

Université de Montréal

Méthodes de volumes finis pour les systèmes
d'équations hyperboliques : applications en
aérodynamique et en magnétohydrodynamique

par

Rony Touma

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques Appliquées

septembre 2005

© Rony Touma, 2005



QA
3
U54
2005
V.016

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Méthodes de volumes finis pour les systèmes
d'équations hyperboliques : applications en
aérodynamique et en magnétohydrodynamique

présentée par

Rony Touma

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Delfour

(président-rapporteur)

Paul Arminjon

(directeur de recherche)

Serge Dubuc

(co-directeur)

Robert Owens

(membre du jury)

Alain Dervieux

(examineur externe)

Dominique Pelletier

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

16 septembre 2005

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous proposons des méthodes de volumes finis centrées multidimensionnelles pour résoudre des systèmes de lois de conservation hyperboliques. Les systèmes hyperboliques jouent un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques surtout en aérodynamique et en magnétohydrodynamique. De façon particulière nous nous intéressons aux équations de la magnétohydrodynamique idéale (MHD); ces équations décrivent plusieurs phénomènes en physique et en astrophysique comme la physique solaire, l'évolution du plasma dans un milieu magnétique, les jets astrophysiques, etc.; le champ magnétique dans la solution analytique des équations de la MHD est solénoïdal, et donc satisfait l'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. L'accumulation des erreurs numériques telles que les erreurs de troncature et d'arrondi conduit souvent à des solutions numériques qui ne satisfont pas la propriété physique du champ magnétique et peuvent entraîner des instabilités numériques, ou des ondes non physiques. Pour remédier à cette situation, nous proposons une méthode de traitement de la divergence qui sera jumelée à nos schémas centrés de base en deux et trois dimensions spatiales (avec des cellules duales soit cartésiennes soit en diamants), pour garantir une solution numérique physiquement admissible. Nous validons nos méthodes numériques en considérant plusieurs problèmes classiques et en comparant nos résultats numériques avec certains résultats récents de la littérature.

Mots clés : Méthodes de volumes finis centrées, magnétohydrodynamique idéale, aérodynamique, méthode de transport sous contrainte.

SUMMARY

In this thesis we consider central finite volume schemes for solving multidimensional systems of hyperbolic equations. Several physical phenomena are described using hyperbolic equations, especially in aerodynamics and magnetohydrodynamics. In particular, we will be interested in ideal magnetohydrodynamics ("MHD") problems. The MHD equations describe several phenomena in Physics and Astrophysics such as the solar physics, the flow of the plasma (ionized fluid) in a magnetic domain, etc. The magnetic field in the analytic solution of the MHD equations is solenoidal and thus satisfies Maxwell's equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; due to the accumulation of numerical errors such as the round-off errors and the truncation errors, the numerical solution usually fails to satisfy the solenoidal property of the magnetic field, and thus instabilities or non-physical waves may arise. To enforce the divergence-free physical requirement on the magnetic field in the numerical solution, we construct new constrained-transport-type methods that apply to both two and three-dimensional central schemes, involving Cartesian or diamond-shaped dual cells, and treat the magnetic field components of the numerical solution. We validate our numerical methods by solving several classical ideal MHD problems and comparing our numerical results with the corresponding ones appearing in the recent literature.

Keywords Central finite volume methods, ideal magnetohydrodynamics, aerodynamics, constrained transport method.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, le professeur Paul Arminjon, pour son encadrement scientifique, son encouragement et son soutien tout le long de mon travail. Son expertise dans le domaine de l'analyse numérique et des méthodes numériques en aérodynamique ainsi que son intérêt pour la recherche scientifique ont été fondamentaux pour le développement de ce travail.

Je tiens aussi à remercier très chaleureusement mon co-directeur, le professeur Serge Dubuc, pour son soutien et son aide tout au long de mon travail.

Je remercie également les professeurs Michel Delfour et Robert Owens pour avoir accepté d'être membres du jury. Je suis très honoré que le professeur Alain Dervieux ait accepté d'être examinateur externe de cette thèse .

Je remercie aussi tout particulièrement le professeur Andrew Granville pour nous avoir donné accès aux outils de calcul de son laboratoire, nous permettant d'exécuter les expériences et les programmes numériques en parallèle. Également, je remercie le personnel informatique des laboratoires du Département de mathématiques et de statistiques pour leur soutien technique.

Je remercie les professeurs ainsi que le personnel du Département de mathématiques et de statistiques de l'Université de Montréal.

Je remercie également tous les collègues du Département de mathématiques et de statistique de l'Université de Montréal, en particulier je tiens à remercier Oleg Volkov, Marie-Odette St-Hilaire, Jean-François Renaud et Étienne Bourgeois pour toutes leurs qualités, leur amitié, et leur humour.

Je tiens aussi à remercier mes parents pour leur soutien et leur patience tout le long de ce travail.

Finalement, j'exprime ma reconnaissance et ma gratitude envers le Gouvernement du Canada, le Gouvernement du Québec ainsi que la Faculté des études

supérieures de l'Université de Montréal pour le soutien financier qu'ils m'ont accordé pendant toute la durée de mes études universitaires.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Remerciements	v
Liste des figures	xii
Liste des tableaux	xix
Introduction	1
Motivation	1
Défis numériques	3
Contenu de la thèse	4
Chapitre 1. Schémas numériques centrés multidimensionnels	7
1.1. Méthodes numériques	7
1.1.1. Rappel du schéma de Nessyahu-Tadmor	8
1.1.2. Extension du schéma "NT" en 2D avec des cellules duales en diamants	12
1.1.3. Extension du schéma "NT" en 2D avec des cellules duales cartésiennes	17
1.2. Schémas numériques centrés en trois dimensions spatiales	18
1.2.1. Schéma numérique central en trois dimensions spatiales avec cellules duales en diamants	19
1.2.1.1. Premier pas de temps suivant l'axe des x	20

Premier pas de temps suivant l'axe des y et des z	25
1.2.1.2. Second pas temporel	26
Le long de l'axe des x	26
Le long de l'axe des y	27
Le long de l'axe des z	28
1.2.2. Schéma numérique central en trois dimensions spatiales avec cellules duales cartésiennes	32
Chapitre 2. Magnétohydrodynamique idéale, contrainte physique et traitement numérique	37
2.1. Équations de la MHD idéale	38
2.1.1. Formulation des équations de la MHD idéale	39
2.2. La contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	43
2.2.1. Formulation à 8 ondes	44
2.2.2. Méthode de projection	45
2.2.3. Méthode du transport sous contrainte	45
2.2.3.1. Approche par différences finies	46
2.2.3.2. Méthode du transport avec interpolation pour les schémas de type volumes finis	47
2.2.3.3. Méthodes CT sans champ magnétique décalé	48
2.2.4. Méthode du transport sous contrainte pour des schémas centrés du type Nessyahu et Tadmor	50
2.2.4.1. Approche CTCS pour les schémas centrés 2D avec cellules duales en diamants [12]	51
2.2.4.2. Approche CTCS pour schémas centrés 2D avec cellules duales cartésiennes	56
2.2.4.3. Approche CTCS pour des schémas centrés 3D avec cellules duales cartésiennes	59
2.2.4.4. Approche CTCS pour des schémas centrés 3D avec cellules duales en diamants	65

Chapitre 3. Central Finite Volume Methods with Constrained Transport Divergence Treatment for Ideal MHD	73
3.1. Introduction	75
3.1.1. Some previous work on multidimensional central schemes	75
3.1.2. Previous work on numerical MHD	76
3.1.3. Contents of the paper	77
3.2. Ideal MHD equations	78
3.3. One-dimensional central schemes	81
3.4. Two dimensional Cartesian diamond-staggered scheme	82
3.4.1. First time step, in the x-direction	84
3.4.2. y-direction	86
3.4.3. Second time step	87
3.5. The physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	89
3.5.1. Constrained Transport for Central Schemes (CTCS)	91
3.6. Numerical results	94
3.6.1. 1-dimensional test problems	94
3.6.2. 2-dimensional test problems	95
3.7. Conclusion	99
Bibliographie	103
Chapitre 4. A CTCS Divergence Treatment for Ideal MHD	110
4.1. Abstract	110
4.2. Introduction	111
4.3. Two-dimensional central schemes	111
4.4. The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ physical constraint and some numerical approaches to satisfy it	113

4.4.1. A two-dimensional CTCS method for Cartesian staggered dual cell central schemes	115
4.5. Numerical experiments	116
4.6. Concluding remarks	118
Bibliographie	119
Chapitre 5. A Constrained Transport Approach for Two-Dimensional Central Finite Volume Methods in Ideal MHD	123
5.1. Introduction	124
5.2. Ideal Magnetohydrodynamic Equations	125
5.3. Central Schemes	126
5.3.1. One-dimensional Nessyahu-Tadmor central scheme	127
5.3.2. Two-dimensional extension of the Nessyahu-Tadmor scheme (diamond dual cells)	128
5.3.3. Two-dimensional extension of the NT scheme (Cartesian dual cells)	129
5.4. Constrained Transport for Central Schemes	132
5.4.1. A new CTCS for Cartesian-staggered cell central schemes	132
5.5. Numerical experiments	136
MHD 2D Riemann problem	137
Shock-cloud interaction	139
Blast wave problem	142
Orszag-Tang vortex problem	143
5.6. Conclusion	145
Bibliographie	147

Chapitre 6. Central Finite Volume Schemes with Constrained Transport Divergence Treatment, II. Three-Dimensional Ideal MHD.....	152
Abstract.....	152
Keywords.....	153
6.1. Introduction.....	154
6.2. Ideal Magnetohydrodynamic Equations.....	156
6.3. Multidimensional central schemes.....	156
6.3.1. Three-dimensional central scheme with Cartesian dual staggered cells.....	157
6.3.2. Three-dimensional central scheme with diamond staggered dual cells.....	161
6.4. Divergence-free magnetic field requirement and some numerical approaches.....	166
6.5. Numerical experiments.....	169
Shock-tube problem.....	171
MHD shock-tube problem.....	171
Orszag-Tang problems.....	173
Shock-cloud interaction problem.....	178
6.6. Conclusion.....	181
Appendix.....	i
Bibliographie.....	iii
Chapitre 7. Conclusion.....	vi
Bibliographie.....	ix

LISTE DES FIGURES

0.1	Intérieur du soleil (www.stargazers.gsfc.nasa.gov)	2
1.1	Géométrie du schéma central de Lax-Friedrichs	8
1.2	Géométrie des schémas numériques de type Godunov	11
1.3	Géométrie de la version centrée du schéma de Lax-Friedrichs	11
1.4	Les cellules cartésiennes en bleus sont centrées aux nœuds 'o', les cellules duales sont représentées en rouge et en vert	12
1.5	Deux cellules cartésiennes $C_{i,j}$, $C_{i+1,j}$ et la cellule duale $D_{i+1/2,j}$	13
1.6	Quatre cellules cartésiennes du maillage original (en bleu) sont nécessaires pour calculer la solution sur la cellule duale (en jaune) du maillage décalé	17
1.7	Profil du maillage cartésien et du maillage dual en diamant	19
1.8	Deux cellules cartésiennes $C_{i,j,k}$, $C_{i+1,j,k}$ (les cubes en bleu) et la cellule duale $D_{i+1/2,j,k}$ (diamant en rouge)	20
1.9	Cellules cartésiennes nécessaires pour générer la solution sur les cellules duales $D_{i,j+1/2,k}$ et $D_{i,j,k+1/2}$	25
1.10	Reconstruction de la cellule cartésienne originale $C_{i,j,k}$ à partir de six cellules duales	26
1.11	La surface S_1 du cube $C_{i,j,k}$	30
1.12	Les cellules originales $C_{i,j,k}$ sont les cubes représentés en bleu centrés aux points (x_i, y_j, z_k) ; les cellules duales $\mathcal{D}_{i,j,k} \equiv D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ sont les cubes décalés représentés en jaune et centrés aux points $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$	32

2.1	Profil des sept ondes dans la solution du système magnétohydrodynamique unidimensionnel	42
2.2	Champ magnétique décalé.....	46
2.3	Cellules du maillage original et dual nécessaires pour le traitement du champ magnétique $\mathbf{B}_{i+1/2,j}^*$	52
2.4	Deux cellules cartésiennes $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ et la cellule duale $D_{i+1/2,j}$..	52
2.5	Cellules nécessaires pour le traitement du champ magnétique $\mathbf{B}_{i,j}^*$	55
2.6	Cellules nécessaires pour le calcul de $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^{n+2}$	55
2.7	Cellules nécessaires pour la discrétisation de $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$	58
2.8	Cellules du maillage original nécessaires pour traiter la cellule duale (en jaune)	59
2.9	Intersection d'une cellule duale (cube en pointillé) avec deux couches de quatre cellules originales (cubes en trait plein)	60
2.10	Six cellules en diamants et une cellule cartésienne sont nécessaires pour calculer le champ électrique $\mathbf{E}_{i,j,k}^{n+3/2}$	67
3.1	The resolution of Riemann problems at cell interfaces is avoided when alternating from original to staggered grid	81
3.2	Original data grid 'o', square cells in blue and two dual oblique cells in red	83
3.3	Dual oblique cell $D_{i+1/2,j}$; case when the line through the centroids of the adjacent Cartesian cells is parallel to the x -axis	83
3.4	Diamond cell $D_{i,j}$ with outward normal vectors	86
3.5	Dual cell $D_{i,j+1/2}$ with outward normal vectors	86
3.6	Original square cell $C_{i,j}$ with its four adjacent oblique dual cells	88
3.7	Staggered magnetic field.	90

3.8	We use the numerical data given on the original Cartesian cell and those on the four staggered dual cells to approximate the value of the z -component Ω of the electric field at time $t^{n+3/2}$	93
3.9	First test case, minmod limiter at left, MC-2 limiter at right	95
3.10	First test case (continued), minmod limiter at left, MC-2 limiter at right	96
3.11	Second test case, minmod limiter at left, MC-2 limiter at right	97
3.12	Second test case (continued), minmod limiter at left, MC-2 limiter at right	98
3.13	The profile of the solution of the 2D shock tube problem compared with the solution of the one dimensional corresponding problem	98
3.14	The mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 0.5$	99
3.15	The pressure contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem	99
3.16	The mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$	100
3.17	Shaded gray scale mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$	100
3.18	Shaded, logarithmic scaled, contour lines of the mass density for the 2 dimensional MHD Riemann problem at time $t = 0.8$	101
3.19	Shaded contour lines of the magnitude of the magnetic field for the 2 dimensional MHD Riemann problem at time $t = 0.8$	101
4.1	Four Cartesian cells of the original grid (blue) and a staggered dual cell (yellow); time is represented along the z -axis	112
4.2	Staggered magnetic field.	114

4.3	Mass density contour lines for Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$ (left) and at time $t = \pi$ (right).....	117
4.4	Solution of the shock cloud interaction problem at time $t = 0.06$, on a 800^2 grid.....	118
5.1	The resolution of Riemann problems at cell interfaces is avoided when alternating from original to staggered grid	127
5.2	(Left) Square cell centers denoted by "o", dual oblique cells (dotted or dashed); (Right) Original cells $C_{i,j}, C_{i+1,j}$ and the dual cell $D_{i+1/2,j}$	128
5.3	Four Cartesian cells of the original grid (blue) and a staggered dual cell (yellow)	130
5.4	We use the numerical data computed on the staggered Cartesian cell (at time t^{n+1}) and those on the four adjacent original cells (at time t^n) to approximate the value of the z -component Ω of the electric field at time $t^{n+1/2}$	133
5.5	The cells used in the computation of $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$	134
5.6	2D MHD shock-tube problem	136
5.7	Two plots of the mass density along the line $y = 0$ obtained using Cartesian and diamond dual cell schemes (left); profile of $ \mathbf{B} ^2$ at the final time (right).	137
5.8	Profile of the initial data for the MHD 2D-Riemann problem (left) and the shock-cloud interaction problem (right)	138
5.9	Mass density contours for the 2D MHD Riemann problem at time $t = 0.8$ (left); $ \mathbf{B} ^2$ contours (right).....	138
5.10	2D Riemann problem : Plot (along the x -axis) of the mass density obtained using the Cartesian dual cell scheme (200 points, "o" line) and the diamond dual cell scheme (200 points "□" line); the reference solution is obtained on 300 x -points using the Cartesian dual cell scheme	139

- 5.11 Contour lines of $\text{Log}(\rho)$ for the shock-cloud interaction problem on a 400^2 grid at time $t = 0.06$ (left), Contour lines of the magnitude of the magnetic field (right) 140
- 5.12 Comparison between diamond and cartesian dual cell schemes 400 points each; reference solution 1000 gridpoints using cartesian scheme 140
- 5.13 Solution of the shock cloud interaction problem when one does not apply the CTCS procedure(100 points in "o" along the x -axis); the solid line corresponds to the numerical solution obtained with the aid of the CTCS divergence procedure on a 200×200 grid 141
- 5.14 Mass density contour lines for the strong blast problem at time $t=0.0025$ (left), and pressure (right)..... 142
- 5.15 Energy contour lines for the blast wave problem at time $t=0.0025$ (left); two plots of the mass density obtained using the diamond dual cell scheme (100^2 data points in solid line) and Cartesian dual cell scheme 400^2 grid points in "o" (right)..... 143
- 5.16 Solution of the 2D blast wave problem without divergence treatment (100 points along the x -axis, "o"-line); the solid line corresponds to the CTCS-treated solution. 144
- 5.17 The mass density contour lines (left) and the pressure contours (right) for the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 0.5$ 144
- 5.18 The mass density contour lines for the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$ (left) and at time $t = \pi$ (right) 145
- 6.1 Original cells are the cubes (solid line) centered at nodes (x_i, y_j, z_k) while dual cells are the staggered cubes (dashed lines) centered at nodes $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$ (center of the cell $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$) 157
- 6.2 Original Cartesian (blue cubes) and dual staggered grids 162

6.3	Two Cartesian cells $C_{i,j,k}$, $C_{i+1,j,k}$ (blue cubes) and dual cell $D_{i+1/2,j,k}$ (diamond cell) in red	162
6.4	Solution of the scalar advection equation, three snapshots along the axes of the system; the initial data is shown in solid line, the exact solution and the numerical solution are shown in solid line and in "o" respectively.	170
6.5	Numerical solution of the 3D Sod shock-tube problem obtained using diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right)	172
6.6	Mass density along the x -axis for Sod's 3D shock-tube problem	173
6.7	Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right).....	174
6.8	Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right), continued.....	175
6.9	Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (dotted line) and Cartesian dual cell scheme (dashed line).....	176
6.10	Mass density (shaded contours) and velocity field magnitude (cone plot) for the Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$ (left); contour lines of the mass density in the plane $z = \pi$ (right)	176
6.11	Plot of the mass density (left) and the energy for the Orszag-Tang vortex problem	177
6.12	(left) Mass density isosurfaces for the 3D Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$; (right) Electric field magnitude contours	177
6.13	Contour lines of the mass density (left) and the energy (right) at time $t = 0.5$ in the plane $z = \pi$	178

- 6.14 (left) contour lines of the mass density in the plane $z = \pi/2$; (right) plots along the line $y = z = \pi/2$ of the energy obtained with (solid line and dashed line) or without (dotted line) the aid of the CTCS procedure..... 178
- 6.15 (left) Initial mass density profile for the 3D shock-cloud interaction problem; we also see the velocity field magnitude as a cone plot; (right) several slides illustrating the contours of the logarithm of the mass density; the cone plot represents the magnetic field magnitude . 179
- 6.16 (left) Several contour lines of the mass density logarithm at time $t=0.06$ for the 3D shock-cloud interaction; (right) Several isosurfaces for the energy..... 180
- 6.17 Several plots of the mass density of the shock-cloud interaction problem along the line $y = 0.5$ in the plane $z = 0.5$ obtained using the MC-1.5 limiter (right) and the MC-1.5 and MC-2 limiters (left) 181
- 6.18 Shock-cloud interaction problem : (a) plot of the mass density along the line $y = z = 0.5, 0 \leq x \leq 1$ obtained using the base scheme with the CTCS (150 points, solid line) and without any divergence treatment (60 points, dotted line); same comparison for the energy (b) 182
- 6.19 Six dual cells are required to compute $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ i

LISTE DES TABLEAUX

5.1	The maximum absolute divergence values observed for the 2D tests using both CTCS methods.....	145
6.1	Numerical order of the base schemes for smooth or noncontinuous initial data.....	171

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de construire des méthodes de volumes finis centrées (ou "centrales", "central schemes" en anglais) à la fois précises et robustes pour résoudre numériquement des problèmes en aérodynamique et en magnétohydrodynamique (MHD) idéale. Les modèles mathématiques que nous considérons constituent des systèmes hyperboliques multidimensionnels avec flux convexes (en aérodynamique) ou non convexes (en magnétohydrodynamique). Dans cette introduction, nous allons expliquer pourquoi il est important d'étudier les équations de la magnétohydrodynamique. Nous allons illustrer les difficultés qui interviennent en résolvant numériquement des problèmes de MHD, et la nécessité d'avoir des outils numériques efficaces et performants pour résoudre des problèmes de la MHD idéale.

MOTIVATION

Dans un contexte physique, le plasma est un gaz ionisé à charge électrique neutre qui est constitué d'ions, de neutrons et d'électrons [30], [31], [53]. La dynamique des fluides astrophysique est une branche de l'astronomie physique qui étudie l'évolution du plasma dans les étoiles, les galaxies, les médias interstellaires et inter-galactiques. Les équations de la MHD idéale modélisent la dynamique des plasmas. Ces équations décrivent le comportement d'un plasma, composé de gaz obéissant aux lois des gaz parfaits, conducteurs et compressibles. Les équations de la SMHD (shallow water MHD) sont obtenues en supposant que le fluide est à densité constante et qu'il est en équilibre hydrostatique dans la direction verticale. Les équations de la MHD idéale sont utilisées pour modéliser les phénomènes des jets astrophysiques et de la tachocline solaire.

Un jet astrophysique consiste en plusieurs écoulements supersoniques alignés. Ces

jets paraissent lors de la formation de nouvelles étoiles et sont riches en informations sur leurs sources et la manière dont elles ont pris naissance. La physique des jets est très compliquée et les équations de la MHD permettent d'étudier le comportement qualitatif des jets. On trouve dans la littérature plusieurs exemples de modèles astrophysiques formulés à l'aide des équations de la MHD idéale. Les équations de la MHD interviennent aussi dans la modélisation de la tachocline solaire. L'intérieur du soleil est constitué du noyau, de la zone radiative et d'une zone convective. Les zones radiative et convective sont séparées par la tachocline. La tachocline est soumise à un imposant champ magnétique créant les

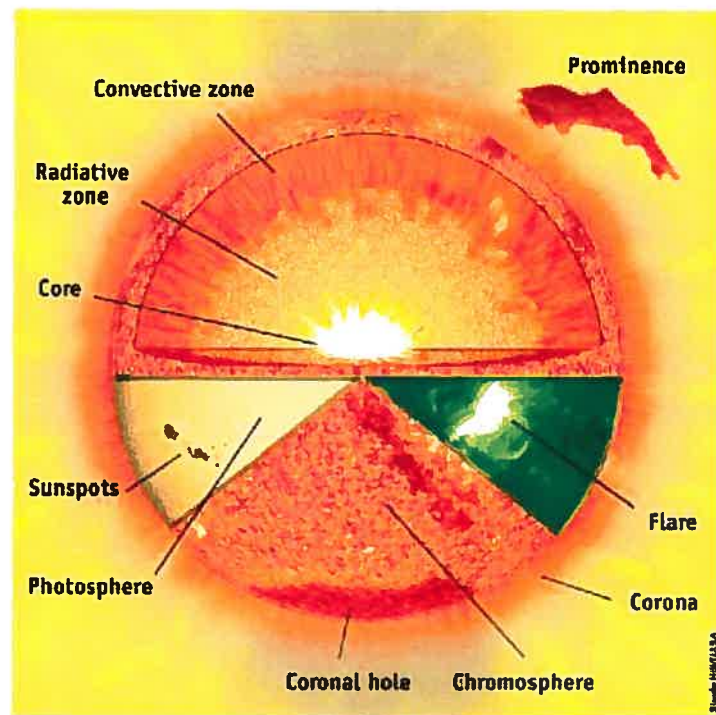


FIGURE 0.1. Intérieur du soleil (www.stargazers.gsfc.nasa.gov)

taches solaires. La dynamique de la tachocline solaire se modélise par des modèles de la dynamique des fluides soumis à des champs magnétiques. Gilman [30, 31] a introduit, à partir des équations de la MHD idéale, un nouveau modèle connu sous le nom des équations de la SMHD qui décrit la dynamique d'un plasma à densité constante dans un champ magnétique et en équilibre hydrostatique dans la direction radiale (verticale).

DÉFIS NUMÉRIQUES

Dans ce travail, nous nous intéressons aux schémas numériques centrés pour résoudre des systèmes hyperboliques multidimensionnels. Ces schémas numériques nécessitent un maillage original et un maillage dual décalé pour éviter la résolution des problèmes de Riemann sur les interfaces des cellules, un processus fort coûteux en temps de calcul. De plus, ces schémas numériques ont la propriété d'être précis du second ordre dans l'espace et dans le temps.

De façon plus particulière, nous nous intéressons aux problèmes de magnétohydrodynamique idéale ; les schémas numériques centrés (comme pour la plupart des autres schémas numériques) ne sont généralement pas capables de résoudre correctement les problèmes de la magnétohydrodynamique idéale et génèrent des solutions numériques qui ne satisfont pas certaines conditions physiques fondamentales ; dans ce cas des oscillations, des ondes non physiques, des instabilités ou même des pressions ou densités négatives peuvent apparaître. Ceci s'explique principalement par l'accumulation des erreurs numériques, telles que les erreurs de troncature et d'arrondi, ce qui conduit à un champ magnétique à divergence non nulle. Ces phénomènes continuent à apparaître même en utilisant des schémas numériques d'ordre de précision élevé ou en raffinant le maillage. L'origine de ce problème est due à la structure complexe des équations qui modélisent le phénomène de la magnétohydrodynamique, et à la contrainte de divergence nulle (champ solénoïdal) que doit satisfaire le champ magnétique. En fait le système des équations de la magnétohydrodynamique ne tient pas compte explicitement de la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ que doit satisfaire en tout temps le champ magnétique alors que ceci est physiquement sous-entendu à partir de la loi de Biot-Savart, et des équations de Maxwell et de Faraday. Plusieurs approches ont été proposées pour remédier à cette situation : certaines consistent à traiter le champ magnétique dans la solution numérique à la suite de chaque pas de temps, d'autres consistent à reformuler le système des équations de la MHD et l'écrire sous une forme non-conservative en introduisant une nouvelle formulation pour le phénomène ou en utilisant une approche de type multiplicateur de Lagrange. Une autre manière d'aborder ce problème consiste à appliquer la décomposition d'un champ vectoriel en la somme d'un champ irrotationnel et d'un champ solénoïdal (théorème

de Helmholtz) et d'en retrancher la partie physiquement non significative ; c'est une approche intéressante mais extrêmement coûteuse en temps de calcul car elle nécessite la résolution d'une équation de Poisson après chaque pas de temps. Dans ce travail, en se fondant sur la méthode du transport sous contrainte originellement proposée par Evans et Hawley pour les méthodes de différences finies, nous allons présenter une nouvelle méthode de traitement de la divergence qui s'applique dans le cadre des schémas de type *volumes finis centrés* et qui maintient la formulation conservatrice des équations de la magnétohydrodynamique idéale.

CONTENU DE LA THÈSE

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des schémas numériques que nous allons utiliser pour résoudre des systèmes de lois de conservation hyperboliques en différentes dimensions spatiales. Nous présentons ensuite un nouveau schéma numérique de type central pour résoudre des systèmes hyperboliques en trois dimensions spatiales ; les cellules du maillage original sont cartésiennes alors que celles du maillage dual décalé sont en diamants (deux pyramides qui se partagent la même base).

Au second chapitre nous présentons les équations qui modélisent le phénomène de la magnétohydrodynamique idéale, nous discutons la propriété physique que satisfait le champ magnétique dans la solution exacte de ces équations. Par la suite, nous présentons un bref aperçu de chacune des méthodes numériques déjà proposées pour traiter le champ magnétique dans la solution numérique pour satisfaire la contrainte physique. Finalement, nous présentons nos approches numériques qui s'appliquent dans le cadre des schémas centrés, avec des cellules originales cartésiennes et des cellules duales cartésiennes ou en diamants, pour maintenir la contrainte physique ; dans chacun de ces cas nous formulons les équations et l'algorithme convenable et nous prouvons analytiquement que la solution générée à la suite du traitement du champ magnétique satisfait la contrainte physique.

Les articles que nous avons publiés ou soumis pour publication dans les journaux scientifiques au cours de ce travail constituent la seconde partie de cette thèse.

Notre premier article est présenté au chapitre 3. Dans cet article nous avons

adapté le schéma numérique central bidimensionnel, dont les cellules originales sont cartésiennes et les cellules duales sont en diamants, pour résoudre les équations de la MHD idéale. Pour satisfaire la contrainte physique du champ magnétique solénoïdal, nous avons construit une méthode de traitement systématique de la divergence du champ magnétique, que nous appelons la méthode CTCS. La présentation du schéma numérique de base ainsi que celle de la méthode CTCS constituent la matière de cet article. Les résultats numériques que nous avons obtenus pour certains problèmes de MHD idéale sont présentés à la fin de l'article (chapitre 3). Cet article a été accepté au mois d'octobre 2004 et il est disponible depuis le mois de décembre 2004 dans le *Journal of Computational Physics*, Volume 204, pages 737-759.

Nous présentons au chapitre 4 le compte-rendu que nous avons soumis pour publication dans le livre des *Proceedings* de la conférence : "Tenth International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications" qui a eu lieu à Osaka au Japon, au mois de septembre 2004. Dans ce travail, nous présentons une nouvelle approche pour résoudre les problèmes de magnétohydrodynamique idéale bidimensionnels avec les schémas numériques centrés dont les cellules originales et duales sont purement cartésiennes.

La matière considérée dans ce *proceeding* sera présentée de façon plus élaborée au chapitre 5, notre second article. Malgré le fait que le schéma numérique de base, et pour certains problèmes de magnétohydrodynamique idéale, soit capable de générer une solution numérique relativement acceptable et que la divergence du champ magnétique dans cette solution numérique reste petite, nous avons construit la version CTCS de traitement de divergence qui s'applique avec le schéma numérique de base. Ensuite, nous avons appliqué cette nouvelle méthode et nous avons résolu plusieurs problèmes de MHD idéale ; nous avons comparé nos résultats numériques avec ceux obtenus à partir du schéma à cellules duales en diamant présenté au chapitre 3. La méthode numérique que nous avons considérée dans ce second article se caractérise par sa simplicité de mise en oeuvre, sa robustesse, et entraîne une réduction du temps de calcul (environ 20-25%) si l'on compare à la version avec cellule duale en diamant. Cette article est soumis à "*SIAM Journal on Scientific Computing*".

Notre dernier article constitue le chapitre 6 de cette thèse ; dans cet article nous présentons un nouveau schéma numérique central tridimensionnel, dont les cellules originales sont cartésiennes et les cellules duales sont en diamants. Nous nous intéressons aussi à la version tridimensionnelle purement cartésienne des schémas centrés (cellules originales et duales cartésiennes). Pour chacun de ces schémas nous construisons la version CTCS de traitement de divergence correspondante nécessaire pour résoudre des problèmes de MHD idéale. Nous présentons des validations numériques de nos schémas ainsi que des comparaisons quantitatives des résultats obtenus à partir des deux versions du schémas. Cet article a été accepté, depuis le mois de juillet 2005, et il sera publié au "Journal of Computational Physics".

Chapitre 1

SCHÉMAS NUMÉRIQUES CENTRÉS MULTIDIMENSIONNELS

1.1. MÉTHODES NUMÉRIQUES

Au début des années 90, Nessyahu et Tadmor [46] ont présenté un nouveau schéma numérique centré pour résoudre les lois de conservation hyperboliques en une dimension spatiale ; leur méthode est basée sur le schéma de Lax-Friedrichs et fait appel à un maillage décalé pour éviter la résolution des problèmes de Riemann intervenant aux interfaces des cellules et ceci dans le but d'accélérer les calculs ; de plus la méthode est non oscillatoire grâce à l'utilisation des limiteurs de pentes, et elle est précise d'ordre deux. Par la suite, Arminjon et al. [1, 2, 3, 4, 5, 9] ont présenté plusieurs extensions en deux et trois dimensions spatiales sur des géométries cartésiennes ou non structurées (maillages triangulaires ou tétraédriques). Dans ce chapitre, nous allons présenter une brève description du schéma original unidimensionnel de Nessyahu et Tadmor [46], ainsi qu'un aperçu sur certaines extensions bi- et tridimensionnelles que nous allons utiliser au cours de nos applications numériques. Finalement nous présentons une nouvelle extension tridimensionnelle faisant appel à un maillage original cartésien et à un maillage décalé dont les cellules duales sont en diamants.

1.1.1. Rappel du schéma de Nessyahu-Tadmor

Le schéma de Nessyahu et Tadmor [46] est basé sur la méthode de Lax-Friedrichs et permet de résoudre les lois de conservation hyperboliques unidimensionnelles de la forme :

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty) \\ u(x, t = 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

tout en évitant la résolution des problèmes de Riemann aux extrémités des intervalles du maillage. On rappelle que le schéma de Lax-Friedrichs (LF) fait évoluer une fonction constante par morceaux u_i^n sur les cellules (les intervalles $C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ centrés aux "nœuds" x_i) définie, sur la cellule C_i comme une valeur approximative de l'intégrale de la solution exacte $u(x, t^n)$ sur C_i :

$$u_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx. \quad (1.1.2)$$

La version originale du schéma de Lax-Friedrichs s'écrit sous la forme :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - \lambda(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)), \quad \text{avec } \lambda = \Delta t / (2\Delta x). \quad (1.1.3)$$

C'est l'utilisation de la version décalée du schéma LF et de deux maillages décalés

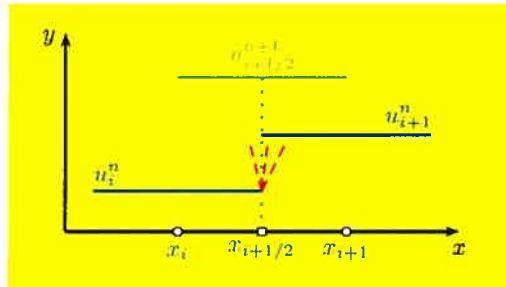


FIGURE 1.1. Géométrie du schéma central de Lax-Friedrichs

l'un par rapport à l'autre (Fig.1.1) qui permet d'éviter de résoudre les problèmes de Riemann qui interviennent notamment, dans toute méthode de type "Volumes Finis", aux interfaces des cellules ; on effectue pour cela deux pas de temps successifs : au cours du premier pas, on suppose connues les valeurs $\{u_i^n\}$ sur les cellules originales C_i et on définit des valeurs intermédiaires $\{u_{i+1/2}^{n+1}\}$ sur les cellules duales

$D_{i+1/2} = \{x : x_i < x < x_{i+1}\}$ par

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) - \lambda(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)), \quad \text{avec } \lambda = \Delta t / \Delta x. \quad (1.1.4)$$

La solution sur le maillage original est obtenue lors du second pas de temps et se calcule de la façon suivante :

$$u_i^{n+2} = \frac{1}{2}(u_{i-1/2}^{n+1} + u_{i+1/2}^{n+1}) - \lambda(f(u_{i+1/2}^{n+1}) - f(u_{i-1/2}^{n+1})). \quad (1.1.5)$$

Le schéma numérique de Lax-Friedrichs est précis d'ordre un dans l'espace et dans le temps. Nessyahu et Tadmor [46], ont considéré la version décalée du schéma de Lax-Friedrichs et ont considéré à la suite de van Leer [3] ou [4] une approximation de la solution exacte linéaire par morceaux sur les cellules du maillage ; ceci augmente l'ordre de précision spatiale du schéma d'une unité ; les interpolations linéaires sont obtenues facilement en utilisant des développements de Taylor du premier ordre :

$$u(x, t^n) \simeq u_i^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \delta_i^n, \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (1.1.6)$$

où δ_i^n doit satisfaire la condition :

$$\frac{\delta_i^n}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t^n)|_{x=x_i} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

pour obtenir l'ordre deux par rapport à x .

On définit $u_{i+1/2}^{n+1}$ comme étant une approximation numérique de la valeur moyenne de la solution du problème de Riemann généralisé sur $[x_i, x_{i+1}]$, obtenue de la manière suivante.

On intègre l'équation (1.1.1) sur le domaine $\mathcal{R}_{i+1/2}^n = [x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$, et on applique la formule de Green pour obtenir :

$$\oint_{\mathcal{R}_{i+1/2}^n} (u \, dx - f(u) \, dt) = 0. \quad (1.1.7)$$

Cette intégrale se décompose sur chacun des côtés de $\mathcal{R}_{i+1/2}^n$ et prend la forme

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) \, dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) \, dx + \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} u(x, t^n) \, dx \\ &\quad - \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1}, t)) \, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) \, dt \right). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

En définissant la valeur numérique de la solution à $t = t^{n+1}$ sur la cellule $D_{i+1/2}$ par :

$$u_{i+1/2}^{n+1} \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, t^{n+1}) dx, \quad (1.1.9)$$

on est conduit au schéma :

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx + \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} u(x, t^n) dx \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) dt \right) \quad (1.1.10)$$

Pour les intégrales spatiales, on remplace $u(x, t)$ par son approximation linéaire par morceaux, la première intégrale de l'équation (1.1.10) devient : $\Delta x(u_i^n/2 + \delta_i^n/8)$. On utilise la règle du point médian pour approximer les intégrales temporelles dans l'équation (1.1.10) :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_i, t)) dt \simeq \Delta t f(u(x_i, t^{n+1/2})) \quad (1.1.11)$$

pour cela, on calcule

$$u(x_i, t^{n+1/2}) \simeq u(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} u_t(x_i, t^n) \quad (1.1.12)$$

en utilisant (1.1.1) on obtient

$$u_i^{n+1/2} = u(x_i, t^{n+1/2}) \simeq u(x_i, t^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(u_i^n) \delta_i^n. \quad (1.1.13)$$

Les approximations numériques du gradient génèrent souvent des oscillations dans la solution ; pour éviter de telles situations, on utilise pour calculer δ_i^n des limiteurs de pente (de type MUSCL de van Leer [67]). Le premier pas de temps du schéma prend la forme suivante :

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} + \frac{\delta_i^n - \delta_{i+1}^n}{8} - \Delta t \frac{f(u_{i+1}^{n+1/2}) - f(u_i^{n+1/2})}{\Delta x}. \quad (1.1.14)$$

La solution aux nœuds du maillage original est obtenue lors du second pas de temps :

$$u_i^{n+2} = \frac{u_{i-1/2}^{n+1} + u_{i+1/2}^{n+1}}{2} + \frac{\delta_{i-1/2}^{n+1} - \delta_{i+1/2}^{n+1}}{8} - \Delta t \frac{f(u_{i+1/2}^{n+3/2}) - f(u_{i-1/2}^{n+3/2})}{\Delta x}. \quad (1.1.15)$$

Ceci achève la présentation du schéma numérique de Nessyahu et Tadmor pour les lois de conservations hyperboliques en une dimension spatiale.

Le défaut de ce schéma central consiste en une restriction sur la condition de stabilité CFL qui ne doit pas dépasser la valeur 0.5. Pour mieux comprendre cette restriction sur la condition CFL nous allons considérer la loi de conservation unidimensionnelle $u_t + f(u)_x = 0$ et nous comparons la géométrie du schéma central unidimensionnel de Nessyahu et Tadmor avec celle d'une méthode de type Godunov :

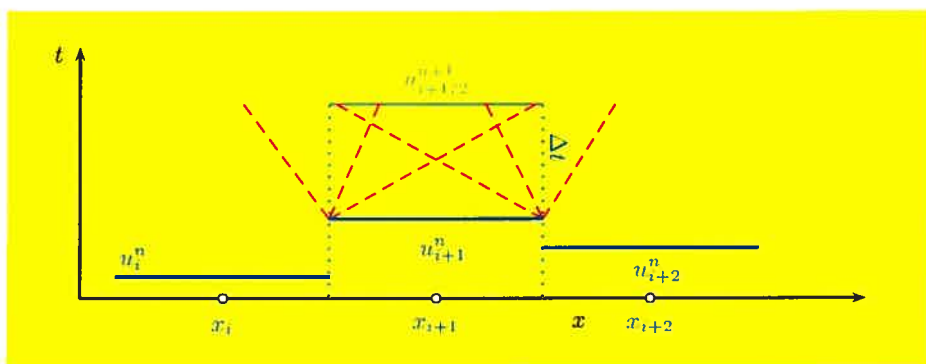


FIGURE 1.2. Géométrie des schémas numériques de type Godunov

Pour les schémas numériques de type Godunov, la condition de stabilité CFL est :

$$\frac{\Delta t}{\delta x} \max(\lambda_i)_{i=1, \dots, n} \leq 1. \quad (1.1.16)$$

Les λ_i sont les valeurs propres de la matrice jacobienne $A = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$

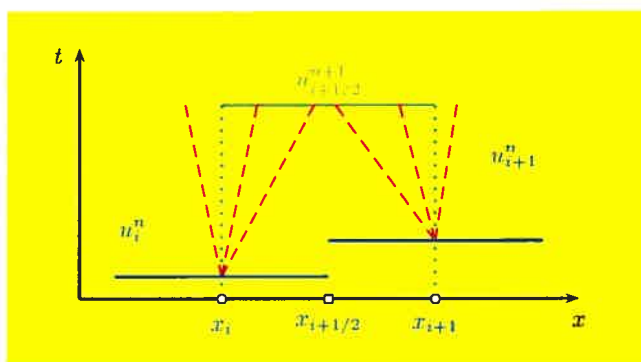


FIGURE 1.3. Géométrie de la version centrée du schéma de Lax-Friedrichs

Comme nous avons déjà vu, le fait d'alterner à chaque pas de temps entre des cellules originales et des cellules duales nous évite de résoudre les problèmes de

Riemann qui interviennent aux interfaces des cellules. Malgré le fait que la condition de stabilité CFL des schémas centrés soit inférieure à celle des autres schémas (par exemple les méthodes de type Godunov, Upwind et autres) l'expérience a montré que ces schémas restent quand même compétitifs et avantageux.

1.1.2. Extension du schéma "NT" en 2D avec des cellules duales en diamants

Plusieurs extensions bidimensionnelles du schéma de Nessyahu et Tadmor ont déjà été proposées par Arminjon et ses collaborateurs [1, 2, 3, 4, 5, 9, 63] (pour des maillages cartésiens ou non structurés) et plus tard par Jiang-Tadmor [35] dans le but de résoudre les lois de conservation hyperboliques bidimensionnelles

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) &= 0 && \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ \vec{U}(x, y, t = 0) &= \vec{U}_0(x, y). \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Dans cette thèse on va s'intéresser en particulier à deux extensions bidimensionnelles. Dans les deux cas on considère un maillage original cartésien où les cellules C_{ij} sont des carrés de côtés parallèles aux axes. Les cellules du maillage dual décalé seront soit des cellules "diamants" (carrés obliques, Fig.1.4), soit des cellules cartésiennes décalées (Figs.1.4 et 1.5). On considère un domaine rectangulaire discrétisé uniformément suivant un réseau de cellules carrées ; les cellules du maillage décalé sont les carrés centrés aux milieux des interfaces des cellules originales et qui ont subi une rotation de 45° comme le montre la figure 1.4.

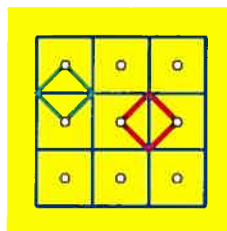


FIGURE 1.4. Les cellules cartésiennes en bleus sont centrées aux nœuds 'o', les cellules duales sont représentées en rouge et en vert

La description complète du schéma se trouve dans [9] avec des applications numériques pour des lois de conservation scalaire, et pour les équations d'Euler.

Nous donnons ci-dessous un bref aperçu de la méthode numérique. Nous considérons l'équation (1.1.17) avec $\vec{F}(\vec{U}) = (\vec{f}, \vec{g})$ où \vec{f} et \vec{g} sont des "fonctions de flux" dans un domaine rectangulaire Ω du plan (x, y) , et avec la condition initiale $\vec{U}(x, y, t = 0) = \vec{U}_0(x, y)$.

Soient $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ deux cellules cartésiennes centrées aux points $a_{i,j} = (x_i, y_j)$ et $a_{i+1,j} = (x_{i+1}, y_j)$ et telles que la ligne passant par ces deux points soit parallèle à l'axe des abscisses (Fig.1.5). La cellule duale $D_{i+1/2,j}$ est le carré dont deux de ces quatres sommets sont les points $a_{i,j}$ et $a_{i+1,j}$ et qui admet comme diagonale la face commune aux deux cellules $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ (Fig.1.5).

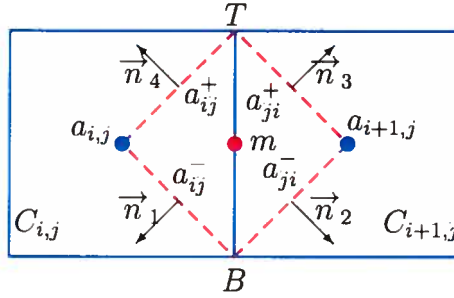


FIGURE 1.5. Deux cellules cartésiennes $C_{i,j}, C_{i+1,j}$ et la cellule duale $D_{i+1/2,j}$

On intègre d'abord l'équation (1.1.17) sur le domaine $D_{i+1/2,j} \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}_t dA dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j}} \nabla \cdot \vec{F} dA dt. \quad (1.1.18)$$

Le théorème de divergence de Gauss appliqué au second membre de l'équation (1.1.18) donne :

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA &= \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt, \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

$\vec{n} = (n_x, n_y)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière de la cellule duale $\partial D_{i+1/2,j}$. Le membre de gauche de l'équation (1.1.19) définit la valeur moyenne $\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1}$ de la solution sur la cellule duale

$$A(D_{i+1/2,j}) \vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} \simeq \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA, \quad (1.1.20)$$

$\mathcal{A}(D_{i+1/2,j})$ représente l'aire de la cellule duale $D_{i+1/2,j}$. On écrit la première intégrale du membre de droite de l'équation (1.1.19) comme une somme de deux intégrales sur les sous-domaines $D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}$ (le triangle $a_{i,j}TB$) et le sous-domaine $D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}$ (le triangle $a_{i+1,j}TB$) :

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA &= \iint_{D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \\ &\quad + \iint_{D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA. \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

En utilisant la règle du point médian (appliquée au centre du triangle), on peut approximer l'équation (1.1.21) avec une précision d'ordre deux :

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA &\simeq \vec{U}\left(x_i + \frac{\Delta x}{3}, y_j, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}) \\ &\quad + \vec{U}\left(x_{i+1} - \frac{\Delta x}{3}, y_j, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

où $\mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}) = \mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}) = \mathcal{A}(D_{i+1/2,j})/2 = h^2/4$. ($h = \Delta x = \Delta y$)

Pour calculer les valeurs de $\vec{U}(x, y, t^n)$ apparaissant dans le membre de droite de (1.1.22), on considère des fonctions linéaires par morceaux $\widetilde{\vec{U}}_{i,j}(x, y, t^n)$ définies sur les cellules du maillage et qui sont obtenues par interpolation linéaire (de type MUSCL de van Leer [67]) au voisinage des nœuds $a_{i,j}$. Ceci garantit le second ordre de précision et préserve la monotonie du schéma

$$\widetilde{\vec{U}}_{i,j}(x, y, t^n) = \vec{U}_{i,j}^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \vec{U}_{i,j;x}^{lim} + \frac{y - y_j}{\Delta y} \vec{U}_{i,j;y}^{lim} \quad (1.1.23)$$

où

$$\nabla \vec{U}_{i,j}^n \equiv \left(\frac{\vec{U}_{i,j;x}^{lim}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \frac{\vec{U}_{i,j;y}^{lim}}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) \right)$$

représente le gradient limité de $\vec{U}_{i,j}^n$.

L'équation (1.1.23) permet de calculer les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{U}}(a_{ij}^\pm, t^n) &\simeq \vec{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} (\vec{U}_{i,j;x}^{lim} \pm \vec{U}_{i,j;y}^{lim}), \\ \widetilde{\vec{U}}(a_{ji}^\pm, t^n) &\simeq \vec{U}_{i+1,j}^n - \frac{1}{4} (\vec{U}_{i+1,j;x}^{lim} \pm \vec{U}_{i+1,j;y}^{lim}). \end{aligned}$$

En tenant compte de (1.1.23), on réécrit (1.1.22) sous sa forme finale :

$$\iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \simeq \frac{h^2}{4} (\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i+1,j}^n + \frac{1}{3} \vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \frac{1}{3} \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}). \quad (1.1.24)$$

De nouveau, on applique la règle du point médian pour évaluer l'intégrale du flux par rapport au temps pour garantir une précision d'ordre deux. On peut approximer le deuxième terme du membre de droite de l'équation (1.1.19) de la façon suivante :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt \simeq \Delta t \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f}(\vec{U}(x, y, t^{n+1/2})) n_x + \vec{g}(\vec{U}(x, y, t^{n+1/2})) n_y) d\sigma. \quad (1.1.25)$$

Pour évaluer l'équation (1.1.25), il faut prédire les valeurs de \vec{U} et de \vec{F} sur les interfaces de la cellule $D_{i+1/2,j}$ à l'instant intermédiaire $t^{n+1/2}$. Par exemple, on peut prédire ces valeurs au milieu $a_{i,j}^-$ du segment $[a_{i,j}B]$ (Fig.[1.5]) en utilisant une méthode de type Euler explicite et l'équation (1.1.17) :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{a_{i,j}B}^{n+1/2} &\simeq \vec{U}_{a_{i,j}^-}^{n+1/2} \simeq \widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \widetilde{\vec{U}}_t(a_{i,j}^-, t^n) \\ &\simeq \widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n) - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \vec{F}|_{(a_{i,j}^-, t^n)}. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

On réécrit l'équation (1.1.26) en termes des matrices jacobiennes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{a_{i,j}B}^{n+1/2} &\simeq \widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n) - \frac{\Delta t}{2h} \left(A(\widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n)) \vec{U}_{i,j;x}^{lim} \right. \\ &\quad \left. + B(\widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n)) \vec{U}_{i,j;y}^{lim} \right) \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

De façon analogue, on peut approximer $\vec{U}_{a_{i,j}T}^{n+1/2}$, $\vec{U}_{a_{i+1,j}B}^{n+1/2}$, $\vec{U}_{a_{i+1,j}T}^{n+1/2}$. $\vec{F}(\vec{U}_{a_{i,j}B}^{n+1/2})$ est alors une approximation du flux au milieu $a_{i,j}^-$ du segment $a_{i,j}B$ à l'instant intermédiaire $t^{n+1/2}$ obtenue à partir de l'équation (1.1.26). Dans le cas d'un maillage uniforme, une cellule duale $D_{i+1/2,j}$ est un carré dont les côtés forment un angle de 45° avec les axes ; ainsi les vecteurs unitaires perpendiculaires

à la frontière $\partial D_{i+1/2,j}$ sont :

$$\vec{n}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1), \quad \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1), \quad \vec{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1), \quad \vec{n}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1).$$

On peut approximer l'intégrale du flux de la façon suivante en notant $\partial D_{i+1/2,j}^q$ ($1 \leq q \leq 4$) les arêtes de $\partial D_{i+1/2,j}$:

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\sum_{q=1}^4 \oint_{\partial D_{i+1/2,j}^q} (\vec{f} n_{x,q} + \vec{g} n_{y,q}) d\sigma \right) dt \\ &\simeq h \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \begin{aligned} &(-\vec{f}(\vec{U}(a_{ij}^-, t^{n+1/2})) - \vec{g}(\vec{U}(a_{ij}^-, t^{n+1/2}))) \\ &+ (\vec{f}(\vec{U}(a_{ji}^-, t^{n+1/2})) - \vec{g}(\vec{U}(a_{ji}^-, t^{n+1/2}))) \\ &+ (\vec{f}(\vec{U}(a_{ji}^+, t^{n+1/2})) + \vec{g}(\vec{U}(a_{ji}^+, t^{n+1/2}))) \\ &+ (-\vec{f}(\vec{U}(a_{ij}^+, t^{n+1/2})) + \vec{g}(\vec{U}(a_{ij}^+, t^{n+1/2}))) \end{aligned} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{h}{2} \{RHS\} \quad (1.1.28) \end{aligned}$$

en tenant pour cela compte du fait que la cellule duale est un carré dont la longueur de l'arête est $l(a_{i,j}T) = l(a_{i,j}B) = h\sqrt{2}/2$. Les équations (1.1.19), (1.1.24) et (1.1.28) permettent d'obtenir l'expression du premier pas de temps dans la direction de l'axe des abscisses (sur les cellules duales de la forme $D_{i+1/2,j}$)

$$\begin{aligned} \vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i+1,j}^n) + \frac{1}{6}(\vec{U}_{i,j,x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,x}^{lim}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h} [(-\vec{f}_{a_{ij}^-}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{ij}^-}^{n+1/2}) + (\vec{f}_{a_{ji}^-}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{ji}^-}^{n+1/2}) \\ &\quad + (\vec{f}_{a_{ji}^+}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{ji}^+}^{n+1/2}) + (-\vec{f}_{a_{ij}^+}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{ij}^+}^{n+1/2})]. \quad (1.1.29) \end{aligned}$$

De façon similaire nous pouvons formuler l'expression du premier pas de temps dans la direction de l'axe des ordonnées (sur les cellules duales de la forme $D_{i,j+1/2}$) et celle du second pas de temps qui va donner la solution sur le maillage original (les cellules $C_{i,j}$). Une étude détaillée de ce schéma se trouve dans [9].

1.1.3. Extension du schéma "NT" en 2D avec des cellules duales cartésiennes

En 1995, Arminjon et al. (1.1.17) ont présenté une extension bidimensionnelle [2] du schéma centré de Nessyahu et Tadmor pour résoudre les lois de conservation hyperboliques bidimensionnelles. Les cellules du maillage original ainsi que celles du maillage décalé sont cartésiennes uniformes. Nous allons donner par la suite un bref aperçu du schéma numérique. Les cellules $\{C_{ij}\}$ du maillage original sont les carrés centrés aux nœuds (x_i, y_j) et telles que $x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = h$. Les cellules duales $D_{i+1/2, j+1/2}$ du maillage décalé sont identiques aux cellules $C_{i,j}$ mais elles sont centrées aux nœuds $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$.

