope dans les zones radiatives d'étoiles

par

Nathalie Toqué

Thèse de doctorat effectuée en cotutelle

au

Département de Physique

Faculté des Arts et des Sciences

Université de Montréal

et au

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes

Université Paris6

Thèse présentée à la Faculté des Études Supérieures de l'Université de Montréal
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en physique

et à

l'Université Paris6 en vue de l'obtention du grade de Docteur de Docteur

Octobre, 2004

Copyright, Nathalie Toqué, 2004



QC

3

U54

2005

V. 003

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des Études Supérieures

et

Université Paris6

Cette thèse intitulée :

Diffusion turbulente anisotrope dans les zones radiatives d'étoiles

Présentée et soutenue à l'Institut d'Astrophysique de Paris par :

Nathalie Toqué

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Professeur Pierre Encrenaz, président du jury

Professeur Alain Vincent, directeur

Docteur François Lignières, co-directeur

Professeur Jean Paul Zahn, examinateur

Professeur Paul Charbonneau, examinateur externe

Résumé

La modélisation du transport des éléments chimiques dans les zones radiatives d'étoiles constitue l'une des principales difficultés de la théorie de l'évolution stellaire. Les observations des abondances chimiques à la surface des étoiles indiquent que la diffusion microscopique ne suffit pas pour restituer les anomalies d'abondances constatées. D'autres processus et en particulier le transport turbulent provoqué par l'instabilité des couches radiatives en rotation différentielle doivent être pris en compte.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la diffusion turbulente produite par les instabilités de cisaillement et nous considérons une version très simplifiée des écoulements présents dans les zones radiatives d'étoiles. L'écoulement vérifie l'approximation de Boussinesq, est bidimensionnel et stablement stratifié. Un traceur qui représente un élément chimique non réactif est lâché dans l'écoulement. Nous avons réalisé différentes simulations numériques directes en augmentant l'effet de la stratification stable. Pour calculer le coefficient de diffusion turbulente verticale, deux approches ont été adoptées. D'abord, le flux moyen du traceur est relié à son gradient vertical moyen ce qui permet de définir un coefficient de diffusion turbulente. Ensuite, nous calculons le coefficient de diffusion à partir du déplacement de particules Lagrangiennes en se référant au régime de diffusion décrit par Taylor.

Cette étude révèle l'existence de deux régimes de transport en fonction de la stratification. Pour une stratification modérée, le coefficient de diffusion vertical décroît plus vite que ne le prévoit un modèle de type longueur de mélange ce qui semble être dû à une forte anisotropie entre les mouvements verticaux et horizontaux. Aux plus fortes stratifications, nous constatons que le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes est sous-diffusif et tend vers une valeur asymptotique. Cet effet de blocage du transport vertical des éléments chimiques n'est pas pris actuellement en compte dans les modèles d'évolution stellaire.

mots clés

Stratification stable ; Rotation ; Cisaillement ; Turbulence ; Abondances chimiques ; Evolution stellaire ; Simulations numériques ; Approximation Boussinesq ; Instabilités.

Summary

Modelling the chemical element transport in radiative zones of stars is the one of the main difficulties in stellar evolution theory. Observations of chemical abundances on top of stars show that microscopic diffusion cannot explain the abundances anomalies. Other processes such as turbulent transport caused by instability in radiative zones must be taken into account.

In this thesis, we are interested in turbulent diffusion generated by shear instabilities and we study a highly simplified version of flows in stellar radiative zones. The flow is under Boussinesq approximation, it is two-dimensional and stably stratified. The tracer representing a non reactive chemical element is released in the flow. We did different direct numerical simulations by increasing stratification. To calculate the vertical turbulent diffusion coefficient, we use two different approaches. First, the tracer mean flux is linked to the mean vertical gradients, which enables us to define a turbulent diffusion coefficient. Then, we calculate the diffusion coefficient from the vertical displacement of Lagrangian particles with Taylor diffusion theory.

This study shows two different states of the transport dependant on stratification. For a moderate stratification, the vertical diffusion coefficient decreases faster than what is predicted by mixing length theories. This seems to result from high anisotropy between vertical and horizontal motions. At highest stratifications, we observe that mean vertical displacement of Lagrangian particles is under-diffusive and approaches an asymptotic limit. The hindrance of vertical transport of chemical elements is not taken into account in current stellar evolution models.

Keywords

Stable stratification ; Rotation ; Shearing ; Turbulence ; Chemical abundances ; Stellar evolution ; Numerical simulations ; Boussinesq approximation ; Instabilities.

Table des matières

Résumé	iii
Summary	iv
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	x
Liste des abréviations	xi
Liste des notations	xii
1 Introduction	1
1.1 Motivations astrophysiques	1
1.2 Transport turbulent des éléments chimiques dans les atmosphères stablement stratifiées	7
1.3 Contenu du mémoire	11
2 Généralités sur la turbulence et le transport	12
2.1 La turbulence homogène et isotrope	12
2.1.1 Théories phénoménologiques de la turbulence	13
2.1.2 Théories phénoménologiques du traceur	15
2.1.3 Autres types de modèles	18
2.2 Le transport turbulent d'un traceur non réactif	19
2.2.1 Le modèle de longueur de mélange	21
2.2.2 La diffusion des particules Lagrangiennes	22

3	Formalisme mathématique et numérique	26
3.1	Les équations du mouvement pour un fluide de Boussinesq	26
3.2	Algorithme de résolution des équations de Boussinesq	30
3.3	Algorithme de résolution des particules Lagrangiennes	33
4	Simulations numériques	36
4.1	Introduction	36
4.2	Description de l'écoulement	41
4.2.1	Profils moyens et isocontours de vorticité	41
4.2.2	Distribution de l'énergie dans le domaine spectral	43
4.2.3	Evolution des nombres sans dimension Re_t , Ri_g , Fr et Pe_t	46
4.3	Transport vertical du traceur : Analyse et résultats	53
4.3.1	Méthodes de calcul du coefficient de diffusion du traceur	57
4.3.2	Relation entre le coefficient de diffusion du traceur et l'anisotropie	61
4.3.3	Interprétation des résultats	63
5	Conclusion	74
A	Annexe	80
A.1	Approche linéaire de l'écoulement	80
A.1.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	80
A.1.2	Ondes de gravité	83
B	Annexe	85
B.1	Tests de l'algorithme de résolution des particules Lagrangiennes	85
B.1.1	Déplacement de la particule dans un champ de vitesse uniforme	85
B.1.2	Déplacement de la particule dans un champ de vitesse circulaire	86
	Bibliographie	87

Liste des tableaux

4.1	Nombres physiques des simulations choisies.	40
4.2	Nombres physiques et valeurs moyennes des nombres sans dimension et de l'anisotropie pour toutes les simulations du tableau 4.1. La notation $\langle \rangle_t$ représente toujours la moyenne temporelle sur un intervalle de temps de durée 6.4.	56
4.3	Comparaison entre la valeur asymptotique $\frac{\langle v \rangle_t}{N}$ et le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes $\langle \langle (z - z_0)^2 \rangle_p^{1/2} \rangle_t$	69

Table des figures

4.1	Superposition de l'accélération F et de la composante de vitesse v_x .	37
4.2	Superposition de la composante de vitesse v_x engendrée par le forçage et d'une forme analytique U en tangente hyperbolique dans les couches de cisaillement et constante entre ces couches.	37
4.3	Superposition de l'accélération et des profils verticaux de la vitesse horizontale moyenne $\langle v_x \rangle_x$ à trois instants $t = 0.2, 8, 16$ dans le cas non-stratifié $Ri = 0$	38
4.4	Composantes de vitesse v_x pour $Ri = 100$ et $Ri = 500$	39
4.5	Représentation de l'anisotropie en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	40
4.6	Profils de la quantité $\langle v_x \rangle_x$ en fonction de z pour deux nombres de Richardson différents ($Ri = 100$ en haut et $Ri = 1000$ en bas) et pour trois instants $t = 0.2, 8$ et 16	42
4.7	Profils des quantité $\sqrt{\langle v_x'^2 \rangle}$ et $\sqrt{\langle v_z'^2 \rangle}$ en fonction du temps pour les simulations 1 et 8 du tableau 4.1.	43
4.8	Profils des quantités $\sqrt{\langle v_x'^2 \rangle_x}$ et $\sqrt{\langle v_z'^2 \rangle_x}$ en fonction de z à l'instant $t = 8$ pour les simulations 1 et 8 du tableau 4.1.	44
4.9	Spectres en énergie des fluctuations de température aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 en haut et la simulation 8 en bas.	45
4.10	Nombre de Froude en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	48
4.11	Spectres en énergie des fluctuations de la vitesse totale aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.	49
4.12	Spectres en énergie des fluctuations de la composante v_x aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.	49

4.13 Spectres en énergie des fluctuations de la composante v_z aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.	49
4.14 Nombre de Reynolds turbulent en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	50
4.15 Nombre de Richardson de gradient en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	50
4.16 Nombre de Péclet turbulent en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	50
4.17 Isocontours de la composante de vorticité ω_y à l'instant $t = 8$ pour la simulation 1.	51
4.18 Isocontours de la composante de vorticité ω_y à l'instant $t = 8$ pour la simulation 8.	51
4.19 Isocontours du traceur à l'instant $t = 4.4$ pour la simulation 1. . .	52
4.20 Isocontours du traceur à l'instant $t = 4.4$ pour la simulation 8. . .	52
4.21 Nombre de Péclet turbulent du traceur en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	53
4.22 Profil initial du traceur.	54
4.23 Evolution de l'épaisseur de la couche de traceur pour les simulations 1 et 10.	54
4.24 Profils de la quantité $\langle C \rangle_x$ en fonction de z	55
4.25 Spectres des fluctuations du traceur aux instants $t = 4.4$ et $t = 8.8$ pour la simulation 1 en haut et la simulation 8 en bas.	56
4.26 Profils du coefficient de diffusion en fonction de z à l'instant $t = 4.4$. . .	58
4.27 Profils du flux du traceur en fonction de z à plusieurs instants. . .	59
4.28 Représentation de toutes les valeurs du flux moyen du traceur en fonction de son gradient vertical moyen pour la simulation 4. . . .	60
4.29 Représentation du flux moyen du traceur en fonction de son gradient vertical moyen pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.	61
4.30 Déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.2 sur la figure du haut et pour les simulations les plus stratifiées sur la figure du bas.	62
4.31 Echelles verticales de vitesse et de longueur pour les deux versions de moyenne verticale et pour la simulation la moins stratifiée. . .	64

4.32	Représentation de l'échelle verticale de longueur \mathcal{L}_z pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1 dans le cas z_{max} constant.	65
4.33	Représentation de l'échelle verticale de vitesse \mathcal{V}_z pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1 dans le cas z_{max} constant.	66
4.34	Dépendance du coefficient de diffusion du traceur en fonction de l'anisotropie moyenne.	67
4.35	Flux en fonction de l'échelle verticale de vitesse moyennée sur l'intervalle de temps [2.4, 8.8].	67
4.36	Représentation de $\mathcal{D}_t N / \langle \mathcal{V}_z \rangle_t^2$ en fonction de l'anisotropie.	68
4.37	Approximation Gaussienne de la fonction de distribution de probabilité notée $f dp$ du déplacement vertical : $\delta z = (z - z_0)$, des particules Lagrangiennes à l'instant $t = 2.4$ et pour toutes les simulations du tableau 4.2.	72
4.38	Superposition du profil de la vitesse horizontale $\langle v_x \rangle_x$ moyenné sur l'intervalle de temps [6.4, 8] et de l'altitude $z(t)$ des particules Lagrangiennes durant l'intervalle de temps [6.4, 8] pour toutes les simulations du tableau 4.2. Les altitudes initiales des particules représentées sont régulièrement réparties sur la hauteur totale de l'écoulement.	73
B.1	Déplacement d'une particule dans un champ de vitesse uniforme.	85
B.2	Déplacement d'une particule dans un champ de vitesse circulaire.	86

Liste des abréviations

Pr : Nombre de Prandtl.

Sc : Nombre de Schmidt.

Re : Nombre de Reynolds.

Ri : Nombre de Richardson.

Pe : Nombre de Péclet thermique.

Pe_C : Nombre de Péclet du traceur.

Re_t : Nombre de Reynolds turbulent.

Ri_g : Nombre de Richardson de gradient.

Fr : Nombre de Froude.

Pe_t : Nombre de Péclet turbulent thermique.

Pe_{Ct} : Nombre de Péclet turbulent du traceur.

A : Anisotropie.

Liste des notations

$\langle \rangle$: Moyenne spatiale réalisée sur toutes les directions.

$\langle \rangle_x$: Moyenne spatiale réalisée dans la direction horizontale.

$\langle \rangle_z$: Moyenne spatiale réalisée dans la direction verticale.

$\langle \rangle_t$: Moyenne temporelle effectuée sur un intervalle de temps de durée 6.4.

$\langle \rangle_p$: Moyenne d'ensemble réalisée sur un nombre de particules Lagrangiennes à préciser.

$\langle \rangle_C$: Moyenne d'ensemble réalisée sur le domaine de l'écoulement contenant 99.9% du traceur.

$\langle \rangle_{Ct}$: Moyenne d'ensemble réalisée sur le domaine de l'écoulement contenant 99.9% du traceur et sur l'intervalle de temps de durée 6.4.

$\hat{*}$: Transformée de Fourier de la grandeur $*$.

\Re : Partie réelle.

D : Coefficient de diffusion moléculaire.

ν : Viscosité cinématique.

κ : Diffusivité thermique.

D_t : Coefficient de diffusion turbulente égal à $\frac{\langle v'_z \times C \rangle_x}{\langle \partial_z C \rangle_x}$.

\mathcal{D}_t : Coefficient de diffusion turbulente égal à $\frac{\langle |\langle v'_z \times C \rangle_x | \rangle_{Ct}}{\langle |\langle \partial_z C \rangle_x | \rangle_{Ct}}$.

D_L : Coefficient de diffusion Lagrangien égal à $\frac{1}{2} \frac{d \langle (z - z_0)^2 \rangle_p}{dt}$.

Chapitre 1

Introduction

Le sujet de cette thèse porte sur l'étude du transport des éléments chimiques dans une étoile et s'intéresse plus particulièrement au transport vertical turbulent des éléments chimiques dans la zone radiative. Nous allons commencer par introduire le modèle standard qui ne suppose aucun processus de transport dans la zone radiative. Ensuite, nous énumérons des anomalies d'abondances observées à la surface d'étoiles qui ne peuvent pas être expliquées par ce modèle. Ceci nous conduit à introduire le transport induit par la diffusion microscopique et le transport macroscopique provoqué par la turbulence et la circulation méridienne. Ces modèles de transport améliorent le modèle standard et nous citons quelques résultats. Cependant, les modèles macroscopiques utilisent les prescriptions sur le transport turbulent qui sont basées sur des arguments phénoménologiques. Ceci concerne en particulier, l'expression du coefficient de diffusion turbulente vertical. Dans notre étude, nous adoptons une approche différente et nous simulons numériquement des écoulements simples dans lesquels nous déterminons le coefficient de diffusion d'un traceur passif. Auparavant dans cette introduction, nous présentons les autres travaux de ce type. Enfin, nous terminons cette partie en commentant le plan du mémoire.

1.1 Motivations astrophysiques

Le modèle "standard" prédit les abondances de surface d'une étoile durant son passage sur la séquence principale en fonction de la masse, de la composition et de l'âge. Il est monodimensionnel et ne tient pas compte des effets de la rotation, du champ magnétique et de la perte de masse. Il a deux paramètres libres. Le premier est la fraction de masse d'hélium, Y . Le second est le rapport l/λ_p entre la longueur de mélange l et l'échelle de hauteur en pression $\lambda_p = -\left[\frac{d \ln p}{dr}\right]^{-1}$ qui est utilisé dans le traitement de la convection par le modèle de longueur de mélange [4] [67] [5]. Pour obtenir un modèle solaire, il faut choisir plusieurs combinaisons $(Y, \frac{l}{\lambda_p})$ et éliminer celles qui ne restituent pas le rayon et la luminosité du soleil

présent ce qui donne : $\frac{I}{\lambda_p} \simeq 1.6 - 2.0$, et $Y \simeq 0.27 - 0.28$ [24]. Du point de vue du transport des éléments chimiques, le modèle “standard” suppose que les éléments sont brassés et uniformément mélangés entre le haut et le bas de la zone convective. En revanche, il n’y a pas de mélange dans les régions radiatives qui sont supposées inertes. Dans la suite, nous présentons brièvement les principales observations qui ont montré que cette dernière hypothèse ne pouvait pas être vérifiée et qu’un certain transport des éléments chimiques existe dans les zones radiatives.

Le lithium a été essentiellement produit par le Big Bang et par spallation, tout comme le béryllium et le bore [43]. Il est un élément fragile dans les intérieurs stellaires car il est détruit à une température de $T \simeq 2.5 \times 10^6 K$, tandis que le béryllium et le bore supportent une température plus élevée $T \simeq 4 \times 10^7 K$. Le lithium peut être produit à partir du béryllium après capture d’un électron. Pour cela, le béryllium qui est créé profondément dans l’étoile doit être transporté par convection dans des régions plus froides pour que le lithium produit ne soit pas détruit. Le mouvement convectif doit être assez rapide pour que béryllium ne se transforme pas en bore en capturant un proton au voisinage de $T \simeq 4 \times 10^7 K$, mais également assez lent pour que le lithium ne soit pas ramené profondément dans l’étoile et détruit. Ce scénario montre que le lithium et le béryllium constituent de bons indicateurs des processus de mélange dans les étoiles.

L’analyse de la composition de l’atmosphère solaire révèle que l’abondance en lithium est réduite d’un facteur 160 par rapport à la composition météoritique [22] qui est la composition de référence. Le soleil comporte une épaisse enveloppe convective qui s’étend de la surface jusqu’à $0.71 R_{\odot}$, ce qui est confirmé par l’héliosismologie. Comme les espèces chimiques sont vigoureusement mélangées dans la zone convective, le lithium atteint la base de la zone convective où la température est la plus élevée de toute l’enveloppe ($T \simeq 2.1 \times 10^6 K$), mais pas suffisante pour permettre la combustion du lithium ($T \simeq 2.5 \times 10^6 K$). Seules les étoiles de la séquence principale de masse inférieure à $0.9 M_{\odot}$ ont des zones convectives assez profondes pour brûler le lithium. Le mélange dans la zone convective sur la séquence principale ne peut donc pas expliquer le déficit de lithium observé à la surface du soleil. Plus généralement, les étoiles F et G sont déficitaires en lithium. Dans l’amas des Hyades qui est un amas d’âge intermédiaire, l’abondance en lithium des étoiles G ($T_{eff} < 6000 K$) décroît progressivement quand T_{eff} diminue jusqu’à $5200 K$ [43]. Au delà de $T_{eff} = 6400 K$ et jusqu’à $T_{eff} = 6700 K$, l’abondance en lithium des étoiles F décroît brutalement, puis retourne sans transition à des valeurs normales. C’est ce qui est appelé la brèche du Lithium. Pour $6100 K < T_{eff} < 6400 K$, l’abondance en lithium serait légèrement plus faible que l’abondance galactique.

Environ 20 % des étoiles de type spectral précoce de la séquence principale avec des températures effectives comprises entre $7000 K$ et $20000 K$ présentent

des anomalies d'abondances. Ces étoiles dites chimiquement particulières sont des rotateurs plus lents que les étoiles normales de même type spectral. Leurs anomalies d'abondances peuvent être très importantes comme par exemple dans les étoiles HgMn qui comportent des sur-abondances de mercure et d'autres métaux atteignant un facteur 10^6 [44]. Les étoiles FmAm ont des anomalies d'abondance moins élevées, mais qui sont variables pour les éléments chimiques situés entre le pic du fer et CNO. Elles ont une composition de surface sous-abondante en CNO et sur-abondantes en éléments du pic du fer.

Les étoiles chaudes, massives, de type O et B du haut de la séquence principale, présentent un autre type d'anomalies d'abondances. Ces étoiles produisent des éléments lourds par réactions nucléaires dans leur coeur mais les abondances observées à la surface ne correspondent pas aux valeurs nucléaires, avec une surface enrichie en hélium et azote et des sous-abondances en carbone et oxygène. Ces anomalies sont le signe d'un mélange en profondeur [36].

La branche des géantes représente les étoiles qui après avoir brûlé leur coeur d'hydrogène quittent la séquence principale. La température effective décroît et l'enveloppe convective s'étend de plus en plus profondément dans l'étoile jusqu'à des endroits où les abondances ont été modifiées par les réactions nucléaires. Le mélange rapide causé par les mouvements convectifs se répercute à la surface sur les éléments légers et CNO. Il s'agit en fait du premier "dredge-up" [51]. Bien que la température à la base de la zone convective ne soit pas suffisante pour entraîner la combustion du lithium, des abondances réduites de lithium sont observées en surface [43].

Aucune des anomalies d'abondances que nous venons de décrire n'est restituée par le modèle standard. Cela montre la nécessité de processus de transport dans la zone radiative qui est supposée inerte dans le modèle standard. Ce transport peut être dû à des processus microscopiques, agissant au niveau moléculaire, ou macroscopiques. La diffusion microscopique comprend la diffusion atomique, thermique et le triage gravitationnel des espèces neutres ou ionisées qui est alors couplé à la pression radiative [64]. Son importance a par exemple été mise en évidence dans les étoiles chimiquement particulières. Mais à elle seule, la diffusion microscopique ne suffit pas à expliquer les abondances observées de ces étoiles [40]. De même, elle ne permet pas de restituer le déficit du lithium constaté à la surface du soleil [43] et sous la zone convective [12]. Il faut alors envisager des processus de transport macroscopique. Il peut s'agir d'un vent stellaire important pour les étoiles massives [36], de la dissipation des ondes de gravité engendrées par la zone convective [54] ou des mouvements turbulents et de circulation méridienne à grande échelle induits par la rotation. Nous allons maintenant décrire des modèles tenant compte du transport macroscopique en nous concentrant sur les mouvements provoqués par la rotation.

Pour une étoile en rotation uniforme, l'équilibre radiatif strict est impossible, seul l'équilibre thermique peut être maintenu à l'aide d'un transport d'énergie par une circulation de matière à grande échelle. La circulation advecte le moment angulaire ce qui induit de la rotation différentielle et cette rotation différentielle peut être sujette au développement d'instabilités, comme par exemple les instabilités de cisaillement. La turbulence ainsi engendrée étant fortement affectée par la stratification stable qui limite les mouvements verticaux, on s'attend à ce qu'elle soit fortement anisotrope. Ainsi, dans une étoile en rotation, la turbulence anisotrope à petite échelle et la circulation à grande échelle contribuent au transport des éléments chimiques.

Une des premières applications des modèles de transport macroscopique concerne les anomalies d'abondances des étoiles HgMn et FmAm [42]. En effet, si la circulation méridienne est assez faible, l'hélium qui constitue une couche convective superficielle peut chuter profondément dans l'étoile. La couche superficielle d'hélium disparaît et de larges anomalies d'abondances se forment par diffusion microscopique. En tenant compte de la circulation méridienne et de la diffusion de l'hélium, le modèle prévoit l'apparition du phénomène HgMn et FmAm à des vitesses équatoriales moyennes maximales égales à 75 km/s et 100 km/s, respectivement pour les étoiles HgMn et FmAm, ce qui est en bon accord avec les observations [42] [10]. Mais comme ce modèle ne permet pas de restituer les amplitudes des anomalies d'abondances des étoiles en rotation lente, une diffusion turbulente y a été intégrée. Cette diffusion s'écrit sous la forme d'un tenseur diagonal qui est la somme du coefficient de diffusion de l'hélium D_{12} et des diffusivités turbulentes, D_v et D_h , respectivement dans la direction verticale et horizontale [11]. Pour les étoiles FmAm, les résultats indiquent que la diffusion turbulente doit être très anisotrope : $D_h/D_v > 10^5$, pour que les anomalies calculées s'accordent avec les observations. Il faut au moins que le rapport D_v/D_{12} ne dépasse pas 10, sinon la chute gravitationnelle de l'hélium est retardée dans les étoiles de vitesses équatoriales inférieures à la vitesse limite, et que le rapport D_h/D_{12} dépasse 10^6 , sinon l'hélium tombe vers le centre des étoiles de vitesses équatoriales supérieures à la vitesse limite.

De même, les abondances en lithium des étoiles F à G [65] ont pu être restituées avec des modèles de diffusion turbulente incluant une paramétrisation adhoc. Mais, en dehors de la brèche du lithium, il faut changer la valeur des paramètres pour reproduire les abondances en lithium. D'autres modèles [51] reproduisent également la brèche du lithium à condition de bien connaître la valeur du moment angulaire des étoiles à leur entrée sur la séquence principale. Or, ce moment angulaire initial n'est pas bien prédit par les modèles de pré-séquence principale.

Ces premières tentatives ont indiqué la nécessité d'améliorer la compréhension physique de la circulation méridienne et de la diffusion turbulente. En particulier, Chaboyer & Zahn [8] ont montré qu'une des conséquences d'une turbulence

fortement anisotrope est que le transport par la circulation méridienne se comporte comme un processus de diffusion. En effet, après avoir moyenné suivant la latitude, l'équation de transport d'une espèce chimique s'écrit :

$$\rho \partial_t \bar{C} + \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \rho \overline{C' u_r}] = \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \rho D_v \partial_r \bar{C}] \quad (1.1)$$

où C représente l'espèce chimique de moyenne :

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \int_0^\pi C \sin \theta d\theta \quad (1.2)$$

ρ est la densité indépendante du temps. $u_r(r, \theta)$ est la vitesse radiale de la circulation méridienne et elle est définie comme suit : $u_r(r, \theta) = \sum_n U_n(r) P_n(\cos \theta)$. Supposons que la diffusion turbulente horizontale réduise suffisamment les fluctuations de concentration C' et que la turbulence soit anisotrope, alors les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r \bar{C} \gg |\nabla C'| \\ D_h \gg D_v \left(\frac{l_h}{l_v}\right)^2 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

où D_v et D_h sont les coefficients de diffusion verticale et horizontale, l_v et l_h les échelles de longueur caractéristiques des mouvements verticaux et horizontaux. Avec les relations 1.3 et après un temps $\frac{r^2}{D_h}$, le flux radial de l'espèce chimique s'écrit :

$$\overline{C' u_r} = -\frac{r^2}{D_h} \partial_r \bar{C} \sum_n \frac{U_n^2(r)}{n(n+1)(2n+1)} \quad (1.4)$$

Le transport d'une espèce chimique dans une zone radiative d'étoile peut alors être décrit comme un processus diffusif :

$$\begin{cases} \rho \partial_t \bar{C} = \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \rho D_{eff} \partial_r \bar{C}] \\ \text{avec } D_{eff} = D_v + \frac{r^2}{D_h} \sum_n \frac{U_n^2(r)}{n(n+1)(2n+1)} \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour la circulation méridienne classique, de Eddington-Sweet, n est égal à 2 ce qui donne le coefficient de diffusion effectif suivant [8] :

$$D_{eff} = D_v + \frac{|rU_2(r)|^2}{30D_h} \quad (1.6)$$

Même si l'hypothèse d'une forte anisotropie de la turbulence a permis de simplifier largement la modélisation du transport par advection à grande échelle, les valeurs des coefficients de diffusion turbulente verticale et horizontale restent très mal connues.

Zahn [70] exprime le coefficient de diffusion horizontale en fonction des composantes, radiale et horizontale, de la circulation méridienne :

$$D_h = \frac{1}{C_h} r |2V - \Gamma U| \quad (1.7)$$

où Γ caractérise la rotation différentielle radiale et s'écrit : $\Gamma = \frac{1}{2} \frac{d \ln r^2 \Omega}{d \ln r}$. Cette expression sous-entend que la viscosité turbulente horizontale ν_h est suffisante pour conserver une rotation quasi-constante sur des sphères.

En présence d'une rotation différentielle radiale, des instabilités barotropes de cisaillement peuvent engendrer des mouvements turbulents. Zahn [68] a estimé le transport vertical induit par ces mouvements en utilisant le critère de stabilité linéaire d'un écoulement cisailé $U(z)$ dans une zone radiative. Les mouvements instables caractérisés par une échelle de longueur l et une vitesse v doivent vérifier le critère suivant :

$$\frac{vl}{\kappa} N^2 \leq Ri_{gc} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \quad (1.8)$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä et κ la diffusivité thermique. Ri_g est le nombre de Richardson de gradient défini de la manière suivante : $Ri_g = \frac{N^2}{(\frac{dU}{dz})^2}$. Sa valeur critique, Ri_{g_c} , est de l'ordre de 1/4 (se référer à l'annexe A). On suppose alors que le transport turbulent est assuré par les plus grandes échelles du mouvement qui satisfont cette condition, d'où l'expression du coefficient de diffusion turbulente vertical :

$$D_v = \frac{1}{3}vl \simeq \frac{Ri_{g_c}}{3}\kappa\left(\frac{dU/dz}{N}\right)^2 \quad (1.9)$$

Cette expression a été depuis complétée pour tenir compte de l'effet stabilisant d'un gradient de poids moléculaire moyen ainsi que de l'effet destabilisant de la turbulence anisotrope sur le seuil de stabilité [37] [59].

A partir de ces prescriptions pour le transport turbulent des éléments chimiques et de modèles permettant de déterminer la circulation méridienne et la rotation différentielle [8] [70], plusieurs auteurs ont cherché à reproduire les anomalies d'abondance observées dans divers types d'étoiles [48] [38]. On notera ici que dans ces modèles la valeur du coefficient de diffusion turbulente vertical est importante en pratique puisque ce transport domine dans certains cas par rapport au transport par la circulation méridienne, par exemple pour les modèles d'étoiles massives [38] ou d'étoiles géantes rouges [18].

Il est donc essentiel d'arriver à mieux contraindre le transport d'éléments chimiques induit par une turbulence de cisaillement dans une atmosphère stablement stratifiée. Les simulations numériques d'écoulements sont capables de tester les prescriptions pour le transport turbulent, même si ces tests se font dans des configurations d'écoulement simplifiées et pour des nombres de Reynolds bien en dessous de leur valeur dans les étoiles. Nous décrivons dans la suite des simulations numériques déjà réalisées ainsi que des modèles de transport turbulent en milieu stable. Pour la plupart, ces travaux ont été effectués en référence aux écoulements géophysiques où le même type de problème se pose.

