

Université de Montréal

Agrégation et échantillonnage systématique de  
séries chronologiques

par

**Jonathan Nadon**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en statistique

septembre 2006



QA

3

U54

2006

v. 011

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

# Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

## Agrégation et échantillonnage systématique de séries chronologiques

présenté par

**Jonathan Nadon**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Pierre Duchesne*

---

(président-rapporteur)

*Roch Roy*

---

(directeur de recherche)

*Alejandro Murua*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

---

## SOMMAIRE

---

L'agrégation et l'échantillonnage systématique de processus *ARMA* forts génèrent de façon naturelle sous certaines conditions de nouveaux processus qui sont *ARMA* faibles plutôt que forts, c'est-à-dire que les innovations sont non corrélées mais dépendantes. Dans ce mémoire, nous chercherons à vérifier si la dépendance des erreurs est facile à détecter en pratique à partir de séries agrégées ou échantillonnées. Après une revue de littérature des principaux travaux sur le sujet, nous établissons des conditions suffisantes sous lesquelles des processus *ARMA* forts donnent lieu à des processus agrégés ou échantillonnés qui sont *ARMA* faibles. Les cas *AR(1)* et *ARMA(1,1)* sont étudiés plus en détail. Finalement, par simulation, nous tentons de voir si la dépendance des erreurs intervenant suite à ces transformations est facile à détecter en pratique.

**Mots clés :** Agrégation, échantillonnage systématique, modèles *ARMA*, bruit blanc faible, dépendance.

## SUMMARY

---

The aggregation and systematic sampling of a strong *ARMA* process lead in a natural way to a new *ARMA* process which is, under certain conditions, a weak *ARMA* process, that is the innovations are uncorellated but dependent. In this memory, we want to verify if the dependance of the errors are easy to detect in practice when we aggregate or we systematic sample a strong *ARMA* process. After a brief review of the litterature on this subject, we establish the sufficient conditions under which the aggregation or the systematic sampling of a strong *ARMA* process results in a new weak *ARMA* process. These conditions are developed further in the *AR(1)* and *ARMA(1,1)* cases. Finally, the degree of dependance of the errors in finite samples is studied with Monte Carlo methods.

**Keywords** : Aggregation, systematic sampling, *ARMA* model's, weak white noise, dependance.

# TABLE DES MATIÈRES

---

Sommaire.....	iii
Summary.....	iv
Liste des figures.....	viii
Liste des tableaux.....	x
Remerciements.....	1
Introduction.....	2
<b>Chapitre 1. Préliminaires.....</b>	<b>5</b>
1.1. Stationnarité.....	5
1.2. Bruit blanc.....	6
1.3. Inversibilité.....	8
1.4. Processus ARMA.....	10
1.5. Test d'adéquation.....	12
1.5.1. Test de Box-Pierce.....	12
1.5.2. Test de Ljung-Box.....	15
1.5.3. Test de Ljung-Box modifié.....	16
<b>Chapitre 2. Agrégation d'un processus AR fort.....</b>	<b>19</b>
2.1. Introduction.....	19
2.2. Revue de littérature.....	21

2.3.	Ordre $p$ et $q$ d'une série AR agrégée.....	24
2.4.	Propriété du bruit blanc d'une série AR agrégée.....	26
2.5.	Agrégation d'un AR(1) fort.....	30
<b>Chapitre 3. Échantillonnage systématique d'un ARMA fort .....</b>		<b>36</b>
3.1.	Introduction.....	36
3.2.	Revue de littérature.....	37
3.3.	Ordres $p$ et $q$ d'une série ARMA échantillonnée.....	38
3.4.	Propriété du bruit blanc d'un processus ARMA fort échantillonné.	40
3.5.	Le cas ARMA(1,1) fort.....	42
<b>Chapitre 4. Étude par simulation pour l'agrégation d'un AR(1) fort .....</b>		<b>48</b>
4.1.	Plan de simulation.....	48
4.2.	Validation du vrai modèle avec les tests de Ljung-Box standard et modifié.....	50
4.2.1.	Les résidus non transformés.....	50
4.2.2.	Les résidus transformés.....	52
4.2.3.	Asymétrie des résidus.....	53
4.3.	Distribution asymptotique des résidus.....	54
4.4.	Variabilité des estimateurs des paramètres AR et MA.....	54
4.5.	Tableaux et figures.....	57
<b>Chapitre 5. Résultats de simulation pour l'échantillonnage systématique</b>		
74		
5.1.	Plan des simulations.....	74

5.2. Validation du vrai modèle avec les tests de Ljung-Box standard et modifié.....	75
5.3. Variabilité des estimateurs des paramètres AR et MA. ....	76
5.4. Tableaux et figures.....	77
<b>Conclusion.....</b>	<b>86</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>88</b>
<b>Code S-Plus.....</b>	<b>-i</b>
.1. Agrégation.....	-i
.2. Echantillonnage systématique.....	-i

## LISTE DES FIGURES

---

2.1	Graphique de $\theta$ en fonction de $\phi$ . . . . .	34
2.2	Graphique de $G(m, \phi)$ en fonction de $\phi$ . . . . .	35
3.1	Graphique du coefficient moyenne mobile $\vartheta$ de la série agrégée en fonction de $\phi$ et $\theta$ pour différentes valeurs de $m$ . . . . .	46
3.2	Graphique de la fonction $H(\phi, \theta, m)$ du théorème 3.4.1 en fonction de $\phi$ et $\theta$ pour différentes valeurs de $m$ . . . . .	47
4.1	Graphiques quantiles quantiles gaussiens des résidus pour des séries agrégées au pas $m$ . . . . .	63
4.2	Diagrammes en boîte des estimations de $\phi^m$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=4$ et $n=500, 1000$ . . . . .	66
4.3	Diagrammes en boîte des estimations de $\phi^m$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=12$ et $n=500, 1000$ . . . . .	67
4.4	Diagrammes en boîte des estimations de $\theta$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=4$ et $n=500, 1000$ . . . . .	68
4.5	Diagrammes en boîte des estimations de $\theta$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=12$ et $n=500, 1000$ . . . . .	69
4.6	Écart types asymptotique et empirique de $\hat{\phi}^m$ en fonction de $\phi$ pour différentes valeurs de $m$ et $n$ . . . . .	70
4.7	Écart types asymptotique et empirique de $\hat{\phi}^m$ en fonction de $\phi$ pour différentes valeurs de $m$ et $n$ . . . . .	71
4.8	Écart types asymptotique et empirique de $\hat{\theta}$ en fonction de $\phi$ pour différentes valeurs de $m$ et $n$ . . . . .	72

4.9	Écart types asymptotique et empirique de $\hat{\theta}$ en fonction de $\phi$ pour différentes valeurs de $m$ et $n$ . . . . .	73
5.1	Diagrammes en boîte des estimations de $\phi^m$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=2$ et $n=1000, 2000$ . . . . .	82
5.2	Diagrammes en boîte des estimations de $\phi^m$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=6$ et $n=1000, 2000$ . . . . .	83
5.3	Diagrammes en boîte des estimations de $\theta$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=2$ et $n=1000, 2000$ . . . . .	84
5.4	Diagrammes en boîte des estimations de $\theta$ basés sur 1000 réalisations, pour $m=6$ et $n=1000, 2000$ . . . . .	85

## LISTE DES TABLEAUX

---

4.1	Pourcentages de rejet au niveau 5% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries $AR(1)$ fortes agrégées pour différentes valeurs de $\phi$ , $m$ , $n$ et $H$ .....	58
4.2	Pourcentages de rejet au niveau 1% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries $AR(1)$ fortes agrégées pour différentes valeurs de $\phi$ , $m$ , $n$ et $H$ .....	59
4.3	Pourcentages de rejet au niveau 10% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries $AR(1)$ fortes agrégées pour différentes valeurs de $\phi$ , $m$ , $n$ et $H$ .....	60
4.4	Pourcentages de rejet avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour le carré et la valeur absolue des résidus dans les cas 1 et 2. ....	61
4.5	Pourcentages de rejet avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour les résidus positifs et négatifs dans les cas 1 et 2.	62
4.6	Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre autorégressif $\phi^m$ , basée sur 1000 réalisations. ....	64
4.7	Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre moyenne mobile $\theta$ , basée sur 1000 réalisations.....	65
5.1	Différentes combinaisons de $\phi$ et $\theta$ utilisées pour les simulations ainsi que les valeurs de $\vartheta$ et $H(\phi, \theta, m)$ . ....	75
5.2	Pourcentages de rejet au niveau 5% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique	

	d'une série $ARMA(1, 1)$ forte pour différentes valeurs de $\phi$ , $\theta$ , $m$ , $n$ et $H$ en utilisant 1000 réplifications. ....	78
5.3	Pourcentages de rejet au niveau 1% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique d'une série $ARMA(1, 1)$ forte pour différentes valeurs de $\phi$ , $\theta$ , $m$ , $n$ et $H$ en utilisant 1000 réplifications. ....	79
5.4	Pourcentages de rejet au niveau 10% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique d'une série $ARMA(1, 1)$ forte pour différentes valeurs de $\phi$ , $\theta$ , $m$ , $n$ et $H$ en utilisant 1000 réplifications. ....	80
5.5	Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre autorégressif $\phi^m$ basé sur 1000 réalisations. ....	81
5.6	Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre moyenne mobile $\vartheta$ basé sur 1000 réalisations. ....	81

## REMERCIEMENTS

---

J'aimerais remercier M. Roch Roy, qui tout au long de ma maîtrise, m'a dirigé, conseillé et m'a beaucoup appris. Sa grande disponibilité, ses connaissances et son intérêt dans le domaine m'ont donné le goût de la recherche scientifique, activité qui m'attirait peu auparavant. Son aide financière, par l'entremise de subventions de recherche CRSNG, FQRNT et MITACS, m'a permis de me concentrer pleinement sur mes études et ma recherche, ce qui a grandement facilité mes études de deuxième cycle.

Je tiens aussi à remercier M. Abdessamad Saidi, une personne très généreuse, qui a eu la gentillesse de m'accorder beaucoup de temps pour résoudre des problèmes au niveau de la programmation. Je remercie également Christian Francq pour m'avoir permis d'utiliser son programme. Enfin, merci à toutes les personnes du département qui par leur travail efficace et leur bonne humeur ont fait du département de mathématiques et statistique un endroit où il est agréable d'y travailler.

Finalement, je termine en remerciant de tout mon cœur ma famille et ma copine Patricia qui m'ont encouragé à persévérer et qui ont été d'un support extraordinaire.

# INTRODUCTION

---

Une série chronologique est parfois constituée de données récoltées à la fin de chaque jour sur une longue période, malgré le fait que la variable d'intérêt est observée à chaque heure ou même à une fréquence plus élevée comme à la bourse. Dans ce cas, on dit que la série est échantillonnée de façon systématique. D'autres fois, nous avons des données récoltées à chaque heure et on retient comme série la somme des 24 données journalières, ne conservant ainsi qu'une donnée par jour. Cette fois, la série est dite agrégée. Ces deux types de transformations sur la série originale sont très utilisées dans plusieurs disciplines scientifiques dont l'économie, la finance, l'hydrologie, l'environnement, ... Depuis le début des années 70, l'utilisation de modèles autorégressifs moyennes mobiles (*ARMA*) pour la modélisation des séries chronologiques a joué un rôle prédominant. L'inférence développée par Box et Jenkins (1970) pour estimer ces modèles *ARMA* est basée sur l'hypothèse que les innovations (erreurs) sont indépendantes et identiquement distribués (i.i.d.) et on parle alors de modèles *ARMA* forts. Amemyia et Wu (1972) ont fait le lien entre le modèle original *ARMA* fort d'une série et le modèle correspondant à la série agrégée. Des travaux similaires ont été faits pour le cas de l'échantillonnage systématique d'un *ARMA* fort. Il en ressort que l'agrégation et l'échantillonnage systématique de séries *ARMA* fortes donnent lieu à nouveau à des séries *ARMA*. Francq, Roy et Zakoïan (2005) ont cependant montré à l'aide d'exemples simples que l'agrégation ou l'échantillonnage systématique d'une série *ARMA* forte n'est pas nécessairement une série *ARMA* forte, c'est-à-dire que dans la représentation *ARMA* de la série agrégée, les innovations sont non corrélées, mais sont dépendantes.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à vérifier si en pratique la dépendance des erreurs qui intervient de façon naturelle suite à l'agrégation ou à l'échantillonnage systématique de séries *ARMA* fortes est facile à déceler. Notre réponse à cette question comporte deux volets. D'abord sur le plan théorique, nous présentons une revue de littérature des principaux résultats ayant trait à l'agrégation et à l'échantillonnage systématique de processus *ARMA*. Ensuite, nous établissons des conditions suffisantes sous lesquelles l'agrégation et l'échantillonnage systématique de processus *ARMA* forts donnent lieu à des processus *ARMA* faibles. Pour illustrer la force de la dépendance des erreurs des séries transformées, nous avons procédé par simulation.

Au chapitre 1, nous présentons divers concepts nécessaires à l'étude des processus *ARMA*. Nous présentons de plus, deux tests de validation, le premier étant le test de Ljung-Box standard basé sur l'hypothèse de bruit blanc fort et le second est le test de Ljung-Box modifié proposé par Francq, Roy et Zakoïan (2005) que nous appelons test de Ljung-Box modifié, ce dernier étant plutôt basé sur l'hypothèse de bruit blanc faible.

Dans le chapitre 2, nous présentons plusieurs propriétés théoriques de l'agrégation d'un processus  $AR(p)$ . Plus précisément, nous donnons les ordres et les paramètres autorégressifs et moyennes mobiles de la série agrégée qui dépendent respectivement des ordres et des paramètres de la série non agrégée. Par la suite, nous nous intéressons aux propriétés du bruit blanc de la série *ARMA* agrégée. Dans la littérature sur l'agrégation, la très grande majorité des auteurs n'ont pas porté attention à la dépendance possible du bruit blanc et implicitement, ils procèdent comme si le bruit blanc était fort. En s'inspirant de Francq, Roy et Zakoïan (2005), nous avons obtenu des conditions suffisantes sous lesquelles l'agrégation d'un processus  $AR(p)$  fort est *ARMA* faible. Ces conditions sont explicitées pour un processus  $AR(1)$ . À notre avis, ces résultats sont nouveaux.

La démarche du chapitre 2 est similaire à celle du chapitre 3 mais cette fois pour l'échantillonnage systématique d'un processus  $ARMA(p, q)$  fort. Les conditions suffisantes obtenues sont aussi étudiées plus en détail pour le cas  $ARMA(1, 1)$ .

Dans le chapitre 4, nous tentons de vérifier, avec des simulations de Monte-Carlo, la dépendance des erreurs lors de la modélisation  $ARMA$  de séries agrégées. À cette fin, nous comparons les proportions de rejet des tests de Ljung-Box standard et modifié appliqués aux résidus bruts ainsi qu'à certaines transformations des résidus. Il en ressort que les test d'adéquation de Ljung-Box sont peu puissants pour détecter la dépendance, à moins que celle-ci soit très faible. Nous nous sommes aussi intéressés à la variabilité des estimateurs  $AR$  et  $MA$  des séries agrégées. Lorsque la valeur théorique des paramètres  $AR$  d'un modèle  $AR(1)$  est près de zéro, l'écart type exact (évaluer par simulation avec des séries de longueur 500 ou 1000) est assez loin de l'écart type asymptotique obtenu sous l'hypothèse de bruit blanc fort. D'où l'importance d'utiliser des écarts types valides pour des  $ARMA$  faibles lors de la modélisation de séries agrégées.

Le chapitre 5 présente des résultats de simulation pour l'échantillonnage systématique. La démarche est similaire à celle du chapitre 4. Il en ressort que la dépendance des résidus est plus faible que lors de l'agrégation.

# Chapitre 1

---

## PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rapellons divers concepts de base de l'analyse des séries chronologiques et au besoin, des exemples sont présentés pour en faire ressortir l'essentiel. Ce chapitre permet aussi d'établir la notation qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

### 1.1. STATIONNARITÉ

**Définition 1.1.1.** *Le processus  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  est stationnaire :*

*A- Au sens large si :*

*i)  $E[X_t^2] < \infty, \forall t,$*

*ii)  $E[X_t] = \mu, \forall t,$*

*iii)  $Cov(X_{t+h}, X_t)$  est indépendante de  $t, \forall h$  et  $\forall t.$  Dans la suite, on note*

*$Cov(X_{t+h}, X_t) = \gamma_X(h),$  l'autocovariance de délai  $h.$*

*B- Au sens strict si :*

*La loi de probabilité du vecteur  $(X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{n+h})$  est la même que celle du vecteur  $(X_1, X_2, \dots, X_n), \forall h \in \mathbb{Z}$  et  $\forall n \geq 1.$*

En particulier, si  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens strict et si  $E[X_t^2] < \infty,$  alors  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens large.

Les bruits blancs, que l'on définit dans la section suivante, constituent des exemples simples de processus stationnaires au sens large.

## 1.2. BRUIT BLANC

**Définition 1.2.1.** *Le processus  $\{X_t\}$  est un bruit blanc :*

A- *Faible si,  $\forall t$  :*

$$i) E[X_t] = 0,$$

$$ii) \text{Var}[X_t] = \sigma_X^2,$$

$$iii) \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = 0, \text{ pour } h \neq 0.$$

B- *Fort si :*

*Les variables  $X_t$  sont indépendantes et identiquement distribuées.*

Pour désigner un bruit blanc faible de moyenne 0 et de variance  $\sigma_X^2$ , nous écrivons *bruit blanc faible*  $(0, \sigma_X^2)$ . Si la variance d'un bruit blanc fort existe et si sa moyenne est 0, alors ce dernier est aussi un bruit blanc faible et on écrit alors *bruit blanc fort*  $(0, \sigma_X^2)$ .

**Définition 1.2.2** (Martingale). *Soient  $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$  une suite de tribus. La suite  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$  est une martingale si  $\forall t \in \mathbb{N}$  :*

$$1- \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1},$$

$$2- X_t \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable},$$

$$3- E[|X_t|] < \infty,$$

$$4- E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t, \text{ presque sûrement.}$$

Dans la suite, les égalités faisant intervenir des espérances conditionnelles sont des égalités presque sûres mais nous omettons ce qualificatif afin d'alléger l'écriture. Aussi, quand on dit que  $\{X_t\}$  est une martingale, on prend implicitement  $\mathcal{F}_t = \{X_s : s \leq t\}$ , c'est-à-dire la tribu engendrée par les variables passées et présente.

**Définition 1.2.3** (Différence de martingale). Soient  $\{\eta_t : t \in \mathbb{N}\}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$  une suite de tribus. La suite  $\{\eta_t, \mathcal{F}_t\}$  est une différence de martingale si  $\forall t \in \mathbb{N}$  :

- 1-  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ ,
- 2-  $\eta_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable,
- 3-  $E|\eta_t| < \infty$ ,
- 4-  $E[\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t] = 0$ .

Si  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$  est une martingale et si on pose  $\eta_0 = X_0$ ,  $\eta_t = X_t - X_{t-1}$ ,  $\forall t \geq 1$  et  $E[X_0] = 0$ , alors  $\{\eta_t, \mathcal{F}_t\}$  est une différence de martingale. En effet, nous avons  $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E[\eta_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] - E[X_t|\mathcal{F}_t] = X_t - X_t = 0.$$

Maintenant, si  $\{\eta_t, \mathcal{F}_t\}$  est une différence de martingale et si on pose  $X_t = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_t$ , alors  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$  est une martingale car  $\forall t \in \mathbb{N}$

$$E[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = E[X_t + \eta_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t.$$

Finalement, si  $E[X_t^2] < \infty$ ,  $\forall t$ , alors une différence de martingale est un bruit blanc faible car  $E[X_t] = 0$  et

$$\begin{aligned} E[X_{t+h}X_t] &= E[E[X_{t+h}X_t | \{X_s, s \leq t+h-1\}]] \\ &= E[X_t E[X_{t+h} | \{X_s, s \leq t+h-1\}]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $E[X_{t+h} | \{X_s, s \leq t+h-1\}] = 0$ .

De part sa définition, une différence de martingale n'est pas un bruit blanc fort mais est un cas particulier de bruit blanc faible. Cependant, un bruit blanc faible n'est pas nécessairement une différence de martingale et pour cette raison,

une différence de martingale est souvent appelée "bruit blanc semi-fort".

Une classe générale de processus stationnaires au sens large est la classe des processus linéaires.

**Définition 1.2.4.** *Le processus  $\{X_t\}$  est linéaire s'il admet une représentation de la forme :*

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.2.1)$$

où  $\mu$  et les  $\psi_j$  sont des paramètres réels tels que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty \quad (1.2.2)$$

et  $\{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Si  $\psi_j = 0$  pour  $j < 0$  on dira alors que le processus  $\{X_t\}$  est linéaire causal. On peut montrer qu'un processus linéaire est toujours stationnaire au sens large et que

$$E[X_t] = \mu, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma_X(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|}, \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

La classe des processus linéaires fournit une structure générale pour l'étude des processus stationnaires.

### 1.3. INVERSIBILITÉ

**Définition 1.3.1.** *Le processus linéaire  $\{X_t\}$  défini par (1.2.1) et tel que  $E[X_t] = 0$ , est inversible si l'erreur  $\varepsilon_t$  admet une représentation de la forme*

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où les  $\pi_j$  sont des coefficients réels tels que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ .

Dans un contexte de prévision, l'inversibilité signifie que  $X_t$  peut être approximée par une combinaison linéaire finie des valeurs passées les plus récentes.

Le processus  $\{X_t\}$  est déterministe si la variable  $X_t$  est déterminée de façon exacte par les valeurs passées, c'est-à-dire si

$$P_{t-1}X_t = X_t, \text{ en probabilité.}$$

où  $P_{t-1}X_t$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $X_t$  sur l'espace linéaire engendré par  $\{X_j : j \leq t-1\}$  que nous noterons  $\Omega_{t-1}$ . L'espace  $\Omega_{t-1}$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des variables  $X_j$ ,  $j \leq t-1$ , ou des limites de suites de combinaisons linéaires de ces variables. Par contre, si la valeur de  $X_t$  ne peut être déterminée de façon exacte par les valeurs passées, nous disons que le processus est non déterministe. Le théorème de Wold établit le lien entre les processus stationnaires au sens large et les processus linéaires causals.

**Théorème 1.3.1** (Décomposition de Wold). *Si  $\{X_t\}$  est un processus stationnaire au sens large non déterministe avec  $\mu = 0$ , alors il admet la représentation suivante :*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + V_t, t \in \mathbb{Z},$$

où

- 1-  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ,
- 2-  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,
- 3-  $Cov(\varepsilon_s, V_t) = 0, \forall s, t$ ,
- 4-  $\varepsilon_t \in \Omega_t$  et  $\varepsilon_t \perp \Omega_{t-1}, \forall t$ ,
- 5-  $\{V_t\}$  est déterministe.

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Brockwell et Davis (1991, p.181).

Si  $V_t \equiv 0$ , alors  $\{X_t\}$  est purement non déterministe et est un processus linéaire causal. On appelle  $\{\varepsilon_t\}$  le processus *innovation* de  $\{X_t\}$  puisque  $X_t - P_{t-1}X_t = \varepsilon_t$ , c'est-à-dire que  $\varepsilon_t$  est l'erreur de prévision lorsque l'on veut prévoir  $X_t$  à partir des valeurs passées  $\{X_s : s < t\}$ . Elle peut aussi être vue comme la partie de  $X_t$

qui ne peut être expliquée à partir des valeurs passées.

La décomposition de Wold fournit une représentation intéressante d'un processus stationnaire au sens large mais d'un point de vue pratique, elle présente tout de même l'inconvénient d'être caractérisée par une infinité de paramètres. C'est ce qui a motivé l'introduction des processus ARMA.

#### 1.4. PROCESSUS ARMA

Les processus ARMA, une sous classe importante des processus linéaires popularisés par Box et Jenkins (1970), sont très utiles dans la modélisation de séries finies. En effet, cette classe de processus a l'avantage d'admettre un nombre fini de paramètres comparativement à la décomposition de Wold.

**Définition 1.4.1.** *Le processus stationnaire  $\{X_t\}$  tel que  $E[X_t] = 0, \forall t$ , est dit autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p, q)$ , noté  $ARMA(p, q)$ , s'il satisfait l'équation :*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.1)$$

où  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  sont appelés les paramètres autorégressifs et  $\theta_1, \dots, \theta_q$  les paramètres moyennes mobiles.

**Remarque 1.4.1.** *Dans le cas où le processus  $\{X_t\}$  n'est pas de moyenne nulle, disons  $E[X_t] = \mu \neq 0$ , alors le processus  $\{X_t\}$  est  $ARMA(p, q)$  si le processus  $\{X_t - \mu\}$  est  $ARMA(p, q)$  de moyenne zéro.*

De la représentation (1.4.1), on remarque que la valeur  $X_t$  du processus  $\{X_t\}$  est exprimé comme une fonction linéaire des valeurs passées de  $\{X_t\}$  et de valeurs passées et présentes du bruit blanc  $\{\varepsilon_t\}$ . De plus, l'équation (1.4.1) peut être présentée de façon plus concise :

$$\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.4.2)$$

où  $B$  représente l'opérateur retard agissant sur l'indice  $t$  de telle sorte que pour  $m \geq 0$  :  $B^m X_t = X_{t-m}$ ,  $B^0 = 1$  et :

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

$$\Theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q.$$

On appelle respectivement les polynômes  $\Phi_p(B)$  et  $\Theta_q(B)$  les opérateurs autorégressif et moyenne mobile. À partir de ceux-ci, on peut déterminer si un processus  $\{X_t\}$  est stationnaire causal et s'il est inversible.

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $\{X_t\}$  un processus ARMA( $p, q$ ) défini par (1.4.2).*

- Si  $\Phi_p(z) \neq 0$  pour tout  $|z| \leq 1$  alors le processus  $\{X_t\}$  est stationnaire causal.
- Si  $\Theta_q(z) \neq 0$  pour tout  $|z| \leq 1$  alors le processus  $\{X_t\}$  est inversible.

Une démonstration de cette proposition se trouve aussi dans Brockwell et Davis (1991, p. 85).

La modélisation d'un processus ARMA( $p, q$ ) se fait habituellement en trois étapes. Tout d'abord, il faut identifier les ordres  $p$  et  $q$ . L'identification de ces ordres peut être faite à l'aide des autocorrélations et des autocorrélations partielles de la série initiale. Par contre, lorsque ces ordres sont élevés, il est difficile de les déterminer à l'aide de celle-ci. Dans ces cas, les ordres  $p$  et  $q$  peuvent être déterminés en minimisant un critère d'information tel que le AIC ou le BIC, comme on le présente dans Brockwell et Davis (2002, p. 173).

Suite à la détermination des ordres autorégressif et moyenne mobile, on doit maintenant estimer les paramètres intervenant dans la représentation ARMA( $p, q$ ), c'est-à-dire  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma_\varepsilon^2$  et  $\mu$ . Plusieurs méthodes d'estimation peuvent être utilisées (vraisemblance maximale, moindres carrés conditionnels, moindres carrés non-conditionnels, etc.). Ces différentes méthodes d'estimation offrent des estimations semblables lorsque la taille de la série est grande. Cependant, pour

des petites valeurs de  $n$ , ces trois méthodes d'estimation peuvent conduire à des résultats bien différents.

Finalement, suite à l'identification et l'estimation des paramètres, il faut valider le modèle ajusté. Pour ce faire, on effectue une analyse résiduelle pour vérifier si les résidus se comportent comme un bruit blanc. Dans la suite, on présente les principaux tests qui permettent de vérifier l'indépendance des erreurs.

## 1.5. TEST D'ADÉQUATION

A l'étape validation de la modélisation ARMA, il est nécessaire de vérifier si les résidus se comportent essentiellement comme un bruit blanc. Pour ce faire, plusieurs tests ont été développés pour vérifier cette hypothèse. Les deux plus importants sont ceux de Box-Pierce (1970) et Ljung-Box (1978).

