Université de Montréal

Les inégalités de Bernstein

par

Frédéric Lesage

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

février 2006

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Les inégalités de Bernstein

présenté par

Frédéric Lesage

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Paul M. Gauthier

(président-rapporteur)

Richard Fournier

(directeur de recherche)

André Giroux

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

13-02-06

SOMMAIRE

Ce mémoire est d'abord une présentation de quelques preuves connues de l'inégalité fameuse de Bernstein pour les polynômes algébrique et trigonométriques à coefficients complexes.

Nous présenterons ensuite une étude détaillée des cas d'égalité d'un raffinement de l'inégalité de Bernstein dû à Ruscheweyh. Pour cela nous étudierons en profondeur un article récent de Dryanov et Fournier.

Nous nous attarderons finalement à déterminer les polynômes extrémaux d'une classe de raffinements de l'inégalité obtenus récemment par Frappier, Rahman et Ruscheweyh.

Mots-clés : Polynômes algébriques, polynômes trigonométriques, inégalité de Bernstein.

SUMMARY

This masters thesis is a presentation of several known proofs of Bernstein's inequality for algebraic and trigonometric polynomials with complex coefficients.

We will then present a detailed study of Ruscheweyh's equality case of one of the refinements of Bernstein's inequality. For this we will study in detail a recent paper by Dryanov and Fournier.

We will finally determine the extremal polynomials of a class of refinements of Bernstein's inequality that were first obtained by Frappier, Rahman and Ruscheweyh.

Keywords : Algebraic polynomials, trigonometric polynomials, Bernstein's inequality.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, monsieur Richard Fournier, pour m'avoir accepté comme étudiant et pour m'avoir donné le privilège de travailler sur le sujet de ce mémoire.

Sa direction et ses conseils non seulement m'ont inspiré ce mémoire mais aussi m'ont gardé sur la bonne voie.

Je tiens également à remercier ma famille pour le support inconditionel qu'ils m'ont apporté.

Enfin, je témoigne de ma reconnaissance à tous les employés du département de mathématiques de l'Université de Montréal pour leur aide efficace.

INTRODUCTION

Considérons un polynôme de degré n, bien entendu de module borné sur le disque unité du plan complexe. Que peut-on dire de la taille de sa dérivée ? L'inégalité de Bernstein répond à cette question en montrant que le module de la dérivée est en quelque sorte comparable au maximum sur le disque unité du module du polynôme.

La forme classique de l'inégalité de Bernstein est

$$\|p'\| \leq n\|p\|, \ n \geq 1$$

pour tout polynôme p de degré plus petit ou égal à n. Ici

$$\|q\| = \max_{|z|\leq 1} |q(z)|$$

pour chaque polynôme q de degré plus petit ou égal à n. En outre, les polynômes p pour lesquels $\|p'\| = n\|p\|$ sont uniquement des monômes de degré n ou la constante identiquement nulle. Dans ce contexte nous appellerons ces polynômes des polynômes extrémaux.

Une extension de ce résultat aux polynômes trigonométriques a été démontrée par S. Bernstein pour les polynômes sinusoïdaux et aussi pour les polynômes cosinusoïdaux en 1912. La forme de l'inégalité de Bernstein présentée ci-dessus fut d'abord trouvée par M. Riesz en 1914.

Dans ce document nous allons étudier quelques preuves de l'inégalité de Bernstein, quelques raffinements de la même inégalité ainsi que les polynômes extrémaux pour ces raffinements. L'inspiration de cette étude des cas d'égalité est principalement due à un article de Dryanov et Fournier de 2002 où ils ont démontré que les polynômes extrémaux du raffinement

$$|zp'(z)| + \frac{2n}{n+2}|a_0| \leq n\|p\|, \ n \geq 2, \ |z| \leq 1,$$

a_0 étant le coefficient constant du polynôme p de degré plus petit ou égal à n, sont tout simplement les monômes de degré n ou le polynôme identiquement nul.

Ce résultat est élégant dans sa simplicité et aussi par le fait que le cas d'égalité de l'inégalité de Bernstein dans sa forme classique conduit aux mêmes polynômes extrémaux. Ceci mène à l'étude des cas d'égalité des raffinements :

$$|zp'(z) - \lambda p(z)| + d_n|a_0| \leq (n-\lambda)\|p\|, \qquad n \geq 2, \ \ 0 \leq \lambda < \frac{n}{2}, \tag{1}$$

$$|zp'(z) - \frac{1}{2}a_n z^n| + d_n|a_0| \leq (n - \frac{1}{2})\|p|, \qquad n \geq 2, \tag{2}$$

$$|zp'(z) - \big(p(z) - p(0)\big)| + d_n|a_0| \leq (n-1)\|p\|, \qquad n \geq 2, \tag{3}$$

$$|p(Rz) - p(z)| + d_n|a_0| \leq (R^n - 1)\|p\|, \qquad n \geq 2, \ \ R > 1, \tag{4}$$

$$|zp'(z)| + d_n|a_1| \leq n\|p\|, \qquad n \geq 2, \tag{5}$$

$$|zp'(z)| + d_n|a_2| \leq n\|p\|, \qquad n \geq 6. \tag{6}$$

Ces raffinements ont été démontrés dans une série d'articles par Frappier, Rahman et Ruscheweyh. L'initiative de ces raffinements remonte à des séminaires de l'Université de Montréal en 1982 où Ruscheweyh nous a fourni le cas particulier de l'inégalité (1) avec $\lambda = 0$. L'objet de cette étude est de démontrer les étapes principales qui nous ont permis de répondre à la question suivante : Est-ce que les polynômes extrémaux des variations ci-dessus de l'inégalité de Bernstein sont des monômes ?

Chapitre 1

QUELQUES RÉSULTATS DE LA THÉORIE DES SÉRIES DE FOURIER

Dans ce chapitre nous ferons un rappel de quelques résultats de la théorie des séries de Fourier. Les résultats de ce chapitre peuvent être retrouvés dans **[11]** et **[13]**. Nous allons utiliser ceci dans le chapitre suivant où nous démontrerons l'inégalité de Bernstein.

Les notations suivantes seront utilisées tout au long de ce document. La partie réelle de $z \in \mathbb{C}$ est $\Re z$. La partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ est $\Im z$. Nous dénotons $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1\}$, le disque unité fermé du plan complexe. Nous dénotons $\mathring{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, le disque unité ouvert du plan complexe. Nous dénotons $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$, le cercle unité du plan complexe. Nous dénotons par $\mathbb{P}_n$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes, c'est à dire que si $p \in \mathbb{P}_n$, alors $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ où $a_\nu \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $p \in \mathbb{P}_n$, dénotons $||p|| = \sup_{z \in \bar{\mathbb{D}}} |p(z)|$.

1.1. Le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejér

Etudions en détail le noyau de Dirichlet.

Définition 1.1.1 (Le noyau de Dirichlet). *Le polynôme trigonométrique*

$$D_m(\theta) = \sum_{\mu=-m}^{m} e^{i\mu\theta}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

est appelé le noyau de Dirichlet.

Nous avons le résultat immédiat :

Théorème 1.1.1 (Le noyau de Dirichlet).

$$\textit{Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \quad D_m(\theta) = \frac{\sin[(m+\frac{1}{2})\theta]}{\sin(\frac{\theta}{2})}. \tag{1.1}$$

DÉMONSTRATION. D'après les propriétés des fonctions exponentielles, on voit que,

$$\begin{aligned}
D_m(\theta) &= 1 + \sum_{\mu=1}^{m} e^{i\mu\theta} + e^{-i\mu\theta} = 1 + 2\Re \sum_{\mu=1}^{m} e^{i\mu\theta} \\
&= 1 + 2\Re[\frac{e^{i\theta} - e^{i(m+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}] \\
&= 1 + 2\Re[\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}] - 2\Re[\frac{e^{i(m+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}] \\
&= 1 + 2\Re[\frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta})}{2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}}] - 2\Re[\frac{(e^{i(m+1)\theta})e^{-\frac{i\theta}{2}}}{(1 - e^{i\theta})e^{-\frac{i\theta}{2}}}] \\
&= 1 + \Re[\frac{e^{i\theta} \; - \; 1}{1 - \cos\theta}] - 2\Re[\frac{e^{i(m+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}] \\
&= 1 - 1 - \frac{\Re[ie^{i(m+\frac{1}{2})\theta}]}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin[(m+\frac{1}{2})\theta]}{\sin\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Regardons maintenant en détail le noyau de Fejér.

Définition 1.1.2 (Le noyau de Fejér). *La somme*

$$K_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} D_m(\theta) \ \textit{où} \ \theta \in \mathbb{R}$$

est appelée le noyau de Fejér.

Remarque 1.1.1. *Voici une propriété des fonctions trigonométriques que nous allons utiliser dans le théorème suivant :*

$$1 - \cos[(n+1)\theta] = (1 - \cos\theta)[n + 1 + 2\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta)].$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que pour $n = 1$,

$$\begin{aligned}
1 - \cos[(n+1)\theta] &= 1 - \cos(2\theta) \\
&= 2(1 - cos\theta)(1 + \cos\theta) \\
&= (1 - \cos\theta)[2 + 2(n + 1 - 1)\cos\theta] \\
&= (1 - \cos\theta)[n + 1 + 2\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta)].
\end{aligned}$$

Ensuite, en raisonnant par récurrence, nous déduisons que la propriété trigonométrique :

$$1 - \cos[(n+1)\theta] = (1 - \cos\theta)[n + 1 + 2\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta)]$$

est vraie pour $n \geq 1$. $\square$

Ceci mène au résultat suivant :

Théorème 1.1.2 (Le noyau de Fejér). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$K_n(\theta) = 1 + \frac{2}{n+1}\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta) \geq 0. \tag{1.2}$$

DÉMONSTRATION. D'après (1.1) ,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n} D_m(\theta) &= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}\sum_{m=0}^{n}\sin[(m + \frac{1}{2})\theta] = \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}\mathrm{Im}\sum_{m=0}^{n} e^{i(m+\frac{1}{2})\theta} \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}\mathrm{Im}[\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{3}{2})\theta}}{1 - e^{i\theta}}] = \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}\mathrm{Im}[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}] \\
&= \frac{1 - \cos[(n+1)\theta]}{2\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{1 - \cos[(n+1)\theta]}{1 - \cos\theta}.
\end{aligned}$$

Il est maintenant évident que $K_n(\theta) = \frac{1-\cos[(n+1)\theta]}{(n+1)(1-\cos\theta)} \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
K_n(\theta) &= \frac{1 - \cos[(n+1)\theta]}{(n+1)(1 - \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{n+1}[n + 1 + 2\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta)] \\
&= 1 + \frac{2}{n+1}\sum_{m=1}^{n}(n + 1 - m)\cos(m\theta).
\end{aligned}$$

$\square$

1.2. Les fonctions 2π-périodiques

Pour une preuve de l'inégalité de Bernstein dans le prochain chapitre, nous avons besoin d'étudier les sommes de Césaro d'une fonction continue et 2π-périodique arbitraire. Soit g une telle fonction.

Soit $\sum_{\eta=-\infty}^{\infty} c_\eta e^{i\eta\theta}$ sa représentation en série de Fourier où $c_\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-i\eta\phi}d\phi$. Dénotons la $\nu^{\text{ième}}$ somme partielle de g par $S_\nu(\theta; g) = \sum_{\eta=-\nu}^{\nu} c_\eta e^{i\eta\theta}$. Dénotons aussi la moyenne arithmétique des sommes partielles de g par $\sigma_m(\theta; g) = \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} S_\nu(\theta; g)$. La section 1.1. implique que

$$\begin{aligned}
S_\nu(\theta; g) &= \sum_{\eta=-\nu}^{\nu}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)e^{-i\eta\phi}d\phi]e^{i\eta\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\sum_{\eta=-\nu}^{\nu} e^{i(\theta-\phi)\eta}d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)D_\nu(\theta-\phi)d\phi.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_m(\theta; g) &= \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} S_\nu(\theta; g) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)D_\nu(\theta-\phi)d\phi] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)[\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} D_\nu(\theta-\phi)]d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)K_m(\theta-\phi)d\phi \\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} g(\theta-\phi)K_m(\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)K_m(\phi)d\phi
\end{aligned}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Nous allons aussi avoir besoin de la remarque suivante.

