

2m11.3427.9

Université de Montréal

Les clones minimaux de quasiprojections
et
les combinaisons

par

Maxime Lauzon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques pures

août 2006

© Maxime Lauzon, 2006



QA
3
US4
2006
v.015

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Les clones minimaux de quasiprojections

et

les combinaisons

présenté par

Maxime Lauzon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Khalid Benabdallah

(président-rapporteur)

Ivo Rosenberg

(directeur de recherche)

Gert Sabidussi

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Dans les années 90, J. Ježek et R. Quackenbush ont rédigé un article intitulé: *Minimal Clones of Quasiprojections* [4]. Cet article joue toutefois plutôt le rôle de résumé.

Nous nous attardons dans ce mémoire à compléter de façon concise et détaillée les preuves des différents résultats rapportés, ce qui avait été omis dans la version originale. Nous commençons par expliquer ce qu'est une *combinaison* pour ensuite démontrer certaines propriétés qu'ont les clones minimaux définis à partir de relations d'équivalences ou d'ordres partiels.

Mot-clés : clones minimaux, quasiprojection, combinaison, semiprojection, degré-intérieur (degré-extérieur), ordre lisse.

ABSTRACT

In the nineties, J. Ježek and R. Quackenbush published: *Minimal Clones of Quasiprojections* [4]. The paper was written more as an announcement of results rather than as a full paper.

This thesis gives the full proof of the different results proposed in the paper, which was omitted in the original version. Firstly, it explains the concept of a *scheme* and gives the demonstrations of the properties that minimal clones have from equivalence relation or partial order.

Key words : minimal clones, quasiprojection, scheme, semiprojection, in-degree (out-degree), smooth ordering.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Abstract.....	iv
Remerciements.....	viii
Introduction.....	1
Définitions.....	1
But du mémoire.....	3
Chapitre 1. Les Combinaisons.....	5
Chapitre 2. Les Combinaisons-Eq.....	16
2.1. Cas : $n < A $	18
2.2. Cas : $n = A $	27
Chapitre 3. Les Combinaisons-Ordres.....	38
3.1. Cas : $n < A $ et une seule base M	43
3.2. Cas : $n = A $	58
Bibliographie.....	64

*À celle par qui tout prend enfin un sens,
Marie-Pier.*

"Je voudrais que l'Anneau ne soit jamais venu à moi ... que rien de tout ceci ne se soit passé ..."

"Comme tout ceux qui vivent des heures si sombres, mais ce n'est pas à eux de décider ... tout ce que nous devons décider, c'est que faire du temps qui nous ai imparti."

J.R.R. Tolkien, *Le Seigneur des Anneaux*

REMERCIEMENTS

Tout d'abord Monsieur Yvo Rosenberg. Merci d'avoir été aussi respectueux envers mes questions d'une trivialité resplendissante. Merci d'avoir été aussi chaleureux et généreux avec votre temps tout comme avec vos nombreuses anecdotes ! Votre savoir et votre culture m'ont étonné à chacune de nos conversations.

Un remerciement bien spécial pour ma famille et plus particulièrement à ma mère. Rien de mieux qu'une page de remerciement d'un Mémoire pour te dire enfin à quel point je suis fier d'avoir une mère comme toi.

Merci à celle qui partage ma vie étudiante à l'université depuis pratiquement le tout début et bien plus, Valérie Dubois. Tu peux te vanter d'être ma meilleure amie fille, en effet tu es la seule, mais surtout tu peux te vanter d'avoir partagé avec moi des moments qui resteront à jamais gravé dans ma mémoire.

Je tiens aussi à remercier ceux avec qui je me suis particulièrement bien amusé au cours de cette rédaction. Grâce à vous je venais avant tout à l'école pour m'amuser...et si le temps le permettait pour rédiger un peu ! Merci à mes amis Olivier Dello Sbarba, Steven Sanche, Charles Barito et Frédérick Tremblay. Dello pour ton humour aussi ravageur que le mien. Steven pour ton désormais célèbre chandail blanc. Charles pour avoir remarqué que je n'étais qu'un fauilleur et de ne point m'avoir dénoncé. Et Fred pour les coups (coûts) partagés à la fin d'une soirée bien arrosée.

Finalement, un dernier remerciement pour celle avec qui je termine une étape importante de ma vie pour en commencer une toute nouvelle à la fois excitante et imprévue, Marie-Pier Plante. Merci d'être entré dans ma vie comme dans mon coeur. Merci enfin d'écrire avec moi chaque jour, chacune des pages de ce qui sera le plus beau des romans, la plus belle des histoires.

INTRODUCTION

DÉFINITIONS

Voici quelques définitions élémentaires qui adouciront le contact du lecteur aux pages qui suivront.

Soit A un ensemble et n un entier positif. Une opération n -aire sur A est une application $f : A^n \mapsto A$.

Pour des entiers $n \geq 1$ et $1 \leq i \leq n$, la i -ième *projection* (aussi appelée opération triviale ou sélecteur) n -aire sur A est l'opération définie par

$$e_{n,i}(a_1, \dots, a_n) = a_i, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A.$$

Si f est n -aire et g_1, \dots, g_n sont des opérations k -aires sur A , alors on définit une opération k -aire $f(g_1, \dots, g_n)$ sur A , appelé la *composition* de f, g_1, \dots, g_n comme suit [7] :

$$f(g_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_k) = f(g_1(a_1, \dots, a_k), \dots, g_n(a_1, \dots, a_k)), \quad \forall a_1, \dots, a_k \in A.$$

Un *clone* est un ensemble d'opérations sur un ensemble A qui est fermé pour la composition et qui contient toutes les projections.

Donc l'ensemble O_A , constitué de toutes les opérations sur A , est un clone et l'ensemble J_A , constitué de toutes les projections sur A , est aussi un clone.

Dans la suite de ce texte A sera un ensemble fini et $|A| \geq 3$.

Soit C un sous-clone de O_A . Le clone C est dit *minimal* si $C \neq J_A$ et les seuls sous-clones de C sont J_A et C lui-même. Chaque clone non trivial (c.-à-d. distinct de J_A) contient un clone minimal. [1]

On notera par $[f]$ le clone engendré par une opération f non triviale (c.-à-d. le plus petit clone qui contient f). Un clone non trivial C est minimal si et seulement si $C = [f]$ pour tout $f \in C \setminus J_A$.

On appellera *quasiprojection*, toute opération n -aire f sur A telle que

$$f(a_1, \dots, a_n) \in \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A.$$

Finalement, on dit qu'une opération n -aire f sur A est une *semiprojection* s'il existe un nombre $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que pour tout $a_1, \dots, a_n \in A$ qui ne sont pas deux à deux distincts, $f(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Nous dirons dans ce cas que f est une *semiprojection* sur la i -ième variable.

D'autres définitions seront nécessaires dans la suite du document, mais pour une meilleure compréhension elles seront introduites dans la partie du texte où elles interviendront.

BUT DU MÉMOIRE

Nous voulons trouver les clones minimaux générés par des quasiprojections. Pour ceci nous nous servirons tout d'abord d'un résultat de I. Rosenberg [1] qui va comme suit ; chaque clone minimal est généré par une des cinq types d'opérations suivantes :

- (1) unaire,
- (2) binaire idempotente,
- (3) ternaire majoritaire,
- (4) l'opération ternaire $x + y + z$ dans un groupe Booléen,
- (5) semiprojection.

Comme nous sommes dans le cas des quasiprojections, nous pouvons constater qu'il n'y a aucun clone minimal correspondant au type (1) ou au type (4). En effet pour le type (1), puisque nous sommes dans les quasiprojections, $f(a) = a \quad \forall a \in A$. Ce qui en fait alors une projection (donc $[f]$ sera le clone de projections, donc le clone trivial).

Pour le type (4), nous obtenons la même conclusion, puisque pour $|A| \geq 3$ et dans le cas des quasiprojections cette opération sera triviale. Pour les types (2) et (3) tous les clones minimaux de quasiprojections ont été trouvés par Csákány [3] en 1983. Donc il ne nous reste plus que le type (5), celui des semiprojections. Nous nous intéresserons dans ce mémoire seulement aux clones minimaux de quasiprojections générés par des semiprojections n -aires sur A , où A sera un ensemble fini de cardinalité au moins 3 et où $n \geq 3$.

Il est à noter par contre que tous les clones minimaux sur l'ensemble à trois éléments ont été trouvés par Csákány [2]. Ce qui implique que tous les clones minimaux engendrés par des semiprojections sur l'ensemble à trois éléments sont connus.

Comme nous le verrons dans les différents chapitres, il nous sera impossible ici, contrairement aux travaux sur la recherche des clones minimaux sur l'ensemble à trois éléments, d'énumérer tous les clones minimaux de quasiprojections générés par des semiprojections n -aires sur A (lorsque $|A| \geq 4$). Il nous sera possible toutefois de trouver certaines propriétés de ceux-ci et ce qui les définit en nous aidant des *combinaisons* ; sujet qui sera abordé dans le premier chapitre.

Chapitre 1

LES COMBINAISONS

Comme l'indique le titre de cette section, nous introduirons ici la notion de *combinaison*, ce qui sera d'une aide précieuse afin de décrire les clones minimaux de quasiprojections. Regardons tout d'abord ce que signifie le terme *combinaison*.

Désignons l'ensemble de tous les sous-ensembles à n éléments de A par $\binom{A}{n}$. On appelle *combinaison*, une application $s : M \mapsto \rho$ qui a pour domaine $\binom{A}{n}$ et qui fait correspondre à chaque $M \in \binom{A}{n}$ une relation binaire réflexive ρ sur M .

Rappel 1.1. Soit ρ une relation binaire sur A . Alors,

- ρ est *réflexive* si $(a, a) \in \rho \ \forall a \in A$:



- ρ est *symétrique* si $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in \rho \implies (b, a) \in \rho \quad :$$

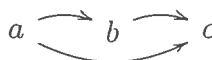


- ρ est *anti-symétrique* si $\forall a, b \in A$

$$(a, b) \in \rho, (b, a) \in \rho \implies a = b.$$

- ρ est *transitive* si $\forall a, b, c \in A$

$$(a, b) \in \rho, (b, c) \in \rho \implies (a, c) \in \rho \quad :$$



De plus nous définissons une *combinaison-eg* comme étant une combinaison s tel que $s(M)$ est une relation d'équivalence (c.-à-d. une relation réflexive, symétrique et transitive) sur M pour tout $M \in \binom{A}{n}$, tandis qu'une *combinaison-ordre* est définie comme étant une combinaison s telle que $s(M)$ est un ordre partiel (c.-à-d. une relation réflexive, anti-symétrique et transitive) sur M pour tout $M \in \binom{A}{n}$.

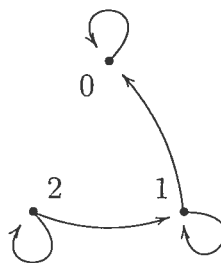
Définition 1.1. Soit s une combinaison, nous définissons Φ_s comme une opération n -aire sur A telle que

$$\Phi_s(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} a_n, & \text{si } a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts} \\ & \text{et } (a_1, a_n) \in s(\{a_1, \dots, a_n\}), \\ a_1, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple. Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $n = 2$. Donc $\binom{A}{2} = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$. Et supposons une combinaison s comme suit :

M	$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$
$s(M)$	$\rho_{0,1}$	$\rho_{0,2}$	$\rho_{1,2}$

où, par exemple, $\rho_{0,1}$ serait comme suit :



Alors,

$$\Phi_s(0, 1) = 0, \text{ car } (0, 1) \notin s(\{0, 1\}) = \rho_{0,1},$$

$$\Phi_s(1, 0) = 0, \text{ car } (1, 0) \in s(\{0, 1\}) = \rho_{0,1},$$

$$\Phi_s(0, 0) = 0, \text{ car } a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 0 \text{ ne sont pas distincts.}$$

Définition 1.2. Soit $n \geq 2$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Alors

(i) $\hat{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$, c.-à-d. l'ensemble dont les éléments sont a_1, \dots, a_n ,

(ii) $\iota_n = \{a \in A^n : |\hat{a}| < n\}$,

(iii) $\rho_n = \{a \in A^n : |\hat{a}| = n\} = A^n - \iota_n$.

Exemple.

$$(1) \iota_2 = \{(a, a) \in A^2 : a \in A\}$$

$$(2) \iota_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in A^3 : a_1 = a_2, \text{ ou } a_1 = a_3, \text{ ou } a_2 = a_3\}$$

Définition 1.3. Soit s une combinaison quelconque. Un ensemble $M \in \binom{A}{n}$ est un ensemble de base de s si $s(M) \neq \iota_2$. De plus une combinaison est dite non triviale si elle possède au moins un ensemble de base.

Nous aurons aussi à travailler avec le cas où $n = |A|$. La combinaison s correspondra alors à une seule relation binaire réflexive que nous noterons par R (c.-à-d. $s(\{a_1, \dots, a_n\}) = s(A) = R$). Alors nous écrirons Φ_R au lieu de Φ_s .

Finalement nous utiliserons la notation $C_s = [\Phi_s]$ ou bien $C_R = [\Phi_R]$.

Lemme 1.1. Soit f une quasiprojection n -aire sur A qui est aussi une semiprojection sur la i -ième variable. Soit i, j deux nombres distincts de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = a_j \neq a_i$ pour un n -tuple $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Alors

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_1, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

est une quasiprojection et une semiprojection non triviale sur la i -ième variable avec la propriété que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $k \in \{1, \dots, n\}$

$$g(b) = b_k \neq b_i \iff k = j, \quad f(b) = b_j.$$

PREUVE. Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ tel que $b_i \neq g(b)$. Alors,

$$b_i \neq g(b) = f(b_1, \dots, b_{j-1}, f(b), b_{j+1}, \dots, b_n).$$

Comme $i \neq j$, on a

$$(b_1, \dots, b_{j-1}, f(b), b_{j+1}, \dots, b_n) \in \varrho_n.$$

Comme $f(b) \in \hat{b}$, nécessairement

$$f(b) = b_j$$

et donc

$$g(b) = f(b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) = f(b) = b_j$$

De plus l'hypothèse $f(a_1, \dots, a_n) = a_j \neq a_i$ pour un n -tuple $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ montre que g n'est pas triviale. \square

Lemme 1.2. Soit f une semiprojection n -aire sur la première variable tel que $f(a_1, \dots, a_n) \in \{a_1, a_n\} \forall a_1, \dots, a_n$ et soit π une permutation de $\{2, \dots, n-1\}$.

