

Université de Montréal

Un invariant clé dans l'évolution de la théorie des
noeuds

par

Martin Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques Fondamentales

août 2005



QA

3

U54

2005

v. 012



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Un invariant clé dans l'évolution de la théorie des
noeuds

présenté par

Martin Soucy

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

Mémoire accepté le:

02 / 09 / 05

SOMMAIRE

Le présent mémoire porte sur les découvertes faites en 1984 et 1985 dans le domaine de la théorie des noeuds qui ont mené à ce que nous appelons maintenant l'invariant polynômial homfly d'un entrelacs et à sa conception comme trace sur H_n , l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} .

Le texte traite d'abord de théorie générale des noeuds, avec les plus grands théorèmes et résultats d'avant 1984, puis présente en détail comment un entrelacs peut être associé à une tresse du groupe d'Artin B_n , puis à un élément de l'algèbre de Hecke H_n via la représentation de B_n dans H_n , où l'on calcule enfin l'invariant.

Deux techniques seront présentées pour calculer explicitement un invariant à partir d'un élément de B_n .

Tout au long du texte, nous tenterons de bien situer l'invariant homfly dans l'histoire de la théorie des noeuds et nous terminerons avec une ouverture sur sa place présente dans la théorie en tant qu'invariant quantique et sur les plus récentes perspectives pour ce domaine.

Mots clés : Théorie des noeuds, Algèbre de Hecke, Invariants polynômiaux, Représentations de groupes de tresses.

SUMMARY

This master thesis is centered on the discoveries made in the years 1984 and 1985 in the field of knot theory, discoveries that lead to what is now known as the homfly polynomial, a link invariant, and to its conception as a trace fonction on the Hecke algebra H_n of type A_{n-1} .

The text first exposes classical knot theory, along with outlines of the main results dating before 1984, then shows with detail how a link can be transformed in a braid of Artin's B_n group, then into an element of H_n , where the homfly invariant is calculated.

Two different ways will be explicated for the calculation of the homfly, and illustrated in an example.

Efforts will be made to situate the homfly in knot theory history, concluding with a brief look at its present place as a quantum invariant, giving a hint on the most recent perspectives in the field of knot theory.

Key words : Knot theory, Hecke algebra, polynomial invariants, braid group representations.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Summary.....	iv
Liste des figures.....	vii
Remerciements.....	1
Introduction.....	2
Chapitre 1. Théorie classique des noeuds.....	4
1.1. Noeuds et entrelacs.....	4
1.2. Représentations d'entrelacs.....	5
1.3. Les mouvements de Reidemeister.....	6
1.4. Invariants polynômiaux.....	7
Chapitre 2. Le groupe de tresses.....	9
2.1. Définition du groupe de tresses.....	9
2.2. Tresses et entrelacs.....	11
2.3. Le théorème de Markov.....	12
2.3.1. Preuve de la partie suffisante du théorème de Markov.....	13
2.3.2. Fermeture rigide de tresses.....	14
2.3.3. Ouverture d'entrelacs tissés.....	15
2.3.4. Preuve de la partie nécessaire du théorème de Markov.....	26

Chapitre 3. L'algèbre de Hecke	33
3.1. Définition de l'algèbre de Hecke H_n	33
3.2. La trace d'Ocneanu	35
3.3. Calcul du homfly	39
3.4. Exemple de calcul par blocs.....	45
Chapitre 4. Une explosion d'invariants	49
Bibliographie	51

LISTE DES FIGURES

1.1	Exemples de projections : Le noeud de trèfle (à gauche) et l'entrelacs des anneaux Borroméens (à droite).....	6
1.2	Exemples de projections proscrites.....	6
1.3	Les trois catégories de mouvements de Reidemeister.....	6
2.1	Représentation graphique d'une tresse de B_3	10
2.2	Un générateur de B_n et son inverse.....	11
2.3	Passage d'une tresse à un entrelacs (les deux ont été projetés sur le plan $x = 0$).....	11
2.4	Deux tresses conjuguées ont la même fermeture. α et α^{-1} s'annulent suite à la fermeture, $\widehat{\alpha\beta\alpha^{-1}} = \widehat{\beta}$	13
2.5	La fermeture de $\beta b_n^{\pm 1} \in B_n$ et celle de $\beta \in B_{n-1}$ sont isotopes par le premier mouvement de Reidemeister.....	13
2.6	Une tresse β et sa fermeture rigide.....	14
2.7	Un choix de ponts et de tunnels pour l'entrelacs E , puis un tissage admissible par une courbe C	16
2.8	Extension de la courbe C en respectant les règles de tissage.....	17
2.9	Isotopies de E et de C dans le but de redresser C	17
2.10	La courbe C est horizontale avec les a_i au-dessous et les z_i au-dessus.	18
2.11	L'entrelacs E peut facilement être isotopé de façon à toujours tourner autour de C dans le sens donné par O	18

2.12	L'entrelacs E tourne autour de C dans le sens donné par O de façon strictement monotone.	18
2.13	L'entrelacs E une fois ouvert. (le plan P passait par la partie rectiligne de C et les points z_i	19
2.14	Quelques éléments du groupe fondamental P de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_\beta)$ basés en O	21
2.15	Liens entre les détours pris par un lacet λ dans $D \times \{0\}$ avant de n'entourer que le $k^{\text{ème}}$ brin et une conjugaison de x_k . Dans ce cas-ci, λ est vu comme conjugaison de x_5	22
2.16	Détail de la différence entre deux entrelacs égaux l'un à l'autre à une équivalence simple près.	24
2.17	Deux entrelacs tissés E et E' liés par une équivalence simple de Markov	24
2.18	Ouvertures respectives des deux entrelacs tissés E et E' liés par une équivalence simple de Markov.	25
2.19	L'homéomorphisme H	27
2.20	L'homéomorphisme H^{-1}	28
2.21	Tissage d'un représentant de $\hat{\beta}$	28
2.22	Mouvements de T vers T'	29
2.23	Mouvements spéciaux de T	30
2.24	Les mouvements de Reidemeister sur un entrelacs tissé.	31

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mon directeur Abraham Broer pour le temps donné et pour son support financier qui m'auront énormément aidé à terminer ce mémoire, et pour m'avoir guidé depuis avant même l'obtention de mon baccalauréat vers des théories mathématiques fascinantes et adaptées à mes intérêts.

Je remercie ensuite le département de Mathématiques et Statistique de l'Université de Montréal, l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec et le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada pour leur appui financier via des bourses ponctuelles à divers moments de ma scolarité universitaire.

Enfin, un merci chaleureux à tous mes collègues, avec qui j'ai eu la chance de discuter de diverses théories mathématiques, sans l'aide et les conseils de qui je n'aurais pas pu apprendre aussi rapidement et produire ce mémoire aussi efficacement.

INTRODUCTION

En 1923, Alexander[**Ale23**] démontrait un lemme donnant que tout entrelacs orienté dans \mathbb{R}^3 pouvait être placé de sorte qu’il tourne toujours dans le même sens autour d’un axe choisi. Il postulait alors que ce lemme pouvait être utilisé dans l’étude même des entrelacs, ce qui allait bel et bien arriver, mais seulement un long temps plus tard.

Ce que ce lemme nous donne, c’est un moyen d’associer une tresse à tout entrelacs, et donc (le passage de la tresse à l’entrelacs étant facile) d’établir une bijection entre les entrelacs et les tresses, modulo une certaine relation d’équivalence, deux tresses différentes pouvant correspondre au même entrelacs.

En 1935, Markov[**Mar35**] énonce sans preuve complète que deux tresses viennent du même entrelacs si et seulement si on peut passer de l’une à l’autre par une suite finie de ce que nous appelons maintenant les mouvements de Markov. Ce résultat est le théorème central de ce texte et sera démontré en totalité, suivant les idées de Morton[**Mor86**]. (La première preuve complète était due à J. Birman[**Bir75**].)

En 1984, Jones[**Jon85**] trouve un nouvel invariant polynômial pour les entrelacs en passant par une fonction trace sur des algèbres de Von Neumann, résultat qui inspirera quatre groupes indépendants de mathématiciens à découvrir simultanément dans les mois qui suivent une généralisation de cet invariant que nous appelons le polynôme homfly[**HOMFLY85**]. Parmi eux, nous retiendrons l’approche d’Ocneanu, qui passe par une fonction trace sur $H_n(t)$, l’algèbre de Hecke de type A_{n-1} , représentation du groupe de tresses B_n . Nous explorerons cet invariant en démontrant qu’il est bien défini et qu’il est invariant sous les transformations de Markov, c’est-à-dire que si deux tresses correspondent au même entrelacs, alors leur image par la représentation de B_n dans $H_n(t)$ (n peut être différent pour les deux tresses) a la même trace.

La théorie des noeuds avait déjà plusieurs invariants polynômiaux avant le homfly, sur lesquels nous ne nous attarderons pas, mais il est important de spécifier que nombre de ces invariants ne sont en fait que des spécification du homfly et qu'à la suite de la découverte de ce dernier, la découverte d'une nouvelle super-catégorie d'invariants dits quantiques a fait faire un bond énorme à la théorie jusqu'à la création d'un invariant aujourd'hui conjecturé complet.

Nous concentrerons notre étude sur le homfly et la compréhension des rôles du groupe de tresses B_n et de l'algèbre de Hecke $H_n(t)$ dans la théorie des noeuds.

Chapitre 1

THÉORIE CLASSIQUE DES NOEUDS

1.1. NOEUDS ET ENTRELACS

Partant de l'idée qu'intuitivement, un noeud est une boucle dans l'espace que l'on peut étirer sans en changer la nature, et qu'un entrelacs n'est qu'une collection de noeuds possiblement noués entre eux, on pourrait être tenté de définir un noeud comme une classe d'équivalence de plongements du cercle S^1 dans \mathbb{R}^3 où deux plongements sont dits équivalents si on peut déformer l'un sur l'autre sans auto-croisements. Cette définition entraîne cependant des difficultés à savoir qu'elle permet des cas problématiques (dits noeuds sauvages) dont toute projection sur tout plan présenterait un nombre infini de croisements. Bien que donnant lieu à des noeuds beaucoup moins esthétiques il convient de travailler avec des noeuds polygonaux, un noeud qui n'est pas sauvage ayant toujours un représentant polygonal et un noeud polygonal admettant toujours une projection dite régulière avec un nombre fini de croisements (voir [Kaw96]).

Définition 1.1.1. *Un noeud est une classes de polygones dans \mathbb{R}^3 notés $N = (n_1, \dots, n_k), k \geq 3$ où les n_i , tous distincts, sont les sommets, les segments $[n_i, n_{i+1}]$ (considérant $n_{k+1} = n_1$) ne se croisent jamais excepté que chaque n_i appartient précisément à deux tels segments, soit $[n_{i-1}, n_i]$ et $[n_i, n_{i+1}]$. On considère que deux polygones font partie de la même classe si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de type*

- N1 : Déplacer un sommet (et par le fait même déplacer, étirer ou contracter de façon continue les deux segments qui y sont rattachés) sans auto-croisements.
- N2 : Ajouter un sommet dans un segment ou retrancher un $n_i \in [n_{i-1}, n_{i+1}]$

On appellera Noeud trivial la classe représentée par un triangle.

Notons que, malgré cette définition, on aura fortement tendance à «arrondir» nos neuds, principalement pour des raisons esthétiques... Dans la théorie différentiable des noeuds, on utilise la notion d'isotopie, que nous adaptons ici :

Définition 1.1.2. Une isotopie d'un noeud N_1 à un noeud N_2 est une fonction différentiable $h : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h(0, S^1) = N_1$, $h(1, S^1) = N_2$ et $\forall t \in [0, 1]$, $h(t, S^1)$ est un plongement admissible donnant un noeud. Voir [BJ82], page 88 pour une définition générale d'isotopie de plongements. Dans notre cas, une isotopie entre deux noeuds sera simplement une suite finie de mouvements de type $N1$ ou $N2$.

Définition 1.1.3. Un entrelacs à m composantes est un m -tuplet de noeuds plongés simultanément dans \mathbb{R}^3 (mais disjoints), modulo les mêmes relations d'équivalences que celles qui régissent les noeuds. (Précisons que par auto-croisement, ici, on veut bel et bien dire que si on modifie la composante N_j de l'entrelacs, cela doit se faire sans croisements avec les autres composantes non plus, de sorte que deux entrelacs peuvent être formés des mêmes composantes sans pour autant être considérés équivalents.) Par exemple, les Anneaux Borroméens (figure 1.1, à droite) ne forment pas le même entrelacs que trois noeuds triviaux éloignées les uns des autres. Une isotopie d'entrelacs est définie par une suite finie de mouvements de type $N1$ et $N2$, tout comme pour les noeuds.

Les noeuds sont donc des cas particuliers d'entrelacs (à une seule composante) et on traitera dans le reste de ce mémoire principalement de ces derniers, par souci de généralité.

Nous travaillerons parfois avec des entrelacs orientés, c'est à dire où chaque composante est orientée. Le polynôme homfly est en fait un invariant d'entrelacs orientés.

Du fait que les noeuds sont des classes dont les membres peuvent être très différents les uns des autres, il résulte que leur étude présente dès le départ un sérieux problème (que nous appelons simplement problème des noeuds) : comment déterminer si deux plongements donnés correspondent au même noeud ?

1.2. REPRÉSENTATIONS D'ENTRELACS

Afin de mieux voir et manipuler les représentants dans \mathbb{R}^3 de noeuds, il convient d'en prendre la projection sur un plan de l'espace, en gardant comme information supplémentaire aux croisements quel segment «passe par-dessus» l'autre. On choisira toujours pour ce faire une projection où les croisements sont des points isolés n'impliquant que deux segments. (Voir les figures 1.1 et 1.2.)

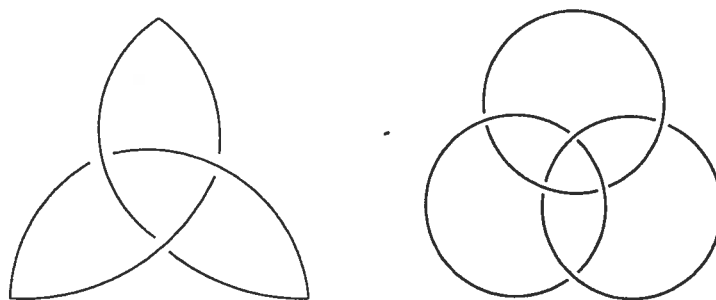


FIG. 1.1. Exemples de projections : Le noeud de trèfle (à gauche) et l'entrelacs des anneaux Borroméens (à droite).

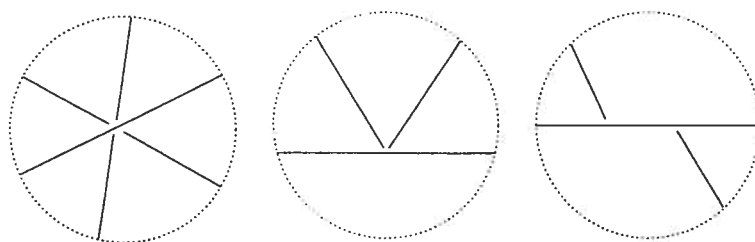


FIG. 1.2. Exemples de projections proscrites

Notons qu'on ne se complique pas la tâche en ajoutant nombre de projections pour chaque représentant dans \mathbb{R}^3 d'un entrelacs, puisque changer de plan de projection équivaut à changer de représentant pour le noeud en faisant subir une rotation au représentant d'origine.

1.3. LES MOUVEMENTS DE REIDEMEISTER

Le théorème suivant est dû à Reidemeister (voir [Rei48]). Deux diagrammes représentent le même noeud si et seulement si l'un peut être obtenu de l'autre avec une suite finie de ce que nous appelons maintenant les mouvements de Reidemeister, qui sont de trois types, R_1 , R_2 et R_3 , tels qu'illustrés à la figure 1.3.

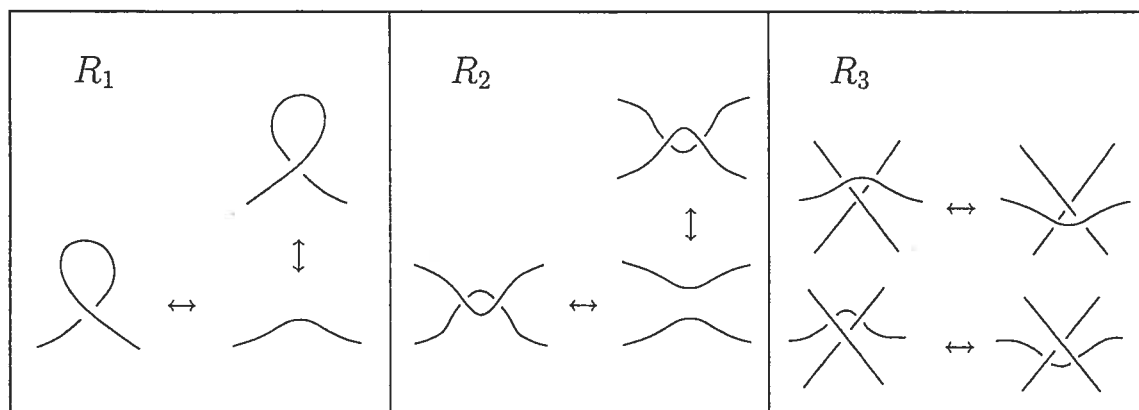


FIG. 1.3. Les trois catégories de mouvements de Reidemeister.

