Université de Montréal

Symétries, supersymétries et solutions des équations de la mécanique des fluides

par

Alexander Hariton

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

mars 2005

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Symétries, supersymétries et solutions des équations de la mécanique des fluides

présentée par

Alexander Hariton

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin
(président-rapporteur)

Véronique Hussin
(directeur de recherche)

Michel Grundland
(co-directeur)

John Harnad
(membre du jury)

Roman Jackiw
(examinateur externe)

Yvan Saint-Aubin
(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:
16 juin 2005

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous utilisons les méthodes théoriques de groupes de Lie pour construire des solutions exactes analytiques des équations de certains modèles mathématiques reliés à la mécanique des fluides. En particulier, nous considérons le modèle nonrelativiste du gaz de Chaplygin et le modèle relativiste de Born-Infeld pour un champ scalaire, ainsi que certaines extensions supersymétriques. En analysant en détail les propriétés de symétries de ces systèmes, nous obtenons plusieurs nouvelles classes de solutions invariantes et partiellement invariantes des équations classiques de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions, ainsi que de leurs généralisations supersymétriques en $(1+1)$ et en $(2+1)$ dimensions.

L'essentiel de ce travail consiste en trois contributions originales sous forme d'articles publiés ou soumis à des journaux scientifiques.

Dans le premier article, nous présentons une méthode pour construire des solutions invariantes explicites des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions. Cette procédure fait un usage systématique de la structure des sous-groupes de dimension 1 du groupe d'invariance de ces équations afin de déterminer des classes de solutions analytiques invariantes. Les solutions obtenues sont de type algébriques, rationnelles et solitoniques (de type "bump", "kink" et onde multiple). Cet article a été publié dans le Journal of Mathematical Physics en juillet 2003.

Dans le second article, nous appliquons le concept de solutions partiellement invariantes aux modèles de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions. À l'aide d'une méthode systématique basée sur la classification des sous-groupes à deux dimensions du groupe d'invariance, nous construisons des solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$. Nous obtenons des ondes

de propagation, des ondes centrées, des solitons de type "kink", "bump", et des solutions exprimées à partir des fonctions elliptiques de Jacobi. Cet article a été publié dans le Journal of Mathematical Physics en août 2004.

Dans le troisième article, nous présentons une procédure qui nous permet de construire des solutions invariantes des modèles supersymétriques de Chaplygin en $(1+1)$ et $(2+1)$ dimensions. En utilisant une généralisation de la transformée de Legendre, nous obtenons certaines classes de solutions des équations supersymétriques en $(1+1)$ dimensions. Nous présentons également certains éléments de base qui peuvent servir à étendre la méthode au cas supersymétrique planaire. Les résultats ont été soumis pour publication dans le Journal of Physics A en janvier 2005.

MOT-CLÉS

Symétries des équations aux dérivées partielles, groupes et algèbres de Lie, solutions invariantes et partiellement invariantes, supersymétrie, phénomènes non-linéaires en physique.

ABSTRACT

In this doctoral thesis, we make use of certain theoretical methods involving Lie groups in order to construct exact analytic solutions of mathematical models related to fluid mechanics. In particular, we consider the equations of motion of the nonrelativistic Chaplygin gas and the relativistic Born-Infeld model for a scalar field, as well as certain supersymmetric generalizations.Through a comprehensive analysis of the symmetry properties and subgroup classification structure of these systems, a large number of new classes of invariant and partially invariant solutions are obtained for the classical Chaplygin and Born-Infeld theories in $(1+1)$ dimensions, and for the supersymmetric extensions in $(1+1)$ and $(2+1)$ dimensions.

The main body of this thesis is made up of three original contributions, which consist of articles published or submitted to scientific journals.

In the first article, a procedure based on the symmetry reduction method is used to obtain invariant solutions of the $(1+1)$-dimensional Chaplygin and Born-Infeld equations. This procedure makes systematic use of the one-dimensional subalgebras of the Lie symmetry algebra of these equations in order to construct invariant analytic solutions. We obtain algebraic, rational and solitonic type solutions, including bumps, kinks and multiple waves. This article was published in the Journal of Mathematical Physics in July 2003.

In the second article, the concept of partially invariant solutions is applied to the Chaplygin and Born-Infeld models in $(1+1)$ dimensions. Using a general systematic approach based on the classification of the two-dimensional subalgebras of the symmetry Lie algebra, partially invariant solutions with defect $\delta = 1$

are constructed. We obtain travelling waves, centered waves, solitonic type solutions including kinks and bumps, and solutions solved in terms of Jacobi elliptic functions. This article was published in the Journal of Mathematical Physics in August 2004.

In the third article, we present a procedure which allows us to determine solutions of the supersymmetric Chaplygin gas models in $(1+1)$ and $(2+1)$ dimensions. Through the use of a generalized Legendre transform, a number of analytic solutions of the linear supersymmetric model were found. In addition, certain basic elements of a possible extension of our method to the planar supersymmetric model are presented. The results were submitted to the Journal of Physics A in January 2005.

KEYWORDS

Symmetries of partial differential equations, Lie groups and algebras, invariant and partially invariant solutions, supersymmmetry, nonlinear phenomena in physics.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde reconnaissance envers mes directeurs de thèse, les professeurs Véronique Hussin et Michel Grundland pour leur appui exceptionnel. C'est sous leur impulsion que ce travail a été entrepris, et grâce à leur aide et à leur feed-back constant et rapide qu'il a pu aboutir.

Je remercie les membres du jury, ainsi que l'examinateur externe et le représentant du doyen, d'avoir accepté de juger ce travail.

J'adresse ma gratitude envers le professeur Roman Jackiw. Sa monographie "A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes" a constitué la principale source d'inspiration à cette recherche.

Je remercie également le professeur Pavel Winternitz pour le pertinent cours "Symétries et Équations Différentielles" qui a fortement enrichi mes connaissances dans le domaine des algèbres de Lie et de leur classification.

Je suis reconnaissant à la Faculté des Études Supérieures, au Département de mathématiques et de statistique, ainsi qu'à l'Institut des Sciences Mathématiques pour l'encadrement intellectuel et financier dont j'ai bénéficié.

Je remercie également le professeur Saint-Aubin qui a accepté de me confier une charge de cours, ainsi que le professeur Harnad qui m'a donné a possibilité d'être responsable du site internet du Laboratoire de Physique Mathématique au Centre de Recherches Mathématiques (Université de Montréal).

