

Université de Montréal

**Décomposition des produits de fonctions d'orbites
symétriques et antisymétriques des groupes de Weyl**

par

Valérie Dubois

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques appliquées

août 2006



①A
3
U54
2006
1.016



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Décomposition des produits de fonctions d'orbites
symétriques et antisymétriques des groupes de Weyl**

présenté par

Valérie Dubois

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Pavel Winternitz

(président-rapporteur)

Jiri Patera

(directeur de recherche)

Frédéric Lesage

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Nous étudions trois familles de fonctions spéciales et non-conventionnelles. Elles sont toutes définies en utilisant les groupes de Lie compacts semi-simples qui sont considérés, ici, pour les groupes de Lie de rang 2 et 3. Ces familles sont appelées C -, S - et E -fonctions. Des applications récentes de ces fonctions dans le traitement des données digitales en 2 et 3 dimensions ont mené à une étude intensive dans ce domaine. Les fonctions des trois familles peuvent être perçues comme des généralisations multidimensionnelles des fonctions trigonométriques communes, cosinus et sinus, et de fonctions exponentielles.

Notre problème est de considérer les décompositions de leurs produits en une somme finie de fonctions C , S et E . Il advient que

$$C \times C = C + \dots \text{ avec des coefficients entiers positifs.}$$

$$C \times S = S + \dots \text{ avec des coefficients entiers positifs.}$$

$$S \times S = C + \dots \text{ avec des coefficients entiers.}$$

$$E \times E = E + \dots \text{ avec des coefficients entiers positifs.}$$

Mots-clés : fonctions spéciales, groupes de Lie semi-simples, réseau de poids, groupes de Weyl, orbites du groupe de Weyl

ABSTRACT

Three families of unconventional special functions, all defined using a compact semisimple Lie group, are considered for Lie groups of rank 2 and 3. The families are called C -, S - and E -functions. Recent applications of the functions in 2 and 3-dimensional digital data processing lead to intensive studies of the families. The functions of the three families can be understood as multidimensional generalizations of common trigonometric functions, cosine, sine, and the exponential function.

Our problem is to consider decomposition of products of such functions into their finite sums. It turns out that

$$C \times C = C + \dots \text{ with positive integer coefficients.}$$

$$C \times S = S + \dots \text{ with positive integer coefficients.}$$

$$S \times S = C + \dots \text{ with integer coefficients.}$$

$$E \times E = E + \dots \text{ with positive integer coefficients.}$$

Keywords : special functions, semisimple Lie groups, weight lattices, Weyl groups, orbits of the Weyl group.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Abstract	iv
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xi
Remerciements	1
Introduction	2
Chapitre 1. Définitions	5
1.1. Réflexion	5
1.2. Système de racines	5
1.3. Bases et poids fondamentaux	6
1.4. Système dual	8
1.5. La région fondamentale	8
1.6. Groupe de Weyl	9
1.6.1. Orbite du groupe de Weyl	9
1.6.2. Sous-groupe pair, W^e , du groupe de Weyl	10
1.7. Matrice de Cartan	10
1.8. Diagramme de Dynkin	10
1.9. Les trois familles de fonctions	11

1.9.1.	C -fonctions	11
1.9.2.	E -fonction	12
1.9.3.	S -fonction	12
1.10.	Symétrie et antisymétries des C -fonctions et S -fonctions	12
Chapitre 2. C, S et E-fonctions à deux variables et trois variables.....		13
2.1.	$A_1 \times A_1$	13
2.1.1.	Diagramme de Dynkin et la matrice de Cartan	13
2.1.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	13
2.1.3.	Système de racines et réflexions du groupe fini de Weyl	14
2.1.4.	Région fondamentale	14
2.1.5.	Orbites du groupe de Weyl	15
2.1.6.	Orbites du sous-groupe pair de Weyl	16
2.1.7.	C -fonctions	16
2.1.8.	Orthogonalité des C -fonctions	17
2.1.9.	S -fonctions	17
2.1.10.	E -fonctions	18
2.2.	A_2	18
2.2.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	18
2.2.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	19
2.2.3.	Système de racines	19
2.2.4.	Région fondamentale	19
2.2.5.	Orbites du groupe de Weyl	20
2.2.6.	Orbites du sous-groupe paire de Weyl	21
2.2.7.	Les C -fonctions	21
2.2.8.	Orthogonalité des C -fonctions	21
2.2.9.	S -fonctions	22
2.2.10.	Les E -fonctions	22

2.3.	C_2	22
2.3.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	22
2.3.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	23
2.3.3.	Système de racines	23
2.3.4.	Région fondamentale	23
2.3.5.	Orbites du groupe de Weyl	24
2.3.6.	Orbites paires du sous-groupe de Weyl	24
2.3.7.	C -fonctions	25
2.3.8.	Orthogonalité des C -fonctions	25
2.3.9.	S -fonctions	25
2.3.10.	E -fonctions	26
2.4.	G_2	26
2.4.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	26
2.4.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	26
2.4.3.	Système de racines	26
2.4.4.	Région fondamentale	27
2.4.5.	Orbites du groupe de Weyl	27
2.4.6.	Orbites du sous-groupe pair de Weyl	28
2.4.7.	C -fonctions	28
2.4.8.	Orthogonalité des C -fonctions	29
2.4.9.	S -fonctions	29
2.4.10.	E -fonctions	29
2.5.	A_3	29
2.5.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	29
2.5.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	30
2.5.3.	Système de racines	30
2.5.4.	Région fondamentale	31
2.5.5.	Orbites du groupe de Weyl	31

2.5.6.	Orbites du sous-groupe paires de Weyl	32
2.5.7.	C -fonctions	33
2.5.8.	Les S -fonctions	34
2.5.9.	Les E -fonctions	34
2.6.	B_3	35
2.6.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	35
2.6.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	35
2.6.3.	Système de racines	35
2.6.4.	Région fondamentale	36
2.6.5.	Orbites du groupe de Weyl	36
2.6.6.	Orbites du sous-groupe de Weyl pair	38
2.6.7.	C -fonctions	39
2.6.8.	S -fonctions	40
2.6.9.	Les E -fonctions	41
2.7.	C_3	41
2.7.1.	Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan	41
2.7.2.	Les bases α et ω et leurs bases duales	42
2.7.3.	Le système de racines	42
2.7.4.	Région fondamentale	42
2.7.5.	Orbites du groupe de Weyl	43
2.7.6.	Orbites du groupe pair de Weyl	44
2.7.7.	C -fonctions	45
2.7.8.	S -fonctions	46
2.7.9.	E -fonctions	47
Chapitre 3.	La décomposition des produits de fonctions	48
3.1.	Cas spéciaux	63
Conclusion	67

Bibliographie..... 68

LISTE DES FIGURES

2.1	Région fondamentale de A_3	31
2.2	Région fondamentale de B_3	36
2.3	Région fondamentale de C_3	43

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Pour $A_1 \times A_1$	50
3.2	Pour A_2	50
3.3	Pour C_2	51
3.4	Pour G_2	52
3.5	Pour A_3	53
3.6	Pour A_3 suite	54
3.7	Pour B_3	55
3.8	Suite de $(\mathbf{a,b,c})[\mathbf{d,e,f}]$ pour B_3	58
3.9	Pour C_3	59
3.10	suite de $(\mathbf{a,b,c})[\mathbf{d,e,f}]$ pour C_3	62
3.11	Cas spéciaux pour $C_3, (a,0,0) \times$	63
3.12	Cas spéciaux pour $C_3, (0,b,0) \times$	63
3.13	Cas spéciaux pour $C_3, (0,0,c) \times$	64
3.14	Cas spéciaux pour $C_3, (a,b,0) \times$	65
3.15	Cas spéciaux pour C_3	66

REMERCIEMENTS

J'aimerais, en premier lieu, remercier mon directeur de recherche, M. Patera, pour sa générosité, sa jovialité et son côté très humain. Vous n'avez ignoré aucune de mes questions qu'elles soient triviales ou non et j'ai bien apprécié travailler à vos côtés..

Je voudrais aussi en profiter pour dire un énorme merci à mes parents qui m'ont soutenu autant moralement que financièrement tout au long de mes études. Si je suis la personne que je suis aujourd'hui, c'est en grande partie grâce à vous.

Je ne peux passer sous silence mes amis de l'école qui ont fait que ce ne fut pas trop pénible de venir à l'école tous les jours. Merci, tout d'abord à mon petit Maxime qui m'a suivi tout au long de notre cheminement mathématiques. Je suis bien contente que tu aies été à mes côtés toutes ces années et j'espère que tu le sera encore longtemps. À Charles, mon militaire préféré, je te remercie de m'avoir aidé à prendre les choses à la légère. À Fred, merci de me partager ton amour de la lecture et de la musique. À Dello, merci de ta présence assidue à l'école et de ta grande écoute. Et finalement, merci aux autres qui m'ont accompagné, Steven Sanche, Olivier Bonneau et Sabine Mario, votre humour et votre joie de vivre m'ont fait oublier par moment les tracas mathématiques.

Ensuite, comment oublier mes deux colocataires et amis, Kathrine et Loïc, qui ont subi mes sautes d'humeur et mes nombreuses heures d'étude, lorsque j'avais des examens ou que j'étais découragée. Je n'aurais pu rêver de meilleurs colocataires que vous. Vous m'avez bien aidé à décrocher de mes mathématiques à l'aide de votre humour et de votre folie.

En dernier lieu, je remercie tous les gens qui m'entourent, même si je ne vous ai pas nommés ici, vous êtes tout aussi importants que les autres. Merci d'être dans ma vie, vous faites de moi une personne heureuse et comblée.

INTRODUCTION

Grâce au développement récent de l'analyse de Fourier appliquée aux données digitales, il a été établi que pour un certain nombre de raisons, il est bien avantageux d'utiliser une nouvelle classe de fonctions d'expansion de types C , S et E [1]-[11]. Ces fonctions sont basées sur chaque groupe de Lie semi-simple compact et le nombre de variables indépendantes de ces fonctions est égale au rang du groupe de Lie correspondant. En général, les propriétés de ces familles de fonctions sont peu explorées dans le contexte appliqué [10, 12].

Dans ce mémoire, nous allons considérer les familles de fonctions C , S et E à deux et trois variables. Ainsi les groupes de Lie pertinents sont de rang deux et trois. La propriété particulière de ces fonctions que nous allons étudier pour ces fonctions, est la décomposition de leurs produits en une somme finie de C , S ou E fonctions. Nous présentons ces résultats spécifiques pour les groupes de rang deux [7, 8, 9] et trois.

L'importance de ces fonctions spéciales est devenue apparente depuis seulement quelques années. Dans la théorie de Lie, les fonctions S sont connues. Elles sont utilisées dans la formule de Weyl pour le caractère d'une représentation irréductible de dimension finie : le caractère s'exprimant comme une fraction de deux fonctions S particulières [13]-[16]. Ici, nous considérons les fonctions S dans un contexte bien différent.

Les C -fonctions sont les ingrédients des caractères des représentations irréductibles, mais elles sont peu utilisées en soi, sauf dans l'article [1]. Un caractère s'exprime comme une combinaison linéaire finie de C -fonctions avec des coefficients entiers positifs. Ces coefficients sont appelés multiplicité de poids dominants pour une représentation particulière [17]. En fait, il existe quelques algorithmes assez laborieux connus permettant de les obtenir.

Les fonctions S et C sont les fonctions d'orbite d'un groupe de Weyl attaché à chaque groupe de Lie semi-simple particulier. Les fonctions C et S peuvent être vues comme (resp.) symétrisées ou antisymétrisées par rapport à un groupe fini [18, 19, 20]. Dans notre cas, le groupe considéré est le groupe de Weyl W .

Les E -fonctions ont rarement été utilisées dans la littérature, excepté pour la référence [10]. Cependant, leur introduction apparaît naturellement, quand nous interprétons les fonctions S et C comme des généralisations multidimensionnelles de fonctions trigonométriques sinus et cosinus à une variable. Pour la construction de la E -fonction, au lieu d'utiliser le groupe de Weyl, nous utilisons son sous-groupe $W^e \subset W$ qui est généré par un nombre de réflexions paires. Par conséquent, les fonctions E deviennent une généralisation multidimensionnelle des fonctions exponentielles.

Pour un groupe de Lie compact semi-simple donné G , les fonctions des trois familles forment trois bases orthogonales dans un espace de fonctions définies sur les classes de conjugaison des éléments de G [1, 13]. De plus, les fonctions sont orthogonales sur une région bornée F , dite fondamentale, de G , d'un espace paramétrique. Or, pour l'exploitation pratique contemporaine, l'orthogonalité discrète de ces fonctions est indispensable [1]. En fait, il s'agit d'orthogonalité sur un réseau approprié F_M dans F . C'est un réseau de densité déterminé par un entier positif M . Il advient que sur ce réseau, seulement un nombre fini de fonctions de chaque famille sont orthogonales.

Notre but est de trouver les règles de décomposition des produits de ces trois familles de fonctions considérées comme des fonctions continues. Il va de soi que le même exercice peut être accompli dans le cas discret. Les résultats présentés dans ce mémoire contiennent la décomposition pour les groupes compacts semi-simples de rang deux et pour les groupes simples de rang trois. Nous considérons les quatre groupes semi-simples de rang deux : $A_1 \times A_1$, A_2 , C_2 et G_2 . En terme de symboles conventionnels de groupe de Lie, nous utilisons respectivement, $SU(2) \times SU(2)$, $SU(3)$, $O(5)$ (resp. $Sp(4)$) et $G(2)$. Pour le rang trois, nous analysons les groupes simples : A_3 , B_3 et C_3 ou respectivement $SU(4)$, $O(7)$ et $Sp(6)$.

Le produit de fonctions C se décompose en somme de fonctions C . Le produit de fonctions S se décompose aussi en somme de fonctions C et le produit de fonctions C et S , en somme de fonctions S . Selon les cas, devant chacune des fonctions, nous

retrouvons un coefficient entier positif ou négatif. En général, $2E = C + S$. Dans le cas du groupe de rang un, les fonctions S , C et E sont égales aux fonctions sinus, cosinus et exponentielle. Dans ce cas-là, la discrétisation des fonctions C et S est bien connue et utilisée sous le nom de "cosine transform" et "sine transform" [5, 7, 8, 9, 21]. La discrétisation de fonctions exponentielles en une dimension est la transformation de Fourier ordinaire.

Les fonctions des trois familles ont d'autres propriétés utiles que nous n'allons pas établir avec détails dans ce mémoire. Elles sont des fonctions propres des opérateurs de Laplace des groupes de Lie correspondants. Leurs valeurs propres sont aussi connues dans tous les cas. Les fonctions C vérifient la condition de Neumann à la frontière de F : la normale à la frontière est égale à zéro. Les fonctions S vérifient la condition de Dirichlet : la fonction est égale à zéro sur la frontière de F . Chaque point du réseau F_M représente une classe de conjugaison d'éléments d'un sous-groupe fini abélien, du groupe de Lie correspondant, qui est générée par les éléments d'ordre M dans G [22].

En premier lieu, nous définissons quelques termes importants pour l'étude de ces fonctions, tels la réflexion, les systèmes de racines, la région fondamentale, les orbites du groupe de Weyl, les bases, les matrices de Cartan et le graphe de Dynkin. Par la suite, nous exposons les trois types de fonctions avec les éléments dont nous nous sommes servis pour les trouver dans chacun des sept cas étudiés, soient $A_1 \times A_1$, A_2 , C_2 , G_2 , A_3 , B_3 et C_3 . Finalement, nous arrivons au but ultime de ce mémoire, qui est de présenter les décompositions de produits de ces trois familles de fonctions pour chacun des groupes de Lie compacts semi-simples que nous avons étudiés. Nous donnerons aussi, quelques cas spéciaux de décompositions de produits de ces fonctions pour le cas C_3 seulement. Tous ces résultats sont présentés sous forme de tableaux, dans les tables 3.1 à 3.15.

Chapitre 1

DÉFINITIONS

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et résultats concernant les groupes de Lie compacts semi-simples, qui sont indispensables au contenu de ce mémoire. Des aspects généralement moins connus, telles les définitions des trois familles de fonctions et quelques-unes de leurs propriétés sont énoncées en détails.

1.1. RÉFLEXION

Soit E un espace euclidien de dimension fini n . Nous notons le produit scalaire de $x, y \in E$, par $\langle x, y \rangle$. Pour tous les vecteurs non-nuls α de E , notons r_α , la réflexion (ou symétrie) par rapport au plan orthogonal à α . Par conséquent, $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$ et $r_\alpha(x) = x$ pour tous x tel que $\langle \alpha, x \rangle = 0$ (car x est dans le plan, donc reste sur lui-même lors de la réflexion). Soit $x \in E$, on a

$$r_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha. \quad (1.1.1)$$

En appliquant la formule ci-haut, nous constatons la validité de ce que nous avons énoncé :

$$r_\alpha(\alpha) = \alpha - 2 \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = -\alpha.$$

Et si $\langle x, \alpha \rangle = 0$

$$r_\alpha(x) = x - 2 \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = x.$$

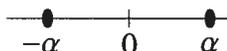
1.2. SYSTÈME DE RACINES

Définition 1.2.1. *Un sous-ensemble R de E est un système de racines dans E , si les axiomes suivants sont satisfaits :*

- i) R est un ensemble fini de vecteurs non-nuls.
- ii) R engendre E .
- iii) Si $\alpha, \beta \in R$ alors $r_\alpha(\beta) \in R$.
- iv) Si $\alpha, \beta \in R$ alors $\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ est un entier.

Nous observons que si $\alpha \in R$, alors $-\alpha \in R$.