Alors l'opération

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f(x_1, \dots, x_n), x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n-1)}, x_n)$$

est aussi une semiprojection sur la première variable telle que $g(a_1, \dots, a_n) \in \{a_1, a_n\} \forall a_1, \dots, a_n$; on a

$$g(a_1, \dots, a_n) = a_n \iff f(a_1, \dots, a_n) = a_n \text{ ou } f(a_1, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) = a_n.$$

PREUVE. (\implies) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que

$$a_1 \neq g(a) = f(f(a), a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) .$$

Comme $f(a) \in \{a_1, a_n\}$ nous avons deux cas possibles.

(1) Supposons que $f(a) = a_1$. Alors $a_1 \neq g(a)$ montre que $a' = (a_1, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) \in \varrho_n$. Donc,

$$g(a) = f(a') = a_n .$$

(2) Supposons que $f(a) = a_n$. Alors,

$$g(a) = f(a_n, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) = a_n .$$

(\impliedby) Nous devons considérer deux cas.

(1) Soit $f(a) = a_n$. Alors,

$$g(a) = f(a_n, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) = a_n .$$

(2) Soit $f(a') = a_n$.

- Si $f(a) = a_1$, alors

$$g(a) = f(a') = a_n .$$

- Si $f(a) = a_n$, alors

$$g(a) = f(a_n, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) = a_n .$$

□

Lemme 1.3. *Soit f une quasiprojection n -aire sur A qui est une semiprojection sur la première variable. Définissons l'opération g telle que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a*

$g(a) = a_n \neq a_1 \iff \hat{a} \in \varrho_n$ et $f(a_1, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n-1)}, a_n) = a_n$ pour au moins une permutation π de $\{2, \dots, n-1\}$.

Alors $g \in [f]$.

PREUVE. Selon le lemme 1.1 il existe $g \in [f]$ n -aire, et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, tels que g est une semiprojection sur la i -ième variable, non triviale, qui pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ satisfait

- (i) $g(a) \in \{a_i, a_j\}$,
- (ii) $g(a) = a_j \neq a_i \iff f(a) = a_j$.

Avec g , le clone $[f]$ contient aussi chaque fonction obtenue de g par échange de coordonnées. Alors nous pouvons supposer que $i = 1$ et $j = n$.

Pour une semiprojection h sur sa première variable, avec

$$h(a_1, \dots, a_n) \neq a_1 \implies h(a_1, \dots, a_n) = a_n$$

on définit,

$$R_h = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n : h(a_1, \dots, a_n) = a_n \neq a_1\}$$

Pour une permutation π de $\{2, \dots, n-1\}$ et avec l'opération g définie dans le lemme 1.2 on a que

$$R_g \supseteq R_f$$

Si $R_g \neq R_f$, on remplace f par g dans le lemme 1.2. En répétant ceci pour les $(n-2)!$ permutations de $\{2, \dots, n-1\}$ on arrive à l'opération donnée dans le lemme. □

Lemme 1.4. *Soit C un clone minimal de quasiprojections sur A généré par une semiprojection n -aire. Alors $C = C_s$ pour une combinaison s .*

PREUVE. D'après le lemme 1.3 le clone C contient une quasiprojection n -aire g , non triviale, avec la propriété décrite dans le lemme.

Comme C est un clone minimal, on a

$$C = [g] .$$

Soit $M \in \binom{A}{n}$, définissons la relation binaire $s(M)$ par

$$s(M) = \iota_2 \cup \{(a, b) \in M^2 : g(a, c_2, \dots, c_{n-1}, b) = b, \text{ où } \{c_2, \dots, c_{n-1}\} = M \setminus \{a, b\}\} .$$

Par le lemme 1.3 la définition de $s(M)$ ne dépend pas de l'ordre des éléments de $M \setminus \{a, b\}$. Donc

$$g = \Phi_s .$$

Et alors,

$$C = [\Phi_s] = C_s .$$

□

Lemme 1.5. *Soit s une combinaison et soit g une quasiprojection n -aire sur A telle que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a*

$$g(a) = a_k \neq a_1 \iff M = \hat{a} \in \binom{A}{n} \text{ et } k = \min\{2 \leq j \leq n : (a_1, a_j) \in s(M)\} .$$

Alors $g \in C_s$.

PREUVE. Pour $i = 1, 2, \dots, n$, définissons une opération n -aire g_i sur A par

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = x_1,$$

et pour $i > 1$,

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \Phi_s(g_{i-1}(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i).$$

Nous montrerons par induction sur $i = 1, 2, \dots, n$ que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, avec $M = \hat{a}$, on a

$$g_i(a) = a_k \neq a_1 \iff M \in \binom{A}{n} \text{ et } k = \min\{2 \leq j \leq i : (a_1, a_j) \in s(M)\}$$

Pour $i = 1$, $g_1(a) = a_1$ donc l'énoncé est évident.

Supposons que l'énoncé est vrai pour un $1 \leq i < n$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que pour un $1 < k \leq n$,

$$g_{i+1}(a) = \Phi_s(g_i(a), a_2, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n, a_{i+1}) = a_k \neq a_1$$

1) Soit $g_i(a) = a_1$. Alors

$$g_{i+1}(a) = \Phi_s(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n, a_{i+1}) = a_k \neq a_1 \quad (1.0.1)$$

On voit que $a \in \varrho_n$, car si $a \in \iota_n$ alors $b = (a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n, a_{i+1}) \in \iota_n$ et $\Phi_s(b) = a_1$.

De $a \in \varrho_n$, de $g_i(a) = a_1$ et par l'hypothèse inductive on obtient $(a_1, a_2), \dots, (a_1, a_i) \notin s(M)$ (où $M = \hat{a}$).

De (1.0.1) et par les propriétés de Φ_s , on obtient $k = i+1$ et $(a_1, a_{i+1}) \in s(M)$.

Donc,

$$i+1 = \min\{2 \leq j \leq i+1 : (a_1, a_j) \in s(M)\}$$

et l'énoncé est vrai pour $i+1$.

2) Soit $g_i(a) = a_l \neq a_1$. Par l'hypothèse d'induction $a \in \varrho_n$ et pour $M = \hat{a}$ on a $M \in \binom{A}{n}$ et $l = \min\{2 \leq j \leq i : (a_1, a_j) \in s(M)\}$.

Alors,

$$g_{i+1}(a) = \Phi_s(a_l, a_2, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n, a_{i+1}) = a_l$$

, car $l \leq i$. Donc $k = l$ et l'énoncé est vrai pour $i+1$.

Ceci termine l'étape d'induction. Donc pour $i = n$ ceci reste vrai et on obtient alors l'énoncé du lemme. \square

Lemme 1.6. Soit s une combinaison quelconque et pour chaque $M \in \binom{A}{n}$ soit

$$t(M) = \{(a_1, a_n) : M = \{a_1, \dots, a_n\}, (a_i, a_{i+1}) \in s(M) \ (i = 1, \dots, n-1), (a_i, a_n) \notin s(M) \ (i = 1, \dots, n-2)\}.$$

Si au moins un $t(M)$ est non trivial, alors $\Phi_t \in C_s$.

PREUVE. Définissons g comme une opération identique à celle du lemme 1.5 et pour $i = 1, \dots, n - 1$ et pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ définissons une opération n -aire h_i sur A par ;

$$h_1(x) = g(x)$$

$$h_i(x) = g(h_{i-1}(x), x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_2, \dots, x_{i-1}, x_1, x_n) \text{ pour } i > 1$$

et posons $h = h_{n-1}$. Alors h a les propriétés suivantes :

- (1) C'est une semiprojection sur la première variable. En effet, soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $a \in \iota_n$. Alors

$$h_1(a) = g(a) = a_1$$

$$h_2(a) = g(a_1, a_3, \dots, a_{n-1}, a_1, a_n) = a_1$$

$$\vdots$$

$$h_{n-2}(a) = g(a_1, a_{n-1}, a_2, \dots, a_{n-3}, a_1, a_n) = a_1$$

$$h_{n-1}(a) = g(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_1, a_n) = a_1 ;$$

donc $h(a) = a_1$.

- (2) Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $a \in \varrho_n$ et $h(a) = a_n$, alors $(a_1, a_n) \in t(\hat{a})$.

En effet soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $\hat{a} = M$ et $h(a) = a_n$. Alors

$$a_n = h(a) = h_{n-1}(a) = g(h_{n-2}(a), a_2, \dots, a_{n-2}, a_1, a_n)$$

et $a_n \neq a_1$ montre que $h_{n-2}(a) = a_{n-1}$ et $(a_{n-1}, a_n) \in s(M)$.

Par induction sur $j = 2, \dots, n - 2$, nous montrons

$$a_{n-j} = h_{n-j-1}(a) , (a_{n-j-1}, a_{n-j}) \in s(M) , (a_{n-j-1}, a_n) \notin s(M) . \quad (1.0.2)$$

Soit $j = 2$. Alors

$$a_{n-1} = h_{n-2}(a) = g(h_{n-3}(a), a_{n-1}, a_2, \dots, a_{n-3}, a_1, a_n)$$

montre que $h_{n-3}(a) = a_{n-2}$, $(a_{n-2}, a_n) \notin s(M)$ et $(a_{n-2}, a_{n-1}) \in s(M)$.

Supposons que (1.0.2) est vrai pour un $2 \leq j < n - 2$. Alors

$$a_{n-j} = h_{n-j-1}(a) = g(h_{n-j-2}(a), a_{n-j}, \dots, a_{n-1}, a_2, \dots, a_{n-j-2}, a_1, a_n)$$

montre que $h_{n-j-2}(a) = a_{n-j-1}$, $(a_{n-j-1}, a_n) \notin s(M)$ et $(a_{n-j-1}, a_{n-j}) \in s(M)$.

Ceci conclut la preuve par induction et la preuve du lemme.

□

Lemme 1.7. *Soit C un clone minimal de quasiprojections sur A généré par une semiprojection n -aire. Alors $C = C_s$ pour une combinaison s telle que s est soit une combinaison- eq soit une combinaison-ordre.*

PREUVE. Selon le lemme 1.4 nous avons que $C = C_s$ pour une combinaison s . Soit t la combinaison n -aire définie comme étant la fermeture transitive de $s(M)$ pour tout $M \in \binom{A}{n}$. Par le lemme 1.6, $\Phi_t \in C_s$.

Comme $s(M) \subseteq t(M)$ pour tout $M \in \binom{A}{n}$, l'opération Φ_t est non triviale. Et comme C_s est minimal, alors $C_t = C_s$. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que s est un quasi-ordre sur M (c.-à-d. s est réflexif et transitif). Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ définissons maintenant

$$g(x) = \Phi_s(x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi_s(x_n, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1)) .$$

Pour $M \in \binom{A}{n}$ soit $l(M)$ la relation définie comme suit : $(a, b) \in l(M)$ si $a = b$ ou $(a, b) \in s(M)$ et $(b, a) \notin s(M)$ (donc $l(M)$ est anti-symétrique). Rappelons

que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$

$$\Phi_l(a) = a_n \neq a_1 \iff a \in \varrho_n \text{ et } (a_1, a_n) \in l(M) \text{ (où } \hat{a} = M) .$$

Nous avons aussi que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$

$$g(a) = \Phi_s(a_1, \dots, a_{n-1}, \Phi_s(a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1)) = a_n \neq a_1$$

$$\iff \Phi_s(a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) = a_n, a \in \varrho_n, (a_1, a_n) \in s(M) \text{ (où } M = \hat{a})$$

$$\iff a \in \varrho_n, (a_n, a_1) \notin s(M), (a_1, a_n) \in s(M)$$

$$\iff a \in \varrho_n, (a_1, a_n) \in l(M).$$

Nous avons deux cas :

- (i) Soit $l(M) = \iota_2$ pour tout $M \in \binom{A}{n}$. Alors le quasi-ordre $s(M)$ est symétrique, c.-à-d. une relation d'équivalence pour tout $M \in \binom{A}{n}$. Donc s est une combinaison-eq.
- (ii) Soit $l(M) \not\supseteq \iota_2$ pour au moins un $M \in \binom{A}{n}$. Comme chaque $l(M)$ est un quasi-ordre anti-symétrique on a que l est une combinaison-ordre. De plus $\Phi_l \in C_s$ est non triviale et donc $C_s = C_l$.

□

Le Lemme 1.7 conclut donc cette section sur les combinaisons. Le résultat qu'il nous donne sera utile dans la suite de cette recherche sur les propriétés des clones minimaux de quasiprojections puisqu'il nous ramène à deux cas ; en effet chaque clone minimal C de quasiprojections généré par une semiprojection n -aire est égal à C_s , pour une combinaison s telle que s est soit une combinaison-eq, soit une combinaison-ordre.

Chapitre 2

LES COMBINAISONS-EQ

Nous nous attarderons dans cette section à certaines propriétés que nous avons trouvées sur les clones minimaux lorsque s est une combinaison-eq. Nous distinguerons les cas $n < |A|$ et $n = |A|$. Mais considérons tout d'abord un lemme concernant $n \leq |A|$:

Lemme 2.1. *Soit s une combinaison-eq telle que C_s est un clone minimal. Alors $C_s = C_t$ pour une combinaison-eq t avec la propriété suivante : il existe deux entiers positifs p, q ($q \geq 2$) tels que pour tout ensemble de base M de t , la relation d'équivalence $t(M)$ a exactement p blocs de cardinalité q , tandis que tous les autres blocs sont des singletons.*

PREUVE. Pour $M \in \binom{A}{n}$ nous dénotons par b_M la taille maximale des blocs de la relation d'équivalence $s(M)$ et par q le $\max\{b_M : M \in \binom{A}{n}\}$. Soit p le nombre maximal de blocs de taille q parmi les relations d'équivalence de $s(M)$ avec $M \in \binom{A}{n}$. Évidemment $q \geq 2$, car au moins un $s(M) \neq \iota_2$, et $p \geq 1$.

Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$. Si $i < j$ posons

$$z_{i,j}(x) = \Phi_s(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, x_j) .$$

Et si $i > j$ posons

$$z_{i,j}(x) = \Phi_s(x_i, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_j) .$$

Finalement posons $z_{i,i}(x) = x_i$. À noter que pour $i \neq j$ et pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a que

$$z_{i,j}(a) = a_j \neq a_i \iff a \in \varrho_n \text{ et } (a_i, a_j) \in s(M) \text{ (où } M = \hat{a} \text{)} .$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, posons

$$\begin{aligned} g(x) = \Phi_s(z_{1,1}(x), \dots, z_{1,q-1}(x), z_{q,q}(x), z_{q,q+1}(x), \dots, z_{q,2q-1}(x), z_{2q,2q}(x), z_{2q,2q+1}(x), \\ \dots, z_{2q,3q-1}, \dots, z_{(p-1)q,(p-1)q}, z_{(p-1)q,(p-1)q+1}(x), \dots, z_{(p-1)q,pq-1}(x), \\ z_{pq,pq}(x), z_{pq+1,pq+1}(x), \dots, z_{n-1,n-1}(x), z_{1,n}(x)) . \end{aligned}$$

Comme $z_{i,i}(x) = x_i$ pour $i = 1, \dots, p$, on a que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ (et $M = \hat{a}$)

$$\begin{aligned} g(a) \neq a_1 &\iff g(a) = a_n \neq a_1 \\ &\iff z_{1,n}(a) = a_n , (a_1, \dots, z_{1,q-1}(a), a_q, z_{q,q+1}(a), \dots, z_{q,2q-1}(a), a_{2q}, \\ &\quad z_{2q,2q+1}(a), \dots, z_{2q,3q-1}(a), \dots, a_{(p-1)q}, z_{(p-1)q,(p-1)q+1}(a), \dots, \\ &\quad z_{(p-1)q,pq-1}(a), a_{pq}, a_{pq+1}, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \varrho_n , (a_1, a_n) \in s(M) . \end{aligned}$$

Comme $z_{i,j}(a) \neq a_i \iff a \in \varrho_n$ et $(a_i, a_j) \in s(M)$ (pour tous $j = 1, \dots, q$ et $i \neq j$). Alors,

$$\begin{aligned} g(a) \neq a_1 &\iff a \in \varrho_n , (a_i, a_j) \in s(M) \text{ pour tous } i = 1, q, 2q, \dots, (p-1)q \\ &\quad \text{et (lorsque } i = 1 \text{) pour tous } j = k, \text{ où } k \in \{2, \dots, q-1\} \cup \{n\} \\ &\quad \text{et (lorsque } i \neq 1 \text{) pour tous } j = i-1+l, \text{ où } l \in \{2, \dots, q\}. \end{aligned}$$

Par le choix de q et p il existe $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ tel que $g(b) = b_n \neq b_1$.

Soit h l'opération définie à partir de g par la construction du lemme 1.3. On peut vérifier que $h = \Phi_t$ où t est la combinaison suivante :

Pour $M \in \binom{A}{n}$ on a

$$t(M) = \iota_2 \cup \{(a_1, a_n) : \text{il existe une permutation } \pi \text{ de } \{2, \dots, n-1\} \text{ telle que} \\ \{a_1, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(q-1)}, a_n\}, \{a_{\pi(q)}, \dots, a_{\pi(2q-1)}\}, \dots, \{a_{\pi((p-1)q)}, \dots, \\ a_{\pi(pq-1)}\} \text{ sont des blocs de } s(M)\}.$$

Ceci montre que pour tout ensemble de base M la relation d'équivalence $t(M)$ est une relation avec exactement p blocs de taille q tandis que tous les autres blocs sont des singletons. On observe que $\Phi_t \in C_s$ où Φ_t est non triviale.

Par minimalité $C_s = C_t$. □

2.1. CAS : $n < |A|$

Avant de commencer, regardons tout d'abord un lemme important auquel nous devons nous référer dans la suite de cette section.

Lemme 2.2. *Soit f une semiprojection n -aire non triviale sur sa première variable et $C = [f]$. Alors :*

- 1) *Toutes les opérations de C d'arité plus petite que n sont triviales.*
- 2) *Si C est un clone minimal, alors toutes les semiprojections d'arité différentes de n sont triviales.*

PREUVE. 1) Soit $1 \leq m < n$ et $g \in C$ une opération m -aire. Ici g est une opération terme de l'algèbre $\langle A; f \rangle$. Le terme doit contenir un sous-terme de la forme $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ avec $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$.

Comme $m < n$ on a que $i_j = i_k$ pour une paire $1 \leq j < k \leq n$. Par conséquent $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = x_{i_1}$ et le terme peut être simplifié. En répétant ceci on arrive à g triviale.

- 2) Par la contraposée supposons que C contient une semiprojection g non triviale et m -aire avec $m > n$. Alors $C \supseteq [g] \neq J$.

Par 1) l'opération non-triviale f n'appartient pas à $[g]$ et donc $C \supsetneq [g] \neq J$, i.e. C n'est pas minimal.

□

Désignons par \mathcal{U} la collection des ensembles de base pour s et définissons une relation n -aire R sur A par :

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \iff \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{U} \text{ et } (a_1, a_n) \in s(\{a_1, \dots, a_n\}) .$$

Important : Il est à noter, puisque s est une combinaison- eq , que l'on a

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in R \iff (a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \in R .$$

Posons $f = \Phi_s$, tel que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a que

$$f(a) = a_n \neq a_1 \iff a \in R .$$

et $C = [f]$.

Comme nous l'avons remarqué au lemme 2.1, nous pouvons restreindre notre attention au cas où il existe deux entiers positifs p, q ($q \geq 2$) tels que pour tout $M \in \mathcal{U}$, la relation d'équivalence $s(M)$ a exactement p blocs non singletons, tous de cardinalité q .

Lemme 2.3. *La condition suivante est nécessaire pour que le clone C soit minimal : Si $(a_1, \dots, a_n) \in R$ et $a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, alors il existe un nombre $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \in R$.*

PREUVE. Pour $i \in \{2, \dots, n-1\}$ et pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$g_i(x, x_{n+1}) = f(f(x), x_2, \dots, x_{i-1}, x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_1) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a que

$$\begin{aligned} g_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 &\iff f(f(a), a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) = a_n \neq a_1 \\ &\iff f(a) = a_n \text{ et } (a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R \\ &\iff a \in R \text{ et } (a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R . \end{aligned}$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, posons maintenant

$$g_{1,n}(x, x_{n+1}) = f(f(x), x_2, \dots, x_{n-1}, f(f(x_{n+1}, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_{n-1}, x_1)) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ arbitraires. Posons $c = (a_2, \dots, a_{n-1})$, $b = (a_{n+1}, c, a_n)$ et $d = (a_{n+1}, c, a_1)$. Alors nous aurons la notation suivante

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(f(a), c, f(f(b), c, a_1)) .$$

1) Soit $a \in R$. Alors $f(a) = a_n$.

a) Supposons que $b \in R$. Alors $f(b) = a_n$ et

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_n, c, f(a_n, c, a_1)) .$$

Ici $(a_n, c, a_1) \in R$ par la symétrie de $s(M)$ et $a \in R$. Donc

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_n, c, a_1) = a_1 .$$

b) Soit $b \notin R$. Alors $f(b) = a_{n+1}$ et

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_n, c, f(d)) .$$

Si $d \in R$ alors $f(d) = a_1$ et $g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_n, c, a_1) = a_1$, en vue de $a \in R$ et de la symétrie.

Si $d \notin R$ alors $f(d) = a_{n+1}$ et $g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_n, c, a_{n+1}) = a_n$, en vue de $b \notin R$ et de la symétrie.

2) Soit $a \notin R$. Alors $f(a) = a_1$ et

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_1, c, f(f(b), c, a_1)) .$$

a) Si $b \in R$, alors $f(b) = a_n$ et, du fait que $a \notin R$, on a $(a_n, c, a_1) \notin R$ et donc

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_1, c, f(a_n, c, a_1)) = f(a_1, c, a_n) = a_1.$$

b) Si $b \notin R$, alors $f(b) = a_{n+1}$ et

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_1, c, f(d)).$$

Si $d \in R$ alors $f(d) = a_1$ et $g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_1, c, a_1) = a_1$.

Si $d \notin R$ alors $f(d) = a_{n+1}$ et $g_{1,n}(a, a_{n+1}) = f(a_1, c, a_{n+1}) = a_1$, en vue de $d \notin R$ et de la symétrie.

En somme, pour tout $i = 2, \dots, n-1$ nous avons les deux opérations $(n+1)$ -aires suivantes :

$$g_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff a \in R \text{ et } (a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R$$

et

$$g_{1,n}(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff a \in R, (a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \notin R \text{ et } (a_{n+1}, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R.$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons maintenant

$$g(x, x_{n+1}) = g_2(x_1, \dots, x_{n-1}, g_3(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, g_{1,n}(x, x_{n+1}), x_{n+1}), \dots, x_{n+1}).$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$, on a que

$$\begin{aligned}
 g(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 &\iff g_{1,n}(a, a_{n+1}) = a_n \text{ et } g_i(a, a_{n+1}) = a_n, \forall i \in \{2, \dots, \\
 &\quad n-1\} \\
 &\iff a \in R, (a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \notin R, (a_{n+1}, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \\
 &\quad \notin R \text{ et } (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \notin R \forall i \in \{2, \\
 &\quad \dots, n-1\} \\
 &\iff a \in R \text{ et } (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \notin R \forall i \in \\
 &\quad \{1, \dots, n\}.
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, l'opération g est triviale, c.-à-d. $g(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1$. Alors pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in R$ et $a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ il existe un nombre $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \in R$. \square

Lemme 2.4. *Chacune des conditions suivantes dans l'ordre est nécessaire pour que le clone C soit minimal :*

- (1) Si $(a_1, \dots, a_n) \in R$ et $a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $(a_1, \dots, a_{n-1}, a) \in R$, $(a, a_2, \dots, a_n) \notin R$ ou $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a) \notin R$;
- (2) Si $(a_1, \dots, a_n) \in R$ et $a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ est un élément tel que $(a, a_2, \dots, a_n) \notin R$, alors il existe au plus un nombre $i \in \{2, \dots, n-1\}$ avec la propriété que $(a, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_i) \in R$, et si i a cette propriété, alors $(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) \in R$.

PREUVE. (1) Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$h(x, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n, f(f(x), x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_{n+1}, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1))) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$, posons $b = (a_2, \dots, a_{n-1})$ et

$$u = u(a, a_{n+1}) = f(f(a), b, f(a_{n+1}, b, a_1)) .$$

Soit

$$z = h(a, a_{n+1}) = f(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, u(a, a_{n+1})) \neq a_1 .$$

On observe que $u \neq a_1$, car sinon $z = f(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_1) = a_1$. Comme $f(a) \in \{a_1, a_n\}$ on a deux possibilités.

1.- Soit $a \in R$. Dans ce cas $f(a) = a_n$. Alors $(a_{n+1}, b, a_1) \notin R$, car sinon $f(a_{n+1}, b, a_1) = a_1$ et $u = f(a_n, b, a_1) = a_1$ en vertu de $a \in R$ et de la symétrie.

Ainsi $u = f(a_n, b, a_{n+1})$. Si $(a_n, b, a_{n+1}) \notin R$, alors $u = a_n$ et $z = f(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_n) = a_1$. Nous avons donc que $(a_n, b, a_{n+1}) \in R$ et $u = a_{n+1}$. Alors

$$z = f(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \neq a_1$$

montre que $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \in R$.

En résumé on a (en vertu de la symétrie) que :

$$a \in R, (a_1, b, a_{n+1}) \notin R, (a_{n+1}, b, a_n) \in R \text{ et } (a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \in R . \quad (2.1.1)$$

2.- Soit $a \notin R$ (et donc $f(a) = a_1$). Alors

$$u = f(a_1, b, f(a_{n+1}, b, a_1)) .$$

Ici $(a_1, b, f(a_{n+1}, b, a_1)) \in R$, car sinon $u = a_1$ et $z = a_1$. Par le même argument $(a_{n+1}, b, a_1) \notin R$. Donc $u = f(a_1, b, a_{n+1}) = a_1$, car $(a_1, b, a_{n+1}) \notin R$ en vertu de la symétrie. Donc dans tous les cas $z = a_1$ lorsque $a \notin R$.

En conclusion $h(a, a_{n+1}) \neq a_1$ si et seulement si on a (2.1.1).

Nous vérifions que h est une semiprojection sur la première variable. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$. Si $a \in \iota_n$, alors $a \notin R$ et

$$h(a, a_{n+1}) = a_1, \text{ par (2.1.1).}$$

Soit $a_{n+1} = a_j$ pour un $j \in \{1, \dots, n\}$. Si $j = 1$, alors $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \notin R$. Si $j = n$, alors $(a_1, b, a_{n+1}) = a \notin R$. Et finalement, si $j = 2, \dots, n-1$, alors

$(a_{n+1}, b, a_n) \notin R$. Donc dans tous les cas, (2.1.1) n'est pas vrai. Donc h est une semiprojection $(n+1)$ -aire.

Maintenant supposons par l'absurde qu'il existe $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in A^{n+1}$ tel que (2.1.1) soit vrai. Alors h serait une semiprojection $(n+1)$ -aire non triviale dans le clone minimal C , une contradiction du lemme 2.2.

Donc pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, on a que (2.1.1) n'est pas vrai.

On dénote respectivement par p, q, r, s les énoncés :

$a \in R, (a_1, b, a_{n+1}) \notin R, (a_{n+1}, b, a_n) \in R$ et $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \in R$.

La négation de (2.1.1), c.-à-d. $p \wedge q \wedge r \wedge s$, est $\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}$ (où \vee et \wedge sont respectivement la disjonction et la conjonction logique tandis que \bar{p} est la négation de p).

La conclusion est donc :

« $a \notin R$ ou $(a_1, b, a_{n+1}) \in R$ ou $(a_{n+1}, b, a_n) \notin R$ ou $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \notin R$ ».