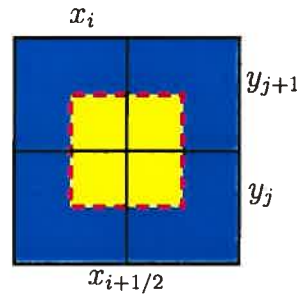


FIGURE 1.6. Quatre cellules cartésiennes du maillage original (en bleu) sont nécessaires pour calculer la solution sur la cellule duale (en jaune) du maillage décalé

Supposons que la solution $U_{i,j}^n$ soit connue sur les cellules $C_{i,j}$ à l'instant t^n . A l'instant t^{n+1} , on calcule la solution sur les cellules duales du maillage décalé et ceci pour éviter la résolution des problèmes de Riemann sur les interfaces des cellules. En intégrant l'équation (1.1.17) sur le domaine $D_{i+1/2, j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}]$ on obtient :

$$\int_{D_{i+1/2, j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) ds = \int_{D_{i+1/2, j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) ds - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{D_{i+1/2, j+1/2}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, t)) ds dt. \quad (1.1.30)$$

Le terme de gauche de l'équation (1.1.30) définit la solution à l'instant t^{n+1} sur la cellule duale $D_{i+1/2, j+1/2}$. La première intégrale du membre de droite de l'équation (1.1.30) sera approximée avec une précision d'ordre deux en utilisant la règle du

point médian ainsi qu'une interpolation linéaire de type MUSCL de van Leer [67]. La seconde intégrale du membre de droite de l'équation (1.1.30) sera calculée en appliquant tout d'abord la formule de Green et ensuite sera approximée avec une précision d'ordre deux en utilisant la règle du point médian. L'expression générale de la solution numérique $\vec{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ à l'instant t^{n+1} est donnée par la formule suivante (cf. [2]) :

$$\begin{aligned}
u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j+1}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j+1}^n) \\
&+ \frac{1}{16}(\vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}) - \frac{\lambda}{2}[f_{i+1,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^{n+1/2}] \\
&+ \frac{1}{16}(\vec{U}_{i,j+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;x}^{lim}) - \frac{\lambda}{2}[f_{i+1,j+1}^{n+1/2} - f_{i,j+1}^{n+1/2}] \\
&+ \frac{1}{16}(\vec{U}_{i,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim}) - \frac{\lambda}{2}[g_{i,j+1}^{n+1/2} - g_{i,j}^{n+1/2}] \\
&+ \frac{1}{16}(\vec{U}_{i+1,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;y}^{lim}) - \frac{\lambda}{2}[g_{i+1,j+1}^{n+1/2} - g_{i+1,j}^{n+1/2}]
\end{aligned} \tag{1.1.31}$$

où $(\nabla \vec{U})^{lim} \equiv (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x), \vec{U}_y^{lim}/\Delta y + \mathcal{O}(\Delta y))$ représente le gradient limité de la solution numérique.

1.2. SCHÉMAS NUMÉRIQUES CENTRÉS EN TROIS DIMENSIONS SPATIALES

Dans cette section nous allons présenter deux schémas numériques pour résoudre des systèmes hyperboliques en trois dimensions spatiales de la forme :

$$\vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) = \vec{U}_t + \vec{f}_x + \vec{g}_y + \vec{h}_z = 0,$$

avec les données initiales : (1.2.1)

$$\vec{U}(x, y, z, t = 0) = \vec{U}_0(x, y, z),$$

où :

$$\begin{aligned}
\vec{U} &= (u_1, \dots, u_p)^T, \quad \vec{F}(\vec{U}) = (\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}) \\
&= ((f_1, \dots, f_p)^T, (g_1, \dots, g_p)^T, (h_1, \dots, h_p)^T).
\end{aligned}$$

Les deux schémas utilisent un maillage original cartésien uniforme dont les cellules sont des cubes centrés aux nœuds du maillage. Les cellules duales du maillage décalé sont soit des diamants ou simplement des cubes décalés.

1.2.1. Schéma numérique central en trois dimensions spatiales avec cellules duales en diamants

Nous proposons un nouveau schéma numérique tridimensionnel pour résoudre des systèmes hyperboliques de la forme (1.2.1). On considère un domaine ayant la forme d'un parallélépipède discrétisé par des cubes ayant h pour longueur d'arête. Comme en une et en deux dimensions, le schéma tridimensionnel nécessite un maillage décalé. On propose alors les cellules «diamants» obtenue en joignant les centres de deux cubes adjacents aux quatre sommets de leur face commune comme le montre la figure Fig.1.7. Ce schéma numérique peut être considéré comme extension directe du schéma bidimensionnel [9] présenté à la section 1.1.2. Les cellules cartésiennes du maillage original sont les cubes $C_{i,j,k} \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$, centrés aux nœuds $a_{i,j,k}$; les cellules duales sont obtenues à partir de deux cellules cartésiennes voisines $C_{i,j,k}$ et $C_{i+1,j,k}$ (Fig.1.8) et ceci en joignant leur centre respectif aux quatres sommets de la face commune des deux cellules cartésiennes. Tout comme pour la version bidimensionnelle, il faut considérer des cellules décalées dans chacune des trois directions spatiales.

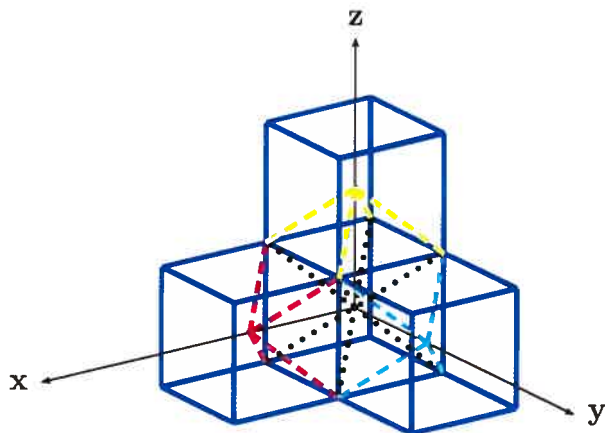


FIGURE 1.7. Profil du maillage cartésien et du maillage dual en diamant

1.2.1.1. Premier pas de temps suivant l'axe des x

Nous supposons que la solution soit connue sur les cellules cartésiennes du maillage original à l'instant t^n . Soient $C_{i,j,k}$ et $C_{i+1,j,k}$ deux cellules cartésiennes centrées aux nœuds $a_{i,j,k} = (x_i, y_j, z_k)$ et $a_{i+1,j,k} = (x_{i+1}, y_j, z_k)$ respectivement et telles que la ligne $a_{i,j,k}a_{i+1,j,k}$ soit parallèle à l'axe des x . Soit $D_{i+1/2,j,k}$ la cellule duale qui correspond à ces deux cellules cartésiennes (Fig.1.8). On intègre

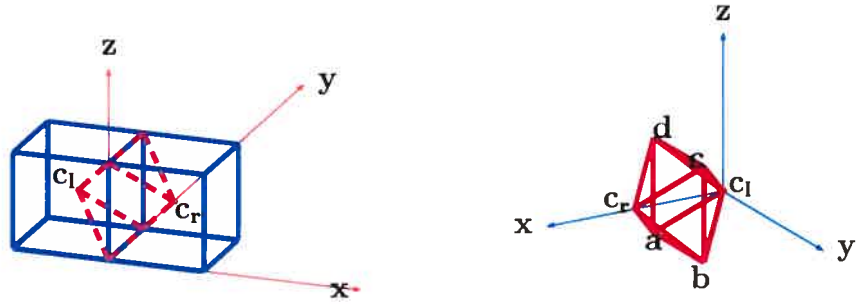


FIGURE 1.8. Deux cellules cartésiennes $C_{i,j,k}$ $C_{i+1,j,k}$ (les cubes en bleu) et la cellule duale $D_{i+1/2,j,k}$ (diamant en rouge)

l'équation (1.2.1) sur le domaine $D_{i+1/2,j,k} \times [t^n, t^{n+1}]$

$$0 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}_t(x, y, z, t^n) dV dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{D_{i+1/2,j,k}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) dV dt.$$

On applique par la suite le théorème de divergence; on obtient :

$$\int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV = \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt. \quad (1.2.2)$$

\vec{n} représente la normale extérieure à la frontière $\partial D_{i+1/2,j,k}$ de la cellule duale. Le terme de gauche de l'équation (1.2.2) définit la valeur moyenne de la solution à l'instant t^{n+1} sur la cellule duale $D_{i+1/2,j,k}$:

$$V(D_{i+1/2,j,k}) \vec{U}_{D_{i+1/2,j,k}}^{n+1} \simeq \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV, \quad (1.2.3)$$

où $V(D_{i+1/2,j,k}) = h^3/3$ représente le volume de la cellule $D_{i+1/2,j,k}$. La première intégrale du terme de droite de l'équation (1.2.2) se décompose, sur un maillage uniforme ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$), en une somme de deux termes :

$$\begin{aligned} \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV &= \int_{D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV \\ &\quad + \int_{D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i+1,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV \quad (1.2.4) \\ &\simeq V(D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i,j,k}) \vec{U}(x_i + \frac{2h}{5}, y_j, z_k, t^n) \\ &\quad + V(D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i+1,j,k}) \vec{U}(x_{i+1} - \frac{2h}{5}, y_j, z_k, t^n), \end{aligned}$$

$V(D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i,j,k}) = V(D_{i+1/2,j,k} \cap C_{i+1,j,k}) = \frac{h^3}{6}$ est le volume de chacune des deux pyramides qui constituent la cellule duale.

Moyennant une interpolation linéaire (par exemple de type MUSCL de van Leer [67]) on peut, pour approximer l'équation (1.2.4) avec une précision d'ordre deux, introduire

$$\vec{U}_{i,j,k}(x, y, z, t^n) \simeq \vec{U}_{i,j,k}^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \frac{y - y_j}{\Delta y} \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \frac{z - z_k}{\Delta z} \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim} \quad (1.2.5)$$

où

$$\nabla \vec{U}_{i,j,k}^n = \left(\frac{\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \frac{\vec{U}_{i,j,k;y}^{lim}}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y), \frac{\vec{U}_{i,j,k;z}^{lim}}{\Delta z} + \mathcal{O}(\Delta z) \right) \quad (1.2.6)$$

est le gradient limité [67] de l'interpolant linéaire $\vec{U}_{i,j,k}(x, y, z, t^n)$.

L'équation (1.2.4) prend sa forme finale :

$$\begin{aligned} \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV &\simeq \frac{h^3}{6} \left[\vec{U}_{i,j,k}^n + \vec{U}_{i+1,j,k}^n \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{5} (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim}) \right]. \quad (1.2.7) \end{aligned}$$

Pour évaluer le second terme du membre de droite de l'équation (1.2.2), on utilise tout d'abord la règle du point médian pour approximer l'intégrale temporelle du

flux et ceci avec une précision d'ordre deux :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^n)) \cdot \vec{n} \, dA \, dt \simeq \Delta t \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} \, dA. \quad (1.2.8)$$

Pour le calcul de l'intégrale du flux à travers les faces de la cellule duale $D_{i+1/2,j,k}$ on aura besoin des notations ci-dessous :

(1) Pour des cellules cartésiennes $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$:

- $c_l = (x_i, y_j, z_k)$ et $c_r = (x_{i+1}, y_j, z_k)$ représentent les centres des deux cellules adjacentes $C_{i,j,k}$ et $C_{i+1,j,k}$ suivant l'axe des abscisses.
- L'interface commune des deux cellules adjacentes $C_{i,j,k}$ et $C_{i+1,j,k}$ sera notée (abcd). Les composantes des quatre sommets en termes de i, j, k et h sont :

$$a : (x_i + h/2, y_j - h/2, z_k - h/2)$$

$$b : (x_i + h/2, y_j + h/2, z_k - h/2)$$

$$c : (x_i + h/2, y_j + h/2, z_k + h/2)$$

$$d : (x_i + h/2, y_j - h/2, z_k + h/2)$$

(2) Pour la cellule diamant ($D_{i+1/2,j,k}$) :

- T_l^1 représente le triangle c_lcd
 $\vec{n}_l^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} + \vec{k}]$ est la normale extérieure au triangle T_l^1
 $e_l^1(x_i + h/3, y_j, z_k + h/3)$ est le centre du triangle T_l^1
- T_l^2 représente le triangle c_lad
 $\vec{n}_l^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} - \vec{j}]$ est la normale extérieure au triangle T_l^2
 $e_l^2(x_i + h/3, y_j - h/3, z_k)$ est le centre du triangle T_l^2
- T_l^3 représente le triangle c_lcb
 $\vec{n}_l^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} + \vec{j}]$ est la normale extérieure au triangle T_l^3
 $e_l^3(x_i + h/3, y_j + h/3, z_k)$ est le centre du triangle T_l^3
- T_l^4 représente le triangle c_lab
 $\vec{n}_l^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} - \vec{k}]$ est la normale extérieure au triangle T_l^4
 $e_l^4(x_i + h/3, y_j, z_k - h/3)$ est le centre du triangle T_l^4
- T_r^1 représente le triangle c_rcd

- $\vec{n}_r^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} + \vec{k}]$ est la normale extérieure au triangle T_r^1
 $e_r^1(x_{i+1} - h/3, y_j, z_k + h/3)$ est le centre du triangle T_r^1
- T_r^2 représente le triangle $c_r ad$
 $\vec{n}_r^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} - \vec{j}]$ est la normale extérieure au triangle T_r^2
 $e_r^2(x_{i+1} - h/3, y_j - h/3, z_k)$ est le centre du triangle T_r^2
 - T_r^3 représente le triangle $c_r bc$
 $\vec{n}_r^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} + \vec{j}]$ est la normale extérieure au triangle T_r^3
 $e_r^3(x_{i+1} - h/3, y_j + h/3, z_k)$ est le centre du triangle T_r^3
 - T_r^4 représente le triangle $c_r ab$
 $\vec{n}_r^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} - \vec{k}]$ est la normale extérieure au triangle T_r^4
 $e_r^4(x_{i+1} - h/3, y_j, z_k - h/3)$ est le centre du triangle T_r^4

Comme dans l'équation (1.2.8), l'intégration par rapport au temps du flux est approximée par la règle de quadrature du point médian; ceci nécessite des prédictions des valeurs de \vec{U} et de $\vec{F}(\vec{U})$ au temps $t^{n+1/2}$. On calcule des approximations aux centres $(e_l^k)_{k=1,\dots,4}$ et $(e_r^k)_{k=1,\dots,4}$ des faces $(T_l^k)_{k=1,\dots,4}$ et $(T_r^k)_{k=1,\dots,4}$ de la cellule duale. La valeur de la solution au point e_s^k sera considérée comme valeur moyenne sur le triangle T_s^k pour $k = 1, \dots, 4$, $s \in \{l, r\}$. Moyennant un développement de Taylor du premier ordre par rapport au temps, on calcule les approximations suivantes :

$$\vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2} \simeq \vec{U}_s(e_s^k, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t(e_s^k, t^n), \quad s = l, r \ \& \ k = 1, \dots, 4.$$

où $\vec{U}(e_s^k, t^n)$ est défini par (1.2.10). En tenant compte de (1.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2} \simeq \vec{U}_s(e_s^k, t^n) - \frac{\Delta t}{2h} & (A(\vec{U}_s(e_s^k, t^n))\vec{U}_{e_s;x}^{lim} + B(\vec{U}_s(e_s^k, t^n))\vec{U}_{e_s;y}^{lim} \\ & + C(\vec{U}_s(e_s^k, t^n))\vec{U}_{e_s;z}^{lim}), \quad s = l, r \ \& \ k = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

A, B et C représentent les matrices jacobiennes des fonctions flux $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})$. On prend $\vec{F}(\vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2})$ pour valeur approximative du flux au centre de l'interface de la cellule. On utilise une interpolation linéaire pour approximer $\vec{U}^n(x, y, z)$

autour des points c_s pour $s = l, r$.

$$\begin{aligned} \vec{U}_s(e_s^k, t^n) \simeq \vec{U}_{c_s}^n + \left(\frac{x_{e_s^k} - x_{c_s}}{\Delta x}\right) \vec{U}_{c_s;x}^{lim} + \left(\frac{y_{e_s^k} - y_{c_s}}{\Delta y}\right) \vec{U}_{c_s;y}^{lim} \\ + \left(\frac{z_{e_s^k} - z_{c_s}}{\Delta z}\right) \vec{U}_{c_s;z}^{lim}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

L'équation (1.2.10) permet de calculer les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{U}_l(e_l^1, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_l}^n + \frac{1}{3}(\vec{U}_{c_l;x}^{lim} + \vec{U}_{c_l;z}^{lim}), & \vec{U}_r(e_r^1, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_r}^n + \frac{1}{3}(-\vec{U}_{c_r;x}^{lim} + \vec{U}_{c_r;z}^{lim}) \\ \vec{U}_l(e_l^2, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_l}^n + \frac{1}{3}(\vec{U}_{c_l;x}^{lim} - \vec{U}_{c_l;y}^{lim}), & \vec{U}_r(e_r^2, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_r}^n + \frac{1}{3}(-\vec{U}_{c_r;x}^{lim} - \vec{U}_{c_r;y}^{lim}) \\ \vec{U}_l(e_l^3, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_l}^n + \frac{1}{3}(\vec{U}_{c_l;x}^{lim} + \vec{U}_{c_l;y}^{lim}), & \vec{U}_r(e_r^3, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_r}^n + \frac{1}{3}(-\vec{U}_{c_r;x}^{lim} + \vec{U}_{c_r;y}^{lim}) \\ \vec{U}_l(e_l^4, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_l}^n + \frac{1}{3}(\vec{U}_{c_l;x}^{lim} - \vec{U}_{c_l;z}^{lim}), & \vec{U}_r(e_r^4, t^n) &\simeq \vec{U}_{c_r}^n + \frac{1}{3}(-\vec{U}_{c_r;x}^{lim} - \vec{U}_{c_r;z}^{lim}) \end{aligned}$$

On se sert de ces équations pour calculer $\vec{F}(\vec{U}(e_s^k, t^{n+1/2}))$ à l'instant intermédiaire $t^{n+1/2}$ (moyennant (1.2.9)). L'intégrale du flux à travers les faces de la cellule duale se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} \, dA \simeq \left[\sum_{k=1}^4 \vec{F}(\vec{U}(e_l^k, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_l^k \mathcal{A}(T_l^k) \right. \\ \left. + \vec{F}(\vec{U}(e_r^k, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_r^k \mathcal{A}(T_r^k) \right]. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Ici $\mathcal{A}(T_l^k) = \mathcal{A}(T_r^k) = \frac{h^2}{2\sqrt{2}} = \mathcal{A}(T)$ représente l'aire du triangle T dans le cas d'un maillage uniforme. Le terme de droite (RHS) de l'équation (1.2.11) se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{\mathcal{A}(T)}{\sqrt{2}} \\ &\left[\{-\vec{f}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) + \vec{h}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2})\} + \{\vec{f}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) + \vec{h}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2})\} \right. \\ &\quad \{-\vec{f}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2})\} + \{\vec{f}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2})\} \\ &\quad \{-\vec{f}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2})\} + \{\vec{f}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2})\} \\ &\quad \left. \{-\vec{f}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) - \vec{h}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2})\} + \{\vec{f}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) - \vec{h}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2})\} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

En tenant compte des équations (1.2.7) et (1.2.12), on obtient l'équation suivante :

$$V(D_{i+1/2,j,k})\vec{U}_{D_{i+1/2,j,k}}^{n+1} = \frac{h^3}{6} \left[\vec{U}_{i,j,k}^n + \vec{U}_{i+1,j,k}^n + \frac{2}{5} (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim}) \right] - \Delta t [\text{RHS}]. \quad (1.2.13)$$

Ainsi, la valeur moyenne de la solution, à l'instant t^{n+1} , sur la cellule diamant $D_{i+1/2,j,k}$ dont l'axe $c_l c_r$ est parallèle à l'axe des abscisses, prend la forme finale :

$$\vec{U}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} (\vec{U}_{i,j,k}^n + \vec{U}_{i+1,j,k}^n) + \frac{1}{5} (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim}) - \frac{3}{h^3} \Delta t [\text{RHS}]. \quad (1.2.14)$$

Premier pas de temps suivant l'axe des y et des z

Pour couvrir tout le domaine de calcul, il faut calculer la solution numérique sur des cellules diamants dans la direction de l'axe des y et des z ($\{D_{i,j+1/2,k}\}$ et $\{D_{i,j,k+1/2}\}$). Ces cellules sont obtenues à partir des cellules cartésiennes $C_{i,j,k} - C_{i,j+1,k}$ et $C_{i,j,k} - C_{i,j,k+1}$ comme le montre la figure Fig.1.9. La procédure est identique à celle présentée dans la section précédente (pour des cellules duales de la forme $D_{i+1/2,j,k}$). La solution numérique évaluée sur les cellules duales va

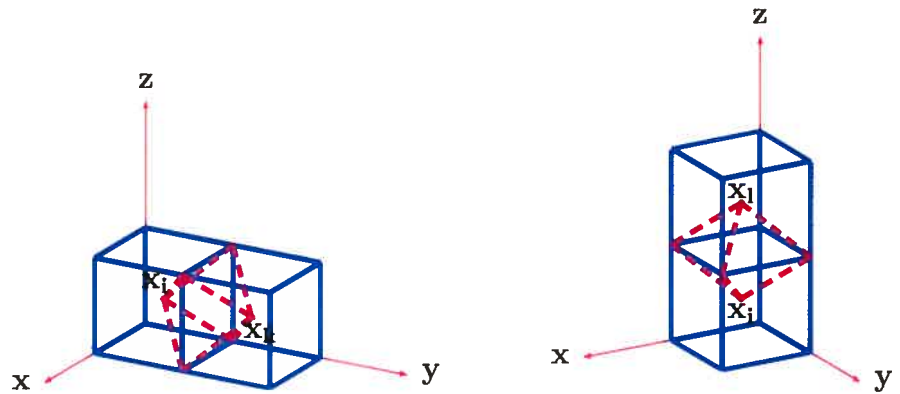


FIGURE 1.9. Cellules cartésiennes nécessaires pour générer la solution sur les cellules duales $D_{i,j+1/2,k}$ et $D_{i,j,k+1/2}$

servir de données initiales pour évaluer la solution à l'instant t^{n+2} sur les cellules cartésiennes du maillage original.

1.2.1.2. Second pas temporel

Dans cette section on va calculer la solution à l'instant t^{n+2} sur les cellules cartésiennes $C_{i,j,k}$ centrées aux points (x_i, y_j, z_k) du maillage original, et ceci en considérant comme données initiales la solution numérique obtenue à l'instant t^{n+1} sur les cellules duales $\{D_{i+1/2,j,k}\}$, $\{D_{i,j+1/2,k}\}$ et $\{D_{i,j,k+1/2}\}$ du maillage décalé.

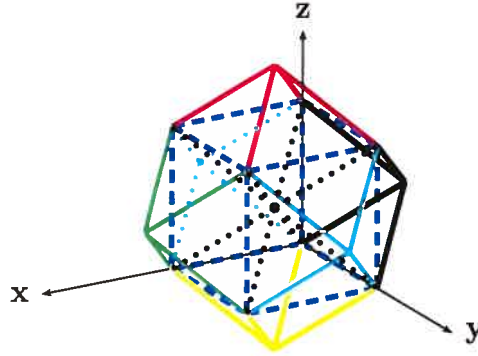


FIGURE 1.10. Reconstruction de la cellule cartésienne originale $C_{i,j,k}$ à partir de six cellules duales

L'approche est similaire à celle déjà appliquée pour le calcul de $\{U_{i+1/2,j,k}^{n+1}\}$. On intègre l'équation (1.2.1) sur le domaine $C_{i,j,k} \times [t^{n+1}, t^{n+2}]$ et on applique ensuite le théorème de divergence; on obtient :

$$V(C_{i,j,k}) \vec{U}_{C_{i,j,k}}^{n+2} = \int_{C_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV - \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \int_{\partial C_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1})) \cdot \vec{n} dA dt \quad (1.2.15)$$

où $V(C_{i,j,k}) = h^3$ est le volume de la cellule $C_{i,j,k}$. Le premier terme du membre de droite de l'équation (1.2.15) se décompose en une somme de six intégrales, sur les intersections des six cellules duales adjacentes avec la cellule $C_{i,j,k}$; on procède le long des trois axes du système spatial de la façon suivante :

Le long de l'axe des x

On considère des cellules duales D_a and D_b centrées aux points $a(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$ et $b(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$ respectivement. On applique la règle du point médian pour

approximer les intégrales suivantes :

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_a} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_a) \vec{U}_a(x_i + 2h/5, y_j, z_k, t^{n+1}) \quad (1.2.16)$$

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_b} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_b) \vec{U}_b(x_i - 2h/5, y_j, z_k, t^{n+1}).$$

On utilise les données à l'instant t^{n+1} aux points a et b (centres des diamants D_a et D_b) pour approximer, moyennant un développement de Taylor, la solution aux points $(x_i \pm 2h/5, y_j, z_k)$:

$$\vec{U}_a(x_i + 2h/5, y_j, z_k, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_a^{n+1} - \frac{1}{10} \vec{U}_{a;x}^{lim}, \quad (1.2.17)$$

$$\vec{U}_b(x_i - 2h/5, y_j, z_k, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_b^{n+1} + \frac{1}{10} \vec{U}_{b;x}^{lim}.$$

Le long de l'axe des y

On considère des cellules duales D_c et D_d centrées aux points $c(x_i, y_{j+1/2}, z_k)$ et $d(x_i, y_{j-1/2}, z_k)$ respectivement. On applique la règle du point médian pour approximer les intégrales suivantes :

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_c} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_c) \vec{U}_c(x_i, y_j + 2h/5, z_k, t^{n+1}), \quad (1.2.18)$$

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_d} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_d) \vec{U}_d(x_i, y_j - 2h/5, z_k, t^{n+1}).$$

On utilise les données à l'instant t^{n+1} aux points c et d (centres des diamants D_c et D_d) pour approximer, moyennant un développement de Taylor, la solution aux points $(x_i, y_j \pm 2h/5, z_k)$:

$$\vec{U}_c(x_i, y_j + 2h/5, z_k, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_c^{n+1} - \frac{1}{10} \vec{U}_{c;y}^{lim}, \quad (1.2.19)$$

$$\vec{U}_d(x_i, y_j - 2h/5, z_k, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_d^{n+1} + \frac{1}{10} \vec{U}_{d;y}^{lim}.$$

Le long de l'axe des z

On considère des cellules diamants D_e et D_f centrées aux points $e(x_i, y_j, z_{k+1/2})$ et $f(x_i, y_j, z_{k-1/2})$ respectivement. On applique la règle du point médian pour approximer les intégrales suivantes :

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_e} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_e) \vec{U}_e(x_i, y_j, z_k + 2h/5, t^{n+1}), \quad (1.2.20)$$

$$\int_{C_{i,j,k} \cap D_f} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq V(C_{i,j,k} \cap D_f) \vec{U}_f(x_i, y_j, z_k - 2h/5, t^{n+1}).$$

On utilise les données à l'instant t^{n+1} aux points e et f (centres des diamants D_e et D_f) pour approximer, moyennant un développement en série de Taylor, la solution aux points $(x_i, y_i, z_i \pm 2h/5)$:

$$\vec{U}_e(x_i, y_j, z_k + 2h/5, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_e^{n+1} - \frac{1}{10} \vec{U}_{e;z}^{lim}, \quad (1.2.21)$$

$$\vec{U}_f(x_i, y_j, z_k - 2h/5, t^{n+1}) \simeq \vec{U}_f^{n+1} + \frac{1}{10} \vec{U}_{f;z}^{lim}.$$

En utilisant les équations (1.2.16) à (1.2.21), on peut approximer la première intégrale du membre de droite de l'équation (1.2.15) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{C_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV \simeq \frac{h^3}{6} [& \{ \vec{U}_a^{n+1} + \vec{U}_b^{n+1} + \vec{U}_c^{n+1} + \vec{U}_d^{n+1} + \\ & \vec{U}_e^{n+1} + \vec{U}_f^{n+1} \} + \frac{1}{10} \{ - \vec{U}_{a;x}^{lim} + \vec{U}_{b;x}^{lim} - \vec{U}_{c;y}^{lim} \\ & + \vec{U}_{d;y}^{lim} - \vec{U}_{e;z}^{lim} + \vec{U}_{f;z}^{lim} \}]. \quad (1.2.22) \end{aligned}$$

L'intégrale par rapport au temps du flux dans l'équation (1.2.15) sera approximée avec une précision d'ordre deux en appliquant la règle du point médian :

$$\begin{aligned} \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \int_{\partial C_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt \simeq \\ \Delta t \int_{\partial C_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+3/2})) \cdot \vec{n} dA. \quad (1.2.23) \end{aligned}$$

On a besoin des approximations de \vec{U} et du flux \vec{F} sur la frontière $\partial C_{i,j,k}$ du cube $C_{i,j,k}$ à l'instant intermédiaire $t^{n+3/2}$; en tenant compte de l'équation (1.2.1), un développement de Taylor du premier ordre par rapport au temps nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{U}(x, y, z, t^{n+3/2}) &\simeq \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t(x, y, z, t^{n+1}) \\ &= \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2h} [A(\vec{U}) + B(\vec{U}) \\ &\quad + C(\vec{U})]_{(x,y,z,t^{n+1})}.\end{aligned}\quad (1.2.24)$$

Soient $S_r, r = 1, \dots, 6$ les six faces (carrées) du cube $C_{i,j,k}$. On note par $\vec{U}_{S_r}^{n+3/2}$ l'approximation de \vec{U} sur S_r . L'intégrale du flux devient :

$$\begin{aligned}\int_{\partial C_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+3/2})) \cdot \vec{n} \, dA &= \sum_{r=1}^6 \int_{S_r} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+3/2})) \cdot \vec{n}_{S_r} \, dA \\ &\simeq \mathcal{A}(S) [\vec{f}(\vec{U}_{S_1}^{n+3/2}) - \vec{f}(\vec{U}_{S_2}^{n+3/2}) \\ &\quad + \vec{g}(\vec{U}_{S_3}^{n+3/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{S_4}^{n+3/2}) \\ &\quad + \vec{h}(\vec{U}_{S_5}^{n+3/2}) - \vec{h}(\vec{U}_{S_6}^{n+3/2})] \\ &\equiv h^2 RHS\end{aligned}\quad (1.2.25)$$

où $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(S_r)_{r=1,\dots,6} = h^2 \equiv$ aire du carré S_r et

$$\begin{aligned}a \text{ est le centre de } S_1, \vec{n}_{S_1} &= \vec{i}, & b \text{ est le centre de } S_2, \vec{n}_{S_2} &= -\vec{i} \\ c \text{ est le centre de } S_3, \vec{n}_{S_3} &= \vec{j}, & d \text{ est le centre de } S_4, \vec{n}_{S_4} &= -\vec{j} \\ e \text{ est le centre de } S_5, \vec{n}_{S_5} &= \vec{k}, & f \text{ est le centre de } S_6, \vec{n}_{S_6} &= -\vec{k}\end{aligned}$$

Ainsi, la solution à l'instant t^{n+2} prend la forme :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{i,j,k}^{n+2} &= \frac{1}{h^3} \left[\frac{h^3}{6} (\{\vec{U}_a^{n+1} + \vec{U}_b^{n+1} + \vec{U}_c^{n+1} + \vec{U}_d^{n+1} + \vec{U}_e^{n+1} + \vec{U}_f^{n+1}\} \right. \\ &\quad + \frac{1}{10} \{ -\vec{U}_{a;x}^{lim} + \vec{U}_{b;x}^{lim} - \vec{U}_{c;y}^{lim} + \vec{U}_{d;y}^{lim} \\ &\quad \left. - \vec{U}_{e;z}^{lim} + \vec{U}_{f;z}^{lim} \}) - \Delta t \{ h^2 \text{ RHS} \} \right]\end{aligned}\quad (1.2.26)$$

ou sous une forme simplifiée :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{i,j,k}^{n+2} = & \frac{1}{6} (\vec{U}_a^{n+1} + \vec{U}_b^{n+1} + \vec{U}_c^{n+1} + \vec{U}_d^{n+1} + \vec{U}_e^{n+1} + \vec{U}_f^{n+1}) \\ & + \frac{1}{60} (-\vec{U}_{a;x}^{lim} + \vec{U}_{b;x}^{lim} - \vec{U}_{c;y}^{lim} + \vec{U}_{d;y}^{lim} \\ & - \vec{U}_{e;z}^{lim} + \vec{U}_{f;z}^{lim}) - \frac{\Delta t}{h} \text{RHS}. \quad (1.2.27) \end{aligned}$$

Pour compléter la description du schéma numérique, il faut montrer comment calculer les valeurs de \vec{U}_{S_r} sur les interfaces des cellules cartésiennes à l'instant $t^{n+3/2}$. Pour cela, on considère par exemple le carré S_1 centré au point $a(x_i + h/2, y_j, z_k)$. Pour préserver le second ordre spatial du schéma, on considère les points a_y^\pm, a_z^\pm comme le montre la figure 1.11.

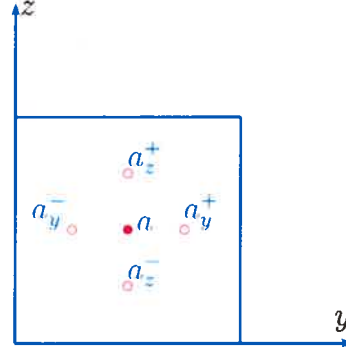


FIGURE 1.11. La surface S_1 du cube $C_{i,j,k}$

On calcule une approximation de la solution en chacun des quatre points moyennant un développement de Taylor du premier degré à l'instant t^{n+1} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{a_y^\pm}^{n+1} & \simeq \vec{U}_a^{n+1} \pm \frac{1}{4} \vec{U}_{a;y}^{lim} \\ \vec{U}_{a_z^\pm}^{n+1} & \simeq \vec{U}_a^{n+1} \pm \frac{1}{4} \vec{U}_{a;z}^{lim} \end{aligned}$$

Les approximations à l'instant $t^{n+3/2}$, et en chacun des quatre sommets de la face S_1 sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{a_y^\pm}^{n+3/2} &\simeq \vec{U}_{a_y^\pm}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2h} [A(\vec{U}_{a_y^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;x}^{lim} + B(\vec{U}_{a_y^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;y}^{lim} \\ &\quad + C(\vec{U}_{a_y^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;z}^{lim}], \\ \vec{U}_{a_x^\pm}^{n+3/2} &\simeq \vec{U}_{a_x^\pm}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2h} [A(\vec{U}_{a_x^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;x}^{lim} + B(\vec{U}_{a_x^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;y}^{lim} \\ &\quad + C(\vec{U}_{a_x^\pm}^{n+1})\vec{U}_{a;z}^{lim}].\end{aligned}$$

Ainsi on peut approximer le flux numérique à l'instant intermédiaire $t^{n+3/2}$ à travers la face S_1 de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{U}_{S_1}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{a_y^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{a_y^-}^{n+3/2}) \\ &\quad + \vec{F}(\vec{U}_{a_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{a_x^-}^{n+3/2})].\end{aligned}\quad (1.2.28)$$

En appliquant la même procédure sur chacune des faces S_r , $r = 2, \dots, 6$, on obtient les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{U}_{S_2}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{b_y^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{b_y^-}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{b_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{b_x^-}^{n+3/2})] \\ \vec{F}(\vec{U}_{S_3}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{c_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{c_x^-}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{c_y^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{c_y^-}^{n+3/2})] \\ \vec{F}(\vec{U}_{S_4}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{d_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{d_x^-}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{d_z^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{d_z^-}^{n+3/2})] \\ \vec{F}(\vec{U}_{S_5}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{e_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{e_x^-}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{e_y^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{e_y^-}^{n+3/2})] \\ \vec{F}(\vec{U}_{S_6}^{n+3/2}) &\simeq \frac{1}{4} [\vec{F}(\vec{U}_{f_x^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{f_x^-}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{f_y^+}^{n+3/2}) + \vec{F}(\vec{U}_{f_y^-}^{n+3/2})]\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}a_y^\pm &= (x_{i+1/2}, y_j \pm h/4, z_k), & a_z^\pm &= (x_{i+1/2}, y_j, z_k \pm h/4) \\ b_y^\pm &= (x_{i-1/2}, y_j \pm h/4, z_k), & b_z^\pm &= (x_{i-1/2}, y_j, z_k \pm h/4) \\ c_x^\pm &= (x_i \pm h/4, y_{j+1/2}, z_k), & c_z^\pm &= (x_i, y_{j+1/2}, z_k \pm h/4) \\ d_x^\pm &= (x_i \pm h/4, y_{j-1/2}, z_k), & d_z^\pm &= (x_i, y_{j-1/2}, z_k \pm h/4) \\ e_x^\pm &= (x_i \pm h/4, y_j, z_{k+1/2}), & e_y^\pm &= (x_i, y_j \pm h/4, z_{k+1/2}) \\ f_x^\pm &= (x_i \pm h/4, y_j, z_{k-1/2}), & f_y^\pm &= (x_i, y_j \pm h/4, z_{k-1/2}).\end{aligned}$$

1.2.2. Schéma numérique central en trois dimensions spatiales avec cellules duales cartésiennes

Dans cette section nous présentons un second schéma numérique centré tri-dimensionnel que nous allons utiliser pour résoudre des systèmes hyperboliques en 3D. Les cellules du maillage original ainsi que celles du maillage décalé sont cartésiennes. Les cellules du maillage original sont les cubes $C_{i,j,k}$ centrés aux nœuds (x_i, y_j, z_k) ; les cellules duales $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ sont les cubes centrés aux nœuds $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$. Lors du passage des cellules originales (à l'instant t^n) aux cellules duales à (l'instant t^{n+1}) on évite la résolution des problèmes de Riemann sur les interfaces des cellules. Nous supposons que la solution numérique

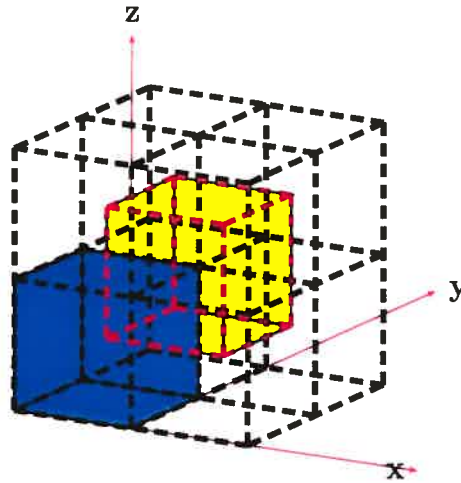


FIGURE 1.12. Les cellules originales $C_{i,j,k}$ sont les cubes représentés en bleu centrés aux points (x_i, y_j, z_k) ; les cellules duales $\mathcal{D}_{i,j,k} \equiv D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ sont les cubes décalés représentés en jaune et centrés aux points $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$

du système différentiel

$$\vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) = 0 \quad (1.2.29)$$

est donnée sur les cellules $C_{i,j,k}$ à l'instant t^n . On veut calculer la solution sur les cellules duales du maillage décalé à l'instant t^{n+1} . Nous allons considérer pour les cellules duales $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ la notation plus courte $\mathcal{D}_{i,j,k}$. On intègre

l'équation (1.2.29) sur le domaine $\mathcal{D}_{i,j,k} \times [t^n, t^{n+1}]$; ceci donne

$$\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV = \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) dV dt. \quad (1.2.30)$$

Le terme de gauche de l'équation (1.2.30) définit la solution à l'instant t^{n+1} sur la cellule duale $\mathcal{D}_{i,j,k}$. Pour calculer la première intégrale du membre de droite de l'équation (1.2.30), on divise le domaine d'intégration en huit sous-domaines (intersections de la cellule duale avec les cellules originales). Soient $\{C_{ds}\}$, $s = 1, \dots, 4$ les quatre cellules du maillage original centrées aux points (x_i, y_j, z_k) , (x_{i+1}, y_j, z_k) , (x_{i+1}, y_{j+1}, z_k) , (x_i, y_{j+1}, z_k) respectivement. De même, soient $\{C_{us}\}$, $s = 1, \dots, 4$ les quatre cellules centrées aux points (x_i, y_j, z_{k+1}) , (x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) , $(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1})$, and (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) . Il s'agit d'approximer l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV = \sum_{r \in \{u,d\}} \sum_{s=1}^{s=4} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{rs}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV \quad (1.2.31)$$

avec une précision d'ordre deux. En utilisant l'interpolation linéaire MUSCL de van Leer [67], on calcule le polynôme d'interpolation du premier degré au voisinage de $\vec{U}_{i,j,k}^n$ de la façon suivante :

$$\vec{U}_{ijk}(x, y, z, t^n) \simeq \vec{U}_{ijk}^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \frac{y - y_j}{\Delta y} \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \frac{z - z_k}{\Delta z} \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim} \quad (1.2.32)$$

où $(\nabla \vec{U})^{lim} \equiv (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x), \vec{U}_y^{lim}/\Delta y + \mathcal{O}(\Delta y), \vec{U}_z^{lim}/\Delta z + \mathcal{O}(\Delta z))$ est un gradient limité. On applique la règle du point médian pour approximer avec une précision d'ordre deux chacune des huit intégrales dans (1.2.31); par exemple en prenant $r = d, s = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{d1}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV &\simeq \vec{U}(x_i + h/4, y_j + h/4, z_k + h/4, t^n) V(\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{d1}) \\ &\simeq \left\{ \vec{U}_{i,j,k} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim} \right\} \frac{h^3}{8} \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

où $V(\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{r,s}) = h^3/8, r \in \{u, d\}, s = 1, \dots, 4$, est le volume du cube $\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{r,s}$. De façon similaire on calcule chacune des intégrales de la sommation dans (1.2.31)

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}^n dV \simeq \frac{h^3}{8} \left\{ \right. & \{ \vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} \\
& + \vec{U}_{i,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \} \\
& + \frac{1}{4} \{ (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim}) \\
& + (-\vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k;z}^{lim}) \\
& + (-\vec{U}_{i+1,j+1,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j+1,k;z}^{lim}) \\
& + (\vec{U}_{i,j+1,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i,j+1,k;z}^{lim}) \\
& + (\vec{U}_{i,j,k+1;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j,k+1;z}^{lim}) \\
& + (-\vec{U}_{i+1,j,k+1;x}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k+1;z}^{lim}) \\
& + (-\vec{U}_{i+1,j+1,k+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k+1;z}^{lim}) \\
& \left. + (\vec{U}_{i,j+1,k+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k+1;z}^{lim}) \right\}.
\end{aligned}$$

L'équation précédente sera écrite de façon simplifiée sous la forme :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}^n dV \simeq h^3 \left\{ \frac{1}{8} \{ \vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} + \vec{U}_{i,j,k+1} \right. \\
\left. + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \} + \frac{1}{32} RHS_{i,j,k}^{lim} \right\}. \quad (1.2.34)
\end{aligned}$$

Maintenant, on veut approximer la seconde intégrale du membre de droite de l'équation (1.2.30) ; par application du théorème de Green on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_n+1} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) dV dt \\
= \int_{t_n}^{t_n+1} \int_{\partial \mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt. \quad (1.2.35)
\end{aligned}$$

\vec{n} est le vecteur unitaire normal à $\partial \mathcal{D}_{i,j,k}$. L'intégrale par rapport au temps dans (1.2.35) sera approximée avec une précision d'ordre deux en utilisant la règle du

point médian ; ainsi on obtient :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} \, dA \, dt \simeq \Delta t \int_{\partial\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} \, dA. \quad (1.2.36)$$

On décompose l'intégrale du flux sur $\partial\mathcal{D}_{i,j,k}$ en six intégrales sur chacune des faces S_r , $r = 1, \dots, 6$ ($\vec{n}_r \perp S_r$) pour obtenir :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} \, dA = \sum_{r=1}^6 \int_{\partial S_r} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_r \, dA \quad (1.2.37)$$

où

S_1 est le carré centré au point $(x_{i+1/2}, y_j, z_{k+1/2})$, avec $\vec{n}_1 = -\vec{j}$

S_2 est le carré centré au point $(x_{i+1}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$, avec $\vec{n}_2 = \vec{i}$

S_3 est le carré centré au point $(x_{i+1/2}, y_{j+1}, z_{k+1/2})$, avec $\vec{n}_3 = \vec{j}$

S_4 est le carré centré au point $(x_i, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$, avec $\vec{n}_4 = -\vec{i}$

S_5 est le carré centré au point $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_k)$, avec $\vec{n}_5 = -\vec{k}$

S_6 est le carré centré au point $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1})$, avec $\vec{n}_6 = \vec{k}$.

En prenant $r = 1$ par exemple, l'intégrale du flux à travers la surface S_1 sera approximée avec une précision d'ordre deux de la façon suivante :

$$\int_{\partial S_1} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_1 \, dA \simeq \frac{-h^2}{4} (\vec{g}_{i,j,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j,k+1}^{n+1/2}) \quad (1.2.38)$$

On évalue le flux $\vec{F}^{n+1/2}$ à l'instant $t^{n+1/2}$ à partir de $\vec{U}^{n+1/2}$ ($\vec{F}^{n+1/2} = \vec{F}(\vec{U}^{n+1/2})$) en utilisant un développement de Taylor du premier ordre ainsi que

la loi de conservation (1.2.29)

$$\begin{aligned}\vec{U}^{n+1/2} &\simeq \vec{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t^n \\ &\simeq \vec{U}^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \vec{F}^n.\end{aligned}\quad (1.2.39)$$

Ainsi, l'intégrale du flux sera approximée avec une précision d'ordre deux ; on l'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\partial \mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}^{n+1/2} \cdot \vec{n} \, dA &\simeq \frac{h^2}{4} \left\{ -(\vec{g}_{i,j,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j,k+1}^{n+1/2}) \right. \\ &\quad + (\vec{f}_{i+1,j,k}^{n+1/2} + \vec{f}_{i+1,j+1,k}^{n+1/2} + \vec{f}_{i+1,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{f}_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad + (\vec{g}_{i,j+1,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j+1,k}^{n+1/2} + \vec{g}_{i,j+1,k+1}^{n+1/2} + \vec{g}_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad - (\vec{f}_{i,j,k}^{n+1/2} + \vec{f}_{i,j+1,k}^{n+1/2} + \vec{f}_{i,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{f}_{i,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad - (\vec{h}_{i,j,k}^{n+1/2} + \vec{h}_{i+1,j,k}^{n+1/2} + \vec{h}_{i,j+1,k}^{n+1/2} + \vec{h}_{i+1,j+1,k}^{n+1/2}) \\ &\quad \left. + (\vec{h}_{i,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{h}_{i+1,j,k+1}^{n+1/2} + \vec{h}_{i,j+1,k+1}^{n+1/2} + \vec{h}_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \right\} \\ &\simeq \frac{h^2}{4} RHS_{i,j,k}.\end{aligned}\quad (1.2.40)$$

En utilisant les équations (1.2.30), (1.2.34) et (1.2.40), on écrit l'expression générale du premier pas du schéma numérique évalué sur la cellule duale $\mathcal{D}_{i,j,k}$ à l'instant t^{n+1} de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{8} \left\{ \vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} \right. \\ &\quad + \vec{U}_{i,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} \\ &\quad \left. + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \right\} + \frac{1}{32} RHS_{i,j,k}^{lim} - \frac{\Delta t}{4h} RHS_{i,j,k}.\end{aligned}\quad (1.2.41)$$

La solution sur les cellules du maillage original sera obtenue à l'instant t^{n+2} , par application de l'opérateur de l'équation (1.2.41) à la solution de l'instant t^{n+1} . Ceci complète la description des schémas numériques que nous allons utiliser pour résoudre les problèmes d'aérodynamique et de magnétohydrodynamique.

En deux et trois dimensions spatiale la condition de stabilité des schémas numériques centrés est $1/4$. Les tests numérique que nous allons considérer sont effectués avec la CFL=0.85/4 ;

Chapitre 2

MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE IDÉALE, CONTRAINTE PHYSIQUE ET TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous formulons les équations de la magnétohydrodynamique idéale (MHD) en se basant sur les équations de la dynamique des fluides compressibles et sur les équations de Maxwell. Les équations de la MHD idéale décrivent la propagation du "plasma" (un fluide ionisé et conducteur d'électricité) dans un milieu magnétisé. La relation complexe entre la dynamique des fluides et l'électromagnétisme est due à la dépendance réciproque entre l'évolution du plasma et l'intensité du champ magnétique. En effet le champ magnétique affecte l'écoulement du plasma ; l'évolution du plasma affecte le champ magnétique. Le système d'équations qui modélise ce phénomène forme un système hyperbolique à huit équations de lois de conservation. D'autre part, le fait que les monopôles magnétiques n'existent pas (au moins expérimentalement) est modélisé par la contrainte de champ magnétique à divergence nulle, d'où l'équation de Maxwell. Par suite de l'accumulation des erreurs de troncature et d'arrondi, la solution numérique du système de la magnétohydrodynamique enfreint souvent la contrainte physique de divergence nulle du champ magnétique ce qui peut engendrer des ondes non physiques, une pression ou une densité négative, ou même des instabilités [18, 26, 64]. Plusieurs approches ont été proposées pour remédier à cette situation en corrigeant les composantes du champ magnétique dans la solution numérique à la suite de chaque itération. Nous allons présenter un bref aperçu de chacune de ces approches et par la suite nous présentons une nouvelle méthode

(CTCS) qui sera jumelée aux schémas numériques "centrés" ou "de type central" pour traiter les composantes du champ magnétique de manière à satisfaire la contrainte physique de divergence nulle; nous allons présenter les versions bi- et tridimensionnelles de notre méthode "CTCS" de traitement du champ magnétique (pour les schémas numériques centrés à cellules duales cartésiennes ou en diamants) et nous allons démontrer de façon analytique formelle que notre nouvelle approche, et sous certaines conditions physiques, satisfait la contrainte de champ magnétique à divergence nulle avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature.

2.1. ÉQUATIONS DE LA MHD IDÉALE

Les équations de la magnétohydrodynamique idéale sont données par ([34, 40]) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \mathcal{E} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)\mathcal{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ \mathbf{v}(\mathcal{E} + p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.1)$$

où

$$p = (\gamma - 1)(\mathcal{E} - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2). \quad (2.1.2)$$

La contrainte physique à laquelle doit répondre le champ magnétique est :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1.3)$$

Dans ces équations, ρ désigne la densité macroscopique du plasma, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ représente sa vitesse de propagation, \mathcal{E} est l'énergie totale, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ est le champ magnétique, p est la pression thermique, $|\mathbf{B}|^2/2$ est la pression magnétique, $\gamma \equiv c_p/c_v$ est la constante relative aux gaz parfaits. La pression totale est $\bar{p} = p + |\mathbf{B}|^2/2$. Ces équations modélisent la dynamique d'un fluide conducteur d'électricité et constituent une combinaison des équations de la dynamique des gaz et des équations de Maxwell. Dans ce chapitre nous donnons une présentation générale sur la formulation de ces équations ainsi que sur la structure hyperbolique du système. Une description complète de ces équations se trouve dans [34, 40];

une présentation détaillée sur la structure hyperbolique en différentes dimensions spatiales se trouve dans [24, 53]. L'équation (2.1.3) représente la contrainte physique que doit respecter le champ magnétique. Nous allons voir plus tard que la solution numérique enfreint souvent cette contrainte et qu'un traitement particulier du champ magnétique est nécessaire pour obtenir une solution numérique physiquement acceptable.

2.1.1. Formulation des équations de la MHD idéale

Les équations de la magnétohydrodynamique idéale décrivent la dynamique du plasma généralement constitué de neutrons, d'électrons, et d'ions (souvent des protons) et dont la charge globale est nulle. On désigne par \mathbf{E} le champ électrique, et par \mathbf{J} la densité du courant. En un point de l'espace et à un instant donné, le fluide est décrit par huit variables d'états qui peuvent être soit les variables primitives ou physiques, soit les variables dites conservatives. Ces variables sont fonctions des coordonnées de l'espace (x, y, z) et du temps t . Un système de huit équations modélise la dynamique complète du plasma en décrivant l'évolution temporelle de chacune des variables primitives ou conservatives.

Le plasma que nous utilisons vérifie une version modifiée des équations de Maxwell :

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (2.1.6)$$

Le plasma étant très bon conducteur, la conductivité électrique σ prend la valeur $\sigma = \infty$; ceci caractérise la MHD idéale. Nous allons par la suite combiner ces équations de Maxwell avec les équations de la dynamique des fluides. La première équation exprime la conservation de la masse et elle est donnée par :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1.7)$$

Cette équation, en fait, est la même loi de conservation de la masse qu'on retrouve dans les équations d'Euler pour la dynamique des fluides neutres.

La loi de conservation de l'impulsion est formulée en fonction de la force de

Lorentz de la façon suivante :

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathcal{I}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.1.8)$$

En tenant compte de l'équation 2.1.6, on réécrit la force de Lorentz sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{B}|^2) + \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{B}|^2) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}). \end{aligned}$$

L'équation de conservation de l'impulsion prend ainsi sa forme finale (forme conservative) :

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \left(p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2\right)\mathcal{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = 0. \quad (2.1.9)$$

L'énergie totale du système est la somme de l'énergie cinétique, l'énergie thermique et la densité d'énergie du champ magnétique :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2. \quad (2.1.10)$$

En tenant compte de (2.1.10), la loi de conservation de l'énergie s'écrit sous la forme ([34, 40]) :

$$\partial_t\mathcal{E} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v}(\mathcal{E} + p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right) = 0. \quad (2.1.11)$$

Pour la MHD idéale, ($\sigma = \infty$), l'équation de Maxwell (2.1.4) sera écrite sous forme conservative de la façon suivante :

$$\partial_t\mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1.12)$$

L'équation (2.1.12) est connue sous le nom de l'équation d'induction. Les équations (2.1.7), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.12) constituent un système de huit équations qui décrit l'évolution des variables conservatives ρ , $\rho\mathbf{v}$, \mathbf{B} et \mathcal{E} .

L'équation d'état :

$$p = (\gamma - 1)\left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2\right) \quad (2.1.13)$$

complète le système et permet d'évaluer la pression.

Nous allons voir dans la section suivante que la solution analytique du système

(2.1.1) satisfait la contrainte physique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \&\forall t > 0$ et qu'en général la solution numérique du même système enfreint cette contrainte, ce qui entraîne de l'instabilité numérique et pourra donner lieu à des ondes non physiques. Comme le schéma numérique de base ne tient pas compte explicitement de cette contrainte, il va falloir jumeler au schéma numérique de base une méthode qui va corriger progressivement les composantes du champ magnétique de manière à satisfaire cette contrainte.