### 1.5.1. Test de Box-Pierce

Tout d'abord, suite à l'estimation des paramètres, il est possible de calculer les valeurs ajustées par le modèle  $\hat{X}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$  et ensuite les résidus

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

La statistique de Box-Pierce est définie par :

$$Q_{BP}(H) = n \sum_{j=0}^H \hat{\rho}_\varepsilon(j)^2 \quad (1.5.1)$$

où  $\hat{\rho}_\varepsilon(j)$  représente l'autocorrélation résiduelle de délai  $j$  qui est donnée par

$$\hat{\rho}_\varepsilon(j) = \frac{\sum_{t=1}^{n-j} \hat{\varepsilon}_{t+j} \hat{\varepsilon}_t}{\sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2}, \quad j = 1, \dots, H.$$

Maintenant, si on suppose que le modèle  $ARMA(p, q)$  estimé :

$$\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t$$

est stationnaire causal, alors il admet aussi une représentation  $MA(\infty)$  de la forme suivante :

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t \quad \text{où} \quad \Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j, \quad (1.5.2)$$

et les  $\psi_j$  sont tels que  $\sum_j |\psi_j| < \infty$ .

Dans la suite, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante sur les coefficients  $\psi_j$ .

**Hypothèse 1.5.1.** *La série  $X_1, X_2, \dots, X_n$  est générée par un processus ARMA( $p, q$ ) stationnaire causal et inversible dont les coefficients  $\psi_j$  de la représentation (1.5.2) sont tels que :*

- i)  $\psi_j = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ,  $j \geq H_n - (p+q)$ , où  $H = H_n$  est un entier qui dépend de  $n$  et
- ii)  $\frac{H_n}{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Sous cette hypothèse, si  $n$  est grand,  $H_n \leq \Delta\sqrt{n}$  où  $\Delta$  est une constante indépendante de  $n$  et pour  $j \geq H - (p+q)$ , les coefficients  $\psi_j$  sont négligeables.

Posons

$$\hat{\rho}_{\varepsilon, H} = (\hat{\rho}_{\varepsilon}(1), \dots, \hat{\rho}_{\varepsilon}(H))'$$

le vecteur des  $H$  premières autocorrélations résiduelles.

Sous l'hypothèse (1.5.1) et si  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort, Box et Pierce (1970) ont montré que

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_{\varepsilon, H} \xrightarrow{\mathcal{L}} N_H(\mathbf{0}, (\mathbf{I}_H - \mathbf{D}))$$

où  $D$  est une matrice idempotente de rang  $H - \ell$ ,  $\ell$  étant le nombre de paramètres  $AR$  et  $MA$  estimés et " $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ " désigne la convergence en loi.

Nous aurons besoin des deux théorèmes suivants pour déduire la distribution asymptotique approximative de la statistique de Box-Pierce.

**Théorème 1.5.1.** *Soit  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$  un vecteur aléatoire qui suit une loi multinormale  $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$  et soit  $\mathbf{A}$  une matrice symétrique de dimension  $p$ . Alors, la forme quadratique  $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$  suit la même loi de probabilité que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i Z_i^2$ ,*

*c'est-à-dire*

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim \sum_{i=1}^p \lambda_i Z_i^2$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}\Sigma$  et les  $Z_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) selon la loi  $N(0, 1)$ .

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Graybill (1976, p. 136).

On note que si  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$  et que la matrice  $\Sigma$  est de plein rang, alors  $\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}$  est distribuée selon une loi khi-deux à  $p$  degrés de liberté.

Comme dans la suite nous décrivons un résultat asymptotique, nous avons d'abord besoin d'un résultat général sur la convergence d'une suite de vecteurs aléatoires.

Soit  $\mathbf{Y}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , une suite de vecteurs aléatoires dans  $\mathbb{R}^H$  telle que  $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{Y}$ , où  $\mathbf{Y}$  est aussi un vecteur aléatoire dans  $\mathbb{R}^H$ .

**Théorème 1.5.2.** *Soit  $g : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue. Si  $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{Y}$ , alors*

$$g(\mathbf{Y}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(\mathbf{Y}).$$

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Serfling (1980, section 1.7).

En posant  $\mathbf{Y}_H = \sqrt{n}\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\varepsilon, H}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_H$  et la fonction  $g : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant,

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^H,$$

on en déduit que  $\mathbf{Y}'_H \mathbf{A} \mathbf{Y}_H = n \sum_{j=0}^H \hat{\rho}_\varepsilon(j)^2 = Q_{BP}(H)$  suit approximativement une loi  $\chi^2_{H-\ell}$ , puisque la matrice  $(\mathbf{I}_H - \mathbf{D})$  admet  $H - \ell$  valeurs propres égales à 1 tandis que les autres sont toutes égales à 0.

L'étape validation d'un modèle estimé consiste principalement à vérifier si le modèle  $ARMA(p, q)$  estimé est adéquat. Si c'est le cas, les résidus  $\hat{\varepsilon}_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ ,

devraient se comporter essentiellement comme les vraies erreurs.

Posons

$$\gamma_\varepsilon(h) = \text{Cov}(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t), \quad h \in \mathbb{Z},$$

et

$$\rho_\varepsilon(h) = \text{Corr}(\varepsilon_{t+h}, \varepsilon_t), \quad h \in \mathbb{Z},$$

respectivement l'autocovariance et l'autocorrélation théorique de délais  $h$  des erreurs. Comme on a supposé que  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort,  $\rho_\varepsilon(h) = 0, \forall h \neq 0$ .

À l'aide des autocorrélations résiduelles, on veut tester l'hypothèse

$$H_0 : \rho_\varepsilon(h) = 0, h \geq 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \dots, H\} \text{ tel que } \rho_\varepsilon(j) \neq 0.$$

Avec la statistique de Box-Pierce, on rejette  $H_0$  au niveau  $\alpha$  si

$$Q_{BP}(H) > \chi_{H-\ell, 1-\alpha}^2$$

où  $\chi_{m,p}^2$  représente le quantile d'ordre  $p$  de la loi  $\chi_m^2$ . En fait, si  $H_0$  est vraie, alors on s'attend à ce que les  $\hat{\rho}_\varepsilon(h)$  soient près de zéro, c'est-à-dire que la statistique  $Q_{BP}(H)$  prennent de petites valeurs. Dans le cas inverse, si  $Q_{BP}(H)$  prend de grandes valeurs, alors on rejette l'hypothèse  $H_0$ .

Dans des études subséquentes aux travaux de Box et Pierce, il a été remarqué que ce test ne rejetait pas l'hypothèse  $H_0$  malgré la présence d'autocorrélations résiduelles importantes à certains délais. De plus, des études faites par Davis, Triggs et Newbold (1977) et Prothero et Wallis (1976) ont fait ressortir que la distribution asymptotique de  $Q_{BP}(H)$  peut dévier considérablement de celle d'une  $\chi_{H-\ell}^2$ . Ces constatations ont conduit à des modifications du test de Box-Pierce.

### 1.5.2. Test de Ljung-Box

Pour améliorer l'approximation de la statistique de  $Q_{BP}(H)$  par une khi-deux, Ljung et Box (1978) ont proposé la modification suivante de la statistique de Box-Pierce que l'on note  $Q_{LB}(H)$  qui est donnée par :

$$Q_{LB}(H) = n \sum_{j=1}^H \frac{n+2}{n-j} \hat{\rho}_\varepsilon(j)^2. \quad (1.5.3)$$

Des simulations ont montré que sous l'hypothèse d'indépendance des erreurs, la statistique de Ljung-Box est mieux approximée par la loi  $\chi_{H-\ell}^2$  pour de petites tailles échantillonnales. On note tout de même que l'approximation se détériore lorsque  $H$  est grand par rapport à  $n$ .

Dans les dernières années, des recherches ont montré que plusieurs modèles non linéaires admettent une représentation *ARMA* dans laquelle les erreurs sont non corrélées mais dépendantes. Ce qui a conduit à l'étude des tests de Box-Pierce et de Ljung-Box sous l'hypothèse plus générale que le processus innovation  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible.

### 1.5.3. Test de Ljung-Box modifié

Tout d'abord, Francq, Roy et Zakoïan (2005) ont établi la distribution asymptotique du vecteur  $\hat{\rho}_{\varepsilon, H}$  des  $H$  premières autocorrélations résiduelles sous l'hypothèse de bruit blanc faible des erreurs.

Sous l'hypothèse d'indépendance, la loi asymptotique de  $\hat{\rho}_{\varepsilon, H}$  ne fait intervenir que les deux premiers moments de la distribution des erreurs. Par contre, sous l'hypothèse plus faible de non corrélation les moments d'ordre 4 des erreurs interviennent aussi.

Notons

$$\Gamma(\ell, \ell') = \sum_{h=-\infty}^{\infty} E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+\ell} \varepsilon_{t+h} \varepsilon_{t+h+\ell'}), \quad (\ell, \ell') \neq (0, 0),$$

et définissons la matrice

$$\mathbf{\Gamma}_{H, H'} = \begin{pmatrix} \Gamma(1, 1) & \Gamma(1, 2) & \cdots, \Gamma(1, H') \\ \Gamma(2, 1) & \Gamma(2, 2) & \cdots, \Gamma(2, H') \\ \vdots & & \\ \Gamma(H, 1) & \Gamma(H, 2) & \cdots, \Gamma(H, H') \end{pmatrix}.$$

Aussi, posons

$$\mathbf{R}_{H, H'} = \frac{1}{\sigma^4} \mathbf{\Gamma}_{H, H'}.$$

Soient  $\phi_i^*$  et  $\theta_i^*$  les coefficients définis par  $\phi(z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^* z^i$ ,  $\theta(z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^* z^i$ ,  $|z| \leq 1$  pour  $i \geq 0$  et  $\phi_i^* = \theta_i^* = 0$  lorsque  $i < 0$ . Soit  $\lambda_i$  le vecteur

$$\lambda_i = (-\phi_{i-1}^*, \dots, -\phi_{i-p}^*, \theta_{i-1}^*, \dots, \theta_{i-q}^*)',$$

et  $\Lambda_m$  la matrice

$$\Lambda_m = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

Notons que  $\Lambda_{\infty} \Lambda'_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \lambda'_i$ .

**Théorème 1.5.3.** *Soit  $\{X_t\}$  un processus ARMA( $p, q$ ) stationnaire causal et inversible tel que les polynômes  $\Phi_p(z)$  et  $\Theta_q(z)$  ont leurs racines à l'extérieur du cercle unité et n'ont aucune racines communes. Alors, on a :*

$$\sqrt{n} \hat{\rho}_H \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma_{\hat{\rho}_H}) \quad (1.5.4)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\rho}_H} = & \mathbf{R}_{H,H} + \Lambda'_H \{ \Lambda_{\infty} \Lambda'_{\infty} \}^{-1} \Lambda_{\infty} (\mathbf{R}_{\infty,\infty} \otimes \mathbf{I}_{p+q}) \Lambda'_{\infty} \{ \Lambda_{\infty} \Lambda'_{\infty} \}^{-1} \Lambda_H \\ & - \Lambda'_H \{ \Lambda_{\infty} \Lambda'_{\infty} \}^{-1} \Lambda_{\infty} \mathbf{R}_{\infty,H} - \mathbf{R}_{H,\infty} \Lambda'_{\infty} \{ \Lambda_{\infty} \Lambda'_{\infty} \}^{-1} \Lambda_H. \end{aligned}$$

On peut vérifier, que si l'on considère un ARMA( $p, q$ ) fort, alors pour  $H$  grand,

$$\Sigma_{\hat{\rho}_H} \approx \mathbf{I} - \Lambda'_H \{ \Lambda_H \Lambda'_H \}^{-1} \Lambda_H$$

la matrice obtenue par Box et Pierce.

Sous l'hypothèse du théorème 1.5.3, il découle des théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 que la statistique de Ljung-Box

$$Q_{LB}(H) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_H(\beta_H) = \sum_{i=1}^H \beta_{i,H} Z_i^2 \quad (1.5.5)$$

où  $\beta_H = (\beta_1, \dots, \beta_H)'$  est le vecteur des valeurs propres de la matrice  $\Sigma_{\hat{\rho}_H}$  et  $Z_1, \dots, Z_H$  sont iid  $N(0, 1)$ . En pratique,  $\Sigma_{\hat{\rho}_H}$  doit être estimé car elle fait intervenir des paramètres inconnus du modèle ARMA faible. Francq, Roy et Zakoïan (2005) ont développé un estimateur convergent  $\hat{\Sigma}_{\hat{\rho}_H}$  de  $\Sigma_{\hat{\rho}_H}$ , ce qui conduit à

un estimateur convergent  $\hat{\beta}_H = (\hat{\beta}_{1,H}, \dots, \hat{\beta}_{H,H})'$  de  $\beta_H$ . Notons  $z_H(1 - \alpha)$ , le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la variable aléatoire

$$Z_H(\hat{\beta}_H) = \sum_{i=1}^H \hat{\beta}_{i,H} Z_i^2.$$

Du théorème 4 de Francq, Roy et Zakoïan (2005), il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[Q_{LB}(H) > z_H(1 - \alpha)] = \alpha. \quad (1.5.6)$$

Le test de Ljung-Box modifié de niveau asymptotique  $1 - \alpha$  consiste donc à rejeter  $H_0$  si  $Q_{LB}(H) > z_H(1 - \alpha)$ . De (1.5.4), nous avons aussi que

$$n \hat{\rho}'_H \hat{\Sigma}_{\hat{\rho}_H}^{-1} \hat{\rho}_H \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_H^2$$

pour n'importe quel estimateur convergent  $\hat{\Sigma}_{\hat{\rho}_H}$  de  $\Sigma_{\hat{\rho}_H}$  qui est défini positif.

Le test de Ljung-Box modifié va servir dans la suite pour valider la modélisation de séries agrégées ou de séries obtenues par échantillonnage systématique.

# Chapitre 2

---

## AGRÉGATION D'UN PROCESSUS AR FORT

### 2.1. INTRODUCTION

L'agrégation est une transformation particulière des séries chronologiques qui est beaucoup utilisée en économie. Pour la modélisation d'une série chronologique, les données doivent être récoltées à intervalle de temps fixé, par exemple, à chaque heure, à chaque jour, à chaque semaine, etc. Cependant, dans plusieurs situations, les données brutes ne sont pas disponibles et nous devons alors travailler avec des données agrégées, par exemple des données journalières qui sont agrégées en données hebdomadaires ou en données mensuelles, etc. Évidemment, il est préférable de modéliser les données non agrégées lorsque c'est possible, car ces dernières contiennent davantage d'information et sont susceptibles d'offrir de meilleures prévisions. L'agrégation d'une série affecte la spécification du modèle, l'estimation et la précision des prévisions.

Dans ce chapitre, nous ferons une brève revue de littérature concernant les ordres moyenne mobile et autorégressif des modèles résultants de l'agrégation. En effet, l'agrégation d'un modèle initial  $ARMA(p, q)$  admet aussi une représentation  $ARMA$  mais où les ordres diffèrent en général de celles du modèle initial. Ce sujet a intéressé de nombreux chercheurs depuis le début des années 70. Par la suite, nous montrerons comment trouver les ordres résultants de l'agrégation d'un processus  $AR(p)$  fort et nous fournirons des conditions suffisantes sous lesquelles le bruit blanc intervenant dans le modèle agrégé est faible. Finalement,

nous terminerons avec un exemple complet sur l'agrégation d'un  $AR(1)$  fort.

Tout d'abord, voici la notation que nous utiliserons pour traiter l'agrégation.

**Définition 2.1.1.** Soit  $\{X_t\}$  une série initiale. La nouvelle série  $\{Y_T\}$  défini par :

$$Y_T = \sum_{t=m(T-1)+1}^{mT} X_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1.1)$$

est la série agrégée à l'ordre  $m$ .

Dans la définition précédente,  $T$  représente l'indice temps de la série agrégée alors que  $t$  représente l'indice temps de la série de base  $\{X_t\}$ . La série  $\{Y_T\}$  est l'agrégation de la série  $\{X_t\}$  sur des périodes consécutives disjointes de longueur  $m$ . Alors que les variables de base  $X_t$  sont définies pour chaque indice de temps  $t$ , les variables  $Y_T$  sont disponibles au pas de temps  $m$  par rapport à l'indice de temps correspondant aux  $X_t$ .

En utilisant l'opérateur retard  $B$  qui agit sur  $t$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Y_T = \sum_{i=0}^{m-1} B^i X_{mT} &= (1 + B + \dots + B^{m-1}) X_{mT} \\ &= \frac{(1 - B^m)}{(1 - B)} X_{mT} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Dans certains développements, il est commode d'utiliser le processus  $\{I_t\}$  qui est l'agrégation à l'ordre  $m$  de la série  $\{X_t\}$  sur des périodes qui se chevauchent.

Il est défini par

$$I_t = \sum_{j=0}^{m-1} X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2.1.3)$$

Notons que

$$Y_T = I_{mT}. \quad (2.1.4)$$

Alors que  $B$  est l'opérateur qui nous fait reculer de 1 unité de temps dans la série de base, notons  $L$  l'opérateur qui nous fait reculer de 1 unité dans la série agrégée :

$$LY_T = Y_{T-1}.$$

Puisque  $Y_{T-1} = X_{m(T-1)} = X_{mT-m} = B^m X_{mT}$ , il s'ensuit que

$$L = B^m. \quad (2.1.5)$$

## 2.2. REVUE DE LITTÉRATURE

Dans les années 70 et 80, les recherches faites au niveau de l'agrégation avaient pour but d'étudier l'effet de l'agrégation sur le modèle résultant. L'agrégation d'un  $ARMA(p, q)$  avec un pas de  $m$  admet aussi une représentation  $ARMA(p^*, q^*)$  où les ordres  $p^*$  et  $q^*$  dépendent de  $p$  et  $q$ , les ordres de la série initiale, ainsi que de  $m$ , le pas utilisé pour l'agrégation. Les principaux travaux effectués avaient pour but de trouver les ordres  $p^*$  et  $q^*$ .

Amemiya et Wu (1972) montrent que l'agrégation d'un  $AR(p)$  fort en utilisant un pas  $m$  résulte en un  $ARMA(p, q^*)$  où l'ordre  $p$  est celui du modèle initial et l'ordre  $q^*$  est donné par le plus grand entier  $q^*$  tel que  $q^*m < (p+1)(m-1) + 1$ . Ceci implique que  $q^*$  est au plus égal à  $p$  et si  $m \geq (p+1)$ ,  $q^* = p$ . Les auteurs mentionnent aussi que le bruit blanc intervenant dans le modèle agrégé est fort ; on sait aujourd'hui que ce n'est pas nécessairement le cas. Effectivement, dans la suite on s'intéressera aux conditions sous lesquelles l'agrégation d'un  $AR$  fort résulte en un  $ARMA$  faible. Il est à noter que l'agrégation d'un  $ARMA$  fort gaussien résulte lui aussi en un processus  $ARMA$  fort.

Ces auteurs se sont aussi intéressés aux performances prévisionnelles qu'offre un modèle agrégé comparativement au modèle initial. Intuitivement, on s'attend à ce que les performances prévisionnelles en utilisant une série agrégée soient moins bonnes que celles obtenues avec la série originale puisqu'en autres, il y a moins d'observations disponibles pour la modélisation. Amemiya et Wu (1972) ont comparé les erreurs quadratiques moyennes pour les deux modélisations (agrégée et non agrégée) à l'aide de simulations et en sont venus à la conclusion que l'agrégation n'affecte pas beaucoup les performances prévisionnelles.

Par la suite, Brewer (1973) généralise le résultat d'Amemyia et Wu pour un  $AR(p)$  à un  $ARMA(p, q)$ . Il montre que l'agrégation d'un  $ARMA(p, q)$  avec un pas de  $m$  induit un modèle  $ARMA(p, q^*)$  où  $q^* = [(p + 1)(m - 1) + q]/m$ . Il note que lorsque  $m$  est grand, on obtient un  $ARMA(p, p + 1)$  si  $q \geq p + 1$  et un  $ARMA(p, p)$  si  $q < p + 1$ . Comme Amemyia et Wu l'avaient noté dans leur article, Brewer considère aussi que le bruit blanc de la série agrégée est fort.

Wei (1981) examine lui aussi l'effet de l'agrégation de séries chronologiques et s'attarde à étendre les résultats connus pour des modèles  $ARIMA(p, d, q)$ . Il montre que l'agrégation avec un pas  $m$  d'un  $ARIMA(p, d, q)$  résulte lui aussi en un modèle  $ARMA(p, q^*)$  où  $q^* = \left[ (p + d + 1) + \frac{(q - p - d - 1)}{m} \right]$ . Il note que lorsque  $m$  est grand, on a un  $ARMA(p, p + d + 1)$  si  $q \geq p + 1$  et un  $ARMA(p, p + d)$  si  $q < p + 1$ .

Par contre, Stram et Wei (1986) font remarquer une chose très importante, à savoir que les ordres  $(p, q^*)$  sont les ordres maximum, ce que les auteurs précédents n'avaient pas noté. Le point que Wei fait valoir est que l'on peut représenter un processus  $\{X_t\}$   $ARMA(p, q)$  de la façon suivante :

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) X_t = \prod_{j=1}^q (1 - v_j B) a_t \quad (2.2.1)$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc et les  $r_i$  sont les inverses des racines de  $\Phi_p(B)$  et les  $v_j$  les inverses des racines de  $\Theta_q(B)$ . Un modèle  $ARMA(p, q)$  satisfaisant (2.2.1) est identifiable en autant que les opérateurs autorégressifs et moyennes mobiles  $\Phi_p(B)$  et  $\theta_p(B)$  n'ont pas de racines communes, c'est-à-dire  $r_i \neq v_j, \forall i, j$ . Mêmes si le modèle de base (2.2.1) n'a pas de racines communes, il se peut que les  $r_i$  et les  $v_j$  soient tels que le modèle  $ARMA(p, q^*)$  décrivant la série agrégée ait des racines communes. Stram et Wei (1986) ont relevé ce problème d'identifiabilité du modèle  $ARMA$  de la série agrégée et afin de le rendre identifiable, il faut possiblement utiliser des ordres inférieurs à ceux spécifiés jusqu'à maintenant. De plus, ils ne spécifient pas la nature du bruit blanc intervenant dans le modèle

agrégé, contrairement aux auteurs précédents qui le qualifiaient de fort.

Finalement, Stram et Wei détermine de façon formelle les vrais ordres du modèle résultant de l'agrégation d'un  $ARIMA(p, d, q)$ , qui tient compte de l'annulation possible causée par les racines communes.

**Définition 2.2.1.** Soit  $\{X_t\}$  un modèle  $ARIMA(p, d, q)$  ayant la forme suivante :

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d X_t = \Theta_q(B)a_t \quad (2.2.2)$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc et  $\Phi_p(B)$  et  $\Theta_q(B)$  sont respectivement des polynômes autorégressif et moyenne mobile ayant chacun leurs racines à l'extérieur du cercle unité et n'ayant aucune racine commune.

Soient  $r_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, p$  les  $p$  racines de  $\Phi_p(B)$ . Le modèle est dit sans périodicité cachée d'ordre  $m$  si  $r_i^m = r_j^m$  implique que  $r_i = r_j$ .

Les deux théorèmes qui suivent, donnent respectivement les ordres du modèle agrégé d'un modèle  $AR(p)$  et d'un modèle  $ARIMA(p, d, q)$ . Considérons les notations suivantes :  $[a]$ , la partie entière de  $a$ ,  $\lceil b \rceil$ , le plus petit entier supérieur ou égal à  $b$  et  $\max \mathcal{A}$  le plus grand élément de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 2.2.1.** Soit un modèle  $AR(p)$  caractérisé par le polynôme autorégressif  $\Phi_p(B)$ . Soit  $r_i^{-1}$ , pour  $i = 1, \dots, p'$ , les  $p'$  racines distinctes de  $\Phi_p(B)$ , chacune de multiplicité  $s_i$ . Soit  $b$  le nombre de valeurs distinctes de  $r_i^m$  pour  $i = 1, \dots, p'$ . Considérons les  $b$  partitions  $\mathcal{A}_i$ , tel que  $s_k$  et  $s_j \in \mathcal{A}_i$  si  $r_k^m = r_j^m$ . Alors l'ordre  $AR$  de la série agrégée, notée  $p^*$ , suite à l'annulation des monômes égaux lors de la décomposition en monômes de  $\Phi_p(B)$  et de  $\theta_{q^*}(B)$ , le polynôme moyenne mobile du modèle agrégé résultant, sera donnée par  $p^* = \sum_{i=1}^b \max \mathcal{A}_i$ . De plus, l'ordre moyenne mobile de la série agrégée que l'on note  $N$  est donnée par  $N = q^* - (p - q^*)$  où  $q^* = [(p + 1) - \frac{p+1}{m}]$ .

Pour une démonstration voir Stram et Wei (1986).

**Théorème 2.2.2.** *Considérons le modèle  $ARIMA(p, d, q)$  définie par (2.2.2) dans lequel les polynômes  $\Phi_p(B)$  et  $\Theta_q(B)$  ont leurs racines à l'extérieur du cercle unité et n'ont aucune racine commune. Supposons de plus que ce modèle est sans périodicité cachée à l'ordre d'agrégation  $m$ . On a alors que la série résultante de l'agrégation de ce modèle suit un modèle  $ARIMA(p^*, d, M)$  où  $M = [p + d + 1 + \frac{(q-p-d-1)}{m}] - (p + N)$  où  $p^*$  et  $N$  sont définis par le théorème 2.2.1.*

Pour une démonstration voir Wei (1990, p. 408).

### 2.3. ORDRE $p$ ET $q$ D'UNE SÉRIE AR AGRÉGÉE

Dans cette section, nous allons montrer comment obtenir les ordres  $p$  et  $q$  résultant de l'agrégation d'un modèle  $AR$  fort en utilisant un ordre  $m$  quelconque. Nous nous intéressons seulement à l'agrégation d'un  $AR(p)$  fort, mais la méthode pour trouver les ordres lors de l'agrégation d'une série  $ARMA(p, q)$  est similaire. Dans la suite, nous aurons besoin de la caractérisation suivante d'un processus stationnaire au sens large dont les autocovariances sont nulles à partir d'un certain délai.

**Proposition 2.3.1.** *Si  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens large avec une fonction d'autocovariance  $\gamma(\cdot)$  telle que  $\gamma(h) = 0$  pour  $|h| > q$  et  $\gamma(q) \neq 0$ , alors  $\{X_t\}$  est  $MA(q)$ , c'est-à-dire qu'il existe un bruit blanc  $\{a_t\}$  et des coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$  tels que*

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}.$$

Une preuve de cette proposition est donnée dans Brockwell et Davis (1991, p.89).

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $\{X_t\}$  une série issue d'un processus  $AR(p)$  fort où  $\Phi_p(B)$ , son polynôme caractéristique, admet  $p$  racines distinctes, notées  $r_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , toutes à l'extérieur du cercle unité, telles que si  $r_i^m = r_j^m$  alors  $r_i = r_j$ . La série*

$\{Y_T\}$  résultant de l'agrégation de  $X_t$  suit alors un modèle ARMA( $p, q$ ) où

$$q = \left\lceil \frac{(p+1)(m-1)}{m} - 1 \right\rceil.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\{X_t\}$  satisfait l'équation

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) X_t = \varepsilon_t$$

et en particulier en  $t = mT$ , nous avons

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) X_{mT} = \varepsilon_{mT} \quad (2.3.1)$$

En appliquant l'opérateur  $1 + B + \dots + B^{m-1}$  aux deux membres de (2.3.1), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^p (1 - r_i B) (1 + B + \dots + B^{m-1}) X_{mT} = (1 + B + \dots + B^{m-1}) \varepsilon_{mT} \\ \Leftrightarrow & \prod_{i=1}^p (1 - r_i B) Y_T = (1 + B + \dots + B^{m-1}) \varepsilon_{mT}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Afin de faire apparaître les valeurs passées  $Y_{T-1}, Y_{T-2}, \dots$ , appliquons maintenant l'opérateur  $\prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)}$  aux 2 membres de (2.3.2). Nous obtenons

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i^m B^m) Y_T = (1 + B + \dots + B^{m-1}) \prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} \varepsilon_{mT}$$

qui s'écrit

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i^m L) Y_T = (1 + B + \dots + B^{m-1}) \prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} \varepsilon_{mT}. \quad (2.3.3)$$

Le membre de gauche de l'équation (2.3.3) nous indique que  $Y_T$  admet une partie autorégressive d'ordre  $p$ . Il ne reste plus qu'à trouver l'ordre moyenne mobile du membre de droite que nous notons  $U_T$ .

$$U_T = (1 + B + \dots + B^{m-1}) \prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} \varepsilon_{mT}. \quad (2.3.4)$$

Puisque

$$\frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} = 1 + r_i B + \dots + r_i^{m-1} B^{m-1},$$

il s'ensuit que l'opérateur en  $B$  dans (2.3.4) est de degré  $(p+1)(m-1)$  et notons ses coefficients  $\delta_i, i = 0, \dots, (p+1)(m-1)$ , avec  $\delta_0 = 1$ . Nous pouvons donc écrire

$$U_T = \sum_{i=0}^{(p+1)(m-1)} \delta_i \varepsilon_{mT-i} \quad (2.3.5)$$

et donc,  $U_T$  fait intervenir les bruit  $\varepsilon_{mT}, \varepsilon_{mT-1}, \dots, \varepsilon_{mT-(p+1)(m-1)}$ . De même,  $U_{T+h}$  fait intervenir les bruits  $\varepsilon_{mT+hm}, \varepsilon_{mT+hm-1}, \dots, \varepsilon_{mT+hm-(p+1)(m-1)}$ . Donc, il s'ensuit que

$$E[U_T] = 0$$

et

$$Cov(U_{T+h}, U_T) = E[U_{T+h}U_T] = 0$$

pour  $h > (p+1)(m-1)$ .