Nous pouvons aussi écrire la conclusion sous une autre forme. En effet,

$$\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s} \approx \bar{\bar{p}} \longrightarrow (\bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}) \approx p \longrightarrow (\bar{q} \vee \bar{r} \vee \bar{s}) .$$

On obtient donc la conclusion :

« $a \in R$ entraîne $[(a_1, b, a_{n+1}) \in R$ ou $(a_{n+1}, b, a_n) \notin R$ ou $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n+1}) \notin R]$ ».

(2) Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$t(x, x_{n+1}) = f(f(x), f(x_2, x_3, \dots, x_n, g), \dots, f(x_i, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, g), \dots, f(x_{n-1}, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n, g), x_1) ,$$

où $g = f(x_{n+1}, x_2, \dots, x_n)$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $a_{n+1} \in A$ et pour $i = 2, \dots, n-1$ posons

$$b_i = f(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, g) . \quad (2.1.2)$$

Soit $t = t(a, a_{n+1}) \neq a_1$. Alors $a \in R$, car sinon $f(a) = a_1$ et $t = f(a_1, b_2, \dots, b_{n-1}, a_1) = a_1$.

Alors $f(a) = a_n$ et

$$t = f(a_n, b_2, \dots, b_{n-1}, a_1) \neq a_1 . \quad (2.1.3)$$

Par la définition de g on a $g \in \{a_n, a_{n+1}\}$. Supposons que $g = a_n$. Alors par (2.1.2), $b_i = a_i$ pour tous $i = 2, \dots, n-1$. Alors par (2.1.3), on a que

$$t = f(a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \neq a_1 .$$

Alors $(a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R$ et donc par symétrie $a = (a_1, \dots, a_n) \notin R$, ce qui contredit $a \in R$.

Donc $g = a_{n+1}$, c.-à-d. $(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \notin R$.

- Si $(a_j, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ et $(a_k, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ pour au moins une paire $2 \leq j < k \leq n-1$, alors $b_j = b_k = a_{n+1}$ et $t = a_n$ par (2.1.3).

- Si $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin R$ pour tous $i = 2, \dots, n-1$, alors

$$t = f(a_n, a_2, \dots, a_{n-1}, a_1) \neq a_1 .$$

Il a été montré un peu plus haut que c'est impossible, car $a \in R$.

- Si $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ pour exactement un $i \in \{2, \dots, n-1\}$, alors

$$t = f(a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \neq a_1 ,$$

montre que $(a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R$ et que $t = a_n$.

En somme, $t \neq a_1$ implique que $t = a_n$ et que

$p : a \in R$,

$q : (a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \notin R$,

et

$r : (I) (a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ pour au moins deux $i \in \{2, \dots, n-1\}$

ou

(II) $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ pour exactement un $i \in \{2, \dots, n-1\}$

et $(a_n, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_1) \notin R$.

(2.1.4)

Nous vérifions que t est une semiprojection sur sa première variable.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$. Si $a \in \iota_n$, alors $a \notin R$ et

$$t = t(a, a_{n+1}) = a_1, \text{ par (2.1.4).}$$

Soit $a_{n+1} = a_j$ pour un $j \in \{1, \dots, n\}$. Si $j > 1$, alors aucun $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$. Et si $j = 1$, alors $(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$ et donc (2.1.4) n'est pas vrai.

Donc t est une semiprojection $(n+1)$ -aire. Encore une fois par le lemme 2.2, on a que t est triviale. Alors pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, on a que (2.1.4) n'est pas vrai.

Nous cherchons donc la négation de $p \wedge q \wedge r$ afin que t soit triviale. Ce qui nous donne $\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}$.

Il est à noter que la négation de la condition r est la condition suivante :

(P) $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R$ pour au plus un $i \in \{2, \dots, n-1\}$ et $(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}) \in R \implies (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in R$.

Donc la conclusion est :

« $a \notin R$ ou $(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \in R$ ou (P) »

On peut aussi exprimer ceci de façon différente. En effet

$$\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \approx \overline{[p \vee q]} \longrightarrow \bar{r} \approx [p \wedge q] \longrightarrow \bar{r}.$$

Nous pouvons donc exprimer la conclusion comme suit :

« $[a \in R \text{ et } (a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \notin R]$ entraîne (P) »

□

2.2. CAS : $n = |A|$

Lemme 2.5. *Soit $n = |A|$. Soit s une combinaison- eq et supposons qu'il existe 2 entiers positifs p, q ($q \geq 2$) tel que l'équivalence $s(A)$ a exactement p blocs non singletons, tous de cardinalité q . Alors C_s est un clone minimal.*

PREUVE. Nous savons qu'il existe assurément un clone minimal C contenu dans C_s . De plus, par le lemme 1.7 nous savons que $C = C_t$ où t est une combinaison telle que $t(A)$ est soit une relation d'équivalence soit un ordre partiel sur A .

Regardons maintenant quelques définitions et quelques lemmes qui nous seront utiles pour la suite de la preuve.

Soit r une relation binaire sur A et π une permutation de A . On dit que π est un *automorphisme* de r si $(a, b) \in r \iff (\pi(a), \pi(b)) \in r$.

Soit f une opération n -aire sur A . On dit que π est un automorphisme de l'algèbre $\langle A; f \rangle$ si pour tous $a_1, \dots, a_n \in A$

$$f(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) = \pi(f(a_1, \dots, a_n)).$$

Lemme 2.5.1. *Soit s une relation binaire sur A et π une permutation de A . Alors π est un automorphisme de s si et seulement si π est un automorphisme de $\langle A; \Phi_s \rangle$.*

PREUVE. (\implies) Soit π un automorphisme de la relation s . Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ arbitraire et posons

$$\pi(a) = (\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) .$$

Supposons que $\Phi_s(a) = (a_1)$. Alors soit

- (i) $a_i = a_j$ pour certains $1 \leq i < j \leq n$, soit
- (ii) $\hat{a} = A$ et $(a_1, a_n) \notin s$.

Dans le cas (i) on a que $\pi(a_i) = \pi(a_j)$ et donc

$$\Phi_s(\pi(a)) = \pi(a_1) = \pi(\Phi_s(a)) . \quad (2.2.1)$$

Dans le cas (ii) on a que $(\pi(a_1), \pi(a_n)) \notin s$ et $\{\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\} = A$ et (2.2.1) est aussi vrai.

Maintenant soit $\Phi_s(a) = a_n \neq a_1$. Alors $\hat{a} = A$ et $(a_1, a_n) \in s$. Alors $\{\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\} = A$ et $(\pi(a_1), \pi(a_n)) \in s$, ce qui donne

$$\Phi_s(\pi(a)) = \pi(a_n) = \pi(\Phi_s(a)) .$$

(\impliedby) Soit un automorphisme de l'algèbre $\langle A; \Phi_s \rangle$ et soit $(b, c) \in s$, $b \neq c$. Écrivons $A \setminus \{b, c\} = \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$ et posons

$$a = (b, a_2, \dots, a_{n-1}, c) .$$

Alors $\Phi_s(a) = c$ et donc

$$\pi(c) = \pi(\Phi_s(a)) = \Phi_s(\pi(a)) = \Phi_s(\pi(b), \pi(a_2), \dots, \pi(a_{n-1}), \pi(c)) .$$

Comme $b \neq c$ et $\{\pi(b), \pi(a_2), \dots, \pi(a_{n-1}), \pi(c)\} = A$, on voit que $(\pi(b), \pi(c)) \in s$. Donc π est un automorphisme de la relation s . \square

Lemme 2.5.2. Soit $n = |A|$ et u et v des relations binaires telles que $\Phi_v \in C_u$. Alors chaque automorphisme de u est un automorphisme de v .

PREUVE. Soit π un automorphisme de u . Alors par le lemme 2.5.1, la permutation π est aussi un automorphisme de l'algèbre $\langle A; \Phi_u \rangle$.

Le clone C_u est engendré par Φ_u . Il est bien connu et facile à vérifier qu'alors π est aussi l'automorphisme de $\Phi_v \in C_u$. Par le lemme 2.5.1, on obtient que π est un automorphisme de la relation v . \square

Lemme 2.5.3. *Soit t une combinaison-ordre non triviale telle que $\Phi_t \in C_s$ et soit*

$$A_1 = \{a \in A : \{a\} \text{ est un bloc de } s\} \neq \emptyset$$

et $A_2 = A \setminus A_1$. Alors t ou $t^{-1} = \{(a, b) : (b, a) \in t\}$ est égale à

$$\iota_2 \cup \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}. \quad (2.2.2)$$

PREUVE. Écrivons $a < b$ pour $(a, b) \in t \setminus \iota_2$. Il est évident qu'une permutation π de A est un automorphisme de s exactement si π envoie tout bloc de s sur un bloc de s .

Une *antichaine* de t est un sous-ensemble B de A tel que $a \not< b$ pour tous $a, b \in B$. Nous avons besoin des deux faits suivants.

Fait 1. A_1 est une antichaine de t .

PREUVE. Supposons par l'absurde qu'il existe $a < b$ avec $a, b \in A_1$. Soit π la permutation de A définie par

$$\pi(x) = \begin{cases} b & \text{si } x = a, \\ a & \text{si } x = b, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $a, b \in A_1$, on voit que $\{a\}$ et $\{b\}$ sont des blocs de s et donc π est un automorphisme de s , donc un automorphisme de t . Alors

$$b = \pi(a) < \pi(b) = a < b ;$$

une contradiction dans l'ordre t . □

Fait 2. A_2 est une antichaîne de t .

PREUVE. Supposons par l'absurde que $a < b$ pour certains $a, b \in A_2$. Soit $a \in B_1$ et $b \in B_2$ où B_1 et B_2 sont des blocs de s , de taille $q > 1$, pas nécessairement distincts.

Il existe une permutation π de A telle que

- (i) $\pi(B_1) = B_2, \pi(B_2) = B_1, \pi(a) = b, \pi(b) = a$ et
- (ii) $\pi(x) = x$ pour tous $x \in A \setminus (B_1 \cup B_2)$.

Évidemment π est automorphisme de s et donc de t . Alors

$$b = \pi(a) < \pi(b) = a < b ;$$

une contradiction dans l'ordre t . □

Nous supposons que t est non trivial, donc il existe $a < b$. De plus A_1 et A_2 étant des antichaînes on a que $a \in A_i$ et $b \in A_{3-i}$ pour un $i \in \{1, 2\}$.

Supposons que $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Soit $c \in A_1$ et $d \in A_2$ arbitraires et soit $b \in B_1, d \in B_2$, où B_1 et B_2 sont des blocs de s , de taille $q > 1$, pas nécessairement distincts.

Soit π la permutation de A telle que

- (i) $\pi(B_1) = B_2, \pi(B_2) = B_1, \pi(b) = d,$
- (ii) $\pi(a) = c, \pi(c) = a$ et
- (iii) $\pi(x) = x$ pour tout $x \in A \setminus ((B_1 \cup B_2) \cup \{a, c\})$.

Alors π est un automorphisme de s et donc de t . Alors

$$c = \pi(a) < \pi(b) = d .$$

Ceci montre que t est l'ordre donné par (2.2.2). Si $a \in A_2$ et $b \in A_1$ la même preuve donne que t est l'inverse de la relation (2.2.2). □

Lemme 2.5.4. *Si la relation t donnée par (2.2.2) est non triviale, alors $\Phi_t \notin C_s$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que $\Phi_t \in C_s$. Alors Φ_t est une opération terme de $\langle A; \Phi_s \rangle$; c.-à-d. qu'il existe une expression $\tau(x_1, \dots, x_n)$, bâtie à partir des symboles Φ_s et des variables x_1, \dots, x_n telle que $\Phi_t(x_1, \dots, x_n) = \tau(x_1, \dots, x_n)$ est valide identiquement sur A .

Soit x_i la première variable de τ . Fixons $b \in A_1$ et $c \in A_2$. Étant donné que $\{b\}$ est un bloc de la relation d'équivalence $s(A)$, on montre facilement que $\tau(a) = b$ pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ avec $\hat{a} = A$ et $a_i = b$.

Nous avons donc trois cas.

- 1) Soit $1 < i < n$. Choisissons $a_1 = c$, $a_i = b$ et $\{a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\} = A \setminus \{b, c\}$. Alors

$$\Phi_t(a) = c \quad (\text{car } a_1 = c \in A_2),$$

ce qui contredit $\Phi_t(a) = \tau(a) = b$.

- 2) Soit $i = n$. Posons $a_1 = c$, $a_n = b$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c\}$. Alors

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a),$$

une contradiction.

- 3) Finalement soit $i = 1$. Posons $a_1 = b$, $a_n = c$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c\}$.

Comme $b < c$ on obtient

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a),$$

une contradiction.

Ceci montre que $\Phi_t \notin C_s$. □

Lemme 2.5.5. *Si la relation $t^{-1} = \iota_2 \cup \{(x, y) : x \in A_2, y \in A_1\}$ est non triviale, alors $\Phi_{t^{-1}} \notin C_s$.*

PREUVE. Analogue à la preuve du lemme 2.5.4 . □

Lemme 2.5.6. *Soit t une relation d'équivalence non triviale dont les blocs non singletons sont tous de même taille. Si $\Phi_t \in C_s$, alors on a cinq cas :*

- (i) $t = s$,
- (ii) A_2 est le seul bloc non singleton de t ,
- (iii) A_1 est le seul bloc non singleton de t ,
- (iv) $|A_1| = |A_2| \geq 2$ et A_1, A_2 sont les seuls blocs de t ,
- (v) $|A_1| = q$.

PREUVE. Il est évident que $t = s$ fait partie des cas possibles. Regardons pour les autres.

Soit $t \neq s$. Par le lemme 2.5.2 tout automorphisme de la relation s est un automorphisme de la relation t . En particulier toute permutation de A_1 respecte les blocs de t et donc soit

- (i) A_1 consiste en des blocs singletons de t , soit
- (ii) A_1 fait partie d'un bloc B de t .

En effet $B = A_1$, car s'il existait $b \in B \setminus A_1$, alors pour tout $c \in A_2$ l'automorphisme π de s , tel que $\pi(A_1) = A_1$ et $\pi(B_1) = B_2$ où B_1 et B_2 sont des blocs de s avec $b_i \in B_i$ ($i = 1, 2$), assurerait que $c \in B$ et donc $B = A$.