Le problème qui subsiste, c'est que bien que ce théorème nous donne un moyen de s'assurer que deux représentations correspondent en fait à un seul et même entrelacs (admettant qu'on trouve la bonne suite de mouvements permettant de passer d'un diagramme à l'autre), il ne permet pas de dire quoi que ce soit avec certitude si telle suite n'est pas trouvée.

Il permettra cependant de prouver plusieurs résultats et de trouver des invariants polynômiaux nouveaux et de nouvelles interprétations et façons de calculer certains invariants déjà existants.

1.4. INVARIANTS POLYNÔMIAUX

Avant que Reidemeister ne popularise une approche plus combinatoire à la théorie des noeuds, plusieurs tentatives avaient été faites pour trouver un invariant algébrique, c'est à dire un moyen d'associer à tout représentant d'entrelacs un objet algébrique de façon à ce que deux représentants d'un même entrelacs soient associés au même objet, ce qui permettrait de détecter que deux entrelacs sont différents dès qu'ils sont associés à un objet différent.

Le premier invariant dû à la topologie algébrique date du tournant du vingtième siècle. Il s'agit de calculer le groupe fondamental du complément d'un représentant dans \mathbb{R}^3 . C'est un invariant très puissant, malgré la simplicité du concept de base et on l'a longtemps conjecturé complet. (Un invariant est dit complet si deux entrelacs différents sont toujours associés à des objets différents.)

On appelle groupe du noeud le $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ pour un noeud K . Malheureusement, non seulement n'est-ce pas un invariant complet mais, avec la meilleure façon de calculer ce groupe pour un noeud donné, différentes représentations d'un même noeud vont donner différentes présentations du même groupe. Le problème de décider si deux présentations donnent lieu à deux groupes isomorphes est insoluble en général et les perspectives, même en se limitant aux groupes de noeuds, sont loin d'être réjouissantes.

Beaucoup de travail a été accompli autour de ce dernier invariant jusqu'à ce qu'Alexander [Ale28] change le cap en introduisant ce qui sera appelé le polynôme d'Alexander, un puissant invariant polynômial, simple à calculer (on trouvera d'ailleurs, dans les années qui suivent, une panoplie de façons de ce faire). Cet invariant a cependant le désavantage qu'il ne distingue pas un noeud de son image miroir (qui en général ne lui est pas isotope) et que, encore, plusieurs noeuds non triviaux ont le polynôme d'Alexander du noeud trivial.

Chapitre 2

LE GROUPE DE TRESSES

Les limites des invariants trouvés nous poussent à explorer une autre voie, qui avait déjà été ouverte dès les années vingt. Nous définirons dans ce chapitre le groupe de tresses B_n tel que présenté par Artin[Art25] et son lien avec le problème de classification des noeuds.

C'est la découverte du polynôme de Jones[Jon85] qui a popularisé cette approche et causé une croissance jamais vue du nombre d'invariants polynômiaux de noeuds et entrelacs. C'est que les représentations de B_n sont bien connues et beaucoup du travail qui avait déjà été accompli à les comprendre pouvait rapidement servir de base à une démarche permettant de trouver un invariant polynômial.

2.1. DÉFINITION DU GROUPE DE TRESSES

Définition 2.1.1. Posons $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 \mid (i \neq j) \Rightarrow (x_i \neq x_j)\}$ et définissons la relation d'équivalence \sim comme suit :

$x = (x_1, \dots, x_n) \sim y = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_n$ tel que $y_i = x_{\sigma(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n$. (Où S_n est le groupe symétrique des permutations de n éléments.) Autrement dit, $x \sim y$ si les deux n -tuplets sont en fait les mêmes dans des ordres possiblement différents.

Le groupe B_n est le groupe fondamental $\pi_1(E/\sim)$ du quotient de cet espace par la relation d'équivalence donnée.

Ce groupe doit son appellation «de tresse» à son interprétation géométrique : Si on base les lacets de (E/\sim) en $((0, 1), (0, 2), \dots, (0, n))$ et voit un point du lacet $\rho : [0, 1] \rightarrow (E/\sim)$ comme les n points $\{(\rho_i(t), -t)\}_{i=1, \dots, n}$ de \mathbb{R}^3 où $\rho_i(t) \in \mathbb{R}^2$ est

la projection de ρ sur la $i^{\text{ème}}$ composante, alors un lacet admet la représentation graphique vue dans la figure 2.1.

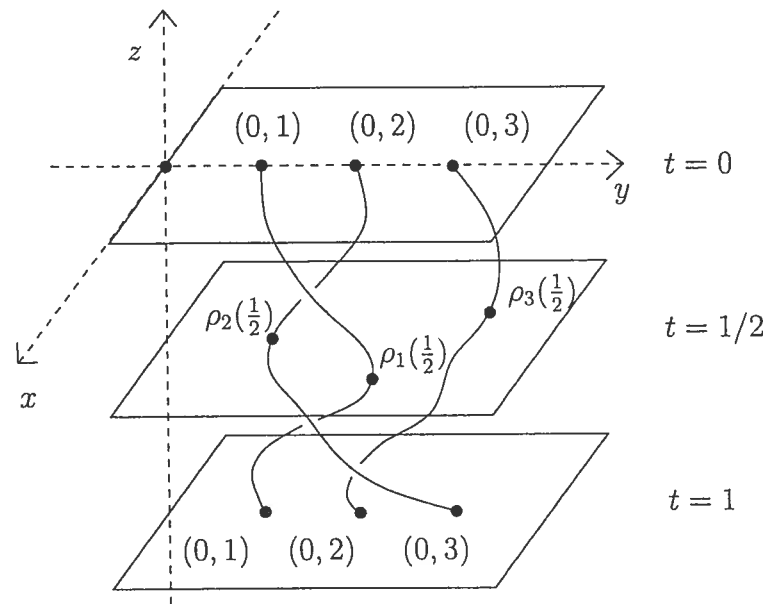


FIG. 2.1. Représentation graphique d'une tresse de B_3

Notons que :

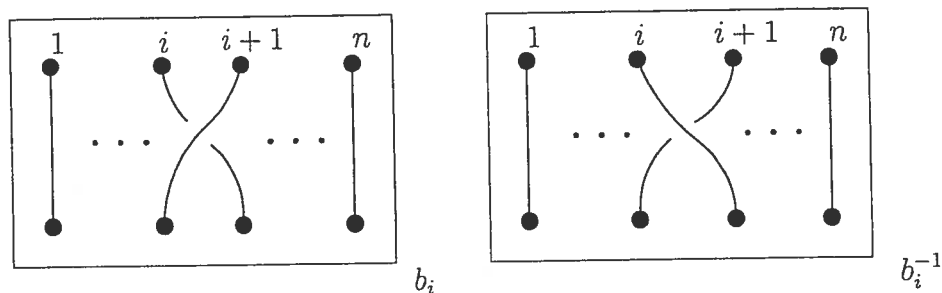
- Les brins de la tresse descendent toujours (avec le temps qui avance).
- Deux tresses sont considérées équivalentes si elles viennent de lacets homotopes du $\pi_1(E/\sim)$ (donc si on peut déplacer l'une pour obtenir l'autre sans croisement des brins (sans quitter l'espace E/\sim))
- Le point d'arrivée d'un brin peut être différent de son point de départ, en autant que les n points d'arrivée forment l'ensemble $\{(0, 1), \dots, (0, n)\}$.

Ayant défini B_n , Artin a montré que le groupe admet la présentation

$$\langle b_1, \dots, b_{n-1} : b_i = b_j \text{ si } |i - j| \geq 2 \text{ (commutativité éloignée),} \\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 2 \text{ (relation de tresse)} \rangle$$

L'interprétation géométrique de cette présentation est que b_i représente «faire passer le $i^{\text{ème}}$ brin sous le $i + 1^{\text{ème}}$ » (Voir la figure 2.2).

Tout élément de B_n peut donc s'écrire comme un mot avec les lettres b_i et b_i^{-1} , mais ce «nom» n'est pas unique. Par exemple, dans B_4 , $b_1 b_2^{-1} b_3 b_2 b_3 = b_1 b_2^{-1} b_2 b_3 b_2 = b_1 b_3 b_2$. Il existe cependant une notion de forme réduite d'un élément de B_n .

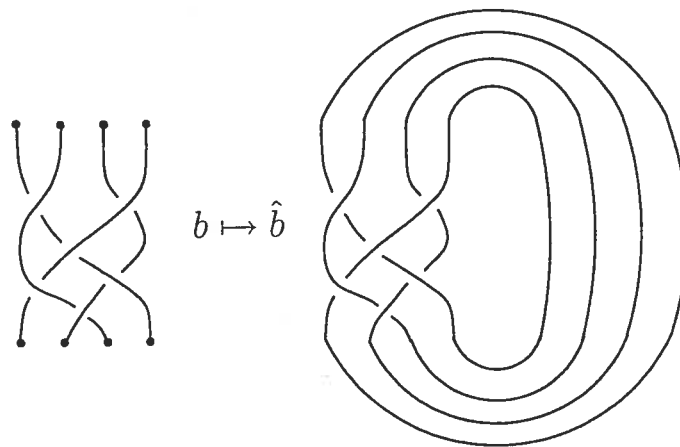
FIG. 2.2. Un générateur de B_n et son inverse

Définition 2.1.2. La longueur de $b \in B_n$ est le plus petit l tel que b peut s'écrire
 $b = b_{i_1}^{\pm 1} b_{i_2}^{\pm 1} \dots b_{i_l}^{\pm 1}$.

Définition 2.1.3. Si $b = b_{i_1}^{\pm 1} b_{i_2}^{\pm 1} \dots b_{i_l}^{\pm 1}$ et que l est la longueur de b , alors on dit que $b_{i_1}^{\pm 1} b_{i_2}^{\pm 1} \dots b_{i_l}^{\pm 1}$ est une expression réduite de b .

2.2. TRESSES ET ENTRELACS

Étant donnée une tresse $b \in B_n$ (avec sa représentation géométrique dans \mathbb{R}^3), on peut former l'entrelacs \hat{b} en identifiant les points $(0, i, 0)$ et $(0, i, 1)$ comme dans la figure 2.3. (Ici, \hat{b} sera un entrelacs à deux composantes triviales non nouées l'une à l'autre.)

FIG. 2.3. Passage d'une tresse à un entrelacs (les deux ont été projetés sur le plan $x = 0$)

Ici entre en jeu un vieux résultat, donnant que l'on peut aussi inverser la procédure ainsi définie et obtenir une tresse (sans prétendre qu'elle soit unique) à partir de tout entrelacs.

Théorème 2.2.1 (Alexander).

$$\begin{array}{ccc} \text{La fonction } \hat{\cdot} : \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n & \rightarrow & \{\text{Entrelacs}\} \\ b & \mapsto & \hat{b} \end{array}$$

est surjective.

On accorde à Alexander ce théorème parce qu'il est une conséquence immédiate de son lemme (voir [Ale23]). Le lemme établissait que tout entrelacs peut être déformé pour tourner toujours dans le même sens autour d'un axe. Mais une fois ceci accompli, il ne reste qu'à trancher l'entrelacs avec un demi-plan partant de l'axe en question pour obtenir une tresse. La technique que nous utiliserons est un peu plus précise et s'insère dans le cadre de la preuve du théorème de Markov. (Voir le théorème 2.3.5, ainsi que les figures 2.7 à 2.13 pour un exemple.)

L'application $\hat{\cdot}$, qui à toute tresse b fait correspondre un entrelacs \hat{b} est donc surjective, mais elle n'est cependant pas injective, il existe en effet une infinité de tresses différentes donnant lieu au même entrelacs. Le théorème de Markov permet néanmoins de contrôler ce manque d'injectivité.

2.3. LE THÉORÈME DE MARKOV

Théorème 2.3.1 (Markov, [Mar35]). *Deux tresses $b_1 \in B_n$ et $b_2 \in B_m$ se ferment en un seul et même entrelacs (en deux représentants du même entrelacs) si et seulement si l'une peut être obtenue de l'autre par une suite finie de mouvements de type :*

- $M_1 : \gamma \leftrightarrow \beta\gamma\beta^{-1}$ pour $\gamma, \beta \in B_k$. (Voir figure 2.4.)
- $M_2 : \beta \in B_k \leftrightarrow \beta b_k^{\pm 1} \in B_{k+1}$ (Voir figure 2.5.) en se permettant de voir $\beta \in B_k$ comme élément de B_{k+1} (inclusion canonique).

Ces deux types d'opérations sont appelés mouvements de Markov. Nous écrivons $b_1 \sim_m b_2$ si on peut passer de la tresse b_1 à la tresse b_2 par une suite finie de mouvements de Markov et dirons que b_1 est markov-équivalente à b_2 .

Notons que ce théorème réécrit le problème des noeuds de façon algébrique : étant donné son résultat, il suffirait de pouvoir discerner quand deux tresses sont liées l'une à l'autre par une suite de mouvement de Markov. Un algorithme de Garside [Gar69] nous donne une façon de déterminer quand deux tresses sont conjuguées, mais les mouvements de Markov permettent de changer de groupe de

tresse avant d'être possiblement conjugués et de revenir, ce qui fait qu'à ce jour le problème algébrique des noeuds n'est pas résolu et l'ouverture d'entrelacs en tresses, bien que donnant un invariant complet en quotientant l'union des groupes de tresses par la relation de Markov-équivalence, ne résout pas le problème des noeuds. Birman a cependant obtenu [Bir75] que pour les tresses dites positives (écrites en n'utilisant que les générateurs b_i et non leurs inverses), le problème des noeuds se ramène au problème de conjugaison, et est donc résolu pour la classe des entrelacs positifs (fermetures de tresses positives).

2.3.1. Preuve de la partie suffisante du théorème de Markov

Les figures 2.4 et 2.5 suffisent à établir la partie suffisante du théorème, c'est-à-dire que deux tresses reliées par une suite finie de mouvements de Markov se ferment en un seul et même entrelacs.

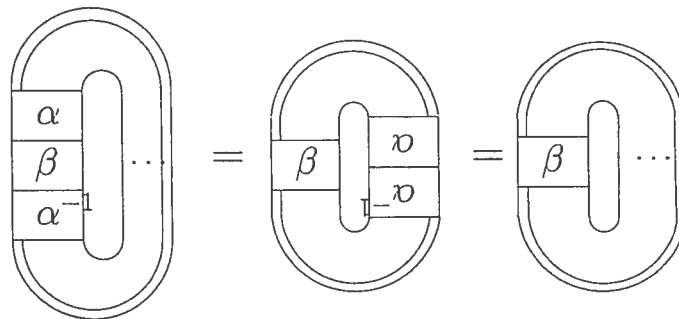


FIG. 2.4. Deux tresses conjuguées ont la même fermeture. α et α^{-1} s'annulent suite à la fermeture, $\widehat{\alpha\beta\alpha^{-1}} = \widehat{\beta}$

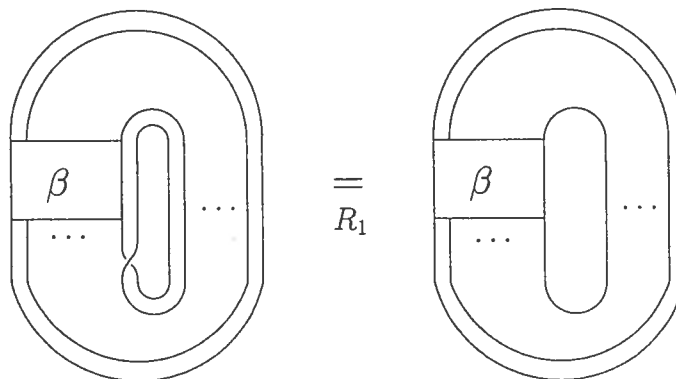


FIG. 2.5. La fermeture de $\beta b_n^{\pm 1} \in B_n$ et celle de $\beta \in B_{n-1}$ sont isotopes par le premier mouvement de Reidemeister

Pour la réciproque, l'idée est d'établir le lien entre les isotopies d'entrelacs et les mouvements de Markov via une étape intermédiaire correspondant aux mouvements de Markov, mais sur des diagrammes d'entrelacs dits «tissés» autour d'une corde non nouée. L'ajout de cette corde nous donne un certain contrôle sur la tresse obtenue (par le moyen qui sera décrit ci-bas) et sur son lien avec d'autres tresses possibles pour l'entrelacs, contrôle que nous n'avions pas avec la preuve du lemme d'Alexander, aussi constructive soit-elle.

Nous définirons donc un entrelacs tissé comme étant un entrelacs auquel a été ajoutée une composante triviale «tissée» de façon bien précise à travers celui-ci. Nous verrons que cette construction donne canoniquement une tresse (obtenant ainsi une preuve alternative du théorème d'Alexander). L'étude du lien entre deux entrelacs $E \cup C$ et $E' \cup C'$ (où C et C' sont les composantes triviales ajoutées par tissage) nous fournira la preuve du théorème de Markov.

2.3.2. Fermeture rigide de tresses

Définition 2.3.2. Pour $\beta \in B_n$, nous avons déjà défini une notion de fermeture (l'entrelacs $\hat{\beta}$ naturellement associé à β , voir figure 2.3). Nous définissons maintenant la fermeture rigide¹ de β comme étant l'entrelacs $\hat{\beta} \cup C_\beta$, où C_β est un noeud trivial (que nous appellerons carcan de β) entourant β (voir figure 2.6).