En une dimension spatiale, la contrainte physique du champ magnétique $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ s'écrit sous la forme $\partial_x B_x = 0$; (la condition initiale du système vérifie cette condition donc $B(x, t = 0) = \text{constante } \forall x \in \Omega$). L'équation relative à B_x dans le système de la MHD idéale (2.1.1) est $\partial_t B_x + 0 = 0$; on en déduit que la composante B_x demeure invariable dans le temps et l'espace ($B_x(x, t) = B_x(x, t = 0) \forall x \in \Omega, \forall t > 0$). Ainsi le système unidimensionnel de la MHD idéale se réduit à un système de 7 lois de conservation et prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + \bar{p} - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ v_x(\rho e + \bar{p}) - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \end{bmatrix} = 0, \quad (2.1.14)$$

avec $\bar{p} = p + \mathbf{B}^2/2$. Les valeurs propres de la matrice jacobienne sont données ([34, 40, 24, 53, 19, 55]) par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v_x - c_f, & \lambda_2 &= v_x - c_a, \\ \lambda_3 &= v_x - c_s, & \lambda_4 &= v_x, & \lambda_5 &= v_x + c_s. \\ \lambda_6 &= v_x + c_a, & \lambda_7 &= v_x + c_f, \end{aligned}$$

avec

$$c_f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\rho}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$c_a = \sqrt{\frac{B_x^2}{\rho}},$$

$$c_s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho} - \sqrt{\left(a^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho} \right)^2 - 4a^2 \frac{B_x^2}{\rho}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$. Les valeurs propres de la matrice jacobienne représentent la vitesse de propagation des ondes ; sur le plan numérique, ces valeurs propres sont nécessaires pour contrôler la taille du pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ et garantir la stabilité du schéma numérique moyennant la condition CFL.

La solution du système (2.1.14) admet les sept ondes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{1,7} & \text{ Ondes rapides,} & \mathcal{W}^{2,6} & \text{ Ondes de Alfvén} \\ \mathcal{W}^{3,5} & \text{ Ondes lentes,} & \mathcal{W}^4 & \text{ Onde d'entropie} \end{aligned}$$

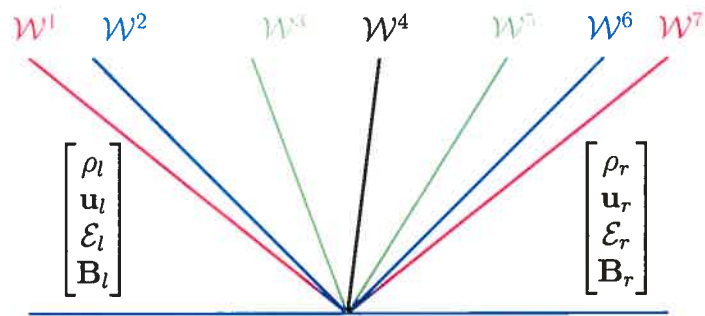


FIGURE 2.1. Profil des sept ondes dans la solution du système magnétohydrodynamique unidimensionnel

Une étude complète de la structure hyperbolique du système se trouve dans [40, 34, 55, 24, 53] ; les vecteurs propres à droite de la matrice jacobienne constituent une base de l'espace des solutions et permettent de diagonaliser la matrice jacobienne (permettent d'écrire la matrice A sous la forme $A = R \cdot \Lambda \cdot L$

où R est la matrice des vecteurs propres à droite, $L = R^{-1}$ la matrice des vecteurs propres à gauche et Λ est la matrice diagonale des valeurs propres).

2.2. LA CONTRAINTE $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Les monopôles magnétiques n'ont jamais existé ni dans la nature ni en laboratoire. On rappelle qu'un monopôle magnétique correspond à une particule magnétisée ayant un seul pôle (pôle sud ou pôle nord mais pas les deux en même temps); une manière d'éviter l'apparition de tels monopôles consiste à imposer au champ magnétique une contrainte de divergence nulle $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ [40, 34]. Le système (2.1.1) simule le phénomène de la magnétohydrodynamique idéale. La solution analytique de ce système satisfait la contrainte physique de divergence nulle du champ magnétique. Dans la pratique on ne peut que considérer des situations dans lesquelles le champ magnétique est à divergence nulle, c'est-à-dire la condition initiale du modèle magnétohydrodynamique est telle que $\nabla \cdot \mathbf{B}|_{t=0} = 0$. La loi de Faraday

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

garantit qu'avec une telle condition initiale, le champ magnétique dans la solution analytique du système serait, en tout temps, à divergence nulle. En effet, en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= 0, \\ \Rightarrow \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{constante} = \nabla \cdot \mathbf{B}|_{t=0}$. ■

Souvent le schéma numérique de base ne tient pas compte explicitement de la conséquence de la loi de Faraday; en raison de l'accumulation des erreurs du schéma, la solution numérique enfreint souvent cette contrainte physique. Brackbill et Barnes [18] ont montré que la divergence non nulle du champ magnétique entraîne généralement des ondes non physiques, des densités et des pressions négatives aux voisinages des chocs intenses, ou des instabilités numériques. Plusieurs approches ont déjà été proposées afin de remédier à cette situation et se classent en trois groupes. Dans la suite, nous allons donner un bref aperçu de chacune

de ces approches. A la fin de ce chapitre nous présentons une méthode qui sera jumelée à notre schéma numérique de base (ou tout autre schéma numérique de type central) et qui garantira une solution numérique physiquement acceptable.

2.2.1. Formulation à 8 ondes

Brackbill et Barnes [18] ont proposé une formulation non conservative pour réduire les erreurs numériques associées à la divergence non nulle du champ magnétique pour la magnétohydrodynamique idéale. Cette même formulation non conservative pour les équations relatives à l'impulsion, à l'énergie et à l'induction sera utilisée plus tard par Powell [50] :

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)\mathcal{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) &= -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \\ \partial_t\mathcal{E} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}(\mathcal{E} + p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2) - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right) &= -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \\ \partial_t\mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) &= (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} \end{aligned}$$

Cette formulation diffère de la formulation conservative par le terme source du membre de droite, proportionnel à $\nabla \cdot \mathbf{B}$ qui, analytiquement, doit rester nul mais devient non nul numériquement. Powell proposa un solveur de Riemann à huit ondes pour résoudre ce nouveau système. La raison pour laquelle la contrainte physique est satisfaite s'explique par le fait que la $\nabla \cdot \mathbf{B}$ petite mais non nulle générée par la solution numérique ne s'accumule pas en un point du maillage, mais se propage plutôt à l'extérieur du domaine avec le flot. Pour plusieurs problèmes, la méthode de la formulation à huit ondes fonctionne bien et l'erreur en $\nabla \cdot \mathbf{B}$ reste petite. Cependant pour des problèmes faisant intervenir des chocs intenses, le terme source peut produire des ondes non physiques ; ces erreurs demeurent même si le maillage est raffiné. Ce phénomène est expliqué dans [64] et il est illustré par plusieurs tests numériques.

2.2.2. Méthode de projection

Cette méthode est proposée par Brackbill et Barnes [18]. Elle consiste à corriger le champ magnétique de la solution obtenue à partir d'un schéma numérique de base. Si on note par \mathbf{B}^* le champ magnétique obtenu à partir du schéma de base au cours du $(n + 1)^{\text{ème}}$ pas de temps, la méthode consiste à considérer le champ magnétique, à divergence nulle, projection du champ \mathbf{B}^* . En effet, en appliquant le théorème de Helmholtz, on décompose le champ magnétique en une somme d'un rotationnel et d'un gradient de la façon suivante :

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times A + \nabla \phi. \quad (2.2.1)$$

La partie physiquement significative dans \mathbf{B}^* se trouve dans $\nabla \times A$. Par application de l'opérateur divergence aux deux membres de (2.2.1) on obtient l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{B}^*. \quad (2.2.2)$$

En résolvant l'équation (2.2.2) (par application d'un solveur d'équations de Poisson), on calcule ϕ et on corrige \mathbf{B}^* en retranchant la partie à divergence non nulle ($\nabla \phi$); ceci permet d'obtenir le champ magnétique au temps t^{n+1}

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi. \quad (2.2.3)$$

Le champ magnétique sera à divergence numérique nulle si le laplacien de l'équation (2.2.2) est discrétisé en deux étapes comme divergence d'un gradient en utilisant les mêmes opérateurs de différence que ceux utilisés pour calculer $\nabla \cdot \mathbf{B}^*$ et $\nabla \phi$ dans les équations (2.2.2)-(2.2.3).

2.2.3. Méthode du transport sous contrainte

Cette méthode proposée originalement par Evans et Hawley [26] à été généralisée par la suite par Dai et Woodward [20], [22], [21], Ryu et al. [56], Balsara et Spicer [16]. Ils ont tous proposé des extensions de la méthode du transport sous contrainte (en anglais constrained transport "CT"), en l'adaptant à leurs schémas numériques de bases, pour traiter la divergence du champ magnétique dans la solution numérique. Tóth [64] a résumé les différentes versions de la méthode "CT" et a proposé ensuite sa propre version.

Nous présentons tout d'abord la méthode du transport sous contrainte dans le cadre d'une formulation cartésienne bidimensionnelle uniforme. Nous adoptons les notations proposées par Tóth [64] : \mathbf{B} représente le champ magnétique au centre d'une cellule et \mathbf{b} représente la valeur du champ magnétique au milieu d'une arête (2D) ou au centre d'une face (3D) d'une cellule.

2.2.3.1. Approche par différences finies

La méthode du transport sous contrainte (CT) proposée par Evans et Hawley [26] s'applique dans le cadre des méthodes de différences finies et fait appel à un maillage décalé pour satisfaire la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. En deux dimensions spatiales, les composantes b^x et b^y du champ magnétique sur maillage décalé sont calculées aux points $(x_{i+1/2}, y_j)$ et $(x_i, y_{j+1/2})$ respectivement. On note par $\Omega \equiv E_z = (-\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}) \cdot \vec{k}$ (avec $\vec{k} = (0, 0, 1)$) la composante suivant l'axe des z du champ électrique. La méthode CT consiste à évaluer tout d'abord Ω aux points $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$. Par la suite, on discrétise l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.2.4)$$

en différences centrées sur les côtés des cellules (Fig.2.2), ce qui donne :

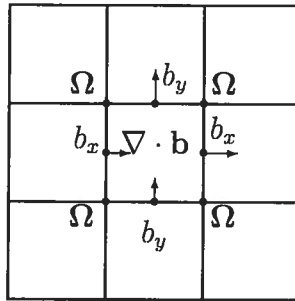


FIGURE 2.2. Champ magnétique décalé.

$$\begin{aligned} b_x^{n+1}|_{i+1/2,j} &= b_x^n|_{i+1/2,j} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y}, \\ b_y^{n+1}|_{i,j+1/2} &= b_y^n|_{i,j+1/2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Sous cette formulation, Evans et Hawley ont pu démontrer que la divergence numérique du champ magnétique décalé \mathbf{b} calculée moyennant des opérateurs de différences centrées

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_{i,j} = \frac{b_x|_{i+1/2,j} - b_x|_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{b_x|_{i,j+1/2} - b_x|_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (2.2.6)$$

ne change pas au cours du temps, c'est-à-dire que si la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{b}^n = 0$ était respectée à l'instant t^n , alors l'équation $\nabla \cdot \mathbf{b}^{n+1} = 0$ sera vérifiée avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature.

2.2.3.2. Méthode du transport avec interpolation pour les schémas de type volumes finis

En se basant sur la méthode du transport sous contrainte d'Evans et Hawley [26], Dai et Woodward [20, 22] ont présenté une adaptation de la méthode (CT) pour l'utiliser avec des méthodes du type de Godunov. On suppose que le champ magnétique \mathbf{B}^n soit à divergence nulle ; on note par \mathbf{B}^* le champ magnétique dans la solution numérique U^{n+1} obtenue à partir du schéma numérique de base. En utilisant des interpolations spatiales et temporelles, on calcule les composantes du champ magnétique $\overline{\mathbf{B}}$ aux coins des cellules à l'instant $t^{n+1/2}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{8} & (\mathbf{B}_{i,j}^n + \mathbf{B}_{i+1,j}^n + \mathbf{B}_{i,j+1}^n + \mathbf{B}_{i+1,j+1}^n \\ & + \mathbf{B}_{i,j}^* + \mathbf{B}_{i+1,j}^* + \mathbf{B}_{i,j+1}^* + \mathbf{B}_{i+1,j+1}^*). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

D'une façon analogue, on calcule les composantes du champ de vitesse $\overline{\mathbf{v}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}$ à l'instant $t^{n+1/2}$. Ensuite on calcule le champ électrique aux coins des cellules

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2} = -\overline{\mathbf{v}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \times \overline{\mathbf{B}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}. \quad (2.2.8)$$

La composante Ω suivant l'axe des z du champ électrique ($\Omega = \mathbf{E} \cdot (0, 0, 1)$), est utilisée pour traiter les composantes du champ magnétique décalé \mathbf{b} sur les faces des cellules moyennant les équations (2.2.5). Par la suite on calcule le champ

magnétique \mathbf{B} aux centres des cellules de la façon suivante :

$$B_x^{n+1}|_{i,j} = \frac{b_x^{n+1}|_{i+1/2,j} + b_x^{n+1}|_{i-1/2,j}}{2} \quad (2.2.9)$$

$$B_y^{n+1}|_{i,j} = \frac{b_y^{n+1}|_{i,j+1/2} + b_y^{n+1}|_{i,j-1/2}}{2}$$

Le champ magnétique ainsi traité satisfait la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0$ si à l'instant précédent la condition $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$ était satisfaite [20, 22, 64].

2.2.3.3. Méthodes CT sans champ magnétique décalé

Dai et Woodward (DW) [20],[22], Balsara et Spicer (BS) [16], et Ryu et al. (RMJA) [56], ont tous considéré le champ magnétique décalé \mathbf{b} comme étant une variable primaire dans le processus du traitement de la divergence du champ magnétique \mathbf{B} dans la solution numérique. En fait, \mathbf{b} n'est utilisé que pour évaluer \mathbf{B} au centre des cellules. Tóth [64] a montré que pour les schémas de type volumes finis, les différentes versions de la méthode CT peuvent être reformulées en fonction de la solution numérique obtenue aux centres des cellules du maillage et sans faire appel à un champ magnétique décalé \mathbf{b} évalué sur les faces de ces cellules. En effet, toutes les versions de la méthode du transport sous contrainte telles que proposées par Dai et Woodward, Balsara et Spicer, etc..., consistent en une discrétisation conservative similaire à la formulation ci-dessous :

$$B_x^{n+1}|_{i,j} = B_x^n|_{i,j} - \Delta t \frac{\bar{f}_y|_{i,j+1/2} - \bar{f}_y|_{i,j-1/2}}{\Delta y}$$

$$B_y^{n+1}|_{i,j} = B_y^n|_{i,j} + \Delta t \frac{\bar{f}_x|_{i+1/2,j} - \bar{f}_x|_{i-1/2,j}}{\Delta x}$$

où les flux numériques se calculent de la façon suivante :

$$\bar{f}_x|_{i+1/2,j} = + \frac{(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot \mathbf{k}$$

$$\bar{f}_y|_{i,j+1/2} = - \frac{(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot \mathbf{k}$$

Les interpolations spatiales et temporelles se calculent moyennant des discrétisations équivalentes à celles de l'équation (2.2.7). On note ici la nécessité de la forme symétrique dans le calcul du flux numérique ainsi que dans les interpolations et

les discrétisations qui a pour effet de générer un champ magnétique physiquement admissible à divergence nulle.

Dans le cadre de la méthode du transport sous contrainte, Tóth [64] a proposé une nouvelle approche qui consiste à utiliser une discrétisation en différences centrées de l'équation d'induction et sans faire appel aux composantes du champ magnétique décalé sur les faces des cellules. Pour assurer une précision du second ordre par rapport au temps, la règle du point médian sera appliquée pour le calcul de l'intégrale temporelle en considérant le champ électrique au temps intermédiaire $t^{n+1/2}$. Pour les équations de la MHD idéale, le champ électrique sera calculé de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_{i,j} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^{n+1/2} = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i,j}}{2}. \quad (2.2.10)$$

\mathbf{B}^* étant le champ magnétique dans la solution numérique U^{n+1} obtenue à l'instant t^{n+1} à partir du schéma numérique de base ; (généralement on a $\nabla \cdot \mathbf{B}^* \neq 0$). La discrétisation de l'équation d'induction (2.1.12) moyennant des différences centrées permet de calculer les composantes du champ magnétique \mathbf{B}^{n+1} de la façon suivante :

$$B_x^{n+1}|_{i,j} = B_x^n|_{i,j} - \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.2.11)$$

$$B_y^{n+1}|_{i,j} = B_y^n|_{i,j} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

avec $\Omega = \mathbf{E} \cdot (0, 0, 1)$. Tóth [64] a démontré que le champ magnétique obtenu à partir des équations (2.2.11) satisfait la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0$ si à l'instant précédent l'équation $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$ était satisfaite (ceci à condition que l'opérateur de divergence soit discrétisé avec des différences centrées).

Pour satisfaire la contrainte physique, l'équivalent de cette approche dans le cadre des méthodes du transport sous contrainte pour les schémas de types volumes finis faisant eux-mêmes appel à un champ magnétique décalé, utilise un flux calculé

de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{f}_x|_{i+1/2,j} &= +\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^{n+1/2} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^{n+1/2}}{2} \\ \bar{f}_y|_{i,j+1/2} &= -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^{n+1/2} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1}^{n+1/2}}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi la méthode proposée par Tóth peut être reformulée en terme de méthode de transport sous contrainte avec champ magnétique décalé. Le fait de ne pas faire appel à un champ magnétique décalé \mathbf{b} pour traiter les composantes de \mathbf{B}^* réduit le temps de calcul et facilite la mise en oeuvre de la méthode. Dans la suite de ce chapitre nous présentons notre propre extension de la méthode du transport sous contrainte qui sera jumelée à nos schémas numériques centrés ; notre nouvelle méthode sera nommée "CTCS" (Constrained Transport for Central Schemes). La CTCS ne fait pas appel à un champ magnétique décalé pour satisfaire la contrainte physique de divergence nulle, et elle conserve le second ordre de précision du schéma numérique de base.

2.2.4. Méthode du transport sous contrainte pour des schémas centrés du type Nessyahu et Tadmor

Les schémas numériques centrés que nous utilisons pour résoudre les problèmes de magnétohydrodynamique nécessitent un maillage original cartésien et un maillage dual décalé dont les cellules sont cartésiennes ou en diamants. Comme ces schémas numériques alternent d'un maillage original à un maillage dual, aucune des différentes versions de la méthode de transport sous contrainte déjà proposées dans la littérature ne pourra être appliquée directement. Dans cette section nous allons présenter une généralisation de la méthode du transport sous contrainte (version volumes finis) pour des schémas numériques centrés en deux ou trois dimensions spatiales avec des cellules duales cartésiennes ou en diamants. La méthode CTCS pour traiter les composantes du champ magnétique sera appliquée à la suite de chaque pas de temps du schéma numérique de base et va maintenir une divergence nulle du champ magnétique avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature si la condition initiale est telle que $\nabla \cdot \mathbf{B}|_{t=0} = 0$. La méthode CTCS utilise la solution numérique U^n obtenue à l'instant t^n (U^n est

telle que $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$) ainsi que la solution U^{n+1} obtenue à l'instant suivant t^{n+1} sur les cellules du maillage décalés (généralement U^{n+1} n'est pas physiquement admissible autrement dit $\nabla \cdot \mathbf{B}^* \neq 0$).

2.2.4.1. Approche CTCS pour les schémas centrés 2D avec cellules duales en diamants [12]

Dans cette section nous nous intéressons au schéma numérique central présenté à la section 1.1.2 dont les cellules du maillage original sont cartésiennes et celle du maillage décalé sont en diamants. Nous supposons que la solution numérique du système magnétohydrodynamique soit connue à l'instant t^n sur les cellules cartésiennes $C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ et qu'elle vérifie la contrainte du champ magnétique à divergence nulle. Nous appliquons le schéma numérique de base pour calculer la solution à l'instant t^{n+1} sur les cellules duales en diamants $D_{i+1/2,j}$ et $D_{i,j+1/2}$ (voir la section 1.1.2). On désigne par $\mathcal{B}_{i+1/2,j}^*$ le champ magnétique dans la solution numérique $U_{i+1/2,j}^{n+1}$ obtenue sur les cellules de la forme $D_{i+1/2,j}$ (généralement la contrainte $\nabla \cdot \mathcal{B}_{i+1/2,j}^* = 0$ n'est pas satisfaite et un traitement particulier des composantes de $\mathcal{B}_{i+1/2,j}^*$ est nécessaire). L'approche que nous allons proposer pour calculer les composantes de \mathcal{B}^{n+1} à l'instant t^{n+1} fait appel uniquement à la solution U^n ainsi qu'aux composantes de U^{n+1} et ne nécessite aucun décalage additionnel des composantes du champ magnétique sur les faces des cellules. On discrétise l'équation d'induction à l'aide de différences centrées sur les cellules du maillage décalé (sur les cellules $D_{i+1/2,j}$ uniquement) de la façon suivante (Fig.2.3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+1/2,j} &= \frac{B_x^n|_{i,j} + B_x^n|_{i+1,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \\ \mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j} &= \frac{B_y^n|_{i,j} + B_y^n|_{i+1,j}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Pour garantir un champ magnétique à divergence nulle ainsi qu'une précision d'ordre deux, la composante Ω du champ électrique \mathbf{E} suivant l'axe des z sera calculée à l'instant $t^{n+1/2}$ à partir de l'équation ci-dessous (Fig.2.4) :

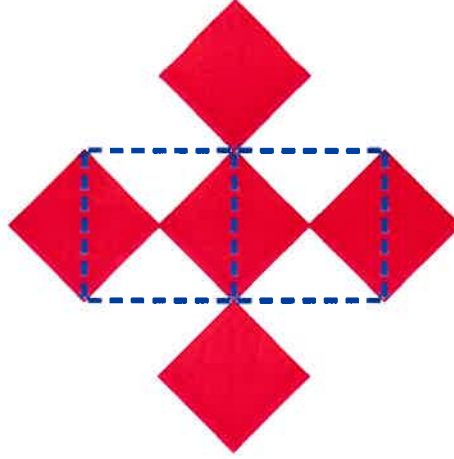


FIGURE 2.3. Cellules du maillage original et dual nécessaires pour le traitement du champ magnétique $\mathcal{B}_{i+1/2,j}^*$



FIGURE 2.4. Deux cellules cartésiennes $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ et la cellule duale $D_{i+1/2,j}$

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j}^{n+1/2} = -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j} + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^n}{2} \right]. \quad (2.2.13)$$

Nous allons démontrer qu'avec cette discrétisation de l'équation d'induction (à partir des équations (2.2.12)), et si le champ magnétique \mathbf{B}^n est à divergence nulle (moyennant une discrétisation en différences centrées de l'opérateur de divergence), le champ magnétique \mathcal{B}^{n+1} vérifiera la contrainte $\nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1} = 0$ moyennant la même discrétisation de l'opérateur de divergence en des différences centrées car les termes à l'instant " $t^{n+1/2}$ " vont se simplifier complètement.

Supposons qu'en tout point (x_i, y_j) du maillage original, le champ magnétique \mathbf{B}^n dans la solution numérique U^n satisfasse l'égalité suivante :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i,j} = \frac{\partial B_x^n}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial B_y^n}{\partial y} \Big|_{i,j} \simeq \frac{B_x^n|_{i+1,j} - B_x^n|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{B_y^n|_{i,j+1} - B_y^n|_{i,j-1}}{2\Delta y}. \quad (2.2.14)$$

L'objectif est de démontrer que le champ magnétique à l'instant t^{n+1} (sur les cellules $D_{i+1/2,j}$) obtenu à partir de la procédure de traitement de divergence CTCS est à divergence nulle, c'est-à-dire qu'il satisfait l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1}|_{i+1/2,j} \simeq & \frac{\mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+3/2,j} - \mathcal{B}_x^{n+1}|_{i-1/2,j}}{2\Delta x} \\ & + \frac{\mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j+1} - \mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j-1}}{2\Delta y} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Les deux équations dans (2.2.12) permettent de calculer les termes suivants :

$$\mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+3/2,j} = \frac{B_x^n|_{i+1,j} + B_x^n|_{i+2,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \quad (2.2.16)$$

$$\mathcal{B}_x^{n+1}|_{i-1/2,j} = \frac{B_x^n|_{i-1,j} + B_x^n|_{i,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y}$$

$$\mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j+1} = \frac{B_x^n|_{i,j+1} + B_x^n|_{i+1,j+1}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta x}$$

$$\mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j-1} = \frac{B_x^n|_{i,j-1} + B_x^n|_{i+1,j-1}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \quad (2.2.17)$$

En introduisant les équations (2.2.16)-(2.2.17) dans (2.2.15), on calcule une approximation de $\nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1}|_{i+1/2,j}$ avec une précision du second ordre ; en groupant convenablement les termes on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1}|_{i+1/2,j} = & \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i,j} + \nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i+1,j}) \\ & + \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{-\Delta t}{2\Delta y} (\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2}) - \frac{-\Delta t}{2\Delta y} (\Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}) \right] \\ & + \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}) \right] \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

ce qui donne après simplification et en tenant compte que partout sur le maillage original on a $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$

$$\nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1}|_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i,j} + \nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i+1,j}) \equiv 0. \quad \blacksquare \quad (2.2.19)$$

Il est intéressant de noter que l'équation (2.2.19) reste vraie même si le maillage n'est pas uniforme car les " $\Omega^{n+1/2}$ " dans l'équation (2.2.18) vont toujours se simplifier. Donc si la solution à l'instant t^n est à divergence nulle (par une discrétisation de l'opérateur " $\nabla \cdot$ " avec des différences centrées), la méthode CTCS

garantit que la divergence du champ magnétique calculé à l'instant t^{n+1} sera nulle avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature.

De façon analogue on traite le champ magnétique obtenu à l'instant t^{n+1} sur les cellules duales $D_{i,j+1/2}$ (dans la direction de l'axe des ordonnées) obtenues à partir des cellules cartésiennes $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$.

On applique ensuite le schéma numérique de base et on calcule à partir des données sur les cellules duales à l'instant t^{n+1} la solution sur le maillage cartésien à l'instant t^{n+2} . On discrétise l'équation d'induction sur les cellules cartésiennes $C_{i,j}$ et on traite les composantes du champ magnétique à l'instant t^{n+2} de la façon suivante :

$$B_x^{n+2}|_{i,j} = \frac{B_x^{n+1}|_{i-1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i+1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i,j-1/2} + B_x^{n+1}|_{i,j+1/2}}{4} - \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+3/2} - \Omega_{i,j-1}^{n+3/2}}{2\Delta y}, \quad (2.2.20)$$

$$B_y^{n+2}|_{i,j} = \frac{B_y^{n+1}|_{i-1/2,j} + B_y^{n+1}|_{i+1/2,j} + B_y^{n+1}|_{i,j-1/2} + B_y^{n+1}|_{i,j+1/2}}{4} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+3/2} - \Omega_{i-1,j}^{n+3/2}}{2\Delta x}. \quad (2.2.21)$$

Pour s'assurer d'avoir un champ magnétique à divergence nulle et de maintenir une précision d'ordre deux, le champ électrique \mathbf{E} (et par la suite Ω) doit être calculé à l'instant $t^{n+3/2}$ de la façon suivante (Fig.2.5) :

$$\mathbf{E}_{i,j} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^{n+3/2} = -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+2} \times \mathbf{B}^*)_{i,j} + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i-1/2,j}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j-1/2}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1/2}^{n+1}}{4} \right]. \quad (2.2.22)$$

La figure 2.5 montre une cellule cartésienne $C_{i,j}$ et quatre cellules duales nécessaires pour calculer le champ électrique $\mathbf{E}_{i,j}^{n+3/2}$.

Pour compléter la présentation de la méthode CTCS, on doit démontrer qu'en tout point (x_i, y_j) du maillage, le champ magnétique à l'instant t^{n+2} est à divergence nulle, c'est-à-dire que le membre de droite de l'équation :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^{n+2} \simeq \frac{B_x^{n+2}|_{i+1,j} - B_x^{n+2}|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{B_y^{n+2}|_{i,j+1} - B_y^{n+2}|_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.2.23)$$

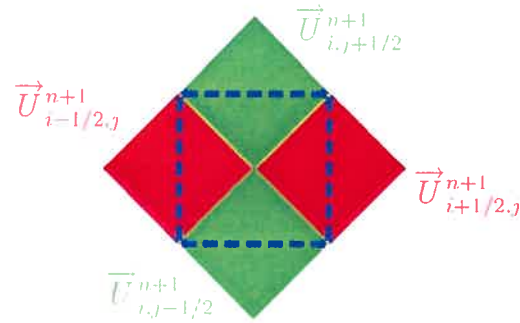


FIGURE 2.5. Cellules nécessaires pour le traitement du champ magnétique $\mathbf{B}_{i,j}^*$

est identiquement nul avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature.

La figure 2.6 montre les cellules originales (cartésiennes) et duales (en diamants) nécessaires pour le calcul de la divergence du champ magnétique sur la cellule $C_{i,j}$ (la cellule au centre du graphique) du maillage cartésien. En utilisant les

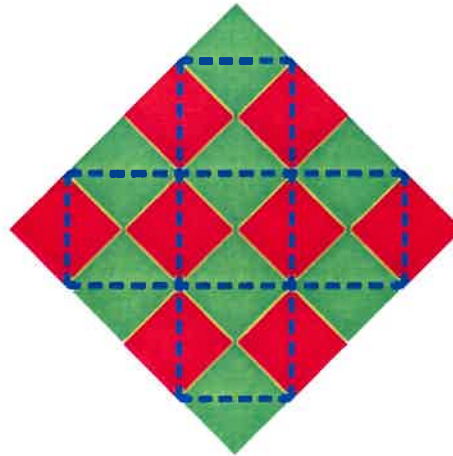


FIGURE 2.6. Cellules nécessaires pour le calcul de $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^{n+2}$

équations (2.2.20), (2.2.21) et (2.2.22), on calcule les termes du membre de droite de l'équation (2.2.23) ; on obtient :

$$B_x^{n+2}|_{i+1,j} = \frac{B_x^{n+1}|_{i+1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i+3/2,j} + B_x^{n+1}|_{i+1,j-1/2} + B_x^{n+1}|_{i+1,j+1/2}}{4} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j+1} - \Omega_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned}
B_x^{n+2}|_{i-1,j} &= \frac{B_x^{n+1}|_{i-3/2,j} + B_x^{n+1}|_{i-1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i-1,j-1/2} + B_x^{n+1}|_{i-1,j+1/2}}{4} \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i-1,j+1} - \Omega_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \\
B_y^{n+2}|_{i,j+1} &= \frac{B_y^{n+1}|_{i-1/2,j+1} + B_y^{n+1}|_{i+1/2,j+1} + B_y^{n+1}|_{i,j+1/2} + B_y^{n+1}|_{i,j+3/2}}{4} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j+1} - \Omega_{i-1,j+1}}{2\Delta x} \\
B_y^{n+2}|_{i,j-1} &= \frac{B_y^{n+1}|_{i-1/2,j-1} + B_y^{n+1}|_{i+1/2,j-1} + B_y^{n+1}|_{i,j-3/2} + B_y^{n+1}|_{i,j-1/2}}{4} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j-1} - \Omega_{i-1,j-1}}{2\Delta x}. \quad (2.2.25)
\end{aligned}$$

En introduisant les équation (2.2.24)-(2.2.25) dans (2.2.23) et en groupant convenablement les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^{n+2} &\simeq 0 + \frac{1}{4} [\nabla \cdot \mathbf{B}_{i-1/2,j}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j-1/2}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1/2}^{n+1}] \\
&= 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Si le champ magnétique à l'instant t^{n+1} est à divergence nulle, la méthode CTCS garantit ainsi un champ magnétique calculé à l'instant t^{n+2} ayant une divergence nulle avec une précision de l'ordre de l'erreur de troncature.

Donc la méthode du transport sous contrainte "CTCS" adaptée pour les schémas centrés avec cellules duales en diamants garantit que la contrainte physique sera satisfaite sur les cellules cartésiennes du maillage original et sur les cellules duales en diamants à condition que la condition initiale du système magnétohydrodynamique soit à divergence nulle ($\nabla \cdot \mathbf{B}|_{t=0} = 0$).

2.2.4.2. Approche CTCS pour schémas centrés 2D avec cellules duales cartésiennes

Dans cette section nous présentons une extension de la méthode CTCS qui s'applique dans le cadre des schémas centrés dont les cellules originales et duales sont cartésiennes (voir la section 1.1.3). On suppose qu'à l'instant t^n le champ

magnétique dans la solution numérique U_{ij}^n soit à divergence nulle :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_{ij}^n \simeq \frac{B_{i+1,j}^{n;x} - B_{i-1,j}^{n;x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1}^{n;y} - B_{i,j-1}^{n;y}}{2\Delta y}. \quad (2.2.26)$$

Moyennant le schéma numérique de base on calcule la solution $U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ à l'instant t^{n+1} sur le maillage décalé. On note par \mathbf{B}^* le champ magnétique dans la solution numérique $U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ ainsi obtenu. Généralement, le champ magnétique \mathbf{B}^* enfreint la contrainte physique et un traitement supplémentaire est nécessaire. Pour cela on calcule le champ électrique au temps $t^{n+1/2}$ sur les cellules duales $D_{i+1/2,j+1/2}$ en utilisant l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j+1/2} \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1}^n}{4} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Par la suite, on discrétise l'équation d'induction sur les cellules cartésiennes du maillage dual à l'aide de différences centrées pour conserver le second ordre de précision du schéma numérique de base, et on calcule les composantes B_x^{n+1} et B_y^{n+1} du champ magnétique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2}^{n+1;x} = \frac{B_{i,j}^{n;x} + B_{i+1,j;x}^{n;x} + B_{i+1,j+1}^{n;x} + B_{i,j+1}^{n;x}}{4} \\ - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2}^{n+1;y} = \frac{B_{i,j}^{n;y} + B_{i+1,j}^{n;y} + B_{i+1,j+1}^{n;y} + B_{i,j+1}^{n;y}}{4} \\ + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Pour démontrer que le champ magnétique obtenu à partir des équations (2.2.28) et (2.2.29) est à divergence nulle, on discrétise $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ sur les cellules duales du maillage décalé en utilisant des différences centrées de la façon suivante :

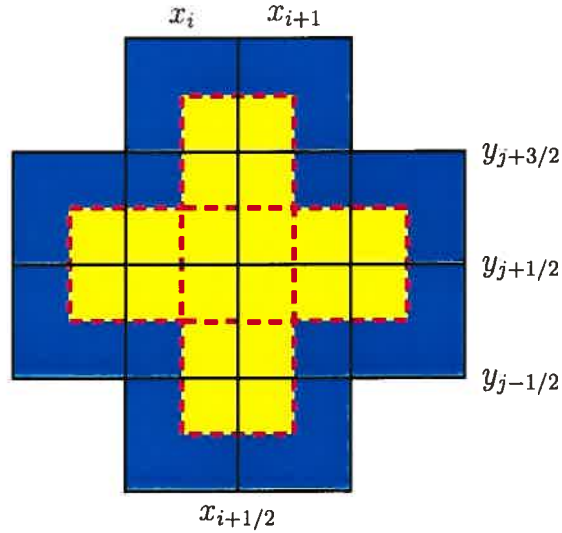


FIGURE 2.7. Cellules nécessaires pour la discrétisation de $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &\simeq \frac{B_{i+3/2,j+1/2}^{n+1;x} - B_{i-1/2,j+1/2}^{n+1;x}}{2\Delta x} \\ &\quad + \frac{B_{i+1/2,j+3/2}^{n+1;y} - B_{i+1/2,j-1/2}^{n+1;y}}{2\Delta y} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Ensuite, on calcule explicitement chacun des termes du membre de droite de l'équation (2.2.30) en utilisant les équations (2.2.28), (2.2.29) et (2.2.27); on obtient :

$$\begin{aligned} B_{i+3/2,j+1/2}^{n+1;x} &= \frac{B_{i+1,j}^{n;x} + B_{i+2,j}^{n;x} + B_{i+1,j+1}^{n;x} + B_{i+2,j+1}^{n;x}}{4} \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+3/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

$$\begin{aligned} B_{i-1/2,j+1/2}^{n+1;x} &= \frac{B_{i-1,j}^{n;x} + B_{i,j}^{n;x} + B_{i-1,j+1}^{n;x} + B_{i,j+1}^{n;x}}{4} \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+3/2}^{n+1;y} &= \frac{B_{i,j+1}^{n;y} + B_{i+1,j+1}^{n;y} + B_{i,j+2}^{n;y} + B_{i+1,j+2}^{n;y}}{4} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

$$B_{i+1/2,j-1/2}^{n+1;y} = \frac{B_{i,j-1}^{n;y} + B_{i+1,j-1}^{n;y} + B_{i,j}^{n;y} + B_{i+1,j}^{n;y}}{4} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j-1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \quad (2.2.34)$$

En introduisant les équations (2.2.31)-(2.2.34) dans (2.2.30) et en groupant convenablement les termes dans (2.2.27), on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{4}(\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1}^n).$$

Si à l'instant précédent, le champ magnétique \mathbf{B}^n satisfaisait la contrainte physique, alors le champ magnétique \mathbf{B}^{n+1} obtenu par application de la procédure CTCS vérifiera à son tour cette même contrainte.

2.2.4.3. Approche CTCS pour des schémas centrés 3D avec cellules duales cartésiennes

Dans cette section, nous allons généraliser notre méthode CTCS de traitement de divergence pour des problèmes de magnétohydrodynamique en trois dimensions spatiales. Nous supposons qu'à l'instant t^n la solution est donnée sur les cellules

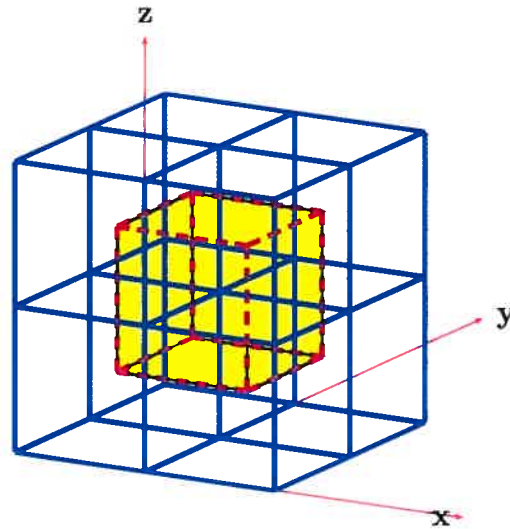


FIGURE 2.8. Cellules du maillage original nécessaires pour traiter la cellule duale (en jaune)

C_{ijk} du maillage originale et qu'elle satisfasse la contrainte physique de divergence

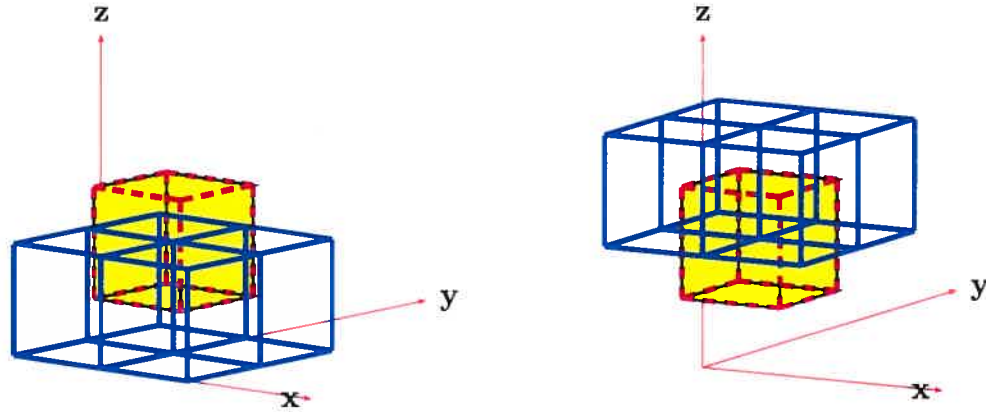


FIGURE 2.9. Intersection d'une cellule duale (cube en pointillé) avec deux couches de quatre cellules originales (cubes en trait plein)

nulle :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n \simeq \frac{B_{i+1,j,k}^{n;x} - B_{i-1,j,k}^{n;x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1,k}^{n;y} - B_{i,j-1,k}^{n;y}}{2\Delta y} + \frac{B_{i,j,k+1}^{n;z} - B_{i,j,k-1}^{n;z}}{2\Delta z}. \quad (2.2.35)$$

On applique le schéma numérique de base et on calcule la solution à l'instant t^{n+1} sur les cellules duales $U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}$. On note par \mathbf{B}^* le champ magnétique dans la solution U^{n+1} . Généralement \mathbf{B}^* ne satisfait pas la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B}^* = 0$ et un traitement particulier est nécessaire.

On calcule le champ électrique à l'instant $t^{n+1/2}$ sur les cellules duales en utilisant les données numériques aux instants t^n et t^{n+1} , sur les deux maillages, de la façon suivante (voir Fig.2.8) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + \frac{1}{8} \{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k}^n \right. \\ &\quad + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k+1}^n \\ &\quad \left. + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1,k+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1,k+1}^n \} \right]. \quad (2.2.36) \end{aligned}$$

On considère les notations suivantes du champ électrique :

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_y \Omega^3 - \partial_z \Omega^2 \\ \partial_z \Omega^1 - \partial_x \Omega^3 \\ \partial_x \Omega^2 - \partial_y \Omega^1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on discrétise l'équation d'induction

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

sur le maillage décalé et on calcule les composantes du champ magnétique à l'instant t^{n+1} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;x} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n;x} + B_{i+1,j,k}^{n;x} + B_{i+1,j+1,k}^{n;x} + B_{i,j+1,k}^{n;x} \\ &\quad + B_{i,j,k+1}^{n;x} + B_{i+1,j,k+1}^{n;x} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;x} + B_{i,j+1,k+1}^{n;x}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;y} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n;y} + B_{i+1,j,k}^{n;y} + B_{i+1,j+1,k}^{n;y} + B_{i,j+1,k}^{n;y} \\ &\quad + B_{i,j,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;y} + B_{i,j+1,k+1}^{n;y}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;z} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n;z} + B_{i+1,j,k}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k}^{n;z} + B_{i,j+1,k}^{n;z} \\ &\quad + B_{i,j,k+1}^{n;z} + B_{i+1,j,k+1}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;z} + B_{i,j+1,k+1}^{n;z}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Pour compléter la description de la procédure CTCS, on doit démontrer que le champ magnétique ainsi obtenu satisfait bien la contrainte physique de divergence nulle ; c'est-à-dire que la discrétisation de la divergence :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &\simeq \frac{B_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;x} - B_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;x}}{2\Delta x} \\ &+ \frac{B_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1;y} - B_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1;y}}{2\Delta y} \\ &+ \frac{B_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1;z} - B_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1;z}}{2\Delta z} \quad (2.2.40) \end{aligned}$$

est identiquement nulle. On calcule explicitement chacun des termes de l'équation (2.2.40) en utilisant la procédure CTCS (les équations (2.2.37)-(2.2.39) et (2.2.36)) ; on obtient :

$$\begin{aligned} B_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;x} &= \frac{1}{8}(B_{i+1,j,k}^{n;x} + B_{i+2,j,k}^{n;x} + B_{i+2,j+1,k}^{n;x} + B_{i+1,j+1,k}^{n;x} \\ &+ B_{i+1,j,k+1}^{n;x} + B_{i+2,j,k+1}^{n;x} + B_{i+2,j+1,k+1}^{n;x} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;x}) \\ &- \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+3/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} \\ &+ \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+3/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta z} \quad (2.2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1;x} &= \frac{1}{8}(B_{i-1,j,k}^{n;x} + B_{i,j,k}^{n;x} + B_{i,j+1,k}^{n;x} + B_{i-1,j+1,k}^{n;x} \\ &+ B_{i-1,j,k+1}^{n;x} + B_{i,j,k+1}^{n;x} + B_{i,j+1,k+1}^{n;x} + B_{i-1,j+1,k+1}^{n;x}) \\ &- \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} \\ &+ \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1;y} &= \frac{1}{8}(B_{i,j+1,k}^{n;y} + B_{i+1,j+1,k}^{n;y} + B_{i+1,j+2,k}^{n;y} + B_{i,j+2,k}^{n;y} \\
&\quad + B_{i,j+1,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j+2,k+1}^{n;y} + B_{i,j+2,k+1}^{n;y}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j+3/2,k-1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1;y} &= \frac{1}{8}(B_{i,j-1,k}^{n;y} + B_{i+1,j-1,k}^{n;y} + B_{i+1,j,k}^{n;y} + B_{i,j,k}^{n;y} \\
&\quad + B_{i,j-1,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j-1,k+1}^{n;y} + B_{i+1,j,k+1}^{n;y} + B_{i,j,k+1}^{n;y}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j-1/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1;z} &= \frac{1}{8}(B_{i,j,k+1}^{n;z} + B_{i+1,j,k+1}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n;z} + B_{i,j+1,k+1}^{n;z} \\
&\quad + B_{i,j,k+2}^{n;z} + B_{i+1,j,k+2}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k+2}^{n;z} + B_{i,j+1,k+2}^{n;z}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+3/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1,z} &= \frac{1}{8}(B_{i,j,k-1}^{n;z} + B_{i+1,j,k-1}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k-1}^{n;z} + B_{i,j+1,k-1}^{n;z} \\
&\quad + B_{i,j,k}^{n;z} + B_{i+1,j,k}^{n;z} + B_{i+1,j+1,k}^{n;z} + B_{i,j+1,k}^{n;z}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k-1/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}. \quad (2.2.42)
\end{aligned}$$

En introduisant ensuite les équations (2.2.41)-(2.2.42) ainsi obtenues dans (2.2.40), on réécrit (2.2.40) sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

\mathcal{S}_1 est obtenu en groupant les composantes du champ magnétique à l'instant t^n ; \mathcal{S}_2 est obtenu en groupant les composantes du champ électrique à l'instant $t^{n+1/2}$. Le but est de démontrer que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = 0$. En tenant compte de l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n = \frac{B_{i+1,j,k}^{n;x} - B_{i-1,j,k}^{n;x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1,k}^{n;y} - B_{i,j-1,k}^{n;y}}{2\Delta y} + \frac{B_{i,j,k+1}^{n;z} - B_{i,j,k-1}^{n;z}}{2\Delta z} \quad (2.2.43)$$

et des équations correspondantes pour les points voisins impliqués dans notre calcul de \mathcal{S}_1 , en groupant convenablement les composantes du champ magnétique à l'instant t^n dans \mathcal{S}_1 et en tenant compte des équation similaires à (2.2.43), on parvient à écrire \mathcal{S}_1 sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = \frac{1}{8} \{ & \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1,k}^n \\ & + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1,k+1}^n \}. \end{aligned}$$

On voit donc que \mathcal{S}_1 sera nulle si à l'instant t^n la divergence du champ magnétique est nulle.

Ensuite on calcule \mathcal{S}_2 ; en tenant compte du fait que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, on

obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2 = \frac{\Delta t}{4h^2} & \left(\{ \right. \\
& - (\Omega_{i+3/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+3/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}) + (\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+3/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}) \\
& + (\Omega_{i-1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}) - (\Omega_{i-1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}) \} \\
& + \{ -(\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j+3/2,k-1/2}^{n+1/2,1}) + (\Omega_{i+3/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3}) \\
& + (\Omega_{i+1/2,j-1/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}) - (\Omega_{i+3/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}) \} \\
& + \{ -(\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2}) + (\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+3/2}^{n+1/2,1}) \\
& + (\Omega_{i+3/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}) - (\Omega_{i+1/2,j+3/2,k-1/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}) \} \} \\
& = 0
\end{aligned}$$

car on peut vérifier que les termes impliqués s'annulent mutuellement deux à deux. Ainsi, le champ magnétique \mathbf{B}^{n+1} calculé en utilisant la procédure CTCS satisfait la contrainte physique de divergence nulle ; ceci complète la présentation de la méthode CTCS tridimensionnelle pour des schémas numériques centrés avec cellules duales cartésiennes.

2.2.4.4. Approche CTCS pour des schémas centrés 3D avec cellules duales en diamants

Dans cette section, nous présentons l'extension tridimensionnelle de la méthode CTCS pour des schémas numériques centrés avec cellules duales en diamant (voir la section 1.2.1). Soit $U_{i,j,k}^n$ la solution numérique à l'instant t^n donnée sur les cellules cartésiennes $C_{i,j,k}$ et soit $U_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ la solution à l'instant t^{n+1} obtenue, par application du schéma numérique de base, sur les cellules duales centrées aux points $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$. On suppose que la contrainte physique du champ magnétique à divergence nulle soit satisfaite à l'instant t^n ($\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$). Soit $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^*$ le champ magnétique obtenu à partir du schéma numérique de base à l'instant t^{n+1} ; généralement, $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^*$ ne satisfait pas la contrainte physique de divergence nulle et un traitement supplémentaire est nécessaire. Comme dans les sections précédentes, on cherche à calculer le champ magnétique $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ sur les cellules duales à l'instant t^{n+1} qui soit tel que $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = 0$.

On considère les notations suivantes du champ électrique :

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \quad \text{et} \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_y \Omega^3 - \partial_z \Omega^2 \\ \partial_z \Omega^1 - \partial_x \Omega^3 \\ \partial_x \Omega^2 - \partial_y \Omega^1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le champ électrique à l'instant $t^{n+1/2}$ sur les cellules duales en utilisant les données numériques connues aux instants t^n et t^{n+1} , sur les deux maillages (sur les cellules $C_{i,j,k}$ et $D_{i+1/2,j,k}$), de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j,k} + \frac{1}{2} \{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k}^n \} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

On discrétise ensuite l'équation d'induction sur les cellules duales $D_{i+1/2,j,k}$ et on calcule les composantes du champ magnétique à l'instant t^{n+1} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j,k}^{n+1;x} &= \frac{1}{2} (B_{i,j,k}^{n;x} + B_{i+1,j,k}^{n;x}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j,k}^{n+1;y} &= \frac{1}{2} (B_{i,j,k}^{n;y} + B_{i+1,j,k}^{n;y}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j,k}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j,k}^{n+1/2,3}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j,k}^{n+1;z} &= \frac{1}{2} (B_{i,j,k}^{n;z} + B_{i+1,j,k}^{n;z}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j,k}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j,k}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

Avec ce choix du champ électrique et cette discrétisation de l'équation d'induction, et en appliquant la même approche qu'à la section précédente, on peut démontrer que :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k}^n \}.$$

Ainsi, si le champ magnétique à l'instant t^n est à divergence nulle, alors la contrainte physique $\nabla \cdot \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = 0$ sera satisfaite sur toutes les cellules duales du type $\{D_{i+1/2,j,k}\}$. De la même façon, on traite le champ magnétique sur les cellules duales du type $\{D_{i,j+1/2,k}\}$ et $\{D_{i,j,k+1/2}\}$ à l'instant t^{n+1} .

Après avoir calculé la solution à l'instant t^{n+1} sur les cellules duales $\{D_{i+1/2,j,k}\}$, $\{D_{i,j+1/2,k}\}$ et $\{D_{i,j,k+1/2}\}$ et appliqué la procédure CTCS de traitement de divergence, on applique le schéma numérique de base pour calculer la solution à l'instant t^{n+2} sur les cellules cartésiennes du maillage original. On note $\mathbf{B}_{i,j,k}^*$ le champ magnétique dans la solution $U_{i,j,k}^{n+2}$ obtenue à partir du schéma numérique de base ; généralement $\mathbf{B}_{i,j,k}^*$ ne satisfait pas la contrainte physique de divergence nulle et un traitement additionnel est nécessaire.

