Université de Montréal

SUR LA CONJECTURE DE BIEBERBACH

par

Alain Rémillard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

août 2005

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

SUR LA CONJECTURE DE BIEBERBACH

présenté par

Alain Rémillard

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Michel Delfour
(président-rapporteur)

Paul M Gauthier
(directeur de recherche)

Richard Fournier
(co-directeur)

André Giroux
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
10/08/05

SOMMAIRE ET MOTS CLÉS

Sommaire

Ce mémoire est un survol historique de la conjecture de Bieberbach sur les fonctions univalentes. Il sera question, tout d'abord, de l'origine de cette conjecture. Suivront ensuite quelques résultats partiels. Finalement, une preuve détaillée sera présentée. La conjecture a été démontrée par Louis de Branges. La preuve présentée dans ce mémoire est une version simplifiée faite par Fitzgerald et Pommerenke.

Mots Clés

Fonctions univalentes, conjecture de Bieberbach, conjecture de Lebedev-Milin, équation différentielle de Löwner, théorème de de Branges.

SUMMARY

Summary

This memoir is an historic survey of the Bieberbach conjecture on univalent functions. First, it will be question of the conjecture's origin. Then, some partial results will be exposed. Finally, a detailed proof will be presented. This conjecture was proven by Louis de Branges. The proof presented in this memoir is a simplified version made by Fitzgerald et Pommerenke.

Key Words

Univalent functions, Bieberbach conjecture, Lebedev-Milin conjecture, Löwner differentiel equation, de Branges theorem.

REMERCIEMENTS

Plusieurs personnes m'ont aidé, de près ou de loin, lors de la réalisation de ce mémoire et je tiens à les remercier. Tout d'abord, bien évidemment, mes directeurs, messieurs Paul M. Gauthier et Richard Fournier. Tout au long de ces années, ils ont été présents pour répondre à mes questions. Ils m'ont aussi permis d'approfondir mes connaissances en analyse complexe lorsque j'assitais à leurs cours, à leurs séminaires ou encore lorqu'ils me présentaient un fait intéressant au hasard d'une rencontre.

Je tiens aussi à remercier ma famille qui m'a toujours supporté et qui m'a poussé à donner le meilleur de moi-même dans mes études. Un merci spécial pour ma soeur Diane qui a accepté la lourde tâche de corriger mes nombreuses fautes. Finalement, je remercie mes amis, autant ceux du département de mathématiques que ceux du Ultimate. Grâce à eux, mes années d'université ont été beaucoup plus intéressantes.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

En 1916, Bieberbach a énoncé sa conjecture sur les fonctions univalentes. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ une fonction univalente du disque unité à valeur complexe ; alors l'inégalité suivante :

$$|a_n| \leq n$$

est valable pour tout n. Il y aura l'égalité si et seulement si f est une rotation de la fonction suivante :

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Cette conjecture a tenu pendant près de 70 ans avant d'être finalement résolue par Louis de Branges en 1985 [**deB**]. Le but de ce mémoire est de présenter une version simplifiée de cette preuve, faite par Carl H Fitzgerald et Christian Pommerenke [**F&P**].

Le premier chapitre contiendra quelques notations, certains résultats classiques d'analyse complexe ainsi que des outils qui seront utiles tout au long de ce mémoire. Les fonctions univalentes seront introduites au chapitre 2. Ce dernier contiendra aussi quelques théorèmes simples sur les fonctions univalentes qui permettront d'introduire la conjecture de Bieberbach. Le chapitre se terminera par la preuve de plusieurs résultats partiels reliés à cette conjecture.

Le troisième chapitre sera consacré à l'équation différentielle de Löwner. Cette équation est un outil important pour la preuve de la conjecture de Bieberbach. Elle a été utilisée par Löwner pour montrer le cas où $n = 3$. De plus, Fitzgerald et Pommerenke utilisent une version modifiée de cette équation pour démontrer la conjecture de Bieberbach..

Le chapitre 4 contiendra la preuve du théorème de de Branges tel que démontré par Fitzgerald et Pommerenke [**F&P**]. Ce théorème prouve une conjecture plus forte que celle de Bieberbach, il s'agit de la conjecture de Lebedev-Milin (1971) sur les fonctions univalentes. Le mémoire se terminera par quelques remarques sur le théorème de de Branges.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

1.1. Notations

- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
- $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$;
- $D \subset \mathbb{C}$ un domaine de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un ouvert connexe ;
- $Hol(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f$ est holomorphe dans $D\}$;
- $Har(D) = \{f : D \to \mathbb{C} : f$ est harmonique dans $D\}$;
- $\Re\{z\}$ représente la partie réelle de z ;
- $\Im\{z\}$ représente la partie imaginaire de z.

1.2. Résultats classiques

Cette section contient des résultats classiques d'analyse complexe. Les preuves de ces résultats se trouvent dans [**Dur**] et dans [**RUD**].

Théorème 1.2.1. *Soit f une fonction holomorphe dans D, alors*

$$f'(z_0) \neq 0 \Longleftrightarrow f \text{ est localement injective en } z_0.$$

Théorème 1.2.2. *Soient D un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}$ une suite de fonctions injectives sur D. Si $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de D, alors f est soit une constante, soit injective dans D.*

Théorème 1.2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient α_k et β_k, des nombres complexes. Alors*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2.$$

Lemme 1.2.4 (Lemme de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout z dans $\mathbb{D}$. Alors $|f'(0)| \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$ dans $\mathbb{D}$. L'inégalité est stricte dans les deux cas sauf si f est une rotation du disque : $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Théorème 1.2.5 (Théorème de Green). *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ tel que sa frontière ∂D est composée d'un nombre fini de courbes lisses de Jordan. Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux fonctions dont les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\overline{D}$, alors*

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Corollaire 1.2.6. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ tel que sa frontière ∂D est composée d'un nombre fini de courbes lisses de Jordan. Alors*

$$\int_{\partial D} \overline{z}dz = 2iAire(D).$$

Théorème 1.2.7 (M-test de Weierstraß). *Soient $M_k \geq 0$ tels que $\sum M_k < \infty$. Si g_k sont des fonctions définies sur un ensemble E, telles que, pour tout k, $|g_k(z)| \leq M_k$, pour tout $z \in E$, alors $\sum g_k(z)$ converge uniformément sur E.*

Théorème 1.2.8 (Principe du module maximum). *Soit $u(z)$ une fonction harmonique sur D, un domaine borné, telle que f s'étend continument à la frontière ∂D de D. Si $|u(z)| \leq M$ sur ∂D, alors $|u(z)| \leq M$ dans D. De plus, s'il existe $z_0 \in D$ tel que $|u(z_0)| = M$, alors u est constante dans D.*

Théorème 1.2.9 (Principe de l'argument). *Soit f une fonction holomorphe sur la fermeture d'un domaine D borné par une courbe de Jordan C, supposons que $f(z) \neq 0$ sur C. Alors, le nombre de zéros de f dans D, comptés avec multiplicité, est égal à $1/2\pi$ fois la variation de l'argument de $f(z)$ lorsque z parcours C dans le sens positif.*

Théorème 1.2.10 (Théorème de Rouché). *Soient f et g deux fonctions holomorphes dans et sur C, une courbe de Jordan rectifiable, telles que $|g(z)| < |f(z)|$ sur C. Alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans C.*

Théorème 1.2.11 (Théorème de croissance). *Pour toute fonction f holomorphe et injective sur $\mathbb{D}$ avec $f(0) = f'(0) - 1 = 0$,*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad |z| = r < 1.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, il y a égalité si et seulement si f est de la forme $f(z) = z(1 - \xi z)^{-2}$ où $|\xi| = 1$.

Théorème 1.2.12 (Théorème de Riemann). *Soient $D \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et $\zeta \in D$ un point quelconque. Alors il existe une unique fonction f qui envoie D conformément dans le disque unité telle que $f(\zeta) = 0$ et $f'(\zeta) > 0$.*

Théorème 1.2.13 (Théorème d'extension de Carathéodory). *Soient D un domaine borné par une courbe de Jordan C et f une fonction qui envoit D sur $\mathbb{D}$ de façon conforme. Alors f peut être prolongée en un homéomorphisme de $\overline{D} = D \cup C$ sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$.*

Théorème 1.2.14 (Principe de subordination). *Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$ et f injective dans $\mathbb{D}$. Si $g \in Hol(\mathbb{D})$ telle que $g(0) = f(0)$ et $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$, alors $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ et $g(\mathbb{D}_r) \subset f(\mathbb{D}_r)$, pour tout $r < 1$, où $\mathbb{D}_r$ représente le disque $|z| < r$.*

Théorème 1.2.15 (Théorème de la moyenne). *Soit $u \in Har(\{|z - z_0| \leq R\})$, alors, pour tout $r < R$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})dt.$$

Définition 1.2.16. *Le noyau de Poisson est la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par*

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\}, \qquad z = re^{i\theta}.$$

Plus généralement, le noyau de Poisson sur le disque $|z| < R$ est la fonction définie par

$$P_R(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}.$$

Théorème 1.2.17 (Formule de Poisson). *Soit $u \in Har(\{|z - z_0| \leq R\})$, alors*

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_R(r, t-\theta)u(z_0 + Re^{it})dt, \qquad 0 \leq r < R.$$

Théorème 1.2.18 (Théorème de représentation de Herglotz, 1911). *Soit u une fonction harmonique positive dans $\mathbb{D}$ avec $u(0) = 1$. Alors, il existe une unique mesure positive $d\mu$ telle que*

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)d\mu, \qquad r < 1.$$

1.3. Familles normales

Les sections suivantes contiennent des outils qui nous seront utiles pour certaines preuves. Pour éviter d'interrompre ces preuves,, nous présentons ces outils maintenant. Commençons par les familles normales. Ces dernières ont été introduites par Paul Montel, en 1907. Les preuves des théorèmes présentés dans cette section se trouvent dans **[Dur]**. Pour plus de détails sur ces familles, voir **[SCH]**.

Tout d'abord, définissons quelques concepts.

Définition 1.3.1. *Une famille $\mathcal{F} \subset Hol(D)$ est dite normale si pour toute suite $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge uniformément sur les compacts de D.*

Définition 1.3.2. *Une famille $\mathcal{F} \subset Hol(D)$ est dite localement bornée si pour toute boule fermée $B \subset D$, il existe $M > 0$ telle que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in B$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$. Notons que la borne M dépend seulement de B.*

Ensuite, quelques théorèmes qui nous seront utiles.

Théorème 1.3.3 (Montel). *Soit $\mathcal{F} \subset Hol(D)$. Si $\mathcal{F}$ est localement bornée sur D, alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.*

L'inverse du théorème de Montel est aussi vrai.

Théorème 1.3.4. *Soit $\mathcal{F} \subset Hol(D)$. Si $\mathcal{F}$ est une famille normale sur D, alors $\mathcal{F}$ est localement bornée.*

Théorème 1.3.5 (Vitali). *Soit $\{f_n\} \subset Hol(D)$ une suite localement bornée de fonctions. Supposons, de plus, que $\{f_n\}$ converge sur un ensemble de points qui possède un point d'accumulation dans D. Alors $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts de D.*

1.4. Dominance de séries

Les résultats de cette section se trouvent dans **[Go1]**.

Définition 1.4.1. *Soient deux séries de puissances*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$$

et

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_n z^n$$

convergeant pour $|z| < R$. *Nous dirons que la série* F *domine la série* f, *ou que* f *est dominée par* F *si*

$$|a_n| \leq A_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous noterons la dominance par $f << F$.

Voici quelques propriétés de la dominance.

Théorème 1.4.2. *Supposons que* $f(z) << F(z)$, *alors*

1)
$$A_n \geq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

2)
$$|f(z)| \leq F(r), \qquad 0 \leq |z| = r < R,$$

3)
$$f'(z) << F'(z),$$

4)
$$\int_0^z f(t)dt << \int_0^z F(t)dt,$$

5)
$$e^{f(z)} << e^{F(z)}$$

et si $|F(z)| < 1$ *dans un disque* $|z| < \rho$, *alors dans ce disque*

6)
$$-ln(1 - f(z)) << -ln(1 - F(z)).$$

1.5. Les polynômes de Jacobi

Les résultats de cette section se trouvent dans [**SZE**].

Définition 1.5.1. *Une classe de polynômes* $\{p_n(x)\}$ *est dite orthogonale si elle satisfait à une relation du type*

$$\int_a^b w(x)p_n(x)p_m(x)dx = \delta_{n,m}c_n \qquad (1.5.1)$$

où les polynômes et la fonction $w(x)$ *sont définis sur* (a, b). *La fonction positive* $w(x)$ *est appellée fonction de poids et* $\delta_{n,m}$ *est le delta de Kronecker. Si* $c_n = 1$, *alors la classe est dite orthonormale.*

Les polynômes de Jacobi sont un exemple d'une telle classe avec $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, pour $\alpha > -1$, $\beta > -1$, et

$$c_n \equiv \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ est la fonction gamma. Nous pouvons définir les polynômes de Jacobi de la façon suivante :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \qquad (1.5.2)$$

où $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ et $(a)_0 = 1$. Par calcul direct, nous trouvons

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(1) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left[1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k}\left(\frac{1-1}{2}\right)^k\right] \\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} = \binom{n+\alpha}{n}. \end{aligned}$$

Si nous considérons la fonction de poids $w(-x)$, nous trouvons la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}p_n(x)p_m(x)dx = \delta_{n,m}c_n.$$

Cette relation sera satisfaite par les polynômes $P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$. Puisque $w(x)$ et $w(-x)$ sont essentiellement la même fonction, nous devons avoir

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$$

où les a_n sont des constantes. En comparant les coefficients de x^n dans ces deux polynômes, nous trouvons $a_n = (-1)^n$ et $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$. Nous pouvons en déduire que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}. \tag{1.5.3}$$

La dernière propriété des polynômes de Jacobi qui nous intéresse est la positivité de la somme. Cette propriété a été démontrée par Askey et Gasper, il s'agit du théorme 3 dans [**A&G**].

Théorème 1.5.2 (Askey et Gasper, 1976). *Si $\alpha \geq -2$, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} P_k^{(\alpha,0)}(x) \geq 0, \qquad -1 < x \leq 1, \tag{1.5.4}$$

avec égalité seulement si $\alpha = -2$ et $n = 1$ ou $x = 1$, $n \geq 1$. Cependant, si $\alpha < -2$ alors

$$1 + P_1^{(\alpha,0)}(x) = 1 + (\alpha+1)\left[1 - \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\left(\frac{1-x}{2}\right)\right] = (\alpha+2)\frac{1+x}{2} < 0$$

dès que $x > -1$.

Remarque 1.5.3. *Dans la définition des polynôme de Jacobi, nous avons demandé $\alpha, \beta > -1$. Il est cependant possible de les considérer pour d'autres valeurs de α, β.*

La preuve du théorème précédent se trouve dans [**A&G**].

Chapitre 2

RÉSULTATS PARTIELS

Dans ce chapitre, nous présenterons la conjecture de Bieberbach sur les fonctions univalentes. Nous commencerons par introduire ces dernières. Ensuite, nous présenterons les résultats qui ont conduit à la conjecture. Finalement, nous démontrerons quelques résultats partiels.

2.1. Introduction aux fonctions univalentes

Commençons par définir la classe des fonctions univalentes. Soient D un domaine du plan complexe et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur D. Une fonction univalente sur D est tout d'abord une fonction injective sur D. L'ensemble de ces fonctions étant très vaste, nous allons tenter de restreindre notre ensemble. Premièrement, le théorème de recouvrement de Riemann 1.2.12 nous permet de simplement considérer les fonctions où $D = \mathbb{D}$. Deuxièmement, si nous changeons la valeur de f à l'origine, nous ne toucherons pas à l'injectivité. Nous pouvons donc imposer $f(0) = 0$. Et troisièmement, par le théorème 1.2.1, nous avons $f'(0) \neq 0$. Nous pouvons donc multiplier f par $1/f'(0)$ sans affecter l'injectivité de la fonction. Résumons ceci dans la définition suivante.

Définition 2.1.1. *Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est dite univalente si elle satisfait aux propriétés suivantes :*

1) $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, c'est-à-dire f est injective ;

2) f est analytique sur $\mathbb{D}$;

3) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

La classe des fonctions univalentes sera notée S.

Un des exemples les plus importants de fonction univalente est la fonction de Koebe :

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots . \tag{2.1.1}$$

Nous pouvons réécrire la fonction de la façon suivante :

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Sous cette forme, nous voyons que cette fonction envoie le disque unité dans le plan complexe moins l'axe réel négatif entre $-1/4$ et $-\infty$. Voici quelques autres exemples de fonctions de la classe S :

1) $f(z) = z$, la fonction identité ;
2) $f(z) = z(1+z)^{-1}$, la fonction qui envoie $\mathbb{D}$ conformément sur le demi-plan $\Re\{z\} > -1/2$;
3) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$, la fonction qui envoie $\mathbb{D}$ dans le plan moins deux demi-droites $1/2 \leq x < \infty$ et $-\infty < x \leq -1/2$;
4) $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$, la fonction qui envoie $\mathbb{D}$ dans une cardioïde.

La classe des fonctions univalentes est préservée sous certaines opérations. En voici quelques-unes :

(i) Conjugaison. Si $f \in S$ et $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \cdots$, alors $g \in S$;
(ii) Rotation. Si $f \in S$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $g(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, alors $g \in S$;
(iii) Dilatation. Si $f \in S$ et $g(z) = r^{-1}f(rz)$, où $0 < r < 1$, alors $g \in S$;
(iv) Automorphisme du disque. Si $f \in S$ et
$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}\right) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)},$$
alors $g \in S$;
(v) Transformation par valeur omise[1]. Si $f \in S$ et $f(z) \neq \omega$, alors $g(z) = \omega f(z)/(\omega - f(z)) \in S$;
(vi) Transformation par racine carrée[2]. Si $f \in S$ et $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$, alors $g \in S$.

Pour la dernière opération, la fonction z^2 n'étant pas injective et la fonction $\sqrt{z}$ étant multivoque, quelques explications sont nécessaires. Puisque f s'annule seulement à l'origine, nous pouvons prendre une branche de la racine carrée en écrivant :
$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{f(z^2)} = z\{1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots\}^{1/2} \\ &= z + c_3z^3 + c_5z^5 + \cdots, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$
Notons que la fonction g est impaire et, donc, $g(-z) = -g(z)$. Cette dernière propriété rend cette fonction injective. En effet, si $g(z_1) = g(z_2)$, alors $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. Puisque $f \in S$, ceci implique que $z_1^2 = z_2^2$ et $z_1 = \pm z_2$. Si $z_1 = -z_2$, alors $g(z_1) = g(z_2) = -g(z_1)$, ce qui implique que $g(z_1) = 0$ et $z_1 = 0$. Nous avons donc l'égalité $z_1 = z_2$ dans les deux cas : $g \in S$.

Remarque 2.1.2. *Toute fonction impaire dans S est la transformée par racine carrée d'une certaine fonction de S.*

De la même façon, soit $S^{(m)} \subset S$ la classe des fonctions univalentes du type
$$f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m\nu+1}z^{m\nu+1},$$
où $m \in \mathbb{N}$. Alors, la transformée par la $m^{\text{ième}}$ racine $g(z) = \sqrt[m]{f(z^m)}$ de chaque fonction $f \in S$ est dans $S^{(m)}$ et, réciproquement, chaque fonction dans $S^{(m)}$ est la transformée par la $m^{\text{ième}}$ racine d'une fonction de S.