Maintenant, pour déterminer  $q$ , on doit passer de l'indice temps  $t$  de la série initiale à l'indice temps  $T$  de la série agrégée. En considérant que  $T+h$  et  $T$  sont exprimés en unités de temps de la série de base,  $E[U_{T+h}U_T] \neq 0$  si

$$qm \leq (p+1)(m-1).$$

Par la proposition 2.3.1 et comme  $q$  doit être entier, le processus  $\{U_T\}$  admet une représentation moyenne mobile d'ordre  $q$  tel que,

$$q = \left\lceil \frac{(p+1)(m-1)}{m} - 1 \right\rceil$$

et la démonstration est complétée.  $\square$

On remarque de plus que si  $m \geq p+1$  alors  $q = p$ , comme Amenyia et Wu (1972) le faisait remarquer.

## 2.4. PROPRIÉTÉ DU BRUIT BLANC D'UNE SÉRIE AR AGRÉGÉE

La plupart des auteurs ayant travaillé sur l'agrégation de séries chronologiques dans les années 70 et 80, laissaient entendre que le bruit blanc intervenant dans le modèle agrégé était de même nature que celui du modèle initial, c'est-à-dire fort. Par contre, Francq, Roy et Zakoïan (2005), ont montré que l'agrégation induit,

sous certaines conditions, un bruit blanc faible plutôt que fort.

Dans cette section, nous donnerons des conditions suffisantes sous lesquelles l'agrégation d'un  $AR$  fort avec un pas  $m$  quelconque résulte en un  $ARMA$  faible.

Dans la démonstration du théorème 2.3.1, on a montré que

$$U_T = \sum_{i=0}^{(p+1)(m-1)} \delta_i \varepsilon_{mT-i}$$

défini par (2.3.5) est  $MA(q)$  où  $q = \left\lceil \frac{(p+1)(m-1)}{m} - 1 \right\rceil$ . Les coefficients  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, (p+1)(m-1)$  dépendent de  $\Phi_p = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$  ainsi que de  $m$ .

Maintenant, comme  $\{U_t\}$  est  $MA(q)$  il admet la représentation suivante :

$$U_T = \eta_T - \theta_1 \eta_{T-1} - \dots - \theta_q \eta_{T-q} = \theta_q(B) \eta_T \quad (2.4.1)$$

où  $\eta_T$  est un *bruit blanc faible* avec  $E[\eta_T] = 0$  et  $E[\eta_T^2] = \sigma_\eta^2$  et  $\theta_q(B)$  est le polynôme moyenne mobile telle que ses  $q$  racines sont toutes à l'extérieur du cercle unité.

À partir de cette formulation, la fonction d'autocovariance de  $\{U_T\}$  est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2 & \text{si } h = 0, \\ \sigma_\varepsilon^2 (-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h} \theta_q) & \text{si } |h| \leq q \text{ et } q \neq 0, \\ 0 & \text{si } |h| > q. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Par contre, si on utilise l'équation (2.3.5), on obtient la représentation suivante de la fonction d'autocovariance de  $\{U_t\}$  :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\eta^2 \sum_{i=0}^{(p+1)(m-1)-m|h|} \delta_{i+m|h|} \delta_i & \text{si } |h| \leq q, \\ 0 & \text{si } |h| > q. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Maintenant, en égalant (2.4.2) et (2.4.3), il est possible de calculer les  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , à partir des coefficients  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , du modèle  $AR(p)$  de la série

de base. Ceux-ci serviront à illustrer les conditions afin que la série agrégée soit *ARMA* faible.

Avec le théorème qui suit, nous serons en mesure d'établir une condition suffisante sous laquelle  $\{Y_T\}$  est un *ARMA*( $p, q$ ) faible.

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $\{U_T\}$  un processus moyenne mobile défini par (2.4.1). Si  $E[\eta_T g(U_{T-1})] \neq 0$  pour au moins une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et non linéaire alors,  $\{\eta_T\}$  est ni un bruit blanc fort, ni une différence de martingale.*

DÉMONSTRATION. : Supposons que  $\{\eta_T\}$  est un bruit blanc fort. On a alors que  $\eta_T$  est indépendant de  $U_{T-1}$  et en particulier de  $g(U_{T-1})$ . Ils s'ensuit que  $E[\eta_T g(U_{T-1})] = E[\eta_T]E[g(U_{T-1})] = 0$ , une contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc,  $\{\eta_T\}$  n'est pas un bruit blanc fort si  $E[\eta_T g(U_{T-1})] \neq 0$ .

Maintenant, si  $\{\eta_T\}$  est une différence de martingale, alors  $E[\eta_T | \{\eta_{T-1}, \eta_{T-2}, \dots\}] = 0 \forall T$ . Mais, on a

$$\begin{aligned} E[\eta_T g(U_{T-1})] &= E[E[g(U_{T-1})\eta_T | \{\eta_{T-1}, \eta_{T-2}, \dots\}]] \\ &= E[g(U_{T-1})E[\eta_T | \{\eta_{T-1}, \eta_{T-2}, \dots\}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse du théorème. Donc  $\{\eta_T\}$  n'est pas non plus une différence de martingale.  $\square$

Afin d'obtenir une condition suffisante sous laquelle le bruit blanc  $\{\eta_T\}$  est faible, il suffit donc de trouver une fonction non linéaire  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $E[\eta_T g(U_{T-1})] \neq 0$ . Une fonction non linéaire simple du point de vue des manipulations algébriques est la fonction  $g(x) = x^2$  que nous utiliserons dans la suite.

Teles et Wei (2002) affirment dans leurs lemme 1 et théorème 1 que le bruit blanc  $\{\eta_t\}$  est fort. Leurs résultats sont donc faux en général. Cependant, l'agrégation d'un processus gaussien conduit à un nouveau processus gaussien et leurs énoncés sont donc corrects dans le contexte gaussien.

Par le théorème précédent, nous n'avons qu'à trouver les conditions sous lesquelles  $E[\eta_T U_{T-1}^2] \neq 0$  pour que  $\{Y_T\}$  soit *ARMA* faible. Nous allons donc développer  $E[\eta_T U_{T-1}^2]$ .

Tout d'abord, puisque le processus  $\{U_T\}$  est supposé inversible, de (2.4.1) nous pouvons écrire

$$\eta_T = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^* U_{T-i} \quad (2.4.4)$$

où  $\theta_0^* = 1$  et les coefficients  $\theta_i^*$  pour  $i \geq 1$  sont déterminés par les coefficients  $\theta_i$  de la représentation (2.4.1).

Maintenant, en utilisant la représentation (2.4.4), il est facile de calculer  $E[\eta_T U_{T-1}^2]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} E[\eta_T U_{T-1}^2] &= E[U_T U_{T-1}^2] + \theta_1^* E[U_{T-1}^3] + \sum_{i=2}^{\infty} \theta_i^* E[U_{T-1}^2 U_{T-i}] \\ &= E[U_T U_{T-1}^2] + \theta_1^* E[U_{T-1}^3] + \sum_{i=2}^{q+1} \theta_i^* E[U_{T-1}^2 U_{T-i}] + \sum_{i>q+1}^{\infty} \theta_i^* E[U_{T-1}^2 U_{T-i}]. \end{aligned}$$

En utilisant la représentation (2.3.5) pour  $U_T$ , il est facile de vérifier que

$$E[U_{T-1}^2 U_{T-j}] = \begin{cases} E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^{v-m} \delta_i^2 \delta_{m+i} & \text{si } j = 0, \\ E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^v \delta_i^3 & \text{si } j = 1, \\ E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^{v-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 & \text{si } 2 \leq j \leq q+1, \\ 0 & \text{si } j \geq q+2, \end{cases}$$

où  $v = (p+1)(m-1)$ . Il en découle que :

$$E[\eta_T U_{T-1}^2] = E[\varepsilon_{mT}^3] \left[ \sum_{i=0}^{v-m} \delta_i^2 \delta_{m+i} + \theta_1^* \sum_{i=0}^v \delta_i^3 + \sum_{j=2}^{q+1} \left( \theta_j^* \sum_{i=0}^{v-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 \right) \right]$$

Par le théorème 2.4.1, nous pouvons maintenant donner des conditions suffisantes pour lesquelles la série agrégée  $\{Y_T\}$  est  $ARMA(p, q)$  faible.

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $\{X_t\}$  une processus  $AR(p)$  fort dont le vecteur des coefficients autorégressifs est noté  $\Phi_p = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$  et le processus innovation  $\{\varepsilon_t\}$ . Le processus agrégé au pas  $m$   $\{Y_T\}$  est  $ARMA(p, q)$  faible si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$- E[\varepsilon_t^3] \neq 0$$

$$- G(m, \Phi_p) = \sum_{i=0}^{v-m} \delta_i^2 \delta_{m+i} + \theta_1^* \sum_{i=0}^v \delta_i^3 + \sum_{j=2}^{q+1} \left( \theta_j^* \sum_{i=0}^{v-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 \right) \neq 0.$$

où les  $\delta_i$  sont définis par (2.3.5) et les  $\theta_i^*$  par (2.4.4).

Donc, la série agrégée  $\{Y_T\}$  sera  $ARMA$  faible si la loi de probabilité du bruit  $\{\varepsilon_t\}$  du processus de base est asymétrique et si la fonction  $G(m, \Phi_p)$  est non nulle. Intuitivement, il n'y a pas de raison de croire que cette fonction s'annule pour l'ensemble des valeurs admissibles de  $\Phi_p$ . Par conséquent, avec un bruit blanc  $\{\varepsilon_t\}$  de loi asymétrique, la forme de  $G(m, \Phi_p)$  nous laisse croire que la série agrégée  $\{Y_T\}$  sera  $ARMA$  faible pour un grand nombre de valeurs possibles du vecteur  $\Phi_p$ . Cette caractéristique est illustrée dans la section suivante pour un processus  $AR(1)$ .

## 2.5. AGRÉGATION D'UN $AR(1)$ FORT

Dans cette partie, nous allons étudier en détail l'agrégation d'un  $AR(1)$  fort et trouver les conditions sous lesquelles la série agrégée est  $ARMA$  faible. Nous considérerons un pas  $m$  quelconque ce qui nous permettra de voir l'influence de  $m$  sur les paramètres du modèle agrégé ainsi que sur le fonction  $G(m, \Phi_p)$ . Les résultats présentés dans cette section seront aussi utilisés dans les simulations. Ils permettront entre autre de choisir des valeurs de paramètres  $AR$  et des valeurs

de  $m$  pour lesquelles nous aurons intuitivement plus de chance de détecter la dépendance des erreurs.

Comme la série non agrégée  $\{X_t\}$  est  $AR(1)$  fort, elle admet la représentation suivante :

$$X_t = \varepsilon_t + \phi X_{t-1}. \quad (2.5.1)$$

Par le théorème 2.3.1, la série agrégée  $\{Y_T\}$  sera  $ARMA(1,1)$ ,  $\forall m \geq 2$ . L'observation  $T$  de la série agrégée est alors fournie par (2.1.1). En prenant  $t = mT$ , nous obtenons

$$X_{mT} = \varepsilon_{mT} + \phi X_{mT-1}. \quad (2.5.2)$$

Puisque  $Y_T = \sum_{i=0}^{m-1} B^i X_{mT}$ , en ajoutant  $\sum_{i=1}^{m-1} B^i X_{mT}$  à chacun des deux membres de (2.5.2), nous pouvons écrire :

$$Y_T = \varepsilon_{mT} + \phi X_{mT-1} + \sum_{i=1}^{m-1} B^i X_{mT}. \quad (2.5.3)$$

Développons  $X_{mT}$  donné par (2.5.2) afin de l'exprimer en fonction des bruits  $\varepsilon_{mT}, \varepsilon_{mT-1}, \dots, \varepsilon_{mT-(\ell-1)}$ . En substituant dans (2.5.2)  $X_{mT-1}$  par  $\varepsilon_{mT-1} + \phi X_{mT-2}$  et ainsi de suite jusqu'à ce que  $X_{mT-\ell}$  apparaisse, nous avons

$$\begin{aligned} X_{mT} &= \varepsilon_{mT} + \phi \varepsilon_{mT-1} + \phi^2 X_{mT-2} \\ &\vdots \\ &= \varepsilon_{mT} + \phi \varepsilon_{mT-1} + \dots + \phi^{\ell-1} \varepsilon_{mT-(\ell-1)} + \phi^\ell X_{mT-\ell} \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \phi^i B^i \varepsilon_{mT} + \phi^\ell B^\ell X_{mT}, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

où  $\ell \geq 2$  est un entier.

L'équation (2.5.3) s'écrit aussi en termes de  $X_{mT}$ ,

$$Y_T = \varepsilon_{mT} + \phi B X_{mT} + \sum_{i=1}^{m-1} B^i X_{mT}$$

et substituons le premier  $X_{mT}$  par (2.5.4) en posant  $\ell = m - 1$  et le deuxième en posant  $\ell = m$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} Y_T &= \varepsilon_{mT} + \phi B \left[ \sum_{j=0}^{m-2} \phi^j B^j \varepsilon_{mT} + \phi^{m-1} X_{mT-(m-1)} \right] + \sum_{i=1}^{m-1} B^i \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \phi^j B^j \varepsilon_{mT} + \phi^m B^m X_{mT} \right] \\ &= \varepsilon_{mT} + \sum_{j=0}^{m-2} \phi^{j+1} B^{j+1} \varepsilon_{mT} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \phi^j B^{j+i} \varepsilon_{mT} + \phi^m B^m \sum_{i=0}^{m-1} B^i X_{mT} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

De (2.1.2), on a que :

$$Y_{T-1} = LY_T = B^m \sum_{i=0}^{m-1} B^i X_{mT}$$

qui est le dernier terme de (2.5.5) et on peut écrire

$$Y_T - \phi^m Y_{T-1} = \varepsilon_{mT} + \sum_{j=0}^{m-2} \phi^{j+1} B^{j+1} \varepsilon_{mT} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \phi^j B^{j+i} \varepsilon_{mT}. \quad (2.5.6)$$

Le paramètre autorégressif de la série agrégée au pas  $m$  est donc  $\phi^m$ . Il reste maintenant à trouver la valeur du paramètre moyenne mobile. À cette fin, notons  $U_T$  le membre de droite de (2.5.6) :

$$U_T = \varepsilon_{mT} + \sum_{j=0}^{m-2} \phi^{j+1} B^{j+1} \varepsilon_{mT} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \phi^j B^{j+i} \varepsilon_{mT} = \sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i B^i \varepsilon_{mT} \quad (2.5.7)$$

les  $\delta_i$  sont définis par

$$\delta_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^i \phi^j & \text{si } 0 \leq i < m, \\ \phi^{i-m+1} \sum_{j=0}^{2m-2-i} \phi^j & \text{si } m \leq i \leq 2m-2. \end{cases}$$

De la représentation (2.5.7), il s'ensuit que la fonction d'autocovariance de  $U_T$  est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i^2 & \text{si } h = 0, \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m} & \text{si } |h| = 1, \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2, \end{cases} \quad (2.5.8)$$

et l'autocorrélation de délai 1 par

$$\rho_U(1) = \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m}}{\sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i^2}. \quad (2.5.9)$$

Aussi par la proposition 2.3.1, le processus  $\{U_T\}$  admet une représentation  $MA(1)$  :

$$U_T = \eta_t - \theta\eta_{T-1}. \quad (2.5.10)$$

En fonction de cette dernière, sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_\eta^2 & \text{si } h = 0, \\ -\theta\sigma_\eta^2 & \text{si } |h| = 1, \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2, \end{cases} \quad (2.5.11)$$

et

$$\rho_U(1) = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}. \quad (2.5.12)$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer  $\theta$  en égalant (2.5.8) et (2.5.11). On trouve alors l'équation du second degré suivante :

$$\theta^2 \sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m} + \theta \sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i^2 + \sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m} = 0$$

et on retient la solution telle que  $|\theta| < 1$  pour satisfaire la condition d'inversibilité. On trouve alors :

$$\theta = \frac{-\sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i^2 + \sqrt{(\sum_{i=0}^{2m-2} \delta_i^2)^2 - 4(\sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m})^2}}{2 \sum_{i=0}^{m-2} \delta_i \delta_{i+m}}. \quad (2.5.13)$$

Nous avons donc trouvé les paramètres autorégressif et moyenne mobile de la représentation  $ARMA(1, 1)$  qui décrit la série agrégée  $\{Y_T\}$  :

$$Y_T - \phi^m Y_{T-1} = \eta_T - \theta\eta_{T-1} \quad (2.5.14)$$

où  $\theta$  est donnée par (2.5.13).

Le graphique suivant donne la valeur du paramètre moyenne mobile  $\theta$  en fonction de  $\phi$  et  $m$ , pour  $m = 2, 4, 6, 12$ . On remarque tout d'abord que  $\theta$  décroît de façon rapide entre -1 et 0 et cette décroissance est plus prononcée à mesure que  $m$  augmente. Pour des valeurs positives de  $\phi$ ,  $\theta$  semble se rapprocher de 0.25. Un fait intéressant à noter est que  $\theta$  ne peut pas prendre toutes les valeurs possibles entre -1 et 1

Dans la section précédente, on a montré que  $\{Y_T\}$  est  $ARMA$  faible si  $E[\varepsilon_i^3] \neq 0$  et si  $G(m, \Phi_1) = G(m, \phi) \neq 0$ . Comme nous connaissons les  $\delta_i$  dans le cas

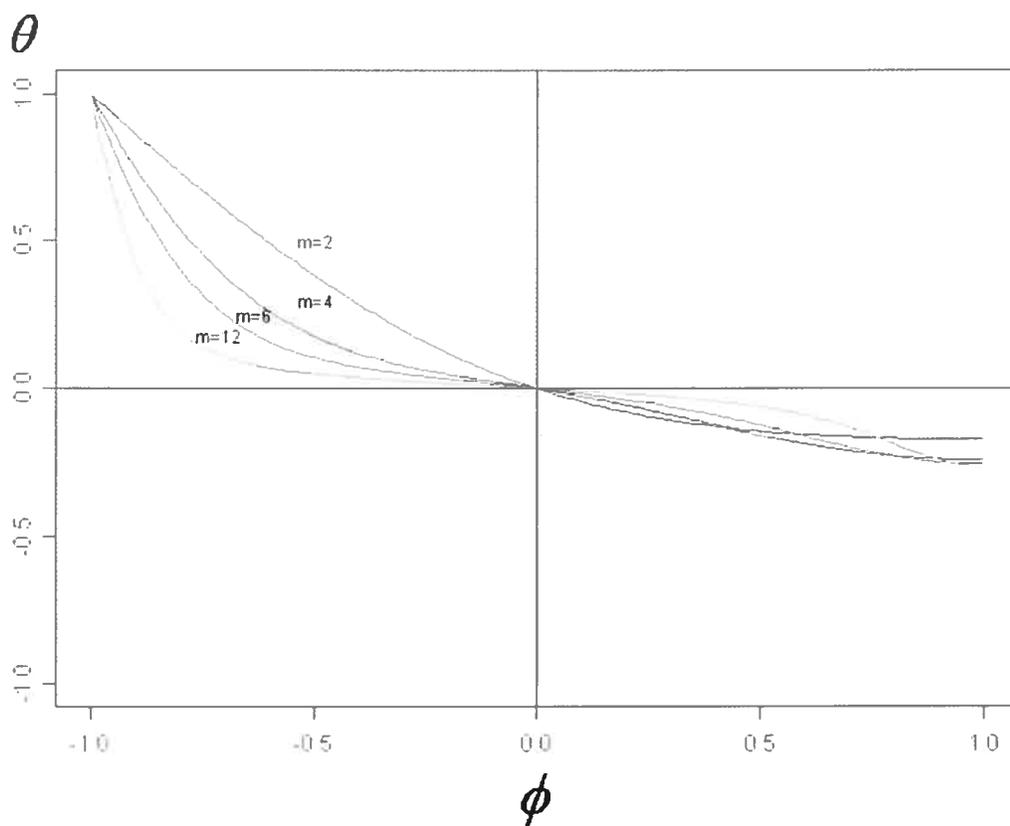


FIGURE. 2.1. Graphique de  $\theta$  en fonction de  $\phi$ .

$AR(1)$ , nous pouvons calculer  $G(m, \phi)$  pour n'importe quelles valeurs de  $\phi$  et  $m$ . La figure 2.2 nous fournit la fonction  $G(m, \phi)$  en fonction de  $\phi \in (-1, 1)$  pour  $m = 2, 4, 6, 12$ . On remarque que pour des valeurs négatives de  $\phi$ , la fonction  $G(m, \phi)$  est près de 0 ce qui indique que la dépendance des erreurs devrait être moins prononcée. Par contre, pour des valeurs de  $\phi$  supérieur à 0.5,  $G(m, \phi)$  est relativement loin de 0 et ce, peu importe la valeur de  $m$ .

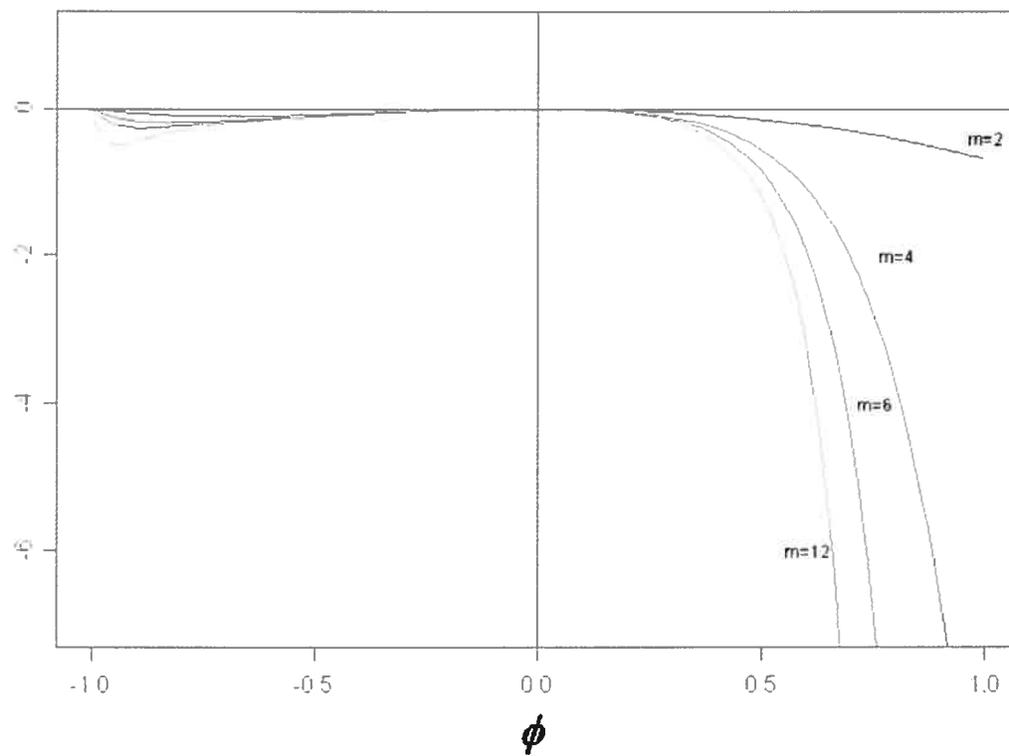
$G(m, \phi)$ 

FIGURE. 2.2. Graphique de  $G(m, \phi)$  en fonction de  $\phi$ .

# Chapitre 3

---

## ÉCHANTILLONNAGE SYSTÉMATIQUE D'UN ARMA FORT

### 3.1. INTRODUCTION

Comme l'agrégation, l'échantillonnage systématique est une transformation appliquée à une série originale. L'échantillonnage systématique consiste à prendre uniquement les observations à chaque  $m$  unités de temps de la série initiale. Dans la suite, nous parlerons de la série échantillonnée de façon systématique, comme étant la série échantillonnée.

L'échantillonnage systématique est utilisé dans plusieurs domaines dont l'économie et la finance lorsque des données de hautes fréquences sont disponibles. Par exemple, dans le secteur boursier, les valeurs de plusieurs titres sont connues de minute en minute. Par contre, dans les annales de la bourse, on retient la plupart du temps la valeur à la fermeture. Ainsi, la série constituée des valeurs d'un titre boursier récoltées à la fermeture, constitue une série échantillonnée avec un certain pas  $m$ .

Comme pour l'agrégation, l'échantillonnage systématique au pas  $m$  d'un *ARMA* fort résulte lui aussi en un modèle *ARMA*. De plus, les ordres autorégressif et moyenne mobile de ce processus dépendent de ceux du modèle initial ainsi que du pas  $m$  d'échantillonnage. Dans la suite, nous ferons une brève revue de littérature des travaux faits sur la recherche de ces ordres et nous en ferons même la

démonstration dans le cas de l'échantillonnage systématique d'un  $ARMA(p, q)$  fort. Finalement, comme dans le cas de l'agrégation, suite à l'échantillonnage systématique d'un modèle  $ARMA$  fort, le processus résultant est  $ARMA$  faible sous certaines conditions similaires à celles trouvées pour l'agrégation. Nous terminerons ce chapitre en présentant un exemple détaillé sur l'échantillonnage systématique d'un  $ARMA(1, 1)$ .

Tout d'abord, voici la notation que nous utiliserons pour traiter l'échantillonnage systématique.

**Définition 3.1.1.** Soit  $\{X_t\}$  une série initiale. La nouvelle série  $\{Y_T\}$  formée à partir des observations  $X_t$  définies par :

$$Y_T = X_{mT} \quad (3.1.1)$$

est la série échantillonnée au pas  $m$ .

Dans la définition précédente,  $T$  représente l'indice temps de la série échantillonnée alors que  $t$  représente l'indice temps de la série initiale  $\{X_t\}$ . Les variables de base  $X_t$  sont définies pour chaque indice de temps  $t$ , tandis que les variables  $Y_T$  sont disponibles au pas de temps  $m$  par rapport à l'indice de temps correspondant aux  $X_t$ .

Comme dans le cas de l'agrégation, il est utile de connaître le lien qui unit l'opérateur retard agissant sur l'indice  $t$  et l'opérateur retard agissant sur l'indice  $T$  que nous noterons par  $L$ . En fait, nous avons  $L = B^m$ , puisque à partir de (3.1.1) on a

$$Y_{T-1} = X_{m(T-1)} = B^m X_{mT} = B^m Y_T = LY_T.$$

## 3.2. REVUE DE LITTÉRATURE

L'échantillonnage systématique, comparativement à l'agrégation, présente une moins grande richesse au niveau littéraire. Ceci est peut-être dû au fait que l'échantillonnage systématique est une transformation beaucoup plus simple que l'agrégation, qui elle fait intervenir la somme de  $m$  observations. De plus, on

remarque une grande proximité entre l'agrégation et l'échantillonnage systématique. La plupart des auteurs s'étant intéressés à l'agrégation sont aussi ceux ayant étudié l'échantillonnage systématique.