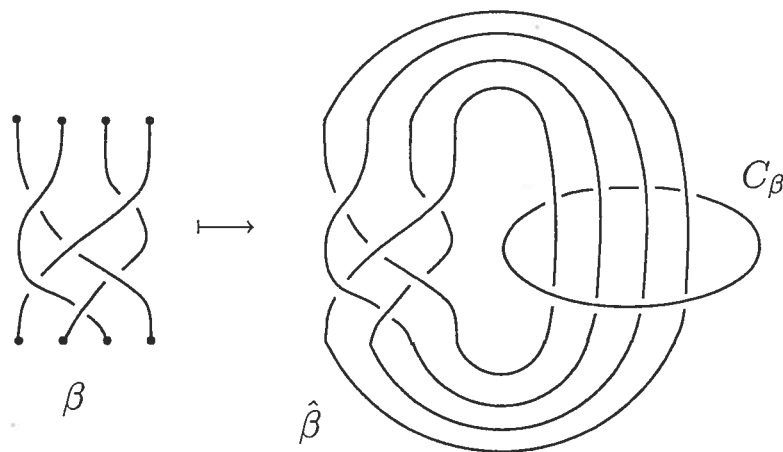


FIG. 2.6. Une tresse β et sa fermeture rigide.

Nous pouvons, jusqu'à un certain point, inverser cette procédure. La discussion qui suit entourant la notion de tissage nous fournira une preuve du lemme

¹Morton [Mor86] l'appelle «complete closure of β »

d'Alexander tout en nous donnant pour tout entrelacs tissé une tresse définie à conjugaison près (tel que montré au théorème 2.3.9) que nous appellerons l'ouverture de l'entrelacs tissé.

2.3.3. Ouverture d'entrelacs tissés

Définition 2.3.3. Un choix de ponts et de tunnels sur un diagramme d'un entrelacs E orienté est un ensemble A_E et un ensemble Z_E de points qui ne sont pas sur les intersections du diagramme de E et qui ont la propriété qu'en parcourant E suivant son orientation, les points rencontrés alternent d'un ensemble à l'autre et que les segments de E allant d'un point de A_E au prochain point de Z_E (tunnels) ne passent pas par-dessus aucun autre segment de E et ceux partant d'un point de Z_E vers le prochain point de A_E (ponts) ne passent jamais sous un autre segment de E . On demande aussi que l'intersection de chacun de ces ensembles avec toute composante de E ne soit pas vide. La figure 2.7 (partie de gauche) donne un exemple de tel choix.

Définition 2.3.4. Un tissage admissible pour un diagramme d'entrelacs E pour lequel un choix $A_E = \{a_1, \dots, a_n\}$, $Z_E = \{z_1, \dots, z_n\}$ a été fait est une courbe non nouée C séparant les deux ensembles et tissée dans E de sorte que C passe toujours sous les ponts et par-dessus les tunnels de E (voir la partie de droite de la figure 2.7). Nous exigerons aussi que chaque composante de E soit nouée à C , pour éviter des situations qui pourraient survenir, entre autres avec le noeud trivial. Un diagramme d'entrelacs $E \cup C$ sera dit tissé s'il existe un choix de ponts et de tunnels pour E faisant de C un tissage admissible pour E .

Théorème 2.3.5. Tout entrelacs tissé $E \cup C$ peut être isotopé de façon à être la fermeture rigide d'une tresse β telle que $\hat{\beta} = E$ et $C_\beta = C$. Comme tout entrelacs possède un tissage admissible (la définition nous donne le moyen de le construire), il en résulte que tout entrelacs est la fermeture d'une tresse. (Théorème d'Alexander, voir [Mor86] pour cette version.)

DÉMONSTRATION. Une fois que nous avons tissé E par C , il faut arriver à «faire tourner» E autour de C . Les étapes pour ce faire sont illustrées dans les figures 2.8 à 2.12. Cette méthode fonctionnera toujours puisqu'on pourra toujours redresser C (figure 2.9) sans ajouter de croisement de sorte que localement (près de l'entrelacs) C soit horizontale avec tous les a_i sous C et les z_i par-dessus. Notre

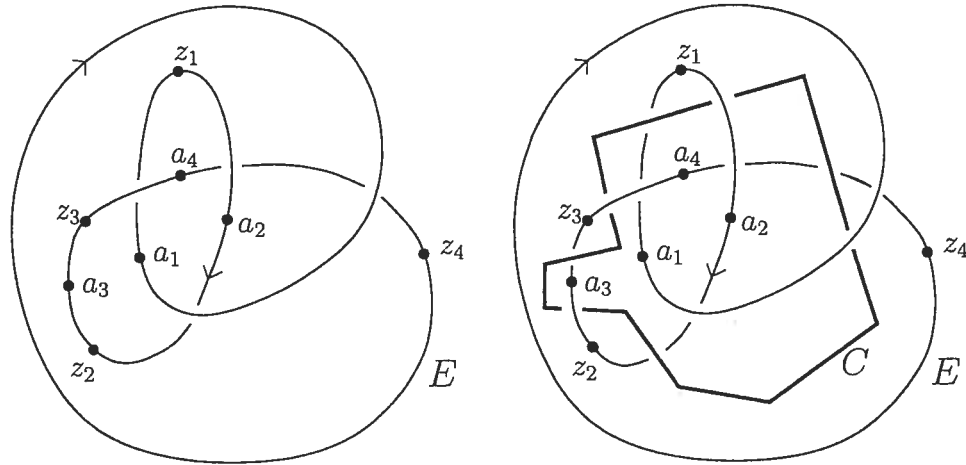


FIG. 2.7. Un choix de ponts et de tunnels pour l'entrelacs E , puis un tissage admissible par une courbe C

choix de tissage requiert qu'alors tout segment de E passant à travers C de haut en bas passe sous la courbe, et qu'il passe par-dessus s'il va de bas en haut, pourvu qu'il rencontre toujours un point z_i lors d'un passage au-dessus de C et un a_i lors d'un passage au-dessous. Mais si tel n'est pas le cas, par exemple (comme à la figure 2.10) si un segment ne rencontre aucun a_i lors d'un passage complet sous C , alors c'est qu'il ne passe sous aucun autre segment de E (puisque nous sommes toujours sur un pont) et on peut donc tout isotoper ce segment à un autre qui ne traverserait jamais C (voir figure 2.11). Une fois ce travail accompli, une légère isotopie nous assure que si on voit l'axe qui forme C localement comme celui des coordonnées cylindriques dans \mathbb{R}^3 , alors la coordonnée angle est strictement croissante (si on a choisi la bonne orientation, le fait important étant ici qu'elle est strictement monotone) quand on parcourt E selon son orientation.

Si on prend maintenant un demi-plan P , passant par la partie de C qui est le segment rectiligne autour duquel tourne E , de sorte que ce demi-plan ne croise pas deux points de E sur une même droite perpendiculaire à C , qu'on déroule le tore plein $P \times S^1$ en $P \times [0, 1]$, on obtient une tresse β telle que la fermeture rigide de β soit $E \cup C$.

□

Il existe à priori une ambiguïté à savoir quelle est la tresse que l'on pourrait obtenir à partir de E dépendamment du choix de ponts et de tunnels, puis du

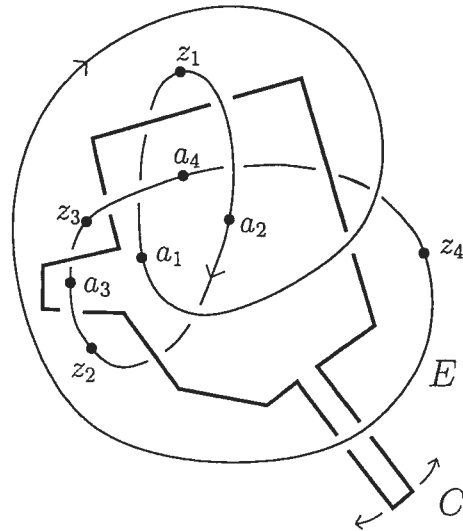


FIG. 2.8. Extension de la courbe C en respectant les règles de tissage.

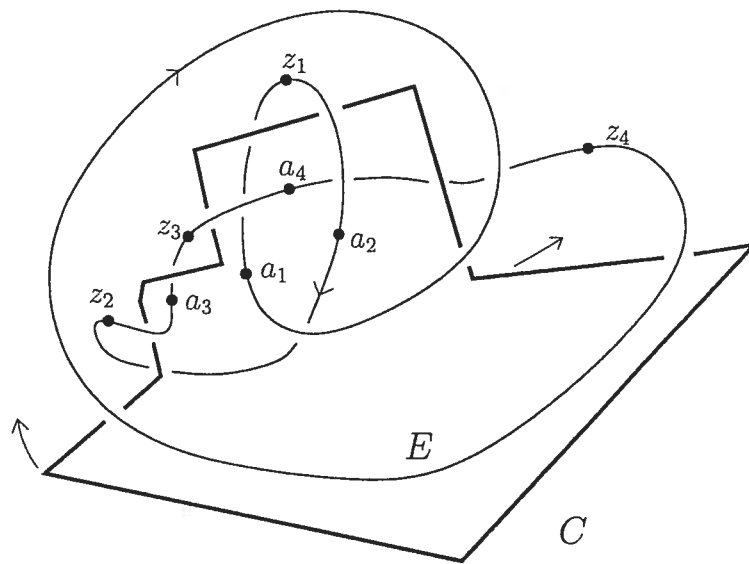


FIG. 2.9. Isotopies de E et de C dans le but de redresser C .

choix de tissage, mais nous verrons que deux tissages différents donnent toujours des entrelacs tissés qui sont markov-équivalents, et qui s'ouvrent donc sur des tresses qui sont markov-équivalentes.

Définition 2.3.6. Nous appellerons ouverture d'un entrelacs tissé la tresse obtenue par ce processus. Le lemme suivant établit à quel point cette notion est bien définie : la fermeture rigide de l'ouverture d'un entrelacs tissé est clairement isotope à l'entrelacs tissé du départ et donc le lemme 2.3.9 suivant peut se traduire

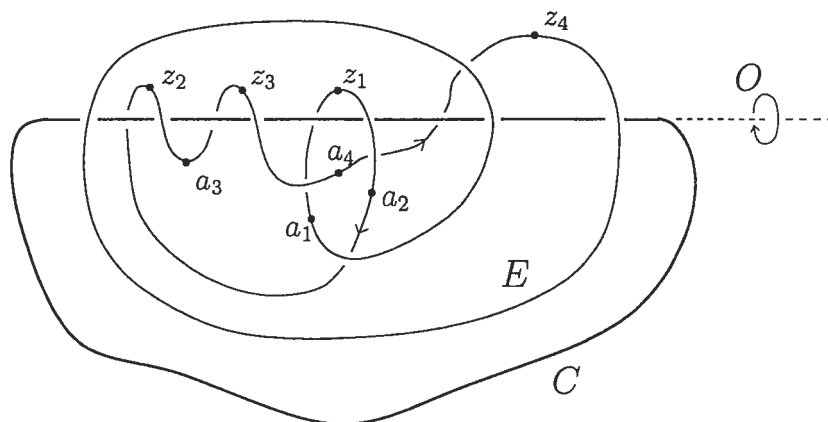


FIG. 2.10. La courbe C est horizontale avec les a_i au-dessous et les z_i au-dessus.

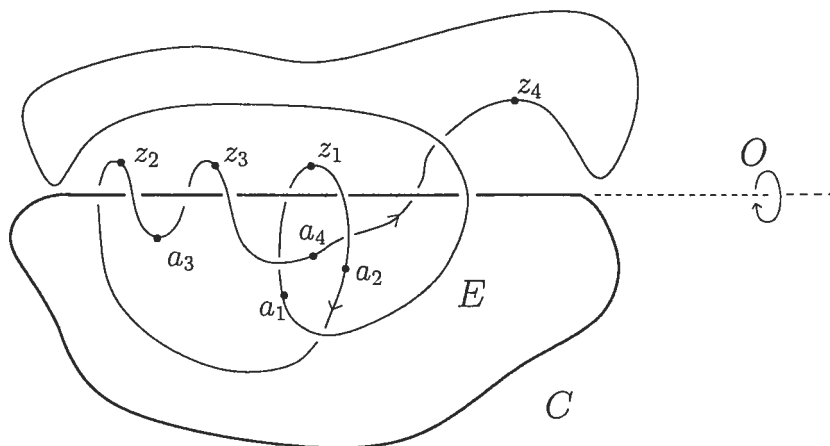


FIG. 2.11. L'entrelacs E peut facilement être isotopé de façon à toujours tourner autour de C dans le sens donné par O .

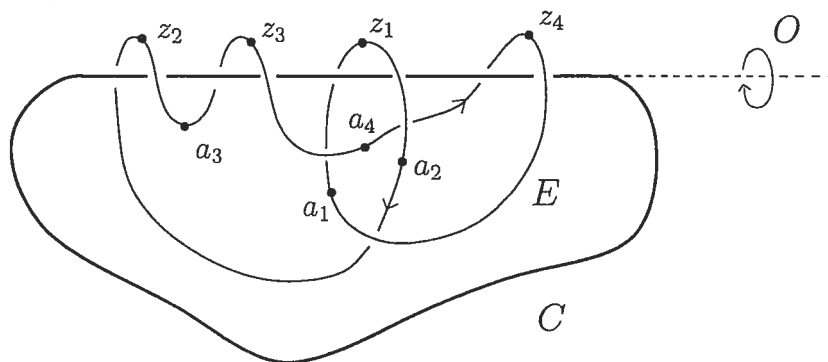


FIG. 2.12. L'entrelacs E tourne autour de C dans le sens donné par O de façon strictement monotone.

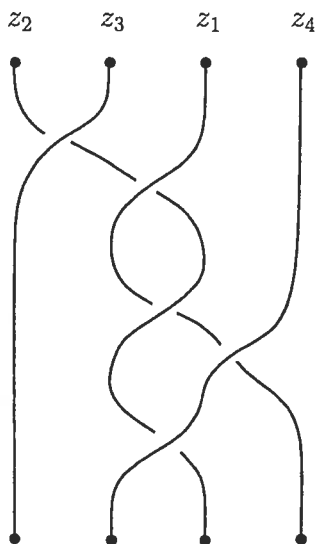


FIG. 2.13. L'entrelacs E une fois ouvert. (le plan P passait par la partie rectiligne de C et les points z_i .)

comme : Les ouvertures de deux entrelacs tissés isotopes se ferment sur deux entrelacs tissés isotopes et sont donc conjuguées dans un même groupe B_n .

Définition 2.3.7. Le nombre d'enlacement $lk(E, C)$ se veut une mesure du nombre de fois que E tourne autour de C pour deux noeuds E et C . Il existe plusieurs définitions de $lk(E, C)$ (voir [Rol76], p.132), il est surtout important de noter que ce nombre est invariant, ce qui est mis en évidence par la définition 4 de la référence, associant $lk(E, C)$ au $\pi_1(C)$. Pour le calculer, nous utiliserons la troisième définition donnée dans le livre de Rolfsen, qui s'élargit facilement au cas où E est un entrelacs : quand la projection de l'entrelacs E tissé par C est ramenée à la forme « prêt à être ouvert » (voir la figure 2.12), on définit $lk(E, C)$ comme le nombre de fois où un segment de l'entrelacs passe par-dessus la partie rectiligne de C .

Une fois que la fermeture rigide d'une tresse β est établie, on ne peut changer le nombre d'enlacement de $\hat{\beta}$ autour de son carcan par des isotopies (ce dernier étant un invariant), ce qui explique le choix des noms.

Le lemme suivant sera utile pour prouver le lemme 2.3.9.

Lemme 2.3.8. *Le groupe fondamental P de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_{\hat{\beta}})$ admet comme présentation*

$$P = \langle x_1, \dots, x_n, t \mid \rho(\beta)(x_i) = t^{-1}x_it, i = 1, \dots, n \rangle .$$

C'est donc à dire que le groupe admet les $n + 1$ générateurs donnés à gauche et qu'ils sont libres à l'exception des n relations données à droite.

DÉMONSTRATION. Commençons par fixer un disque privé de n trous alignés sur le diamètre que nous appellerons D_n . Nous appellerons D le même disque plein. À la tresse β de B_n on peut faire correspondre une homotopie H_β comme suit.

On fixe une représentation graphique de β dans le cylindre $D \times I$ avec les brins de la tresse commençant et finissant aux endroits correspondant aux n trous de D_n dans $D \times \{0\}$ et $D \times \{1\}$.

$H_\beta : D_n \times [0, 1] \rightarrow D$ est la déformation continue telle que $H_\beta(D_n, t)$ soit le disque privé des n intersections de β avec $D \times \{t\}$.

Notons maintenant que le groupe fondamental de D_n est le groupe libre à n générateurs, chacun correspondant, une fois un point de base fixé, à une boucle n'entourant qu'un des trous.

Si on prend un élément λ de $\pi_1(D_n)$ vu comme un lacet dans $D_n \times \{0\}$ et qu'on lui fait suivre l'homotopie H_β , on obtient un nouveau lacet λ_β au niveau $D_n \times \{1\}$. On a donc fait correspondre à $\beta \in B_n$ un automorphisme de $\pi_1(D_n)$ envoyant λ sur λ_β . Notons que bien que H_β n'est pas défini de façon unique (seul l'endroit des trous est précisé en tout temps), mais un deuxième H'_β nous donnerait un lacet λ'_β homotope à λ_β , de sorte que l'homomorphisme qui associe à β un automorphisme de G_n est bien défini et donne une représentation ρ de B_n dans $Aut(G_n)$.