1.2 Transport turbulent des éléments chimiques dans les atmosphères stablement stratifiées

La stratification est dite stable lorsque la force d'Archimède s'appliquant sur un élément fluide déplacé verticalement de sa position d'équilibre hydrostatique tend à le ramener à sa position initiale. Comme cette force de rappel s'oppose aux mouvements verticaux, la décroissance du transport turbulent vertical s'attribue généralement à une décroissance des fluctuations de vitesse verticale. Mais,

Vincent & al. [66] ont montré qu'un autre mécanisme pouvait également contribuer à la décroissance du transport turbulent vertical dans une atmosphère stratifiée de façon stable.

En effet, en étudiant le transport d'un scalaire passif par un champ de vitesse stochastique, ces auteurs ont montré que pour des fluctuations de vitesse verticale données, l'augmentation des fluctuations de vitesse horizontale provoque une décroissance du transport turbulent vertical. Cet effet peut être quantitativement relié à l'anisotropie de l'écoulement définie comme :

$$A = \frac{(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle)^{1/2}}{(2 \langle v_z^2 \rangle)^{1/2}} \quad (1.10)$$

Les valeurs de l'anisotropie sont contrôlées en ajoutant à un champ de vitesse stochastique isotrope ayant un spectre de Kolmogorov, un champ de vitesse stochastique horizontal avec un spectre d'énergie $E_2 k^{-3}$, et en faisant varier le coefficient E_2 . En outre, leurs simulations numériques directes de l'évolution d'un champ de scalaire passif sont caractérisées par les valeurs du nombre de Reynolds turbulent, $Re_t = \frac{lv}{\nu}$ et le nombre de Péclet turbulent, $Pe_t = \frac{lv}{D}$, où l et v sont respectivement l'échelle intégrale de la turbulence et la racine de la vitesse quadratique moyenne. D est le coefficient de diffusion atomique et ν , la diffusivité visqueuse. Les simulations numériques ont été réalisées pour des anisotropies allant de 1 (cas isotrope) à 100. Elles montrent que le flux maximum du traceur transporté dans la direction verticale est 30 fois plus important dans le cas isotrope ($A \simeq 1$) que dans celui anisotrope ($A \simeq 33$). Cela correspond à une réduction équivalente du coefficient de diffusion turbulente vertical défini comme : $D_{Tz} = -\frac{\bar{p}Cv_z}{\partial \bar{p}C / \partial z}$, où C est la concentration du traceur. Vincent & al. [66] montrent que dès que la diffusion turbulente domine la diffusion atomique, le rapport $D_{Tz}/(l_z v_z)$ est proportionnel à A^{-1} pour $A > 3$. l_z et v_z sont respectivement l'échelle intégrale verticale et la racine de la vitesse verticale quadratique moyenne. Ils interprètent la réduction du transport vertical à anisotropie élevée par une homogénéisation horizontale rendue efficace par des mouvements horizontaux très rapides. Plus l'anisotropie augmente, plus l'effet diffusif de la turbulence horizontale réduit l'amplitude des fluctuations du scalaire passif et donc le flux vertical du traceur.

Une autre propriété remarquable du transport turbulent vertical dans une atmosphère stable est le phénomène d'arrêt de la dispersion verticale des particules Lagrangiennes. La dispersion verticale est représentée par l'évolution temporelle du déplacement quadratique moyen $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p$, où la notation $\langle \rangle_p$ désigne une moyenne sur un ensemble de particules Lagrangiennes et z_0 est l'altitude initiale de la particule. Si le transport est de type diffusif, la dispersion croît linéairement avec le temps et le coefficient de diffusion associé est défini comme :

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d \langle (z - z_0)^2 \rangle_p}{dt} \quad (1.11)$$

Or, Csanady [15] a prédit que la dispersion verticale tendait vers une valeur asymptotique indépendante du temps ce qui implique un coefficient de diffusion nul. Ce résultat a été obtenu en utilisant une description Lagrangienne des équations du mouvement dans laquelle les termes d'accélération dûs aux forces de pression et aux contraintes visqueuses sont modélisés par une force aléatoire, et la diffusion thermique des fluctuations de température est modélisée par un terme proportionnel à ces fluctuations. La turbulence est supposée homogène et isotrope.

Pearson & al. [49] ont analysé la dépendance du modèle de Csanady [15] au spectre temporel de la force aléatoire et ont ajouté un terme d'amortissement représentant l'énergie rayonnée sous forme d'ondes de gravité par l'élément fluide. Ils confirment les conclusions de Csanady [15] dans le cas non-diffusif où la densité de l'élément fluide ne varie pas et montrent que la dispersion verticale moyenne $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p$ tend vers la valeur maximale v_z^2/N^2 , où v_z et N sont respectivement la racine de la vitesse verticale quadratique moyenne et la fréquence de Brunt-Väisälä. L'arrêt de la croissance de $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p$ s'effectue pour $t \geq 1/N$. En prenant en compte la diffusion thermique, Pearson & al. [49] trouvent que le déplacement vertical quadratique moyen, après avoir atteint l'état asymptotique, reprend une croissance linéaire lente sous l'effet des échanges thermiques entre l'élément fluide et son environnement. Dans ce modèle, l'effet de la diffusion thermique est contrôlée par le temps de diffusion d'un élément fluide, une quantité qui dépend fortement de la taille de l'élément fluide en question.

Les expériences de laboratoire menées par Britter & al. [7] sont compatibles avec l'existence d'une dispersion verticale maximale. Elles consistent à placer une source de scalaire passif dans un écoulement turbulent stablement stratifié formé en aval d'une grille et à étudier l'évolution du panache de scalaire passif en aval de la source. La croissance de la taille verticale du panache s'arrête et les valeurs de la hauteur maximale du panache sont compatibles avec les valeurs de $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p$ données par Pearson & al. [49]. En revanche, la taille horizontale du panache n'est pas influencée par la stratification et croît comme $t^{1/2}$. Néanmoins, comme l'ont noté Pearson & al. [49], ces expériences diffèrent de leur théorie car dans les expériences, la turbulence décroît en aval de la grille.

Plus récemment, des simulations numériques tridimensionnelles d'écoulements turbulents soumis à une forte stratification stable ont été réalisées par Kimura & Herring [27] puis par Kaneda & Ishida [26]. Ces simulations déterminent l'évolution d'un champ de vitesse et de fluctuations de température en présence d'une stratification stable caractérisée par une fréquence de Brunt-Väisälä uniforme. La turbulence n'étant pas entretenue, elle tend à décroître au cours du

temps. Les auteurs ont calculé l'évolution de particules Lagrangiennes initialement placées aux points de grille et ont déterminé la dispersion verticale moyenne de ces particules pour des valeurs croissantes de la stratification. Kimura & Herring [27] ainsi que Kaneda & Ishida [26] observent clairement que la dispersion est limitée par une valeur maximale pour les cas les plus stratifiés. Dans le même temps, la vitesse verticale quadratique moyenne n'a pas diminué significativement en tout cas pas suffisamment pour expliquer la très forte suppression des déplacements verticaux. Kaneda & Ishida [26] notent que l'anisotropie dans leur écoulement, telle que définie dans Vincent & al. [66], reste de l'ordre de l'unité pour les différentes stratifications et ne semble donc pas pouvoir expliquer la décroissance de transport vertical dans leurs simulations.

Kaneda & Ishida [26] ont proposé un autre modèle basé sur une description Eulérienne pour rendre compte de l'arrêt de la dispersion verticale. Leur point de départ est la théorie de la distorsion rapide ("Rapid Distorsion Theory") qui, dans la limite des très fortes stratifications, permet de négliger les termes non-linéaires vis-à-vis de la force d'Archimède. Il est alors possible de connaître analytiquement l'évolution d'un champ initial de vitesse tout en sachant qu'au delà d'un certain temps, l'approximation n'est plus nécessairement vérifiée. A partir de ces solutions, Kaneda & Ishida [26] déterminent les corrélations en temps et en espace du champ de vitesse Eulérien. Ils se servent ensuite de la conjecture de Corrsin [14] pour relier les corrélations du champ de vitesse Eulérien aux corrélations temporelles du champ de vitesse Lagrangien. Cette approximation suppose que statistiquement la distribution spatiale des particules Lagrangiennes à un instant donné est faiblement corrélée avec celle à un instant ultérieur pourvu que la durée qui sépare les deux instants soit suffisamment grande. L'évolution de la dispersion verticale ainsi obtenue est remarquablement en accord avec les résultats de leurs simulations numériques décrites ci-dessus. Dans le cadre de cette théorie linéaire, l'écoulement est constitué d'ondes de gravité et Kaneda & Ishida [26] interprètent la suppression du transport vertical comme le résultat de la somme des contributions d'ondes ayant des phases différentes.

En même temps que Kaneda & Ishida [26], Nicolleau & Vassilicos [46] ont calculé numériquement les trajectoires des particules Lagrangiennes dans un champ de vitesse également obtenu à partir de la théorie de la distorsion rapide. Leur approche est donc similaire au modèle de Kaneda & Ishida [26] à la différence qu'ils n'utilisent pas l'hypothèse de Corrsin pour obtenir la dispersion des particules, mais l'obtiennent par un calcul numérique direct. Leurs résultats confirment la suppression du transport vertical dans un écoulement obtenu à partir de la théorie de la distorsion rapide, et la dispersion verticale moyenne $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p$ tend vers la valeur maximale v^2/N^2 , où à la différence du modèle de Pearson & al. [49], c'est v la racine de la vitesse quadratique moyenne et non v_z la racine de la vitesse verticale quadratique moyenne qui intervient. Ils trouvent également que la dispersion horizontale n'est pas affectée par la stratification.

Le travail présenté dans ce mémoire a été directement motivé par les résultats

de Vincent & al. [66]. Nous avons en effet cherché dans quelle mesure la relation simple trouvée par Vincent & al. [66] entre le coefficient de diffusion turbulente et l'anisotropie reste valable pour un champ de vitesse effectivement solution des équations de Navier-Stokes.

1.3 Contenu du mémoire

Le mémoire débute par un chapitre de généralités sur la turbulence homogène et isotrope et sur le transport. Le chapitre 3 intitulé formalisme mathématique et résolution numérique présente les équations de l'écoulement et du traceur et leur résolution numérique. La méthode de suivi des particules Lagrangiennes est également introduite. Les simulations, leurs résultats et leur interprétation font l'objet du chapitre 4. Le mémoire s'achève enfin sur la conclusion.

Cette étude a été exposée sous la forme de poster et de présentation orale à deux workshops, respectivement au workshops IWPCMT8 à Pasadena en décembre 2001 et au workshops IWPCMT9 à Cambridge en juillet 2004. Elle fait l'objet d'un article qui a été soumis au journal *Physics of Fluids* en juillet 2004.

Chapitre 2

Généralités sur la turbulence et le transport

Le transport turbulent d'éléments chimiques est étudié dans bien d'autres domaines que celui de l'astrophysique. Les éléments chimiques y sont souvent supposés non réactifs et se comportent comme des traceurs passifs. Un traceur passif est une substance qui est transportée par l'écoulement sans l'affecter et qui diffuse sous l'effet du mouvement Brownien des molécules. Comme la turbulence, le traceur peut être décrit avec des lois phénoménologiques ou des modèles qui se différencient les uns des autres par leur solution du problème de fermeture. Grâce à l'amélioration récente des performances des supercalculateurs, le problème de fermeture peut être contourné en résolvant directement les équations de Navier-Stokes et celle de transport du traceur.

Ce chapitre présente la théorie de Kolmogorov et celles qui s'en inspirent pour décrire la turbulence bidimensionnelle et l'état du traceur. Ensuite, nous considérons plus spécifiquement le problème du transport du traceur. Nous introduisons le coefficient de diffusion turbulente tiré de la théorie de longueur de mélange. Puis, nous abordons la diffusion des particules Lagrangiennes dans l'écoulement en rappelant les principaux résultats comme la définition du coefficient de diffusion Lagrangien qui est reliée à celle du coefficient de diffusion turbulente.

Nous convenons que la notation C représente la concentration du traceur et que les quantités avec l'exposant ou l'indice C se rapportent au traceur.

2.1 La turbulence homogène et isotrope

Le traceur est lâché dans des écoulements développant une turbulence homogène (invariante par translation dans chaque direction) et isotrope (invariante par rotation). Quand la turbulence est bien développée, son état et celui du

traceur dans l'écoulement peuvent être décrits avec des lois spectrales qui proviennent de théories phénoménologiques. Pour suivre l'évolution de la turbulence et du traceur, il faut résoudre les équations de Navier-Stokes et de transport du traceur et faire des approximations des termes non linéaires. Ces approximations caractérisent les modèles de fermeture entre eux.

L'espace spectral qui est évoqué dans ce chapitre est l'espace de Fourier. Le mode k est la norme du vecteur d'onde (k_x, k_y, k_z) en géométrie cartésienne tridimensionnelle et du vecteur d'onde (k_x, k_y) en géométrie cartésienne bidimensionnelle.

2.1.1 Théories phénoménologiques de la turbulence

La théorie phénoménologique de référence est la théorie de Kolmogorov qui s'applique à une turbulence tridimensionnelle. Elle est à l'origine de la théorie phénoménologique de la turbulence bidimensionnelle qui sera ensuite décrite.

Théorie de Kolmogorov

Cette théorie spectrale a été élaborée par A.N. Kolmogorov [28] dans les années 1950 à partir d'arguments phénoménologiques et dimensionnels. Elle s'applique à un écoulement de vitesse moyenne nulle qui développe une turbulence tridimensionnelle homogène et isotrope. Elle repose sur l'idée que l'énergie est transférée des grandes échelles vers les petites échelles à taux constant et égal au taux de dissipation visqueuse. Exprimé à partir de l'analyse dimensionnelle, le spectre en énergie dépend du taux de dissipation visqueuse, ε , et du mode k , et suit la loi :

$$E(k) \simeq C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.1)$$

C_K est la constante universelle de Kolmogorov et sa valeur expérimentale est égale à 1.5. Quand la turbulence est stationnaire, elle est entretenue par injection d'énergie aux grandes échelles et le taux de dissipation reste constant. Pour une turbulence libre, le taux de dissipation dépend du temps.

L'échelle de dissipation notée l_d s'obtient de manière dimensionnelle à partir de la définition du taux de dissipation visqueuse :

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{+\infty} k^2 E(k) dk \quad (2.2)$$

où ν est la viscosité cinématique. A cette échelle, le nombre de Reynolds local est égal à l'unité : $\frac{l_d v_d}{\nu} = 1$, ce qui donne en posant : $v_d \simeq (\varepsilon l_d)^{1/3}$, l'expression de l'échelle de dissipation visqueuse : $l_d \simeq (\frac{\nu^3}{\varepsilon})^{1/4}$.

L'échelle intégrale $l \gg l_d$ représente la taille des plus grandes structures de l'écoulement qui contiennent l'essentiel de l'énergie cinétique. Entre les deux échelles, la viscosité est sans effet sur l'écoulement et le spectre est dit inertiel. Le rapport des deux échelles dépend du nombre de Reynolds égal à $\frac{l\nu}{\nu}$ et mesure le nombre de degré de liberté dans chaque direction de l'écoulement : $\frac{l}{l_d} \simeq (\frac{l\nu}{\nu})^{3/4}$. Cette relation donne un ordre de grandeur de la résolution nécessaire dans une simulation numérique.

Cas bidimensionnel

L'écoulement considéré développe une turbulence bidimensionnelle homogène et isotrope et son champ de vitesse est de moyenne nulle. Associée à l'énergie cinétique, la seconde quantité d'importance est l'enstrophie notée \wp . Dans l'espace spectral, elle obéit à l'équation :

$$\frac{d}{dt}\wp(t) = -2\nu \int_0^{+\infty} k^4 E(k, t) dk \quad (2.3)$$

où $\wp(t) = \int_0^{+\infty} k^2 E(k, t) dk$, est la définition de l'enstrophie dans l'espace de Fourier. Contrairement au cas de la turbulence tridimensionnelle, l'enstrophie est conservée dans la limite de nombres de Reynolds très élevés. La conservation de l'énergie et de l'enstrophie sont les hypothèses de base du théorème de Fjortoft qui régit le transfert d'énergie dans la partie inertielle du spectre. Son énoncé est le suivant [21] :

Soient trois vecteurs d'ondes d'indices 1,2 et 3, colinéaires tels que $k_2 = 2k_1$ et $k_3 = 3k_1$. La quantité : $\delta E_i = E(k_i, t_2) - E(k_i, t_1)$, est la variation d'énergie cinétique entre deux instants pour chaque vecteur d'onde. D'après les relations de conservation de l'énergie et de l'enstrophie, si un nombre d'onde intermédiaire k_2 perd de l'énergie ($\delta E_2 < 0$) alors l'énergie sera essentiellement transférée vers k_1 et l'enstrophie vers k_3 .

Ce théorème constitue le fondement des propositions de Kraichnan [30] et Leith [31] qui s'inspirent de la théorie de Kolmogorov pour formuler la théorie phénoménologique de la turbulence bidimensionnelle homogène et isotrope.

L'enstrophie cascade des grandes échelles vers les petites échelles de l'écoulement avec un taux de transfert constant et égal à β et le spectre en énergie s'écrit :

$$E(k) \simeq \beta^{2/3} k^{-3} \quad (2.4)$$

Si ε est le taux d'injection d'énergie cinétique au nombre d'onde k_i , alors en posant que $\beta \simeq k_i^2 \varepsilon$ et que $\varepsilon \simeq k_i v^3$, le nombre d'onde d'injection se déduit directement : $k_i \simeq \frac{\beta^{1/3}}{v}$. En fin de cascade, l'enstrophie est dissipée par la viscosité et le nombre d'onde de dissipation noté k_d s'écrit : $k_d \simeq \left(\frac{\beta}{\nu^3}\right)^{1/6}$. Entre les nombres d'ondes k_i et k_d , la viscosité n'affecte pas l'enstrophie et le spectre en énergie est dit inertiel. Le rapport : $\frac{k_d}{k_i} \simeq \left(\frac{\nu}{\nu k_i}\right)^{1/2}$, dépend du nombre de Reynolds et le nombre de degré de liberté dans chaque direction de l'écoulement est égal à $Re^{1/2}$ pour la turbulence bidimensionnelle.

A partir du théorème de Fjortoft, Kraichnan [30] avance que pour une turbulence entretenue, l'énergie cinétique qui est injecté dans l'écoulement réalise une cascade inverse vers les nombres d'onde $k < k_i$ sans être dissipée. Elle suit la loi 2.3 de Kolmogorov avec un constante C_K que les expériences et les simulations numériques situent entre les valeurs 4 et 9 [32]. Cette cascade inverse se produit par appariement de grandes structures de l'écoulement.

2.1.2 Théories phénoménologiques du traceur

Cette théorie s'applique à un traceur qui est lâché dans un écoulement turbulent tridimensionnel possédant un spectre en énergie qui suit la loi de Kolmogorov. Le champ du traceur est homogène et isotrope et de moyenne nulle. A l'image de la théorie de Kolmogorov, l'énergie du traceur cascade des grandes échelles vers les petites échelles avec un taux de transfert d'énergie constant et égal au taux de dissipation. En fin de cascade, la diffusion moléculaire et la diffusion turbulente du traceur deviennent du même ordre de grandeur ce qui est caractérisé par un nombre d'onde noté k_C . Ce nombre d'onde dépend du nombre d'onde de dissipation k_d et du nombre de Schmidt : $Sc = \frac{\nu}{D}$. Pour $Sc < 1$, $k_C \simeq (Sc)^{3/4} k_d$. Lorsque $Sc \geq 1$, la turbulence est dissipée pour des échelles inférieures à $1/k_d > 1/k_C$ et $k_C \simeq (Sc)k_d$. Le spectre du traceur, quant à lui, suit une loi de puissance quelle que soit la valeur du nombre de Schmidt.

Spectre du traceur pour $Sc < 1$ ou $k_C < k_d$

Quand l'écoulement se situe dans la zone inertielle du spectre de Kolmogorov, le spectre du traceur présente deux types de comportement.

Si il est injecté à une échelle de l'écoulement notée k_i^C , alors pour des valeurs de k dans l'intervalle $[\sup(k_i, k_i^C), \inf(k_d, k_C)]$, le traceur est simplement advecté par

l'écoulement sans être affecté pas la diffusivité moléculaire. Les théories d'Oboukhov [47] et de Corrsin [13] supposent que les spectres en énergie du traceur et de l'écoulement sont liés par la relation : $\frac{E_C(k)}{E(k)} \propto \frac{\varepsilon_C}{\varepsilon}$, où ε_C est le taux de dissipation du traceur. Ils suivent la même loi de puissance en $k^{-5/3}$, mais avec des coefficients différents. L'expression du nombre d'onde (k_C) se déduit de celle du nombre d'onde de dissipation en remplaçant la viscosité cinématique ν par la diffusivité moléculaire D : $k_C \simeq (\frac{\varepsilon}{D^3})^{1/4}$.

Si le traceur est ponctuellement lâché dans l'écoulement turbulent et représenté par un nuage de particules Lagrangiennes, alors la distance entre deux particules $R(t)$ et le diamètre moyen du nuage σ vérifient la loi de Richardson [52] tant que ces distances restent inférieures ou du même ordre de grandeur que l'échelle intégrale de l'écoulement. En posant $\varepsilon \simeq \frac{v_R^2}{R/v_R}$, la loi de Richardson s'écrit :

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} R^2 \simeq R v_R \simeq \varepsilon^{1/3} R^{3/4} \quad (2.5)$$

Pour des valeurs de k dans l'intervalle $[k_C, k_d]$, la diffusion du traceur est dominée par la diffusion moléculaire. Si les conditions de validité de l'approximation Quasi-Normal sont supposées vérifiées, le calcul du spectre du traceur selon Leslie [33] donne la relation :

$$E_C(k) = \frac{2}{3} D^{-2} \int_0^{+\infty} q^2 E_C(q) dq k^{-4} E(k) \quad (2.6)$$

A partir d'arguments dimensionnels sur la définition suivante du taux de dissipation du traceur :

$$\varepsilon_C = 2D \int_0^{+\infty} k^2 E_C(k) dk \quad (2.7)$$

et en utilisant la loi de Kolmogorov, le spectre du traceur suit la loi de puissance :

$$E_C(k) \simeq \varepsilon_C D^{-3} \varepsilon^{2/3} k^{-17/3} \quad (2.8)$$

Spectre du traceur pour $Sc \geq 1$ ou $k_C \geq k_d$

L'écoulement est dans un régime dominé par la viscosité et le traceur subit un cisaillement local d'échelle de longueur, k_d^{-1} , et de vitesse, $v_d = \nu k_d$. Il est plus étiré dans la direction du cisaillement que dans celle transversale. En l'absence d'effet de diffusion moléculaire, le taux de dissipation du traceur s'exprime en fonction de la vortacité de l'écoulement qui est proportionnelle à la quantité $(\frac{\varepsilon}{\nu})^{1/2}$, ce qui implique la loi de puissance suivante :

$$E_C(k) \simeq \varepsilon_C \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} k^{-1} \quad (2.9)$$

Cas bidimensionnel

L'écoulement dans lequel évolue le traceur développe une turbulence bidimensionnelle qui est supposée stationnaire, homogène et isotrope et son spectre suit une loi de puissance en k^{-3} dans sa partie inertielle. Le traceur se propage de manière homogène et isotrope et son champ moyen est nul. Contrairement à l'écoulement, la double conservation de l'énergie et de l'entrophie n'est pas satisfaite pour le traceur. En vertu du théorème de Fjortoft [21], l'énergie du traceur cascade des grandes échelles vers les petites échelles avec un taux de transfert constant et égal au taux de dissipation ε_C . Le nombre d'onde k_C s'exprime de la même manière que pour le cas tridimensionnel, en fonction du nombre d'onde de dissipation k_d et du nombre de Schmidt Sc . Il dépend de l'état turbulent de l'écoulement.

Spectre du traceur pour $Sc < 1$ ou $k_C < k_d$

Dans la zone inertielle du spectre de l'écoulement, le traceur a deux comportements possibles. Si il est lâché au nombre d'onde $k_i^C = k_i$, alors pour des valeurs de k dans l'intervalle $[k_i, \inf(k_d, k_C)]$, la proposition de Oboukhov [47] transposée au cas bidimensionnel suppose que le spectre en énergie du traceur et le spectre d'entrophie de l'écoulement sont liés par la relation : $\frac{E_C(k)}{k^2 E(k)} \propto \frac{\varepsilon_C}{\beta}$, où β est le taux de transfert d'entrophie. Cette relation entraîne la loi de puissance suivante pour le traceur :

$$E_C(k) \simeq \varepsilon_C \beta^{-1/3} k^{-1} \quad (2.10)$$

L'expression du nombre d'onde k_C se déduit de celle du nombre d'onde de dissipation en remplaçant la viscosité cinématique par la diffusion moléculaire : $k_C \simeq (\frac{\beta}{D^3})^{1/6}$.

Si le traceur est ponctuellement lâché dans l'écoulement et repéré par des particules Lagrangiennes, alors la distance notée R entre deux particules évolue suivant une loi de dispersion qui est l'équivalent bidimensionnel de la loi de Richardson :

$$\frac{1}{2} \frac{dR^2}{dt} \simeq \beta^{1/3} R^2 \quad (2.11)$$

Pour des valeurs de k dans l'intervalle $[k_C, k_d]$, le spectre du traceur s'obtient en effectuant le même raisonnement que pour le cas tridimensionnel ce qui donne la loi de puissance suivante :

$$E_C(k) \simeq D^{-3} \varepsilon_C \beta^{2/3} k^{-7} \quad (2.12)$$

Spectre du traceur pour $Sc \geq 1$ ou $k_C \geq k_d$

Le spectre du traceur suit une loi de puissance en k^{-1} en accord avec Batchelor [3]. Il présente les mêmes dépendances que celui proposé pour le cas tridimensionnel au coefficient près :

$$E_C(k) \simeq \varepsilon_C \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} k^{-1} \quad (2.13)$$

2.1.3 Autres types de modèles

Les modèles de fermeture découlent d'approximations des équations de Navier-Stokes et de l'équation de transport du traceur. La plupart des modèles reposent sur l'approximation Quasi-Normal (QN) [32] ou résultent de l'approximation d'Interaction Directe (DIA) [29]. Les plus simples dans leur formulation servent de lois de fermeture aux simulations numériques directes des grandes structures d'un écoulement turbulent (LES).

L'approximation Quasi-Normal est à la base des modèles EDQNM (“Eddy Damped Quasi-Normal Markovian”) qui résolvent les équations de l'écoulement et du traceur dans l'espace spectral. Pour une turbulence presque gaussienne, cette approximation permet d'écrire les moments d'ordre pair des équations comme une somme finie de moments d'ordre inférieur et pair. Pour les moments d'ordre impair, il faut introduire un coefficient d'amortissement, homogène à l'inverse d'un temps, pour réduire leur contribution qui doit rester négligeable. Les modèles EDQN génèrent néanmoins des spectres avec des valeurs négatives. Pour y remédier, la Markovianisation suppose que les moments d'ordre impair doivent être amortis ou dissipés en un temps caractéristique très petit devant le temps d'advection. Ce temps dépend de la diffusivité visqueuse et du coefficient d'amortissement qui est ajusté pour permettre aux modèles EDQNM de restituer des lois phénoménologiques ou les données observationnelles.

L'approximation DIA permet une généralisation bien définie mathématiquement et consistante avec la physique, des concepts de la théorie locale de longueur de mélange que nous allons introduire à la section suivante. Elle ne génère pas de fonction ou de constante arbitraire. Quand les champs moyens varient peu dans le temps et l'espace, elle aboutit à des lois de transport qui ressemblent à celles de la théorie de longueur de mélange. Dans le cas contraire, le transport moyen en n'importe quel point de l'écoulement est exprimé sous la forme d'une intégrale non locale qui tient compte des valeurs du gradient du champ moyen sur une région dont l'étendue est déterminée par les longueurs et les temps de corrélation des fluctuations. A la différence de l'approximation QN, les modèles qui découlent de l'approximation DIA permettent l'étude des corrélations temporelles. Mais, leur formulation assez complexe pénalise les simulations numériques.

2.2 Le transport turbulent d'un traceur non réactif

L'évolution du traceur dans un fluide incompressible est décrite par une équation de transport qui a la forme suivante :

$$\partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = D \Delta C \quad (2.14)$$

où D est le coefficient de diffusion moléculaire. Le champ de vitesse \mathbf{u} est solution des équations de Navier-Stokes.

La concentration C est décomposée en la somme d'une valeur moyenne \overline{C} et d'une fluctuation C' suivant la décomposition de Reynolds :

$$C = \bar{C} + C' \quad (2.15)$$

La moyenne peut toujours être définie comme une moyenne d'ensemble effectuée sur plusieurs réalisations du même écoulement. Mais en pratique, il est difficilement envisageable de répéter un nombre suffisant d'expériences. Une autre définition de la moyenne est plutôt considérée. Elle peut être spatiale si l'écoulement est statistiquement homogène dans une direction ou temporelle si l'écoulement est statistiquement stationnaire. Les écoulements étudiés dans cette thèse étant bidimensionnels et homogènes horizontalement, nous considérons la moyenne horizontale :

$$\langle C \rangle_x = \frac{1}{L_x} \int_{x_0}^{x_0+L_x} C dx \quad (2.16)$$

avec $\langle C' \rangle_x$ qui est nulle. En utilisant cette décomposition, l'équation d'évolution pour la concentration moyenne se met sous la forme suivante :

$$\partial_t \langle C \rangle_x + \langle v_z \rangle_x \partial_z \langle C \rangle_x = D \partial_z^2 \langle C \rangle_x - \partial_z \langle C' v'_z \rangle_x \quad (2.17)$$

Elle ressemble à l'équation initiale pour la concentration totale mais avec un terme de transport supplémentaire. Les corrélations entre les fluctuations de vitesse et de concentration, $-\langle C' v'_z \rangle_x$, engendrent un flux de scalaire passif qui est un flux turbulent.

Pour modéliser la turbulence, il est possible d'écrire une équation d'évolution pour le flux turbulent. Mais cette équation contient des moments du troisième ordre qu'il faudrait alors modéliser en fonction des moments du second ordre. A cause de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes et d'advection-diffusion du scalaire passif, il est impossible d'écrire l'équation d'un moment sans introduire le moment d'ordre supérieur. Pour fermer l'équation, il faut faire une hypothèse sur le moment d'ordre supérieur. C'est à ce problème de fermeture que se heurte la modélisation de la turbulence.

Maintenant, nous décrivons le modèle de longueur de mélange pour le flux turbulent. Puis nous regarderons un peu en détail le transport d'une particule Lagrangienne par le champ de vitesse turbulent.