Finalement, je ne peux oublier l'appui fourni par les membres de ma famille durant cette période parfois difficile. Je tiens à remercier mon père George Hariton, ma mère Suzanne Hariton et ma grand-mère Vivianne Hariton qui m'ont continuellement donné leur support.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION

Les groupes et les algèbres de Lie jouent un rôle crucial dans la formulation de théories en physique. Ils apparaissent notamment comme groupes de symétries de systèmes d'équations aux dérivées partielles qui servent à décrire des phénomènes physiques. L'utilisation de ces groupes continus, introduits par le mathématicien Sophus Lie dans la résolution de systèmes d'équations différentielles, a connu un essor marqué et, au cours du dernier siècle, est devenue une partie importante de la littérature courante. Ce sujet a été généralisé par plusieurs auteurs (e.g. [**1, 2, 3**]), Plus récemment, il est devenu le sujet de plusieurs monographies (e.g. [**4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**]). En particulier, les méthodes de groupes de Lie sont utilisées pour déterminer les symétries continues d'un système d'équations différentielles, c'est-à-dire les transformations sur les coordonnées qui préservent l'espace de solutions du système. Ces transformations permettent alors de simplifier la résolution du problème. En effet, dans le cas d'équations différentielles ordinaires, l'invariance du système sous l'effet d'un sous-groupe de symétrie à un paramètre nous permet de réduire l'ordre de l'équation par un, et de retrouver la solution de l'équation originale à partir de la solution de l'équation réduite [**4**]. Dans le cas d'équations aux dérivées partielles, le groupe de symétries peut être utilisé pour déterminer explicitement certains types de solutions qui sont invariantes sous l'effet d'un sous-groupe du groupe complet. Ces solutions "groupe-invariantes" sont déterminées à partir d'équations réduites contenant moins de variables indépendantes que celles du système original.

Ovsiannikov [**9**] a formulé une généralisation de l'invariance des solutions en introduisant la notion des solutions partiellement invariantes. Considérons un graphe Γ de dimension p, correspondant à une solution d'un système avec p

variables indépendantes. Si, sous l'action d'un groupe de transformations G, le graphe Γ génère une orbite de dimension $p+\delta$ (où δ est inférieur à la dimension des orbites de G dans l'espace), la solution est dite partiellement invariante avec défaut de structure δ [**11**]. Alors que l'ensemble des solutions groupe-invariantes ne représente qu'un sous-ensemble relativement restreint de l'espace de solutions, la notion de solution partiellement invariante peut être utilisée pour élargir la classe de solutions disponibles.

Une autre extension de la théorie classique des symétries est le concept des symétries conditionnelles [**6**]. Ici, le système d'équations différentielles est modifié en ajoutant une ou plusieurs contraintes différentielles compatibles du premier ordre pour lesquelles des critères de symétries sont satisfaits identiquement.

Les groupes de Lie et symétries ont aussi été utilisés extensivement pour décrire et analyser les théories des champs quantiques pour les particules élémentaires. Récemment, R. Jackiw et al. [**12**] ont appliqué des méthodes semblables aux théories de champs classiques pour la mécanique des fluides. Dans ses Notes sur la dynamique des fluides, Jackiw présente un fluide nonrelativiste isentropique dont les effets dissipatifs sont négligeables. Rappelons qu'en général, l'état d'un fluide nonrelativiste peut être décrit par sa densité $\rho(\mathbf{r},t)$ et sa vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ en chaque point $(\mathbf{r},t)$ de l'espace-temps. Le mouvement du fluide est gouverné par l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot(\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)) = 0, \tag{0.1}$$

représentant la conservation de la matière, et l'équation de force d'Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{r},t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \mathbf{f}(\mathbf{r},t), \tag{0.2}$$

où $\mathbf{f}$ représente la force [**13**]. Pour un fluide isentropique (entropie constante), pour lequel les effets dissipatifs ne sont pas importants, la pression P est fonction de ρ seulement et la force f est donnée par

$$f = -\frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla V'(\rho). \tag{0.3}$$

où $V(\rho)$ représente un potentiel et le symbole $'$ indique la dérivée par rapport à l'argument. Dans le cas d'un fluide irrotationnel, c'est-à-dire lorsque la vorticité

$$\omega_{ij} = \partial_i v^j - \partial_j v^i, \tag{0.4}$$

est égale à zéro, la vitesse peut être écrite sous la forme du gradient d'un potentiel θ :

$$\mathbf{v} = \nabla\theta, \tag{0.5}$$

et l'équation d'Euler (0.2) peut être remplacée par une équation de type Bernoulli

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 = -V'(\rho). \tag{0.6}$$

La dynamique du système peut être, en particulier, présentée à l'aide d'une formulation canonique Lagrangienne. Les équations du mouvement (0.1) et (0.2) peuvent ainsi être obtenues à partir du Lagrangien

$$L = \int d^3r \left(\theta\rho_t - \frac{1}{2}\rho\nabla\theta\cdot\nabla\theta - V(\rho)\right). \tag{0.7}$$

Rappelons brièvement le lien entre la formulation lagrangienne et les équations de mouvement associées, ainsi que celui entre symétries et lois de conservations énoncé dans le théorème de Noether. Le lagrangien L peut être exprimé de façon générale comme l'intégrale spatiale d'une fonction $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i)$ d'un ou plusieurs champs $\phi^i(\mathbf{r}, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ et de leurs dérivées. Cette fonction $\mathcal{L}$ est appelée densité lagrangienne. L'action, quant à elle, peut être écrite comme

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i) d^3r\, dt \tag{0.8}$$

et le principe de moindre action $\delta S = 0$ génère les équations d'Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} = 0 \quad . \tag{0.9}$$

pour chaque champ ϕ^i. Si nous considérons des transformations continues sur les champs $\phi^i(\mathbf{r}, t)$ telles que, sous forme infinitésimale, elles s'écrivent :

$$\phi^i(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \phi^i_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \phi^i(\mathbf{r}, t) + \varepsilon\Delta\phi^i(\mathbf{r}, t) \quad , \tag{0.10}$$

alors, une telle transformation est dite une symétrie du système si elle laisse invariante les équations d'Euler-Lagrange. Ceci est assuré si la transformation garde l'action S invariante ou, plus généralement, ajoute à l'action un terme de surface. On voit donc que l'action sera invariante si la densité lagrangienne varie au plus d'une divergence totale du type :

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \varepsilon\partial_\mu J^\mu \quad , \tag{0.11}$$

pour une quantité J^μ, $\mu = 0, 1, \ldots, N$ (en N dimensions spatiales, où $x_0 = t$ représente le temps). La variation en $\mathcal{L}$ causée par les variations (0.10) des champs est donnée par

$$\begin{aligned}
\varepsilon\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\varepsilon\Delta\phi^i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\partial_\mu(\varepsilon\Delta\phi^i) && (0.12)\\
&= \varepsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i\right) + \varepsilon\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\right)\right]\Delta\phi^i && (0.13)\\
&= \varepsilon\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i\right) \qquad \text{(par Euler-Lagrange).} && (0.14)
\end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire qu'à chaque symétrie de l'action correspond une quantité conservée j^μ qui s'écrit

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Delta\phi^i - J^\mu \quad , \tag{0.15}$$

satisfaisant donc $\partial_\mu j^\mu = 0$. Cela signifie que la quantité $Q = \int j^0 d^N x$ est conservée dans le temps t. Le théorème de Noether affirme que pour chaque symétrie de l'action (0.8), il existe une quantité conservée. Il est à noter cependant qu'il existe des symétries du système d'équations qui ne laissent *pas* l'action invariante et qui ne correspondent donc pas à des quantités conservées [**4**]. Les dilatations D_1 et D_2 que nous obtenons dans l'algèbre de Lie du gaz de Chaplygin [**14, 15**] sont un exemple de telles symétries. Par contraste, la dilatation D identifiée par Jackiw [**12**] est une symétrie de l'action, et correspond à la quantité conservée $tH - \int dr\ \rho\theta$. Les trois dilatations sont reliées par l'équation $D = \frac{1}{2}(D_1 - D_2)$.