On calcule en premier le champ électrique à l'instant $t^{n+3/2}$ sur les cellules $C_{i,j,k}$ de la façon suivante (voir Fig.2.10) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i,j,k}^{n+3/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k}^{n+3/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+2} \times \mathcal{B}^*)_{i,j,k} + \frac{1}{6} \left\{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i-1/2,j,k}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j-1/2,k}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1/2,k}^{n+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k-1/2}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right\} \right]. \quad (2.2.48) \end{aligned}$$

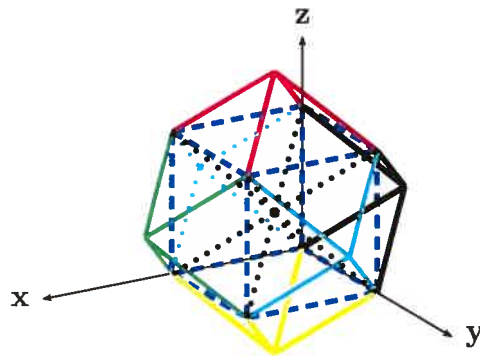


FIGURE 2.10. Six cellules en diamants et une cellule cartésienne sont nécessaires pour calculer le champ électrique $\mathbf{E}_{i,j,k}^{n+3/2}$

On discrétise ensuite l'équation d'induction sur les cellules du maillage original centrées aux nœuds (x_i, y_j, z_k) et on calcule les composantes du champ magnétique

$\mathbf{B}_{i,j,k}^{n+2}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j,k}^{n+2;x} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i+1/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i,j-1/2,k}^{n+1;x} + B_{i,j+1/2,k}^{n+1;x} + B_{i,j,k-1/2}^{n+1;x} + B_{i,j,k+1/2}^{n+1;x}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i,j-1,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta y} + \Delta t \frac{\Omega_{i,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i,j,k-1}^{n+3/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j,k}^{n+2;y} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j,k}^{n+1;y} + B_{i+1/2,j,k}^{n+1;y} + B_{i,j-1/2,k}^{n+1;y} + B_{i,j+1/2,k}^{n+1;y} + B_{i,j,k-1/2}^{n+1;y} + B_{i,j,k+1/2}^{n+1;y}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i,j,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j,k-1}^{n+3/2,1}}{2\Delta z} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j,k}^{n+2;z} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j,k}^{n+1;z} + B_{i+1/2,j,k}^{n+1;z} + B_{i,j-1/2,k}^{n+1;z} + B_{i,j+1/2,k}^{n+1;z} + B_{i,j,k-1/2}^{n+1;z} + B_{i,j,k+1/2}^{n+1;z}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j,k}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k}^{n+3/2,2}}{2\Delta x} + \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1,k}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k}^{n+3/2,1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

Pour compléter la présentation de la méthode CTCS pour les schémas numériques tridimensionnels centrés avec des cellules duales en diamants, on doit démontrer que si le champ magnétique \mathbf{B}^{n+1} est à divergence nulle alors \mathbf{B}^{n+2} l'est aussi. Autrement dit, il faut démontrer que la discrétisation de la divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^{n+2} \simeq \frac{B_{i+1,j,k}^{n+2;x} - B_{i-1,j,k}^{n+2;x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1,k}^{n+2;y} - B_{i,j-1,k}^{n+2;y}}{2\Delta y} + \frac{B_{i,j,k+1}^{n+2;z} - B_{i,j,k-1}^{n+2;z}}{2\Delta z} \quad (2.2.52)$$

est identiquement nulle. Pour cela, en utilisant les équations (2.2.48)-(2.2.51) on calcule explicitement chacun des termes du membre de droite de l'équation (2.2.52) ; on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i+1,j,k}^{n+2;x} = & \frac{1}{6} (B_{i+1/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i+3/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i+1,j-1/2,k}^{n+1;x} \\ & + B_{i+1,j+1/2,k}^{n+1;x} + B_{i+1,j,k-1/2}^{n+1;x} + B_{i+1,j,k+1/2}^{n+1;x}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i+1,j-1,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta y} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i+1,j,k-1}^{n+3/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i-1,j,k}^{n+2;x} = & \frac{1}{6} (B_{i-3/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i-1/2,j,k}^{n+1;x} + B_{i-1,j-1/2,k}^{n+1;x} \\ & + B_{i-1,j+1/2,k}^{n+1;x} + B_{i-1,j,k-1/2}^{n+1;x} + B_{i-1,j,k+1/2}^{n+1;x}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i-1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j-1,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta y} + \Delta t \frac{\Omega_{i-1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k-1}^{n+3/2,2}}{2\Delta z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j+1,k}^{n+2;y} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j+1,k}^{n+1;y} + B_{i+1/2,j+1,k}^{n+1;y} + B_{i,j+1/2,k}^{n+1;y} \\ & + B_{i,j+3/2,k}^{n+1;y} + B_{i,j+1,k-1/2}^{n+1;y} + B_{i,j+1,k+1/2}^{n+1;y}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j+1,k-1}^{n+3/2,1}}{2\Delta z} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j+1,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j-1,k}^{n+2;y} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j-1,k}^{n+1;y} + B_{i+1/2,j-1,k}^{n+1;y} + B_{i,j-3/2,k}^{n+1;y} \\ & + B_{i,j-1/2,k}^{n+1;y} + B_{i,j-1,k-1/2}^{n+1;y} + B_{i,j-1,k+1/2}^{n+1;y}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i,j-1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k-1}^{n+3/2,1}}{2\Delta z} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j-1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j-1,k}^{n+3/2,3}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j,k+1}^{n+2;z} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j,k+1}^{n+1;z} + B_{i+1/2,j,k+1}^{n+1;z} + B_{i,j-1/2,k+1}^{n+1;z} \\ & + B_{i,j+1/2,k+1}^{n+1;z} + B_{i,j,k+1/2}^{n+1;z} + B_{i,j,k+3/2}^{n+1;z}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k+1}^{n+3/2,2}}{2\Delta x} + \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k+1}^{n+3/2,1}}{2\Delta y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j,k-1}^{n+2;z} = & \frac{1}{6} (B_{i-1/2,j,k-1}^{n+1;z} + B_{i+1/2,j,k-1}^{n+1;z} + B_{i,j-1/2,k-1}^{n+1;z} \\ & + B_{i,j+1/2,k-1}^{n+1;z} + B_{i,j,k-3/2}^{n+1;z} + B_{i,j,k-1/2}^{n+1;z}) \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j,k-1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k-1}^{n+3/2,2}}{2\Delta x} + \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1,k-1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k-1}^{n+3/2,1}}{2\Delta y}. \quad (2.2.54) \end{aligned}$$

En introduisant les équations (2.2.53)-(2.2.54) dans (2.2.52), on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^{n+2} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

où \mathcal{S}_1 est obtenu en considérant les composantes du champ magnétique à l'instant t^{n+1} ; on peut grouper convenablement les termes dans \mathcal{S}_1 pour l'écrire sous la

forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = \frac{1}{6} & (\nabla \cdot \mathbf{B}_{i-1/2,j,k}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j-1/2,k}^{n+1} \\ & + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1/2,k}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k+1/2}^{n+1}) \end{aligned}$$

où $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i-1/2,j,k}^{n+1}$ est discrétisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_{i-1/2,j,k}^{n+1} \simeq & \frac{B_{i+1/2,j,k}^{n+1;x} - B_{i-3/2,j,k}^{n+1;x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i-1/2,j+1,k}^{n+1;y} - B_{i-1/2,j-1,k}^{n+1;y}}{2\Delta y} + \\ & \frac{B_{i-1/2,j,k+1}^{n+1;z} - B_{i-1/2,j,k-1}^{n+1;z}}{2\Delta z}. \end{aligned}$$

\mathcal{S}_2 est obtenu en groupant les composantes du champ électrique à l'instant $t^{n+3/2}$; pour un maillage uniforme ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$), \mathcal{S}_2 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = \frac{\Delta t}{4h^2} & [-(\Omega_{i+1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i+1,j-1,k}^{n+3/2,3}) + (\Omega_{i+1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i+1,j,k-1}^{n+3/2,2}) \\ & + (\Omega_{i-1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j-1,k}^{n+3/2,3}) - (\Omega_{i-1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k-1}^{n+3/2,2}) \\ & - (\Omega_{i,j+1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j+1,k-1}^{n+3/2,1}) + (\Omega_{i+1,j+1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j+1,k}^{n+3/2,3}) \\ & + (\Omega_{i,j-1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k-1}^{n+3/2,1}) - (\Omega_{i+1,j-1,k}^{n+3/2,3} - \Omega_{i-1,j-1,k}^{n+3/2,3}) \\ & - (\Omega_{i+1,j,k+1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k+1}^{n+3/2,2}) + (\Omega_{i,j+1,k+1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k+1}^{n+3/2,1}) \\ & + (\Omega_{i+1,j,k-1}^{n+3/2,2} - \Omega_{i-1,j,k-1}^{n+3/2,2}) - (\Omega_{i,j+1,k-1}^{n+3/2,1} - \Omega_{i,j-1,k-1}^{n+3/2,1})] \\ & = 0 \end{aligned}$$

grâce à une annulation mutuelle des termes. Ainsi, si le champ magnétique à l'instant t^{n+1} est à divergence nulle, le terme \mathcal{S}_1 s'annule et on obtient $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^{n+2} = 0$. Ceci complète la présentation de notre méthode de traitement du champ magnétique pour les schémas centrés tridimensionnels avec cellules duales en diamants. Cette procédure CTCS de traitement de divergence que nous avons présentée conserve le second ordre de précision du schéma numérique de base car la discrétisation de l'équation d'induction est faite avec des différences centrées et des règles de quadrature du second ordre.

Accord des coauteurs et permission de l'éditeur

Déclaration des coauteurs d'un article

Identification de l'étudiant et du programme

Rony Touma

Ph.D. en Mathématiques Appliquées.

Description de l'article

Auteurs :

Paul Arminjon

Rony Touma

Titre :

Central Finite Volume Methods with Constrained Transport Divergence
Treatment for Ideal MHD

Journal :

Journal of Computational Physics, 204, pp. 737-759, 2005.

Déclaration du coauteur

À titre de coauteur de l'article identifié ci-dessus, je suis d'accord pour que Rony Touma inclue cet article dans sa thèse de doctorat qui a pour titre Méthodes de Volumes Finis pour les Systèmes d'Équations Hyperboliques : Applications en Aérodynamique et en Magnétohydrodynamique

Coauteur

Paul Arminjon

Date

Septembre 2005

Contribution :

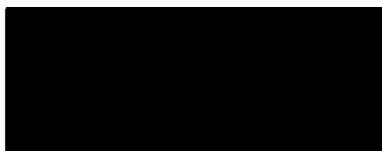
Dans le premier article, j'ai adapté le schéma numérique central bidimensionnel dont les cellules originales sont cartésiennes et les cellules duales sont en diamants, (récemment proposé par Arminjon et St-Cyr), pour résoudre les problèmes de magnétohydrodynamique idéale. Pour satisfaire la contrainte physique du champ magnétique à divergence nulle, en se basant sur la méthode du Transport sous contrainte d'Evans et Hawley, j'ai construit une nouvelle méthode (CTCS) pour traiter les composantes du champ magnétique et qui s'applique dans le cadre du schéma central numérique de base. Pour valider ces méthodes numériques j'ai considéré des problèmes classiques de magnétohydrodynamique idéale en une et deux dimensions spatiales, et j'ai comparé les résultats numériques avec d'autres résultats de la littérature. Ma contribution a été jugée fondamentale et essentielle par mon directeur de recherche et coauteur (cf. l'avis du directeur de recherche à ce sujet) ; en particulier, j'ai effectué et programmé tous les calculs.

Nom de l'étudiant

Signature

Date

Rony Touma



Septembre 2005

Chapitre 3

CENTRAL FINITE VOLUME METHODS WITH CONSTRAINED TRANSPORT DIVERGENCE TREATMENT FOR IDEAL MHD

P. Arminjon and R. Touma

Two and three-dimensional finite volume extensions of the Lax-Friedrichs (LF) and Nessyahu-Tadmor (NT) one-dimensional difference schemes were previously presented and successfully applied to several problems for nonlinear hyperbolic systems, and in particular to typical test cases for both inviscid and viscous compressible flows. These "central" schemes by-pass the resolution, at the cell interfaces, of the Riemann problems, thanks to the use of the staggered Lax-Friedrichs scheme which serves as the base scheme on which high order finite volume methods can be constructed using van Leer's MUSCL-type limited reconstruction principle. For this purpose, two dual grids are used at alternate time steps. These methods are extended here to several problems in one- and multi-dimensional ideal compressible magnetohydrodynamics using a modified version of the first author's central methods with oblique (diamond shaped) dual cells. In two dimensions the system has eight equations and solving the corresponding Riemann problem is an elaborate and time-consuming process. Central methods lead to significant computing time reductions, and the numerical experiments presented here suggest the accuracy is quite satisfactory. In order to satisfy the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, we have constructed a strategy ("CTCS") inspired from the *Constrained Transport* method of Evans and Hawley. The validity of our base

scheme and our CTCS approach is clearly confirmed by the results.

Keywords: Numerical methods ; Magnetohydrodynamics ; Central Schemes ; Non-oscillatory.

3.1. INTRODUCTION

3.1.1. Some previous work on multidimensional central schemes

Many problems in applied mathematics, physics and the engineering sciences can be formulated mathematically with the help of an idealized model based on hyperbolic partial differential equations and more specifically hyperbolic systems of conservation laws [22] or, in the case of systems with a source term, hyperbolic systems of balance laws [43]. In the past thirty years or so, and following the first fundamental papers of Godunov [23], Lax and Wendroff [34], an enormous amount of work has appeared on the subject of numerical methods for these problems and in particular for the development of non-oscillatory, high-order "shock-capturing" methods for conservation laws and their many applications, particularly for compressible flows and aerodynamics [26]; see the expository works [24, 47, 25, 22, 31, 35, 46, 42]. We apologize in advance to the many important contributors whose name could not be explicitly mentioned in this paper. With the appearance of finite volume methods, based on Godunov's principle of integrating the PDE on the discrete cells [23], and upwind methods (including Godunov's method, as well as the methods of Murman-Cole [25], Steger-Warming [25], users had the choice between many options and in particular between upwind schemes, including those based on Riemann's solvers, and central schemes with the addition of some kind of artificial viscosity to stabilize the scheme and avoid oscillations near discontinuities [26].

In another approach the Nessyahu-Tadmor one dimensional finite difference scheme ("NT") [37] led to the additional option of a Godunov-type scheme without the requirement to solve the Riemann problems at the cell interfaces, thanks to the use of a staggered form of the Lax-Friedrichs scheme as a base scheme, complemented by van Leer's "MUSCL"-type limited reconstructions for higher accuracy [50, 51]. This scheme, which uses two alternate, dual grids at alternate time steps, was recently extended to multidimensional finite volume versions for Cartesian grids [2, 28] as well as unstructured triangular [1] [3] and tetrahedral grids [7, 10]. More recently, we constructed [9] modified versions of the above schemes which avoid the time predictor step typical of the original Nessyahu-Tadmor scheme

formulation, and therefore lead to time reductions of about 40%.

Another approach to improve these schemes consists in applying Runge-Kutta methods for the integration with respect to time [38] where so-called "central Runge-Kutta schemes" have been proposed and successfully tested. In the case of Cartesian grids, we also presented [6, 8, 10] a modified scheme introducing new oblique dual cells ("diamond cells") instead of the dual cells with sides parallel to the coordinates axes originally considered in [2] for the second grid. These diamond cells were in fact the direct analogue of the quadrilateral dual cells introduced in the two-dimensional finite volume extension of the NT scheme described in [1, 3] for unstructured triangular grids. They have also been considered, independently, by Katsaounis and Levy [30]; combined with the use of standard limiters, they lead to second order accuracy and monotonicity preservation, in the case of continuous initial data.

They often lead to better L^1 and L^∞ errors, improved resolution of oblique shocks, and to higher orders of accuracy (see[8]). They also tend to prevent the crossing of discontinuities in the normal direction.

Instead of modifying the dual cells to improve the accuracy, another approach consisting of modifying the numerical flux by using an improved quadrature formula for the fluxes across the cell boundaries has recently been proposed by Lie and Noelle [36]. Their scheme is less sensitive to grid orientation effects and leads to an improved preservation of symmetries as compared with the original two-dimensional finite volume extensions of the NT scheme considered in [8]

3.1.2. Previous work on numerical MHD

The adaptation of shock capturing numerical methods to the equations of Magnetohydrodynamics (MHD) has been a very dynamic and continuous process since the early eighties; without attempting to be complete, let us mention the early work of Brackbill and Barnes [15], who proposed a "projection scheme" to satisfy the $\text{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$ constraint, involving the solution of a Poisson equation. Since Magnetohydrodynamics plays an important role in astrophysical flows, which are highly compressible, it was soon observed that Godunov-type methods might be a useful approach to solve these problems : Brio and Wu [16] applied

Roe's method to the one-dimensional MHD equations. Zachary and Colella [52] used the Engquist-Osher flux solver for one-dimensional ideal MHD, which was then extended to multi-dimensional ideal MHD in Zachary et al. [53].

Dai and Woodward [17] presented a nonlinear approximate Riemann solver specifically designed for MHD problems, and extended the piecewise parabolic method to multi-dimensional MHD problems [19]. They also made important contributions in [18] with a second order accurate difference scheme for multi-dimensional MHD using an approximate MHD Riemann solver, and an approach to maintain the divergence-free condition exactly.

Powell [41] and Powell et al. [40, 39] developed a Roe-type Riemann solver and, using a non conservative form of the MHD equations, an upwind scheme for MHD equations, the "8-wave Riemann solver method" (where the eighth wave is associated with propagation of $\text{div} \vec{\mathbf{B}}$) which proved to be numerically robust. Finally, Ryu and Jones [44], Barmin et al. [14] Tóth and Odstrčil [49] Balsara [13] all applied TVD-type methods to the MHD equations

3.1.3. Contents of the paper

In this paper we extend central Nessyahu-Tadmor-type one-dimensional or multidimensional finite volume schemes to the resolution of some problems in ideal (inviscid and non-resistive) compressible Magnetohydrodynamics. The system of governing equations features eight nonlinear hyperbolic conservation equations for mass, linear momentum, energy and the three components of the magnetic field vector $\vec{\mathbf{B}}$. Even in the case where $\vec{\mathbf{B}}$ only depends on one space variable, the system still has eight equations but can be reduced to seven equations thanks to the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. The subject of how one should best try to satisfy this constraint for multi-dimensional problems has been discussed in several important papers [48, 15, 39, 41, 40, 17, 18, 19].

The Jacobian matrix in this case is thus a 7×7 matrix of which 5 of the 7 eigenvalues may coincide [16]. Moreover, the system of MHD equations is nonconvex [20]. This gives rise to a wave structure which is substantially more complicated than that of the Euler equations for compressible flow. In particular so-called compound waves may appear, which consist of a shock and, directly attached,

a rarefaction wave. The solution of the corresponding Riemann problem, exact or approximate, is a complicated and time-consuming process. We expect the introduction of our Riemann solver-free central methods to lead to significant computing time reductions in two or three space dimensions.

i) In one dimension, we present an adaptation of the Nessyahu-Tadmor scheme to two variants of the MHD-shock tube problem [16] which leads to fairly good results, and, compared with a method based on Riemann solvers, is also likely to bring about significant computing time reductions, as was the case for the Euler and Navier-Stokes equations [2, 3, 4].

ii) We also studied, in two spatial dimensions, the 2D Riemann problem with continuation boundary conditions originally considered without the magnetic field by [45] and later, in an MHD context, by Dai-Woodward [18]. We then solve the Orszag-Tang MHD turbulence problem which describes the evolution of a compressible vortex system. The problem involves the interaction between several shock waves traveling at various speed regimes. We apply our new Constrained Transport method to numerically enforce the physical constraint on the magnetic field.

The organization of the paper is as follows. In section 2 we describe the mathematical formulation of multidimensional MHD problems. Section 3 presents a short review of the one-dimensional Nessyahu-Tadmor finite difference scheme. Section 4 gives a complete description of our two-dimensional finite volume extension of the N.T. scheme using diamond staggered dual cells. In section 5 we present the physical constraint on the magnetic field and describe several methods to satisfy the divergence-free property of the magnetic field. We then introduce our method for enforcing the $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint. One and two dimensional numerical results are presented in section 6.

3.2. IDEAL MHD EQUATIONS

When a conducting fluid moves in a magnetic field, electric fields are induced in it and electric currents flow. Due to the magnetic field, the currents may modify the flow. Conversely, the currents themselves modify the magnetic field [27], and even if the components of \mathbf{B} only depend on one variable, say x , the magnetic

forces exerted on the ions constituting the "plasma" i.e. the fluid (gas) in motion are three dimensional, thus giving rise to a three dimensional flow. The complex interaction between magnetic and fluid dynamic phenomena is well described by a set of eight equations which are : one mass conservation law, three momentum conservation laws, one energy conservation law and Faraday's (three dimensional) law for the magnetic field \mathbf{B} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + I(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0}) - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{\mu_0} \\ (\rho e + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0}) \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.2.1)$$

where ρ , \mathbf{u} , p , \mathbf{B} and e are the mass density, three-component velocity field vector, thermal pressure, three-component magnetic field vector and the specific total energy ; μ_0 is the permeability of the vacuum and I is the (3×3) identity matrix. This system of equations is completed by the equation of state $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$, where γ is the ratio of specific heats and ϵ denotes the specific internal energy. It is usual to non-dimensionalize the ideal MHD equations, by setting reference scales for the length L or the free-stream density ρ_∞ , and scaling the current magnetic field with $\sqrt{\mu_0}$, which results in the removal of μ_0 from the above system. In this paper, no scaling is applied so the permeability term of the vacuum is kept.

The two-dimensional version of the system takes the following form :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0, \quad (3.2.2)$$

where

$$\begin{aligned}
 \vec{U} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ \rho e \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, & \vec{F}(\vec{U}) &= \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + \Pi_{xx} \\ \rho u_x u_y + \Pi_{xy} \\ \rho u_x u_z + \Pi_{xz} \\ \rho u_x e + u_x \Pi_{xx} + u_y \Pi_{xy} + u_z \Pi_{xz} \\ 0 \\ \Lambda_z \\ -\Lambda_y \end{pmatrix}, \\
 \vec{G}(\vec{U}) &= \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_y u_x + \Pi_{xy} \\ \rho u_y^2 + \Pi_{yy} \\ \rho u_y u_z + \Pi_{yz} \\ \rho u_y e + u_x \Pi_{xy} + u_y \Pi_{yy} + u_z \Pi_{yz} \\ -\Lambda_z \\ 0 \\ \Lambda_x \end{pmatrix}, & & (3.2.3)
 \end{aligned}$$

where $\Lambda \equiv \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, e is the specific total energy, Π_{xx} , Π_{yy} and Π_{zz} are the diagonal elements of the total pressure tensor, Π_{xy} , Π_{xz} and Π_{yz} are the off-diagonal elements of the tensor which may be obtained from system (3.2.1) :

$$\begin{aligned}
 \Pi_{ii} &= p + \frac{1}{8\pi} (B_j^2 + B_k^2 - B_i^2). \\
 \Pi_{ij} &= -\frac{1}{4\pi} B_i B_j, \text{ for } i, j, k = x, y, z. \\
 e &= \epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \frac{1}{8\pi\rho} \mathbf{B}^2.
 \end{aligned}$$

In the case of one dimensional MHD, the divergence-free constraint reduces the differential system (3.2.2) to the form $\vec{U}_t + \vec{F}_x = 0$ with seven equations by freezing the value of the x - component of the magnetic field, giving rise to the vectors $\vec{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \rho e, B_y, B_z)$ and $\vec{F} = (\rho u_x, \rho u_x^2 + \Pi_{xx}, \rho u_x u_y + \Pi_{xy}, \rho u_x u_z + \Pi_{xz}, \rho u_x e + u_x \Pi_{xx} + u_y \Pi_{xy} + u_z \Pi_{xz}, \Lambda_z, -\Lambda_y)$. The resulting system allows three kinds of waves [32, 27, 18, 20] : fast waves, Alfvén waves and slow waves. These waves have propagation speeds denoted respectively by C_f , C_a and C_s which are

the eigenvalues of the differential system, given by

$$C_{f,s}^2 = \frac{1}{2}[(C_o^2 + C_a^2 + C_t^2) \pm \sqrt{(C_o^2 + C_a^2 + C_t^2)^2 - 4C_o^2 C_a^2}] \quad (3.2.4)$$

$$C_a = \sqrt{\rho B_x^2 / (4\pi)} \quad (3.2.5)$$

with $C_o = \sqrt{\gamma p / \rho}$, $C_t = \sqrt{\rho(B_y^2 + B_z^2) / (4\pi)}$. For a complete presentation of the eigensystem, the interested reader is referred to [27, 32]. We recall that eigenvalues are used in the CFL condition to determine the time step.

3.3. ONE-DIMENSIONAL CENTRAL SCHEMES

We consider the initial value problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, t = 0) = u_o(x) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

and the (first order accurate) Lax-Friedrichs scheme [33] written in its staggered form as

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \lambda(f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)). \quad (3.3.2)$$

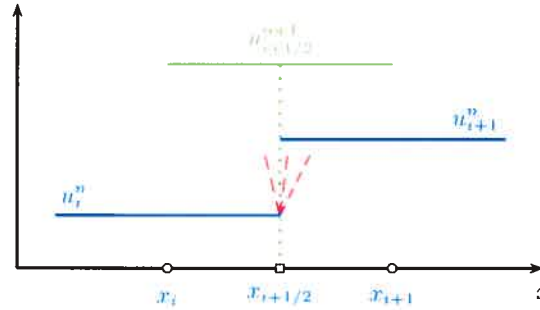


FIG. 3.1. The resolution of Riemann problems at cell interfaces is avoided when alternating from original to staggered grid

To obtain a second order accurate scheme, Nessyahu and Tadmor [37] introduced van Leer's MUSCL-type [50] piecewise linear reconstruction of the piecewise constant solution obtained at the previous step (i.e., at time t^n):

$$u(x, t^n) = L_i(x, t^n) = u_i^n + (x - x_i) \frac{u'_i}{\Delta x}, \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad (3.3.3)$$

where

$$u'_i = (u_i^n)' \simeq h \frac{\partial}{\partial x} u(x, t^n)|_{x=x_i} + O(\Delta x^2) \quad (3.3.4)$$

approximates the slope to first-order accuracy; this leads to second-order spatial accuracy. Second-order accuracy with respect to time is then obtained if we apply the midpoint rule for the time integral of the flux [37]. Nessyahu and Tadmor's formula [37] gives the solution on the staggered grid (i.e. at nodes $x_{i+1/2}$):

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{8}((u_i^n)' - (u_{i+1}^n)') - \lambda(f(u_{i+1}^{n+1/2}) - f(u_i^{n+1/2})) \quad (3.3.5)$$

where $u_i^{n+1/2}$ is an approximate value defined by an intermediate predictor step at time $t^{n+1/2}$. The solution at the nodes of the original grid $\{x_i\}$ and time t^{n+2} is obtained in a similar way.

3.4. TWO DIMENSIONAL CARTESIAN DIAMOND-STAGGERED SCHEME

We consider a two-dimensional hyperbolic system of conservation laws :

$$\vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) \equiv \vec{U}_t + \vec{f}_x + \vec{g}_y = 0 \quad (3.4.1)$$

where

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \vec{F}(\vec{U}) = (\vec{f}, \vec{g}); \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

with the initial condition $\vec{U}(x, y, 0) = \vec{U}_o(x, y)$. System (3.4.1) is assumed to be hyperbolic in the sense that any linear combination of the $n \times n$ jacobian matrices $A(\vec{U}), B(\vec{U})$

$$A(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}}, \quad B(\vec{U}) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}}$$

has n real eigenvalues and n linearly independent right and left eigenvectors. As is well known, both the one-dimensional Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes use alternate space grids. In two dimensions, we shall proceed in a similar manner starting from the original Cartesian grid with cells C_i at time t^n , alternating to the diamond dual cell $D_{i+1/2,j}$ at time t^{n+1} , and returning back to the original cell C_i of the original structured grid as shown in Fig.3.2 and Fig.3.6.

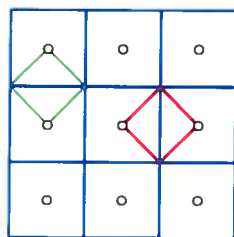


FIG. 3.2. Original data grid 'o', square cells in blue and two dual oblique cells in red

Notations

We consider for our computational domain a uniform rectangular grid with M^2 squares; the extension to arbitrary rectangular grids is straightforward, except for the initialization, which requires numerical integration, and the programming part of the resolution, where we have to proceed as in the case of a fully unstructured grid. Let $\Delta x = \Delta y = h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ denote the mesh size, $a_{i,j} = (x_i, y_j) = (ih, jh)$, $0 \leq i, j \leq M$, denote the nodes of the first grid. For any arbitrary node $a_{i,j}$ we consider the corresponding finite volume cell $C_{i,j}$ for the first grid to be the square centered at $a_{i,j}$ with edges obtained by joining the centroids of the four squares of the original grid adjacent to $a_{i,j}$ as in Fig.3.2.

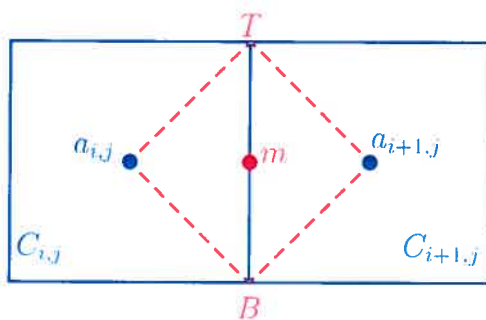


FIG. 3.3. Dual oblique cell $D_{i+1/2,j}$; case when the line through the centroids of the adjacent Cartesian cells is parallel to the x -axis

The diamond dual cells $D_{i+1/2,j}$ are obtained by first considering two successive nodes $a_{i,j}$ and $a_{i+1,j}$ of the original grid; let $[TB]$ denote the common interface of the Cartesian cells; the midpoint of $[TB]$ is m . As can be seen from Fig.3.2 there are two cases for the dual diamond cells, depending on whether the

axis joining the two nodes of the original grid used to define the diamond cell is parallel to the x -axis or the y -axis. The dual cell (in the x -direction) is defined to be the quadrilateral $a_{i,j}Ta_{i,j+1}B$ as in Fig.3.3. The dual cell $D_{i,j+1/2}$ is obtained when the edge $a_{i,j}a_{i,j+1}$ is parallel to the y -axis.

Let $\vec{U}_{i,j}^n \simeq \vec{U}(a_{i,j}, t^n)$ and $\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} \simeq \vec{U}(m, t^{n+1})$ denote the average values in the first and second grid at time t^n and t^{n+1} , respectively. Performing the first time step gives $\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1}$ while the cell values $\{\vec{U}_{i,j}^{n+2}\}$ are obtained at the end of the second time-step.

3.4.1. First time step, in the x-direction

We consider here two adjacent nodes $a_{i,j}$ and $a_{i+1,j}$, where $a_{i,j}a_{i+1,j}$ is parallel to the x -axis, and $D_{i+1/2,j}$ denotes the corresponding dual cell (Fig.3.3). We integrate equation(3.4.1) on $D_{i+1/2,j} \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}_t dA dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j}} \nabla \cdot \vec{F} dA dt. \quad (3.4.2)$$

Applying Green's theorem gives

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA &= \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

where $\vec{n} = (n_x, n_y)$ is the unit outward normal vector to the boundary of the diamond cell $\partial D_{i+1/2,j}$. The left-hand side of equation (3.4.3) defines the average value $\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1}$

$$\mathcal{A}(D_{i+1/2,j}) \vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} \simeq \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA \quad (3.4.4)$$

where $\mathcal{A}(D_{i+1/2,j})$ denotes the area of the dual cell. We split the first integral of the right-hand side of equation (3.4.3) into two integrals

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA &= \iint_{D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \\ &\quad + \iint_{D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

where $D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}$ is the triangle $a_{i,j}TB$, $D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}$ is the triangle $a_{i+1,j}TB$. Equation (3.4.5) is approximated to second-order [5] accuracy by :

$$\iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \simeq \vec{U}\left(x_i + \frac{\Delta x}{3}, y_i, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}) + \vec{U}\left(x_{i+1} - \frac{\Delta x}{3}, y_j, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i+1,j}). \quad (3.4.6)$$

The term $\mathcal{A}(D_{i+1/2,j} \cap C_{i,j}) = h^2/4$ is the area of the triangle $a_{i,j}TB$.

Applying van Leer's (MUSCL) [50] piecewise linear interpolants defined at a node $a_{i,j}$ by

$$\widetilde{\vec{U}}_{i,j}(x, y, t^n) \simeq \vec{U}_{i,j}^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \vec{U}_{i,j;x}^{lim} + \frac{y - y_j}{\Delta y} \vec{U}_{i,j;y}^{lim} \quad (3.4.7)$$

will guarantee second-order accuracy and preserve the monotonicity. Here $(\nabla \vec{U})^{lim} \equiv (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x, \vec{U}_y^{lim}/\Delta y)$ is a limited numerical gradient. Using equations (3.4.6)-(1.1.23) we obtain :

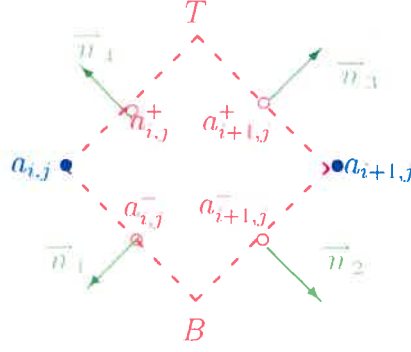
$$\iint_{D_{i+1/2,j}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \simeq \frac{h^2}{4} (\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i+1,j}^n + \frac{1}{3} \vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \frac{1}{3} \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}). \quad (3.4.8)$$

The integration of the flux-integral with respect to time is approximated to second-order accuracy with the help of the midpoint rule; the second term of the right-hand side of equation (3.4.3) is thus approximated by :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt \simeq \Delta t \oint_{\partial D_{i+1/2,j}} [\vec{f}(\vec{U}(x, y, t^{n+1/2})) n_x + \vec{g}(\vec{U}(x, y, t^{n+1/2})) n_y] d\sigma. \quad (3.4.9)$$

Equation (3.4.9) requires prediction for both \vec{U} and \vec{F} at the intermediate time $t^{n+1/2}$, at the cell interfaces. For example we may predict values at the midpoint $a_{i,j}^-$ of the line $a_{i,j}B$, Fig.3.4, using an explicit Euler approach and equation (3.4.1) :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{a_{i,j}B}^{n+1/2} &\simeq \widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \widetilde{\vec{U}}_t(a_{i,j}^-, t^n) \\ &\simeq \widetilde{\vec{U}}_{i,j}(a_{i,j}^-, t^n) - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \vec{F}|_{(a_{i,j}^-, t^n)}. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

FIG. 3.4. Diamond cell D_{ij} with outward normal vectors

With the aid of the Jacobian matrices, we rewrite equation (3.4.10) as

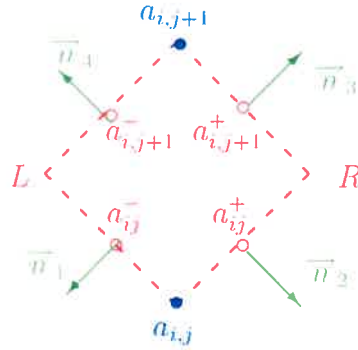
$$\vec{U}_{a_{i,j}B}^{n+1/2} \simeq \widetilde{U}_{ij}(a_{i,j}^-, t^n) - \frac{\Delta t}{2h} (A(\widetilde{U}_{ij}(a_{i,j}^-, t^n)) \vec{U}_{i,x}^{lim} + B(\widetilde{U}_{ij}(a_{i,j}^-, t^n)) \vec{U}_{i,y}^{lim}). \quad (3.4.11)$$

Using equations (3.4.3), (3.4.8) and (3.4.11), the first step in the x - *direction* can then be written in the form :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{D_{i+1/2,j}}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\vec{U}_i^n + \vec{U}_j^n) + \frac{1}{6}(\vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h} [(-\vec{f}_{a_{i,j}}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i,j}}^{n+1/2}) + (\vec{f}_{a_{i+1,j}}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i+1,j}}^{n+1/2}) \\ &\quad + (\vec{f}_{a_{i+1,j}^+}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i+1,j}^+}^{n+1/2}) + (-\vec{f}_{a_{i,j}^+}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i,j}^+}^{n+1/2})]. \end{aligned}$$

3.4.2. y-direction

Here we consider two Cartesian cells $C_{i,j}, C_{i,j+1}$ such that the line $a_{i,j}a_{i,j+1}$ is parallel to the y - *axis*. Integrating equation (3.4.1) on the domain $D_{i,j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}]$ and applying Green's theorem defines the value $\vec{U}_{i,j+1/2}^{n+1}$:

FIG. 3.5. Dual cell $D_{i,j+1/2}$ with outward normal vectors

$$A(D_{i,j+1/2})\vec{U}_{i,j+1/2}^{n+1} = \iint_{D_{i,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) dA - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i,j+1/2}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) d\sigma dt. \quad (3.4.12)$$

Splitting the first integral in the right-hand side of equation (3.4.12) and using piecewise linear interpolants as for the x - direction gives :

$$\iint_{D_{i,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) dA \simeq \frac{h^2}{4} (\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i,j+1}^n + \frac{1}{3} \vec{U}_{i,j;y}^{lim} - \frac{1}{3} \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim}). \quad (3.4.13)$$

The flux integral is handled in the same way as in the case of the x -direction. The first time step in the y -direction can thus finally be written in the form :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{D_{i,j+1/2}}^{n+1} &= \frac{1}{2} (\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i,j+1}^n) + \frac{1}{6} (\vec{U}_{i,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim}) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{h} [(\vec{f}_{a_{i,j}^+}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i,j}^+}^{n+1/2}) + (\vec{f}_{a_{i,j+1}^+}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i,j+1}^+}^{n+1/2}) \\ &\quad + (-\vec{f}_{a_{i,j+1}^-}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i,j+1}^-}^{n+1/2}) + (-\vec{f}_{a_{i,j}^-}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i,j}^-}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

3.4.3. Second time step

For the second time step, we seek an approximation of the solution on the original cell C_i (see Fig.3.6) at time t^{n+2} using as initial data the solution already obtained on dual cells at time t^{n+1} . The computation follows an approach similar to that of the first time step. Integrating equation (3.4.1) on the domain $C_i \times [t^{n+1}, t^{n+2}]$ and applying Green's theorem yields

$$A(C_i)\vec{U}_i^{n+2} = \iint_{C_i} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA - \int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \oint_{\partial C_i} (\vec{f} \nu_x + \vec{g} \nu_y) d\sigma dt \quad (3.4.15)$$

The first integral of the right hand-side of equation (3.4.15) is decomposed into the contribution of four integrals, and is approximated as :

$$\begin{aligned} \iint_{C_i} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) dA &\simeq \frac{h^2}{4} (\vec{U}_a^{n+1} + \vec{U}_b^{n+1} + \vec{U}_c^{n+1} + \vec{U}_d^{n+1}) \\ &\quad + \frac{h^2}{24} (\vec{U}_{a,x}^{lim} + \vec{U}_{b,y}^{lim} - \vec{U}_{c,x}^{lim} - \vec{U}_{d,y}^{lim}). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

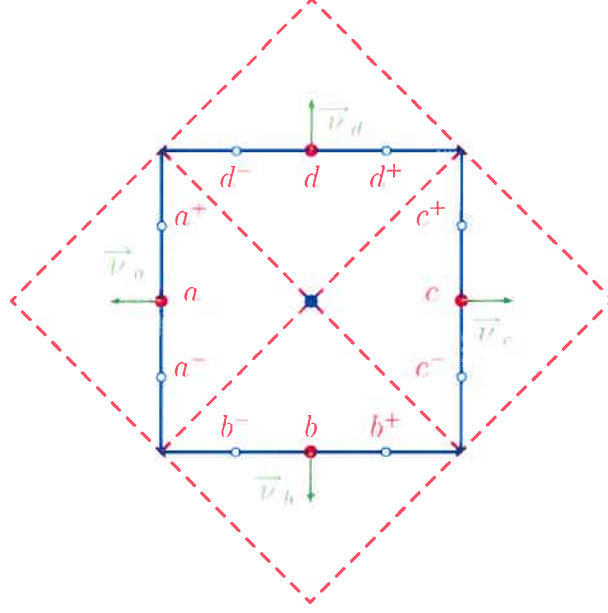


FIG. 3.6. Original square cell $C_{i,j}$ with its four adjacent oblique dual cells

For the flux integral, we proceed as before, using the midpoint rule for the time integration; we need predictions for \vec{U} and \vec{F} on the cell interfaces at the intermediate time $t^{n+3/2}$, and we also need the following normal vectors :

$$\nu_a = (-1, 0) \quad \nu_b = (0, -1) \quad \nu_c = (1, 0) \quad \nu_d = (0, 1)$$

Writing

$$\int_{t^{n+1}}^{t^{n+2}} \oint_{\partial C_i} (\vec{f} \nu_x + \vec{g} \nu_y) d\sigma dt \simeq \Delta t \oint_{\partial C_i} [\vec{f}(\vec{U}(x, y, t^{n+3/2})) \nu_x + \vec{g}(\vec{U}(x, y, t^{n+3/2})) \nu_y] d\sigma \quad (3.4.17)$$

we shall approximate the flux on the interface through the point a (Fig.3.6) as the arithmetical mean of the fluxes at points a^+ and a^- , $\vec{F}_a \simeq (\vec{F}(\vec{U}(a^+)) + \vec{F}(\vec{U}(a^-)))/2$. Predictions of the flux on the cell interfaces at the intermediate time may be computed using equation (3.4.10). The solution at time t^{n+2} takes

the following form :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{i,j}^{n+2} = & \frac{1}{4}(\vec{U}_{i-1/2,j}^{n+1} + \vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} + \vec{U}_{i,j-1/2}^{n+1} + \vec{U}_{i,j+1/2}^{n+1}) \\ & + \frac{1}{24}(\vec{U}_{i-1/2,j;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j-1/2;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1/2,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1/2;y}^{lim}) \\ & - \frac{\Delta t}{2h} [(-\vec{f}_{a^+}^{n+3/2} - \vec{f}_{a^-}^{n+3/2}) + (-\vec{g}_{b^-}^{n+3/2} - \vec{g}_{b^+}^{n+3/2}) \\ & + (\vec{f}_{c^-}^{n+3/2} + \vec{f}_{c^+}^{n+3/2}) + (\vec{g}_{d^+}^{n+3/2} + \vec{g}_{d^-}^{n+3/2})].\end{aligned}$$

3.5. THE PHYSICAL CONSTRAINT $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

It is shown in electromagnetic theory that the magnetic field vector \mathbf{B} must be solenoidal, and thus satisfy Maxwell's equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

If the initial magnetic field satisfies the divergence-free constraint ($\nabla \cdot \mathbf{B}|_{t=0} = 0$), Faraday's law guarantees that it remains divergence-free for all time; indeed, applying the divergence operator to Faraday's law gives :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= 0, \quad (\text{Faraday's law}) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{B}) &= 0.\end{aligned}$$

In a paper published in 1980, Brackbill and Barnes [15] show that non-zero divergence of the magnetic field can lead to non-physical waves and the production of negative pressures and densities in the case of ideal MHD. Several methods have been proposed to satisfy the $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint : Brackbill and Barnes' *projection method* [15], Powell's *δ -wave formulation method* [41], Evans and Hawley's *Constrained Transport method* [21], Tóth's [48] *Central Difference method* and many other methods. In this paper, our approach to enforce the $\text{div} \mathbf{B} = 0$ constraint is inspired by Evans and Hawley's Constrained Transport (CT) method [21]. The different versions of the CT method are nicely presented in [48]; we shall now present the CT method in its original staggered form in a Finite Difference context as described by Tóth [48], before introducing our new approach for Central Finite Volume methods. We present the Constrained Transport approach for a two-dimensional uniform Cartesian grid. The z-component (B_z) of the magnetic field is updated by the base scheme without modification as it does

not contribute to $\nabla \cdot \mathbf{B}$. The cell-centered magnetic field is denoted by \mathbf{B} and the magnetic field at the cell interfaces is denoted by \mathbf{b} . Evans and Hawley considered a staggered grid to maintain the divergence-free constraint of the magnetic field at the cell interfaces. In two space dimensions, the x-component (b_x) of the magnetic field is located at

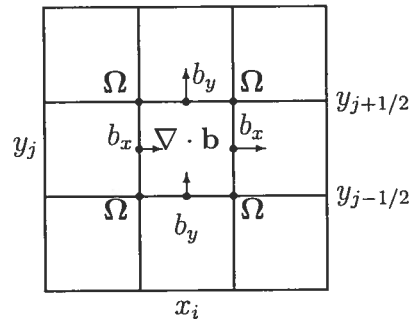


FIG. 3.7. Staggered magnetic field.

$(x_{i+1/2}, y_j)$ (the cells are being centered at points (x_i, y_j)), and the y component is located at $(x_i, y_{j+1/2})$.

Let $\Omega = \mathbf{E} \cdot \vec{k} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (0, 0, 1)^T$ denote the z-component of the electric field. The main idea of the CT scheme is to place Ω at the cell corners. The induction equation $\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$ is discretized by simple finite differences along the edges as follows :

$$b_x^{n+1}|_{i+1/2,j} = b_x^n|_{i+1/2,j} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (3.5.1)$$

$$b_y^{n+1}|_{i,j+1/2} = b_y^n|_{i,j+1/2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x}.$$

The divergence of \mathbf{b} is approximated as :

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_{i,j} = \frac{b_x|_{i+1/2,j} - b_x|_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{b_y|_{i,j+1/2} - b_y|_{i,j-1/2}}{\Delta y}. \quad (3.5.2)$$

Hence, if $\nabla \cdot \mathbf{b}^n = 0$, it is easy to verify that the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{b}^{n+1} = 0$ will be satisfied to the accuracy of round-off errors due to perfect cancelation of terms. The CT idea was combined with Godunov type schemes by Dai and Woodward. Let the superscript * denote the results of the Godunov-type base scheme. For structured grids, spatial and temporal interpolation are used to obtain

the cell corner-centered magnetic field as follows :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{8} & (\mathbf{B}_{i,j}^n + \mathbf{B}_{i+1,j}^n + \mathbf{B}_{i,j+1}^n + \mathbf{B}_{i+1,j+1}^n \\ & + \mathbf{B}_{i,j}^* + \mathbf{B}_{i+1,j}^* + \mathbf{B}_{i,j+1}^* + \mathbf{B}_{i+1,j+1}^*) \end{aligned}$$

with a similar formula for the velocity field $\mathbf{v}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}$. The z-component of the electric field (for ideal MHD) is estimated as :

$$\Omega_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = (-\overline{\mathbf{v}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \times \overline{\mathbf{B}}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \cdot \vec{k}.$$

Once Ω is obtained we update the \mathbf{b} -field centered at cell interfaces according to (3.5.1) and the components of the cell-centered magnetic field \mathbf{B}^{n+1} are approximated as follows :

$$B_x^{n+1}|_{i,j} = \frac{b_x^{n+1}|_{i+1/2,j} + b_x^{n+1}|_{i-1/2,j}}{2} \quad (3.5.3)$$

$$B_y^{n+1}|_{i,j} = \frac{b_y^{n+1}|_{i,j+1/2} + b_y^{n+1}|_{i,j-1/2}}{2}.$$

3.5.1. Constrained Transport for Central Schemes (CTCS)

Since the numerical schemes we use involve dual staggered cells, the CT approach cannot be applied directly. Here we propose an adaptation of the Constrained Transport approach to maintain the divergence-free property of the magnetic field. Suppose that the solution at time t^n is given on the original Cartesian grid and is such that $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$ i.e. :

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i,j} &= \left. \frac{\partial B_x^n}{\partial x} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial B_y^n}{\partial y} \right|_{i,j} \\ &\simeq \frac{B_x^n|_{i+1,j} - B_x^n|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{B_y^n|_{i,j+1} - B_y^n|_{i,j-1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Performing a first time step, we obtain the solution (at time t^{n+1}) on the dual staggered grid. Let \mathcal{B}^* denote the magnetic field part of this solution on the staggered cells ($D_{i+1/2,j}$ -type) in the x-direction. To enforce the $\nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1} = 0$

constraint, we first compute the z-component of the electric field ($\Omega = \mathbf{E} \cdot \vec{k}$) as :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathcal{B}^*)_{i+1/2,j} + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^n}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

We then discretize the induction equation using central differences and update the magnetic field at time t^{n+1} as follows :

$$\mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+1/2,j} = \frac{B_x^n|_{i,j} + B_x^n|_{i+1,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \quad (3.5.6)$$

$$\mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j} = \frac{B_y^n|_{i,j} + B_y^n|_{i+1,j}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \quad (3.5.7)$$

We shall prove that if $\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$ on the original grid, the magnetic field \mathcal{B} at time t^{n+1} on the dual cells $D_{i+1/2,j}$ will also satisfy the divergence-free property, i.e.

$$\frac{\mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+3/2,j} - \mathcal{B}_x^{n+1}|_{i-1/2,j}}{2\Delta x} + \frac{\mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j+1} - \mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j-1}}{2\Delta y} = 0. \quad (3.5.8)$$

Using equations (3.5.6)-(3.5.7) we compute the following quantities :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x^{n+1}|_{i+3/2,j} &= \frac{B_x^n|_{i+1,j} + B_x^n|_{i+2,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \\ \mathcal{B}_x^{n+1}|_{i-1/2,j} &= \frac{B_x^n|_{i-1,j} + B_x^n|_{i,j}}{2} - \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \\ \mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j+1} &= \frac{B_y^n|_{i,j+1} + B_y^n|_{i+1,j+1}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1}^{n+1/2}}{2\Delta x} \\ \mathcal{B}_y^{n+1}|_{i+1/2,j-1} &= \frac{B_y^n|_{i,j-1} + B_y^n|_{i+1,j-1}}{2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j-1}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

which we then substitute into equation (3.5.8); we obtain :

$$\nabla \cdot \mathcal{B}^{n+1}|_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i,j} + \nabla \cdot \mathbf{B}^n|_{i+1,j}) \equiv 0. \quad \blacksquare \quad (3.5.9)$$

We update the magnetic field at time t^{n+1} on the $D_{i,j+1/2}$ cells in a similar manner; using the base scheme we perform (with the updated magnetic field components) a second time step to obtain the solution on the original Cartesian grid. Then we update the magnetic field obtained at time t^{n+2} which is also

denoted by \mathbf{B}^* . The z-component of the electric field is then computed in a way specially designed to satisfy the divergence-free property of the magnetic field, from :

$$\mathbf{E}_{i,j}^{n+3/2} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^{n+3/2} = -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+2} \times \mathbf{B}^*)_{i,j} + \frac{1}{4} \{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i-1/2,j}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j-1/2}^{n+1} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1/2}^{n+1} \} \right]. \quad (3.5.10)$$

We discretize the induction equation on the Cartesian grid :

$$B_x^{n+2}|_{i,j} = \frac{1}{4} \{ B_x^{n+1}|_{i-1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i+1/2,j} + B_x^{n+1}|_{i,j-1/2} + B_x^{n+1}|_{i,j+1/2} \} - \Delta t \frac{\Omega_{i,j+1}^{n+3/2} - \Omega_{i,j-1}^{n+3/2}}{2\Delta y} \quad (3.5.11)$$

$$B_y^{n+2}|_{i,j} = \frac{1}{4} \{ B_y^{n+1}|_{i-1/2,j} + B_y^{n+1}|_{i+1/2,j} + B_y^{n+1}|_{i,j-1/2} + B_y^{n+1}|_{i,j+1/2} \} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1,j}^{n+3/2} + \Omega_{i-1,j}^{n+3/2}}{2\Delta x} \quad (3.5.12)$$

As before, we discretize $\nabla \cdot \mathbf{B}_{ij}^{n+2}$ using central differences :

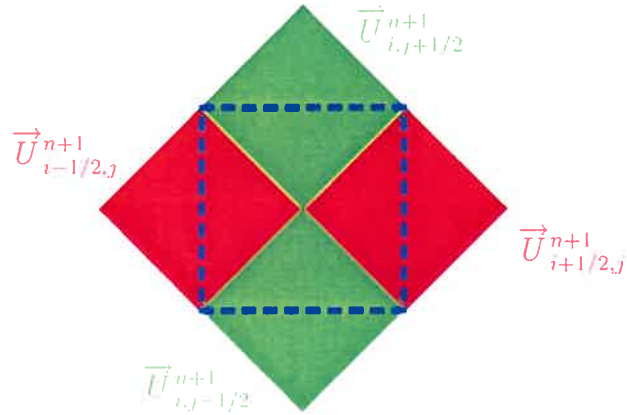


FIG. 3.8. We use the numerical data given on the original Cartesian cell and those on the four staggered dual cells to approximate the value of the z-component Ω of the electric field at time $t^{n+3/2}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{jk}^{n+2} \simeq \frac{B_x^{n+2}|_{j+1,k} - B_x^{n+2}|_{j-1,k}}{2\Delta x} + \frac{B_y^{n+2}|_{j,k+1} - B_y^{n+2}|_{j,k-1}}{2\Delta y}. \quad (3.5.13)$$

We easily prove that the therewith updated magnetic field satisfies the divergence-free constraint

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{ij}^{n+2} = 0 + \frac{1}{4} [\nabla \cdot \mathcal{B}_{i-1/2,j}^{n+1} + \nabla \cdot \mathcal{B}_{i+1/2,j}^{n+1} + \nabla \cdot \mathcal{B}_{i,j-1/2}^{n+1} + \nabla \cdot \mathcal{B}_{i,j+1/2}^{n+1}] = 0$$

if the physical constraint was satisfied at the previous time.

3.6. NUMERICAL RESULTS

In this section, we present several numerical experiments we have performed for both one and two- dimensional problems.

3.6.1. 1-dimensional test problems

For the first set of numerical tests in one dimensional space, we have chosen the shock tube problem [44]. We consider the interval $[-1,1]$ of the x -axis, let $\gamma = 5/3$, $B_x = 2$ and consider the initial data for the Riemann problem at $x = 0$, $U_r = [0.989112, -0.013123, 0.026933, 0.010037, 4.024421, 2.002600, 0.971588]$ and $U_l = [1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6, 2.0, 0.95]$ with $U = [\rho, u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p]$. This first test case features seven discontinuities. We have considered a grid with 1000 mesh-points. The solution is computed at time $t = 0.25$. We compared our numerical results with those obtained by Ryu and Jones [44]. Fig.3.9,3.10 show a very good agreement between the numerical and reference solutions (which were obtained [44] with 10 000 mesh points) when the MC limiter is applied with $\theta = 2$. The agreement is not quite so good when we use the minmod limiter.

Next we have considered a Riemann problem with a compound wave, which consists of a shock and, directly attached, a rarefaction wave[16]; we recall that compound waves cannot arise in solutions of the Euler equations of gas dynamics. We consider the Riemann problem set at $x = 0$ in the interval $[-1,1]$, along with the initial data $U_l = [1, 0, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 0, 1]$, $U_r = [0.125, 0, 0, 0, -\sqrt{4\pi}, 0, 0.1]$ and $B_x = 0.75\sqrt{4\pi}$. The solution is computed at time $t = 0.25$ with a CFL condition of 0.485.

We compared our numerical results with those obtained by Brio and Wu [16]. As with the previous test, the agreement with [16] is particularly good when the MC-2 limiter is applied (see Figs.3.11 and3.12).

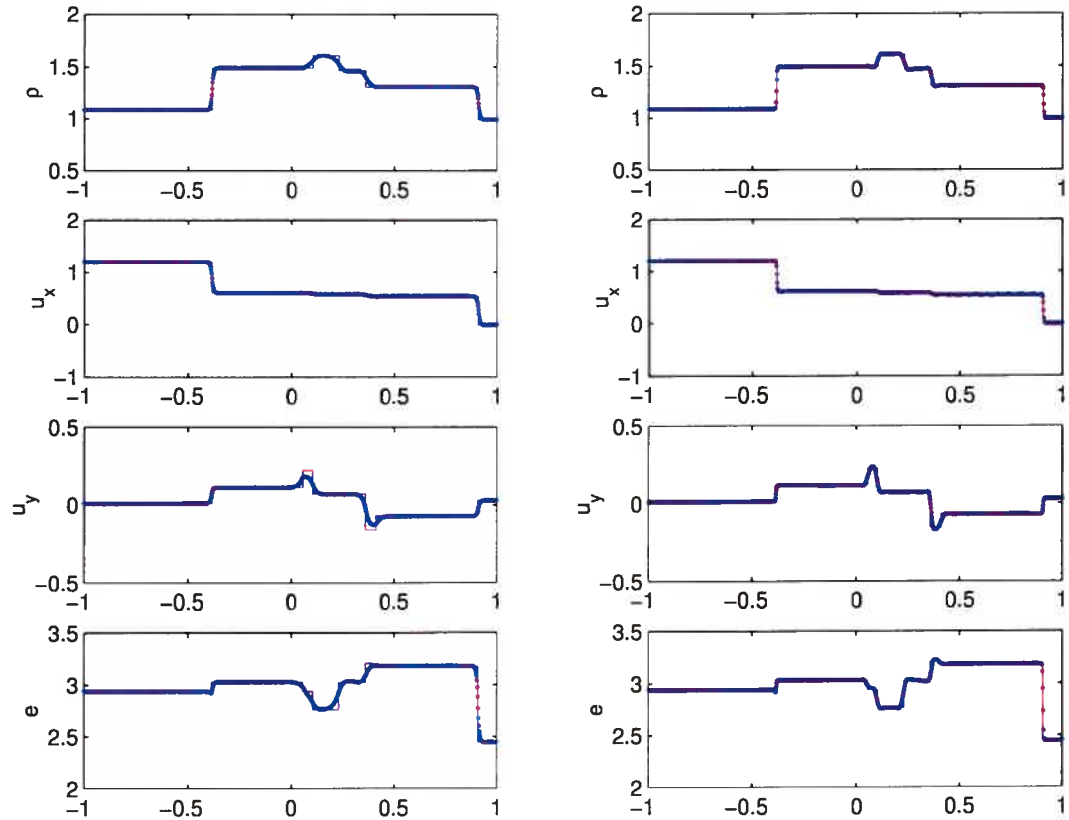


FIG. 3.9. First test case, minmod limiter at left, MC-2 limiter at right

Notice that for the above two tests, the reference solutions are available from the following web site :

<http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/anume/testcase/MHD/>

3.6.2. 2-dimensional test problems

We solved a 2D-adaptation of the one-dimensional MHD shock tube problem, involving a compound wave. The computational domain is the rectangle $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. The initial conditions feature a shock along the axis $x = 0$ with the following data : $U_l = [1, 0, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 0, 1]$, $U_r = [0.125, 0, 0, 0, -\sqrt{4\pi}, 0, 0.1]$, and $B_x = 0.75\sqrt{4\pi}$. The solution is computed at time $t = 0.25$ with a CFL condition of 0.485. The computations were performed with an MC- θ ($\theta = 1.5$) limiter. Fig.3.13 shows a very good agreement of the numerical solution (400 data points dotted in blue) with the reference solution of the corresponding one-dimensional problem obtained from 10000 data points (solid red line), [16].