Le générateur t correspond au lacet qui encercle C_β . Les x_i correspondent toujours aux lacets ne faisant que le tour d'un brin de la tresse, disons au niveau de $D \times \{0\}$ (voir fig.2.14). On voit sur cette figure le lacet $t^{-1}x_1t$, c'est à dire x_1 que l'on a fait glisser le long de β et qu'on a fait passer au travers de C_β (ce qui équivaut à conjuguer par t , par le même principe que celui illustré à la figure 2.15). On peut aussi le voir comme $\rho(\beta)(x_1)$ en le faisant simplement glisser vers le bas pour faire le tour de $\hat{\beta}$ jusqu'au niveau $D \times \{0\}$, ce qui vérifie la relation donnée dans la présentation de P . Notons aussi que le lacet composé $x_1x_2 \dots x_n$ est celui qui suit le carcan sur tout son long, si nous avons numéroté nos lacets correctement et leur avons donné la bonne orientation.

Maintenant comme tout lacet de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_\beta)$ peut être exprimé en fonction des générateurs donnés $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ générant $\pi_1(D_n)$ et t exprimant l'enlacement autour de C_β et comme nous avons exprimé la seule relation possible, sachant qu'il n'y en a pas sans faire intervenir C_β , c'est à dire passer à travers de ce carcan vers faire le tour de la tresse, nous avons bel et bien une présentation de $P = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_\beta))$.

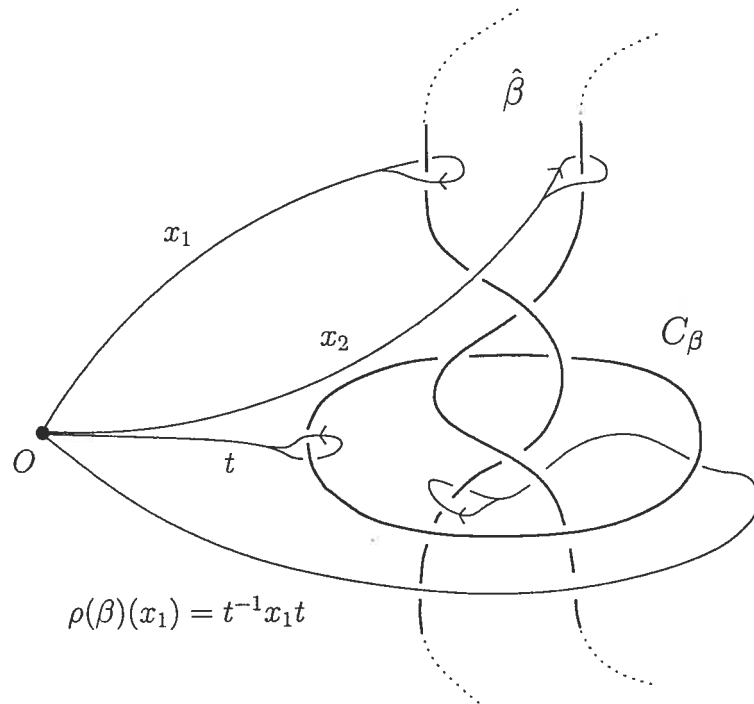


FIG. 2.14. Quelques éléments du groupe fondamental P de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_\beta)$ basés en O .

□

Lemme 2.3.9. (Morton, voir [Mor78])

Les fermetures rigides de β et de γ sont isotopes (correspondent au même noeud) si et seulement si les deux tresses β et γ sont des éléments conjugués de B_n pour un certain n .

Pour plus de compréhension, précisons que le n en question est connu et correspond au nombre d'enlacement de $\hat{\beta}$ autour du carcan C_β de la fermeture rigide.

DÉMONSTRATION. Supposons que nous avons $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n, t \mid \rho(\beta)(x_i) = t^{-1}x_it, i = 1, \dots, n\}$ comme groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\beta} \cup C_\beta)$ et

$Q = \{y_1, y_2, \dots, y_n, s \mid \rho(\gamma)(y_i) = s^{-1}y_is, i = 1, \dots, n\}$ comme groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (\hat{\gamma} \cup C_\gamma)$ et que $\Theta : Q \rightarrow P$ soit l'isomorphisme induit par l'isotopie de $\hat{\gamma} \cup C_\gamma$ sur $\hat{\beta} \cup C_\beta$ (on entend toujours par là que $\hat{\gamma}$ est envoyée sur $\hat{\beta}$ en préservant l'orientation et que C_γ est envoyée sur C_β).

On a alors que $\Theta(s) = t$ et que $\Theta(y_1 y_2 \cdots y_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$ puisque ces deux lacets suivent respectivement le carcan de γ et de β et que l'un est envoyé sur l'autre (en supposant que nous avons numéroté les y_i et les x_i dans cette optique).

y_i est clairement envoyé par Θ sur un lacet quelconque λ qui n'entoure qu'un brin de $\hat{\beta}$. On peut faire glisser λ le long de son brin pour qu'il n'encercle plus le carcan C_β et soit entièrement inclus dans $D \times \{0\}$, ce qui risque simplement de faire que le représentant de λ résultant serpentera de façon plus complexe autour des brins de $\hat{\beta}$, mais cette complexité ne nous préoccupe pas, puisque le seul résultat voulu est que λ est un conjugué dans $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ d'un certain x_j , ce qui sera toujours vrai. La figure 2.15 illustre ce fait. (On y voit une coupe de $\hat{\beta}$ au niveau $D \times \{0\}$.) Il importe aussi que si $\Theta(y_i)$ est un conjugué de x_j et $\Theta(y_k)$ est un conjugué de x_l , alors $i \neq k \Rightarrow j \neq l$, ce qui est évident.

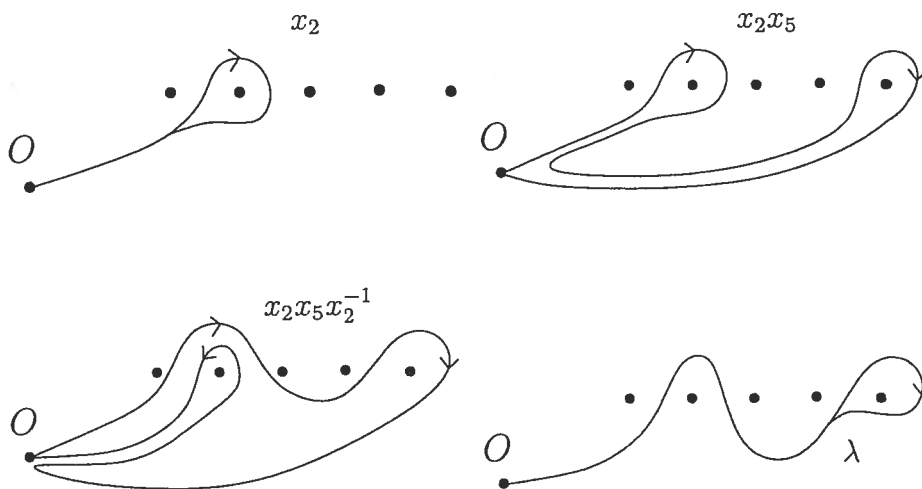


FIG. 2.15. Liens entre les détours pris par un lacet λ dans $D \times \{0\}$ avant de n'entourer que le $k^{\text{ème}}$ brin et une conjugaison de x_k . Dans ce cas-ci, λ est vu comme conjugaison de x_5 .

On définit ensuite un automorphisme a de G_n par $a(x_i) = \Theta(y_i)$.

$$\begin{aligned} a(\rho(\gamma)(x_i)) &= \Theta(\rho(\gamma)(y_i)) = \Theta(s^{-1}y_i s) = t^{-1}\Theta(y_i)t = t^{-1}a(x_i)t \\ &= \rho(\beta)(a(x_i)) \quad \forall i. \end{aligned}$$

Un théorème originalement dû à Artin (voir [Bir75], pages 30 à 32) nous donne que comme a est un endomorphisme de G_n qui respecte les deux conditions suivantes :

- $a(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$,
- $a(x_i) = c_i x_{\mu_i} c_i^{-1}$ avec $c_i \in G_n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in S_n$ une permutation des indices 1 à n ,

on a alors qu'il existe une tresse $\alpha \in B_n$ telle que $a = \rho(\alpha)$.

Mais alors, comme $a = \rho(\alpha)$, ce résultat s'écrit $\rho(\alpha)(\rho(\gamma)(x_i)) = \rho(\beta)(\rho(\alpha)(x_i)) \forall i$, et donc $\rho(\gamma) = \rho(\alpha)^{-1} \rho(\beta) \rho(\alpha)$, ce qui donne, sachant que ρ est une représentation fidèle, que $\gamma = \alpha^{-1} \beta \alpha$.

Pour voir que ρ est fidèle, il suffit de remarquer que $\rho(b_i)$ est l'automorphisme de G_n qui envoie x_{i+1} sur x_i et x_i sur $x_i x_{i+1} x_i^{-1}$ en fixant le reste de G_n et que ces automorphismes sont tous indépendants.

□

On retient donc que l'ouverture d'un entrelacs tissé est définie à conjugaison près. Cette première partie de la démarche établissait le lien entre les mouvements de Markov de premier type et les isotopies de fermetures rigides de tresses. La suivante traitera des mouvements de second type, dont la contrepartie pour les fermetures rigides sera appelée équivalence simple.

Définition 2.3.10. *Deux entrelacs $E \cup C_E$ et $E' \cup C_{E'}$ sont simplement équivalents si $C_E = C_{E'} = C$ et si E et E' sont identiques sauf entre deux points a_1 et a_2 appartenant à la fois à E et E' où E se poursuit le long d'un arc α reliant les deux points et entièrement inclus dans un plan contenant C (si C est l'ordonnée des coordonnées polaires de \mathbb{R}^3 , alors l'angle est constant le long de α) et E' se poursuit le long d'un arc α' dont la coordonnée angle est strictement monotone croissante et fait exactement une fois le tour de C . α et α' délimitent alors un disque A , dont l'intérieur intersecte C de façon transverse en un unique point. (Voir les figures 2.16 et 2.17.)*

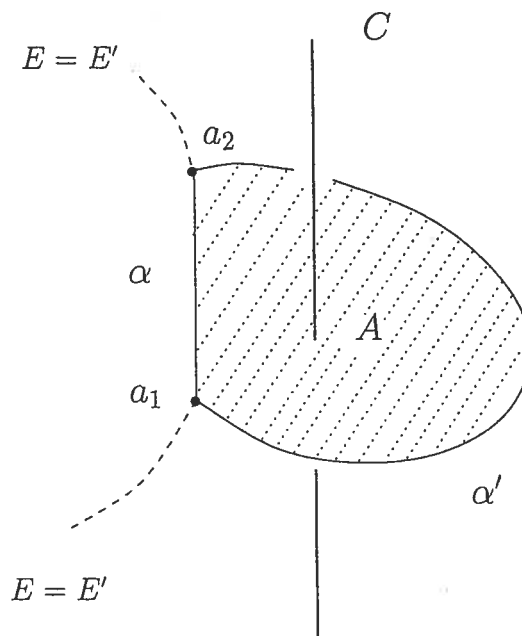


FIG. 2.16. Détail de la différence entre deux entrelacs égaux l'un à l'autre à une équivalence simple près.

Lemme 2.3.11. *Deux entrelacs tissés sont simplement équivalents si et seulement si les tresses auxquelles ils correspondent sont liées par un mouvement de Markov de type 2.*

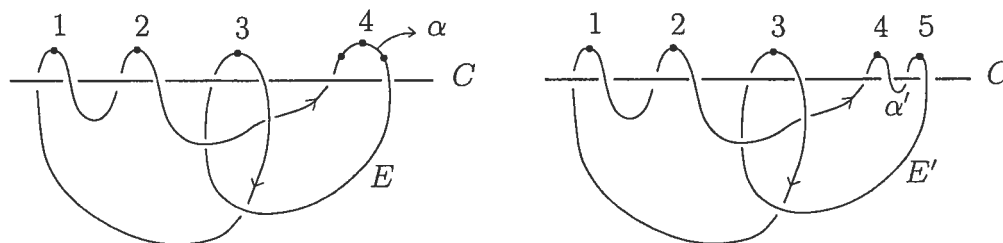


FIG. 2.17. Deux entrelacs tissés E et E' liés par une équivalence simple de Markov

DÉMONSTRATION. On peut supposer que, dans les deux cas, l'entrelacs est sous la forme «prêt à être ouvert» avec C qui est localement rectiligne et l'entrelacs qui tourne autour. Toute paire d'entrelacs E et E' liés par une équivalence simple sera représentable comme celle de la figure 2.17. Les deux arcs α et α' ne seront pas à la droite en général, mais une simple isotopie suffit à les faire glisser à travers les autres boucles en respectant que l'entrelacs doit tourner de façon strictement monotone autour de C , ce qui sera toujours possible.

Il s'agit ensuite tout simplement de dérouler le cylindre autour de C pour ouvrir les deux entrelacs. Les endroits des coupures ont été numérotés sur le graphique 2.17. On constate que, en déroulant dans le bon des deux sens, on obtiendra toujours exactement un croisement de plus à la fin, causé par le petit segment qui se rend directement de l'avant-dernier au dernier point, celui qui part du dernier point allant nécessairement vers la gauche. Il n'y a qu'à le faire partir immédiatement vers la gauche à partir du bas pour réaliser la nouvelle tresse qui est exactement l'ancienne composée avec b_n ou b_n^{-1} , en supposant que l'ancienne tresse appartenait à B_n .

Les tresses de la figure 2.18 sont telles que l'on obtient les deux entrelacs E et E' en ramenant les extrémités du bas des tresses « vers soi et vers le haut » pour les coller aux extrémités du haut, en supposant qu'on a au préalable posé la droite C horizontalement sur la tresse.

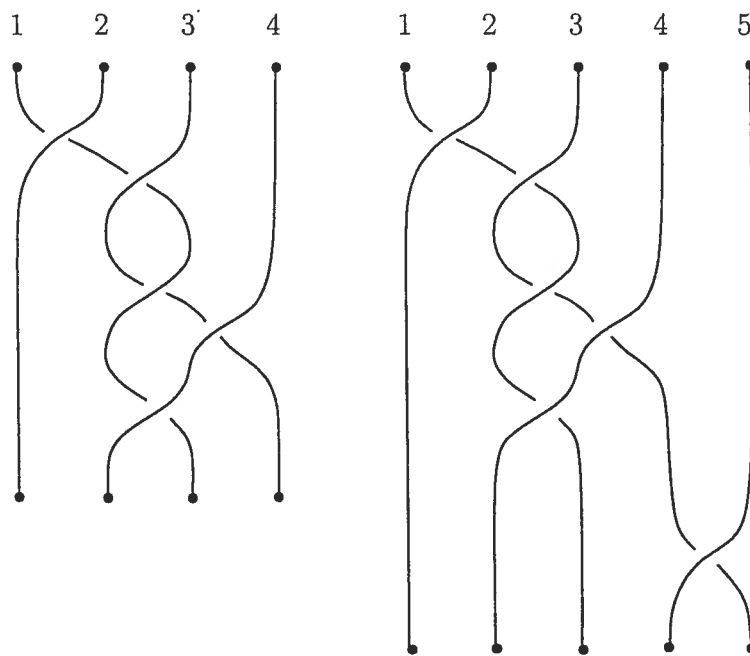


FIG. 2.18. Ouvertures respectives des deux entrelacs tissés E et E' liés par une équivalence simple de Markov

□

Définition 2.3.12. Nous appellerons Équivalence de Markov une suite finie de mouvements de d'équivalences simples et d'isotopies reliant deux entrelacs tissés $K_1 \cup C_1$ et $K_2 \cup C_2$. Nous écrirons alors $K_1 \cup C_1 \sim_m K_2 \cup C_2$ comme pour les

tresses équivalentes au sens de Markov, notation qui se justifie par les résultats que nous venons d'établir.

2.3.4. Preuve de la partie nécessaire du théorème de Markov

Voici donc les grandes lignes de la preuve de la partie nécessaire du théorème de Markov, utilisant la fermeture rigide d'une tresse β comme principal représentant d'un tissage de $\hat{\beta}$, grâce aux lemmes que nous allons prouver immédiatement après :

Soient $\beta \in B_n$ et $\gamma \in B_m$ dont les fermetures sont isotopes. Prenons les fermetures rigides $\hat{\beta} \cup C_\beta$ et $\hat{\gamma} \cup C_\gamma$.

$\hat{\beta} \cup C_\beta$ [resp. $\hat{\gamma} \cup C_\gamma$] est un tissage admissible de $\hat{\beta}$ [resp. de $\hat{\gamma}$] (lemme 2.3.13).

$\hat{\beta} \cup C_\beta \sim_m \hat{\beta} \cup T$ pour tout tissage admissible T d'un représentant fixé de $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma} \cup C_\gamma \sim_m \hat{\gamma} \cup T'$ pour tout tissage admissible T' d'un représentant fixé de $\hat{\gamma}$ (lemme 2.3.14).

Sachant que $\hat{\beta} \sim \hat{\gamma}$, il existe des tissages admissibles T_β de $\hat{\beta}$ et T'_γ de $\hat{\gamma}$ tels que $\hat{\beta} \cup T_\beta \sim_m \hat{\gamma} \cup T'_\gamma$ (lemme 2.3.15).

Par transitivité de \sim_m , ces deux derniers lemmes nous donnent que $\hat{\beta} \cup C_\beta \sim_m \hat{\gamma} \cup C_\gamma$.