Remarque 2.1.3. *Il est à noter que la classe S n'est pas fermée sous l'addition de fonction. Par exemple, la dérivée de $z(1-z)^{-1} + z(1+iz)^{-1}$ s'annule en $\frac{1}{2}(1+i)$.*

[1]Traduction libre de "Omitted-value transformation".

[2]Traduction libre de "Square-root transformation".

2.2. La conjecture de Bieberbach

Dans cette section, il sera question des résultats que ont conduit à la conjecture de Bieberbach. Pour ce faire, nous aurons besoin d'une classe de fonctions proche de la classe S. Soit Σ la classe des fonctions

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots$$

analytique et univalente dans $\boldsymbol{\Delta} = \{z : |z| > 1\}$ avec un pôle simple à l'infini de résidu 1. Chaque fonction $g \in \Sigma$ envoie $\boldsymbol{\Delta}$ dans le complément d'un ensemble compact et connexe E.

Deux sous-classes de Σ nous intéressent plus particulièrement. La première est la classe $\tilde{\Sigma}$ qui contient les fonctions $g \in \Sigma$ telles que l'ensemble E des valeurs omises est de mesure de Lebesgue nulle. La deuxième est la classe Σ' qui contient les fonctions $g \in \Sigma$ telles que $0 \in E$. En ajustant la constante b_0 de la bonne façon, toute fonction $g \in \Sigma$ va appartenir à la classe Σ'.

Cette dernière sous-classe est importante à cause de l'opération suivante : soit $f \in S$, alors la fonction

$$g(z) = \{f(1/z)\}^{-1} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \cdots$$

appartient à la classe Σ'. Cette opération est appelée une inversion et définit une bijection entre les classes S et Σ'. Il est à noter que la classe Σ' est fermé sous la transformation de la racine carrée. Cette opération est permise dans Σ' mais pas dans Σ car la fonction racine carrée introduit un point de branchement lorsque $g(z^2) = 0$.

La fonction

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \qquad |z| > 1,$$

étant univalente, les coefficients de la série de Laurent sont soumis à une très forte restriction. C'est ce que dit le prochain théorème prouvé en 1914 par Gronwall. Ce théorème est fondamental pour la théorie des fonctions univalentes.

Théorème 2.2.1 (Théorème d'aire). *Si $g \in \Sigma$, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

avec égalité si et seulement si $g \in \tilde{\Sigma}$.

Démonstration. Soit g une fonction univalente dans $\boldsymbol{\Delta}$.

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Soit $E = \mathbb{C} \backslash g(\{z : |z| > 1\})$. Pour $r > 1$, nous posons C_r comme étant l'image du cercle $|z| = r$ par la fonction g. C_r est une courbe de Jordan qui entoure un domaine $E_r \supset E$. Le théorème de Green 1.2.5 nous donne

$$\begin{aligned}
aire(E_r) &= \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{w}dw \\
&= \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}g'(z)dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ re^{i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{in\theta} \right\} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} \right\} re^{i\theta} d\theta \\
&= \pi \left\{ r^2 - \sum_{n+1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n} \right\}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 1, nous obtenons

$$m(E) = \pi \left\{ 1 - \sum_{n+1}^{\infty} n|b_n|^2 \right\}$$

où $m(E)$ représente la mesure de E. Puisque $m(E) \geq 0$, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

Nous aurons l'égalité si et seulement si $m(E) = 0$, c'est-à-dire si $g \in \tilde{\Sigma}$.

□

De ce théorème, nous pouvons déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2. *Si $g \in \Sigma$, alors $|b_1| \leq 1$ avec égalité si et seulement si g est de la forme*

$$g(z) = z + b_0 + b_1/z \qquad\qquad |b_1| = 1.$$

C'est une transformation conforme de $|z| > 1$ dans le complément d'un segment de longueur 4.

De là, nous arrivons au théorème de Bieberbach, datant de 1916, base de sa fameuse conjecture.

Théorème 2.2.3 (Bieberbach). *Si $f \in S$, alors $|a_2| \leq 2$ avec égalité si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in S$, nous définissons

$$g(z) = \{f(1/z^2)\}^{-1/2} = z - (a_2/2)z^{-1} + \cdots$$

qui est dans $\Sigma' \subset \Sigma$. Alors, par le corollaire 2.2.2, $|a_2/2| \leq 1$ avec égalité si et seulement si g est de la forme

$$g(z) = z - e^{i\theta}/z.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}
\{f(1/z^2)\}^{-1/2} &= z - e^{i\theta}/z \\
f(1/z^2) &= \{z - e^{i\theta}/z\}^{-2} \\
&= \left\{ \frac{z^2}{(z^2 - e^{i\theta})^2} \right\}.
\end{aligned}$$

En prenant $\zeta = 1/z^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1/\zeta}{(1/\zeta - e^{i\theta})^2} \\ &= \frac{\zeta}{(1-e^{i\theta}\zeta)^2} \\ &= e^{-i\theta}k(e^{i\theta}\zeta). \end{aligned}$$

Donc, f est une rotation de la fonction de Koebe.

□

Une première application de ce théorème, donnée par Bieberbach, est de montrer une conjecture de Koebe. Puisque $f \in S$ est une fonction ouverte avec $f(0) = 0$, son image contient un disque centré à l'origine. En 1907, Koebe a découvert qu'il existe une constante absolue ρ telle que l'image de chaque fonction $f \in S$ contient $|z| < \rho$. La fonction de Koebe montre que $\rho \leq \frac{1}{4}$ et Koebe a conjecturé que $\rho = \frac{1}{4}$.

Théorème 2.2.4 (Théorème de Koebe). *L'image de chaque fonction $f \in S$ contient le disque $\{w : |w| < \frac{1}{4}\}$.*

Démonstration. Si une fonction $f \in S$ omet une valeur $\omega \in \mathbb{C}$, alors

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right) z^2 + \cdots$$

est analytique et univalente dans $\mathbb{D}$. C'est la transformation de la valeur omise (v). Nous utilisons ici le théorème de Bieberbach 2.2.3 pour obtenir

$$\left|a_2 + \frac{1}{\omega}\right| \leq 2.$$

En combinant cette équation avec l'inégalité $|a_2| \leq 2$, nous obtenons $|1/\omega| \leq 4$ ou $|\omega| \geq \frac{1}{4}$. Ceci implique que toute valeur omise par la fonction doit être à l'extérieur du disque $|w| < \frac{1}{4}$.

□

La fonction de Koebe jouant un rôle extrémal dans plusieurs problèmes de la théorie des fonctions univalentes, il est naturel de penser qu'elle joue ce même rôle dans le problème qui nous intéresse. C'est ce qu'affirme Bieberbach dans sa conjecture proposée en 1916.

Conjecture 2.2.5 (Bieberbach). *Soit $f \in S$ alors $|a_n| \leq n$ avec égalité si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

Cette conjecture a été démontrée par Louis de Branges en 1985. Une version simplifiée de cette preuve sera présentée plus loin dans ce mémoire.

Si la fonction f est bornée, nous pouvons améliorer la borne pour le deuxième coefficient. Ce résultat est dû à Georg Pick (1917).

Théorème 2.2.6 (Pick). *Soient $f \in S$ et $M > 1$ telles que $|f(z)| < M$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors $|a_2| < 2(1 - 1/M)$ avec égalité si et seulement si f envoie $\mathbb{D}$ sur le disque $|w| \leq M$ moins un segment de rayon.*

Démonstration. Considérons la fonction $\dfrac{M}{e^{i\theta}}k\left(\dfrac{e^{i\theta}}{M}f(z)\right)$ et développons la en série de puissance

$$\begin{aligned}(M/e^{i\theta})\cdot k(e^{i\theta}f(z)/M) &= \sum_{n=1}^{\infty} ne^{in\theta}f^n(z)/M^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{ne^{in\theta}}{M^n}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j\right)^n\right] \\ &= z+(a_2+2e^{i\theta}/M)z^2+\cdots .\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une fonction de notre ensemble S et par le théorème de Bieberbach, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$

$$|a_2 + 2e^{i\theta}/M| \leq 2$$

et, donc,

$$|a_2| \leq 2(1-1/M).$$

Nous avons l'égalité si et seulement si $|a_2| = 2(1-1/M)$. Il existe alors un unique θ tel que $|a_2+2e^{i\theta}/M| = 2$. Le théorème de Bieberbach 2.2.3 implique que cette fonction est une rotation de la fonction de Koebe. Il existe donc un ϕ tel que

$$(e^{-i\theta}M)\cdot k(e^{i\theta}f(z)/M) = e^{-i\phi}k(e^{i\phi}z).$$

Ces deux fonctions doivent avoir la même image. Puisque $k(z)$ envoie le disque unité conformément dans $\mathbb{C}$ moins l'axe réel négatif entre $-1/4$ et $-\infty$, nous devons avoir que $\theta = \phi$;

$$Mk(e^{i\theta}f(z)/M) = k(e^{i\theta}z).$$

Isolons maintenant la fonction f ;

$$f(z) = e^{-i\theta}Mk^{-1}\left(\frac{k(e^{i\theta}z)}{M}\right).$$

Par la figure 2.2.1, nous voyons bien que la fonction qui nous intéresse envoie $\mathbb{D}$ conformément dans le disque $|w| < M$ moins un segment de rayon. Ce qui termine la preuve.

□

2.3. Les fonctions typiquement réelles

Pour la suite de ce chapitre, nous ferons la preuve de la conjecture pour des classes de fonctions plus restreintes. Commençons par introduire une classe de fonctions qui nous sera utile pour y parvenir. Considérons la classe P des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ dont la partie réelle est positive avec $\phi(0) = 1$:

$$\phi \in P \Longleftrightarrow \Re\{\phi(z)\} > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Selon le théorème de représentation de Herglotz 1.2.18, toute fonction $\phi \in P$ peut être représentée par une intégrale de Poisson-Stieltjes

$$\phi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t) \tag{2.3.1}$$

où $d\mu(t) \geq 0$ et $\int d\mu(t) = 1$. Le lemme suivant nous sera très utile.

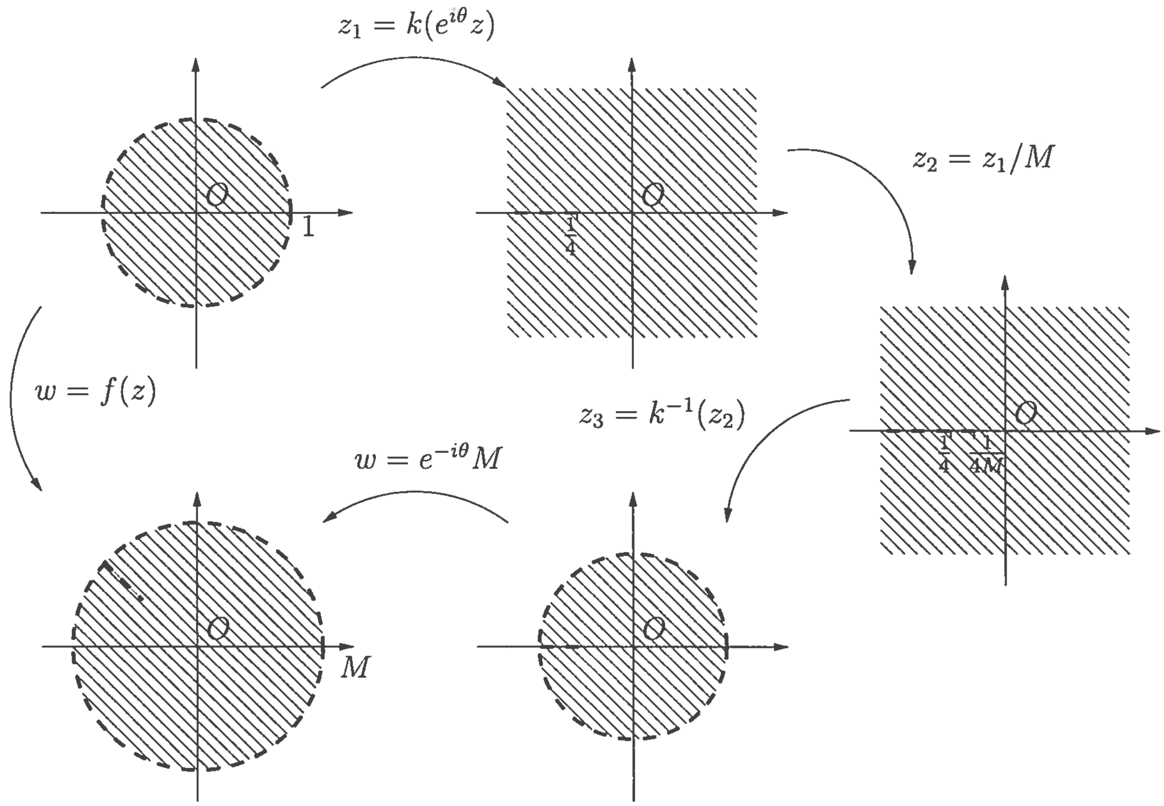

FIG. 2.2.1

Lemme 2.3.1 (Carathéodory). *Si* $\phi \in P$ *et* $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, *alors* $\forall n \in \mathbb{N}, |c_n| \leq 2$. *De plus, cette inégalité est exacte pour tout* n.

DÉMONSTRATION. Puisque $\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int} z^n$, l'équation 2.3.1 nous donne donc

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t). \tag{2.3.2}$$

Alors,

$$|c_n| = 2\left|\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t)\right| \leq 2\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2.$$

Avec égalité si et seulement si e^{-int} est constant sur le support de la mesure $d\mu$. Par exemple, l'égalité tient pour tout n pour la fonction

$$\phi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

□

Soit maintenant S_R la classe des fonctions univalentes à coefficients réels. Si $f \in S_R$, alors $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$. De plus, si $f(z) \in \mathbb{R}$, nous avons $f(z) = f(\overline{z})$ et, pour ne pas contredire l'univalence, $z = \overline{z}$, donc $z \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $f'(0) > 0$, f envoie le demi-disque supérieur dans le demi-plan supérieur et le demi-disque inférieur dans le demi-plan inférieur.

Pour démontrer la conjecture de Bieberbach sur S_R, nous allons considérer une classe de fonctions plus grande. Une fonction $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dite typiquement réelle si elle prend des valeurs réelles sur l'axe réel et des valeurs non-réelles partout ailleurs. Soit T l'ensemble des fonctions de ce type avec la normalisation $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Alors, si $f \in T$, $\Im\{f(z)\} > 0$ quand $\Im\{z\} > 0$ et $\Im\{f(z)\} < 0$ quand $\Im\{z\} < 0$. De plus, il est évident que les coefficients de Taylor de f sont réels et, donc, que $S_R \subset T$.

L'avantage de T sur S_R est que nous pouvons décrire analytiquement les éléments de T. Cette représentation est dû à Rogosinski, qui a d'ailleurs introduit les fonctions typiquement réelles. Soit P_R l'ensemble des $\phi \in P$ dont les coefficients sont tous réels.

Théorème 2.3.2 (Rogosinski). *Si $f \in T$, alors*

$$\phi(z) = \frac{1-z^2}{z} f(z) \in P_R.$$

Inversement, si $\phi \in P_R$, alors

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2}\phi(z) \in T.$$

Démonstration. Soit $h(z) = (1-z^2)/z = \left(\sqrt{k(z^2)}\right)^{-1}$. Si nous regardons sur le cercle unité,

$$h(e^{i\theta}) = \frac{1-e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2i\, sin\, \theta.$$

$\Im\{h(e^{i\theta})\}$ est donc négative sur le demi-cercle supérieur et positive sur le demi-cercle inférieur. Soit $f \in T$ et définissons, pour $0 < \rho < 1$,

$$\phi_\rho(z) = h(z) f(\rho z).$$

Cette fonction est analytique sur $\overline{\mathbb{D}}$ et pour tout θ,

$$\Re\{\phi_\rho(e^{i\theta})\} = 2\, sin\, \theta\, \Im\{f(\rho e^{i\theta})\} \geq 0.$$

Par le principe du module maximum pour les fonctions harmoniques 1.2.8, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\Re\{\phi_\rho(z)\} > 0$. En laissant ρ tendre vers 1, nous concluons que $\phi \in P$ et puisque les coefficients de f et de h sont réels, $\phi \in P_R$.

Pour l'inverse, soient $\phi \in P_R$ et $0 < \rho < 1$. La fonction $f_\rho(z) = \phi(\rho z)/h(z)$ est holomorphe dans $\overline{\mathbb{D}}$ sauf pour deux pôles simples en ± 1. Puisque $\phi \in P_R$, la fonction $f_\rho(z)$ prend des valeurs réelles sur l'axe réel. De plus, nous avons que $f'_\rho(0) = 1$, donc il existe un petit voisinage de l'origine où f_ρ est univalente et où $\Im\{f_\rho(z)\}$ est positive dans le demi-plan supérieur et négative dans le demi-plan inférieur. Considérons maintenant la réciproque

$$g_\rho(z) = 1/f_\rho(z) = h(z)\psi(\rho z)$$

où $\psi = 1/\phi \in P_R$. La fonction g_ρ est analytique dans $\overline{\mathbb{D}}$ sauf pour un pôle simple à l'origine. Sur le cercle unité, nous avons

$$\Im\{g_\rho(e^{i\theta})\} = \Im\{h(e^{i\theta})\psi(\rho e^{i\theta})\} = -2sin\ \theta\Re\{\psi(\rho e^{i\theta})\}.$$

$\Im\{g_\rho(e^{i\theta})\}$ est donc négative sur le demi-cercle supérieur et positive sur le demi-cercle inférieur. Posons $0 < \epsilon < 1$ et définissons

1) $\mathbb{D}_\epsilon^+ = \{z : \epsilon < |z| < 1 \text{ et } \Im\{z\} > 0\}$;

2) $\mathbb{D}_\epsilon^- = \{z : \epsilon < |z| < 1 \text{ et } \Im\{z\} > 0\}$.

Nous avons que g_ρ est holomorphe dans la fermeture de $\mathbb{D}_\epsilon^+$ et sa partie imaginaire est négative ou nulle sur $\partial\mathbb{D}_\epsilon^+$, pour tout ϵ suffisamment petit. Par le principe du module maximum, $\Im\{g_\rho(z)\} < 0$ dans $\mathbb{D}_\epsilon^+$. De façon similaire, nous obtenons que $\Im\{g_\rho(z)\} > 0$ dans $\mathbb{D}_\epsilon^-$. ϵ étant arbitraire, nous obtenons que $\Im\{f_\rho(z)\}$ est positive dans le demi-plan supérieur et négative dans le demi-plan inférieur. En laissant ρ tendre vers 1, nous pouvons conclure que f a la même propriété et, donc, que $f \in T$. Ce qui termine la preuve.

□

Remarque 2.3.3. *Les fonctions de l'ensemble T ne sont pas nécessairement univalentes. Considérons, par exemple, la fonction $f(z) = z + z^3$. Sa dérivée s'annule en $z = \pm i/\sqrt{3}$ et, donc, $f \notin S$.*

Des deux théorèmes précédents, nous pouvons déduire le résultat qui nous intéresse.