Un exemple particulier d'un fluide nonrelativiste irrotationnel dont les symétries et lois de conservations ont été étudiées par Jackiw et Bazeia [**16**] est le gaz de Chaplygin, qui correspond à une pression polytrope de la forme

$$P = -\frac{2\lambda}{\rho}, \qquad \lambda \geq 0. \tag{0.16}$$

où λ est une constante. Le potentiel est donc donné par $V(\rho) = \lambda/\rho$, et nous obtenons le Lagrangien

$$L = \int d^3r \left(\theta\rho_t - \frac{1}{2}\rho\nabla\theta\cdot\nabla\theta - \frac{\lambda}{\rho}\right). \tag{0.17}$$

Un tel modèle avec pression négative fut introduit à l'origine comme approximation mathématique de certains modèles adiabatiques [**12**]. Il est maintenant reconnu qu'une pression négative peut correspondre à certaines théories physiques, telles que la cosmologie. Les équations d'Euler-Lagrange du gaz de Chaplygin sont données par

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2}, \qquad \rho_t + \nabla\cdot(\rho\nabla\theta) = 0. \tag{0.18}$$

Les symétries et lois de conservation ont été déterminées. Certaines sont évidentes comme celles associées aux transformations du groupe de Galilée. Ces transformations, présentes dans le cas général de $V(\rho)$, comprennent les translations dans le temps (correspondant à la conservation de l'énergie E) et dans l'espace (impulsion $\mathbf{P}$), ainsi que les rotations dans l'espace (moment angulaire $\mathbf{J}$) et les boosts Galiléens (charge du boost $\mathbf{B}$). Le commutateur de $\mathbf{P}$ avec $\mathbf{B}$ nous donne la symétrie supplémentaire consistant en la translation du potentiel θ, lié à la conservation du nombre N de particules dans le fluide. Dans le cas qui nous occupe, certaines symétries additionnelles furent déterminées. Ainsi on a une dilatation dans le temps générée par la charge

$$D = tH - \int d^3r\,\rho\theta. \tag{0.19}$$

On trouve aussi une obscure symétrie dont les transformations sur les variables indépendantes sont fonctions des champs θ et ρ. Cette transformation est générée par

$$\mathbf{G} = \int d^3r\,(\mathbf{r}\mathcal{H} - \theta\rho\nabla\theta), \tag{0.20}$$

où $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho(\nabla\theta)^2 + \lambda/\rho$.

Hassaine et Horvathy [**17**] ont utilisé un schéma de type Kaluza-Klein, introduit par Duval [**18**], pour expliquer l'origine des symétries identifiées par Bazeia et Jackiw [**16**] dans le cas d'une dimension spatiale. Le champ θ est représenté par une coordonnée s sur un espace étendu. Donc, au lieu d'un espace en (x, t), nous avons un espace Minkowski de dimension $(2+1)$ avec une dimension spatiale x et deux dimensions temporelles t et s. L'observation cruciale est le fait que sur l'espace étendu (x, t, s), l'"antiboost" $\mathbf{G}$ devient le boost $\mathbf{B}$ lorsque les coordonnées t et s sont interverties. En appliquant cette interversion à tout le groupe de Galilée, nous obtenons les symétries identifiées par Bazeia et Jackiw. Dans le cas spécifique où $\lambda = 0$, le groupe conforme entier constitue le groupe de symétries. Plus généralement, il fut démontré par O'Raifeartaigh et Sreedhar **[19]** que pour un modèle polytropique général, le groupe de symétries contient certaines transformations discrètes telles que la parité $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ainsi qu'une inversion

$$t \rightarrow -\frac{1}{t}, \qquad \mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{t}. \tag{0.21}$$

Jackiw **[12]** a également considéré un modèle relativiste de type Born-Infeld pour un scalaire dont le Lagrangien est donné par

$$L = \int d\mathbf{r} \left(\theta\rho_t - \sqrt{\rho^2c^2 + a^2}\sqrt{c^2 + (\nabla\theta)^2}\right). \tag{0.22}$$

Ce Lagrangien est relié à celui de la théorie electrodynamique nonlinéaire de Born et Infeld **[20, 21]**, dont la densité lagrangienne est donnée par

$$\mathcal{L}_{BI} = b^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)/b^2 - \left(\vec{E} \cdot \vec{B}\right)^2/b^4}\right], \tag{0.23}$$

où b est un paramètre et les quantités $\vec{E}$ et $\vec{B}$ représentent les champs électriques et magnétiques respectivement. Dans le cas limite où $b \rightarrow \infty$, la théorie de Born-Infeld se réduit à celle de Maxwell. Dans le cas limite contraire, où $b \rightarrow 0$, cette théorie correspond à un fluide de pression zéro et représente donc un "gaz de photons" **[21]**. Le Lagrangien (0.22) mène aux équations de Born-Infeld

$$\rho_t + \nabla \cdot \left(\nabla\theta\sqrt{\frac{\rho^2c^2 + a^2}{c^2 + (\nabla\theta)^2}}\right) = 0, \tag{0.24}$$

$$\theta_t + \rho c^2\sqrt{\frac{c^2 + (\nabla\theta)^2}{\rho^2c^2 + a^2}} = 0. \tag{0.25}$$

Il est à noter que les modèles de Chaplygin et de Born-Infeld sont reliés. En effet, à la limite où $c \rightarrow \infty$, le Lagrangien et les équations de Born-Infeld se réduisent à celles de Chaplygin, où λ est identifié avec $a^2/2$. Une solution $\theta_{NR}(\mathbf{r}, t)$ des équations de Chaplygin est donc reliée à une solution équivalente $\theta_R(\mathbf{r}, t)$ des équations de Born-Infeld.

Le lien entre les deux théories nonrelativiste (Chaplygin) et relativiste (Born-Infeld) est expliqué en analysant leur ancêtre commun **[12]**, le problème de Nambu-Goto qui concerne l'évolution d'une membrane à d dimensions évoluant dans un espace-temps à $d+1$ dimensions spatiales. En effet, si $X^\mu = (X^0, X^1, \ldots, X^d, X^{d+1})$ décrit l'espace-temps dans lequel la membrane évolue et $\phi^\alpha = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ paramétrise la membrane, alors l'action de Nambu-Goto est

$$I_{NG} = \int d\phi^0\, d\phi^1 \ldots d\phi^d \sqrt{(-1)^d \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial \phi^\beta}\right)}. \qquad (0.26)$$

Deux paramétrisations différentes de cette action mènent aux modèles de fluides déjà décrits. La paramétrisation "cône de lumière" mène au gaz de Chaplygin et la paramétrisation cartesienne mène à la théorie de Born-Infeld. Il a également été établi que pour des cordes dans un espace-temps plat, l'action de Nambu-Goto (0.26) se réduit à l'action de Polyakov **[22]**.