Le seul système de racines de rang 1 est le système :



La figure précédente représente le cas en une dimension. Nous trouvons le système de racines simples $R \in E$, en deux dimensions, appliquant les réflexions aux vecteurs α_1 et α_2 , par rapport aux axes de réflexions r_{α_1} et r_{α_2} , qui sont respectivement orthogonaux à α_1 et α_2 . En trois dimensions, la situation est analogue : il s'agit d'ajouter α_3 et r_{α_3} . Par contre, nous n'avons pas nécessairement besoin de α_3 pour générer toutes les racines du système de racines.

1.3. BASES ET POIDS FONDAMENTAUX

Chaque élément de W transforme R en lui-même, par 1.2.1(iii). Comme R est un ensemble fini, W est un groupe fini. Par 1.2.1(ii), nous savons que R engendre E , mais ça ne veut pas dire que R est linéairement indépendant. Au contraire, nous voyons bien que R n'est pas linéairement indépendant, car pour tout $\alpha \in R$, $-\alpha \in R$ et donc, nous pouvons trouver une combinaison linéaire $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = 0$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, avec au moins un a_i non-nul. En fait, nous voulons trouver une base de R et donc de E .

Définition 1.3.1. Soit R un système de racines dans E . Un sous-ensemble S de R est appelé une base de racines simples de R , si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) S est une base pour l'espace vectoriel E .
- ii) Chaque $\beta \in R$ peut être écrit comme une combinaison linéaire

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$$

où les m_α sont des coefficients entiers de même signe (i.e tous non-négatifs ou tous non-positifs).

Nous poserons $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, en deux dimensions, et $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ en trois dimensions. Nous appelons cette base la α -base. Nous aurons aussi besoin de la ω -base qui s'obtient à l'aide de la base α , en faisant le changement de base suivant :

$$\alpha = C\omega \quad \omega = C^{-1}\alpha \quad (1.3.1)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ou $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, dépendant si nous sommes en dimension deux ou trois et $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ ou $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. La matrice de changement de base est la matrice de Cartan C que nous allons définir ultérieurement pour les groupes de rang deux et trois.

Nous pouvons aussi faire un changement d'une base duale vers une autre base duale comme ceci :

$$\check{\alpha} = C^T \check{\omega} \quad \check{\omega} = C^{T-1} \check{\alpha}. \quad (1.3.2)$$

Nous remarquons que si la matrice de Cartan C est symétrique, $C = C^T$, alors $\alpha = \check{\alpha}$ et $\omega = \check{\omega}$.

Finalement, une des propriétés que nous allons employer plus tard, dit que pour toute matrice de Cartan C , nous avons :

$$\langle \check{\alpha}_j, \omega_k \rangle = \langle \alpha_j, \check{\omega}_k \rangle = \frac{2\langle \alpha_j, \omega_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \delta_{jk} \quad (1.3.3)$$

Les éléments de S dans la base α sont appelés racines simples et dans la base ω , poids fondamentaux.

Soit S la base- α d'un système de racines R . Nous notons par R^+ l'ensemble des racines qui ont une combinaison linéaire d'éléments de S avec des coefficients non-négatifs. Un élément de R^+ est appelé une racine positive. Dans la base ω , nous ne retrouvons qu'une ou deux racines dominantes (plus grande racine), dépendant si le groupe contient une ou deux orbites. Notre description des groupes de Weyl va être en fonction de la base ω qui offre plus d'avantages que la base α .

Définition 1.3.2. Nous appelons λ un point intrinsèque, s'il est uniquement invariant sous la transformation triviale (identité) du groupe de Weyl. Si λ n'est pas intrinsèque, alors il existe i tel que $r_i \lambda = \lambda$.

Le réseau de poids P se définit par $P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $P = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \mathbb{Z}\omega_3$ en deux et trois dimensions respectivement. Nous pouvons ensuite lui extraire P^+ qui est

le réseau de poids dominants et qui s'écrit comme $P^+ = \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_1 + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_2$ pour le cas en deux dimensions et $P^+ = \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_1 + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_2 + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_3$ pour celui en trois dimensions. De plus, il existe un autre réseau en ce qui concerne l'étude des fonctions S . Il s'agit de P^{++} qui n'admet seulement que des points intrinsèques, c'est-à-dire que $P^{++} = \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_1 + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_2 + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_3$ pour la dimension trois et nous savons que c'est la même chose pour la dimension deux avec ω_3 en moins.

1.4. SYSTÈME DUAL

Soit R un système de racines dans E .

Proposition 1.4.1. *L'ensemble R^* des racines duales, $\check{\alpha}$, nommées aussi inverses, $\alpha \in R$, est un système de racines de E^* . Et encore plus, $\check{\check{\alpha}} = \alpha$ pour tout $\alpha \in R$.*

Aussi, pour trouver les racines duales à partir du système de racines, nous avons

$$\check{\alpha} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (1.4.1)$$

Par convention, le carré de la longueur de la plus grande racine simple est égale à deux, ce qui implique par 1.4.1 que la plus grande racine simple est égale à son dual.

1.5. LA RÉGION FONDAMENTALE

En général, la région fondamentale F de l'espace E^* d'un groupe est une région où chaque classe de conjugaison des éléments du groupe est représentée précisément par un seul point et chaque point représente une classe de conjugaison.

Le région fondamentale d'un groupe de Lie simple est composée des points x tel que $0 \leq \langle x, \xi_h \rangle \leq 1$, où ξ_h est la plus grande racine de R . Supposons

$$\xi_h = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 \quad (1.5.1)$$

en deux dimensions et

$$\xi_h = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + q_3\alpha_3 \quad (1.5.2)$$

en trois dimensions, où q_1, q_2 et q_3 sont des entiers positifs bien connus pour chaque système de racines. Alors, les sommets de la région fondamentale F sont :

$$\left\{ 0, \frac{\check{\omega}_1}{q_1}, \frac{\check{\omega}_2}{q_2} \right\} \quad (1.5.3)$$

et

$$\left\{ 0, \frac{\check{\omega}_1}{q_1}, \frac{\check{\omega}_2}{q_2}, \frac{\check{\omega}_3}{q_3} \right\}. \quad (1.5.4)$$

1.6. GROUPE DE WEYL

Définition 1.6.1. *Posons R un système de racines dans un espace vectoriel E . On note par $W(R)$ le groupe généré par les réflexions r_α , où les α sont des racines simples. $W(R)$ est appelé groupe de Weyl de R . C'est un groupe fini de transformations orthogonales de E .*

Le groupe W est un sous-groupe normal du groupe $Aut(R)$ des automorphismes de E laissant R invariant. Comme R engendre E , ces deux groupes peuvent être identifiés avec des sous-groupes du groupe de toutes les permutations de R . Ce sont des groupes finis.

Exemple : Quand R est un système de rang 2, le groupe W est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2n$, avec $n = 2$ pour le type $A_1 \times A_1$ qui a $2 \times 2 = 4$ éléments, $n=3$ pour A_2 qui a 6 éléments, $n=4$ pour B_2 qui a 8 éléments et $n=6$ pour G_2 qui a 12 éléments. Nous avons $Aut(R) = W$ lorsque R est de type B_2 ou G_2 et $|Aut(R) : W| = 2$ quand R est de type $A_1 \times A_1$.

1.6.1. Orbite du groupe de Weyl

Un orbite du groupe de Weyl W_λ de λ dans le réseau P est l'ensemble de tous les points distincts de P obtenus par toutes les applications possibles de W à $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 = (a, b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous écrivons $W\lambda = W_\lambda$. L'orbite W_λ est toujours finie. La cardinalité $|W_\lambda|$ de W_λ est le nombre différents de points qui sont générés à partir de λ par W . La nombre maximal de points dans l'orbite égale l'ordre du groupe de Weyl W , $|W_\lambda| = |W|$. De plus, il est possible que $|W_\lambda| \mid |W|$. Chaque $\lambda \in R$ est contenu dans une seule W -orbite. Les éléments de W_λ sont appelés poids. Chaque orbite W_λ contient un unique élément appartenant à P^+ , que nous nommons le poids dominant de W_λ . Nous pouvons reconnaître le poids dominant facilement, car il est le seul à posséder des coordonnées toutes entières et non-négatives dans la base ω . Notons que pour le cas en trois dimensions, nous utilisons $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = (a, b, c)$, où $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1.6.2. Sous-groupe pair, W^e , du groupe de Weyl

Pour extraire W^e du groupe de Weyl, il suffit de prendre seulement les éléments générés par un nombre pair de réflexions. Ce groupe se nomme sous-groupe pair du groupe de Weyl. Nous le notons W^e et

$$W^e = \{r_j r_k | j \neq k; 1 \leq j, k \leq n\}$$

Aussi, nous savons que W^e est un sous-groupe fini de W tel que

$$W = W^e \cup r_i W^e.$$

Observons que l'index i dans la dernière équation est arbitraire, car pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $r_i r_j \in W^e$. Soit $\lambda \in E$, un point arbitraire de l'espace euclidien E . Nous écrivons W_λ^e l'orbite du point λ par rapport à l'action du sous-groupe pair de Weyl.

1.7. MATRICE DE CARTAN

Définition 1.7.1. *La matrice de Cartan de R est la matrice*

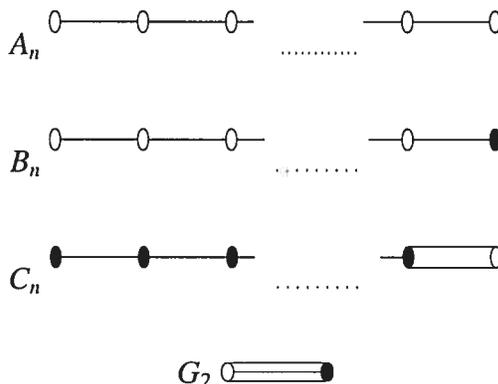
$$C_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \quad \text{où } \alpha_i, \alpha_j \in S. \quad (1.7.1)$$

Proposition 1.7.1. *Un système de racines est déterminé à un isomorphisme près à sa matrice de Cartan.*

1.8. DIAGRAMME DE DYNKIN

Un graphe de Dynkin est un graphe fini et chaque paire de sommets distincts est joint par 0, 1, 2 ou 3 arêtes. Chaque sommet est d'une couleur blanche ou noire. Posons R un système de racines et S une base de R . Le graphe de Dynkin de R est défini comme ceci : Les sommets sont les éléments de S . Deux sommets distincts α_1 et α_2 sont joints par 0, 1, 2 ou 3 arêtes, dépendant si l'angle entre les deux racines est de $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ ou $5\pi/6$. Aussi, pour voir le ratio de la longueur des racines, il faut mettre les sommets de deux couleurs différentes : blanc lorsque le carré de la longueur de la racine est égale à 2 et noir lorsque c'est égale à 1. Exceptionnellement, dans le cas de G_2 , le sommet blanc représente encore 2 pour le carré de la longueur de la racine, tandis que le sommet noir va décrire une racine de longueur au carré égale à $2/3$.

Voici les diagrammes de Dynkin, dont nous aurons besoin au cours de notre étude.



Proposition 1.8.1. *Spécifier un diagramme de Dynkin est équivalent à spécifier une matrice de Cartan. Il détermine un système de racines simples à un isomorphisme près.*

Expliquons comment déterminer une matrice de Cartan à partir d'un diagramme de Dynkin.

Premièrement, si le j -ième point représentant la j -ième racine est blanc, $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = 2$ et s'il est noir, $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = 1$, sauf dans le cas de G_2 , où le produit scalaire de la racine par elle-même est $2/3$. Si deux racines α_i et α_j ne sont pas reliées par aucune arête, alors $C_{ij} = C_{ji} = 0$, car $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$. Ensuite, si deux racines sont reliées par une, deux ou trois arêtes, nous pouvons trouver C_{ij} à l'aide de la formule (1.7.1) spécifiée dans la section 1.7

1.9. LES TROIS FAMILLES DE FONCTIONS

1.9.1. C-fonctions

Les fonctions C peuvent être écrites sous forme d'exponentielles. En deux dimensions, nous posons $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$ et $\nu = x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2$, où $a, b \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Il est important de toujours prendre ν par rapport à la base duale choisie initialement pour λ . Par exemple, si $\lambda = a\check{\omega}_1 + b\check{\omega}_2$, alors nous prenons $\nu = x\omega_1 + y\omega_2$.

$$C_\lambda(x, y) = \sum_{\mu \in W_\lambda} e^{2\pi i \langle \mu, \nu \rangle} \quad \lambda \in P^+ \text{ et } \nu \in \mathbb{R}^2, \quad (1.9.1)$$

où W_λ sont tous les orbites du groupe de Weyl attachés au cas étudié.

1.9.2. E -fonction

Les fonctions E sont aussi écrites sous forme exponentielle. La différence est que nous prenons seulement les termes qui sont dans les orbites du sous-groupe pair du groupe de Weyl associé.

$$E_\lambda(x, y) = \sum_{\mu \in W_\lambda^e} e^{2\pi i \langle \mu, v \rangle} \quad \lambda \in P^+ \cup r_\alpha P^+ \text{ et } v \in \mathbb{R}^2. \quad (1.9.2)$$

1.9.3. S -fonction

Les S -fonctions sont des fonctions avec parfois des signes négatifs, parfois des signes positifs devant les exponentielles, dépendant si μ appartient ou pas à W_λ^e . S'il y appartient le signe est positif et s'il n'y appartient pas négatif. Cette fonction peut s'exprimer en terme de E et C .

$$S_\lambda(x, y) = 2E - C \quad \lambda \in P^{++} \text{ et } v \in \mathbb{R}^2. \quad (1.9.3)$$

Remarque 1. En trois dimensions, les fonctions se définissent de la même manière. Seulement, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$ et $v = x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 + z\check{\omega}_3$ où $v \in \mathbb{R}^3$.

1.10. SYMÉTRIE ET ANTISYMÉTRIES DES C -FONCTIONS ET S -FONCTIONS

Maintenant, introduisons la notion de réflexion affine.

Définition 1.10.1. Une réflexion affine est une réflexion suivie d'une translation avec un axe de réflexion qui passe par l'origine.

La fonction C est symétrique, c'est-à-dire que

$$C_\lambda(r_k z) = C_\lambda(z)$$

$$C_\lambda(R_{\xi_h} z) = C_\lambda(z),$$

et la fonction S est antisymétrique

$$S_\lambda(r_k z) = -S_\lambda(z), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$S_\lambda(R_{\xi_h} z) = -S_\lambda(z),$$

où r_k , $k = 1, 2, \dots, n$ sont les réflexions du groupe de Weyl et R_{ξ_h} est la réflexion affine reliée à la plus grande racine ξ_h et $\lambda \in P^{++}$.

Chapitre 2

C, S ET E -FONCTIONS À DEUX VARIABLES ET TROIS VARIABLES

2.1. $A_1 \times A_1$

2.1.1. Diagramme de Dynkin et la matrice de Cartan

Le diagramme de Dynkin pour le cas $A_1 \times A_1$ est

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

Duquel, nous pouvons déduire les produits scalaires suivants :

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0, \quad \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2.$$

Par conséquent, la matrice de Cartan et son inverse sont

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.1.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

En se servant de la matrice de Cartan et de son inverse, nous obtenons comme changement de base :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2\omega_1 & \check{\alpha}_1 = \alpha_1 & \check{\omega}_1 = \omega_1 \\ \alpha_2 = 2\omega_2 & \check{\alpha}_2 = \alpha_2 & \check{\omega}_2 = \omega_2. \end{array}$$

2.1.3. Système de racines et réflexions du groupe fini de Weyl

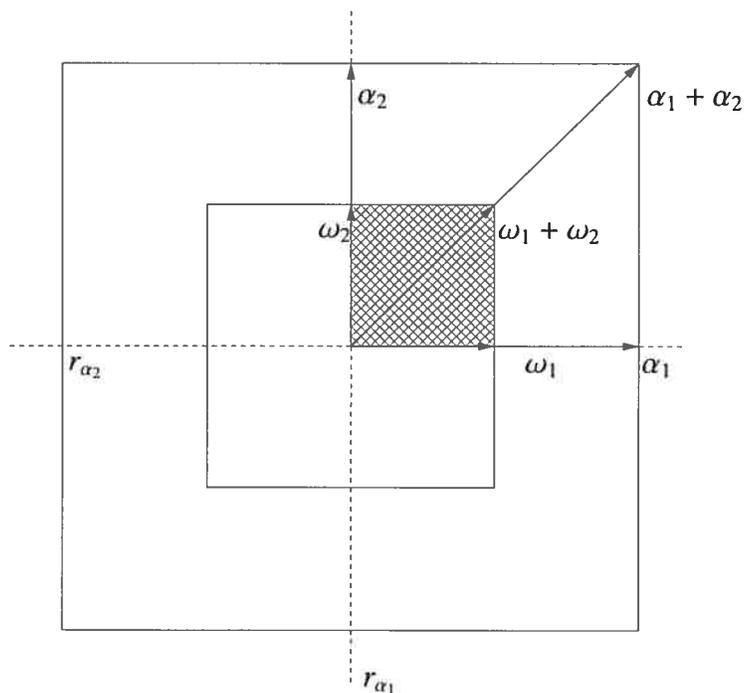
Des racines simples α_1 et α_2 , nous accomplissons une réflexion à partir des axes de symétrie r_{α_1} et r_{α_2} . De cette façon, il en résulte le système de racines $R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}$, qui géométriquement représentent les points milieu des arêtes d'un carré de côté de longueur $2\sqrt{2}$.