Remarque 1.2.1. *Pour toute fonction g continue et 2π-périodique,*

$$\sigma_m(\theta; g) = \frac{1}{m+1}\sum_{\eta=-m}^{m}(m+1-|\eta|)c_\eta e^{i\eta\theta}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\sigma_m(\theta; g) &= \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m} S_\nu(\theta; g) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\eta=-\nu}^{\nu} c_\eta e^{i\eta\theta} \\
&= \frac{1}{m+1}[c_0 + \sum_{\eta=-1}^{1} c_\eta e^{i\eta\theta} + \sum_{\eta=-2}^{2} c_\eta e^{i\eta\theta} + \ \ldots \ + \sum_{\eta=-m}^{m} c_\eta e^{i\eta\theta}] \\
&= \frac{1}{m+1}[\sum_{\eta=0}^{m}(m+1-\eta)c_\eta e^{i\eta\theta} + \sum_{\eta=-m}^{-1}(m+1+\eta)c_\eta e^{i\eta\theta}] \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{\eta=-m}^{m}(m+1-|\eta|)c_\eta e^{i\eta\theta}.
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant est le résultat de ce chapitre qui nous permettra de prouver l'inégalité de Bernstein au prochain chapitre :

Théorème 1.2.1. *Supposons que g soit une fonction continue 2π-périodique telle que $|g(\theta)| \leq M$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$|\ \sigma_m(\theta; g)| \leq M \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R},$$

avec égalite si et seulement si il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $g(\theta) = Me^{i\gamma}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. D'après (1.2),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 + \frac{2}{m+1}\sum_{\mu=1}^{m}(m+1-\mu)\cos(\mu\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta + \frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{\mu=1}^{m}(m+1-\mu)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mu)d\theta = 1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|\ \sigma_m(\theta;g)| &=|\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)K_m(\phi)d\phi\ | \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\ g(\theta-\phi)\ |\ K_m(\phi)d\phi \\
&\leq \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(\phi)d\phi \\
&= M.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas d'égalité. Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $g(\theta) = Me^{i\gamma}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
|\ \sigma_m(\theta;g)| &=|\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Me^{i\gamma}K_m(\phi)d\phi\ | \\
&=|\ \frac{Me^{i\gamma}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(\phi)d\phi\ | \\
&= M.
\end{aligned}$$

Inversement, supposons que $|\ \sigma_m(\theta;g)| = M$. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|g(\alpha)| < M$, par continuité on aura,

$$\begin{aligned}
M &=|\ \sigma_m(\theta;g)| \\
&=|\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)K_m(\phi)d\phi\ | \\
&< M(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(\phi)d\phi) \\
&= M.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction. Et donc $|g(\theta)| = M,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

Chapitre 2

TROIS PREUVES CLASSIQUES DE L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

Nous allons dans ce chapitre prouver l'inégalité de Bernstein de trois manières différentes.

2.1. L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

Voici le résultat classique qu'on peut retrouver dans [**13**, chapitre 14].

Théorème 2.1.1 (L'inégalité de Bernstein). *Soit $p \in \mathbb{P}_n$. Alors,*

$$|p\,'(z)| \leq n\|p\| \quad \forall z \in \bar{\mathbb{D}},$$

avec égalité en un point $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ si et seulement si il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $p(z) \equiv \|p\|e^{i\gamma}z^n$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$. Définissons le polynôme trigonométrique $g(\theta) = e^{in\theta}p(e^{-i\theta})$. Notons que,

$$g(\theta) = e^{in\theta}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{-i\nu\theta} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}e^{i\nu\theta}.$$

Et d'après la remarque 1.2.1. ,

$$\begin{aligned}
\sigma_{n-1}(-\theta; g) &= \frac{1}{(n-1)+1} \sum_{\mu=-(n-1)}^{n-1} [(n-1)+1-|\mu|)a_{n-\mu}e^{i\mu(-\theta)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(n-\mu)a_{n-\mu}e^{-i\mu\theta} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k e^{i(k-n)\theta} \quad \text{(avec un changement de variable)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k (e^{i\theta})^{k-1} e^{i(1-n)\theta} \\
&= \frac{1}{n} e^{-i(n-1)\theta} p\,'(e^{i\theta}). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$|g(\theta)| = |e^{in\theta}p(e^{-i\theta})| = |p(e^{-i\theta})| \leq \|p\|, \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Et donc en appliqant le théorème 1.2.1. à (2.1),

$$|\ \sigma_{n-1}(-\theta; g)| = |\frac{e^{-i(n-1)\theta}}{n} p\,'(e^{i\theta})| = \frac{1}{n}|p\,'(e^{i\theta})| \leq \|p\|, \ \forall\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Supposons maintenant que $|p'(e^{i\theta}| = n\|p\|$. Alors $|\sigma_{n-1}(-\theta; g)| = \|p\|$. Par le Théorème 1.2.1., g est constante et on voit facilement que p est un monôme de degré n ou bien $p \equiv 0$. $\square$

2.2. Quelques lemmes utiles

Les deux lemmes suivants sont nécessaires pour établir la formule de Riesz, qui nous mènera à une extension importante de l'inégalité de Bernstein. Les résultats suivants concernant la formule de Riesz peuvent être retrouvés dans [**13**, chapitre 14].

Définition 2.2.1. *Dénotons par τ_n la classe des polynômes trigonométriques de la forme $t(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}, \ a_k \in \mathbb{C}$.*

Remarque 2.2.1. *Nous aurons besoin de l'identité suivante pour la preuve du prochain lemme :*

$$\frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu} = n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(e^{ij\nu} + e^{-ij\nu}), \ \forall\nu \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} n + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(e^{ij\nu} + e^{-ij\nu}) &= n + 2\Re\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)e^{ij\nu} = n + 2\Re\sum_{k=1}^{n-1} ke^{i(n-k)\nu} \\ &= n + 2\Re[ie^{in\nu}(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\nu})'] = n + 2\Re[ie^{in\nu}(\frac{1-e^{-in\nu}}{1-e^{-i\nu}})'] \\ &= n + 2\Re[ie^{in\nu}\frac{(ine^{-in\nu} - ie^{-i\nu})}{(1-e^{-i\nu})^2}] \\ &= \Re(\frac{-n + ne^{-i2\nu} - 2e^{-i\nu} + 2e^{i(n-1)\nu}}{(1-e^{-i\nu})^2}) \\ &= 2\Re[\frac{e^{i(n-1)\nu} - e^{-i\nu} - 2e^{in\nu} + 2 + e^{i(n+1)\nu} - e^{i\nu}}{(1-e^{-i\nu})^2(1-e^{i\nu})^2}] \\ &= 2\Re(\frac{1-e^{in\nu}}{2-2\Re e^{i\nu}}) = \frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu}. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant peut être trouvé dans [**3**].

Lemme 2.2.1. *Pour tout $p \in \mathbb{P}_n$ et pour tout $\gamma, \psi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i(\gamma+\psi)}p\,'(e^{i\psi}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\nu+\gamma)\frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu}p(e^{i(\psi-\nu)})d\nu.$$

DÉMONSTRATION. Soit $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{P}_n$. Alors, pour tout $\psi, \gamma \in \mathbb{R}$, nous avons

$$e^{i(\gamma+\psi)}p\,'(e^{i\psi}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k e^{i(k\psi+\gamma)}.$$

D'après la remarque 1.2.1. et en appliquant la propriété : $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu\nu}d\nu = \begin{cases} 0 \text{ si } \mu\neq 0 \\ 2\pi \text{ si } \mu = 0 \end{cases}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\nu+\gamma)\frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu}p(e^{i(\psi-\nu)})d\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{i(n\nu+\gamma)}+e^{-i(n\nu+\gamma)}][n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(e^{ij\nu}+e^{-ij\nu})]\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ik(\psi-\nu)}d\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ik(\psi+\gamma)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)\nu}(n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)e^{ij\nu})d\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ik(\psi+\gamma)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)\nu}(\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)e^{ij\nu})d\nu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ik(\psi+\gamma)}2\pi[n-(n-k)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}k a_k e^{ik(\psi+\gamma)}.$$

□

Lemme 2.2.2. *Supposons que $t \in \tau_{n-1}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t(\theta)d\theta = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}t(\frac{2j\pi}{n}+\gamma).$$

DÉMONSTRATION. Soit $t \in \tau_{n-1}$ tel que

$$t(\theta) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}a_k e^{ik\theta} = a_0 + \sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1}a_k e^{ik\theta}.$$

Alors, en appliquant $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\mu\nu}d\nu = \{{}^{o\ \text{si}\ \mu\neq 0}_{2\pi\ \text{si}\ \mu=0}$ on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t(\theta)d\theta = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\frac{a_k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\theta}d\theta = a_0.$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}t(\frac{2j\pi}{n}+\gamma) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(a_0+\sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1}a_k e^{ik(\frac{2j\pi}{n}+\gamma)})$$

$$= a_0 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1}a_k e^{ik\gamma}\sum_{j=0}^{n-1}(e^{i\frac{2k\pi}{n}})^j$$

$$= a_0 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=-(n-1)\\k\neq 0}}^{n-1}a_k e^{ik\gamma} = a_0.$$

Et donc,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)d\theta = a_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} t(\frac{2j\pi}{n}+\gamma).$$

□

2.3. La formule de Riesz

Nous allons maintenant utiliser la formule de Riesz pour obtenir une extension de l'inégalité de Bernstein. On peut utiliser les résultats de la section 2.2 pour donner une preuve nouvelle de la formule d'interpolation de Riesz. On pourra comparer cette preuve à celle donnée dans le livre [**13**, page 511].

Théorème 2.3.1. *Si $t \in \tau_n$, alors*

$$t\,'(\psi) = \sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^{\nu}\lambda_\nu t(\psi-\theta_\nu),\ \forall\ \psi \in \mathbb{R},$$

où $\lambda_\nu = \frac{1}{n(2\sin(\frac{\theta_\nu}{2}))^2}$ *et* $\theta_\nu = \frac{2\nu-1}{2n}\pi$ *avec* $1 \leq \nu \leq 2n$.

Démonstration. Supposons que $p \in \mathbb{P}_n$ et que $\gamma\ ,\psi \in \mathbb{R}$. Définissons pour k entier,

$$l_k = \frac{1-\cos(k\pi)}{1-\cos(\frac{k\pi}{n})} \quad ; \quad 0 \leq k < 2n.$$

Il est clair que $l_k = \begin{cases} 0 & \text{si k est pair} \\ \frac{2}{1-\cos(\frac{k\pi}{n})} & \text{si k est impair} \\ n^2 & k=0 \end{cases}$. Posons

$$t(\nu) = \cos(n\nu+\gamma)\frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu}p(e^{i(\psi-\nu)}).$$

Remarquons que

$$t(\nu) = \frac{e^{i(n\nu+\gamma)}+e^{-i(n\nu+\gamma)}}{2}[n+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(e^{ij\nu}+e^{-ij\nu})p(e^{i(\psi-\nu)})].$$

Ceci met en évidence le fait que t est un polynôme de degré inférieur à $3n-1$. Et donc $t \in \tau_{4n-1}$. Cela nous permet d'appliquer le lemme 2.2.2. au polynôme $t(\theta)$. Nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(\nu)d\nu = \frac{1}{4n}\sum_{j=0}^{4n-1} t(\frac{j\pi}{2n}-\frac{\gamma}{n}).$$

Maintenant, en utilisant le lemme 2.2.1. ,

$$
\begin{aligned}
e^{i(\gamma+\psi)}p\,'(e^{i\psi}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\nu+\gamma)\frac{1-\cos(n\nu)}{1-\cos\nu}p(e^{i(\psi-\nu)})d\nu \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(\nu)d\nu \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{4n-1} t(\frac{j\pi}{2n}-\frac{\gamma}{n}) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{\substack{j=0\\ jpair}}^{4n-1}\cos(\frac{j\pi}{2})\frac{1-\cos(\frac{j\pi}{2}-\gamma)}{1-\cos(\frac{j\pi}{2n}-\frac{\gamma}{2})}p(e^{i(\psi-\frac{j\pi}{2n}+\frac{\gamma}{n})}) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{1-\cos(k\pi-\gamma)}{1-\cos(\frac{k\pi-\gamma}{n})}p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{n}+\frac{\gamma}{n})}). \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Comme (2.2) est vrai pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, nous pouvons choisir $\gamma = 0$.

$$
\begin{aligned}
e^{i\psi}p\,'(e^{i\psi}) &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\cos(k\pi)l_k p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{n})}) \\
&= \frac{1}{2n}\Big[n^2p(e^{i\psi}) + \sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{impair}}}^{2n-1}(-1)^k\frac{2}{1-\cos(\frac{k\pi}{n})}p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{n})})\Big] \\
&= \frac{n}{2}p(e^{i\psi}) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{impair}}}^{2n-1}\frac{p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{n})})}{1-\cos(\frac{k\pi}{n})}.
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
e^{i\psi}p\,'(e^{i\psi}) - \frac{n}{2}p(e^{i\psi}) = -\frac{1}{2n}\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{impair}}}^{2n-1}\frac{p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{n})})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n})}, \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_n
$$

et donc

$$
e^{i\psi}p\,'(e^{i\psi}) - np(e^{i\psi}) = -\frac{1}{4n}\sum_{\substack{k=1\\ k\ \text{impair}}}^{4n-1}\frac{p(e^{i(\psi-\frac{k\pi}{2n})})}{\sin^2(\frac{k\pi}{4n})}, \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_{2n}.
$$

En posant $k = 2\nu - 1$,

$$
e^{i\psi}p\,'(e^{i\psi}) - np(e^{i\psi}) = -\sum_{\nu=1}^{2n}\lambda_\nu p(e^{i(\psi-\theta_\nu)}), \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_{2n}
$$

ou encore

$$
\left(e^{-in\psi}p(e^{i\psi})\right)' = -\sum_{\nu=1}^{2n}\lambda_\nu i e^{-in\psi}p(e^{i(\psi-\theta_\nu)}), \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_{2n}.
$$