Une étude des solutions de membranes relativistes a été entreprise par Bazeia **[23]**. Les solutions d'une membrane d-dimensionnelle évoluant dans un espace-temps de dimension $(d+1, 1)$ sont reliées à celles du modèle du gaz de Chaplygin en $(d, 1)$ dimensions. Bazeia a plus particulièrement étudié les systèmes de membranes en $(2, 1)$, $(3, 1)$ et $(4, 1)$ dimensions.

Par ailleurs, suite à la découverte de la supersymétrie par Golfand et Likhtman **[24]**, on a vu apparaître des équations différentielles faisant intervenir des variables de Grassmann (commutantes et anticommutantes). Berezin **[25]**, concerné par des questions liées à la seconde quantification, essaya de donner une description parallèle des champs bosoniques et fermioniques. On a donc assisté à la naissance de théories supersymétriques permettant de traiter sur le même pied les variables de Grassmann paires (bosoniques) et impaires (fermioniques).

Un exemple de théorie supersymétrique est la superéquation de Korteweg-de Vries (KdV) introduite par Mathieu **[26, 27]**. L'équation de KdV ordinaire

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx}, \qquad (0.27)$$

fut introduite pour décrire le comportement de certaines ondes créées par l'eau. Elle a également été considérée comme étant un modèle d'approximation pour plusieurs cas d'étude, tels que les ondes magnétohydrodynamiques dans un plasma [**28**] ou les ondes longitudinales dispersives dans les cordes élastiques [**29**]. Une propriété intéressante à noter est que l'équation (0.27) possède une solution de type solitonique

$$u(x,t) \;=\; 2c^2\text{sech}^2\left(c(x+4c^2t-x_0)\right), \tag{0.28}$$

où c et x_0 sont des constantes.

Pour construire une extension de l'équation de KdV invariante sous une transformation supersymétrique, Mathieu [**26**] a introduit une variable anticommutante de Grassmann θ afin d'agrandir l'espace des variables indépendantes (x,t) à un superespace (x,t,θ). Le système est construit de telle façon qu'il soit invariant sous la transformation

$$x \;\longrightarrow\; x-\eta\theta, \qquad \theta \;\longrightarrow\; \theta+\eta, \tag{0.29}$$

où le paramètre η est un paramètre anticommutant (ou "impaire") de Grassmann. Cette transformation est générée par le champ de vecteurs :

$$Q \;=\; \partial_\theta \;-\; \theta\partial_x, \tag{0.30}$$

qui représente donc le générateur de supersymétrie. Dans un formalisme de superespace, le champ $u = u(x,t)$ est remplacé par le superchamp $\Phi(x,t,\theta)$ qui peut être pair ou impair. Pour une extension nontriviale de l'équation de KdV, le superchamp doit être fermionique (impair) et peut donc être écrit comme

$$\Phi(x,t,\theta) \;=\; \xi(x,t) \;+\; \theta u(x,t), \tag{0.31}$$

où $\xi(x,t)$ est un champ anticommutant. Nous introduisons également la "dérivée covariante" $D = \theta\partial_x + \partial_\theta$, nommée ainsi parce qu'elle commute avec la supersymétrie Q. L'extension supersymétrique de l'équation de KdV s'écrit

$$\Phi_t \;=\; D^6\Phi \;+\; aD^2(\Phi D\Phi) \;+\; (6-2a)D\Phi D^2\Phi, \tag{0.32}$$

où a est une constante arbitraire. En termes de ses composantes ξ et u, cette famille de superéquations est équivalente au système

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x - a\xi\xi_{xx}, \qquad \xi_t = \xi_{xxx} + (6-a)\xi_x u + a\xi u_x. \tag{0.33}$$

Ceci constitue une extension de l'équation de KdV avec une supersymétrie de type $N = 1$ car il intervient une seule variable de Grassmann.

De façon similaire, Mathieu et Labelle [**27**] ont décrit une équation supersymétrique de KdV de type $N = 2$. Dans ce cas, l'espace (x, t) est augmenté par deux variables de Grassmann anticommutantes, θ_1 et θ_2, et le système est invariant sous les deux transformations de supersymétrie

$$x \longrightarrow x - \eta_i\theta_i, \qquad \theta_i \longrightarrow \theta_i + \eta_i, \qquad i = 1, 2, \tag{0.34}$$

générées par les deux champs de vecteurs

$$Q_1 = \theta_1\partial_x - \partial_{\theta_1}, \qquad Q_2 = \theta_2\partial_x - \partial_{\theta_2}. \tag{0.35}$$

En remplaçant $u(x, t)$ par le superchamp

$$\Phi(x, t, \theta_1, \theta_2) = v(x, t) + \theta_1\xi_1(x, t) + \theta_2\xi_2(x, t) + \theta_2\theta_1 u(x, t), \tag{0.36}$$

nous obtenons la famille de superéquations

$$\Phi_t = -\Phi_{xxx} + 3(\Phi D_1 D_2 \Phi)_x + \frac{1}{2}(a-1)(D_1 D_2 \Phi^2)_x + 3a\Phi^2\Phi_x. \tag{0.37}$$

où D_1 et D_2 sont reliés à Q_1 et Q_2 de la même façon que D est relié à Q dans le cas $N = 1$. Plusieurs solutions des superéquations (0.32) et (0.37) ont été décrites, par exemple, par Ayari, Hussin et Winternitz [**30**]. Mathieu et Labelle [**26, 27**] ont également étudié l'intégrabilité de ces systèmes du point de vue de la représentation de Lax.

Une généralisation supersymétrique a également été trouvée pour l'équation nonlinéaire de Schrödinger. Cette équation prend la forme

$$iq_t = -q_{xx} + 2k(q^*q)q, \tag{0.38}$$

où $q(x, t)$ est une variable complexe bosonique (paire). Roelofs et Kersten [**31**] ont proposé une construction menant à deux extensions supersymétriques de (0.38), dont une contient une constante arbitraire. Une variable complexe fermionique

$\phi(x,t)$ est ajoutée pour mener à un système de deux équations reliant les variables q et ϕ. L'intégrabilité de ce modèle supersymétrique fut étudiée par Brunelli et Das [**32**]. Il fut déterminé que seul le premier cas (qui ne dépend pas d'une constante arbitraire) était intégrable et possédait la propriété de Painlevé (c'est-à-dire, ne contient aucune singularité mobile autre que des pôles [**33**]).