Théorème 2.3.4. *Si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in T$, alors $|a_{n+2} - a_n| \leq 2, n = 0, 1, 2, \ldots$*

Démonstration. Par le théorème de Rogosinski (2.3.2), la fonction

$$\phi(z) = \frac{1 - z^2}{z} f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2} - a_n)z^{n+1} \in P_R.$$

Par le lemme de Carathéodory (2.3.1), nous avons

$$|a_{n+2} - a_n| \leq 2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. □

Corollaire 2.3.5. *Si $f \in T$, alors $|a_n| \leq n$ pour $n = 2, 3, 4, \ldots$ avec inégalité stricte pour tous les n pairs sauf si f est la fonction de Koebe ou sa rotation réelle $-k(-z)$. L'inégalité est stricte pour les n impairs sauf si f est une combinaison convexe de ces deux fonctions.*

Ce corollaire découle, par induction, du théorème précédent.

2.4. Les fonctions spiralées

Passons maintenant à la classe des fonctions dites spiralées. Ces fonctions ont été introduites par Špaček en 1933. Pour définir ce que sont ces fonctions, nous avons besoin des concepts suivants.

Définition 2.4.1. *Soient w_0 et λ, deux constantes complexes telles que $w_o \neq 0$ et $\Re\{\lambda\} \neq 0$. Nous appellons spirale logarithmique la courbe du plan complexe définie par*

$$w = w_0 e^{-\lambda t} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Remarque 2.4.2. *Nous pouvons supposer sans perte de généralité que λ est de la forme $e^{i\alpha}$ pour $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. De plus, pour un α donné, il existe une unique spirale passant par w_0.*

Définition 2.4.3. *Un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est dit α-spiralé si $0 \in D$ et si pour tout $w_0 \in D$ l'arc de l'unique α-spirale entre 0 et w_0 est entièrement inclus dans D*

Définition 2.4.4. *Une fonction $f \in Hol(\mathbb{D})$ avec $f(0) = 0$ est dite α-spiralée si son image est α-spiralée*

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit spiralée.

Théorème 2.4.5. *Soient $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ et f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$. Supposons de plus que f est injective dans $\mathbb{D}$. Alors, f est α-spiralée si et seulement si*

$$\Re\left\{e^{-i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \qquad |z| < 1. \tag{2.4.1}$$

Ce théorème sera prouvé à l'aide du lemme suivant.

Lemme 2.4.6. *Soit ϕ, une fonction analytique avec $\Re\{\phi\} > 0$ dans $\mathbb{D}$. Alors, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, le problème à valeur initiale*

$$\frac{dz}{dt} = -z\phi(z), \qquad z(0) = \zeta, \tag{2.4.2}$$

définit une fonction $z = z(t;\zeta)$ dont le module est strictement décroissant dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$ et tend vers zéro lorsque $t \to \infty$.

Démonstration du lemme. Nous pouvons réécrire l'équation 2.4.2 de la façon suivante :

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -\phi(z) \iff \frac{d}{dt}log(z) = -\phi(z).$$

En prenant la partie réelle de l'équation précédente, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}log|z| = -\Re\{\phi(z)\} < 0.$$

Alors, $|z|$ décroît lorsque t croît. La solution existe donc pour tout $t \geq 0$ et $|z(t;\zeta)| \leq |\zeta|$. Par le principe du module maximum pour les fonctions harmoniques 1.2.8, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Re\{\phi(z(t;\zeta))\} \geq \delta \qquad 0 \leq t < \infty.$$

Il en suit que

$$\frac{d}{dt}log|z| < -\delta$$

et, donc,

$$|z(t;\zeta)| < |\zeta|e^{-\delta t} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty.$$

$\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Supposons que f satisfait à l'équation 2.4.1 et soit ϕ, une fonction à partie réelle positive, définie par

$$\phi(z) = \frac{\lambda f(z)}{zf'(z)}, \qquad \lambda = e^{i\alpha}.$$

Pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, soit $z = z(t;\zeta)$ la fonction définie par le lemme 2.4.6, c'est-à-dire qui satisfait à l'équation 2.4.2. Considérons la fonction

$$w = w(t;\zeta) = f(z(t;\zeta)).$$

L'équation 2.4.2 nous donne $w(0;\zeta) = f(\zeta)$ et

$$\frac{dw}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt} = -z\phi(z)f'(z) = -\lambda w.$$

En solutionnant cette équation, nous obtenons

$$w(t;\zeta) = f(\zeta)e^{-\lambda t}, \qquad 0 \le t < \infty.$$

Donc, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, la fonction f envoie la courbe $z(t;\zeta)$ sur une α-spirale logarithmique. L'image de f est donc α-spiralée.

Inversement, si f est une fonction $\alpha-$spiralée pour un $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. Alors, pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, l'image de f contient l'$\alpha-$spirale $w = f(\zeta)e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, où $\lambda = e^{i\alpha}$. Puisque f est injective, nous pouvons définir la courbe

$$z = z(t;\zeta) = f^{-1}(f(\zeta)e^{\lambda t}), \qquad 0 \le t < \infty. \tag{2.4.3}$$

Évidemment, $z(0;\zeta) = \zeta$. Si nous fixons t, la fonction $z(t;\zeta)$ est analytique par rapport à ζ. De plus, elle satisfait $|z(t;\zeta)| < 1$ et $z(t,0) = 0$. Par le lemme de Schwarz 1.2.4, nous avons $|z(t;\zeta)| \le |\zeta|$. De l'équation 3.4.4, nous dérivons l'équation

$$f'(z(t;\zeta))\frac{dz}{dt}(t;\zeta) = -\lambda e^{-\lambda t} f(\zeta).$$

En posant $t = 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{\zeta}\frac{dz}{dt}(0;\zeta) = -\frac{\lambda f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}.$$

La preuve de l'équation 2.4.1 se réduit donc à montrer que

$$\Re\left\{\frac{1}{\zeta}\frac{dz}{dt}(0;\zeta)\right\} \le 0,$$

ou encore

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Re\left\{\frac{z(0;\zeta)}{\zeta} - 1\right\} \le 0.$$

Cette dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité $|z(t;\zeta)| \le |\zeta|$. Ceci démontre que f satisfait l'équation 2.4.1 et termine la preuve du théorème. □

Dans le théorème précédent, la condition d'injectivité de f est superflue. Špaček a démontré en 1933 que c'est une caractéristique intrinsèque aux fonctions α-spiralées.

Théorème 2.4.7 (Špaček, 1933). *Si f est une fonction α-spiralée, alors f est univalente dans $\mathbb{D}$*

DÉMONSTRATION. Si f n'est pas univalente dans $\mathbb{D}$, alors il existe $\zeta_1 \neq \zeta_2$ tels que $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$. Définissons maintenant la fonction $z = z(t;\zeta)$ à partir du lemme 2.4.6, comme au début de la preuve du théorème précédent. De la même façon, nous définissons $w(t;\zeta) = f(z(t;\zeta))$. Cette dernière représente la spirale logarithmique joignant $f(\zeta)$ à 0. Puisque celle-ci est unique, $w(t;\zeta_1) = w(t;\zeta_2)$ pour $0 \leq t < \infty$.

L'hypothèse que $f'(0) \neq 0$ implique que la fonction est localement injective. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que f est injective dans $|z| < \epsilon$. Par le lemme 2.4.6, les fonctions $|z(t,\zeta_1)|$ et $|z(t,\zeta_2)|$ tendent vers zéro lorsque $t \to \infty$, donc pour $t > t_0$, $|z(t;\zeta_1)| < \epsilon$ et $|z(t;\zeta_2)| < \epsilon$. Il en suit que $z(t;\zeta_1) = z(t;\zeta_2)$ pour $t > t_0$. Par unicité de la solution du l'équation 2.4.2, nous devons avoir que $z(t;\zeta_1) = z(t;\zeta_2)$ pour $t \geq 0$ et, donc, $z(0;\zeta_1) = z(0;\zeta_2)$, $\zeta_1 = \zeta_2$. f est donc univalente.

□

Nous voulons maintenant trouver une borne pour les coefficients de la série de Taylor. Pour commencer, nous aurons besoin du théorème suivant qui nous donne un lien entre les fontions $\alpha-$spiralées et les fonctions à partie réelle positive.

Théorème 2.4.8 (Špaček, 1933). *Une fonction f est α-spiralée si et seulement si il existe $p \in P$ telle que*

$$f(z) = ze^{I(z)}$$

où

$$I(z) = (e^{-i\alpha} cos\alpha) \int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt.$$

Ce théorème combiné avec la dominance des séries (voir la section 1.4) nous permettra de trouver une première borne pour les coefficients des fonctions $\alpha-$spiralées. Par le lemme de Carathéodory 2.3.1, si $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ est dans P, alors $|c_n| \leq 2$. De plus, $\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, nous avons donc $p(z) << \frac{1+z}{1-z}$ pour toute fonction $p \in P$. Par le théorème 1.4.2,

$$\int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt << \int_0^z \frac{1}{t}\left(\frac{1+t}{1-t} - 1\right) dt = -2ln(1-z).$$

Donc, par le théorème 2.4.8,

$$f(z) = z\, exp\left\{(e^{-i\alpha} cos\,\alpha) \int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt\right\} << ze^{-2\cos\alpha\, ln(1-z)} = \frac{z}{(1-z)^{2\cos\alpha}}.$$

En utilisant le théorème du binôme, nous obtenons

$$|a_n| \leq \frac{2\,cos\,\alpha(1+2\,cos\,\alpha)\cdots(n-2+2\,cos\,\alpha)}{(n-1)!} \leq n\,cos\,\alpha.$$

Malheureusement, cette borne n'est pas exacte car la fonction $\frac{z}{(1-z)^{2\,cos\,\alpha}}$ n'est pas α-spiralée.

Théorème 2.4.9 (Zamorski, 1960). *Si f est α-spiralée, alors*

$$|a_n| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k cos^2\alpha)^{1/2} \tag{2.4.4}$$

où $s = e^{-i\alpha} cos\alpha$. Cette inégalité est exacte.

La preuve de ce théorème étant très technique, elle sera laissée de côté. Elle peut être trouvée dans [**Go1**], pages 151-153, ou encore dans [**Lib**].

La fonction

$$f(z) = z(1-z)^{-2e^{i\alpha}\cos\alpha}$$

joue le rôle de la fonction de Koebe pour les fonctions $\alpha-$spiralées. Elle envoie le disque unité dans le plan moins une $\alpha-$spirale.

2.5. Les fonctions étoilées et les fonctions convexes

Commençons par définir les classes de fonctions qui nous intéressent. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques définitions au préalable.

Définition 2.5.1. *Un domaine D est dit étoilé par rapport à $w \in D$ si pour tout $z \in D$, $tz + (1-t)w \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$.*

Définition 2.5.2. *Un domaine D est dit convexe si D est étoilé par rapport à tous ses élements, c'est-à-dire, si pour tout $z_1, z_2 \in D$, $tz_1 + (1-t)z_2 \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$.*

Définition 2.5.3. *Une fonction est dite convexe (respectivement étoilée) si son image est un domaine convexe (étoilé).*

Passons maintenant à la définition principale de cette section.

Définition 2.5.4. *1) $C = \{f \in S : f$ est une fonction convexe.$\}$;*

2) $S^* = \{f \in S : f$ est une fonction étoilée par rapport à $0.\}$.

Remarque 2.5.5. *La droite entre 0 et $w \in \mathbb{D}$ peut être vue comme une 0-spirale. Les fonctions étoilés forment donc une sous classe des fonctions $\alpha-$spiralées. De plus, nous avons, de façon évidente, que toute fonction convexe est étoilée. Donc, $C \subset S^* \subset S$ et, entre les deux derniers ensembles, nous pouvons glisser les fonctions $\alpha-$spiralées.*

Par la remarque précédente, nous avons déjà atteint notre but. Dans la section précédente, nous avons obtenu une borne exacte pour les coefficients des fonctions $\alpha-$spiralées. En remplacant α par zéro dans l'inégalité 2.4.4, nous obtiendrons une borne pour les coefficients des fonctions étoilées. Travaillons sur le membre de droite.

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k cos^2 0)^{1/2} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} (k-1) \\ &= n. \end{aligned}$$

De plus, par le théorème 2.4.9, cette inégalité est exacte pour tout n. Par contre, nous pouvons aussi le prouver directement. C'est ce qui sera fait dans cette section.

Commençons par montrer l'équivalent du théorème 2.4.9.

Théorème 2.5.6 (Nevanlinna, 1921). *Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors*

$$f \in S^* \Longleftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P.$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in S^*$. Nous allons commencer par montrer que f envoie chaque disque $|z| < \rho < 1$ dans un domaine étoilé. Pour ce faire, considérons la fonction $g(z) = f(\rho z)$ pour $0 < \rho < 1$. Montrons que $tg(z)$ est dans l'image de g pour $0 \leq t < 1$. Puisque f est une fonction étoilée, $tf(z)$ est dans l'image de f. Nous pouvons donc définir $w(z) = f^{-1}(tf(z))$, où $0 \leq t < 1$. Puisque $|w(z)| < 1$ et $w(0) = 0$, le lemme de Schwarz 1.2.4 nous donne que $|w(z)| \leq |z|$. Alors,

$$tg(z) = tf(\rho z) = f(w(\rho z)) = g(w_1(z)),$$

où $w_1(z) = w(\rho z)/\rho$ et $|w_1(z)| \leq |z|$. Donc, $tg(z)$ est dans l'image de g, g est étoilée. g étant la restriction de f au disque $|z| < \rho < 1$, la fonction f envoie bien ce disque dans un domaine étoilé. Il en suit que si nous nous déplaçons sur le cercle $|z| = \rho < 1$ dans le sens positif, alors $\arg f(z)$ augmente. En d'autres mots,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(\rho e^{i\theta})) \geq 0.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(\rho e^{i\theta})) &= \Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(\rho e^{i\theta}))\right\} \\ &= \Im\left\{\frac{izf'(z)}{f(z)}\right\} \\ &= \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}, \qquad z = \rho e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Par le principe du module maximum pour les fonctions harmoniques 1.2.8, la fonction $zf'(z)/f(z) \in P$.

Inversement, si f est une fonction analytique normalisée telle que $zf'(z)/f(z)$ est dans P, alors f a un zéro simple à l'origine et ne s'annule nulle part ailleurs dans le disque. Par le calcul précédent, nous voyons que pour tout $\rho < 1$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(\rho e^{i\theta})) > 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

f envoie donc le cercle $|z| = \rho$ sur une courbe C_ρ avec un argument croissant. Puisque f a un seul zéro dans le cercle $|z| = \rho$, le principe de l'argument 1.2.9 nous dit que c_ρ tourne une seule fois autour de l'origine. Alors, C_ρ est une courbe fermée simple qui borne un domaine étoilé. $f \in S^*$. Ce qui termine la preuve.

□

Lorsque la fonction est convexe, nous pouvons trouver une condition similaire.

Théorème 2.5.7 (Study, 1913). *Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors*

$$f \in C \Longleftrightarrow \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \in P.$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C$, alors nous voulons montrer que pour $0 < r < 1$ f envoie le disque $|z| = r$ dans un domaine convexe. Soient z_1 et z_2 deux points de $\mathbb{D}$ tels que $|z_1| \leq |z_2| < r$. Soient $w_1 = f(z_1)$ et $w_2 = f(z_2)$. Posons

$$w_0 = tw_1 + (1-t)w_2, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Alors, puisque f est univalente, il existe un unique $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $f(z_0) = w_0$. Nous voulons montrer que $|z_0| < r$. Définissons la fonction suivante :

$$g(z) = tf(z_1 z/z_2) + (1-t)f(z)$$

qui est analytique dans $\mathbb{D}$ avec $g(0) = 0$ et $g(z_2) = w_0$. Puisque $f \in C$, alors

$$h(z) = f^{-1}(g(z))$$

est bien définie et $h(z_2) = z_0$. De plus, $h(0) = 0$ et $|h(z)| < 1$, le lemme de Schwarz 1.2.4 nous donne donc $|h(z)| \leq |z|$. Donc,

$$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r.$$

f envoie donc chaque cercle $|z| = r < 1$ sur une courbe C_r qui borne un domaine convexe. La convexité implique que la pente de la tangente à C_r est croissante lorsque nous parcourons la courbe dans le sens positif. Analytiquement, nous pouvons réécrire cette condition comme :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right) \geq 0.$$

Ceci est équivalent à

$$\Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right)\right\} \geq 0.$$

Si nous effectuons les dérivées, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right)\right\} &= \Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log[ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})]\right)\right\}\\ &= \Im\left\{\frac{-re^{i\theta}f'(re^{i\theta}) - r^2e^{2i\theta}f''(rei\theta)}{ire^{i\theta}f'(re^{i\theta})}\right\}\\ &= \Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\},\end{aligned}$$

où $z = re^{i\theta}$. Par le principe du module maximum pour les fonctions harmoniques 1.2.8, $[1 + zf''(z)/f'(z)] \in P$.

Inversement, supposons que f est une fonction analytique et normalisée avec $[1+zf''(z)/f'(z)] \in P$. Les calculs précédents montrent que la pente de la tangente à la courbe C_r croît de façon monotone. Lorsque nous faisons un tour complet sur la courbe C_r, l'argument du vecteur tangent augmente de

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right)d\theta &= \int_0^{2\pi}\Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta\\ &= \Re\left\{\int_{|z|=r}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\frac{dz}{iz}\right\}\\ &= 2\pi,\end{aligned}$$

où $z = re^{i\theta}$. C_r est donc une courbe fermée simple que borne un domaine convexe. Puisque $r < 1$ est arbitraire, nous avons montré que f est convexe.

□

Le théorème suivant montre que la classe des fonctions convexes et la classe des fonctions étoilées sont analytiquement très proche.

Théorème 2.5.8 (Alexander, 1915). *Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors*

$$f(z) \in C \Longleftrightarrow zf'(z) \in S^*.$$

DÉMONSTRATION. Ce théorème est en fait un corollaire des deux précédents. Posons $g(z) = zf'(z)$, alors

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{z[zf'(z)]'}{zf'(z)} = \frac{z[f'(z) + zf''(z)]}{zf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$

Pour conclure, nous avons

$$\begin{aligned} f \in C &\Longleftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P \quad \text{(théorème de Study 2.5.7)} \\ &\Longleftrightarrow \frac{zg'(z)}{g(z)} \in P \\ &\Longleftrightarrow g(z) \in S^* \quad \text{(théorème de Nevanlinna 2.5.6)} \\ &\Longleftrightarrow zf'(z) \in S^*. \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve.

□

Il ne reste plus qu'à montrer la conjecture de Bieberbach 2.2.5 pour ces deux classes de fonctions. Commençons par les fonctions étoilées.