Pour un $t \in \tau_n$ arbitraire posons $p(e^{i\psi}) = e^{in\psi}t(\psi)$. Alors $p \in \mathbb{P}_{2n}$ et d'après la formule précédente

$$t'(\psi) = -\sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu i e^{-in\theta_\nu} t(\psi - \theta_\nu).$$

Nous remarquons maintenant que,

$$-ie^{-in\theta_\nu} = -ie^{-i(\frac{2\nu-1}{2}\pi)} = -ie^{-i\nu\pi}e^{\frac{i\pi}{2}} = e^{-i\nu\pi} = (-1)^\nu.$$

Et finalement,

$$t'(\psi) = \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu (-1)^\nu t(\psi - \theta_\nu), \quad \forall\, t \in \tau_n \text{ et } \forall\, \psi \in \mathbb{R}.$$

□

Remarque 2.3.1. $\sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu = n$, *où λ_ν est défini comme dans le théorème précédent.*

Démonstration. Considérons le polynôme trigonométrique $\sin(n\theta)$. D'après la formule de Riesz,

$$\Big(\sin(n\theta)\Big)' = \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \lambda_\nu \sin(n(\theta - \theta\_nu)).$$

Et donc,

$$n\cos(n\theta) = \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \lambda_\nu \sin(n\theta - n\theta_\nu).$$

En posant $\theta = 0$,

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu+1} \lambda_\nu \sin(\frac{2\nu-1}{2}\pi) \\ &= \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu+1} \lambda_\nu (-1)^{\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu. \end{aligned}$$

□

2.4. L'inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques

Théorème 2.4.1. *Soit $t \in \tau_n$ tel que $|t(\theta)| \leq M$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$|t'(\theta)| \leq Mn \ , \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Nous avons égalité pour un $\theta_0 \in \mathbb{R}$ seulement si t est de la forme,

$$t(\theta) = ae^{in\theta} + be^{-in\theta} \quad où \quad |a| + |b| = M.$$

Démonstration. Encore d'après la formule de Riesz, pour tout $t \in \tau_n$ tel que $|t(\theta)| \leq M$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |t'(\theta)| &= \Big|\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \lambda_\nu t(\theta - \theta_\nu)\Big| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{2n} |\lambda_\nu||t(\theta - \theta_\nu)| \text{ notons que } \lambda_\nu > 0 \\ &\leq M \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu = Mn. \end{aligned}$$

Maintenant, supposons qu'il existe θ_0 tel que $|t'(\theta_0)| = Mn$. On aura

$$Mn = |t'(\theta_0)| = \Big|\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \lambda_\nu t(\theta_0 - \theta_\nu)\Big| \leq \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu |t(\theta_0 - \theta_\nu)| \leq Mn.$$

Donc, $|t(\theta_0 - \theta_\nu)| = M$, pour chaque ν admissible car $\sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu = n$ et aucun des coefficients λ_ν n'est nul. L'égalité,

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu \lambda_\nu t(\theta_0 - \theta_\nu)\Big| = \sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu |t(\theta_0 - \theta_\nu)|$$

implique donc qu'il existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$(-1)^\nu t(\theta_0 - \theta_\nu) e^{i\gamma} = M, \quad \forall \ \nu \in \{1, ..., 2n\},$$

ou

$$(-1)^\nu t(\theta_0 - \theta_\nu) e^{i\gamma} = -M, \quad \forall \ \nu \in \{1, ..., 2n\}.$$

On voit que $t(\theta_0 - \theta_\nu)e^{i\gamma}$ alterne entre M et $-M$. On en tire facilement que $t(\theta)$ a la forme $M \sin\big(n(\theta-\theta_0)\big) + c\cos\big(n(\theta-\theta_0)\big)$,
où c est une constante. Maintenant,

$$\begin{aligned} t(\theta) &= e^{-i\gamma}\Big[\frac{M}{2i}\Big(e^{in(\theta-\theta_0)} - e^{-in(\theta-\theta_0)}\Big) + \frac{c}{2}\Big(e^{in(\theta-\theta_0)} + e^{in(\theta-\theta_0)}\Big)\Big] \\ &= e^{-i\gamma}\Big(\frac{M}{2i}e^{-in\theta_0} + \frac{c}{2}e^{-in\theta_0}\Big)e^{in\theta} + e^{-i\gamma}\Big(-\frac{M}{2i}e^{in\theta_0} + \frac{c}{2}e^{in\theta_0}\Big)e^{-in\theta} \\ &= ae^{in\theta} + be^{-in\theta} \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De plus,

$$|t(\theta-\theta_0)| = M = \max_{\theta\in\mathbb{R}} \left|ae^{in\theta} + be^{-in\theta}\right| = |a| + |b| \leq M,$$

ce qui donne, $|a| + |b| = M$. □

2.5. Une autre preuve de l'inégalité de Bernstein

Nous prouverons maintenant l'inégalité de Bernstein, cette fois à l'aide d'un théorème dû à Lagrange.

Définition 2.5.1. *Une transformation de la forme*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \; (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$$

est appelée une transformation de Möbius.

Dénotons la transformation de Möbius $\eta \mapsto \frac{1-\zeta\eta}{1-z\eta}$, par $T^z_\zeta(\eta)$.

Théorème 2.5.1 (Théorème de Lagrange). *Supposons $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(z) \neq 0, \forall\, z \in \mathring{\mathbb{D}}$. Alors,*

$$p(z) + \frac{\zeta - z}{n}p'(z) \neq 0, \;\; \forall\, \zeta, z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Démonstration. Supposons $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(z) \neq 0, \forall z \in \mathring{\mathbb{D}}$.
Alors, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $p(z) = k\prod_{j=1}^{n}(1-\eta_j z)$ où $\eta_j \in \bar{\mathbb{D}}$. Remarquons que

$$\ln p(z) = \ln k + \sum_{j=1}^{n} \ln(1-\eta_j z)$$

et donc pour tout $\zeta \in \mathring{\mathbb{D}}$,

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j}{1-\eta_j z}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}1 + \frac{\zeta -.z}{n}\frac{p'(z)}{p(z)} &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j(\zeta - z)}{1-\eta_j z} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1 - \frac{\eta_j(\zeta - z)}{1-\eta_j z} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1-\eta_j\zeta}{1-\eta_j z} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_\zeta^z(\eta_j), \ \forall \eta \in \bar{\mathbb{D}}.\end{aligned}$$

Pour $z, \zeta \in \mathring{\mathbb{D}}$, l'image de $\bar{\mathbb{D}}$ par la transformation $\eta \mapsto T_\zeta^z(\eta)$ est un disque ne contenant pas l'origine en son intérieur. Par convexité les nombres $T_\zeta^z(\eta_j)$ appartiennent au même disque et comme ils sont distincts, leur moyenne ne peut être nulle, i.e.,

$$p(z)\Big(1 + \frac{\zeta - z}{n}\frac{p'(z)}{p(z)}\Big) = p(z) + \frac{\zeta - z}{n}p'(z) \neq 0, \ \forall z, \zeta \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

□

La preuve suivante de l'inégalité de Bernstein est essentiellement due à de Bruijn [2].

Théorème 2.5.2 (L'inégalité de Bernstein).
Si $p \in \mathbb{P}_n$, alors

$$|p'(z)| \leq n\|p\|, \ \forall z \in \bar{\mathbb{D}}.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que pout tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|p\|$, nous avons

$$p(z) - \lambda \neq 0, \ \forall z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

D'après le théoreme de Lagrange,

$$p(z) - \lambda + \frac{\zeta - z}{n}p'(z) \neq 0, \ \forall \zeta, z \in \mathring{\mathbb{D}},$$

c'est à dire que

$$p(z) - \frac{z}{n}p'(z) + \frac{\zeta}{n}p'(z) \neq \lambda, \ \forall \zeta, z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Ainsi

$$\left|p(z) - \frac{z}{n}p'(z) + \frac{\zeta}{n}p'(z)\right| \leq \|p\|, \ \forall \zeta, z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Il existe $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ tel que,

$$\left|p(z) - \frac{z}{n}p'(z) + \frac{\zeta_0}{n}p'(z)\right| = \left|p(z) - \frac{z}{n}p'(z)\right| + \left|\frac{p'(z)}{n}\right|, \ \forall z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Et

$$\frac{|p'(z)|}{n} \leq \left|p(z) - \frac{z}{n}p'(z)\right| + \left|\frac{p'(z)}{n}\right| \leq \|p\|, \ \forall z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Finalement, par continuité, nous avons $|p'(z)| \leq n\|p\|, \ \forall z \in \bar{\mathbb{D}}$. □

Chapitre 3

UN RAFFINEMENT DE L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

Dans ce chapitre nous allons raffiner l'inégalité de Bernstein en tenant compte d'un des coefficients du polynôme. L'idée de tels raffinements est principalement due à Ruscheweyh [**12**, chapitre 4]. Dénotons l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathring{\mathbb{D}}$ par $\mathcal{H}(\mathring{\mathbb{D}})$. Définissons $f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. Pour deux fonctions telles que $f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $g_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ dans $\mathcal{H}(\mathring{\mathbb{D}})$, le produit d'Hadamard est

$$f_\infty * g_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k$$

et est une fonction de $\mathcal{H}(\mathring{\mathbb{D}})$. Définissons $\mathcal{B}_n = \{f \in \mathbb{P}_n : f(0) = 1 \text{ et } \|f * p\| \leq \|p\| \text{ , } \forall\, p \in \mathbb{P}_n\}$ et $\mathcal{B}_\infty = \{G \in \mathcal{H}(\mathring{\mathbb{D}}) : G(0) = 1 \text{ et } \|G * f\| \leq \|f\| \text{ ,} \forall f \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{D}})\}$. Enfin définissons $F_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} A_k z^k \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et $F_\infty(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k \in \mathcal{H}(\mathring{\mathbb{D}})$.

3.1. Quelques lemmes utiles

Nous rappelons maintenant le lemme de Schwarz, un lemme utile dans ce chapitre.

Lemme 3.1.1 (Lemme de Schwarz). *Soit f une fonction analytique sur le disque unité ouvert telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathring{\mathbb{D}}$ et $f(0) = 0$. Alors $|f'(0)| \leq 1$ et*

$$|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathring{\mathbb{D}}.$$

Dans chaque cas, l'égalité n'a lieu que pour des multiples de la fonction identité.

Les résultats suivants se trouvent dans [**13**, chapitre 12] et [**12**, chapitre 4].

Définition 3.1.1. *Si la matrice carrée* $\mathbf{H}$ *est telle que* $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^T$*, la matrice* $\mathbf{H}$ *est appelée hermitienne.*

Dénotons la matrice hermitienne correspondante à f_n par

$$M(f_n; n) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ \bar{a}_1 & a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.2. *Le* $m^{ième}$ *mineur principal de* f_∞ *est le déterminant de la matrice hermitienne correspondante à* f_m *que nous allons dénoter par* $\det M(f_\infty; m)$.

Lemme 3.1.2. $F_\infty \in \mathcal{B}_n$ *si et seulement si la forme de Toeplitz-Hermite de* F_∞*,*

$$(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{\mu,\nu=0}^{n} A_{\mu-\nu} z_\mu \bar{z}_\nu, \quad A_0 = 1, A_{-k} = \bar{A}_k, k = 1, \dots, n,$$

est semi définie positive.

Proposition 3.1.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la forme de Toeplitz-Hermite de* F_∞ *soit définie positive est que tous les mineurs pincipaux de la matrice hermitienne correspondante soient positifs.*

Lemme 3.1.3. *Nous avons* $F \in \mathcal{B}_n$ *si et seulement si*

$$F(z) = G(z) + z^{n+1} H(z) \text{ où } G \in \mathcal{B}_\infty \text{ et } H \in \mathbf{H}(\mathring{\mathbb{D}}).$$

En fait la classe $\mathcal{B}_\infty$ est identique à la classe des fonctions normalisées à partie réelle plus grande que $\frac{1}{2}$, d'où le résultat suivant qu'on retrouve dans le livre de Tsuji [**15**, page 153-159] :

Lemme 3.1.4. *(Carathéodory et Toeplitz). Si* $\det M(F_\infty; n) > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$ *alors* $F_\infty \in \mathcal{B}_\infty$*. Réciproquement, supposons que* $F_\infty \in \mathcal{B}_\infty$ *et qu'il existe* $\nu \geq 1$ *tel que* $\det M(F_\infty; \nu) = 0$*. Alors, il existe un nombre* $N \geq 1$ *tel que*

$$\begin{aligned} &\det M(F_\infty; n) > 0 && \text{quand } n = 0, \dots, N-1 \\ &\det M(F_\infty; n) = 0 && \text{quand } n \geq N, \end{aligned}$$

et

$$F_\infty(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1-\zeta_j z},$$

où les coefficients λ_j, $j = 1, ..., N$ sont strictement positifs et les N nombres complexes $\zeta_j \in \partial\bar{\mathbb{D}}$, $j = 1, ..., N$, sont distincts.