Brewer (1973) présente les résultats sur l'échantillonnage systématique d'une série  $ARMA(p, q)$  fort. Il note que le modèle résultant est aussi  $ARMA(p, q^*)$ ,  $q^* = \left\lfloor \frac{p(m-1)+q}{m} \right\rfloor$  où  $\lfloor a \rfloor$  représente la partie entière de  $a$ . Il note que lorsque  $m$  tend vers l'infini, la série agrégée converge vers un  $ARMA(p, p)$  si  $q \geq p$  et vers un  $ARMA(p, p-1)$  si  $q < p$ . De plus, il considère que le bruit blanc intervenant dans le modèle échantillonné est lui aussi fort.

Wei (1981) examine lui aussi l'effet de l'échantillonnage systématique et s'attarde à étendre les résultats connus pour des modèles  $ARIMA(p, d, q)$ , définis en (2.2.2). Il montre que l'échantillonnage systématique d'un  $ARIMA(p, d, q)$  avec un pas  $m$  résulte en un modèle  $ARMA(p, q^*)$  où  $q^* = \left\lfloor (p+d) + \frac{(q-p-d)}{m} \right\rfloor$ . Wei note cependant que le bruit blanc intervenant dans la série échantillonnée n'est pas nécessairement fort.

### 3.3. ORDRES $p$ ET $q$ D'UNE SÉRIE ARMA ÉCHANTILLONNÉE

Dans cette section, nous montrons comment obtenir les ordres  $p$  et  $q^*$  suite à l'échantillonnage systématique d'un  $ARMA(p, q)$  fort. L'idée est essentiellement la même que celle utilisée pour l'agrégation. Pour cette raison, nous aurons recours à certains résultats présentés dans le chapitre 2.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\{X_t\}$  une série issue d'un processus  $ARMA(p, q)$  fort où  $\Phi_p(B)$  et  $\Theta_q(B)$ , ses polynômes autorégressif et moyenne mobile, admettent respectivement  $p$  et  $q$  racines distinctes, toutes à l'extérieur du cercle unité. Soit  $r_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , les  $p$  racines de  $\Phi_p(B)$ , telles que si  $r_i^m = r_j^m$  alors  $r_i = r_j$ . La série  $\{Y_T\}$  résultant de l'échantillonnage systématique du processus  $\{X_t\}$  est alors  $ARMA(p, q^*)$  où*

$$q^* = \left\lfloor \frac{p(m-1) + q}{m} - 1 \right\rfloor.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\{X_t\}$  satisfait l'équation

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) X_t = \Theta_q(B) \varepsilon_t$$

et en particulier en  $t = mT$ , nous avons

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) X_{mT} = \Theta_q(B) \varepsilon_{mT}$$

et donc

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i B) Y_T = \Theta_q(B) \varepsilon_{mT}. \quad (3.3.1)$$

Afin de faire apparaître les valeurs passées  $Y_{T-1}, Y_{T-2}, \dots$ , appliquons maintenant l'opérateur  $\prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)}$  aux 2 membres de (3.3.1). Nous obtenons

$$\prod_{i=1}^p (1 - r_i^m B^m) Y_T = \theta_q(B) \prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} \varepsilon_{mT} \quad (3.3.2)$$

Le membre de gauche de l'équation (3.3.2) nous indique que  $Y_T$  admet une partie autorégressive d'ordre  $p$ . Il ne reste plus qu'à trouver l'ordre moyenne mobile du membre de droite que nous notons  $U_T$ . Nous avons

$$U_T = \theta_q(B) \prod_{i=1}^p \frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} \varepsilon_{mT}. \quad (3.3.3)$$

Puisque

$$\frac{(1 - r_i^m B^m)}{(1 - r_i B)} = 1 + r_i B + \dots + r_i^{m-1} B^{m-1}$$

et

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q,$$

il s'ensuit que l'opérateur en  $B$  dans (3.3.3) est de degré  $p(m-1) + q$  et notons ses coefficients  $\delta_i$ ,  $i = 0, \dots, p(m-1) + q$ , avec  $\delta_0 = 1$ . Nous pouvons donc écrire

$$U_T = \sum_{i=0}^{p(m-1)+q} \delta_i \varepsilon_{mT-i} \quad (3.3.4)$$

et donc,  $U_T$  fait intervenir les bruits  $\varepsilon_{mT}, \varepsilon_{mT-1}, \dots, \varepsilon_{mT-p(m-1)-q}$ . De même,  $U_{T+h}$  fait intervenir les bruits  $\varepsilon_{mT+h}, \varepsilon_{mT+h-1}, \dots, \varepsilon_{mT+h-p(m-1)-q}$ . Donc, il s'ensuit que

$$E[U_T] = 0$$

et

$$\text{Cov}(U_{T+h}, U_T) = E[U_{T+h}U_T] = 0$$

pour  $h > p(m-1) + q$ .

Maintenant, pour déterminer  $q^*$ , on doit passer de l'indice temps  $t$  de la série initiale à l'indice temps  $T$  de la série agrégée. En considérant que  $T+h$  et  $T$  sont exprimés en unités de temps de la série de base,  $E[U_{T+h}U_T] \neq 0$  si

$$q^*m \leq p(m-1) + q.$$

Par la proposition 2.3.1 et par le fait que  $q$  doit être entier, le processus  $\{U_T\}$  admet une représentation moyenne mobile d'ordre  $q^*$  tel que

$$q^* = \left\lceil \frac{p(m-1) + q}{m} - 1 \right\rceil \quad (3.3.5)$$

et la démonstration est complétée.  $\square$

### 3.4. PROPRIÉTÉ DU BRUIT BLANC D'UN PROCESSUS ARMA FORT ÉCHANTILLONNÉ

Comme dans le cas de l'agrégation, les travaux de Francq, Roy et Zakoïan (2005) ont permis de mettre en lumière que la nature du bruit blanc suite à l'échantillonnage systématique est faible sous certaines conditions. Dans cette section, nous fournirons les conditions suffisantes sous lesquelles l'échantillonnage systématique d'un *ARMA* fort résulte en un modèle *ARMA* faible.

Tout d'abord, comme dans le cas de l'agrégation, il est possible de déterminer de façon théorique les paramètres moyennes mobiles qui interviennent dans le modèle échantillonné. En fait, comme  $\{U_T\}$  est  $MA(q^*)$ , il admet la représentation suivante :

$$U_T = \eta_T - \vartheta_1\eta_{T-1} - \dots - \vartheta_{q^*}\eta_{T-q^*} = \vartheta_{q^*}(B)\eta_T \quad (3.4.1)$$

où  $\{\eta_T\}$  est un *bruit blanc faible* avec  $E[\eta_T] = 0$  et  $E[\eta_T^2] = \sigma_\eta^2$  et  $\vartheta_{q^*}(B)$  est le polynôme moyenne mobile de  $\{U_T\}$ , tel que ses racines sont toutes à l'extérieur du

cercle unité. Considérant cette représentation de  $U_T$ , sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\eta^2 \sum_{i=0}^{q^*} \vartheta_i^2 & \text{si } h = 0, \\ \sigma_\eta^2 (-\vartheta_h + \vartheta_1 \vartheta_{h-1} + \dots + \vartheta_{q^*} \vartheta_{h-q^*}) & \text{si } 0 < h \leq q^*, \\ 0 & \text{si } h > q^*. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Par ailleurs, en utilisant la représentation (3.3.4) de  $U_T$  en termes du bruit blanc de la série  $\{X_t\}$ , la fonction d'autocovariance de  $U_T$  est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{p(m-1)+q} \delta_i^2 & \text{si } h = 0, \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{(p(m-1)+q)-mh} \delta_{i+m} \delta_i & \text{si } h \leq q^*, \\ 0 & \text{si } h > q^*. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

En égalant (3.4.2) et (3.4.3), il est possible de trouver les  $\vartheta_i$ , pour  $i = 1, \dots, q^*$ . C'est derniers seront utiles, puisqu'ils interviennent dans le théorème qui suit établissant des conditions suffisantes pour qu'un processus *ARMA* échantillonné soit *ARMA* faible. Dans la suite, nous notons  $\phi_p = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$  et  $\theta_q = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$  les vecteurs des paramètres autorégressifs et moyennes mobiles du modèle *ARMA* de la série de base.

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $\{X_t\}$  un processus  $ARMA(p, q)$  fort et  $\{Y_T\}$  la série issue de l'échantillonnage systématique de  $\{X_t\}$  en utilisant un pas  $m$  et  $v = p(m-1) + q$ . Si*

$$1- E[\varepsilon_t^3] \neq 0$$

$$2- H(\Phi_p, \Theta_q, m) = \sum_{i=0}^{v-m} \delta_i^2 \delta_{i+1} + \psi_1 \sum_{i=0}^v \delta_i^3 + \sum_{j=2}^{q^*+1} \left( \psi_j \sum_{i=0}^{v-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 \right) \neq 0$$

où  $\{\varepsilon_t\}$  est le bruit blanc fort associé au processus  $\{X_t\}$ , les  $\delta_i$ ,  $i = 0, \dots, v$ , et les  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, q^* + 1$ , sont des coefficients qui dépendent de  $m$  et des paramètres caractérisant le processus  $\{X_t\}$ , alors  $\{Y_T\}$  est *ARMA*( $p, q^*$ ) faible où  $q^*$  est défini par (3.3.5).

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, en utilisant la représentation (3.4.1) pour  $\{U_T\}$  et comme  $\{U_t\}$  est inversible, alors il existe des paramètres  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, \infty$ , tels que :

$$\eta_T = \psi_0 U_T + \psi_1 U_{T-1} + \dots + \psi_i U_{T-i} + \dots \quad (3.4.4)$$

où  $\psi_0 = 1$  et les  $\psi_i$ , pour  $i \geq 1$ , peuvent être déterminés à partir des coefficients  $\vartheta_i$  de la représentation (3.4.1) de  $U_T$ . On a alors que :

$$\begin{aligned} E[\eta_T U_{T-1}^2] &= E[U_T U_{T-1}^2] + \psi_1 E[U_{T-1}^3] + \dots + \psi_j E[U_{T-1}^2 U_{T-j}] + \dots \\ &= E[U_T U_{T-1}^2] + \psi_1 E[U_{T-1}^3] + \dots + \psi_{q^*+1} E[U_{T-1}^2 U_{T-(q^*+1)}] \\ &\quad + \sum_{i>q^*+1}^{\infty} \psi_i E[U_{T-1}^2 U_{T-i}]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $U_T = \sum_{i=0}^{p(m-1)+q} \delta_i B^i \varepsilon_{mT}$ , il est facile d'en déduire que :

$$E[U_{T-1}^2 U_{T-j}] = \begin{cases} E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^{(p(m-1)+q)-m} \delta_i^2 \delta_{m+i} & \text{si } j = 0, \\ E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^{p(m-1)+q} \delta_i^3 & \text{si } j = 1, \\ E[\varepsilon_{mT}^3] \sum_{i=0}^{(p(m-1)+q)-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 & \text{si } 2 \leq j \leq q^* + 1, \\ 0 & \text{si } j \geq q^* + 2. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$E[\eta_T U_{T-1}^2] = E[\varepsilon_{mT}^3] \left[ \sum_{i=0}^{v-m} \delta_i^2 \delta_{m+i} + \psi_1 \sum_{i=0}^v \delta_i^3 + \sum_{j=2}^{q^*+1} \left( \psi_j \sum_{i=0}^{v-(j-1)m} \delta_i \delta_{i+(j-1)m}^2 \right) \right]$$

où  $v = p(m-1) + q$ .

Finalement, en appliquant le théorème 2.4.1, on obtient le résultat énoncé.  $\square$

### 3.5. LE CAS ARMA(1,1) FORT

Dans cette partie, nous allons étudier en détail l'échantillonnage systématique d'un ARMA(1,1) fort et trouver les conditions sous lesquelles la série échantillonnée est ARMA faible. Nous considérerons un pas  $m$  quelconque, comme nous avons fait pour l'agrégation, ce qui nous permettra de voir l'influence de  $m$  sur les paramètres du modèle échantillonné ainsi que sur la fonction  $H(\Phi_p, \Theta_q, m)$ .

De plus, les résultats présentés dans cette section, comme dans le cas de l'agrégation, serviront dans l'étude de simulations.

Comme la série non échantillonnée est  $ARMA(1, 1)$  fort, elle admet la représentation suivante :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}. \quad (3.5.1)$$

Par le théorème 3.3.1, la série échantillonnée  $\{Y_T\}$  sera aussi  $ARMA(1, 1)$ ,  $\forall m \geq 2$ . Comme  $Y_T = X_{mT}$ , en posant  $t = mT$  dans (3.5.1), nous obtenons :

$$Y_T = X_{mT} = \phi X_{mT-1} + \varepsilon_{mT} - \theta \varepsilon_{mT-1} \quad (3.5.2)$$

Maintenant, développons  $X_{mT}$  en substituant dans (3.5.2)  $X_{mT-1}$  par  $\phi X_{mT-2} + \varepsilon_{mT-1} - \theta \varepsilon_{mT-2}$  et ainsi de suite jusqu'à ce que  $X_{mT-m}$  apparaisse, nous avons alors

$$Y_T = X_{mT} = \phi X_{mT-1} + \varepsilon_{mT} - \theta \varepsilon_{mT-1} \quad (3.5.3)$$

$$= \phi(\phi X_{mT-2} + \varepsilon_{mT-1} - \theta \varepsilon_{mT-2}) + \varepsilon_{mT} - \theta \varepsilon_{mT-1}$$

⋮

$$= \phi^m X_{mT-m} - \phi^{m-1} \theta \varepsilon_{mT-m} + \varepsilon_{mT} + (\phi - \theta) \sum_{i=1}^{m-1} \phi^{i-1} B^i \varepsilon_{mT} \quad (3.5.4)$$

Puisque  $Y_{T-1} = X_{mT-m}$ , de (3.5.4) on obtient que :

$$Y_T - \phi^m Y_{T-1} = -\phi^{m-1} \theta \varepsilon_{mT-m} + \varepsilon_{mT} + (\phi - \theta) \sum_{i=1}^{m-1} \phi^{i-1} B^i \varepsilon_{mT}. \quad (3.5.5)$$

Le paramètre autorégressif de la série échantillonnée au pas  $m$  est donc  $\phi^m$ . Il reste maintenant à trouver la valeur du paramètre moyenne mobile. À cette fin, notons  $U_t$  le membre de droite de (3.5.5) :

$$U_T = -\phi^{m-1} \theta \varepsilon_{mT-m} + (\phi - \theta) \sum_{i=1}^{m-1} \phi^{i-1} B^i \varepsilon_{mT} + \varepsilon_{mT} = \sum_{i=0}^m \delta_i B^i \varepsilon_{mT} \quad (3.5.6)$$

où les  $\delta_i$  sont définis par

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ \phi^{i-1}(\phi - \theta) & \text{si } 1 \leq i < m - 1, \\ -\phi^{m-1}\theta & \text{si } i = m. \end{cases}$$

De la représentation (3.5.6), il s'ensuit que la fonction d'autocovariance de  $\{U_t\}$  est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^m \delta_i^2 & \text{si } h = 0, \\ \sigma_\varepsilon^2 \delta_m & \text{si } |h| = 1, \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2. \end{cases} \quad (3.5.7)$$

De plus, par la proposition 3.3.1, le processus  $\{U_t\}$  admet une représentation  $MA(1)$  :

$$U_T = \eta_T - \vartheta \eta_{T-1}. \quad (3.5.8)$$

En fonction de cette dernière, sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma_U(h) = \begin{cases} (1 + \vartheta^2)\sigma_\eta^2 & \text{si } h = 0, \\ -\vartheta\sigma_\eta^2 & \text{si } |h| = 1, \\ 0 & \text{si } |h| \geq 2. \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Finalement, en égalant (3.5.7) et (3.5.9) on est en mesure de déterminer  $\vartheta$ , qui est la solution, telle  $|\vartheta| < 1$ , de l'équation du second degré qui suit :

$$\vartheta^2 \delta_m + \vartheta \sum_{i=0}^m \delta_i^2 + \delta_m = 0.$$

Et on trouve que la solution qui satisfait la condition d'inversibilité est :

$$\vartheta = \frac{-\sum_{i=0}^m \delta_i^2 + \sqrt{(\sum_{i=0}^m \delta_i^2)^2 - 4\delta_m^2}}{2\delta_m}. \quad (3.5.10)$$

Finalement, à partir de (3.5.8) on a que :

$$\begin{aligned}
 \eta_t &= U_t + \vartheta \eta_{t-1} \\
 &= U_t + \vartheta U_{t-1} + \vartheta^2 \eta_{t-2} \\
 &\vdots \\
 &= U_t + \vartheta U_{t-1} + \vartheta^2 U_{t-2} + \sum_{i=3}^{\infty} \vartheta^i U_{t-i}
 \end{aligned}$$

Et donc les  $\psi_j$  nécessaires pour calculer  $H(\Phi_{\mathbf{p}}, \Theta_{\mathbf{q}}, m) = H(\phi, \theta, m)$  sont donnés par  $\psi_j = \vartheta^j$ .

La figure 3.1 fournit les graphiques de  $\vartheta$  en fonction de  $\phi$  et  $\theta$  pour différentes valeurs de  $m$  ( $m = 2, 4, 6, 12$ ). On remarque que peu importe la valeur de  $m$ ,  $\theta$  prend des valeurs supérieures ou égale à 0. On remarque de plus que lorsque  $m$  augmente, il se forme un plateau à 0. Donc plus le pas d'échantillonnage est grand, plus le modèle échantillonné se rapproche d'un  $AR(1)$ .

Dans la figure 3.2 nous retrouvons les graphiques de  $H(\phi, \theta, m)$  en fonction de  $\phi$ ,  $\theta$ , pour  $m = 2, 4, 6, 12$ . On remarque que peu importe la valeur de  $m$ , il y a un plateau à 0, et ces plateaux sont de plus en plus étendus lorsque le pas d'échantillonnage augmente. Ce qui nous indique, qu'intuitivement comme dans le cas de l'agrégation, la dépendance des erreurs devrait être plus difficile à détecter pour certaines valeurs de  $(\phi, \theta, m)$ .

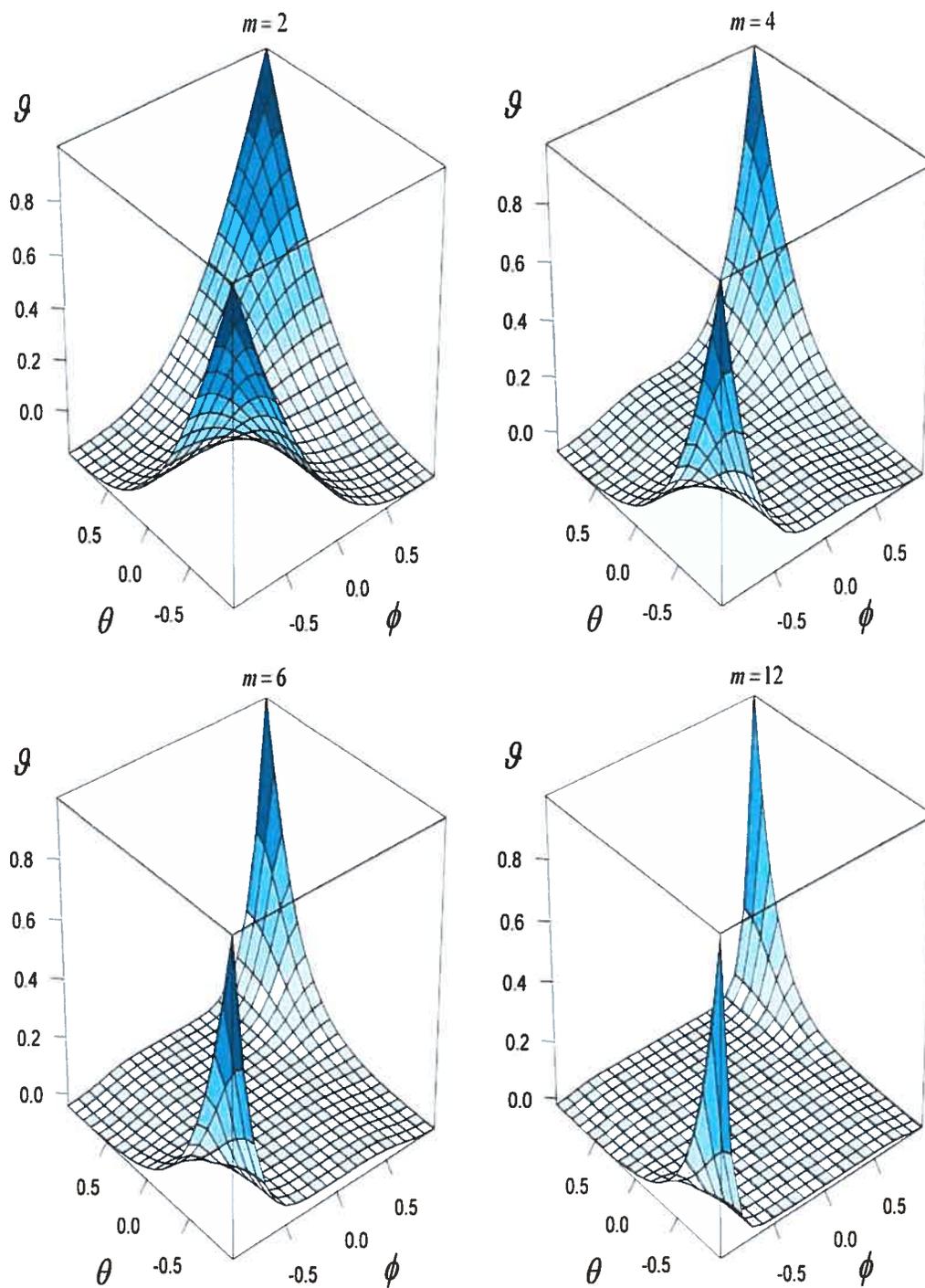


FIGURE. 3.1. Graphique du coefficient moyenne mobile  $\vartheta$  de la série agrégée en fonction de  $\phi$  et  $\theta$  pour différentes valeurs de  $m$ .

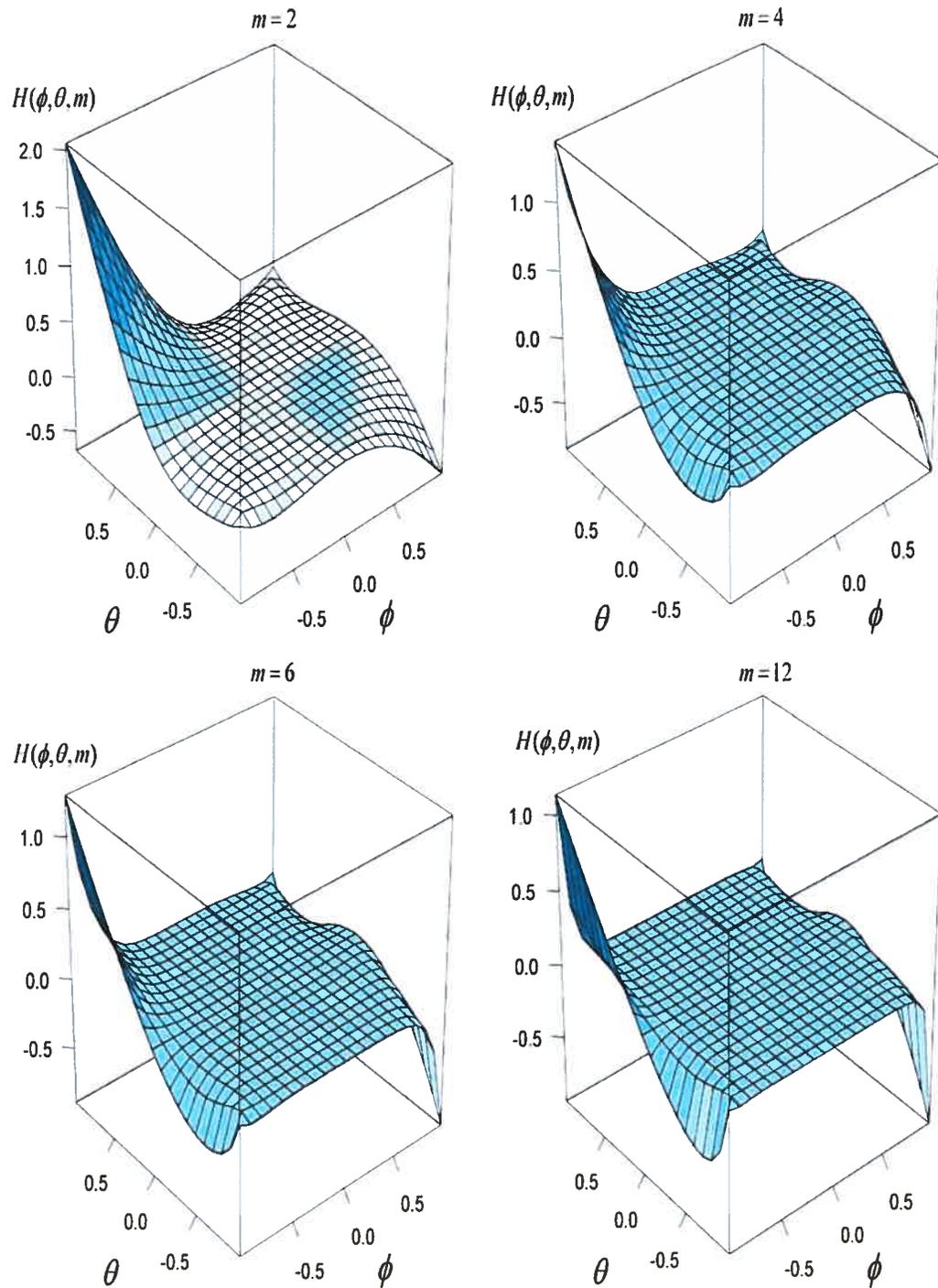


FIGURE. 3.2. Graphique de la fonction  $H(\phi, \theta, m)$  du théorème 3.4.1 en fonction de  $\phi$  et  $\theta$  pour différentes valeurs de  $m$ .

## Chapitre 4

---

### ÉTUDE PAR SIMULATION POUR L'AGRÉGATION D'UN $AR(1)$ FORT

Dans les deux chapitres précédents, nous avons développé les propriétés théoriques concernant l'estimation et la nature du bruit blanc intervenant dans les modèles issus de l'agrégation et de l'échantillonnage systématique de processus  $ARMA$  forts. Plus particulièrement, nous avons montré que sous certaines conditions, le bruit blanc intervenant dans un processus issu de l'une ou l'autre de ces transformations est faible. Par simulation, nous tenterons de vérifier s'il est possible en pratique de détecter la dépendance des erreurs pour de tels modèles et nous examinerons la précision des estimateurs. Dans ce chapitre, nous traitons seulement des résultats ayant attrait à l'agrégation. Le chapitre 5 sera consacré à l'échantillonnage systématique.

Pour effectuer l'estimation et la validation, nous avons utilisé le programme Fortran *Nreal.exe* écrit par Francq (2001). Nous avons de plus utilisé le logiciel S-Plus pour générer les séries et en faire l'agrégation ou l'échantillonnage systématique.

#### 4.1. PLAN DE SIMULATION

Nous avons considéré l'agrégation de processus  $AR(1)$  forts et comme nous voulons avoir des séries agrégées dont le bruit blanc est faible, nous avons considéré les deux modèles suivants :

- AR(1) fort :  $X_t = \varepsilon_t - \phi X_{t-1}$  où  $\{\varepsilon_t\}$  est i.i.d.  $\chi_1^2$  centré et réduit,
  - AR(1) fort :  $X_t = \varepsilon_t - \phi X_{t-1}$  où  $\{\varepsilon_t\}$  est i.i.d.  $LN(0, 1)$  centré et réduit.
- où  $LN(\mu, \sigma^2)$  dénote une loi lognormale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  respectivement.