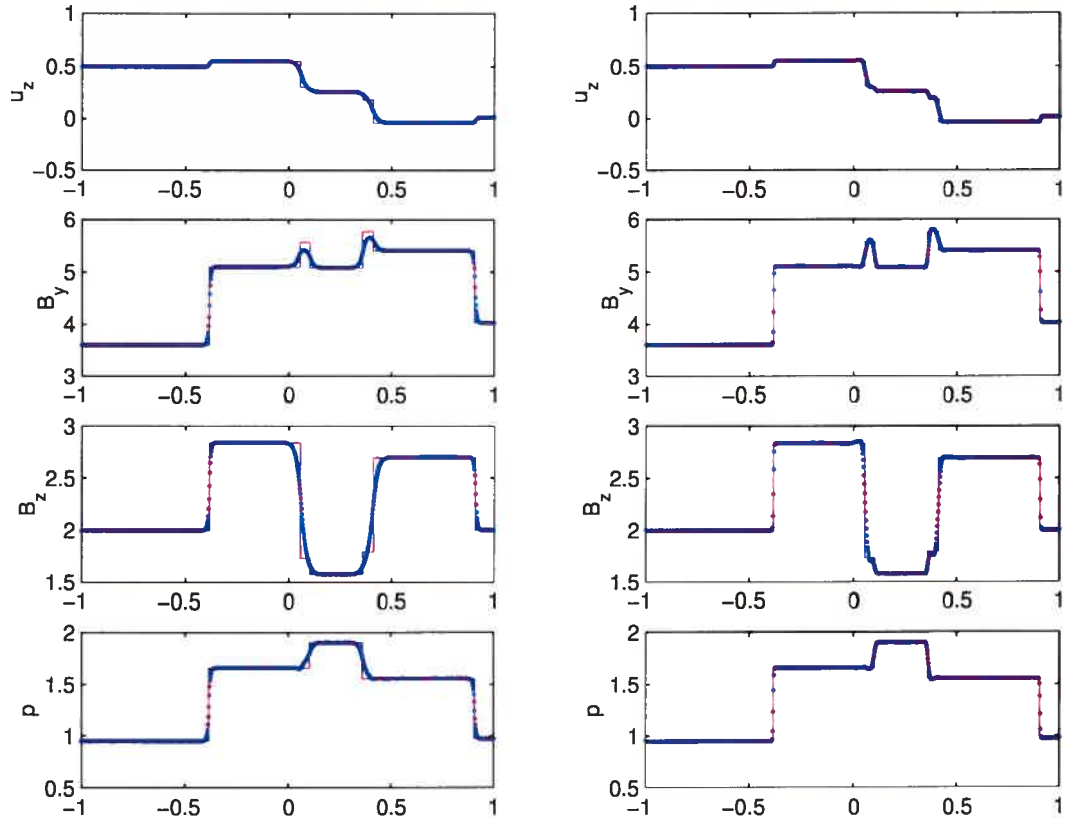


FIG. 3.10. First test case (continued), minmod limiter at left, MC-2 limiter at right

For our next 2D test, we shall apply our new CTCS method to satisfy the divergence-free constraint. We consider here the Orszag-Tang MHD turbulence problem, which describes the evolution of a compressible vortex system, which is a complex phenomenon involving the interactions between several shock waves generated during the evolution of the vortex system and traveling at different propagation speeds [48],[18]. The initial conditions for our example are : $\rho(x, y) = \rho_0$, $p(x, y) = p_0$, $\mathbf{u}(x, y) = -\sin(2\pi y) \mathbf{i} + \sin(2\pi x) \mathbf{j}$, $\mathbf{B}(x, y) = -\sin(2\pi y) \mathbf{i} + \sin(4\pi x) \mathbf{j}$, with $\rho_0 = 25/(36\pi)$ and $p_0 = 5/(12\pi)$. \mathbf{i} and \mathbf{j} are unit vectors in the x - and y - directions. Fig.3.14, 3.15 show the mass density and pressure contours, respectively, at time $t = 0.5$. Fig.3.16 shows the mass density contours, at time $t = 2$. The agreement with the results of Jiang and Wu [29], who applied Brackbill and Barnes' projection scheme [15] to enforce the magnetic field

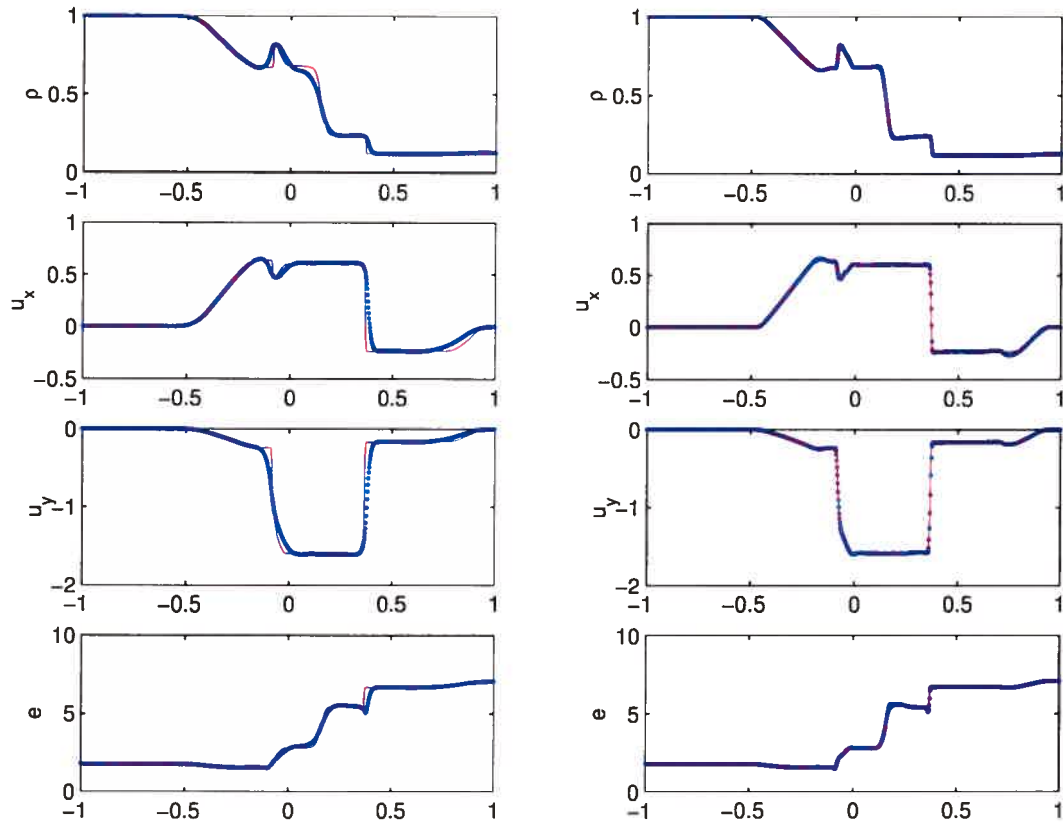


FIG. 3.11. Second test case, minmod limiter at left, MC-2 limiter at right

constraint, is excellent. The divergence values of the magnetic field on the computational domain remain of the order of $10e-14$ throughout the calculations, thus confirming the efficiency of our method.

For the final two-dimensional example we consider a Riemann problem [18], with four initial states for (ρ, p, u_x, u_y) given by $(1, 1, 0.75, 0.5)$ for $x > 0$ and $y > 0$, $(2, 1, 0.75, 0.5)$ for $x < 0$ and $y > 0$, $(1, 1, -0.75, 0.5)$ for $x < 0$ and $y < 0$ and $(3, 1, -0.75, -0.5)$ for $x > 0$ and $y < 0$. We consider a uniform initial magnetic field $\mathbf{B} = (2, 0, 1)$. The solution is computed at time $t = 0.8$ on a 400×400 grid.

Here again we have applied our CTCS method to enforce the divergence-free constraint for the magnetic field, which in this case gave divergence values within a $10 e-14$ threshold. Fig.3.18, 3.19 show the contour lines for the mass density and the magnitude of the magnetic field, respectively.

The contour lines in Fig.3.18 are in very good agreement with those appearing in [18].

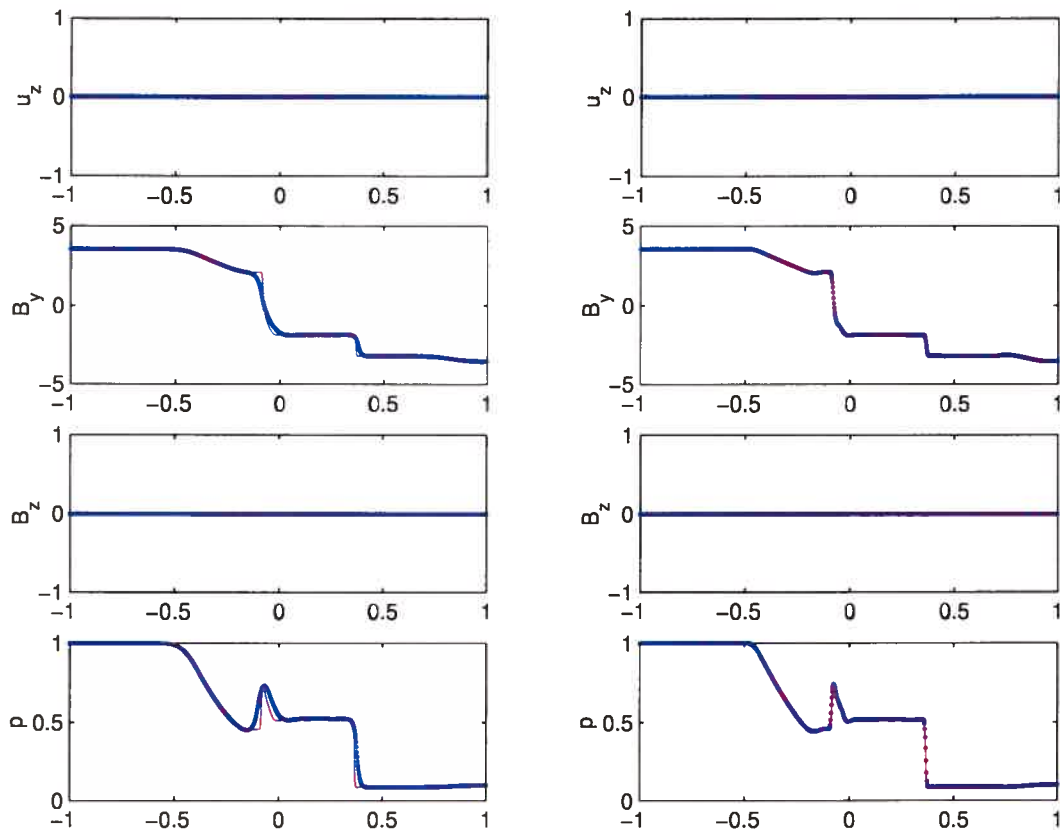


FIG. 3.12. Second test case (continued), minmod limiter at left, MC-2 limiter at right

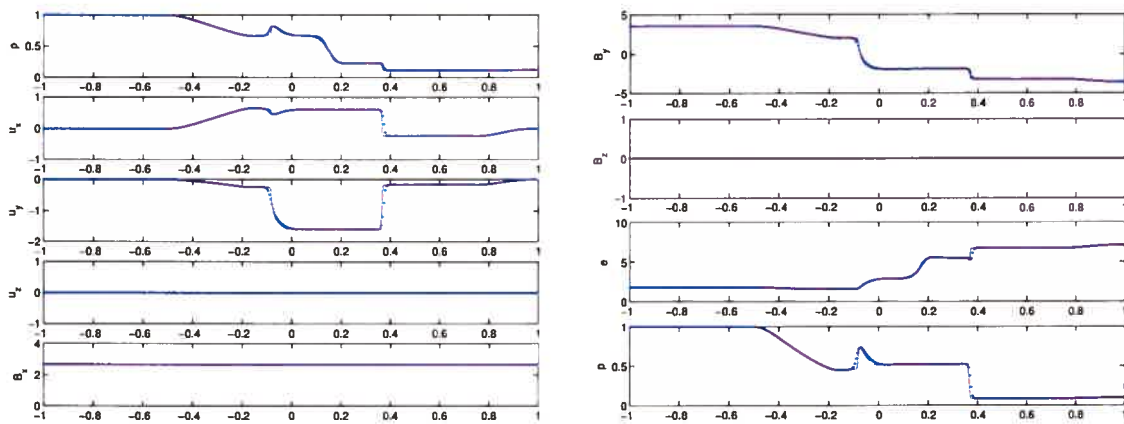


FIG. 3.13. The profile of the solution of the 2D shock tube problem compared with the solution of the one dimensional corresponding problem

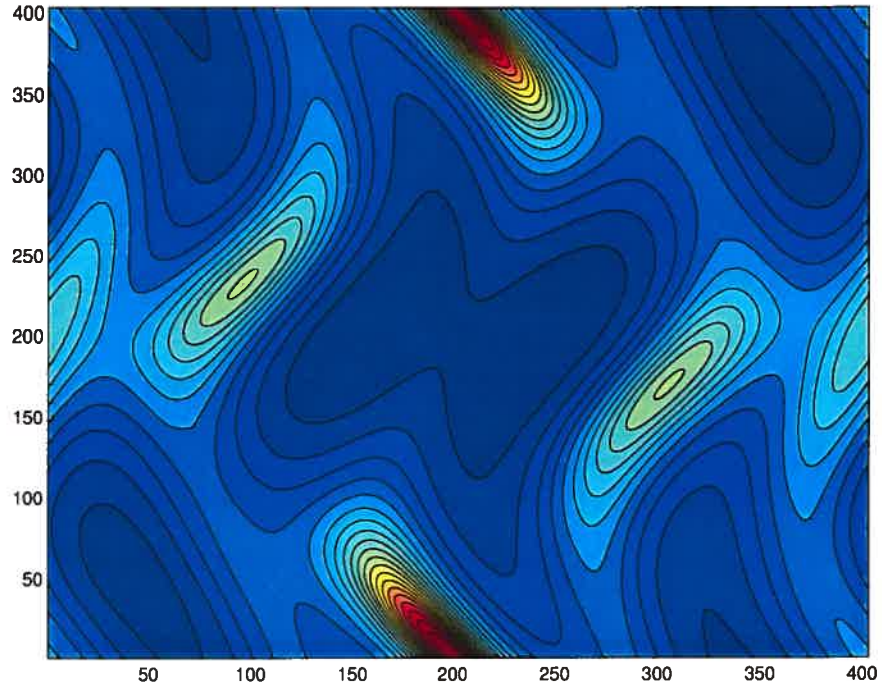


FIG. 3.14. The mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 0.5$

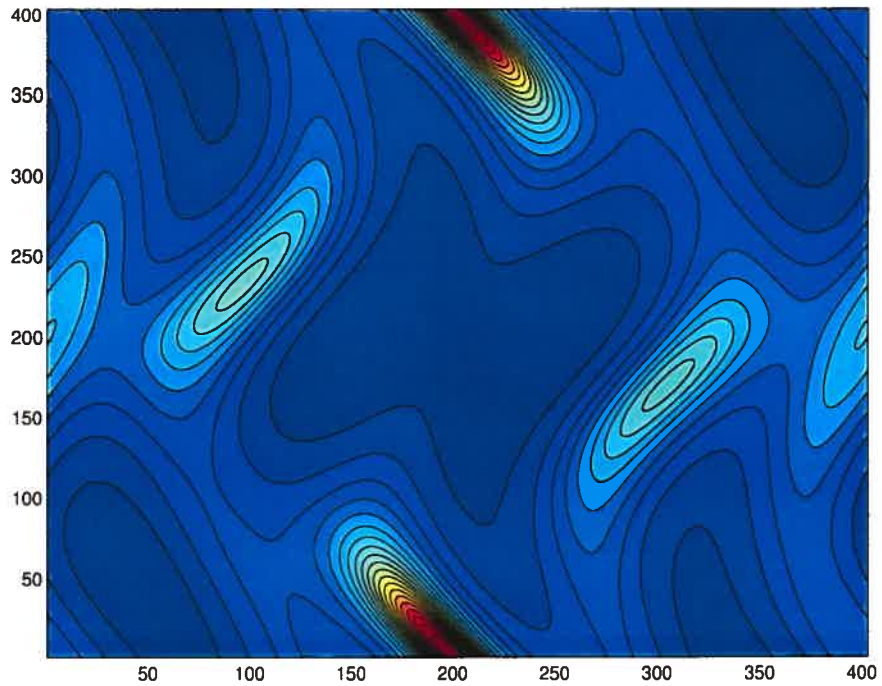


FIG. 3.15. The pressure contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem

3.7. CONCLUSION

In this paper, we have extended our Nessyahu-Tadmor-type central finite volume methods to one and two-dimensional problems in Magnetohydrodynamics,

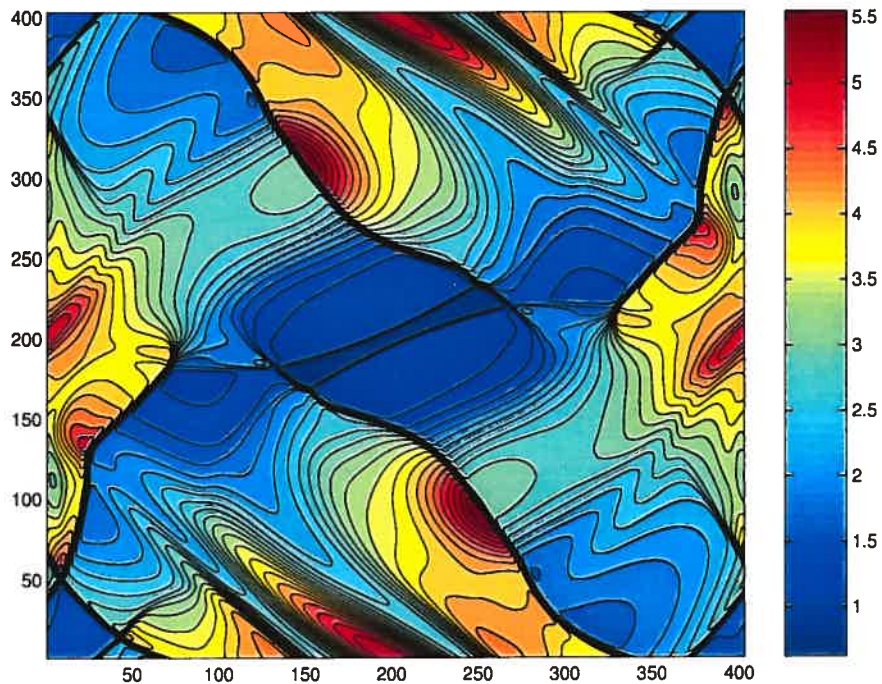


FIG. 3.16. The mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$

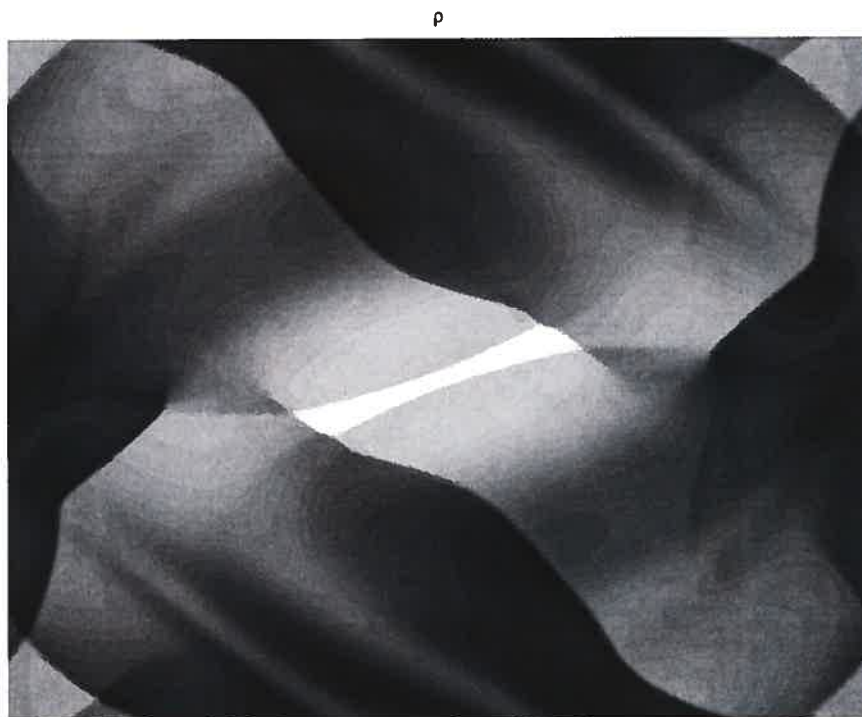


FIG. 3.17. Shaded gray scale mass density contour lines of the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$

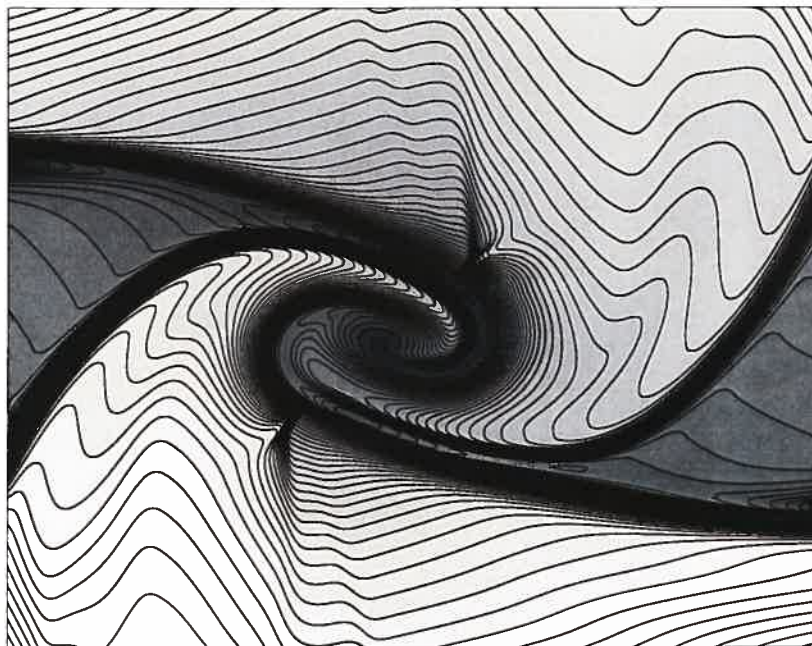


FIG. 3.18. Shaded, logarithmic scaled, contour lines of the mass density for the 2 dimensional MHD Riemann problem at time $t = 0.8$

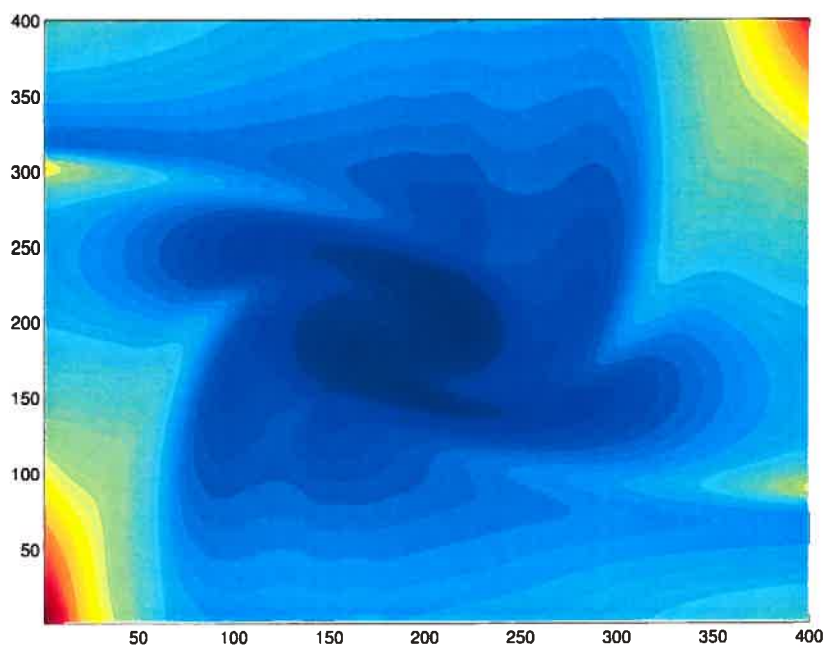


FIG. 3.19. Shaded contour lines of the magnitude of the magnetic field for the 2 dimensional MHD Riemann problem at time $t = 0.8$

using Cartesian grids for the cells of the original grid, and our previously introduced diamond cells for the dual grid. The fact that the resolution of the Riemann

problems at the cell interfaces is by-passed by central schemes has led in all previous numerical experiments performed for scalar conservation equations [2], Euler's equations [3], and Navier-Stokes equations [4], to very substantial computing time reductions. It is therefore anticipated that they will also lead to significant computing time reductions in the case of MHD problems where the solution of the Riemann problems is even more time demanding. This will be illustrated in a forthcoming paper. Inspired from the constrained transport method of Evans and Hawley, we have constructed our CTCS approach to maintain the divergence-free property of the magnetic field for the two-dimensional case. This CTCS method applies indifferently to schemes with Cartesian dual cells or oblique diamond dual cells. A comparison between the CTCS methods for Cartesian and for diamond dual cells will appear in [12].

Our numerical results show the high potential of our base scheme and the CTCS method, which led to divergence values within the range of $10e-13$, $10e-14$ for the problems we considered in this paper. It is important to note that the CTCS approach was also applied in the case of staggered schemes such that the dual cells are Cartesian [12]. In our current work, we are applying our method to a few more two-dimensional reference test cases appearing in the literature, as well as several three-dimensional problems.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I, pp. 85-88, 1995.
- [2] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, ed. M. Hafez and K. Oshima, Vol. IV, pp. 7-14, 1995.
- [3] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, 1-22, 1997.
- [4] P. ARMINJON AND A. MADRANE, *Staggered mixed finite volume/finite element method for Navier-Stokes equations*, AIAA J., 37, pp. 1558-1571, 1999.
- [5] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No.3, pp. 738-771, 1999.
- [6] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10), 1999.
- [7] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, in Proceed. 8th Int. Conf. on Hyp. Prob., ed. H. Freistuehler and G. Warnecke, Birkhauser, Int. Series of Num. Math. Vol. 140, pp. 59-68, ISBN 3-7643-6711-3, 2001.

- [8] P. ARMINJON, A. ST-CYR, A. MADRANE, *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, Applied Numerical Mathematics, Vol 40/3, pp 367-390, 2002.
- [9] P. ARMINJON AND A. ST-CYR, *Nessyahu-Tadmor-type central finite volume methods without predictor for 3D Cartesian and unstructured tetrahedral grids*, Applied Numerical Mathematics, 46, pp. 135-155, 2003.
- [10] P. ARMINJON AND R. TOUMA, *New three-dimensional structured diamond-staggered finite volume methods*, CRM Res. Rep. december 2003.
- [11] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *A Central Diamond-Staggered Dual Cell, Finite Volume Method For Ideal Magnetohydrodynamics*, in Proc. ICCFD3, Int. Conf. in Comp. Fluid Dynamics, Toronto, July 2004.
- [12] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *Central Schemes with Constrained Transport Divergence Treatment for Ideal MHD*, in : Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, Proc. 10th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Osaka, September 2004.
- [13] D.S. BALSARA, *Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics*, Astrophys. J. Suppl. 116, 133, 1998.
- [14] A. A. BARMIN, A. G. KULIKOVSKIY, AND N. V. POGORELOV, *Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics*, J. Comput. Phys. 126, 77, 1996.
- [15] J. U. BRACKBILL AND D. C. BARNES, *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comput. Phys. 35, 426 1980.
- [16] M. BRIO, C.C. WU, *An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, J.Comp.Physics, (75)2, pp. 400-422, 1988.
- [17] W. DAI AND P. R. WOODWARD, *An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*, J. Comput. Phys. 111, 354-372, 1994.
- [18] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydro-dynamical Equations*, J.Comp.Physics, 142, pp. 331-369, 1998.
- [19] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *Extension of the piecewise parabolic method to multidimensional ideal magnetohydrodynamics*, J.Comp. Physics, 115, pp. 485-513, 1994.

- [20] A. H. DE STERCK, *Numerical simulation and analysis of magnetically dominated MHD bow shock flows with applications in space physics*, Ph.D. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 1999.
- [21] C. R. EVANS AND J. F. HAWLEY, *Simulation of magnetohydrodynamic flows : A constrained transport method*, *Astrophys. J.* 332, 659, 1988.
- [22] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, SPRINGER, 1996.
- [23] S.K. GODUNOV. *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics*, *MATH. SB.*, 47(89), 271-306, 1959.
- [24] S.K. GODUNOV, A. ZABRODINE, M. IVANOV, A. KRAÏKO, AND G. PROKOPOV, *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, traduit du russe, EDITIONS MIR, MOSCOU, 1979.
- [25] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol I and II*, WILEY, NEW YORK, 1988-1990.
- [26] A. JAMESON, *Essential elements of computational algorithms for aerodynamic analysis and design*, ICASE REPORT, 97-68. 1997.
- [27] A. JEFFREY AND T. TANIUTI, *NON-LINEAR WAVE PROPAGATION*, Academic Press, New York, 1964.
- [28] G. JIANG AND E. TADMOR, *Non-oscillatory Central Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*, *SIAM J. on Scientific Computing*, 19, pp.1892-1917, 1998.
- [29] G. JIANG AND C.C. WU, *A High-Order WENO Finite Difference Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, *J. Comp. Phys.* 150 561-594, 1999.
- [30] T. KATSAOUNIS AND D. LEVY, *A Modified Structured Central Scheme for 2D Hyperbolic Conservation Laws*, *Applied Mathematics Letters* 12(6), pp. 89-86, 1999.
- [31] D. KRÖNER, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, in Wiley-Teubner Series, Adv. Numer. Math., Wiley, Stuttgart, 1997.
- [32] L. D. LANDAU AND E. LIFSHITZ, *ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIA*, Pergamon, New York, 1960.
- [33] P.D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation*, *Comm. Pure and Applied Math.*7, pp. 159-193, 1954.
- [34] P.D. LAX AND B. WENDROFF, *Systems of conservation laws*, *Comm. Pure and Applied Math.*13, pp. 217-237, 1960.

- [35] R. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2002.
- [36] K.-A. LIE AND S. NOELLE, *Remarks on high-resolution non-oscillatory central schemes for multidimensional systems of conservation laws. Part I : An improved quadrature rule for the flux computation*, Preprint no. 679, Sonderforschungsbereich 256, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitaet, Bonn, Germany, 2000.
- [37] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463, 1990.
- [38] L. PARESCHI, G. PUPPO, G. RUSSO, *Central Runge-Kutta schemes for Conservation Laws*, preprint submitted to SIAM J.Sci. Comp. 2003.
- [39] K.G. POWELL, P.L. ROE, T.J. LINDE, T.I. GOMBOSI AND D.L. DE ZEEUW, *A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics*, J. Comput. Phys. 154, 284 1999.
- [40] K. G. POWELL, P. L. ROE, R. S. MYONG, T. GOMBOSI, AND D. DE ZEEUW. *An Upwind Scheme for Magnetohydrodynamics*, AIAA Paper 95-1704-CP, 1995.
- [41] K. G. POWELL, *An Approximate Riemann Solver for MHD*, ICASE NASA, Langley Research Center, Contract Rep. 194902, ICASE Rep. 94-25, Hampton, VA, 1994.
- [42] R.D. RICHTMYER AND K.W. MORTON, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, INTERSCIENCE, 1967.
- [43] G. RUSSO, *Central schemes and Systems of Balance Laws*, in Hyp. Part. Diff. Eq., Theo., Num. and App., ed. by A.Meister and I.Struckmeier, Vieweg, Wiesbaden (D), 2002.
- [44] D. RYU AND T.W. JONES, *Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics : Algorithm and tests for one-dimensional flow*, Astrophys. J. 442, 228, 1995.
- [45] C. W. SCHULZ-RINNE, J. P. COLLINS AND H. M. GLAZ, *Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics*, SIAM J. Sci. Comp., 14, pp. 1394-1414, 1993.
- [46] D. SERRE, *Systèmes de lois de conservation*, Diderot, editors, Paris, Vol. I and II, 1996.
- [47] G.A. SOD, *Numerical Methods in Fluid Dynamics* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1985.

- [48] G. TÓTH, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes*, J. COMP. PHYSICS, 161, PP. 605-652, 2000.
- [49] G. TÓTH AND D. ODSTRČIL, *Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems*, J. COMPUT. PHYS. 128, 82, 1996.
- [50] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, J. COMP. PHYSICS, 23, PP. 276-299, 1977.
- [51] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. COMP. PHYSICS, 32, PP. 101-136, 1979.
- [52] A. L. ZACHARY, AND P. COLELLA, *A high-order Godunov method for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, J. COMPUT. PHYS., 99, PP. 341-347, 1992.
- [53] A. L. ZACHARY, A. MALAGOLI, AND P. COLELLA, *A higher-order Godunov method for multi-dimensional ideal magnetohydrodynamics*, SIAM J. SCI. COMPUT., 15 263-284, 1994.

Accord des coauteurs et permission de l'éditeur

Déclaration des coauteurs d'un article

Identification de l'étudiant et du programme

Rony Touma

Ph.D. en Mathématiques Appliquées.

Description de l'article

Auteurs :

Rony Touma

Paul Arminjon

Titre :

A CTCS divergence treatment for ideal MHD

Journal :

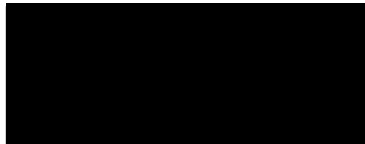
Proceeding Tenth International Conference on Hyperbolic Problems :Theory, Numerics, Applications, HYP2004, Osaka-Japan, September 2004 (in press).

Déclaration du coauteur

À titre de coauteur de l'article identifié ci-dessus, je suis d'accord pour que Rony Touma inclue cet article dans sa thèse de doctorat qui a pour titre Méthodes de Volumes Finis pour les Systèmes d'Équations Hyperboliques : Applications en Aérodynamique et en Magnétohydrodynamique

Coauteur

Paul Arminjon



Date

Septembre 2005

Contribution :

Le second article (huit pages) est un compte-rendu présenté dans le cadre de la dixième conférence internationale sur les problèmes hyperboliques organisée à Osaka au Japon. Une analyse plus détaillée de la matière présentée dans ce proceeding ainsi que toutes les preuves se trouvent dans le troisième article. Ma contribution dans ce travail consiste en la présentation d'une nouvelle approche bi-dimensionnelle pour résoudre des problèmes de magnétohydrodynamique (MHD) idéale avec les schémas centrés. En effet, j'ai adapté le schéma central dont les cellules originales et duales sont cartésiennes, originalement proposé par Arminjon et al., pour résoudre des problèmes de MHD. Pour satisfaire la contrainte physique du champ magnétique à divergence nulle, j'ai construit la version de la méthode CTCS qui s'applique avec le schéma numérique de base. Ensuite pour valider ces méthodes numérique, j'ai résolu les mêmes problèmes que ceux considérés au premier article et j'ai présenté une comparaison quantitative des résultats. Ensuite j'ai résolu numériquement d'autres problèmes de la MHD et présenté les nouveaux résultats. Ma contribution a été jugée fondamentale et essentielle par mon directeur de recherche et coauteur (cf. l'avis du directeur de recherche à ce sujet); en particulier, j'ai effectué et programmé tous les calculs.

Nom de l'étudiant

Signature

Date

Rony Touma



Septembre 2005

Chapitre 4

A CTCS DIVERGENCE TREATMENT FOR IDEAL MHD

R. Touma and P. Arminjon

4.1. ABSTRACT

In this paper we extend central finite volume schemes to two-dimensional problems in ideal compressible magnetohydrodynamics ("MHD"). In 2 space dimensions, the problem features 8 nonlinear hyperbolic equations, and solving the Riemann problems typically generated by finite volume methods at the cell interfaces is an elaborate and time-consuming process. Central methods, which are based on the staggered form of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes, by-pass the resolution of these Riemann problems, thus leading to significant reductions in computing times. In this paper, we attempt to show the feasibility of these "Central Finite Volume methods" for MHD problems. We also introduce our adaptation to central schemes of the constrained transport method to satisfy the $\text{div}\cdot\mathbf{B} = 0$ constraint.

4.2. INTRODUCTION

In MHD problems, the interaction between magnetic and fluid dynamic phenomena can be described by a set of eight equations (conservation of mass, momentum and energy, and Faraday's law for the magnetic field \mathbf{B}) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + I(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ (\rho e + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.2.1)$$

where ρ , \mathbf{u} , p , \mathbf{B} and e are the mass density, velocity field vector, thermal pressure, magnetic field vector and the specific total energy. I is the (3×3) identity matrix. This system of equations is completed by the equation of state $p = (\gamma - 1)\rho e$, where γ is the ratio of specific heats and e denotes the specific internal energy. In this paper, we extend our Nessyahu-Tadmor-type central finite volume methods to one and two-dimensional problems in Magnetohydrodynamics, using Cartesian grids for both the original and staggered dual cells. An important feature of MHD problems is the necessity, for the magnetic field, to satisfy the constraint $\text{div} \mathbf{B} = 0$. Due to the accumulation of round-off and truncation errors the computed magnetic field usually fails to satisfy the solenoidal constraint. As observed by Brackbill and Barnes [4], this can lead to non-physical waves, negative pressures and densities and thus to the breakdown of the scheme.

We have constructed appropriate adaptations of Evans and Hawley's Constrained Transport method to satisfy this constraint. Our numerical results compare favourably with corresponding results in the recent literature and thus show the accuracy, robustness and potential of our methods.

4.3. TWO-DIMENSIONAL CENTRAL SCHEMES

Inspired from the staggered Lax-Friedrichs scheme, Nessyahu and Tadmor [9] presented their new non-oscillatory central scheme for solving one-dimensional systems of hyperbolic conservation laws. Thanks to the use of two staggered dual grids, the NT scheme by-passes the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces. To achieve second-order accuracy both in time and space,

Nessyahu and Tadmor considered MUSCL-type piecewise linear solutions on the computational cells. Later in 1995, Arminjon et al. [1, 2] presented finite volume two-dimensional extensions of NT's one-dimensional scheme for solving hyperbolic systems of conservations laws

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) &= 0, & \text{with } \vec{F} &= (\vec{f}, \vec{g}) \\ \vec{U} &= \vec{U}(x, y, t) & \text{with the initial data } \vec{U}(x, y, t=0) &= \vec{U}_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

for both Cartesian and unstructured triangular two-dimensional grids. In the Cartesian case, the computational domain is uniformly discretized using Cartesian cells $C_{i,j}$ centered at the nodes (x_i, y_j) . The scheme requires a dual staggered grid whose cells $D_{i+1/2, j+1/2}$ are also Cartesian cells but centered at the nodes $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$. The geometry of the scheme is well described in Fig.4.1 where the original cells $C_{i,j}$ are the blue squares while the dual cells are represented in yellow. We use the solution $U_{i,j}^n$ obtained on the original grid at time t^n as

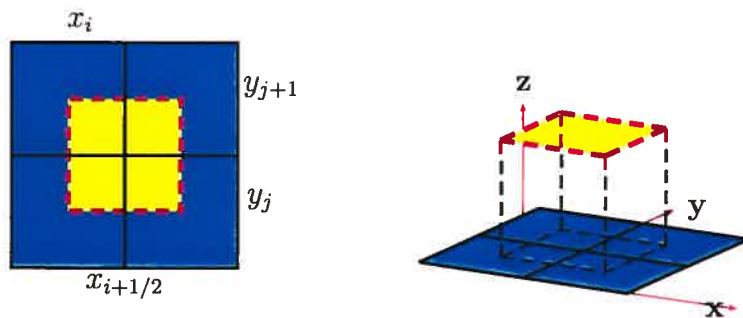


FIG. 4.1. Four Cartesian cells of the original grid (blue) and a staggered dual cell (yellow); time is represented along the z -axis

initial data to compute $U_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$ on the staggered dual cells at time t^{n+1} . A complete description of the method is presented in [2]; the solution at time t^{n+1}

is updated using equation (4.3.2)

$$\begin{aligned}
u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j+1}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n) \\
&+ \frac{1}{16}\{(\vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}) + (\vec{U}_{i,j+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;x}^{lim}) \\
&\quad + (\vec{U}_{i,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim}) + (\vec{U}_{i+1,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;y}^{lim})\} \\
&- \frac{\lambda}{2}\left\{[f_{i+1,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^{n+1/2}] + [f_{i+1,j+1}^{n+1/2} - f_{i,j+1}^{n+1/2}] \right. \\
&\quad \left. + [g_{i,j+1}^{n+1/2} - g_{i,j}^{n+1/2}] + [g_{i+1,j+1}^{n+1/2} - g_{i+1,j}^{n+1/2}] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Here, $(\nabla \vec{U})^{lim} \equiv (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x, \vec{U}_y^{lim}/\Delta y)$ is a limited numerical gradient; componentwise limiting is applied in the case of vector functions. Spatial linear interpolations will guarantee second-order accuracy in space, while using a first order Euler discretization to approximate the values of the flux functions at the intermediate time $t^{n+1/2}$ will ensure second-order accuracy in time.

4.4. THE $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ PHYSICAL CONSTRAINT AND SOME NUMERICAL APPROACHES TO SATISFY IT

The fact that magnetic monopoles do not exist neither in nature nor in laboratory is modeled by a solenoidal magnetic field \mathbf{B} , i.e., the Maxwell equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Faraday's law guarantees that if the initial magnetic field is solenoidal, it remains divergence-free at all upcoming time. The accumulation of numerical errors often leads to a numerical solution which does not satisfy the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Since the early eighties, many recipes have been proposed to treat or remove the non physical part in the magnetic field : We mention for example, Brackbill and Barnes' *projection method* [4], Powell's *8-wave formulation method* [10], Evans and Hawley's *Constrained Transport (CT) method* [7] and many other methods. Tóth [12] has summarized the different versions of the CT method and has introduced his own new version. Since our numerical base scheme uses an original and a staggered dual grid, none of the existing CT approaches can be applied directly. Our own approach to treat the magnetic field is inspired from Evans and Hawley's CT method and is based on a specific discretization of the induction equation on both the original and staggered grids. Before

introducing our new CTCS method, we give a brief review of Evans and Hawley's Constrained Transport method in its original form as described in [12]. In the context of a uniform two-dimensional Cartesian grid, the z-component B_z of the magnetic field is updated by the base scheme without any modification as it does not contribute to $\nabla \cdot \mathbf{B}$. The cell-centered magnetic field is denoted by \mathbf{B} and the magnetic field at the cell interfaces is denoted by \mathbf{b} . Evans and Hawley considered a staggered grid to maintain the divergence-free constraint of the magnetic field at the cell interfaces. In two space dimensions, the x-component (b_x) of the

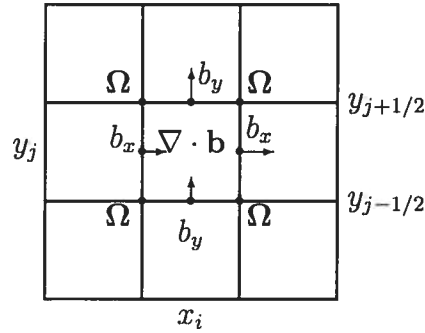


FIG. 4.2. Staggered magnetic field.

staggered magnetic field is located at $(x_{i+1/2}, y_j)$ (the cells are being centered at points (x_i, y_j)), and the y component is located at $(x_i, y_{j+1/2})$ as shown in Fig.4.2. Let $\Omega = \mathbf{E} \cdot \vec{k} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (0, 0, 1)^T$ denote the z-component of the electric field. The main idea of the CT scheme is to place Ω at the cell corners and then to discretize the induction equation $\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$ using simple finite differences along the edges as follows :

$$b_x^{n+1}|_{i+1/2,j} = b_x^n|_{i+1/2,j} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (4.4.1)$$

$$b_y^{n+1}|_{i,j+1/2} = b_y^n|_{i,j+1/2} + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x}$$

The divergence of \mathbf{b} is approximated as :

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_{i,j} \simeq \frac{b_x|_{i+1/2,j} - b_x|_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{b_y|_{i,j+1/2} - b_y|_{i,j-1/2}}{\Delta y}. \quad (4.4.2)$$

Hence, if $\nabla \cdot \mathbf{b}^n = 0$, it is easy to verify that the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{b}^{n+1} = 0$ will be satisfied to the accuracy of round-off errors due to perfect cancellation

of terms. The CT idea was combined with Godunov-type schemes by Dai and Woodward [6]. Tóth [12] summarized all the CT approaches already presented for finite differences as well as for finite volumes methods and showed that there is no need to use a staggered magnetic field by giving the appropriate discretization of the induction equation for each CT version.

4.4.1. A two-dimensional CTCS method for Cartesian staggered dual cell central schemes

Since the numerical schemes we use involve an original and a dual staggered grids, none of the CT approaches can be applied directly. In a previous work [3], we have presented a new method based on Evans and Hawley's constrained transport approach for solving ideal MHD problems using central schemes where the original cells are Cartesian while the dual staggered cells are diamond shaped oblique cells. In this paper we present our new constrained transport method "CTCS" for central schemes where both the original and the staggered dual cells are Cartesian ; this CTCS method deals directly with the computed solution obtained using the numerical base scheme and does not require any additional staggering for the magnetic field components. We suppose that the solution at time t^n is given on the original Cartesian cells and satisfies the divergence-free constraint, that is the central discretization of the divergence operator

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{ij}^n \simeq \frac{B_{i+1,j;x}^n - B_{i-1,j;x}^n}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1;y}^n - B_{i,j-1;y}^n}{2\Delta y} \quad (4.4.3)$$

vanishes. Performing a first time step, we compute the solution $U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ using the base scheme at time t^{n+1} on the staggered cells. To satisfy the physical constraint, we need to treat the magnetic field components of the solution. For that purpose, we compute the electric field at time $t^{n+1/2}$ at nodes $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ using both data obtained at time t^n and time t^{n+1} on the original and staggered grids as follows :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = & -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j+1/2} \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1}^n}{4} \right] \quad (4.4.4) \end{aligned}$$

where \mathbf{B}^* denotes the magnetic field obtained at time t^{n+1} using the base scheme before the divergence treatment. Next, we discretize the induction equation $\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$ on the staggered grid, again using central differences in order to conserve the second-order spatial accuracy of the base scheme, and update the magnetic field component as follows

$$B_{i+1/2,j+1/2;x}^{n+1} = \frac{B_{i,j;x}^n + B_{i+1,j;x}^n + B_{i+1,j+1;x}^n + B_{i,j+1;x}^n}{4} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \quad (4.4.5)$$

$$B_{i+1/2,j+1/2;y}^{n+1} = \frac{B_{i,j;y}^n + B_{i+1,j;y}^n + B_{i+1,j+1;y}^n + B_{i,j+1;y}^n}{4} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \quad (4.4.6)$$

Here $\Omega = \mathbf{E} \cdot \vec{k}$ (where $\vec{k} = (0, 0, 1)$) denotes the z-component of the electric field; the special discretization of the electric field at time $t^{n+1/2}$ given by (4.4.4) will ensure second-order accuracy with respect to time. With this particular discretization of the induction equation and the special form of the electric field, we can prove that the CTCS-updated magnetic field satisfies the physical divergence-free property. Indeed, the central difference discretization of the divergence operator leads to :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{4} (\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1}^n). \quad (4.4.7)$$

Hence if at time t^n , the magnetic field \mathbf{B}^n is solenoidal, then the left-hand side of equation (4.4.7) vanishes within the accuracy of round-off errors.

4.5. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section we present two numerical experiments for solving ideal MHD problems; we apply our CTCS divergence treatment to the numerical solution, obtained using the base scheme, after each time step. For our first numerical test, we consider the Orszag-Tang MHD turbulence problem, which describes the evolution of a compressible vortex system, a complex phenomenon involving

the interactions between several shock waves generated during the evolution of the vortex system and traveling at different propagation speeds [6, 12]. The initial conditions for this problem are : $\rho(x, y) = \rho_0$, $p(x, y) = p_0$, $\mathbf{u}(x, y) = -\sin y \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}$, $\mathbf{B}(x, y) = -\sin y \mathbf{i} + \sin(2x) \mathbf{j}$, with $0 \leq x, y \leq 2\pi$, $\rho_0 = 25/36$ and $p_0 = 5/3$. \mathbf{i} and \mathbf{j} are unit vectors in the x - and y - directions. We have computed the numerical solution on a 400×400 grid. Fig.4.3 shows the mass density contours at time $t = 0.5$ (left) and at time $t = \pi$ (right). The divergence

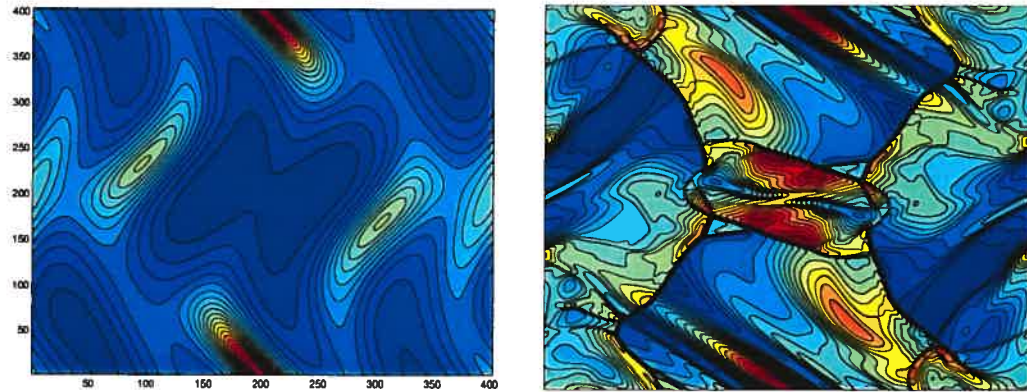


FIG. 4.3. Mass density contour lines for Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$ (left) and at time $t = \pi$ (right)

values of the magnetic field on the computational domain remain of the order of $10e-14$ throughout the calculations, thus confirming the efficiency of our method. The agreement is also excellent with the results appearing in the literature [6, 12].

Our second two-dimensional ideal MHD numerical experiment is a cloud-shock interaction problem ; we will consider a variant of the problem initially proposed by Dai and Woodward [6], and consider the problem proposed by Rossmannith [11]. This variant consists of two constant states $U_l = (3.86859, 11.2536, 0, 0, 167.345, 0, 2.1826182, -2.1826182)$ and $U_r = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0.56418958, 0.56418958)$ for $U = (\rho, u_x, u_y, u_z, p, B_x, B_y, B_z)$, which are separated by the line $x = 0.05$. In the right state a 10 times denser cloud is in hydrostatic equilibrium with the surrounding plasma. We have computed the solution at time $t = 0.06$ on a high resolution grid (800×800 grid-points). Fig.4.4 (left) shows the contour lines of the logarithm of the mass density while Fig.4.4 (right) shows the energy contour

lines at the same time. The maximum absolute divergence value we observe, for

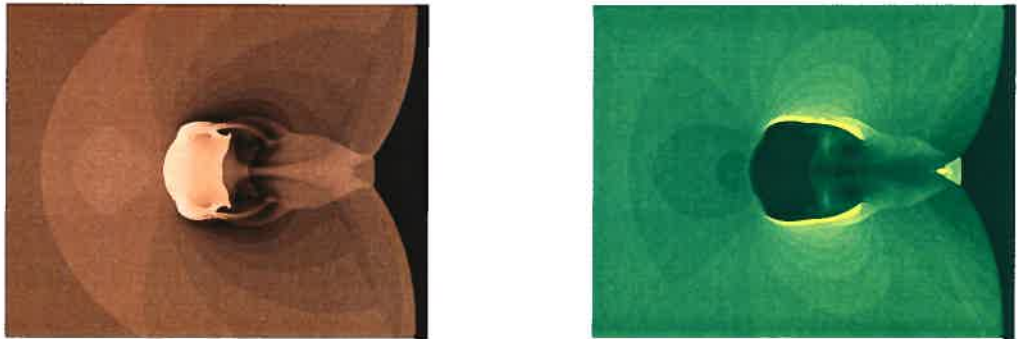


FIG. 4.4. Solution of the shock cloud interaction problem at time $t = 0.06$, on a 800^2 grid.

this test problem, when the CTCS method is applied, is about 10^{-12} . Our results are in very good agreement with those presented in [11] and confirm the ability and potential of our methods.

4.6. CONCLUDING REMARKS

In this paper we have presented a two-dimensional adaptation of central schemes for solving ideal MHD problems. To satisfy the solenoidal property of the magnetic field in the numerical solution we have introduced a new method that treats the magnetic field components after each time step. The CTCS method we present applies for central schemes where both the original and the dual staggered cells are Cartesian. Both the base scheme and the CTCS method are easy to implement and are second-order accurate in time and space. Our numerical results satisfy the physical requirement ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) and compare very well with the results appearing in the literature, thus confirming the robustness and the potential of the methods. Three-dimensional extensions of our methods are currently being investigated. The authors would like to thank the organizers of the "Tenth International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics and Applications" held in Osaka-Japan for their excellent work.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I, pp. 85-88, 1995.
- [2] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, M. Hafez and K. Oshima, eds., Vol. IV, pp. 7-14, 1995.
- [3] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *Central Finite Volume Methods with Constrained Transport Divergence Treatment for Ideal MHD*, J. Comp. Phys., (2004), in press.
- [4] J. U. BRACKBILL AND D. C. BARNES, *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comp. Phys. 35, 426, 1980.
- [5] M. BRIO, C.C. WU, *An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys., (75)2, pp. 400-422, 1988.
- [6] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydrodynamical Equations*, J. Comp. Phys., 142, pp. 331-369, 1998.
- [7] C. R. EVANS AND J. F. HAWLEY, *Simulation of magnetohydrodynamic flows : A constrained transport method*, Astrophys. J. 332, 659, 1988.
- [8] A. JEFFREY AND T. TANIUTI, *NON-LINEAR WAVE PROPAGATION*, Academic Press, New York, 1964.
- [9] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463, 1990.
- [10] K. G. POWELL, *An Approximate Riemann Solver for MHD*, ICASE NASA, Langley Research Center, Contract Rep. 194902, ICASE Rep. 94-25, Hampton, VA, 1994.