2.1.4. Région fondamentale

Comme $A_1 \times A_1$ n'est pas un groupe de Lie simple, sa région fondamentale est le produit cartésien de deux segments de A_1 , donc un carré. Ainsi, la région fondamentale de $A_1 \times A_1$ est

$$F(A_1 \times A_1) = \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Les sommets de la région sont 0 , ω_1 , ω_2 et $\omega_1 + \omega_2$. Alors, les côtés ont une longueur de $|\omega_1| = |\omega_2| = \sqrt{2}/2$. Dans la figure qui suit, nous imageons la région fondamentale par la partie hachurée. Il en sera ainsi pour toutes les autres figures des cas ultérieurs.



2.1.5. Orbites du groupe de Weyl

Supposons $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^+$. Alors, l'orbite du groupe de Weyl W_λ est donné par :

$$W_{(a,b)} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } a = b = 0 \\ \{\pm(a, 0)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ \{\pm(0, b)\} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \{\pm(a, b), \pm(a, -b)\} & \text{si } a, b \neq 0 \end{cases}$$

Considérons un exemple de calculs, pour $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 = (a, b)$ où $a, b \neq 0$ et selon une réflexion par rapport à r_{α_1} , qui est perpendiculaire à α_1 , en utilisant 1.1.1, 1.3.1 et 1.3.2.

$$\begin{aligned} r_{\alpha_1}(a\omega_1 + b\omega_2) &= a\omega_1 + b\omega_2 - \frac{2\langle a\omega_1 + b\omega_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \alpha_1 \\ &= \frac{a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2 - \frac{2\langle \frac{a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2, \alpha_1 \rangle}{2} \alpha_1 \\ &= \frac{a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2 - \frac{a}{2}\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \alpha_1 - \frac{b}{2}\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \alpha_1 \\ &= \frac{a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2 - a\alpha_1 \\ &= \frac{-a}{2}\alpha_1 + \frac{b}{2}\alpha_2 \\ &= -a\omega_1 + b\omega_2 \end{aligned}$$

Nous constatons que si notre système d'orbite contient (a, b) , en faisant la réflexion par rapport à l'axe perpendiculaire à α_1 , nous retrouvons aussi $(-a, b)$. Nous poursuivons de cette façon avec l'autre axe de symétrie et selon le même algorithme appliqués aux autres éléments trouvés. Par exemple, nous pourrions faire la réflexion par rapport à l'axe de symétrie r_{α_2} du vecteur $-a\omega_1 + b\omega_2$ qui serait $-a\omega_1 - b\omega_2$. Ce qui justifie la présence de l'élément $(-a, -b)$ dans notre orbite.

2.1.6. Orbites du sous-groupe pair de Weyl

Les composantes de l'orbite du groupe pair de Weyl sont celles obtenues à partir d'un nombre pair de réflexions :

$$W_{(a,b)}^e = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } a = b = 0 \\ \{\pm(a, 0)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ \{\pm(0, b)\} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \{\pm(a, b)\} & \text{si } a, b \neq 0 \end{cases}$$

2.1.7. C-fonctions

Les C-fonctions de $A_1 \times A_1$ avec $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$ et $\nu = x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 = x\omega_1 + y\omega_2$, sont le produit de deux C-fonctions A_1 :

$$C_{a,b}(x, y) = C_a(x)C_b(y) = 2 \cos(\pi ax) 2 \cos(\pi by) = 4 \cos(\pi ax) \cos(\pi by) \quad (2.1.1)$$

Ces fonctions peuvent se calculer à l'aide de la définition de la C-fonction.

$$\begin{aligned} C_{(a,b)}(x, y) &= \sum_{\mu \in W_\lambda} e^{2\pi i \langle \mu, z \rangle} \\ &= e^{2\pi i \langle a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle} + e^{2\pi i \langle -a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle} \\ &\quad + e^{2\pi i \langle a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle} + e^{2\pi i \langle -a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle} \\ &= e^{2\pi i \left(\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} \right)} + e^{-2\pi i \left(\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} \right)} + e^{2\pi i \left(\frac{ax}{2} - \frac{by}{2} \right)} + e^{2\pi i \left(-\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} \right)} \\ &= \cos(\pi(ax + by)) + i \sin(\pi(ax + by)) + \cos(\pi(ax + by)) - i \sin(\pi(ax + by)) \\ &\quad + \cos(\pi(ax - by)) + i \sin(\pi(ax - by)) + \cos(\pi(ax - by)) - i \sin(\pi(ax - by)) \\ &= 2 \cos(\pi(ax + by)) + 2 \cos(\pi(ax - by)) \\ &= 4 \cos(\pi ax) \cos(\pi by) \end{aligned}$$

La justification du passage de la deuxième à la troisième égalité se fait comme suit :

$$\begin{aligned} \langle a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle &= ax \langle \omega_1, \omega_1 \rangle + ay \langle \omega_1, \omega_2 \rangle + bx \langle \omega_2, \omega_1 \rangle + by \langle \omega_2, \omega_2 \rangle \\ &= ax \left\langle \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1}{2} \right\rangle + ay \left\langle \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2} \right\rangle + bx \left\langle \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1}{2} \right\rangle + by \left\langle \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_2}{2} \right\rangle \\ &= \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle -a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle &= -\langle a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \rangle \\ &= \frac{-ax}{2} + \frac{-by}{2}.\end{aligned}$$

Et ainsi de suite, avec les autres produits scalaires.

Ainsi, nous obtenons les fonctions sont les suivantes :

$$C_{(0,0)}(x, y) = 1$$

$$C_{(a,0)}(x, y) = 2 \cos(\pi ax)$$

$$C_{(0,b)}(x, y) = 2 \cos(\pi by)$$

$$C_{(a,b)}(x, y) = 4 \cos(\pi ax) \cos(\pi by)$$

2.1.8. Orthogonalité des C-fonctions

L'orthogonalité des fonctions peut être facilement vérifiée, en définissant le produit scalaire de deux fonctions comme étant l'intégrale du produit des deux fonctions sur la région fondamentale.

$$\int_F C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dF = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dy \quad (2.1.2)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq c \text{ et } b \neq d, \\ \frac{1}{2} & \text{si } a = b = c = d = 0, \\ 1 & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d = 0 \\ & \text{ou } a = c = 0 \text{ et } b = d > 0, \\ 2 & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d > 0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Nous constatons que lorsque les deux C-fonctions ne sont pas les mêmes, leurs produits scalaires égale à 0. Donc les fonctions C sont orthogonales entre elles.

2.1.9. S-fonctions

Comme nous l'avons énoncé au chapitre précédent, les fonctions S sont constituées des mêmes termes que les fonctions C, à la différence que les termes où $\mu \in W_\lambda^e$ ont un signe positif devant l'exponentielle et les autres termes sont précédés un signe négatif :

$$\begin{aligned}
S_{a,b}(x, y) &= e^{2\pi i(a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} + e^{2\pi i(-a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} \\
&\quad - e^{2\pi i(a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} - e^{2\pi i(-a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} \\
&= 2 \cos(\pi(ax + by)) - 2 \cos(\pi(ax - by)) \\
&= -4 \sin(a\pi x) \sin(b\pi y).
\end{aligned}$$

2.1.10. E-fonctions

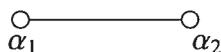
Nous gardons seulement les termes qui sont positifs dans la fonction S , c'est à dire les éléments où $\mu \in W_\lambda^e$.

$$\begin{aligned}
E_{a,b}(x, y) &= e^{2\pi i(a\omega_1 + b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} + e^{2\pi i(-a\omega_1 - b\omega_2, x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2)} \\
&= 2 \cos(\pi(ax + by))
\end{aligned}$$

2.2. A_2

2.2.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

Le groupe de Weyl relié au cas A_2 est représenté par le diagramme de Dynkin suivant :



Toutes les racines de A_2 sont de même longueur. Les deux racines simples avec un angle relatif de $\frac{2\pi}{3}$, entre elles, fournissent les produits scalaires suivants :

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1, \quad \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2.$$

Conséquemment la matrice de Cartan de A_2 et sa matrice inverse sont

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

Nous pouvons exprimer le changement de base et la base duale, grâce à la matrice de Cartan C et à son inverse C^{-1} .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2, & \omega_1 &= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) & \check{\alpha}_1 &= \alpha_1 & \check{\omega}_1 &= \omega_1. \\ \alpha_2 &= -\omega_1 + 2\omega_2, & \omega_2 &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) & \check{\alpha}_2 &= \alpha_2 & \check{\omega}_2 &= \omega_2. \end{aligned}$$

2.2.3. Système de racines

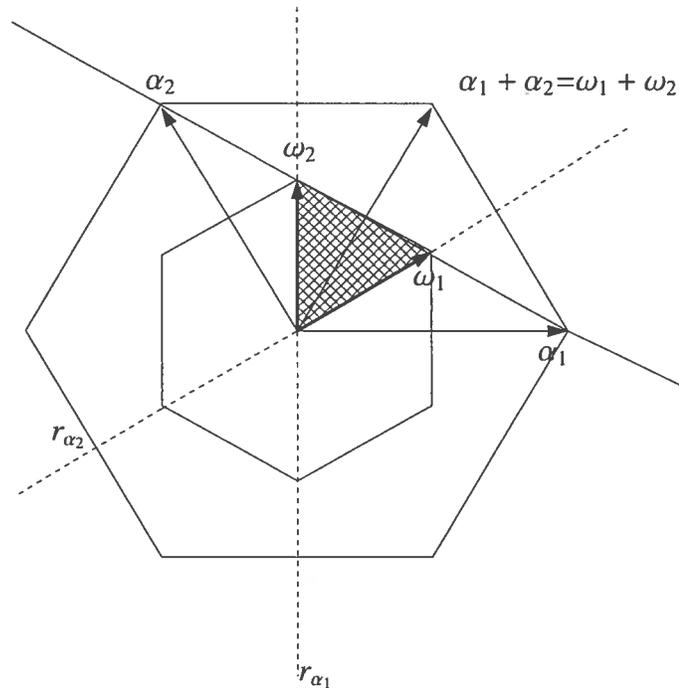
Le système de racines est donc $R = \{\pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}$ qui représente géométriquement les sommets d'un hexagone régulier. La plus grande racine ξ_h est égale à $\alpha_1 + \alpha_2$.

2.2.4. Région fondamentale

D'après la propriété donnée en (1.4.3), les sommets du triangle de la région fondamentale de A_2 sont $\left\{0, \frac{\check{\omega}_1}{q_1}, \frac{\check{\omega}_2}{q_2}\right\}$, où $q_1 = q_2 = 1$, car $\xi_h = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\check{\omega}_1 = \omega_1$, $\check{\omega}_2 = \omega_2$. Donc, les sommets sont $\{0, \omega_1, \omega_2\}$, qui représente un triangle équilatéral. Ce qui est équivalent à

$$F = \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x, y \text{ et } x + y \leq 1\}.$$

Chacun des côtés de la région fondamentale sont orthogonaux soit à α_1 ou à α_2 ou à la plus grande racine $\xi_h = \alpha_1 + \alpha_2$.



2.2.5. Orbites du groupe de Weyl

Soit $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 = (a, b) \in P^+$. Alors, les orbites du groupe de Weyl de A_2 $W_\lambda \equiv W_{(a,b)}$ consiste en un, trois ou six points générés par λ et par une action répétée des réflexions r_{α_1} et r_{α_2} .

$$W_{(a,b)} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } a = b = 0 \\ \{(a, 0), (-a, a), (0, -a)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ \{(0, b), (b, -b), (-b, 0)\} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \{(a, b), (-a, a+b), (a+b, -b), \\ (-b, -a), (b, -a-b), (-a-b, a)\} & \text{si } a, b \neq 0 \end{cases}$$

2.2.6. Orbites du sous-groupe paire de Weyl

Les orbites du sous-groupe pair de Weyl, si nous éliminons les termes venant d'un nombre impair de réflexions, sont :

$$W_{(a,b)}^e = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si } a = b = 0 \\ \{(a, 0), (-a, a), (0, -a)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0 \\ \{(0, b), (b, -b), (-b, 0)\} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ \{(a, b), (b, -a - b), (-a - b, a)\} & \text{si } a, b \neq 0 \end{cases}$$

2.2.7. Les C-fonctions

Grâce à aux orbites du groupe de Weyl, nous pouvons trouver les polynômes $C_{(a,b)}(x, y)$. On définit

$$C_{(0,0)}(x, y) = 1$$

Maintenant, grâce à l'équation 1.9.1, nous obtenons :

$$C_{(a,0)}(x, y) = e^{(2\pi i/3)(2x+y)a} + e^{(2\pi i/3)(y-x)a} + e^{-(2\pi i/3)(x+2y)a},$$

$$C_{(0,b)}(x, y) = e^{-(2\pi i/3)(2x+y)b} + e^{(2\pi i/3)(x-y)b} + e^{(2\pi i/3)(x+2y)b},$$

$$C_{(a,b)}(x, y) = e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} + e^{(2\pi i/3)((b-a)x+(a+2b)y)} + e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} \\ + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(b+2a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((2b+a)x+(b+2a)y)}.$$

Notons que si $a = b$, la fonction passe de \mathbb{C} à \mathbb{R} qui sera

$$C_{(a,a)} = 2 \cos(2\pi a(x + y)) + 2 \cos(2\pi a y) + 2 \cos(2\pi a x). \quad (2.2.1)$$

2.2.8. Orthogonalité des C-fonctions

Pour vérifier l'orthogonalité des fonctions C , il suffit de faire comme dans la section précédente, mais comme la région fondamentale n'est plus la même, les bornes d'intégration sont différentes. Pour prouver cette orthogonalité, nous avons besoin du produit scalaire de deux fonctions dans les complexes, qui est défini comme suit

$$\langle f, g \rangle = \int_F f \bar{g} dF. \quad (2.2.2)$$

Par conséquent,

$$\int_F C_{(a,b)}(x,y) \overline{C_{(c,d)}(x,y)} dF = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}} dy \int_0^{\sqrt{3}y} C_{(a,b)}(x,y) C_{(d,c)}(x,y) dy \quad (2.2.3)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq c \text{ et } b \neq d, \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{si } a = b = c = d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d = 0 \\ & \text{ou } a = c = 0 \text{ et } b = d > 0, \\ \sqrt{3} & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d > 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Si $a = b = c = d = 0$, l'intégrale équivaut à l'aire de la région, qui est bel et bien $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Et les fonctions sont orthogonales entre elles, car lorsqu'elles ne sont pas les mêmes, leur produit scalaire est 0.

2.2.9. S-fonctions

$$S_{(a,b)}(x,y) = e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a+2b)y)} - e^{(2\pi i/3)((b-a)x+(a+2b)y)} - e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} \\ + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(b+2a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)} - e^{-(2\pi i/3)((2b+a)x+(b+2a)y)}. \quad (2.2.5)$$

2.2.10. Les E-fonctions

En prenant les termes trouvés dans la section sur l'orbite du sous-groupe pair de Weyl, il advient que la fonction E s'exprime :

$$E_{(a,b)}(x,y) = e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a+2b)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(b+2a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)}. \quad (2.2.6)$$

2.3. C_2

2.3.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

Nous pouvons faire le contraire de ce que nous faisons jusqu'à présent, et donner la matrice de Cartan et par la suite en déduire le graphe de Dynkin associé.

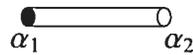
Voici donc la matrice de Cartan, pour C_2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De cette matrice, nous pouvons en tirer les produits scalaires qui nous seront utiles

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1, \quad \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2.$$

De ceux-ci, nous développons le diagramme de Dynkin, qui possède deux arêtes. Ceci signifie que α_1 et α_2 sont positionnées à $3\pi/4$ de différence et le premier point est noir, car $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1$ et le deuxième point est blanc, à cause de $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2$. Donc, le diagramme est :



2.3.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

De la matrice de Cartan et de son inverse, nous trouvons les formules qui vont nous être utiles pour traiter le cas C_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2, & \omega_1 &= \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2, & \check{\alpha}_1 &= 2\alpha_1, & \check{\omega}_1 &= \check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2. \\ \alpha_2 &= -2\omega_1 + 2\omega_2, & \omega_2 &= \alpha_1 + \alpha_2, & \check{\alpha}_2 &= \alpha_2, & \check{\omega}_2 &= \frac{1}{2}\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_2. \end{aligned}$$

2.3.3. Système de racines

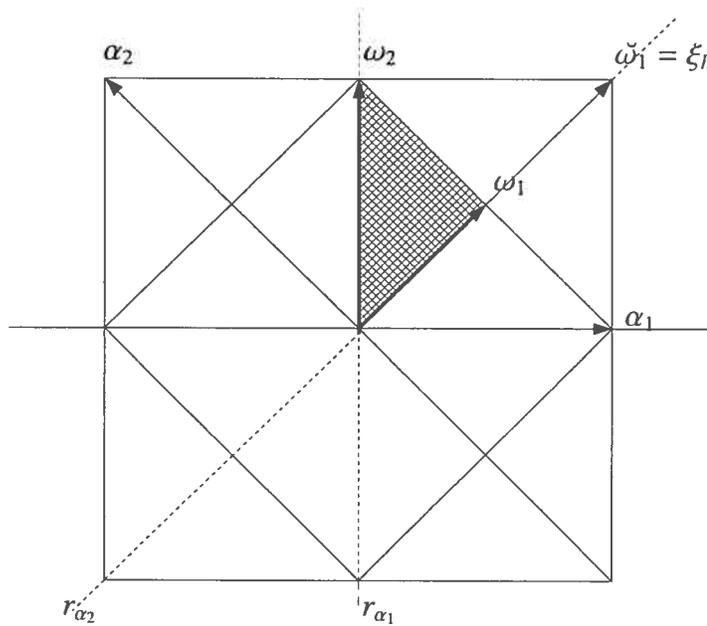
Le système de racines s'obtient en faisant faire les réflexions aux deux vecteurs α_1 et α_2 par rapport aux axes de symétries r_{α_1} et r_{α_2} et aux vecteurs qu'ils engendrent à l'aide de ces symétries. $R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2)\}$ représente géométriquement les sommets et les points milieu des arêtes d'un carré. La plus grande racine est $\xi_h = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

2.3.4. Région fondamentale

La région fondamentale de C_2 , $F(C_2)$ est définie

$$F(C_2) = \{x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \mid x, y \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x + y \leq 1\}. \quad (2.3.1)$$

Alors, ces sommets sont $\{0, \check{\omega}_1/2, \check{\omega}_2\} = \{0, \omega_1, \omega_2\}$. Géométriquement, cette situation représente un triangle avec des angles de $\pi/2$, $\pi/4$ et $\pi/4$.