D'autres exemples d'équations différentielles à valeurs de Grassmann ont été analysés par Fatyga, Kostelecky et Truax [**34**]. En particulier, ils ont montré comment certains systèmes d'équations nonlinéaires représentant des fluides compressibles peuvent être combinés en une seule équation différentielle à valeurs de Grassmann. Considérons, par exemple, une variable Z, fonction des deux variables indépendantes x et t, satisfaisant l'équation

$$Z_t + ZZ_x = 0. \tag{0.39}$$

Si nous supposons que Z n'est pas une simple variable réelle (ou complexe) mais plutôt une variable de Grassmann du type

$$Z = u + \rho\theta, \tag{0.40}$$

où θ est une variable anticommutante, alors l'équation (0.39) est équivalente au système

$$u_t + uu_x = 0, \qquad \rho_t + u\rho_x + u_x\rho = 0. \tag{0.41}$$

Si nous identifions u avec la vitesse et ρ avec la densité, alors (0.41) décrit le mouvement d'un fluide unidimensionnel compressible à pression constante. Ce dernier a été résolu analytiquement par Riemann [**35**]. Plus généralement, Fatyga et al.[**34**] ont étudié les équations de type

$$Z_t + (\mathbf{W}\cdot\nabla)Z = P, \tag{0.42}$$

où Z et P sont des fonctions à valeurs de Grassmann et $\mathbf{W}$ est une fonction vectorielle.

Jackiw et Polychronakos [**36**] ont également considéré une généralisation du gaz de Chaplygin, formée en ajoutant des variables de Grassmann ψ anticommutantes sous la forme de spineurs de Majorana (réel à deux composantes). Le modèle est en deux dimensions spatiales (x, y), une dimension temporelle t et contient les champs θ, ρ et ψ. La vitesse est modifiée et donnée par

$$\mathbf{v} = \nabla\theta - \frac{1}{2}\psi\nabla\psi, \tag{0.43}$$

rendant le fluide rotationnel (avec vorticité non-nulle). La densité lagrangienne est alors construite comme

$$\mathcal{L} = -\rho\left(\theta_t - \frac{1}{2}\psi\psi_t\right) - \frac{1}{2}\rho\left(\nabla\theta - \frac{1}{2}\psi\nabla\psi\right)^2 - \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi. \tag{0.44}$$

L'addition du terme d'interaction $\sqrt{2\lambda}\psi\alpha\cdot\nabla\psi/2$ rend le fluide supersymétrique. Ce modèle planaire peut être obtenu en partant d'une théorie de supermembrane en $(3+1)$ dimensions analogue à celle de Nambu-Goto (0.26). Nous utilisons de nouveau la paramétrisation "cône de lumière".

A la suite du modèle supersymétrique du gaz planaire, Bergner et Jackiw **[37]** ont étudié un modèle supersymétrique linéaire pour un fluide en $(1+1)$ dimensions à partir d'une supercorde de Nambu-Goto évoluant dans un espace de (2+1) dimensions. Ce modèle linéaire est complètement intégrable et peut être formulé avec des coordonnées de Riemann. Il semblerait que les modèles supersymétriques planaire et linéaire soient les seuls exemples possibles de fluides supersymétriques dérivables d'une supermembrane de Nambu-Goto **[12]** par la paramétrisation "cône de lumière".

L'objectif principal de cette thèse est d'utiliser les méthodes classiques et généralisées de réduction par symétries afin de construire des solutions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld. En analysant en détail leurs propriétés de symétries, ainsi que la classification de leurs sous-groupes, nous obtenons plusieurs nouvelles classes de solutions invariantes et partiellement invariantes des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions. Nous présentons également une méthode originale, basée sur une généralisation de la transformée de Legendre, pour formuler des nouvelles solutions des modèles supersymétriques linéaire et planaire de Chaplygin. Notre étude se situe dans le cadre des méthodes et algorithmes de symétries, impliquant leur application spécifique aux modèles reliés à l'action de Nambu-Goto étudiés par Jackiw et al. **[12, 36, 37]**, et à leurs extensions supersymétriques. Nous cherchons à répondre aux questions suivantes. Quelles sont les symétries de Lie des équations classiques et supersymétriques de Chaplygin et de Born-Infeld ? Quelles sont les solutions invariantes et partiellement invariantes correspondantes ? Quel est le lien entre les propriétés des modèles de Chaplygin, Born-Infeld et Nambu-Goto et entre les solutions classiques et supersymétriques de ces modèles ?

Les domaines principaux couverts par cette thèse sont les équations de la mécanique des fluides, les groupes et algèbres de lie, la classification des sous-algèbres, les solutions invariantes et partiellement invariantes, ainsi que les modèles supersymétriques impliquant des variables de Grassmann.

Le chapitre 1 consiste en un article original qui fut le premier à être publié dans le cadre de cette recherche [**14**]. Nous y présentons une méthode pour construire des solutions invariantes explicites des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions. Cette procédure est basée sur la méthode de réduction par symétries pour les équations aux dérivées partielles et fait un usage systématique de la structure des sous-groupes du groupe d'invariance. En utilisant les sous-groupes de dimension 1, nous générons les variables de symétries qui nous permettent de réduire les équations originales à des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Les solutions de ces dernières mènent directement à des classes de solutions analytiques invariantes par rapport aux sous-groupes considérés. Elles sont de type algébriques, rationnelles et solitoniques (de type "bump", "kink" et onde multiple). Nous discutons aussi certaines nouvelles solutions séparables qui représentent un cas spécial de solutions conditionnellement invariantes. Cela nous permet d'appliquer le concept de symétries classiques aux équations de Chaplygin et de Born-Infeld afin de construire des solutions invariantes.

Le chapitre 2 constitue également une contribution originale publiée [**15**]. Dans cet article, nous discutons le concept de solutions partiellement invariantes pour les modèles dérivés de l'action Nambu-Goto. En particulier, nous considérons le fluide nonrelativiste appelé gaz de Chaplygin, et le modèle relativiste de Born-Infeld pour un champ scalaire. À l'aide d'une méthode systématique basée sur la classification des sous-groupes du groupe d'invariance, nous construisons des solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$. Nous avons du commencer par faire une classification complète des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de symétries ayant des orbites génériques de dimension 2. Ces sous-algèbres nous permettent d'introduire les variables de symétries correspondantes, puis de réduire les équations originales initiales à différentes classes nonéquivalentes d'équations aux dérivées partielles et, dans certains cas, à des équations différentielles ordinaires. La résolution de ces systèmes réduits nous a donné plusieurs nouvelles solutions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld, comme des ondes de propagation, des ondes centrées, des solitons, des "kink", des "bump", et des solutions exprimés à partir des fonctions elliptiques de Jacobi. Cela a permis une extension des résultats obtenus dans le chapitre 1 au cas plus général de l'invariance partielle.

Finalement, dans le chapitre 3, nous présentons une procédure qui nous permet de construire des solutions invariantes du gaz supersymétrique de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions [**38**]. Nous utilisons une généralisation de la transformée de Legendre afin de transformer le système d'équations originales en un nouvel ensemble d'équations différentielles ayant comme variables indépendantes la vitesse du fluide et la vitesse du son dans le fluide. Les propriétés symétriques des équations et leurs algèbres de Lie sont décrites pour les deux systèmes de coordonnées, et nous faisons appel à une classification systématique des sous-groupes pour obtenir certaines classes de solutions invariantes des équations transformées. Ces dernières sont équivalentes à des solutions des équations originales. Lorsque cela est possible, nous utilisons la transformée de Legendre pour obtenir des solutions du modèle linéaire supersymétrique. Nous présentons également certains éléments de base qui peuvent servir à étendre la méthode au cas planaire supersymétrique. En particulier, l'analogue en $(2+1)$ dimensions de l'équation dans le système de coordonnées transformées a été déterminé, ainsi que certaines symétries. Pour un certain cas spécifique, il a été démontré qu'il est possible d'invertir et d'étendre une solution invariante de l'équation transformée afin d'obtenir une solution du gaz planaire supersymétrique de Chaplygin. Les résultats ont été récemment soumis pour publication.