- [11] J. ROSSMANITH, *A Wave Propagation Method with Constrained Transport for Ideal and Shallow Water Magnetohydrodynamics*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of Washington, 2002.
- [12] G. TÓTH, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes*, J. Comp. Phys., 161, pp. 605-652, 2000.
- [13] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. Comp. Phys., 32, pp. 101-136, 1979.

Accord des coauteurs et permission de l'éditeur

Déclaration des coauteurs d'un article

Identification de l'étudiant et du programme

Rony Touma

Ph.D. en Mathématiques Appliquées.

Description de l'article

Auteurs :

Rony Touma

Paul Arminjon

Titre :

A constrained transport approach for two-dimensional central finite volume methods in ideal MHD

Journal :

SIAM Journal on Scientific Computing (soumis)

Déclaration du coauteur

À titre de coauteur de l'article identifié ci-dessus, je suis d'accord pour que Rony Touma inclue cet article dans sa thèse de doctorat qui a pour titre Méthodes de Volumes Finis pour les Systèmes d'Équations Hyperboliques : Applications en Aérodynamique et en Magnétohydrodynamique

Coauteur

Paul Arminjon

Date

Juin 2005

Contribution :

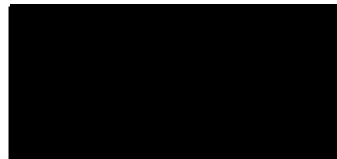
Ma contribution dans ce travail consiste en la présentation d'une nouvelle approche bidimensionnelle pour résoudre des problèmes de magnétohydrodynamique (MHD) idéale avec les schémas centrés. En effet, j'ai adapté le schéma central dont les cellules originales et duales sont cartésiennes, originalement proposé par Arminjon et al., pour résoudre des problèmes de MHD. Pour satisfaire la contrainte physique du champ magnétique à divergence nulle, j'ai construit la version de la méthode CTCS qui s'applique avec le schéma numérique de base. Ensuite pour valider ces méthodes numériques, j'ai résolu les mêmes problèmes que ceux considérés au premier article et j'ai présenté une comparaison quantitative des résultats. Ensuite j'ai résolu numériquement d'autres problèmes de la MHD et présenté les nouveaux résultats. Ma contribution a été jugée fondamentale et essentielle par mon directeur de recherche et coauteur (cf. l'avis du directeur de recherche à ce sujet) ; en particulier, j'ai effectué et programmé tous les calculs.

Nom de l'étudiant

Signature

Date

Rony Touma



Juin 2005

Chapitre 5

A CONSTRAINED TRANSPORT APPROACH FOR TWO-DIMENSIONAL CENTRAL FINITE VOLUME METHODS IN IDEAL MHD

R. Touma and P. Arminjon

We propose two-dimensional central finite volume methods based on Nessyahu and Tadmor's one-dimensional non-oscillatory central scheme and a constrained transport-type method to solve ideal magnetohydrodynamic problems. The main numerical scheme is second-order accurate both in space and time and uses an original Cartesian grid coupled to a Cartesian or diamond staggered dual grid to by-pass the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces. To treat the non-vanishing magnetic field divergence we have constructed an adaptation of Evans and Hawley's constrained transport method specifically designed for central schemes. Our numerical results show the robustness and the high potential of the scheme.

Keywords : central schemes, constrained transport divergence treatment, Ideal MHD

5.1. INTRODUCTION

Since their first appearance in 1990, non-oscillatory central schemes [46] continuously gained in popularity for multiple reasons. Multidimensional extensions on Cartesian or unstructured grids were proposed [1],[2],[3],[6],[18] ever since for solving hyperbolic problems. In this paper we use a family of second-order accurate central schemes to solve ideal magnetohydrodynamic problems. Usually most numerical schemes fail to satisfy the zero divergence magnetic field property of the analytic solution, which may produce, as it is shown in [12], non-physical waves, instabilities, and negative densities or pressures. In order to satisfy this constraint, several approaches were already proposed since the early eighties. Brackbill and Barnes [12] proposed the "projection scheme" to satisfy the $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint. The method involves the resolution of a Poisson equation. This approach is easy to understand, the non obvious part of it being the implementation of the boundary conditions for the magnetic field components when non trivial physical boundaries apply. Furthermore, the resolution of Poisson's equation at each time step is a time-consuming procedure which slows down the computations. Recently this method was coupled to central schemes to solve ideal MHD problems [8]. Another approach to satisfy the magnetic physical constraint is Powell's "eight wave formulation". Powell [23], and Powell et al. [22], [21] developed a Roe-type Riemann solver, using a nonconservative form of the MHD equations and an upwind scheme, for solving ideal MHD problems (where the eighth wave is associated with the propagation of $\text{div} \vec{\mathbf{B}}$). This method which proved to be numerically robust, failed in some cases and generated wrong jump conditions, especially across strong shocks [26]. Another interesting approach to ensure a solenoidal magnetic field is the constrained transport method (CT) proposed by Evans and Hawley [16] which was first presented for finite difference schemes. In its original form, the CT approach consists in using a staggered magnetic field (usually obtained with linear interpolation), and ensures a zero-divergence magnetic field when the divergence operator is discretized with the staggered magnetic field components. Several extensions of this method were later presented by Dai and Woodward [15], Balsara and Spicer [10], Ryu et al. [25], and Ziegler [29]. Tóth [26] has presented an adaptation of the constrained transport method to centered difference schemes;

he also showed that the staggered magnetic field can be avoided and the CT approach can be simply written without any staggering of the magnetic field. Now for central schemes, which rest on the use of two dual staggered grids, direct use of this approach was not possible; in [7], we have presented a new constrained transport approach for central schemes ("CTCS") in the case of diamond dual cells. Contrary to [29], we managed to build our new CTCS approach in a formulation which does not require any staggering of the collocation points of the magnetic field. The numerical experiments we presented in [7] compare very well with those appearing in the literature, thus confirming the high potential and the robustness of the method. In this paper, we extend this procedure to the case of Cartesian dual cell central schemes, and apply this to several more challenging new test cases. We also present a comparison between results obtained using our previous CTCS method (in [7]) and those we obtain using the new method considered in this paper.

5.2. IDEAL MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUATIONS

We consider in this paper the Ideal MHD equations written in their conservation form as :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + I(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ (\rho e + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2.1)$$

ρ denotes the mass density, \mathbf{v} is the velocity of the flow, \mathbf{B} is the magnetic field, and e is the total energy per unit mass. The thermal pressure is computed from an ideal gas equation of state,

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2),$$

where γ denotes the ratio of specific heats. For a complete description of the MHD equations the interested reader is referred to [17].

In two space dimensions, the MHD system takes the following form :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = 0$$

where

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + \bar{p} - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ u_x(\rho e + \bar{p}) - B_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_y^2 + \bar{p} - B_y^2 \\ \rho v_y v_z - B_y B_z \\ u_y(\rho e + \bar{p}) - B_y(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ v_y B_x - v_x B_y \\ 0 \\ v_y B_z - v_z B_y \end{bmatrix}.$$

The analytic solution of the MHD system satisfies a divergence-free magnetic field property; because of numerical errors, the numerical solution usually fails to satisfy this property and thus instabilities and non-physical waves may arise. This point will be discussed later in this paper.

5.3. CENTRAL SCHEMES

We are interested in numerical central schemes for solving the ideal MHD system. We shall give a brief review of the original Nessyahu-Tadmor one dimensional central scheme (NT [20]) and of two 2-dimensional extensions using diamond or Cartesian-staggered dual cells. Both schemes are second-order accurate in the case of smooth solutions. It was shown in a previous work[5] that in the two dimensional case, the diamond-staggered dual cell scheme is slightly more accurate than the Cartesian-staggered dual cell scheme. This may be explained by the fact that the area of the diamond dual cells is smaller than the area of the Cartesian dual cells, so that the resolution is better in the diamond-cell case. The advantage of the Cartesian-dual scheme is that one set of numerical solution is needed to be computed at each odd time-step while for the diamond dual cell scheme two sets are required, which slows down the computations. Both schemes are second-order accurate and are non-oscillatory thanks to van Leer's MUSCL-type limiters. A comparison between the diamond and the Cartesian dual cell schemes is presented in[5], where several problems in aerodynamics are considered. In this paper we shall compare the numerical results for ideal MHD problems obtained using both versions of these two-dimensional central schemes.

We shall also see that, (at least for the problems considered in this paper), if one does not apply the CTCS divergence treatment, contrary to many other numerical schemes, central schemes do not crash due to numerical instabilities ; however if one seeks a solenoidal magnetic field, the CTCS procedure we supply in this paper should be applied, and will lead to divergence values that remain within the 10^{-12} threshold.

5.3.1. One-dimensional Nessyahu-Tadmor central scheme

We consider the initial value problem :

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, t = 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.3.1)$$

The Nessyahu-Tadmor (NT)[20] scheme is based on the staggered Lax-Friedrichs scheme (avoiding the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces) and uses a piecewise linear reconstruction of the piecewise constant solution obtained at the previous time step, on the cells of the computational domain as shown in Fig.5.1 :

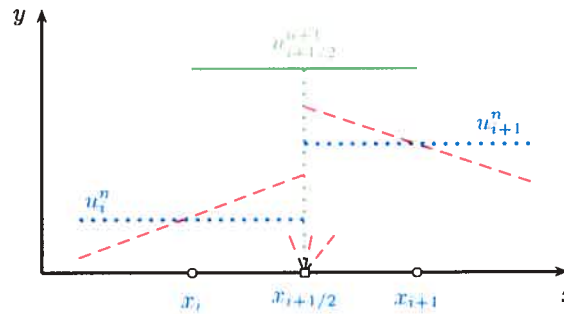


FIG. 5.1. The resolution of Riemann problems at cell interfaces is avoided when alternating from original to staggered grid

$$u(x, t^n) = L_i(x, t^n) = u_i^n + (x - x_i) \frac{u_i'}{\Delta x}, \quad x \in C_i \quad (5.3.2)$$

where

$$u_i' = (u_i^n)' \cong h \frac{\partial}{\partial x} u(x, t^n)|_{x=x_i} + O(\Delta x^2) \quad (5.3.3)$$

approximates the slope to first-order accuracy; this leads to second-order spatial accuracy. Second-order temporal accuracy is obtained thanks to a predictor-corrector step. The solution at time t^{n+1} is computed on staggered cells as follows :

$$u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{1}{8}((u_i^n)' - (u_{i+1}^n)') - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(u_{i+1}^{n+1/2}) - f(u_i^{n+1/2})). \quad (5.3.4)$$

For a complete description of the (NT) scheme consult [20].

5.3.2. Two-dimensional extension of the Nessyahu-Tadmor scheme (diamond dual cells)

The Nessyahu-Tadmor scheme was extended to two space dimensions for structured [2],[18] and unstructured [1],[3],[4] grids. In a previous paper [7], we have presented a two-dimensional extension of the Nessyahu-Tadmor scheme where the original cells for the solution at time t^n are Cartesian, while at time t^{n+1} , the solution is computed on the staggered diamond dual cells as is shown in Fig.5.2. A brief discussion of the method follows.

Let us consider a two-dimensional hyperbolic system of conservation laws :

$$\vec{U}_t + \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}) \equiv \vec{U}_t + \vec{f}_x + \vec{g}_y = 0 \quad (5.3.5)$$

with the initial condition $\vec{U}(x, y, 0) = \vec{U}_o(x, y)$. We consider for our computational domain a uniform rectangular grid with M^2 square cells. Starting from the original Cartesian grid with cells $C_{i,j}$ at time t^n , we alternate to the diamond dual cells $D_{i+1/2,j}$ and $D_{i,j+1/2}$ at time t^{n+1} , and return back to the original cell $C_{i,j}$ of the original structured grid at time t^{n+2} as is shown in Fig.5.2. Let $\Delta x = \Delta y =$

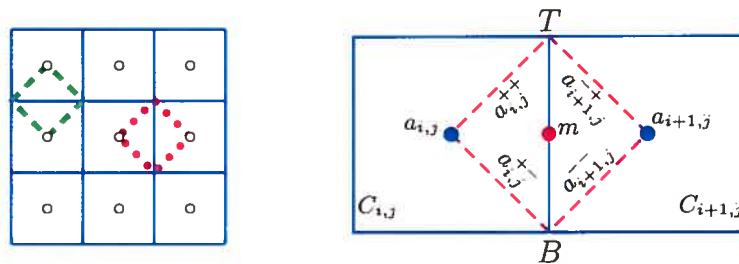


FIG. 5.2. (Left) Square cell centers denoted by " o ", dual oblique cells (dotted or dashed); (Right) Original cells $C_{i,j}, C_{i+1,j}$ and the dual cell $D_{i+1/2,j}$

$h = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ denote the mesh size, $a_{i,j}(x_i, y_j) = (ih, jh)$, $0 \leq i, j \leq M$, denote the nodes of the first grid. For any arbitrary node $a_{i,j}$ we consider the corresponding finite volume cell $C_{i,j}$ for the first grid to be the square centered at $a_{i,j}$ with sides parallel to the axes as in Fig.5.2. There are 2 cases for the diamond dual cells, depending on whether the axis joining the two nodes of the original grid used to define the diamond cell is parallel to the x -axis or to the y -axis. In Fig.5.2 the dual cell $D_{i+1/2,j}$ is the quadrilateral $a_{i,j}Ta_{i+1,j}B$. Nodes of the staggered grid are the centroids of the diamond cells. Let $\vec{U}_{i,j}^n \cong \vec{U}(a_{i,j}, t^n)$ and $\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1} \cong \vec{U}(m, t^{n+1})$ denote respectively the average values in the first and second grid at time t^n and t^{n+1} . Performing the first time step gives $\{\vec{U}_{i+1/2,j}^{n+1}\}$ and $\{\vec{U}_{i,j+1/2}^{n+1}\}$, while the cell values $\{\vec{U}_{i,j}^{n+2}\}$ are obtained at the end of the second time step. The solution at time t^{n+1} on the dual cell $D_{i+1/2,j}$ is computed as follows :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{D_{i+1/2,j}}^{n+1} = & \frac{1}{2}(\vec{U}_{i,j}^n + \vec{U}_{i+1,j}^n) + \frac{1}{6}(\vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}) - \frac{\Delta t}{h} [(-\vec{f}_{a_{i,j}^{+-}}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i,j}^{+-}}^{n+1/2}) \\ & + (\vec{f}_{a_{i+1,j}^{--}}^{n+1/2} - \vec{g}_{a_{i+1,j}^{--}}^{n+1/2}) + (\vec{f}_{a_{i+1,j}^{+-}}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i+1,j}^{+-}}^{n+1/2}) + (-\vec{f}_{a_{i,j}^{++}}^{n+1/2} + \vec{g}_{a_{i,j}^{++}}^{n+1/2})] \end{aligned}$$

where $\nabla \vec{U}^{lim} = (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x, \vec{U}_y^{lim}/\Delta y)$ is a limited numerical gradient ; the values of the flux at midpoints at time $t^{n+1/2}$ are computed using (5.3.5) and an explicit Euler time discretization. For a complete description of this numerical scheme, see [7].

5.3.3. Two-dimensional extension of the NT scheme (Cartesian dual cells)

In 1995, Arminjon et al. [2] presented a two-dimensional extension of the (one-dimensional) NT-scheme for Cartesian staggered dual cells. The original Cartesian cells C_{ij} are the squares centered at nodes (x_i, y_j) and the dual cells $D_{i+1/2,j+1/2}$ are also squares centered at nodes $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$. The geometry of the scheme is shown in Fig.5.3.

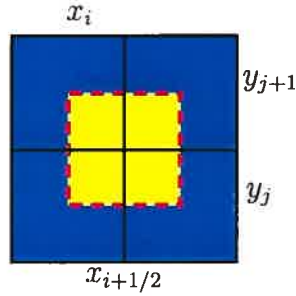


FIG. 5.3. Four Cartesian cells of the original grid (blue) and a staggered dual cell (yellow)

Here we give a brief review of the numerical scheme ; for a complete description of the method, one is referred to [2], [18], and [8]. We suppose that the solution is given at time t^n on the original cells C_{ij} ; to compute the solution at time t^{n+1} on the dual cells, we proceed as follows :

We integrate equation (5.3.5) on the domain $D_{i+1/2,j+1/2} \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \vec{U}_t \, dA \, dt = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \nabla \cdot \vec{F} \, dA \, dt \quad (5.3.6)$$

and then we apply Green's theorem,

$$\iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^{n+1}) \, dA = \iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) \, dA - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial D_{i+1/2,j+1/2}} (\vec{f} n_x + \vec{g} n_y) \, d\sigma \, dt \quad (5.3.7)$$

where $\vec{n} = (n_x, n_y)$ is the unit outward normal vector to the boundary of the diamond cell $\partial D_{i+1/2,j+1/2}$.

The left-hand side of (5.3.7) defines the value $\mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2})u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$.

($\mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2})$ denotes the area of the dual cell). The first integral in the right-hand side of (5.3.7) is approximated to second order by

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) dA &\simeq \vec{U}\left(x_i + \frac{\Delta x}{4}, y_j + \frac{\Delta y}{4}, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2} \cap C_{i,j}) \\ &+ \vec{U}\left(x_{i+1} - \frac{\Delta x}{4}, y_j + \frac{\Delta y}{4}, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2} \cap C_{i+1,j}) \\ &+ \vec{U}\left(x_i + \frac{\Delta x}{4}, y_{j+1} - \frac{\Delta y}{4}, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2} \cap C_{i,j+1}) \\ &+ \vec{U}\left(x_{i+1} - \frac{\Delta x}{4}, y_{j+1} - \frac{\Delta y}{4}, t^n\right) \mathcal{A}(D_{i+1/2,j+1/2} \cap C_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Applying van Leer's piecewise linear interpolants will guarantee second-order accuracy and preserve the monotonicity. Equation (5.3.8) is approximated as follows :

$$\begin{aligned} \iint_{D_{i+1/2,j+1/2}} \vec{U}(x, y, t^n) dA &\simeq \frac{h^2}{4} \left[u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i+1,j+1}^n \right. \\ &+ \frac{1}{4} (\vec{U}_{i,j;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j;y}^{lin} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j;y}^{lim} \\ &\left. + \vec{U}_{i,j+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;y}^{lim}) \right] \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

where $\nabla u^{lim} = (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x, \vec{U}_y^{lim}/\Delta y)$ is a limited numerical gradient. Using (5.3.9) and applying the midpoint rule for the flux-integral in (5.3.7) both in time and space finally leads to :

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j+1}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n) \\ &+ \frac{1}{16} (\vec{U}_{i,j;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j;x}^{lim}) - \frac{\Delta t}{2h} [f(u_{i+1,j}^{n+1/2}) - f(u_{i,j}^{n+1/2})] \\ &+ \frac{1}{16} (\vec{U}_{i,j+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;x}^{lim}) - \frac{\Delta t}{2h} [f(u_{i+1,j+1}^{n+1/2}) - f(u_{i,j+1}^{n+1/2})] \\ &+ \frac{1}{16} (\vec{U}_{i,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1;y}^{lim}) - \frac{\Delta t}{2h} [g(u_{i,j+1}^{n+1/2}) - g(u_{i,j}^{n+1/2})] \\ &+ \frac{1}{16} (\vec{U}_{i+1,j;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1;y}^{lim}) - \frac{\Delta t}{2h} [g(u_{i+1,j+1}^{n+1/2}) - g(u_{i+1,j}^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

where, as before, u^{lim} is obtained using van Leer's limiter. We use a first-order Euler discretization to approximate the values of u at the intermediate time $t^{n+1/2}$ which will ensure second-order accuracy in time.

5.4. CONSTRAINED TRANSPORT FOR CENTRAL SCHEMES

The fact that magnetic monopoles have never been observed (we may even say do not exist) corresponds, in electromagnetic theory, to a constraint on the magnetic field vector \mathbf{B} , which must be solenoidal, and thus satisfy Maxwell's equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. A non-solenoidal magnetic field (in the numerical solution) usually leads to instabilities, non-physical waves, and the production of negative pressure and density in the case of ideal MHD. Several methods have already been proposed in the literature to ensure that the numerical solution satisfies the physical constraint : The *projection method* of Brackbill and Barnes [12], the *8-wave formulation* of Powell [23], and the *Constrained Transport* method (CT) of Evans and Hawley [16].

In its original version, the Constrained Transport approach was presented for finite differences schemes ; using linear interpolations, it guarantees a divergence-free, staggered magnetic field when the induction equation $\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$ is discretized in a "symmetric way". In two space dimensions, the x and y -components (b_x and b_y) of the staggered magnetic field are located at the points $(x_{i+1/2}, y_j)$ and $(x_i, y_{j+1/2})$, respectively, (while the numerical solution obtained using the base scheme is given at the points (x_i, y_j)).

The Constrained Transport approach was later combined with Godunov-type schemes by Dai and Woodward [15]. Tóth [26] showed that there is no need to use a staggered magnetic field, usually located at the cell interfaces, and presented a new version of the CT approach using central differences. Since the numerical scheme we use involves an original and a dual staggered grid, the constrained transport approach, in its original or later versions, cannot be applied directly.

5.4.1. A new CTCS for Cartesian-staggered cell central schemes

Here we propose a new constrained transport approach for Cartesian dual cell central schemes. The method does not require any additional staggering of the electric field ; it deals directly with the conservative variables obtained using the base scheme. We suppose that the solution at time t^n is given on the original

Cartesian cells and satisfies the divergence-free constraint, that is :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B}_{ij}^n \simeq \frac{B_{i+1,j;x}^n - B_{i-1,j;x}^n}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1;y}^n - B_{i,j-1;y}^n}{2\Delta y}. \quad (5.4.1)$$

Performing a first time step, we compute the solution $U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ on the staggered cells at time t^{n+1} . Let \mathbf{B}^* denote the magnetic field in the numerical solution $U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$ obtained using the base scheme. We first compute the z -component

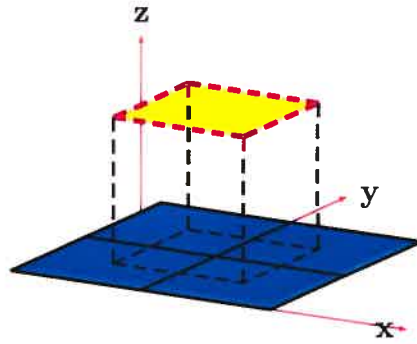


FIG. 5.4. We use the numerical data computed on the staggered Cartesian cell (at time t^{n+1}) and those on the four adjacent original cells (at time t^n) to approximate the value of the z -component Ω of the electric field at time $t^{n+1/2}$

Ω ($\Omega = \mathbf{E} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$) of the electric field on the dual cells, at time $t^{n+1/2}$ (in order to preserve the second-order time accuracy of the base scheme); we use the following approximation :

$$\mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \simeq -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1}^n}{4} \right]. \quad (5.4.2)$$

Next we discretize the induction equation

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.4.3)$$

on the staggered grid using central differences and update the magnetic field components in the following way :

$$B_{i+1/2,j+1/2;x}^{n+1} = \frac{B_{i,j;x}^n + B_{i+1,j;x}^n + B_{i+1,j+1;x}^n + B_{i,j+1;x}^n}{4} - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \quad (5.4.4)$$

$$B_{i+1/2,j+1/2;y}^{n+1} = \frac{B_{i,j;y}^n + B_{i+1,j;y}^n + B_{i+1,j+1;y}^n + B_{i,j+1;y}^n}{4} + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \quad (5.4.5)$$

The z -component of the magnetic is kept unchanged since, in two space dimensions, it does not contribute to the divergence of \mathbf{B} . To complete the presentation of our CTCS method for Cartesian dual cell schemes, we still need to prove that the CTCS-updated magnetic field (obtained using equations (5.4.4), (5.4.5) and (5.4.2)) is solenoidal, i.e. the central difference discretization of the divergence operator satisfies the following equation (5.4.6) to the accuracy of round-off errors :

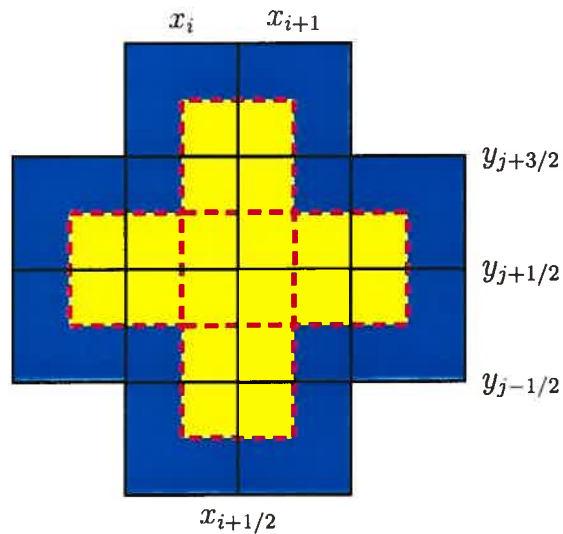


FIG. 5.5. The cells used in the computation of $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \simeq & \frac{B_{i+3/2,j+1/2;x}^{n+1} - B_{i-1/2,j+1/2;x}^{n+1}}{2\Delta x} \\ & + \frac{B_{i+1/2,j+3/2;y}^{n+1} - B_{i+1/2,j-1/2;y}^{n+1}}{2\Delta y} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

We explicitly compute each term of the right hand-side of equation (5.4.6) using equations (5.4.2), (5.4.4) and (5.4.5)

$$\begin{aligned} B_{i+3/2,j+1/2;x}^{n+1} = & \frac{B_{i+1,j;x}^n + B_{i+2,j;x}^n + B_{i+1,j+1;x}^n + B_{i+2,j+1;x}^n}{4} \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+3/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

$$\begin{aligned} B_{i-1/2,j+1/2;x}^{n+1} = & \frac{B_{i-1,j;x}^n + B_{i,j;x}^n + B_{i-1,j+1;x}^n + B_{i,j+1;x}^n}{4} \\ & - \Delta t \frac{\Omega_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j+3/2;y}^{n+1} = & \frac{B_{i,j+1;y}^n + B_{i+1,j+1;y}^n + B_{i,j+2;y}^n + B_{i+1,j+2;y}^n}{4} \\ & + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+3/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i+1/2,j-1/2;y}^{n+1} = & \frac{B_{i,j-1;y}^n + B_{i+1,j-1;y}^n + B_{i,j;y}^n + B_{i+1,j;y}^n}{4} \\ & + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j-1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i-1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

On substituting equations (5.4.7)-(5.4.8) into equation (5.4.6), the electric field components will cancel out; due to the particular discretization of the induction equation, the magnetic field components at time t^n in equation (5.4.6) can be arranged together to obtain the following equation :

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{4} (\nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1}^n). \quad \blacksquare \quad (5.4.9)$$

The right-hand-side of equation (5.4.9) vanishes if, at the previous time, the magnetic field was solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{B}^n = 0$). The CTCS-updated magnetic field therefore satisfies the physical constraint $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0$.

5.5. NUMERICAL EXPERIMENTS

In this section, we present several numerical experiments we have performed using our new purely Cartesian two-dimensional numerical method and we compare these results with those we obtain using the diamond dual cell scheme presented in [7].

First we consider a two-dimensional adaptation of Brio and Wu's MHD shock

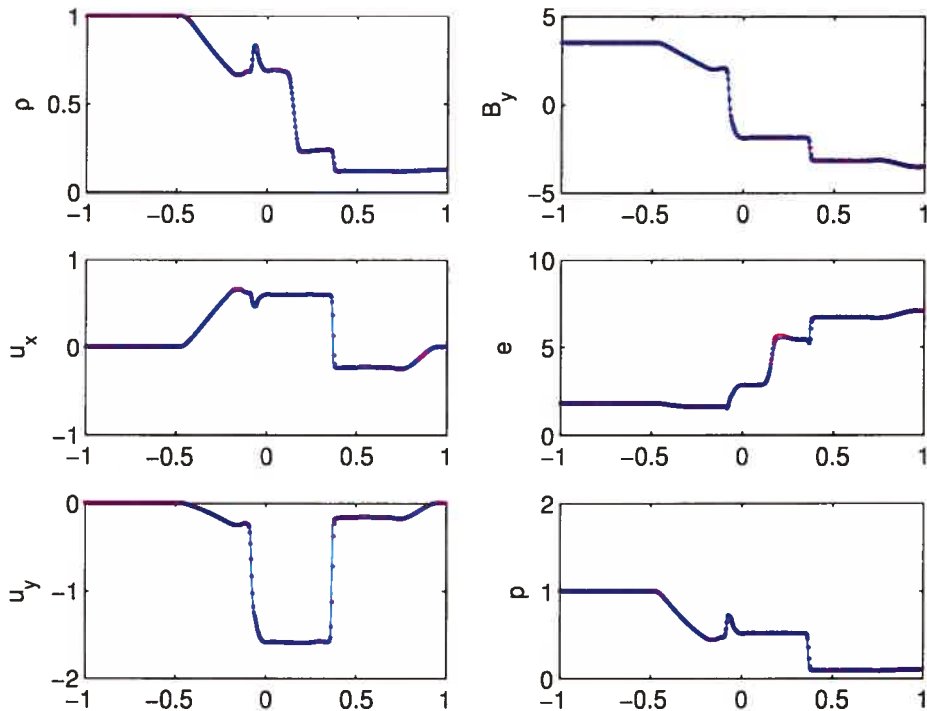


FIG. 5.6. 2D MHD shock-tube problem

tube problem involving a compound wave, which consists of a shock wave and, directly attached, a rarefaction wave [13]. We consider the Riemann problem set along the $x = 0$ in the computational domain $[-1, 1]^2$, along with the initial data $U_l = [1, 0, 0, 0, \sqrt{4\pi}, 0, 1]$, $U_r = [0.125, 0, 0, 0, -\sqrt{4\pi}, 0, 0.1]$ for $U = [\rho, u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p]$ and $B_x = 0.75\sqrt{4\pi}$. The solution is computed at time

$t = 0.25$ with a CFL condition of 0.485 on 400×400 gridpoints and using van Leer's MC-2 limiter. We compare our numerical results (Fig.5.6) along the x -axis with the reference solution obtained for the corresponding one-dimensional problem, using the scheme proposed by Brio and Wu [13] with 800 gridpoints. The reference solution of the one-dimensional problem can be found from the following web site :

<http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/anume/testcase/MHD/>

Fig.5.6 shows a good agreement between our numerical solution (dotted line) and the reference solution (solid line). We also compare the numerical results obtained using the diamond dual scheme and the Cartesian dual cell scheme. Fig.5.7 (left) shows a very good agreement between both approaches. Fig.5.7 (right) shows the profile of the magnetic field magnitude at the final time.

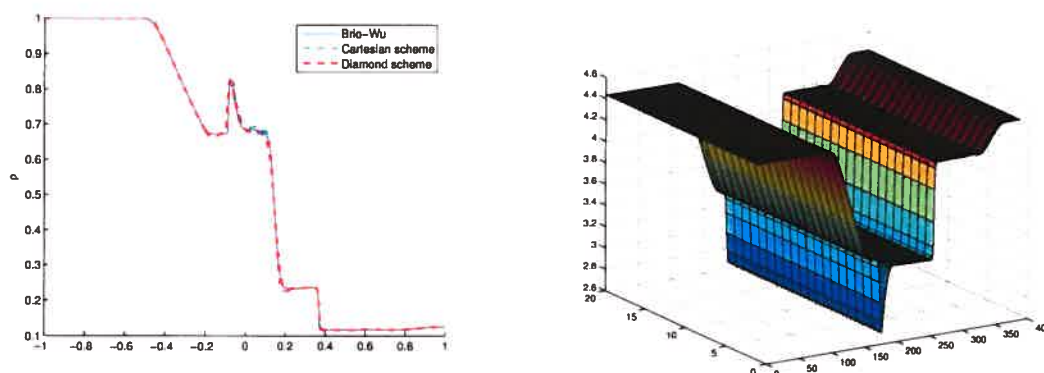


FIG. 5.7. Two plots of the mass density along the line $y = 0$ obtained using Cartesian and diamond dual cell schemes (left); profile of $|\mathbf{B}|^2$ at the final time (right).

MHD 2D Riemann problem

Next we consider a two-dimensional Riemann problem [15], with four initial states (Fig.5.8 left) for (ρ, p, u_x, u_y) given by $(1, 1, 0.75, 0.5)$ for $x > 0$ and $y > 0$, $(2, 1, 0.75, 0.5)$ for $x < 0$ and $y > 0$, $(1, 1, -0.75, 0.5)$ for $x < 0$ and $y < 0$ and $(3, 1, -0.75, -0.5)$ for $x > 0$ and $y < 0$. The initial magnetic field $\mathbf{B} = (2, 0, 1)$ is uniform. The numerical solution is computed (using the Cartesian dual cell scheme) at time $t = 0.8$ on a 300×300 grid using the MC- θ ($\theta = 1.5$) limiter.

Fig.5.9 shows the contour lines for the mass density (left) and the magnitude of



FIG. 5.8. Profile of the initial data for the MHD 2D-Riemann problem (left) and the shock-cloud interaction problem (right)

the magnetic field (right), respectively, and is in very good agreement with the results appearing in [15]. When we apply the CTCS divergence treatment, the maximum absolute divergence value we observe for this problem remains within a 10^{-14} threshold. We have compared these results with those we obtain when

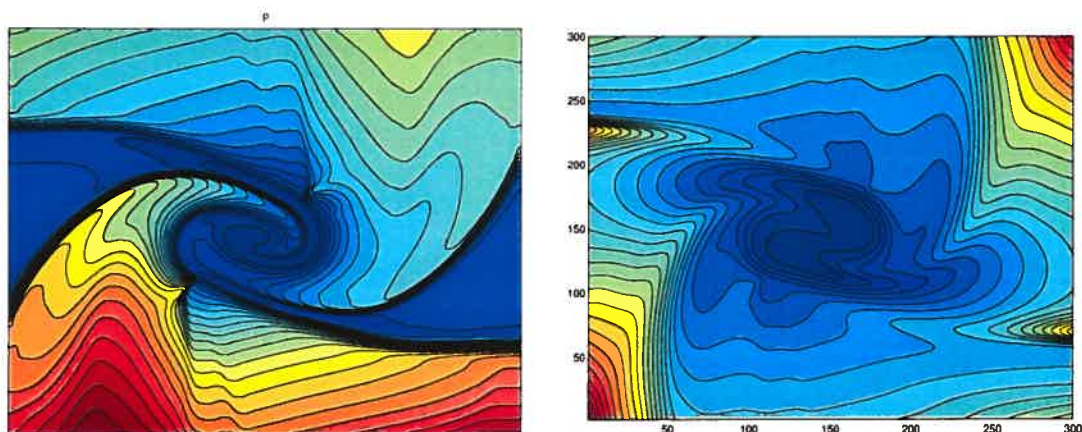


FIG. 5.9. Mass density contours for the 2D MHD Riemann problem at time $t = 0.8$ (left); $|B|^2$ contours (right).

we apply the diamond dual cell scheme [7]. Fig.5.10 shows a comparison for the plots of the mass density along the x -axis. The reference solution in Fig.5.10 (solid line) is obtained using the Cartesian dual cell scheme on 300^2 gridpoints. the "o" line denotes the mass density computed on 200 points along the x -axis using the Cartesian dual cell scheme, while the "□" line represents the mass density obtained on 200 x -points, using the diamond dual cell scheme. For this test case, the Cartesian dual cell scheme leads to better results (less diffusive) as compared

to the diamond dual cell scheme, especially at the center of the domain where most of the action takes place.

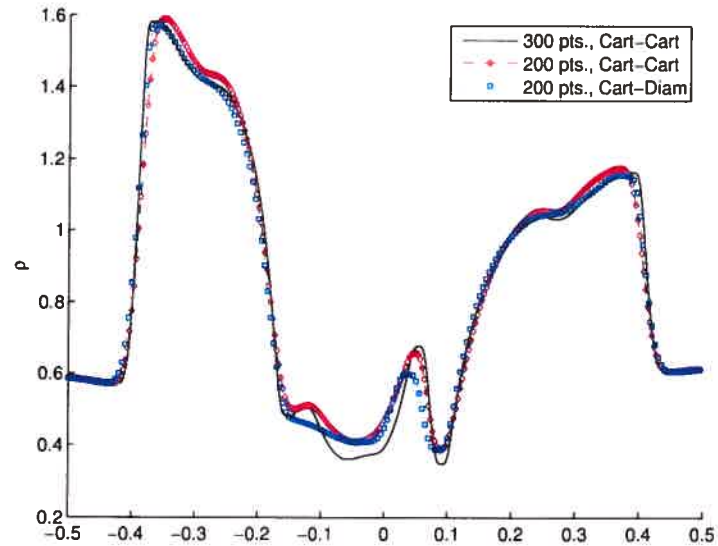


FIG. 5.10. 2D Riemann problem : Plot (along the x -axis) of the mass density obtained using the Cartesian dual cell scheme (200 points, "o" line) and the diamond dual cell scheme (200 points "□" line) ; the reference solution is obtained on 300 x -points using the Cartesian dual cell scheme

Shock-cloud interaction

Our next two-dimensional experiment is a shock-cloud interaction problem. We shall consider a slight modification of the problem initially proposed by Dai and Woodward [14], and use instead the configuration proposed by Rossmannith [24].

The initial data on the computational domain $[0, 1] \times [0, 1]$ consists of two states U_l and U_r for $U = (\rho, u_x, u_y, u_z, p, B_x, B_y, B_z)$ across the line $x = 0.05$ with $U_l = [3.86859, 11.2536, 0, 0, 167.345, 0, 2.1826182, -2.1826182]$ and $U_r = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0.56418958, 0.56418958]$. Centered at the point $(0.25, 0.5)$ of the right state, a cloud of radius $r = 0.15$, 10 times denser than the ambient state, is in hydrostatic equilibrium with the surrounding plasma. The profile of the initial mass density is shown in Fig.5.8 (right). The numerical solution is computed at time $t = 0.06$ on a 400×400 grid.

Fig.5.11 (left) shows the contour lines of the logarithm of the mass density, while

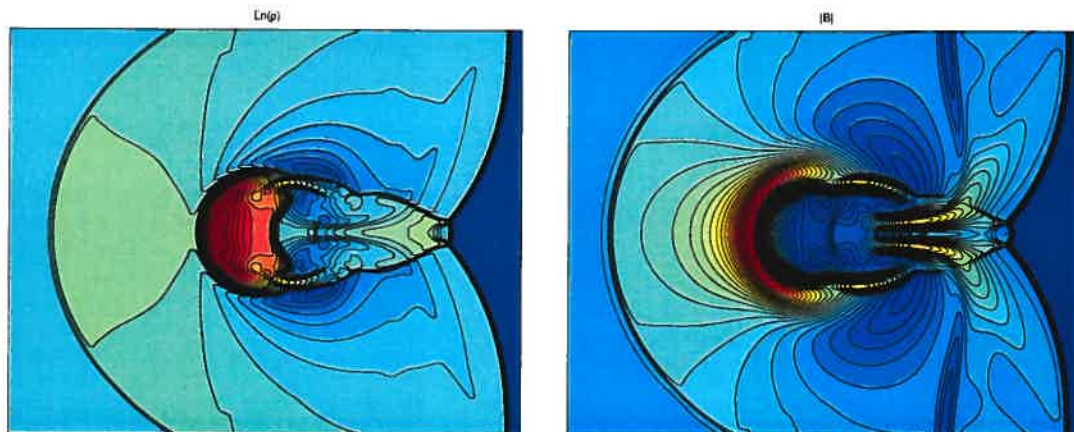


FIG. 5.11. Contour lines of $\text{Log}(\rho)$ for the shock-cloud interaction problem on a 400^2 grid at time $t = 0.06$ (left), Contour lines of the magnitude of the magnetic field (right)

Fig.5.11 (right) shows the magnitude of the magnetic field. Here again, our numerical results are in very good agreement with those presented in [24].

Fig.5.12 (left) shows two plots of the mass density obtained using the Carte-

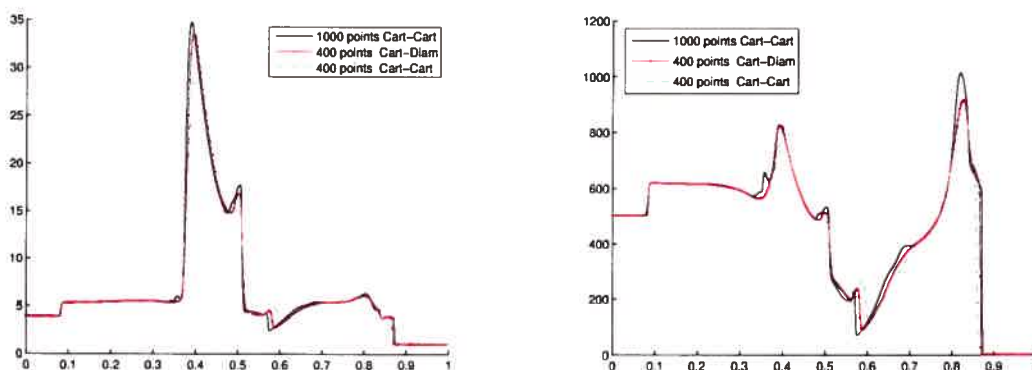


FIG. 5.12. Comparison between diamond and cartesian dual cell schemes 400 points each; reference solution 1000 gridpoints using cartesian scheme

sian (400 points, dashed line) and the diamond (400 points, dotted line) dual cell schemes, respectively, along the line $y = 0.5$. These plots show a good agreement with the reference solution (solid line) computed on 1000 points along the line $y = 0.5$. Fig.5.12 (right) shows the same comparison for the energy. For this test

case, we observe that basically, both versions of the central schemes along with their corresponding CTCS treatment are equivalent, with a slight advantage for the diamond dual cell scheme which presents a better capture of the shocks waves and the contact discontinuities.

If one does not apply the CTCS divergence treatment, both numerical schemes,

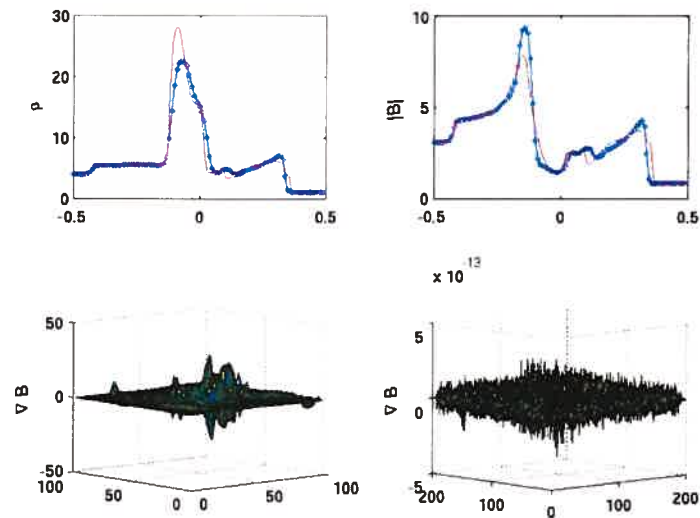


FIG. 5.13. Solution of the shock cloud interaction problem when one does not apply the CTCS procedure (100 points in "o" along the x -axis); the solid line corresponds to the numerical solution obtained with the aid of the CTCS divergence procedure on a 200×200 grid

and contrary to many other numerical methods, can still reach the final time without showing instabilities and produce reasonable results as it is shown in Fig.5.13, where we compare the profile of the mass density (left) and $|B|$ (right) obtained with and without the help of the CTCS procedure; the solid line and the dotted line correspond to the solution obtained using the base scheme with and without divergence treatment, respectively. We also see that when we do not apply the CTCS method, the divergence of the magnetic field is not negligible. We note here that the solution obtained without the CTCS divergence treatment is physically worthless, however it allows us to appreciate the robustness of our methods, which did not fail where many other numerical schemes usually break

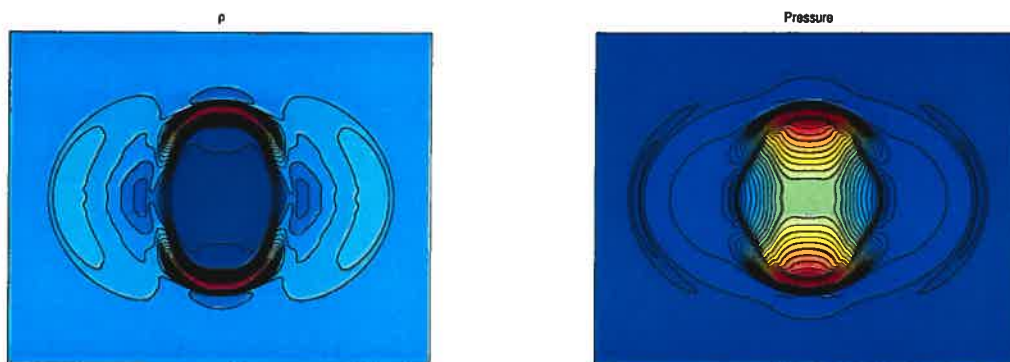


FIG. 5.14. Mass density contour lines for the strong blast problem at time $t=0.0025$ (left), and pressure (right)

down.

Blast wave problem

For our next experiment, we consider the problem of a strong blast wave in a free space. The computational domain is $(x, y) \in [-1/2, 1/2]^2$. The initial data feature a uniform mass density $\rho = 1$, a uniform magnetic field $\mathbf{B} = (0, 100, 0)$, and a uniform velocity field $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$. The explosion is initiated by a large overpressure $p = 10^4$ in a disk of radius $r = 0.1$ centered at the origin while the pressure elsewhere is set to unity. The adiabatic constant is $\gamma = 5/3$. The numerical solution is computed using the Cartesian dual cell scheme at time $t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ on a 200×200 grid. Thanks to the CTCS divergence treatment, the maximum absolute value of the divergence observed for this test is $2.438 \cdot 10^{-12}$. Fig.5.14 and Fig.5.15 (left) show the mass density, the pressure, and the energy contour lines, respectively. Here again our numerical results compare very well with similar problems considered in [19]. Fig.5.15 (right) shows comparison for two plots of the mass density along the x -axis obtained using the Cartesian dual cell scheme (100 points, "+" line) and the diamond dual cell scheme (100 points "x" line); the solid line is the reference solution obtained using the diamond dual cell scheme on a 400×400 grid. We observe that both numerical schemes again lead to fairly equivalent results, with a slight advantage for the diamond dual cell

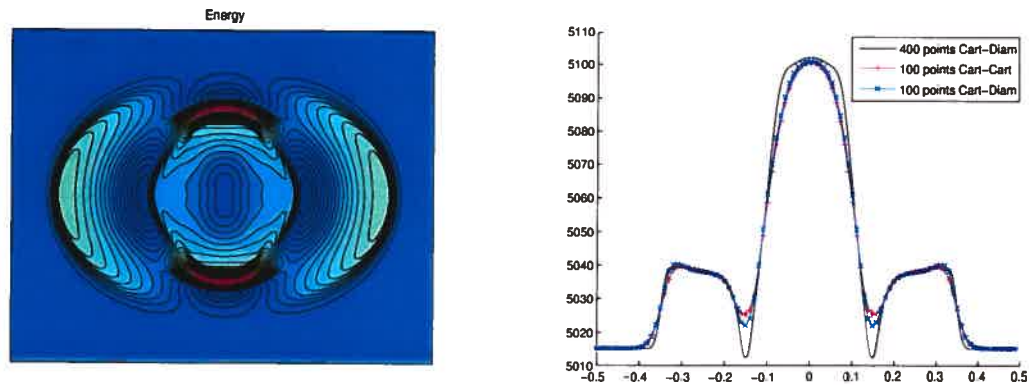


FIG. 5.15. Energy contour lines for the blast wave problem at time $t=0.0025$ (left); two plots of the mass density obtained using the diamond dual cell scheme (100^2 data points in solid line) and Cartesian dual cell scheme 400^2 grid points in "o" (right)

scheme.

If we do not apply the CTCS divergence treatment, both schemes can still reach the final time without generating numerical instabilities, and produce reasonable results as it is shown in Fig.5.16, where we compare the results for the mass density and the magnitude of the magnetic field obtained using the base scheme, along the x -axis, without any divergence treatment (100 points, "o" line); the reference solution (solid line) is obtained using the CTCS divergence treatment on a 200×200 grid. When the CTCS procedure is applied the divergence of the magnetic field remains within the 10^{-12} values, but the numerical base scheme alone fails to produce a solenoidal magnetic field as it is shown in figure 5.16.

Orszag-Tang vortex problem

For our final experiment, we consider the Orszag-Tang MHD turbulence problem that describes the evolution of a compressible vortex system, which is a complex phenomenon involving the interactions between several shock waves generated during the evolution of the vortex system and traveling at different propagation speeds. The initial conditions for our example are : $\rho(x, y) = \rho_0$, $p(x, y) = p_0$, $\mathbf{u}(x, y) = -\sin y \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}$, $\mathbf{B}(x, y) = -\sin y \mathbf{i} + \sin(2x) \mathbf{j}$, with $0 \leq x, y \leq 2\pi$, $\rho_0 = 25/36$ and $p_0 = 5/3$. \mathbf{i} and \mathbf{j} are unit vectors in the x - and y - directions.

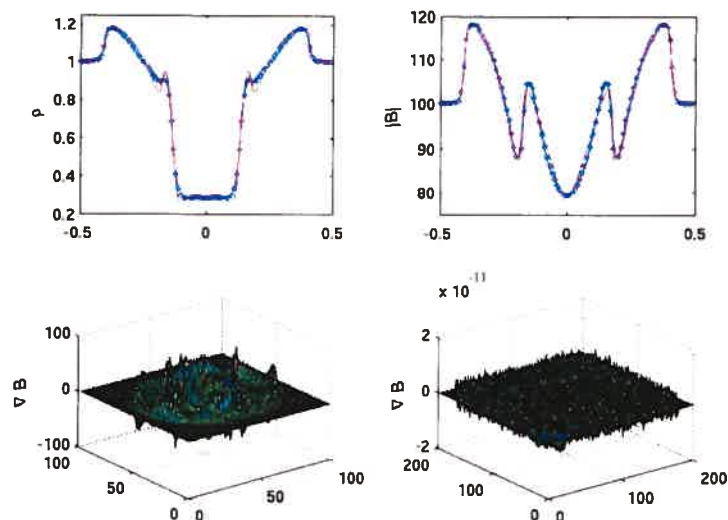


FIG. 5.16. Solution of the 2D blast wave problem without divergence treatment (100 points along the x-axis, "o"-line); the solid line corresponds to the CTCS-treated solution.

The numerical solution is computed on a 400×400 grid using the Cartesian dual cell scheme along with its corresponding CTCS divergence treatment. Fig.5.17

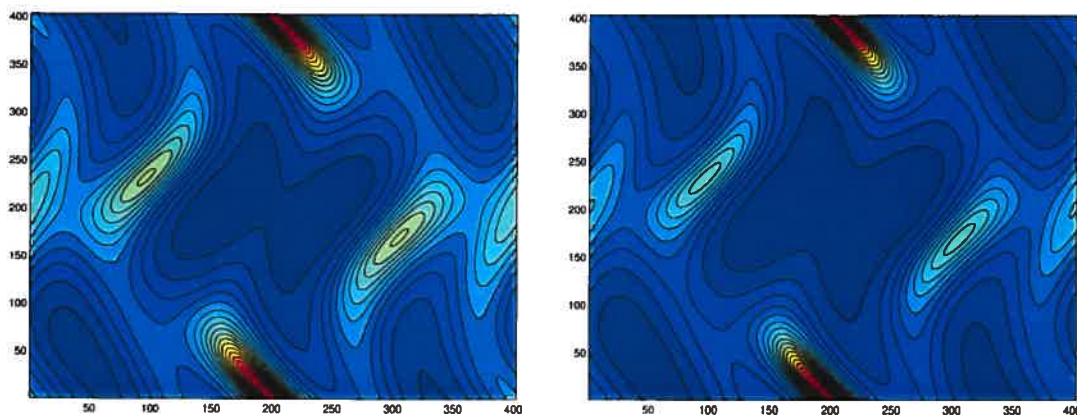


FIG. 5.17. The mass density contour lines (left) and the pressure contours (right) for the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 0.5$

shows the mass density (left) and pressure (right) contours, respectively, at time $t = 0.5$. Fig.5.18 shows the mass density contours, at time $t = 2$ (left) and $t = \pi$ (right), respectively. The agreement between our results (Fig.5.17 and Fig.5.18) and those obtained by Balbas et al. [8], who used a central scheme similar to that

considered in this paper and applied Brackbill and Barnes' projection method [12] to enforce the magnetic field constraint, is excellent. The divergence values of the magnetic field on the computational domain remain of the order of $10e-14$ throughout the calculations.

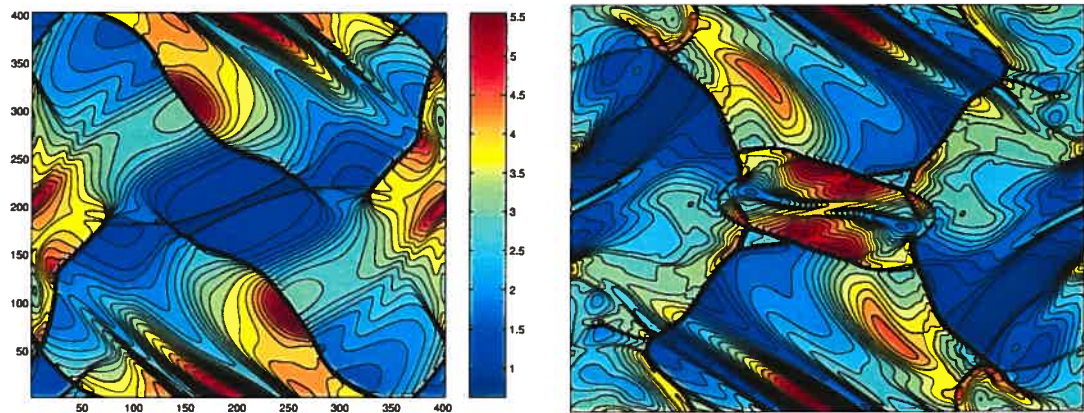


FIG. 5.18. The mass density contour lines for the two-dimensional Orszag-Tang MHD turbulence problem at time $t = 2$ (left) and at time $t = \pi$ (right)

We have compared the results obtained by our two central schemes (Cartesian dual cells, diamond dual cells, respectively) with their associated CTCS divergence treatments, for some of the problems considered in this paper. Table 5.1 shows the maximum absolute divergence values obtained using both CTCS approaches for three different problems.

test	Max($\nabla \cdot \mathbf{B}$) diam. stgd. sch.	Max($\nabla \cdot \mathbf{B}$) Cart. stgd. sch.
2D Riem.	$3.329 \cdot 10^{-14}$; $t=0.8$; $n = 400^2$	$5.828 \cdot 10^{-14}$, $n = 300^2$
Orszag-Tang.	$1.236 \cdot 10^{-13}$; $t=\pi$; $n = 400^2$	$2.436 \cdot 10^{-12}$; $n = 400^2$
Cloud int.	$1.612 \cdot 10^{-11}$; $t=0.06$; $n = 400^2$	$1.065 \cdot 10^{-12}$; $n = 400^2$

TAB. 5.1. The maximum absolute divergence values observed for the 2D tests using both CTCS methods

5.6. CONCLUSION

In this paper we have applied a two-dimensional central finite volume method and solved ideal MHD problems. The numerical base scheme involves Cartesian

cells for both the original and staggered grids, to by-pass the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces. To enforce a divergence-free magnetic field, we introduced a new constrained transport-type approach for central schemes (CTCS) that fits the numerical base scheme. Our CTCS method conserves the accuracy of the base scheme since both the temporal and the spatial integration of the induction equation are approximated using second-order quadrature rules. We have solved several classical two-dimensional ideal MHD problems and compared our results with those we obtain when we apply the numerical method we previously introduced in [7], where the dual cells are diamond-shaped. Results obtained using both CTCS methods compare very well one to another and are in very good agreement with the corresponding results in the literature, thus confirming the potential and efficiency of our methods. The maximum absolute values of the divergence of the magnetic field in the numerical solution observed for the problems considered in this paper are within the 10^{-11} to 10^{-14} range.