3.2. Un raffinement de l'inégalité de Bernstein

Dans ce qui reste du chapitre 3 de ce mémoire nous exposerons les résultats principaux d'un article dû à Dryanov et Fournier [4].

Voici quelques remarques utiles pour la preuve du raffinement de l'inégalité de Bernstein qui nous intéresse. Dénotons $F_{d;\theta}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j}{n} z^j + \frac{d}{n} e^{i\theta} z^n$.

Remarque 3.2.1. *Soit $d_n = \sup\{d \geq 0 : \|p'\| + d|a_0(p)| \leq n\|p\|,\ \forall p \in \mathbb{P}_n\}$. Alors, $d_n = \sup\{d \geq 0 : F_{d;\theta} \in \mathcal{B}_n, \forall\theta \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. Définissons, $\tilde{p}(z) = z^n p(\frac{1}{z})$ et observons que si $p \in \mathbb{P}_n$ et que si nous représentons p par $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, alors $p'(z) = \frac{1}{z}\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^\nu$ et aussi $\tilde{(p')}(z) = z\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{n-\nu}$. De plus remarquons que $\|\tilde{p}\| = \sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |z^n||p(\frac{1}{z})| = \|p\|$,$\forall\ p \in \mathbb{P}_n$. Maintenant,

$$\begin{aligned}
\|p'\| + d|a_0| \leq n\|p\| &\Leftrightarrow \frac{1}{n}\|\tilde{(p')}\| + \frac{d}{n}|a_0| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} \Big|z\sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu z^{n-\nu}\Big| + \frac{d}{n}|a_0| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} \Big|z\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)a_{n-j} z^j\Big| + \frac{d}{n}|a_0| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n) \\
&\Leftrightarrow \Big|\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)}{n} a_{n-j} z^j + a_0 \frac{de^{i\theta}}{n} z^n\Big| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n, \theta \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \Big|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^j * \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j}{n} z^j + \frac{de^{i\theta}}{n} z^n\Big)\Big| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n, \theta \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \Big|\tilde{p}(z) * F_{d;\theta}(z)\Big| \leq \|\tilde{p}\| \quad (\forall\ p \in \mathbb{P}_n, \theta \in \mathbb{R}, z \in \bar{\mathbb{D}}) \\
&\Leftrightarrow F_{d;\theta} \in \mathcal{B}_n \ (\forall\theta \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

et donc, $d_n = \sup\{d \geq 0 : F_{d;\theta} \in \mathcal{B}_n, \forall\theta \in \mathbb{R}\}$. □

Remarque 3.2.2. *Le $k^{\text{ième}}$ mineur principal de $F_{d;\theta}$,* $\det M(F_{d;\theta};k)$*, vaut* $\frac{2n-k}{n^{k+1}}2^{k-1}$ *et ainsi* $\det M(F_{d;\theta};k)>0,\ \forall k\leq n-1$.

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\det M(F_{d;\theta};k)=\frac{1}{n^{k+1}}\det\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & n-k \\ n-1 & n & n-1 & \dots & n-(k-1) \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n-(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-k & n-(k-1) & n-(k-2) & \dots & n \end{pmatrix}.$$

En soustrayant la $j^{\text{ième}}$ colonne de la $(j+1)^{\text{ième}}$ colonne $(1\leq j\leq k)$ et ensuite en ajoutant la $(k+1)^{\text{ième}}$ rangée à la première rangée nous obtenons

$$\det M(F_{d;\theta};k)=\frac{1}{n^{k+1}}\begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ n-1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ n-2 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-k & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{k+1}=\frac{1}{n^{k+1}}\begin{vmatrix} 2n-k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ n-2 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-k & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{2n-k}{n^{k+1}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{k}=\frac{2n-k}{n^{k+1}}\begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{k}$$

$$=\frac{2n-k}{n^{k+1}}2^{k-1}>0.$$

$\square$

Remarque 3.2.3. *Le $n^{\text{ième}}$ mineur principal de $F_{d;\theta}$ satisfait à*

$$\det M(F_{d;\theta};n)\geq\frac{2^{n-1}}{n^n}(1+\frac{d}{2})(1-\frac{n+2}{2n}d).$$

DÉMONSTRATION.

$$\det M(F_{d;\theta};n) = \frac{1}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 & d_n e^{i\theta_n} \\ n-1 & n & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_n e^{-i\theta_n} & 1 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$= \frac{1}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{n+1} + (-1)^n \frac{de^{-i\theta}}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n-1 & n-2 & \dots & 0 \\ n & n-1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \dots & n & n-1 \end{vmatrix}_{n}$$

$$+ (-1)^n \frac{de^{i\theta}}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n-1 & n & \dots & 2 \\ n-2 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}_{n} - \frac{d^2}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \dots & n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{2n-n}{n^{n+1}} 2^{n-1} + (-1)^n \frac{2d\Re e^{i\theta}}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} -1 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 2 & \dots & n-1 & n & n-1 \end{vmatrix} - \frac{d^2(n+2)}{n^2 n^{n-1}} 2^{n-3}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{n^n} + \frac{2(-1)^n d\cos\theta}{n^{n+1}} (-2)^{n-2} - \frac{2^{n-3} d^2 (n+2)}{n^{n+1}}$$

$$\geq \frac{2^{n-1}}{n^n} \left(1 - \frac{d}{n} - \frac{d^2(n+2)}{4n}\right) = \frac{2^{n-1}}{n^n} (1 + \frac{d}{2})(1 - \frac{n+2}{2n} d).$$

□

Par conséquent $\det M(F_{d;\theta};n) \geq 0$ si $d \leq \frac{2n}{n+2}$ et l'égalité ne tiendra que si $d = \frac{2n}{n+2}$ et $\theta = \pi$. Voici maintenant le raffinement de l'inégalité de Bernstein qui nous intéresse :

Théorème 3.2.1. *Soit* $d_n = \sup \{ d \geq 0 : \|p'\| + d|a_0(p)| \leq n\|p\|, \ \forall p \in \mathbb{P}_n \}$. *Alors,*

$$d_1 = 1 \quad \textit{et } d_n = \frac{2n}{n+2} \ \forall \ n \geq 2.$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que n=1. Soit $p(z) = a_0 + a_1 z$. Alors,

$$\begin{aligned} \|p'\| + d|a_0| &= |a_1| + d|a_0| \\ &\leq |a_1| + |a_0|. \\ &= \|p\| = \sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |a_0 + a_1 z| \end{aligned}$$

et donc

$$d_1 = \sup\left\{d \geq 0 : d|a_0| \leq |a_0|\right\} = 1.$$

Maintenant supposons que $n \geq 2$. D'après la remarque 3.1.2 tous les mineurs principaux de $F_{d;\theta}$ sont positifs et d'après la remarque 3.1.3 son $n^{\text{ième}}$ mineur principal est positif pour tout $d < \frac{2n}{n+2}$. De plus, il existe θ_0 tel que si $d_n = \frac{2n}{n+2}$, alors $\det M(F_{d_n;\theta_0}; n) = \frac{2^{n-1}}{n^n}(1 + \frac{d_n}{2})(1 - \frac{(n+2)}{2n}d_n) = 0$. Maintenant, d'après la proposition 3.1.1, la forme de Toeplitz-Hermite de $F_{d;\theta}$ est définie positive pour tout $d < \frac{2n}{n+2}$. Et donc d'après le lemme 3.1.2, si $d_n < \frac{2n}{n+2}$ alors $F_{d;\theta} \in \mathcal{B}_n$. Finalement $d_n = \sup\{d \geq 0 : F_{d;\theta} \in \mathcal{B}_n\} = \frac{2n}{n+2}$. □

3.3. LE CAS D'ÉGALITÉ

Dans toute cette section, supposons que $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \in \mathbb{P}_n$ tel que $\|p'\| + d_n|a_0| = n\|p\|$. D'après la remarque 3.2.1., nous avons

$$|(\tilde{p} * F_{d_n;\theta})(z)| \leq \|\tilde{p}\|, \ \forall\ \theta \in \mathbb{R},$$

et il existe un nombre réel θ_n et un nombre complexe $z_n \in \partial\mathbb{D}$ tels que

$$|(\tilde{p} * F_{d_n;\theta_n})(z_n)| = \|\tilde{p}\|.$$

Le but de cette section est de démontrer que la classe des fonctions pour lesquelles l'égalité tient est constituée des fonctions de la forme $z \mapsto a_n z^n$. Rappelons que $F_{d;\theta}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-1}{n} z^j + \frac{d}{n} e^{i\theta} z^n$.

Remarque 3.3.1. *Si $\tilde{p}$ est une fonction constante, alors $p(z) = z^n \tilde{p}(\frac{1}{z}) = a_n z^n$.*

Supposons maintenant que $\tilde{p}$ soit une fonction non-constante. Nous distinguerons les cas $\det M(F_{d_n;\theta_n}; n) > 0$ et $\det M(F_{d_n;\theta_n}; n) = 0$ séparément.

3.3.1. Le cas où $\det M(F_{d_n;\theta_n};n) > 0$.

Remarque 3.3.2. *Il existe $\xi > 0$ tel que* $\det M(F_{d_n+\xi;\theta_n};n) > 0$.

DÉMONSTRATION. D'après la définition,

$$\det M(F_{d_n;\theta_n};n) = \frac{1}{n^{n+1}} \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 & d_n e^{i\theta_n} \\ n-1 & n & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_n e^{-i\theta_n} & 1 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}_{n+1}$$

Il est clair que quand θ_n est fixe, $\det M(F_{d_n;\theta_n};n)$ est une fonction continue de d_n. Donc, il existe $\xi > 0$ tel que $\det M(F_{d_n+\xi;\theta_n};n) > 0$. $\square$

Théorème 3.3.1. *Dans le cas où* $\det M(F_{d_n;\theta_n};n) > 0$, *$p(z) = a_n z^n$.*

DÉMONSTRATION. D'après la remarque 3.2.3 et la proposition 3.1.1, la forme de Toeplitz-Hermite de $F_{d_n+\xi,\theta_n}$ est définie positive. Cela implique, d'après le lemme 2.0.1, que $F_{d_n+\xi,\theta_n} \in \mathcal{B}_n$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\|p'\| + \frac{d_n+\xi}{n}|a_0| &= \frac{1}{n}\sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}}\Big|\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)a_{n-j}z^j\Big| + \frac{d_n+\xi}{n}|a_0| \\ &= \Big|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}a_{n-j}z_n^j + a_0\frac{(d_n+\xi)e^{i\theta_n}}{n}z_n^n\Big| \\ &= \Big|(\tilde{p} * F_{d_n+\xi,\theta_n})(z_n)\Big| \\ &\leq \|\tilde{p}\| = \|p\|. \end{aligned}$$

D'après notre hypothèse que $\|p'\| + d_n|a_0| = n\|p\|$, nous avons

$$\|p'\| + (d_n+\xi)|a_0| \leq \|p'\| + d_n|a_0|.$$

C'est à dire que, $\xi|a_0| = 0$ où $\xi > 0$ ou encore que $a_0 = 0$. Maintenant, $\|p'\| = n\|p\|$ et donc, d'après le théorème 1.2.1, $p(z) = a_n z^n$. $\square$

3.3.2. Le cas où $\det M(F_{d_n;\theta_n};n)=0$.

Remarque 3.3.3. $F_{d_n;\theta_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{1-\zeta_j z}+z^{n+1}H(z)$ *où* $H\in \mathbf{H}(\mathring{\mathbb{D}})$.

DÉMONSTRATION. Par définition, $F_{d_n;\theta_n}(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}z^j+\frac{d_n}{n}e^{i\theta_n}z^n\in\mathcal{B}_n$. D'après le lemme 3.1.3 il existe $G\in\mathcal{B}_\infty$ tel que $F_{d_n;\theta_n}(z)=G(z)+z^{n+1}H(z)$. Et donc , d'après le lemme 3.1.4 $F_{d_n;\theta_n(z)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{1-\zeta_j z}+z^{n+1}H(z)$, où les λ_j sont positifs distincts et $\zeta_j\in\partial\mathbb{D}$, $j=1,...,N$. □

Remarque 3.3.4.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\zeta_j^k=\frac{n-k}{n}\qquad\qquad si\ k=0,...,n-1.$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\zeta_j^n=-\frac{d_n}{n}.$$

Nous remarquons aussi que pour $k=0$, $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$.

DÉMONSTRATION. D'après la définition de $F_{d;\theta}$ et la remarque 3.2.6.,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{1-\zeta_j z}+z^{n+1}H(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}z^j+\frac{d_n}{n}e^{i\theta_n}z^n$$
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta_j z)^k+z^{n+1}H(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}z^j-\frac{d_n}{n}z^n\qquad(\theta_n=\pi\mod 2\pi)$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\zeta_j^k\Big)z^k+z^{n+1}H(z)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}z^j-\frac{d_n}{n}z^n.$$

Le résultat suit immédiatement . □

Ainsi l'étude de $\det M(F_{d_n;\theta_n};n)=0$ mène à une étude de l'ensemble $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$.