Pour chaque modèle, nous avons généré 1000 séries agrégées indépendantes de tailles  $n = 500$  et  $1000$ , respectivement, en considérant deux pas d'agrégation  $m = 4$  et  $12$  et ceci pour six valeurs du paramètre  $\phi$  :  $0,9$ ,  $0,6$ ,  $0,1$ ,  $-0,1$ ,  $-0,6$  et  $-0,9$ . Puisque  $n$  représente la taille de la série agrégée, pour un pas d'agrégation  $m$ , nous avons dû générer des séries de longueur  $N = nm$ , du modèles AR(1) fort de départ.

Pour générer une série du modèle AR(1) fort, nous avons utilisé la fonction *arima.sim* de S-Plus. Cette fonction permet de générer des séries ARIMA avec une distribution spécifiée du bruit blanc fort. Nous avons par la suite agrégé les séries à l'aide de la fonction S-Plus *Agregation* qui est reproduite en annexe.

Nous savons que l'agrégation d'un modèle AR(1) fort est un ARMA(1,1) et nous avons estimé le vrai modèle ARMA(1,1) pour chaque série simulée à l'aide d'une version modifiée du programme *Nreal.exe* de Francq. La méthode d'estimation effectuée par ce programme est celle des moindres carrés. Selon la distribution choisie du bruit blanc fort  $\{\varepsilon_t\}$ ,  $E[\varepsilon_t^3] \neq 0$  et par le théorème 2.4.2, le processus agrégé  $\{Y_T\}$  est ARMA(1,1) faible si la fonction  $G(\phi, m) \neq 0$ . Afin de discriminer entre ARMA(1,1) fort et ARMA(1,1) faible, nous avons validé le modèle estimé à l'aide des tests de Ljung-Box standard et modifié. Les exemples présentés dans Francq, Roy et Zakoïan (2003, 2005) indiquent que le niveau exact du test de Ljung-Box standard est supérieur au niveau nominal 5% pour des séries AR(1) avec erreurs ARCH ou à changements de régimes markoviens. Avec des séries agrégées qui sont ARMA faibles, il y a donc lieu de croire que la proportion de rejet avec le test de Ljung-Box standard sera supérieur à celle du test de Ljung-Box modifié. D'après Francq, Roy et Zakoïan (2005), nous savons que

le niveau du test de Ljung-Box modifié est relativement bien contrôlé pour l'hypothèse d'un modèle *ARMA* faible et donc, les proportions devraient être assez près du niveau nominal. Pour chacun des deux tests, les proportions de rejet ont été calculées pour les valeurs du délai maximal  $H = 3, 6, 12, 18, 24, 30$  et  $36$ .

Nous allons maintenant exposer nos résultats de simulations dans les sous-sections 4.2 à 4.5. Nous présenterons seulement les résultats pour un bruit blanc fort  $\chi_1^2$  centré et réduit. Les résultats obtenus avec un bruit blanc fort  $LN(0, 1)$  vont dans le même sens que ceux obtenus avec le bruit blanc  $\chi_1^2$ . Dans les prochaines sections, nous comparons les proportions de rejet entre les versions standard et modifiée du test de Ljung-Box, nous examinons l'asymétrie des résidus ainsi que leur distribution asymptotique lorsque le pas d'agrégation  $m$  tend vers l'infini. Nous terminons finalement en étudiant la variabilité des estimateurs autorégressif et moyenne mobile.

## 4.2. VALIDATION DU VRAI MODÈLE AVEC LES TESTS DE LJUNG-BOX STANDARD ET MODIFIÉ

### 4.2.1. Les résidus non transformés

Dans les tableaux 4.1 à 4.3 de la section 4.5, nous retrouvons dans la première colonne la valeur du paramètre  $\phi$  du modèle non-agrégé  $AR(1)$  et dans la deuxième, la valeur  $H$  utilisée pour la validation et dans les autres, le pourcentage de rejet pour les différentes valeurs de  $n$  et  $m$  avec les deux versions du test de Ljung-Box.

Comme le test modifié est basé sur l'hypothèse de bruit blanc faible et que nos séries agrégées sont *ARMA* faibles sous certaines conditions, on s'attend à ce que les proportions de rejet du test modifié soient près du niveau nominal. Par contre, on s'attend à ce que les proportions de rejet du test standard soient supérieures au niveau nominal. Nous pouvons tout d'abord faire la remarque suivante concernant les résultats obtenus. Les taux de rejet pour les deux tests

utilisés sont la plupart du temps à l'intérieur des limites de signification à 5%, du niveau nominal. Ces intervalles sont respectivement  $[0, 38; 1.62]$ ,  $[3. 65; 6. 35]$  et  $[8, 14; 11, 86]$  pour les niveaux de 1%, 5% et 10%. Ils ont été calculé à l'aide de la formule suivante :  $p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ , où  $Z_{\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  d'une  $N(0, 1)$  et  $p$  est le niveau attendu. Dans les tableaux 4.1 à 4.3, les taux de rejet à l'extérieur des limites de signification à 5% sont écrites en caractères gras. Au niveau nominal 5%, le tableau 4.1 nous indique que le niveau du test standard est étonnamment bien contrôlé. Les seuls pourcentages de rejet à l'extérieur des limites de signification sont ceux pour  $H = 3$  lorsque  $\phi = 0, 1; -0, 1; -0, 6; -0, 9$  et pour  $H = 6$  avec  $\phi = -0, 9$ . Par contre, le niveau du test modifié est bien contrôlé pour les petites valeurs de  $H$  ( $H = 3, 6$ ) mais il a tendance à sous rejeter pour les grandes valeurs de  $H$ . Lorsque  $\phi = -0, 9$ , le biais du test modifié est particulièrement marqué et se manifeste à partir de  $H = 12$ . Des remarques similaires peuvent être faites pour les niveaux 1% et 10%. Il semble donc que les tests d'adéquation de Ljung-Box sont peu utiles pour détecter la dépendance des erreurs suite à l'agrégation. Est-ce dû à la faible dépendance des erreurs? On ne peut répondre à cette question pour le moment.

La différence entre les proportions de rejet des deux tests standard et modifié est-elle statistiquement significative? À cette fin, nous avons appliqué le test de McNemar servant à tester l'égalité de deux proportions obtenues de deux échantillons dépendants. Au niveau 5%, l'hypothèse nulle d'égalité des niveaux exacts des deux tests à été rejeté dans presque tous les cas. Même si les différences sont souvent petites, elles s'avèrent significatives avec 1000 réalisations.

Analysons maintenant l'effet du pas d'agrégation  $m$  et de la valeur du paramètre  $\phi$ . Tout au plus, on peut dire que les niveaux sont légèrement moins bien contrôlés pour  $m = 4$ , que pour  $m = 12$ . Une condition suffisante pour que la série agrégée soit faible est que la fonction  $G(m, \phi)$  soit non nulle, mais d'après le graphique 2.2, la valeur de la fonction  $G(m, \phi)$  est plus éloignée de 0 pour des valeurs élevées de  $m$ , spécialement pour les valeurs de  $\phi$  près de -1 ou entre 0,5 et

1. Par contre, si nous retournons au tableau 4.1, les grandes proportions de rejet avec le test standard sont obtenues lorsque  $\phi = 0, 1$  ou lorsque  $\phi$  prend une valeur négative. Il semble donc que la valeur de la fonction  $G(m, \phi)$  n'a pas d'impact important pour la détection de la dépendance avec les tests de Ljung-Box.

#### 4.2.2. Les résidus transformés

Il est difficile de conclure à la dépendance des erreurs à partir des résidus originaux. Si l'on suppose que les erreurs sont indépendantes, alors une transformation des erreurs le sera aussi. Par exemple, si les résidus sont indépendants, les résidus au carrés le seront aussi. Pour cette raison, nous avons examiné de plus près ce qu'il advenait des proportions de rejet en utilisant le carré et la valeur absolue des résidus.

Pour ces deux transformations, nous avons calculé les pourcentages de rejet pour deux cas particuliers :

Cas 1 :  $m = 12$ ,  $n = 1000$  et  $\phi = 0,9$ ,

Cas 2 :  $m = 4$ ,  $n = 1000$  et  $\phi = -0,9$ .

Dans le tableau 4.4, on retrouve les pourcentages de rejet pour chacun des cas. Dans le cas 1, le niveau des tests de Ljung-Box standard et modifié sont très bien contrôlés selon les tableaux 4.1 à 4.3. Par contre dans le cas 2, le niveau empirique du test standard est le double du niveau nominal pour  $H = 3$ .

Avec les résidus au carré, les proportions de rejet des deux tests sont en général très différentes. Elles sont aussi loin des niveaux nominaux excepté dans le cas 2 avec le test standard. Avec les résidus en valeur absolue, les niveaux empiriques des deux tests sont plus rapprochés entre eux et dans le cas 1, ils sont aussi assez près des niveaux nominaux. Dans le cas 2, les niveaux empiriques sont aussi éloignés des niveaux nominaux, spécialement pour les petites valeurs de  $H$

$(H = 3, 6, 12)$ .

Il ne semble pas pertinent de comparer les niveaux empiriques aux niveaux nominaux car il n'est pas certain que la loi asymptotique de la statistique de Ljung-Box calculée avec les résidus transformés soit la même que celle calculée avec les résidus non transformés.

Finalement, il semble que la dépendance des erreurs est difficile à détecter en pratique à l'aide des résidus ordinaires, par contre les résidus transformés la font ressortir davantage.

#### 4.2.3. Asymétrie des résidus

Pour étudier l'asymétrie des résidus, nous avons considéré les résidus positifs  $\hat{e}_t^+$  et les résidus négatifs  $\hat{e}_t^-$  définis comme suit :

$$\hat{e}_t^+ = \begin{cases} \hat{e}_t & \text{si } \hat{e}_t > 0, \\ 0 & \text{si } \hat{e}_t \leq 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

et

$$\hat{e}_t^- = \begin{cases} \hat{e}_t & \text{si } \hat{e}_t < 0, \\ 0 & \text{si } \hat{e}_t \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Nous avons comparé les proportions de rejet des tests de Ljung-Box basés sur les résidus positifs et sur les résidus négatifs. Si les résidus sont symétriques, les proportions de rejet devraient être à peu près les mêmes pour un même test. Dans le tableau 4.5, on retrouve les proportions de rejet avec les résidus positifs et avec les résidus négatifs pour chacun des deux cas de la section précédente. Nous avons écrit en gras les valeurs où il y a une différence significative entre les proportions de rejet. On remarque que dans le cas 1, où  $m = 12$  et  $\phi = 0,9$ , il y a quelques différences pour certains délais  $H$  et ces différences sont la plupart du temps aux mêmes délais  $H$  pour les tests standard et modifié. Par contre, pour le cas 2, où  $m = 4$  et  $\phi = -0,9$ , il y a des différences significatives entre les résidus positifs et

négatifs pour tous les délais  $H$  et ceci, peut importe le test utilisé. La proportion de rejet avec les résidus négatifs est très supérieure à celle des résidus positifs, ce qui dénote une forte asymétrie des résidus. Donc, la distribution exact des résidus est asymétrique et cette asymétrie est beaucoup plus prononcée lorsque  $m$  est petit. Cette constatation n'est pas surprenante étant donné que le bruit de la série de départ est  $\chi_1^2$ .

### 4.3. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES RÉSIDUS

Lors de l'agrégation d'un processus  $\{X_t\}$  qui est  $AR(1)$ , nous faisons la somme de  $m$  observations pour créer la nouvelle série agrégée  $\{Y_T\}$  qui est  $ARMA(1, 1)$ . La composante moyenne mobile du processus  $\{Y_T\}$  est donnée par le processus  $\{U_T\}$  définie par l'équation (2.5.7). La variable  $U_T$  est alors une combinaison linéaire de  $2m - 2$  valeurs du bruit  $\{\varepsilon_t\}$  de la série de départ. En invoquant un théorème central limite,  $\{U_T\}$  est asymptotiquement gaussien lorsque  $m$  tend vers l'infini et donc, le processus bruit blanc associé  $\{\eta_t\}$  est aussi asymptotiquement gaussien.

Tiao (1977) et plus récemment Teles et Wei (2002) se sont intéressés à cette question. Afin d'illustrer la vitesse de convergence vers la distribution normale, nous avons généré une longue série  $AR(1)$  que nous avons agrégé à différents pas  $m$ . Dans la figure 4.1, nous présentons les graphiques quantiles quantiles normaux des résidus de la série agrégée pour différentes valeurs de  $m$ . On remarque que la convergence est relativement lente. À  $m = 48$ , la normalité est encore rejetée. Nous notons aussi que la non normalité est plus prononcée à  $m = 4$  qu'à  $m = 12$ .

### 4.4. VARIABILITÉ DES ESTIMATEURS DES PARAMÈTRES AR ET MA.

Dans le chapitre 2, nous avons vu que les paramètres du modèle agrégé dépendent de ceux du modèle initial ainsi que du pas  $m$  d'agrégation. Pour l'agrégation d'un processus  $AR(1)$  fort, les paramètres autorégressif et moyenne mobile du modèle  $ARMA(1, 1)$  qui en résulte sont respectivement donnée par  $\phi^m$  et  $\theta$ ,

où  $\theta$  est défini par (2.5.13). Nous sommes donc intéressés à voir si en pratique les estimateurs du modèle agrégé sont près de leurs valeurs théoriques et si les écarts types de ces estimateurs sont raisonnablement bien approximés par les écarts types asymptotiques obtenus sous l'hypothèse de bruit blanc fort. Dans les tableaux 4.6 et 4.7, on retrouve la valeur théorique attendue, la moyenne des 1000 estimateurs ainsi que l'écart type empirique des estimateurs autorégressif et moyenne mobile et ceci pour chaque niveau du plan de simulation.

On remarque qu'en moyenne les paramètres sont très près des valeurs théoriques attendues lorsque  $\phi$  s'approche de 1 ou -1 et ce autant pour le paramètre moyenne mobile qu'autorégressif et peu importe les valeurs du pas d'agrégation  $m$  et de la longueur de la série  $n$ . Toutefois, lorsque le paramètre à estimer est très petit, par exemple pour  $\phi^m$  lorsque  $\phi$  est petit, la moyenne des estimateurs est relativement loin des valeurs attendues. Ceci n'est pas surprenant puisque l'estimation d'un paramètre est en général moins précise lorsque le paramètre à estimer est petit. Une meilleure précision requiert une plus grande taille échantillonnale. On note sans trop de surprise que la moyenne des estimateurs est plus près des valeurs théoriques lorsque la longueur de la série est plus grande.

Au niveau de l'écart type empirique de nos estimateurs, on est en lieu de s'attendre à ce qu'il soit symétrique par rapport à  $\phi = 0$ . En fait, on s'attendait à ce que l'écart type empirique, par exemple pour  $\phi = 0,9$  et  $\phi = -0,9$ , soit du même ordre de grandeur surtout dans le cas de l'estimation de  $\hat{\phi}^m$  puisqu'ils correspondent aux mêmes valeurs théoriques pour des valeurs paires de  $m$ . Cependant, l'écart type empirique est plus grand pour des valeurs négatives de  $\phi$  et ce autant pour l'écart type empirique de  $\hat{\phi}^m$  que celui de  $\hat{\theta}$ . Cette particularité reliée à la dispersion des estimateurs de  $\phi^m$  et  $\theta$  se traduit très bien dans les diagrammes en boîte des figures 4.2 à 4.5. On remarque d'ailleurs de ces graphiques que plus  $\phi$  s'approche de -1 plus il y a de valeurs extrêmes. Il est à noter que le caractère "+" qui apparaît dans chacune des boîtes représente la moyenne empirique de

l'estimateur dont il est question dans le diagramme.

Maintenant, sous l'hypothèse de bruit blanc fort, la variance asymptotique des estimateurs par maximum de vraisemblance et des moindres carrés d'un modèle  $ARMA(1, 1)$  est donné par :

$$V(\phi^m) = \frac{1}{n} \frac{(1 - \phi^m \theta)^2 (1 - \phi^{2m})}{(\phi^m - \theta)^2},$$

et

$$V(\theta) = \frac{1}{n} \frac{(1 - \phi^m \theta)^2 (1 - \theta^2)}{(\phi^m - \theta)^2}.$$

Dans les graphiques 4.6 à 4.9, on retrouve les différentes courbes de l'écart type asymptotique en fonction de  $\phi$  et ce pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$ . Nous avons de plus ajouté à ces graphiques la courbe des écarts types empiriques obtenus par simulation. Compte-tenu qu'il est relativement difficile d'évaluer l'ordre de grandeur de la différence entre l'écart type asymptotique et l'écart type empirique, les valeurs numériques de ces écarts types sont fournis dans les tableaux 4.6 et 4.7. D'après ces courbes et ces tableaux, on remarque effectivement que les écarts types empiriques ne sont pas symétriques par rapport à  $\phi = 0$  et que pour les grandes valeurs de  $\phi$  ( $|\phi| = 0.9$  ou  $0.6$ ) les écarts types empiriques des estimateurs du modèle agrégé sont près des écarts types asymptotiques. Par contre, pour les petites valeurs de  $\phi$  ( $|\phi| = 0.1$ ), les écarts types empiriques sont beaucoup plus petits que les écarts types asymptotiques. Ces résultats font ressortir l'importance de tenir compte de la dépendance des erreurs dans l'estimation des écarts types des estimateurs  $AR$  et  $MA$  avec des séries agrégées.

## 4.5. TABLEAUX ET FIGURES

Dans cette section, on retrouve tous les tableaux et figures dont il est mentionné dans les sections précédentes.

$\phi$	$H$	$n = 500$				$n = 1000$			
		$m = 4$		$m = 12$		$m = 4$		$m = 12$	
		Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
0,9	3	4,7	4,7	5,9	5,1	6,2	5,6	5,9	5,8
	6	5,6	4,5	5,0	4,8	5,4	4,7	4,4	4,3
	12	5,0	4,4	5,0	4,5	4,7	5,5	4,8	4,4
	18	5,2	4,4	5,7	5,2	5,5	4,0	5,8	5,5
	24	5,2	4,3	4,3	<b>2,9</b>	4,7	3,8	5,3	4,6
	30	4,8	<b>3,6</b>	4,6	<b>3,6</b>	5,7	4,5	5,6	4,6
	36	6,1	4,0	4,9	<b>3,0</b>	4,7	<b>3,5</b>	6,2	5,0
0,6	3	4,4	4,9	6,3	5,4	<b>3,6</b>	3,9	4,0	4,0
	6	4,3	4,6	4,4	4,5	4,4	4,4	4,3	4,0
	12	3,9	3,8	4,5	4,4	4,2	4,1	5,6	4,9
	18	<b>3,6</b>	<b>3,0</b>	4,8	4,1	5,1	4,1	4,3	4,2
	24	4,4	<b>3,2</b>	5,1	4,0	5,2	4,3	5,0	4,3
	30	5,3	<b>3,3</b>	4,9	<b>3,6</b>	5,3	4,0	4,4	3,8
	36	4,9	<b>3,2</b>	5,2	<b>3,5</b>	4,9	3,7	4,5	3,8
0,1	3	<b>7,0</b>	6,2	<b>6,7</b>	4,4	<b>6,9</b>	4,7	6,0	5,2
	6	5,6	4,5	5,8	5,5	5,1	4,7	5,6	6,2
	12	5,1	3,7	5,7	5,0	4,4	3,7	4,8	4,8
	18	5,5	4,0	5,9	5,1	4,8	3,9	5,3	4,7
	24	5,8	3,7	5,3	4,0	4,0	<b>3,2</b>	5,3	4,6
	30	5,6	<b>3,5</b>	6,0	4,1	4,8	3,7	6,0	4,9
	36	4,8	<b>2,7</b>	5,1	3,8	4,5	<b>3,3</b>	5,6	4,8
-0,1	3	<b>6,7</b>	3,8	<b>7,2</b>	5,7	<b>7,0</b>	4,9	<b>6,4</b>	4,4
	6	5,2	4,7	4,9	4,3	5,6	5,6	5,9	5,6
	12	4,4	3,9	4,3	3,8	4,8	3,8	4,9	4,6
	18	5,3	3,8	4,9	3,8	5,2	4,2	3,8	<b>3,2</b>
	24	5,0	<b>3,0</b>	4,2	<b>3,1</b>	5,4	3,9	4,8	4,4
	30	4,4	<b>2,9</b>	4,0	<b>2,9</b>	4,6	<b>3,5</b>	5,3	4,3
	36	5,1	<b>3,6</b>	4,3	<b>2,5</b>	5,3	4,0	5,4	<b>3,6</b>
-0,6	3	<b>6,9</b>	4,3	5,6	4,1	5,0	<b>3,5</b>	5,1	<b>3,1</b>
	6	5,0	4,6	4,8	5,0	4,5	4,0	4,0	3,9
	12	5,0	<b>3,5</b>	4,5	4,5	4,7	4,3	4,3	4,4
	18	4,8	<b>3,3</b>	4,2	3,7	3,8	<b>3,3</b>	4,5	3,8
	24	4,8	<b>3,1</b>	4,2	<b>3,4</b>	4,4	<b>3,6</b>	4,0	3,8
	30	4,8	<b>3,1</b>	<b>3,6</b>	<b>2,5</b>	4,6	<b>3,2</b>	4,1	<b>3,2</b>
	36	4,4	<b>2,7</b>	<b>3,7</b>	<b>2,4</b>	5,4	<b>3,9</b>	4,5	3,8
-0,9	3	<b>8,2</b>	4,4	5,3	<b>3,1</b>	<b>10,2</b>	5,7	<b>6,7</b>	5,0
	6	<b>6,4</b>	4,6	<b>3,6</b>	<b>3,4</b>	<b>7,3</b>	5,2	5,6	5,8
	12	4,7	<b>2,7</b>	<b>3,2</b>	<b>2,8</b>	5,0	4,0	4,7	4,2
	18	5,7	<b>2,7</b>	<b>3,3</b>	<b>2,9</b>	4,8	4,2	4,3	<b>3,2</b>
	24	4,6	<b>2,9</b>	<b>3,1</b>	<b>2,7</b>	5,0	<b>3,6</b>	4,4	3,7
	30	4,1	<b>2,5</b>	3,7	<b>2,7</b>	4,9	4,1	4,2	3,9
	36	4,1	<b>1,6</b>	<b>3,5</b>	<b>2,4</b>	<b>6,4</b>	4,8	5,1	4,2

TABLEAU. 4.1. Pourcentages de rejet au niveau 5% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries  $AR(1)$  fortes agrégées pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$ .

$\phi$	$H$	$n = 500$				$n = 1000$			
		$m = 4$		$m = 12$		$m = 4$		$m = 12$	
		Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
0,9	3	0,6	0,8	1,4	0,8	1,4	1,1	0,9	0,9
	6	0,9	1,1	1,5	1,0	1,2	1,2	1,2	1,3
	12	0,7	0,8	1,1	<b>1,7</b>	0,9	0,6	1,3	1,2
	18	0,8	0,6	1,0	0,8	0,9	0,4	1,2	1,1
	24	<b>1,8</b>	1,1	0,6	0,7	1,1	0,6	1,4	1,2
	30	<b>2,0</b>	0,9	1,1	0,5	1,3	0,7	1,6	1,0
	36	<b>1,8</b>	1,0	1,0	0,5	1,2	0,8	1,2	0,7
0,6	3	1,3	1,2	<b>2,1</b>	0,4	0,6	0,7	<b>0,2</b>	<b>0,2</b>
	6	0,8	0,5	0,7	0,8	0,9	0,5	0,6	0,5
	12	1,2	0,9	1,0	0,8	1,2	0,6	1,1	0,9
	18	0,9	0,7	1,2	0,6	0,9	0,6	1,2	0,7
	24	1,1	0,7	0,8	<b>0,2</b>	1,0	0,7	0,9	0,5
	30	1,2	<b>0,3</b>	1,2	<b>0,3</b>	1,5	1,0	0,9	0,5
	36	1,4	0,4	1,3	<b>0,3</b>	1,1	0,7	0,9	0,7
0,1	3	1,1	1,0	<b>1,8</b>	1,0	1,1	1,0	1,6	1,1
	6	1,5	1,2	1,5	1,0	1,3	1,0	1,2	1,2
	12	1,0	1,0	1,3	1,0	0,9	0,9	1,2	0,8
	18	1,4	0,4	1,3	0,9	1,0	0,6	1,2	1,0
	24	1,1	<b>0,2</b>	1,4	0,6	1,0	0,9	1,4	1,0
	30	1,4	0,5	1,5	0,6	0,9	0,5	1,3	1,1
	36	1,4	0,6	1,5	0,5	1,1	0,5	1,6	0,9
-0,1	3	1,4	0,6	1,4	0,9	1,6	1,1	1,1	0,9
	6	0,8	0,8	1,1	0,6	1,3	0,8	1,1	0,8
	12	0,7	0,4	0,9	0,8	0,9	1,0	1,0	0,8
	18	0,6	0,6	0,9	0,7	1,6	0,5	0,9	0,5
	24	1,0	0,6	1,3	1,0	0,5	0,4	1,1	0,7
	30	0,8	<b>0,3</b>	1,2	0,7	0,9	0,4	1,3	0,7
	36	1,1	<b>0,2</b>	0,9	<b>0,2</b>	0,7	0,5	1,0	0,5
-0,6	3	1,4	0,6	0,8	0,6	0,7	0,5	0,4	<b>0,3</b>
	6	0,6	0,7	0,8	0,6	0,6	0,6	0,8	0,7
	12	1,0	0,6	0,5	<b>0,3</b>	1,0	0,6	0,8	<b>0,3</b>
	18	0,8	0,4	0,6	<b>0,2</b>	1,0	0,7	0,8	0,7
	24	1,0	0,5	0,7	0,4	1,0	0,7	0,5	0,5
	30	1,2	0,7	1,2	<b>0,3</b>	1,4	0,9	1,0	0,8
	36	0,6	<b>0,2</b>	1,1	0,4	1,5	0,9	1,4	0,7
-0,9	3	1,5	0,5	0,6	0,7	<b>2,2</b>	1,1	0,7	<b>0,3</b>
	6	1,6	0,5	0,6	0,8	1,4	0,9	0,7	0,5
	12	0,7	<b>0,2</b>	0,4	0,5	1,5	0,6	1,0	0,8
	18	0,9	<b>0,3</b>	0,2	<b>0,0</b>	1,4	0,4	0,6	<b>0,3</b>
	24	1,4	0,5	0,4	<b>0,1</b>	<b>1,7</b>	0,8	1,2	0,8
	30	1,0	0,4	0,3	<b>0,2</b>	1,6	0,8	1,3	0,7
	36	1,0	0,1	0,5	<b>0,2</b>	1,3	0,5	1,0	0,8

TABEAU. 4.2. Pourcentages de rejet au niveau 1% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries  $AR(1)$  fortes agrégées pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$ .