Dans l'appendice A, nous décrivons les symétries des systèmes d'équations différentielles, ainsi que les méthodes de groupes et algèbres de Lie permettant de les déterminer. Nous présentons la structure de base utilisée pour la classification des sous-algèbres d'une algèbre de Lie. Nous définissons ensuite les solutions invariantes et partiellement invariantes, et présentons un algorithme permettant de les trouver.

Dans l'appendice B, nous introduisons les concepts d'espace vectoriel gradué, d'algèbre de Grassmann contenant des variables paires et impaires et de superespace formé de coordonnées à valeurs de Grassmann. Nous discutons ensuite des fonctions à valeurs de Grassmann (superchamps) définies sur un superespace, et les notions de superalgèbres et supergroupes de Lie sont ensuite données. Nous rappelons également la méthode de calcul des symétries pour un système d'équations différentielles à variables de Grassmann.

Dans l'appendice C, nous présentons en détail la classification des sous-algèbres splitting et non-splitting de l'algèbre de symétrie du gaz de Chaplygin qui n'a pas pu être inclu dans l'article [**15**] à cause de l'espace limité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartan, *Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle* (Gauthier-Villars, Paris, 1937).

[2] I. Gel'fand, A. Milnos and Z. Shapiro, *Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications* (Pergamon Press, New York, 1963).

[3] G. Birkhoff, *Hydrodynamics* (Princeton University Press, Princeton, 1950).

[4] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1986).

[5] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics* (Springer-Verlag, NY, 1986).

[6] P. J. Olver and E. M. Vorob'ev, "Nonclassical and conditional symmetries," *CRC Handbook of Lie Group Analysis*, **Vol. 3**, chapt. XI, Ed. N. H. Ibragimov (CRC Press, London, 1995).

[7] G. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and differential equations* (Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences **81**, New York, 1989).

[8] H. Stephani, *Differential Equations. Their Solutions Using Symmetries* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[9] L. V. Ovsiannikov, *Group Properties of Differential Equations*(in Russian) (Novosibirsk, 1962) ; *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, 1986).

[10] P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrecht, 1993), 429.

[11] J. Ondich, "The reducibility of partially invariant solutions of systems of partial differential equations," *Euro. Jnl. Appl. Math.* **6**, 329-354 (1995).

[12] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes* (Springer-Verlag, New York, 2002).

[13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (2nd edition, Pergamon Press, Oxford, 1987).

[14] A. M. Grundland, A. J. Hariton and V. Hussin, "Group-invariant solutions of relativistic and nonrelativistic models in field theory," *J. Math. Phys.* **44**, 2874-2890 (2003).

[15] A. M. Grundland and A. J. Hariton, "Partially invariant solutions of models obtained from the Nambu-Goto action," *J. Math. Phys.* **45**, 3239-3265 (2004).

[16] D. Bazeia and R. Jackiw, "Nonlinear Realization of a Dynamical Poincaré Symmetry by a Field-Dependent Diffeomorphism," *Ann. Physics* **270**, 246-259 (1998).

[17] M. Hassaine and P. A. Horváthy, "Field-Dependent Symmetries of a Non-relativistic Fluid Model," *Ann. Physics* **282**, 218-246 (2000).

[18] C. Duval, G. Burdet, H. P. Künzle and M. Perrin, *Phys. Rev.* **D31**, 1841 (1985); C. Duval, G. Gibbons and P. A. Horváthy, *Phys. Rev.* **D43**, 3907 (1991).

[19] L. O'Raifeartaigh and V. V. Sreedhar, "The Maximal Kinematical Invariance Group of Fluid Dynamics and Explosion-Implosion Duality," *Ann. Physics* **293**, 215-227 (2001).

[20] M. Born and L. Infield, "Foundations of the New Field Theory," *Proc. Roy. Soc.* **A144**, 425 (1934).

[21] I. Bialynicki-Birula, "Field Theory of Photon Dust," *Acta Phys. Pol.* **B23**, 553 (1992).

[22] A. Polyakov, *Phys. Lett.* **B103**, 207-211 (1981).

[23] D. Bazeia, "Galileo invariant system and the motion of relativistic d-branes," *Phys. Rev.* **D59**, 085007 (1999).

[24] Y. A. Golfand and E. P. Likhtman, *JETP Lett.* **13**, 452 (1971).

[25] F. A. Berezin, *The Methods of Second Quantization* (Academic Press, NY, 1966).

[26] P. Mathieu, "Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation," *J. Math. Phys.* **29**, 2499-2506 (1988).

[27] P. Labelle and P. Mathieu, "A new N=2 supersymmetric Korteweg-de Vries equation," *J. Math. Phys.* **32**, 923-927 (1991).

[28] H. Kever and G. K. Morikawa, "Korteweg-de Vries equation for nonlinear hydromagnetic waves in warm collision free plasma," *Phys. Fluids* **12**, 2090-2093 (1969).

[29] G. A. Nariboli, "Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods," *Eng. Res. Inst.* , Preprint 442, Iowa State University (1973).

[30] M. A. Ayari, V. Hussin and P. Winternitz, *J. Math. Phys.* **40**, 1951 (1999) ;
V. Hussin, "Grassmann-valued differential equations and a method of resolution based on Lie Supergroup Theory," *Mathematics Newsletter (India)* **10**, 47-57 (2000).

[31] G. H. M. Roelofs and P. H. M. Kersten, "Supersymmetric extensions of the nonlinear Schrödinger equation : symmetries and coverings," *J. Math. Phys.* **33**, 2185-2206 (1992).

[32] J. C. Brunelli and A. Das, "Test of integrability of the supersymmetric nonlinear Schrödinger equation," *J. Math. Phys.* **36**, 268-280 (1995).

[33] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications Inc., New York, 1956).

[34] B. W. Fatyga, V. A. Kostelecky and D. R. Truax, "Grassmann-valued fluid dynamics," *J. Math. Phys.* **30**, 1464-1472 (1989).

[35] B. Riemann, "Uber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite," *Göttingen Abhandlungen* **viii**, 43 (1858).

[36] R. Jackiw and A. P. Polychronakos, "Supersymmetric Fluid Mechanics," *Phys. Rev. D* **62**, 085019 (2000).

[37] Y. Bergner and R. Jackiw, "Integrable supersymmetric fluid mechanics from superstrings," *Phys. Lett.* **A284**, 146-151 (2001).

[38] A. J. Hariton and V. Hussin, "Invariant solutions of a supersymmetric fluid model," soumis le 6 janvier 2005 au Journal of Physics A.