2.2.1 Le modèle de longueur de mélange

Ce modèle est basé sur une analogie avec l'estimation de la viscosité moléculaire dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. Nous considérons une distribution de scalaire passif dont la concentration moyenne présente un gradient dans la direction verticale. Pour simplifier l'exposé, la concentration moyenne est notée : $c = \langle C \rangle_x$.

Supposons qu'un élément fluide parte d'un niveau $z = 0$ à $t = 0$ avec une concentration $c_0 = c(z = 0, t = 0)$. En l'absence de diffusion moléculaire, l'élément fluide conserve sa concentration, de telle sorte que lorsqu'il passe à l'altitude z au temps t , il a un déficit de concentration, $\delta c = c(z, t) - c_0$, qui s'écrit également : $\delta c = \bar{c}(z) - c_0 + c'(z, t)$, en utilisant la décomposition de Reynolds par rapport au temps : La quantité $\bar{c}(z)$ représente la moyenne de c sur un intervalle de temps préalablement défini et $c'(z, t)$ est la fluctuation associée. Si la contribution de la turbulence à ce déficit de concentration est négligeable et si la variation $\bar{c}(z) - c_0$ peut être approximée par la quantité $z\partial_z\bar{c}(z)$, alors il en résulte que $\delta c = z\partial_z\bar{c}(z)$. Comme le volume transporté par unité de surface et de temps dans la direction z est égal à la quantité $\langle v_z \rangle_x$, le flux moyen de concentration peut être approximé de la manière suivante :

$$-\langle C'v'_z \rangle_x \simeq z\partial_z\bar{c}\langle v_z \rangle_x \quad (2.18)$$

Or, la corrélation entre l'altitude z et la vitesse correspondante $\langle v_z \rangle_x$ d'un élément fluide doit décroître avec la distance parcourue. Si la décorrélation se produit pour des valeurs de z proche d'une longueur ℓ appelée longueur de mélange, le produit $z\langle v_z \rangle_x$ est de l'ordre de $\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}\ell$, où $\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}$ est la racine de la vitesse verticale quadratique moyenne, et le flux moyen de concentration s'écrit :

$$-\langle C'v'_z \rangle_x = a_1\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}\ell\partial_z\overline{\langle C \rangle_x} \quad (2.19)$$

où le coefficient a_1 est une constante inconnue. Il est alors naturel de définir un coefficient de diffusion turbulente comme égal à $a_1\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}\ell$, où ℓ est généralement défini comme la longueur de corrélation des vitesses Eulériennes verticales.

Le problème est que le modèle de longueur de mélange est basé sur des hypothèses non réalisées dans les écoulements turbulents. En particulier, une séparation d'échelle entre l'échelle caractérisant le gradient de concentration moyenne et la longueur de mélange est nécessaire pour que l'approximation : $\delta c = z\partial_z\bar{c}$,

soit vérifiée pour des valeurs de z de l'ordre de ℓ . Mais dans les écoulements turbulents, les tourbillons les plus grands tendent à avoir des tailles comparables avec les longueurs de variation de l'écoulement moyen.

Comme le montre Lumley [62], l'expression 2.19 n'a pas besoin du modèle de longueur de mélange pour être justifiée lorsque la turbulence est dominée par une seule vitesse caractéristique $\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}$ et une seule longueur caractéristique ℓ . Soit C' l'amplitude des fluctuations de concentration engendrées par des mouvements turbulents d'échelle verticale ℓ , si l'échelle caractérisant le gradient de concentration vertical est de l'ordre de ℓ , l'amplitude des fluctuations sera de l'ordre de $\partial_z \bar{C} \ell$. En supposant de plus que C' est bien corrélé avec v'_z , l'expression 2.19 vient naturellement en effectuant la moyenne horizontale. Dans le cadre de cette interprétation, l'expression 2.19 résulte d'une analyse dimensionnelle et n'est pas censée être vraie localement mais plutôt en moyenne dans une couche d'épaisseur de l'ordre de ℓ .

En revanche, lorsque l'écoulement est caractérisé par plusieurs échelles de longueur ou plusieurs échelles de temps, le raisonnement précédent et donc l'expression 2.19 ne sont plus justifiés [62].

2.2.2 La diffusion des particules Lagrangiennes

La trajectoire d'une particule Lagrangienne $\mathbf{X}(t)$ qui est advectée dans un écoulement de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ et qui est soumise à une diffusion moléculaire D est régit par l'équation suivante [61] :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + \sqrt{2D}\mathbf{b}(t) \quad (2.20)$$

où $\mathbf{b}(t)$ est un mouvement Brownien représenté par un bruit blanc Gaussien de moyenne nulle et de corrélation : $b_i(t)b_j(t_1) = \delta_{ij}\delta(t - t_1)$.

En l'absence d'advection, la densité de probabilité des écarts à la position initiale $\Delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t = 0)$ satisfait une équation de type équation de la chaleur. Pour des particules initialement concentrées en un point, la solution est une distribution Gaussienne dont l'écart-type croît comme $\sqrt{2Dt}$.

Pour l'advection, la théorie de Taylor [61] fait l'hypothèse que la vitesse Lagrangienne $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}[\mathbf{X}(t), t]$ est statistiquement stationnaire. Comme discuté par Lumley [62], cette hypothèse est en particulier vérifiée lorsque le champ de vitesse Eulérien est statistiquement homogène et stationnaire. Le déplacement quadratique moyen vérifie :

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta \mathbf{X}(t))^2 \rangle = 2 \int_0^t \langle \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{V}(t_1) \rangle dt_1 = 2 \int_0^t \langle \mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(t_1) \rangle dt_1 \quad (2.21)$$

où la deuxième égalité utilise la stationnarité de $\mathbf{V}(t)$. Le temps de corrélation Lagrangien est défini comme :

$$\tau_L = \frac{\int_0^\infty \langle \mathbf{V}(0) \cdot \mathbf{V}(t_1) \rangle dt_1}{\langle \mathbf{V}^2 \rangle} \quad (2.22)$$

Il mesure la mémoire de la vitesse Lagrangienne. Pour des temps courts par rapport au temps de corrélation Lagrangien ($t \ll \tau_L$), l'équation (2.21) se réduit à la relation : $\langle (\Delta \mathbf{X})^2 \rangle \approx \langle \mathbf{v}^2 \rangle t^2$, où la corrélation des vitesses Lagrangiennes a été approximée par $\langle \mathbf{v}^2 \rangle$. Dans ce régime le transport de la particule est ballistique. Si le temps de corrélation Lagrangien est fini, pour $t \gg \tau_L$, un régime diffusif peut être atteint, où $\langle (\Delta \mathbf{X})^2 \rangle = 2 \langle \mathbf{v}^2 \rangle \tau_L t$ [61]. En effet, les déplacements d'une particule considérés sur des intervalles de temps séparés par des durées très supérieures à τ_L sont pratiquement indépendants. Pour des temps longs, le déplacement : $\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t=0) = \int_0^t \mathbf{V}(t_1) dt_1$, se comporte donc comme une somme de variables indépendantes et le théorème centrale limite s'applique. Ce théorème indique que la somme d'une série de n termes suivant la même loi de probabilité a une loi de probabilité qui tend vers la loi normale quand n tend vers l'infini, si chaque terme de la série est statistiquement indépendant des autres. En d'autre terme, le déplacement devient un mouvement Brownien pour les temps longs. Quand le déplacement quadratique moyen croît moins vite que t , le régime est sous-diffusif. Il est rencontré dans la convection de Rayleigh-Bénard où des particules sont piégées dans les cellules convectives. A contrario, quand le déplacement quadratique moyen croît plus vite que t , le régime est super-diffusif et caractérise certains écoulements parallèles [20].

Néanmoins, si la vitesse Lagrangienne est stationnaire et si le temps de corrélation Lagrangien est fini, l'advection d'un scalaire passif par un écoulement turbulent atteint un régime diffusif pour des temps suffisamment longs. Dans la suite, nous allons nous intéresser au transport vertical de particules Lagrangiennes dans l'écoulement et calculer le déplacement vertical quadratique moyen à partir du champ de vitesse sans tenir compte de la diffusion moléculaire. En référence au régime de diffusion décrit par Taylor, nous définirons le coefficient de diffusion Lagrangien comme :

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d \langle (z - z_0)^2 \rangle_p}{dt} \quad (2.23)$$

Nous achevons ce chapitre en établissant une relation entre le flux turbulent défini plus haut et ce coefficient de diffusion Lagrangien. Cette relation a été obtenue par Pearson et al. [49] dans le cas d'une turbulence homogène et stationnaire. L'équation de conservation du scalaire passif 2.14 peut être réécrite de la manière suivante en supposant la stationnarité de la moyenne horizontale du traceur :

$$\frac{d(C' + \langle C \rangle_x)}{dt} = \frac{dC'}{dt} + v_z \frac{d \langle C \rangle_x}{dz} = D \Delta C \quad (2.24)$$

ce qui donne :

$$-C'(t) = \int_0^t \left[v_z \frac{d \langle C \rangle_x}{dz} - \frac{d(C' + \langle C \rangle)}{dt} \right] dt_1 \quad (2.25)$$

En multipliant par $v_z(t)$ et en appliquant la moyenne horizontale, l'expression du flux en résulte en remarquant que la quantité $\langle C' \rangle_x$ est nulle :

$$-\langle C' v'_z \rangle_x = \frac{1}{2} \frac{d \langle (z - z_0)^2 \rangle_x}{dt} \frac{d \langle C \rangle_x}{dz} - \langle \Delta C(t) v_z(t) \rangle_x \quad (2.26)$$

où la notation $\langle \rangle_x$ correspond dans ce cas précis à une moyenne sur l'ensemble des particules Lagrangiennes de même altitude z_0 .

L'intérêt de cette expression est qu'elle montre la différence entre le coefficient de diffusion turbulente défini comme le rapport entre le flux turbulent et le gradient vertical du traceur et le coefficient de diffusion Lagrangien. Cette différence vient du terme qui contient $\Delta C(t)$ défini comme suit :

$$\Delta C(t) = \int_0^t \frac{d(C' + \langle C \rangle)}{dt} dt_1 \quad (2.27)$$

et qui représente la variation de concentration totale de l'élément fluide due aux effets de diffusion moléculaire.

Chapitre 3

Formalisme mathématique et numérique

Notre étude concerne l'évolution d'un traceur passif dans un écoulement turbulent bidimensionnel. Ce chapitre a pour objet la mise en équations du problème physique et sa résolution numérique. Il débute par la présentation des équations qui régissent les écoulements stablement stratifiés dans le cadre de l'approximation Boussinesq. Ensuite, les équations sont écrites dans l'espace de Fourier qui est l'espace spectral adapté la géométrie cartésienne puisque les fonctions de Fourier sont alors les fonctions de base. Nous expliquons en détail la résolution des équations de notre problème avec la méthode pseudospectrale. Puis, nous présentons la méthode de suivi des particules Lagrangiennes qui sont introduites dans l'écoulement pour calculer le coefficient de diffusion Lagrangien.

3.1 Les équations du mouvement pour un fluide de Boussinesq

Nous étudions un écoulement dans un domaine de hauteur L et de longueur, un nombre multiple pair de L . Il est soumis à une force horizontale constante orientée tantôt vers les x positifs, tantôt vers les x négatifs ce qui crée plusieurs couches de cisaillement dans l'écoulement. La définition mathématique de cette force par unité de masse qui n'est autre qu'une accélération est la suivante :

$$F(z) = (-1)^i F_0, \frac{(i-1)L}{n} \leq z < \frac{iL}{n}, i \in [1, n] \quad (3.1)$$

Elle génère $(n-1)$ couches de cisaillement. Le coefficient F_0 représente l'ampli-

tude de l'accélération. Comme l'écoulement reste stablement stratifié, le gradient vertical de température est constant et positif. Le fluide est incompressible, de densité ρ_o constante.

L'effet de la stratification est pris en compte dans les équations de Navier Stokes en les écrivant avec l'approximation Boussinesq. L'approximation Boussinesq suppose qu'une perturbation de température induit une perturbation de densité assez petite pour n'affecter que l'énergie potentielle de l'écoulement [9]. La perturbation de densité, $\delta\rho$, est une fonction linéaire de la température suivant la relation : $\frac{\delta\rho}{\rho_o} = -\alpha(T - T_0)$, avec un coefficient d'expansion volumique, α , très faible. Pour les gaz et les fluides, la valeur de α est comprise entre 10^{-4} et 10^{-3} [9]. T_0 est la distribution initiale de température.

Si \mathbf{v} est le vecteur vitesse, p la pression, T la température et C la concentration du traceur, alors les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, et l'équation de transport du traceur sont les suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + F \mathbf{e}_x - \frac{\delta\rho}{\rho_o} g \mathbf{e}_z \\ \partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \\ \partial_t C + \mathbf{v} \cdot \nabla C = D \Delta C \end{cases} \quad (3.2)$$

où \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z sont les vecteurs unitaires, respectivement dans la direction horizontale, et dans la direction verticale. v_x et v_z sont les composantes du vecteur vitesse \mathbf{v} . Les coefficients ν , κ et D sont respectivement la viscosité cinématique, la diffusivité thermique et la diffusivité moléculaire.

En haut et en bas du domaine, l'écoulement est limité par deux parois supposées rigides, imperméables et isothermes. De chaque côté du domaine, l'écoulement est périodique. Les conditions aux limites sont de type "libre glissement" pour la vitesse. La composante de vitesse, v_z , et la composante du tenseur des déformations, $\tau_{xz} = \frac{1}{2}(\partial_z v_x + \partial_x v_z)$, sont nuls en $z = 0$ et $z = L$. La distribution initiale de température croît linéairement avec la hauteur et ne dépend pas de la coordonnée x . Comme les parois sont isothermes, la température garde des valeurs constantes en haut et en bas du domaine. Le profil initial du traceur est Gaussien, selon la direction verticale :

$$C_0(z) = \frac{C_m L}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(z-z_0)^2}{2\sigma^2} \quad (3.3)$$

où σ est l'écart type de la Gaussienne. La couche de traceur est centrée en $z_0 = L/2$ et la concentration du traceur doit rester nulle en $z = 0$ et $z = L$.

L'équation de conservation de l'énergie est écrite en fonction de la variation de température notée θ par rapport à l'état initial : $\theta(x, z, t) = T(x, z, t) - T_0(z)$. Avec la nouvelle équation de conservation de l'énergie, le système 3.2 devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + F \mathbf{e}_x - \frac{\delta \rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z \\ \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = -v_z \frac{dT_0}{dz} + \kappa \Delta \theta \\ \partial_t C + \mathbf{v} \cdot \nabla C = D \Delta C \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Les équations 3.4 sont réécrites de manière détaillée en utilisant la relation : $\frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\alpha(T - T_0)$, et en posant : $\beta = -\frac{dT_0}{dz} < 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t v_x + \mathbf{v} \cdot \nabla v_x = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p + \nu \Delta v_x + F_0 (-1)^i, \quad \frac{(i-1)L}{n} \leq z < \frac{iL}{n}, i \in [1, n] \\ \partial_t v_z + \mathbf{v} \cdot \nabla v_z = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z p + \nu \Delta v_z + \alpha g \theta \\ \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \beta v_z + \kappa \Delta \theta \\ \partial_t C + \mathbf{v} \cdot \nabla C = D \Delta C \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Les équations 3.4 sont adimensionnées à partir de cinq quantités qui sont la hauteur L du domaine de l'écoulement, l'amplitude F_0 de l'accélération, la densité ρ_0 , l'écart de température ΔT entre le haut et le bas du domaine et la concentration moyenne C_m du traceur. Les relations d'adimensionnalisation sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = L \tilde{x}, z = L \tilde{z}, t = \sqrt{\frac{L}{F_0}} \tilde{t} \\ v_x = \sqrt{LF_0} \tilde{v}_x, v_z = \sqrt{LF_0} \tilde{v}_z \\ p = \rho_o LF_0 \tilde{p}, F = F_0 \tilde{F} \\ \theta = \Delta T \tilde{\theta}, C = C_m \tilde{C} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Comme la particularité de l'écoulement est d'être forcé de manière permanente dans la direction horizontale, la quantité F_0 doit intervenir dans la définition du temps caractéristique qui est égal à un temps d'advection horizontale due au forçage.

Sous la forme adimensionnalisée, les équations 3.5 constituent le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}_x + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v}_x = -\partial_{\tilde{x}} \tilde{p} + \frac{\nu}{\sqrt{L^3 F_0}} \tilde{\Delta} \tilde{v}_x + (-1)^i, \quad \frac{(i-1)}{n} \leq \tilde{z} < \frac{i}{n}, i \in [1, n] \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{v}_z + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v}_z = -\partial_{\tilde{z}} \tilde{p} + \frac{\nu}{\sqrt{L^3 F_0}} \tilde{\Delta} \tilde{v}_z + \frac{\alpha g \Delta T}{F_0} \tilde{\theta} \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\theta} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\theta} = \frac{L}{\Delta T} \tilde{v}_z + \frac{\kappa}{\sqrt{L^3 F_0}} \tilde{\Delta} \tilde{\theta} \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{C} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{C} = \frac{D}{\sqrt{L^3 F_0}} \tilde{\Delta} \tilde{C} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Des coefficients sont apparus devant les termes des seconds membres, en particulier devant les termes de diffusion. Il s'agit de l'inverse du nombre de Reynolds : $Re = \frac{\sqrt{L^3 F_0}}{\nu}$, du nombre de Péclet associé à la température : $Pe = \frac{\sqrt{L^3 F_0}}{\kappa}$, et du nombre de Péclet du traceur : $Pe_C = \frac{\sqrt{L^3 F_0}}{D}$. Le nombre de Richardson : $Ri = \frac{\alpha g \Delta T}{F_0}$, est le coefficient du terme d'Archimède. Le coefficient $\frac{L}{\Delta T} \beta$ vaut -1 puisque la température initiale dépend linéairement de la hauteur de l'écoulement et que β est négatif.

Le système d'équations adimensionnalisées 3.7 est à présent étudié sans les tildes pour alléger l'écriture. Les équations de conservation de la quantité de mouvement sont écrites sous la forme rotationnelle en exprimant les termes non

linéaires en fonction de la vorticité. Il suffit de remarquer que : $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$, ce qui donne les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \partial_t v_x = -v_z \omega_y - \partial_x P + \frac{1}{Re} \Delta v_x + (-1)^i, \quad \frac{(i-1)}{n} \leq z < \frac{i}{n}, i \in [1, n] \\ \partial_t v_z = v_x \omega_y - \partial_z P + \frac{1}{Re} \Delta v_z + Ri\theta \\ \partial_t \theta = -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta - v_z + \frac{1}{Pe} \Delta \theta \\ \partial_t C = -\mathbf{v} \cdot \nabla C + \frac{1}{Pe_C} \Delta C \end{array} \right. \quad (3.8)$$

La pression P est définie comme la somme de la pression isotrope et de l'énergie cinétique : $P = p + \frac{(v_x^2 + v_z^2)}{2}$. La forme rotationnelle fait apparaître dans les équations de conservation de la quantité de mouvement la composante de vorticité $\omega_y = (\partial_z v_x - \partial_x v_z)$, qui est perpendiculaire au plan de l'écoulement.

3.2 Algorithme de résolution des équations de Boussinesq

Nous avons utilisé un code écrit par A.E. Dean [17] que nous avons adapté à notre étude. Les équations 3.8 décrivent un écoulement qui ne comporte ni choc, ni discontinuité ce qui permet l'utilisation d'une méthode spectrale pour leur résolution. Les méthodes spectrales comparées aux différences finies présentent l'avantage d'une grande précision et d'une convergence exponentielle.

Les équations de Navier Stokes du système 3.8 sont résolues avec la méthode pseudospectrale qui évalue les termes non linéaires dans l'espace physique et le reste dans l'espace spectral. Les transformées de Fourier sont des transformées de Fourier rapides (FFT) qui nécessitent moins d'opérations, $O(N \ln N)$ au lieu de $O(N^2)$ dans le cas d'un calcul direct. Nos fonctions de base sont des produits de fonctions sinus et cosinus, définis en fonction de la condition limite à satisfaire. Ces fonctions de base doivent s'annuler en haut et en bas du domaine pour la composante de vitesse v_z , la perturbation de température θ et la concentration C du traceur.

Sur ces indications, les décompositions dans l'espace physique des grandeurs du problème sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \sum_{k_x k_z} \hat{v}_x e^{ik_x 2\pi x/N_x} \cos(\pi k_z z/N_z) \\ v_z = \sum_{k_x k_z} \hat{v}_z e^{ik_x 2\pi x/N_x} \sin(\pi k_z z/N_z) \\ \theta = \sum_{k_x k_z} \hat{\theta} e^{ik_x 2\pi x/N_x} \sin(\pi k_z z/N_z) \\ C = \sum_{k_x k_z} \hat{C} e^{ik_x 2\pi x/N_x} \sin(\pi k_z z/N_z) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

où la notation $\hat{*}$ désigne la transformée de Fourier de la grandeur $*$. Dans l'espace physique, N_x et N_z représentent respectivement les nombres de points de grille dans la direction horizontale et verticale. Le maillage est régulier et le rapport $\frac{N_x}{N_z}$ est égal au rapport d'aspect du domaine de l'écoulement. Dans l'espace spectral, il y a N_x nombres d'onde k_x qui sont des multiples de l'inverse du rapport d'aspect et N_z nombres d'onde k_z . La valeur maximale du mode $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$, est égale à $N_z \sqrt{2}$.

Le calcul des termes non linéaires dans l'espace physique génère une erreur d'"aliasing". Elle est minimisée par une technique de troncature [53] appelée "loi 2/3" qui annule systématiquement les contributions des nombres d'ondes supérieurs à $\frac{2}{3}N_z$. L'erreur d'"aliasing" décroît lorsque le nombre de points de grille augmente.

L'accélération F_0 est ajoutée aux équations de conservation de la quantité de mouvement dans l'espace physique. Dans l'espace spectral, les équations du système 3.8 se mettent sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0 \\ \partial_t \hat{v}_x = -\hat{v}_z \hat{\omega}_y - ik_x \hat{P} - \frac{1}{Re} |\mathbf{k}|^2 \hat{v}_x \\ \partial_t \hat{v}_z = \hat{v}_x \hat{\omega}_y - ik_z \hat{P} - \frac{1}{Re} |\mathbf{k}|^2 \hat{v}_z + Ri \hat{\theta} \\ \partial_t \hat{\theta} = -ik_x (\hat{v}_x \hat{\theta}) - ik_z (\hat{v}_z \hat{\theta}) - \hat{v}_z - \frac{1}{Pe} |\mathbf{k}|^2 \hat{\theta} \\ \partial_t \hat{C} = -ik_x (\hat{v}_x \hat{C}) - ik_z (\hat{v}_z \hat{C}) - \frac{1}{Pe_C} |\mathbf{k}|^2 \hat{C} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

La résolution des équations de conservation de la quantité de mouvement du système 3.10 a lieu en deux étapes, chacune d'une durée δt . Lors de la première étape est déterminé un champ de vitesse intermédiaire. Le champ de vitesse total est obtenu à la fin de la seconde étape après avoir calculé la pression en utilisant la

condition d'incompressibilité. L'équation de conservation de l'énergie et l'équation de transport du traceur sont résolues en une seule fois, avec le pas de temps $\Delta t = 2\delta t$. A la fin de chaque itération Δt , les différents champs sont corrigés de l'erreur d'"aliasing" avec la technique de troncature.

L'avancée en temps utilise les différences finies. Pour les termes non linéaires, elle s'effectue avec le schéma Leapfrog qui est explicite et à l'ordre 2 : $\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t} = D_{NL}$, où D_{NL} représente les termes non linéaires qui sont calculés à l'itération n . Pour les termes de diffusion, l'avancée en temps est réalisée avec le schéma de Crank-Nicolson qui appartient à la famille des schémas implicites de type Adams-Moulton : $\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla^2 \mathbf{v}^{n+1} + \nabla^2 \mathbf{v}^n)$. Le schéma Leapfrog vérifie les conditions imposées par le théorème d'équivalence de Lax et le schéma de Crank-Nicolson reste inconditionnellement stable. Ce théorème stipule que : Consistance + stabilité = Convergence. Si λ représente les valeurs propres de la matrice de discrétisation spatiale, le schéma considéré est consistant si les valeurs propres vérifient la condition : $\Re(\lambda) \leq 0$, qui est nécessaire mais pas suffisante pour assurer la convergence du schéma. Pour le schéma Leapfrog, la condition de consistance est satisfaite avec $\Re(\lambda \Delta t) = 0$. La stabilité est assurée avec l'inégalité : $|\lambda \Delta t| \leq 1$. Le schéma Leapfrog requiert de moyenner au bout d'un certain nombre de pas de temps, la solution avec celle calculée au pas précédent pour limiter les discontinuités.

Les deux étapes de l'algorithme de résolution du modèle numérique 3.8 sont présentées ci-dessous :

Etape 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_x^* = \hat{v}_x^{n-1} - \Delta t \widehat{v_z \omega_y}^n - \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re} \hat{v}_x^n \\ \hat{v}_z^* = \hat{v}_z^{n-1} + \Delta t \widehat{v_x \omega_y}^n - \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re} \hat{v}_z^n + \Delta t Ri \hat{\theta}^n \\ \hat{\theta}^{n+1} = \frac{1}{(1 + \frac{\delta t |\mathbf{k}|^2}{Pe})} \left[\hat{\theta}^{n-1} - \frac{\delta t |\mathbf{k}|^2}{Pe} \hat{\theta}^n - \Delta t \left\{ ik_x (\widehat{v_x \theta})^n + ik_z (\widehat{v_z \theta})^n + \hat{v}_z^n \right\} \right] \\ \hat{C}^{n+1} = \frac{1}{(1 + \frac{\delta t |\mathbf{k}|^2}{Pe_C})} \left[\hat{C}^{n-1} - \frac{\delta t |\mathbf{k}|^2}{Pe_C} \hat{C}^n - \Delta t \left\{ ik_x (\widehat{v_x C})^n + ik_z (\widehat{v_z C})^n \right\} \right] \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où l'astérisque identifie le champ de vitesse intermédiaire.

Etape 2

$$\begin{cases} \hat{v}_x^{n+1}(1 + \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re}) = \hat{v}_x^* - ik_x \hat{P} \\ \hat{v}_z^{n+1}(1 + \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re}) = \hat{v}_z^* - ik_z \hat{P} \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}^{n+1} = 0 \rightarrow \hat{P} = -\frac{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}^*}{|\mathbf{k}|^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

ce qui donne en éliminant la pression :

$$\begin{cases} \hat{v}_x^{n+1} = \frac{\hat{v}_x^* - k_x \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}^*}{|\mathbf{k}|^2}}{(1 + \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re})}, \hat{v}_z^{n+1} = \frac{\hat{v}_z^* - k_z \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}^*}{|\mathbf{k}|^2}}{(1 + \delta t \frac{|\mathbf{k}|^2}{Re})} \end{cases} \quad (3.13)$$

Comme cet algorithme ne comporte pas de modèle de sous-maille, les simulations réalisées sont dites directes (DNS). Un écoulement turbulent est correctement simulé par DNS si le produit entre la valeur maximale du mode k et l'échelle de dissipation l_d reste de l'ordre de l'unité : $l_d k_{max} \geq 1$.

Nous décrivons maintenant la méthode numérique utilisée pour suivre les particules Lagrangiennes dans l'écoulement turbulent.

3.3 Algorithme de résolution des particules Lagrangiennes

Nous avons choisi, testé puis codé une méthode précise de suivi de particules Lagrangiennes. La trajectoire d'une particule Lagrangienne, notée $\mathbf{X}(t)$, est solution de l'équation : $\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, où \mathbf{v} est la vitesse de l'écoulement prise à la position de la particule Lagrangienne à l'instant t . Comme les particules Lagrangiennes ne coïncident pas nécessairement avec les points de la grille spatiale, leur vitesse est calculée soit par des méthodes d'interpolation soit par sommation directe de la série de Fourier lorsque le champ de vitesse est obtenu par une méthode spectrale. Cette méthode de sommation directe est la plus précise et pourrait être employée dans notre cas, mais elle s'avère trop exigeante en temps calcul quand il faut suivre un grand nombre de particules [1]. En effet, le calcul de la vitesse par transformée de Fourier inverse passe par la somme de $N_x \times N_z$ termes en géométrie bidimensionnelle. A contrario, les méthodes d'interpolation n'utilisent que les points à proximité du point où est calculée la vitesse et ne requièrent qu'une somme sur un nombre limité de points, indépendant de la taille globale du domaine numérique.