2.3.5. Orbites du groupe de Weyl

Comme dans les cas précédents, posons $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^+$ et faisons lui faire toutes les réflexions possibles. Alors, les orbites du groupe de Weyl contiennent un, quatre ou huit points. Plus précisément,

$$W_{(a,b)} = \begin{cases} \{(0, 0)\}, & \text{si } a = b = 0, \\ \{\pm(a, 0), \pm(-a, a)\}, & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ \{\pm(0, b), \pm(2b, -b)\}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ \{\pm(a, b), \pm(-a, a+b), \pm(a+2b, -b), \pm(a+2b, -a-b)\}, & \text{si } a, b \neq 0. \end{cases}$$

2.3.6. Orbites paires du sous-groupe de Weyl

$$W_{(a,b)}^e = \begin{cases} \{(0, 0)\}, & \text{si } a = b = 0, \\ \{\pm(a, 0), \pm(-a, a)\}, & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ \{\pm(0, b), \pm(2b, -b)\}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ \{\pm(a, b), \pm(a+2b, -a-b)\}, & \text{si } a, b \neq 0. \end{cases}$$

2.3.7. C-fonctions

Les C-fonctions de C_2 , avec $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$ et $\nu = x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2$ sont les suivantes :

$$C_{(0,0)}(x, y) = 1,$$

$$C_{(a,0)}(x, y) = 2 \cos(\pi ay) + 2 \cos(\pi a(2x + y)),$$

$$C_{(0,b)}(x, y) = 2 \cos(2\pi bx) + 2 \cos(2\pi b(x + y)),$$

$$C_{(a,b)}(x, y) = 2 \cos(\pi(2bx + (a + 2b)y)) + 2 \cos(\pi((2a + 2b)x + (a + 2b)y)) \\ + 2 \cos(\pi(ay + (2a + 2b)x)) + 2 \cos(\pi(2bx - ay)), \quad \text{où } a, b > 0$$

2.3.8. Orthogonalité des C-fonctions

L'orthogonalité des C-fonctions peut être vérifiée par

$$\int_F C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dF = \int_0^{1/2} dx \int_0^{1-2x} C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dy \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq c \text{ et } b \neq d, \\ \frac{1}{4} & \text{si } a = b = c = d = 0, \\ 1 & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d = 0 \\ & \text{ou } a = c = 0 \text{ et } b = d > 0, \\ 2 & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d > 0. \end{cases}$$

En particulier, nous avons pour tout $(a, b) \neq 0$ et $(c, d) = 0$

$$\int_F C_{(a,b)}(x, y) dF = 0$$

2.3.9. S-fonctions

$$S_{(a,b)}(x, y) = -2 \cos(\pi(2bx + (a + 2b)y)) + 2 \cos(\pi((2a + 2b)x + (a + 2b)y)) \\ - 2 \cos(\pi(ay + (2a + 2b)x)) + 2 \cos(\pi(2bx - ay))$$

2.3.10. E-fonctions

$$E_{(a,b)}(x, y) = 2 \cos(\pi((2a + 2b)x + (a + 2b)y)) + 2 \cos(\pi(2bx - ay)), \quad \text{où } a, b > 0$$

2.4. G_2

2.4.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le graphe de Dynkin relié à G_2 est :



De ce diagramme, nous en tirons la matrice de Cartan et son inverse.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les longueurs et les angles relatifs qui en découlent sont représentés par les produits scalaires :

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1 \quad \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2 \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \frac{2}{3}.$$

2.4.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

À partir de la sous-section précédente, nous énonçons les résultats suivants pour les bases :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 2\omega_1 - 3\omega_2 & \omega_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & \check{\alpha}_1 = \alpha_1 & \check{\omega}_1 = \omega_1 \\ \alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 & \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 & \check{\alpha}_2 = 3\alpha_2 & \check{\omega}_2 = 3\omega_2. \end{array}$$

2.4.3. Système de racines

Encore une fois, en partant avec les deux racines simples α_1 et α_2 et en leur faisant faire des réflexions successives par rapport aux axes de symétrie r_{α_1} et r_{α_2} , nous créons les douze racines suivantes :

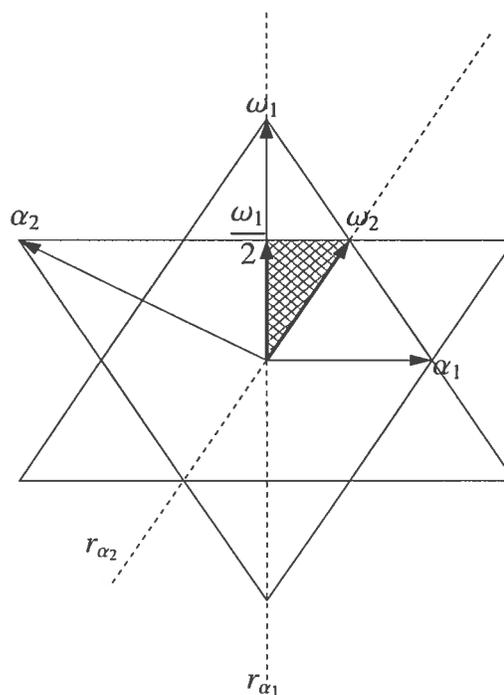
$$R = \{\pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_1, \pm\alpha_2\}. \quad (2.4.1)$$

Géométriquement, ceci représente les sommets d'une étoile hexagonale régulière. Les racines longues sont $\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$ et les courtes sont $\pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)$. De plus, la plus grande racine $\xi_h = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

2.4.4. Région fondamentale

Nous savons que les sommets de la région fondamentale de G_2 sont $\left\{0, \frac{\check{\omega}_1}{2}, \frac{\check{\omega}_2}{3}\right\} = \left\{0, \frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right\}$. Ce qui forme la moitié d'un triangle équilatéral. Nous pouvons aussi écrire la région fondamentale de cette manière :

$$F(G_2) = \{x\check{\omega}_1 + y\check{\omega}_2 \mid 0 \leq x, y; 1 \geq 2x + 3y\}. \quad (2.4.2)$$



2.4.5. Orbites du groupe de Weyl

Soit $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \equiv (a, b) \in P^+$, les orbites du groupe de Weyl consistent en un, six ou douze points générés par les réflexions r_{α_1} et r_{α_2} , et ils sont tous équidistants de

l'origine.

$$W_{(a,b)} = \begin{cases} \{(0, 0)\}, & \text{si } a = b = 0, \\ \{\pm(a, 0), \pm(-a, 3a), \pm(2a, -3a)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ \{\pm(0, b), \pm(b, -b) \pm (-b, 2b)\}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ \{\pm(a, b), \pm(-a, 3a + b), \pm(a + b, -b), \pm(2a + b, -3a - b), \\ \pm(-a - b, 3a + 2b), \pm(2a + b, -3a - 2b)\}, & \text{si } a, b \neq 0. \end{cases}$$

2.4.6. Orbites du sous-groupe pair de Weyl

$$W_{(a,b)}^e = \begin{cases} \{(0, 0)\}, & \text{si } a = b = 0, \\ \{\pm(a, 0), \pm(-a, 3a), \pm(2a, -3a)\} & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ \{\pm(0, b), \pm(b, -b) \pm (-b, 2b)\}, & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ \{\pm(a, b), \pm(2a + b, -3a - b), \pm(-a - b, 3a + 2b)\} & \text{si } a, b \neq 0. \end{cases}$$

2.4.7. C-fonctions

Dans ce cas-ci, pour n'importe quel $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$ et $\nu = a\check{\omega}_1 + b\check{\omega}_2$, la fonction C est réelle, car pour chaque poids, $\mu \in C_\lambda$, nous pouvons trouver $-\mu \in C_\lambda$. Donc, toutes les exponentielles dans $C_\lambda(z)$ sont combinées en $2 \cos(2\pi\langle\mu, \nu\rangle)$.

$$C_{(0,0)}(x, y) = 1$$

$$C_{(a,0)}(x, y) = 2 \cos(2\pi a(2x + 3y)) + 2 \cos(2\pi ax) + 2 \cos(2\pi a(x + 3y))$$

$$C_{(0,b)}(x, y) = 2 \cos(2\pi b(x + y)) + 2 \cos(2\pi by) + 2 \cos(2\pi b(x + 2y))$$

$$C_{(a,b)}(x, y) = 2 \cos(2\pi((a + b)x + by)) + 2 \cos(2\pi(ax + (3a + b)y))$$

$$+ 2 \cos(2\pi((2a + b)x + (3a + b)y)) + 2 \cos(2\pi((2a + b)x + (3a + 2b)y))$$

$$+ 2 \cos(2\pi(ax - by)) + 2 \cos(2\pi((a + b)x + (3a + 2b)y)).$$

2.4.8. Orthogonalité des C-fonctions

$$\int_F C_{(a,b)}(x,y)C_{(c,d)}(x,y)dF = \sqrt{3} \int_0^{1/2} dx \int_0^{1/3-1/2x} C_{(a,b)}(x,y)C_{(c,d)}(x,y)dy$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq c \text{ et } b \neq d, \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \text{si } a = b = c = d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d = 0 \\ & \text{ou } a = c = 0 \text{ et } b = d > 0, \\ & \text{si } a = c > 0 \text{ et } b = d > 0. \end{cases}$$

2.4.9. S-fonctions

$$S_{(a,b)}(x,y) = 2 \cos(2\pi((a+b)x + by)) + 2 \cos(2\pi(ax + (3a+b)y))$$

$$- 2 \cos(2\pi((2a+b)x + (3a+b)y)) + 2 \cos(2\pi((2a+b)x + (3a+2b)y))$$

$$- 2 \cos(2\pi(ax - by)) - 2 \cos(2\pi((a+b)x + (3a+2b)y)).$$

2.4.10. E-fonctions

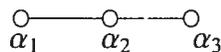
$$E_{(a,b)}(x,y) = 2 \cos(2\pi((a+b)x + by)) + 2 \cos(2\pi(ax + (3a+b)y))$$

$$+ 2 \cos(2\pi((2a+b)x + (3a+2b)y))$$

2.5. A_3

2.5.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

Le diagramme et la matrice sont mutuellement reliés. À partir d'un des deux, nous pouvons trouver l'autre et vice-versa. Tout d'abord, le diagramme de Dynkin et la matrice de Cartan rattachée à ce graphe sont les suivants :



$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, voici les produits scalaires qui ont été utiles pour trouver les composantes de la matrice et qui ont été trouvés grâce au graphique de Dynkin.

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= 2 & \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle &= 2 & \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle &= 2. \\ \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= -1 & \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle &= -1 & \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

2.5.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

Avec la matrice de Cartan, son inverse et sa transposée, nous retrouvons les formules des changements de bases et de bases duales.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2 & \omega_1 &= \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 & \check{\alpha}_1 &= \alpha_1 & \check{\omega}_1 &= \omega_1. \\ \alpha_2 &= -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 & \omega_2 &= \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 & \check{\alpha}_2 &= \alpha_2 & \check{\omega}_2 &= \omega_2. \\ \alpha_3 &= -\omega_2 + 2\omega_3 & \omega_3 &= \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3 & \check{\alpha}_3 &= \alpha_3 & \check{\omega}_3 &= \omega_3. \end{aligned}$$

2.5.3. Système de racines

Nous appliquons le même algorithme qu'à deux variables pour chercher le système de racines d'un groupe de Weyl en trois dimensions. Nous débutons donc avec les racines simples α_1 , α_2 et α_3 et nous faisons les réflexions par rapport aux axes de réflexion r_{α_1} , r_{α_2} et r_{α_3} , qui sont respectivement orthogonaux aux racines α_1 , α_2 et α_3 . Par la suite, nous continuons ce procédé avec les racines déjà trouvées. Nous obtenons donc le système de racines

$$R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\}. \quad (2.5.1)$$

La plus grande racine est $\xi_h = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

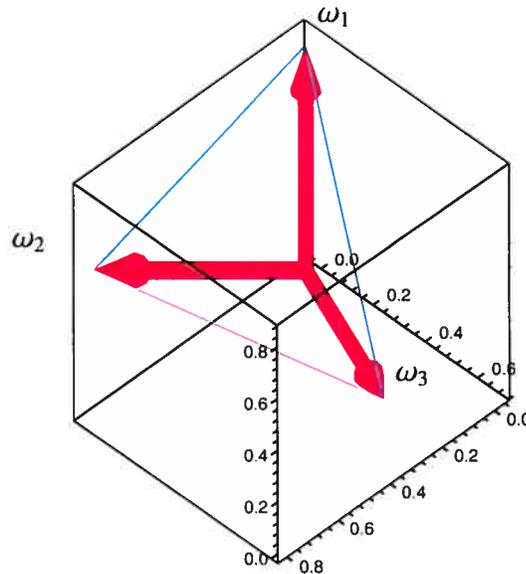
2.5.4. Région fondamentale

Dans le cas de A_3 , comme $\xi_h = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, nous nous retrouvons avec

$$F(A_3) = \{0, \check{\omega}_1, \check{\omega}_2, \check{\omega}_3\} = \{0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}. \quad (2.5.2)$$

Nous pouvons représenter graphiquement la région fondamentale en trois dimensions.

FIG. 2.1. Région fondamentale de A_3



Nous voyons que celle-ci représente un tétraèdre dont les sommets sont $(0, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ et $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$, lorsque ω_1 s'aligne avec l'axe des z .

2.5.5. Orbites du groupe de Weyl

En faisant faire les réflexions par rapport à r_{α_1} , r_{α_2} et r_{α_3} d'un point sur l'orbite, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 \in P^+$, nous obtenons tous les termes dans l'orbite.

Premièrement, si $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, nous n'avons qu'un point dans l'orbite :

$$W_{(a,b,c)} = \{(0, 0, 0)\}$$

En deuxième lieu, si $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, il en découle les 24 termes dans l'orbite.

$$W_{(a,b,c)} = \left\{ \begin{array}{ll} (a, b, c), & (-a, a + b, c), \\ (b + c, -a - b - c, a + b), & (a, b + c, -c), \\ (b, -a - b, a + b + c), & (-a, a + b + c, -c), \\ (-a - b, a, b + c), & (a + b, c, -b - c), \\ (a + b + c, -b - c, b), & (-b, -a, a + b + c), \\ (b, c, -a - b - c), & (a + b, -b, b + c), \\ (c, -b - c, -a), & (a + b + c, -c, -b), \\ (-a - b - c, a, b), & (-b, b + c, -a - b - c), \\ (b + c, -c, -a - b), & (-b - c, -a, a + b), \\ (c, -a - b - c, a), & (-a - b - c, a + b, -b), \\ (-c, -b, -a), & (-b - c, b, -a - b), \\ (-c, -a - b, a), & (-a - b, a + b + c, -b - c) \end{array} \right\}$$

2.5.6. Orbites du sous-groupe paires de Weyl

Encore une fois, ici nous négligeons les termes venant des réflexions impaires et gardons ceux provenant des paires. Nous nous retrouvons avec deux fois moins de termes que pour $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

$$W_{(a,b,c)}^e = \left\{ \begin{array}{lll} (a, b, c), & (b, -a - b, a + b + c), & (-a, a + b + c, -c), \\ (-a - b, a, b + c), & (a + b, c, -b - c), & (a + b + c, -b - c, b), \\ (-b, b + c, -a - b - c), & (b + c, -c, -a - b), & (-b - c, -a, a + b), \\ (c, -a - b - c, a), & (-a - b - c, a + b, -b), & (-c, -b, -a) \end{array} \right\}$$

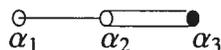
2.5.7. C-fonctions

$$\begin{aligned}
C_{(a,b,c)}(x, y, z) = & e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})y+(-\frac{3a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-\frac{3c}{4})x+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)} + e^{2i\pi((-\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)} + \\
& e^{2i\pi((\frac{3a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4})x+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})y+(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4})z)}
\end{aligned}$$

2.6. B_3

2.6.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

Exposons tout d'abord, le graphe de Dynkin pour le cas B_3



À partir de ce diagramme, la matrice de Cartan associée et les produits scalaires sont :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2 \qquad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2 \qquad \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 1.$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1 \qquad \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = -1 \qquad \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = 0.$$

2.6.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2 & \omega_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \check{\alpha}_1 &= \alpha_1 & \check{\omega}_1 &= \omega_1. \\ \alpha_2 &= -\omega_1 + 2\omega_2 - 2\omega_3 & \omega_2 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & \check{\alpha}_2 &= \alpha_2 & \check{\omega}_2 &= \omega_2. \\ \alpha_3 &= -\omega_2 + 2\omega_3 & \omega_3 &= \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 & \check{\alpha}_3 &= 2\alpha_3 & \check{\omega}_3 &= 2\omega_3. \end{aligned}$$

2.6.3. Système de racines

En appliquant, encore une fois, le même algorithme, nous nous retrouvons avec un système de 18 racines. Il est important, en se rappelant bien de la définition d'un système de racines, que chaque racine, α , possède un inverse, $-\alpha$.

$$R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_2 + 2\alpha_3), \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3)\}$$

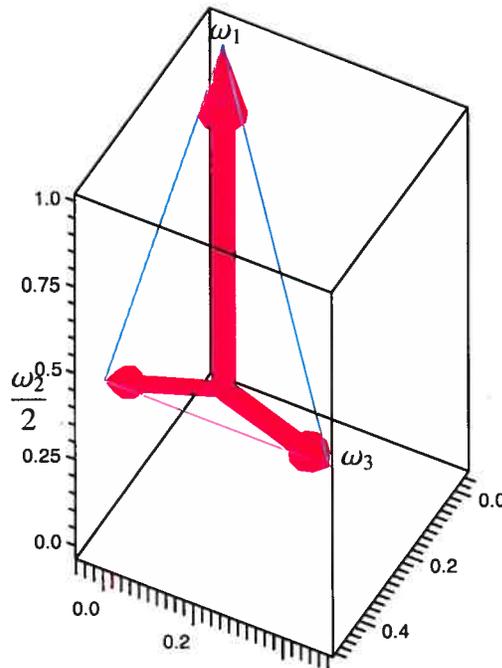
Dans ce cas, la plus grande racine du système est $\xi_h = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$. Ce qui va nous aider à retrouver la région fondamentale, car nous savons maintenant que $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ et $q_3 = 2$.