3.3.2.1. *Le cas où* $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$ *n'est pas fermé sous la conjugaison.*

Remarque 3.3.5. $|\tilde{p}(\zeta_j z_n)|=\|\tilde{p}\|$, $j=1,...,n$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\tilde{p}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{p}\| &= \left|(\tilde{p} * F_{d_n;\theta_n})(z_n)\right| = \left|\tilde{p}(z) * \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\zeta_j z}\right|_{z=z_n} \\
&= \left|\tilde{p}(z) * \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j^k\Big) z^k\right|_{z=z_n} = \left|\sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \zeta_j^k\Big) c_k z_n^k\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=0}^{n} c_k (\zeta_j z_n)^k\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{p}(\zeta_j z_n)\right| \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| \le \|\tilde{p}\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \|\tilde{p}\|.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne l'égalité

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| = \|\tilde{p}\|, \ j = 1, ..., n.$$

S'il existe $\zeta_{j_0} \in \{\zeta_j\}_{j=1}^n$ tel que $|\tilde{p}(\zeta_{j_0} z_n)| < \|\tilde{p}\|$, alors

$$\begin{aligned}
\|\tilde{p}\| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| &< \lambda_{j_0} \|\tilde{p}\| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| \\
&\le \lambda_{j_0} \|\tilde{p}\| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} \lambda_j \|\tilde{p}\| \le \|\tilde{p}\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \\
&= \|\tilde{p}\|.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, alors $|\tilde{p}(\zeta_k z_n)| = \|\tilde{p}\|$, $\forall \zeta_k \in \{\zeta_j\}_{j=1}^n$. □

Remarque 3.3.6. *Il existe $\zeta_* \notin \{\zeta\}_{j=1}^n$ tel que $|\tilde{p}(\zeta_* z_n)| = \|\tilde{p}\|$ où $\zeta_* z_n \in \partial\mathbb{D}$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{p}\| &= \left|\tilde{p} * \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{\zeta}_j^k\Big) z^k\right|_{z=z_n} \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\bar{\zeta}_j z_n)| \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|\tilde{p}\| \\
&= \|\tilde{p}\|.
\end{aligned}$$

Donc, $|\tilde{p}(\bar{\zeta}_j z_n)| = \|\tilde{p}\| \ \forall \ \bar{\zeta}_j$ où $\zeta_j \in \{\zeta_k\}_{k=1}^n$. Or $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ n'est pas fermé sous conjugaison. Alors, il existe $\zeta_* \in \{\bar{\zeta}_j\}_{j=1}^n$ tel que $|\tilde{p}(\zeta_* z_n)| = \|\tilde{p}\|$ où $\zeta_* \notin \{\zeta_j\}_{j=1}^n$.
□

Remarque 3.3.7. *Le polynôme trigonométrique* $t(\theta) = \|\tilde{p}\|^2 - |\tilde{p}(e^{i\theta})|^2$ *est identiquement nul.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $t(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et comme

$$|\tilde{p}(e^{i\theta})|^2 = \tilde{p}(e^{i\theta})\overline{\tilde{p}(e^{i\theta})} = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta}$$

il est aussi clair que $t \in \tau_n$. Et donc, t a au plus $2n$ zéros sur $[0, 2\pi)$. Or, en comptant les multiplicités, t a au moins $2n+2$ zéros, d'où le résultat. □

Théorème 3.3.2. *Dans le cas où* $\det M(F_{d_n;\theta_n}; n) = 0$ *et où* $\left\{\zeta_j\right\}_{j=1}^n$ *n'est pas fermé sous conjugaison,*

$$p(z) = a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la remarque précédente $|\tilde{p}(z)|$ est constant pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$. On en déduira que p est un monôme. Ce monôme est de degré n ou bien $p \equiv 0$ parce que sinon l'égalité $\|p'\| + d_n|a_0| = n\|p\|$ ne pourrait être valide. □

3.3.3. Le cas où $\det M(F_{d_n;\theta_n}; n) = 0$ et $\left\{\zeta_j\right\}_{j=1}^n$ est fermé sous la conjugaison.

Dans cette section nous allons utiliser les notations suivantes.

$$\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \cdots & \zeta_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^n & \zeta_2^n & \cdots & \zeta_n^n \end{pmatrix}_{n\times n}, \vec{\mathbf{\Lambda}}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \vec{\mathbf{C}}_n = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \\ \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \\ -\frac{d_n}{n} \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Observons que d'après la remarque 2.2.6.,

$$\mathfrak{B}_n \vec{\mathbf{\Lambda}}_n = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \zeta_j \lambda_j \\ \sum_{j=1}^n \zeta_j^2 \lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \zeta_j^n \lambda_j \end{pmatrix}_{n\times 1} = \vec{\mathbf{C}}_n.$$

Remarque 3.3.8. *$\mathfrak{B}_n$ est une matrice inversible.*

DÉMONSTRATION. Dénotons les matrices

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}, \mathbf{I}_\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \zeta_n \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\mathbf{I}_{\zeta^{-1}} = \begin{pmatrix} \zeta_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \zeta_n^{-1} \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{et } \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Il est clair que si $n = 2$,

$$\det \mathbf{V}_n = \prod_{1\le j<i\le n} (\zeta_i - \zeta_j).$$

Supposons maintenant que l'énoncé précédent est vrai pour un nombre fixe, $n > 2$. Si nous remplaçons ζ_{n+1} par z, il existe un polynôme, $p \in \mathbb{P}_n$ tel que

$$p(z) = \det \mathbf{V}_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^n & \zeta_2^n & \dots & z^n \end{vmatrix}_{n+1},$$

où $p(\zeta_i) = 0, \; i = 1, ..., n$. Alors, p est un polynôme de la forme

$$p(z) = K \prod_{j=1}^n (z - \zeta_j)$$

où K est une constante et aussi le $n^{\text{ième}}$ coefficient de $p(z)$. C'est à dire que,

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\zeta_i - \zeta_j).$$

Et donc,

$$\begin{aligned} p(z) &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\zeta_i - \zeta_j) \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j) \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (\zeta_i - \zeta_j) \qquad\qquad (z = \zeta_{n+1}). \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\det \mathbf{V}_{n+1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (\zeta_i - \zeta_j).$$

Après un argument par récurrence,

$$\det \mathbf{V}_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\zeta_i - \zeta_j), \ \forall n.$$

Comme $\zeta_i \neq \zeta_j$ pour tout $i \neq j$, nous avons $\det \mathbf{V}_n \neq 0, \ \forall \ n$.

Après les propriétés des déterminants,

$$\mathfrak{B}_n = \mathbf{V}_n \mathbf{I}_\zeta \text{ implique que } \det \mathfrak{B}_n = \det \mathbf{V}_n \det \mathbf{I}_\zeta \neq 0.$$

Finalement, $\mathfrak{B}_n$ est une matrice inversible. □

Remarque 3.3.9. *Supposons que,*

$$\mathfrak{B}_n^{-1} = \begin{pmatrix} L_0^1 & L_1^1 & \dots & L_{n-1}^1 \\ L_0^2 & L_1^2 & \dots & L_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^n & L_1^n & \dots & L_{n-1}^n \end{pmatrix} \text{ et que } W(z) = \prod_{s=1}^{n} (z - \zeta_s).$$

Alors,

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j z^k = \frac{W(z)}{(z - \zeta_j)\zeta_j W'(\zeta_j)}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que

$$V_n^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_{n-1}^n \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_{n-1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \dots & \zeta_n^{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n$$

nous avons,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k^j(\zeta_i)^k = \delta_{ij}, \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \end{smallmatrix} \right. .$$

Posons, $q_j(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^j z^k$ et remarquons que $q_j(\zeta_i) = \delta_{ij}$. Et donc, $q_j(z) \in \mathbb{P}_{n-1}$ avec $n-1$ zéros. C'est à dire que nous pourrons représenter q_j comme,

$$q_j(z) = c_j \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} (z-\zeta_s) = c_j \frac{W(z)}{z-\zeta_j}, \quad \text{où} \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

De plus, en remarquant que $W(\zeta_j) = 0$,

$$1 = q_j(\zeta_j) = c_j \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} (\zeta_j - \zeta_s) = c_j \lim_{z\to\zeta_j} \frac{W(z) - W(\zeta_j)}{z-\zeta_j} = c_j W'(\zeta_j).$$

Ceci implique que,

$$c_j = \frac{1}{W'(\zeta_j)}, \; W'(\zeta_j) \neq 0.$$

Alors,

$$q_j(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^j z^k = \frac{W(z)}{W'(\zeta_j)(z-\zeta_j)}.$$

Maintenant, après les propriétés des matrices,

$$\mathfrak{B}_n^{-1} = \left(\mathbf{V}_n \mathbf{I}_\zeta\right)^{-1} = \mathbf{I}_\zeta^{-1}\mathbf{V}_n^{-1},$$

ou encore,

$$\begin{pmatrix} L_0^1 & L_1^1 & \dots & L_{n-1}^1 \\ L_0^2 & L_1^2 & \dots & L_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^n & L_1^n & \dots & L_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \zeta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_{n-1}^n \end{pmatrix}.$$

Il est maintenant clair que $a_k^j \zeta_j = L_k^j$, ce qui nous donne le résultat :

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j z^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^j \zeta_j z^k = \frac{W(z)}{\zeta_j W'(\zeta_j)(z-\zeta_j)}.$$

De plus, remarquons que

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j = \frac{W(1)}{\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)}.$$

$\square$

Remarque 3.3.10. *Définissons, si* $W(1) \neq 0$,

$$f(u) = \frac{2d_n}{W(1)} - (n-1) + \frac{W'(1)}{W(1)} + u\Big(-\frac{d_n}{W(1)}\Big) + \bar{u}\Big(n - \frac{W'(1)}{W(1)} - \frac{d_n}{W(1)}\Big).$$

Alors,

$$\lambda_j = \frac{W(1)}{nW'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2} f(\zeta_j).$$

Démonstration. Nous avons défini $\mathfrak{B}_n, \vec{\mathbf{\Lambda}}_n$ et $\vec{\mathbf{C}}_n$ tels que

$$\vec{\mathbf{\Lambda}}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0^1 & L_1^1 & \dots & L_{n-1}^1 \\ L_0^2 & L_1^2 & \dots & L_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^2 & L_1^2 & \dots & L_{n-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \\ -\frac{d_n}{n} \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_n^{-1} \vec{\mathbf{C}}_n.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \sum_{k=0}^{n-2} L_k^j \frac{n-(k-1)}{n} - \frac{L_{n-1}^j d_n}{n} \\
&= \frac{1}{n}\Big(n\sum_{k=0}^{n-2} L_k^j - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)L_k^j - d_n L_{n-1}^j\Big) \\
&= \frac{1}{n}\Big((n-1)\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j - \sum_{k=0}^{n-1} kL_k^j - d_n L_{n-1}^j\Big)
\end{aligned}$$

où

$$\sum_{k=1}^{n-1} kL_k^j = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j z^k\Big)'\Big|_{z=1} = \Big(\frac{W(z)}{(z-\zeta_j)\zeta_j W'(\zeta_j)}\Big)'\Big|_{z=1} = \frac{W'(1)(1-\zeta_j)-W(1)}{(1-\zeta_j)^2\zeta_j W'(\zeta_j)},$$

et

$$L_{n-1}^j = \frac{1}{(n-1)!}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j z^k\Big)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\Big(\frac{W(z)}{(z-\zeta_j)\zeta_j W'(\zeta_j)}\Big)^{n-1} = \frac{1}{\zeta_j W'(\zeta_j)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \frac{1}{n}\Big((n-1)\frac{W(1)}{\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)} + \frac{W(1)-W'(1)(1-\zeta_j)}{(1-\zeta_j)^2\zeta_j W'(\zeta_j)} - \frac{d_n}{\zeta_j W'(\zeta_j)}\Big) \\
&= \frac{W(1)}{n\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2}\Big((n-1)(1-\zeta_j) + 1 - \frac{W'(1)(1-\zeta_j)}{W(1)} - \frac{d_n(1-\zeta_j)^2}{W(1)}\Big) \\
&= \frac{W(1)}{n\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2\bar{\zeta}_j}\Big((n-1)(\bar{\zeta}_j - 1) + \bar{\zeta}_j - \frac{W'(1)(\bar{\zeta}_j-1)}{W(1)} - \frac{d_n}{W(1)}(\bar{\zeta}_j + \zeta_j - 2)\Big) \\
&= \frac{W(1)}{nW'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2} f(\zeta_j).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.11. *Supposons qu'il existe j_0 tel que $\zeta_{j_0} = 1 \in \{\zeta_j\}_{j=1}^n$. Alors $W(1) = 0$ et*

$$\lambda_{j_0} = \frac{1}{n}\Big(n - 1 - \frac{W''(1)}{2W'(1)} - \frac{d_n}{W'(1)}\Big).$$

Démonstration. Nous avons vu dans la preuve de la remarque 2.2.12. que

$$\lambda_{j_0} = \frac{1}{n}\Big((n-1)\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} - \sum_{k=0}^{n-1} kL_k^{j_0} - d_n L_{n-1}^{j_0}\Big).$$