Les lemmes 2.3.9 et 2.3.11 nous permettent de conclure qu'alors $\beta \sim_m \gamma$, CQFD.

Lemme 2.3.13. *La fermeture rigide de β est un tissage admissible de $\hat{\beta}$.*

DÉMONSTRATION. β induit un homéomorphisme $h_\beta : D \rightarrow D$ fixant ∂D et envoyant un ensemble de n points $\{p_1, \dots, p_n\}$ sur lui-même (les points de départ des n brins de la tresse). (Cet homéomorphisme est facilement construit en entourant chaque brin d'un petit voisinage tubulaire de façon à ce que le passage du début à la fin de la tresse dans sa représentation graphique soit continu et différentiable. h_β est la résultante qui envoie le disque au niveau du début de β sur celui au niveau de sa fin.)

On peut homotoper h_β à l'identité relativement à ∂D dans $D \times I$ (en voyant une représentation graphique de β comme l'image de l'homotopie, qui, au temps t , sera la fonction qui envoie D sur la tranche $D \times \{-t\}$ de la représentation graphique (en gardant l'information sur l'image de chaque point, et non juste sur

les n brins de la tresse), ce qui induit l'homéomorphisme $H : D \times I \rightarrow D \times I$, préservant chaque niveau avec $H|_{D \times \{0\}} = I$ et $H|_{D \times \{1\}} = h_\beta$. Posons n points $\{r_1, \dots, r_n\}$ sur ∂D en face de p_1, \dots, p_n respectivement. H laissera invariant les segments $\{r_i\} \times I$, le disque $D \times \{0\}$ (et donc les segments reliant chaque p_i à r_i dans ce disque). L'image par H de l'ensemble des segments $\{p_i\} \times I$ sera une représentation graphique de la tresse β (voir figure 2.19).

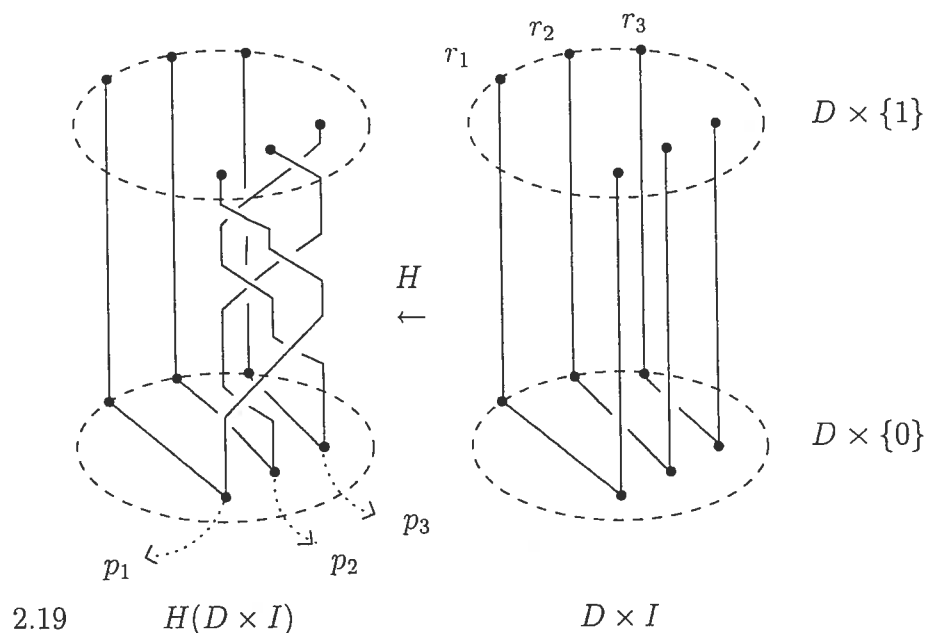


FIG. 2.19. L'homéomorphisme H .

Si on applique maintenant H^{-1} au cylindre $D \times I$ dans lequel on trouve la tresse β reliant les points p_i du niveau $D \times \{0\}$ à ceux du niveau $D \times \{1\}$, les segments $r_i \times I$ et les segments $[p_i \times \{1\}, r_i \times \{1\}]$ (que nous appellerons s_i) et $[p_i \times \{0\}, r_i \times \{0\}]$ (que nous appellerons t_i) et un cercle tout juste à l'intérieur de $D \times \{\frac{1}{2}\}$ (c'est à dire à une représentation graphique de $\hat{\beta} \cup C_\beta$ dans $D \times I$), on obtient alors une représentation graphique du même entrelacs avec des segments droits sans croisements comme à la figure 2.20.

Le cercle tout juste à l'intérieur de $D \times \{\frac{1}{2}\}$ (l'image du carcan de β) servira de corde pour tisser l'entrelacs, en plaçant les points a_i aux points p_i et les points z_i aux points r_i , faisant des segments s_i les ponts et des segments t_i , les tunnels. (Voir la figure 2.21.) Nous avons alors obtenu le tissage cherché.

□

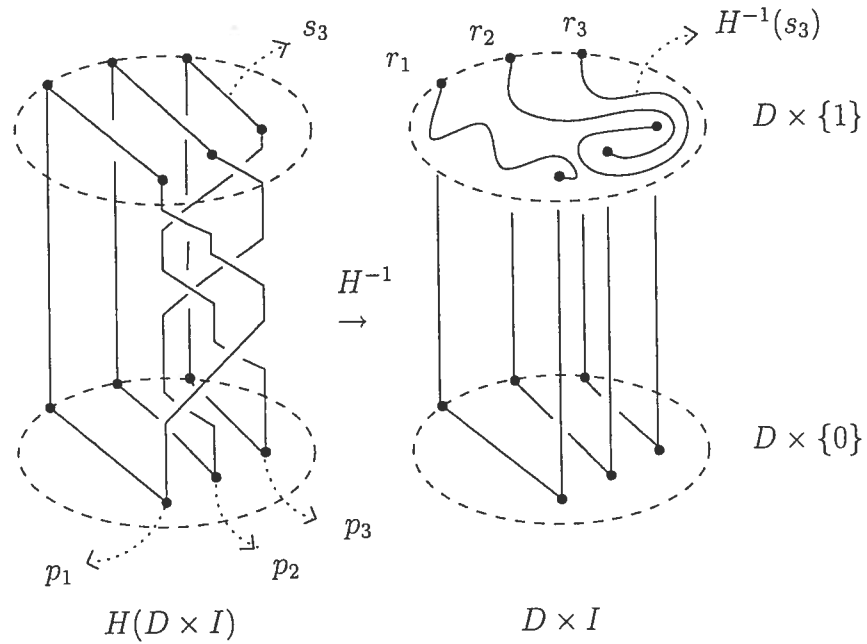


FIG. 2.20. L'homéomorphisme H^{-1} .

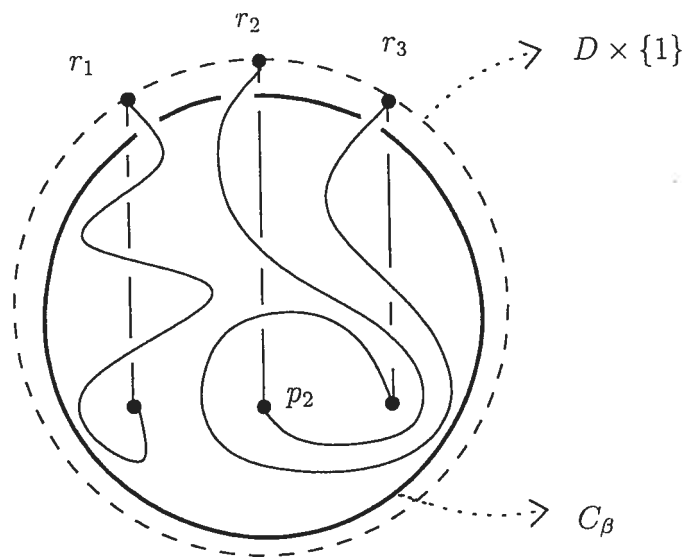


FIG. 2.21. Tissage d'un représentant de $\hat{\beta}$.

Lemme 2.3.14. $\hat{\beta} \cup T \sim_m \hat{\beta} \cup T'$ peu importe les tissages admissibles T, T' d'une représentation fixée de $\hat{\beta}$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que nous avons fait le même choix $\{A, Z\}$ de ponts et de tunnels pour tisser T et T' à travers les deux représentants identiques de $\hat{\beta}$. Si T est isotope à T' dans $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup Z)$, alors $\hat{\beta} \cup T \sim \hat{\beta} \cup T'$. La figure 2.22 a) est impossible sans la présence d'un point de A ou de Z sur l'entrelacs, puisque T (ou T') passera toujours complètement sous un pont ou par-dessus un tunnel, et la figure 2.22 b) est le seul passage à travers un croisement de l'entrelacs qui puisse être nécessaire, le pont et le tunnel étant imposés par la situation.

Si T et T' ne sont pas isotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup Z)$, alors deux situations peuvent survenir. Ou bien A est entièrement à l'intérieur de T (spdg) et à l'extérieur de T' , ou bien les mouvements nécessaires à ce que T et T' deviennent isotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup Z)$ sont illustrés dans la figure 2.23. Dans les deux cas, une suite d'isotopies et de mouvements d'équivalence simple de markov (permettant de faire passer l'entrelacs à travers T ou T') donne que les deux entrelacs tissés ne sont pas nécessairement isotopes, mais qu'il sont markov-équivalents, ce qu'il fallait démontrer. Et si T entourait A alors que T' entourait Z , il suffit de transformer le diagramme avec T comme si l'on voulait ouvrir l'entrelacs et, dès que se présente une situation analogue à celle de la figure 2.10, on fait subir une rotation de 180 degrés suivant O au rectangle formé par la composante triviale et on revient à la représentation originale de l'entrelacs en retracant les déformations à l'envers, ce qui nous donne que T entoure maintenant Z , tout comme T' .

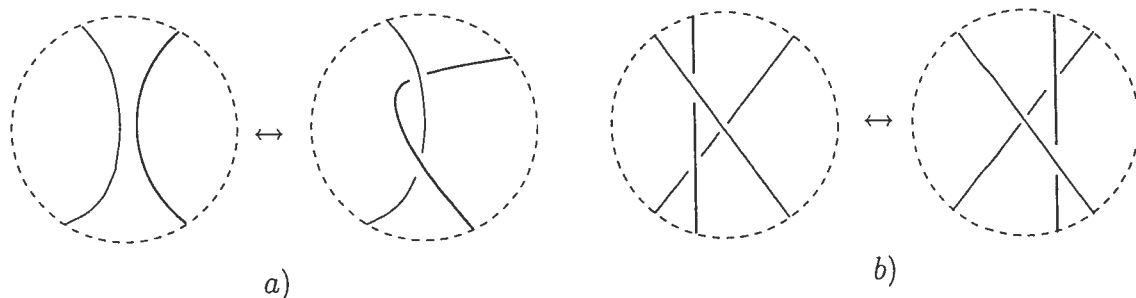
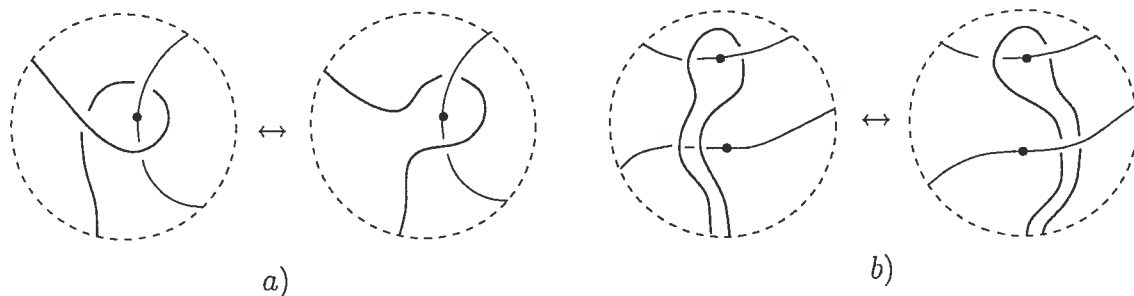


FIG. 2.22. Mouvements de T vers T' .

Si les deux tissages provenaient de choix différents de ponts et de tunnels, disons que le premier venait du choix $\{A_1, Z_1\}$ et le second, du choix $\{A_2, Z_2\}$, alors il existe un choix $\{A, Z\}$ tel que $A_1, A_2 \subset A$ et $Z_1, Z_2 \subset Z$ (il suffit de prendre $A_3 = A_1 \cup A_2, Z_3 = Z_1 \cup Z_2$ et d'ajouter des points à l'ensemble A_3 pour séparer deux points consécutifs de Z_3 , (au besoin), formant ainsi l'ensemble

FIG. 2.23. Mouvements spéciaux de T .

A , puis d'ajouter des points à Z_3 pour séparer d'éventuels points consécutifs de A , formant ainsi l'ensemble Z . Cette technique fonctionne dès que $A_1 \cap Z_2 = A_2 \cap Z_1 = \emptyset$, mais si tel n'est pas le cas, un infime dérangement de ces ensembles fera que la condition sera respectée tout en gardant que les tissages associés à chaque choix de ponts et tunnels soient admissibles pour leur choix respectif.

Dans ce dernier cas, supposons que nous avons les tissages T_1 et T_2 pour les deux choix $\{A_1, Z_1\}$ et $\{A_2, Z_2\}$ respectivement, on utilise le raisonnement précédent pour voir que tout tissage T suivant $\{A, Z\}$ est markov-équivalent à T_1 puisque c'est un tissage admissible pour $\{A_1, Z_1\}$ et de même pour T_2 et donc, par transitivité, l'entrelacs tissé par T_1 est markov-équivalent à celui tissé par T_2 .

□

Lemme 2.3.15. *Sachant que $\hat{\beta} \sim \hat{\gamma}$, il existe des tissages admissibles T_β de $\hat{\beta}$ et T'_γ de $\hat{\gamma}$ tels que $\hat{\beta} \cup T_\beta \sim_m \hat{\gamma} \cup T'_\gamma$.*

DÉMONSTRATION. Les deux entrelacs $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont reliés par une suite de mouvements de Reidemeister. Choisissons un tissage $\hat{\beta} \cup T$ pour $\hat{\beta}$ et montrons que tout entrelacs E qui ne diffère de ce dernier que par un mouvement de Reidemeister possède un tissage markov-équivalent au tissage choisi pour $\hat{\beta}$. Par le lemme 2.3.14 précédent, tous les tissages de E sont markov-équivalents à $\hat{\beta} \cup T$. En répétant l'argument, la preuve que $\hat{\gamma}$ possède un tissage markov-équivalent à $\hat{\beta}$ sera terminée.

Sur la figure 2.24, on voit les trois mouvements de Reidemeister. Pour les deux mouvements de gauche, on peut choisir des ensembles A et Z et un tissage tels que la composante triviale du tissage ne soit pas dans la région de la déformation, ce qui nous donne immédiatement un tissage admissible pour le nouvel entrelacs.

Pour le troisième mouvement, la corde tissée T (non illustrée dans le dessin) passera toujours entre les deux cordes formant un X sur le dessin et entre les deux points (un de A et un de Z , lequel est lequel dépendant de l'orientation) pour séparer les deux ensembles. Que le segment horizontal passe par-dessus les deux autres, au milieu ou en-dessous, il aura alors traversé T à droite et à gauche du croisement, mais s'il est par-dessus, alors c'est un pont et le croisement additionnel se fait aussi par-dessus : on garde donc un tissage admissible. De même s'il passe sous tout le reste. Passer entre les deux segments qui se croisent équivaut à faire passer un de ces deux segments par-dessus le croisement des deux autres.

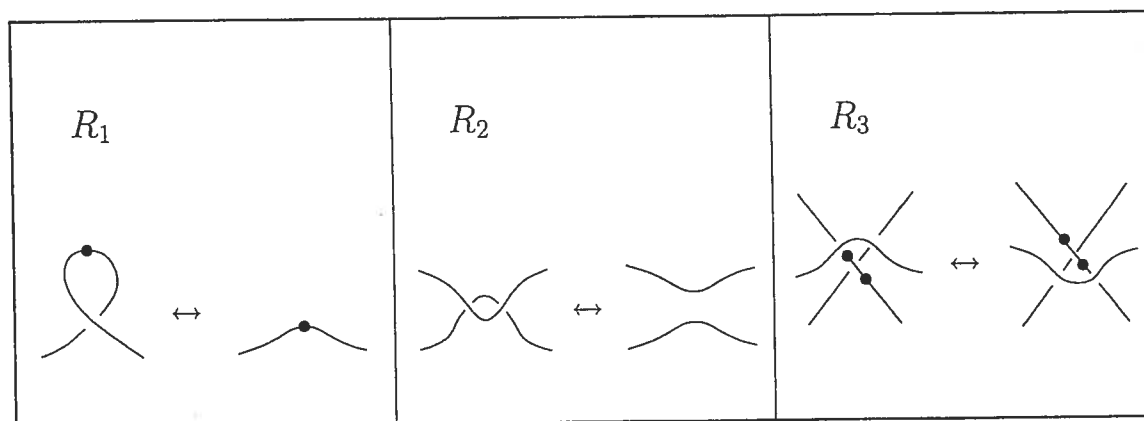


FIG. 2.24. Les mouvements de Reidemeister sur un entrelacs tissé.

□

Fin de la preuve du théorème de Markov.