2.6.4. Région fondamentale

Avec les coefficients de la plus grande racine, la région fondamentale est :

$$F = \left\{ 0, \check{\omega}_1, \frac{\check{\omega}_2}{2}, \frac{\check{\omega}_3}{2} \right\} = \left\{ 0, \omega_1, \frac{\omega_2}{2}, \omega_3 \right\} \quad (2.6.1)$$

FIG. 2.2. Région fondamentale de B_3



Ce qui représente un tétraèdre de sommets, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, avec le vecteur ω_1 aligné à l'axe des z .

2.6.5. Orbites du groupe de Weyl

Soit $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 \in P^+$. Comme nous le savons, si $a = b = c = 0$, $W_{(a,b,c)} = (0, 0, 0)$.

Sinon,

$$W_{(a,b,c)} = \left\{ \begin{array}{ll} \pm (a, b, c), & \pm (-a, a + b, c), \\ \pm (a + b, -b, 2b + c), & \pm (a, b + c, -c), \\ \pm (b, -a - b, 2a + 2b + c), & \pm (-a, a + b + c, -c), \\ \pm (-a - b, a, 2b + c), & \pm (a + b, b + c, -2b - c), \\ \pm (a + b + c, -b - c, 2b + c), & \pm (-b, -a, 2a + 2b + c), \\ \pm (b, a + b + c, -2a - 2b - c), & \pm (b + c, -a - b - c, 2a + 2b + c), \\ \pm (-a - b, a + 2b + c, -2b - c), & \pm (a + 2b + c, -b - c, c), \\ \pm (-a - b - c, a, 2b + c), & \pm (a + b + c, b, -2b - c), \\ \pm (-b, a + 2b + c, -2a - 2b - c), & \pm (a + 2b + c, -a - b - c, c), \\ \pm (-b - c, -a, 2a + 2b + c), & \pm (b + c, a + b, -2a - 2b - c), \\ \pm (b + c, -a - 2b - c, 2a + 2b + c), & \pm (-a - 2b - c, a + b, c), \\ \pm (a + 2b + c, -b, -c), & \pm (-a - b - c, a + 2b + c, -2b - c) \end{array} \right\}$$

2.6.6. Orbites du sous-groupe de Weyl pair

$$W_{(a,b,c)}^e = \left\{ \begin{array}{ll} (a+b+c, -a, -2b-c), & (-a-b, b, -2b-c), \\ (a+b, b+c, -2b-c), & (-a-b-c, a+2b+c, -2b-c), \\ (b, a, -2a-2b-c), & (b+c, a+b, -2a-2b-c), \\ (-b-c, a+b+c, -2a-2b-c), & (-b, a+2b+c, -2a-2b-c), \\ (a, -a-b, -c), & (-a, -b, -c), \\ (a+2b+c, -b, -c), & (b+c, -a-2b-c, 2a+2b+c) \\ (-a-2b-c, b+c, -c), & (-a, a+b+c, -c), \\ (a, b, c), & (-a-2b-c, a+b, c), \\ (-a, -b-c, c), & (a+2b+c, -a-b-c, c), \\ (-a-b, a, 2b+c), & (-a-b-c, -b, 2b+c), \\ (a+b, -a-2b-c, 2b+c), & (a+b+c, -b-c, 2b+c), \\ (-b-c, -a, 2a+2b+c), & (b, -a-b, 2a+2b+c), \end{array} \right.$$

2.6.7. C-functions

$$\begin{aligned}
C_{(a,b,c)}(x, y, z) = & 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) \\
& 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-a - b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x - ay + (-a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((b + \frac{c}{2})x - ay + (-a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((b + \frac{c}{2})x + by + (-a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + by + (-a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b - c)y + (-a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-a - b - c)y + (-a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + ay + (a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((a + b + \frac{c}{2})x + ay + (a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((a + b + \frac{c}{2})x + (a + b)y + (a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (a + b)y + (a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-b - c)y + (a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-b - c)y + (a - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(\frac{cx}{2} + (-a - b)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x - by + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(\frac{cx}{2} - by + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z))
\end{aligned}$$

2.6.8. S-functions

$$\begin{aligned}
S_{(a,b,c)}(x, y, z) = & 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-a - b - c)y + (-a - 2b - \frac{3c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x - ay + (-a - \frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((b + \frac{c}{2})x - ay + (-a - \frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((b + \frac{c}{2})x + by + (-a - \frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + by + (-a - \frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b - c)y + (-a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-a - b - c)y + (-a - \frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + ay + (a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((a + b + \frac{c}{2})x + ay + (a - \frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((a + b + \frac{c}{2})x + (a + b)y + (a - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + (a + b)y + (a - \frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-b - c)y + (a - \frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(-\frac{cx}{2} + (-b - c)y + (a - \frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - b)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(\frac{cx}{2} + (-a - b)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x - by + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(\frac{cx}{2} - by + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((-a - b - \frac{c}{2})x + (-a - 2b - c)y + (-a - 2b - \frac{c}{2})z))
\end{aligned}$$

2.6.9. Les E -fonctions

$$\begin{aligned}
E_{(a,b,c)}(x, y, z) = & e^{2i\pi((-b-\frac{c}{2})x+(-a-2b-c)y+(-a-2b-\frac{3c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(-\frac{cx}{2}+(-b-c)y+(-a-2b-\frac{3c}{2})z)} + e^{2i\pi((-a-b-\frac{c}{2})x+(-a-b-c)y+(-a-2b-\frac{3c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((-a-b-\frac{c}{2})x-ay+(-a-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((b+\frac{c}{2})x+by+(-a-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(-\frac{cx}{2}+(-a-b-c)y+(-a-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((a+b+\frac{c}{2})x+ay+(a-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(-\frac{cx}{2}+(a+b)y+(a-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((-b-\frac{c}{2})x+(-b-c)y+(a-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(\frac{cx}{2}+(-a-b)y+(-a-2b-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((-b-\frac{c}{2})x-by+(-a-2b-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((-a-b-\frac{c}{2})x+(-a-2b-c)y+(-a-2b-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((b+\frac{c}{2})x-ay+(\frac{c}{2}-a)z)} + \\
& e^{2i\pi((-a-b-\frac{c}{2})x+(-a-b)y+(\frac{c}{2}-a)z)} + e^{2i\pi(\frac{cx}{2}+(b+c)y+(\frac{c}{2}-a)z)} + \\
& e^{2i\pi((-b-\frac{c}{2})x+ay+(a+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi(\frac{cx}{2}-by+(a+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((a+b+\frac{c}{2})x+(a+b+c)y+(a+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi(-\frac{cx}{2}+by+(a+2b+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((a+b+\frac{c}{2})x+(a+b)y+(a+2b+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((b+\frac{c}{2})x+(a+2b+c)y+(a+2b+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((b+\frac{c}{2})x+(b+c)y+(a+2b+\frac{3c}{2})z)} + e^{2i\pi(\frac{cx}{2}+(a+b+c)y+(a+2b+\frac{3c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((a+b+\frac{c}{2})x+(a+2b+c)y+(a+2b+\frac{3c}{2})z)}
\end{aligned}$$

2.7. C_3

2.7.1. Diagramme de Dynkin et matrice de Cartan

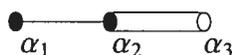
Premièrement, développons la matrice de Cartan associée au cas C_3 et son inverse

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Les produits scalaires trouvés à partir de cette matrice sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= 1 & \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle &= 1 & \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle &= 2 \\
\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= -1/2 & \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle &= -1 & \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Le graphe de Dynkin obtenu à partir de la matrice de Cartan est :



2.7.2. Les bases α et ω et leurs bases duales

Les bases sont :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2 & \omega_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 & \check{\alpha}_1 = 2\alpha_1 & \check{\omega}_1 = 2\omega_1 \\ \alpha_2 = -\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 & \omega_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & \check{\alpha}_2 = 2\alpha_2 & \check{\omega}_2 = 2\omega_2 \\ \alpha_3 = -2\omega_2 + 2\omega_3 & \omega_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 & \check{\alpha}_3 = \alpha_3 & \check{\omega}_3 = \omega_3. \end{array}$$

2.7.3. Le système de racines

$$R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(2\alpha_2 + \alpha_3), \\ \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)\}$$

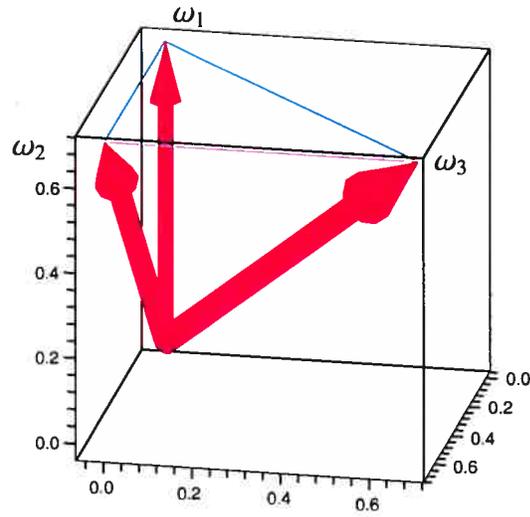
Comme, nous l'observons, la plus grande racine dans ce cas-ci est $\xi_h = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.

2.7.4. Région fondamentale

La région fondamentale est délimitée par les sommets suivants :

$$F = \left\{0, \frac{\check{\omega}_1}{2}, \frac{\check{\omega}_2}{2}, \check{\omega}_3\right\} = \{0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Cette région forme un tétraèdre qui a les sommets $(0, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

FIG. 2.3. Région fondamentale de C_3 

2.7.5. Orbites du groupe de Weyl

$$W_{(a,b,c)} = \left\{ \begin{array}{ll} \pm (a, b, c), & \pm (-a, a + b, c), \\ \pm (a + b, -b, b + c), & \pm (a, b + 2c, -c), \\ \pm (b, -a - b, a + b + c), & \pm (-a, a + b + 2c, -c), \\ \pm (-a - b, a, b + c), & \pm (a + b, b + 2c, -b - c), \\ \pm (a + b + 2c, -b - 2c, b + c), & \pm (-b, -a, a + b + c), \\ \pm (b, a + b + 2c, -a - b - c), & \pm (b + 2c, -a - b - 2c, a + b + c), \\ \pm (-a - b, a + 2b + 2c, -b - c), & \pm (a + 2b + 2c, -b - 2c, c), \\ \pm (-a - b - 2c, a, b + c), & \pm (a + b + 2c, b, -b - c), \\ \pm (-b, a + 2b + 2c, -a - b - c), & \pm (a + 2b + 2c, -a - b - 2c, c), \\ \pm (-b - 2c, -a, a + b + c), & \pm (b + 2c, a + b, -a - b - c), \\ \pm (b + 2c, -a - 2b - 2c, a + b + c), & \pm (-a - 2b - 2c, a + b, c), \\ \pm (a + b + 2c, -a - 2b - 2c, b + c), & \pm (-a - 2b - 2c, b, c) \end{array} \right\}$$

2.7.6. Orbites du groupe pair de Weyl

$$W_{(a,b,c)}^e = \left\{ \begin{array}{ll} (a+b+2c, -a, -b-c) & (-a-b, b, -b-c) \\ (a+b, b+2c, -b-c) & (-a-b-2c, a+2b+2c, -b-c) \\ (b, a, -a-b-c) & (b+2c, a+b, -a-b-c) \\ (-b-2c, a+b+2c, -a-b-c) & (-b, a+2b+2c, -a-b-c) \\ (a, -a-b, -c) & (a+2b+2c, -b, -c) \\ (-a-2b-2c, b+2c, -c) & (-a, a+b+2c, -c) \\ (a, b, c) & (-a-2b-2c, a+b, c) \\ (-a, -b-2c, c) & (a+2b+2c, -a-b-2c, c) \\ (-a-b, a, b+c) & (-a-b-2c, -b, b+c) \\ (a+b, -a-2b-2c, b+c) & (a+b+2c, -b-2c, b+c) \\ (-b-2c, -a, a+b+c) & (b, -a-b, a+b+c) \\ (b+2c, -a-2b-2c, a+b+c) & (-b, -a-b-2c, a+b+c) \end{array} \right\}$$

2.7.7. C-functions

$$\begin{aligned}
C_{(a,b,c)}(x, y, z) = & 2 \cos(2\pi((-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-b-c)x + (-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-cx + (-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-cx + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-cx + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x - ay + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((b+c)x - ay + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((b+c)x + by + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-cx + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b-c)x + ay + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((a+b+c)x + ay + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi(-cx + (a+b)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((a+b+c)x + (a+b)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b-c)x + (-b-2c)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(-cx + (-b-2c)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(cx + (-a-b)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b-c)x - by + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi(cx - by + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi((-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2 \cos(2\pi((-a-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + 2 \cos(2\pi(-cx + by + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z))
\end{aligned}$$

2.7.8. S-functions

$$\begin{aligned}
S_{(a,b,c)}(x, y, z) = & 2i \sin(2\pi((-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((-b-c)x + (-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(-cx + (-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(-cx + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x - ay + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((b+c)x - ay + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi(-cx + by + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((b+c)x + by + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(-cx + (-a-b-2c)y + (-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-b-c)x + ay + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((a+b+c)x + ay + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi(-cx + (a+b)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi((a+b+c)x + (a+b)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-b-c)x + (-b-2c)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(-cx + (-b-2c)y + (\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x + (-a-b)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi(cx + (-a-b)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + 2i \sin(2\pi((-b-c)x - by + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) - \\
& 2i \sin(2\pi(cx - by + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) - 2i \sin(2\pi((-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)) + \\
& 2i \sin(2\pi((-a-b-c)x + (-a-2b-2c)y + (-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z))
\end{aligned}$$

2.7.9. E-fonctions

$$\begin{aligned}
E_{(a,b,c)}(x, y, z) = & e^{2i\pi((-b-c)x+(-a-2b-2c)y+(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)} + e^{2i\pi(-cx+(-b-2c)y+(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((-a-b-c)x+(-a-b-2c)y+(-\frac{a}{2}-b-\frac{3c}{2})z)} + e^{2i\pi((-a-b-c)x-ay+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((b+c)x+by+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi(-cx+(-a-b-2c)y+(-\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((a+b+c)x+ay+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi(-cx+(a+b)y+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((-b-c)x+(-b-2c)y+(\frac{a}{2}-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi(cx+(-a-b)y+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((-b-c)x-by+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((-a-b-c)x+(-a-2b-2c)y+(-\frac{a}{2}-b-\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((b+c)x-ay+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})z)} + e^{2i\pi((-a-b-c)x+(-a-b)y+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(cx+(b+2c)y+(\frac{c}{2}-\frac{a}{2})z)} + e^{2i\pi((-b-c)x+ay+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(cx-by+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((a+b+c)x+(a+b+2c)y+(\frac{a}{2}+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(-cx+by+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((a+b+c)x+(a+b)y+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi((b+c)x+(a+2b+2c)y+(\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2})z)} + e^{2i\pi((b+c)x+(b+2c)y+(\frac{a}{2}+b+\frac{3c}{2})z)} + \\
& e^{2i\pi(cx+(a+b+2c)y+(\frac{a}{2}+b+\frac{3c}{2})z)} + e^{2i\pi((a+b+c)x+(a+2b+2c)y+(\frac{a}{2}+b+\frac{3c}{2})z)}
\end{aligned}$$

Chapitre 3

LA DÉCOMPOSITION DES PRODUITS DE FONCTIONS

Nous pouvons aussi développer les fonctions C , S et E sous une autre forme, en prenant respectivement, la première, la deuxième, et la troisième composante de chaque terme dans les orbites comme l'exposant de x , de y et de z , qui sont multipliés entre eux. Ainsi, le résultat qui en découle est un polynôme. Par exemple, pour le groupe de Lie relié à $A_1 \times A_1$, en exprimant la C -fonction sous forme d'un tel polynôme, nous obtenons

$$C_{(a,b)}(x, y) = x^a y^b + x^{-a} y^b + x^a y^{-b} + x^{-a} y^{-b}.$$

Nous voyons que les exposants sont les quatre termes dans l'orbite $\pm(a, b), \pm(a, -b)$. Par conséquent, nous sommes aussi en mesure de trouver les fonctions S et E . Pour les polynômes E , nous utilisons seulement les termes dans les orbites du sous-groupe pair, comme dans le cas précédent. Il en est de même pour les polynômes reliés à la fonction S , les composantes, où les exposants ne proviennent pas des réflexions paires, sont de signe négatif et les autres sont de signe positif. Pour $A_1 \times A_1$, nous avons :

$$S_{(a,b)}(x, y) = x^a y^b - x^{-a} y^b - x^a y^{-b} + x^{-a} y^{-b}$$

et

$$E_{(a,b)}(x, y) = x^a y^b + x^{-a} y^{-b}$$

Lorsque nous multiplions deux polynômes provenant du même groupe de Lie semi-simple, nous nous retrouvons avec une somme de polynômes de même type. Nous pouvons utiliser la forme des fonctions C , S et E vu au Chapitre 1, ou celle que nous

venons de décrire. Nous utilisons cette dernière, car il est plus aisé d'effectuer les différentes manipulations associées. Nous nommons cette forme la décomposition des produits de deux fonctions. Dans ce qui suit, nous présentons ces décompositions sous forme de tableaux.