Deux critères conditionnent le choix d'une méthode d'interpolation : le temps calcul et sa précision. En accord avec les résultats de l'étude comparative [1], nous avons choisi une méthode d'interpolation utilisant les polynômes d'Hermite. Elle est plus précise que la méthode d'interpolation linéaire et que celle de Lagrange. Elle utilise non seulement les valeurs des vitesses aux points de grille, mais également leur dérivées. De plus, elle convient à des problèmes avec des conditions aux limites périodiques ou non, tandis que la méthode d'interpolation de Lagrange requiert des conditions aux limites périodiques. Elle est mise en oeuvre de la manière suivante :

La particule Lagrangienne de coordonnées (x, z) se trouve dans une maille carrée de dimension h qui est repérée en partant de son coin inférieur gauche. Les quatre points de la maille ont pour coordonnées, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre : (x_J, z_L) , (x_{J+1}, z_L) , (x_{J+1}, z_{L+1}) et (x_J, z_{L+1}) . La vitesse interpolée est calculée à partir d'un développement sur la base de polynômes 1D d'Hermite définis ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \xi_J = \frac{x-x_J}{h}, \\ x \geq x_J, H_J(x) = 1 - 3\xi_J^2 + 2\xi_J^3, G_J(x) = h(\xi_J^3 - 2\xi_J^2 + \xi_J) \\ x \leq x_{J+1}, H_{J+1}(x) = \xi_J^2(3 - 2\xi_J), G_{J+1}(x) = h(\xi_J^3 - \xi_J^2) \\ \text{Soit } \xi_L = \frac{z-z_L}{h}, \\ z \geq z_L, H_L(z) = 1 - 3\xi_L^2 + 2\xi_L^3, G_L(z) = h(\xi_L^3 - 2\xi_L^2 + \xi_L) \\ z \leq z_{L+1}, H_{L+1}(z) = \xi_L^2(3 - 2\xi_L), G_{L+1}(z) = h(\xi_L^3 - \xi_L^2) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Les coefficients de la décomposition sur la base des polynômes d'Hermite s'expriment en fonction de la vitesse de l'écoulement et de ses dérivées spatiales premières et secondes prises aux quatre points de la maille. La vitesse interpolée notée v_{int} est déterminée à partir de la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{v}_{int} = \mathbf{v}(x_J, z_L, t)H_J(x)H_L(z) + \mathbf{v}(x_{J+1}, z_L, t)H_{J+1}(x)H_L(z) \\
+ \mathbf{v}(x_J, z_{L+1}, t)H_J(x)H_{L+1}(z) + \mathbf{v}(x_{J+1}, z_{L+1}, t)H_{J+1}(x)H_{L+1}(z) \\
+ \partial_x \mathbf{v}(x_J, z_L, t)G_J(x)H_L(z) + \partial_x \mathbf{v}(x_{J+1}, z_L, t)G_{J+1}(x)H_L(z) \\
+ \partial_x \mathbf{v}(x_J, z_{L+1}, t)G_J(x)H_{L+1}(z) + \partial_x \mathbf{v}(x_{J+1}, z_{L+1}, t)G_{J+1}(x)H_{L+1}(z) \\
+ \partial_z \mathbf{v}(x_J, z_L, t)H_J(x)G_L(z) + \partial_z \mathbf{v}(x_{J+1}, z_L, t)H_{J+1}(x)G_L(z) \\
+ \partial_z \mathbf{v}(x_J, z_{L+1}, t)H_J(x)G_{L+1}(z) + \partial_z \mathbf{v}(x_{J+1}, z_{L+1}, t)H_{J+1}(x)G_{L+1}(z) \\
\partial_{xz}^2 \mathbf{v}(x_J, z_L, t)G_J(x)G_L(z) + \partial_{xz}^2 \mathbf{v}(x_{J+1}, z_L, t)G_{J+1}(x)G_L(z) \\
+ \partial_{xz}^2 \mathbf{v}(x_J, z_{L+1}, t)G_J(x)G_{L+1}(z) + \partial_{xz}^2 \mathbf{v}(x_{J+1}, z_{L+1}, t)G_{J+1}(x)G_{L+1}(z)
\end{array} \right. \quad (3.15)$$

L'avancée en temps de l'équation : $\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$, s'effectue avec le schéma de Heun [50] qui est un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 2. Le schéma de Heun se comporte comme un schéma prédicteur-correcteur et s'articule de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{X}_i^*(t^n) = \mathbf{X}(t^n) + \Delta t \mathbf{v}_{int}(\mathbf{X}(t^n), t^n) \\
\mathbf{X}(t^{n+1}) = \mathbf{X}(t^n) + \delta t (\mathbf{v}_{int}(\mathbf{X}(t^n), t^n) + \mathbf{v}_{int}(\mathbf{X}_i^*(t^n), t^n))
\end{array} \right. \quad (3.16)$$

Le pas de temps Δt est égal à celui de l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes. Les tests de l'algorithme de résolution des particules Lagrangiennes se trouvent à l'annexe B.

Chapitre 4

Simulations numériques

Après avoir introduit le problème physique adimensionné et le code numérique développé pour le résoudre, ce chapitre présente maintenant les simulations numériques du transport d'un traceur qui est lâché dans un écoulement cisailé et stablement stratifié. Conformément au problème physique, tous les résultats présentés ici sont adimensionnés. D'abord, sont détaillées les caractéristiques des écoulements simulés, puis celles du traceur. Ensuite, viennent les méthodes de calcul du coefficient de diffusion turbulente du traceur et l'interprétation des résultats qui en découlent.

4.1 Introduction

Notre objectif est l'étude du transport vertical du traceur dans un écoulement turbulent qui présente une forte anisotropie entre mouvements verticaux et horizontaux. Pour atteindre des anisotropies élevées dans un écoulement bidimensionnel, il s'est avéré nécessaire d'engendrer un écoulement moyen dans la direction horizontale. La superposition de couches de cisaillement remplit la condition recherchée puisqu'elle comprend un écoulement horizontal d'ensemble et permet d'engendrer et d'entretenir la turbulence par instabilité de cisaillement. Pour former ces couches de cisaillement, nous avons introduit dans les équations du mouvement une accélération F_0 constante orientée alternativement vers les x positifs et vers les x négatifs. Nous rappelons la définition mathématique de cette accélération :

$$F(z) = (-1)^i F_0, \frac{(i-1)L}{n} \leq z < \frac{iL}{n}, i \in [1, n] \quad (4.1)$$

Elle génère $(n-1)$ couches de cisaillement. Dans la suite, le nombre de couches

cisaillées est fixé à 7 ce qui correspond à $n = 8$. La figure 4.1 montre le profil vertical de l'accélération ainsi que celui de la composante horizontale de vitesse à l'instant $t \simeq 1$.

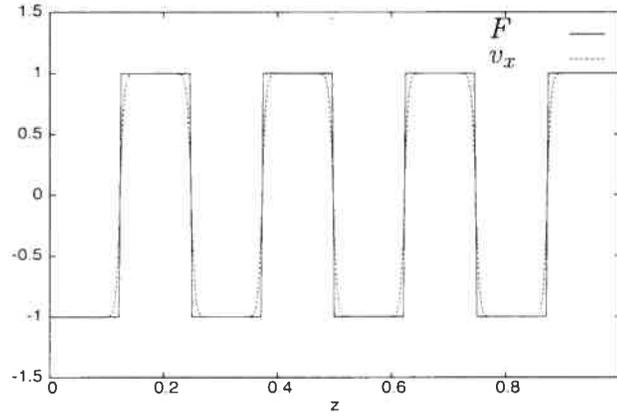


FIG. 4.1 – Superposition de l'accélération F et de la composante de vitesse v_x .

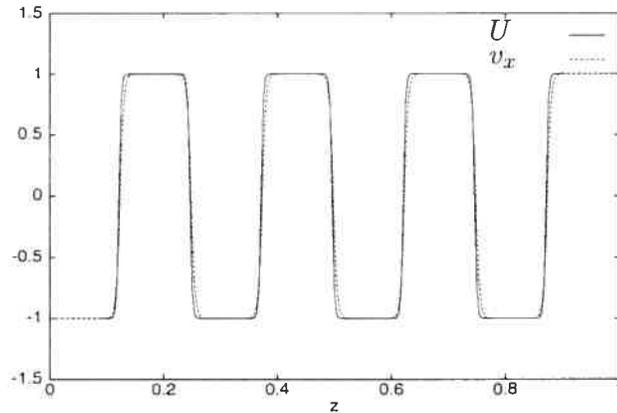


FIG. 4.2 – Superposition de la composante de vitesse v_x engendrée par le forçage et d'une forme analytique U en tangente hyperbolique dans les couches de cisaillement et constante entre ces couches.

Avec le temps, le cisaillement de vitesse s'amplifie jusqu'au moment où l'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut se déclencher. Nous avons commencé par étudier l'évolution non-linéaire de l'écoulement en l'absence de stratification. Nous sommes arrivés à la conclusion que, dans ce cas, le forçage employé ne permet pas d'accéder à des valeurs élevées de l'anisotropie. En effet, la destabilisation des couches de cisaillement fait apparaître des mouvements verticaux qui provoquent un transport vertical de la quantité de mouvement horizontale. Ce transport entraîne une diminution du cisaillement entre les couches et tend à modifier leur position qui n'est plus en phase avec celle du forçage. Cet effet est illustré sur la figure 4.3 avec le profil de l'accélération superposé à celui de la moyenne horizontale de la composante de vitesse v_x . Suite au mélange des couches de cisaillement, l'anisotropie n'augmente que très faiblement avec l'amplitude du forçage. Elle

reste de l'ordre de 1.

En revanche, la stratification stable des écoulements permet d'obtenir avec ce forçage des écoulements turbulents cisailés avec une anisotropie élevée (jusqu'à 30).

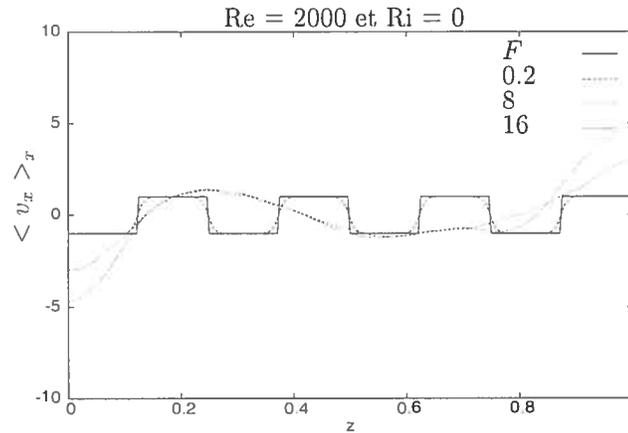


FIG. 4.3 – Superposition de l'accélération et des profils verticaux de la vitesse horizontale moyenne $\langle v_x \rangle_x$ à trois instants $t = 0.2, 8, 16$ dans le cas non-stratifié $Ri = 0$.

En pratique, nous avons procédé de la manière suivante. La condition initiale est un écoulement horizontal de vitesse proportionnelle à la vitesse v_x montrée sur la figure 4.1 et tel que le nombre de Richardson de gradient au centre de la couche de cisaillement est égal à $1/4$. Nous avons choisi cette valeur car elle correspond au seuil d'instabilité de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. L'approche linéaire développée pour trouver ce critère d'instabilité est rappelée à l'annexe A. Pour cette analyse, nous nous sommes placés dans le cas où le cisaillement est caractérisé par une fonction en tangente hyperbolique. Ceci est justifié par la figure 4.2 où le profil de vitesse engendré par le forçage est comparé à une forme analytique définie par une fonction en tangente hyperbolique dans les couches de cisaillement et constante entre ces couches.

Pour démarrer l'instabilité, de petites perturbations de vitesse sont ajoutées à l'écoulement. Pour toutes les simulations, elles sont bimodales, de nombres d'onde $k_x = 16$ et $k_z = 32$, d'amplitude 0.1 et de divergence nulle. La perturbation de température est égale à zéro. La figure 4.4 représente la composante de vitesse v_x après une certaine d'itérations pour deux valeurs du nombre de Richardson, $Ri = 100$ et $Ri = 500$. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz ne s'est pas encore développée. Celle-ci se manifeste enfin à partir de l'instant $t = 1$ et nous laissons évoluer l'écoulement jusqu'à ce que l'anisotropie atteigne un état statistiquement stationnaire.

L'anisotropie est définie à partir du rapport entre les moyennes quadratiques des composantes de vitesse :

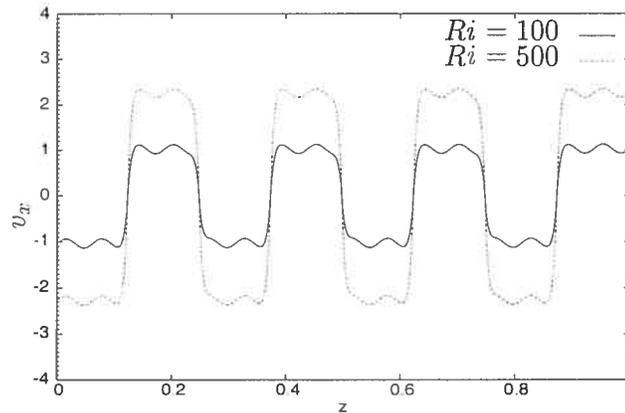


FIG. 4.4 – Composantes de vitesse v_x pour $Ri = 100$ et $Ri = 500$.

$$A = \sqrt{\frac{\langle v_x^2 \rangle}{\langle v_z^2 \rangle}} \quad (4.2)$$

La notation $\langle \rangle$ représente toujours la moyenne spatiale dans les deux directions, mais en éliminant les couches limites qui se forment au bord supérieur et au bord inférieur du domaine. Les figures 4.5 montrent l'évolution de l'anisotropie en fonction du temps pour différentes stratifications initiales (cf. le tableau 4.1).

Quelle que soit le degré de stratification considéré, l'anisotropie passe par un minimum, puis croît et tend vers une évolution quasi-stationnaire d'autant plus rapidement que la stratification est élevée. La valeur de la limite asymptotique augmente de manière monotone avec le nombre de Richardson et est comprise entre 2 et 30.

L'écoulement ainsi obtenu est donc homogène horizontalement, inhomogène verticalement et statistiquement stationnaire. C'est dans ces écoulements que le traceur sera lâché et que sera étudié son transport vertical. En attendant, nous allons présenter le domaine de paramètres explorés. Ils se divisent en deux catégories, les paramètres physiques et les paramètres numériques et constituent les données initiales des simulations. Ensuite, nous décrivons un peu plus en détail les écoulements en analysant les spectres d'énergie et de fluctuations de température ainsi que les cartes de vorticité.

Paramètres physiques

Les paramètres physiques sont les nombres sans dimension figurant dans le système d'équations 3.8. Le nombre de Reynolds s'assimile à l'inverse de la viscosité cinématique, le nombre de Richardson au carré de la fréquence de Brunt-Väisälä et les nombres de Péclet de la température et du traceur respectivement

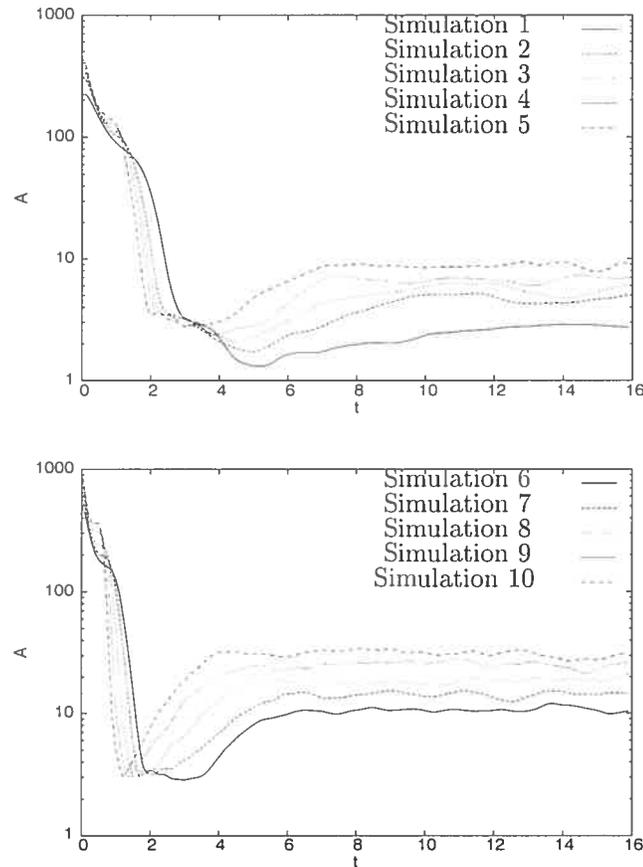


FIG. 4.5 – Représentation de l'anisotropie en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

à l'inverse de la diffusivité thermique et moléculaire. Multipliés aux échelles de longueur et de vitesse que nous allons choisir, ils constitueront les nombres sans dimension caractérisant l'écoulement et le traceur.

D'une simulation à l'autre, les valeurs des nombres de Péclet de la température et du traceur restent constantes : $Pe = 1$ et $Pe_C = 5000$. Les paramètres physiques qui varient sont le nombre de Reynolds et le nombre de Richardson. Parmi l'ensemble des simulations réalisées, nous avons retenu une dizaine seulement pour montrer clairement l'effet progressif de la stratification sur un écoulement qui a développé le maximum de turbulence permis par la résolution numérique. Les paramètres physiques de ces simulations sont résumés dans le tableau 4.1.

Num. de simul.	Sim1	Sim2	Sim3	Sim4	Sim5	Sim6	Sim7	Sim8	Sim9	Sim10
Re	4950	5000	5000	5050	5050	5100	5150	5200	5400	5555
Ri	100	200	250	300	400	500	700	1000	1500	2000

TAB. 4.1 – Nombres physiques des simulations choisies.

D'après les valeurs du tableau 4.1, le nombre de Prandtl défini comme le rapport entre le nombre de Péclet et le nombre de Reynolds conserve une valeur proche de 2×10^{-4} . Le nombre de Schmidt égal au rapport entre le nombre de Péclet du traceur et le nombre de Reynolds vaut 1.

Paramètres numériques

Les paramètres numériques sont destinés à l'algorithme de résolution. Le pas de temps Δt est fixé à 2×10^{-4} . Le nombre de points de grille dans la direction verticale est égal à $N_z = 256$. Pour un rapport d'aspect de 6, une grille de 6×256^2 mailles carrées recouvre le domaine de l'écoulement. Dans l'espace spectral, les modes varient entre 0 et $k_{max} = 256$, ce qui donne une échelle de dissipation $l_d \simeq 4 \times 10^{-3}$ égale à la taille de la maille.

Maintenant, nous allons décrire un peu plus en détail les écoulements simulés.

4.2 Description de l'écoulement

Les champs calculés comprennent les deux composantes de vitesse, v_x et v_z , et la fluctuation de température θ . Nous allons montrer des profils de ces champs moyennés horizontalement, la distribution bidimensionnelle de la composante de vorticité, ω_y , et les spectres dans l'espace de Fourier. Nous commenterons également l'évolution des nombres sans dimension caractérisant l'écoulement.

4.2.1 Profils moyens et isocontours de vorticité

Les figures 4.6 présentent le profil vertical de la moyenne horizontale de la composante de vitesse v_x à trois instants pour les simulations 1 et 8 du tableau 4.1. Contrairement au cas non stratifié, il apparaît que la disposition des couches de cisaillement telle qu'imposée par le forçage est bien conservée. Des couches limites se forment au bord inférieure et au bord supérieure et leur épaisseur diminue légèrement pour un nombre de Richardson croissant. Par ailleurs, du fait du faible nombre de Péclet, les fluctuations de température ont une amplitude très faible et la stratification moyenne reste essentiellement inchangée par le transport turbulent de chaleur. Cette situation pourrait être représentative des zones radiatives d'étoiles puisque la diffusivité thermique d'origine radiative y est très élevée et que l'héliosismologie ne détecte pas de modification de la structure thermique directement imputable au flux de chaleur turbulent dans la zone radiative. Finalement, nous remarquons que la moyenne globale de v_x qui est réalisée dans les deux directions, croît très légèrement au cours de la simulation avec une variation inférieure à 0.7%. Les moyennes globales de la composante de vitesse v_z et de la fluctuation de température θ restent nulles.

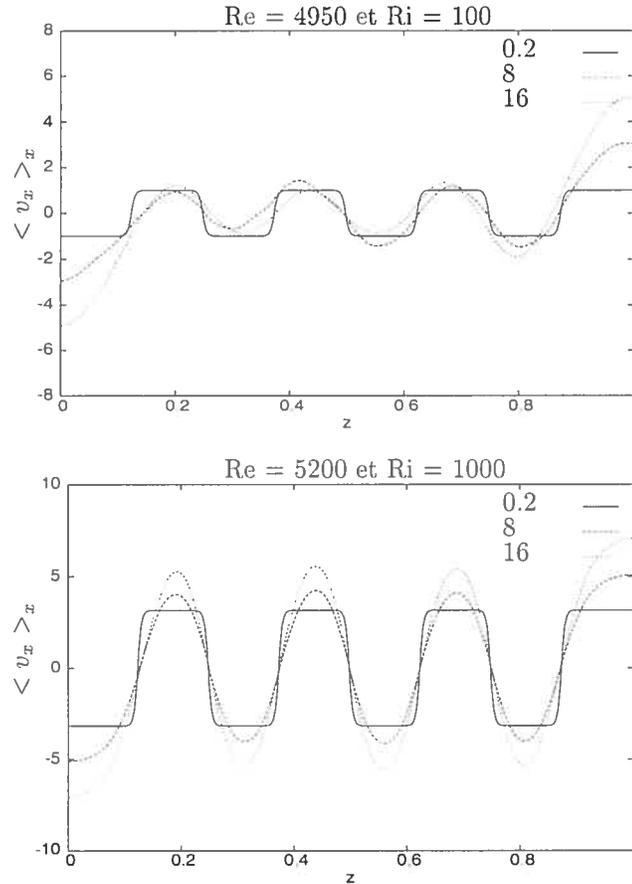


FIG. 4.6 – Profils de la quantité $\langle v_x \rangle_x$ en fonction de z pour deux nombres de Richardson différents ($Ri = 100$ en haut et $Ri = 1000$ en bas) et pour trois instants $t = 0.2, 8$ et 16 .

Les isocontours 4.17 et 4.18 de la vorticité ω_y visualisent son évolution dans un cas faiblement stratifié (simulation 1) et dans un cas fortement stratifié (simulation 8). Dans les deux cas, la vorticité se concentre sous la forme de vortex qui sont de plus en plus étirés dans la direction horizontale à mesure que la stratification augmente [57]. Dans le cas peu stratifié, les vortex sont suffisamment étendus verticalement pour que des interactions aient lieu entre vortex appartenant à des couches de cisaillement adjacentes. Dans le cas fortement stratifié, l'extension verticale des vortex est tellement faible qu'une zone d'interface d'aspect laminaire apparaît très clairement entre les couches de cisaillement. Nous reviendrons sur cette propriété dans la suite mais elle permet déjà de comprendre pourquoi à la figure 4.6, la disposition des couches de cisaillement évolue peu à fort nombre de Richardson.

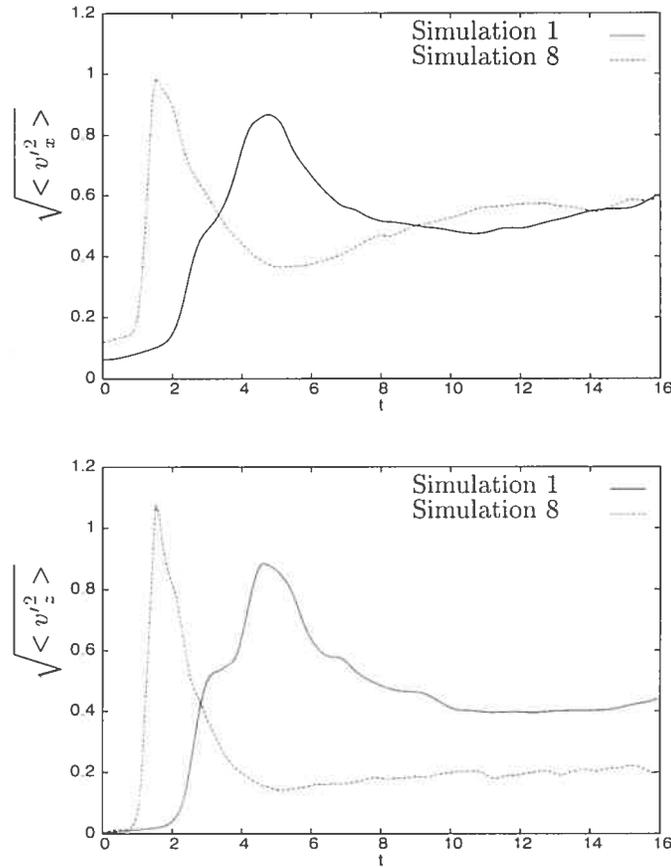


FIG. 4.7 – Profils des quantité $\sqrt{\langle v_x'^2 \rangle}$ et $\sqrt{\langle v_z'^2 \rangle}$ en fonction du temps pour les simulations 1 et 8 du tableau 4.1.

4.2.2 Distribution de l'énergie dans le domaine spectral

La distribution de l'énergie cinétique dans le domaine spectral, c'est à dire la fraction d'énergie se trouvant dans la bande spectrale $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, est donnée par le spectre $E(k)$ défini par :

$$\frac{1}{2}(v_x'^2 + v_z'^2) = \int_0^{k_{max}} E(k) dk \quad (4.3)$$

où $v_x' = v_x - \langle v_x \rangle_x$ est la fluctuation de vitesse horizontale et $v_z' = v_z - \langle v_z \rangle_x$, celle de vitesse verticale. Les spectres, $E_x(k)$ et $E_z(k)$, et celui des fluctuations de température $E_\theta(k)$, adoptent la même définition.

Au §2.1.1, nous avons rappelé que pour une turbulence bidimensionnelle homogène et isotrope, le spectre en énergie de l'écoulement suit une loi de puissance

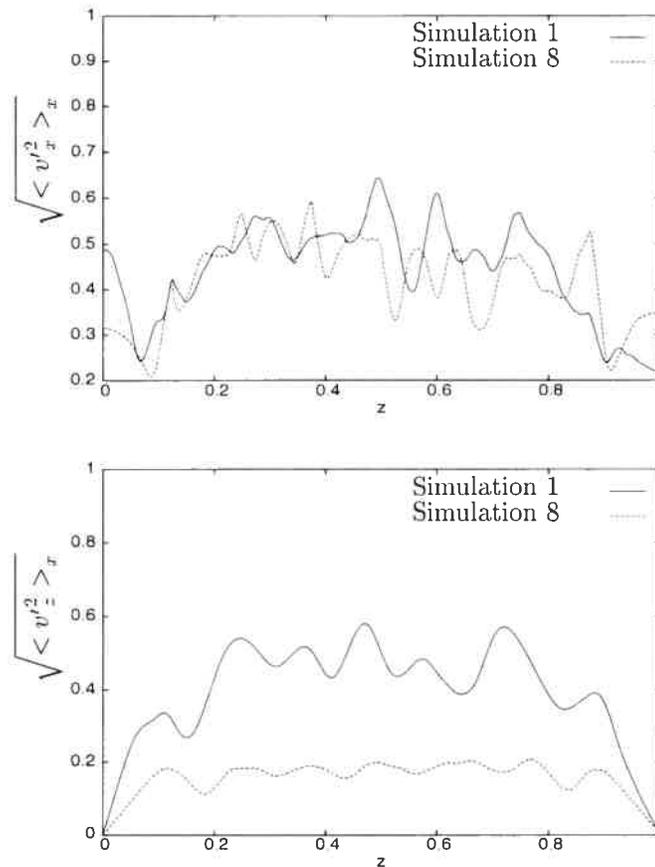


FIG. 4.8 – Profils des quantités $\sqrt{\langle v'^2 \rangle_x}$ et $\sqrt{\langle v'^2 \rangle_z}$ en fonction de z à l'instant $t = 8$ pour les simulations 1 et 8 du tableau 4.1.

en k^{-3} dans la zone inertielle du spectre. Si la turbulence est maintenue stationnaire sous l'action d'un forçage, une cascade inverse d'énergie vers les petits nombres d'onde se forme avec un spectre en $k^{-5/3}$. Elle rejoint le spectre en k^3 aux plus faibles nombres d'onde.

Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 montrent les spectres en énergie pour les simulations 1 et 8 aux instants $t = 8$ et $t = 16$. La zone inertielle commence à partir du nombre d'onde $k = 10$ et suit une loi de puissance en k^{-4} pour les deux simulations. Pour $k < 10$, il n'y a pas de cascade inverse d'énergie. Le spectre en k^3 est identifiable et se développe plus tardivement à faible nombre de Richardson. Les écoulements que nous avons simulés peuvent effectivement être qualifiés d'écoulements turbulents dans la mesure où ils possèdent des spectres à large bande inertielle à l'intérieur de laquelle se forment toutes les échelles turbulentes de l'écoulement [32]. La loi de puissance en k^{-4} se différencie clairement du cas homogène et isotrope et a déjà été observée dans des simulations numériques d'une couche de cisaillement bidimensionnelle et non stratifiée [32](page 253).

Les spectres des fluctuations de température représentés sur les figures 4.9

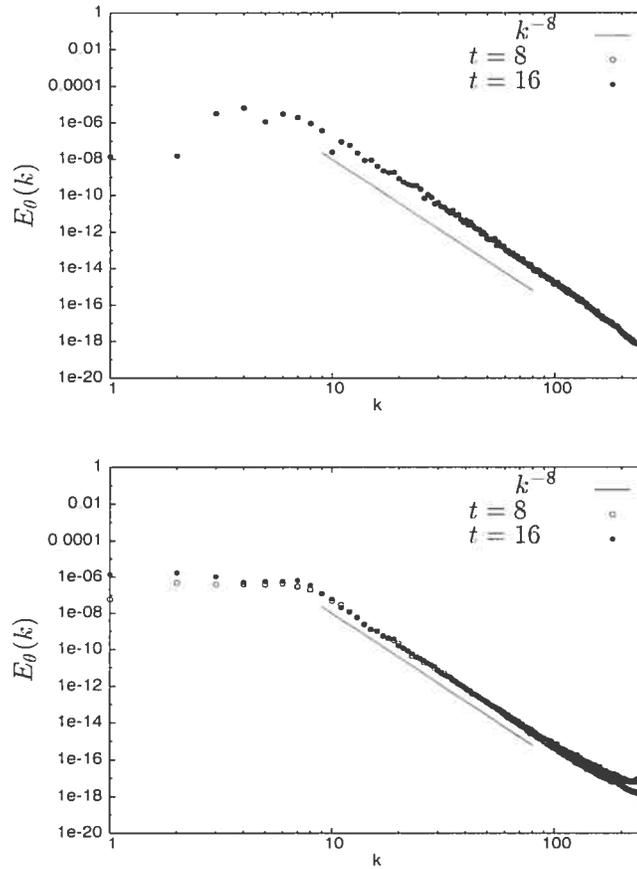


FIG. 4.9 – Spectres en énergie des fluctuations de température aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 en haut et la simulation 8 en bas.

suivent un loi de puissance en k^{-8} . Comme le nombre de Prandtl qui est égal à 2×10^{-4} est très petit, la majeure partie des échelles de température se trouve dans un domaine dit “inertiel-diffusif” où le transfert non linéaire domine pour les vitesses et la diffusion moléculaire contrôle les fluctuations de température. Comme indiqué au §2.1.2, Batchelor & al.[3] ont supposé que l’approximation Quasi-Normal devait être vérifiée dans ce cas ce qui permet d’exprimer le spectre des fluctuations de température en fonction du spectre d’énergie :

$$E_\theta(k) \propto \bar{\varepsilon}_\theta \kappa^{-3} k^{-4} E(k) \quad (4.4)$$

Puisque dans nos simulations $E(k) \propto k^{-4}$, nous en déduisons $E_\theta(k) \propto k^{-8}$. Cette théorie est donc en très bon accord avec les résultats de nos simulations.

4.2.3 Evolution des nombres sans dimension Re_t , Ri_g , Fr et Pe_t

Durant la simulation, le développement de la turbulence se mesure avec le nombre de Reynolds turbulent défini à partir des échelles caractéristiques de longueur, l , et de vitesse, v , de l'écoulement : $Re_t = \frac{lv}{\nu}$. Le nombre de Péclet turbulent, qui compare les transports de la chaleur par advection et par diffusion, est défini de la même manière : $Pe_t = \frac{lv}{\kappa}$.