On a donc une correspondance bijective

$$\{\text{Noeuds}\} \longleftrightarrow \{\text{Tresses}\} / \{\text{Mouvements de Markov}\}$$

Transformer l'étude de représentants de noeuds modulo les mouvements de Reidemeister en celle des tresses modulo les transformations de Markov semble à priori nous faire tourner en rond, mais le groupe de tresses est déjà beaucoup mieux connu que les dessins de noeuds.

Un aspect important de B_n est l'existence d'une représentation du groupe dans H_n , l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} , déjà bien connue pour son intervention

dans plusieurs domaines mathématiques et dont l'étude nous fournira un nouvel invariant polynômial pour les entrelacs.

Chapitre 3

L'ALGÈBRE DE HECKE

3.1. DÉFINITION DE L'ALGÈBRE DE HECKE H_n .

Nous avons vu aux sections 2.1 et 2.2 la définition du groupe de tresses B_n et son lien avec les entrelacs. Nous définissons maintenant une algèbre dont la présentation ressemble de près à celle de B_n et qui sera utilisée comme représentation de ce dernier.

Définition 3.1.1. *L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ de type A_{n-1} est la $\mathbb{Q}[t]$ -algèbre engendrée par $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ satisfaisant les relations*

- $g_i g_j = g_j g_i$ si $|i - j| \geq 2$ (commutativité éloignée),
- $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ (relation de tresse),
- $g_i^2 = (t - 1)g_i + t$,

où t est un paramètre indéterminé.

Notons que les g_i sont inversibles dans $H_n \otimes \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$, avec $g_i^{-1} = t^{-1}g_i + t^{-1} - 1$.

Il est possible de spécifier t à un nombre complexe z quelconque, et on remarque que dans le cas $z = 1$, l'algèbre $H_n(1)$ n'est autre chose que $\mathbb{Q}S_n$, l'algèbre du groupe symétrique S_n des permutations de n éléments. On conviendra de voir S_n comme engendrée par ses transpositions $s_i = (i, i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$ admettant précisément les mêmes relations que les générateurs de H_n quand $t = 1$. L'homomorphisme $[1] : H_n \rightarrow \mathbb{Q}S_n$, qui envoie un élément x sur sa spécification en $t = 1$, puis chaque g_i sur la transposition $s_i = (i, i + 1)$ sera notée $x \mapsto x[1]$.

Nous nous permettrons d'abréger $H_n(t)$ à H_n , puisqu'il n'y aura pas de confusion possible.

On définit maintenant un type spécifique d'éléments de H_n qui nous servira à lier H_n à S_n en trouvant une base appropriée de H_n .

Définition 3.1.2. On définit d'abord dans H_n :

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < i \\ g_{n-i}g_{n-i-1}\dots g_{n-j} & \text{si } i \leq j < n \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Un mot standard de H_n est le produit d'un mot standard de H_{n-1} (vu comme inclus dans H_n) avec (à droite) un élément $g_{1,j}$ de H_n pour $j \geq 0$, ayant défini 1 comme unique mot standard de H_1 .

Les mots standards de H_2 sont donc 1 et g_1 , ceux de H_3 : 1, g_1 , g_2g_1 , $g_1g_2g_1$, g_2 et g_1g_2 , ceux de H_4 : 1, g_1 , g_2g_1 , $g_1g_2g_1$, g_2 , g_1g_2 , $g_3g_2g_1$, $g_1g_3g_2g_1$, $g_2g_1g_3g_2g_1$, $g_1g_2g_1g_3g_2g_1$, $g_2g_3g_2g_1$, $g_1g_2g_3g_2g_1$, g_3g_2 , $g_1g_3g_2$, $g_2g_1g_3g_2$, $g_1g_2g_1g_3g_2$, $g_2g_3g_2$, $g_1g_2g_3g_2$, g_3 , g_1g_3 , $g_2g_1g_3$, $g_1g_2g_1g_3$, g_2g_3 et $g_1g_2g_3$, etc.

Il y a toujours n fois plus de mots standard dans H_n que dans H_{n-1} , soient les éléments de cette dernière, multipliés à droite par 1, $g_{1,n-1} = g_{n-1}g_{n-2}\dots g_1$, $g_{1,n-2}$, \dots , $g_{1,1} = g_{n-1}$, il y a donc $n!$ mots standard dans H_n .

Théorème 3.1.3. Les mots standard de H_n en forment une base en tant que module sur $\mathbb{Q}[t]$ et $\forall \sigma \in S_n, \exists!$ w_σ tel que w_σ est un mot standard et $w_\sigma[1] = \sigma$.

DÉMONSTRATION. H_2 admet clairement comme base de module l'ensemble 1, g_1 de ses mots standard. Nous allons obtenir par récurrence le résultat pour H_n en le supposant vrai pour $H_{n-1} \subseteq H_n$.

D'abord, les mots standards de H_n l'engendrent. Montrons que tout mot de forme $g_{n-1}wg_{n-1}$ avec $w \in H_{n-1}$ peut s'écrire comme $\mathbb{Q}[t]$ -combinaison de mots de forme $w_1g_{n-1}w_2$, et donc que tout élément de H_n s'écrit comme telle combinaison, en répétant le processus. Le résultat est vrai pour H_2 et si on le présume vrai pour H_{n-1} alors :

- si $w \in H_{n-2}$, alors $g_{n-1}wg_{n-1} = wg_{n-1}^2$ (par commutativité éloignée) = $(t-1)wg_{n-1} + tw$.
- sinon, w s'écrit comme somme de $w_1g_{n-2}w_2$ avec $w_1, w_2 \in H_{n-2}$ (hypothèse de récurrence) et $g_{n-1}wg_{n-1} = g_{n-1}w_1g_{n-2}w_2g_{n-1} = w_1g_{n-1}g_{n-2}g_{n-1}w_2 = w_1g_{n-2}g_{n-1}g_{n-2}w_2$.

Donc tout mot de H_n s'écrit comme somme de $w_1g_{n-1}w_2$ avec $w_1, w_2 \in H_{n-1}$ et si le théorème est vrai pour H_{n-1} , alors w_2 est une combinaison de mots standards

de H_{n-1} , qui sont tous de forme $w_3 g_{2,j}$ ($g_{2,j} \in H_n, w_3 \in H_{n-2}$) et comme g_{n-1} commute avec w_3 et $g_{n-1} g_{2,j} = g_{1,j}$ on obtient que H_n est engendrée par ses mots standards.

Ensuite, $\forall w \in H_n$ tel que w n'est qu'un mot formé de lettres $g_i, w[1] \in S_n$ et comme les mots standards engendrent H_n , leurs images engendrent $\mathbb{Q}S_n$ et $S_n = \{w[1] | w \text{ est un mot standard de } H_n\}$. Mais comme il n'y a que $n!$ tels mots standards, et que $|S_n| = n!$, on obtient que pour tout $\sigma \in S_n$ il existe un unique w_σ standard tel que $w_\sigma[1] = \sigma$.

Finalement, les mots standards de H_n sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}[t]$. En effet s'il existait une combinaison linéaire $\sum_\sigma p_\sigma(t) w_\sigma = 0$ avec $\text{pgcd}(p_\sigma) = 1$, alors en spécifiant t à 0, on obtiendrait une combinaison linéaire sur \mathbb{Q} des w_σ qui est nulle, dont l'image dans $\mathbb{Q}S_n$ serait aussi nulle, ce qui force tous les coefficients à être nuls, et donc implique que tous les p_σ sont divisibles par t , ce qui contredit l'hypothèse.

□

3.2. LA TRACE D'OCNEANU

Nous allons maintenant obtenir l'invariant polynômial central de ce texte (le homfly) suivant la vision qu'Ocneanu avait de celui-ci, c'est à dire en utilisant une fonction trace sur l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} .

Théorème 3.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction $\mathbb{Q}[t]$ -linéaire $\tau_n : H_n(t) \rightarrow \mathbb{Q}[s, t]$ satisfaisant :*

- $\tau_1(1) = 1$
- $\tau_n(xy) = \tau_n(yx)$
- $\tau_n(x) = \tau_{n-1}(x)$ si $x \in H_{n-1} \subset H_n$ (On peut donc écrire simplement $\tau(x)$, impliquant « $\tau_n(x)$ pour n assez grand ».)
- $\tau_n(xg_{n-1}) = s\tau_{n-1}(x) \forall x \in H_{n-1}$ (ce qui est équivalent, vue la deuxième propriété, à la forme apparemment plus générale : $\tau_n(xg_{n-1}y) = s\tau_{n-1}(xy)$).

DÉMONSTRATION. Nous allons définir cette trace par induction sur n pour qu'elle respecte les conditions données. Nous aurons besoin pour ce faire d'une certaine identification de H_{n+1} avec une structure relative à H_n donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *La fonction $C : H_n \oplus (H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) \rightarrow H_{n+1}$ qui, à $x \oplus y_1 \otimes y_2$, associe $x + y_1 g_n y_2$ est un isomorphisme de $(H_n - H_n)$ -bimodules.*

DÉMONSTRATION. On démontre d'abord que C est une bijection de $\mathbb{Q}[t]$ -modules, puis que c'est bien un homomorphisme de $(H_n - H_n)$ -bimodules. On utilise la base B donnée ci-haut pour exprimer tout élément h de H_{n+1} comme somme d'éléments de forme $a_i b_i$ avec $a_i \in \mathbb{Q}[t]$ et $b_i \in B$. Chaque b_i est un mot standard de H_n suivi d'un $g_{1,k}$, ce qui fait qu'on y retrouve au plus une copie de g_n et $b_i = \beta_i + \gamma_i g_n \delta_i$ où $\beta_i, \gamma_i, \delta_i \in H_n$. On a donc que $h = \sum a_i (\beta_i + \gamma_i g_n \delta_i)$ Alors $h = C(\sum (a_i \beta_i \oplus (a_i \gamma_i \otimes \delta_i)))$ et la fonction est surjective. Pour l'injectivité, on sait que H_{n+1} a dimension $(n+1)!$ en tant que $\mathbb{Q}[t]$ -module et le domaine a dimension $\dim(H_n) + (\dim(H_{n-1}) \times (\dim_{H_{n-1}} H_n)^2) = n! + (n-1)!n^2 = (n+1)!$. (Car la dimension d'une somme directe est la somme des dimensions et la dimension d'un produit tensoriel sur une structure A est le produit des dimensions sur A , puisque prendre le produit tensoriel sur A veut dire qu'en ce qui concerne le produit, les éléments de A sont comme des scalaires.) La fonction est donc forcément injective dès que c'est un homomorphisme de $(H_n - H_n)$ -bimodules, puisque c'est une surjection entre deux ensembles de même dimension.

Notons que le fait que le produit tensoriel des deux copies de H_n dans le domaine de C soit pris sur H_{n-1} est ce qui fait que la fonction est bien définie, puisque pour tout $h \in H_{n-1}$, $x \oplus y_1 h \otimes y_2 = x \oplus y_1 \otimes h y_2$, mais $x + y_1 h g_n y_2$ est justement égal à $x + y_1 g_n h y_2$ car g_n commute avec tout élément de H_{n-1} .

Ajoutons enfin pour voir que la fonction C est bien un homomorphisme que $\forall g \in H_n$, $C(g(x \oplus y_1 \otimes y_2)) = C(gx \oplus g y_1 \otimes y_2) = gx + g y_1 g_n y_2 = g(x + y_1 g_n y_2) = gC(x \oplus y_1 \otimes y_2)$ et $C((x \oplus y_1 \otimes y_2)g) = C(xg \oplus y_1 \otimes y_2 g) = xg + y_1 g_n y_2 g = (x + y_1 g_n y_2)g = C(x \oplus y_1 \otimes y_2)g$. On étend la définition de la fonction de façon linéaire sur le produit tensoriel (nous n'avons défini que l'image d'un tenseur pur) : on définit $C(x \oplus (y_1 \otimes y_2 + y_3 \otimes y_4)) = x + y_1 g_n y_2 + y_3 g_n y_4$. Reste à dire que $C(x \oplus y_1 \otimes y_2 + x' \oplus y_3 \otimes y_4) = C(x + x' \oplus (y_1 \otimes y_2 + y_3 \otimes y_4)) = x + x' + y_1 g_n y_2 + y_3 g_n y_4 = C(x \oplus y_1 \otimes y_2) + C(x' \oplus y_3 \otimes y_4)$.

□

On peut donc définir la trace τ_1 sur $H_1 = \mathbb{Q}[t]$ par $\tau_1(1) = 1$ et donc $\tau_2(g_1) = s\tau_1(1) = s$ et par induction en général $\tau_{n+1}(x g_n y) = s\tau_n(xy)$ pour $x, y \in H_n$.

On doit alors montrer que $\forall n \tau_n(xy) = \tau_n(yx)$. Supposons que tel est le cas pour τ_n . $\{H_n\} \cup \{g_n\}$ génère H_{n+1} en tant qu'algèbre, et donc la propriété sera vraie si $\tau_{n+1}(hs) = \tau_{n+1}(sh) \forall h \in H_{n+1}, s \in \{H_n\} \cup \{g_n\}$. Tout élément de H_{n+1} s'écrivant $h = x + y_1g_ny_2$ avec $x, y_1, y_2 \in H_n$, le seul cas non trivial à considérer est $h = y_1g_ny_2$ et $s = g_n$, il faut donc montrer que $\tau_{n+1}(g_nxg_ny) = \tau_{n+1}(xg_nyg_n) \forall x, y \in H_n$. On divise en quatre cas.

- (1) $x, y \in H_{n-1}$;
- (2) $x = ag_{n-1}b$ ($a, b \in H_{n-1}$), $y \in H_{n-1}$;
- (3) Même chose avec x et y inversés;
- (4) $x = ag_{n-1}b, y = cg_{n-1}d, a, b, c, d \in H_{n-1}$.

Démonstration de l'égalité pour chaque cas :

(1) Trivial, puisque g_n commute alors avec x et y .

$$(2) \tau_{n+1}(g_nxg_ny) = \tau_{n+1}(g_nag_{n-1}bg_ny) = \tau_{n+1}(ag_ng_{n-1}g_nb) = s\tau_n(ag_{n-1}by) \\ = (t-1)s\tau_n(ag_{n-1}by) + ts\tau_{n-1}(aby),$$

alors que $\tau_{n+1}(xg_nyg_n) = \tau_{n+1}(ag_{n-1}bg_nyg_n) = os\tau_{n+1}(ag_{n-1}bg_n^2y) = (t-1)\tau_{n+1}(ag_{n-1}bg_ny) + q\tau_{n+1}(ag_{n-1}by) = (t-1)s\tau_n(ag_{n-1}by) + ts\tau_{n-1}(aby)$

(3) Même démarche que pour le cas précédent.

$$(4) \tau_{n+1}(g_nxg_ny) = \tau_{n+1}(g_nag_{n-1}bg_ncg_{n-1}d) = s\tau_n(ag_{n-1}bcg_{n-1}d) = s(t-1)\tau_n(ag_{n-1}bcg_{n-1}d) + s^2t\tau_{n-1}(abcd).$$

$$\text{Et d'autre part, } \tau_{n+1}(xg_nyg_n) = \tau_{n+1}(ag_{n-1}bg_ncg_{n-1}dg_n) = s\tau_n(ag_{n-1}bcg_{n-1}^2d) \\ = s(t-1)\tau_n(ag_{n-1}bcg_{n-1}d) + s^2t\tau_{n-1}(abcd).$$

□

Notons que l'image de tout mot $g_{i_1}g_{i_2} \cdots g_{i_n}$ (que les g_{i_k} soient différents ou non) est toujours incluse dans $\mathbb{Z}[s, t]$.

Nous trouvons maintenant l'invariant homfly en définissant une normalisation appropriée de τ_n et une fonction $\hat{\tau}_n$ induite sur B_n , grâce à la fonction $\pi_n : b_i \mapsto g_i$.

Supposons qu'il existe un scalaire θ tel que $\tau_n(\theta g_i) = \tau_n(\theta g_i)^{-1} = \tau_n(\theta^{-1} g_i^{-1})$ pour tout générateur g_i de H_n (ce qui nous oblige à étendre τ_n à $H_n \otimes \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ et son codomaine en conséquence). Alors $\theta\tau_n(g_i) = \theta^{-1}\tau_n(g_i^{-1})$ et donc

$$\theta^2 = \frac{\tau_n(g_i^{-1})}{\tau_n(g_i)} = \frac{t^{-1}s + t^{-1} - 1}{s} = \frac{s - t + 1}{st}.$$

Où $\tau_n(g_i^{-1})$ a été calculé sachant que $g_i^{-1} = t^{-1}g_i + t^{-1} - 1$. Ce résultat garantit l'existence d'un tel θ dans une extension quadratique de $\mathbb{Q}[s, t, (st)^{-1}]$ (puisque son carré est dans $\mathbb{Q}[s, t, (st)^{-1}]$). Notons aussi que $\theta^{-1} = \frac{\theta st}{s-t+1}$. Le tout justifie les définitions suivantes :

On définit $\tilde{\tau} : H_n \otimes \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Q}[s, t, \theta, s^{-1}, t^{-1}]$ par : $\tilde{\tau}(g_i) = \theta\tau(g_i) = \theta^{-1}\tau(g_i^{-1}) = \tilde{\tau}(g_i^{-1})$, de sorte que $\tilde{\tau}(\pi_n(b_i)) = \tilde{\tau}(\pi_n(b_i^{-1}))$.