Pour trouver la somme des polynômes, nous avons eu recours à Mathematica ou à un résultat paru dans l'article [30] :

$$C_{(a,b)}C_{(c,d)} = \sum_{\mu \in W_{(c,d)}} |W_{(a,b)}/W_{(a,b)+\mu(c,d)}| C_{(a,b)+\mu(c,d)}. \quad (3.0.1)$$

Comme μ peut être n'importe quel poids de l'orbite $W_{(c,d)}$, la somme $(a,b) + \mu$ n'est généralement pas un poids dominant. Malgré tout, un poids non-dominant est unique dans son orbite. En fait, en appliquant les réflexions appropriées à $(a,b) + \mu$, nous pouvons le transformer en un poids dominant correspondant. Le calcul laborieux pour chacun des cas. Donc, nous allons présenter les décompositions explicites pour les cas des rangs plus bas. Ceux-ci s'avèrent être plus utiles et pertinents.

Dans ce qui suit, nous présentons la décomposition des produits de fonctions pour des W -orbites ou W^e -orbites génériques. Il y a plusieurs cas spéciaux. Premièrement, quand n'importe quel de a, b, c, d sont de valeur égale et deuxièmement, lorsqu'une ou plusieurs de leurs valeurs est zéro. Les décompositions pour ces cas spéciaux sont plus simples que pour les cas génériques. Il n'est pas pratique de montrer tous ces cas non-génériques. Pour chaque groupe de Lie particulier, les cas spéciaux trouvés sont des restrictions des cas génériques. Par contre, il n'existe aucun procédé applicable à tous les groupes à la fois. C'est pourquoi, nous illustrons seulement quelques cas spéciaux pour C_3 .

Légende

$$(a,b) = C_{(a,b)}$$

$$[a,b] = S_{(a,b)}$$

$$\{a,b\} = E_{(a,b)}$$

TAB. 3.1. Pour $A_1 \times A_1$

$(a,b)(c,d)$	$[a,b][c,d]$	$(a,b)[c,d]$	$\{a,b\}\{c,d\}$
$(a+c,b+d)$	$(a+c,b+d)$	$[a+c,b+d]$	$\{a+c,b+d\}$
$(a-c,b+d)$	$-(a-c,b+d)$	$-[a-c,b+d]$	$\{a-c,b-d\}$
$(a+c,b-d)$	$-(a+c,b-d)$	$-[a+c,b-d]$	
$(a-c,b-d)$	$(a-c,b-d)$	$[a-c,b-d]$	

Faisons un exemple avec ce tableau de ce que serait la décomposition des produits des fonctions provenant de $A_1 \times A_1$.

$$C_{(a,b)}(x,y)C_{(c,d)}(x,y) = C_{(a+c,b+d)} + C_{(a-c,b+d)} + C_{(a+c,b-d)} + C_{(a-c,b-d)}$$

$$S_{(a,b)}(x,y)S_{(c,d)}(x,y) = C_{(a+c,b+d)} - C_{(a-c,b+d)} - C_{(a+c,b-d)} + C_{(a-c,b-d)}$$

$$E_{(a,b)}(x,y)E_{(c,d)}(x,y) = E_{(a+c,b+d)} + E_{(a-c,b-d)}$$

TAB. 3.2. Pour A_2

$(a,b)(c,d)$	$[a,b][c,d]$
$(a+c,b+d)$	$(a+c,b+d)$
$(a-c,b+c+d)$	$-(a-c,b+c+d)$
$(a+c+d,b-d)$	$-(a+c+d,b-d)$
$(a+d,b-c-d)$	$(a+d,b-c-d)$
$(a-d,b-c)$	$-(a-d,b-c)$
$(a-c-d,b+c)$	$(a-c-d,b+c)$
$(a,b)[c,d]$	$\{a,b\}\{c,d\}$
$[a+c,b+d]$	$\{a+c,b+d\}$
$-[a-c,b+c+d]$	$\{a+d,b-c-d\}$
$-[a+c+d,b-d]$	$\{b+c,-a-b+d\}$
$[a+d,b-c-d]$	
$[a-d,b-c]$	
$-[a-c-d,b+c]$	

TAB. 3.3. Pour C_2

$(a,b)(c,d)$	$[a,b][c,d]$
$(-a-c,-b-d)$	$(-a-c,-b-d)$
$(-a-c,a+b-d)$	$-(-a-c,a+b-d)$
$(a-c,-a-b-d)$	$-(a-c,-a-b-d)$
$(a-c,b-d)$	$(a-c,b-d)$
$(-a-2b-c,b-d)$	$-(-a-2b-c,b-d)$
$(-a-2b-c,a+b-d)$	$(-a-2b-c,a+b-d)$
$(a+2b-c,-b-d)$	$-(a+2b-c,-b-d)$
$(a+2b-c,-a-b-d)$	$(a+2b-c,-a-b-d)$
$(a,b)[c,d]$	$\{a,b\}\{c,d\}$
$[-a-c,-b-d]$	$\{a+c,b+d\}$
$[-a-c,a+b-d]$	$\{a+c+2d,b-c-d\}$
$[a-c,-a-b-d]$	$\{a-c,b-d\}$
$[-a-2b-c,b-d]$	$\{a-c-2d,b+c+d\}$
$[-a-2b-c,b-d]$	
$[-a-2b-c,a+b-d]$	
$[a+2b-c,-b-d]$	
$[a+2b-c,-a-b-d]$	

TAB. 3.4. Pour G_2

$(a,b)(c,d)$	$[a,b][c,d]$
$(a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e)$	$(a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e)$
$(2a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e)$	$-(2a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e)$
$(-a+d+e,-b-3d-2e)$	$(-a+d+e,-b-3d-2e)$
$(a+b+d+e,-b-3d-2e)$	$-(a+b+d+e,-b-3d-2e)$
$(a+d+e,-3a-b-3d-2e)$	$-(a+d+e,-3a-b-3d-2e)$
$(2a+b+d+e,-3a-b-3d-2e)$	$(2a+b+d+e,-3a-b-3d-2e)$
$(a+d+e,b-3d-2e)$	$(a+d+e,b-3d-2e)$
$(-a-b+d+e,b-3d-2e)$	$-(-a-b+d+e,b-3d-2e)$
$(-a+d+e,3a+b-3d-2e)$	$-(-a+d+e,3a+b-3d-2e)$
$(-2a-b+d+e,3a+b-3d-2e)$	$(-2a-b+d+e,3a+b-3d-2e)$
$(2a-b+d+e,3a+2b-3d-2e)$	$-(-2a-b+d+e,3a+2b-3d-2e)$
$(-a-b+d+e,3a+2b-3d-2e)$	$(-a-b+d+e,3a+2b-3d-2e)$
$(a,b)[c,d]$	$\{a,b\}\{c,d\}$
$[a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e]$	$\{a+c,b+d\}$
$[2a+b+d+e,-3a-2b-3d-2e]$	$\{-a+c,-b+d\}$
$[-a+d+e,-b-3d-2e]$	$\{a+2c+d,b-3c-d\}$
$[a+b+d+e,-b-3d-2e]$	$\{a-c-d,b+3c+2d\}$
$[a+d+e,-3a-b-3d-2e]$	$\{a+c+d,b-3c-2d\}$
$[2a+b+d+e,-3a-b-3d-2e]$	$\{a-2c-d,b+3c+d\}$
$[a+d+e,b-3d-2e]$	
$[-a-b+d+e,b-3d-2e]$	
$[-a+d+e,3a+b-3d-2e]$	
$[-2a-b+d+e,3a+b-3d-2e]$	
$[-2a-b+d+e,3a+2b-3d-2e]$	
$[-a-b+d+e,3a+2b-3d-2e]$	

TAB. 3.5. Pour A_3

$(a,b,c)(d,e,f)$	$[a,b,c][d,e,f]$
$(-a-f,a+b-e,c-d)$	$(-a-f,a+b-e,c-d)$
$(-a-f,a+b+c-e,-c-d)$	$-(-a-f,a+b+c-e,-c-d)$
$(a-f,b-e,c-d)$	$-(a-f,b-e,c-d)$
$(a-f,b+c-e,-c-d)$	$(a-f,b+c-e,-c-d)$
$(-b-f,-a-e,a+b+c-d)$	$(-b-f,-a-e,a+b+c-d)$
$(-b-f,b+c-e,-a-b-c-d)$	$-(-b-f,b+c-e,-a-b-c-d)$
$(-a-b-f,a-e,b+c-d)$	$-(-a-b-f,a-e,b+c-d)$
$(-a-b-f,a+b+c-e,-b-c-d)$	$(-a-b-f,a+b+c-e,-b-c-d)$
$(b-f,-a-b-e,a+b+c-d)$	$-(b-f,-a-b-e,a+b+c-d)$
$(b-f,c-e,-a-b-c-d)$	$(b-f,c-e,-a-b-c-d)$
$(a+b-f,-b-e,b+c-d)$	$(a+b-f,-b-e,b+c-d)$
$(a+b-f,c-e,-b-c-d)$	$-(a+b-f,c-e,-b-c-d)$
$(-c-f,-b-e,-a-d)$	$-(-c-f,-b-e,-a-d)$
$(-c-f,-a-b-e,a-d)$	$(-c-f,-a-b-e,a-d)$
$(-b-c-f,-a-e,a+b-d)$	$-(-b-c-f,-a-e,a+b-d)$
$(-b-c-f,b-e,-a-b-d)$	$(-b-c-f,b-e,-a-b-d)$
$(-a-b-c-f,a-e,b-d)$	$(-a-b-c-f,a-e,b-d)$
$(-a-b-c-f,a+b-e,-b-d)$	$-(-a-b-c-f,a+b-e,-b-d)$
$(c-f,-b-c-e,-a-d)$	$(c-f,-b-c-e,-a-d)$
$(c-f,-a-b-c-e,a-d)$	$-(c-f,-a-b-c-e,a-d)$
$(b+c-f,-c-e,-a-b-d)$	$-(b+c-f,-c-e,-a-b-d)$
$(b+c-f,-a-b-c-e,a+b-d)$	$(b+c-f,-a-b-c-e,a+b-d)$
$(a+b+c-f,-c-e,-b-d)$	$(a+b+c-f,-c-e,-b-d)$
$(a+b+c-f,-b-c-e,b-d)$	$-(-a+b+c-f,-b-c-e,b-d)$

TAB. 3.6. Pour A_3 suite

$(a,b,c)[d,e,f]$	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
$[-a-f,a+b-e,c-d]$	$\{-a-f,a+b+c-e,-c-d\}$
$[-a-f,a+b+c-e,-c-d]$	$\{a-f,b-e,c-d\}$
$[a-f,b-e,c-d]$	$\{-b-f,b+c-e,-a-b-c-d\}$
$[a-f,b+c-e,-c-d]$	$\{-a-b-f,a-e,b+c-d\}$
$[-b-f,-a-e,a+b+c-d]$	$\{b-f,-a-b-e,a+b+c-d\}$
$[-b-f,b+c-e,-a-b-c-d]$	$\{a+b-f,c-e,-b-c-d\}$
$[-a-b-f,a-e,b+c-d]$	$\{-c-f,-b-e,-a-d\}$
$[-a-b-f,a+b+c-e,-b-c-d]$	$\{-b-c-f,-a-e,a+b-d\}$
$[b-f,-a-b-e,a+b+c-d]$	$\{-a-b-c-f,a+b-e,-b-d\}$
$[b-f,c-e,-a-b-c-d]$	$\{c-f,-a-b-c-e,a-d\}$
$[a+b-f,-b-e,b+c-d]$	$\{b+c-f,-c-e,-a-b-d\}$
$[a+b-f,c-e,-b-c-d]$	$\{a+b+c-f,-b-c-e,b-d\}$
$[-c-f,-b-e,-a-d]$	
$[-c-f,-a-b-e,a-d]$	
$[-b-c-f,-a-e,a+b-d]$	
$[-b-c-f,b-e,-a-b-d]$	
$[-a-b-c-f,a-e,b-d]$	
$[-a-b-c-f,a+b-e,-b-d]$	
$[c-f,-b-c-e,-a-d]$	
$[c-f,-a-b-c-e,a-d]$	
$[b+c-f,-c-e,-a-b-d]$	
$[b+c-f,-a-b-c-e,a+b-d]$	
$[a+b+c-f,-c-e,-b-d]$	
$[a+b+c-f,-b-c-e,b-d]$	

TAB. 3.7. Pour B_3

$(a,b,c)(d,e,f)$	$[a,b,c][d,e,f]$
$(-a-d,-b-e,-c-f)$	$(-a-d,-b-e,-c-f)$
$(-a-d,a+b-e,c-f)$	$(-a-d,a+b-e,c-f)$
$(-a-d,-b-c-e,c-f)$	$-(-a-d,-b-c-e,c-f)$
$(-a-d,a+b+c-e,-c-f)$	$-(-a-d,a+b+c-e,-c-f)$
$(a-d,-a-b-e,-c-f)$	$-(-a-d,-a-b-e,-c-f)$
$(a-d,b-e,c-f)$	$(a-d,b-e,c-f)$
$(a-d,-a-b-c-e,c-f)$	$(a-d,-a-b-c-e,c-f)$
$(a-d,b+c-e,-c-f)$	$(a-d,b+c-e,-c-f)$
$(-b-d,-a-e,2a+2b+c-f)$	$(-b-d,-a-e,2a+2b+c-f)$
$(-b-d,a+b-e,-2a-2b-c-f)$	$(-b-d,a+b-e,-2a-2b-c-f)$
$(-b-d,-a-b-c-e,2a+2b+c-f)$	$-(-b-d,-a-b-c-e,2a+2b+c-f)$
$(-b-d,a+2b+c-e,-2a-2b-c-f)$	$-(-b-d,a+2b+c-e,-2a-2b-c-f)$
$(-a-b-d,a-e,2b+c-f)$	$-(-a-b-d,a-e,2b+c-f)$
$(-a-b-d,b-e,-2b-c-f)$	$-(-a-b-d,b-e,-2b-c-f)$
$(-a-b-d,-b-c-e,2b+c-f)$	$(-a-b-d,-b-c-e,2b+c-f)$
$(-a-b-d,a+2b+c-e,-2b-c-f)$	$(-a-b-d,a+2b+c-e,-2b-c-f)$
$(b-d,a-e,-2a-2b-c-f)$	$-(-b-d,a-e,-2a-2b-c-f)$
$(b-d,-a-b-e,2a+2b+c-f)$	$-(-b-d,-a-b-e,2a+2b+c-f)$
$(b-d,-a-2b-c-e,2a+2b+c-f)$	$(b-d,-a-2b-c-e,2a+2b+c-f)$
$(b-d,a+b+c-e,-2a-2b-c-f)$	$(b-d,a+b+c-e,-2a-2b-c-f)$
$(a+b-d,-a-e,-2b-c-f)$	$(a+b-d,-a-e,-2b-c-f)$
$(a+b-d,-b-e,2b+c-f)$	$(a+b-d,-b-e,2b+c-f)$
$(a+b-d,-a-2b-c-e,2b+c-f)$	$-(-a+b-d,-a-2b-c-e,2b+c-f)$
$(a+b-d,b+c-e,-2b-c-f)$	$-(-a+b-d,b+c-e,-2b-c-f)$
$(-a-2b-c-d,b-e,c-f)$	$(-a-2b-c-d,b-e,c-f)$
$(-a-2b-c-d,a+b-e,c-f)$	$-(-a-2b-c-d,a+b-e,c-f)$
$(-a-2b-c-d,b+c-e,-c-f)$	$-(-a-2b-c-d,b+c-e,-c-f)$
$(-a-2b-c-d,a+b+c-e,-c-f)$	$(-a-2b-c-d,a+b+c-e,-c-f)$