Théorème 2.5.9. *Si $f \in S^*$, alors $|a_n| \leq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité est stricte pour tout n sauf si f est une rotation de la fonction de Koebe 2.1.1.*

DÉMONSTRATION. Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$, nous définissons la fonction

$$\phi(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Par le théorème de Nevanlinna 2.5.6, $\phi \in P$. De plus, le lemme de Carathéodory 2.3.1 nous donne $|c_n| \leq 2$. Nous avons l'égalité

$$zf'(z) = \phi(z)f(z).$$

En comparant les coefficients de z^n, nous obtenons

$$na_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}a_k \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

où $a_1 = 1$. Nous procédons maintenant par induction. Supossons que $|a_k| \leq k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, alors

$$(n-1)|a_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |c_{n-k}||a_k| \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1), \qquad (2.5.1)$$

ce qui prouve que $|a_n| \leq n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors selon l'équation 2.5.1,

$$|a_n| = n \Longleftrightarrow |a_k| = k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

En particulier, nous avons $|a_2| = 2$. Le théorème de Bieberbach 2.2.3 implique alors que la fonction f doit être une rotation de la fonction de Koebe 2.1.1. Ce qui termine la preuve.

□

Pour terminer cette section, passons aux fonctions convexes.

Corollaire 2.5.10. *Si $f \in C$, alors $|a_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cette inégalité est stricte sauf si f est une rotation de la fonction $l(z) = z(1-z)^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C$. Par le théorème d'Alexander 2.5.8, $zf'(z) \in S^*$. Si $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, alors $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$. Par le théorème 2.5.9, $|na_n| \leq n$, donc $|a_n| \leq 1$. Pour ce qui est des cas d'égalité,

$$|na_n| \leq n \Longleftrightarrow zf'(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2},$$

selon le théorème 2.5.9. Si nous solutionnons pour f, nous obtenons

$$f(z) = \frac{e^{-i\theta}}{1-e^{i\theta}z} + c,$$

où $c \in \mathbb{C}$. Pour définir ce que vaut c, nous utilisons le fait que f doit être normalisée, $0 = f(0) = e^{-i\theta} + c$, $c = -e^{-i\theta}$. En remplaçant c par sa valeur, nous obtenons

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{i\theta}z} = e^{-i\theta} l(e^{i\theta}z).$$

Ceci termine la preuve du corollaire.

□

2.6. Les fonctions presque-convexes

Les fonctions presque-convexes ont été introduites par Kaplan en 1952 (voir [**Kap**]). Il les a définies de la façon suivante.

Définition 2.6.1. *Une fonction f est dite presque-convexe s'il existe une fonction univalente convexe g tel que $\forall z \in \mathbb{D}$,*

$$\Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0. \tag{2.6.1}$$

L'ensemble de ces fonctions étant très vaste, nous imposerons certaines restrictions sur f et g. Tout d'abord, puisque nous nous intéressons aux dérivés de ces deux fonctions, leur coefficient constant n'a pas d'importance, donc imposons $f(0) = g(0) = 0$. Ensuite, puisque $g'(0) \neq 0$, nous devons avoir $f'(0) \neq 0$; nous allons donc imposer $f'(0) = 1$. Finalement, si nous multiplions g par un nombre réel positif, l'équation 2.6.1 sera toujours satisfaite. Nous imposons donc $|g'(0)| = 1$. La classe des fonctions presque-convexes sera notée K. La condition supplémentaire que $g'(0) = 1$ ou $g \in C$ définit une sous-classe de K qui sera notée K_0.

Évidemment, toute fonction convexe est presque-convexe. De plus, avec le théorème d'Alexander (2.5.8), nous avons que toute fonction étoilée est presque-convexe. En effet, soit $f \in S^*$. Définissons $g(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{f(t)}{t} dt$. Nous avons donc $g'(z) = f(z)/z$ et

$$\Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = \Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

par le théorème de Nevanlinna(2.5.6). En résumé, $C \subset S^* \subset K_0 \subset K$.

Nous voulons maintenant montrer que toute fonction presque-convexe est univalente. Nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 2.6.2 (Noshiro-Warchawski). *Soient D un domaine convexe et $f \in Hol(D)$ telle que $\Re\{f'(z)\} > 0$ pour tout $z \in D$, alors f est univalente dans D.*

DÉMONSTRATION. Soient $z_1 \neq z_2$ deux points de D. Puisque D est convexe, f est définie sur le segment joignant z_1 à z_2 et

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\, dz \\ &= (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1) dt \neq 0, \end{aligned}$$

puisque $\Re\{f'(z)\} > 0$.

□

Avec ce théorème, nous pouvons maintenant démontrer la propriété suivante.

Théorème 2.6.3. *Toute fonction presque-convexe est univalente.*

DÉMONSTRATION. Soit f une fonction presque-convexe. Il existe une fonction univalente convexe g telle que $\Re\{f'(z)/g'(z)\} > 0$. Définissons $D = g(\mathbb{D})$ et considérons la fonction suivante défini sur D

$$h(w) = f(g^{-1}(w)).$$

Alors,

$$h'(w) = \frac{f'(g^{-1}(w))}{g'(g^{-1}(w))} = \frac{f'(w)}{g'(z)},$$

donc $\Re\{h'(w)\} > 0$ et, par le théorème 2.6.2, elle est univalente. De plus $f(z) = h(g(z))$ l'est aussi.

□

Maintenant que nous avons $K \subset S$, il ne reste plus qu'à démontrer la conjecture de Bieberbach 2.2.5 pour cette classe.

Théorème 2.6.4. *Si $f \in K$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in K$. Par définition, il existe une fonction convexe g telle que

$$\Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0.$$

Donc,

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \phi(z) \in P. \tag{2.6.2}$$

Définissons ces trois fonctions selon leur série de Taylor.

1) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$;

2) $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, où $|b_1| = 1$;

3) $\phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$.

Réécrivons maintenant l'équation 2.6.2 de la façon suivante

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n\right)\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n b_n z^{n-1}\right)$$

et regardons les coefficients de z^n

$$n a_n = n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} k b_k c_{n-k}.$$

Alors, par le théorème de Study 2.5.7, $|b_n| \leq 1$, et par le lemme de Carathéodory 2.3.1, $|c_n| \leq 2$, l'égalité devient

$$n|a_n| \leq n + 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2.$$

d'où $|a_n| \leq n$.

$\square$

Chapitre 3

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LÖWNER

Dans ce chapitre, nous aborderons l'équation différentielle de Löwner introduite en 1923 par le mathématicien du même nom. Nous verrons tout d'abord le théorème de convergence de Carathéodory. Ensuite, nous montrerons la densité des fonctions dites "slit" dans S. Finalement, nous arriverons à l'équation différentielle et à l'application de celle-ci pour borner le troisième coefficient. Une version légèrement modifiée de cette équation sera utilisée au chapitre suivant pour démontrer la conjecture de Bieberbach. Les résultats contenus dans ce chapitre peuvent être trouvés dans [**Dur**].

3.1. Le théorème de convergence de Carathéodory

Nous devons tout d'abord introduire la notion de noyau d'une suite d'ensemble ; soit $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de domaines simplement connexes du plan complexe, telle que $0 \in D_n \subsetneq \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.1.1. *Le noyau de la suite $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est défini de la façon suivante où deux cas sont à considérer :*

1- si 0 est un point intérieur de l'intersection des domaines D_n. Le noyau de cette suite est alors le plus grand domaine D contenant l'origine ayant la propriété suivante :
$\forall K \subset D$ compact, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $K \subset D_n$;

2- si 0 n'est pas un point intérieur de l'intersection des domaines D_n, alors le noyau de la suite est $\{0\}$.

Nous dirons que la suite $\{D_n\}$ converge vers son noyau D, noté $D_n \to D$, si toute sous-suite de $\{D_n\}$ a le même noyau.

Considérons maintenant les transformations conformes $f_n(z)$ qui envoient le disque unité $\mathbb{D}$ dans D_n avec la normalisation $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) > 0$. Le théorème de convergence de Carathéodory fait le lien entre le comportement analytique de la suite $\{f_n\}$ et le comportement géométrique de la suite $\{D_n\}$.

Théorème 3.1.2 (Théorème de convergence de Carathéodory). *Soient*

- *$\{D_n\}$, une suite de domaine simplement connexe avec $0 \in D_n \subsetneq \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$;*
- *$f_n : \mathbb{D} \twoheadrightarrow D_n$, la transformation conforme satisfaisant $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) > 0$;*
- *D, le noyau de la suite $\{D_n\}$.*

Alors, $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ si et seulement si $D_n \to D \neq \mathbb{C}$. S'il y a convergence, nous devons distinguer deux cas :

1- si $D = \{0\}$, alors $f \equiv 0$;

2- si $D \neq \{0\}$, alors D est un domaine simplement connexe, f envoie $\mathbb{D}$ conformément sur D et les fonctions inverses f_n^{-1} convergent uniformément sur les compacts de D vers la fonction f^{-1}.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$. Alors, par le théorème 1.2.2, nous avons que f est soit constante, soit univalente. Si elle est constante, alors $f \equiv 0$ car $f_n(0) = 0$ pour tout n. Comme dans l'énoncé du théorème, nous allons distinguer deux cas.

Cas I : $f \equiv 0$. Nous devons montrer que $D = \{0\}$. Supposons, par contradiction, qu'il existe un nombre positif ρ tel que le disque $\{z : |z| < \rho\}$ est inclus dans D_n pour tout n. Les fonctions inverses ϕ_n sont définies sur ce disque et sont telles que $\phi_n(0) = 0$ et $|\phi_n(w)| < 1$. Par le lemme de Scharwz, nous avons $|\phi_n'(0)| \leq 1/\rho$. Ce qui est équivalent à $|f_n'(0)| \geq \rho > 0$, contredisant le fait que $f_n \to 0$ uniformément sur les compacts. Le même argument montre que chaque sous-suite de $\{D_n\}$ a le même noyau. Donc, $D_n \to D = \{0\}$.

Cas II : $f \not\equiv 0$. Alors f est univalente et envoie $\mathbb{D}$ dans un domaine Δ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$. Nous voulons montrer que $\Delta = D$ et que $D_n \to D$.

Montrons d'abord que $\Delta \subset D$. Pour ce faire, considérons un sous-ensemble compact $E \subset \Delta$, soient Γ une courbe de Jordan rectifiable dans $\Delta - E$ entourant E, δ la distance entre E et Γ et $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$. Montrons que $E \subset D_n$ pour tout n suffisamment grand, soit $w_0 \in E$. Alors, $|f(z) - w_0| \geq \delta$ pour tout $z \in \gamma$. De plus, par la convergence uniforme sur les compacts, il existe $N_E \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_E$, $|f_n(z) - f(z)| < \delta$, et ce, pour tout $z \in E$. Le théorème de Rouché 1.2.10 implique que $f(z) - w_0$ a le même nombre de zéro dans γ que

$$[f(z) - w_0] + [f_n(z) - f(z)] = f_n(z) - w_0.$$

Donc, pour tout $n > N_E$, $w_0 \in D_n$ et, comme N_E dépend seulement de E et non de w_0, nous avons $E \subset D_n$ pour tout $n > N_E$. Ceci étant vrai peu importe l'ensemble compact E, la définition du noyau implique que $\Delta \subset D$.

Il en suit que pour $n > N_E$, les fonctions inverses $\phi_n = f_n^{-1}$ sont définies sur E et y sont uniformément bornées. En choisissant une suite croissante de compacts $E_m \subset \Delta$ et en appliquant un argument de diagonalisation, nous pouvons trouver une sous-suite $\{\phi_{n_k}\}$ qui converge uniformément sur les compacts de Δ vers une fonction $\phi \in Hol(\Delta)$ avec $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) \geq 0$. En fait,

$$0 < \frac{1}{f'(0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f_n'(0)} = \lim_{n\to\infty} \phi_n'(0) = \phi'(0).$$

Alors ϕ est univalente dans Δ.

L'étape suivante consiste à montrer que $\phi = f^{-1}$. Posons $z_0 \in \mathbb{D}$ et $w_0 = f(z_0)$. Prenons ϵ suffisamment petit pour que le cercle $C : |z - z_0| = \epsilon$ soit dans $\mathbb{D}$; soient en outre $\Gamma = f(C)$ et δ la distance entre Γ et w_0. Alors pour tout $z \in C$, $|f(z) - w_0| \geq \delta$ et, par convergence $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \delta$ pour $k > k_0$. Le théorème de Rouché 1.2.10 implique qu'il existe z_k dans C tel que $f_{n_k}(z_k) = w_0$. Donc,

$|z_k - z_0| < \epsilon$ et $z_k = \phi_{n_k}(w_0)$. Alors,

$$|\phi(w_0) - z_0| \leq |\phi(w_0) - \phi_{n_k}(w_0)| + |z_k - z_0| < 2\epsilon$$

pour un k suffisamment grand. En laissant tendre ϵ vers 0, nous concluons que $\phi(w_0) = z_0$ et que $\phi = f^{-1}$.

Nous pouvous appliquer l'argument précédent pour toute sous-suite de $\{\phi_n\}$, ce qui nous permet de conclure que $\phi_n \longrightarrow f^{-1}$ uniformément sur les compacts de Δ. En fait, nous pouvons utiliser le même argument pour montrer que $\{\phi_n\}$ converge uniformément sur les compacts de D vers une fonction univalente ψ qui satisfait $|\psi(z)| < 1$. La fonction ψ est donc une continuation analytique de la fonction f^{-1} de Δ à D. Cependant, la fonction $f^{-1} : \Delta \longrightarrow \mathbb{D}$ est surjective, donc nous devons avoir que $\Delta = D$.

Pour démontrer que $D_n \to D$, il suffit de refaire l'argument avec une sous-suite $\{D_{n_k}\}$ pour conclure que f envoie $\mathbb{D}$ dans le noyau de la sous-suite et que celui-ci doit correspondre avec le noyau de $\{D_n\}$. Ceci termine la première partie de la démonstration.

Inversement, supposons que $D_n \to D \neq \mathbb{C}$. Encore ici, deux cas sont à considérer.

Cas I : $D = \{0\}$. Nous voulons alors montrer que $f_n'(0) \to 0$. Si ce n'est pas le cas, il existe alors $\epsilon > 0$ et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ tels que $f_{n_k}'(0) \geq \epsilon$. Par le théorème de Koebe 2.2.4, le disque $|w| < \epsilon/4$ doit être contenu dans chaque domaine D_{n_k}. Ceci contredit le fait que chaque sous-suite de $\{D_n\}$ a pour noyau $\{0\}$. Alors, $f_n'(0) \to 0$. Par la suite, le théorème de croissance 1.2.11 nous donne

$$|f(z)| \leq f_n'(0)\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad |z| < 1.$$

Nous pouvons donc conclure que $f_n(z) \to 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$.

Cas II : $D \neq \{0\}$, $D \neq \mathbb{C}$. Tout d'abord, la suite $\{f_n'(0)\}$ est bornée. Sinon, il existe une sous-suite $\{f_{n_k}'(0)\}$ telle que $f_{n_k}'(0) \to \infty$. Alors, le théorème de Koebe implique que le noyau de la suite $\{D_{n_k}\}$ est $\mathbb{C}$. Le théorème de croissance 1.2.11 implique que les fonctions f_n forment une famille uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{D}$ et donc normale par le théorème de Montel 1.3.3. Pour conclure que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$, il suffit maintenant de montrer la convergence ponctuelle, conséquence du théorème de Vitali 1.3.5. Supposons que nous ne possédions pas cette convergence, alors il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ et deux sous-suites $\{f_{n_k}\}$ et $\{f_{m_k}\}$ qui convergent vers f et $\hat{f}$ respectivement telles que $f(z_0) \neq \hat{f}(z_0)$. Selon ce que nous avons déjà démontré, ceci implique que les sous-suites $\{D_{n_k}\}$ et $\{D_{m_k}\}$ ont des noyaux différents, respectivement l'image de $\mathbb{D}$ par f et $\hat{f}$. Ceci contredit le fait que $D_n \to D$. Nous avons donc montré que $f_n \to f$, ce qui termine la preuve du théorème.

$\square$

3.2. Les fonctions "slit"

Commencons par définir ce que sont les fonctions "slit"[1].

Définition 3.2.1. *Une fonction univalente est dite slit si son image est le complémentaire d'un nombre fini de courbes de Jordan.*

Définition 3.2.2. *Une fonction univalente est dite single-slit si son image est le complémentaire d'une unique courbe de Jordan.*

Avec l'aide du théorème de convergence de Carathéodory 3.1.2, nous pouvons montrer que les fonctions single-slit sont denses dans S. C'est le point de départ de l'équation différentielle de Löwner.

Théorème 3.2.3. *Pour toute fonction $f \in S$, il existe une suite de fonctions single-slit f_n telles que $f_n \to f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que pour toute fonction univalente f, nous pouvons trouver une suite de fonctions univalentes $\{f_n\}$ telles que :

1- f_n converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ vers la fonction f ;

2- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n envoie le disque unité dans un domaine borné par une courbe de Jordan analytique.

Les dilatations $f(r_n z)/r_n$, où $r_n < 1$ et $r_n \to 1$, nous fournissent un exemple d'une telle suite. Pour démontrer le théorème, il est donc suffisant de considérer seulement les fonctions dont l'image est borné par une courbe de Jordan.

Soit $f \in S$, une fonction qui envoie $\mathbb{D}$ dans D, un domaine borné par une courbe de Jordan C. Soit, Γ_n une courbe de Jordan qui part de l'infini jusqu'à un point w_0 sur C ; ensuite, elle suit la courbe C jusqu'à un point w_n, comme sur la figure 3.2.1. Soient D_n, le complément de Γ_n et g_n, la fonction qui envoie

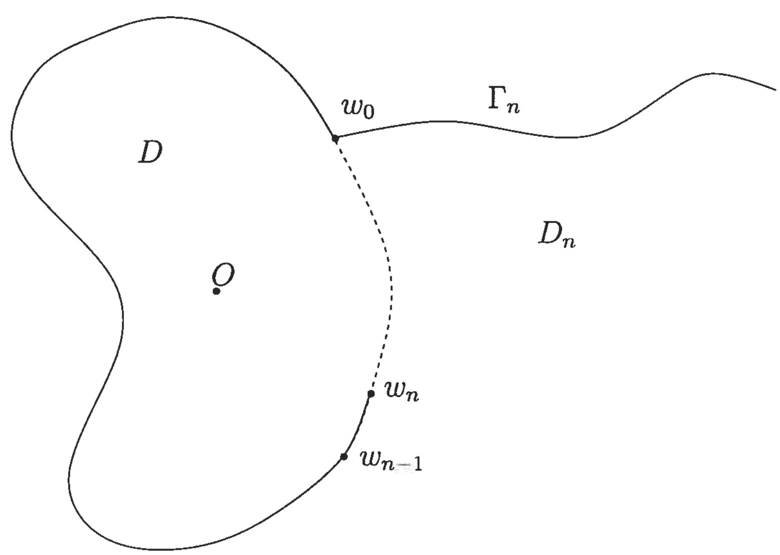

Fig. 3.2.1

[1]N'ayant pas trouver de traduction française pour l'expression "slit mapping", nous utiliserons la terminologie "fonction slit". De même, pour "single-slit mapping", nous utilliserons "fonction single-slit".

$\mathbb{D}$ sur D_n avec $g(0) = 0$ et $g'(0) > 0$. Choississons les points w_n de telle sorte que $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ et que $w_n \to w_0$. Nous aurons alors que D est le noyau de la suite $\{D_n\}$ et, par le théorème de convergence de Carathéodory 3.1.2, $g_n \to f$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$. De plus, par la formule de Cauchy, nous avons que $g_n'(0) \to f'(0) = 1$ et donc les fonctions

$$h_n = g_n/g_n(0) \in S$$

sont single-slit et elles convergent uniformémemt sur les compacts de $\mathbb{D}$ vers la fonction f. Ceci termine la preuve du théorème.