L'échelle intégrale l se calcule dans l'espace spectral en fonction de l'énergie cinétique totale :

$$l = \frac{\pi \int_0^{k_{max}} (E(k)/k) dk}{2 \int_0^{k_{max}} E(k) dk} \quad (4.5)$$

L'échelle de vitesse se détermine dans l'espace physique en fonction des fluctuations des composantes de vitesse :

$$v = \sqrt{\langle v'_x \rangle^2 + \langle v'_z \rangle^2} \quad (4.6)$$

ou bien dans l'espace spectral à partir de l'énergie cinétique totale :

$$v = \sqrt{2 \int_0^{k_{max}} E(k) dk} \quad (4.7)$$

Comme la turbulence de l'écoulement est consécutive au développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, nous calculons le nombre de Richardson de gradient :

$$Ri_g = \frac{N^2}{\left(\langle \frac{dv_x}{dz} \rangle_x\right)^2} \quad (4.8)$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä. Nous estimons l'effet de la stratification stable avec le nombre de Froude : $Fr = \frac{v}{lN}$. Plus il est faible, plus l'effet de la stratification est important. Les figures 4.14, 4.16 et 4.10 montrent l'évolution

de Re_t , de Pe_t et de Fr en fonction du temps. A partir de l'instant $t = 2$, Re_t se maintient entre les valeurs 100 et 200, Pe_t entre 0.02 et 0.04 et Fr entre 0.4 et 2. Les écoulements simulés développent une turbulence du même ordre et les fluctuations de température restent dominées par la diffusion moléculaire. Le nombre de Froude tend vers une limite asymptotique qui décroît jusqu'à la valeur 0.4 quand la stratification augmente. Pour les simulations les plus stratifiées 9 et 10, il se met tardivement à croître au delà de la valeur 0.6. Sur la figure 4.15 est tracée la valeur moyenne de Ri_g , calculée à l'intérieur de trois couches de cisaillement, celle située au centre de l'écoulement et une couche de part et d'autre. La valeur de Ri_g à l'intérieur de chacune des couches est déterminée sur une demi-hauteur centrée. Le nombre de Richardson de gradient conserve une valeur moyenne inférieure ou égale à 0.1 en accord avec le critère d'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

L'étude de ces nombres sans dimension nous donne l'occasion de faire un lien avec la prescription sur le transport turbulent proposée par Zahn (voir équation 1.4). En effet, cette prescription suppose que le produit entre le nombre de Péclet turbulent et le nombre de Richardson de gradient reste constant et de l'ordre de l'unité pour des écoulements cisailés stratifiés de façon stable lorsque le nombre de Péclet turbulent est très petit devant l'unité. Dans nos simulations, il est proche de 2×10^{-2} . Les évolutions de Ri_g et de Pe_t en fonction du temps et pour différentes stratifications initiales montrent effectivement que le produit $Ri_g Pe_t$ est à peu près constant en régime stationnaire, mais de l'ordre de 2×10^{-3} . Il est possible que cette valeur soit effectivement égale à l'unité pour des simulations numériques tridimensionnelles.

Après avoir présenté en détail les écoulements, nous allons maintenant étudier le transport vertical du traceur qui est lâché dans ces écoulements turbulents.

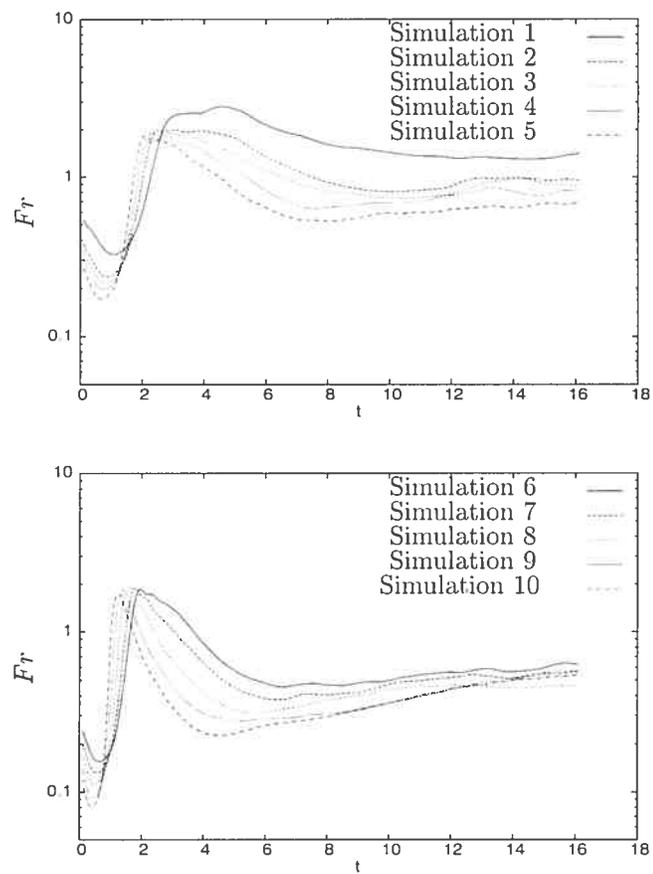


FIG. 4.10 – Nombre de Froude en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

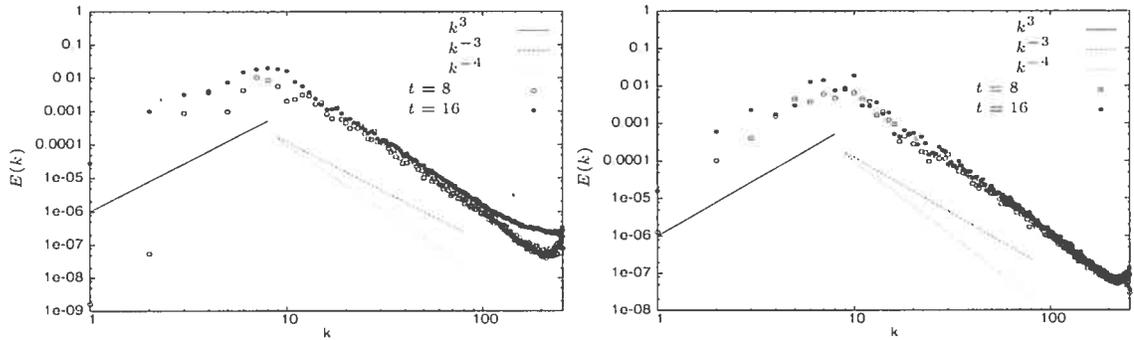


FIG. 4.11 – Spectres en énergie des fluctuations de la vitesse totale aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.

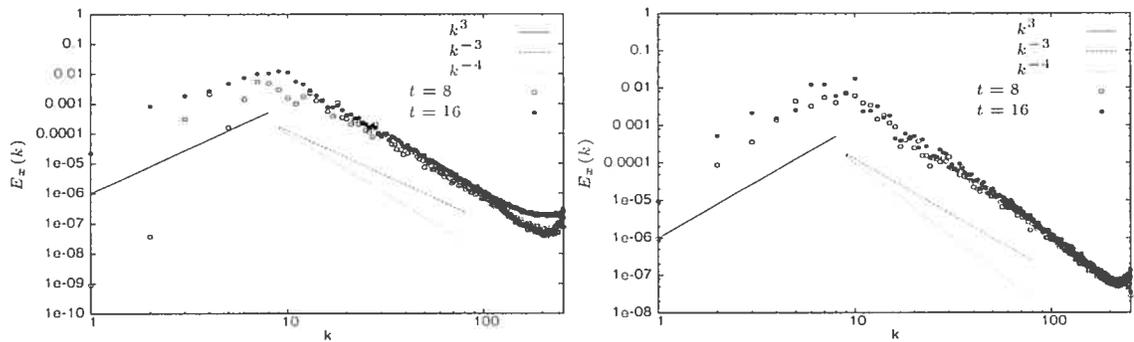


FIG. 4.12 – Spectres en énergie des fluctuations de la composante v_x aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.

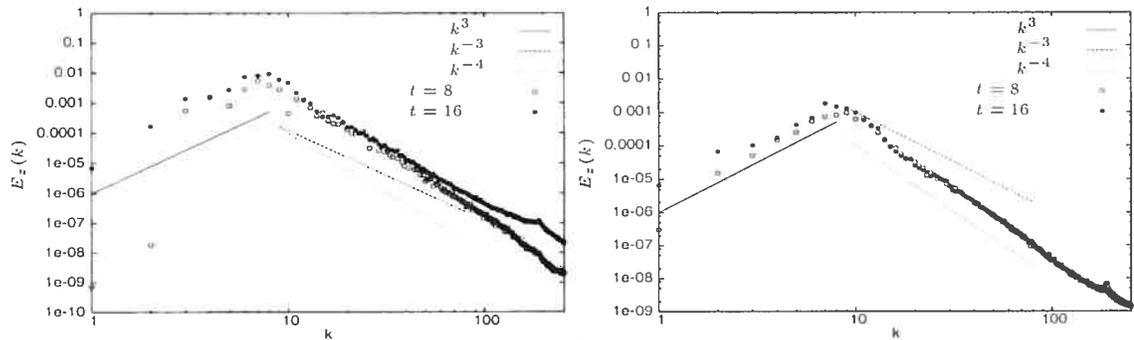


FIG. 4.13 – Spectres en énergie des fluctuations de la composante v_z aux instants $t = 8$ et $t = 16$ pour la simulation 1 à gauche et la simulation 8 à droite.

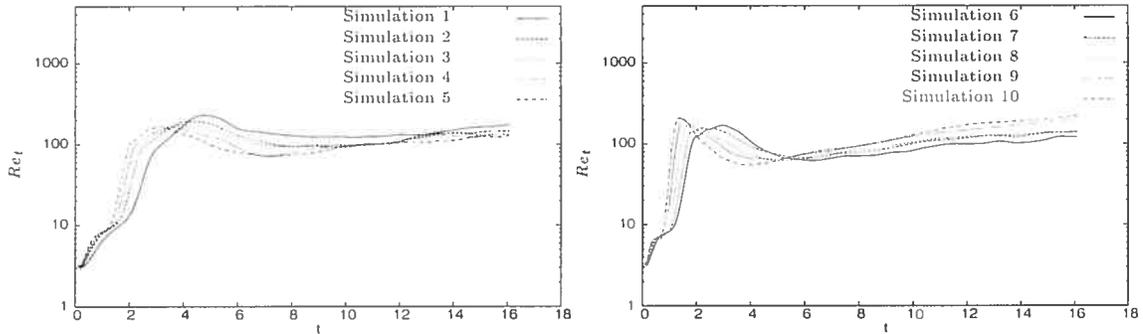


FIG. 4.14 – Nombre de Reynolds turbulent en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

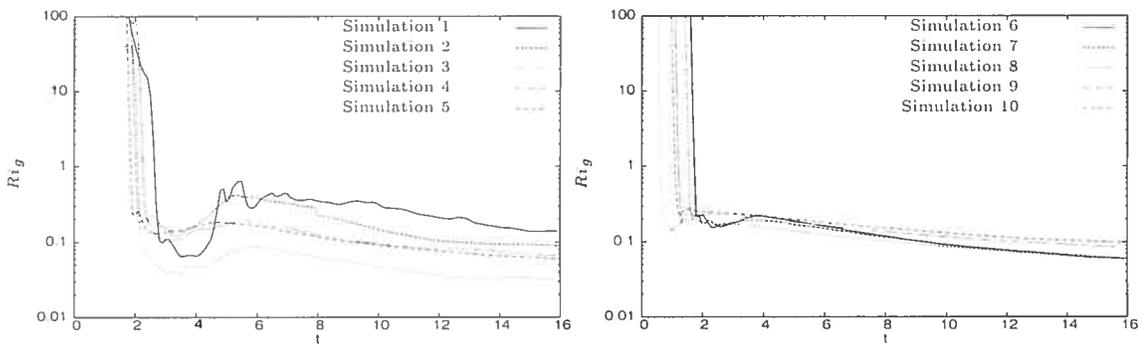


FIG. 4.15 – Nombre de Richardson de gradient en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

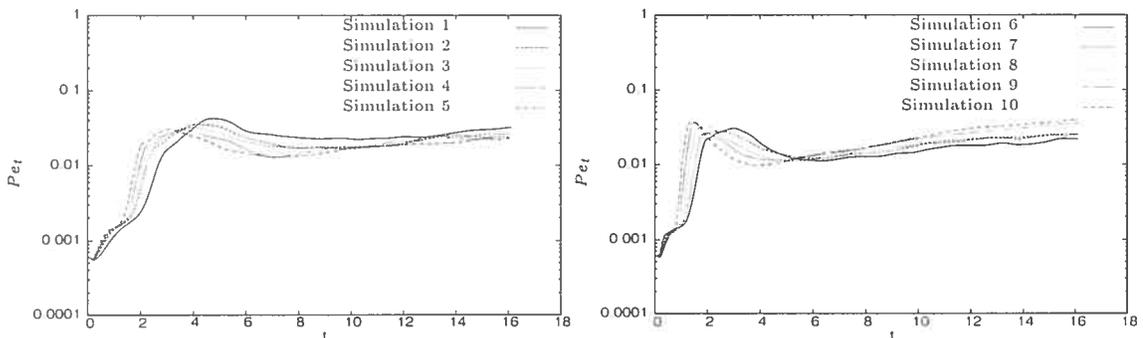


FIG. 4.16 – Nombre de Péclet turbulent en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.



FIG. 4.17 – Isocontours de la composante de vorticité ω_y à l'instant $t = 8$ pour la simulation 1.

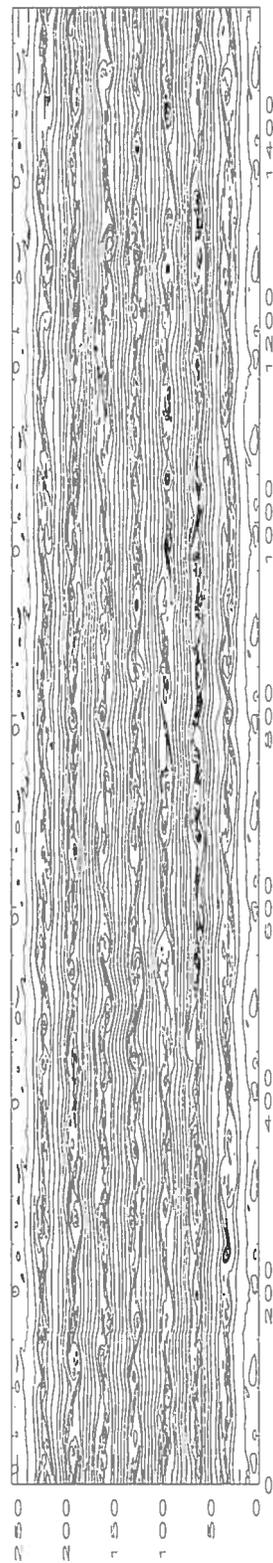


FIG. 4.18 – Isocontours de la composante de vorticité ω_y à l'instant $t = 8$ pour la simulation 8.

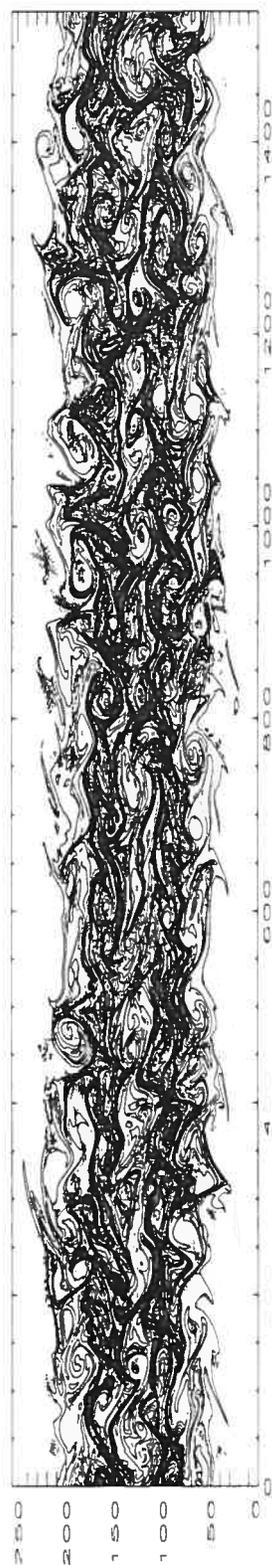


FIG. 4.19 – Isocontours du traceur à l'instant $t = 4.4$ pour la simulation 1.

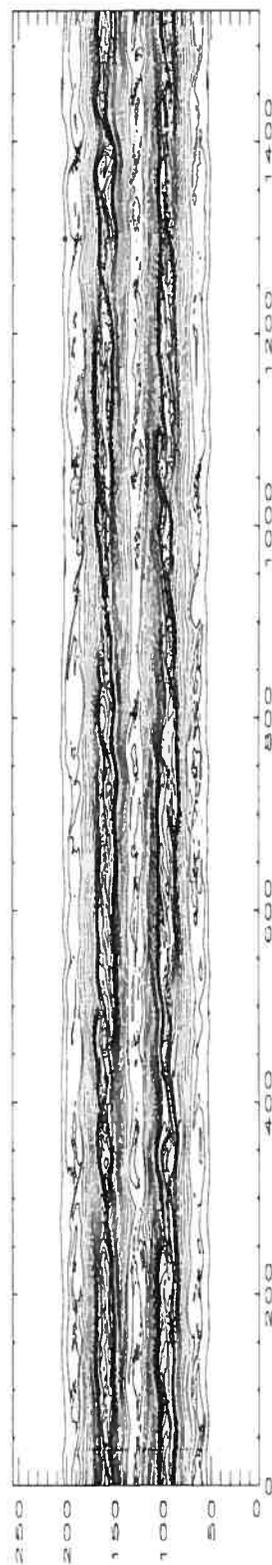


FIG. 4.20 – Isocontours du traceur à l'instant $t = 4.4$ pour la simulation 8.

4.3 Transport vertical du traceur : Analyse et résultats

L'un des objectifs de notre étude est de trouver une relation entre le coefficient de diffusion du traceur et l'anisotropie de l'écoulement. Avant de définir le coefficient de diffusion, nous allons présenter l'évolution du traceur comme nous l'avons précédemment fait pour l'écoulement.

Le traceur est introduit dans l'écoulement dès que l'anisotropie a un comportement quasi-stationnaire et que le nombre de Reynolds turbulent est supérieur à 120. **L'instant où il est lâché dans l'écoulement est pris comme nouvelle origine du temps.** Les figures 4.21 montrent l'évolution du nombre de Péclet turbulent du traceur qui est défini en fonction des échelles l et v introduites au §4.2.3 et de la diffusivité moléculaire : $Pe_{ct} = \frac{lv}{D}$.

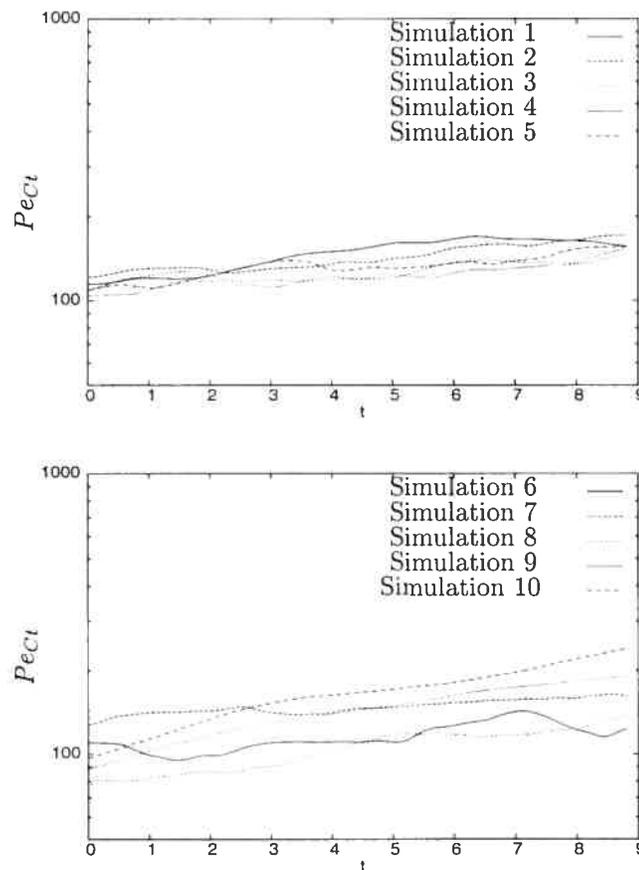


FIG. 4.21 – Nombre de Péclet turbulent du traceur en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

Il se situe entre les valeurs 80 et 250 et varie peu au cours du temps sauf pour les simulations les plus stratifiées 8, 9 et 10. Avec ces valeurs de Pe_{ct} , la diffusion turbulente du traceur domine la diffusion moléculaire.

Comme l'indique la figure 4.22, le profil initial du traceur est Gaussien. Il

est centré en $z_0 = 1/2$ et son écart-type est égal à 0.1. Le traceur est advecté par le flot turbulent et forme une couche de mélange qui s'élargit au cours du temps. La simulation est stoppée avant que cette couche de mélange n'atteigne les couches limites de l'écoulement. La figure 4.23 montre l'évolution de la largeur de la couche de mélange pour les simulations 1 et 10. Cette largeur est définie sur l'intervalle de hauteur dans lequel se trouve 99.9% de la concentration de la masse du traceur, la concentration ayant été préalablement moyennée dans la direction horizontale. Nous constatons que pour la stratification la plus élevée, la largeur n'augmente plus et même décroît légèrement ce que confirme également le profil moyen du traceur représenté sur les figures 4.24. Le traceur commence à diffuser dans les couches limites de la simulation la moins stratifiée à partir de l'instant $t = 8.8$ qui est donc le temps d'arrêt de nos simulations.

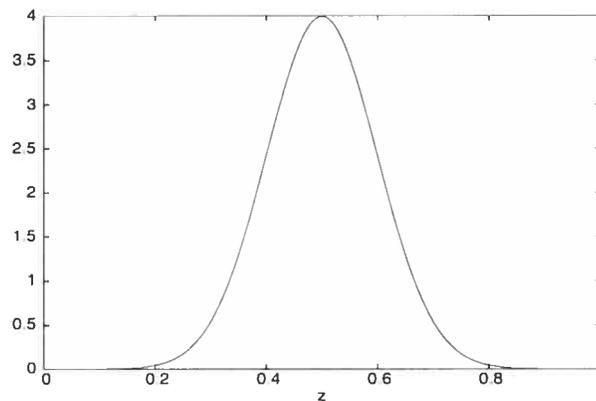


FIG. 4.22 – Profil initial du traceur.

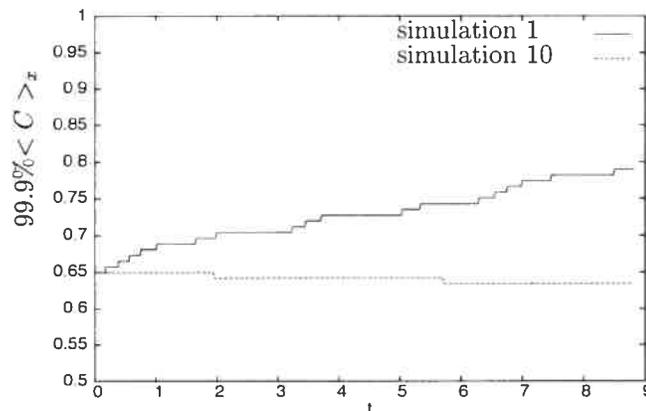
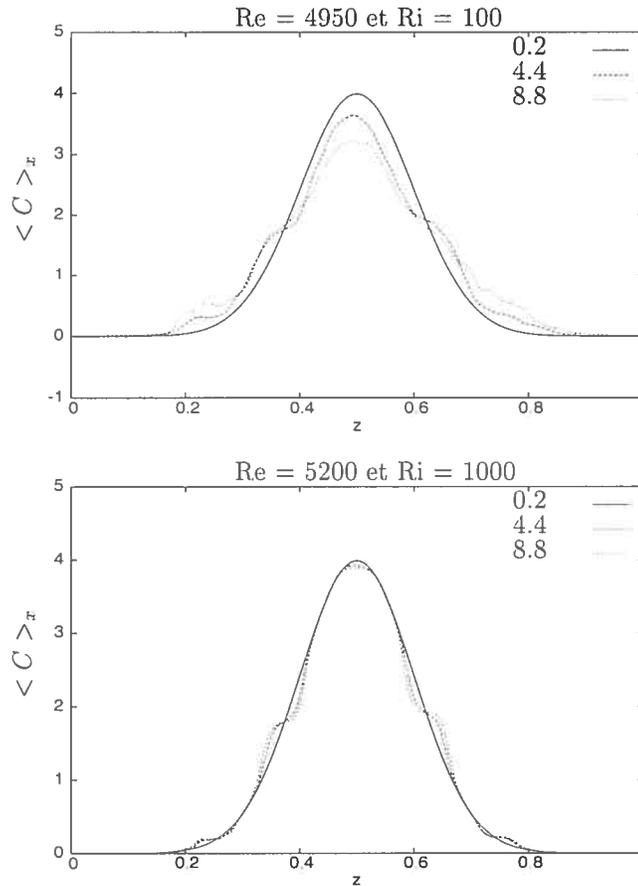


FIG. 4.23 – Evolution de l'épaisseur de la couche de traceur pour les simulations 1 et 10.

Les isocontours du traceur 4.19 et 4.20 montrent que le traceur s'étend sur les trois couches de cisaillement situées au centre de l'écoulement. Sa structure est essentiellement filamentaire. Dans le cas peu stratifié, il est concentré en périphérie des vortex de l'écoulement et dans le cas très stratifié, il borde les couches de

FIG. 4.24 – Profils de la quantité $\langle C \rangle_x$ en fonction de z .

cisaillement.

Le spectre du traceur est calculé de la même manière que les autres spectres à partir des fluctuations de la concentration. D'après le §2.1.2, l'énergie du traceur se comporte comme l'enstrophie de l'écoulement dans la zone inertielle. Sa loi de puissance est proportionnelle à $k^2 E(k)$, ce qui donne : $E_C(k) \propto k^{-2}$, pour $E(k) \propto k^{-4}$. Les spectres des figures 4.25 montrent que la loi de puissance en k^{-2} est compatible avec les résultats numériques pour les modes inertiels $10 < k < 70$.

Nous terminons cette présentation du traceur par un tableau récapitulant les nombres physiques, les nombres sans dimension introduits pour caractériser l'écoulement et le traceur, et l'anisotropie. Les nombres sans dimension et l'anisotropie sont moyennés sur l'intervalle de temps [2.4, 8.8] que nous justifierons ultérieurement.

Sur cet intervalle de temps, nous remarquons que les valeurs moyennes du nombre de Reynolds turbulent restent du même ordre de grandeur, comme celles des nombres de Péclet turbulent, quelle que soit la simulation. Nous observons des fluctuations dues au produit lv qui a tendance à décroître pour les simulations intermédiaires. Comme attendu, les valeurs moyennes du nombre de Froude et du

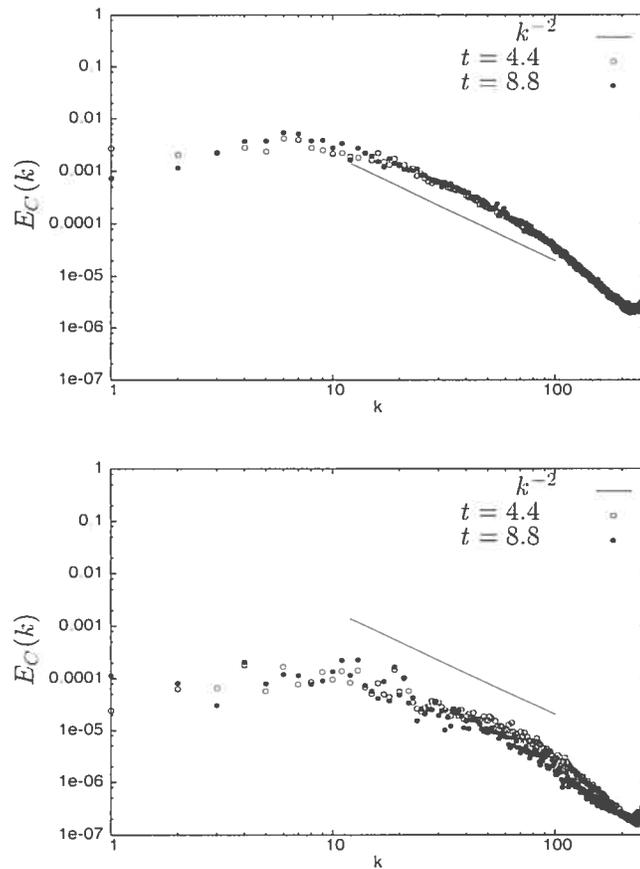


FIG. 4.25 – Spectres des fluctuations du traceur aux instants $t = 4.4$ et $t = 8.8$ pour la simulation 1 en haut et la simulation 8 en bas.

Num. de simul.	Sim1	Sim2	Sim3	Sim4	Sim5	Sim6	Sim7	Sim8	Sim9	Sim10
Re	4950	5000	5000	5050	5050	5100	5150	5200	5400	5555
Ri	100	200	250	300	400	500	700	1000	1500	2000
$\langle Re_t \rangle_t$	153.45	145	130	126.25	141.4	122.4	154.5	114.4	167.4	200
$\langle Ri_g \rangle_t$	0.17	0.07	0.068	0.06	0.04	0.047	0.046	0.063	0.09	0.1
$\langle Fr \rangle_t$	1.43	1.06	0.9	0.8	0.79	0.67	0.65	0.47	0.5	0.5
$\langle Pe_t \rangle_t$	0.031	0.029	0.026	0.025	0.028	0.024	0.03	0.022	0.031	0.036
$\langle Pe_{Ct} \rangle_t$	155	145	130	125	140	120	150	110	155	180
$\langle A \rangle_t$	2.79	5.12	5.79	7.15	8.33	10.54	14.07	18.76	25.14	31.14

TAB. 4.2 – Nombres physiques et valeurs moyennes des nombres sans dimension et de l'anisotropie pour toutes les simulations du tableau 4.1. La notation $\langle \rangle_t$ représente toujours la moyenne temporelle sur un intervalle de temps de durée 6.4.

nombre de Richardson de gradient diminuent quand la stratification augmente. Mais quand cette dernière devient importante, elles s'arrêtent de décroître comme si la stratification et le cisaillement perdaient de leur efficacité. Il se produit un changement de régime qui sera également observé quand nous représenterons le

coefficient de diffusion du traceur en fonction de l'anisotropie au §4.3.2.