$(-b-c-d, -a-e, 2a+2b+c-f)$	$-(-b-c-d, -a-e, 2a+2b+c-f)$
$(-b-c-d, -a-b-e, 2a+2b+c-f)$	$(-b-c-d, -a-b-e, 2a+2b+c-f)$
$(-b-c-d, a+b+c-e, -2a-2b-c-f)$	$-(-b-c-d, a+b+c-e, -2a-2b-c-f)$
$(-b-c-d, a+2b+c-e, -2a-2b-c-f)$	$(-b-c-d, a+2b+c-e, -2a-2b-c-f)$
$(-a-b-c-d, a-e, 2b+c-f)$	$(-a-b-c-d, a-e, 2b+c-f)$
$(-a-b-c-d, -b-e, 2b+c-f)$	$-(-a-b-c-d, -b-e, 2b+c-f)$
$(-a-b-c-d, b+c-e, -2b-c-f)$	$(-a-b-c-d, b+c-e, -2b-c-f)$
$(-a-b-c-d, a+2b+c-e, -2b-c-f)$	$-(-a-b-c-d, a+2b+c-e, -2b-c-f)$
$(b+c-d, a-e, -2a-2b-c-f)$	$(b+c-d, a-e, -2a-2b-c-f)$
$(b+c-d, a+b-e, -2a-2b-c-f)$	$-(b+c-d, a+b-e, -2a-2b-c-f)$
$(b+c-d, -a-2b-c-e, 2a+2b+c-f)$	$-(b+c-d, -a-2b-c-e, 2a+2b+c-f)$
$(b+c-d, -a-b-c-e, 2a+2b+c-f)$	$(b+c-d, -a-b-c-e, 2a+2b+c-f)$
$(a+b+c-d, -a-e, -2b-c-f)$	$-(a+b+c-d, -a-e, -2b-c-f)$
$(a+b+c-d, b-e, -2b-c-f)$	$(a+b+c-d, b-e, -2b-c-f)$
$(a+b+c-d, -a-2b-c-e, 2b+c-f)$	$(a+b+c-d, -a-2b-c-e, 2b+c-f)$
$(a+b+c-d, -b-c-e, 2b+c-f)$	$-(a+b+c-d, -b-c-e, 2b+c-f)$
$(a+2b+c-d, -b-e, -c-f)$	$-(a+2b+c-d, -b-e, -c-f)$
$(a+2b+c-d, -a-b-e, -c-f)$	$(a+2b+c-d, -a-b-e, -c-f)$
$(a+2b+c-d, -b-c-e, c-f)$	$(a+2b+c-d, -b-c-e, c-f)$
$(a+2b+c-d, -a-b-c-e, c-f)$	$-(a+2b+c-d, -a-b-c-e, c-f)$

$(a,b,c)[d,e,f]$	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
$-[-a-d,-b-e,-c-f]$	$\{-a+d+2e+f,-b-c-e,c-f\}$
$-[-a-d,a+b-e,c-f]$	$\{-a+d+2e+f,a+b+c-e,-c-f\}$
$-[-a-d,-b-c-e,c-f]$	$\{a+d+2e+f,-a-b-e,-c-f\}$
$-[a-d,a+b+c-e,-c-f]$	$\{a+d+2e+f,b-e,c-f\}$
$-[a-d,-a-b-e,-c-f]$	$\{-b+d+2e+f,-a-b-c-e,2a+2b+c-f\}$
$-[a-d,b-e,c-f]$	$\{-b+d+2e+f,a+2b+c-e,-2a-2b-c-f\}$
$-[a-d,-a-b-c-e,c-f]$	$\{-a-b+d+2e+f,a-e,2b+c-f\}$
$-[a-d,b+c-e,-c-f]$	$\{-a-b+d+2e+f,b-e,-2b-c-f\}$
$-[-b-d,-a-e,2a+2b+c-f]$	$\{b+d+2e+f,a-e,-2a-2b-c-f\}$
$-[-b-d,a+b-e,-2a-2b-c-f]$	$\{b+d+2e+f,-a-b-e,2a+2b+c-f\}$
$-[-b-d,-a-b-c-e,2a+2b+c-f]$	$\{a+b+d+2e+f,-a-2b-c-e,2b+c-f\}$
$-[-b-d,a+2b+c-e,-2a-2b-c-f]$	$\{a+b+d+2e+f,b+c-e,-2b-c-f\}$
$-[-a-b-d,a-e,2b+c-f]$	$\{-a-2b-c+d+2e+f,a+b-e,c-f\}$
$-[-a-b-d,b-e,-2b-c-f]$	$\{-a-2b-c+d+2e+f,b+c-e,-c-f\}$
$-[-a-b-d,-b-c-e,2b+c-f]$	$\{-b-c+d+2e+f,-a-e,2a+2b+c-f\}$
$-[-a-b-d,a+2b+c-e,-2b-c-f]$	$\{-b-c+d+2e+f,a+b+c-e,-2a-2b-c-f\}$
$-[b-d,a-e,-2a-2b-c-f]$	$\{-a-b-c+d+2e+f,-b-e,2b+c-f\}$
$-[b-d,-a-b-e,2a+2b+c-f]$	$\{-a-b-c+d+2e+f,a+2b+c-e,-2b-c-f\}$
$-[b-d,-a-2b-c-e,2a+2b+c-f]$	$\{b+c+d+2e+f,a+b-e,-2a-2b-c-f\}$
$-[b-d,a+b+c-e,-2a-2b-c-f]$	$\{b+c+d+2e+f,-a-2b-c-e,2a+2b+c-f\}$
$-[a+b-d,-a-e,-2b-c-f]$	$\{a+b+c+d+2e+f,-a-e,-2b-c-f\}$
$-[a+b-d,-b-e,2b+c-f]$	$\{a+b+c+d+2e+f,-b-c-e,2b+c-f\}$
$-[a+b-d,-a-2b-c-e,2b+c-f]$	$\{a+2b+c+d+2e+f,-b-e,-c-f\}$
$-[a+b-d,b+c-e,-2b-c-f]$	$\{a+2b+c+d+2e+f,-a-b-c-e,c-f\}$

TAB. 3.8. Suite de $(a,b,c)[d,e,f]$ pour B_3

$-[a-2b-c-d, b-e, c-f]$
$-[a-2b-c-d, a+b-e, c-f]$
$-[a-2b-c-d, b+c-e, c-f]$
$-[a-2b-c-d, a+b+c-e, c-f]$
$-[b-c-d, -a-e, 2a+2b+c-f]$
$-[b-c-d, -a-b-e, 2a+2b+c-f]$
$-[b-c-d, a+b+c-e, -2a-2b-c-f]$
$-[b-c-d, a+2b+c-e, -2a-2b-c-f]$
$-[a-b-c-d, a-e, 2b+c-f]$
$-[a-b-c-d, -b-e, 2b+c-f]$
$-[a-b-c-d, b+c-e, -2b-c-f]$
$-[a-b-c-d, a+2b+c-e, -2b-c-f]$
$-[b+c-d, a-e, -2a-2b-c-f]$
$-[b+c-d, a+b-e, -2a-2b-c-f]$
$-[b+c-d, -a-2b-c-e, 2a+2b+c-f]$
$-[b+c-d, -a-b-c-e, 2a+2b+c-f]$
$-[a+b+c-d, -a-e, -2b-c-f]$
$-[a+b+c-d, b-e, -2b-c-f]$
$-[a+b+c-d, -a-2b-c-e, 2b+c-f]$
$-[a+b+c-d, -b-c-e, 2b+c-f]$
$-[a+2b+c-d, -b-e, -c-f]$
$-[a+2b+c-d, -a-b-e, -c-f]$
$-[a+2b+c-d, -b-c-e, c-f]$
$-[a+2b+c-d, -a-b-c-e, c-f]$

TAB. 3.9. Pour C_3

$(a,b,c)(d,e,f)$	$[a,b,c][d,e,f]$
$(-a-d,-b-e,-c-f)$	$(-a-d,-b-e,-c-f)$
$(-a-d,a+b-e,c-f)$	$(-a-d,a+b-e,c-f)$
$(-a-d,-b-2c-e,c-f)$	$-(-a-d,-b-2c-e,c-f)$
$(-a-d,a+b+2c-e,-c-f)$	$-(-a-d,a+b+2c-e,-c-f)$
$(a-d,-a-b-e,-c-f)$	$-(-a-d,-a-b-e,-c-f)$
$(a-d,b-e,c-f)$	$-(-a-d,b-e,c-f)$
$(a-d,-a-b-2c-e,c-f)$	$(a-d,-a-b-2c-e,c-f)$
$(a-d,b+2c-e,-c-f)$	$(a-d,b+2c-e,-c-f)$
$(-b-d,-a-e,a+b+c-f)$	$(-b-d,-a-e,a+b+c-f)$
$(-b-d,a+b-e,-a-b-c-f)$	$(-b-d,a+b-e,-a-b-c-f)$
$(-b-d,-a-b-2c-e,a+b+c-f)$	$-(-b-d,-a-b-2c-e,a+b+c-f)$
$(-b-d,a+2b+2c-e,-a-b-c-f)$	$-(-b-d,a+2b+2c-e,-a-b-c-f)$
$(-a-b-d,a-e,b+c-f)$	$-(-a-b-d,a-e,b+c-f)$
$(-a-b-d,b-e,-b-c-f)$	$-(-a-b-d,b-e,-b-c-f)$
$(-a-b-d,-b-2c-e,b+c-f)$	$(-a-b-d,-b-2c-e,b+c-f)$
$(-a-b-d,a+2b+2c-e,-b-c-f)$	$(-a-b-d,a+2b+2c-e,-b-c-f)$
$(b-d,a-e,-a-b-c-f)$	$-(-b-d,a-e,-a-b-c-f)$
$(b-d,-a-b-e,a+b+c-f)$	$-(-b-d,-a-b-e,a+b+c-f)$
$(b-d,-a-2b-2c-e,a+b+c-f)$	$(b-d,-a-2b-2c-e,a+b+c-f)$
$(b-d,a+b+2c-e,-a-b-c-f)$	$(b-d,a+b+2c-e,-a-b-c-f)$
$(a+b-d,-a-e,-b-c-f)$	$(a+b-d,-a-e,-b-c-f)$
$(a+b-d,-b-e,b+c-f)$	$(a+b-d,-b-e,b+c-f)$
$(a+b-d,-a-2b-2c-e,b+c-f)$	$-(-a+b-d,-a-2b-2c-e,b+c-f)$
$(a+b-d,b+2c-e,-b-c-f)$	$-(-a+b-d,b+2c-e,-b-c-f)$
$(-a-2b-2c-d,b-e,c-f)$	$(-a-2b-2c-d,b-e,c-f)$
$(-a-2b-2c-d,a+b-e,c-f)$	$-(-a-2b-2c-d,a+b-e,c-f)$
$(-a-2b-2c-d,b+2c-e,-c-f)$	$-(-a-2b-2c-d,b+2c-e,-c-f)$
$(-a-2b-2c-d,a+b+2c-e,-c-f)$	$(-a-2b-2c-d,a+b+2c-e,-c-f)$

$(-b-2c-d, -a-e, a+b+c-f)$	$-(-b-2c-d, -a-e, a+b+c-f)$
$(-b-2c-d, -a-b-e, a+b+c-f)$	$(-b-2c-d, -a-b-e, a+b+c-f)$
$(-b-2c-d, a+b+2c-e, -a-b-c-f)$	$-(-b-2c-d, a+b+2c-e, -a-b-c-f)$
$(-b-2c-d, a+2b+2c-e, -a-b-c-f)$	$(-b-2c-d, a+2b+2c-e, -a-b-c-f)$
$(-a-b-2c-d, a-e, b+c-f)$	$(-a-b-2c-d, a-e, b+c-f)$
$(-a-b-2c-d, -b-e, b+c-f)$	$-(-a-b-2c-d, -b-e, b+c-f)$
$(-a-b-2c-d, b+2c-e, -b-c-f)$	$(-a-b-2c-d, b+2c-e, -b-c-f)$
$(-a-b-2c-d, a+2b+2c-e, -b-c-f)$	$-(-a-b-2c-d, a+2b+2c-e, -b-c-f)$
$(b+2c-d, a-e, -a-b-c-f)$	$(b+2c-d, a-e, -a-b-c-f)$
$(b+2c-d, a+b-e, -a-b-c-f)$	$- (b+2c-d, a+b-e, -a-b-c-f)$
$(b+2c-d, -a-2b-2c-e, a+b+c-f)$	$- (b+2c-d, -a-2b-2c-e, a+b+c-f)$
$(b+2c-d, -a-b-2c-e, a+b+c-f)$	$(b+2c-d, -a-b-2c-e, a+b+c-f)$
$(a+b+2c-d, -a-e, -b-c-f)$	$- (a+b+2c-d, -a-e, -b-c-f)$
$(a+b+2c-d, b-e, -b-c-f)$	$(a+b+2c-d, b-e, -b-c-f)$
$(a+b+2c-d, -a-2b-2c-e, b+c-f)$	$(a+b+2c-d, -a-2b-2c-e, b+c-f)$
$(a+b+2c-d, -b-2c-e, b+c-f)$	$- (a+b+2c-d, -b-2c-e, b+c-f)$
$(a+2b+2c-d, -b-e, -c-f)$	$- (a+2b+2c-d, -b-e, -c-f)$
$(a+2b+2c-d, -a-b-e, -c-f)$	$(a+2b+2c-d, -a-b-e, -c-f)$
$(a+2b+2c-d, -b-2c-e, c-f)$	$(a+2b+2c-d, -b-2c-e, c-f)$
$(a+2b+2c-d, -a-b-2c-e, c-f)$	$- (a+2b+2c-d, -a-b-2c-e, c-f)$

$(a,b,c)[d,e,f]$	$\{a,b,c\}\{d,e,f\}$
$[-a-d,-b-e,-c-f]$	$\{-a+d+2e+2f,-b-2c-e,c-f\}$
$[-a-d,a+b-e,c-f]$	$\{-a+d+2e+2f,a+b+2c-e,-c-f\}$
$[-a-d,-b-2c-e,c-f]$	$\{a+d+2e+2f,-a-b-e,-c-f\}$
$[-a-d,a+b+2c-e,-c-f]$	$\{-b+d+2e+2f,a+2b+2c-e,-a-b-c-f\}$
$[a-d,-a-b-e,-c-f]$	$\{-b+d+2e+2f,-a-b-2c-e,a+b+c-f\}$
$[a-d,b-e,c-f]$	$\{-b+d+2e+2f,a+2b+2c-e,-a-b-c-f\}$
$[a-d,-a-b-2c-e,c-f]$	$\{-a-b+d+2e+2f,a-e,b+c-f\}$
$[a-d,b+2c-e,-c-f]$	$\{-a-b+d+2e+2f,b-e,-b-c-f\}$
$[-b-d,-a-e,a+b+c-f]$	$\{b+d+2e+2f,a-e,-a-b-c-f\}$
$[-b-d,a+b-e,-a-b-c-f]$	$\{b+d+2e+2f,-a-b-e,a+b+c-f\}$
$[-b-d,-a-b-2c-e,a+b+c-f]$	$\{a+b+d+2e+2f,-a-2b-2c-e,b+c-f\}$
$[-b-d,a+2b+2c-e,-a-b-c-f]$	$\{a+b+d+2e+2f,b+2c-e,-b-c-f\}$
$[-a-b-d,a-e,b+c-f]$	$\{-a-2b-2c+d+2e+2f,a+b-e,c-f\}$
$[-a-b-d,b-e,-b-c-f]$	$\{-a-2b-2c+d+2e+2f,b+2c-e,-c-f\}$
$[-a-b-d,-b-2c-e,b+c-f]$	$\{-b-2c+d+2e+2f,-a-e,a+b+c-f\}$
$[-a-b-d,a+2b+2c-e,-b-c-f]$	$\{-b-2c+d+2e+2f,a+b+2c-e,-a-b-c-f\}$
$[b-d,a-e,-a-b-c-f]$	$\{-a-b-2c+d+2e+2f,-b-e,b+c-f\}$
$[b-d,-a-b-e,a+b+c-f]$	$\{-a-b-2c+d+2e+2f,a+2b+2c-e,-b-c-f\}$
$[b-d,-a-2b-2c-e,a+b+c-f]$	$\{b+2c+d+2e+2f,a+b-e,-a-b-c-f\}$
$[b-d,a+b+2c-e,-a-b-c-f]$	$\{b+2c+d+2e+2f,-a-2b-2c-e,a+b+c-f\}$
$[a+b-d,-a-e,-b-c-f]$	$\{a+b+2c+d+2e+2f,-a-e,-b-c-f\}$
$[a+b-d,-b-e,b+c-f]$	$\{a+b+2c+d+2e+2f,-b-2c-e,b+c-f\}$
$[a+b-d,-a-2b-2c-e,b+c-f]$	$\{a+2b+2c+d+2e+2f,-b-e,-c-f\}$
$[a+b-d,b+2c-e,-b-c-f]$	$\{a+2b+2c+d+2e+2f,-a-b-2c-e,c-f\}$

TAB. 3.10. suite de $(a,b,c)[d,e,f]$ pour C_3

$[-a-2 b-2 c-d,b-e,c-f]$
$[-a-2 b-2c-d,a+b-e,c-f]$
$[-a-2 b-2 c-d,b+2 c-e,-c-f]$
$[-a-2 b-2c-d,a+b+2 c-e,-c-f]$
$[-b-2 c-d,-a-e,a+b+c-f]$
$[-b-2c-d,-a-b-e,a+b+c-f]$
$[-b-2 c-d,a+b+2c-e,-a-b-c-f]$
$[-b-2 c-d,a+2 b+2c-e,-a-b-c-f]$
$[-a-b-2 c-d,a-e,b+c-f]$
$[-a-b-2c-d,-b-e,b+c-f]$
$[-a-b-2 c-d,b+2 c-e,-b-c-f]$
$[-a-b-2c-d,a+2 b+2 c-e,-b-c-f]$
$[b+2 c-d,a-e,-a-b-c-f]$
$[b+2c-d,a+b-e,-a-b-c-f]$
$[b+2 c-d,-a-2 b-2c-e,a+b+c-f]$
$[b+2 c-d,-a-b-2 c-e,a+b+c-f]$
$[a+b+2c-d,-a-e,-b-c-f]$
$[a+b+2 c-d,b-e,-b-c-f]$
$[a+b+2c-d,-a-2 b-2 c-e,b+c-f]$
$[a+b+2 c-d,-b-2c-e,b+c-f]$
$[a+2 b+2 c-d,-b-e,-c-f]$
$[a+2 b+2c-d,-a-b-e,-c-f]$
$[a+2 b+2 c-d,-b-2 c-e,c-f]$
$[a+2 b+2c-d,-a-b-2 c-e,c-f]$

3.1. CAS SPÉCIAUX

Comme il y a vraiment plusieurs cas spéciaux, nous traitons seulement ceux du cas C_3 .