□

3.3. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LÖWNER

Nous allons maintenant développer l'équation différentielle de Löwner qui nous donne une représentation de la classe des fonctions single-slit. Soit f, une fonction qui envoie le disque unité dans un domaine D, complément d'une courbe de Jordan Γ partant d'un point w_0 et s'étendant à l'infini, $0 \notin \Gamma$. Soit $w = \psi(t)$, $0 \leq t < T$, une paramétrisation de la courbe Γ avec $\psi(0) = w_0$. Posons Γ_t, la portion de la courbe Γ qui va de $\psi(t)$ à l'infini et D_t, le complémentaire de Γ_t. Si $s < t$, alors $\Gamma_t \subset \Gamma_s$ et $D_s \subset D_t$. De plus, nous posons $D_0 = D$.

Soit la fonction

$$g(z,t) = \beta(t)\left\{z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \dots\right\},$$

la transformation conforme de $\mathbb{D}$ dans D_t telle que $g(0,t) = 0$ et $g'(0,t) = \beta(t) > 0$. Les fonctions $\beta(t)$ et $b_n(t)$ sont continues.

Remarque 3.3.1. *Nous pouvons choisir la représentation ψ de telle sorte que $\beta(t) = e^t$.*

En effet, $\beta(0) = 1$ car $g(z,0) = f(z)$. De plus, la fonction $\beta(t)$ est strictement croissante par le principe de subordination 1.2.14. Donc, si nous prenons une nouvelle paramétrisation de Γ, $w = \tilde{\psi}(s) = \psi(\sigma(s))$. Le coefficient principal devient $\tilde{\beta}(s) = \beta(\sigma(s))$. Nous voulons que $\tilde{\beta}(s) = e^s$, prenons donc $\sigma(s) = \beta^{-1}(e^s)$.

Avec cette paramétrisation, nous devons avoir que $T = \infty$. En effet, soit M, un nombre positif, alors pour des valeurs de t suffisament proche de T, la courbe Γ_t est à l'extérieur du cercle $|z| = M$. Par le principe du module maximum, nous avons

$$\left|\frac{z}{g(z,t)}\right| \leq \frac{1}{M}, \qquad |z| < 1.$$

En faisant tendre z vers zéro, nous obtenons $M \leq |g'(z,t)| = e^t$. Puisque M est arbitraire, nous devons avoir que $e^t \to \infty$ lorsque $t \to T$ et donc $T = \infty$.

En résumé, nous pouvons choisir une paramétrisation $w = \psi(z)$, qui est appelée paramétrisation standard de Γ, de telle sorte que

$$g(z,t) = e^t\left\{z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t)z^n\right\}, \qquad 0 \leq t < \infty. \tag{3.3.1}$$

Les coefficients $b_n(t)$ sont des fonctions continues.

Considérons maintenant la fonction

$$f(z,t) = g^{-1}(f(z),t) = e^{-t}\left\{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n\right\}, \qquad 0 \le t < \infty \tag{3.3.2}$$

où l'inverse de g est pris selon la première variable. Cette fonction envoie le disque unité conformément dans $\mathbb{D}$ moins un arc partant de la frontière. L'inverse de g est pris selon la variable z ; donc, de façon évidente, $f(z,0) = g^{-1}(f(z),0) = z$. De plus, chaque coefficient $a_n(t)$ est une combinaison linéaire de $b_2(t), b_3(t), \dots, b_n(t)$; donc, les $a_n(t)$ sont des fonctions continues. Nous arrivons au théorème principal de la méthode de Löwner qui nous donne une représentation analytique des fonctions single-slit.

Théorème 3.3.2. *Soient $f \in S$, une fonction single-slit qui omet Γ et $w = \psi(t)$, $0 \le t < \infty$ la paramétrisation standard de Γ. Nous définissons $f(z,t)$ comme dans l'équation 3.3.2. Alors, $f(z,t)$ satisfait*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+\kappa f}{1-\kappa f}, \tag{3.3.3}$$

où $\kappa = \kappa(t)$ est une fonction à valeur complexe, continue avec $|\kappa(t)| = 1$, $0 \le t < \infty$. De plus,

$$\lim_{t\to\infty} e^t f(z,t) = f(z), \qquad |z| < 1. \tag{3.3.4}$$

La convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$.

L'équation 3.3.3 est appelé l'équation différentielle de Löwner.

Démonstration. Nous allons tout d'abord établir la relation 3.3.4. Nous allons en fait démontrer une relation un peu plus forte, $e^t g^{-1}(w,t) \to w$, uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Par le théorème de croissance 1.2.11,

$$\frac{e^t|z|}{(1+|z|)^2} \le |g(z,t)| \le \frac{e^t|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad |z| < 1.$$

Soit $w \in \mathbb{C}$, nous posons $z = g^{-1}(w,t)$ et nous le remplaçons dans l'équation précédente.

$$\frac{e^t|g^{-1}(w,t)|}{(1+|g^{-1}(w,t)|)^2} \le |w| \le \frac{e^t|g^{-1}(w,t)|}{(1-|g^{-1}(w,t)|)^2}.$$

En modifiant cette équation, nous obtenons

$$\left\{1 - |g^{-1}(w,t)|\right\}^2 \le e^t\left|\frac{g^{-1}(w,t)}{w}\right| \le \left\{1 + |g^{-1}(w,t)|\right\}^2. \tag{3.3.5}$$

En prenant l'inégalité de droite, avec le fait que $|g^{-1}(w,t)| = |z| < 1$, nous avons, en particulier, que

$$|g^{-1}(w,t)| \le 4|w|e^{-t}$$

et donc que $g^{-1}(w,t) \to 0$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. En reprenant l'équation 3.3.5 et en passant à la limite, nous obtenons

$$e^t\left|\frac{g^{-1}(w,t)}{w}\right| \to 1, \qquad t \to \infty.$$

Puisqu'elle est uniformément bornée sur $\mathbb{C}$, le théorème de Montel 1.3.3 implique que la famille de fonction $\{g^{-1}(w,t)/w\}_{0\le t<\infty}$ forme une famille normale. Il existe donc une suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to \infty$ et la suite de fonction $\{g^{-1}(w, t_n)/w\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction $G(w)$ telle que $|G(w)| = 1$. Puisque $G(0) = 1$, nous avons donc $G(w) = 1$. La fonction limite $G(w)$ ne dépend pas du choix de la suite $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors nous pouvons conclure que $e^t g^{-1}(w, t) \to w$ uniformément sur les compacts. Ceci démontre la relation 3.3.4.

Pour la suite de la preuve, nous devons introduire une nouvelle fonction. Soient $0 \leq s < t < \infty$, nous considérons

$$\zeta = h(z, s, t) = g^{-1}(g(z, s), t) = e^{s-t}z + \dots,$$

qui envoie le disque $\mathbb{D}$ du plan des z dans le disque $\mathbb{D}$ du plan des ζ moins un arc de Jordan J_{st} partant de la frontière. Soit B_{st}, la partie du cercle $|z| = 1$ qui correspond à J_{st}. Posons $\lambda(t) = g^{-1}(\psi(t), t)$ le point sur le cercle unité que la fonction $g(z, t)$ envoie à l'extrémité de la courbe Γ_t. Alors, $\lambda(s)$ est un point intérieur de la courbe B_{st}, tandis que $\lambda(t)$ est le point où le cercle unité rencontre la courbe J_{st}. Tout ceci est résumé dans la figure 3.3.1.

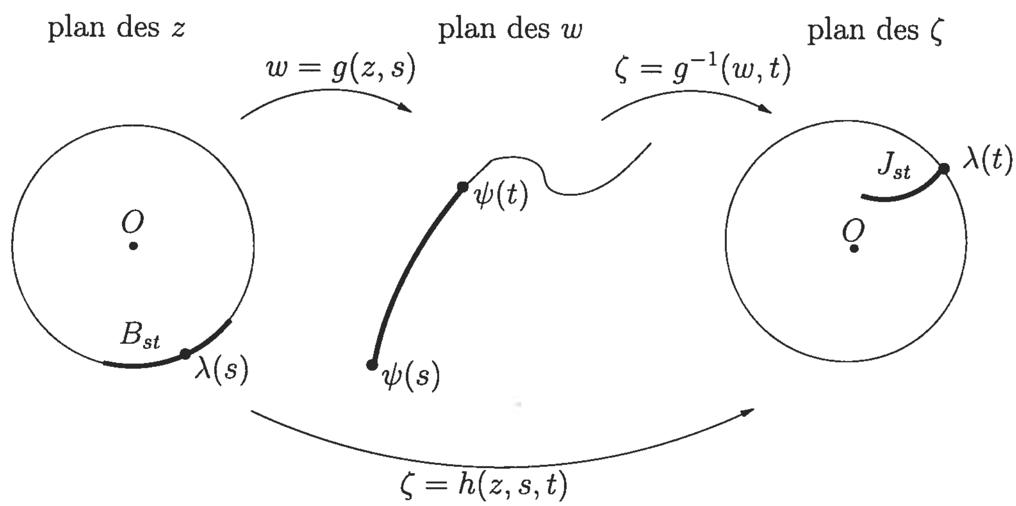

FIG. 3.3.1

Par le théorème d'extension de Carathéodory 1.2.13, la fonction $g^{-1}(w, s)$ peut être prolongée à un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\bar{\mathbb{D}}$. Donc, si nous fixons s et nous laissons t décroitre vers s, l'arc B_{st} va se contracter vers le point $\lambda(s)$. Aussi, si nous fixons t et nous laissons s croitre vers t, l'arc J_{st} va se contracter vers le point $\lambda(t)$.

La partie suivante de la preuve aurait été de montrer que la fonction $\lambda(t)$ ainsi définie est continue. Bien que, intuitivement, cela semble évident, la démonstration de ceci est assez ardue. Pour cette raison, cette preuve sera laissée de côté. Ce dernière se trouve dans **[Dur]** à la page 85.

Passons donc à la dernière partie de la preuve, dériver l'équation différentielle de Löwner. Soit

$$\Phi(z) = \Phi(z, s, t) = \log\left\{\frac{h(z, s, t)}{z}\right\}.$$

Nous choisissons la branche où $\Phi(0) = s - t$. Φ est une fonction analytique dans le disque unité $\mathbb{D}$ et continue dans sa fermeture. Puisque le cercle unité est envoyé sur lui-même plus l'arc J_{st}, il est clair que $|\Phi(z)| = 1$ sur le cercle unité moins l'arc B_{st} et $|\Phi(z)| < 1$ lorsque z est à l'intérieur de l'arc B_{st}. Donc, $\Re\{\Phi(z)\} < 0$ à l l'intérieur de l'arc B_{st} et $\Re\{\Phi(z)\} = 0$ ailleurs sur le cercle unité. La complétion analytique de la formule de Poisson 1.2.17 nous donne

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\{\Phi(e^{i\theta})\} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta, \tag{3.3.6}$$

où $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ sont les poins extrêmaux de B_{st}. En prenant $z = 0$, nous obtenont

$$s - t = \Phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\{\Phi(e^{i\theta})\} d\theta. \tag{3.3.7}$$

En utilisant l'identité

$$\begin{aligned} h(f(z,s),s,t) &= g^{-1}(g(f(z,s),s),t) \\ &= g^{-1}(g(g^{-1}(f(z),s),s),t) \\ &= g^{-1}(f(z),t) \\ &= f(z,t) \end{aligned}$$

dans l'équation 3.3.6, en remplacant z par $f(z,s)$, nous obtenons

$$\log \frac{f(z,t)}{f(z,s)} = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \Re\{\Phi(e^{i\theta})\} \frac{e^{i\theta} + f(z,s)}{e^{i\theta} - f(z,s)} d\theta. \tag{3.3.8}$$

En appliquant le théorème de la moyenne 1.2.15 sur les parties réelle et imaginaire de l'intégrale 3.3.8, il existe σ et τ compris entre α et β tels que

$$\log \frac{f(z,t)}{f(z,s)} = \frac{1}{2\pi} \left[\Re\left\{ \frac{e^{i\sigma} + f(z,s)}{e^{i\sigma} - f(z,s)} \right\} + i\Im \left\{ \frac{e^{i\tau} + f(z,s)}{e^{i\tau} - f(z,s)} \right\} \right] \int_\alpha^\beta \Re\{\Phi(e^{i\theta})\} d\theta.$$

En divisant l'équation précédente par $t - s$ et en utilisant l'équation 3.3.7, nous obtenons

$$\frac{\log f(z,t) - \log f(z,s)}{t - s} = \left[\Re\left\{ \frac{e^{i\sigma} + f(z,s)}{e^{i\sigma} - f(z,s)} \right\} + i\Im \left\{ \frac{e^{i\tau} + f(z,s)}{e^{i\tau} - f(z,s)} \right\} \right].$$

En laissant tendre t vers s, nous avons que B_{st} se contracte en $\lambda(s)$ et, donc, que $e^{i\sigma}$ et $e^{i\tau}$ convergent vers $\lambda(s)$. L'équation précédente devient alors

$$\frac{\partial}{\partial s}\{\log f(z,s)\} = -\frac{\lambda(s) + f(z,s)}{\lambda(s) - f(z,s)}. \tag{3.3.9}$$

Ici, nous avons calculé la dérivé à droite de la fonction. Nous pouvons montrer, par le même argument, que la dérivé à gauche existe et satisfait 3.3.9 ; pour cela, nous devons simplement remarquer que B_{st} se contracte en $\lambda(t)$ lorsque s croit vers t.

Nous définissons $\kappa(t) = 1/\lambda(t)$. Alors, l'équation 3.3.9 est la même que l'équation différentielle de Löwner 3.3.3. Puisque la fonction $\lambda(t)$ est continue et de norme 1, κ possède les même propriétés. Ceci complète la preuve du théorème.

□

3.4. L'UNIVALENCE DES SOLUTIONS

Dans la section précédente, nous avons vu qu'à partir d'une fonction f single-slit, nous développons une fonction κ pour l'équation différentielle de Löwner. Nous pouvons maintenant nous poser le problème inverse, c'est-à-dire, est-ce que toute fonction κ, sous certaines restrictions, peut être obtenue de la sorte, à partir d'une fonction single-slit ? Malheureusement, la réponse à cette question est négative, un contre-exemple sera cité à la fin de cette section. Par contre, nous pouvons démontrer, sous des conditions très générales, que pour toute fonction κ, la solution de l'équation différentielle de Löwner sera une fonction univalente, mais pas nécessairement slit.

Le but de cette section est de montrer ce dernier fait. Pour ce faire, nous allons considérer une équation plus générale que l'équation différentielle de Löwner. Soit $p \in P$, une fonction analytique avec partie réelle positive. Nous définissons l'équation de Löwner-Kufarev de la façon suivante

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -wp(w,t). \tag{3.4.1}$$

Remarque 3.4.1. *Notons que si nous fixons t et $|\kappa(t)| = 1$; alors, la fonction*

$$p(w,t) = \frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w}$$

appartient à la classe P. L'équation de Löwner-Kufarv est bien une généralisation de l'équation différentielle de Löwner.

Pour la preuve du théorème, nous utiliserons les deux lemmes suivants.

Lemme 3.4.2. *Pour tous les nombres complexes α et β dont la partie réelle est positive,*

$$|e^{-\alpha} - e^{-\beta}| \leq |\alpha - \beta|.$$

DÉMONSTRATION. Soient α et β, deux nombres complexes dont la partie réelle est positive. Considérons la fonction

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-z} - e^{-\beta}}{z - \beta} & \text{si } z \neq \beta \text{ et } \Re\{z\} \geq 0 \\ -e^{-\beta} & \text{si } z = \beta. \end{cases}$$

La fonction F est analytique dans le plan $\Re\{z\} \geq 0$ et $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$. Par le théorème du module maximum 1.2.8, il suffit de montrer que $F(iy) \leq 1$ pour $y \in \mathbb{R}$ pour prouver le lemme. En prenant $w = iy - \beta$, nous pouvons transformer la fonction de la façon suivante

$$F(iy) = \frac{e^{-iy} - e^{-\beta}}{iy - \beta} = e^{iy}\frac{1 - e^{-\beta+iy}}{z - \beta} = e^{iy}\frac{1 - e^{-w}}{w}.$$

Il suffit donc de montrer que $|G(w)| \leq 1$ pour $\Re\{w\} \geq 0$, où $G(w) = \dfrac{1-e^{-w}}{w}$, $G(0) = 1$. Puisque $\lim\limits_{w\to\infty} G(w) = 0$, le théorème du module maximum 1.2.8 nous permet de restreindre le problème à montrer que $|G(iv)| \leq 1$ pour $v \in \mathbb{R}$. Mais,

$$|G(iv)| \leq 1 \iff \left|\frac{1-e^{-iv}}{iv}\right| \leq 1 \iff |1 - e^{-iv}| \leq |v|.$$

Cette dernière inégalité est simplement le fait que la longueur de l'arc $|v|$ est plus grande que la longueur de la corde $|1-e^{iv}|$. Ceci termine la preuve du premier lemme.

□

Lemme 3.4.3. *Pour toute fonction $\phi \in P$ et pour toute paire de nombre α, $\beta \in \mathbb{D}$, nous avons l'inégalité suivante*

$$|\phi(\alpha)-\phi(\beta)| \leq 2(1-r)^{-2}|\alpha-\beta|,$$

où $|\alpha| \leq r$ et $|\beta| \leq r$.

DÉMONSTRATION. Par le théorème de représentation de Herglotz 1.2.18, nous pouvons déduire que

$$\phi'(z) = 2\int_0^{2\pi} e^{it}(e^{it}-z)^{-2}d\mu(t), \qquad |z|<1,$$

où $d\mu(t) \geq 0$ et $\int d\mu(t) = 1$. Par un estimé trivial, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\phi'(z)| &= 2\left|\int_0^{2\pi} e^{it}(e^{it}-z)^{-2}d\mu(t)\right| \\
&\leq 2\int_0^{2\pi} |e^{it}||(e^{it}-z)^{-2}|d\mu(t) \\
&\leq 2(1-|z|)^{-2}\int_0^{2\pi} d\mu(t) \\
&= 2(1-|z|)^{-2}.
\end{aligned}$$

Utilisons la formule

$$\phi(\beta)-\phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi'(z)dz,$$

en prenant le segment de α à β comme chemin d'intégration. Alors,

$$\begin{aligned}
|\phi(\beta)-\phi(\alpha)| &= \left|\int_\alpha^\beta \phi'(z)dz\right| \\
&\leq |\phi'(z)||\beta-\alpha| \\
&\leq 2(1-r)^{-2}|\beta-\alpha|,
\end{aligned}$$

où $|\alpha| \leq r$ et $|\beta| \leq r$. Ceci termine la preuve du deuxième lemme.

□

Nous sommes maintenant prêts pour le théorème principal.