Alors,

$$L_{n-1}^{j_0} = \frac{1}{(n-1)!}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} z^k\Big)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\Big(\frac{W(z)}{(z-\zeta_{j_0})\zeta_j W'(\zeta_{j_0})}\Big)^{n-1} = \frac{1}{\zeta_{j_0} W'(\zeta_{j_0})},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} = \lim_{z\to\zeta_{j0}} \sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} z^k = \lim_{z\to\zeta_{j0}} \frac{W(z)}{\zeta_{j0} W'(\zeta_{j0})(z-\zeta_{j0})} = \lim_{z\to\zeta_{j0}} \frac{W(z)-W(\zeta_{j_0})}{(z-\zeta_{j_0})W'(1)} = \frac{W'(1)}{W'(1)} = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} kL_k^{j_0} &= \lim_{z\to 1} \sum k = 1^{n-1} kL_k^{j_0} z^{k-1} = \lim_{z\to 1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} z^k\Big)' \\
&= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{W(z)}{\zeta_{j0} W'(\zeta_{j0})(z-\zeta_{j0})}\Big)' \\
&= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{W'(z)(z-1)-W(z)}{W'(1)(z-1)^2}\Big) \\
&= \lim_{z\to 1}\Big(\frac{W''(z)(z-1)+W'(z)-W'(z)}{2W'(1)(z-1)}\Big) \\
&= \frac{W''(1)}{2W'(1)}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.12. *Supposons qu'il existe j_0 tel que $\zeta_{j_0} = 1 \in \{\zeta_j\}_{j=1}^n$. Alors $W(1) = 0$ et*

$$\lambda_j = \frac{1}{nW'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2}\Big(2d_n + W'(1) - d_n\zeta_j - (W'(1)+d_n)\bar{\zeta_j}\Big) \ \forall j \neq j_0.$$

Démonstration. Encore d'après la preuve de la remarque 2.2.12,

$$\lambda_{j_0} = \frac{1}{n}\Big((n-1)\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{j_0} - \sum_{k=0}^{n-1} kL_k^{j_0} - d_n L_{n-1}^{j_0}\Big),$$

où

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j = \frac{W(1)}{\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)} = 0, \ (\text{ car } \ \zeta_j \neq \zeta_{j_0} = 1)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} kL_k^j = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} L_k^j z^k\Big)'\Big|_{z=1} = \frac{W'(1)(1-\zeta_j) - W(1)}{(1-\zeta_j)^2\zeta_j W'(\zeta_j)} = \frac{W'(1)}{(1-\zeta_j)\zeta_j W'(\zeta_j)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \frac{1}{n}\Big(-\frac{W'(1)}{(1-\zeta_j)\zeta_j W'(\zeta_j)} - \frac{d_n}{\zeta_j W'(\zeta_j)}\Big)\\ &= \frac{1}{n\zeta_j W'(\zeta_j)}\Big(-\frac{W'(1)}{(1-\zeta_j)} - d_n\Big)\\ &= \frac{\zeta_j}{n\zeta_j W'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2}\Big(2d_n + W'(1) - \zeta_j d_n - \bar{\zeta}_j\big(W'(1)+d_n\big)\Big).\end{aligned}$$

□

Nous résumons les trois remarques précédentes :

$$\lambda_j = \begin{cases} \frac{1}{nW'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2}\Big(2d_n + W'(1) - d_n\zeta_j - (W'(1)+d_n)\bar{\zeta_j}\Big), & \text{si } W(1)=0 \text{ et } j \neq j_0 \\ \frac{1}{n}\Big(n-1-\frac{W''(1)}{2W'(1)} - \frac{d_n}{W'(1)}\Big), & \text{si } W(1)=0 \text{ et } j = j_0 \\ \frac{W(1)}{nW'(\zeta_j)(1-\zeta_j)^2} f(\zeta_j), & \text{si } W(1) \neq 0. \end{cases}$$

Remarque 3.3.13. $|\tilde{p}(\zeta_j z_n)| = \|\tilde{p}\| \quad \forall\, \zeta_j$.

Démonstration.

$$\|\tilde{p}\| = \big|(\tilde{p} * F_{d_n;\theta_n})(z_n)\big| = \Big|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{p}(\zeta_j z_n)\Big| \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| = \|\tilde{p}\|.$$

Donc,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\tilde{p}(\zeta_j z_n)| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|\tilde{p}\|$$

ce qui implique le résultat. □

Remarque 3.3.14. *Sans perte de généralité, nous posons $z_n = 1$.*

Démonstration. Supposons que $z_n \neq 1$. Nous définissons, $\sum_{\nu}^{n} b_\nu z^\nu = \tilde{q}(z) = \tilde{p}(z_n z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (z_n z)^\nu$. Donc, $\|\tilde{q}\| = \|\tilde{p}\|$, ou encore $\|q\| = \|p\|$. Nous avons aussi $\tilde{q}'(z) = z_n \tilde{p}'(z_n z)$. Donc, $\|\tilde{q}'\| = \|\tilde{p}'\|$ et $\|q'\| = \|p'\|$. Maintenant,

$$\|p'\| + d|a_0| = \|p\| \Leftrightarrow \|q'\| + d|b_0| = \|q'\| + d|a_0| = \|q\|.$$

□

Remarque 3.3.15.

$$\tilde{p}(z) = cW(z) + \|\tilde{p}\|, \ \ \text{où } c \in \mathbb{C}.$$

DÉMONSTRATION. Nous avons, $p(\zeta_j) = \|\tilde{p}\|$, $\forall j$. Alors, $p(z) - \|p\|$ est un polynôme de degré n avec les n zéros distincs, $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$. C'est à dire qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $p(z) - \|p\| = c\prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j)$. □

Le contenu de la remarque suivante est un résultat connu (le Lemme de Jack, [10]). Nous en offrons ici une preuve nouvelle adaptée pour la classe $\mathbb{P}_n$.

Remarque 3.3.16.

$$\frac{\zeta_j \tilde{p}'(\zeta_j)}{\tilde{p}(\zeta_j)} \geq 0, \quad \forall\, \zeta_j.$$

DÉMONSTRATION. Définissons, $\tilde{p}(\bar{\mathbb{D}}) = \{\tilde{p}(z)|\ z \in \bar{\mathbb{D}}\}$. Soit $\eta \notin \tilde{p}(\bar{\mathbb{D}})$. En appliquant le Théorème de Lagrange (Théorème 1.6.1) au polynôme $\tilde{p} - \eta$:

$$\begin{array}{lll}
 & n(\tilde{p}(z) - \eta) + (\zeta - z)\tilde{p}'(z) \neq 0 & \forall\, z, \zeta \in \mathring{\mathbb{D}} \\
\Rightarrow & \tilde{p}(z) + \dfrac{(\zeta - z)}{n}\tilde{p}'(z) \neq \eta & \forall\, \eta \notin \tilde{p}(\bar{\mathbb{D}}) \\
\Rightarrow & \tilde{p}(z) + \dfrac{(\zeta - z)}{n}\tilde{p}'(z) \in \tilde{p}(\bar{\mathbb{D}}) & \forall\, z, \zeta \in \mathring{\mathbb{D}} \\
\Rightarrow & \left|\tilde{p}(z) + \dfrac{(\zeta - z)}{n}\tilde{p}'(z)\right| \leq \|\tilde{p}\| & \forall\, z, \zeta \in \bar{\mathbb{D}} \\
\Rightarrow & \exists \theta \in \mathbb{R},\ \left|\tilde{p}(z) - \dfrac{z\tilde{p}'(z)}{n} + \dfrac{e^{i\theta} z p'(z)}{n}\right| \leq \|p\| & \forall\, z \in \bar{\mathbb{D}} \\
\Rightarrow & \left|\tilde{p}(z) - \dfrac{z\tilde{p}'(z)}{n}\right| + \left|\dfrac{zp'(z)}{n}\right| \leq \|p\| & \forall\, z \in \bar{\mathbb{D}} \\
\Rightarrow & \left|\tilde{p}(\zeta_j) - \dfrac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n}\right| + \left|\dfrac{\zeta_j p'(\zeta_j)}{n}\right| \leq \|p\| & \forall\, \zeta_j \\
\Rightarrow & \left|\dfrac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)}\right| + \left|1 - \dfrac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)}\right| \leq \dfrac{\|p\|}{|\tilde{p}(\zeta_j)|} = 1 & \forall j,\ |\tilde{p}(\zeta_j)| = \|p\| \\
\Rightarrow & \left|1 - \dfrac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)}\right| \leq 1 - \left|\dfrac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)}\right| & \forall\, \zeta_j.
\end{array}$$

Ainsi, d'après l'inégalité du triangle,

$$0 \leq \frac{\zeta_j\tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)} \leq 1.$$

□

L'idée de la remarque suivante se trouve dans [**5**, page 49].

Remarque 3.3.17. $\frac{\zeta_j \tilde{p}'(\zeta_j)}{n\tilde{p}(\zeta_j)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p}$ *est constant.*

DÉMONSTRATION. Observons que si

$$g(z) = \frac{\frac{\tilde{p}(z)}{\|\tilde{p}\|} - \frac{\tilde{p}(0)}{\|\tilde{p}\|}}{1 - \frac{\tilde{p}(0)}{\|\tilde{p}\|}\frac{\tilde{p}(z)}{\|\tilde{p}\|}}$$

alors g est une fonction analytique sur $\bar{\mathbb{D}}$ telle que $g(0) = 0$ et $\|g\| \leq 1$. Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de Schwarz à la fonction g.

On obtiendra

$$\frac{\tilde{p}(z)}{\|\tilde{p}\|} = \frac{Z + \frac{\tilde{p}(0)}{\|\tilde{p}\|}}{1 + \frac{\tilde{p}(0)}{\|\tilde{p}\|}Z}$$

avec $Z \in \bar{\mathbb{D}}$. Il suit que

$$\frac{|\tilde{p}(z)|}{\|\tilde{p}\|} \leq \frac{|z|\|\tilde{p}\| + |p(0)|}{\|\tilde{p}\| + |p(0)||z|}, \quad \forall z \in \bar{\mathbb{D}}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
|\tilde{p}'(\zeta_j)| &= \lim_{z \to \zeta_j} \frac{|\tilde{p}(z) - \tilde{p}(\zeta_j)|}{|z - \zeta_j|} \\
&= \lim_{|z| \to 1} \frac{|\tilde{p}(\zeta_j)|\left|\frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{p}(\zeta_j)} - 1\right|}{1 - |z|} \qquad \text{où } \arg z = \arg \zeta_j \text{ et } z \in \mathring{\mathbb{D}} \\
&\geq \|\tilde{p}\| \lim_{|z| \to 1} \frac{1 - \frac{|\tilde{p}(z)|}{\|\tilde{p}\|}}{1 - |z|} \\
&\geq \|\tilde{p}\| \lim_{|z| \to 1} \frac{\|\tilde{p}\| + |\tilde{p}(0)||z| - |z|\|\tilde{p}\| - |\tilde{p}(0)|}{(1 - |z|)(\|\tilde{p}\| + |\tilde{p}(0)||z|)} \\
&= \|\tilde{p}\| \Big(\frac{\|\tilde{p}\| - |\tilde{p}(0)|}{\|\tilde{p}\| + |\tilde{p}(0)|}\Big).
\end{aligned}$$

Si $\frac{\zeta_j \tilde{p}'(\zeta_j)}{\tilde{p}(\zeta_j)} = 0$ pour un certain j, il suivra que $\|\tilde{p}\| = |\tilde{p}(0)|$. Mais ceci ne peut que être vrai que si $\tilde{p}$ est constant. Réciproquement, si $\tilde{p}$ est constant il est clair que $|\tilde{p}'(z)| = 0$ pour tout z et donc que $\frac{\zeta_j \tilde{p}'(\zeta_j)}{\tilde{p}(\zeta_j)} = 0$ pour tout j. □

Remarque 3.3.18. $\arg f(\zeta_j)$ *est constant pour tout* j.