Finalement supposons qu'il existe $c_1, c_2 \in A_2$, avec $(c_1, c_2) \in t \setminus s$. Soit $(b_1, b_2) \in A_2^2 \setminus s$ et les blocs de t sont les blocs non-singletons de s plus A_1 .

Il existe un automorphisme π de s tel que $\pi(c_i) = b_i$ ($i = 1, 2$). Comme π est aussi un automorphisme de t et $(c_1, c_2) \in t$, on obtient que $(b_1, b_2) \in t$. Il est facile de voir que maintenant A_2 est un bloc de t .

Nous avons montré les cas (ii)-(v). □

Lemme 2.5.7. *Soit t la relation d'équivalence sur A au bloc A_2 et aux singletons $\{x\}$, avec $x \in A_1$. Alors $\Phi_t \notin C_s$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que $\Phi_t \in C_s$. Alors Φ_t est une opération terme de $\langle A; \Phi_s \rangle$; c.-à-d. qu'il existe une expression $\tau(x_1, \dots, x_n)$, bâtie à partir des symboles Φ_s et des variables x_1, \dots, x_n telle que $\Phi_t(x_1, \dots, x_n) = \tau(x_1, \dots, x_n)$ est valide identiquement sur A .

Soit x_i la première variable de τ . Fixons $b \in A_1$ et $(c, d) \in A^2 \setminus s$. Comme $\{b\}$ est un bloc de s on a que $\tau(a) = b$ pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ avec $\hat{a} = A$ et $a_i = b$.

Nous avons trois cas.

- 1) Soit $1 < i < n$. Choisissons $a_1 = c$, $a_n = d$, $a_i = b$ et $\{a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{c, d, b\}$. Alors

$$\Phi_t(a) \in \{c, d\} \text{ (car } (c, d) \in A^2 \setminus s)$$

ce qui contredit $\Phi_t(a) = \tau(a) = b$.

- 2) Soit $i = n$. Posons $a_1 = c$, $a_n = b$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{c, b\}$. Alors

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a),$$

une contradiction.

- 3) Soit $i = 1$. Posons $a_1 = c$, $a_n = d$, $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{c, d\}$ et soit B le bloc de s qui contient c , mais pas d .

Posons $x = (x_1, \dots, x_n)$. Le terme $\tau(x)$ contient le sous-terme

$$\Phi_s(x_1, \tau_2(x), \dots, \tau_n(x))$$

où x_1 est la première occurrence de x_1 dans τ . Il est facile de vérifier que

$$z = \Phi_s(c, \tau_2(a), \dots, \tau_n(a)) \in B;$$

en effet si $\tau_n(a) \notin B$, alors $z = c \in B$. Sinon $z \in B$.

Si l'on continue de cette façon on obtient $\tau(a) \in B$ tandis que $\Phi_t(a) = d \notin B$. Une contradiction.

Ceci montre que $\Phi_t \notin C_s$. □

Lemme 2.5.8. *Soit $|A_1| \geq 2$ et soit t la relation d'équivalence sur A au bloc A_1 et aux blocs $\{x\}$, avec $x \in A_2$. Alors $\Phi_t \notin C_s$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que $\Phi_t \in C_s$. Alors $\Phi_t = \tau$ pour une opération terme de $\langle A; \Phi_s \rangle$.

Soit x_i la première variable de τ . Fixons $b, c \in A_1$, $b \neq c$, et $d \in A_2$. Comme $\{b\}$ est un bloc de s on a que $\tau(a) = b$ pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ avec $\hat{a} = A$ et $a_i = b$.

Nous avons deux cas.

- 1) Soit $1 < i \leq n$. Posons $a_1 = d$, $a_i = b$ et $\{a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\} = A \setminus \{b, d\}$. Alors comme $\{d\}$ est un bloc de t on a

$$\Phi_t(a) = d \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

- 2) Soit $i = 1$. Posons $a_1 = b$, $a_n = c$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c\}$. Alors comme $(b, c) \in t$ on a

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

Ceci montre que $\Phi_t \notin C_s$. □

Lemme 2.5.9. *Soit $|A_1| = |A_2| \geq 2$ et A_1, A_2 les seuls blocs de t . Alors $\Phi_t \notin C_s$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que $\Phi_t \in C_s$. Alors $\Phi_t = \tau$ pour une opération terme de $\langle A; \Phi_s \rangle$.

Soit x_i la première variable de τ . Fixons $b, c \in A_1$, $b \neq c$, et $d \in A_2$. Comme $\{b\}$ est un bloc de s on a que $\tau(a) = b$ pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ avec $\hat{a} = A$ et $a_i = b$.

Nous avons deux cas.

- 1) Soit $1 < i \leq n$. Posons $a_1 = d$, $a_i = b$ et $\{a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\} = A \setminus \{b, d\}$. Alors

$$\Phi_t(a) \in \{d, a_n\} \subseteq A_2 .$$

Comme $\tau(a) = b \in A_1$, on a une contradiction.

- 2) Soit $i = 1$. Posons $a_1 = b$, $a_n = c$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c\}$. Alors

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

Ceci montre que $\Phi_t \notin C_s$. □

Lemme 2.5.10. *Soit $|A_1| = q$ et supposons que s a p blocs de taille q , où $p, q \geq 1$. Soit les blocs de t les p blocs non singletons de s plus A_1 . Alors $\Phi_t \notin C_s$.*

PREUVE. Supposons par l'absurde que $\Phi_t \in C_s$. Alors $\Phi_t = \tau$ pour une opération terme de $\langle A; \Phi_s \rangle$.

Soit x_i la première variable de τ . Fixons $b, c \in A_1$, $b \neq c$, et $d \in A_2$. Comme $\{b\}$ est un bloc de s on a que $\tau(a) = b$ pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ avec $\hat{a} = A$ et $a_i = b$.

Nous avons trois cas.

- 1) Soit $1 < i < n$. Posons $a_1 = c$, $a_i = b$, $a_n = d$ et $\{a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c, d\}$. Alors

$$\Phi_t(a) = c \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

2) Soit $i = n$. Posons $a_1 = d$, $a_n = b$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, d\}$. Alors

$$\Phi_i(a) = d \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

3) Soit $i = 1$. Posons $a_1 = b$, $a_n = c$ et $\{a_2, \dots, a_{n-1}\} = A \setminus \{b, c\}$. Alors

$$\Phi_i(a) = c \neq b = \tau(a) ,$$

une contradiction.

Ceci montre que $\Phi_i \notin C_s$.

□

Finalement revenons à la preuve du lemme 2.5. Par les lemmes 2.5.1 à 2.5.10 on obtient que C_s est un clone minimal.

□

Conclusion

Tout d'abord, par le lemme 2.1, nous avons que si C_s est un clone minimal, alors $C_s = C_t$ pour une combinaison-eq t spécifique: soit une combinaison qui a la propriété que pour tout ensemble de base M de t , la relation d'équivalence $t(M)$ possède exactement p blocs non singletons de cardinalité q , tandis que tous les autres sont des singletons.

Ensuite, par le lemme 2.5, nous avons pour le cas où $n = |A|$ que si s est une relation d'équivalence sur A avec au moins un bloc non singleton et avec des blocs non singletons de même cardinalité, alors C_s est un clone minimal.

Finalement, dans le cas où $n < |A|$, les lemmes 2.3 et 2.4 nous ont donné deux conditions nécessaires pour que le clone $C = [f] = [\Phi_s]$ soit minimal.

Il est à noter qu'ici, contrairement à un ensemble de trois éléments, nous n'avons pu trouver tous les clones minimaux. Par contre, nous sommes arrivés à des conclusions qui nous permettent d'établir le moment où les clones considérés sont ou ne sont pas minimaux.

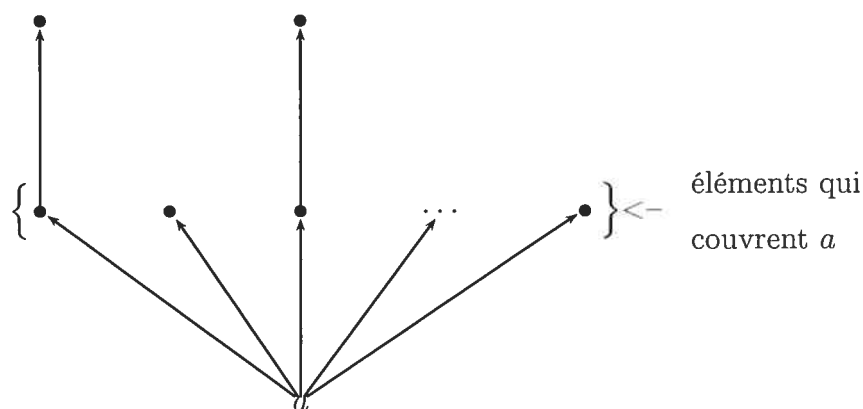
Chapitre 3

LES COMBINAISONS-ORDRES

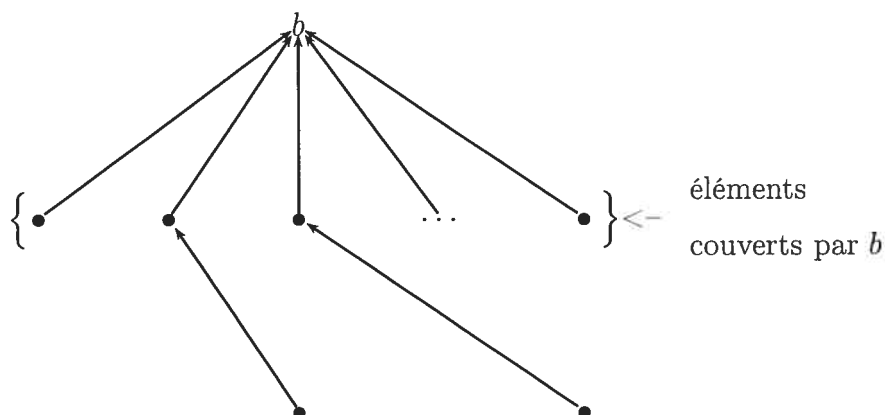
Tout comme au chapitre 2, nous verrons ici certaines propriétés sur les clones minimaux, mais cette fois-ci lorsque s est une combinaison-ordre. Nous nous intéresserons aux cas $n < |A|$ et $n = |A|$.

Mais commençons d'abord par quelques définitions élémentaires qui nous permettront d'aborder le premier lemme de ce chapitre pour le cas $n \leq |A|$.

Définition 3.1. *Pour un élément a d'un ensemble partiellement ordonné, le nombre d'éléments qui couvrent a est appelé son degré extérieur.*



Définition 3.2. *Pour un élément b d'un ensemble partiellement ordonné, le nombre d'éléments couverts par b est appelé son degré intérieur.*



Définition 3.3. Soit $t(M)$ un ordre partiel, on dit que $t(M)$ est de longueur 1 si pour tout $(a, b) \in t(M)$, $\exists c \in M$ tel que $(a, c) \in t(M)$ et $(c, b) \in t(M)$.

Lemme 3.1. Soit s une combinaison-ordre telle que C_s est un clone minimal. Alors $C_s = C_t$ pour une combinaison-ordre t qui a les propriétés suivantes : pour tout ensemble de base M de t , l'ordre $t(M)$ est de longueur 1 ; il existe deux entiers positifs p, q tels que pour tout ensemble de base M de t , le degré extérieur de tout élément de M est soit 0 ou p et le degré intérieur de tout élément de M est soit 0 ou q .

PREUVE. Soit t une combinaison-ordre tel que $C_s = C_t$ et tel que pour toute autre combinaison-ordre t' , où $C_s = C_{t'}$, on a que

$$\sum_{M \in \binom{A}{n}} |t(M)| \leq \sum_{M \in \binom{A}{n}} |t'(M)| . \quad (3.0.3)$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, posons

$$g(x) = \Phi_t(\Phi_t(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}), x_1, \dots, x_{n-2}, \Phi_t(x)) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $g(a) \neq a_1$. On a que $a \in \rho_n$, car sinon $\Phi_t(a) = a_1$, $\Phi_t(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}) = a_1$ et alors $g(a) = \Phi_t(a_1, a_1, \dots, a_{n-2}, a_1) = a_1$.

On a également que $(a_1, a_{n-1}) \in t(M)$ (où $M = \hat{a}$), car sinon $\Phi_t(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}) = a_1$ et alors $g(a) = \Phi_t(a_1, a_1, \dots, a_{n-2}, \Phi_t(a)) = a_1$.

Donc

$$g(a) = \Phi_t(a_{n-1}, a_1, \dots, a_{n-2}, \Phi_t(a))$$

montre que, tout dépendant si $(a_1, a_n) \in t(M)$ et si $(a_{n-1}, a_n) \in t(M)$, $g(a) = a_n$ ou $g(a) = a_{n-1}$.

Donc pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, on a que

$$g(a) \neq a_1 \iff a \in \varrho_n \text{ et } (a_1, a_{n-1}) \in t(M) .$$

L'opération g est une semiprojection sur la première variable. Par les lemmes 1.1 et 1.3, il existe une opération g' , définie à partir de g , telle que

$$g'(a) = a_n \neq a_1 \iff a \in \varrho_n , (a_1, a_{n-1}) \in t(M) \text{ et } (a_{n-1}, a_n) \in t(M) .$$

Soit k l'opération définie à partir de g' par la construction du lemme 1.3. On peut vérifier que $k = \Phi_{t'}$, où t' est la combinaison suivante :

Pour $M \in \binom{A}{n}$ on a

$$t'(M) = \iota_2 \cup \{(a, b) \in t(M) : \text{il existe } c \in M , a \neq c \neq b , \text{ tel que } (a, c) \in t(M) \text{ et } (c, b) \in t(M)\} .$$

On observe donc que

$$\Phi_{t'} = k \in [g'] = C_t = C_s ,$$

donc que

$$\Phi_{t'} \in C_s .$$

Par (3.0.3) nous aurons assurément que t' est trivial. Donc que

$$t'(M) = \iota_2 .$$

Alors pour tout $(a, b) \in t(M)$, $\nexists c \in t(M)$ tel que $(a, c) \in t(M)$ et $(c, b) \in t(M)$.