Définition 3.2.3. On définit ensuite $\hat{\tau}_n : B_n \rightarrow \mathbb{Z}[s, t, \theta, \theta^{-1}, s^{-1}, t^{-1}]$, qui sera l'invariant cherché :

$$\hat{\tau}_n(b) = (\theta s)^{-(n-1)} \tilde{\tau}(\pi_n(b))$$

pour $b \in B_n$, une tresse réduite.

Il est important, afin que l'invariant soit bien défini, que la tresse soit réduite. Il faut aussi noter que cette définition ne donne pas lieu à un homomorphisme ; il est faux de dire qu'en général $\hat{\tau}_n(\beta\gamma) = \hat{\tau}_n(\beta)\hat{\tau}_n(\gamma)$.

Comme $\hat{\tau}_n(b_i^{-1}) = \hat{\tau}_n(b_i) = (\theta s)^{-n+2}$ et $\hat{\tau}_n(aba^{-1}) = (\theta s)^{-(n-1)} \tilde{\tau}(\pi_n(a)\pi_n(ba^{-1})) = (\theta s)^{-(n-1)} \tilde{\tau}(\pi_n(ba^{-1})\pi_n(a)) = \hat{\tau}_n(b) \forall a, b \in B_n$ et $\hat{\tau}_{n+1}(bb_n^{\pm 1}) = (\theta s)^{-n} \tilde{\tau}(\pi_{n+1}(b)g_n) = (\theta s)^{-(n-1)} \tilde{\tau}(\pi_n(b)) = \hat{\tau}_n(b)$, nous avons une fonction $\hat{\tau}_n$ sur chaque B_n avec une compatibilité entre les différentes $\hat{\tau}_n$ qui fait que le calcul de cette fonction est invariant sous les mouvements de Markov, et donc, constitue un invariant pour les entrelacs.

Notons que $\hat{\tau}_1(1) = 1 \neq \hat{\tau}_2(1) = (\theta s)^{-1}$ et qu'en général $\hat{\tau}_{n+1}(x) \neq \hat{\tau}_n(x)$ pour x , une tresse fixée, le facteur $(\theta s)^{-1}$ les différenciant tenant compte du fait qu'une tresse $b \in B_n$ se ferme sur \hat{b} , alors que si la même tresse est vue comme élément de B_{n+1} , elle se ferme sur $\hat{b} \cup C_0$ où C_0 est une composante triviale non entrelacée avec \hat{b} , ce qui correspond à un entrelacs différent. On pouvait donc parler de τ et de $\tilde{\tau}$ sans ajouter l'indice, mais ce dernier est nécessaire lorsqu'on regarde $\hat{\tau}_n$.

3.3. CALCUL DU HOMFLY

Il y a deux façons principales de calculer le homfly directement. Dans les deux cas, on part d'un entrelacs, on en fait une tresse, on trouve une expression réduite pour cette tresse, puis on regarde son représentant dans H_n .

Premièrement, on peut tout simplement calculer directement la valeur de l'invariant en utilisant les propriétés de la fonction trace. Prenons par exemple la tresse $b_1 b_2 b_1 \in B_3$. Elle est représentée dans H_3 par $g_1 g_2 g_1$. Le calcul donne :

$$\hat{r}_3(b_1 b_2 b_1) = (\theta s)^{-2} \bar{\tau}(g_1^2 g_2) = (\theta s)^{-2} \theta^3 \tau(g_1^2 g_2) = \theta s^{-1} \tau(g_1^2) = \theta s^{-1} (\tau((t-1)g_1 + t)) = \theta s^{-1} (t-1)s + \theta s^{-1} t = \sqrt{\frac{s-t+1}{st}} \left((t-1) + \frac{t}{s} \right)$$

Deuxièmement, on peut se servir de la décomposition de H_n en blocs simples. Les caractères et les modules simples de cette algèbre sont bien connus (et très proches de ceux de S_n) et une fonction trace sur H_n doit pouvoir se décomposer en une somme de traces sur les algèbres matricielles simples qui la composent et, sur chaque morceau, la fonction doit être un multiple de la trace habituelle pour que leur somme respecte les propriétés que nous lui connaissons.

En plus de détails :

On souhaite calculer une fonction $\tau_n : H_n \rightarrow \mathbb{Q}(s, t)$ qui a la propriété que $\tau(xy) = \tau(yx)$. Comme $H_n \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \mathbb{Q}(s, t)$ est semi-simple (voir théorème 3.3.1), elle se décompose en une somme directe

$$H_n \otimes_{\mathbb{Q}[t]} \mathbb{Q}(s, t) = \bigoplus_{\pi \vdash n} M'_\pi$$

indicée par les partitions de n (théorème 3.3.3) où M'_π représente le produit tensoriel d'un certain nombre de copies d'un même module simple M_π .

La propriété de symétrie $\tau(xy) = \tau(yx)$ garantit (théorème 3.3.4) que, sur un module simple M_π , τ n'est autre qu'un multiple de la trace habituelle (et l'est donc aussi sur M'_π), et cette trace est ce qu'on appelle le caractère ξ_π admis par M_π , donc

$$\tau = \sum_{\pi \vdash n} \alpha_\pi \xi_\pi.$$

Il faut donc pouvoir déterminer α_π et $\xi_\pi(g_i)$ pour les générateurs g_i de H_n .

Les modules simples de $\mathbb{Q}S_n$ sont indicés par les partitions de n , une partition étant un vecteur infini d'entiers placés en ordre décroissant tels que la

somme de toutes les coordonnées est n . Un exemple de partition de 11 est $\pi = (3, 3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. On voit souvent $\pi = 3^2 2 1^3$. Enfin, on indique « π est une partition de n » par $\pi \vdash n$.

Le théorème 3.3.5 donne le calcul de α_π en fonction des $\alpha_{(p)}$, où (p) est la partition de p ne comprenant qu'une composante : $\{p\}$.

$$\alpha_\pi = \det[\alpha_{(\pi_j+i-j)}]_{i,j}$$

où π_j est la $j^{\text{ième}}$ partie de la partition π de n (dans l'exemple ci-dessus, 2 est la troisième partie de la partition donnée de 11).

Le théorème 3.3.7 calcule que

$$\alpha_{(p)} = \frac{1}{p_n(t)} \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + s \frac{1-t^i}{1-t} \right]$$

avec $p_n(t) = \sum_{\sigma \in S_n} t^{l(\sigma)}$, $l(\sigma)$ étant la longueur de σ , définie de manière analogue à la longueur d'un élément de B_n .

Théorème 3.3.1. \forall corps $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{Q}[t]$, $H_n \oplus_{\mathbb{Q}[t]} \mathbb{K}$ est semi-simple.

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser la caractérisation suivante des algèbres semi-simples : Une algèbre est décomposable en somme directe d'idéaux minimaux à gauche (modules simples) si et seulement si son radical (somme de tous les idéaux à gauche nilpotents, qui est un idéal bilatère) est nul. (Pour une preuve de ce fait, voir [CurRei], page 163, section 25.) Les auteurs donnent parfois l'une, parfois l'autre des deux équivalences comme définition d'une algèbre semi-simple.

On définit la forme trace sur une algèbre A comme suit : pour $x, y \in A$, $(x, y) = \text{tr}(x_D y_D)$ où, pour $a \in A$, $a_D : A \rightarrow A$ est la fonction qui à $b \in A$ associe sa multiplication à droite par a : $b \mapsto ba$. Ayant choisi une base pour A , la multiplication est représentée par une matrice, et le changement de base n'affectant pas la trace, (x, y) est bien définie.

Ayant choisi une base, on peut représenter la forme elle-même par une matrice M , de sorte que avec x et y des vecteurs colonnes des coordonnées dans la base choisie en colonne, $(x, y) = x^T M y$.

Cette forme sera non dégénérée si et seulement si son radical est trivial (par définition) et si et seulement si le déterminant de M est non nul. Il faut maintenant

montrer que ce radical, soit $\{x \in A \mid \forall y \in A, (x, y) = 0\}$ est le radical de A , et donc qu'il est trivial si et seulement si A est semi-simple.

Soient R_1 , le radical de la forme trace, et R_2 , le radical de A . Soit $x \in R_1$. Alors pour tout $a \in A$, on a que $(xa, y) = (x, ay) = 0$ et $(ax, y) = (y, ax) = (ya, x) = (x, ya) = 0$, et donc R_1 est un idéal bilatère, tel qu'annoncé. Supposons que cet idéal n'est pas inclus dans R_2 . Alors on peut utiliser le résultat classique suivant :

Lemme 3.3.2. *Tout idéal non inclus dans le radical contient un idempotent non nul.*

DÉMONSTRATION. Voir [CurRei], page 160, théorème 24.2. □

Soit donc e , un élément idempotent de R_1 . Alors $\text{tr}(e_R^2) = 0$, ce qui implique que $\text{tr}(e_R) = 0$, mais comme e_R est un idempotent, il est une matrice diagonale avec des 1 et des 0 sur la diagonale, mais si la trace est nulle et que nous travaillons sur un corps de caractéristique nulle, alors $e = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.

Soit maintenant $x \in R_2$. Alors il existe n tel que $x^n = 0$ et donc si on choisit correctement la base dans laquelle on exprime x_D , alors on a que ce dernier est représenté par une matrice triangulaire supérieure avec diagonale nulle (car sinon $x_D^n \neq 0$). Comme R_2 est un idéal, ceci est aussi vrai pour xy , peu importe y , et donc $\text{tr}(x_D y_D) = 0$, ce qui montre que $x \in R_1$.

Il ne reste qu'à remarquer que si on utilise les mots standards w_σ comme base de H_n , et que l'on appelle d le déterminant de la forme trace, alors $d[1]$ est celui de la forme trace de $\mathbb{Q}S_n$, qui est non nul (puisque $\mathbb{Q}S_n$ est semi-simple) et donc $d \neq 0$. Si K est une extension de \mathbb{Q} , alors $\{w_\sigma \otimes 1\}$ est une K -base de $H_n \otimes_{\mathbb{Q}[t]} K$ et cette dernière est semi-simple. □

Théorème 3.3.3. *Les modules simples X_π de S_n sur \mathbb{Q} et M_π de H_n sur $\mathbb{Q}(s, t)$ sont en correspondance biunivoque.*

DÉMONSTRATION. Nommons A l'anneau des séries formelles $\mathbb{Q}[[t - 1]]$ et K son corps de fractions $\mathbb{Q}((t - 1))$. Nous allons trouver un $H_n \otimes A$ -module M_π pour toute partition π de n tel que $M_\pi[1] = X_\pi$, module simple de $\mathbb{Q}S_n$ et montrer que

les modules $M_\pi \otimes K$ sont tous les modules simples de $H_n \otimes K$. Comme H_n est semi-simple pour $K \supseteq \mathbb{Q}[t]$, on aura trouvé essentiellement tous les modules simples sur tout corps contenant $\mathbb{Q}[t]$, incluant celui qui nous intéresse, soit $\mathbb{Q}(s, t)$.

Soit $I_\pi \subseteq \mathbb{Q}S_n$, un idéal à droite minimal (autrement dit, un module simple à droite inclus dans $\mathbb{Q}S_n$) admettant le caractère simple χ_π . Comme $\mathbb{Q}S_n$ est semi-simple, elle se décompose en une somme directe $I_\pi \oplus J_\pi$ d'idéaux à droite. On peut donc écrire d'une unique façon $1 = e + f$ avec $e \in I_\pi$ et $f \in J_\pi$ et $e\mathbb{Q}S_n = I_\pi, f\mathbb{Q}S_n = J_\pi$. $\forall x \in I_\pi, x = 1x = ex + fx \Rightarrow J_\pi \ni fx = x - ex \in I_\pi \Rightarrow x - ex = 0$ car $I_\pi \cap J_\pi = \{0\}$ et en prenant $x = e$, on obtient qu'en particulier e est idempotent. Nous allons maintenant relever cet idempotent à H_n .

Soit $e_1 \in H_n$ tel que $e_1[1] = e$. En général, on n'a pas que e_1 est idempotent, mais $e_1^2 \equiv e_1 \pmod{(t-1)H_n}$. On peut construire une suite de tels éléments e_i respectant

- (1) $e_i^2 \equiv e_i \pmod{(t-1)^i H_n}$, et
- (2) $e_i \equiv e_{i-1} \pmod{(t-1)^{i-1} H_n}$ pour $i \geq 2$.

(Ayant $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, on pose $e_{k+1} = e_k + (1 - 2e_k)(e_k^2 - e_k)$. Cette définition donne immédiatement la condition (2) satisfaite pour e_{k+1} puisque $(e_k^2 - e_k) \in (t-1)^k H_n$. On vérifie que : $e_{k+1}^2 - e_{k+1} = [e_k + (1 - 2e_k)(e_k^2 - e_k)]^2 - e_k - (1 - 2e_k)(e_k^2 - e_k) = e_k^2 - e_k + 2e_k(1 - 2e_k)(e_k^2 - e_k) - (1 - 2e_k)(ek^2 - e_k) + (1 - 2e_k)^2(ek^2 - e_k)^2 \equiv (e_k^2 - e_k) + (2e_k - 1)(1 - e_k)(e_k^2 - e_k) \pmod{(t-1)^{2k} H_n} = (1 - (1 - 2e_k)^2)(e_k^2 - e_k) = -4(e_k^2 - e_k)^2 \equiv 0 \pmod{(t-1)^{k+1} H_n}$.)

La condition (2) donne que e_{k+1} n'est autre que e_k auquel on a rajouté un terme de $(t-1)^{k+1} H_n$. On construit donc formellement ainsi un élément e_∞ de $H_n \otimes \mathbb{Q}[[t-1]]$ tel que $\forall i, e_\infty \equiv e_i \pmod{(t-1)^i}$. Ceci implique que $e_\infty^2 = e_\infty$, puisqu'alors $e_\infty^2 \equiv e_i^2 \equiv e_i \equiv e_\infty \pmod{(t-1)^i}$ pour tout i . On utilise cet idempotent pour former $M_\pi = e_\infty(H_n \otimes \mathbb{Q}[[t-1]])$ et comme $e_\infty[1] = e, M_\pi[1] = I_\pi$. Comme pour $\mathbb{Q}S_n$, on a que $N_\pi = (1 - e_\infty)(H_n \otimes \mathbb{Q}[[t-1]])$ est un module tel que $H_n \otimes \mathbb{Q}[[t-1]] = M_\pi \oplus N_\pi$ avec aussi que $N_\pi[1] = J_\pi$. Si J_π n'est pas simple, on réutilise la même technique avec un idempotent d'un idéal minimal de J_π qui se relève à un idempotent de N_π donnant un autre module simple, et la technique nous permet de relever une décomposition $\sum M_\pi$ de $\mathbb{Q}S_n$ en une décomposition de $\mathbb{Q}[[t-1]]H_n$ avec des modules \hat{M}_π qui ne sont pas simples, mais constituent le produit tensoriel de $\dim(M_\pi)$ modules M'_π , qui eux, sont simples.

Le passage via la spécification en 1 de t nous donne un homomorphisme des H_n -modules sur l'anneau $\mathbb{Q}[[t-1]]$ vers les modules correspondants pour $\mathbb{C}S_n$ et les fonctions trace suivent automatiquement, donnant que si ξ_π est le caractère simple associé au module \hat{M}_π et χ_π , celui du module simple M_π pour S_n , alors $\xi_\pi(w_\sigma) = \chi_\pi(\sigma)$.

$\mathbb{Q}[[t-1]]$ est un anneau principal, ce qui fait que, les modules M_π étant sans torsion, on peut en prendre le produit tensoriel avec le corps de fractions K de A sans perdre la structure du module, donnant ainsi la décomposition $\sum M'_\pi$ de $H_n \otimes K$ en modules simples.

Maintenant comme $\mathbb{Q}((t-1)) \supset \mathbb{Q}[t]$, on a que H_n est décomposé complètement en modules simples sur $\mathbb{Q}((t-1))$ et ces modules seront les mêmes pour tout autre corps contenant $\mathbb{Q}[t]$.

□

Théorème 3.3.4. *La seule fonction $\tau : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ (où $M_n(\mathbb{K}) =$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur \mathbb{K}) qui est linéaire et telle que $\forall x, y \tau(xy) = \tau(yx)$ est un multiple de la trace.*

DÉMONSTRATION. Appelons $C = AB$ et $D = BA$ les produits de deux matrices. Alors $c_{ij} = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ et $d_{ij} = (\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj})$. Si A ne contient que des 0 sauf en $a_{ij} = 1$ et si $b_{ji} = 1$ alors que le reste de B est nul, on a que $d_{jj} = c_{ii} = 1$ et que toutes les autres valeurs dans D et C sont nulles. Comme $\tau(C) = \tau(D)$, la contribution de m_{ii} doit toujours être la même que celle de m_{jj} dans le calcul de $\tau(M)$. Si maintenant $a_{jk} = 1$ et $b_{ij} = 1$ avec le reste des deux matrices nul, on a que $d_{ik} = 1$ avec le reste de D nul et que tout C est nul. La contribution de m_{ij} à $\tau(M)$ doit donc être nulle dès que $i \neq j$. On conclut donc qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $\tau(M) = k(m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn})$. □

Théorème 3.3.5.

$$\alpha_\pi = \det[\alpha_{(\pi_j+i-j)}]_{i,j}$$

DÉMONSTRATION. Le résultat repose sur une connaissance des fonctions symétriques, en particulier des fonctins de Schur s_π .