$\phi$	$H$	$n = 500$				$n = 1000$			
		$m = 4$		$m = 12$		$m = 4$		$m = 12$	
		Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
0,9	3	9,5	9,7	10,5	9,8	11,4	10,1	11,8	12,1
	6	9,5	10,1	10,4	10,5	10,6	10,3	9,3	9,5
	12	9,9	9,9	10,4	10,0	10,4	10,0	9,4	9,0
	18	9,5	8,9	10,0	9,8	9,1	8,7	11,0	9,8
	24	9,7	8,9	10,9	9,1	9,1	8,3	11,0	10,2
	30	10,2	7,6	8,4	7,1	9,3	7,9	12,1	10,5
	36	11,0	9,0	9,7	7,6	8,5	7,8	11,3	10,2
0,6	3	8,6	9,5	11,8	9,6	8,2	8,8	9,4	8,3
	6	8,9	9,4	9,7	9,8	8,7	8,8	9,4	9,0
	12	8,2	7,8	9,6	9,9	8,9	8,9	9,7	10,0
	18	8,4	7,7	10,1	9,3	9,6	8,4	9,9	9,8
	24	8,9	8,1	10,0	9,0	9,9	8,1	9,6	9,1
	30	9,7	8,4	9,0	7,4	9,5	8,2	9,3	8,4
	36	9,7	7,1	9,8	7,4	10,2	8,2	9,0	8,0
0,1	3	14,2	10,8	13,8	9,5	13,7	10,4	13,3	9,6
	6	10,0	10,2	11,8	10,7	11,3	10,5	11,4	10,5
	12	10,7	9,1	10,7	9,5	9,4	8,4	10,9	10,3
	18	9,5	8,7	9,9	9,2	8,6	7,2	10,4	10,0
	24	9,8	8,4	10,9	9,5	8,7	7,1	8,9	9,2
	30	10,7	8,7	10,1	8,2	9,4	7,7	9,1	9,0
	36	10,5	7,3	10,6	8,3	9,8	7,9	10,3	9,4
-0,1	3	13,5	8,7	14,2	10,4	13,5	8,7	13,7	9,0
	6	10,2	9,3	10,7	9,4	11,0	9,9	10,6	9,5
	12	8,9	7,8	10,0	9,6	9,8	9,7	8,7	8,6
	18	8,8	7,8	9,3	8,9	11,2	9,7	9,2	8,4
	24	9,8	8,8	8,5	7,7	11,0	9,4	9,8	8,6
	30	8,8	7,1	8,8	7,6	10,0	8,9	10,3	9,6
	36	9,8	7,3	8,3	6,9	10,0	8,1	10,6	9,4
-0,6	3	11,8	9,2	12,3	8,0	10,0	8,5	11,8	8,4
	6	11,1	10,8	10,3	9,2	8,8	8,6	8,4	7,7
	12	9,5	8,6	9,5	8,8	8,7	7,8	8,0	7,4
	18	8,4	7,2	9,0	8,3	8,3	8,1	8,8	8,0
	24	8,3	6,5	8,1	7,8	8,9	8,8	8,4	7,8
	30	8,2	6,6	8,5	7,4	9,0	7,7	8,6	7,7
	36	9,3	6,5	8,3	6,6	9,8	8,4	9,8	8,4
-0,9	3	15,9	8,3	11,6	7,3	20,0	9,7	13,0	10,7
	6	11,7	9,7	8,2	7,0	13,6	12,0	10,4	9,8
	12	10,1	8,2	7,9	6,9	9,5	9,3	9,7	9,7
	18	10,0	8,2	7,5	6,9	10,4	8,6	8,4	7,9
	24	9,1	6,9	6,5	5,4	10,5	9,1	10,1	8,8
	30	8,5	5,6	7,7	6,2	10,1	8,5	10,2	8,3
	36	7,6	5,3	8,6	6,8	11,0	9,1	9,7	8,1

TABEAU. 4.3. Pourcentages de rejet au niveau 10% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) basés sur 1000 séries  $AR(1)$  fortes agrégées pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$ .

Niveau	H	$\hat{\epsilon}_t^2$				$ \hat{\epsilon}_t $			
		Cas 1		Cas 2		Cas 1		Cas 2	
		Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
5%	3	8,8	4,1	5,1	6,2	6,7	5,9	14,7	12,8
	6	8,4	3,2	5,2	3,5	5,7	4,8	13,2	10,7
	12	8,6	2,5	7,5	2,4	7,0	5,6	10,0	7,2
	18	6,9	2,1	8,8	1,6	6,2	5,1	8,6	6,1
	24	7,0	0,6	9,2	0,8	4,9	3,6	9,2	5,0
	30	7,6	1,0	8,1	0,5	5,7	4,3	7,9	3,8
	36	7,6	1,0	7,1	0,6	6,4	3,3	7,7	3,2
1%	3	3,6	0,5	2,1	1,9	1,3	0,7	5,6	3,2
	6	3,0	0,3	3,4	0,9	1,7	1,2	4,7	2,1
	12	3,0	0,3	4,7	0,3	1,7	1,0	4,0	1,4
	18	2,7	0,0	5,7	0,5	1,4	0,9	3,3	1,0
	24	2,9	0,1	5,4	0,2	1,5	0,7	2,6	0,6
	30	3,5	0,1	4,3	0,1	1,4	0,5	2,3	0,3
	36	3,8	0,3	4,2	0,2	1,1	0,4	2,5	0,3
10%	3	12,7	11,7	7,9	12	12,1	11,1	20,2	20,6
	6	13,7	7,6	8,7	8,7	10,2	10,1	18,8	18,9
	12	12,9	7,2	10,7	5,9	11,1	10,6	16,9	13,6
	18	12,4	7,2	11,4	4,0	11,7	10,0	14,0	10,8
	24	11,7	5,6	11,6	3,0	10,2	7,9	15,0	10,8
	30	12,6	4,8	10,7	2,0	11,1	9,7	14,1	9,9
	36	11,6	4,0	10,0	1,2	11,5	9,7	12,6	8,9

TABLEAU. 4.4. Pourcentages de rejet avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour le carré et la valeur absolue des résidus dans les cas 1 et 2.

Niveau	H	Cas 1				Cas 2			
		Fort		Faible		Fort		Faible	
		$\hat{e}_t^+$	$\hat{e}_t^-$	$\hat{e}_t^+$	$\hat{e}_t^-$	$\hat{e}_t^+$	$\hat{e}_t^-$	$\hat{e}_t^+$	$\hat{e}_t^-$
5%	3	1,2	3,4	1,0	3,6	1,9	66,9	3,0	61,1
	6	2,8	2,8	2,3	2,9	2,1	59,6	3,3	55,1
	12	4,0	4,4	3,1	4,0	3,3	49,2	2,5	45,3
	18	4,2	6,4	3,1	5,5	3,0	41,0	2,2	38,1
	24	3,8	7,0	2,3	6,1	4,1	37,9	2,7	34,4
	30	4,6	6,5	2,2	5,8	3,3	35,0	1,9	30,7
	36	4,0	6,9	2,3	5,9	3,9	32,9	1,4	29,7
1%	3	0,1	0,4	0,1	0,4	0,1	44,5	0,7	38,2
	6	0,9	0,3	0,2	0,2	0,6	39,2	0,4	33,9
	12	0,9	1,4	0,4	1,0	1,0	29,9	0,3	24,5
	18	1,3	1,3	0,4	1,1	0,9	23,6	0,3	19,3
	24	1,1	1,2	0,0	1,1	1,1	20,6	0,1	17,3
	30	1,2	1,4	0,0	1,2	1,4	18,0	0,0	13,7
	36	0,9	1,8	0,3	1,7	0,9	17,3	0,1	13,8
10%	3	3,0	6,4	2,7	6,7	4,2	76,4	7,4	72,4
	6	4,4	7,3	4,4	8,0	5,7	69,4	7,5	65,6
	12	6,8	7,7	6,3	7,5	6,4	59,7	6,3	56,0
	18	7,8	9,5	6,9	9,3	7,1	52,9	6,1	49,2
	24	8,4	10,5	6,5	10,3	6,7	48,5	6,8	45,6
	30	7,0	10,9	6,0	10,8	6,7	47,0	5,5	44,1
	36	8,5	11,7	6,1	10,8	6,8	44,3	5,1	40,5

TABLEAU. 4.5. Pourcentages de rejet avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour les résidus positifs et négatifs dans les cas 1 et 2.

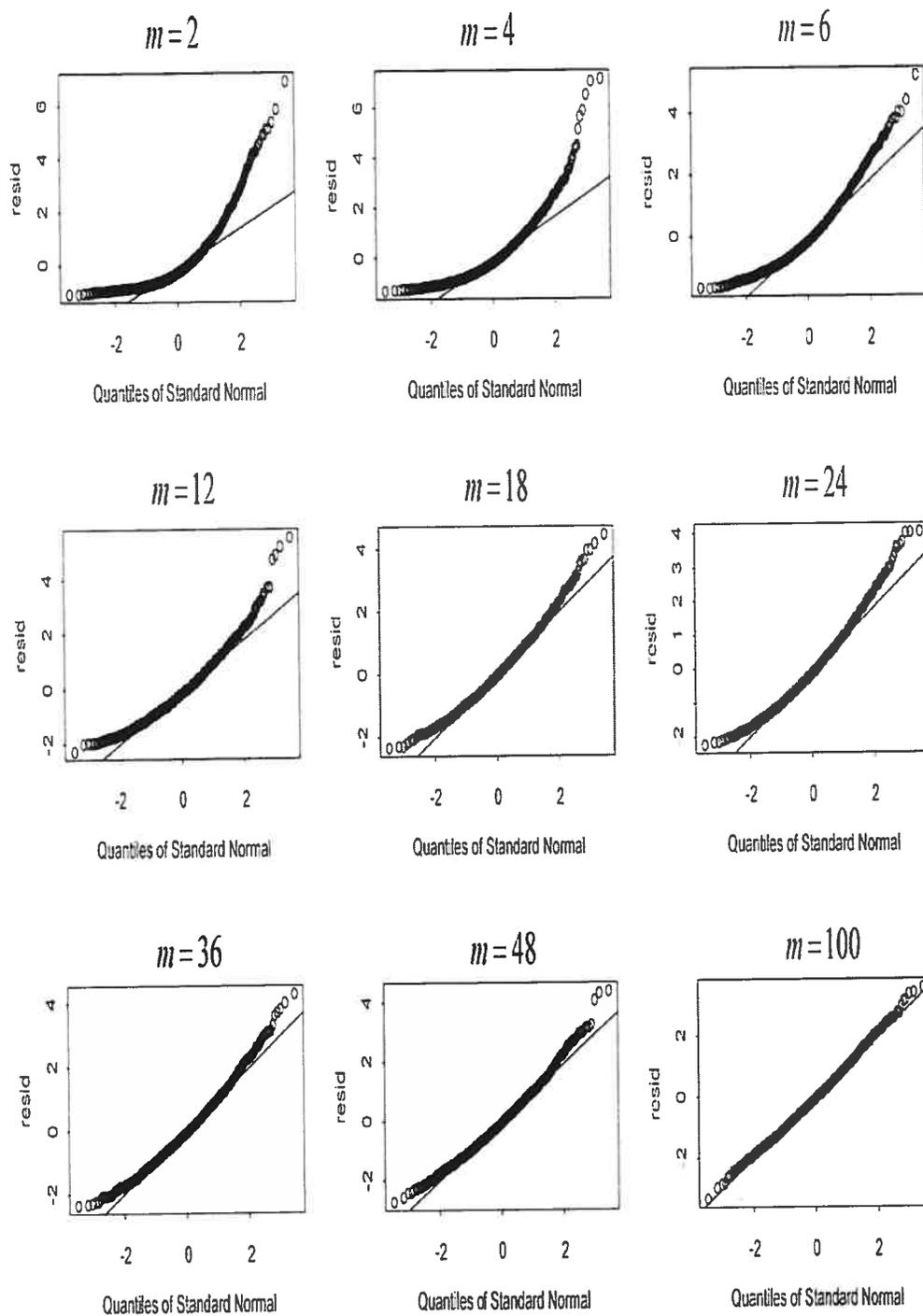


FIGURE. 4.1. Graphiques quantiles quantiles gaussiens des résidus pour des séries agrégées au pas  $m$ .

$m$	$\phi$	$n$	$\phi^m$	Moyennes des estimations	$\sigma_{\hat{\phi}^m}$	Moyennes des écarts types	
4	0,9	500	0.6561	0.6487	0,0437	0.0447	
		1000	0.6561	0.6518	0,0309	0.0314	
	0,6	500	0.1296	0.1282	0,1431	0.1426	
		1000	0.1296	0.1234	0,1012	0.1020	
	0,1	500	1,E-04	0.0039	1,6807	0.5388	
		1000	1,E-04	-0.0139	1,1884	0.5476	
	-0,1	500	1,E-04	-0.0152	1,8597	0.5740	
		1000	1,E-04	-0.0321	1,3150	0.5468	
	-0,6	500	0.1296	0.1233	0,3282	0.3523	
		1000	0.1296	0.1322	0,2321	0.2628	
	-0,9	500	0.6561	0.4853	0,1990	0.4101	
		1000	0.6561	0.5991	0,1407	0.2652	
	12	0,9	500	0.2824	0.2768	0,0874	0.0876
			1000	0.2824	0.2773	0,0618	0.0627
0,6		500	0.0022	-0.0017	0,4813	0.4355	
		1000	0.0022	-0.0019	0,3404	0.3420	
0,1		500	1,E-12	0.0258	5,2231	0.5714	
		1000	1,E-12	-0.0089	3,6933	0.5529	
-0,1		500	1,E-12	0.0130	5,4020	0.5646	
		1000	1,E-12	0.0154	3,8198	0.5668	
-0,6		500	0.0022	0.0264	0,6613	0.4926	
		1000	0.0022	-0.0018	0,4676	0.4479	
-0,9		500	0.2824	0.2472	0,2733	0.3163	
		1000	0.2824	0.2857	0,1933	0.2189	

TABLEAU. 4.6. Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre autorégressif  $\phi^m$ , basée sur 1000 réalisations.

$m$	$\phi$	$n$	$\theta$	Moyennes des estimations	$\sigma_{\hat{\theta}}$	Moyennes des écarts types	
4	0,9	500	-0,2376	-0,2419	0,0562	0,0583	
		1000	-0,2376	-0,2404	0,0397	0,0429	
	0,6	500	-0,1878	-0,1911	0,1418	0,1451	
		1000	-0,1878	-0,1921	0,1002	0,1025	
	0,1	500	-0,0265	-0,0251	1,6801	0,5430	
		1000	-0,0265	-0,0406	1,1880	0,5499	
	-0,1	500	0,0241	0,0117	1,8591	0,5824	
		1000	0,0241	-0,0072	1,3146	0,5496	
	-0,6	500	0,2601	0,2558	0,3196	0,3514	
		1000	0,2601	0,2630	0,2260	0,2599	
	-0,9	500	0,7430	0,5816	0,1765	0,4189	
		1000	0,7430	0,6895	0,1248	0,2617	
	12	0,9	500	-0,2422	-0,2467	0,0884	0,0899
			1000	-0,2422	-0,2468	0,0625	0,0624
0,6		500	-0,0908	-0,0930	0,4793	0,4362	
		1000	-0,0908	-0,0939	0,3389	0,3423	
0,1		500	-0,0086	0,0186	5,2229	0,5763	
		1000	-0,0086	-0,0144	3,6931	0,5553	
-0,1		500	0,0083	0,0216	5,4018	0,5699	
		1000	0,0083	0,0275	3,8196	0,5701	
-0,6		500	0,0698	0,0981	0,6597	0,4944	
		1000	0,0698	0,0657	0,4665	0,4487	
-0,9		500	0,4207	0,3899	0,2585	0,3107	
		1000	0,4207	0,4243	0,1828	0,2097	

TABLEAU. 4.7. Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre moyenne mobile  $\theta$ , basée sur 1000 réalisations.

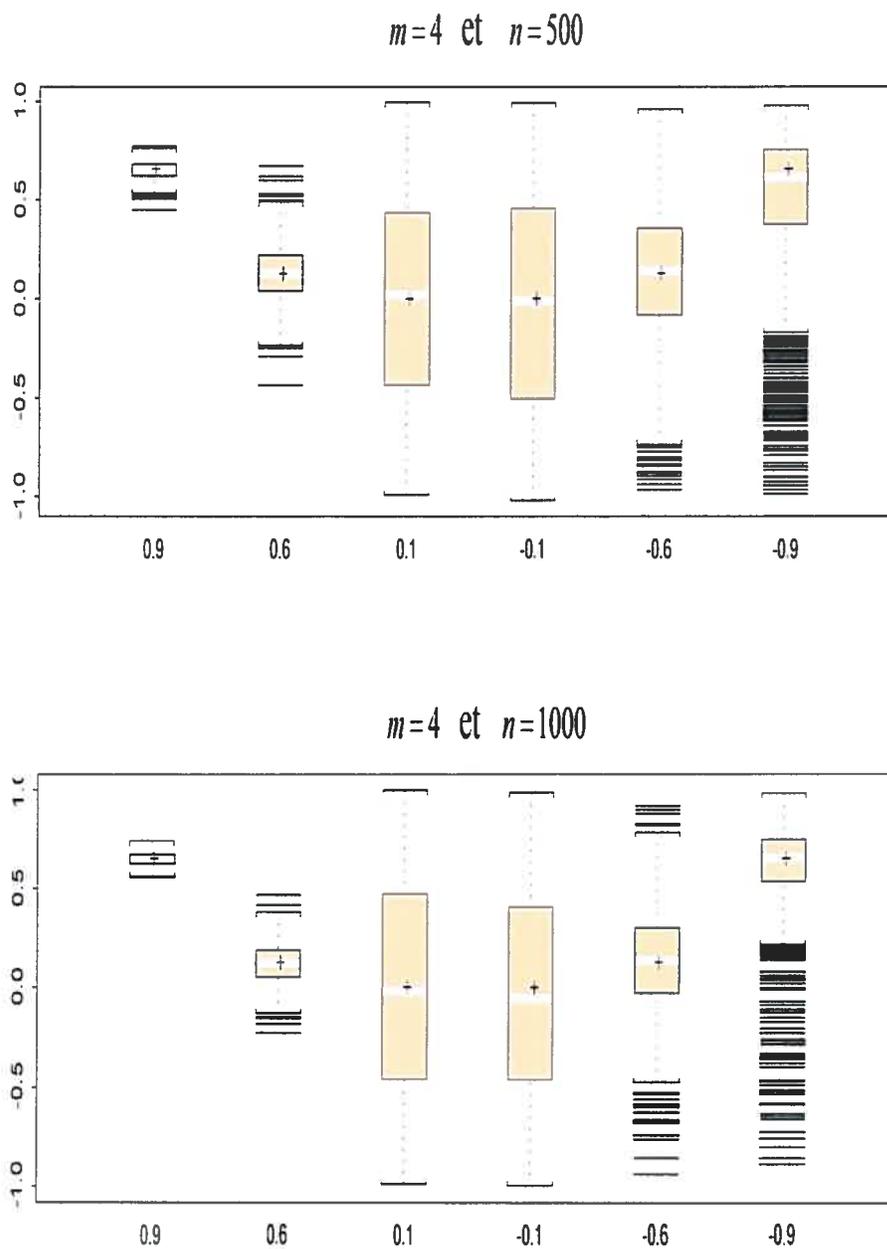


FIGURE. 4.2. Diagrammes en boîte des estimations de  $\phi^m$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=4$  et  $n=500, 1000$ .

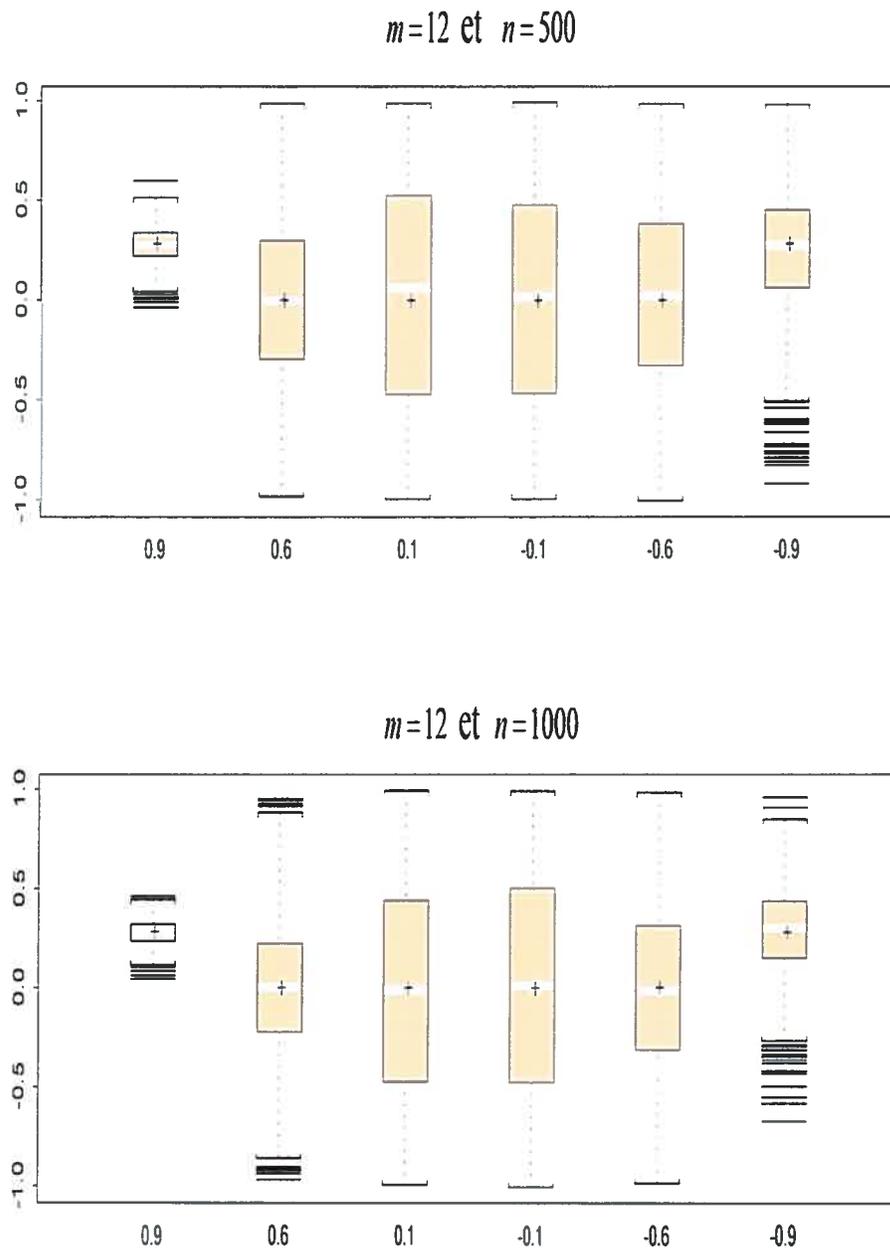


FIGURE. 4.3. Diagrammes en boîte des estimations de  $\phi^m$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=12$  et  $n=500, 1000$ .

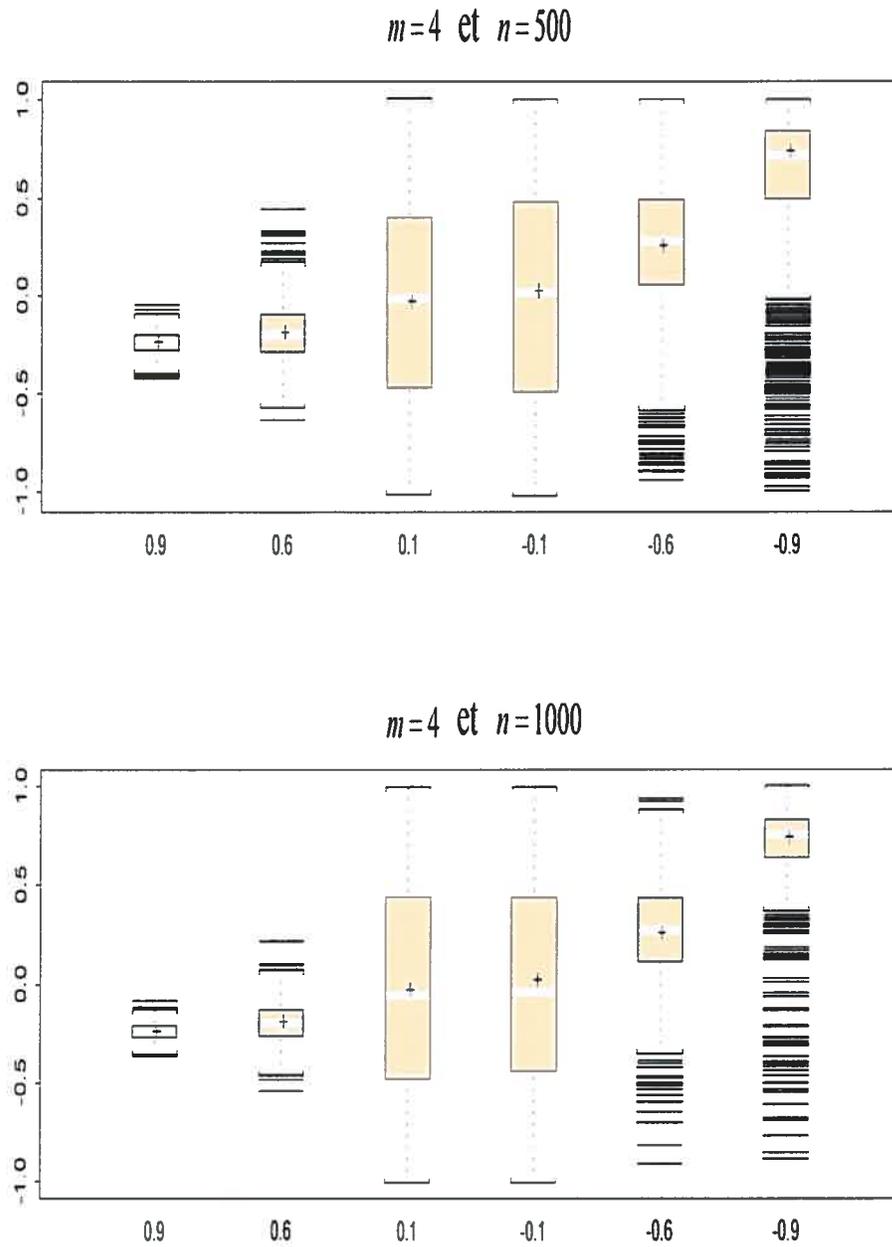


FIGURE. 4.4. Diagrammes en boîte des estimations de  $\theta$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=4$  et  $n=500, 1000$ .

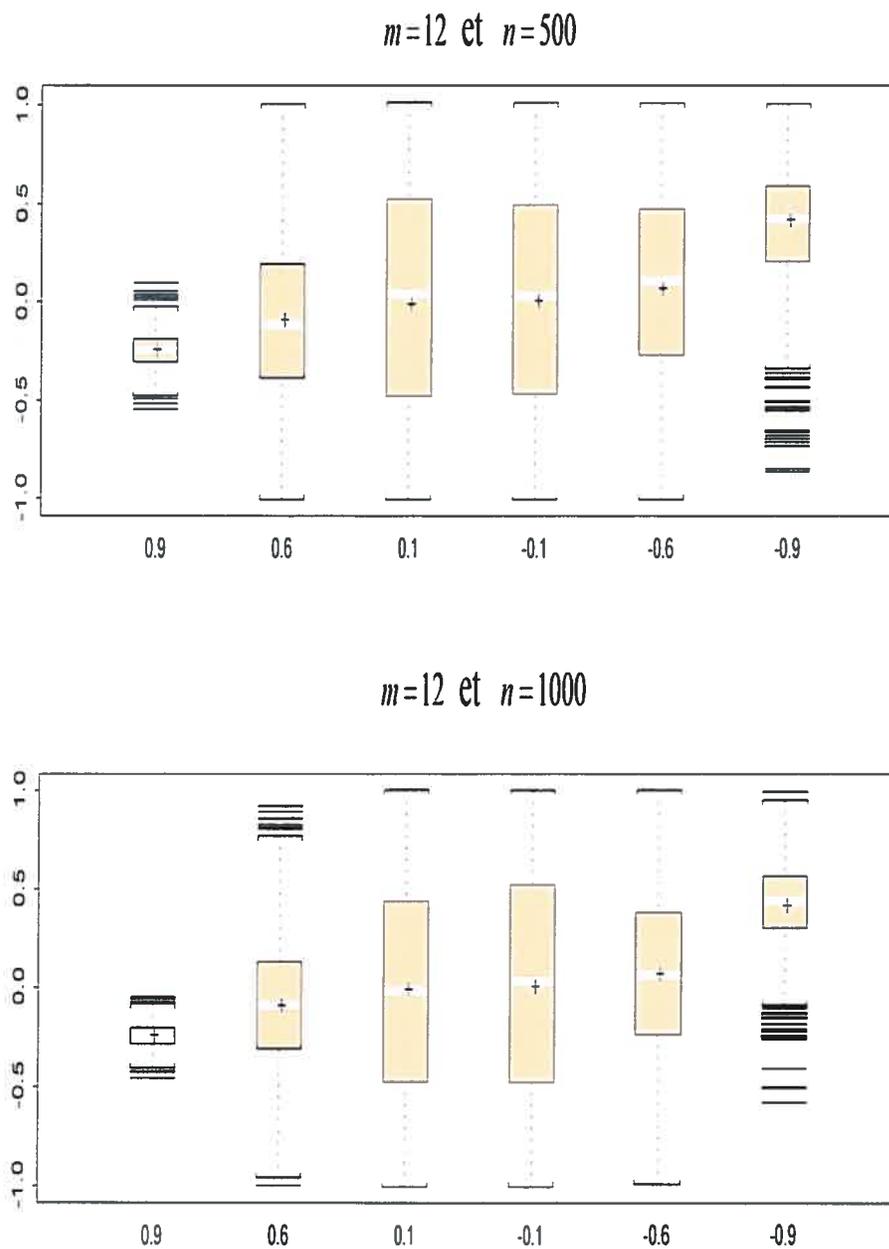


FIGURE. 4.5. Diagrammes en boîte des estimations de  $\theta$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=12$  et  $n=500, 1000$ .