Cette seconde partie du chapitre se poursuit maintenant avec la présentation des méthodes utilisées pour calculer le coefficient de diffusion du traceur.

4.3.1 Méthodes de calcul du coefficient de diffusion du traceur

Nous allons introduire les méthodes de calcul des coefficients de diffusion déterminés à partir du champ scalaire du traceur et des particules Lagrangiennes.

Champ scalaire

Le coefficient de diffusion turbulente du traceur est défini comme le rapport entre son flux vertical et son gradient vertical :

$$D_t(z, t) = \frac{\langle v'_z \times C \rangle_x}{\langle \partial_z C \rangle_x} \quad (4.9)$$

où le flux est calculé à partir des fluctuations de la composante verticale de vitesse. L'évolution du flux vertical du traceur est représentée sur les figures 4.27 pour les simulations 1 et 8. Jusqu'à l'instant $t = 2$, le profil du flux comporte en général deux pics bien localisés dans la couche de mélange. Il devient ensuite très irrégulier. Le profil vertical du coefficient de diffusion $D_t(z, t)$ est représenté sur les figures 4.26 à l'instant $t = 4.4$ pour les simulations 1 et 8. Ce coefficient n'est clairement pas constant, ce qui n'est pas étonnant pour un écoulement turbulent. Néanmoins, puisque nous voulons quantifier l'efficacité du transport dans ces écoulements, nous avons cherché une procédure pour déterminer un coefficient de diffusion moyen. Dans ce cadre, il faut noter qu'à l'intérieur des couches cisailées, le gradient vertical du traceur peut s'annuler sans que le flux soit également nul, ce qui donne localement des infinis numériques de $D_t(z, t)$ qui sont clairement visibles sur les figures 4.26. Cette propriété doit être prise en compte pour définir une méthode de calcul du coefficient de diffusion moyen.

Nous avons d'abord essayé de moyenniser le coefficient de diffusion dans des intervalles situés entre les infinis numériques. La largeur de ces intervalles est fixée en se donnant une valeur minimum du gradient vertical du traceur $\langle \partial_z C \rangle_x$ en dessous de laquelle les valeurs de $D_t(z, t)$ sont écartées. Mais en faisant varier cette valeur minimum nous avons constaté que les valeurs moyennes du coefficient de diffusion changent de façon monotone. De plus, la dépendance du coefficient de diffusion avec la stratification est également très sensible à ce paramètre.

Nous avons alors cherché à déterminer la relation entre le flux et le gradient vertical moyen du traceur sous la forme $\langle v'_z \times C \rangle_x = f(\langle \partial_z C \rangle_x)$, plutôt

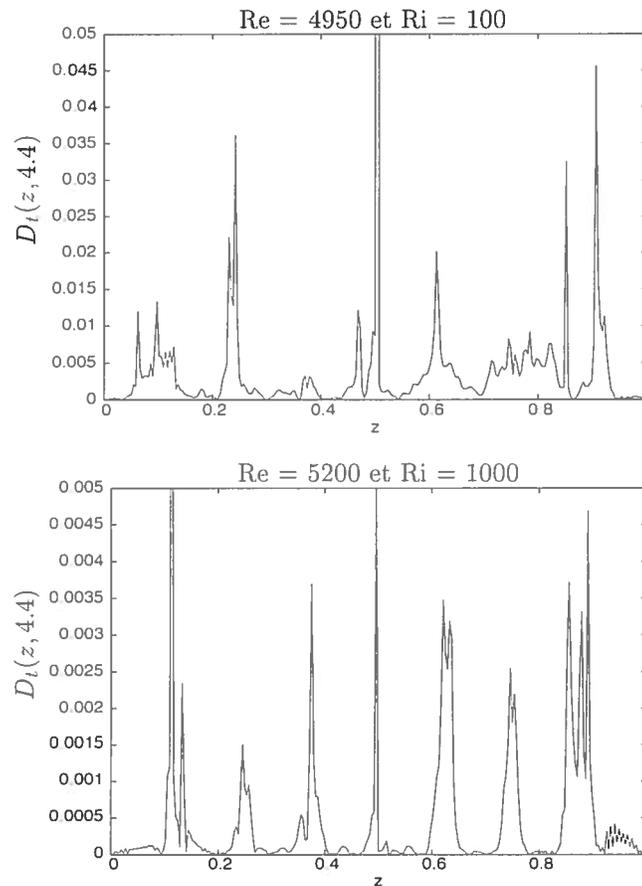
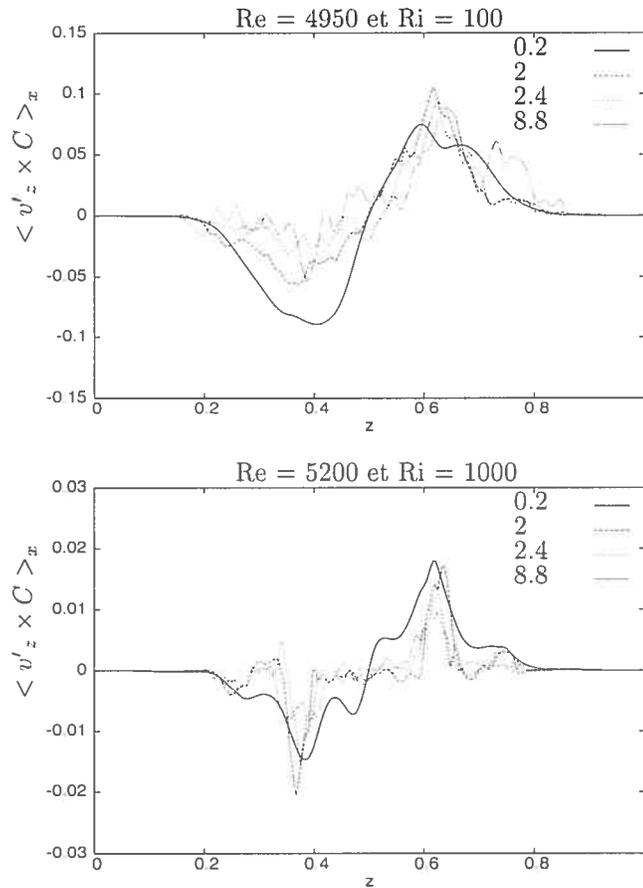


FIG. 4.26 – Profils du coefficient de diffusion en fonction de z à l'instant $t = 4.4$.

que d'essayer de calculer directement des moyennes du coefficient de diffusion. La figure 4.28 montre cette relation lorsque sont considérées toutes les valeurs du gradient vertical moyen et du flux prises à chaque altitude à l'intérieur de la couche de mélange et dans l'intervalle de temps compris entre les instants $t = 2.4$ et $t = 8.8$. Pour obtenir une relation moyenne nous avons ordonné et groupé les valeurs de $\langle \partial_z C \rangle_x$, puis nous avons calculé les valeurs moyennes de $\langle \partial_z C \rangle_x$ et de $\langle v'_z \times C \rangle_x$ dans chacun de ces groupes. Les figures 4.29 représentent cette relation moyenne pour toutes les simulations dans le cas où les valeurs sont moyennées par groupe de 1500.

Nous remarquons immédiatement que la relation $\langle v'_z \times C \rangle_x = f(\langle \partial_z C \rangle_x)$ n'est pas strictement linéaire et qu'elle présente une très forte variation au voisinage de l'origine. Ceci permet de comprendre la difficulté rencontrée lors des moyennes effectuées directement sur $D_l(z, t)$. En effet, en toute première approximation, la relation $\langle v'_z \times C \rangle_x = f(\langle \partial_z C \rangle_x)$ peut être modélisée par deux fonctions linéaires avec une discontinuité en zéro :


 FIG. 4.27 – Profils du flux du traceur en fonction de z à plusieurs instants.

$$\begin{cases} \langle v'_z \times C \rangle_x = a \langle \partial_z C \rangle_x + b, & \text{si } \langle \partial_z C \rangle_x \text{ est positif} \\ \langle v'_z \times C \rangle_x = a \langle \partial_z C \rangle_x - b, & \text{si } \langle \partial_z C \rangle_x \text{ est négatif} \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous constatons alors que le coefficient de diffusion défini comme la pente : $a \pm b / \langle \partial_z C \rangle_x$, dépend de façon sensible de la valeur minimale choisie pour le gradient vertical moyen. Pour éliminer cette contrainte, nous allons déterminer un coefficient de diffusion moyen en calculant la pente moyenne de la relation $\langle v'_z \times C \rangle_x = f(\langle \partial_z C \rangle_x)$. Étant donné que les courbes des figures 4.29 sont approximativement symétriques par rapport à l'origine, le coefficient de diffusion moyen est défini comme le rapport entre les valeurs moyennes des valeurs absolues du flux moyen et du gradient vertical moyen du traceur :

$$\mathcal{D}_t = \frac{\langle |\langle v'_z \times C \rangle_x| \rangle_{Ct}}{\langle |\langle \partial_z C \rangle_x| \rangle_{Ct}} \quad (4.11)$$

où la moyenne est réalisée sur toutes les valeurs du flux et du gradient vertical moyen localisées dans la couche de mélange et dans l'intervalle de temps [2.4, 8.8]. Précisons aussi que l'intervalle de temps utilisé pour le calcul des coefficients de diffusion débute après que le traceur ait évolué sur plusieurs temps de retournement l/v , où les échelles caractéristiques l et v sont définies au §4.2.3. En effet, l'instant $t = 2.4$ correspond déjà à une cinquantaine de temps de retournement l/v . De plus, il faut également noter que la moyenne temporelle est effectuée sur une durée égale à 6.4 qui représente environ 120 temps de retournement. En utilisant la définition 4.11, nous avons obtenu une valeur du coefficient de diffusion turbulente pour chaque simulation du tableau 4.2.

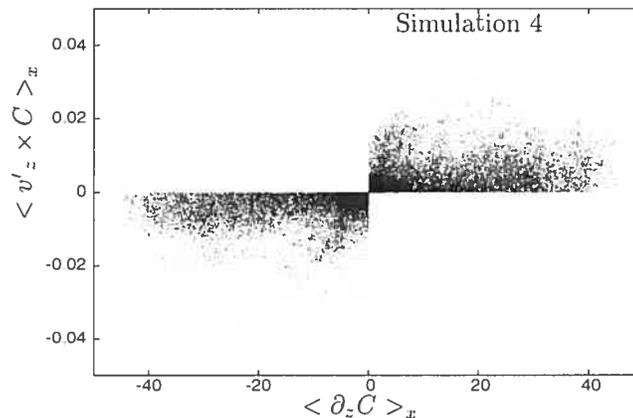


FIG. 4.28 – Représentation de toutes les valeurs du flux moyen du traceur en fonction de son gradient vertical moyen pour la simulation 4.

Les particules Lagrangiennes

Les particules Lagrangiennes sont initialement positionnées aux points de grille et la moyenne n'est effectuée que sur celles situées en dehors des couches limites ce qui représente 37894 particules. Les figures 4.30 montrent l'évolution du déplacement vertical moyen : $\langle (z - z_0)^2 \rangle_p^{1/2}$, en fonction du temps pour toutes les simulations du tableau 4.2. Le coefficient de diffusion Lagrangien, tel que défini au chapitre 2 :

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d \langle (z - z_0)^2 \rangle_p}{dt} \quad (4.12)$$

est calculé à partir de ces courbes, puis moyenné sur l'intervalle de temps [1.6, 8].

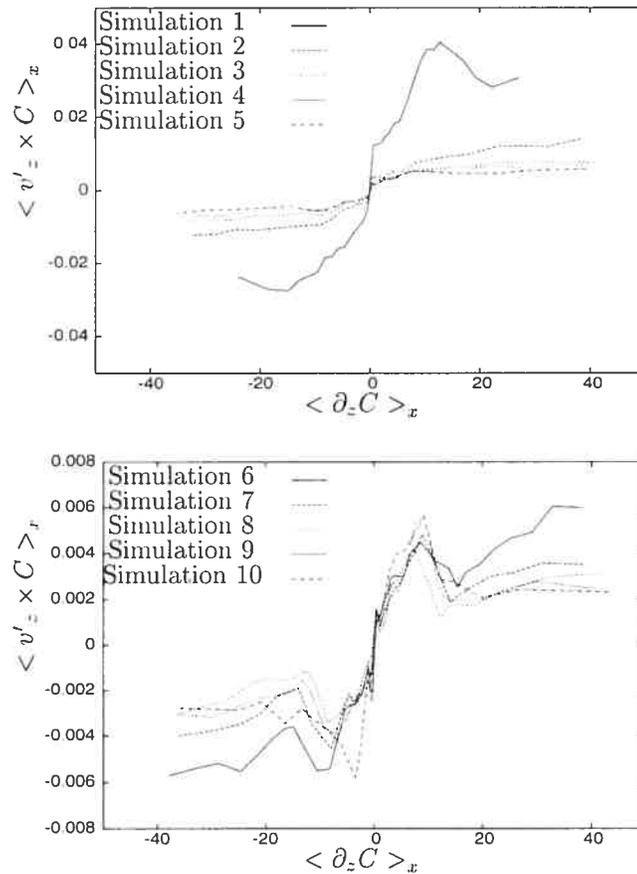


FIG. 4.29 – Représentation du flux moyen du traceur en fonction de son gradient vertical moyen pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1.

Les particules Lagrangiennes ne sont pas introduites dans l'écoulement en même temps que le traceur, mais plus tard à l'instant $t = 0.8$ pour optimiser la durée de la simulation. L'intervalle de temps $[1.6, 8]$ correspond à celui choisi pour calculer le coefficient de diffusion turbulente \mathcal{D}_t .

4.3.2 Relation entre le coefficient de diffusion du traceur et l'anisotropie

Comme nous l'avons déjà annoncé, cette étude fait suite aux travaux de Vincent & al. [66] que nous rappelons brièvement. Dans leurs écoulements, le champ de vitesse n'est pas solution des équations de Navier-Stokes, mais c'est un champ aléatoire Gaussien. Son spectre est la somme d'un spectre de Kolmogorov en $k^{-5/3}$ et d'un spectre en k^{-3} représentant la turbulence bidimensionnelle. En modifiant la contribution de la seconde composante du spectre, l'anisotropie peut prendre des valeurs supérieures à 1. Avec ce champ de vitesse, ils résolvent l'équation de transport du traceur et définissent un coefficient de diffusion turbulente qui est divisé par le produit des échelles de longueur et de vitesse déterminées

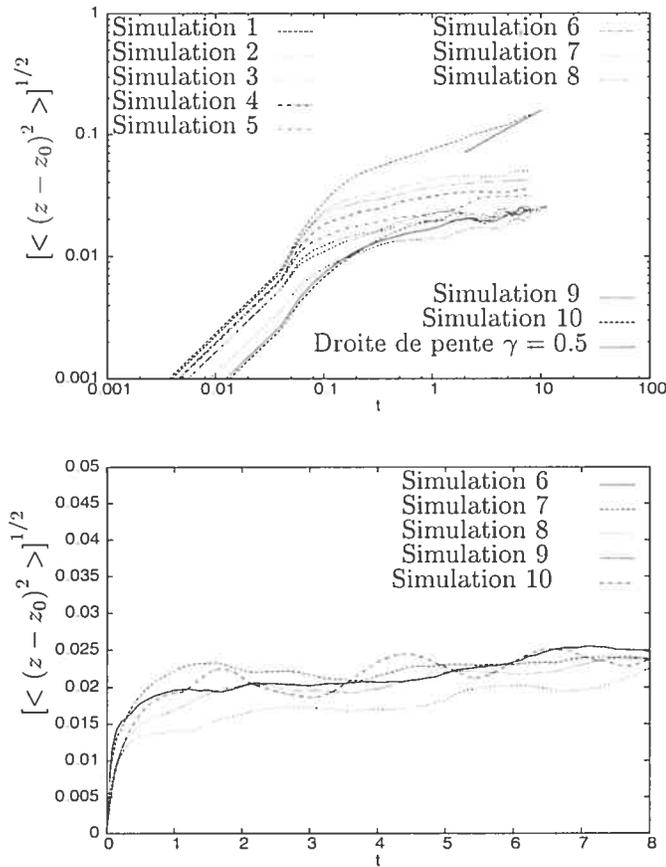


FIG. 4.30 – Déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes en fonction du temps pour l'ensemble des simulations du tableau 4.2 sur la figure du haut et pour les simulations les plus stratifiées sur la figure du bas.

à partir du spectre vertical. Ils comparent leur coefficient de diffusion à celui qui serait calculé à partir du modèle de longueur de mélange. Ils constatent que le rapport entre le coefficient de diffusion turbulente et le produit des échelles verticales de longueur et de vitesse est relié à l'anisotropie par une loi de puissance d'exposant -1. Ils montrent ainsi que pour un spectre vertical donné de l'écoulement turbulent, le transport vertical du traceur peut être réduit en augmentant la turbulence horizontale. En particulier, en l'absence de turbulence horizontale, l'anisotropie est égale à 1 et le coefficient de diffusion turbulente s'identifie au produit des échelles verticales de longueur et de vitesse.

Nos échelles caractéristiques sont calculées dans l'espace physique. L'échelle de vitesse \mathcal{V}_z est égale à la racine de la moyenne quadratique des fluctuations de la composante de vitesse v_z . L'échelle de longueur \mathcal{L}_z est une échelle intégrale qui est définie de manière à éliminer les effets de symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_z(t) = \sqrt{\langle v'_z{}^2 \rangle} \\ \mathcal{L}_z(t) = \frac{1}{(z_{max}-1/2)} \int_{z=1/2}^{z_{max}} \mathcal{L}_z(z_1, t) dz_1, \\ \text{avec } \mathcal{L}_z(z_1, t) = \frac{1}{\langle v'_z{}^2 \rangle} \int_0^{1-z_1} \langle v'_z(z_1) v'_z(z_1 + z_2) \rangle_x dz_2 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Pour alléger l'écriture, nous avons omis la dépendance en temps dans certains membres de droite. La moyenne verticale est toujours calculée en éliminant les zones de l'écoulement où se développent les couches limites. Néanmoins, pour le coefficient de diffusion Lagrangien, la borne z_{max} du domaine sur lequel est réalisé la moyenne est une constante. Pour le coefficient de diffusion turbulente, la borne z_{max} est égale à la borne supérieure de la couche de mélange du traceur et varie au cours du temps. Ces deux manières de calculer la moyenne verticale modifient légèrement les valeurs de l'échelle verticale de vitesse à faible stratification, mais n'affectent pas celles de l'échelle verticale de longueur comme le montrent les figures 4.31. Sur les figures 4.32 et 4.33, nous avons représenté les deux échelles caractéristiques, \mathcal{L}_z et \mathcal{V}_z , en fonction du temps et nous remarquons que leur évolution reste statistiquement stationnaire. La diminution de l'échelle verticale de vitesse quand la stratification augmente est graduelle tandis que l'échelle verticale de longueur décroît seulement à partir de la simulation 8. Pour les simulations allant de 1 à 7, nous remarquons que \mathcal{L}_z a une valeur très proche de celle de la demi-hauteur des couches de cisaillement, soit 0.07.

Les coefficients de diffusion turbulente et Lagrangien sont maintenant divisés par leur produit ($\mathcal{L}_z \mathcal{V}_z$) respectif, préalablement moyenné sur l'intervalle temporel [2.4, 8.8]. Les rapports sont tracés en fonction de l'anisotropie moyenne sur la figure 4.34. Pour le coefficient de diffusion Lagrangien, les valeurs de l'anisotropie moyenne proviennent du tableau 4.2. Pour le coefficient de diffusion turbulente, elles sont calculées en moyennant verticalement sur l'épaisseur de la couche de mélange du traceur. Elles restent très proches de celles présentes dans le tableau 4.2 sauf pour le cas le moins stratifié ce que confirme la figure 4.34.

Nous achevons ce chapitre avec l'interprétation des résultats.

4.3.3 Interprétation des résultats

Nous remarquons sur la figure 4.34 que l'évolution est similaire pour les deux coefficients de diffusion et que deux régimes apparaissent. Les rapports, $\mathcal{D}_t / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$ et $D_L / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$, sont inférieures à l'unité. Pour des anisotropies moyennes inférieures ou égales à 10, ils diminuent quand l'anisotropie moyenne augmente. Dès que $\langle A \rangle_t > 10$, ils se mettent à croître.

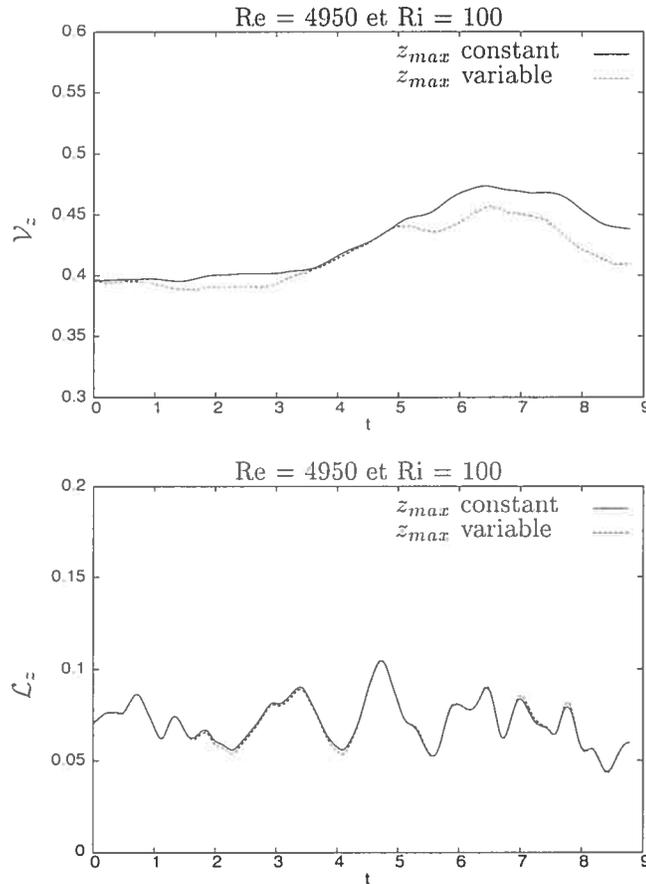


FIG. 4.31 – Echelles verticales de vitesse et de longueur pour les deux versions de moyenne verticale et pour la simulation la moins stratifiée.

Vincent & al. [66] trouvent que leur rapport $D_{Tz}/(l_z v_z)$ est proportionnel à $1/A$ pour $A > 3$. Dans notre étude, comme le coefficient de diffusion turbulente est proche par sa définition de celui de Vincent & al., nous avons cherché une dépendance en $1/A^\zeta$ du rapport $\mathcal{D}_t / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$. Cette démarche ne peut pas également être menée avec le coefficient de diffusion Lagrangien. En effet, sa définition est différente de celle du coefficient \mathcal{D}_t . Il ne tient pas compte de la diffusion atomique du traceur ce qui pourrait expliquer l'écart observé entre les deux rapports sur la figure 4.34. Durant le premier régime, pour $5 \ll A \rangle_t < 14$, le rapport $\mathcal{D}_t / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$ peut être approximé par une loi de puissance et la valeur de l'exposant ζ que nous obtenons est égale à 0.76, valeur qui est inférieure à celle de Vincent & al.. Pour des anisotropies moyennes inférieures à 5, la figure 4.34 montre que les deux rapports semblent tendre vers la valeur 1 pour une anisotropie de 1, mais le manque de simulations dans cette zone d'anisotropies ne permet pas de conclure pour le moment.

Nous remarquons que sur l'intervalle d'anisotropies $5 \ll A \rangle_t < 14$, la diminution du flux vertical $\langle |v'_z \times C \rangle_x \rangle_{Ct}$ est plus importante que celle des fluctuations de vitesse verticale $\langle \mathcal{V}_z \rangle_t$ comme l'indique la figure 4.35. Vincent

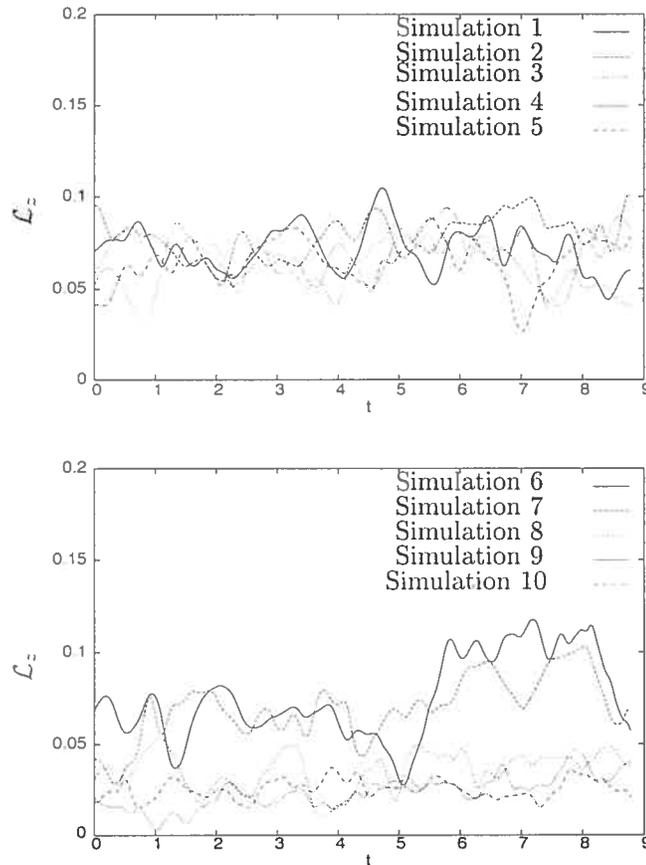


FIG. 4.32 – Représentation de l'échelle verticale de longueur \mathcal{L}_z pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1 dans le cas z_{max} constant.

& al. [66] interprètent la réduction du transport vertical par une diminution des fluctuations du traceur due à une forte turbulence horizontale. Ici, la même interprétation est possible puisque le transport horizontal est très supérieur au transport vertical mais la nature de ce transport est différente. En effet, dans l'écoulement synthétique de Vincent & al. [66], la forte anisotropie est due à des fluctuations de vitesses alors que dans nos simulations, c'est le cisaillement de la vitesse horizontale moyenne qui assure la forte anisotropie. L'autre explication envisageable à la réduction du transport vertical est que les fluctuations verticales du traceur ne peuvent pas se développer en présence d'une forte anisotropie des vitesses. Supposons que l'écoulement présente des alignements de vortex à peu près semblables et permanents. Si en effet la vitesse verticale reste cohérente sur une échelle horizontale donnée et que la vitesse horizontale peut être augmentée sans modifier cette échelle de corrélation et sans créer un mouvement d'ensemble de ces structures, le temps passé dans la structure cohérente diminue quand la vitesse horizontale augmente. Le temps de corrélation Lagrangien diminue en conséquence et donc le transport vertical. Cette idée a par exemple été formalisée par Horntrop et Majda [25] dans le cas très simple d'une vitesse horizontale

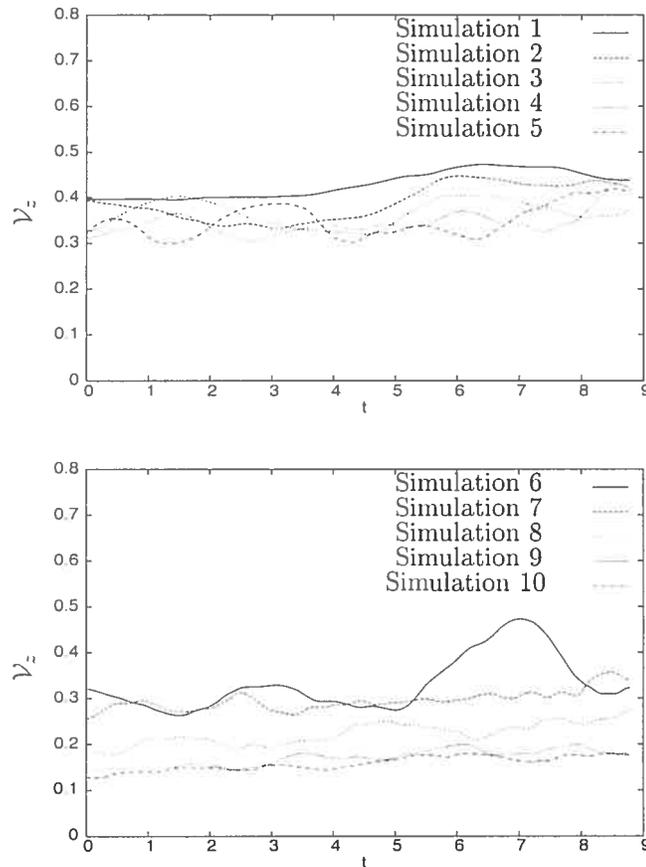


FIG. 4.33 – Représentation de l'échelle verticale de vitesse \mathcal{V}_z pour l'ensemble des simulations du tableau 4.1 dans le cas z_{max} constant.

uniforme associée à un champ de vitesse verticale statistiquement stationnaire et Gaussien, ne dépendant que de la coordonnée horizontale. Ils trouvent que le transport vertical décroît comme $1/A$. Dans nos simulations, les vortex sont maintenus pratiquement immobiles grâce aux amplitudes symétriques de l'accélération F , alors que le cisaillement de vitesse augmente avec la stratification. De ce fait, dans les couches situées entre les zones de fort cisaillement où l'anisotropie est importante, l'effet décrit par Horntrop et Majda [25] pourrait avoir lieu.

Dans ce premier régime, la réduction du transport vertical peut être analysée en fonction de la stratification. Un coefficient de diffusion proportionnel à $\langle \mathcal{V}_z \rangle_t / N$ a par exemple été proposé [55] dans la littérature. La figure 4.36 représentant $\mathcal{D}_t N / \langle \mathcal{V}_z \rangle_t^2$ en fonction de l'anisotropie montre bien un plateau dans le domaine d'anisotropie $5 < \langle A \rangle_t < 14$, et il est possible d'établir simplement un lien entre le coefficient de diffusion turbulente et l'anisotropie. En effet, nous avons vu que le nombre de Richardson de gradient garde une valeur à peu près constante dans ces simulations. Or, ce nombre peut être approximé de la manière suivante : $Ri_g \simeq N^2 \delta^2 / \Delta U^2$, où δ est la demi-hauteur de la couche de cisaillement et ΔU l'écart de vitesse sur cette demi-hauteur, ce qui donne :

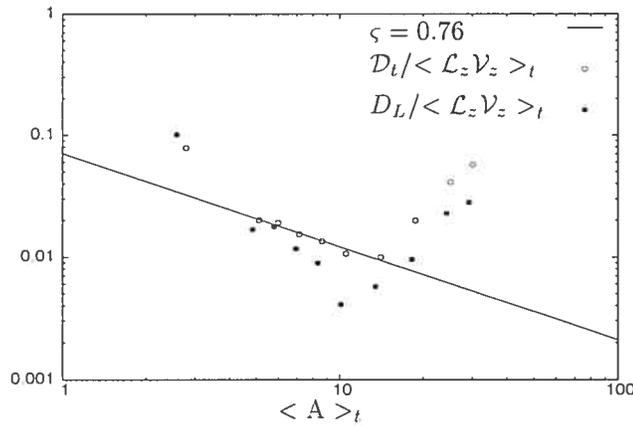


FIG. 4.34 – Dépendance du coefficient de diffusion du traceur en fonction de l'anisotropie moyenne.