Théorème 3.4.4. *Soit $p(w,t)$, une fonction définie pour $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq t < \infty$. Supposons que $p(w,t)$ soit intégrable sur tout intervalle $0 \leq t \leq T < \infty$ et que si nous fixons $t \in [0,\infty[$, $p(w,t) \in P$; alors, l'équation différentielle 3.4.1 a une unique solution $w = f(z,t)$ pour $0 \leq t < \infty$ qui satisfait à la condition initiale $f(z,0) = z$. De plus, pour tout $t \in [0,\infty[$, la fonction f est analytique et univalente dans $\mathbb{D}$ et $e^t f(z,t) \in S$. Lorsque $t \to \infty$, $e^t f(z,t)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ vers une fonction $f(z) \in S$.*

DÉMONSTRATION. L'équation différentielle 3.4.1 avec la condition initiale $w(z,0) = z$ est équivalente à l'équation intégrale suivante

$$w = z\exp\left\{-\int_0^t p(w,t)dt\right\}. \tag{3.4.2}$$

Nous utilisons maintenant la méthode des itérations successives de Picard pour solutionner cette équation. Nous définissons la suite de fonction $w_n = w_n(z,t)$ par récurrence, $w_0(z,t) = 0$ et

$$w_{n+1} = z\exp\left\{-\int_0^t p(w_n,t)dt\right\}, \qquad n = 0,1,2\ldots \tag{3.4.3}$$

Puisque $\Re\{p(w,t)\} > 0$, pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} |w_n(z,t)| &= \left| z\exp\left\{-\int_0^t p(w_n,t)dt\right\}\right| \\ &= |z|\exp\left\{-\int_0^t \Re\{p(w_n,t)\}dt\right\} \\ &\leq |z|. \end{aligned}$$

De plus, si nous fixons t, les fonctions w_n seront analytiques dans $\mathbb{D}$ et auront les propriétés suivantes, pour $n = 1,2,\ldots$

a) $w_n(0,t) = 0$;

b) $w_n(z,0) = z$;

c) $w_n'(0,t) = e^{-t}$.

Les deux premières découlent directement de l'équation 3.4.3 en remplacant z et t par leur valeur respective. La troisième se prouve à l'aide de la première.

$$\begin{aligned} w_n(z,t) &= z\exp\left\{-\int_0^t p(w_{n-1}(z,t),t)dt\right\} \\ w_n'(z,t) &= \exp\left\{-\int_0^t p(w_{n-1}(z,t),t)dt\right\} + z\left[\exp\left\{-\int_0^t p(w_{n-1},t)dt\right\}\right]' \\ w_n'(0,t) &= \exp\left\{-\int_0^t p(w_{n-1}(0,t),t)dt\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^t p(0,t)dt\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^t dt\right\} \\ w_n'(0,t) &= \exp\{-t\}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de récurrence 3.4.3 ainsi que les lemmes 3.4.2 et 3.4.3, nous trouvons

$$\begin{aligned} |w_{n+2} - w_{n+1}| &= |z|\left|\exp\left\{-\int_0^t p(w_{n+1},t)dt\right\} - \exp\left\{-\int_0^t p(w_n,t)dt\right\}\right| \\ &\leq |z|\left|\int_0^t [p(w_{n+1},t) - p(w_n,t)]\,dt\right| \\ &\leq 2|z|(1-|z|)^{-2}\int_0^t |w_{n+1} - w_n|\,dt. \end{aligned}$$

En répétant le même procédé, nous trouvons

$$\begin{aligned}
|w_{n+1} - w_n| &\leq 2|z|(1-|z|)^{-2} \int_0^t |w_n - w_{n-1}|\, dt \\
&\leq \frac{2^2|z|^2}{(1-|z|)^{2\times 2}} \int_0^t \int_0^t |w_{n-1} - w_{n-2}|\, dtdt \\
&\vdots \\
&\leq \frac{2^n|z|^n}{(1-|z|)^{2n}} \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n \text{ fois}} |w_1 - w_0| \underbrace{dt \cdots dtdt}_{n \text{ fois}} \\
&= \frac{2^n|z|^n}{(1-|z|)^{2n}} \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n \text{ fois}} |z|e^{-t} \underbrace{dt \cdots dtdt}_{n \text{ fois}} \\
&\leq \frac{2^n|z|^n}{(1-|z|)^{2n}} \underbrace{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t}_{n \text{ fois}} 1 \underbrace{dt \cdots dtdt}_{n \text{ fois}} \\
&\leq \frac{2^n|z|^n t^n}{(1-|z|)^{2n} n!}.
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, définissons

$$M_n(z,t) = \frac{2^n|z|^n t^n}{(1-|z|)^{2n} n!}.$$

Considérons maintenant la série téléscopique

$$w_n = \sum_{j=1}^{n} w_j - w_{j-1}.$$

Si $|z| \leq r < 1$ et $0 \leq t \leq T < \infty$, alors $|w_{n+1}(z,t) - w_n(z,t)| \leq M_n(r,T)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n(r,T) < \infty.$$

Donc, par le M-test de Weierstrass 1.2.7, les fonctions $w_n(z,t)$ convergent uniformément vers une fonction

$$f(z,t) = \lim_{n\to\infty} w_n(z,t).$$

La convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$ et de $0 \leq t < \infty$. La fonction f ainsi définie est donc analytique sur $\mathbb{D}$ pour tout t et continue sur $[0,\infty[$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Cette fonction satisfait l'équation intégrale 3.4.2 et possède les propriétés $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^{-t}$, $f(z,0) = z$ et $|f(z,t)| \leq |z|$.

Montrons que cette fonction est unique. Supposons que l'équation 3.4.2 admette deux solutions $w = f(z,t)$ et $v = g(z,t)$. Estimons la différence à l'aide des lemmes 3.4.2 et 3.4.3, comme il a été fait précédemment dans cette preuve.

$$\begin{aligned}
|w-v| &\leq 2|z|(1-|z|)^{-2}\int_0^t |w-v|\,dt \\
&\leq \frac{2^2|z|^2}{(1-|z|)^{2\times 2}}\int_0^t\int_0^t |w-v|\,dtdt \\
&\vdots \\
&\leq \frac{2^n|z|^n}{(1-|z|)^{2n}}\underbrace{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n \text{ fois}} |w-v|\,\underbrace{dt\cdots dtdt}_{n \text{ fois}} \\
&\leq \frac{2^n|z|^n}{(1-|z|)^{2n}}\underbrace{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n \text{ fois}} 2|z|\,\underbrace{dt\cdots dtdt}_{n \text{ fois}} \\
&\leq \frac{2^{n+1}|z|^{n+1}t^n}{(1-|z|)^{2n}n!}.
\end{aligned}$$

Ce résultat est vrai peu importe $n \in \mathbb{N}$. Lorsque nous faisons tendre n vers l'infini, nous obtenons que $f(z,t) \equiv g(z,t)$ et, donc, que la solution à l'équation 3.4.2 est unique.

Passons maintenant à l'univalence des solutions pour un t fixé. Supposons que $f(z_1,\tau) = f(z_2,\tau)$ pour un certain τ et pour $z_1 \neq z_2$ tels que $|z_1| \leq r$ et $|z_2| \leq r$. Soit $w = f(z_1,t)$ et $v = f(z_2,t)$. Alors l'équation différentielle 3.4.1 nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(w-v) &= vp(v,t) - wp(w,t) \\
&= v[p(v,t)-p(w,t)] + p(w,t)(v-w).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.4.3 et la représentation de Herglotz de la fonction p, nous obtenons, à partir du résultat précédant,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}|w-v|\right| \leq \left|\frac{\partial}{\partial t}(w-v)\right| \leq A|w-v|,$$

où

$$A = \frac{2r}{(1-r)^2} + \frac{1+r}{1-r}.$$

En particulier,

$$\frac{\partial}{\partial t}|w-v| \geq -A|w-v|.$$

Pour terminer cette partie de la preuve, considérons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{e^{At}|w-v|\} &= Ae^{At}|w-v| + e^{At}\frac{\partial}{\partial t}|w-v| \\
&\geq Ae^{At}|w-v| - Ae^{At}|w-v| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En intégrant de 0 jusqu'à τ, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\{e^{At}|w-v|\}dt &= e^{At}|f(z_1,\tau)-f(z_2,\tau)| - |f(z_1,0)-f(z_2,0)| \\
&= -|z_1-z_2|,
\end{aligned}$$

puisque $f(z, 0) = z$. Nous concluons que $-|z_1 - z_2| \geq 0$ et donc $z_1 = z_2$. Ceci démontre l'injectivité de la solution $e^t f(z,t) \in S$.

La dernière étape de la preuve est de montrer la convergence uniforme de $e^t f(z,t)$ lorsque $t \to \infty$. Puisque $w = e^t f(z,t)$ est la solution de l'équation 3.4.2, nous avons

$$e^t f(z,t) = z \exp\left\{\int_0^t [1 - p(f(z,t),t)]dt\right\}. \tag{3.4.4}$$

Il suffit de montrer que l'intégrale 3.4.4 converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ lorsque $t \to \infty$. Tout d'abord, par le lemme 3.4.3 et le fait que $p(0,t) = 1$,

$$|p(0,t) - p(f(z,t),t)| \leq 2(1-r)^{-2}|f(z,t)|, \qquad |f(z,t)| \leq |z| \leq r < 1.$$

Ensuite, puisque $e^t f(z,t) \in S$, appliquons le théorème de croissance 1.2.11 pour obtenir

$$|f(z,t)| \leq r(1-r)^{-2}e^{-t}.$$

En combinant ces deux inégalités, nous pouvons estimer l'intégrale

$$\int_0^\infty [1 - p(f(z,t),t)]dt \leq \int_0^\infty \frac{2r}{(1-r)^4}e^{-t}dt.$$

Celle-ci convergeant de façon uniforme si $|z| \leq r < 1$, l'équation 3.4.4 nous permet de conclure que $e^t f(z,t)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$ lorsque $t \to \infty$ et la fonction limite $f(z)$ appartient à l'ensemble S.

$\square$

Un corollaire de ce théorème est que si $\kappa(t)$ est une fonction continue, de module unitaire, l'équation différentielle de Löwner 3.3.3, avec condition initiale $f(z,0) = z$, admet une unique solution $f(z,t)$ univalente dans $\mathbb{D}$. Cette fonction envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même. Son image n'est pas nécessairement $\mathbb{D}$ moins un arc de Jordan. Kufarev a donné le contre-exemple suivant. Si

$$\kappa(t) = \left[e^{it} + i\sqrt{1 - e^{-2t}}\right]^3,$$

alors la solution à l'équation différentielle 3.3.3 $f(z,t)$ envoie le disque unité dans $\mathbb{D}$ moins un disque borné par le cercle qui intersecte le cercle unité orthogonalement aux points $\kappa(t)$ et $\sqrt[3]{\kappa(t)}$. Voir la figure ci-dessous 3.4.1.

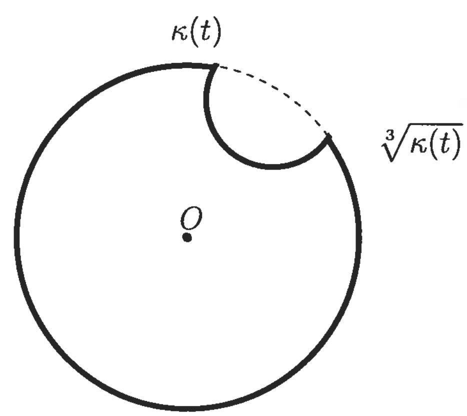

FIG. 3.4.1

Kufarev a aussi montré que la fonction limite $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t)$ n'est pas une fonction slit.

3.5. LE TROISIÈME COEFFICIENT

Une première application de l'équation différentielle de Löwner 3.3.3 est de prouver le conjecture de Bieberbach 2.2.5 pour le troisième coefficient. Cette application a été donnée par Löwner dans son article original [**Low**].

Théorème 3.5.1. *Soit $f(z) \in S$, de la forme $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$; alors, $|a_2| \leq 2$ et $|a_3| \leq 3$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, puisque la classe S est fermée sous la rotation, il suffit de montrer que $\Re\{a_3\} \leq 3$. La théorie de Löwner nous permet de réduire le problème aux fonctions de la forme

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t),$$

où $f(z,t)$ est la solution d'une équation différentielle de Löwner

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+\kappa f}{1-\kappa f}, \qquad f(z,0) = z,$$

pour une certaine fonction $\kappa(t)$ de module unitaire, soit

$$f(z,t) = e^{-t}[z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \dots].$$

Par la condition initiale $a_n(0) = 0$ et par la convergence,

$$\lim_{t\to\infty} a_n(t) = a_n, \qquad n = 2, 3, \dots.$$

Regardons les coefficients de z^2 et z^3 de chaque côté de l'équation différentielle de Löwner 3.3.3. Commençons avec le membre de gauche,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f + e^{-t}\sum_{n=2}^{\infty} a_n'(t) z^n.$$

Pour le membre de droite,

$$\begin{aligned} -f\frac{1+\kappa f}{1-\kappa f} &= -f(1+\kappa f)\sum_{k=0}^{\infty}(\kappa f)^n \qquad \text{car } |\kappa f| \leq |z| < 1 \\ &= -f\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\kappa f)^n\right]. \end{aligned}$$

En comparant les deux côtés de l'équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} -f + e^{-t}\sum_{n=2}^{\infty} a_n'(t)z^n &= -f\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\kappa f)^n\right] \\ \iff \qquad e^{-t}\sum_{n=2}^{\infty} a_n'(t)z^n &= -2f\sum_{k=0}^{\infty}(\kappa f)^n. \end{aligned}$$

En regardant les coefficients de z^2 de chaque côté, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{-t}a_2'(t) &= -2e^{-t}e^{-t}\kappa(t) \\ \iff \qquad a_2'(t) &= -2e^{-t}\kappa(t) \end{aligned}$$

et pour z^3, en utilisant le résultat précédant,

$$\begin{array}{rrcl} & e^{-t}a_3'(t) & = & -2e^{-t}\left[\kappa(t)a_2(t)e^{-t} + (e^{-t}\kappa(t))^2\right] \\ & & - & 2e^{-t}a_2(t)e^{-t}\kappa(t) \\ \Longleftrightarrow & a_3'(t) & = & -4a_2(t)e^{-t}\kappa(t) - 2e^{-2t}\kappa^2(t) \\ & & = & 2a_2(t)a_2'(t) - 2e^{-2t}\kappa^2(t) \\ & & = & -2e^{-2t}\kappa^2(t) + [a_2^2(t)]'. \end{array}$$

Nous sommes maintenant prêts à montrer que $|a_2| \leq 2$,

$$a_2 = \int_0^\infty a_2'(t)dt = -2\int_0^\infty e^{-t}\kappa(t)dt.$$

Donc,

$$|a_2| = 2\left|\int_0^\infty e^{-t}\kappa(t)dt\right| \leq 2\int_0^\infty e^{-t}dt = 2.$$

Les cas d'égalité seront discutés après la preuve du théorème. Nous passons maintenant au troisième coefficient,

$$\begin{aligned} a_3 = \int_0^\infty a_3'(t)dt &= \int_0^\infty \left(-2e^{-2t}\kappa^2(t) + [a_2^2(t)]'\right) dt \\ &= -2\int_0^\infty e^{-2t}\kappa^2(t)dt + \int_0^\infty [a_2^2(t)]'dt \\ &= -2\int_0^\infty e^{-2t}\kappa^2(t)dt + 4\left\{\int_0^\infty e^{-t}\kappa(t)dt\right\}^2. \end{aligned}$$

En posant $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Re\{a_3\} &= \Re\left\{-2\int_0^\infty e^{-2t}e^{2i\theta(t)}dt\right\} + \Re\left\{4\left\{\int_0^\infty e^{-t}e^{i\theta(t)}dt\right\}^2\right\} \\ &= -2\int_0^\infty e^{-2t}\cos(2\theta(t))dt \\ &+ 4\left\{\int_0^\infty e^{-t}\cos(\theta(t))dt\right\}^2 - 4\left\{\int_0^\infty e^{-t}\sin(\theta(t))dt\right\}^2 \\ &\leq 2\int_0^\infty e^{-2t}[1-2\cos^2(\theta(t))]dt + 4\left\{\int_0^\infty e^{-t}\cos(\theta(t))dt\right\}^2 \\ &\leq 1 - 4\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2(\theta(t))dt + 4\int_0^\infty e^{-t}dt\int_0^\infty e^{-t}\cos^2(\theta(t))dt \\ &= 1 + 4\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\cos^2(\theta(t))dt \\ &\leq 1 + 4\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)dt \\ &= 3. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci termine la démonstration. □

Passons maintenant aux cas d'égalité pour a_2.

$$|a_2| = 2 \Longleftrightarrow \kappa(t) \equiv \alpha.$$

Il nous reste à montrer que si $\kappa(t)$ est une constante, alors les fonctions données par l'équation différentielle de Löwner convergeront vers une rotation de la fonction de Koebe.

Pour le démontrer, nous ferons l'inverse. Commençons par développer les fonctions 3.3.1 et 3.3.2 pour une rotation de la fonction de Koebe. Soient $|\alpha| = 1$ et $f(z) = \alpha^{-1}k(\alpha z)$. Cette fonction est single-slit. Nous pouvons donc trouver les fonctions 3.3.1 et 3.3.2. Tout d'abord, soit $\Gamma = \{-\alpha^{-1}t : 1/4 \leq t < \infty\}$, l'arc de Jordan omis par cette fonction. En considérant la paramétrisation $\psi(t) = -e^t/4\alpha$ pour $0 \leq t < \infty$, nous obtenons pour la fonction 3.3.1

$$g(z,t) = e^t\alpha^{-1}k(\alpha z) = e^t\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n\alpha^{n-1}z^n\right\}.$$

Ensuite, pour la fonction 3.3.2

$$\begin{aligned}
f(z,t) &= g^{-1}(f(z),t) \\
&= \alpha^{-1}k^{-1}(e^{-t}k(\alpha z)) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}-1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1}\right) \qquad (3.5.1) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{4e^{-t}k(\alpha z) - 2\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}{4e^{-t}k(\alpha z)}\right) \\
&= \frac{e^t}{2\alpha k(\alpha z)}\left(2e^{-t}k(\alpha z) - \sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}\right). \qquad (3.5.2)
\end{aligned}$$

Voyons maintenant si cette équation satisfait à l'équation différentielle de Löwner

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1-\alpha f}{1+\alpha f}.$$

Si elle la satisfait, puisque $f(z,0) = z$, le théorème 3.4.4 impliquera que la fonction $f(z,t)$ définie par 3.5.1 sera l'unique solution de cette équation différentielle de Löwner. Partons de l'égalité 3.5.2 et dérivons la fonction f par rapport à t.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= f + \frac{e^t}{2\alpha k(\alpha z)}\left(-2e^{-t}k(\alpha z) + \frac{4e^{-t}k(\alpha z)}{2\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}\right) \\
&= f + \frac{1}{\alpha}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}\right) \\
&= f + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}\right) \\
&= -f\left(-1 + \frac{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}\right) \\
&= -f\left(\frac{1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -f\left(\frac{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1-(\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}-1)}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1+(\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}-1)}\right)\\
&= -f\left(\frac{1-\alpha\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}-1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1}\right)}{1-\alpha\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}-1}{\sqrt{4e^{-t}k(\alpha z)+1}+1}\right)}\right)\\
&= -f\frac{1-\alpha f}{1+\alpha f}.
\end{aligned}$$

La dernière étape vient de l'égalité 3.5.1. Nous pouvons conclure que

$$\kappa(t)\equiv\alpha \iff f(z)=\frac{z}{(1-\alpha z)^2}.$$

Et donc $|a_2|=2$ si et seulement si la fonction est une rotation de la fonction de Koebe.