Donc $t(M)$ est de longueur 1 pour tout ensemble de base M de t .

Ainsi la première propriété est montrée.

Soit p le degré extérieur maximal de $t(M)$, $t(M)$ étant toujours un ordre partiel. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$z_{1,i} = \Phi_t(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i),$$

et

$$h(x) = \Phi_t(x_1, z_{1,2}, \dots, z_{1,p}, x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $h(a) \neq a_1$. Montrons que $z_{1,j} = a_j$ (donc que $(a_1, a_j) \in t(M)$ (où $M = \hat{a}$)) pour tous $j = 2, \dots, p$. Par la contraposée supposons que $z_{1,j} = a_1$ pour un $2 \leq j \leq p$. Alors on obtient

$$h(a) = \Phi_t(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_1, a_{j+1}, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) = a_1,$$

contrairement à notre hypothèse.

Maintenant $a \in \varrho_n$, car sinon $z_{1,j} = a_1$ pour tous $j = 2, \dots, p$ et $h(a) = a_1$.

Finalement

$$h(a) = \Phi_t(a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \neq a_1$$

montre que $(a_1, a_n) \in t(M)$ et $h(a) = a_n$.

Donc pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a que

$$h(a) = a_n \neq a_1 \iff a \in \varrho_n \text{ et } (a_1, a_i) \in t(M) \text{ pour tout } i \in \{2, \dots, p, n\}.$$

Donc h est une semiprojection sur la première variable. Soit l l'opération définie à partir de h par la construction du lemme 1.3. On peut vérifier que $l = \Phi_{t''}$ où t'' est la combinaison suivante :

Pour $M \in \binom{A}{n}$ on a

$$t''(M) = \iota_2 \cup \{(a, b) \in t(M) : \text{l'élément } a \text{ est de degré extérieur } p\}.$$

On observe que

$$\Phi_{t''} \in C_s.$$

Selon la minimalité de t (voir (3.0.3)), on a forcément que $t = t''$. Comme p est maximal, on observe que le degré extérieur, pour tout élément de M , est soit 0 soit p .

Finalement, soit q le degré intérieur maximal de $t(M)$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$h'(x) = \Phi_t(x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi_t(x_2, x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, \Phi_t(x_3, x_1, x_2, \dots, \Phi_t(x_q, x_1, \dots, x_{q-1}, x_{q+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \dots))) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tel que $h'(a) \neq a_1$. Pour $j = 2, \dots, q$, posons

$$b_j = \Phi_t(a_j, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, \Phi_t(a_{j+1}, \dots, \Phi_t(a_q, a_1, \dots, a_{q-1}, a_{q+1}, \dots, a_n) \dots)) .$$

Montrons que $b_j \neq a_j$ pour tous $j = 2, \dots, q$. Par la contraposée supposons que $b_j = a_j$ pour un $2 \leq j \leq q$. Alors

$$b_{j-1} = \Phi_t(a_{j-1}, a_1, \dots, a_{j-2}, a_j, \dots, a_{n-1}, a_j) = a_j .$$

Procédant de cette façon on obtient

$$b_2 = a_2 \text{ et } h'(a) = a_1 ,$$

contrairement à notre hypothèse.

Maintenant $a \in \varrho_n$, car sinon on aurait $b_q = a_q$ et $h'(a) = a_1$.

Comme $b_q \neq a_q$ on a que $b_q = a_n$ et $(a_q, a_n) \in t(M)$ (où $M = \hat{a}$). De la même manière on obtient $(a_{q-1}, a_n) \in t(M)$ et ainsi de suite jusqu'à $(a_2, a_n) \in t(M)$.

Finalement

$$h'(a) = \Phi_t(a) \neq a_1$$

montre que $(a_1, a_n) \in t(M)$ et $h'(a) = a_n$.

Donc pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a que

$$h'(a) = a_n \neq a_1 \iff a \in \varrho_n , (a_i, a_n) \in t(M) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, q\} .$$

Donc h' est une semiprojection sur la première variable. Soit m l'opération définie à partir de h' par la construction du lemme 1.3. On peut vérifier que $m = \Phi_{t'''} ,$ où t''' est la combinaison suivante :

Pour $M \in \binom{A}{n}$ on a

$$t'''(M) = \iota_2 \cup \{(a, b) \in t(M) : \text{l'élément } b \text{ est de degré intérieur } q\}$$

On observe que

$$\Phi_{t'''} \in C_s .$$

Par (3.0.3) on a toujours que $t''' = t$, donc comme q est maximal, on observe que le degré intérieur, pour tout élément de M , est soit 0 soit q . \square

3.1. CAS : $n < |A|$ ET UNE SEULE BASE M .

Lemme 3.2. *Soit M un sous-ensemble de A et $n = |M| \geq 3$. Soit R un ordre partiel de longueur 1 sur M tel que tous les éléments de M , à degré extérieur non-nul, sont de même degré extérieur et tous les éléments à degré intérieur non-nul sont aussi de même degré intérieur. Soit f une opération n -aire telle que pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a*

$$f(a) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a} \text{ et } (a_1, a_n) \in R ,$$

et soit $C = [f]$. Supposons qu'il existe au moins deux paires différentes d'éléments $a, b \in M$, $a \neq b$, tels que $(a, b) \in R$. Alors le clone C n'est pas minimal.

PREUVE. Il y a trois façons différentes d'avoir deux paires différentes d'éléments $a, b \in M$, $a \neq b$, tels que $(a, b) \in R$:

- (1) Le degré intérieur commun q des éléments aux degré intérieurs non-nuls satisfait $q \geq 2$.
- (2) Le degré extérieur commun p des éléments aux degré extérieurs non-nuls satisfait $p \geq 2$.

(3) $p = q = 1$ et $|R| \geq 4$.

Cas (1) .

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ posons

$$D_i(x, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

et

$$E_i(x, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_n) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ tel que $D_i(a, a_{n+1}) \neq a_1$. Alors $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, $f(a_i, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, a_n) = a_i$ et $f(a) = a_n$. Alors $M = \hat{a}$ et $(a_1, a_n) \in R$. De plus pour $k = \{a_2, \dots, a_n\}$ on a $a_{n+1} = a_1$ ou $a_{n+1} \in k$. Si $a_{n+1} = a_1$, il faut que $(a_i, a_n) \notin R$.

En somme,

$$D_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a} , (a_1, a_n) \in R \text{ et} \\ \text{soit } a_{n+1} \neq a_1 \text{ ou } (a_i, a_n) \notin R .$$

Maintenant soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ tel que $E_i(a, a_{n+1}) \neq a_1$. Alors $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont distincts, $f(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}) = a_i$ et $f(a) = a_n$. Alors $M = \hat{a}$ et $(a_1, a_n) \in R$. De plus pour $l = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ on a $a_{n+1} = a_n$ ou $a_{n+1} \in l$. Si $a_{n+1} = a_n$ il faut que $(a_i, a_n) \notin R$.

Donc finalement,

$$E_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a} , (a_1, a_n) \in R \text{ et} \\ \text{soit } a_{n+1} \neq a_n \text{ ou } (a_i, a_n) \notin R .$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons maintenant

$$g_1(x, x_{n+1}) = D_2(x_1, \dots, x_{n-1}, D_3(x_1, \dots, x_{n-1}, D_4(\dots(D_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, x_{n+1}), \\ x_{n+1}))$$

et

$$g_n(x, x_{n+1}) = E_2(x_1, \dots, x_{n-1}, E_3(x_1, \dots, x_{n-1}, E_4(\dots(E_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, x_{n+1}), \\ x_{n+1})) .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $a_{n+1} \in A$ et

$$z = D_3(a_1, \dots, a_{n-1}, D_4(\dots(D_{n-1}(a, a_{n+1}), a_{n+1}), \dots, a_{n+1}) .$$

Alors,

$$g_1(a, a_{n+1}) \neq a_1 \iff D_2(a_1, \dots, a_{n-1}, z, a_{n+1}) = z, M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \\ \text{et } a_{n+1} = a_1 \Rightarrow (a_2, a_n) \notin R .$$

Si l'on continue de la même façon on obtient

$$g_1(a, a_{n+1}) \neq a_1 \iff g_1(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1, M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \\ \text{et } a_{n+1} = a_1 \Rightarrow (a_i, a_n) \notin R \text{ pour tous } i = 2, \dots, n-1 \\ \iff g_1(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1, M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \\ \text{et } a_{n+1} = a_1 \Rightarrow a_n \text{ est de degré intérieur } 1 .$$

Par l'hypothèse sur les degrés intérieurs du Cas (1), on peut remplacer l'implication par $a_{n+1} \neq a_1$.

Par le même argument, pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $a_{n+1} \in A$ on a que

$$g_n(a, a_{n+1}) \neq a_1 \iff g_n(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1, M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \\ \text{et } a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_n \text{ est de degré intérieur } 1 .$$

Par l'hypothèse sur les degrés intérieurs du Cas (1), on peut remplacer l'implication par $a_{n+1} \neq a_n$.

En somme on obtient

$$g_1(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} \neq a_1$$

et

$$g_n(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} \neq a_n.$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons maintenant

$$B(x, x_{n+1}) = f(x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, f(x)).$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a que

$$B(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} = a_2.$$

Posons

$$U_2 = x_n$$

et pour tout $i \in \{3, \dots, n-1\}$ posons

$$U_i = f(x_1, B(x_2, x_i, x_1, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_3, \dots, x_{n-1}, U_{i-1})$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$. Alors

$$U_3(a, a_{n+1}) \neq a_1 \iff U_3(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1$$

$$\iff \{a_1, B, a_3, \dots, a_n\} = M \text{ et } (a_1, a_n) \in R$$

$$\iff B = a_2, \hat{a} = M \text{ et } (a_1, a_n) \in R$$

$$\iff \hat{a} = M, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} \neq a_3.$$

Par induction sur $i = 3, \dots, n-1$ le même argument montre que

$$U_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff \hat{a} = M, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} \notin \{a_3, \dots, a_i\},$$

en particulier

$$U_{n-1}(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff \hat{a} = M, (a_1, a_n) \in R \text{ et } a_{n+1} \notin \{a_3, \dots, a_{n-1}\}.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons

$$U(x, x_{n+1}) = g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, g_1(x_2, x_1, \dots, x_{n-1}, U_{n-1}, x_{n+1}), x_{n+1}), x_{n+1}).$$

Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a que

$$\begin{aligned} U(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, a_{n+1} \neq a_n, \\ &(a_2, a_n) \in R, a_{n+1} \neq a_1, a_{n+1} \neq a_2 \text{ et} \\ &U_{n-1} = a_n. \end{aligned}$$

En somme on obtient que

$$\begin{aligned} U(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, a_{n+1} \neq a_n, (a_2, a_n) \in R, \\ &a_{n+1} \neq a_1, a_{n+1} \neq a_2 \text{ et } a_{n+1} \notin \{a_3, \dots, a_{n-1}\} \\ &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, (a_2, a_n) \in R \text{ et} \\ &a_{n+1} \notin M. \end{aligned}$$

Finalement U est une semiprojection $(n+1)$ -aire sur sa première variable. De plus U est non triviale. En effet, par hypothèse, il existe trois éléments distincts $a_1, a_2, a_n \in M$ tels que $(a_1, a_n) \in R$ et $(a_2, a_n) \in R$. Pour $M \setminus \{a_1, a_2, a_n\} = \{a_3, \dots, a_{n-1}\}$ et $a_{n+1} \in A \setminus M$ on obtient $U(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1$. Le fait que U soit une semiprojection non triviale d'arité $n+1$ montre que $[f]$ n'est pas un clone minimal (lemme 2.2).

Cas (2) .

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$ posons

$$V_i(x, x_{n+1}) = f(x_1, f(f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_3, \dots, x_n, x_2), x_3, \dots, x_n).$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a que

$$V_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et}$$

$$f(f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_n), a_3, \dots, a_n, a_2) = a_2$$

$$\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R,$$

$$(a_1, a_2) \in R \text{ et } a_{n+1} \neq a_i.$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons maintenant

$$V_{1,n}(x, x_{n+1}) = f(x_1, f(f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_{n+1}, x_2, \dots, x_n)), x_3, \dots, x_n, x_2), x_3, \dots, x_n, x_n)$$

et

$$V(x, x_{n+1}) = V_{1,n}(x_1, \dots, x_{n-1}, V_2(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, V_{n-1}(x, x_{n+1}), x_{n+1}), \dots, x_{n+1}), x_{n+1}).$$

Il faut tout d'abord caractériser $V_{1,n}$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$. Posons

$$d = f(a_1, \dots, a_{n-1}, f(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n)),$$

$$c = f(d, a_3, \dots, a_n, a_2),$$

et dénotons par P l'énoncé « $\hat{a} = M, (a_1, a_n) \in R$ ».

Alors

$$V_{1,n}(a, a_{n+1}) \neq a_1 \iff V_{1,n}(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1$$

$$\iff P \text{ et } c = a_2$$

$$\iff P, d = a_1 \text{ et } (a_1, a_2) \in R$$

$$\iff P, (a_1, a_2) \in R \text{ et } f(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) \neq a_n$$

$$\iff P, (a_1, a_2) \in R \text{ et } a_1 \neq a_{n+1} \neq a_n.$$

Pour $i = 2, \dots, n - 1$ soit

$$v_i = V_i(a_1, \dots, a_{n-1}, V_{i+1}(a_1, \dots, a_{n-1}, \dots, V_{n-1}(a, a_{n+1}), a_{n+1}), \dots, a_{n+1}), a_{n+1}) .$$

Alors

$$\begin{aligned} V(a, a_{n+1}) \neq a_1 &\iff V(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \\ &\iff P, (a_1, a_2) \in R, a_{n+1} \notin \{a_1, a_n\} \text{ et } v_2 = a_n \\ &\iff P, (a_1, a_2) \in R, a_{n+1} \notin \{a_1, a_2, a_n\} \text{ et } v_3 = a_n \\ &\iff P, (a_1, a_2) \in R, a_{n+1} \notin \{a_1, a_2, a_3, a_n\} \text{ et } v_4 = a_n \\ &\vdots \\ &\iff P, (a_1, a_2) \in R \text{ et } a_{n+1} \notin M . \end{aligned}$$

En résumé, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a

$$V(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, (a_1, a_2) \in R \text{ et } a_{n+1} \notin M .$$

Finalement V est une semiprojection $(n + 1)$ -aire sur sa première variable. De plus V est non triviale. En effet, par hypothèse, il existe trois éléments distincts a_1, a_2, a_n dans M tels que $(a_1, a_2) \in R$ et $(a_1, a_n) \in R$. Pour $M \setminus \{a_1, a_2, a_n\} = \{a_3, \dots, a_{n-1}\}$ et $a_{n+1} \in A \setminus M$ on obtient $V(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_n \neq a_1$. Le fait que V est une semiprojection non triviale d'arité $n + 1$ montre que $[f]$ n'est pas un clone minimal.