Chapitre 1

GROUP-INVARIANT SOLUTIONS OF RELATIVISTIC AND NON-RELATIVISTIC MODELS IN FIELD THEORY

Auteurs : A. M. Grundland, A. J. Hariton and V. Hussin.

Référence : *J. Math. Phys.* **44**, 2874-2890 (2003).

Résumé

Dans cet article, nous étudions et construisons certaines classes explicites de solutions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $1+1$ dimensions. Ces solutions sont obtenues par la méthode de réduction par symétries pour les équations aux dérivées partielles. Nous utilisons systématiquement la structure des sous-groupes de dimension 1 du groupe d'invariance afin de générer des variables de symétrie, qui nous permettent de réduire les équations originales à des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Les solutions de ces dernières mènent directement à des classes de solutions analytiques des équations de Chaplygin et Born-Infeld qui sont invariantes par rapport aux sous-groupes considérés. Les solutions obtenues sont de type algébriques, rationnelles et solitoniques (de type "bump", "kink" et onde multiple). Nous discutons aussi certaines solutions séparables admises par les équations de Chaplygin et Born-Infeld. Une interprétation physique des résultats est discutée dans le cadre de la dynamique des fluides.

Abstract

In this paper we present a method of constructing explicit classes of solutions of the Chaplygin and Born-Infeld systems of equations in $1+1$ dimensions. The approach adopted here is based on the symmetry reduction method for partial differential equations (PDE). A systematic use of the subgroup structure of the invariance group is made to generate symmetry variables. We concentrate only on the case when the symmetry variables are invariants of the subgroups having dimension one. The set of symmetry variables enables us to reduce, after some transformation, the original equations to many possible ordinary differential equations (ODE). We describe in detail how a composition of Lie subalgebras and singularity analysis applied to these systems provides us with classes of analytic solutions. Several new types of algebraic, rational and solitonlike solutions (among them kinks, bumps and multiple wave solutions) have been obtained in explicit form. We discuss also the existence of several classes of separable solutions admitted by the Chaplygin and Born-Infeld equations. Some physical interpretation of these results in the areas of fluid dynamics and field theory are given.

1.1. Introduction

The motion of a d-brane in $(d+1)$ spatial dimensions moving in $(d+1,1)$-dimensional space-time is described by the Nambu-Goto action as described by R. Jackiw [**1**]. If $X^\mu = (X^0, X^1, \ldots, X^d, X^{d+1})$ describes the target space-time (in which the d-brane moves), and $\phi^\alpha = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ are world-volume variables which parametrize the d-dimensional extended object evolving in ϕ^0, then the Nambu-Goto action reads

$$I_{NG} = \int d\phi^0\, d\phi^1 \ldots d\phi^d \sqrt{(-1)^d \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial \phi^\beta}\right)}. \tag{1.1}$$

This action is parametrization-invariant, and in particular two different choices of the parametrization lead respectively to a non-relativistic fluid dynamical model (the Chaplygin gas) and a relativistic fluid (the Born-Infeld model). In both cases, we choose $(X^1, X^2, \ldots, X^d)$ to coincide with $(\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^d)$ and rename them as the spatial vector $\mathbf{r}$ in d dimensions. The remaining variables X^0, X^{d+1} and ϕ^0 are treated separately.

1.1.1. The Chaplygin Gas

We now discuss the two distinct parametrizations, beginning with the non-relativistic fluid. We define

$$X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^{d+1}) = t, \qquad X^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 - X^{d+1}) = \theta(\mathbf{r}, t) \tag{1.2}$$

and then identify t with $\sqrt{2\lambda}\,\phi^0$, where $\lambda \geq 0$ is a constant. This is called the light-cone parametrization. The Nambu-Goto action (1.1) then reduces to the Chaplygin action [**1**]

$$I_\lambda = -2\sqrt{\lambda} \int dt\, d\mathbf{r} \sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}. \tag{1.3}$$

This action leads to the Euler-Lagrange equations of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\nabla\theta}{\sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}}\right) = 0, \tag{1.4}$$

which is known as the Chaplygin equation [**2**]. It should be noted that this equation is equivalent to the following system of differential equations for the density

$\rho(\mathbf{r}, t)$ and velocity potential $\theta(\mathbf{r}, t)$ of a fluid in the interactive case ($\lambda \neq 0$)

$$\rho_t + (\nabla\rho)\cdot(\nabla\theta) + \rho(\nabla^2\theta) = 0, \tag{1.5}$$

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2}. \tag{1.6}$$

These equations (1.5) and (1.6) correspond respectively to the equation of continuity and Euler's force equation for an ideal non-relativistic fluid of zero vorticity, in which the pressure P is related to the density ρ by the equation **[1]**

$$P = \frac{-2\lambda}{\rho}. \tag{1.7}$$

The velocity $\mathbf{v}$ of the fluid is simply the gradient of the potential $\mathbf{v} = \nabla\theta$. It is possible to eliminate the variable ρ by using equation (1.6) to express it in terms of θ. In this way the system (1.5) and (1.6) reduces to equation (1.4).

In the free case ($\lambda = 0$) the variable ρ becomes completely independent, and the equations (1.5) and (1.6) are decoupled. Equation (1.6) can be solved for θ, and then equation (1.5) solved for ρ. A detailed discussion of the symmetry group in one spatial dimension can be found in the work by A. Hariton **[3]**. This case is not derived from the Nambu-Goto d-brane.

1.1.2. The Born-Infeld Model

For the relativistic model, the variable X^0 is renamed ct, where c is the speed of light, and is also identified with $c\phi^0$. The remaining target space variable X^{d+1} is renamed $\theta(\mathbf{r}, t)/c$, a function of $\mathbf{r}$ and t. This is called the Cartesian parametrization. The Nambu-Goto action (1.1) then reduces to the Born-Infeld action **[1]**

$$I_a = -a \int dt\, d\mathbf{r}\, \sqrt{c^2 - (\partial_\mu\theta)^2}. \tag{1.8}$$

The corresponding Euler-Lagrange equation is found to be

$$\partial^\nu \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - (\partial_\mu\theta)^2}}\, \partial_\nu\theta \right) = 0, \tag{1.9}$$

which in turn corresponds to the Born-Infeld equations

$$\rho_t + \nabla\cdot\left(\nabla\theta \sqrt{\frac{\rho^2c^2 + a^2}{c^2 + (\nabla\theta)^2}}\right) = 0, \tag{1.10}$$

$$\theta_t + \rho c^2 \sqrt{\frac{c^2 + (\nabla\theta)^2}{\rho^2 c^2 + a^2}} = 0. \tag{1.11}$$

It should be noted that at the limit where $c \to \infty$ the relativistic Born-Infeld model reduces to the non-relativistic Chaplygin model discussed previously, where λ is identified with $\frac{a^2}{2}$ [1]. A solution $\theta_{NR}(\mathbf{r}, t)$ of the Chaplygin equation (1.4) is thus related to its relativistic counterpart $\theta_R(\mathbf{r}, t)$ for the Born-Infeld equations (1.9). This will be discussed in further detail in Subection 1.3.3.