DÉMONSTRATION. Comme $\tilde{p}$ n'est pas constant et d'après les remarques 3.2.18 et 3.2.19,

$$\frac{\zeta_j \tilde{p}'(\zeta_j)}{\tilde{p}(\zeta_j)} = \frac{c\zeta_j W'(\zeta_j)}{\|\tilde{p}\|} > 0, \quad \forall j,$$

nous avons aussi le fait que,

$$\frac{(1-\zeta_j)^2}{\zeta_j} = \zeta_j + \zeta_j - 2 = 2(\Re\zeta_j - 1) < 0, \quad \forall j.$$

Cela nous permet d'observer que,

$$W(1) = \prod_{s=1}^{n}(1-\zeta_s) = \prod_{s=1}^{\frac{n}{2}}(1-\zeta_s)(1-\bar{\zeta}_s) = \prod_{s=1}^{\frac{n}{2}} 2(1-\Re\zeta_s) > 0.$$

Donc si $W(1) \neq 0$, forcément $W(1) > 0$. Maintenant, d'après la remarque 3.2.12.,

$$\lambda_j = \frac{W(1)}{n}\frac{c}{c\zeta_j W'(\zeta_j)}\frac{\zeta_j}{(1-\zeta_j)^2} f(\zeta_j)$$

et nous pouvons conclure que $cf(\zeta_j) < 0$. Ainsi

$$e^{i(\arg f(\zeta_j) - \arg(-\bar{c}))} > 0$$

ou encore,

$$\arg f(\zeta_j) \equiv \arg(-\bar{c}).$$

Si $W(1) = 0$, définissons $h(u) = 2d_n + W'(1) + u(-d_n) + \bar{u}(-W'(1) - d_n)$.
Alors,

$$\lambda_j = \frac{1}{n}\frac{c}{c\zeta_j W'(\zeta_j)}\frac{\zeta_j}{(1-\zeta_j)^2} h(\zeta_j) > 0, \forall\, j \text{ où } \zeta_j \neq 1.$$

Cela implique que $ch(\zeta_j) < 0, \forall\, j$ où $\zeta_j \neq 1$. C'est-à-dire que $\arg h(\zeta_j)$ est constant pour tout j où $\zeta_j \neq 1$. Et comme $h(1) = 0$, nous avons que $\arg h(\zeta_j)$ est constant pour tout j. □

Remarque 3.3.19. *Si $W(1) \neq 0$, alors $n=2$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $f(u) = A + uB + \bar{u}D$ avec $B = \frac{d_n}{W(1)}$, $D = n - \frac{W'(1)}{W(1)} - \frac{d_n}{W(1)}$, $A = \frac{2d_n}{W(1)} - (n-1)$, $b = \arg B$ et $d = \arg D$.
Si $|\frac{\mathbf{d_n}}{\mathbf{W(1)}}| \neq |\mathbf{n} - \frac{\mathbf{W'(1)}}{\mathbf{W(1)}} - \frac{\mathbf{d_n}}{\mathbf{W(1)}}|$:
Comme, $f(e^{i\theta}) = A + e^{i\frac{b+d}{2}}\left(|B|e^{i(\frac{b-d}{2}+\theta)} + |D|e^{-i(\frac{b-d}{2}+\theta)}\right), \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.
Nous avons, $f(e^{i(\theta - \frac{b-d}{2})}) = A + e^{i\frac{b+d}{2}}\left(|B|e^{i\theta} + |D|e^{-i\theta}\right), \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse $|B| \neq |D|$, ce qui implique que $\left(|B|e^{i\theta} + |D|e^{-i\theta}\right) \neq 0$. Et donc $f(\partial\mathbb{D})$ est une ellipse non-dégénérée, image injective de $\partial\mathbb{D}$ par f. C'est à dire que la ligne $re^{i\arg f(\zeta_j)}$ où $r \in \mathbb{R}$ et $f(u)$ se rencontrent au plus deux fois. Nous remarquons aussi que $re^{i\arg f(\zeta_j)}$ est une ligne car $\arg f(\zeta_j)$ est constant. Cette ligne intersecte $f(u)$ pour chaque $j = 1, .., n$. Il est donc obligé que $n \leq 2$. Maintenant nous nous rappelons que nous sommes dans le cas où $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$ est fermé sous conjugaison. Cela implique que n=2.

Si $|\mathbf{\frac{d_n}{W(1)}}| = |\mathbf{n} - \mathbf{\frac{W'(1)}{W(1)}} - \mathbf{\frac{d_n}{W(1)}}|$:

Ceci signifie que soit $\frac{W'(1)}{W(1)} = n$ ou $\frac{W'(1)}{W(1)} = n - \frac{2d_n}{W(1)}$. Comme, $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$ est fermé sous conjugaison,

$$\frac{W'(1)}{W(1)} = \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{1-\zeta_s} + \frac{1}{1-\bar{\zeta}_s} = \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} 1 = \frac{n}{2}.$$

Ceci implique que $\frac{W'(1)}{W(1)} = n - \frac{2d_n}{W(1)}$. Maintenant, $f(\zeta_j) = 1 - \frac{2d_n}{W(1)} i\Im\zeta_j$. Comme $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$ et $\arg f(\zeta_j)$ est constant pour tout j, il est évident que $\Im\zeta_j$ est constant pour tout j. Ceci implique que $n \leq 2$. Encore une fois, $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n}$ est fermé sous conjugaison et n=2. $\square$

Remarque 3.3.20. *Si* $n = 2$, $\{\zeta_j\}_{j=1}^{2} = \{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

DÉMONSTRATION. Nous avons $d_n = 1$ et il existe ζ tel que $\{\zeta_j\}_{j=1}^{2} = \{\zeta, \bar{\zeta}\}$. Ceci implique que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$
$$\zeta\lambda_1 + \bar{\zeta}_2 = \frac{1}{2},$$
$$\zeta^2\lambda_1 + \bar{\zeta}^2\lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Donc,

$$(\zeta + \zeta^2)\lambda_1 + (\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^2)\lambda_2 = 0$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)\Re(\zeta + \zeta^2) = 0. \tag{3.1}$$

Donc $(\Im\zeta)^2 = \Re\zeta(1+\Re\zeta)$. Nous avons

$$\lambda_1\Im(\zeta+\zeta^2)+\lambda_2\Im(\bar\zeta+\bar\zeta^2)=0$$

$$(2\lambda_1-1)(\Im\zeta)(1+2\Re\zeta)=0. \tag{3.2}$$

Les équations (3.1) et (3.2) mènent à trois possibilités :

Possibilité 1. $\lambda_1=\frac{1}{2}$; ceci implique que $\zeta+\bar\zeta=1$. Donc $\Re\zeta=\frac{1}{2}$ et $\Im\zeta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Possibilité 2. $\Im\zeta=0$; ceci implique que $\zeta=\bar\zeta$ et donc que n=1, une contradiction.

Possibilité 3. $\Re\zeta=-\frac{1}{2}$; ceci implique que $(\Im\zeta)^2=-\frac{1}{4}$, encore une contradiction.

□

Maintenant nous avons vu que n=2 quand $W(1)\neq 0$. Après des calculs brefs, $f(\zeta)=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(\bar\zeta)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ceci montre que $\arg f(\zeta_j)$ n'est pas constant, une contradiction. Donc, il faut que $W(1)=0$. Nous distinguerons finalement deux cas.

Si $|\mathbf{d_n}|\neq|\mathbf{W'(1)}+\mathbf{d_n}|$:

Supposons que $h(u)=-B-D+uB+\bar uD$, où $B=-d_n, D=-W'(1)-d_n$. Comme $h(1)=0$, $h(\partial\mathbb{D})$ est une ellipse une fois couverte qui rencontre l'origine. Alors la ligne $re^{iargh(\zeta_j)}$ rencontre $h(u)$ au plus deux fois. C'est à dire que $n\leq 2$. Or, $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ est fermé sous conjugaison où $1\in\{\zeta_j\}_{j=1}^n$. Donc n=1. Ceci est une contradiction à notre hypothèse initiale que $n\geq 2$.

Si $|\mathbf{d_n}|=|\mathbf{W'(1)}+\mathbf{d_n}|$:

Dans ce cas $W'(1)=0$ ou $W'(1)=-2d_n$. C'est à dire que $W'(1)\leq 0$. Or, $W(z)=(z-1)\prod_{\substack{s=1\\s\neq l}}^n(z-\zeta_s)$ où $\zeta_l=1$. Posons maintenant, $u(z)=\prod_{\substack{s=1\\s\neq l}}^n(z-\zeta_s)$. Alors, comme $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ est fermé sous conjugaison , $u(1)>0$. Donc, $W'(1)=u(z)+(z-1)u'(z)\big|_{z=1}=u(1)>0$, une contradiction.

Finalement, on se retrouve avec des contradictions quand $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ est fermé sous conjugaison. Alors, il faut que $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ ne soit pas fermé sous conjugaison et donc d'après les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2, $p(z)=a_nz^n$.

Chapitre 4

CAS D'ÉGALITÉ POUR QUELQUES RAFFINEMENTS DE L'INÉGALITÉ DE BERNSTEIN

Nous identifions dans ce chapitre la classe des polynômes extrémaux pour des raffinements connus de l'inégalité de Bernstein. Le résultat principal de ce chapitre sera l'objet d'une publication dans le journal Computational Methods and Function Theory.

4.1. Les raffinements de l'inégalité de Bernstein

Nous avons les inégalités suivantes pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$ et pour tout $p \in \mathbb{P}_n$:

$$|zp'(z) - \lambda p(z)| + d_n|a_0| \leq (n-\lambda)\|p\|, \qquad n \geq 2, \quad 0 \leq \lambda < \frac{n}{2}, \tag{4.1}$$

$$|zp'(z) - \frac{1}{2}a_n z^n| + d_n|a_0| \leq (n - \frac{1}{2})\|p\|, \qquad n \geq 2, \tag{4.2}$$

$$|zp'(z) - \big(p(z) - p(0)\big)| + d_n|a_0| \leq (n-1)\|p\|, \qquad n \geq 2, \tag{4.3}$$

$$|p(Rz) - p(z)| + d_n|a_0| \leq (R^n - 1)\|p\|, \qquad n \geq 2, \quad R > 1, \tag{4.4}$$

$$|zp'(z)| + d_n|a_1| \leq n\|p\|, \qquad n \geq 2, \tag{4.5}$$

$$|zp'(z)| + d_n|a_2| \leq n\|p\|, \qquad n \geq 6. \tag{4.6}$$

Dans chaque cas, d_n est une constante optimale positive bien déterminée, qui peut varier d'une inégalité à une autre selon les paramètres de l'inégalité. Ici "optimal" signifiera que pour n'importe quelle inégalité ci-dessus, si nous remplaçons

d_n par une constante arbitraire $d > d_n$, l'inégalité sera renversée pour au moins un polynôme $p \in \mathbb{P}_n$.

Considérons par exemple l'inégalité (4.1). On aura

$$d_n = \frac{2(n-2\lambda)}{n-2\lambda+2}, \quad 0 \leq \lambda < \frac{n}{2}$$

alors que pour l'inégalité (4.2)

$$d_n = \frac{1}{2}(n \text{ impair}), \ d_n = \frac{n-1}{2(n+2)}(n \text{ pair})$$

ou pour l'inégalité (4.5)

$$d_2 = \sqrt{2} - 1, \ d_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ d_n = \frac{2n}{n+4}\left(\sqrt{\frac{2(n+2)}{n}} - 1\right) \quad (n \geq 4).$$

Ces inégalités ont été obtenues dans une série d'articles publiés par Frappier, Rahman et Ruscheweyh [**13**, page 518], [**7**], [**8**], parfois ensemble, parfois séparément. Chacune de ces inégalités est un raffinement de l'inégalité de Bernstein

$$|p'| \leq n\|p\|, p \in \mathbb{P}_n, \ n \geq 1. \tag{4.7}$$

De plus, nous pouvons les démontrer toutes en utilisant des idées semblables. Il est bien connu qu'on a égalité dans (4.7) pour les polynômes algébriques de la forme $p_n(z) = a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$; ceci était la conclusion du chapitre 3 pour $\lambda = 0$. Le résultat principal de ce chapitre est

Théorème 4.1.1. *Pour chaque inégalité (4.1),(4.2),(4.3),(4.4),(4.5),(4.6) ci-dessus, nous avons égalité si et seulement si les polynômes sont des monômes de degré n ou bien identiquement nuls.*

4.2. Un résultat auxiliaire

Lemme 4.2.1. *Supposons que $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{B}_n$ avec* $\det M(f;n) > 0$. *Supposons aussi que $0 < j \leq n$; alors, il existe une constante strictement positive d telle que*

$$\|f * p\| + d|a_j| \leq \|p\|, \textit{pour tout } p \in \mathbb{P}_n, \ p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

En particulier, nous avons l'égalité $\|f * p\| = \|p\|$ seulement pour les polynômes p constants.

DÉMONSTRATION. D'après les lemmes 3.1.3 et 3.1.4, l'hypothèse $\det M(f;n) > 0$ implique que $\det M(f;k) > 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Il est donc clair que, par continuité, si $f_\varepsilon = f(z) + \varepsilon z^j$, nous avons

$$\det M(f_\varepsilon;k) > 0, \quad 0 \leq k \leq n$$

pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$ avec $|\varepsilon| \leq d$ où d est une constante strictement positive qui dépend de f et de j mais qui est indépendante de k. D'après le lemme 3.1.2, $f_\varepsilon \in \mathcal{B}_n$. C'est à dire que,

$$|f_\varepsilon * p(z)| = |f * p(z) + \varepsilon a_j z^j| \leq \|p\|, \quad z \in \bar{\mathbb{D}}, \ |\varepsilon| \leq d.$$

Comme il n'y a pas de restriction sur l'argument de ε, il existe $\varepsilon_0 = de^{i \arg \varepsilon_0}$ tel que

$$\|f * p\| + d|a_j| \leq \|p\|.$$

Supposons maintenant qu'il existe $P \in \mathbb{P}_n$ non-constant tel que

$$\|f * P\| = \|P\|.$$

Il existe donc un indice $1 \leq j_0 \leq n$ tel que $a_{j_0}(P) \neq 0$. Ensuite nous obtenons,

$$\|P\| + d|a_{j_0}| = \|f * P\| + d|a_{j_0}| \leq \|P\|,$$

ce qui est une contradiction, et donc il est nécessaire que P soit constant ! □

Frappier et Qazi **[9]** ont posé la question suivante : étant donné $0 \leq k < n$, existe-t-il une constante Δ qui dépend de k telle que

$$\|p'\| + \Delta|a_k| \leq n\|p\|$$

pour tout $p \in \mathbb{P}_n$? Ceci, d'après un argument semblable à celui de la remarque 3.2.1, est équivalent à

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{l=0}^{n} \frac{n-l}{n} z^l + \varepsilon z^{n-k} \in \mathcal{B}_n, \quad |\varepsilon| \leq \frac{\Delta}{n}.$$

D'après les remarques 3.2.2. et 3.2.3, les mineurs principaux de f_0 sont strictement positifs. Et donc l'hypothèse du lemme est satisfaite pour f_0. Nous avons maintenant à choisir $\Delta = nd(f_0, n-k) > 0$ pour vérifier que la réponse à leur question est positive.