Both numerical schemes (the diamond and the Cartesian dual cell schemes) are numerically equivalent; however the numerical method presented in this paper along with its corresponding CTCS procedure is simpler and easier to implement than the method presented in [7]; furthermore, the present numerical approach for solving ideal MHD problems saves about 25 – 30% of the computing time as compared to the diamond dual cell scheme and still achieves very competitive results with a very good agreement with those obtained using the diamond dual cell method, and with existing results in the literature.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I, pp. 85-88, 1995.
- [2] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, ed. M. Hafez and K. Oshima, Vol. IV, pp. 7-14, 1995.
- [3] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, 1-22, 1997.
- [4] P. ARMINJON AND A. MADRANE, *Staggered mixed finite volume/finite element method for Navier-Stokes equations*, AIAA J., 37, pp. 1558-1571, 1999.
- [5] P. ARMINJON, A. ST-CYR, A. MADRANE, *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, Applied Numerical Mathematics, Vol 40/3, pp 367-390, 2002.
- [6] P. ARMINJON AND A. ST-CYR, *Nessyahu-Tadmor-type central finite volume methods without predictor for 3D Cartesian and unstructured tetrahedral grids*, Applied Numerical Mathematics, 46, pp. 135-155, 2003.
- [7] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *Central Finite Volume Methods with Constrained Transport Divergence Treatment for Ideal MHD*, J. Comp. Phys., 204, pp.737-759 2005.
- [8] J. BALBAS, E. TADMOR, AND C. C. WU, *Non-oscillatory central schemes for one- and two-dimensional MHD equations*, J. Comp. Phys., 201, pp. 261-285, 2004.
- [9] D.S. BALSARA, *Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics*, Astrophys. J. Suppl., 116, 133, 1998.

- [10] D. S. BALSARA AND D. S. SPICER, *A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations*, J. Comp. Phys. 149, 270, 1999.
- [11] A. A. BARMIN, A. G. KULIKOVSKIY, AND N. V. POGORELOV, *Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics*, J. Comput. Phys. 126, 77, 1996.
- [12] J. U. BRACKBILL AND D. C. BARNES, *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comp. Phys. 35, 426 1980.
- [13] M. BRIO, C.C. WU, *An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, J.Comp.Physics, (75)2, pp. 400-422, 1988.
- [14] W. DAI AND P. R. WOODWARD, *An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 111, pp. 354-372, 1994.
- [15] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydrodynamical Equations*, J. Comp. Phys., 142, pp. 331-369, 1998.
- [16] C. R. EVANS AND J. F. HAWLEY, *Simulation of magnetohydrodynamic flows : A constrained transport method*, Astrophys. J. 332, 659, 1988.
- [17] A. JEFFREY AND T. TANIUTI, *NON-LINEAR WAVE PROPAGATION*, Academic Press, New York, 1964.
- [18] G. JIANG AND E. TADMOR, *Non-oscillatory Central Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM J. on Scientific Computing, 19, pp.1892-1917, 1998.
- [19] P. LONDRILLO AND L. DEL ZANNA, *High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics* , Astrophysical J., 53, pp. 508-524, 2000.
- [20] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463, 1990.
- [21] K.G. POWELL, P.L. ROE, T.J. LINDE, T.I. GOMBOSI AND D.L. DE ZEEUW, *A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 154, 284 1999.
- [22] K. G. POWELL, P. L. ROE, R. S. MYONG, T. GOMBOSI, AND D. DE ZEEUW, *An Upwind Scheme for Magnetohydrodynamics*, AIAA Paper 95-1704-CP, 1995.

- [23] K. G. POWELL, *An Approximate Riemann Solver for MHD*, ICASE NASA, Langley Research Center, Contract Rep. 194902, ICASE Rep. 94-25, Hampton, VA, 1994.
- [24] J. ROSSMANITH, *A Wave Propagation Method with Constrained Transport for Ideal and Shallow Water Magnetohydrodynamics*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of Washington, 2002.
- [25] D. RYU, F. MINIATI, T. W. JONES, AND A. FRANK, *A divergence-free upwind code for multi-dimensional magnetohydrodynamic flows*, *Astrophys. J.* 509, 244, 1998.
- [26] G. TÓTH, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes*, *J. Comp. Phys.*, 161, pp. 605-652, 2000.
- [27] G. TÓTH AND D. ODSTRČIL, *Comparison of some flux-corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems*, *J. Comp. Phys.* 128, 82, 1996.
- [28] A. L. ZACHARY, AND P. COLELLA, *A high-order Godunov method for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, *J. Comp. Phys.*, 99, pp. 341-347, 1992.
- [29] U. ZIEGLER, *A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics*, *J. Comp. Phys.*, 192 393-416, 2004.

Accord des coauteurs et permission de l'éditeur

Déclaration des coauteurs d'un article

Identification de l'étudiant et du programme

Rony Touma

Ph.D. en Mathématiques Appliquées.

Description de l'article

Auteurs :

Rony Touma

Paul Arminjon

Titre :

Central Finite Volume Schemes with Constrained Transport Divergence Treatment, II. Three-Dimensional Ideal MHD

Journal :

Journal of Computational Physics, (soumis).

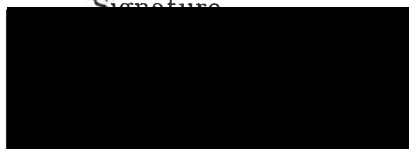
Déclaration du coauteur

À titre de coauteur de l'article identifié ci-dessus, je suis d'accord pour que Rony Touma inclue cet article dans sa thèse de doctorat qui a pour titre Méthodes de Volumes Finis pour les Systèmes d'Équations Hyperboliques : Applications en Aérodynamique et en Magnétohydrodynamique

Coauteur

Paul Arminjon

Signature



Date

Septembre 2005

Contribution :

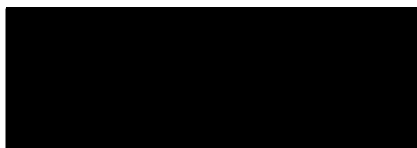
Le dernier article est consacré aux problèmes tridimensionnels de magnétohydrodynamique idéale. Dans la première partie de cet article j'ai présenté un nouveau schéma numérique central tridimensionnel dont les cellules originales sont cartésiennes et les cellules duales sont en diamants (deux pyramides régulières ayant la même base). J'ai résolu des problèmes classiques pour valider ce schéma numérique et j'ai présenté une vérification de convergence de la méthode. Par la suite j'ai présenté une extension tridimensionnelle de la méthode CTCS pour traiter la divergence du champ magnétique dans le cadre de ce nouveau schéma numérique. Ensuite j'ai adapté le schéma numérique central tridimensionnel dont les cellules originales et duales sont cartésiennes pour résoudre les problèmes de MHD idéale, et j'ai construit la version de la méthode CTCS correspondante. J'ai appliqué chacun de ces deux schémas tridimensionnels pour résoudre des problèmes de MHD idéale et j'ai présenté une comparaison numérique des résultats obtenus. Ma contribution a été jugée fondamentale et essentielle par mon directeur de recherche et coauteur (cf. l'avis du directeur de recherche à ce sujet) ; en particulier, j'ai effectué et programmé tous les calculs.

Nom de l'étudiant

Signature

Date

Rony Touma



Septembre 2005

Chapitre 6

CENTRAL FINITE VOLUME SCHEMES WITH CONSTRAINED TRANSPORT DIVERGENCE TREATMENT, II. THREE-DIMENSIONAL IDEAL MHD

R. Touma and P. Arminjon

ABSTRACT

We present three-dimensional central finite volume methods for solving systems of hyperbolic equations. Based on the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor one-dimensional central finite difference schemes, the numerical methods we propose involve an original and a staggered grid in order to by-pass the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces. The cells of the original grid are Cartesian (cubes with faces parallel to the axes) while those of the staggered grid are either Cartesian or diamond-shaped. We apply these methods and solve some ideal magnetohydrodynamics problems. To satisfy the solenoidal property of the magnetic field in the numerical solution, we present an adaptation of Evans and Hawley's constrained transport method for central schemes which we call "CTCS". The CTCS method is easy to implement, it deals directly with the computed solution and does not require any additional staggering for the magnetic field components; furthermore, it preserves the second-order accuracy of the base scheme. Even without the application of the CTCS procedure, our

numerical base schemes do not break down, and may even in some cases deliver reasonable results. The diamond dual cell scheme has a slight advantage for shocks and contact discontinuities. Our numerical results are in good agreement with corresponding results appearing in the recent literature.

KEYWORDS

3D central schemes, ideal magnetohydrodynamics, constrained transport.

6.1. INTRODUCTION

Following the introduction of one-dimensional central schemes by Nessyahu and Tadmor [16], several extensions to two and three space dimensions on Cartesian [2],[15] or unstructured [1], [3], [4] grids have been proposed for solving systems of hyperbolic equations. In this paper we propose a family of second-order accurate central schemes to solve three-dimensional systems of hyperbolic conservation laws and in particular problems in ideal magnetohydrodynamic.

When solving ideal MHD problems, the accumulation of numerical errors such as the truncation or round-off error can usually lead to a non physical phenomenon known as magnetic monopoles (when $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$). As a consequence, negative pressures and densities and other non-physical waves can arise as it is discussed in [9]. Magnetic monopoles have never been observed experimentally and their absence results in the Maxwell equation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. For all practical purposes, the magnetic field \mathbf{B} should satisfy this constraint and be solenoidal. Several approaches have been proposed to satisfy this constraint. Brackbill and Barnes [9] proposed their "projection scheme" to maintain a solenoidal magnetic field. The method involves the resolution of a Poisson equation. This approach is easy to understand, the non obvious part of it being the implementation of the boundary conditions for the magnetic field components when non trivial physical boundaries apply. Furthermore, the resolution of Poisson's equation at each time step is a time-consuming procedure which slows down the computations.

Another approach to satisfy the magnetic physical constraint is Powell's "eight wave formulation" [18], [19]. Powell developed a Roe-type Riemann solver [20], using a nonconservative form of the MHD equations and an upwind scheme, for solving ideal MHD problems (where the eighth wave is associated with the propagation of $\text{div} \vec{\mathbf{B}}$). This method, which proved to be numerically robust, failed in some cases and generated wrong jump conditions especially across strong shocks [24].

Another interesting approach to ensure a solenoidal magnetic field is the constrained transport method (CT) proposed by Evans and Hawley [13] which was first presented for finite difference schemes. In its original form, the CT approach

consists in using a staggered magnetic field (usually obtained with linear interpolation), and ensures a zero-divergence magnetic field when the divergence operator is discretized with the staggered magnetic field components. Several extensions of this method were later presented by Dai and Woodward [11], Balsara and Spicer [7], Ryu et al. [22], Tóth [24], and Ziegler [27]. Tóth [24] has showed that the staggered magnetic field can be avoided and the CT approach can be simply written without any staggering of the magnetic field. Now for central schemes, which rest on the use of an original and a dual staggered grid, none of the existing CT methods could be directly adopted.

In a previous work [5], we have adapted two-dimensional central schemes to magnetohydrodynamical problems by introducing a new constrained transport -type, magnetic field divergence treatment. The CTCS method we built preserves the second-order of accuracy and does not require any staggering of the collocation points of the magnetic field. We have successfully solved several typical ideal MHD problems in two space dimensions. For the base scheme, we used a Cartesian original grid, with a staggered dual grid featuring diamond-shaped cells [5]. The numerical experiments we presented in [5] compare very well with those appearing in the literature.

Recently Balbas et al. [6] have used 2D central schemes with Cartesian original and dual cells to solve ideal MHD problems; to enforce the divergence constraint, they used Brackbill and Barnes' projection method.

In the present paper, we present two three-dimensional central schemes to solve ideal MHD problems. The numerical base scheme uses an original Cartesian grid and a staggered grid with Cartesian or oblique diamond-shaped dual cells. We construct a new adaptation (CTCS) of Evans and Hawley's Constrained Transport method to treat the non-vanishing magnetic field divergence. This CTCS approach is second-order accurate in space and time, hence preserving the accuracy of the base scheme, and is less time-consuming than the projection method. Furthermore our new CTCS method does not require any additional staggering for the magnetic field components, contrary to Evans and Hawley's original constrained transport method.

The method proposed by Ziegler [27] presented an MHD solver which involves a

semi-discrete central scheme for solving the hyperbolic system consisting of the conservation, momentum and energy equations, while Faraday's law is integrated separately using an adapted version of the CT scheme, with staggered magnetic field components, to guarantee a divergence-free magnetic field. By contrast, the numerical base scheme proposed here is used to solve the complete set of the ideal MHD equations (the eight equations) and we then apply the CTCS method to treat the magnetic field components. The magnetic field in the numerical solution obtained using the base scheme is used to compute the electric field at time $t^{n+1/2}$ to ensure second order accuracy.

The numerical results we show in this paper compare very well with those appearing in the recent literature; the numerical magnetic field divergence we observe for the problems considered here remains of the order of 10^{-12} .

6.2. IDEAL MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUATIONS

We consider in this paper the Ideal MHD equations written in their conservation form as :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + I(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ (\rho e + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} \end{bmatrix} = 0. \quad (6.2.1)$$

The system (6.2.1) describes the conservation of the mass density ρ , momentum $\rho \mathbf{v}$, the total energy ρe . Faraday's law describes the evolution of the magnetic field \mathbf{B} . The thermal pressure is computed from an ideal gas equation of state,

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho |\mathbf{v}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2), \quad (6.2.2)$$

where γ denotes the ratio of specific heats.

6.3. MULTIDIMENSIONAL CENTRAL SCHEMES

In this section we present the three-dimensional central schemes we are going to use as base schemes for solving ideal MHD problems. The original cells are Cartesian (uniform cubes), the staggered dual cells can be either Cartesian cells or diamond-shaped cells.

6.3.1. Three-dimensional central scheme with Cartesian dual staggered cells

In this section we present the three-dimensional central scheme that we will apply for solving hyperbolic systems of conservation laws such as the MHD equations; the schemes uses Cartesian original and staggered dual cells. We consider the following initial value problem :

$$\begin{cases} \vec{U}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = U_t + \vec{f}_x + \vec{g}_y + \vec{h}_z = 0, & t > 0, \\ \vec{U}(x, y, z, t = 0) = \vec{U}_0(x, y, z). \end{cases} \quad (6.3.1)$$

The system (6.3.1) is hyperbolic, i.e., the matrix defined as an arbitrary linear combination of the jacobian matrices of its flux functions has a complete set of real eigenvalues. We consider for our computational domain a uniform cuboid shaped grid. Starting from the original Cartesian grid with cells $C_{i,j,k} \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$ ("blue cubes" centered at nodes (x_i, y_j, z_k)), at time t^n , we alternate to the dual staggered cell $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \equiv [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ ("yellow cubes" centered at node $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$) at time t^{n+1} , and return back to the original cell $C_{i,j,k}$ at time t^{n+2} as it is shown in Fig.6.1. The main advantage of using central dual-staggered cell schemes is the

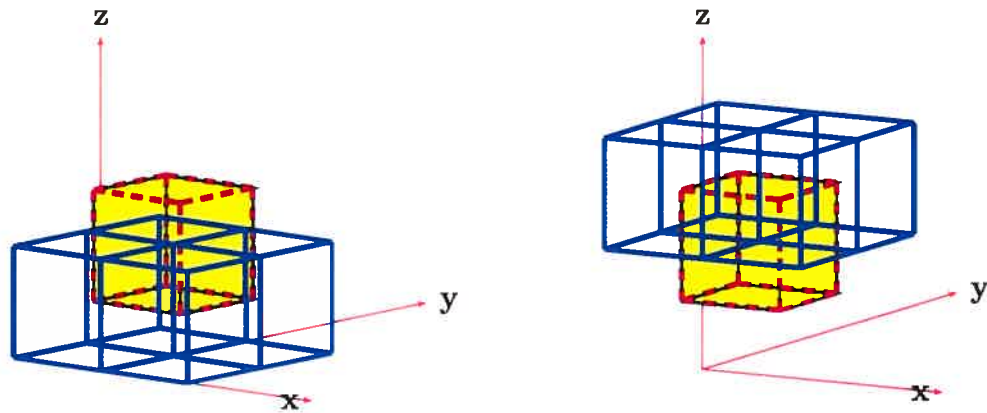


FIG. 6.1. Original cells are the cubes (solid line) centered at nodes (x_i, y_j, z_k) while dual cells are the staggered cubes (dashed lines) centered at nodes $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2})$ (center of the cell $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$)

fact that we by-pass the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces. We proceed as follows :

We suppose that the solution is given at time t^n on the original blue cells; in a first time step, we want to compute the solution of system (6.3.1) on the staggered dual yellow cubes using as initial conditions the solution at time t^n . We shall denote the dual cell $D_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ by shorter notation $\mathcal{D}_{i,j,k}$. We integrate the conservation law (6.3.1) on the domain $\Omega = \mathcal{D}_{i,j,k} \times [t^n, t^{n+1}]$; we obtain :

$$\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV = \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) dV dt. \quad (6.3.2)$$

The left-hand side of equation (6.3.2) defines the value of the solution at time t^{n+1} on the staggered dual cell $\mathcal{D}_{i,j,k}$. We approximate the first integral of the right-hand side of (6.3.2) using a second order accurate quadrature formula with the aid of van Leer's MUSCL type interpolants. Let $\{C_{ds}\}$, $s = 1, \dots, 4$ denote the four uniform cubes centered at the points (x_i, y_j, z_k) , (x_{i+1}, y_j, z_k) , (x_{i+1}, y_{j+1}, z_k) , (x_i, y_{j+1}, z_k) , respectively. Similarly, Let $\{C_{us}\}_{s=1..4}$ denote the four uniform cubes centered at the points (x_i, y_j, z_{k+1}) , (x_{i+1}, y_j, z_{k+1}) , $(x_{i+1}, y_{j+1}, z_{k+1})$, and (x_i, y_{j+1}, z_{k+1}) . The integral of $\vec{U}(x, y, z, t^n)$ on the dual cell $\mathcal{D}_{i,j,k}$ in equation (6.3.2) is split into eight integrals as follows :

$$\int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV = \sum_{r \in \{u,d\}} \sum_{s=1}^{s=4} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{rs}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV. \quad (6.3.3)$$

Applying van Leer's "MUSCL" piecewise linear interpolants [26] defined at the center of cell $C_{i,j,k}$ by :

$$\vec{U}_{ijk}(x, y, t^n) \simeq \vec{U}_{ijk}^n + \frac{x - x_i}{\Delta x} \vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \frac{y - y_j}{\Delta y} \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \frac{z - z_k}{\Delta z} \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim}, \quad (6.3.4)$$

will guarantee second-order accuracy and preserve the monotonicity. Here $(\nabla \vec{U})^{lim} \equiv (\vec{U}_x^{lim}/\Delta x, \vec{U}_y^{lim}/\Delta y, \vec{U}_z^{lim}/\Delta z)$ is a limited numerical gradient. Using the mid-point rule we approximate each integral in the summation (in (6.3.3)) to second-order accuracy ; hence for $r = d, s = 1$ we obtain :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{d1}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV &\simeq \vec{U}(x_i + h/4, y_j + h/4, z_k + h/4, t^n) \mathcal{V}(\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{d1}) \\ &\simeq \left\{ \vec{U}_{i,j,k} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \frac{1}{4} \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim} \right\} \frac{h^3}{8}. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Where $\mathcal{V}(\mathcal{D}_{i,j,k} \cap C_{r,s}) = h^3/8, r \in \{u, d\}, s = 1, \dots, 4$ denotes the volume of one of the partial cubes that form the dual cell. In a similar manner we compute each integral in the summation in equation (6.3.3) and thus we obtain :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}^n dV &\simeq \frac{h^3}{8} \left\{ \begin{aligned} &\vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} \\ &+ \vec{U}_{i,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \end{aligned} \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k;z}^{lim}) \right. \\ &+ (-\vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k;z}^{lim}) \\ &+ (-\vec{U}_{i+1,j+1,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j+1,k;z}^{lim}) \\ &+ (\vec{U}_{i,j+1,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k;y}^{lim} + \vec{U}_{i,j+1,k;z}^{lim}) \\ &+ (\vec{U}_{i,j,k+1;x}^{lim} + \vec{U}_{i,j,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j,k+1;z}^{lim}) \\ &+ (-\vec{U}_{i+1,j,k+1;x}^{lim} + \vec{U}_{i+1,j,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k+1;z}^{lim}) \\ &+ (-\vec{U}_{i+1,j+1,k+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j+1,k+1;z}^{lim}) \\ &\left. + (\vec{U}_{i,j+1,k+1;x}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k+1;y}^{lim} - \vec{U}_{i,j+1,k+1;z}^{lim}) \right\}, \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

which we write in a simplified form as :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{U}^n dV &\simeq h^3 \left\{ \frac{1}{8} \left\{ \vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} + \vec{U}_{i,j,k+1} \right. \right. \\ &\left. \left. + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \right\} + \frac{1}{32} RHS_{i,j,k}^{lim} \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Now we compute the second integral of the right-hand side of equation (6.3.2), for that we first apply the divergence formula; we obtain :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathcal{D}_{i,j,k}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) dV dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t)) \cdot \vec{n} dA dt. \quad (6.3.8)$$

Here \vec{n} denotes the unit normal vector to $\partial\mathcal{D}_{i,j,k}$. The flux integral with respect to the time in (6.3.8) is approximated to second order accuracy using the midpoint rule. We compute the predicted values of the flux at the intermediate time using a first-order accurate Taylor expansion and using the conservation law :

$$\begin{aligned} \vec{F}^{n+1/2} &= \vec{F}(\vec{U}^{n+1/2}), \\ \vec{U}^{n+1/2} &\simeq \vec{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t^n \\ &\simeq \vec{U}^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \vec{F}^n. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Equation (6.3.9) can be written using the Jacobian matrices (A, B, C) of the flux functions $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})$ as follows :

$$\vec{U}^{n+1/2} \simeq \vec{U}^n - \frac{\Delta t}{2h} (A(\vec{U}^n) \vec{U}_x^{lim} + B(\vec{U}^n) \vec{U}_y^{lim} + C(\vec{U}^n) \vec{U}_z^{lim}). \quad (6.3.10)$$

Alternately, one could instead directly apply a flux limiting procedure [6] in equation (6.3.9) without using the jacobian matrices, which may accelerate the computations; this is known as the jacobian-free form (JFF).

We then decompose the right-hand side of equation (6.3.8) into a summation of six integrals over the six interfaces $(S_r, r = 1..6)$ of the dual cell as follows :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} dA = \sum_{r=1}^6 \int_{S_r} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_r dA, \quad (6.3.11)$$

where \vec{n}_r denotes the unit normal vector to S_r . $\vec{n}_r, r = 1, \dots, 6$ are respectively $(0, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 0, -1)$ and $(0, 0, 1)$. Hence, for $r = 1$, the flux

integral across the interface S_1 is approximated to second order accuracy as :

$$\int_{S_1} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n}_1 dA \simeq \frac{-h^2}{2} (g_{i,j,k}^{n+1/2} + g_{i+1,j,k}^{n+1/2} + g_{i,j,k+1}^{n+1/2} + g_{i+1,j,k+1}^{n+1/2}), \quad (6.3.12)$$

and so on, we compute the flux integral at time $t^{n+1/2}$ across the interfaces of the dual cell; we obtain :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D}_{i,j,k}} \vec{F}^{n+1/2} \cdot \vec{n} dA &\simeq \frac{h^2}{4} \left\{ -(g_{i,j,k}^{n+1/2} + g_{i+1,j,k}^{n+1/2} + g_{i,j,k+1}^{n+1/2} + g_{i+1,j,k+1}^{n+1/2}) \right. \\ &\quad + (f_{i+1,j,k}^{n+1/2} + f_{i+1,j+1,k}^{n+1/2} + f_{i+1,j,k+1}^{n+1/2} + f_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad + (g_{i,j+1,k}^{n+1/2} + g_{i+1,j+1,k}^{n+1/2} + g_{i,j+1,k+1}^{n+1/2} + g_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad - (f_{i,j,k}^{n+1/2} + f_{i,j+1,k}^{n+1/2} + f_{i,j,k+1}^{n+1/2} + f_{i,j+1,k+1}^{n+1/2}) \\ &\quad - (h_{i,j,k}^{n+1/2} + h_{i+1,j,k}^{n+1/2} + h_{i,j+1,k}^{n+1/2} + h_{i+1,j+1,k}^{n+1/2}) \\ &\quad \left. + (h_{i,j,k+1}^{n+1/2} + h_{i+1,j,k+1}^{n+1/2} + h_{i,j+1,k+1}^{n+1/2} + h_{i+1,j+1,k+1}^{n+1/2}) \right\} \\ &\simeq \frac{h^2}{4} RHS_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Combining equations (6.3.2), (6.3.7) and (6.3.13), we obtain the formula for the solution at time t^{n+1} on the staggered dual cell $\mathcal{D}_{i,j,k}$

$$\begin{aligned} \vec{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{8} \left\{ \vec{U}_{i,j,k} + \vec{U}_{i+1,j,k} + \vec{U}_{i+1,j+1,k} + \vec{U}_{i,j+1,k} \right. \\ &\quad + \vec{U}_{i,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j,k+1} + \vec{U}_{i+1,j+1,k+1} \\ &\quad \left. + \vec{U}_{i,j+1,k+1} \right\} + \frac{1}{32} RHS_{i,j,k}^{lim} + \frac{\Delta t}{4h} RHS_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

6.3.2. Three-dimensional central scheme with diamond staggered dual cells

Another choice for the dual cells of the staggered grid is the three-dimensional extension of the diamond staggered cell scheme we previously considered in [5]. For our computational domain, we consider a parallelepiped shaped domain uniformly discretized with the Cartesian cubic cells $C_{i,j,k} \equiv [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}] \times [z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$, centered at the nodes $a_{i,j,k}$. For the dual staggered cells, we

consider the diamond shaped cells obtained by joining the centers of two adjacent Cartesian cells $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$ to their common interface as in Fig.6.2; the resulting cell is denoted by $D_{i+1/2,j,k}$. We suppose that the solution $\vec{U}_{i,j,k}^n$ is

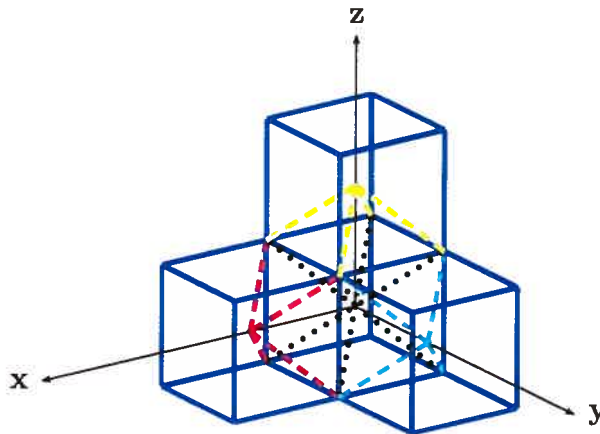


FIG. 6.2. Original Cartesian (blue cubes) and dual staggered grids

given at time $t = t^n$ on the original Cartesian cells $C_{i,j,k}$. We consider the cells $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$ centered at the nodes $c_l = (x_i, y_j, z_k)$ and $c_r = (x_{i+1}, y_j, z_k)$ respectively and such that the line $c_l c_r$ is parallel to the x -axis as in Fig.6.3. We integrate equation (6.3.1) on the domain $D_{i+1/2,j,k} \times [t^n, t^{n+1}]$ and we apply

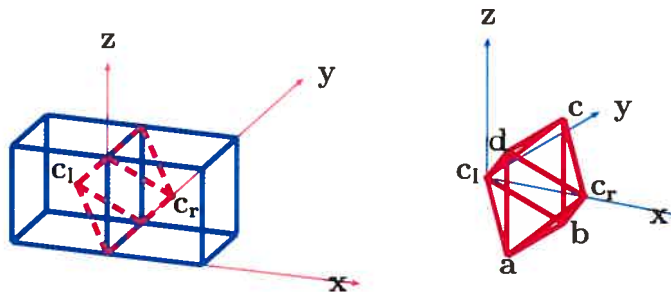


FIG. 6.3. Two Cartesian cells $C_{i,j,k}, C_{i+1,j,k}$ (blue cubes) and dual cell $D_{i+1/2,j,k}$ (diamond cell) in red

the divergence theorem; we obtain :

$$\int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^{n+1}) dV = \int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^n)) \cdot \vec{n} dA dt \quad (6.3.15)$$

the left-hand side of equation (6.3.15) defines the average value of the solution $\vec{U}_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ on the staggered dual cell; \vec{n} denotes the unit outward normal vector to the boundary $\partial D_{i+1/2,j,k}$ of the dual cell. Applying the midpoint formula, and with the help of van Leer's MUSCL-type linear interpolants [26], we approximate up to second-order accuracy the first integral of the right-hand side of equation (6.3.15) as follows :

$$\int_{D_{i+1/2,j,k}} \vec{U}(x, y, z, t^n) dV \simeq \frac{h^3}{6} \left[\vec{U}_{i,j,k}^n + \vec{U}_{i+1,j,k}^n + \frac{2}{5} (\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim}) \right]. \quad (6.3.16)$$

Now we compute the second integral of the right-hand side of equation (6.3.15); we use the midpoint formula to approximate with second-order accuracy the flux-integral with respect to the time variable :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^n)) \cdot \vec{n} dA dt \simeq \Delta t \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} dA. \quad (6.3.17)$$

Before we compute the flux integral across the area $\partial D_{i+1/2,j,k}$ we need to introduce the following notations :

(1) For the Cartesian cells $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$:

- $c_l = (x_i, y_j, z_k)$ and $c_r = (x_{i+1}, y_j, z_k)$ denote the centers of the adjacent cells $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$.
- The common interface of the adjacent cells $C_{i,j,k}$ and $C_{i+1,j,k}$ is (abcd) with :
 - $a : (x_i + h/2, y_j - h/2, z_k - h/2), \quad c : (x_i + h/2, y_j + h/2, z_k + h/2)$
 - $b : (x_i + h/2, y_j + h/2, z_k - h/2), \quad d : (x_i + h/2, y_j - h/2, z_k + h/2)$

(2) For the dual staggered cell $(D_{i+1/2,j,k})$:

- T_l^1 denotes the triangle c_lcd
 - $\vec{n}_l^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} + \vec{k}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_l^1
 - $e_l^1(x_i + h/3, y_j, z_k + h/3)$ is the center of the triangle T_l^1

- T_l^2 denotes the triangle c_lad
 - : $\vec{n}_l^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} - \vec{j}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_l^2
 - : $e_l^2(x_i + h/3, y_j - h/3, z_k)$ is the center of the triangle T_l^2
- T_l^3 denotes the triangle c_lcb
 - : $\vec{n}_l^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} + \vec{j}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_l^3
 - : $e_l^3(x_i + h/3, y_j + h/3, z_k)$ is the center of the triangle T_l^3
- T_l^4 denotes the triangle c_lab
 - : $\vec{n}_l^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\vec{i} - \vec{k}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_l^4
 - : $e_l^4(x_i + h/3, y_j, z_k - h/3)$ is the center of the triangle T_l^4
- T_r^1 denotes the triangle c_rcd
 - : $\vec{n}_r^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} + \vec{k}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_r^1
 - : $e_r^1(x_{i+1} - h/3, y_j, z_k + h/3)$ is the center of the triangle T_r^1
- T_r^2 denotes the triangle c_rad
 - : $\vec{n}_r^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} - \vec{j}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_r^2
 - : $e_r^2(x_{i+1} - h/3, y_j - h/3, z_k)$ is the center of the triangle T_r^2
- T_r^3 denotes the triangle c_rbc
 - : $\vec{n}_r^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} + \vec{j}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_r^3
 - : $e_r^3(x_{i+1} - h/3, y_j + h/3, z_k)$ is the center of the triangle T_r^3
- T_r^4 denotes the triangle c_rab
 - : $\vec{n}_r^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{i} - \vec{k}]$ is the unit outward normal vector to the triangle T_r^4
 - : $e_r^4(x_{i+1} - h/3, y_j, z_k - h/3)$ is the center of the triangle T_r^4

We approximate the flux-integral across $\partial D_{i+1/2,j,k}$ using a second-order quadrature formula. For that, we need predictions of both $\vec{U}_{\partial D_{i+1/2,j,k}}^{n+1/2}$ and $\vec{F}_{\partial D_{i+1/2,j,k}}^{n+1/2}$ at the intermediate time $t^{n+1/2}$. Using first-order Taylor expansions with respect to t , we evaluate the approximations at the centers $(e_l^k)_{k=1,\dots,4}$ and $(e_r^k)_{k=1,\dots,4}$ of the triangles $(T_l^k)_{k=1,\dots,4}$ and $(T_r^k)_{k=1,\dots,4}$ of the dual cells as follows :

$$\vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2} \simeq \vec{U}_s(e_s^k, t^n) + \frac{\Delta t}{2} \vec{U}_t(e_s^k, t^n), \quad s = l, r \text{ \& } k = 1, \dots, 4. \quad (6.3.18)$$

where $\vec{U}_s(e_s^k, t^n)$ is obtained using equation (6.3.20). With the aid of equation (6.3.1), we obtain :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2} \simeq \vec{U}_s(e_s^k, t^n) - \frac{\Delta t}{2h} (A(\vec{U}_s(e_s^k, t^n)) \vec{U}_{e_s;x}^{lim} + B(\vec{U}_s(e_s^k, t^n)) \vec{U}_{e_s;y}^{lim} \\ + C(\vec{U}_s(e_s^k, t^n)) \vec{U}_{e_s;z}^{lim}), \quad s = l, r \text{ \& } k = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Here A, B and C are the Jacobian matrices of the flux functions $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$, respectively. $\vec{F}(\vec{U}_{T_s^k}^{n+1/2})$ is considered as an approximate value of the flux at the interface-center of the dual cell. We use linear interpolation in the neighborhood of the points $c_s, s = l, r$, to approximate $\vec{U}^n(x, y, z)$ as follows :

$$\begin{aligned} \vec{U}_s(e_s^k, t^n) \simeq \vec{U}_{c_s}^n + \left(\frac{x_{e_s^k} - x_{c_s}}{\Delta x} \right) \vec{U}_{c_s;x}^{lim} + \left(\frac{y_{e_s^k} - y_{c_s}}{\Delta y} \right) \vec{U}_{c_s;y}^{lim} \\ + \left(\frac{z_{e_s^k} - z_{c_s}}{\Delta z} \right) \vec{U}_{c_s;z}^{lim}. \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

The flux-integral can finally be computed as follows :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_{i+1/2,j,k}} \vec{F}(\vec{U}(x, y, z, t^{n+1/2})) \cdot \vec{n} \, dA \simeq \\ \frac{\mathcal{A}(T)}{\sqrt{2}} \cdot \left[\{ -\vec{f}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) + \vec{h}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) \} + \{ \vec{f}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) + \vec{h}(\vec{U}_{e_l^1}^{n+1/2}) \} \right. \\ + \{ -\vec{f}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) \} + \{ \vec{f}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) - \vec{g}(\vec{U}_{e_l^2}^{n+1/2}) \} \\ + \{ -\vec{f}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) \} + \{ \vec{f}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) + \vec{g}(\vec{U}_{e_l^3}^{n+1/2}) \} \\ \left. + \{ -\vec{f}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) - \vec{h}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) \} + \{ \vec{f}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) - \vec{h}(\vec{U}_{e_l^4}^{n+1/2}) \} \right] \\ = \frac{\mathcal{A}(T)}{\sqrt{2}} RHS, \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

where $\mathcal{A}(T) = \frac{h^2}{2\sqrt{2}}$ denotes the area of the triangle $T(\mathcal{A}(T_i^k) = \mathcal{A}(T_r^k) = \mathcal{A}(T))$. The solution at time t^{n+1} on the dual cell $D_{i+1/2,j,k}$ takes its final form :

$$\begin{aligned} \vec{U}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2}(\vec{U}_{i,j,k}^n + \vec{U}_{i+1,j,k}^n) + \frac{1}{5}(\vec{U}_{i,j,k;x}^{lim} - \vec{U}_{i+1,j,k;x}^{lim}) \\ - \frac{3\Delta t}{4h} RHS. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

In a similar manner we compute the solution at time t^{n+1} on the dual cells $D_{i,j+1/2,k}$ and $D_{i,j,k+1/2}$. The solution on the original Cartesian cells will be computed at time t^{n+2} .

6.4. DIVERGENCE-FREE MAGNETIC FIELD REQUIREMENT AND SOME NUMERICAL APPROACHES

If, in the solution of a specific ideal MHD problem, the initial magnetic field \mathbf{B} satisfies the $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint, it is easily proved that it will satisfy it at all time. Unfortunately, the numerical solution rarely displays this property : due to truncation and round-off errors, the divergence builds up to non-negligible values, which can lead to the break down of the numerical solution. Among several methods proposed to induce the magnetic field to satisfy the divergence constraint, we consider here Evans and Hawley's Constrained Transport (CT) approach [13] as it was likely to be less time consuming than e.g. Brackbill and Barnes' projection method [9] which requires a Poisson solver at each time step.

The original version of the CT method uses the magnetic field \mathbf{B} at the cell centers, and computes by linear interpolation a staggered magnetic field \mathbf{b} at the cell interface midpoints; the components of the staggered magnetic field \mathbf{b} are then treated, using a special symmetric discretization of the induction equation, so as to satisfy the divergence constraint. More recently, Tóth [24] has observed that this staggering is not essential, and he reformulated each of the existing staggered versions of the CT method (Evans and Hawley [13], Dai and Woodward [11], Balsara and Spicer [7], Ryu et al. [22]) into unstaggered methods.

As we have seen in the previous section, the numerical schemes we use require an original and a staggered grid and thus, none of the previous versions of the CT method can be applied directly. Here we propose two three-dimensional CTCS

adaptations of the CT method that apply to 3D central schemes with Cartesian or diamond shaped dual cells, respectively. This CTCS approach directly deals with the cell centered magnetic field components and does not require any additional staggering.

We shall describe here the CTCS method in the case of Cartesian dual cells. We suppose that the solution is given on the original grid at time t^n and the magnetic field satisfies the divergence-free property, i.e., the central difference discretization of the divergence operator of the magnetic field satisfies

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n \simeq & \frac{B_{i+1,j,k}^{n,x} - B_{i-1,j,k}^{n,x}}{2\Delta x} + \frac{B_{i,j+1,k}^{n,y} - B_{i,j-1,k}^{n,y}}{2\Delta y} \\ & + \frac{B_{i,j,k+1}^{n,z} - B_{i,j,k-1}^{n,z}}{2\Delta z} = 0. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Let $\mathbf{B}_{i,j,k}^n = (B^{n,x}, B^{n,y}, B^{n,z})_{i,j,k}$ denote the magnetic field and $\mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}$ the electric field, respectively. We denote by $\mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^*$ the magnetic field obtained using the numerical base scheme and computed on the Cartesian dual grid; the CTCS-treated, divergence-free, magnetic field will be denoted by $\mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}$. We first compute the electric field at time $t^{n+1/2}$ on the staggered dual cells as follows :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathbf{B}^*)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + \frac{1}{8} \{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k}^n \right. \\ &\quad + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k+1}^n \\ &\quad \left. + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j+1,k+1}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j+1,k+1}^n \} \right]. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

This particular discretization of the electric field preserves the second-order accuracy with respect to time of the base scheme. Next, we discretize the induction equation

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (6.4.3)$$

on the staggered grid using central differences and update the magnetic field components at time t^{n+1} as follows :

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1,x} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n,x} + B_{i+1,j,k}^{n,x} + B_{i+1,j+1,k}^{n,x} + B_{i,j+1,k}^{n,x} \\
&\quad + B_{i,j,k+1}^{n,x} + B_{i+1,j,k+1}^{n,x} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n,x} + B_{i,j+1,k+1}^{n,x}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta z}, \quad (6.4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1,y} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n,y} + B_{i+1,j,k}^{n,y} + B_{i+1,j+1,k}^{n,y} + B_{i,j+1,k}^{n,y} \\
&\quad + B_{i,j,k+1}^{n,y} + B_{i+1,j,k+1}^{n,y} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n,y} + B_{i,j+1,k+1}^{n,y}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,3}}{2\Delta x}, \quad (6.4.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1,z} &= \frac{1}{8} (B_{i,j,k}^{n,z} + B_{i+1,j,k}^{n,z} + B_{i+1,j+1,k}^{n,z} + B_{i,j+1,k}^{n,z} \\
&\quad + B_{i,j,k+1}^{n,z} + B_{i+1,j,k+1}^{n,z} + B_{i+1,j+1,k+1}^{n,z} + B_{i,j+1,k+1}^{n,z}) \\
&\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} \\
&\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}. \quad (6.4.6)
\end{aligned}$$

With this particular symmetric discretization of the induction equation and the special choice for the electric field at intermediate time $t^{n+1/2}$, we can prove that :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{8} \{ \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1,k}^n \\
&\quad + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j+1,k+1}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j+1,k+1}^n \}. \quad (6.4.7)
\end{aligned}$$

Equation (6.4.7) shows that if the magnetic field at time t^n is divergence free, the CTCS updated magnetic field will also satisfy the physical constraint. The CTCS approach can also be applied to 3D diamond staggered central schemes. Details

of the method are shown in the appendix. Let us observe here that this CTCS approach can be specialized to the two-dimensional case for Cartesian dual cells by omitting the differentiation with respect to z in equations (6.4.4)-(6.4.5) and by replacing all pairs of terms such as $B_{i,j,k}^{n,x}$ and $B_{i,j,k+1}^{n,x}$ by $B_{i,j}^{n,x}$ in equations (6.4.2), (6.4.4), and (6.4.5). Note that in the two-dimensional case the z component of the magnetic field does not need to be treated as it no longer contributes to the divergence.

6.5. NUMERICAL EXPERIMENTS

The fact that central schemes require an original and a staggered grid to avoid solving the Riemann problems at the cell interfaces represents a restriction on the computation of the time step as compared to other numerical methods. As described in [16] for the 1D case, and later in [1] and [15] for the multidimensional central schemes, the CFL number for central schemes is about 0.5. Even with this time step restriction, experience has shown that the computing times of central schemes are substantially shorter than those of methods based on exact or approximate Riemann solvers. The numerical results we present later in this section are obtained using a CFL number of 0.475. It is also known that, in the case of central schemes as well as other numerical methods, the choice of the limiter in the numerical computation of gradients may contribute in a significant way to the quality of the numerical resolution.

Before considering MHD problems, we first verify and compare our numerical base schemes (diamond and Cartesian dual staggered cell schemes) by considering a simple 3D scalar advection problem with continuous or noncontinuous initial data.

We consider the following 3D scalar advection equation :

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_y + u_z = 0, \\ u(x, y, z)|_{t=0} = u_0(x, y, z). \end{cases} \quad (6.5.1)$$

The analytic exact solution of (6.5.1) at a time t , and at a point (x, y, z) is obtained from the initial data as $u(x, y, z, t) = u_0(x - t, y - t, z - t)$. We consider for our computational domain the cube $[0, 1]^3$ uniformly discretized with 100^3

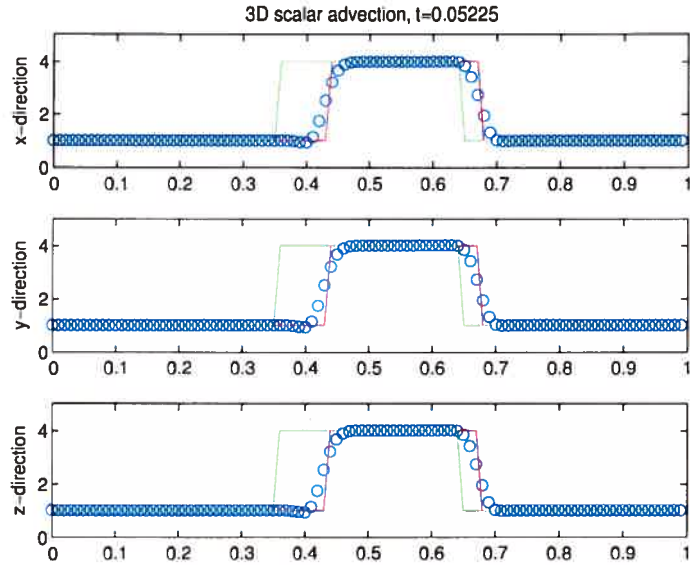


FIG. 6.4. Solution of the scalar advection equation, three snapshots along the axes of the system; the initial data is shown in solid line, the exact solution and the numerical solution are shown in solid line and in "o" respectively.

gridpoints. We consider non continuous initial data given as follows :

$$u_0(x, y, z) = \begin{cases} 4 & \text{if } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 0.5)^2 \leq 0.15^2, \\ 1 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Fig.6.4 shows the numerical solution "o" and the exact solution "solid line" at time $t = 0.0522$. We have computed the numerical order of both schemes using for non-continuous initial data the same function defined in equation (6.5.2), and for continuous initial data, the following function :

$$u_0(x, y, z) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z). \quad (6.5.3)$$

As it is shown in Table 6.1, the second-order accuracy of the schemes is verified when continuous initial data are used. In the case of noncontinuous initial data, it is well known that the numerical solution is going to be at most first-order accurate; this is also shown in Table 6.1 for both numerical base schemes (the Cartesian and diamond dual cell schemes).

Method	Smooth initial data	Discontinuous initial data
Cartesian dual cells	1.901265	0.996402
Diamond dual cells	2.000029	0.998725

TAB. 6.1. Numerical order of the base schemes for smooth or noncontinuous initial data.

Shock-tube problem

Another interesting experiment that one may consider is the three-dimensional adaptation of Sod's shock tube problem for the Euler equations which can be obtained from the ideal MHD equations by simply dropping the magnetic field components in system (6.2.1). The initial data for this test feature a shock along the plane $x = 0.5$; the two constant states are $U_l = [1, 0, 0, 0, 1]$ (if $0 < x < 0.5$) and $U_r = [0.125, 0, 0, 0, 0.1]$ (if $0.5 < x < 1$) for $U = [\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, \rho e]$. The adiabatic constant is $\gamma = 1.4$. The numerical solution is computed at time $t = 0.164$ using the diamond dual cell scheme and the Cartesian dual cell scheme; the computational domain is uniformly discretized using 200 points along the x -axis and 40 points along each of the y - and z -axes. Fig.6.5 shows a comparison between our numerical results (dotted lines) obtained with diamond dual cells (left) and Cartesian dual cells (right), and the exact solution (solid line) of the corresponding one-dimensional problem. For these calculations, we have used the MC- θ limiter with $\theta = 1.5$.

The density profile is enlarged in Fig.6.6 for a closer comparison of both methods. As can be seen when magnifying this figure the diamond dual cell scheme leads to a slightly better resolution of the contact and shock waves.

MHD shock-tube problem

We now consider a three-dimensional adaptation of the 1D MHD shock tube problem involving seven discontinuities; this test case was originally considered by Ryu and Jones [23]. The initial conditions feature a shock along the plane $x = 0$ with the following data : $U_r = [0.989112, -0.013123, 0.026933, 0.010037, 4.024421, 2.002600, 0.971588]$ if $0 < x < 1$ and $U_l = [1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6, 2.0, 0.95]$ if $-1 < x < 0$; here $U = [\rho, u_x, u_y, u_z, B_y, B_z, p]$, $B_x = 2$ and $\gamma = 5/3$. The computational domain is uniformly discretized with 200 grid points along

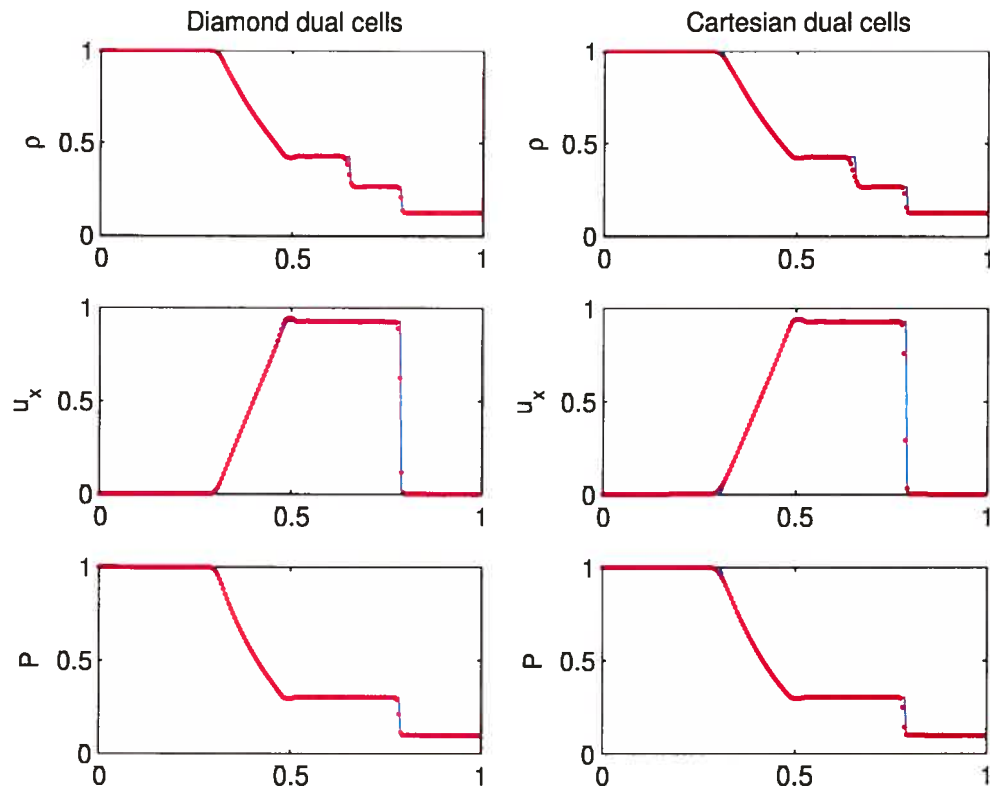


FIG. 6.5. Numerical solution of the 3D Sod shock-tube problem obtained using diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right)

the x -axis, 30 points along the y and z axes. We applied both numerical schemes involving Cartesian dual cells and diamond dual cells, and computed the solution at time $t = 0.4$. In both cases we compare (Fig.6.7-6.8) the numerical results with the reference solution obtained, for the one-dimensional problem, using the numerical scheme proposed by Ryu and Jones [23] with 10 000 gridpoints; this reference solution is also available online from the following address :

<http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/anume/testcase/MHD/1d/rj/>

This is a very challenging test case due to the structure of its solution that involves seven constant states separated by shock waves and contact discontinuities. A good capture of the constant states requires a high definition discretization (we recall that the reference solution is obtained using 10 000 grid points). On Fig.6.7 and 6.8, computed with 200 gridpoints in the x -direction, the diamond-dual cell scheme seems to do slightly better than the Cartesian-dual cell scheme.

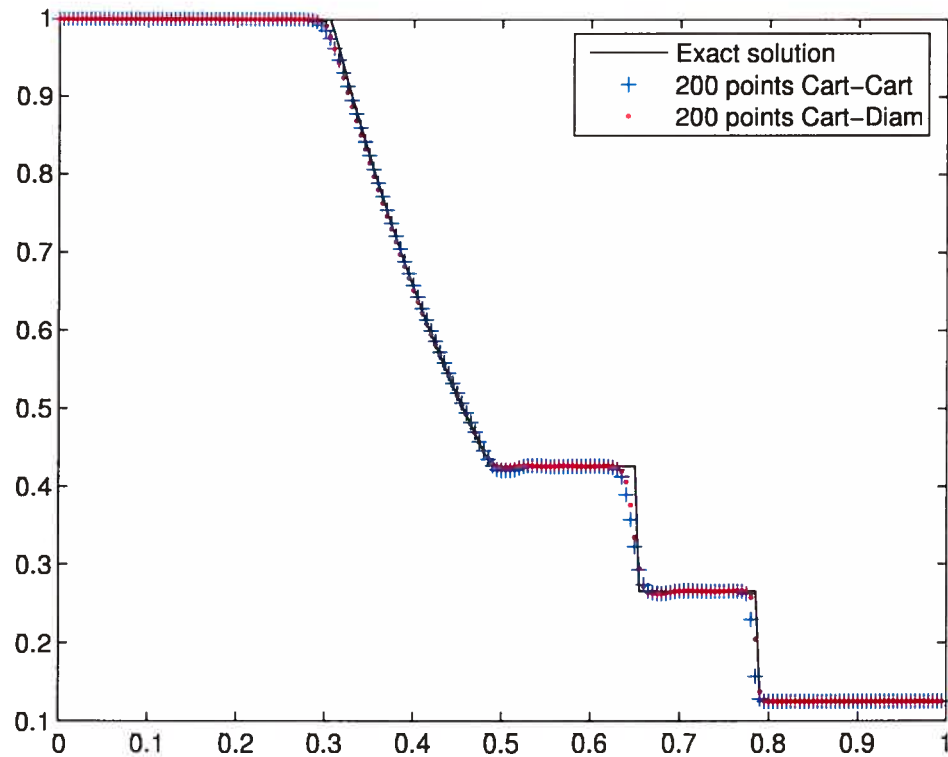


FIG. 6.6. Mass density along the x -axis for Sod's 3D shock-tube problem

This is confirmed in Fig.6.9, where we also included results obtained with 400 x -gridpoints and the diamond-dual cell scheme, which brings a substantial improvement on both 200 x -points results.

Orszag-Tang problems

Our next three-dimensional MHD problem is an Orszag-Tang-type problem. The initial data for this problem are the following : $\rho(x, y, z) = \rho_0$, $p(x, y, z) = p_0$, $\mathbf{u}(x, y, z) = -\sin y \mathbf{i} + \sin x \mathbf{j}$, $\mathbf{B}(x, y, z) = -\sin y \mathbf{i} + \sin(2x) \mathbf{j}$, with $0 \leq x, y \leq 2\pi$, $\rho_0 = 25/36$ and $p_0 = 5/3$. \mathbf{i} and \mathbf{j} are unit vectors in the x - and y -directions.