$N \propto \Delta U / \delta$. De plus, nous avons vu que $\langle \mathcal{L}_z \rangle_t$ a une valeur très proche de δ . Donc, l'expression : $\mathcal{D}_t \propto \langle \mathcal{V}_z \rangle_t^2 / N$, peut aussi s'écrire :

$$\frac{\mathcal{D}_t}{\delta \langle \mathcal{V}_z \rangle_t} \propto \frac{\langle \mathcal{V}_z \rangle_t}{\Delta U} \quad (4.14)$$

Cette relation correspond bien à la dépendance en $1/A$ du coefficient de diffusion mentionnée précédemment.

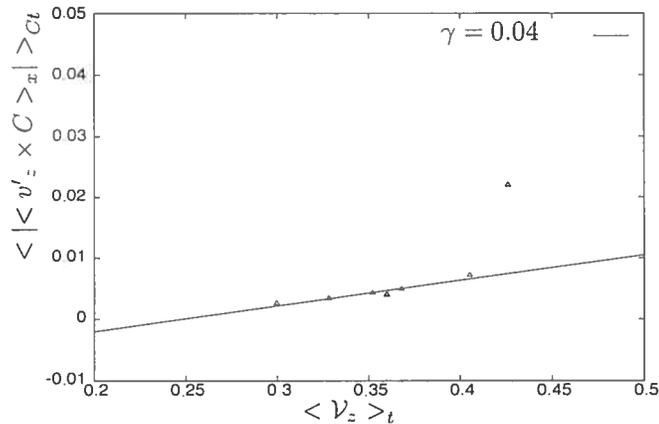


FIG. 4.35 – Flux en fonction de l'échelle verticale de vitesse moyennée sur l'intervalle de temps [2.4, 8.8].

Nous décrivons maintenant le deuxième régime de transport. Les rapports $\mathcal{D}_t / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$ et $D_L / \langle \mathcal{L}_z \mathcal{V}_z \rangle_t$, commencent à croître à partir de l'anisotropie moyenne égale à 10. Dans ce régime, le flux vertical $\langle v'_z \times C \rangle_x$ s'arrête de décroître et n'évolue presque plus comme l'indiquent les figures 4.29, alors que

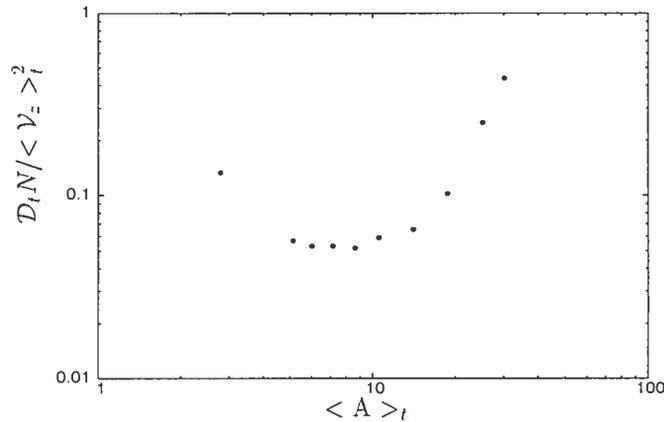


FIG. 4.36 – Représentation de $\mathcal{D}_t N / \langle \mathcal{V}_z \rangle_t^2$ en fonction de l’anisotropie.

dans le même temps l’anisotropie moyenne augmente significativement. Nous en déduisons que le transport vertical du traceur ne semble plus être dépendant de l’anisotropie. Ce régime n’avait pas été observé par Vincent & al. [66] alors que les anisotropies atteintes étaient bien supérieures à 10. Cette différence peut avoir plusieurs origines, étant donné les différences entre les deux types de simulation : La dimensionnalité des écoulements, le champ de vitesse solution ou non des équations de Navier-Stokes, la présence d’un écoulement moyen et d’une stratification stable dans nos simulations. Nous verrons néanmoins par la suite que l’absence de stratification stable est probablement la raison pour laquelle les simulations de Vincent & al. [66] n’ont pas montré ce second régime.

Nous abordons maintenant l’interprétation du déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes représenté en fonction du temps sur les figures 4.30. A partir de l’instant $t = 1$, le régime transitoire est terminé. Comme l’indique la droite de pente $\gamma = 0.5$ représentant la diffusion normale, le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes montre un comportement sous-diffusif pour toutes les stratifications considérées. La croissance du déplacement vertical moyen devient de plus en plus faible au fur et à mesure que la stratification augmente. La figure 4.30 du bas montre que pour les simulations les plus stratifiées, le déplacement vertical moyen tend vers une évolution stationnaire en oscillant autour d’une valeur moyenne qui varie peu en fonction de la stratification, ce que confirment les valeurs du tableau 4.3 qui contient le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes moyenné sur l’intervalle temporel [1.6, 8]. Ce phénomène d’arrêt de la dispersion verticale des particules est bien illustré par l’évolution de la fonction de distribution des déplacements verticaux des particules représentée sur la figure 4.37. Cette fonction de distribution est initialement un pic de Dirac. Si la dispersion verticale était diffusive ce pic évoluerait vers une Gaussienne. Mais ici, les fonctions de distribution ne sont pas Gaussiennes et, dans les cas les plus stratifiés, l’élargissement initial des fonctions de distribution s’arrête après quelques dizaines de temps de retournement.

Nous avons trouvé que ce comportement avait déjà été observé par Kimura & al. [27] à forte stratification. Ces auteurs ont réalisé des simulations numériques directes tridimensionnelles de turbulence libre, initialement homogène et isotrope, stablement stratifiée et ensemencée de particules Lagrangiennes. Ils ont constaté qu'après une phase transitoire, le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes s'arrêtait de croître et oscillait autour d'une valeur moyenne. Cette valeur moyenne décroît avec la stratification initiale. Les fonctions de distribution des déplacements verticaux montrées par Kimura & al. [27] sont très similaires aux nôtres. Ces résultats ont depuis été confirmés par les simulations de Kaneda & al. [26]. Ces auteurs ont également proposé un modèle pour prédire la valeur asymptotique du déplacement vertical moyen en fonction de la stratification initiale. Le point de départ de ce modèle est l'approximation de la "Rapid Distortion Theory" qui permet de justifier la linéarisation des équations pour les plus grandes stratifications et pour un intervalle de temps limité. Kaneda & al. [26] utilisent en plus la conjecture de Corrsin qui permet de relier les corrélations de vitesses Lagrangiennes aux corrélations de vitesses Eulériennes et en déduisent la valeur asymptotique du déplacement vertical moyen. Parallèlement, Nicolleau & al. [46] ont également proposé un modèle basé sur l'approximation de la "Rapid Distortion Theory". Mais à la différence de Kaneda & al. [26], ils ne font pas d'hypothèse supplémentaire et étudient le transport en faisant le suivi, au moyen de simulations numériques, des particules Lagrangiennes dans le champ de vitesse donné par cette approximation. Ils trouvent que le déplacement vertical moyen tend vers une valeur limite de l'ordre de $\frac{v}{N}$, où v est la racine de la vitesse quadratique moyenne.

Nous avons calculé cette quantité moyennée sur l'intervalle de temps [2.4, 8.8] dans nos simulations et nous trouvons qu'elle concorde remarquablement bien avec les valeurs : $\langle \langle (z - z_0)^2 \rangle_p^{1/2} \rangle_t$, du tableau 4.3 qui ont été moyennées sur l'intervalle de temps [1.6, 8]. En revanche, la valeur du déplacement vertical maximal, v_z/N , donnée par le modèle de Csanady [15] décrit dans l'introduction n'est pas en accord avec nos résultats.

Ri	$\frac{\langle v \rangle_t}{N}$	$\langle \langle (z - z_0)^2 \rangle_p^{1/2} \rangle_t$
500	0.0267	0.0222
700	0.0272	0.0227
1000	0.018	0.0184
1500	0.02	0.0212
2000	0.02	0.0223

TAB. 4.3 – Comparaison entre la valeur asymptotique $\frac{\langle v \rangle_t}{N}$ et le déplacement vertical moyen des particules Lagrangiennes $\langle \langle (z - z_0)^2 \rangle_p^{1/2} \rangle_t$.

Dans le régime d'écoulement fortement stratifié et non-cisaillé considéré par Kaneda & al. [27] et Nicolleau & al. [46], ce sont les ondes de gravité (cf. annexe A)

qui dominant l'écoulement. D'ailleurs, Kaneda & al. [27] attribuent la réduction et l'arrêt du transport vertical à un processus de mélange de phases de ces ondes. Comme dans nos écoulements, les ondes détectées ont une amplitude inférieure à 2×10^{-5} et donc ne dominant pas, cette explication n'est pas favorisée.

Pour se faire une idée du trajet des particules dans notre écoulement, nous avons représenté à la figure 4.38, l'altitude $z(t)$ de particules Lagrangiennes durant l'intervalle de temps [6.4, 8] pour toutes les simulations du tableau 4.2. Pour distinguer la position des particules par rapport aux couches de cisaillement, nous avons superposé le profil de la vitesse horizontale $\langle v_x \rangle_x$ moyenné sur le même intervalle de temps. A partir de la simulation 6, nous observons clairement que les particules qui se trouvent entre les couches de fort cisaillement ont des déplacements verticaux très faibles alors que les particules qui passent dans les zones de fort cisaillement peuvent avoir des déplacements verticaux de l'ordre de la hauteur de la couche de cisaillement. Ce phénomène est en accord avec les cartes de vorticité que nous avons montrées et qui mettent en évidence dans les cas fortement stratifiés, l'apparition d'une couche sans vortex entre les couches de cisaillement. Cette couche semble assurer le blocage de la dispersion verticale alors que la figure 4.8 montre que la vitesse verticale dans cette région n'est pas significativement plus faible que dans les zones cisailées.

Une autre question intéressante concerne le rôle de la diffusion thermique dans le transport vertical. Nous avons en effet vu que Pearson et al. [49] prévoit qu'après avoir atteint un plateau, le déplacement vertical moyen croît de nouveau sous l'effet de la diffusivité thermique qui diminue l'intensité de la force d'Archimède exercée sur les éléments fluides. Dans notre cas, nous avons remarqué lors de l'analyse du tableau 4.2, que les valeurs moyennes du nombre de Froude et de Richardson de gradient évoluent de manière cohérente et présentent également deux régimes en fonction de la stratification. Le second régime laisse penser que la stratification et le cisaillement perdent de leur efficacité. Imaginons que les fluctuations de température soient très atténuées par la diffusion thermique, alors la stratification initiale de l'écoulement serait involontairement réduite par la diffusion thermique ce qui pourrait expliquer la croissance des valeurs moyennes du nombre de Froude et de Richardson de gradient, et la diffusion thermique contribuerait à la diffusion verticale du traceur.

D'autre part, une stratification importante doit induire une turbulence très anisotrope, mais seulement dans le cas où celle-ci ne serait pas laminée par le cisaillement horizontal qui est également très élevé. Dans cette éventualité, dans les zones cisailées de l'écoulement, les vortex se connectent les uns aux autres et ne sont plus discernables. L'échelle horizontale de longueur se met à croître de manière anormale ce qui pourrait expliquer la croissance des valeurs moyennes des nombres physiques $\langle Re_t \rangle_t$, $\langle Pe_t \rangle_t$ et $\langle Pe_{Ct} \rangle_t$, constatée dans le tableau 4.2 aux plus fortes stratifications. L'élément fluide contenant le traceur, ou la particule Lagrangienne, se déplace alors dans la direction horizontale sans être advecté et il n'y a plus de transport turbulent vertical. La diffusion atomique

redevient alors non-négligeable et intervient dans la diffusion du traceur. Même si la figure 4.37 est compatible avec une croissance très faible du déplacement vertical, il nous est actuellement difficile de conclure sans de nouvelles simulations effectuées sur des durées beaucoup plus longues.

Il n'en reste pas moins que les déplacements verticaux moyens sont très fortement réduits par une forte stratification stable. Et c'est justement l'absence de stratification stable dans les simulations de Vincent et al. [66] qui explique la différence entre nos résultats et les leurs.

Avant de conclure, nous revenons sur la figure 4.34 pour commenter le fait que même si l'évolution des deux coefficients en fonction de l'anisotropie est similaire, le coefficient de diffusion Lagrangien est toujours inférieur au coefficient de diffusion turbulente. Comme nous l'avons déjà signalé, le coefficient de diffusion turbulente tient compte des effets de la diffusion atomique du traceur, mais pas le coefficient de diffusion Lagrangien. Bien que le nombre de Péclet turbulent du traceur : $Pe_{Ct} = lv/D$, soit toujours supérieur à 100, le nombre de Péclet effectif D_L/D peut devenir de l'ordre de 1 de telle sorte que l'effet de la diffusion atomique du traceur peut expliquer la différence qui apparaît entre les deux coefficients de diffusion.

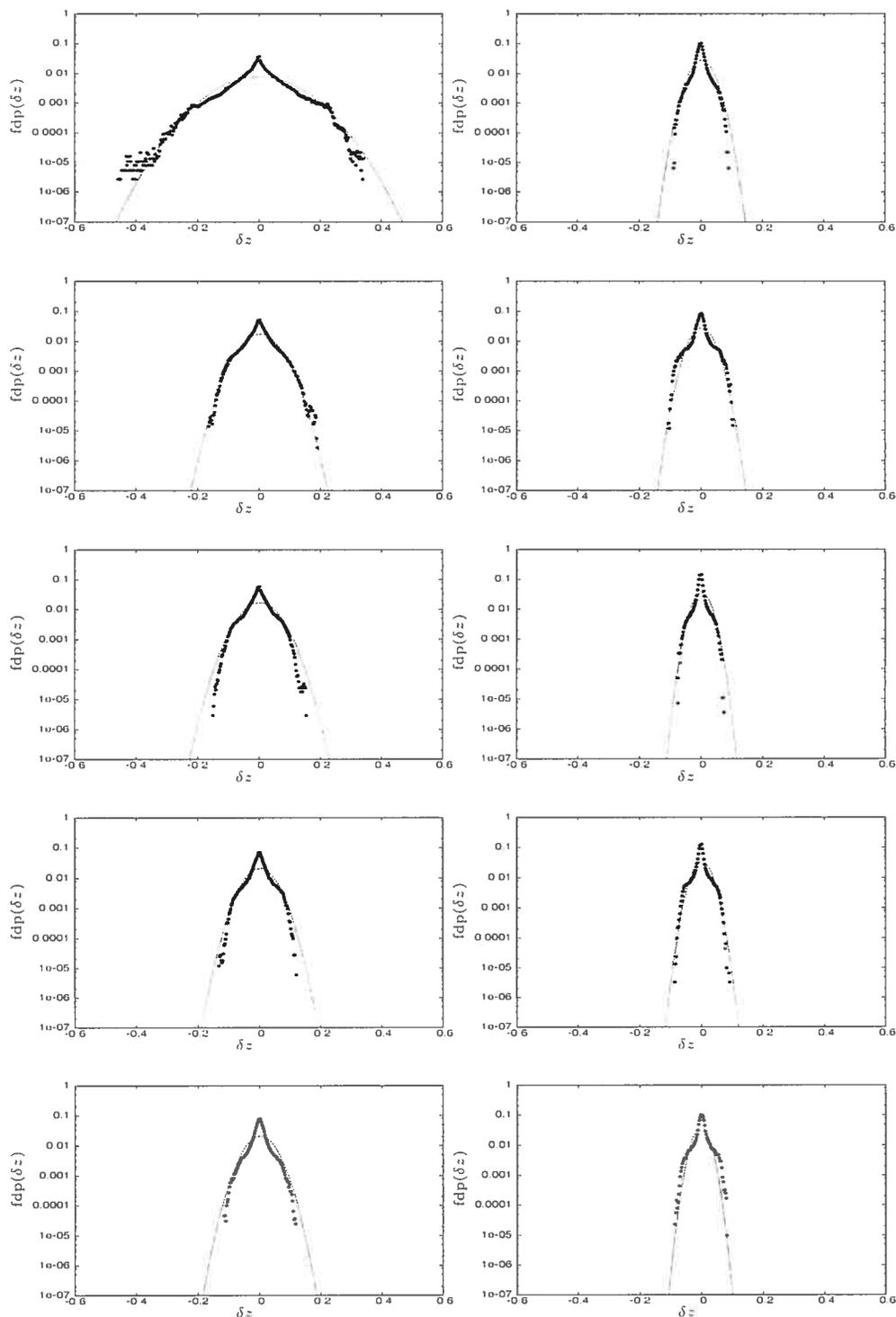


FIG. 4.37 – Approximation Gaussienne de la fonction de distribution de probabilité notée f_{dp} du déplacement vertical : $\delta z = (z - z_0)$, des particules Lagrangiennes à l’instant $t = 2.4$ et pour toutes les simulations du tableau 4.2.

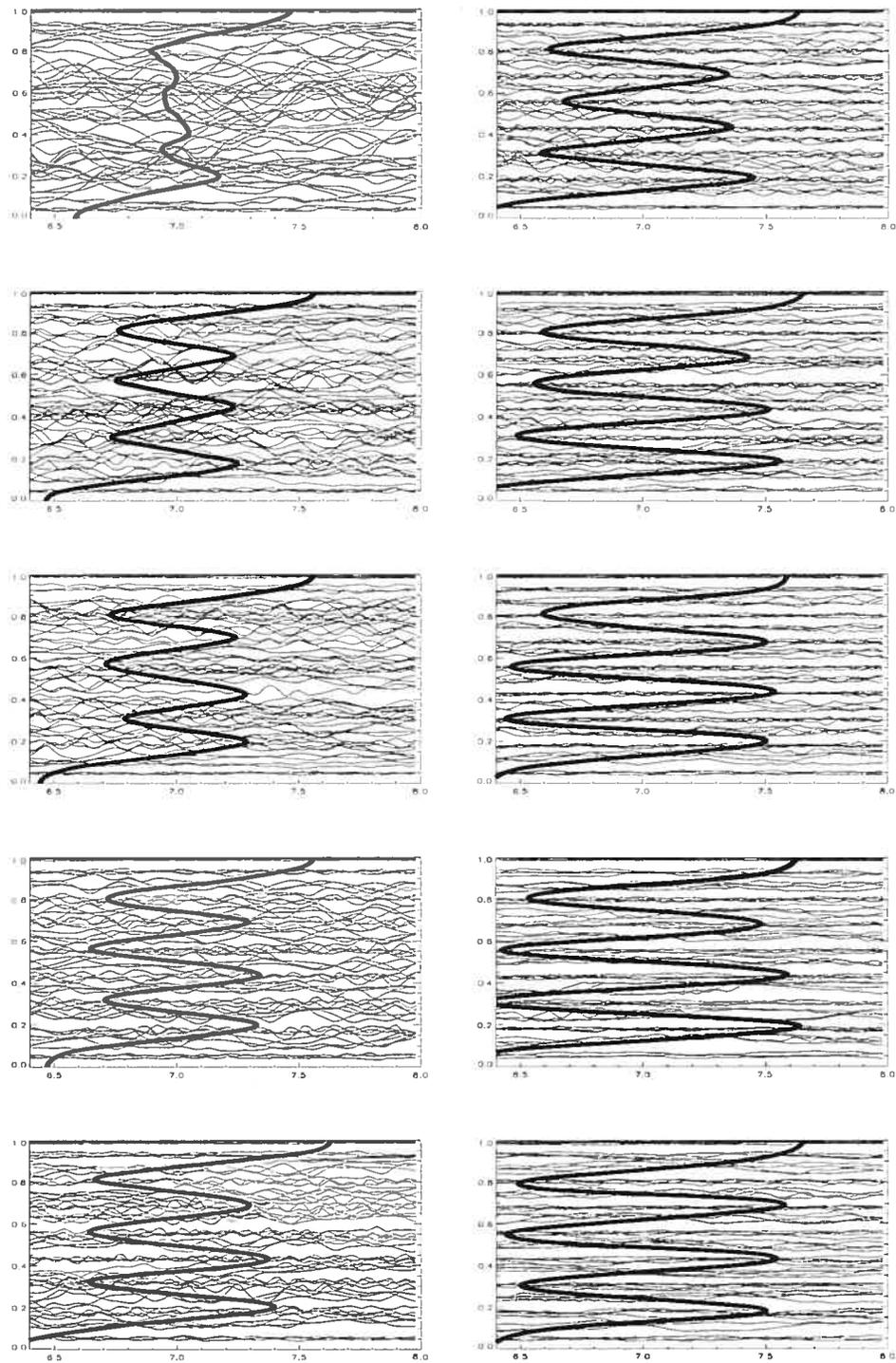


FIG. 4.38 – Superposition du profil de la vitesse horizontale $\langle v_x \rangle_x$ moyenné sur l'intervalle de temps [6.4, 8] et de l'altitude $z(t)$ des particules Lagrangiennes durant l'intervalle de temps [6.4, 8] pour toutes les simulations du tableau 4.2. Les altitudes initiales des particules représentées sont régulièrement réparties sur la hauteur totale de l'écoulement.

Chapitre 5

Conclusion

Le modèle “standard” qui retrace l’évolution des étoiles sur la séquence principale est monodimensionnel. Il suppose aucun transport des éléments chimiques dans la zone radiative, une zone convective bien mélangée, pas de rotation de l’étoile et pas de champ magnétique. Les observations indiquent que les étoiles de la séquence principale présentent des abondances anormales d’éléments chimiques dans leur atmosphère. Pour ne citer que les plus connues, un déficit en lithium est constaté dans les atmosphères d’étoiles de type G et F, des proportions d’éléments lourds en désaccord avec les taux de réactions nucléaires sont détectées à la surface des étoiles chaudes en rotation lente et présentant un fort champ magnétique. Ces anomalies d’abondances ne sont pas restituées par le modèle standard ce qui suggère l’existence d’un transport des éléments chimiques dans les zones radiatives d’étoiles. Nous avons vu dans l’introduction qu’il peut être de différents types et que dans cette thèse, nous nous restreignons à l’étude du transport d’éléments chimiques non réactifs par les mouvements turbulents induits par la rotation différentielle. Des modèles connus comme celui de J-P. Zahn [70] proposent un coefficient de diffusion turbulente empirique qui permet la restitution de certaines anomalies d’abondances par le modèle “standard”. Néanmoins, nous avons toujours besoin de mieux comprendre les processus physiques de la diffusion turbulente pour reproduire en général les anomalies d’abondances observées dans les atmosphères d’étoiles et l’évolution détaillée de la rotation différentielle.

Durant cette thèse, nous avons étudié un écoulement très simplifié par rapport à ceux des intérieurs stellaires, mais qui reste d’un grand intérêt pour ses applications multiples dans le domaine de la géophysique et de la planétologie comparée. Notre écoulement est bidimensionnel, continuellement cisailé par une force horizontale et stablement stratifié. Quand la stratification augmente, il développe une turbulence qui devient de plus en plus anisotrope. Un traceur passif est lâché dans l’écoulement et nous étudions la diffusion turbulente verticale du traceur en fonction du degré de stratification. En haut et en bas du domaine, nos conditions aux limites sont non périodiques. Ce choix de conditions aux limites peut contribuer à l’amortissement des ondes de gravité dont les effets sur la diffusion

du traceur restent négligeables quelle que soit le degré de stratification dans nos simulations.

Ce type d'écoulement a déjà été simulé par Vincent et al [66] en trois dimensions. Leur champ de vitesse est un champ stochastique Gaussien à deux composantes spectrales. La première est la loi de Kolmogorov pour décrire la turbulence tridimensionnelle. La seconde est la loi de Kraichnan qui représente l'apport de turbulence bidimensionnelle dans l'écoulement. Vincent et al ont défini une quantité, l'anisotropie, qui est le rapport entre les composantes de vitesse horizontales et celle verticale. Leur coefficient de diffusion est le rapport entre le flux vertical du traceur et son gradient vertical et il est divisé par un coefficient de longueur de mélange qui conserve une valeur constante quand l'anisotropie augmente. Ils ont trouvé que le modèle de longueur de mélange surestime toujours la diffusion verticale du traceur excepté pour une anisotropie égale à l'unité. Leur coefficient de diffusion dépend de l'anisotropie suivant une loi de puissance d'exposant égal à -1 jusqu'à des anisotropies de l'ordre de 100.

Dans nos simulations bidimensionnelles, l'écoulement est solution des équations de Navier-Stokes avec l'approximation Boussinesq. Une accélération horizontale est appliquée de manière continue à l'écoulement et son profil génère un champ de vitesse horizontale avec des points d'inflexion. Quand le nombre de Richardson de gradient devient inférieur à $1/4$, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz devient instable et plusieurs couches de cisaillement turbulent se forment. En augmentant la stratification, nos anisotropies s'échantillonnent de 1 à 30. Le traceur est introduit dans l'écoulement dès que l'anisotropie a atteint un état stationnaire et nous calculons la concentration du traceur avec une équation d'advection-diffusion.

Nos simulations sont directes et réalisées avec un code numérique développé par Deane [17] qui résout les équations avec la méthode pseudospectrale. Nous restituons des lois de puissance connues pour les spectres d'énergie cinétique, de la température et du traceur, ce qui indique que nos simulations sont bien résolues. Le nombre de Prandtl est égal à 0.0002 et le nombre de Schmidt vaut 1. Le nombre de Reynolds turbulent reste de l'ordre de 150. Quand la stratification s'intensifie, le nombre de froude diminue d'un facteur 10. Nous avons introduit des particules Lagrangiennes dans l'écoulement pour calculer un coefficient de diffusion Lagrangien tel qu'il est défini par Taylor [61].

Plus d'une cinquantaine de temps de retournement après la prise en compte du traceur dans l'écoulement, nous avons déterminé le coefficient de diffusion Lagrangien et le coefficient de diffusion turbulente dont la définition s'inspire de celle de Vincent et al. Pour obtenir des valeurs des coefficients de diffusion qui soient représentatives d'un domaine spatio-temporel, nous avons dû imaginer une moyenne spatio-temporelle qui ne soit pas affectée par les discontinuités présentes aux centres des couches cisailées. Ensuite, les coefficients sont divisés par un coefficient de longueur de mélange qui, à la différence de Vincent et al, décroît quand l'anisotropie augmente. Représentés en fonction de l'anisotropie, les deux coefficients de diffusion évoluent de manière semblable. Le coefficient de

diffusion Lagrangien qui ne tient pas compte de la diffusion moléculaire possède des valeurs plus faibles. Comme pour Vincent et al, le modèle de longueur de mélange surestime la diffusion verticale pour des anisotropies supérieures à 5. Nous constatons deux phases d'évolution, la première pour des anisotropies entre 5 et 14, et la seconde pour les anisotropies supérieures à 14.

Durant la première phase, le coefficient de diffusion turbulente peut être approximé par une loi de puissance fonction de l'anisotropie dont l'exposant est supérieur à celui annoncé par Vincent et al. Nous proposons deux explications de la réduction du transport vertical qui ne sont pas exclusives. Dans les couches de cisaillement, la turbulence anisotrope serait à l'origine de la diminution de l'amplitude des fluctuations du traceur, selon Vincent et al [66]. Entre les couches cisillées, la composante de vitesse horizontale serait trop importante pour permettre le développement des perturbations du traceur, selon Horntrop et Majda [25]. Le profil de l'accélération qui est appliquée continuellement à l'écoulement pour générer et entretenir les couches de cisaillement pourrait être responsable de cette double interprétation.

Durant la seconde phase, pour des anisotropies supérieures à 14, le coefficient de diffusion turbulente et le coefficient de diffusion Lagrangien gardent des valeurs du même ordre tandis que celle du coefficient de longueur de mélange continue de décroître quand la stratification augmente. La diffusion verticale du traceur s'arrête. Cette évolution du traceur n'a pas été prédite par Vincent et al. Elle est confortée par le déplacement vertical quadratique moyen des particules Lagrangiennes qui tend vers une limite asymptotique qui se met à dépendre faiblement du degré de stratification. L'arrêt du transport a déjà été observé dans des expériences, Britter et al [7], et des simulations de turbulence libre, Kimura et al [27]. Il a été prédit par plusieurs modèles, le modèle de Pearson et al [49], celui de Kaneda et al [26] et de Nicolleau et al [46].

Le modèle de Pearson et al [49] est une version améliorée du modèle de Csanady [15] qui est un modèle de type Langevin en présence de stratification. Dans les équations de Navier-Stokes, le terme visqueux et le gradient des fluctuations de pression sont représentés par une force aléatoire stationnaire que Pearson et al interprètent en utilisant les ondes de gravité. Elle est la résultante des forces causées par les ondes émises par l'élément fluide considéré et par les accélérations et ondes produites par tous les autres éléments fluides. Les échanges de densité entre l'élément fluide et l'environnement sont déterminés par son advection verticale et la diffusion moléculaire. Ils s'effectuent sur l'échelle de temps $(\gamma N)^{-1}$, où γ est un paramètre variable et N est la fréquence de Brunt-Väisälä. Pearson et al remarquent que la forme du spectre de la force aléatoire affecte les résultats à basse fréquence et l'échelle intégrale de vitesse, mais n'influe pas sur le déplacement vertical de l'élément fluide quand $\gamma \ll 1$ et $t \gg N^{-1}$. La racine de la moyenne quadratique du déplacement vertical tend vers la limite asymptotique annoncée par Csanady qui est égale à v_z/N . Ensuite, pour $t \gg (\gamma N)^{-1}$, elle se met à croître selon la diffusion normale en $t^{1/2}$, ce qui n'est pas prédit par le modèle

de Csanady. Pour $t < N^{-1}$, suivant le choix du spectre de la force aléatoire, une phase de diffusion normale peut précéder l'évolution vers la limite asymptotique. Malgré une sérieuse amélioration du modèle de Csanady, le modèle de Pearson et al conserve la même approche, de type "force aléatoire".