De même pour a_3,

$$\Re\{a_3\}=3 \iff \kappa(t)\equiv\pm1 \iff f(z)=\frac{z}{(1\mp z)^2}.$$

Les autres cas sont obtenus par rotation. Cependant, puisque la preuve utilise une classe de fonctions dense au lieu de la classe au complet, nous ne pouvons pas être certain d'avoir tous les cas d'égalité. Pour le deuxième coefficient, nous l'avons par le théorème de Bieberbach 2.2.3

La méthode développée ici est difficile à appliquer pour des valeurs de n plus grandes car le nombre d'intégrales augmente considérablement. En 1973, Nehari **[Neh]** a utilisé cette méthode pour obtenir $|a_4|\le 4$.

Chapitre 4

LE THÉORÈME DE DE BRANGES

En 1985, Louis de Branges [**deB**] a prouvé la conjecture de Bieberbach dans sa forme la plus générale. Dans ce chapitre, nous présenterons une version simplifiée de cette preuve due à Carl Fitzgerald et Christian Pommerenke [**F&P**].

4.1. INTRODUCTION

De Branges n'a pas montré la conjecture directement, il a en fait montré une conjecture plus forte, la conjecture de Lebedev-Milin. Nous allons tout d'abord montrer que cette dernière implique la conjecture de Bieberbach. Premièrement, considérons la conjecture suivante, proposée par Robertson en 1936.

Conjecture 4.1.1 (Robertson, 1936). *Si $h(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \cdots$ est une fonction de la classe $S^{(2)}$, alors*

$$1 + |c_3|^2 + \cdots + |c_{2n-1}|^2 \leq n.$$

Proposition 4.1.2. *La conjecture de Robertson implique la conjecture de Bieberbach .*

DÉMONSTRATION. Soit $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ une fonction de S, alors

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \cdots \in S^{(2)}.$$

En élevant les deux côtés au carré, nous obtenons

$$f(z^2) = z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \cdots = h^2(z) = \left(z + c_3z^3 + c_5z^5 + \cdots\right)^2.$$

Comparons les coefficients de z^{2n},

$$a_n = c_1c_{2n-1} + c_3c_{2n-3} + \cdots + c_{2n-1}c_1.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\alpha_k = c_{2k-1}, \beta_k = c_{2(n-k)+1}$ et $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned} |a_n|^2 &= \left|\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}c_{2(n-k)+1}\right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |c_{2k-1}|^2 \sum_{k=1}^{n} |c_{2(n-k)+1}|^2 && \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq n \cdot n && \text{par Robertson} \end{aligned}$$

d'où $|a_n| \leq n$. La conjecture de Robertson implique la conjecture de Bieberbach. $\square$

Nous allons maintenant introduire la conjecture de Lebedev-Milin. Soit la fonction $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$ avec $\phi(0) = 0$. Prenons l'exponentielle de cette fonction

$$\psi(z) = e^{\phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k.$$

Les coefficients de la série exponentielle dépendent de ceux de la fonction d'origine. Les inégalités de Lebedev-Milin nous permettent d'approximer les nouveaux coefficients à partir des anciens.

Théorème 4.1.3 (Première inégalité de Lebedev-Milin). *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2 < \infty$, *alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right\},$$

avec égalité si et seulement si $\alpha_k = \gamma^k/k,\ k \in \mathbb{N}$, *pour un certain* $\gamma \in \mathbb{D}$.

Théorème 4.1.4 (Deuxième inégalité de Lebedev-Milin). *Pour* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}. \tag{4.1.1}$$

Nous avons l'égalité pour un certain n *si et seulement si* $\alpha_k = \gamma^k/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *pour une certaine constante* γ *telle que* $|\gamma| = 1$.

Théorème 4.1.5 (Troisième inégalité de Lebedev-Milin). *Pour* $n = 1, 2, \ldots,$

$$|\beta_n|^2 \leq \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\},$$

avec égalité pour un certain n *si et seulement si* $\alpha_k = \gamma^k/k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, *pour une certaine constante* γ *telle que* $|\gamma| = 1$.

Les preuves de ces trois inégalités peuvent être trouvées dans le chapitre 5 du livre de Duren [**Dur**]. La deuxième inégalité nous intéresse plus particulièrement. Elle nous permettra de montrer que la conjecture suivante, appelée conjecture de Lebedev-Milin, implique celle de Robertson , et, donc, celle de Bieberbach .

Conjecture 4.1.6 (Lebedev-Milin, 1971). *Pour toute fonction* $f \in S$ *avec* $\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ *et pour* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\alpha_k|^2 - \frac{4}{k}\right) \leq 0. \tag{4.1.2}$$

Proposition 4.1.7. *La conjecture de Lebedev-Milin implique la conjecture de Robertson .*

DÉMONSTRATION. Soit $h(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \cdots \in S^{(2)}$. Nous savons que $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$, pour une certaine fonction $f \in S$. Alors,

$$\begin{aligned} h(\sqrt{z}) &= \sqrt{f(z)} \\ \frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} &= \sqrt{\frac{f(z)}{z}} \\ \log\frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} &= \frac{1}{2}\log\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n. \end{aligned}$$

Si la conjecture de Lebedev-Milin est vraie, alors l'égalité de droite nous donne

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|2\gamma_k|^2 - \frac{4}{k}\right) \leq 0 \Longleftrightarrow \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0. \qquad (4.1.3)$$

Maintenant, nous utiliserons l'égalité suivante :

$$\frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}z^n = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n z^n\right\}.$$

La deuxième inégalité de Lebedev-Milin nous donne

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2 \leq (n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Puisque e^x est une fonction monotone croissante pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation 4.1.3 nous donne

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2 \leq (n+1)\exp\{0\} = (n+1),$$

ce qui correspond à la conjecture de Robertson .

□

Énonçons maintenant le théorème principal de cette section.

Théorème 4.1.8 (de Branges, 1985). *Soit $f \in S$ et définissons c_k de la façon suivante :*

$$\log\frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Alors, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)|c_k|^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{k}. \qquad (4.1.4)$$

L'équation 4.1.4 est équivalente à l'équation 4.1.2 car

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|c_k|^2-\frac{4}{k}\right) &\leq 0\\
\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n}\left(k|c_k|^2-\frac{4}{k}\right) &\leq 0\\
\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n} k|c_k|^2 &\leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=k}^{n}\frac{4}{k}\\
\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)|c_k|^2 &\leq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{k}.
\end{aligned}$$

Le reste de ce chapitre sera consacré à la preuve de ce théorème. Pour éviter d'alourdir la preuve, nous commencerons par introduire le système de fonctions spéciales de Branges et nous énoncerons quelques propriétés de celui-ci. Ensuite, nous présenterons l'équation différentielle linéaire de Löwner, une version légèrement modifiée de celle présentée au chapitre 3. Nous poursuivrons avec la preuve du théorème. Nous discuterons ensuite des cas d'égalité. Finalement, nous ferons quelques remarques sur cette preuve.

4.2. Le système de fonctions de de Branges

Dans cette section, nous introduirons le système de fonctions de de Branges et nous énoncerons quelques propriétés de ces fonctions qui nous serons utiles pour la preuve du théorème 4.1.8.

Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier fixé. Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, définissons

$$\tau_k(t) = k\sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\frac{(2k+\nu+1)_{\nu}(2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!}e^{-(k+\nu)t}, \tag{4.2.1}$$

où $(a)_\nu = a(a+1)(a+2)\cdots(a+\nu-1)$ et $(a)_0 = 1$.

Proposition 4.2.1. *Posons $\tau_{n+1}(t) = 0$; alors*

$$\tau_k(t) - \tau_{k+1}(t) = -\frac{\tau_k'(t)}{k} - \frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1}. \tag{4.2.2}$$

Démonstration. En dérivant l'équation 4.2.1, nous obtenons

$$\tau_k'(t) = -k\sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\frac{(k+\nu)(2k+\nu+1)_{\nu}(2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!}e^{-(k+\nu)t}.$$

Nous allons maintenant montrer l'égalité suivante :

$$\tau_k(t) + \frac{\tau_k'(t)}{k} = \tau_{k+1}(t) - \frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1},$$

qui est équivalente à l'équation 4.2.2. D'abord

$$\tau_k(t) + \frac{\tau_k'(t)}{k} = \sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\frac{(2k+\nu+1)_{\nu}(2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!}(-\nu)e^{-(k+\nu)t} \tag{4.2.3}$$

et donc, la proposition est immédiate pour $k = n$. Ensuite, si $k < n$,

$$\tau_{k+1}(t) - \frac{\tau'_{k+1}(t)}{k+1} = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+3)_\nu (2k+2\nu+4)_{n-k-\nu-1}}{(k+\nu+1)\nu!(n-k-\nu-1)!} (2k+\nu+2) e^{-(k+\nu+1)t}. \tag{4.2.4}$$

Dérivons l'équation 4.2.3 à partir de l'équation 4.2.4.

$$\begin{aligned}
\tau_{k+1}(t) - \frac{\tau'_{k+1}(t)}{k+1} &= \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+3)_\nu (2k+2\nu+4)_{n-k-\nu-1}}{(k+\nu+1)\nu!(n-k-\nu-1)!} (2k+\nu+2) e^{-(k+\nu+1)t} \\
&= -\sum_{\nu=1}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+2)_{\nu-1} (2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)(\nu-1)!(n-k-\nu)!} (2k+\nu+1) e^{-(k+\nu)t} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+1)_\nu (2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!} (-\nu) e^{-(k+\nu)t} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^\nu \frac{(2k+\nu+1)_\nu (2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(k+\nu)\nu!(n-k-\nu)!} (-\nu) e^{-(k+\nu)t} \\
&= \tau_k(t) + \frac{\tau'_k(t)}{k}.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition.

□

Pour les propriétés suivantes, nous avons besoin des polynômes de Jacobi. Il ont été défini à la section 1.5. Nous pouvons exprimer la dérivée des fonctions de de Branges à l'aide des polynômes de Jacobi.

Proposition 4.2.2.

$$\tau'_k(t) = -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1-2e^{-t}). \tag{4.2.5}$$

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par calcul direct.

$$\begin{aligned}
-ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} P_j^{(2k,0)}(1 - 2e^{-t}) & \\
&= -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(2k+1)_j}{j!} \sum_{\nu=0}^{j} \frac{(-j)_\nu (j+2k+1)_\nu}{\nu!(2k+1)_\nu} e^{-\nu t} \\
&= -ke^{-kt} \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{\nu=0}^{j} \frac{(-j)_\nu (2k+1)_j (j+2k+1)_\nu}{j!\nu!(2k+1)_\nu} e^{-\nu t} \\
&= -ke^{-kt} \sum_{\nu=0}^{n-k} \sum_{j=\nu}^{n-k} \frac{(-1)^\nu (j-\nu+1)_\nu (2k+1)_{j+\nu}}{j!\nu!(2k+1)_\nu} e^{-\nu t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -ke^{-kt}\sum_{\nu=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{n-k-\nu}\frac{(-1)^\nu(j+1)_\nu(2k+1)_{j+2\nu}}{(j+\nu)!\nu!(2k+1)_\nu}e^{-\nu t}\\
&= -ke^{-kt}\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{(-1)^\nu(2k+1)_{2\nu}}{\nu!(2k+1)_\nu}e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{n-k-\nu}\frac{(2k+2\nu+1)_j}{j!}\\
&= -ke^{-kt}\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{(2k+\nu+1)_\nu}{\nu!}(-1)^\nu e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{n-k-\nu}\binom{2\nu+2k+j}{j}\\
&= -ke^{-kt}\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{(2k+\nu+1)_\nu}{\nu!}(-1)^\nu e^{-\nu t}\binom{\nu+k+n+1}{n-k-\nu}\\
&= -ke^{-kt}\sum_{\nu=0}^{n-k}\frac{(2k+\nu+1)_\nu}{\nu!}(-1)^\nu e^{-\nu t}\frac{(2k+2\nu+2)_{n-k-\nu}}{(n-k-\nu)!}\\
&= \tau_k'(t).
\end{aligned}
$$

□

Par l'équation 1.5.3, nous avons $P_j^{(\alpha,0)}(-1) = (-1)^j$. Donc, l'équation 4.2.5 implique $\tau_k'(0) = -k$ si $n-k$ est pair et $\tau_k'(0) = 0$ si $n-k$ est impair. L'équation 4.2.2 nous donne alors $\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = 1$ et, par induction, avec $\tau_{n+1}(x) = 0$,

$$\tau_k(0) = n - k + 1. \tag{4.2.6}$$

Par le théorème de Askey et Gasper 1.5.2, l'équation 4.2.5 implique

$$\tau_k'(t) < 0 \qquad 0 < t < \infty. \tag{4.2.7}$$

Cette propriété du système de fonctions de de Branges sera fondamentale pour la preuve de la conjecture de Bieberbach.

4.3. L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DE LÖWNER

Dans le chapitre 3, nous avons dérivé l'équation différentielle de Löwner. Pour la preuve du théorème de de Branges, nous utilisons une version modifiée de cette équation.

Soit $f \in S$, une fonction single-slit, c'est-à-dire $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C}\backslash J$ où J est une courbe de Jordan allant à l'infini. Dans le chapitre 3, nous avons vu que ces fonctions sont denses dans S. À partir de cette fonction, nous avons défini deux familles de fonctions. Tout d'abord, les fonctions

$$g(z,t) = e^t\left\{z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t)z^n\right\}, \qquad 0 \le t < \infty, \tag{3.3.1}$$

où $g(z,0) = f(z)$. Ensuite, nous avons défini la famille de fonctions

$$f(z,t) = g^{-1}(f(z),t) = e^{-t}\left\{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t)z^n\right\}, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{3.3.2}$$

Nous avons construit l'équation différentielle de Löwner 3.3.3 à partir de la deuxième famille, nous allons maintenant développer une équation différentielle pour la première.

Théorème 4.3.1. *Soit $g(z,t)$ la fonction définie par l'équation 3.3.1 ; alors*

$$\frac{\partial}{\partial t}g(z,t) = \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}z\frac{\partial}{\partial z}g(z,t), \tag{4.3.1}$$

où $\kappa(t)$ est une fonction continue et de module 1 sur $0 \leq t < \infty$. Cette équation est appellée équation différentielle linéaire de Löwner.

Démonstration. Par l'équation 3.3.2, nous avons

$$f(z,t) = g^{-1}(f(z),t) \Longleftrightarrow g(f(z,t),t) = f(z).$$

Donc,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}f(z) = \frac{\partial g(f(z,t),t)}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z,t),t)\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(f(z,t),t).$$

Nous utilisons maintenant l'équation différentielle de Löwner 3.3.3 pour obtenir

$$0 = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z,t),t)\left(-f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}\right) + \frac{\partial g}{\partial t}(f(z,t),t),$$

où $\kappa(t)$ est une fonction continue de module 1 sur $0 \leq t < \infty$. En réarrangeant les termes dans la dernière équation , nous obtenons

$$\frac{\partial g}{\partial t}(f(z,t),t) = f(z,t)\frac{\partial g}{\partial z}(f(z,t),t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}.$$

Pour terminer la preuve, nous posons $w = f(z,t)$ et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}g(w,t) = \frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w}w\frac{\partial}{\partial w}g(w,t)$$

ce qui est l'équation voulue.

□

4.4. Preuve du théorème de de Branges

Démonstration du théorème de de Branges. Soit $f \in S$, une fonction single-slit et $g(z,t)$, la fonction définie par 3.3.1. Alors, pour $0 \leq t < \infty$, nous définissons $c_k(t)$ par

$$\log\frac{g(z,t)}{e^t z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)z^k \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{4.4.1}$$

Avec l'équation 4.1.4, nous avons $c_k(0) = c_k$. En dérivant par rapport à t l'équation 4.4.1, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{g(z,t)}{e^t z} = \frac{1}{g(z,t)}\frac{\partial}{\partial t}g(z,t) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)z^k.$$

Nous appliquons maintenant l'équation différentielle linéaire de Löwner 4.3.1.

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)z^k = \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} z\left[\frac{\partial}{\partial z} g(z,t)\right] \Big/ g(z,t). \tag{4.4.2}$$

Nous voulons exprimer le membre de droite en série. Tout d'abord,

$$\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} = 1+2\sum_{k=1}^{\infty} \kappa(t)^k z^k. \tag{4.4.3}$$

Ensuite, à l'aide de l'équation 4.4.1,

$$\begin{aligned} z\left[\frac{\partial}{\partial z} g(z,t)\right] \Big/ g(z,t) &= z\frac{\partial}{\partial z} \log g(z,t) \\ &= z\frac{\partial}{\partial z}\left[\log \frac{g(z,t)}{e^t z} + \log z\right] \\ &= z\frac{\partial}{\partial z}\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) z^k\right] + 1 \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) z^k. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

En réécrivant l'équation 4.4.2 avec 4.4.3 et 4.4.4, nous obtenons

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(t)z^k = \left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\kappa(t)^k z^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) z^k\right). \tag{4.4.5}$$

Comparons les coefficients de $z^k, k = 1, 2, \ldots$ de chaque côté de 4.4.5 :

$$c_k'(t) = k c_k(t) + 2\kappa(t)^k + \sum_{j=1}^{k-1} j c_j(t) 2\kappa(t)^{k-j}. \tag{4.4.6}$$

Définissons $b_0(t) = 0$ et pour $k > 0$,

$$b_k(t) = \sum_{j=1}^{k} j c_j(t)\kappa(t)^{-j}. \tag{4.4.7}$$

L'équation 4.4.6 peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} c_k'(t) &= \kappa(t)^k\left[\sum_{j=1}^{k} j c_j(t)\kappa(t)^{-j} + \sum_{j=1}^{k-1} j c_j(t)\kappa(t)^{-j} + 2\right] \\ &= \kappa(t)^k\left[b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2\right]. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(k|c_k(t)|^2 - \frac{4}{k}\right)\tau_k(t) \qquad 0 \leq t < \infty. \tag{4.4.9}$$

Nous pouvons déduire de l'équation 4.4.7 que $k\overline{c}_k(t) = \big(\overline{b}_k(t) - \overline{b}_{k-1}(t)\big)\overline{\kappa}(t)^k$. Alors, en dérivant l'équation 4.4.9, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(kc_k'(t)\overline{c}_k(t) + kc_k(t)\overline{c}_k'(t)\Big)\tau_k(t)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2}{k} - \frac{4}{k}\right)\tau_k'(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\Re\Big\{k\overline{c}_k(t)c_k'(t)\Big\}\tau_k(t)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2 - 4\Big)\frac{\tau_k'(t)}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\Re\Big\{\big(\overline{b}_k(t) - \overline{b}_{k-1}(t)\big)\big(b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2\big)\Big\}\tau_k(t)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2 - 4\Big)\frac{\tau_k'(t)}{k}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $\Re\{\ \} = |b_k(t)|^2 - |b_{k-1}|^2 + 2\Re\{b_k(t)\} - 2\Re\{b_{k-1}(t)\}$ et rappelons que $b_0(t) = 0$ ainsi que $\tau_{n+1}(t) = 0$. Nous pouvons donc transformer l'équation précédente par sommation partielle :