We have computed the numerical solution on a $100 \times 100 \times 100$ grid at time $t=0.5$ using both Cartesian and diamond dual cell schemes along with the corresponding CTCS approach to maintain a divergence-free magnetic field. Fig.6.10(left) shows several slides in the 3D space of the contour lines of the mass density ; the arrows

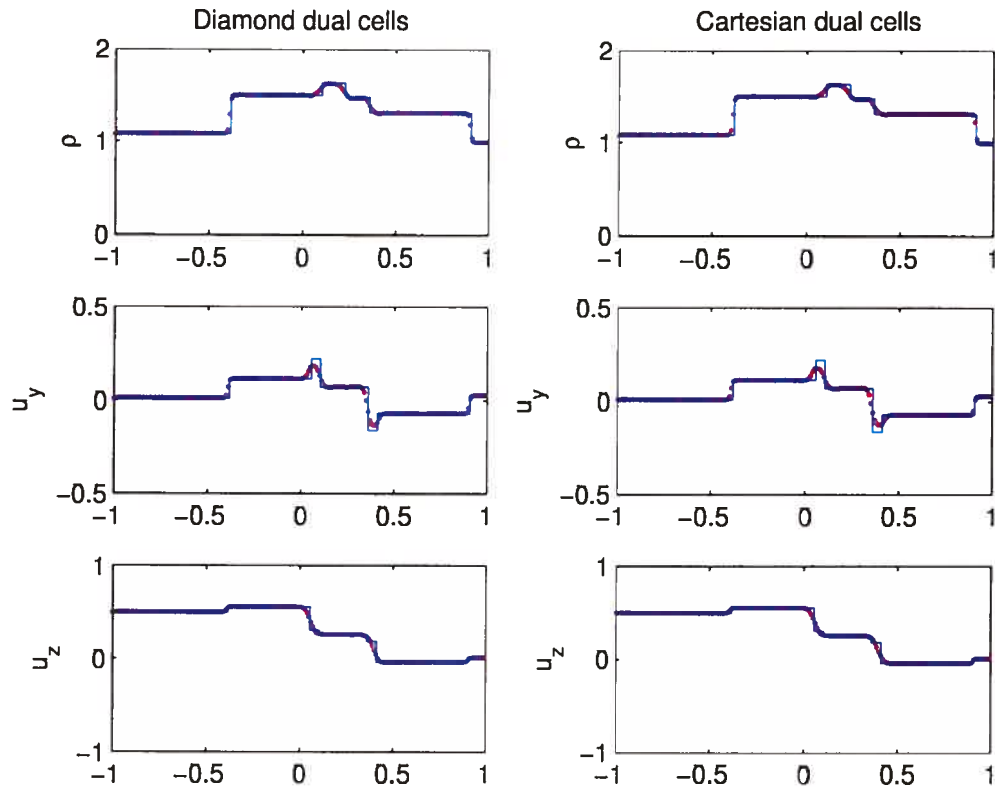


FIG. 6.7. Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right)

denote the magnitude of the velocity field. Fig.6.10(right) shows the contours of the mass density in the plane $z = \pi$; this plot compares very well with the corresponding results for the two-dimensional problem we previously considered in [5] as well as those appearing in several recent papers in the literature [6], [11], [21], [24]. Fig.6.11 (left) shows two plots of the mass density along the line $y = \pi$ of the plane $z = \pi$ obtained using both Cartesian and diamond dual cell schemes at time $t = 0.5$. Similarly, Fig.6.11 (right) shows the plot of the energy. Both methods yield almost undistinguishable results.

We now consider another Orszag-Tang-type problem, which is a slight modification of a problem considered in [17]; the initial data are as follows : $\rho(x, y, z) = \rho_0$, $p(x, y, z) = p_0$, $\mathbf{u}(x, y, z) = -\sin y \sin z \mathbf{i} + \sin x \sin z \mathbf{j}$, $\mathbf{B}(x, y, z) = -\sin y \sin z \mathbf{i} + \sin(2x) \sin z \mathbf{j} + \sin(2x) \sin y \mathbf{k}$, with $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$, $\rho_0 = 25/36$ and $p_0 = 5/3$. \mathbf{i} , \mathbf{j} , and \mathbf{k} are the unit vectors in the x , y , and z -directions, respectively. We

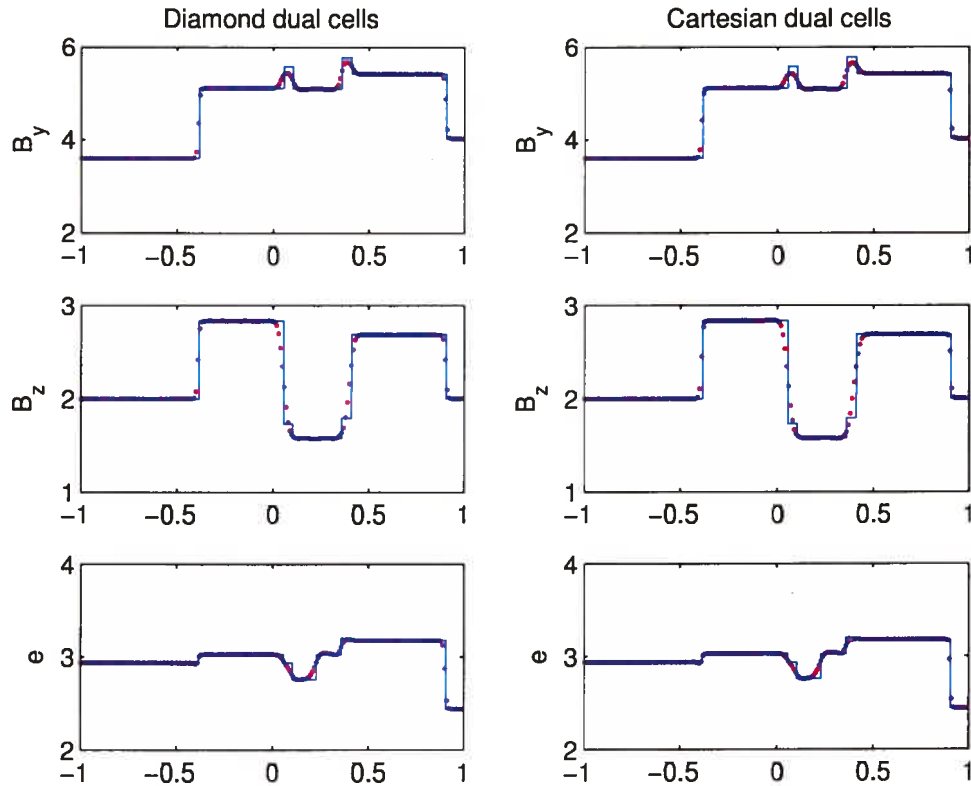


FIG. 6.8. Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (left) and Cartesian dual cell scheme (right), continued

have computed the solution at time $t = 0.5$ on 100^3 gridpoints using the Cartesian dual cell scheme; thanks to our CTCS divergence treatment, the maximum absolute value of the divergence observed for both Orszag-Tang vortex problems is of the order of 10^{-14} . Fig.6.12 (left) shows several isosurfaces of the mass density; Fig.6.12 (right) shows several slides, in 3D-space, of the contour lines of the electric field magnitude. Fig.6.13 shows the contours of the mass density and the energy in the plane $z = \pi$ at time $t = 0.5$. Fig.6.14(left) shows the mass density contours in the plane $x = \pi/2$.

If we don't apply the CTCS divergence treatment, the base scheme can still reach the final time without showing instabilities: In fact, we have solved this Orszag-Tang problem using the diamond dual cell scheme on 50^3 gridpoints, without applying the CTCS divergence treatment. Fig.6.14(right) shows the plots along the line $y = z = \pi$ of the energy obtained using the Cartesian dual cell

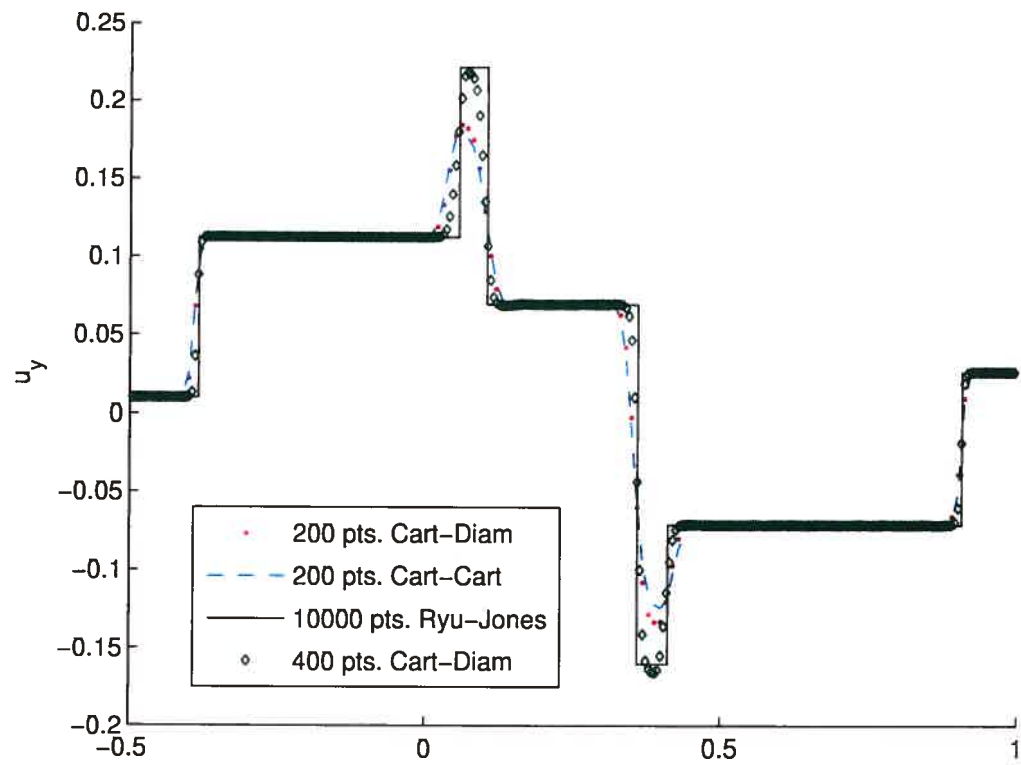


FIG. 6.9. Numerical solution of the 3D MHD shock-tube problem obtained using the diamond dual cell scheme (dotted line) and Cartesian dual cell scheme (dashed line)

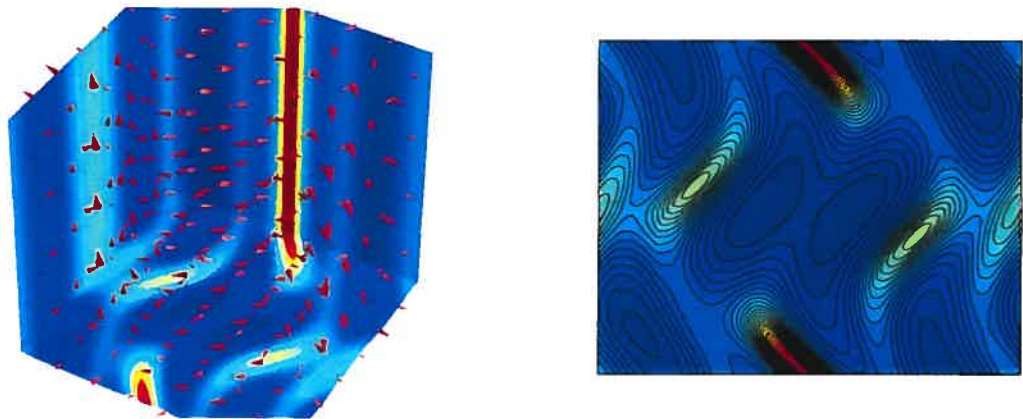


FIG. 6.10. Mass density (shaded contours) and velocity field magnitude (cone plot) for the Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$ (left); contour lines of the mass density in the plane $z = \pi$ (right)

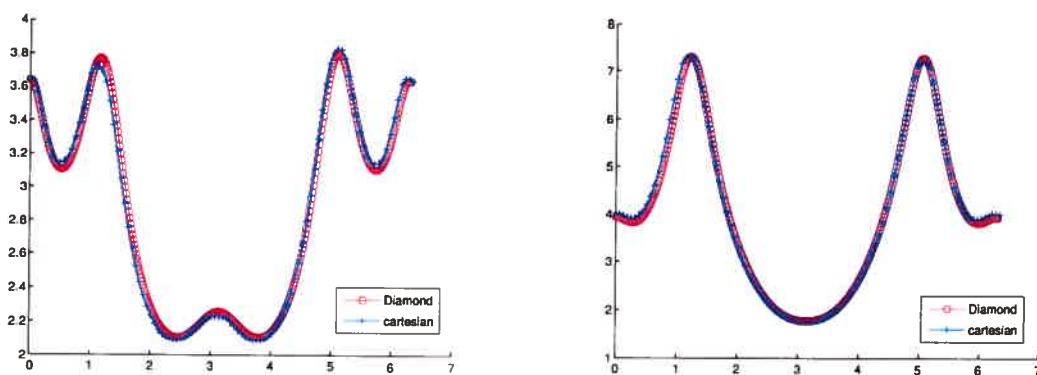


FIG. 6.11. Plot of the mass density (left) and the energy for the Orszag-Tang vortex problem

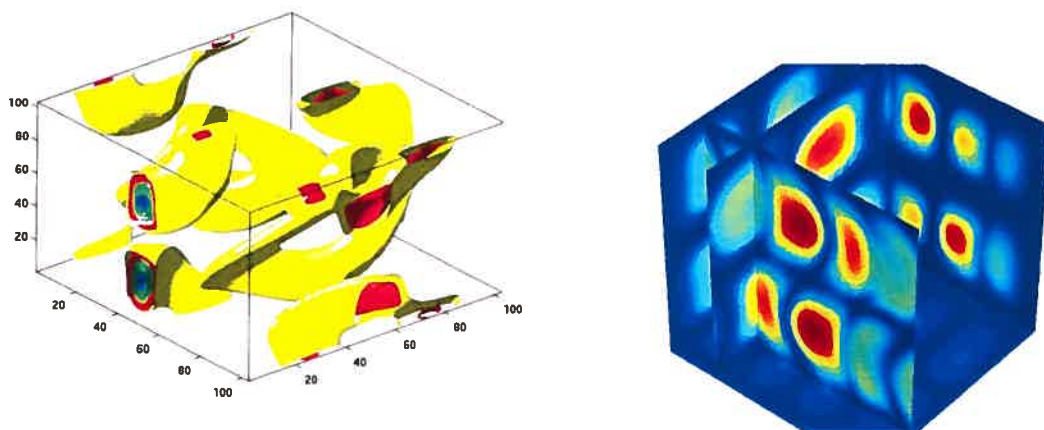


FIG. 6.12. (left) Mass density isosurfaces for the 3D Orszag-Tang problem at time $t = 0.5$; (right) Electric field magnitude contours

scheme with the aid of the CTCS procedure using 100^3 gridpoints (solid line) and 50^3 gridpoints (dashed line); the dotted line denotes the energy obtained on 50^3 gridpoints using only the diamond dual cell scheme without any divergence treatment. As one can see (Fig.6.14, right), even if we do not apply the CTCS procedure, the numerical results we obtain are still reasonable, and the maximum of the absolute value of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ we observe (for this experiment) is about 3.124×10^{-1} . Comparing the dotted line with the dashed line, we find that the effect of the divergence treatment seems to be more necessary in regions of fast

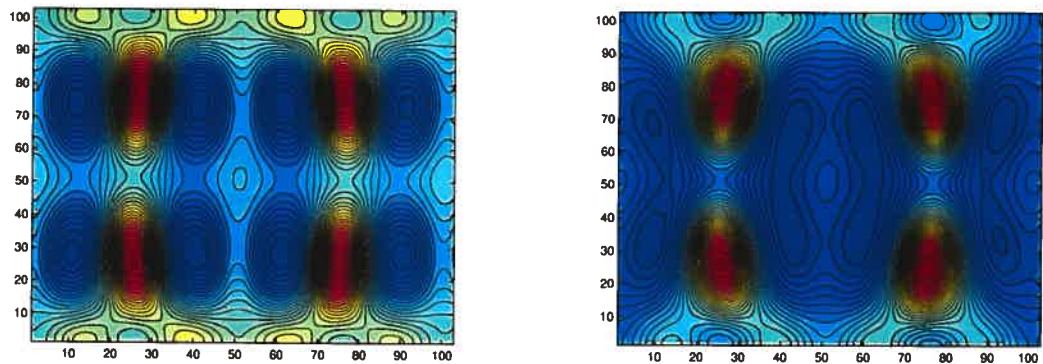


FIG. 6.13. Contour lines of the mass density (left) and the energy (right) at time $t = 0.5$ in the plane $z = \pi$

variation.

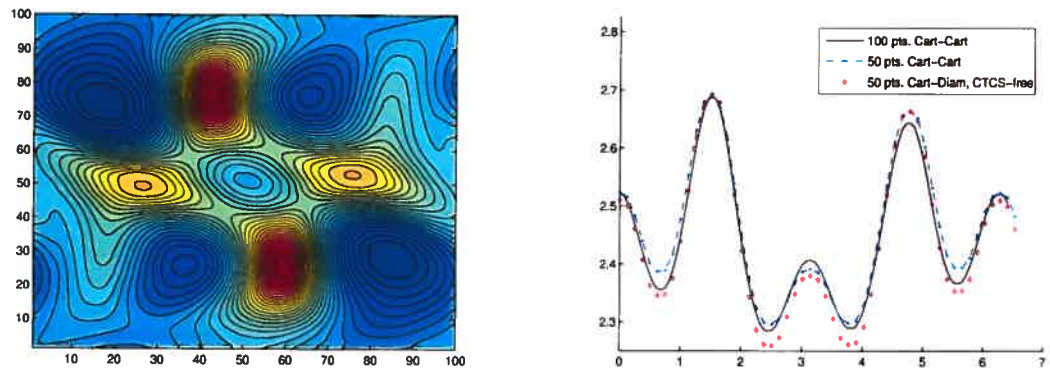


FIG. 6.14. (left) contour lines of the mass density in the plane $z = \pi/2$; (right) plots along the line $y = z = \pi/2$ of the energy obtained with (solid line and dashed line) or without (dotted line) the aid of the CTCS procedure

Shock-cloud interaction problem

We now consider a three-dimensional adaptation of the classical 2D MHD shock-cloud interaction problem previously considered in several papers [11], [24], [27], [21]. The computational domain $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ is uniformly discretized using 100^3 gridpoints. Two constant states $U_l = [3.86859, 11.2536, 0, 0, 167.345,$

0, 2.1826182, -2.1826182] and $U_r = [1, 0, 0, 0, 1, 0, 0.56418958, 0.56418958]$ are separated by the plane $x = 0.05$; here $U = (\rho, u_x, u_y, u_z, p, B_x, B_y, B_z)$. A 10 times denser spherical cloud centered at (0.25,0.5,0.5) with a radius $r = 0.15$ is in hydrostatic equilibrium with the surrounding state. The profile of the initial mass density is shown in Fig.6.15 (left).

The numerical solution is computed at time $t = 0.06$ using the Cartesian dual

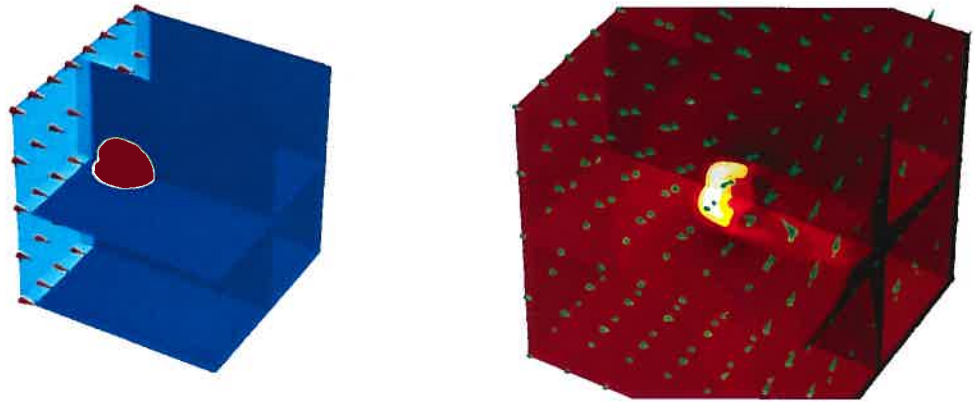


FIG. 6.15. (left) Initial mass density profile for the 3D shock-cloud interaction problem; we also see the velocity field magnitude as a cone plot; (right) several slides illustrating the contours of the logarithm of the mass density; the cone plot represents the magnetic field magnitude

cell scheme along with its corresponding CTCS divergence treatment; the maximum absolute value of the divergence observed remains within the 10^{-12} values. An equivalent variant of this three-dimensional problem is considered in [27]. Fig.6.15 (right) shows several sections of the contour surfaces ("slides") of the logarithm of the mass density and also shows (cone plot) the magnitude of the magnetic field. Fig.6.16 shows several contour lines of the logarithm of the mass density (left), and several isosurfaces for the energy (right).

Fig.6.17 shows several plots along the x -axis of the mass density using 60^3 , 100^3 , and 150^3 gridpoints, respectively. We have compared the results obtained using the MC- θ limiter, for $\theta = 1.5$ and 2 (for the case of 60^3 gridpoints). As it was previously observed for central schemes in the literature, for a given problem, the choice of the limiter may lead to significant improvements of the numerical results; however there is no general rule for this choice, so that one should

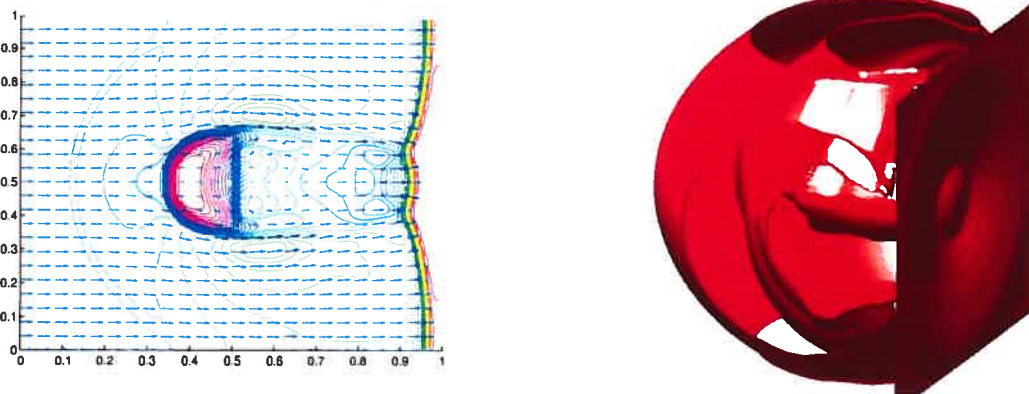


FIG. 6.16. (left) Several contour lines of the mass density logarithm at time $t=0.06$ for the 3D shock-cloud interaction ; (right) Several isosurfaces for the energy

generally investigate several limiters for best results. The mass density profile obtained using 150 points in the x -direction (shown in Fig.6.17) is very similar to the reference solution presented in [27], which was obtained using 200 gridpoints, thus confirming the efficiency of the method.

We observe here that even if we do not apply our CTCS divergence treatment, the base schemes do not become unstable, and may even, in some cases, produce reasonable results. Fig.6.18(a) shows the mass density for the shock-cloud interaction problem obtained using the diamond dual cell scheme (on 60^3 gridpoints) without any divergence treatment (dotted plot) ; the reference solution (solid line) is obtained with the aid of the CTCS divergence treatment on 150^3 gridpoints. Fig.6.18(b) shows the same comparison for the energy. We observe that when we don't apply the CTCS procedure, the divergence of the magnetic field is not negligible (Fig.6.18(c) $\nabla \cdot \mathbf{B}$ along the line $y = z = 0.5$ and Fig.6.18(e) $\nabla \cdot \mathbf{B}$ in the plane $z = 0.5$; Fig.6.18(d) and (f) show the corresponding result when the CTCS procedure is applied). Moreover, we find (Fig.6.18(a)-(b)) that deviations from the reference solution are important, quantitatively, when the divergence values are non-negligible, and particularly so, qualitatively (wrong sense of variation, locally) where the divergence values are relatively large. We mention here that the solution obtained without the aid of the CTCS treatment is physically inadmissible but allows us to appreciate the base scheme which did not crash

while several other numerical methods broke down.

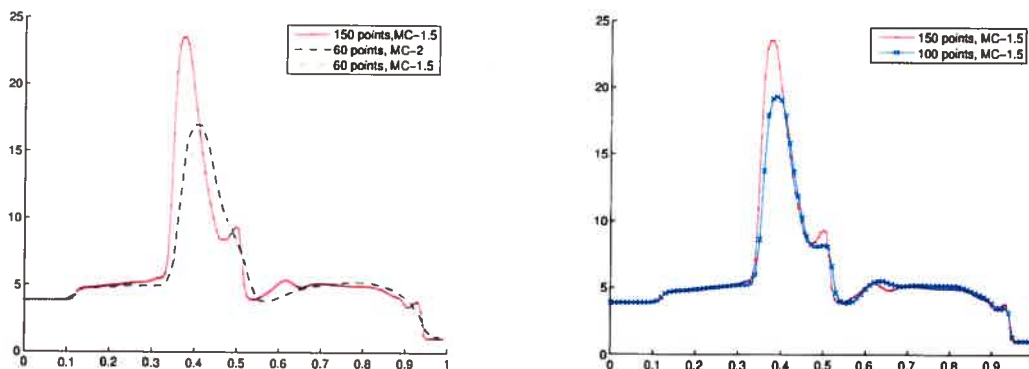


FIG. 6.17. Several plots of the mass density of the shock-cloud interaction problem along the line $y = 0.5$ in the plane $z = 0.5$ obtained using the MC-1.5 limiter (right) and the MC-1.5 and MC-2 limiters (left)

6.6. CONCLUSION

In this paper, we have presented three-dimensional, second-order accurate, central numerical methods for solving systems of hyperbolic equations. To avoid the resolution of the Riemann problems at the cell interfaces, the numerical solution alternates between an original and a staggered grid; we have considered two possibilities for the dual cells of the staggered grid (Cartesian or diamond-shaped), while those of the original grid are Cartesian cells. The fact that the numerical scheme does not require any characteristic field decomposition, will clearly reduce computing times as compared with methods based on exact or approximate Riemann problem solvers. We have adapted these central methods to ideal magnetohydrodynamics and solved some three-dimensional ideal MHD problems.

- To satisfy the divergence-free magnetic field constraint, we have constructed a new 3D CTCS method (based on the constrained transport approach) that treats the magnetic field components obtained using the numerical base scheme after each time step. The CTCS procedure applies to both Cartesian dual cell and diamond dual cell schemes and is second-order accurate,

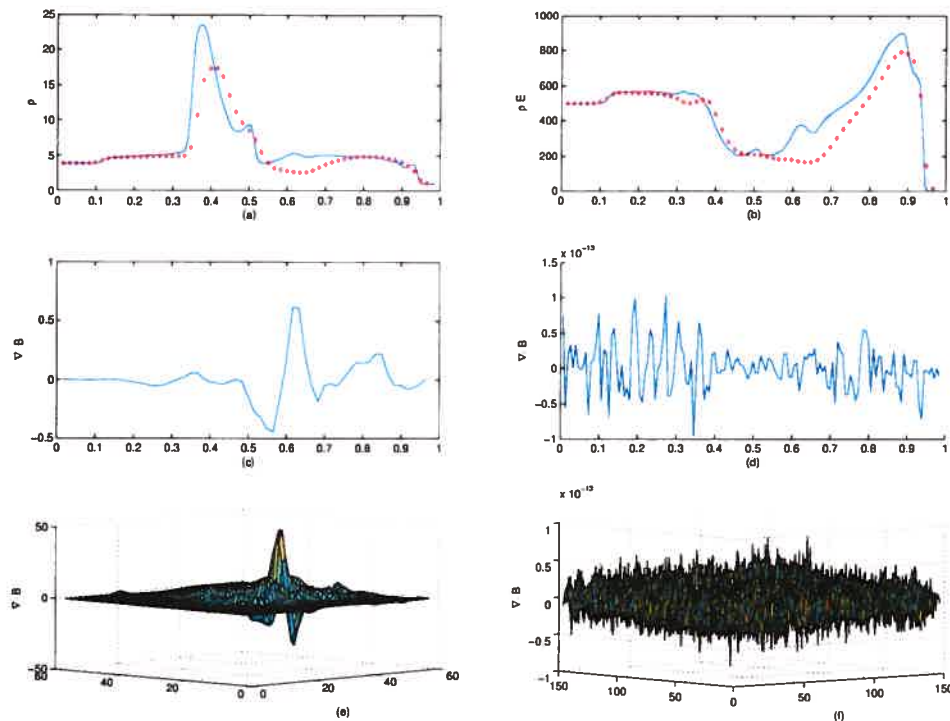


FIG. 6.18. Shock-cloud interaction problem : (a) plot of the mass density along the line $y = z = 0.5, 0 \leq x \leq 1$ obtained using the base scheme with the CTCS (150 points, solid line) and without any divergence treatment (60 points, dotted line) ; same comparison for the energy (b)

and thus preserves the second-order accuracy of the base scheme. The divergence of the magnetic field for the problems we considered in this paper remains of the order of 10^{-12} , which is smaller than the error introduced by the computation of the divergence with the help of central differences. Both the base numerical scheme and the CTCS procedure are easy to implement on a single processor computer or a multi-processor cluster.

- For the ideal MHD problems considered in this paper, both numerical base schemes can reach the final time (and generate reasonable results) without producing instabilities, without the application of the CTCS procedure, contrary to many other numerical schemes that often break down in the early stages of the computations. However the base schemes (alone) fail to

produce a divergence-free magnetic field in the numerical solution. For this reason, as a general rule, the CTCS divergence treatment should be applied.

- As it is well known (for central schemes), one should consider several choices of limiters for a given problem. Van Leer's MC- θ limiter usually leads to good results. For the numerical experiments we considered in this paper we observed that the diamond dual cell scheme leads to a slightly better capture of discontinuities as compared to Cartesian dual cell schemes, but it is clearly more complicated and more time-consuming since one should compute three sets of solutions on the dual cells at each odd time step (on the cells $D_{i+1/2,j,k}$, $D_{i,j+1/2,k}$, and $D_{i,j,k+1/2}$). Regarding the computing time of each approach, many parameters may be considered such as the computing equipments and the programming approaches and techniques. However, in our numerical three-dimensional experiments we have observed that the Cartesian dual cell scheme may save about 40 to 45 % of the computing time as compared to the diamond dual cell scheme, which is a considerable amount of time in view of the very large computing-times required for three-dimensional MHD.

The numerical results we obtained using both base schemes compare very well with one another and are in very good agreement with others appearing in the literature.

APPENDIX

Here we present the CTCS method in the case of diamond dual cells. Suppose that the solution $U_{i,j,k}^n$ is given on the original grid at time t^n and the magnetic field $\mathcal{B}_{i,j,k}^n$ satisfies the physical constraint (i.e. equation (6.4.1)). We denote by $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^*$ the magnetic field in the numerical solution $U_{i+1/2,j,k}^{n+1}$ obtained at time t^{n+1} (on the dual cell $D_{i+1/2,j,k}$) using the base scheme. The CTCS-updated, divergence-free, magnetic field will be denoted by $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1}$; we treat $\mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^*$ as follows :

We first compute the electric field $\mathbf{E} = (\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3)$ at time $t^{n+1/2}$ using the

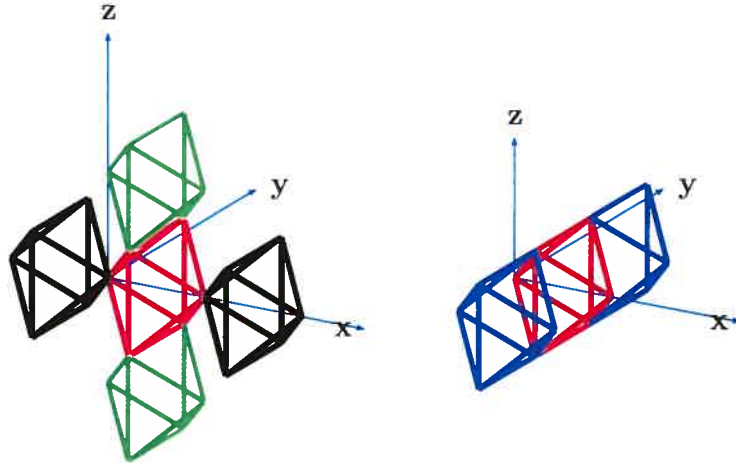


FIG. 6.19. Six dual cells are required to compute $\nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1}$

following discretization :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\mathbf{v}^{n+1} \times \mathcal{B}^*)_{i+1/2,j,k} + \frac{1}{2} \{ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i,j,k}^n + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{i+1,j,k}^n \} \right]. \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Next, we discretize the induction equation (6.4.3) on the dual cells $\{D_{i+1/2,j,k}\}$ using centered differences :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1,x} &= \frac{1}{2}(B_{i,j,k}^{n,x} + B_{i+1,j,k}^{n,x}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2,3} - \Omega_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2,3}}{2\Delta y} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2,2} - \Omega_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/2,2}}{2\Delta z}, \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1,y} &= \frac{1}{2}(B_{i,j,k}^{n,y} + B_{i+1,j,k}^{n,y}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/2,1}}{2\Delta z} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j,k}^{n+1/2,3} - \Omega_{i-1/2,j,k}^{n+1/2,3}}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1,z} &= \frac{1}{2}(B_{i,j,k}^{n,z} + B_{i+1,j,k}^{n,z}) \\ &\quad - \Delta t \frac{\Omega_{i+3/2,j,k}^{n+1/2,2} - \Omega_{i-1/2,j,k}^{n+1/2,2}}{2\Delta x} \\ &\quad + \Delta t \frac{\Omega_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2,1} - \Omega_{i+1/2,j-1,k}^{n+1/2,1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

This special discretization of the induction equation and the particular choice of the electric field at the intermediate time $t^{n+1/2}$ will conserve the second-order accuracy of the base scheme. A tedious but straightforward calculation allows us to prove that :

$$\nabla \cdot \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot \mathbf{B}_{i,j,k}^n + \nabla \cdot \mathbf{B}_{i+1,j,k}^n \}. \quad (6.6.5)$$

Hence, if the magnetic field at time t^n is solenoidal, the CTCS-updated magnetic field will satisfy the physical constraint $\nabla \cdot \mathcal{B}_{i+1/2,j,k}^{n+1} = 0$. The magnetic field on the cells $\{D_{i,j+1/2,k}\}$ and $\{D_{i,j,k+1/2}\}$ can be handled in a similar way.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I, pp. 85-88, 1995.
- [2] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, ed. M. Hafez and K. Oshima, Vol. IV, pp. 7-14, 1995.
- [3] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, *A finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for conservation laws on unstructured grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, pp. 1-22, 1997.
- [4] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No.3, pp. 738-771, 1999.
- [5] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *Central Finite volume methods with constrained transport divergence treatment for ideal MHD*, J. Comp. Phys., 204, pp. 737-759, 2005.
- [6] J. BALBAS, E. TADMOR, AND C. C. WU, *Non-oscillatory central schemes for one- and two-dimensional MHD equations*, J. Comp. Phys., 201, pp. 261-285, 2004.
- [7] D. S. BALSARA AND D. S. SPICER, *A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations*, J. Comp. Phys. 149, 270, 1999.
- [8] A. A. BARMIN, A. G. KULIKOVSKIY, AND N. V. POGORELOV, *Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 126, 77, 1996.
- [9] J. U. BRACKBILL AND D. C. BARNES, *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comput. Phys. 35, 426, 1980.

- [10] M. BRIO, C.C. WU, *An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics*. J. Comp. Phys., (75)2, pp. 400-422, 1988.
- [11] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydro-dynamical equations*, J.Comp. Phys., 142, pp. 331-369, 1998.
- [12] P. LONDRILLO AND L. DEL ZANNA, *High-order upwind schemes for multidimensional magnetohydrodynamics* , Astrophys. J., 53, pp. 508-524, 2000.
- [13] C. R. EVANS AND J. F. HAWLEY, *Simulation of magnetohydrodynamic flows : A constrained transport method*, Astrophys. J., 332, 659, 1988.
- [14] S.K. GODUNOV, *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics*, MATH. SB., 47(89), 271-306, 1959.
- [15] G. JIANG AND E. TADMOR, *Non- oscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws*, SIAM J. on Sc. Comp., 19, pp. 1892-1917, 1998.
- [16] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463, 1990.
- [17] C. NODES, G. T. GRITSCHNEDER, AND H. LESCH, *Radio emission and particle acceleration in plerionic supernova remnants*, Astronomy and Astrophysics 423, pp. 13-19, 2004.
- [18] K.G. POWELL, P.L. ROE, T.J. LINDE, T.I. GOMBOSI AND D.L. DE ZEEUW, *A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 154, 284 1999.
- [19] K. G. POWELL, P. L. ROE, R. S. MYONG, T. GOMBOSI, AND D. DE ZEEUW, *An upwind Scheme for magnetohydrodynamics*, AIAA Paper 95-1704-CP, 1995.
- [20] K. G. POWELL, *An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics*, ICASE report No. 94-24, Langley, VA, 1994.
- [21] J. ROSSMANITH, *A wave propagation method with constrained transport for ideal and shallow water magnetohydrodynamics*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of Washington, 2002.
- [22] D. RYU, F. MINIATI, T. W. JONES, AND A. FRANK, *A divergence-free upwind code for multi-dimensional magnetohydrodynamic flows*, Astrophys. J. 509, 244, 1998.
- [23] D. RYU AND T.W. JONES, *Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics : Algorithm and tests for one-dimensional flow*, Astrophys. J. 442, 228, 1995.
- [24] G. TÓTH, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes*, J. Comp. Phys., 161, pp. 605-652, 2000.

- [25] G. TÓTH AND D. ODSTRČIL, *Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems*, J. Comp. Phys. 128, 82, 1996.
- [26] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J. Comp. Phys., 32, pp. 101-136, 1979.
- [27] U. ZIEGLER, *A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys., 192 pp. 393-416, 2004.

Chapitre 7

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté une nouvelle approche pour résoudre numériquement des problèmes de magnétohydrodynamique idéale en différentes dimensions spatiales.

En une dimension, nous avons appliqué le schéma central de Nessyahu et Tadmor et nous avons résolu des problèmes unidimensionnels classiques de MHD ; dans ce cas, la contrainte physique de divergence nulle est automatiquement satisfaite si on fixe la valeur B_x du champ magnétique. En deux dimensions spatiales, nous avons utilisé comme schémas numériques de base les méthodes de volumes finis centrales formulées par Arminjon et ses collaborateurs qui utilisent deux maillages décalés avec cellules originales cartésiennes et cellules duales cartésiennes ou de type diamant. Dans chacun de ces deux cas, nous avons construit une nouvelle méthode pour traiter le champ magnétique afin de satisfaire la propriété physique de divergence nulle ; notre méthode "CTCS" est précise du second ordre, donc elle conserve l'ordre de précision du schéma numérique de base. Nous avons appliqué nos méthodes numériques et nous avons résolu plusieurs problèmes classiques de magnétohydrodynamique idéale modélisant des écoulement du plasma dans un milieu magnétique. Les comparaisons, que nous avons présentées, entre les deux versions des schémas centrés bidimensionnels ainsi que les méthodes CTCS correspondantes, montrent que ces deux approches sont numériquement équivalentes avec un léger avantage pour le schéma central à cellule duale en diamant, qui permet une détection légèrement meilleure des discontinuités dans la solution numérique. Les deux approches CTCS sont équivalentes et génèrent un champ magnétique à divergence de l'ordre de 10^{-14} à 10^{-12} ; la méthode avec cellules

duales cartésiennes se caractérise par sa simplicité ; elle est facile à appliquer et elle entraîne un gain en termes de temps de calcul de l'ordre de 20 à 25 % par rapport à la méthode avec cellules duales en diamants.

En trois dimensions, nous avons présenté un nouveau schéma numérique central pour résoudre les systèmes de lois de conservation hyperboliques. Ce schéma numérique est le prolongement tridimensionnel du schéma numérique central bidimensionnel à cellules originales cartésiennes et à cellules duales en diamants. On s'est aussi intéressé à un second schéma numérique central tridimensionnel dont les cellules originales et duales sont cartésiennes. Nous avons validé nos schémas numériques tridimensionnels en résolvant des équations hyperboliques tridimensionnelles scalaires, et des problèmes classiques d'aérodynamique dont la solution analytique peut aussi être calculée analytiquement. Nous avons vérifié le second ordre du schéma numérique pour des problèmes dont la solution analytique est lisse. Ensuite nous avons considéré des problèmes de magnétohydrodynamique ; nous avons conçu une nouvelle méthode de traitement du champ magnétique de type CTCS, extension de celles considérées en deux dimensions. Par la suite, nous avons appliqué nos méthodes pour résoudre des problèmes de MHD idéale en trois dimensions. Nos résultats numériques, obtenus à partir des deux versions tridimensionnelles du schéma central sont équivalents et se comparent très bien aux résultats obtenus pour ces problèmes, dans les articles récents, et confirment l'efficacité et le potentiel de nos méthodes. Comme en deux dimensions spatiales, dans la plupart de nos tests numériques, nous avons observé un léger avantage en considérant la méthode avec cellules duales en diamants ; par contre la méthode avec cellule duale cartésienne entraîne un gain considérable dans le temps de calcul, de l'ordre de 40 – 45% en trois dimensions.

Récemment, nous avons commencé à explorer les possibilités d'appliquer les méthodes de volumes finis centrées en maillages non structurés, proposées par Arminjon et al., pour résoudre des problèmes bidimensionnels de magnétohydrodynamique idéale. Notre but est de construire l'équivalent de la méthode du transport sous contrainte pour ce type de schéma numérique centré non structuré. Le défi pour le moment consiste à trouver une façon symétrique pour discrétiser l'équation d'induction sur les cellules triangulaires et traiter de façon convenable les

composantes du champ magnétique, de manière à satisfaire la propriété physique de divergence nulle. Une alternative consiste à intégrer séparément la loi de Faraday, dans les équations de la MHD, sur les cellules triangulaires en termes de la fonction potentiel du champ magnétique. Ceci constitue en partie le sujet de nos futurs projets de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ARMINJON AND M.C. VIALON, *Généralisation du schéma de Nessyahu-Tadmor pour une équation hyperbolique à deux dimensions d'espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.320, serie I, pp. 85-88, 1995.
- [2] P. ARMINJON, D. STANESCU AND M. C. VIALON, *A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flows*, Proc.of the 6th. Int. Symp. on Comp. Fluid Dynamics, ed. M. Hafez and K. Oshima, Vol. IV, pp. 7-14, 1995.
- [3] P. ARMINJON, M.C. VIALON AND A. MADRANE, *A Finite Volume Extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor Schemes for Conservation Laws on Unstructured Grids*, revised version with numerical applications, Int. J. of Comp. Fluid Dynamics, Vol. 9, No. 1, 1-22, 1997.
- [4] P. ARMINJON AND M. C. VIALON, *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*, SIAM J. Num. Anal., Vol. 36, No.3, pp. 738-771, 1999.
- [5] P. ARMINJON AND A. MADRANE, *Staggered mixed finite volume/finite element method for Navier-Stokes equations*, AIAA J., 37, pp. 1558-1571, 1999.
- [6] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, *New Lax-Friedrichs-type finite volume schemes on 2 and 3D Cartesian staggered grids*, 7th annual conference of the CFD Society of Canada, 1999, Halifax, J. Militzer, editor, pp.(3-3)-(3-10), 1999.
- [7] P. ARMINJON, A. MADRANE AND A. ST-CYR, *Numerical simulation of 3-D flows with a non-oscillatory central scheme on staggered unstructured tetrahedral grids*, in Proceed. 8th Int. Conf. on Hyp. Prob., ed. H. Freistuehler and G. Warnecke, Birkhauser, Int. Series of Num. Math. Vol. 140, pp. 59-68, ISBN 3-7643-6711-3, 2001.

- [8] P. ARMINJON AND A. ST-CYR, *Nessyahu-Tadmor-type central finite volume methods without predictor for 3D Cartesian and unstructured tetrahedral grids*, Applied Numerical Mathematics, 46, pp. 135-155, 2003.
- [9] P. ARMINJON, A. ST-CYR, A. MADRANE, *New 2 and 3-dimensional non-oscillatory central finite volume methods for staggered Cartesian grids*, Applied Numerical Mathematics, Vol 40/3, pp 367-390, 2002.
- [10] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *Central Finite Volume Methods for One and Two-Dimensional Ideal Magnetohydrodynamics*, in Proc. 12th Annual Conf. of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada, S.Chen and S. McIlwain, eds., 2004, pp. 585-592.
- [11] P. ARMINJON, AND R. TOUMA, *A Central Diamond-Staggered Dual Cell, Finite Volume Method For Ideal Magnetohydrodynamics*, in Proc. ICCFD3, Int. Conf. in Comp. Fluid Dynamics, Toronto, July 2004.
- [12] P. ARMINJON. AND R. TOUMA, *Central Finite Volume Methods with Constrained Transport Divergence Treatment for Ideal MHD*, J. Comp. Phys., 204 pp. 737-759. 2005.
- [13] P. ARMINJON AND R. TOUMA, *New three-dimensional structured diamond-staggered finite volume methods*, CRM Res. Rep. December 2003.
- [14] J. BALBAS, E. TADMOR, AND C. C. WU, *Non-oscillatory central schemes for one- and two-dimensional MHD equations*, J. Comp. Phys., 201, pp 261-285 2004,
- [15] D.S. BALSARA, *Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics*, Astrophys. J. Suppl. 116, 133, 1998.
- [16] D. S. BALSARA AND D. S. SPICER, *A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations*, J. Comput. Phys. 149, pp. 270, 1999.
- [17] A. A. BARMIN, A. G. KULIKOVSKIY, AND N. V. POGORELOV, *Shock-capturing approach and nonevolutionary solutions in magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 126, 77, 1996.
- [18] J. U. BRACKBILL AND D. C. BARNES, *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comp. Phys. 35, 426 1980.
- [19] M. BRIO, C.C. WU, *An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, J.Comp.Physics, (75)2, pp. 400-422, 1988.

- [20] W. DAI AND P. R. WOODWARD, *An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 111, 354-372, 1994.
- [21] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *Extension of the piecewise parabolic method to multidimensional ideal magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys., 115, pp. 485-513, 1994.
- [22] W. DAI AND P.R. WOODWARD, *A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydro-dynamical Equations*, J. Comp. Phys., 142, pp. 331-369, 1998.
- [23] A. DEDNER, C. ROHDE AND M. MATTHIAS, *Efficient High-Order Finite Volume Schemes for (Real Gas) Magnetohydrodynamics*, in T. Y. Hou and E. Tadmor, Proc. of the 9th Int. Conf. on Hyp. Prob., CalTech, Pasadena, Ca., pp. 499-508, 2002.
- [24] A. H. DE STERCK, *Numerical simulation and analysis of magnetically dominated MHD bow shock flows with applications in space physics*, Ph.D. thesis, Katholieke Unversiteit Leuven, Belgium, 1999.
- [25] H. DE STERCK, *Hyperbolic theory of the "shallow water" magnetohydrodynamics equations*, Physics of Plasmas, 8 (7) pp. 3293-3304, 2001.
- [26] C. R. EVANS AND J. F. HAWLEY, *Simulation of magnetohydrodynamic flows : A constrained transport method*, Astrophys. J. 332, 659, 1988.
- [27] E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservations laws*, SPRINGER, 1996.
- [28] S.K. GODUNOV, *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics*, MATH. SB., 47(89), 271-306, 1959.
- [29] S.K. GODUNOV, A. ZABRODINE, M. IVANOV, A. KRAÏKO, AND G.PROKOPOV, *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, traduit du russe, EDITIONS MIR, MOSCOU, 1979.
- [30] P.A. GILMAN, *Fluid dynamics and MHD of the solar convection zone and tachocline : current understanding and unsolved problems*, Solar Physics, 192 pp. 27-48, 1999
- [31] P.A. GILMAN, *Magnetohydrodynamic "shallow water" equations for the solar tachocline.*, Astrophys. J., 544 pp. L79-L82, 2000.
- [32] C. HIRSCH, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol I and II*, WILEY, NEW YORK, 1988-1990.

- [33] A. JAMESON, *Essential elements of computational algorithms for aerodynamic analysis and design*, ICASE REPORT, 97-68, 1997.
- [34] A. JEFFERY AND T. TANUITI, *NON-LINEAR WAVE PROPAGATION*, Academic Press, New York, 1964.
- [35] G. JIANG AND E. TADMOR, *Non-oscillatory Central Schemes for Multidimensional Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM J. on Scientific Computing, 19, pp.1892-1917, 1998.
- [36] G. JIANG AND C.C. WU, *A High-Order WENO Finite Difference Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 150 561-594, 1999.
- [37] T. KATSAOUNIS AND D. LEVY, *A Modified Structured Central Scheme for 2D Hyperbolic Conservation Laws*, Applied Mathematics Letters 12(6), pp. 89-86, 1999.
- [38] D. KRÖNER, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, in Wiley-Teubner Series, Adv. Numer. Math., Wiley, Stuttgart, 1997.
- [39] M. KÜTHER, *A priori and a posteriori error estimates for the staggered Lax-Friedrichs scheme in multidimensions for scalar nonlinear conservation laws*, Preprint No. 19/2000, Mathematische Fakultät, University of Freiburg, Germany, 2000.
- [40] L. D. LANDAU AND E. LIFSHITZ, *ELECTRODYNAMICS OF CONTINUOUS MEDIA*, Pergamon, New York, 1960.
- [41] P.D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation*, Comm. Pure and Applied Math.7, pp. 159-193, 1954.
- [42] P.D. LAX AND B. WENDROFF, *Systems of conservation laws*, Comm. Pure and Applied Math.13, pp. 217-237, 1960.
- [43] R. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2002.
- [44] K.-A. LIE AND S. NOELLE, *Remarks on high-resolution non-oscillatory central schemes for multidimensional systems of conservation laws. Part I : An improved quadrature rule for the flux computation*, Preprint no. 679, Sonderforschungsbereich 256, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitaet, Bonn, Germany, 2000.
- [45] P. LONDRILLO AND L. DEL ZANNA, *High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics*, Astrophysical J., 53, pp. 508-524, 2000.

- [46] H. NESSYAHU AND E. TADMOR, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., 87, No. 2, pp. 408-463, 1990.
- [47] L. PARESCHI, G. PUPPO, G. RUSSO, *Central Runge-Kutta schemes for Conservation Laws*, preprint submitted to SIAM J.Sci. Comp. 2003.
- [48] G.K. PARKS, *Physics of Space Plasmas : An Introduction*, Addison-Wesley, 1991.
- [49] K.G. POWELL, P.L. ROE, T.J. LINDE, T.I. GOMBOSI AND D.L. DE ZEEUW, *A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics*, J. Comp. Phys. 154, 284 1999.
- [50] K. G. POWELL, *An Approximate Riemann Solver for MHD*, ICASE NASA, Langley Research Center, Contract Rep. 194902, ICASE Rep. 94-25, Hampton, VA, 1994.
- [51] K. G. POWELL, P. L. ROE, R. S. MYONG, T. GOMBOSI, AND D. DE ZEEUW, *An Upwind Scheme for Magnetohydrodynamics*, AIAA Paper 95-1704-CP, 1995.
- [52] R.D. RICHTMYER AND K.W. MORTON, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, INTERSCIENCE, 1967.
- [53] J. ROSSMANITH, *A Wave Propagation Method with Constrained Transport for Ideal and Shallow Water Magnetohydrodynamics*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of Washington, 2002.
- [54] G. RUSSO, *Central schemes and Systems of Balance Laws*, in Hyp. Part. Diff. Eq., Theo., Num. and App., ed. by A.Meister and I.Struckmeier, Vieweg, Wiesbaden (D), 2002.
- [55] D. RYU AND T.W. JONES, *Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics : Algorithm and tests for one-dimensional flow*. Astrophys. J. 442, 228, 1995.
- [56] D. RYU, F. MINIATI, T. W. JONES, AND A. FRANK, *A divergence-free upwind code for multi-dimensional magnetohydrodynamic flows*, Astrophys. J. 509, 244, 1998.
- [57] C. W. SCHULZ-RINNE, J. P. COLLINS AND H. M. GLAZ, *Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics*, SIAM J. Sci. Comp., 14, pp. 1394-1414, 1993.
- [58] D. SERRE, *Systèmes de lois de conservation*, Diderot, editors, Paris, Vol. I and II, 1996.

- [59] G.A. SOD, *Numerical Methods in Fluid Dynamics* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1985.
- [60] G. A. SOD, *A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws*, J. COMP. PHYSICS, VOL. 27, PP. 1-31, 1978.
- [61] AMIK ST-CYR, *Construction de méthodes de volumes finis tridimensionnelles sans solveur de Riemann pour les systèmes hyperboliques non-linéaires*, THÈSES DE DOCTORAT, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE, UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL, 2002.
- [62] R. TOUMA AND P. ARMINJON, *A CTCS divergence treatment for ideal MHD*, PROC. TENTH INT. CONF. ON HYP. PROB. THEO., NUM., APPL. HYP2004, OSAKA-JAPAN, SEPTEMBER 2004 (IN PRESS).
- [63] R. TOUMA, AND P. ARMINJON, *Central Finite Volume Schemes with CTCS Magnetic Field Divergence Treatment for 2- and 3-D Ideal MHD*, J. COMP. PHYS., PREPRINT SUBMITTED JANUARY 2005.
- [64] G. TÓTH, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes*, J. COMP. PHYS., 161, PP. 605-652, 2000.
- [65] G. TÓTH AND D. ODSTRČIL, *Comparison of some flux-corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems*, J. COMP. PHYS. 128, 82, 1996.
- [66] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection*, J.COMP.PHYSICS, 23, PP. 276-299, 1977.
- [67] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method*, J.COMP.PHYSICS, 32, PP. 101-136, 1979.
- [68] A. L. ZACHARY, AND P. COLELLA, *A high-order Godunov method for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, J. COMP. PHYS., 99, PP. 341-347, 1992.
- [69] A. L. ZACHARY, A. MALAGOLI, AND P. COLELLA, *A higher-order Godunov method for multi- dimensional ideal magnetohydrodynamics*, SIAM J. SCI. COMPUT., 15 263-284, 1994.
- [70] U. ZIEGLER, *A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics*, J. COMP. PHYS., 192 393-416, 2004.