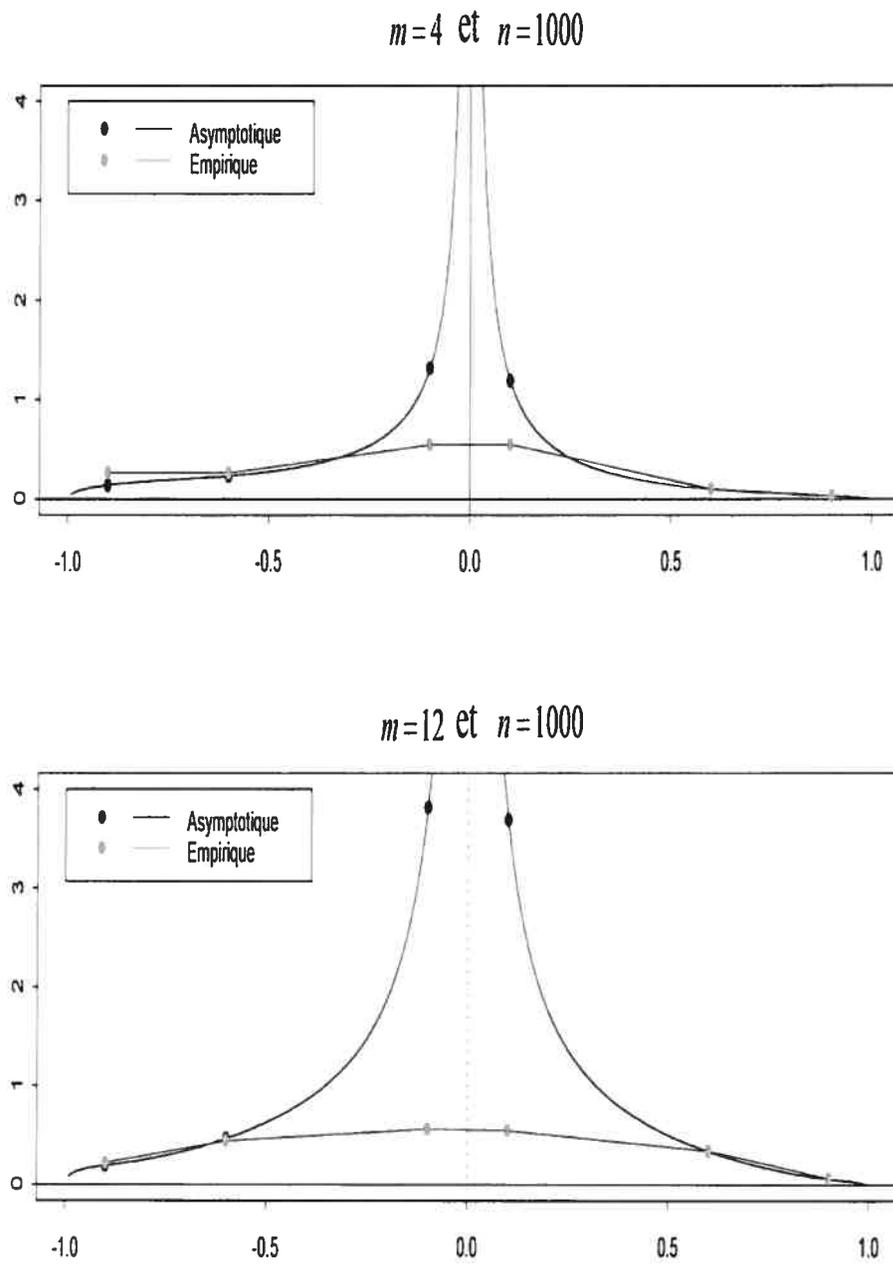


FIGURE. 4.6. Écart types asymptotique et empirique de  $\hat{\phi}^m$  en fonction de  $\phi$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$ .

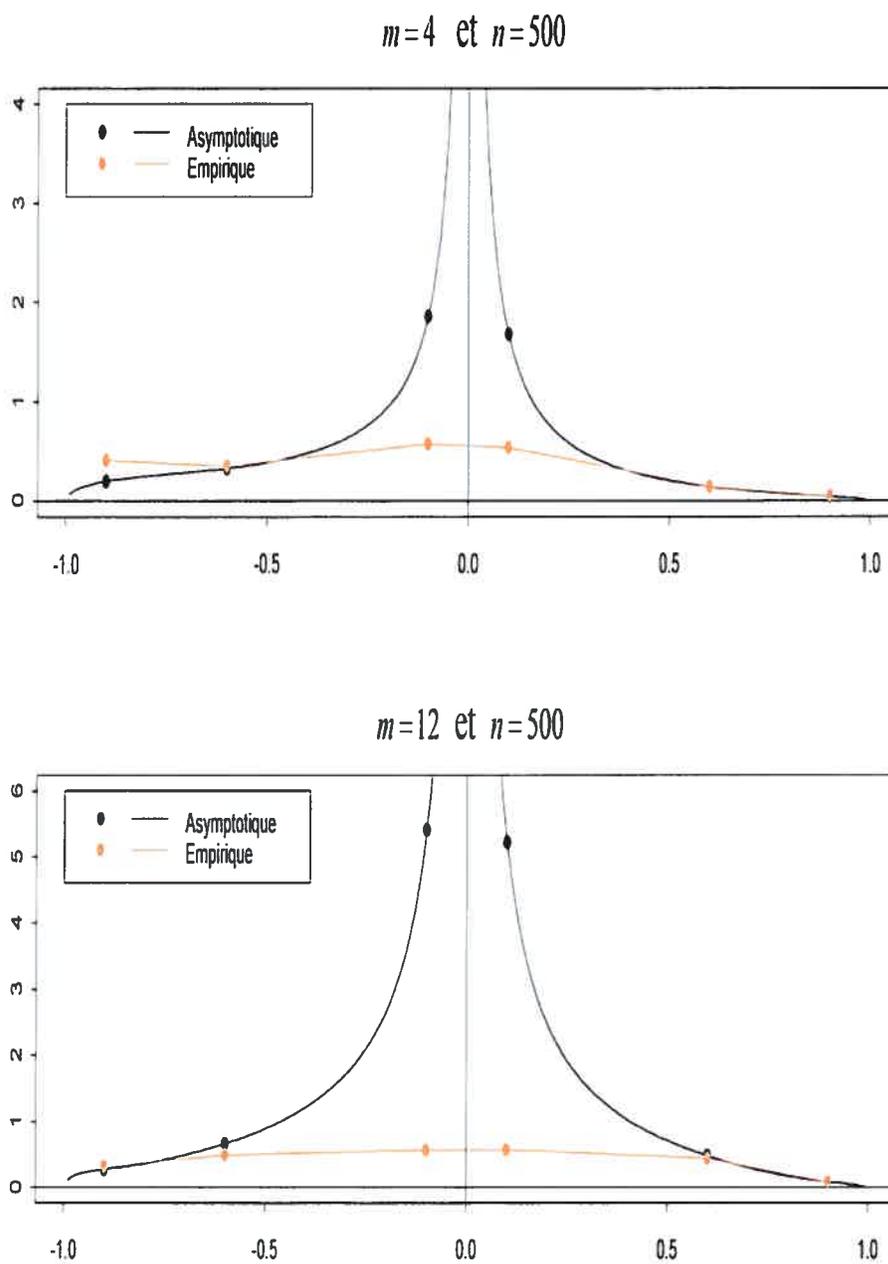


FIGURE. 4.7. Écart types asymptotique et empirique de  $\hat{\phi}^m$  en fonction de  $\phi$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$ .

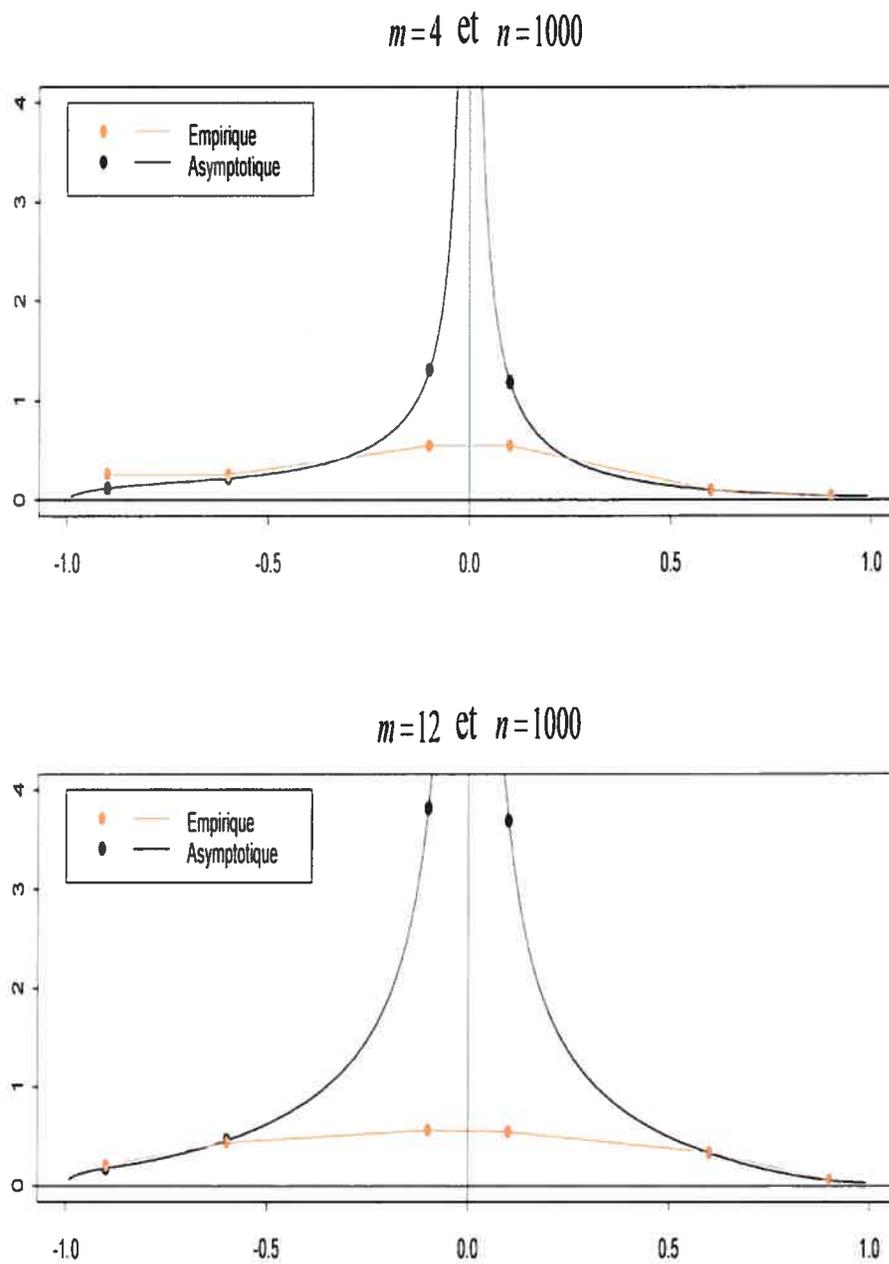


FIGURE. 4.8. Écart types asymptotique et empirique de  $\hat{\theta}$  en fonction de  $\phi$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$ .

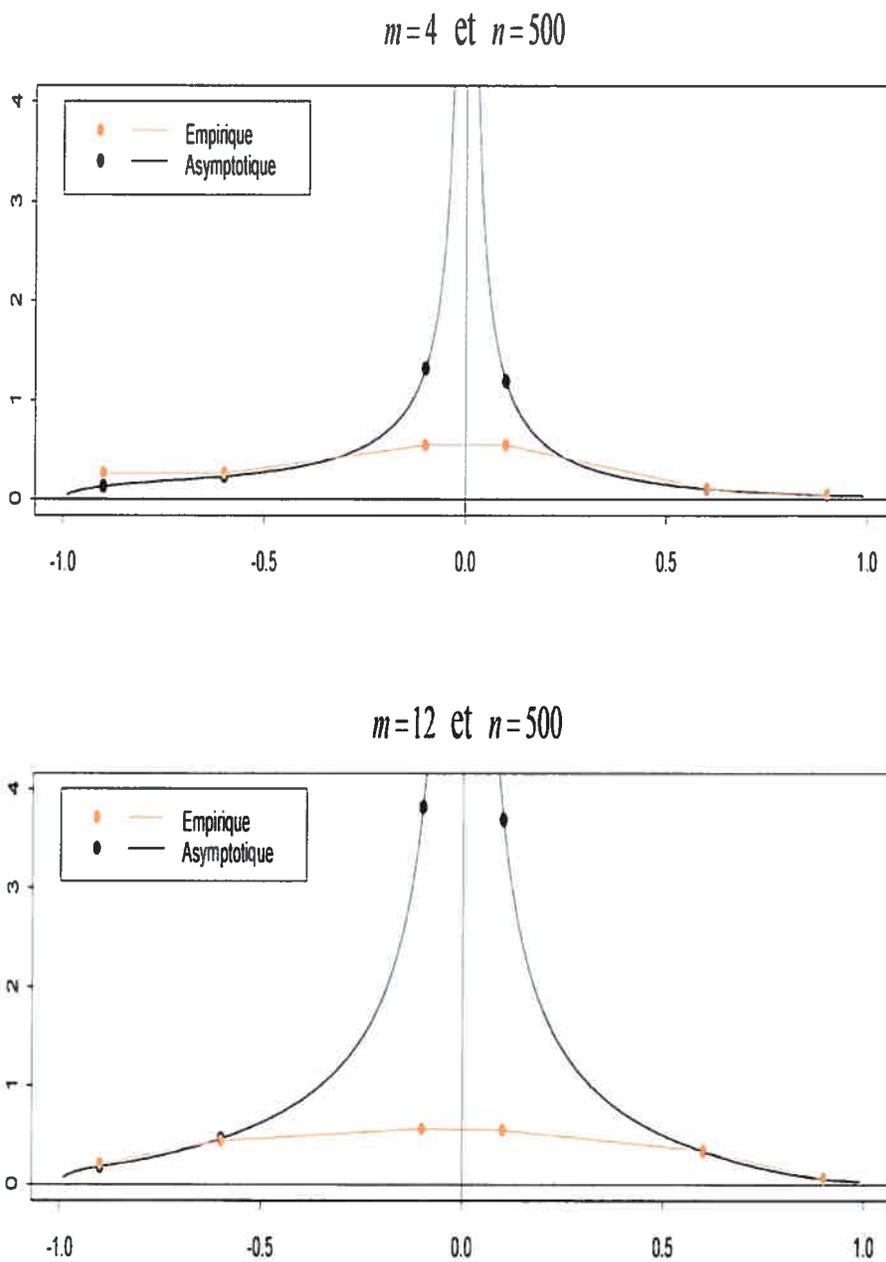


FIGURE. 4.9. Écart types asymptotique et empirique de  $\hat{\theta}$  en fonction de  $\phi$  pour différentes valeurs de  $m$  et  $n$ .

## Chapitre 5

---

### RÉSULTATS DE SIMULATION POUR L'ÉCHANTILLONNAGE SYSTÉMATIQUE

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats de simulation portant sur des séries échantillonnées de façon systématique. Dans les sections 5.1 à 5.3, nous présenterons tout d'abord le plan de simulation, nous aborderons ensuite la question de la dépendance des erreurs et finalement nous examinerons la variabilité des estimateurs.

#### 5.1. PLAN DES SIMULATIONS

Nous avons considéré l'échantillonnage systématique d'un processus  $ARMA(1, 1)$  fort et comme nous recherchons des séries échantillonnées dont le bruit blanc est faible, nous avons considéré le modèle suivant :

- $ARMA(1,1)$  fort :  $X_t = \phi X_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$  où  $\{\varepsilon_t\}$  est i.i.d.  $\chi_1^2$  centré et réduit.

Pour chaque modèle, nous avons généré 1000 séries échantillonnées indépendantes de longueurs  $n = 1000$  et  $2000$ , respectivement, en considérant deux pas d'échantillonnages  $m = 2$  et  $6$  et ceci pour 4 combinaisons différentes des paramètres autorégressif et moyenne mobile  $\phi$  et  $\theta$ . Dans le tableau 5.1, on retrouve les valeurs de  $\phi$  et  $\theta$  choisies ainsi que la valeur théorique du paramètre moyenne mobile  $\vartheta$  de la série transformée et de la fonction  $H(\phi, \theta, m)$ . Puisque  $n$  représente la taille de la série agrégée, pour un pas d'échantillonnage  $m$ , nous avons dû générer des séries de longueur  $N = nm$ , du modèle  $ARMA(1, 1)$  fort de départ.

$\phi$	$\theta$	$m = 2$		$m = 6$	
		$\vartheta$	$H(\phi, \theta), m$	$\vartheta$	$H(\phi, \theta), m$
-0,9	0,9	-0,1702	1,5611	-0,0430	0,6573
0,9	-0,9	-0,1702	-0,4245	-0,0430	-0,2519
0,9	0,6	0,4814	-0,0538	0,2643	-0,0720
-0,9	-0,6	0,4814	-0,0798	0,2643	-0,0979

TABLEAU. 5.1. Différentes combinaisons de  $\phi$  et  $\theta$  utilisées pour les simulations ainsi que les valeurs de  $\vartheta$  et  $H(\phi, \theta, m)$ .

Pour générer une série  $ARMA(1, 1)$  forte, nous avons à nouveau utilisé la fonction *arima.sim* de S-Plus. Nous avons par la suite échantillonné les séries à l'aide de la fonction S-Plus *Echantillonnage.sys* qui se trouve en annexe.

## 5.2. VALIDATION DU VRAI MODÈLE AVEC LES TESTS DE LJUNG-BOX STANDARD ET MODIFIÉ.

Nous savons que l'échantillonnage systématique d'un modèle  $ARMA(1, 1)$  fort est aussi un  $ARMA(1, 1)$  et nous avons estimé le vrai modèle  $ARMA(1, 1)$  pour chaque série simulée. Avec les valeurs choisies des paramètres  $\phi$  et  $\theta$ , le tableau 5.1 nous indique que  $H(\phi, \theta, m) \neq 0$  et comme la distribution du bruit blanc fort de départ est asymétrique, son troisième moment est différent de 0. Par conséquent, il s'ensuit que les séries échantillonnées sont  $ARMA(1, 1)$  faible par le théorème 3.4.1. La même démarche que dans le cas de l'agrégation a été utilisée pour vérifier s'il est facile de détecter la dépendance des erreurs dans une série échantillonnée. Pour chacun des deux tests, les proportions de rejet ont été calculées pour les valeurs  $H = 3, 6, 12, 18, 24, 30$  et  $36$ .

Les tableaux 5.2 à 5.4 de la section 5.4, sont similaires aux tableaux 4.1 à 4.3 présentés pour l'agrégation. À nouveau, les proportions de rejet qui sont à l'extérieur des limites de signification à 5% sont en caractères gras. On remarque que les proportions de rejet du test de Ljung-Box standard sont presque toutes

à l'intérieur des limites de signification et que dans la plupart des cas, elles sont légèrement plus grandes que celles du test modifié. Ceci nous indique que, comme pour l'agrégation, la dépendance des erreurs semble difficile à détecter à l'aide des résidus ordinaires. Les proportions de rejet du test standard sont élevés seulement en  $m = 2$  et  $H = 3$ . Avec  $m = 6$  et  $H = 3$ , elles sont déjà près du niveau attendu.

On remarque que l'effet de  $n$  est négligeable ici aussi. Les résultats sont quasiment identiques à la différence que les niveaux du test modifié sont mieux contrôlés pour  $n = 2000$ . On remarque cependant que les plus grandes proportions de rejet du test standard pour  $m = 2$  et  $H = 3$  sont obtenues avec les valeurs  $(0, 9, 0, 6)$  et  $(-0, 9, -0, 6)$  de  $(\phi, \theta)$ . Pour ces deux couples de valeurs, la fonction  $H(\phi, \theta, m)$  est près de zéro mais la valeur du paramètre moyenne mobile  $\vartheta$  du modèle échantillonné est 0.2643. À l'opposé pour les deux autres valeurs,  $\vartheta$  est près de zéro mais  $H(\phi, \theta, m)$  est assez loin de zéro.

### 5.3. VARIABILITÉ DES ESTIMATEURS DES PARAMÈTRES AR ET MA.

Comme dans le cas de l'agrégation, les paramètres autorégressif et moyenne mobile intervenant dans le modèle échantillonné dépendent de ceux du modèle initial et du pas  $m$  d'échantillonnage. En fait, le paramètre autorégressif est donné par  $\phi^m$  et le paramètre  $\vartheta$  est défini en (3.5.10). On s'intéresse donc à voir si en pratique les estimateurs obtenus sont près de ceux attendus en théorie. Dans les tableaux 5.5 et 5.6, on retrouve la valeur théorique attendue, la moyenne des 1000 estimateurs ainsi que l'écart type empirique et asymptotique des estimateurs autorégressif et moyenne mobile et ceci pour chaque niveau du plan de simulation. L'écart type asymptotique est celui obtenu sous l'hypothèse d'un bruit blanc fort.

On remarque qu'en moyenne, les valeurs empiriques moyennes des estimateurs sont très près des valeurs théoriques attendues, peu importe les valeurs de  $(\phi, \theta)$  et  $m$  et  $n$ , et ce autant pour le paramètre moyenne mobile qu'autorégressif. On

remarque aussi que les écarts types empirique et asymptotique sont très près. De façon générale, les estimateurs autorégressif et moyenne mobile ont une variabilité relativement petite. Cette caractéristique est reflétée dans les figures 5.1 à 5.4 où l'on retrouve les diagrammes en boîtes des estimateurs autorégressif et moyenne mobile pour chaque niveau du plan de simulation. Il ressort des simulations présentées que la dépendance des erreurs est encore plus difficile à détecter avec des séries résultant de l'échantillonnage systématique de séries  $ARMA(1, 1)$  fortes.

#### 5.4. TABLEAUX ET FIGURES

Dans cette section, on retrouve tous les tableaux et figures dont il est mentionné dans les sections précédentes.

$\phi$	$\theta$	$H$	$n = 1000$				$n = 2000$			
			$m = 2$		$m = 6$		$m = 2$		$m = 6$	
			Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
-0,9	0,9	<b>3</b>	<b>7,0</b>	4,9	4,0	3,8	5,9	4,3	4,5	4,0
		<b>6</b>	4,9	4,5	<b>3,6</b>	3,9	4,1	3,7	4,8	4,7
		<b>12</b>	4,5	4,1	4,7	4,1	5,5	4,8	4,8	4,7
		<b>18</b>	5,0	3,8	3,7	<b>3,4</b>	4,6	3,9	4,7	4,4
		<b>24</b>	5,7	4,2	4,6	<b>3,5</b>	5,3	4,2	4,0	<b>3,4</b>
		<b>30</b>	5,6	<b>3,5</b>	5,2	3,8	5,8	4,8	3,7	<b>3,4</b>
		<b>36</b>	5,1	<b>2,8</b>	4,9	3,9	<b>6,4</b>	4,6	4,0	3,7
0,9	-0,9	<b>3</b>	<b>7,5</b>	5,0	5,1	5,3	<b>6,6</b>	4,5	5,1	4,9
		<b>6</b>	5,4	5,3	5,8	6,0	6,3	5,5	5,1	5,2
		<b>12</b>	4,7	4,3	5,9	5,2	6,3	5,3	3,9	3,8
		<b>18</b>	5,4	4,1	6,3	5,0	6,1	5,1	4,5	4,3
		<b>24</b>	5,4	4,2	5,2	4,2	6,1	4,7	4,5	4,4
		<b>30</b>	4,3	<b>3,0</b>	5,6	4,7	<b>6,6</b>	5,3	5,0	4,2
		<b>36</b>	4,3	<b>2,3</b>	5,0	<b>3,5</b>	6,1	5,1	4,9	4,3
0,9	0,6	<b>3</b>	<b>11,5</b>	3,7	5,0	<b>3,6</b>	<b>11,8</b>	6,0	5,0	4,3
		<b>6</b>	5,1	3,3	4,6	4,5	5,8	4,9	5,7	5,3
		<b>12</b>	5,2	3,9	5,4	4,9	5,0	4,3	6,1	4,9
		<b>18</b>	5,0	3,7	5,3	4,3	5,2	4,1	5,5	4,4
		<b>24</b>	4,6	<b>2,9</b>	4,6	<b>2,7</b>	5,6	4,3	5,5	4,5
		<b>30</b>	5,4	<b>3,2</b>	5,4	<b>3,3</b>	5,8	3,8	6,2	4,3
		<b>36</b>	4,7	<b>2,5</b>	5,8	<b>3,6</b>	5,1	3,9	5,6	4,1
-0,9	-0,6	<b>3</b>	<b>10,3</b>	3,6	6,6	5,4	<b>10,5</b>	4,5	3,9	3,8
		<b>6</b>	6,0	4,4	5,4	5,0	4,9	4,0	4,2	4,5
		<b>12</b>	4,6	3,9	5,2	4,9	4,2	<b>3,2</b>	4,5	4,2
		<b>18</b>	5,6	<b>3,6</b>	5,9	3,9	4,5	3,8	4,9	4,7
		<b>24</b>	4,7	<b>3,2</b>	5,8	<b>3,6</b>	4,4	3,8	5,2	3,8
		<b>30</b>	5,6	<b>2,8</b>	5,1	<b>3,3</b>	4,8	<b>3,1</b>	5,1	4,1
		<b>36</b>	4,8	<b>3,0</b>	5,1	<b>3,2</b>	5,3	<b>3,6</b>	4,4	<b>3,2</b>

TABLEAU. 5.2. Pourcentages de rejet au niveau 5% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique d'une série  $ARMA(1, 1)$  forte pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$  en utilisant 1000 répliques.

$\phi$	$\theta$	$H$	$n = 1000$				$n = 2000$			
			$m = 2$		$m = 6$		$m = 2$		$m = 6$	
			Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
-0,9	0,9	3	1,4	0,9	0,5	0,5	1,1	0,6	0,4	<b>0,3</b>
		6	1,6	0,9	0,8	0,8	0,8	0,4	1,0	0,9
		12	1,2	0,8	1,1	0,7	1,3	1,1	0,9	0,8
		18	1,0	0,5	0,9	0,9	0,8	0,6	1,2	1,0
		24	1,6	<b>0,3</b>	0,8	0,5	1,6	1,0	0,9	0,7
		30	1,3	0,4	1,2	0,8	1,5	0,8	0,8	0,6
		36	1,5	0,4	1,1	0,6	1,0	0,7	0,7	0,4
0,9	-0,9	3	1,5	1,1	1,1	1,1	1,3	0,5	1,2	1,4
		6	1,4	1,0	0,9	1,0	1,5	1,2	1,2	1,1
		12	<b>1,7</b>	0,8	1,4	1,3	1,0	0,8	0,7	<b>0,3</b>
		18	1,3	0,6	1,5	1,3	<b>1,7</b>	0,9	0,4	0,4
		24	0,7	0,5	1,2	0,7	1,3	0,8	1,1	0,9
		30	0,9	<b>0,2</b>	1,3	0,5	<b>1,9</b>	1,2	1,3	1,1
		36	0,9	<b>0,1</b>	1,5	0,6	1,4	0,5	1,3	1,1
0,9	0,6	3	<b>1,9</b>	0,6	0,9	0,6	<b>3,1</b>	1,3	1,4	1,1
		6	1,3	0,5	0,7	0,4	1,3	1,0	0,8	0,9
		12	0,9	0,4	1,2	0,7	0,7	0,7	1,2	1,0
		18	0,8	<b>0,3</b>	0,6	0,4	0,7	0,5	0,9	0,6
		24	1,0	<b>0,3</b>	0,9	<b>0,3</b>	1,0	0,6	0,6	0,4
		30	0,6	<b>0,3</b>	1,6	0,4	1,6	0,7	1,4	0,7
		36	0,9	<b>0,3</b>	1,2	<b>0,3</b>	1,2	0,7	1,0	0,6
-0,9	-0,6	3	<b>1,7</b>	0,4	1,3	1,1	<b>2,4</b>	1,1	0,4	<b>0,2</b>
		6	1,5	0,6	1,4	1,3	0,9	1,0	0,7	0,6
		12	1,3	<b>0,2</b>	1,5	1,0	1,0	0,4	1,1	0,9
		18	1,6	0,5	1,3	1,1	0,9	0,5	1,0	0,7
		24	1,4	0,5	1,3	0,9	1,0	0,4	0,9	0,6
		30	1,3	<b>0,2</b>	0,9	0,5	0,9	0,5	0,6	<b>0,3</b>
		36	1,3	<b>0,1</b>	0,9	0,4	0,9	<b>0,3</b>	0,8	0,4

TABLEAU. 5.3. Pourcentages de rejet au niveau 1% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique d'une série  $ARMA(1, 1)$  forte pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$  en utilisant 1000 répliques.