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \sum_{k=1}^{n} 2\big(|b_k(t)|^2 - |b_{k-1}|^2 + 2\Re\{b_k(t)\} - 2\Re\{b_{k-1}(t)\}\big)\tau_k(t)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2 - 4\Big)\frac{\tau_k'(t)}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(2|b_k(t)|^2 + 4\Re\{b_k(t)\}\Big)\tau_k(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\Big(2|b_k(t)|^2 + 4\Re\{b_k(t)\}\Big)\tau_{k+1}(t)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2 - 4\Big)\frac{\tau_k'(t)}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(2|b_k(t)|^2 + 4\Re\{b_k(t)\}\Big)\big(\tau_k(t) - \tau_{k+1}(t)\big)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(|b_k(t) - b_{k-1}(t)|^2 - 4\Big)\frac{\tau_k'(t)}{k}.
\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

À l'aide de l'équation 4.2.2, nous pouvons modifier la première sommation :

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= -\sum_{k=1}^{n}\left(2|b_k(t)|^2+4\Re\{b_k(t)\}\right)\left(\frac{\tau_k'(t)}{k}+\frac{\tau_{k+1}'(t)}{k+1}\right)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k(t)-b_{k-1}(t)|^2-4\right)\frac{\tau_k'(t)}{k}\\&= -\sum_{k=1}^{n}\left(2|b_k(t)|^2+4\Re\{b_k(t)\}+2|b_{k-1}(t)|^2+4\Re\{b_{k-1}(t)\}\right)\frac{\tau_k'(t)}{k}\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k(t)-b_{k-1}(t)|^2-4\right)\frac{\tau_k'(t)}{k}.\end{aligned}$$

Réécrivons le coefficient de $\tau_k'(t)/k$,

$$2|b_k(t)|^2+4\Re\{b_k(t)\}+2|b_{k-1}(t)|^2+4\Re\{b_{k-1}(t)\}-|b_k(t)-b_{k-1}(t)|^2+4$$

$$= b_k(t)\big(\bar{b}_k(t)+\bar{b}_{k-1}(t)+2\big)+b_{k-1}(t)\big(\bar{b}_k(t)+\bar{b}_{k-1}(t)+2\big)+2\big(\bar{b}_k(t)+\bar{b}_{k-1}(t)+2\big)$$

$$= |b_k(t)+b_{k-1}(t)+2|^2.$$

En utilisant ce résultat, $\phi'(t)$ devient

$$\phi'(t) = -\sum_{k=1}^{n}|b_k(t)+b_{k-1}(t)+2|^2\frac{\tau_k'(t)}{k}. \tag{4.4.11}$$

De l'inégalité 4.2.7, nous pouvons conclure que

$$\phi'(t)\geq 0 \qquad 0\leq t<\infty. \tag{4.4.12}$$

Pour la dernière partie de la preuve, nous utilisons le fait que $e^{-t}g(z,t)\in S$. Puisque S est compact, si nous fixons k, alors $|c_k(t)|$ reste borné lorsque $t\to\infty$. Par leur définition 4.2.1, les fonctions $\tau_k(t)$ tendent vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Donc, par l'équation 4.4.9, $\phi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. De l'inégalité 4.4.12, nous obtenons

$$0\geq -\int_0^\infty \phi'(t)dt = \phi(0) = \sum_{k=1}^{n}\left(k|c_k(0)|^2-\frac{4}{k}\right)\tau_k(0). \tag{4.4.13}$$

Puisque $g(z,0)=f(z)$, $c_k(0)=c_k$ et $\tau_k(0)=n+1-k$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k|c_k|^2-\frac{4}{k}\right)(n+1-k)\leq 0. \tag{4.4.14}$$

L'inégalité 4.1.4 est donc vraie pour toute fonction single-slit. Puisque ces dernières sont denses dans S, alors l'inégalité 4.1.4 est vraie pour toute fonction univalente. □

4.5. Le cas d'égalité

Théorème 4.5.1. *Si $f \in S$ et*

$$f(z) \not\equiv \frac{z}{(1+\zeta z)^2} \text{ pour un certain } \zeta \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\zeta| = 1, \tag{4.5.1}$$

alors l'inégalité 4.1.4 est stricte.

Démonstration. Soit $f \in S$ satisfaisant l'énoncé 4.5.1. Alors, par le théorème de Bieberbach 2.2.3, $|a_2| < 2$. Soit $\{f_m\}$, une suite de fonctions single-slits convergeant vers f uniformément sur les compacts de $\mathbb{D}$. Posons,

$$f_m(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,m} z^k$$

et

$$\log \frac{f_m(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,m} z^k.$$

Par la première égalité, nous obtenons

$$\frac{d}{dz} \log \frac{f_m(z)}{z}\bigg|_{z=0} = a_{2,m}.$$

De plus, par la deuxième égalité, nous obtenons

$$\frac{d}{dz} \log \frac{f_m(z)}{z}\bigg|_{z=0} = c_{1,m}.$$

D'où l'identité $a_{2,m} = c_{1,m}$. Donc, pour $\alpha < 2$, il existe m_0 suffisamment grand tel que

$$|c_{1,m}| = |a_{2,m}| < \alpha < 2, \qquad \forall m > m_0. \tag{4.5.2}$$

Nous définissons maintenant la famille de fonctions $\{g_m(z,t)\}$ telle que $g_m(z,0) = f_m(z)$ et g_m satisfont l'équation différentielle linéaire de Löwner 4.3.1. Par l'équation 4.4.6, nous obtenons

$$|c'_{1,m}(t)| = |c_{1,m}(t) + 2\kappa_m(t)| \leq |a_{2,m}(t)| + 2 \leq 4.$$

Par l'équation 4.5.2,

$$\begin{aligned} |c_{1,m}(t)| &= \left| \int_0^t c'_{1,m}(s)ds + c_{1,m}(0) \right| \\ &\leq \int_0^t |c'_{1,m}(s)|ds + |c_{1,m}| \\ &\leq \int_0^t 4ds + \alpha \\ &= \alpha + 4t. \end{aligned}$$

Par l'inégalité 4.2.7, $-\tau'_k(t) > 0$ et, donc, de 4.4.11, nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi'_m(t) &\geq |b_{1,m}(t) + 2|^2 \big(-\tau'_1(t) \big) \\ &= |c_{1,m}(t)\overline{\kappa}_m(t) + 2|^2 \big(-\tau'_1(t) \big) \\ &\geq (2 - \alpha - 4t)^2 \big(-\tau'_1(t) \big) \end{aligned}$$

pour $0 \leq t \leq (2-\alpha)/4$ et m grand. Finalement, par l'équation 4.4.13,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(k|c_{k,m}|^2 - \frac{4}{k} \right) (n+1-k) &\leq -\int_0^{(2-\alpha)/8} \phi_m'(t)dt \\ &\leq \left(\frac{2-\alpha}{2} \right)^2 \int_0^{(2-\alpha)/8} \tau_1'(t)dt \\ &= \left(\frac{2-\alpha}{2} \right)^2 \left[\tau_1 \left(\frac{2-\alpha}{8} \right) - \tau_1(0) \right] \\ &< 0. \end{aligned}$$

Puisque m n'influence pas la dernière inégalité, nous pouvons le faire tendre à l'infini et l'inégalité stricte sera conservée. Donc, si f satisfait 4.5.1, nous aurons une inégalité stricte pour l'estimé de Lebedev-Milin et, donc, pour celui de Bieberbach aussi.

□

Si $f(z)$ est une rotation de la fonction de Koebe, alors pour $|\xi| = 1$

$$\log \frac{f(z)}{z} = \log \frac{1}{(1+\xi z)^2} = -2\log(1+\xi z) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\xi z)^k}{k}.$$

En remplaçant c_k par $(-\xi)^k 2/k$, nous obtenons l'égalité dans l'équation 4.1.4. Les rotations de la fonction de Koebe sont donc les seules fonctions qui donnent l'égalité pour la conjecture de Bieberbach et pour celle de Lebedev-Milin .

4.6. Remarques

Remarque 4.6.1. *Le théorème de de Branges implique la conjecture généralisée de Bieberbach.*

Pour cette première remarque, nous considérons la conjecture généralisée de Bieberbach. Elle a été énoncée par Robertson en 1968.

Conjecture 4.6.2 (Robertson, 1968). *Si $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ satisfait*

$$|f(z)| \leq |g(\phi(z))|, \qquad \text{où } |\phi(z)| \leq |z|, \tag{4.6.1}$$

pour $z \in \mathbb{D}$ et $g \in S$, alors $|a_n| \leq n$.

Cette conjecture est évidemment une généralisation de la conjecture de Bieberbach.

Robertson a démontré **[Rob]** que la conjecture de Robertson implique la conjecture généralisée de Bieberbach. Pour montrer cela, nous utilisons le théorème suivant :

Théorème 4.6.3. *Soient $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ et $g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ telles que $b_1 \neq 0$ et $|f(z)| \leq |g(\phi(z))|$ pour une certaine fonction $|\phi(z)| \leq |z|$. Si*

$$\sqrt{z^{-1} g(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu \tag{4.6.2}$$

pour des z de modules suffisamment petits, alors

$$|a_n|^2 \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} |c_\nu|^2 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Pour une preuve de ce théorème, voir [**Pom**], page 38. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de ce théorème.

Corollaire 4.6.4. *Soit $g \in S$, considérons*

$$\sqrt{g(z^2)} = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu+1} z^{2\nu+1}. \tag{4.6.3}$$

Si pour $f(z) = a_1 z + \cdots$, il existe $|\phi(z)| \leq |z|$ telle que $|f(z)| \leq |g(\phi(z))|$, alors, pour tout n,

$$|a_n|^2 \leq 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} |c_{2\nu+1}|^2. \tag{4.6.4}$$

Démonstration. Nous allons modifier l'équation 4.6.3 pour obtenir l'équation 4.6.2 et ainsi utiliser le théorème 4.6.3. Puisque

$$\sqrt{z^{-2} g(z^2)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu+1} z^{2\nu},$$

si nous posons $w = z^2$, nous obtenons

$$\sqrt{w^{-1} g(w)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu+1} w^{\nu}.$$

Par le théorème 4.6.3,

$$|a_n|^2 \leq 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1} |c_{2\nu+1}|^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Le résultat suivant découle de façon évidente du corollaire précédent.

Proposition 4.6.5. *La conjecture de Robertson implique la conjecture généralisée de Bieberbach.*

Remarque 4.6.6. *Il est possible de motiver le choix des fonctions $\tau_k(t)$ dans le preuve de de Branges. Nous pouvons montrer que ces fonctions sont uniques dans un certain sens.*

Pour montrer que $\phi'(t) \geq 0$, nous avons utilisé certaines propriétés des fonctions univalentes. Considérons ces propriétés. Nous avons utilisé l'équation différentielle de Löwner 4.3.1 seulement pour décrire le comportement des coefficients $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ tels que donnés par l'équation différentielle 4.4.6. Nous n'avons pas considéré le fait que ces coefficients provenaient d'une fonction univalente ni leur lien avec la fonction $\kappa(t)$. Puisque nous avons besoin de l'équation 4.4.6, nous n'avons qu'à définir des coefficients $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ et une fonction continue $\kappa(t)$ avec $|\kappa(t)| \equiv 1$. L'équation 4.4.6 aura alors des solutions locales et les inégalités résultant de $\phi'(t_0) \geq 0$ nous donneront des conditions pour les fonctions $\tau_k(t)$.

Soit $\kappa(t) \equiv 1$ et

$$c_k(t_0) = \begin{cases} (-1)^L(2+\eta)/L & \text{pour } k = L, \\ (-1)^k 2/k & \text{si } k \neq L, \end{cases}$$

pour L un nombre entier compris entre 1 et n, $0 \leq t_0 < \infty$ et $|\eta|$ petit. Alors, à l'aide de l'équation 4.4.6, nous voulons trouver $c_k'(t_0)$. Si $k < L$, alors

$$c_k'(t_0) = 2(-1)^k + 2 + 4\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j = 0.$$

Si $k = L$, alors

$$c_k'(t_0) = (-1)^k(2+\eta) + 2 + 4\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j = (-1)^L\eta.$$

Finalement si $k > L$, alors

$$c_k'(t_0) = 2(-1)^k + 2 + 4\sum_{j=1}^{L-1}(-1)^j + 2(-1)^L(2+\eta) + 4\sum_{j=L+1}^{k-1}(-1)^j = 2(-1)^L\eta.$$

En résumé,

$$c_k'(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < L, \\ (-1)^L\eta & \text{pour } k = L, \\ 2(-1)^k\eta & \text{si } k > L. \end{cases}$$

Nous reprenons maintenant la fonction $\phi(t)$ dans 4.4.9 et nous regardons sa dérivée.

$$\begin{aligned} \phi'(t_0) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(kc_k(t_0)\overline{c}_k'(t_0) + kc_k'(t_0)\overline{c}_k(t_0)\Big)\tau_k(t_0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(k|c_k(t_0)|^2 - \frac{4}{k}\right)\tau_k'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2k\Re\{\overline{c}_k(t_0)c_k'(t_0)\}\tau_k(t_0) + \sum_{k=1}^{n}\left(k|c_k(t_0)|^2 - \frac{4}{k}\right)\tau_k'(t_0) \\ &= \Re\{4\eta + 2\eta^2\}\tau_L(t_0) + \sum_{k=L+1}^{n} 8(-1)^{k+L}\Re\{\eta\}\tau_k(t_0) \\ &\quad + \Big(|2+\eta|^2 - 4\Big)\frac{\tau_L'(t_0)}{L}. \end{aligned}$$

Puisque η est arbitraire, nous pouvons le choisir réel. De plus, puisque $\phi'(t) \geq 0$, nous avons

$$\phi'(t_0) = 4\eta\tau_L(t_0) + \sum_{k=L+1}^{n} 8(-1)^{k+L}\eta\tau_k(t_0) + 4\eta\frac{\tau_L'(t_0)}{L} + O(\eta^2) \geq 0.$$

Nous faisons maintenant tendre η vers 0 :

$$\tau_L(t_0) + \sum_{k=L+1}^{n} 2(-1)^{k+L}\tau_k(t_0) + \frac{\tau'_L(t_0)}{L} = 0. \tag{4.6.5}$$

Nous avons l'égalité car lorsque $\eta = 0$, $\phi(t_0) = \phi'(t_0) = 0$. Ensuite, si $L < n$, alors par le même argument avec $L + 1$, nous obtenons

$$\tau_{L+1}(t_0) + \sum_{k=L+2}^{n} 2(-1)^{k+L+1}\tau_k(t_0) + \frac{\tau'_{L+1}(t_0)}{L+1} = 0. \tag{4.6.6}$$

En sommant 4.6.5 et 4.6.6, nous avons

$$\tau_L(t_0) - \tau_{L+1}(t_0) + \frac{\tau'_L(t_0)}{L} + \frac{\tau'_{L+1}(t_0)}{L+1} = 0. \tag{4.6.7}$$

Si $L = n$, alors l'équation 4.6.7 découle de 4.6.5 en posant $\tau_{n+1} \equiv 0$. l'équation 4.6.7 est équivalente à l'équation différentielle 4.2.2, pour $t = t_0$. La condition initiale $\tau_k(0) = n+1-k$ est spécifiée par l'inégalité 4.1.4. Le système de fonctions τ_k est l'unique solution de l'équation différentielle 4.2.2 avec la condition initiale $\tau_k(0) = n + 1 - k$. Il est donc unique.

CONCLUSION

On dit souvent que l'intérêt d'une conjecture ne réside pas dans le résultat, mais dans la façon de la prouver. Les efforts mis en œuvre pour résoudre certaines conjectures permettent de faire avancer les mathématiques plus loin que leur simple résultat et ses implications. Le meilleur exemple de ceci est le dernier théorème de Fermat. Avec les années, plusieurs mathématiciens s'y sont intéressés. Leurs différentes tentatives ont apporté des idées nouvelles qui ont grandement contribué à faire avancer les mathématiques.

Il en va de même pour la conjecture de Bieberbach. Bien que son résultat soit intéressant, il n'a pas beaucoup d'implications dans la théorie des fonctions univalentes. Elle a tout de même eu un impact important sur cette théorie. Les fonctions univalentes étaient peu étudiées avant cette conjecture. Depuis, des milliers d'articles ont été écrits sur le sujet. S. D. Bernardi [**Ber**] a fait une bibliographie de tout ce qui a été écrit sur la théorie des fonctions univalentes jusqu'en 1981. Son livre contient plus de 4000 articles dont plus d'une centaine ont pour sujet la conjecture de Bieberbach.

La preuve de de Branges est relativement simple compte tenu de tous les efforts mis en œuvre pour résoudre la conjecture de Bieberbach. Sa preuve originale, telle que présentée au *Leningrad Seminar in Geometric Function Theory*, comporte deux étapes. Premièrement, il prouve un résultat plus général en utilisant l'équation différentielle de Löwner (telle qu'exposée au chapitre 3). Il applique ensuite ce résultat pour montrer la conjecture de Lebedev-Milin.

L'utilisation de l'équation différentielle linéaire de Löwner a permis à Fitzgerald et Pommerenke de simplifier la preuve de de Branges en éliminant certaines approximations dans la première étape de la preuve. La même amélioration a été faite indépendemment par Emel'ianov. Dans la deuxième version de sa preuve [**deB**], de Branges élimine aussi ces approximations en utilisant une version générale de l'équation différentielle de Löwner. La preuve de Fitzgerald et Pommerenke a beaucoup contribué à faire accepter la preuve de de Branges par la communauté mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

[A&G] Richard Askey, George Gasper, *Positive Jacobi polynomial sums, II.*, American Journal of Mathematics, **98**(1976), 709-737.

[Ber] S. D. Bernardi, *Bibliography of Schlicht Functions*, Mariner Publishing Corporation, inc.,Tampa, 1982.

[deB] Louis de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Mathematica, **154**(1985), 137-152.

[Dur] Peter L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[F&P] Carl H. Fitzgerald, Christian Pommerenke, *The de Branges theorem on univalent functions*, Transactions of the American Mathematical Society, **290**(1985), 683-690.

[Go1] A. W. Goodman, *Univalent Functions, Volume I*, Mariner Publishing Corporation, inc., Tampa, 1983.

[Go2] A. W. Goodman, *Univalent Functions, Volume II*, Mariner Publishing Corporation, inc., Tampa, 1983.

[Kap] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Mathematical Journal, **1**(1952), 169-185.

[Lib] Richard J. Libera, *Univalent $\alpha-$spiral functions*, Canadian Journal of Mathematics, **19**(1967), 449-456.

[Low] Karl Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I*, Math. Ann., **89**(1923), 103-121.

[Neh] Z. Nehari, *A proof of $|a_4| \leq 4$ by Loewner's method, Proceedings of the Symposium on Complex Analysis, Canterbury, 1973*, London Math. Soc. Lecture Note Series, no 12, (Cambridge University Press, 1974), 107-110.

[Pom] Christian Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht in Gottingen, 1975.

[Rob] M S Robertson, *Quasi-subordination and coefficient conjectures*, Bullettin of the American Mathematical Society, **76**(1970), 1-9.

[RUD] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

[SCH] Joel L. Schiff, *Normal Families*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[SZE] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications volume 23, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1959.