Cas (3) .

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ posons

$$\begin{aligned} Q_i(x, x_{n+1}) &= f(x_1, \dots, x_{n-2}, f(x_2, f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_3, \dots, x_{n-2}, \\ &\quad x_n, x_{n-1}), x_n) . \end{aligned}$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$ on a que

$$\begin{aligned} Q_i(a, a_{n+1}) \neq a_1 &\iff Q_i(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \\ &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et } f(a_2, f(a_1, \dots, a_{i-1}, \\ &\quad a_{n+1}, a_{i+1}, \dots, a_n), a_3, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}) = a_{n-1} \\ &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, (a_2, a_{n-1}) \in R \text{ et} \\ &\quad a_{n+1} \neq a_i. \end{aligned}$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ posons maintenant

$$Q_1(x, x_{n+1}) = f(x_1, f(x_2, x_{n+1}, x_3, \dots, x_{n-2}, x_n, x_{n-1}), x_3, \dots, x_n)$$

et

$$Q(x, x_{n+1}) = Q_1(x_1, \dots, x_{n-1}, Q_2(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots, Q_n(x, x_{n+1}), x_{n+1}), \dots, x_{n+1}), x_{n+1}).$$

Il faut caractériser Q_1 . Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$. Alors

$$\begin{aligned} Q_1(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et } f(a_2, a_{n+1}, a_3, \dots, a_{n-2}, \\ &\quad a_n, a_{n-1}) = a_2 \\ &\iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R \text{ et} \\ &\quad a_{n+1} = a_1 \Rightarrow (a_2, a_{n-1}) \notin R \end{aligned}$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $a_{n+1} \in A$ et pour $i = 2, \dots, n$ posons

$$q_i = Q_i(a_1, \dots, a_{n-1}, Q_{i+1}(a_1, \dots, a_{n-1}, \dots, Q_n(a, a_{n+1}), a_{n+1}), \dots, a_{n+1}), a_{n+1}).$$

Dénotons par P l'énoncé « $M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R$ ». Alors

$$\begin{aligned}
Q(a, a_{n+1}) \neq a_1 &\iff Q(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \\
&\iff Q_1(a_1, \dots, a_{n-1}, q_2, a_{n+1}) = a_n \\
&\iff P, q_2 = a_n \text{ et } a_{n+1} = a_1 \Rightarrow (a_2, a_{n-1}) \notin R \\
&\iff P, a_{n+1} = a_1 \Rightarrow (a_2, a_{n-1}) \notin R, q_3 = a_n, (a_2, a_{n-1}) \in R \\
&\quad \text{et } a_{n+1} \neq a_2 \\
&\iff P, a_{n+1} \notin \{a_1, a_2\}, (a_2, a_{n-1}) \in R \text{ et } q_3 = a_n \\
&\iff P, a_{n+1} \notin \{a_1, a_2, a_3\}, (a_2, a_{n-1}) \in R \text{ et } q_4 = a_n \\
&\quad \vdots \\
&\iff P, a_{n+1} \notin M \text{ et } (a_2, a_{n-1}) \in R.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $a_{n+1} \in A$, on a que

$$Q(a, a_{n+1}) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{a}, (a_1, a_n) \in R, (a_2, a_{n-1}) \in R \text{ et } a_{n+1} \notin M.$$

Comme précédemment on a que Q est une semiprojection $(n+1)$ -aire non triviale par l'hypothèse du cas (3). Puisque $Q \in [f]$ ceci implique que C n'est pas un clone minimal.

□

Lemme 3.3. Soit M un sous-ensemble de A tel que $n = |M| \geq 3$ et soit a, b deux éléments distincts de M . Soit f une opération n -aire sur A telle que pour tout $c = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ on a

$$f(c) = a_n \neq a_1 \iff M = \hat{c}, a_1 = a \text{ et } a_n = b$$

et soit $C = [f]$. Alors C est un clone minimal.

PREUVE. Afin de démontrer ceci, nous devons travailler avec des opérations $g(x_1, \dots, x_m)$ engendrés par f et nous servir de cinq faits concernant ceux-ci.

Définissons tout d'abord la notion de longueur, profondeur et de première variable.

On appelle $g \in [f]$ m -aire, une *opération terme* (de l'algèbre $\langle A; f \rangle$). Elle est donnée par au moins un *terme* (de l'algèbre $\langle A; f \rangle$), ce qui en fait une expression formée correctement à partir des symboles x_1, \dots, x_m des variables.

Par exemple, pour $n = 3$ et $m = 4$, dans

$$g(x_1, \dots, x_4) = f(f(x_2, x_3, x_4), f(f(x_3, x_2, x_1), x_1, x_4), x_3) \quad (3.1.1)$$

la partie de droite est un terme et g , donné par (3.1.1), est une opération terme.

La *première variable* d'un terme est la première variable rencontrée dans le terme si l'on va de gauche à droite, p.ex. x_2 dans (3.1.1).

La *longueur* d'un terme est le nombre de symboles f et des symboles de variables dans le terme, p.ex. 13 dans (3.1.1).

Un terme peut être représenté par un arbre avec une racine, où la racine est de degré n , les sommets intérieurs sont de degré $n + 1$ et les feuilles de degré 1. Pour le terme (3.1.1) l'arbre est représenté à la Fig 3.1.

À chaque feuille correspond une variable tandis que le symbole f correspond à tout autre sommet. La *profondeur* d'un terme est la longueur maximale des chemins allant de la racine à une feuille, p.ex. la profondeur du terme (3.1.1) est 3.

Dans les faits 1 à 5, l'opération $g(x_1, \dots, x_m)$ est donnée par un terme, $d = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$ et $1 \leq i \leq m$.

Fait 1. Soit g une opération m -aire et x_i la première variable dans g . Si $g(d) \neq a_i$ alors $\hat{d} \supseteq M$, $a_i = a$ et $g(d) = b$.

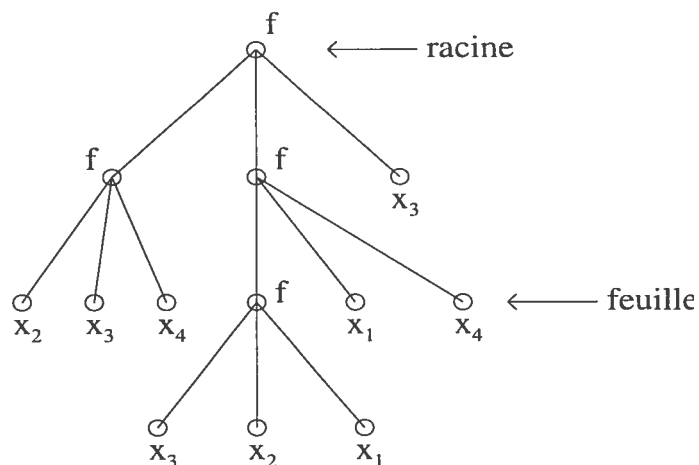


FIG. 3.1

PREUVE. Par induction sur la profondeur k du terme. Pour $k = 1$ le terme est

$$f(x_{l_1}, \dots, x_{l_n}) \text{ où } l_i \geq 1 \text{ pour tous } i = 1, \dots, n.$$

Comme $g(d) \neq a_i$ on a que $l_1 = i$, $l_n = n$ et $\{l_1, \dots, l_n\} = \{1, \dots, n\}$.

Alors $\{a_1, \dots, a_n\} = M$, $a_i = a$ et $g(d) = b$.

Supposons que l'énoncé est vrai pour tous les termes de profondeur au plus k et soit t un terme de profondeur $k + 1$. Alors le terme est de la forme $f(t_1, \dots, t_n)$ où $t_i(x_1, \dots, x_m)$ sont des termes de profondeur au plus k ($i = 1, \dots, n$). (Pour l'exemple (3.1.1) on aurait $t_1(x_1, \dots, x_4) = f(x_2, x_3, x_4)$, $t_2(x_1, \dots, x_4) = f(f(x_3, x_2, x_1), x_1, x_4)$ et $t_3(x_1, \dots, x_4) = x_3$.)

Soit g_l l'opération terme correspondante au terme t_l et soit $c_l = g_l(d)$ ($l = 1, \dots, n$). Évidemment la première variable de g_l est x_i et $f(c_1, \dots, c_n) = g(d) \neq a_i$.

Alors par la définition de f on a que $\{c_1, \dots, c_n\} = M$, $c_1 = a$, $c_n = b$ et $g(d) = b$. De plus chaque $c_l \in \{a_1, \dots, a_m\}$ et donc $\hat{d} \supseteq M$. Ceci conclut l'étape d'induction et démontre le Fait 1. \square

Fait 2. Soit g une opération m -aire. Si $g(d) = a_i$ alors x_i est la première variable dans g .

PREUVE. Soit x_j la première variable du terme. Posons $a_j = a$ et $a_l = b$ pour tous $l \in \{1, \dots, m\} - \{j\}$. Comme $a, b \in M$, d'après l'hypothèse on a que $g(d) = a_i$. Du fait que $n \geq 3$, pour tout $(e_1, \dots, e_m) \in \{a, b\}^m$ on a $f(e_1, \dots, e_m) = e_1$.

Ceci permet de simplifier graduellement l'expression $g(d)$ en allant du bas vers le haut (Pour l'exemple (3.1.1) on aurait $g(d) = f(a_2, u, v) = a_2$, où $a_2 = a$, $u = f(f(a_3, a_2, a_1), a_1, a_4) \in \{a, b\}$ et $v = a_3 \in \{a, b\}$).

De $a = a_j = g(d) = a_i$ et $a \neq b$ on obtient la conclusion voulue $i = j$. \square

Fait 3. Soit g une opération m -aire. Soit $c \in M$ et posons

$$a'_i = \begin{cases} c, & \text{pour } a_i \notin M, \\ a_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux affirmations suivantes sont vraies : (1) Si $g(d) = a$ alors $g(d') \in \{a, b\}$; (2) si $g(d) \in M \setminus \{a\}$ alors $g(d') = g(d)$.

PREUVE. (1) Nous procédons par induction sur la profondeur de g .

(i) D'abord soit g de profondeur 1 et $g(d) = a$. Alors

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \text{ où } 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m.$$

Alors

$$a = g(d) = f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$$

montre que $a_{i_1} = a$ et si $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\} = M$, alors $a_{i_m} \neq b$.

Comme $a \in M$ on a $a'_{i_1} = a$ et donc $f(a'_{i_1}, \dots, a'_{i_m}) \in \{a, b\}$.

(ii) Soit $k \geq 1$ et l'énoncé (1) vrai pour les opérations terme de profondeur au plus k . Soit $g(x_1, \dots, x_m)$ une opération terme de profondeur $k + 1$ tel que $g(d) = a$.

Il existe des opérations termes $g_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$) telles que

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) .$$

Alors

$$a = g(d) = f(g_1(d), \dots, g_n(d))$$

montre que $g_1(d) = a$. Par l'hypothèse d'induction $g_1(d') \in \{a, b\}$ et donc $g(d') \in \{a, b\}$. Ceci termine l'étape d'induction et démontre (1).

(2) Par induction sur la profondeur de g .

(i) Soit g de profondeur 1 et soit $g(d) = e \in M \setminus \{a\}$. Alors

$$e = g(d) = f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$$

et donc $a_{i_1} = e \in M$. Alors $a'_{i_1} = e$ et

$$g(d') = f(e, a'_{i_2}, \dots, a'_{i_n}) = e = g(d) .$$

(ii) Soit $k \geq 1$ tel que (2) est vrai pour toute opération terme de profondeur au plus k . Soit g une opération terme de profondeur $k + 1$ et soit $g(d) = e \in M \setminus \{a\}$. Alors il existe des opérations termes $g_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$) telles que

$$e = g(d) = f(g_1(d), \dots, g_n(d)) .$$

Comme $e \neq a$ on voit que $g_1(d) = e$. Par l'hypothèse d'induction $g_1(d') = e$ et donc

$$g(d') = f(e, g_2(d'), \dots, g_n(d')) = e = g(d) .$$

Ceci termine l'étape d'induction et démontre (2) et le Fait 3.

□

Fait 4. Soit g une opération m -aire et soit $g(d) = a_1$ pour tout $d \in M^m$. Alors $g(d) = a_1$ pour tout $d \in A^m$.

PREUVE. Tout d'abord, par le Fait 2, on a que x_1 est la première variable dans g . Nous montrons le fait par induction sur la profondeur k d'une opération terme.

(i) Soit $k = 1$. Par l'hypothèse

$$g(d) = a_1 \text{ si } d \in M^m$$

et donc par le Fait 2 on obtient que x_1 est la première variable de g , c.-à-d.

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \text{ pour certains } 1 \leq i_2, \dots, i_n \leq m.$$

Supposons par absurde qu'il existe $d \in A^m$ tel que $g(d) \neq a_1$. Par le Fait 1, on a $\hat{d} \supseteq M$, $a_1 = a$ et $g(d) = b$. Posons

$$a'_i = \begin{cases} a, & \text{pour } a_i \notin M, \\ a_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $d' \in M^m$ et par le Fait 3 on a $g(d') = b$, une contradiction.