$\phi$	$\theta$	$H$	$n = 1000$				$n = 2000$			
			$m = 2$		$m = 6$		$m = 2$		$m = 6$	
			Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible	Fort	Faible
-0,9	0,9	<b>3</b>	<b>14,4</b>	10,2	9,2	8,6	<b>12,5</b>	<b>8,1</b>	10,5	10,0
		<b>6</b>	9,2	9,0	8,8	8,4	9,4	8,9	9,2	9,2
		<b>12</b>	<b>7,9</b>	<b>7,1</b>	8,8	8,2	10,0	9,8	10,2	10,3
		<b>18</b>	10,1	10,1	9,7	<b>8,0</b>	10,3	8,8	9,3	9,1
		<b>24</b>	11,5	9,2	8,5	<b>7,9</b>	11,4	10,0	8,5	<b>7,5</b>
		<b>30</b>	10,6	8,2	9,9	9,0	10,5	9,9	<b>7,7</b>	<b>7,2</b>
		<b>36</b>	9,7	<b>7,0</b>	9,8	8,4	10,8	9,9	<b>7,7</b>	<b>7,2</b>
0,9	-0,9	<b>3</b>	<b>14,3</b>	10,4	10,6	10,3	<b>14,2</b>	10,6	11,0	10,9
		<b>6</b>	10,5	10,4	11,4	10,4	<b>12,2</b>	10,3	10,1	10,1
		<b>12</b>	10,5	10,4	9,7	9,8	10,7	10,3	8,4	<b>7,7</b>
		<b>18</b>	9,7	<b>7,9</b>	10,6	9,9	11,3	10,6	8,9	8,6
		<b>24</b>	9,1	<b>7,8</b>	10,1	9,5	11,3	10,3	9,6	9,0
		<b>30</b>	<b>7,9</b>	<b>6,7</b>	10,0	9,4	10,5	9,7	9,8	9,4
		<b>36</b>	<b>8,1</b>	<b>6,5</b>	10,3	8,9	10,7	8,9	9,2	8,4
0,9	0,6	<b>3</b>	<b>21,0</b>	9,5	11,8	9,4	<b>21,5</b>	10,2	<b>12,2</b>	10,4
		<b>6</b>	10,2	8,8	8,6	<b>7,9</b>	11,0	10,4	10,7	10,6
		<b>12</b>	9,7	8,3	9,9	8,8	10,3	9,2	11,2	11,1
		<b>18</b>	8,7	<b>7,4</b>	10,4	9,4	9,6	8,5	11,8	11,2
		<b>24</b>	<b>8,0</b>	<b>7,5</b>	9,1	<b>7,8</b>	11,2	9,8	10,9	10,2
		<b>30</b>	9,6	<b>6,9</b>	9,8	<b>7,7</b>	10,2	8,7	10,6	10,1
		<b>36</b>	9,0	<b>6,3</b>	11,1	8,8	10,2	<b>7,9</b>	10,7	8,9
-0,9	-0,6	<b>3</b>	<b>20,1</b>	9,3	<b>12,5</b>	10,8	<b>21,5</b>	9,7	10,5	9,0
		<b>6</b>	11,2	9,2	10,5	10,0	<b>12,0</b>	9,7	8,8	9,2
		<b>12</b>	9,4	<b>8,0</b>	10,2	9,9	9,3	8,7	10,0	9,2
		<b>18</b>	10,8	8,8	9,6	8,3	9,4	<b>7,8</b>	9,4	9,1
		<b>24</b>	10,2	<b>7,3</b>	10,5	9,9	9,6	<b>7,5</b>	9,1	<b>7,9</b>
		<b>30</b>	9,8	<b>7,6</b>	10,0	<b>7,8</b>	8,8	<b>6,8</b>	9,4	8,5
		<b>36</b>	10,0	<b>7,4</b>	9,9	<b>7,4</b>	9,2	<b>7,3</b>	8,8	<b>7,3</b>

TABLEAU. 5.4. Pourcentages de rejet au niveau 10% avec les tests de Ljung-Box standard (fort) et modifié (faible) pour l'échantillonnage systématique d'une série  $ARMA(1,1)$  forte pour différentes valeurs de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $m$ ,  $n$  et  $H$  en utilisant 1000 répliques.

$m$	$\phi$	$\theta$	$n$	$\phi^m$	Moyenne des estimations	$\sigma_{\phi^m}$	Moyenne des écarts types
2	-0,9	0,9	1000	0,8100	0,8070	0,0215	0,0226
			2000		0,8079	0,0152	0,0149
	0,9	-0,9	1000		0,8051	0,0215	0,0217
			2000		0,8091	0,0152	0,0147
	0,9	0,6	1000		0,8025	0,0344	0,0368
			2000		0,8062	0,0243	0,0247
	-0,9	-0,6	1000		0,8023	0,0344	0,0345
			2000		0,8053	0,0243	0,0253
6	-0,9	0,9	1000	0,5314	0,5261	0,0477	0,0477
			2000		0,5291	0,0337	0,0344
	0,9	-0,9	1000		0,5269	0,0477	0,0475
			2000		0,5273	0,0337	0,0333
	0,9	0,6	1000		0,5184	0,0862	0,0881
			2000		0,5269	0,0609	0,0617
	-0,9	-0,6	1000		0,5211	0,0862	0,0884
			2000		0,5264	0,0609	0,0623

TABLEAU. 5.5. Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre autorégressif  $\phi^m$  basé sur 1000 réalisations.

$m$	$\phi$	$\theta$	$n$	$\vartheta$	Moyenne des estimations	$\sigma_{\vartheta}$	Moyenne des écarts types
2	-0,9	0,9	1000	-0,1702	-0,1712	0,0362	0,0390
			2000		-0,1711	0,0256	0,0293
	0,9	-0,9	1000		-0,1727	0,0362	0,0396
			2000		-0,1703	0,0256	0,0274
	0,9	0,6	1000	0,4814	0,4758	0,0515	0,0528
			2000		0,4772	0,0364	0,0367
	-0,9	-0,6	1000		0,4750	0,0515	0,0512
			2000		0,4767	0,0364	0,0381
6	-0,9	0,9	1000	-0,0430	-0,0471	0,0563	0,0568
			2000		-0,0453	0,0398	0,0411
	0,9	-0,9	1000		-0,0446	0,0563	0,0578
			2000		-0,0454	0,0398	0,0397
	0,9	0,6	1000	0,2643	0,2532	0,0981	0,0992
			2000		0,2597	0,0694	0,0706
	-0,9	-0,6	1000		0,2538	0,0981	0,1003
			2000		0,2587	0,0694	0,0718

TABLEAU. 5.6. Moyenne des estimations et des écarts types du paramètre moyenne mobile  $\vartheta$  basé sur 1000 réalisations.

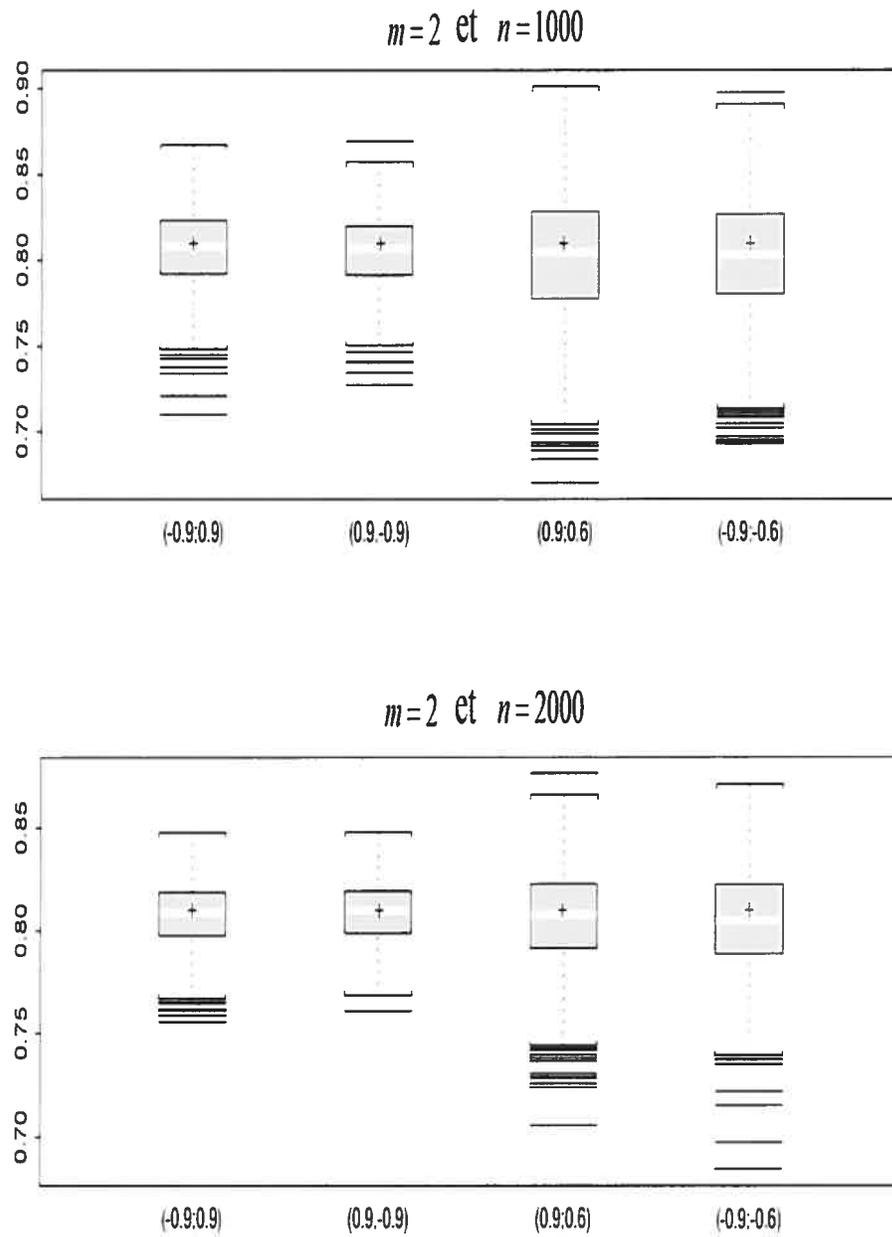


FIGURE. 5.1. Diagrammes en boîte des estimations de  $\phi^m$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=2$  et  $n=1000, 2000$ .

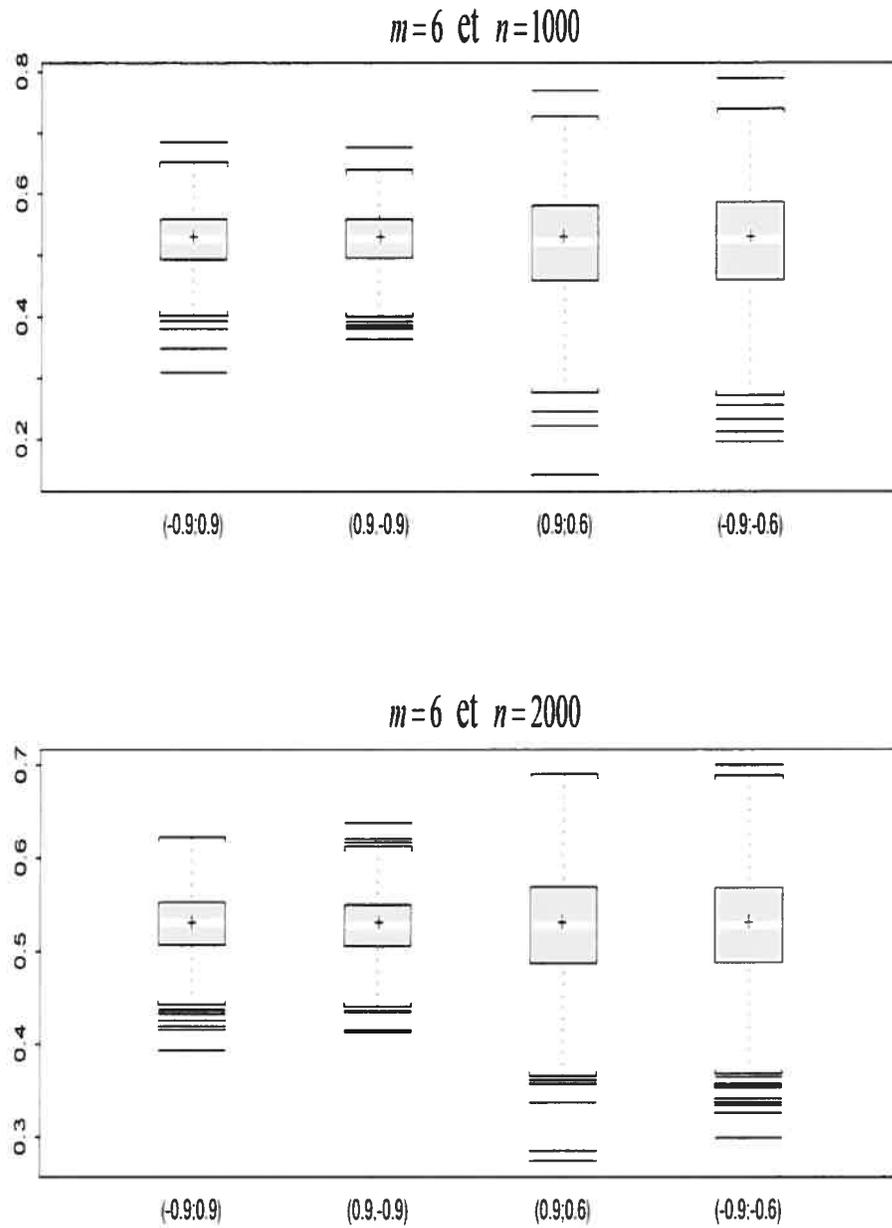


FIGURE. 5.2. Diagrammes en boîte des estimations de  $\phi^m$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=6$  et  $n=1000, 2000$ .

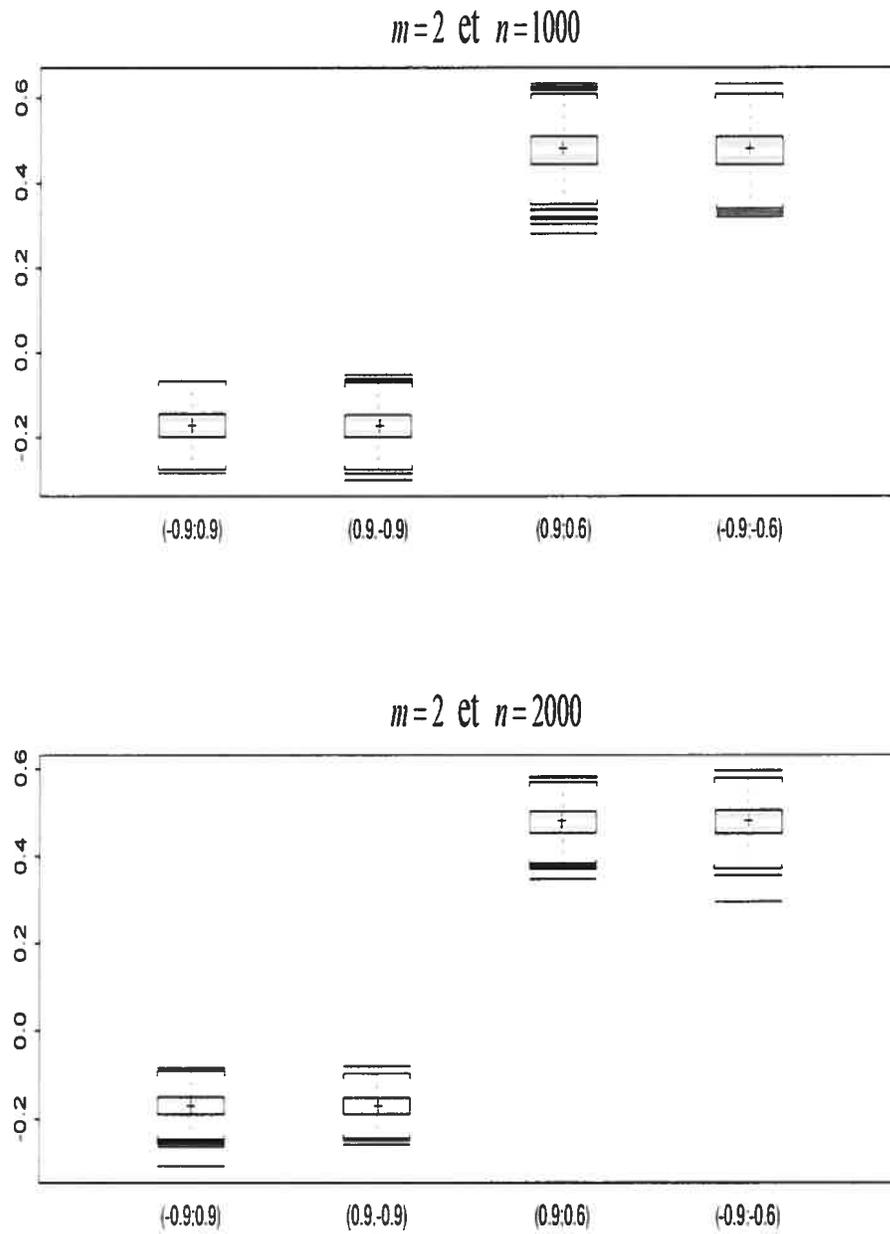


FIGURE. 5.3. Diagrammes en boîte des estimations de  $\theta$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=2$  et  $n=1000, 2000$ .

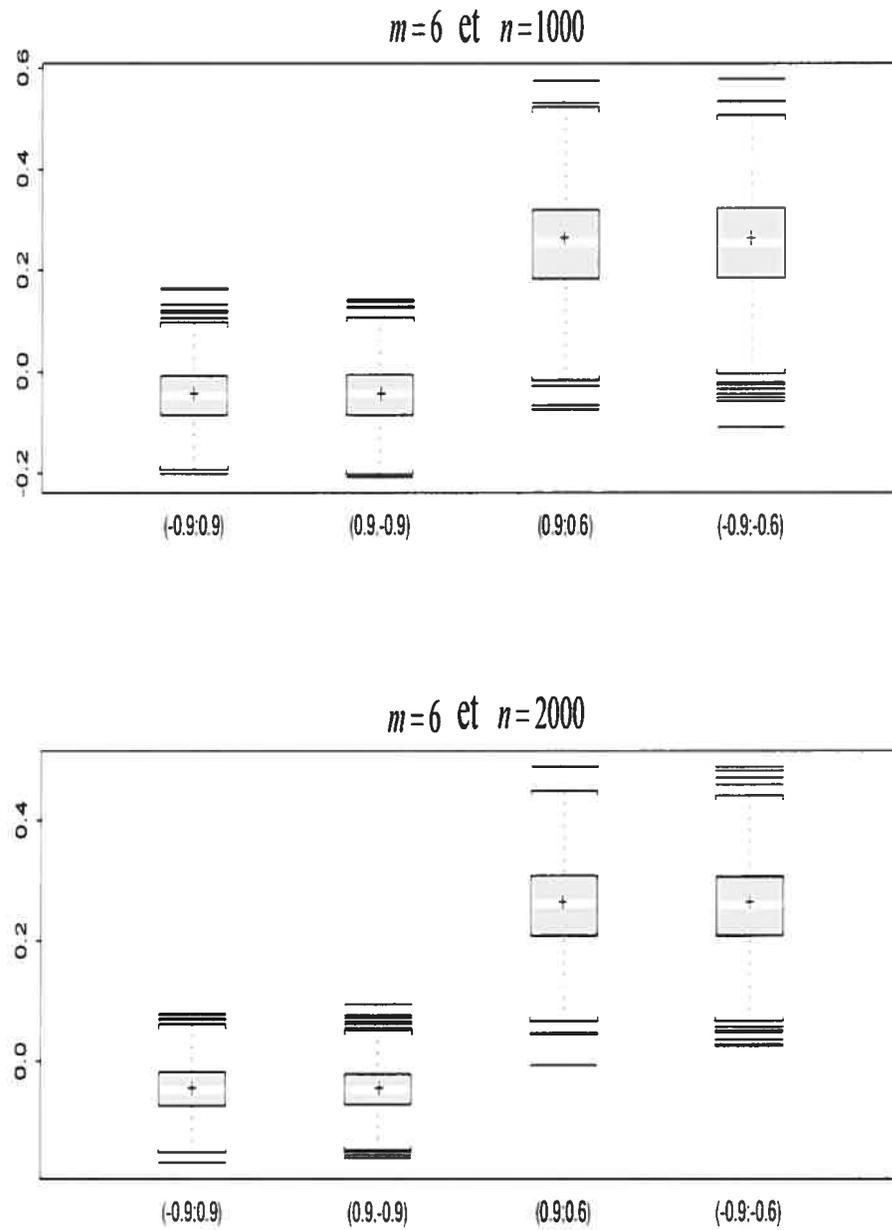


FIGURE. 5.4. Diagrammes en boîte des estimations de  $\theta$  basés sur 1000 réalisations, pour  $m=6$  et  $n=1000, 2000$ .

## CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous avons obtenu des conditions sous lesquelles l'agrégation et l'échantillonnage systématique de processus *ARMA* forts résultent en de nouveaux processus *ARMA* faibles, c'est-à-dire que les erreurs sont non corrélées mais dépendantes. À l'aide de simulations de Monte Carlo, nous avons vérifié si la dépendance des erreurs est facile à détecter en pratique. Nous avons aussi étudié l'effet de la dépendance des erreurs sur la variabilité des estimateurs des paramètres *AR* et *MA*.

Pour détecter la dépendance des erreurs, nous avons comparé les proportions de rejet des tests de Ljung-Box standard et modifié. Il en ressort que les tests d'adéquation de Ljung-Box sont peu puissants pour détecter la dépendance des erreurs et ce, autant pour l'agrégation que pour l'échantillonnage systématique. En ce qui attrait à la variabilité des estimateurs *AR* et *MA*, nous avons vu que pour certaines valeurs du paramètre *AR* (valeurs près de zéro) pour l'agrégation, l'écart type exact est assez loin de l'écart type asymptotique obtenu sous l'hypothèse de bruit blanc fort. D'où l'importance, lors de la modélisation de séries agrégées d'utiliser les écarts types valides pour des modèles *ARMA* faibles.

Il ressort de notre étude de simulation que la dépendance des erreurs dans la modélisation *ARMA* de séries agrégées est difficile à détecter. Soit que la dépendance est très faible ou bien que les outils statistiques utilisés ne sont pas suffisamment puissants. Dans la première éventualité, l'utilisation de mesures de dépendance (autres que la corrélation) devrait permettre de quantifier cette dépendance. Dans la seconde éventualité, il serait intéressant d'utiliser le test récent

proposé par Francq et Zakoïan (2005) pour confronter les hypothèses "*ARMA* fort" et "*ARMA* faible". Ces points feront sûrement l'objet de futures recherches.

## BIBLIOGRAPHIE

---

ABRAHAM, B. (1982). Temporal Aggregation and Time Series. *International Statistical Review*, 50, 285-291.

AHSANULLAH, M. ET WEI, W. S. (1984). The Effects of Time Aggregation on the AR(1) Process. *Computational Statistics Quarterly*, 1, 343-352.

AMEMIYA, T. ET WU, R. Y. (1972). The Effect of Aggregation on Prediction in the Autoregressive Model. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 628-632.

BOX, G. E. P. ET JENKINS, G. M. (1970). *Time Serie Analysis : Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco.

BOX, G. E. P. ET PIERCE, D. A. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1509-1526.

BREWER, K.B.R. (1973). Some Consequences of Temporal Aggregation and Systematic Sampling for ARMA and ARMAX Models. *Journal of Econometrics*, 1, 133-154.

BROCKWELL, P.J. ET DAVIS, R.A (1991). *Time Series : Theory and Methods*, 2e édition, Springer, New York.

BROCKWELL, P.J. ET DAVIS, R.A (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2e édition, Springer, New York.

DAVIS, N., TRIGGS, C. M. ET NEWBOLD, P. (1977). Significance Levels of the Box-Pierce Portmanteau Statistic in Finite Samples. *Biometrika*, 64, 517-522.

FRANCQ, C., ROY, R. ET ZAKOÏAN, J.-M. (2003). Goodness-of-fit Test for ARMA Models with Uncorrelated Errors. Rapport de recherche CRM-2925, Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal.

- FRANCQ, C., ROY, R. ET ZAKOÏAN, J.-M. (2005). Diagnostic Checking in ARMA Models With Uncorrelated Errors. *Journal of the American Statistical Association*, 100, 532-544.
- FRANCQ, C. ET ZAKOÏAN, J.-M. (2005). HAC Estimation and Strong Linearity Testing in Weak ARMA Models. Rapport de recherche, GREMARS, Université Lille 3.
- GRAYBILL, F.A. (1976). *Theory and Application of the Linear Model*, Duxbury Press, Belmont, CA.
- LJUNG, G. M. ET BOX, G. E. P. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 65, 297-303.
- PINO, A. F., MORETTIN, A. P. ET MENTZ R. P. (1987). Modelling and Forecasting Linear Combinations of Time Series. *International Statistical Review*, 55, 295-313.
- PROTHERO, D. L. ET WALLIS, K. F. (1976). Modeling Macroeconomic Time Series (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, series A*, 139, 468-500.
- SERFLING, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, New York.
- STRAM, D. O. ET WEI, W. S. (1986). Temporal Aggregation in the ARIMA Process. *Journal of Times Series Analysis*, 7, 279-292.
- TELES, P. ET WEI, W. S. (2002). The Use of Aggregate Time Series in Testing for Gaussianity. *Journal of Time Series Analysis*, 23, 95-116.
- TIAO, G. C. (1972). Asymptotic Behaviour of Temporal Aggregates of Time Series. *Biometrika*, 59, 525-531.
- WEI, W. S. (1981). Effect of Systematic Sampling on ARIMA Models. *Communications in Statistics*, A10, No. 23, 2389-2398.
- WEI, W. S. (1990), *Time Series Analysis : Univariate and Multivariate Methods*, Addison-Wesley Pub., Redwood City, Californie.
- WEISS, A. A. (1984). Systematic Sampling and Temporal Aggregation in Time Series Models. *Journal of Econometrics*, 26, 271-281.

# CODE S-PLUS

---

## .1. AGRÉGATION

```
agregation=function(m,serie)
{n=length(serie)/m
y=1 :n
for(i in 1 :n)
{ t=0
j=0
for(j in 0 :(m-1))
{t=serie[(m*i)-j]+t}
y[i]=t}
y}
```

## .2. ECHANTILLONNAGE SYSTÉMATIQUE

```
EchanSystematique=function(x,m)
{n<-length(x)
ifn<-round(n/m)
yt<-NULL
for( i in 1 :ifn)
{ yt[i]=x[m*i]}
yt=yt
}
```