4.3. La preuve du theorème 4.1.1.

Les preuves des inégalités (4.1),(4.2),(4.3),(4.4),(4.5),(4.6) ont des caractéristiques communes. Chacune est équivalente, pour un $j = n-2, n-1$ ou n, à une inégalité du type

$$\|q * f\| + \hat{d}_n |a_j(q)| \leq \|q\|, \quad q \in \mathbb{P}_n \tag{4.8}$$

où $f \in \mathcal{B}_n$ et $\hat{d}_n$ est une fonction de d_n. Par exemple (4.1) est équivalent à

$$\left| q(z) * \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n-\lambda}) z^k \right) \right| + \hat{d}_n |a_n(q)| \leq \|q\|, \quad z \in \bar{\mathbb{D}}, \ q \in \mathbb{P}_n$$

où $\hat{d}_n = \frac{d_n}{(n-\lambda)}$. De plus, nous avons égalité en (4.8) avec $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})} \in \mathbb{P}_n$ si et seulement si nous avons égalité dans l'équation correspondante (4.1),...,(4.6). En regardant les références [**13**, page 518], [**7**], [**8**], on voit que dans tous les cas le polynôme $f \in \mathcal{B}_n$ dans (4.8) a les deux propriétés suivantes : si

$$f_\varepsilon = f(z) + \varepsilon z^j = \sum_{k=0}^{n} a_k(f_\varepsilon) z^k, \quad |\varepsilon| \leq \hat{d}_n, \tag{4.9}$$

alors $\det M(f_\varepsilon; k) > 0, 0 \leq k \leq n-1$. En outre il existe un unique nombre complexe $\hat{\varepsilon} = \hat{d}_n e^{i\hat{\theta}}$ tel que

$$\det M(f_{\hat{\varepsilon}}; n) = 0 \text{ et } \det M(f_\varepsilon; n) > 0 \text{ si } |\varepsilon| = \hat{d}_n, \ \varepsilon \neq \hat{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Considérons maintenant un polynôme $q \in \mathbb{P}_n$ qui est extrémal pour (4.8), c'est-à-dire que

$$\|q * f\| + \hat{d}_n |a_j(q)| = \|q\|. \tag{4.11}$$

Donc, il existe $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} |q * f_{\hat{d}_n e^{i\theta}}(z_0)| &= |q * f(z_0) + \hat{d}_n e^{i\theta} a_j(q) z_0^j| \\ &= |q * f(z_0)| + \hat{d}_n |a_j(q)| \\ &= \|q\|. \end{aligned}$$

Premièrement, nous allons supposer que $e^{i\theta} \neq e^{i\hat{\theta}}$; d'après (4.9), (4.10) et le lemme 3.1.2., il existe $d > 0$ tel que $f_{(\hat{d}_n+d)e^{i\theta}} \in \mathcal{B}_n$. En particulier

$$\begin{aligned}
\|q\| &\geq \|q * f_{(\hat{d}_n+d)e^{i\theta}}\| \\
&\geq |q * f_{(\hat{d}_n+d)e^{i\theta}}(z_0)| \\
&= |q * f(z_0) + (\hat{d}_n + d)e^{i\theta} a_j(q) z_0^j| \\
&= |q * f(z_0)| + (\hat{d}_n + d)|a_j(q)| \\
&= \|q\| + |a_j(q)| d.
\end{aligned}$$

Il est évident que $|a_j(q)| = 0$ et donc d'après (4.11) et le lemme 3.1.4., $q \in \mathbb{P}_0$. C'est-à-dire que $p(z) = z^n \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})}$ est un monôme de degré n ou bien $p \equiv 0$.

Supposons maintenant que $e^{i\theta} = e^{i\hat{\theta}}$; alors $\det M(f_{\hat{\varepsilon}}; n) = 0$. D'après le lemme 3.1.4.,

$$\begin{aligned}
\|q\| &= \left|q * \left(f(z) + \hat{d}_n e^{i\hat{\theta}} a_j(q) z^j\right)\right|_{z=z_0} \\
&= \left|q * \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{1 - \zeta_k z}\right|_{z=z_0} \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} l_k q(\zeta_k z_0)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} l_k |q(\zeta_k z_0)| && (4.12) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} l_k\right) \|q\| && (4.13) \\
&= \|q\|.
\end{aligned}$$

Donc nous avons égalité en (4.12) et (4.13). Comme les l_k sont strictement positifs, il existe un nombre réel φ tel que

$$q(\zeta_k z_0) = \|q\| e^{i\varphi}, \ 1 \leq k \leq n.$$

Rappelons aussi que les ζ_k sont distincts et de module 1. Nous avons donc

$$q(z) \equiv \|q\| e^{i\varphi} - K \prod_{k=1}^{n} (1 - \bar{\zeta}_k \bar{z}_0 z)$$

où $0 \neq K \in \mathbb{C}$. Sans perte de généralité , nous pouvons supposer que $e^{i\varphi} = z_0 = \|q\| = 1$. Posons $Q(z) = \bar{K}\prod_{k=1}^{n}(1-\zeta_k z)$. Il est evident que $\Re Q(z) \geq 0,\ \forall\ z \in \partial\mathbb{D}$. La représentation de Fejér-Riesz [**13**, page 410] pour les polynômes trigonométriques positifs implique que

$$\Re Q(z) \equiv M|Q(z)|^2,\ \forall z \in \partial\mathbb{D}, \text{pour un certain } M > 0.$$

Il s'en suit qu'il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que $Q(z) \equiv A+Bz^n$ et que ceci est aussi valide pour q et p. Si nous étudions chaque inégalité (4.1),...,(4.6), il sera évident que les polynômes extrémaux qui correspondent à chaque inégalité sont des monômes.

4.4. Quelques dernières remarques

Le théorème 4.1.1. peut être faux si on se permet de varier les paramètres. Par exemples quand $n = 1$ les inégalités (4.1),(4.2) et(4.4),

$$|zp'(z) - \lambda p(z)| + (1-2\lambda)|a_0(p)| \leq (1-\lambda)\|p\|,\ 0 \leq \lambda < \frac{1}{2},\ z \in \partial\mathbb{D},$$

$$\left|zp'(z) - \frac{1}{2}a_1(p)z\right| + \frac{1}{2}|a_0(p)| \leq \frac{1}{2}\|p\|,\ z \in \partial\mathbb{D},$$

$$|p(Rz) - p(z)| + (r-1)|a_0(p)| \leq (R-1)\|p\|,\ R > 1,\ z \in \partial\mathbb{D},$$

sont valides pour tout $p \in \mathbb{P}_1$. De plus, les polynômes de la forme $p(z) = Az + B$ sont extrémaux même si $B \neq 0$. Un autre exemple serait de poser $\lambda = \frac{n}{2}$ dans l'inégalité (4.1) :

$$\left|zp'(z) - \frac{n}{2}p(z)\right| \leq \frac{n}{2}\|p\|,\ z \in \partial\mathbb{D}.$$

Cette dernière inégalité est maintenant valide pour tout $p \in \mathbb{P}_n$ et les uniques polynômes extrémaux ont la forme $p(z) = Az^n + B$ même si $B \neq 0$. La preuve de ceci se trouve dans la publication[**6**].

Il se peut que sous une variation de paramètre le théorème (4.1.1) reste vrai. Par exemple, la version optimale de l'inégalité (4.5) avec $n = 1$ n'est rien d'autre que l'inégalité de Bernstein avec $n = 1$ où nous avons égalité seulement pour les monômes. Un autre exemple d'un changement de paramètres qui ne modifie pas le résultat du théorème (4.1.1) se trouve dans l'inégalité suivante, valide pour tout $p \in \mathbb{P}_n,\ n \geq 1$,

$$|zp'(z) - \lambda p(z)| + d|a_0(p)| \leq (n-\lambda)\|p\|,\ z \in \bar{\mathbb{D}},\ 0 \leq \lambda < \frac{n}{2},\ 0 \leq d < d_n$$

où les polynômes extrémaux sont exclusivement des monômes, même dans le cas $n = 1$. Ceci est une conséquence de notre preuve du lemme 4.2.1 et de la structure générale de l'inégalité (4.1).

CONCLUSION

En supposant qu'un polynôme est de degré n et que nous ayons des connaissances de ses valeurs sur le disque unité du plan complexe, on a constaté que l'on est capable de dire quelque chose sur la taille de sa dérivée. De plus, on est aussi capable de trouver la forme des polynômes, que nous avons appelés des polynômes extrémaux, où la valeur absolue de la dérivée est en quelque sorte d'une taille maximale. Les connaissances des valeurs du polynôme et la restriction de ses dérivées ont été présentées sous la forme de l'inégalité de Bernstein ou l'une de ses variations. Dans presque toutes les inégalités étudiées ici, les polynômes extrémaux étaient toujours des monômes.

Il est intéressant de remarquer qu'il existe des variations de l'inégalité de Bernstein où les polynômes extrémaux sont autres que des monômes. Par exemple, les polynômes extrémaux de l'inégalité

$$|zp'(z) - \frac{n}{2}p(z)| \leq \frac{n}{2}\|p\|, \ n \geq 1, z \in \bar{\mathbb{D}}$$

sont de la forme $p(z) = Az^n + B$ où B n'est pas nécessairement nul. De plus, il s'agit des seuls polynômes extrémaux de l'inégalité ci-dessus. Il faut donc étudier les polynômes extrémaux de chaque raffinement de l'inégalité de Bernstein séparément bien que les résultats se ressemblent assez souvent.

Comme dernière remarque, il est évident que nous pourrons avoir des variations de l'inégalité de Bernstein en appliquant successivement des résultats connus plusieurs fois. Par exemple, en appliquant l'inégalité (4.1) avec $\lambda = 0$ deux fois, il est clair que

$$\|p''\| \leq n(n-1)\|p\| - \frac{2n(n-1)}{n+2}|a_0| - \frac{2(n-1)}{n+1}|a_1|, \ n \geq 3$$

pour tout $p \in \mathbb{P}_n$ avec égalité si et seulement si p est un monôme de degré n ou p est identiquement nul.

L'étude des inégalités de Bernstein pour les dérivées d'ordre supérieur nous conduira certainement à des variations de l'inégalité de Bernstein encore plus raffinées. Il est probable que la méthode utilisée ici sera aussi efficace pour déterminer les polynômes extrémaux de ces raffinements.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Bak, J.Newman, *Complex Analysis 2nd edition*, Springer-Verlag New York, 1997.

[2] N.G.de Bruijn, *Inequalities concerning polynomials in the complex domain*, Indagationes Mathematicae, 9, 591-598, 1947.

[3] D.Dryanov, R.Fournier, *On a discrete variant of Bernstein's polynomial inequality*, Analysis 19, 331-366, 2001.

[4] D.Dryanov, R.Fournier, *Bound-Preserving Operators and Bernsteins Type Inequalities*, Comput.Methods Funct.Theory, Vol.2, No.2, 397-414, 2002.

[5] R.Fournier, *Some remarks on Jack's Lemma*, Mathematica, Tome 43(66), No.1, 43-50, 2001.

[6] R.Fournier, *Cases of Equality for a Class of Bound-Preserving Operators over* $\mathbb{P}_n$, Comput.Methods Funct.Theory, Vol.4, No.1, 183-188, 2004.

[7] C.Frappier, *Inequalities for polynomials with restricted coefficients*, J.Anal.Math. 50, 143-157, 1988.

[8] C.Frappier, Q.I.Rahman, S.Ruscheweyh, *New inequalities for polynomials*, Trans Amer. Math. Soc. 288, 69-99, 1985.

[9] C.Frappier, M.A. Qazi, *Asymptotc inequalities for polynomials with restricted coefficients*, Analysis 6, 223-243, 1996.

[10] I.S.Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J.London Math. Soc., 3, 469-474, 1971.

[11] R.Nagle, E.Saff, *Fundamentals of differential equations, 4th edition*, Addison Wesley, 1997.

[12] S.Ruscheweyh, *Convolutions in geometric function theory*, Les Presses de l'université de Montréal, Montréal, 1982.

[13] Q.I.Rahman, G.Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

[14] T.Sheil-Small, *Complex Polynomials*, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 2002.

[15] M.Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Publ. Co., New York, 1975.