(ii) Soit $k \geq 1$ et le Fait 4 vrai pour les opérations terme de profondeur au plus k . Soit $g(x_1, \dots, x_m)$ une opération de profondeur $k + 1$ tel que $g(d) = a_1$ pour tout $d \in M^m$. Il existe des opérations terme $g_i(x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, n$) telles que

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) .$$

Supposons par absurde qu'il existe $d \in A^m$ tel que $g(d) \neq a_1$. Nous obtenons deux cas possibles.

(a) $g_1(d) \neq a_1$. Alors $a_1 = a$ et $g_1(d) = b$ (par le Fait 1). Posons

$$a'_i = \begin{cases} a, & \text{pour } a_i \notin M, \\ a_i, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $d' \in M^m$. Par le Fait 3 on a $g_1(d') = b$. Donc

$$g(d') = f(b, g_2(d'), \dots, g_n(d')) = b ,$$

une contradiction.

(b) $g_1(d) = a_1$. Alors

$$g(d) = f(a_1, g_2(d), \dots, g_n(d)) \neq a_1$$

montre que $a_1 = a$ et $g(d) = b$. En reprenant la même construction pour les a'_i , on obtient que $d' \in M^m$. Par le Fait 3 on a $g(d') = b$, une contradiction.

Ceci termine l'étape d'induction et démontre le Fait 4.

□

Fait 5. *Le clone C ne contient aucune semiprojection non triviale d'arité $> n$.*

PREUVE. Nous savons qu'une semiprojection d'arité $> n$ sera une projection sur l'ensemble M , car celui-ci est de cardinalité n . Donc par le Fait 4, que nous venons de démontrer, ceci implique que ce sera aussi une projection sur l'ensemble A .

□

Nous pouvons maintenant retourner à la démonstration du lemme 3.3. Il existe assurément un clone minimal C' contenu dans C . Il s'agit de montrer que $C' = C$.

Le clone C' est généré par une semiprojection m -aire g qui est, par le lemme 1.7, de la forme $g = \Phi_s$ pour une combinaison s . Par le Fait 5, $m = n$ et alors, en utilisant le Fait 1, on voit que $g = f$. Donc

$$C' = [g] = [f] = C .$$

□

3.2. CAS : $n = |A|$

Définition 3.4. Nous appelons ordre lisse un ordre partiel R de longueur 1 sur A tel que si $(a, b) \in R$, $(c, d) \in R$, $a \neq b$ et $c \neq d$, alors il existe un automorphisme α de (A, R) avec $\alpha(a) = c$ et $\alpha(b) = d$.

Lemme 3.4. Soit R un ordre partiel sur A tel que le clone C_R est minimal. Alors $C_R = C_S$ pour un ordre lisse S sur A .

PREUVE. Soit S un ordre partiel de cardinalité minimale par rapport aux ordres partiels avec la propriété $C_S = C_R$. Selon le lemme 3.1, S est de longueur 1 et il existe deux entiers positifs p, q tels que tous les éléments de A sont de degré extérieur égaux à 0 ou p et de degré intérieur égaux à 0 ou q . Si soit p ou q égale 1, S est assurément lisse. Donc soit $p, q \geq 2$.

Posons $f = \Phi_S$. Soit $(a, b) \in S$ tel que $a \neq b$. Réarrangeons tous les éléments de A dans un n -tuple a_1, \dots, a_n de façon à ce que $a_1 = a$ et $a_n = b$. Comme l'élément b est de degré intérieur au moins 2, nous pouvons donc poser, sans perdre de généralité, que $(a_2, a_n) \in S$.

On considère le n -tuple de variables x_1, \dots, x_n . Pour chaque paire (i, j) de nombres distincts dans $\{1, \dots, n\}$, nous définirons par $X_{i,j}$ la séquence $(x_i, x_{l_2}, \dots, x_{l_{n-1}}, x_j)$ où $l_2 \leq \dots \leq l_{n-1}$ et $\{i, l_2, \dots, l_{n-1}, j\} = \{1, \dots, n\}$. Si, de plus, k est un nombre dans $\{1, \dots, n\}$ différent de i, j , alors $X_{i,j}^k$ sera la séquence $X_{i,j}$ sans la variable x_k .

Pour chaque semiprojection h n -aire sur A sur la première variable telle que $h(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, x_n\} \forall x_1, \dots, x_n$ et pour chaque paire (i, j) de nombres distincts dans $\{1, \dots, n\}$ on définit une opération n -aire $\zeta_{i,j}(h)$ sur A en la distinguant de six façons différentes.

1^{er} cas : Si $(a_i, a_j) \notin S$ et $i \notin \{1, n\}$, on pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{i,j}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, f(X_{i,j}), x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, h(x)) .$$

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $B_{i,j} = (b_i, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-1}}, b_j)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(B_{i,j}) = b_i, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_i, b_j) \notin S, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

2^{ieme} cas : Soit $(a_1, a_j) \in S$. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{1,j}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_2, f(X_{1,j}), x_3, \dots, x_{n-1}, h(x))).$$

Soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $B_{1,j} = (b_1, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-1}}, b_j)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{1,j}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(b_2, f(B_{1,j}), b_3, \dots, b_{n-1}, h(b)) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff f(B_{1,j}) = b_1, h(b) = b_n, (b_2, b_n) \in S, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_1, b_j) \notin S, h(b) = b_n, (b_2, b_n) \in S, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

3^{ieme} cas : Soit $(a_n, a_j) \notin S$. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{n,j}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, f(h(x), X_{p,j}^n)))$$

où $p = 1$ si $j \neq 1$ et $p = 2$ si $j = 1$.

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $B_{p,j}^n = (b_p, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-2}}, b_j)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{n,j}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(b_2, b_1, b_3, \dots, b_{n-1}, f(h(b), B_{p,j}^n)) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff f(h(b), B_{p,j}^n) = b_n, (b_2, b_n) \in S, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_n, b_j) \notin S, h(b) = b_n, (b_2, b_n) \in S, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

4^{ieme} cas: Soit (i, j) est telle que $(a_i, a_j) \in S$ et $j \notin \{1, n\}$. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{i,j}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, f(X_{i,j}), x_{j+1}, \dots, x_{n-1}, h(x)).$$

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $B_{i,j} = (b_i, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-1}}, b_j)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(B_{i,j}) = b_j, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_i, b_j) \in S, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

5^{ieme} cas: Soit $i \neq n$ et $(a_i, a_1) \in S$. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{i,1}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(f(X_{i,1}), x_2, \dots, x_{n-1}, h(x))).$$

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $B_{i,1} = (b_i, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-1}}, b_1)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{i,1}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(f(B_{i,1}), b_2, \dots, b_{n-1}, h(b)) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff f(B_{i,1}) = b_1, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_i, b_1) \in S, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

6^{ieme} cas: Soit $(a_i, a_n) \in S$. On pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\zeta_{i,n}(h)(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, f(X_{i,p}^n, h(x))).$$

où $p \in \{1, \dots, n-1\}$ et est un nombre différent de i .

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ et $B_{i,p}^n = (b_i, b_{l_2}, \dots, b_{l_{n-2}}, b_p)$ on a que

$$\begin{aligned} \zeta_{i,n}(h)(b) \neq b_1 &\iff f(B_{i,p}^n, h(b)) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S \\ &\iff (b_i, b_n) \in S, h(b) = b_n, \hat{b} = A \text{ et } (b_1, b_n) \in S. \end{aligned}$$

En somme, dans tous les cas, pour $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$, on a que $\zeta_{i,j}(h)(b_1, \dots, b_n) \neq b_1 \iff$:

- (1) $\hat{b} = A$,
- (2) $h(b) = b_n$,
- (3) $(b_1, b_n) \in S$,
- (4) $(b_i, b_j) \in S \iff (a_i, a_j) \in S$,
- (5) Si $(a_i, a_j) \notin S$ et $i \in \{1, n\}$, alors $(b_2, b_n) \in S$.

Définissons maintenant l'opération g comme suit : $g = \zeta_{1,2}(\dots(\zeta_{n,n-1}(f))\dots)$ où entre $\zeta_{1,2}$ et $\zeta_{n,n-1}$, on a toutes les opérations $\zeta_{i,j}$ avec $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j$ dans n'importe quel ordre.

Soit $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ tel que $b \in \iota_n$, alors $g(b) = b_1$.

Par hypothèse $(a_1, a_n) \in S$ et $(a_2, a_n) \in S$ donc les conditions (3) et (5) deviennent inutiles, tout comme la condition (2), car nous n'avons plus de fonction h . Pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$ on a que

$$g(b) \neq b_1 \iff \hat{b} = A \text{ et pour tous } i, j \in \{1, \dots, n\}, \text{ avec } i \neq j, \text{ on a que } (b_i, b_j) \in S \text{ ssi } (a_i, a_j) \in S.$$

Soit S' la relation binaire sur A définie par $(u, v) \in S'$ si $u = v$ ou s'il existe une permutation π de $\{1, \dots, n\}$ telle que $u = a_{\pi(1)}$, $v = a_{\pi(n)}$ et pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a que $(a_i, a_j) \in S \iff (a_{\pi(i)}, a_{\pi(j)}) \in S$.

La dernière condition peut être formulée comme suit : Soit π une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et φ_π l'application $a_i \mapsto a_{\pi(i)}$.

Une permutation ψ de A est un *automorphisme* de S si pour tous $(a, b) \in A^2$

$$(a, b) \in S \iff (\psi(a), \psi(b)) \in S.$$

L'ensemble des automorphismes de S est dénotée par $Aut(S)$. Alors

$$S' = \iota_2 \cup \{(a_{\pi(1)}, a_{\pi(n)}) : \varphi_\pi \in Aut(S)\}.$$

Par hypothèse $(a_1, a_n) = (a, b) \in S$. Comme id_A (la permutation identité) appartient à $Aut(S)$ on a que $(a, b) \in S'$ et donc S' est non triviale. De $(a_1, a_n) \in S$ on voit que $S' \subseteq S$ et donc par la minimalité de S on obtient $S' = S$.

Alors pour chaque $(c, d) \in S$ avec $c \neq d$ il existe $\varphi_\pi \in Aut(S)$ tel que $(c, d) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(n)})$. Ceci montre que S est lisse. □

Lemme 3.5. *Soit R un ordre lisse sur A . Alors C_R est un clone minimal.*

PREUVE. Définissons C comme l'ensemble des opérations $f(x_1, \dots, x_n)$ sur A pour lesquelles il existe un $i \in \{1, \dots, m\}$ avec les trois propriétés suivantes :

- (1) $(a_i, f(a_1, \dots, a_m)) \in R, \forall a_1, \dots, a_m \in A,$
- (2) si $\{a_1, \dots, a_m\} \neq A$, alors $f(a_1, \dots, a_m) = a_i,$
- (3) f préserve tous les automorphismes de $(A, R).$

Bien entendu C est un clone. De plus $C_R \subseteq C$. Il existe un clone minimal à l'intérieur de C_R et selon le lemme 3.4 ce clone minimal sera égal à C_S , S étant un ordre lisse sur A . Comme $C_S \subseteq C_R$, $S \subseteq R$. Nous voulons maintenant montrer que $R \subseteq S$.

Comme C_S n'est pas un clone trivial, il existe $a, b \in A$, $a \neq b$, tels que $(a, b) \in S$.

Soit $(c, d) \in R$ tel que $c \neq d$. Alors il existe un automorphisme $h \in (A, R)$ tel que $h(a) = c$ et $h(b) = d$. Soit $e = (a, a_2, \dots, a_{n-1}, b) \in A^n$ tel que

$$\Phi_S(e) = b.$$

Alors par (3) on a

$$\Phi_S(h(e)) = h(\Phi_S(e))$$

$$\Phi_S(h(a), h(a_2), \dots, h(a_{n-1}), h(b)) = h(b)$$

$$\Phi_S(c, h(a_2), \dots, h(a_{n-1}), d) = d$$

ce qui montre que $(c, d) \in S$. Donc $R \subseteq S$. □

Conclusion

Pour conclure, nous avons par le lemme 3.1, que lorsque s est une combinaison-ordre telle que C_s est un clone minimal, alors $C_s = C_t$ pour une combinaison-ordre t qui a les propriétés que pour tout ensemble de base M de t , $t(M)$ est de longueur 1 et il existe deux entiers positifs p et q tel que le degré extérieur de tout élément de M est soit 0 ou p et le degré intérieur de tout élément de M est soit 0 ou q .

De plus, dans le cas où $n = |A|$, les clones minimaux sont égaux à C_R , R étant un ordre lisse sur A (ceci nous est donné par le lemme 3.4 et 3.5).

Donc, en joignant ceci à la conclusion du chapitre deux, nous obtenons que tous les clones minimaux de quasiprojections générés par des semiprojections n -aire sont de deux types ;

(1) C_R pour une relation d'équivalence R sur A qui a au moins un bloc non singleton et dont tous les blocs non singletons sont de la même cardinalité.

ou

(2) C_R pour un ordre lisse R sur A .

Et tous les clones de ces deux types sont des clones minimaux.

Finalement, lorsque $n < |A|$, nos conclusions sont différentes de celles du chapitre 2 portant sur les combinaisons-*eq*. En effet, nous avons ici prouvé que tous les clones minimaux correspondant à une combinaison-ordre avec une seule base M sont de la forme C_s , où s est une combinaison avec une seule base M et tel que $s \setminus id_A$ est de cardinalité 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.G. Rosenberg, Minimal clones I : The five types, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* vol.43, Lectures in universal algebra, North-Holland, Szeged, 1983, pp.405-427.
- [2] B. Csákány, All minimal clones on the three-element set, *Acta Cybernetica*, Szeged, 1983, pp.227-238.
- [3] B. Csákány, On conservative minimal operations, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 43, Lectures in universal algebra, North-Holland, Szeged, 1983, pp.49-60.
- [4] J. Jezek et R. Quackenbush, Minimal clones of quasiprojections, *International J. of Algebra and Computation* 5, 1995, pp.615-630.
- [5] G. Grätzer, *Universal Algebra*, 2ième ed., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.
- [6] Á. Szendrei, Clones in universal algebra, *Séminaire de mathématiques supérieures*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1986.
- [7] A. Fearnley, Les clones sur trois éléments de la forme $\text{Pol}(\rho)$ où ρ est une relation unaire ou binaire, *Mémoire*, Université de Montréal, 1992.