Kaneda et al [20] étudient l'évolution du champ de vitesse turbulent et du champ de densité d'un écoulement stablement stratifié. Ils proposent un modèle théorique à partir des équations de l'écoulement soumises à l'approximation Boussinesq et à l'approximation RDT ("Rapid Distorsion Theory") qui néglige les termes non-linéaires. Ensuite, ils valident ce modèle théorique avec des simulations numériques directes tridimensionnelles. Les équations y sont résolues dans l'espace de Fourier avec une méthode spectrale. Les conditions aux limites sont périodiques et la loi 2/3 contrôle l'erreur d' "aliasing". Pour obtenir le tenseur des déplacements des particules Lagrangiennes, le modèle théorique doit déterminer la corrélation des vitesses Lagrangiennes entre deux instants. D'autre part, l'étude de la corrélation des vitesses Eulériennes entre deux instants montre qu'elle décroît, même quand la viscosité cinématique est nulle. Le mélange des modes de Fourier de phases différentes serait à l'origine de cet amortissement inéluctable. Ensuite, la corrélation des vitesses Lagrangienne est identifiée à celle des vitesses Eulériennes en supposant que le facteur qui les relie reste de l'ordre de l'unité, ce qui n'est strictement valable que pour les basses fréquences. Cette approximation relevant de la conjecture de Corrsin [14] permet d'élaborer un modèle théorique qui explique la réduction du déplacement vertical des particules Lagrangiennes au moyen des ondes de gravité et qui retrouve la dépendance en $1/N^2$ des limites asymptotiques prédites par Pearson et al [49]. Kaneda et al n'observent pas que l'arrêt du transport vertical puisse dépendre de la diminution de la vitesse verticale quadratique moyenne ou de la forte anisotropie de la turbulence comme c'est le cas dans notre étude. Leur approche repose sur l'approximation RDT qui suppose que la composition spectrale de la turbulence de l'écoulement est définie initialement et reste figée au cours du temps. Ils n'indiquent pas sur quelle échelle de temps caractéristique de l'écoulement l'approximation RDT reste valable, ce qui pourrait discréditer leurs résultats aux temps tardifs.

Nicolleau et al [46] utilisent les mêmes approximations que Kaneda et al [20] pour étudier le transport dans un écoulement tridimensionnel stablement stratifié. Leur champ de vitesse initial suit la loi de Kolmogorov et décrit une turbulence homogène et isotrope à Reynolds élevé. Son évolution au cours du temps est calculée en résolvant les équations de Navier-Stokes écrites avec les approximations Boussinesq et RDT. Quand la viscosité cinématique est nulle, les équations linéarisées génèrent une turbulence stratifiée qui s'auto-entretient. Cette approche est valable à faible nombre de Froude et grand nombre de Reynolds. Elle permet de définir une échelle de dissipation et une échelle de temps caractéristique, L/v , en fonction de la hauteur L du domaine cubique et de la racine des fluctuations de vitesse quadratiques moyennes v de l'écoulement initial. Mais, la valeur du nombre de Reynolds reste inaccessible. Les éléments de fluides sont lâchés tardivement dans l'écoulement ainsi que les particules Lagrangiennes. Pour Nicolleau

et al, la stratification induit des ondes qui interagissent avec le champ de vitesse turbulent et le modifient, et affectent en retour le transport dans l'écoulement. Le déplacement individuel des particules Lagrangiennes est déterminé à partir des réalisations du champ de vitesse Eulérien en effectuant des interpolations pour calculer la vitesse Lagrangienne à la position de la particule. D'après Nicolleau et al, la conjecture de Corrsin [14] n'est pas adaptée à la formulation du tenseur des déplacements des particules Lagrangiennes qui est sensible à la composition spectrale aux petites échelles. Pour $t > L/v$, Nicolleau et al constatent que la diffusion est normale dans les directions perpendiculaires à celle de la stratification. Dans la direction de la stratification, le déplacement vertical quadratique moyen des particules Lagrangiennes tend vers la limite asymptotique attendue, en oscillant autour de la valeur moyenne $\simeq v^2/N^2$, pour $t \gg 2\pi/N$. La définition de notre valeur moyenne est similaire, mais le numérateur est moyenné sur l'intervalle de temps [2.4, 8.8] et non calculé à partir du champ de vitesse pris à l'instant $t = 2.4$. La vitesse verticale quadratique moyenne décroît fortement tout en conservant une évolution stationnaire ce qui n'a pas été obtenu par Kaneda et al [20], mais que nous avons observé. Comme pour Kaneda et al, se pose ici la question du nombre de temps de retournement, L/v , à partir duquel les termes non-linéaires ne sont plus négligeables dans les équations de l'écoulement. Nicolleau et al réfutent également l'approche de Pearson et al [49] en remarquant que l'excitation de l'écoulement par une force aléatoire a pour effet de décorréler le transport dans la direction de la stratification des autres directions, ce qui serait inapproprié à l'étude de la diffusion turbulente.

Les simulations numériques directes de Kimura et al [27] sont les plus citées et leur réalisation est similaire à la nôtre malgré quelques différences. Les simulations sont tridimensionnelles avec des conditions aux limites périodiques. Le champ de vitesse turbulent n'est pas généré et entretenu avec un forçage, mais est initialement un champ de vitesse isotrope stochastique Gaussien qui produit un écoulement avec une turbulence décroissante. Les particules Lagrangiennes sont introduites dans l'écoulement après le maximum d'énstrophie. Le nombre de Prandtl est très supérieur au nôtre et égal à l'unité, tandis que le nombre de Reynolds turbulent est du même ordre. Kimura et al constatent également que le déplacement vertical quadratique moyen des particules Lagrangiennes se réduit fortement en présence de stratification et tend vers une valeur moyenne $\simeq 1/N^2$, en oscillant. Leurs fonctions de distribution de probabilité du déplacement vertical sont également très similaires aux nôtres (cf. la figure 4.37). Kimura et al ne proposent pas d'explication physique à la réduction du transport vertical. Mais, ils remarquent que leur champ de vorticité est très anisotrope et maximal dans la direction perpendiculaire à celle de la stratification, comme nous le constatons également.

L'étude qui est exposée dans ce mémoire retrouve les résultats obtenus par les précédents intervenants sur le sujet qui unanimement obtiennent une réduction du transport vertical quand la stratification augmente. Plusieurs processus physiques semblent être à l'origine, comme les ondes de gravité et l'anisotropie de la

turbulence, ainsi que ceux que nous ignorons. Même si la simulation numérique directe se limite encore aux faibles nombres de Reynolds, il semble évident que la progression vers la compréhension passe par la simulation numérique directe tridimensionnelle d'écoulements stablement stratifiés continuellement cisailés pour développer une turbulence anisotrope statistiquement stationnaire qui permette d'étudier la diffusion turbulente aux temps tardifs, sans aucun doute sur la validité des résultats.

La poursuite de cette étude peut se réaliser selon deux objectifs. A court terme, il faut développer ou disposer d'un code numérique qui réalise des simulations numériques directes tridimensionnelles et il faut tester l'influence de la dimension, des conditions aux limites et du profil du forçage sur les résultats présentés dans ce mémoire. Comme les études antérieures à la nôtre ont été effectuées avec un nombre de Prandtl très supérieur et égal à l'unité, il faudra s'intéresser à la sensibilité de nos résultats à la diffusion thermique et également s'intéresser à la diffusion dans les directions perpendiculaires à celle de la stratification. Nous devons aussi envisager des simulations avec une résolution plus élevée pour déterminer précisément l'exposant de la loi de puissance et l'intervalle d'anisotropies sur lequel elle s'applique. A plus long terme, nous projetons de générer directement l'écoulement turbulent à partir d'un profil de rotation différentielle et de retrouver la loi de puissance. Ensuite, nous ajouterons les équations de Maxwell pour étudier l'effet de la topologie du champ magnétique sur le transport. L'objectif final est d'intégrer dans le modèle "standard" une loi de puissance qui tienne compte à la fois de la géométrie du champ magnétique et des mouvements turbulents induits par la rotation différentielle et d'observer les variations de résultats qu'elle entraîne.

Annexe A

Annexe

A.1 Approche linéaire de l'écoulement

Avant de devenir turbulent, un écoulement passe par divers stades. Au départ, il est laminaire. Cette phase s'achève dès que les premières instabilités se manifestent. Il entre dans une période transitoire durant laquelle les instabilités s'amplifient. Il passe ainsi de l'état linéaire à l'état non linéaire au cours duquel l'énergie se répartit sur une grande gamme d'échelles spatiales et temporelles. Quand l'écoulement devient turbulent, il contient de nombreuses structures tourbillonnaires. Les écoulements qui nous intéressent sont constitués de couches horizontales qui glissent les unes par rapport aux autres avec des vitesses tangentielles différentes. Ils sont monofluides et stablement stratifiés. Quand l'écart de vitesses tangentielles augmente, des vortex se forment le long de la zone de discontinuité et sont la manifestation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité se déclenche à une certaine condition que nous allons maintenant déterminer. Ensuite, nous parlerons des ondes de gravité qui sont présentes dans nos écoulements.

A.1.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Considérons un écoulement tridimensionnel dans le repère cartésien (O, e_x, e_y, e_z) , de système de coordonnées (x, y, z) . L'écoulement est de hauteur L . Il est composé d'un empilement de couches en mouvement relatif dans la direction de l'axe (Ox) . Le cisaillement entre les couches est maintenu par le profil de vitesse $(U(z), 0, 0)$. Le fluide est incompressible, de densité ρ_0 , et soumis à une stratification stable. Les équations de l'écoulement sont écrites avec l'approximation Boussinesq [9] : $\frac{\delta \rho}{\rho_0} = -\alpha(T - T_0)$. $\delta \rho$ est la perturbation de densité et T_0 est le profil initial de température

Les équations de l'écoulement qui décrivent l'évolution des perturbations de vitesse (v'_x, v'_y, v'_z) , de pression δp et de température $\theta = (T - T_0)$, sont écrites à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ \partial_t \mathbf{v}' + U \partial_x \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p + \nu \Delta \mathbf{v}' + g \alpha \mathbf{e}_z \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta = \beta v'_z + \kappa \Delta \theta \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

ν et κ désignent respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. Le coefficient β est défini à partir de la température initiale : $\beta = -\partial_z T_0 < 0$.

Pour réduire le système A.1 à une équation avec une inconnue, il faut commencer par éliminer la pression en remplaçant les équations de conservation de la quantité de mouvement par celles de conservation de la vorticité $\omega = \nabla \wedge \mathbf{v}'$.

$$\begin{cases} \partial_t \omega + U \partial_x \omega + [v'_z \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{dU}{dz} (\partial_y v'_y)] e_y - \frac{dU}{dz} (\partial_y v'_z) e_z \\ = g \alpha (\partial_y \theta) e_x - g \alpha (\partial_x \theta) e_y + \nu \Delta \omega \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta = \beta v'_z + \kappa \Delta \theta \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ensuite, les équations de conservation pour les composantes ω_x et ω_y de la vorticité sont combinées d'après la relation : $\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x = -\Delta v'_z = W_z$, ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \omega_z + U \partial_x \omega_z - \frac{dU}{dz} (\partial_y v'_z) = \nu \Delta \omega_z \\ \partial_t W_z + U \partial_x W_z + v'_z \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{dU}{dz} (\partial_{xy}^2 v'_y) = -g \alpha (\partial_{xx}^2 \theta + \partial_{yy}^2 \theta) + \nu \Delta W_z \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta = \beta v'_z + \kappa \Delta \theta \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Lorsque le problème est supposé invariant selon l'axe (Oy), les équations se simplifient considérablement et la première équation du système A.3 devient indépendante des deux autres. Le système se réduit aux deux dernières équations :

$$\begin{cases} \partial_t W_z + U \partial_x W_z + \partial_x v'_z \frac{d^2 U}{dz^2} = -g \alpha (\partial_{xx}^2 \theta) + \nu \Delta W_z \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta = \beta v'_z + \kappa \Delta \theta \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Comme l'objectif est l'obtention du critère d'instabilité de Kelvin-Helmholtz relatif à notre étude, l'analyse en modes normaux s'impose pour poursuivre la résolution du système A.4. Les inconnues v'_z et θ sont supposées fonction de la quantité : $e^{i(k_x x + n t)}$, où k_x est le nombre d'onde suivant l'axe (Ox). Le système A.4 peut être simplifié en remarquant que : $W_z = -\Delta v'_z = (k_x^2 - \mathbf{D}^2)v'_z$, où $\mathbf{D} = \frac{d}{dz}$. En l'absence de termes de diffusion ($\nu = 0$ et $\kappa = 0$), il se réduit à une équation qui convient aussi bien à un écoulement bidimensionnel que tridimensionnel. Pour le cas tridimensionnel, il suffit de remplacer k_x^2 par $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Quand la géométrie est bidimensionnelle, l'équation s'écrit en posant $k_x = k$ [9] :

$$\left(\frac{n}{k} + U\right)(\mathbf{D}^2 - k^2)v'_z - v'_z \mathbf{D}^2 U - \frac{g\alpha\beta v'_z}{\left(\frac{n}{k} + U\right)} = 0 \quad (\text{A.5})$$

L'étude de cette équation, aboutit au critère d'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui stipule que pour n'importe quelle valeur de k , l'écoulement reste stable si le nombre de Richardson de gradient est supérieur à la valeur $\frac{1}{4}$ [45]. La condition $Ri_g < \frac{1}{4}$ est donc une condition d'instabilité nécessaire mais pas suffisante. En particulier, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ne se développe pas si la vitesse de composantes $(U(z), 0, 0)$ est linéaire. Il faut au moins que la dérivée seconde, $\mathbf{D}^2 U$, soit non nulle. Nous allons maintenant introduire la solution de l'équation A.5 dans le cas où la vitesse de cisaillement est définie à partir de la fonction tangente hyperbolique : $U(z) = U_0 \tanh\left(\frac{z}{L}\right)$, et le profil initial de la température est une fonction linéaire de la coordonnée z ($\beta = \text{constante} < 0$) [9]. L'équation A.5 est adimensionnée avec les grandeurs caractéristiques L et U_0 et se met sous la forme :

$$(U - c_s)(\mathbf{D}^2 - k^2)v'_z - v'_z \mathbf{D}^2 U + Ri_g \frac{v'_z}{(U - c_s)} = 0 \quad (\text{A.6})$$

où $c_s = -\frac{n}{U_0 k}$ et $U(z) = \tanh(z)$. Le nombre de Richardson de gradient s'écrit : $Ri_g = -\frac{g\alpha\beta}{\left(\frac{U_0}{L}\right)^2}$. Les conditions aux limites sont $v'_z = 0$ en $z \rightarrow \pm\infty$.

La résolution de l'équation A.6 s'effectue pour l'état de stabilité marginale qui est caractérisé par $c_s = 0$. Suite au passage de la variable z à la variable U , l'équation A.6 n'est plus définie pour les valeurs de $U = 0$ et $U = \pm 1$. La solution est le produit des solutions particulières et d'une fonction χ , régulière en $U = 0$ et $U = \pm 1$: $v'_z = \chi(1 - U^2)^{\mu_1} U^\mu$, où $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - Ri_g}$ et $\mu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4Ri_g}}{2}$. Cette

fonction χ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\chi}{dU^2} + \left(\frac{\mu}{U} - \frac{2(\mu_1 + 1)U}{1 - U^2} \right) \frac{d\chi}{dU} - \frac{(2\mu_1 + \mu + 2)(2\mu_1 + \mu - 1)}{1 - U^2} \chi = 0 \quad (\text{A.7})$$

La solution particulière χ égale à une constante non nulle implique la condition : $2\mu_1 + \mu - 1 = 0$. En remplaçant avec les expressions de μ_1 et μ , le critère d'instabilité de Kelvin-Helmholtz apparaît : $Ri_g = k^2(1 - k^2)$. Cette relation définit la courbe de stabilité marginale qui sépare la zone stable de l'écoulement de celle instable. Dans le plan (k, Ri_g) , elle est une parabole qui atteint son maximum en $k = \frac{1}{2}$ avec $Ri_g = \frac{1}{4}$.

Dans les zones radiatives d'étoiles, il faut tenir compte de la grande diffusivité thermique et de la très faible viscosité du fluide stellaire. Le rôle destabilisant de la diffusivité thermique a d'abord été mis en évidence par A.A. Townsend [63] dans un contexte géophysique puis par J-P. Zahn [68] dans un contexte astrophysique. Les solutions du système A.4 dans le cas d'un profil de vitesse en tangente hyperbolique et d'un profil de température linéaire ont été étudiées numériquement par F. Lignières & al. [35]. Dans les simulations numériques qui sont présentées au chapitre 4, des petites perturbations sont introduites dans l'écoulement au moment où les couches de cisaillement entretenues par forçage mécanique sont caractérisées par un nombre de Richardson de gradient égal à 1/4 et un nombre de Péclet thermique variant entre 0.02 et 0.04 selon la valeur de la stratification initiale. En extrapolant les résultats de F. Lignières & al. [35] à nos simulations, l'échelle horizontale de la perturbation la plus instable s'avère proche de celle trouvée dans le cas non diffusif ($k = \frac{1}{2}$) et la condition d'instabilité de Kelvin Helmholtz, $Ri_g < \frac{1}{4}$, reste encore valable.

A.1.2 Ondes de gravité

Les ondes de gravité sont d'autant plus présentes dans nos écoulements que la stratification est importante. Leur vitesse de phase se calcule à partir de l'équation A.5 qui se simplifie en posant $U = 0$ et $\mathbf{D}^2U = 0$ [19], ce qui donne :

$$\mathbf{D}^2 v'_z - v'_z \left[k^2 + \frac{g\alpha\beta}{\left(\frac{n}{k}\right)^2} \right] = 0 \quad (\text{A.8})$$

La solution recherchée est de la forme : $v'_z = Ae^{i(nt+k_x+k_z)}$, où A est une constante. L'équation caractéristique est la suivante : $n^2 = N^2 \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2}$, où $N =$

$\sqrt{-g\alpha\beta}$ est la fréquence de Brunt-Väisälä. Comme n^2 est positif, les ondes de gravité restent stables et de vitesse de phase égale à $\frac{N}{k_x}$.

Annexe B

Annexe

B.1 Tests de l'algorithme de résolution des particules Lagrangiennes

Nous comparons la solution numérique à une solution analytique. Nous avons réalisé deux tests sur une durée de 0.16. Pour le premier, la particule Lagrangienne se déplace dans un champ de vitesse uniforme. Pour le second, le champ de vitesse est circulaire. L'écart entre les deux solutions est défini comme le maximum de la moyenne temporelle des variations dans chaque direction et il reste inférieur à 10^{-10} pour les deux tests que nous avons réalisés.

B.1.1 Déplacement de la particule dans un champ de vitesse uniforme

Les composantes de la vitesse sont 7. dans la direction horizontale et 0.1 dans la direction verticale.

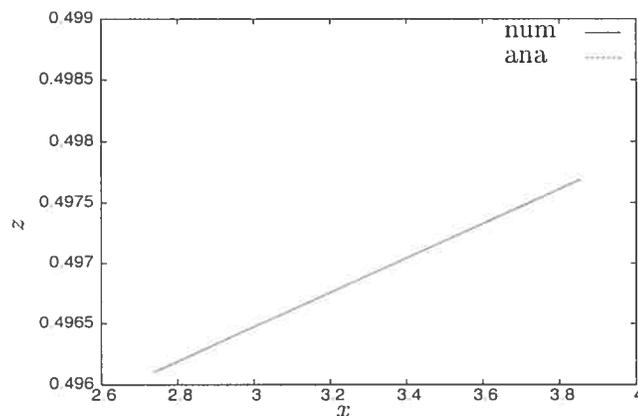


FIG. B.1 – Déplacement d'une particule dans un champ de vitesse uniforme.

B.1.2 Déplacement de la particule dans un champ de vitesse circulaire

La composante horizontale de vitesse est égale à $-0.5\sin(n\Delta t100\pi)$ et la composante verticale, à $0.5\cos(n\Delta t100\pi)$. La particule Lagrangienne parcourt le cercle au bout de $n = 100$ itérations avec un pas de temps $\Delta t = 2. \times 10^{-4}$. Sur la figure B.2, la particule a décrit quatre fois le cercle.

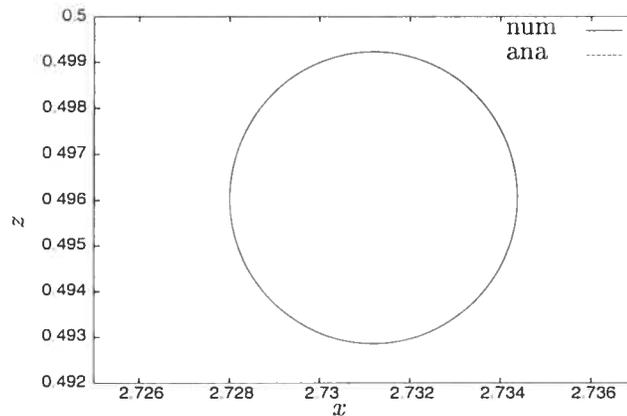


FIG. B.2 – Déplacement d'une particule dans un champ de vitesse circulaire.

Bibliographie

- [1] Balachandar S. & Maxey M.R., "Methods for Evaluating Fluid Velocities in Spectral Simulations of Turbulence", *Journal of Comp. Physics* **83**, (1989).
- [2] Batchelor G.K., "Diffusion in a field of homogeneous turbulence", *Australian Journal of Scientific research* **A2**, (1949).
- [3] Batchelor G.K. & al., "Small scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity", *Journal of Fluids Mechanics* **5**, (1959).
- [4] Biermann L., "Bemerkungen über das Rotationsgesetz in irdischen und stellaren Instabilitätszonen. Mit 1 Textabbildungen", *Z. Astrophys.* **28**, p.304, (1951).
- [5] Böhm-Vitense E., "Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen", *Zs. f. Ap.* **46**, p.108, (1958).
- [6] Brachet M.E., Meneguzzi M., & Sulem P.L., "Small-scale dynamics of high-Reynolds-number two-dimensional turbulence", *Physics Review Letters* **57**, 6, (1986).
- [7] Britter R.E., Hunt J.C.R., Marsh G.L. & Snyder W.H., "The effects of stable stratification on turbulent diffusion and the decay of grid turbulence", *Journal of Fluids Mechanics* **127**, (1983).
- [8] Chaboyer B.& Zahn J.P., "Effect of horizontal turbulent diffusion on transport by meridional circulation", *A&A* **253**, (1992).
- [9] Chandrasekhar S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Dover Publications (USA), (1981).

- [10] Charbonneau P. & Michaud G., "Two-dimensional particle transport in HgMn and FmAm stars", *The Astrophysical Journal* **327**, (1988).
- [11] Charbonneau P. & Michaud G., "Meridional circulation and diffusion in A and early F stars", *The Astrophysical Journal* **370**, (1991).
- [12] Christensen-Dalsgaard J. & al., "The current state of solar modeling", *Science* **272**, (1996).
- [13] Corrsin S., "On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence", *J. App. Phys.* **22**, (1951).
- [14] Corrsin S., progress report on some turbulent diffusion research in "Atmospheric Diffusion and Air Pollution", *Advances in Geophysics* **6**, Academic, (1959).
- [15] Csanady G.T., "Turbulent diffusion in a stratified fluid", *Journal of Atmospheric Sciences* **21**, (1964).
- [16] Csanady G., "Turbulent Diffusion in the Environment", *Geophysics and Astrophysics Monographs* (D.Reidel Publishing Company, (1973).
- [17] Deane A.E., "Spectral and Spectral-Elements Methods", NASA Goddard Space Flight Center (USA), June (1997).
- [18] Drazin P.G. & Reid W.H., "Hydrodynamic Stability", @ Cambridge University Press 1981, (1999).
- [19] Denissenkov P.A. & Tout C.A., "On a physical mechanism for extra mixing in globular cluster red giants", *MNRAS* **316**, (2000).
- [20] Falkovich G., Gawędzki K. & Vergassola M., "Particles and fields in fluid turbulence", *Rev. Mod. Phys.* **73**, (2001).
- [21] Fjortoft R., "On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two dimensional non divergent flow", *Tellus* **5**, (1953).
- [22] Grevesse N. & Sauval A.J., "Standard solar composition", *Space Science Reviews* **85**, (1998).

- [23] Guyon E., Hulin J.P. & Petit L., "Hydrodynamique Physique", EDP Sciences/CNRS, (2001).
- [24] Hansen C.J. & Kawaler S.D., "Stellar Interiors", A&A Library, (1999).
- [25] Horntrop D.J. & Majda A., "Subtle statistical behaviour in simple models for random advection-diffusion", J.Math. Sci. Univ. Tokyo **1**, (1994).
- [26] Kaneda Y. & Ishida T., "Suppression of vertical diffusion in strongly stratified turbulence", Journal of Fluids Mechanics **402**, (2000).
- [27] Kimura Y. & Herring J.R., "Diffusion in stably stratified turbulence", Journal of Fluids Mechanics **328**, (1996).
- [28] Kolmogorov A.N., "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30**, (1941).
- [29] Kraichnan R.H., "Direct-Interaction approximation for shear and thermally driven turbulence", Phys. Fluids **7**, (1963).
- [30] Kraichnan R.H., "Inertial ranges in two dimensional turbulence", Phys. Fluids **10**, (1967).
- [31] Leith C.E., "Diffusion approximation for two dimensional turbulence", Phys. Fluids **11**, (1968).
- [32] Lesieur M., "Turbulence in Fluids", Kluwer Academic Publishers Group, (1987).
- [33] Leslie D.C., "Developements in the theory of turbulence", Clarendon Press Oxford, (1973).
- [34] Lignières F., "The small-Peclet-number approximation in stellar radiative zone", A&A **348**, (1999).
- [35] Lignières F. & al, "Shear layer instability in a highly diffusive stably stratified atmosphere", A&A **349**, (1999).
- [36] Maeder A. & Conti P.S., "Massive star populations in nearby galaxies", Ann. Rev. Astron. Astrophys. **32**, (1994).

- [37] Maeder A., "On the Richardson criterion for shear instabilities in rotating stars", *A&A* **299**, (1995).
- [38] Maeder A. & Meynet G., "The evolution of rotating stars", *ARA & A* **38**, (2000).
- [39] Mathieu J. & Scott J., "An introduction to Turbulent Flows", @ Cambridge University Press 2000, (2000).
- [40] Michaud G., "Diffusion processes in peculiar A stars", *The Astrophysical Journal* **160**, (1970).
- [41] Michaud G., "The astrophysical context of diffusion in stars", *The Astronomical Journal* **85**(5), (1980).
- [42] Michaud G., "Meridional circulation versus diffusion in stellar envelopes", *The Astrophysical Journal* **258**, (1982).
- [43] Michaud G. & Charbonneau P., "The lithium abundance in stars", *Space Science Reviews* **57**, (1991).
- [44] Michaud G. & Zahn J-P., "Turbulent transport in stellar interiors", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* **11**, (1998).
- [45] Miles J.W., "On the stability of heterogeneous shear flows", *Journal of Fluids Mechanics* **10**, (1961).
- [46] Nicolleau F. & Vassilicos J.C., "Turbulent diffusion in stably stratified non-decaying turbulence", *Journal of Fluids Mechanics* **410**, (2000).
- [47] Oboukhov A.M., "Structure of the temperature field in turbulent flows", *Isv. Geogr. Geophys. Ser.* **13**, (1949).
- [48] Palacios A., Talon S., Charbonnel C. & Forestini M., "Rotational mixing in low-mass stars. I Effect of the μ -gradients in main sequence and subgiant Pop I stars", *A&A* **399**, (2003).
- [49] Pearson H.J., Puttock J.S & Hunt J.C.R., "A statistical model of fluid-element motions and vertical diffusion in a homogeneous stratified turbulent flow", *Journal of Fluids Mechanics* **129**, (1983).

- [50] Pezeshk S. & Camp C.V., "Dynamic analyses of multiple-degree-of-freedom structures using a modified Heun method", *Compendex Computers and structures* **50**(6), p.729, (1994).
- [51] Pinsonneault M.H. & al, "Rotation of low-mass stars. A new probe of stellar evolution", *The Astrophysical Journal Suppl.* **74**, (1990).
- [52] Richardson L.F., "Atmospheric diffusion shown on a distance neighbor graph", *Proceedings of the Royal Society of London* **A 110**, (1926).
- [53] Rogallo R.S., NASA TM-81315, (1981).
- [54] Schatzman E., "Diffusion process produced by random internal waves", *Journal of Fluids Mechanics* **3222**, (1996).
- [55] Schuman U. & Gerz T., "Turbulent mixing in stably stratified shear flows", *J. App. Meteo.* **34**, (1995).
- [56] Slettebak A., "Stellar Rotation", NY : Gordon and Breach, (1970).
- [57] Smyth W.D. & Peltier W.R., "Two-dimensional turbulence in homogeneous and stratified shear layers", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **69**, (1993).
- [58] Spiegel E.A. & Zahn J-P., "The solar tachocline", *A&A* **265**, (1992).
- [59] Talon S. & Zahn J-P., "Anisotropic diffusion and shear instabilities", *A&A* **317**, (1997).
- [60] Tassoul J.L., "Stellar Rotation", Cambridge Astrophysics series 36, (2000).
- [61] Taylor G.I., "Diffusion by continuous movements", *Proceedings of the mathematical society of London* **20**, (1921).
- [62] Tennekes H. & Lumley J.L., "A First Course in Turbulence", The Mit Press, (1972).
- [63] Townsend A.A., "The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid", *Journal of Fluids Mechanics* **4**, (1958).
- [64] Vauclair S., "Astrophysical Processes in Upper Main Sequence Stars", 13th Saas-Fee Course, Eds. B. Hauck A. Maeder, (1983).

- [65] Vauclair S., "Lithium nuclear destruction in stellar outer layer. A consistent theoretical view of the characteristic features observed in young and old stars", *The Astrophysical Journal* **335**, (1988).
- [66] Vincent A., Michaud G. & Meneguzzi M., "On the turbulent transport of a passive scalar by anisotropic turbulence", *Physics of Fluid* **8**, 5 (1996).
- [67] Vitense E., "Die Wasserstoffkonvektionszone der sonne. Mit 11 Textabbildung", *Zs. f. Ap.* **32**, p.135, (1953).
- [68] Zahn J-P., "Rotational instabilities and stellar evolution", *Stellar Instability and Evolution IAU Symposium* **59**, p.185,(1974).
- [69] Zahn J-P., "Turbulent transport in the radiative zone of a rotating star", B.R. Durney and S. Sofia (eds.), *The Internal Solar Angular Velocity*, p.201-212, (1987).
- [70] Zahn J-P., "Circulation and turbulence in rotating stars", *A&A* **265**, (1992).