Définition 3.3.6. *Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, un n -tuplet d'entiers non négatifs décroissants, et soit $\delta_n = (n-1, n-2, \dots, 0)$. On peut donc dire que α est de*

forme $\delta_n + \lambda$ pour une certaine partition λ de n (l'addition de deux n -tuplets étant définie terme à terme). On utilise la notation $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Le polynôme de Schur s_λ est défini par

$$s_\lambda = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} \text{signe}(\sigma) x^{\sigma(\alpha)}}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)}.$$

Ces fonctions sont une base sur \mathbb{Z} de Λ , l'anneau des fonctions symétriques (polynômes en plusieurs variables x_1, x_2, \dots invariants sous la permutation des variables x_i) et elles respectent l'identité $s_\pi = \det[s_{(\pi, +i-j)}]_{i,j}$ (voir [Gol93], équation 10.5, avec $\lambda = (p)$, notant que $s_{(p)} = h_p$.) On montre qu'il existe un homomorphisme $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}(s, t)$ avec $\phi(s_\pi) = \alpha_\pi$. En appliquant cet homomorphisme sur la formule citée, on obtient immédiatement le résultat voulu.

La théorie des fonctions symétriques nous donne que pour deux partitions λ de k et μ de $n - k$, la relation $s_\lambda s_\mu = \sum_{\pi \vdash n} c_{\lambda\mu}^\pi s_\pi$ tient toujours, avec $c_{\lambda\mu}^\pi$ qui est le coefficient de Littlewood-Richardson (Voir [Mac79]).

[Gol93] démontre aussi (pages 64-65 et 69-70) que les coefficients α_π , sans être pour autant explicitement connus, respectent une équation similaire : $\alpha_\lambda \alpha_\mu = \sum_{\pi \vdash n} c_{\lambda\mu}^\pi \alpha_\pi$.

La conjonction des deux résultats avec le fait que les $s_\pi (\pi \vdash n)$ forment une base de Λ_n (les fonctions symétriques à n variables) nous assure qu'il existe un homomorphisme ϕ de l'anneau gradué Λ vers $\mathbb{Q}(s, t)$ tel que décrit ci-haut, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 3.3.7.

$$\alpha_{(p)} = \frac{1}{p_n(t)} \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + s \frac{1-t^i}{1-t} \right]$$

DÉMONSTRATION. On crée l'élément standard de H_n : $e_n = \sum_{\sigma \in S_n} w_\sigma$ (on rappelle que les w_σ sont les mots standards de H_n tels que $w_\sigma[1] = \sigma$).

Comme $\forall i, e_n g_i = t e_n$, avec $\xi_{(n)}(g_i) = t$, on a que $e_n H_n$ est un module simple admettant le caractère simple $\xi_{(n)}$, tel que $e_n x = \xi_{(n)}(x) e_n$.

En particulier, si on définit $\rho_n = \sum_{i=0}^{n-1} g_{1,i}$, notant que $e_n = e_{n-1} \rho_n$ et que $\rho_n = 1 + g_{n-1} \rho_{n-1}$, on a que $\tau(e_n) = \tau(e_{n-1} + e_{n-1} g_{n-1} \rho_{n-1}) = \tau(e_{n-1}) + s \tau(e_{n-1} \rho_{n-1}) =$

$\tau(e_{n-1})[1 + s \frac{1-t^{n-1}}{1-t}]$. Par récurrence, sachant que $\tau(e_1) = 1$, on a que

$$\tau(e_n) = \prod_{i=1}^{n-1} [1 + s \frac{1-t^i}{1-t}].$$

Comme $\xi_\pi(e_n) = 0$ pour toute partition π autre que (n) , $\tau(e_n)$ se réduit à $\tau(e_n) = \alpha_{(n)} \xi_{(n)}(e_n)$. Le calcul donne que $\tau_n w_\sigma$ vaut $t^{l(\sigma)}$ (une contribution en t pour chaque générateur g_i composant w_σ), et en nommant :

Définition 3.3.8. $p_n(t) = \sum_{\sigma \in S_n} t^{l(\sigma)}$,

on a que $\xi_{(n)}(e_n) = p_n(t)$.

On calcule maintenant :

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \sum_{\sigma \in S_n} t^{l(\sigma)} = \xi_{(n)}(e_n) = \xi_{(n)}(e_{n-1}\rho_n) = \xi_{(n)}(e_{n-2}\rho_{n-1}\rho_n) = \dots \\ &= \prod_{i=1}^n \xi_{(n)}(\rho_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1-t^i}{1-t}. \end{aligned}$$

Donc, d'après tout ce que nous venons de mentionner, $\tau(e_n) = \alpha_{(n)} \xi_{(n)}(e_n) = \alpha_{(n)} p_n(t)$, d'où

$$\alpha_{(n)} = \frac{1}{p_n(t)} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + s \frac{1-t^i}{1-t}].$$

Notons que $p_n(t)[1] = n!|S_n|$, lien que nous ferons encore plus tard en cherchant des idempotents centraux de H_n . □

3.4. EXEMPLE DE CALCUL PAR BLOCS

Nous allons calculer le même invariant qu'au début de la précédente section, mais cette fois-ci en utilisant la décomposition de H_3 en modules simples.

Pour ce faire, nous aurons besoin des caractères simples χ_π de H_3 pour toute partition π de 3. Ces derniers sont reliés aux idempotents centraux de H_3 (nous expliciterons le lien dans cette section), nous allons donc passer par les idempotents pour trouver les caractères.

Nous avons déjà vu que la base de H_n en tant que \mathbb{Q} -module est $\{w_\sigma | \sigma \in S_n\}$. Pour un caractère χ_π , on a que $\sum_{\sigma \in S_3} \xi_\pi(w_\sigma w_\sigma)$ est presque central et idempotent. Si on regarde l'exemple où ξ est le caractère trivial, $g_1(1 + g_1 + g_2 + g_1g_2 + g_2g_1 + g_1g_2g_1) = g_1 + g_1^2 + g_1g_2 + g_1^2g_2 + g_1g_2g_1 + g_1^2g_2g_1 = g_1 + g_1^2 + g_1g_2 + (t-1)g_1g_2 +$

$tg_2 + g_1g_2g_1 + (t - 1)g_1g_2g_1 + tg_2g_1 = g_1 + g_1^2 + tg_1g_2 + tg_2 + tg_1g_2g_1 + tg_2g_1$ et $(1 + g_1 + g_2 + g_1g_2 + g_2g_1 + g_1g_2g_1)g_1 = g_1 + g_1^2 + g_2g_1 + g_1g_2g_1 + g_2g_1^2 + g_1g_2g_1^2 = g_1 + g_1^2 + tg_2g_1 + tg_2 + tg_1g_2g_1 + tg_1g_2$, les deux valeurs sont donc identiques. En utilisant que $g_1g_2g_1 = g_2g_1g_2$, on a que le calcul pour voir que g_2 commute aussi avec l'élément revient au même que celui qu'on vient de faire à un changement de variables près.

Le carré de cet élément a n'est pas lui-même, mais $(1 + 2t + 2t^2 + t^3)a$, il faut donc normaliser en divisant par $p_3(t)$ (tel qu'introduit à la définition 3.3.8) et on obtient un idempotent central.

En fait, les conditions $g_1(a_1 + a_2g_1 + a_3g_2 + a_4g_1g_2 + a_5g_2g_1 + a_6g_1g_2g_1) = (a_1 + a_2g_1 + a_3g_2 + a_4g_1g_2 + a_5g_2g_1 + a_6g_1g_2g_1)g_1$ et $g_2(a_1 + a_2g_1 + a_3g_2 + a_4g_1g_2 + a_5g_2g_1 + a_6g_1g_2g_1) = (a_1 + a_2g_1 + a_3g_2 + a_4g_1g_2 + a_5g_2g_1 + a_6g_1g_2g_1)g_2$

nous permettent de trouver qu'alors $c_4 = c_5, c_2 = c_3 = (1 - t)c_4 + tc_6$ et en ajoutant les conditions d'idempotence, on trouve les idempotents centraux complets ($e_1 + e_2 + e_3 = 1$) de H_3 :

$$e_1 = \frac{1}{p_3(t)}(1 + g_1 + g_2 + g_1g_2 + g_2g_1 + g_1g_2g_1)$$

$$e_2 = \frac{1}{p_3(t)}(t^3 + (-t_2)(g_1 + g_2) + t(g_1g_2 + g_2g_1) + -g_1g_2g_1)$$

$$e_3 = \frac{1}{p_3(t)}((2t + 2t^2) + (-1 + t^2)(g_1 + g_2) + (-1 - t)(g_1g_2 + g_2g_1))$$

On note que là où on faisait des "moyennes" en théorie des groupes finis, en regardant $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)[g]$, on fait maintenant la même chose en généralisant $|G|$ à $\sum \chi(1)$ où la somme est prise sur tous les caractères simples. Ceci est bien une généralisation, puisque pour un groupe fini G (sur un corps convenable), on a que $|G| = \sum \chi(1)$.

En égalant maintenant

$$e_\pi = \sum_{\sigma \in S_3} \frac{1}{t^{l(\sigma)}} \frac{e_\pi 1}{\dim M_\pi} \xi_\pi(w_\sigma) w_\sigma,$$

$e_\pi 1$ étant le coefficient de 1 dans e_i (la correction effectuée avec cette multiplication fait en sorte que $\xi_\pi(1) = \dim(M_\pi)$) on trouve trois caractères, le nombre attendu, sachant que 3 admet 3 décompositions : (3), (2, 1) et (1³).

On obtient le tableau de caractères Tab. 3.1 de H_3 .

Mots standards Caractère	1	g_1, g_2	g_1g_2, g_2g_1	$g_1g_2g_1$
$\xi_{(3)}$	1	t	t^2	t^3
$\xi_{(2,1)}$	2	$t - 1$	$-t$	0
$\xi_{(1^3)}$	1	-1	1	-1

TAB. 3.1. Caractères de H_3 .

On peut comparer le tableau de caractère de H_3 à celui de S_3 (Tab. 3.2). On note que $\xi_i(w_\sigma)[1] = \chi_i(\sigma)$.

Classes conjuguées Caractère	1	(12)	(123)
$\chi_{(3)}$	1	1	1
$\chi_{(2,1)}$	2	0	-1
$\chi_{(1^3)}$	1	-1	1

TAB. 3.2. Caractères de S_3 .

Si on calcule maintenant les α_π , on obtient :

$$\alpha_{(1)} = 1, \alpha_{(2)} = \frac{1+s}{1+t}, \alpha_{(3)} = \frac{1+s(2+t)+s^2(1+t)}{p_3(t)}$$

et donc

$$\alpha_{(2,1)} = \alpha_{(2)}\alpha_{(1)} - \alpha_{(3)} = \frac{(t+t^2+s(-1+t^2))+s^2(-1-t)}{p_3(t)}$$

et

$$\alpha_{(1^3)} = \alpha_{(1)}(\alpha_{(1)}^2 - \alpha_{(2)}) + (-1)(\alpha_{(1)}\alpha_{(2)} - \alpha_{(3)}) = \frac{t^3 + s(-t - 2t^2) + s^2(1+t)}{p_3(t)}$$

Donc On peut calculer

$$\begin{aligned} \tau(g_1g_2g_1) &= \alpha_{(3)}\xi_{(3)}(g_1g_2g_1) + \alpha_{(2,1)}\xi_{(2,1)}(g_1g_2g_1) + \alpha_{(1^3)}\xi_{(1^3)}(g_1g_2g_1) \\ &= t^3\alpha_{(3)} - \alpha_{(1^3)} = st + s^2(-1+t) \end{aligned}$$

Ce qui donne que $\tilde{\tau}(g_1g_2g_1) = \Theta^3\tau(g_1g_2g_1)$ et que $\hat{\tau}_3(b_1b_2b_1) = \theta s^{-2}\tau(g_1g_2g_1)$
 $= \theta(-1 + t + \frac{t}{s}),$

ce que nous avons déjà trouvé.

Chapitre 4

UNE EXPLOSION D'INVARIANTS

Il a fallu très peu de temps après l'apparition presque simultanée du polynôme de Jones et du homfly pour qu'une avalanche (lire : une infinité) de nouveaux invariants déferle sur le monde de la théorie des noeuds. Les plus fructueuses approches sont venues de l'interaction de la théorie (et en particulier des représentations de B_n) avec la physique mathématique, qui ont donné entre autre ce que nous appelons les invariants quantiques, dont nous avons une version pour les entrelacs et une autre pour les 3-variétés, les deux objets étant intimement liés.

Les invariants quantiques sont une famille d'invariants liés aux R-matrices, solutions de l'équation de Yang-Baxter :

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$$

pour $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ avec V un espace vectoriel quelconque. Il se trouve que les polynômes de Jones, d'Alexander et le homfly qui les généralise (ainsi que bien d'autres invariants déjà connus) peuvent tous être obtenus comme invariants quantiques. Voir Ohtsuki[Oht02] pour un exposé superbe et complet des invariants quantiques de noeuds et de 3-variétés.

Une telle quantité d'invariants est difficile à gérer et beaucoup de travail a déjà été fait pour enfin trouver un super-invariant en utilisant une version plus abstraite et généralisée des méthodes utilisées pour trouver des invariants quantiques. L'invariant de Kontsevich est le résultat de ce travail et il est encore à ce jour conjecturé complet.

Ohtsuki remarque même qu'en fait, l'étude des noeuds individuellement (où l'invariant n'est qu'un outil permettant de différencier deux noeuds) a laissé la place pour une étude des ensembles de noeuds distingués par chaque invariant

et qu'il est plausible qu'à l'instar de la théorie des nombres, cette nouvelle étude donne de profonds résultats et que les noeuds et 3-variétés soient à la topologie ce que sont les nombres à la théorie des nombres.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ale23] JAMES WADDEL ALEXANDER, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9 (1923), pages 93-95.
- [Ale28] J. W. ALEXANDER, *Topological Invariants for Knots and Links*, Transactions of the AMS 30 (1928), pages 562 à 586.
- [Art25] E. ARTIN, *Theorie der Zöpfe*, Hamburg Abh. 4, 1925, pages 47-72.
- [Bir75] JOAN S. BIRMAN, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON, N.J., 1975.
- [Bir93] JOAN S. BIRMAN, *New points of view in knot theory*, BULLETIN (NEW SERIES) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, VOL 28 No 2 (AVRIL 1993), PAGES 253 à 287.
- [BJ82] TH. BRÖCKER ET K JÄNICH , *Introduction to differential topology* , CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, CAMBRIDGE, 1982.
- [Cro77] R.H. CROWELL ET R.H. FOX, *Introduction to Knot Theory*, SPRINGER-VERLAG, NEW YORK, 1977.
- [CurRei] CHARLES W, CURTIS ET IRVING REINER, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, JOHN WILEY AND SONS INC. NEW YORK, 1962.
- [Gar69] F. A. GARSIDE, *The Braid Group and other Groups*, QUATERLY JOURNAL OF MATHEMATICS, VOL. 20 (1969) NUM. 2 PAGES 235 - 254.
- [Gol93] DAVID M. GOLDSCHMIDT, *Group Characters, Symmetric Functions, and the Hecke Algebra*, AMS UNIVERSITY LECTURES SERIES VOL. 4, PROVIDENCE, R.I. 1993.
- [HomFly85] P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. C. MILLET ET A. OCNEANU, *A new polynomial invariant of knots and links*, BULL. AMER. MATH. SOC. 12 (1985), PAGES 239 - 246.

- [JON85] V. F. R. JONES, *A polynomial invariant for links via Neumann algebras*, BULL. AMER. MATH. SOC. 129 (1985), PAGES 103-112.
- [JON87] V. F. R. JONES, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, ANN. OF MATH (2) 126, (1987), PAGES 335 - 388.
- [KAW96] A. KAWAUCHI, *A survey of Knot Theory*, BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL, SUISSE, 1996.
- [MAC79] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, OXFORD UNIVERSITY PRESS, OXFORD, 1979.
- [MAN04] VASSILY MANTUROV, *Knot Theory*, CHAPMANN & HALL, BOCA RATON, FL, 2004.
- [MAR35] A. A. MARKOV, *Über die freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe*, RECUEIL MATHÉMATIQUE MOSCOU 1, PAGES 73 À 78.
- [MOR78] H. R. MORTON, *Infinitely many fibered knots having the same Alexander polynomial*, TOPOLOGY VOL 17, PERGAMON PRESS (1978), PAGES 101 À 104.
- [MOR86] H. R. MORTON, *Threading Knot Diagrams*, MATH. PROC. CAMBRIDGE PHIL. SOC. 99 (1986), PAGES 247-260.
- [OHT02] TOMOTADA OHTSUKI, *Series on Knots and Everything vol XX : Quantum Invariants*, WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING, SINGAPOUR, 2002.
- [PRA97] V.V.PRASOLOV, A.B. SOSSINSKY , *Knots, Links, Braids and 3-manifolds, An introduction to the New Invariants in low-Dimensional topology*, TRANSLATIONS OF MATHEMATICAL MONOGRAPHS VOL. 154 AMS 1997.
- [REI48] K. REIDEMEISTER, *Knot Theory*, CHELSEA PUBL. AND CO., NEW YORK, 1948.
- [ROL76] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, PUBLISH OR PERISH INC., BERKELEY, CA, 1976.
- [VDG96] PIETER VAN DE GRIEND, *A history of topological knot theory*, SERIES ON KNOTS AND EVERYTHING VOL 11 : HISTORY AND SCIENCE OF KNOTS, CHAPITRE XI (P. 181-204), WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING, SINGAPOUR, 1996.