TAB. 3.11. Cas spéciaux pour $C_3, (a,0,0) \times$

$(d,0,0)$	$(0,e,0)$	$(0,0,f)$	$(d,e,0)$	$(d,0,f)$	$(0,e,f)$
$8(-a-d,0,0)$	$8(-a,-e,0)$	$8(-a,0,-f)$	$8(-a-d,-e,0)$	$8(-a-d,0,-f)$	$8(-a,-e,-f)$
$8(a-d,0,0)$	$8(a,-e,0)$	$8(a,0,-f)$	$8(a-d,-e,0)$	$8(a-d,0,-f)$	$8(a,-e,-f)$
$8(a-d,-a,0)$	$8(a,-a-e,0)$	$8(a,-a,-f)$	$8(a-d,-a-e,0)$	$8(a-d,-a,-f)$	$8(a,-a-e,-f)$
$8(-a-d,a,0)$	$8(-a,a-e,0)$	$8(-a,a,-f)$	$8(-a-d,a-e,0)$	$8(-a-d,a,-f)$	$8(-a,a-e,-f)$
$8(-d,a,-a)$	$8(0,a-e,-a)$	$8(0,a,a-f)$	$8(-d,a-e,-a)$	$8(-d,a,-a-f)$	$8(0,a-e,-a-f)$
$8(-d,-a,a)$	$8(0,-a-e,a)$	$8(0,-a,a-f)$	$8(-d,-a-e,a)$	$8(-d,-a,a-f)$	$8(0,-a-e,a-f)$

TAB. 3.12. Cas spéciaux pour $C_3, (0,b,0) \times$

$(0,e,0)$	$(0,0,f)$	$(d,e,0)$	$(d,0,f)$	$(0,e,f)$
$4(0,-b-e,0)$	$4(0,-b,-f)$	$4(-d,-b-e,0)$	$4(-d,-b,-f)$	$4(0,-b-e,-f)$
$4(2b,-b-e,0)$	$4(2b,-b,-f)$	$4(2b-d,-b-e,0)$	$4(2b-d,-b,-f)$	$4(2b,-b-e,-f)$
$4(0,b-e,0)$	$4(0,b,-f)$	$4(-d,b-e,0)$	$4(-d,b,-f)$	$4(0,b-e,-f)$
$4(-2b,b-e,0)$	$4(-2b,b,-f)$	$4(-2b-d,b-e,0)$	$4(-2b-d,b,-f)$	$4(-2b,b-e,-f)$
$4(b,-e,-b)$	$4(b,0,-b-f)$	$4(b-d,-e,-b)$	$4(b-d,0,-b-f)$	$4(b,-e,-b-f)$
$4(-b,b-e,-b)$	$4(-b,b,-b-f)$	$4(-b-d,b-e,-b)$	$4(-b-d,b,-b-f)$	$4(-b,b-e,-b-f)$
$4(b,b-e,-b)$	$4(b,b,-b-f)$	$4(b-d,b-e,-b)$	$4(b-d,b,-b-f)$	$4(b,b-e,-b-f)$
$4(-b,2b-e,-b)$	$4(-b,2b,-b-f)$	$4(-b-d,2b-e,-b)$	$4(-b-d,2b,-b-f)$	$4(-b,2b-e,-b-f)$
$4(-b,-e,b)$	$4(-b,0,b-f)$	$4(-b-d,-e,b)$	$4(-b-d,0,b-f)$	$4(-b,-e,b-f)$
$4(b,-b-e,b)$	$4(b,-b,b-f)$	$4(b-d,-b-e,b)$	$4(b-d,-b,b-f)$	$4(b,-b-e,b-f)$
$4(-b,-b-e,b)$	$4(-b,-b,b-f)$	$4(-b-d,-b-e,b)$	$4(-b-d,-b,b-f)$	$4(-b,-b-e,b-f)$
$4(b,-2b-e,b)$	$4(b,-2b,b-f)$	$4(b-d,-2b-e,b)$	$4(b-d,-2b,b-f)$	$4(b,-2b-e,b-f)$

TAB. 3.13. Cas spéciaux pour $C_3, (0,0,c) \times$

$(0,0,f)$	$(d,e,0)$	$(d,0,f)$	$(0,e,f)$
$6(0,0,-c-f)$	$6(-d,-e,-c)$	$6(-d,0,-c-f)$	$6(0,-e,-c-f)$
$6(2c,0,-c-f)$	$6(2c-d,-e,-c)$	$6(2c-d,0,-c-f)$	$6(2c,-e,-c-f)$
$6(0,2c,-c-f)$	$6(-d,2c-e,-c)$	$6(-d,2c,-c-f)$	$6(0,2c-e,-c-f)$
$6(-2c,2c,-c-f)$	$6(-2c-d,2c-e,-c)$	$6(-2c-d,2c,-c-f)$	$6(-2c,2c-e,-c-f)$
$6(0,0,c-f)$	$6(-d,-e,c)$	$6(-d,0,c-f)$	$6(0,-e,c-f)$
$6(-2c,0,c-f)$	$6(-2c-d,-e,c)$	$6(-2c-d,0,c-f)$	$6(-2c,-e,c-f)$
$6(0,-2c,c-f)$	$6(-d,-2c-e,c)$	$6(-d,-2c,c-f)$	$6(0,-2c-e,c-f)$
$6(2c,-2c,c-f)$	$6(2c-d,-2c-e,c)$	$6(2c-d,-2c,c-f)$	$6(2c,-2c-e,c-f)$

TAB. 3.14. Cas spéciaux pour $C_3, (a,b,0) \times$

$(d,e,0)$	$(d,0,f)$	$(0,e,f)$
$2(-a-d,-b-e,0)$	$2(-a-d,-b,-f)$	$2(-a,-b-e,-f)$
$2(a+2b-d,-b-e,0)$	$2(a+2b-d,-b,-f)$	$2(a+2b,-b-e,-f)$
$2(a-d,-a-b-e,0)$	$2(a-d,-a-b,-f)$	$2(a,-a-b-e,-f)$
$2(a+2b-d,-a-b-e,0)$	$2(a+2b-d,-a-b,-f)$	$2(a+2b,-a-b-e,-f)$
$2(a-d,b-e,0)$	$2(a-d,b,-f)$	$2(a,b-e,-f)$
$2(-a-2b-d,b-e,0)$	$2(-a-2b-d,b,-f)$	$2(-a-2b,b-e,-f)$
$2(-a-d,a+b-e,0)$	$2(-a-d,a+b,-f)$	$2(-a,a+b-e,-f)$
$2(-a-2b-d,a+b-e,0)$	$2(-a-2b-d,a+b,-f)$	$2(-a-2b,a+b-e,-f)$
$2(a+b-d,-a-e,-b)$	$2(a+b-d,-a,-b-f)$	$2(a+b,-a-e,-b-f)$
$2(-a-b-d,b-e,-b)$	$2(-a-b-d,b,-b-f)$	$2(-a-b,b-e,-b-f)$
$2(a+b-d,b-e,-b)$	$2(a+b-d,b,-b-f)$	$2(a+b,b-e,-b-f)$
$2(-a-b-d,a+2b-e,-b)$	$2(-a-b-d,a+2b,-b-f)$	$2(-a-b,a+2b-e,-b-f)$
$2(b-d,a-e,-a-b)$	$2(b-d,a,-a-b-f)$	$2(b,a-e,-a-b-f)$
$2(-b-d,a+b-e,-a-b)$	$2(-b-d,a+b,-a-b-f)$	$2(-b,a+b-e,-a-b-f)$
$2(b-d,a+b-e,-a-b)$	$2(b-d,a+b,-a-b-f)$	$2(b,a+b-e,-a-b-f)$
$2(-b-d,a+2b-e,-a-b)$	$2(-b-d,a+2b,-a-b-f)$	$2(-b,a+2b-e,-a-b-f)$
$2(-a-b-d,a-e,b)$	$2(-a-b-d,a,b-f)$	$2(-a-b,a-e,b-f)$
$2(a+b-d,-b-e,b)$	$2(a+b-d,-b,b-f)$	$2(a+b,-b-e,b-f)$
$2(-a-b-d,-b-e,b)$	$2(-a-b-d,-b,b-f)$	$2(-a-b,-b-e,b-f)$
$2(a+b-d,-a-2b-e,b)$	$2(a+b-d,-a-2b,b-f)$	$2(a+b,-a-2b-e,b-f)$
$2(-b-d,-a-e,a+b)$	$2(-b-d,-a,a+b-f)$	$2(-b,-a-e,a+b-f)$
$2(b-d,-a-b-e,a+b)$	$2(b-d,-a-b,a+b-f)$	$2(b,-a-b-e,a+b-f)$
$2(-b-d,-a-b-e,a+b)$	$2(-b-d,-a-b,a+b-f)$	$2(-b,-a-b-e,a+b-f)$
$2(b-d,-a-2b-e,a+b)$	$2(b-d,-a-2b,a+b-f)$	$2(b,-a-2b-e,a+b-f)$

TAB. 3.15. Cas spéciaux pour C_3

$(a,0,c)(d,0,f)$	$(a,0,c)(0,e,f)$	$(0,b,c)(0,e,f)$
$2(-a-d,0,-c-f)$	$2(0,-a-e,a+c-f)$	$2(0,-b-e,-c-f)$
$2(-a-d,a,c-f)$	$2(0,a-e,-a-c-f)$	$2(0,b-e,c-f)$
$2(-a-d,-2c,c-f)$	$2(0,-a-2c-e,a+c-f)$	$2(0,-b-2c-e,c-f)$
$2(-a-d,a+2c,-c-f)$	$2(0,a+2c-e,-a-c-f)$	$2(0,b+2c-e,-c-f)$
$2(a-d,0,c-f)$	$2(-a,a-e,c-f)$	$2(-b,b-e,-b-c-f)$
$2(a-d,-a,-c-f)$	$2(-a,-2c-e,c-f)$	$2(-b,-b-2c-e,b+c-f)$
$2(a-d,-a-2c,c-f)$	$2(-a,a+2c-e,-c-f)$	$2(-b,2b+2c-e,-b-c-f)$
$2(a-d,2c,-c-f)$	$2(-a,-e,-c-f)$	$2(-b,-e,b+c-f)$
$2(-2c-d,-a,a+c-f)$	$2(a,-a-e,-c-f)$	$2(b,-b-e,b+c-f)$
$2(-2c-d,a+2c,-a-c-f)$	$2(a,-a-2c-e,c-f)$	$2(b,-2b-2c-e,b+c-f)$
$2(-a-2c-d,0,c-f)$	$2(a,2c-e,-c-f)$	$2(b,b+2c-e,-b-c-f)$
$2(-a-2c-d,a,c-f)$	$2(a,-e,c-f)$	$2(b,-e,-b-c-f)$
$2(-a-2c-d,2c,-c-f)$	$2(-a-2c,a-e,c-f)$	$2(-2b-2c,b-e,c-f)$
$2(-a-2c-d,a+2c,-c-f)$	$2(-a-2c,2c-e,-c-f)$	$2(-2b-2c,b+2c-e,-c-f)$
$2(2c-d,a,-a-c-f)$	$2(-a-2c,a+2c-e,-c-f)$	$2(-b-2c,-b-e,b+c-f)$
$2(2c-d,-a-2c,a+c-f)$	$2(-a-2c,-e,c-f)$	$2(-b-2c,b+2c-e,-b-c-f)$
$2(a+2c-d,0,-c-f)$	$2(-2c,-a-e,a+c-f)$	$2(-b-2c,2b+2c-e,-b-c-f)$
$2(a+2c-d,-a,-c-f)$	$2(-2c,a+2c-e,-a-c-f)$	$2(-b-2c,-e,b+c-f)$
$2(a+2c-d,-a-2c,c-f)$	$2(2c,a-e,-a-c-f)$	$2(b+2c,b-e,-b-c-f)$
$2(a+2c-d,-2c,c-f)$	$2(2c,-a-2c-e,a+c-f)$	$2(b+2c,-2b-2c-e,b+c-f)$
$2(-d,-a,a+c-f)$	$2(a+2c,-a-e,-c-f)$	$2(b+2c,-b-2c-e,b+c-f)$
$2(-d,a,-a-c-f)$	$2(a+2c,-2c-e,c-f)$	$2(b+2c,-e,-b-c-f)$
$2(-d,-a-2c,a+c-f)$	$2(a+2c,-a-2c-e,c-f)$	$2(2b+2c,-b-e,-c-f)$
$2(-d,a+2c,-a-c-f)$	$2(a+2c,-e,-c-f)$	$2(2b+2c,-b-2c-e,c-f)$

CONCLUSION

Finalement, les fonctions décrites dans ce mémoire peuvent être encore exploitées à bien des points de vue. Une des questions intéressantes au sujet des fonctions de nos trois familles est la suivante : «Si nous remplaçons le cosinus par la fonction C , le sinus par la fonction S et l'exponentielle par la fonction E , quelles identités trigonométriques bien connues des cosinus, sinus et de la fonction exponentielle trouveront leurs analogues avec ces changements ?». Cette question n'a jamais été posée et nous voyons que quelques-unes des identités trigonométriques vont se généraliser à n'importe quelle dimension.

Nos résultats, sur les décompositions des produits spécifiques des trois familles pourrait être utilisés pour la formulation des relations de récurrence qui permettrait de générer les fonctions de chaque famille de plus en plus grande.

De plus, il serait intéressant d'explorer les trois familles de fonctions comme des polynômes orthogonaux qui dépendent de n variables. Pour les cas à une et deux variables, les démarches sont simples. Par contre, dans le cas à trois variables la situation se complique drôlement [23]-[26]. Ces polynômes se définissent aussi pour des variables discrètes et ils restent toujours orthogonaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. V. Moody, J. Patera, *Computation of character decompositions of class functions on compact semisimple Lie groups*, Mathematics of Computation **48** (1987) 799-827
- [2] A. Akhperjanian, A. Atoyan, J. Patera, V. Sahakian, *Application of multidimensional discrete transforms on Lie groups for image processing*, Proc. NATO ASI 2003 *Data Fusion for Situation Monitoring, Incident Detection, Alert and Response Management*, August, 2003, Tsakhkadzor, Armenia
- [3] A. Atoyan, J. Patera, *Application of the continuous extension of discrete cosine transform to images taken by FLIR detectors*, Proc. NATO ASI 2003, *Data Fusion for Situation Monitoring, Incident Detection, Alert and Response Management*, August, 2003, Tsakhkadzor, Armenia
- [4] A. Atoyan, J. Patera, *Continuous extension of the discrete cosine transform, and its applications to data processing*, Proceedings of the Workshop on group theory and numerical methods, Montreal 26-31 May, 2003
- [5] A. Atoyan, J. Patera, *Properties of continuous Fourier extension of the discrete cosine transform and its multidimensional generalization*, J. Math. Phys. **45** (2004), 2468-2491.
- [6] Patera J., *C-functions of compact semisimple Lie groups as special functions*, Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. of Ukraine, 2004, V. 30, 1152-1160.
- [7] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous cosine transform generalized to Lie groups $SU(2) \times SU(2)$ and $O(5)$* , J. Math. Phys., **46** (2005), 053514.
- [8] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous cosine transform generalized to Lie groups $SU(2)$ and G_2* , J. Math. Phys., **46** (2005), 053514, 25 pages.
- [9] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous sine transform generalized to the semisimple Lie groups of rank two*, J. Math. Phys. **47** (2006) 043512 (22 pages)

- [10] J. Patera, *Compact simple Lie groups and theirs C-, S-, and E-transforms*, SIGMA (2005) paper 25, (6 pages) ; math-ph/0512029
- [11] M. Germain, J. Patera, A. Zaratsyan, *Multiresolution analysis of digital images using the continuous extension of discrete group transforms*, SPIE Electronic Imaging 2006, San Jose, 6065-03, S2
- [12] Klimyk A.U., Patera J, *Orbit functions, Symmetry, integrability and Geometry : Methods and Applications*, 2006, V. 2, paper 06, 1–60.
- [13] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1939.
- [14] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1972
- [15] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990
- [16] R. Kane, *Reflection Groups and Invariants*, Springer, New York, 2002.
- [17] M. R. Bremner, R. V. Moody, J. Patera, *Tables of dominant weight multiplicities for representations of simple Lie algebras*, Marcel Dekker, New York 1985.
- [18] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford 1995
- [19] I. G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 372/S-20, Actes 20 Séminaire Lotharingien (1988), 131-171
- [20] I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Actes B45a, Strasbourg 2000
- [21] K. R. Rao, P. Yip, *Discrete cosine transform - Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press 1990
- [22] R. V. Moody, J. Patera, *Elements of finite order in Lie groups and their applications*, XIII Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, ed. W. Zachary, World Scientific Publishers, Singapore 1984, p. 308–318
- [23] S. Karlin, J. McGregor, *Determinants of orthogonal polynomials*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962) 204-209.
- [24] T. Koornwinder, *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials in "Theory and Applications of Special Functions"* (R. A. Askey, ed.), New York, Academic Press, 1975, pp. 435-495.

- [25] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions*, vol. 2, Kluwer, Dordrecht, 1993
- [26] H. Berens, H. Schmid and Y. Xu, *Multivariate Gaussian cubature formulas*, Arch. Math. **64** (1995) 26-32.
- [27] Roger W. Carter, *Simple groups of Lie Type*, Pure and applied mathematics, vol. XXVIII, London, Wiley Toronto, 1972, pp. 33-50
- [28] M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Undergraduate text in mathematics, New York : Springer-Verlag, 1988, pp.15-44
- [29] J-P. Serre, *Complex Semisimple Lie Algebras*, New York : Springer-Verlag, 1987, pp.24-42
- [30] I. Kashuba, J. Patera *Discrete and continuous exponential transform generalized to semisimple Lie groups of rank two*, à paraître.