1.1.3. Objective and Organization

The objective of this paper is to use the method of symmetry reduction (MSR) to determine group-invariant solutions of the Chaplygin and Born-Infeld equations. For simplicity, we shall restrict ourselves to the interactive one-dimensional case (that is in one spatial dimension x and time t). In future work, it will be our objective to extend this analysis to 2-dimensional and supersymmetric generalisations [**1, 4, 5**] of this theory.

In Section 1.2 we begin by describing the structure of the 6-dimensional Lie algebra which generates the symmetries of the system of equations (1.5) and (1.6) of the Chaplygin gas. We also classify the associated one-parameter subalgebras in terms of conjugacy classes. Indeed, since the partial differential equations involved have only two independent variables, a one-dimensional subalgebra (which generates a one-dimensional orbit) will be sufficient to reduce the system to ordinary differential equations of the second order. In Section 1.3 we proceed to use MSR to determine solutions which are invariant under the various subalgebras, and compare the resulting solutions to those determined by Jackiw with the Legendre method of Riemann co-ordinates [**1**]. We use the link between the Chaplygin and Born-Infeld models to generate solutions of the Born-Infeld model. In Section 1.4 we discuss the separation of variables admitted by the Chaplygin and Born-Infeld equations, which enables us to construct the families of solitonlike solutions. Finally, Section 1.5 summarizes the results and contains a future outlook concerning the possible extension of the classical Lie approach to partially invariant solutions (of defect $\delta = 1$) for the Chaplygin and Born-Infeld equations.

1.2. The Symmetry Group and Classification of Subalgebras

Let us now investigate the group of symmetries of the interactive Chaplygin gas in one spatial dimension. This fluid is now governed by the system of equations

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} \quad , \qquad \rho_t + \rho_x\theta_x + \rho\,\theta_{xx} = 0, \tag{1.12}$$

obtained from equations (1.5) and (1.6) by taking $\mathbf{r} = x$. Following the standard method for determining the symmetry algebra of a system of differential equations [**6**], we find that the symmetry algebra $\mathcal{G}$ of the system (1.12) is spanned by the six independent vector fields

$$\begin{gathered} P_1 = \partial_x \ , \qquad P_0 = \partial_t \ , \qquad B = t\partial_x + x\partial_\theta \ , \qquad Z = \partial_\theta \ , \\ D_1 = x\partial_x + 2t\partial_t + \rho\partial_\rho \ , \qquad D_2 = x\partial_x + 2\theta\partial_\theta - \rho\partial_\rho . \end{gathered} \tag{1.13}$$

The commutation relations of the Lie algebra $\mathcal{G}$ are given in Table I.

Tab. I. Commutation table for the Lie algebra $\mathcal{G}$

X\Y	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{D_2}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_0}$
$\mathbf{D_1}$	0	0	B	0	$-P_1$	$-2P_0$
$\mathbf{D_2}$	0	0	$-B$	$-2Z$	$-P_1$	0
$\mathbf{B}$	$-B$	B	0	0	$-Z$	$-P_1$
$\mathbf{Z}$	0	$2Z$	0	0	0	0
$\mathbf{P_1}$	P_1	P_1	Z	0	0	0
$\mathbf{P_0}$	$2P_0$	0	P_1	0	0	0

The vector fields P_1 and P_0 generate translations in space and time respectively, while Z generates a translation in the dependent variable $\theta(\mathbf{r}, t)$. The element B corresponds to a Galilean boost so that $\{P_0, P_1, B\}$ generate the Galilean algebra in one spatial dimension. The fields D_1 and D_2 correspond to two different types of dilatation. The group G of symmetries is obtained by integrating the vector fields in $\mathcal{G}$ and it acts on the independent and dependent variables as

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \mathrm{e}^{d_1+d_2}\left((x-x_0)+b(t-t_0)\right) \ , \\
\tilde{t} &= \mathrm{e}^{2d_1}(t-t_0) \ , \\
\tilde{\theta} &= \mathrm{e}^{2d_2}\left(\theta+b(x-x_0)+\frac{1}{2}b^2(t-t_0)+z\right) \ , \\
\tilde{\rho} &= \mathrm{e}^{d_1-d_2}\rho \ .
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

where $g = (d_1, d_2, b, x_0, t_0, z)$ is an arbitrary element of G, all the parameters being real numbers.

The algebra $\mathcal{G}$ can be decomposed into the following semi-direct sum :

$$
\mathcal{G} = \{D_1, D_2, B\} \ni \{P_1, P_0, Z\} = \mathcal{L} \ni \mathcal{N}, \tag{1.15}
$$

where $\mathcal{L} = \{D_1, D_2, B\}$, and $\mathcal{N} = \{P_1, P_0, Z\}$ is an Abelian ideal, so that we can directly apply the method of subalgebra classification [7] to give the non-equivalent one-dimensional splitting and non-splitting subalgebras of $\mathcal{G}$. The splitting subalgebras are given by

$$
\mathcal{L}_1 = \{D_1\}, \qquad \mathcal{L}_2 = \{D_2\}, \qquad \mathcal{L}_3 = \{B\}, \qquad \mathcal{L}_{4,a} = \{D_1 + aD_2,\ a \neq 0\},
$$
$$
\mathcal{L}_{5,\varepsilon} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B,\ \varepsilon = \pm 1\} \ ,
$$

as subalgebras of $\mathcal{L}$, and by

$$
\mathcal{N}_1 = \{P_0\}, \qquad \mathcal{N}_2 = \{P_1\}, \qquad \mathcal{N}_3 = \{Z\}, \qquad \mathcal{N}_{4,\varepsilon} = \{Z + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}, \tag{1.16}
$$

as subalgebras of $\mathcal{N}$. The non-splitting subalgebras in $\mathcal{G}$ are given by

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{1,\varepsilon} = \{D_1 + \varepsilon Z,\ \varepsilon = \pm 1\} \ , \qquad \mathcal{K}_{2,\varepsilon} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1,\ \varepsilon = \pm 1\} \ , \\
&\mathcal{K}_{3,\varepsilon} = \{D_2 + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\} \ , \qquad \mathcal{K}_{4,\varepsilon} = \{B + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

All of these subalgebras, except $\mathcal{N}_3$ which does not contain any derivative with respect to the independent variables x and t, will give rise to a reduction process and to invariant solutions.

1.3. Symmetry Reduction and Group-invariant Solutions

In this section, we use the method of characteristics to determine the invariants and reduced differential equations corresponding to each subalgebra listed in Section 1.2. In particular for ODE's of second order it is possible to determine whether they are of Painlevé type (i.e. whether all their critical points are independent of the initial data). When it is possible, we determine explicit solutions of the Chaplygin and Born-Infeld equations, and compare the former to the ones determined by Jackiw [**1**].

1.3.1. Reduction of the System

Passing systematically through all subgroups of G with orbits of codimension one, we obtain all symmetry variables. Substituting each of these into the equations (1.12) we reduce them to a system of ODE's. The result of this analysis can be summarized as follows, where ξ is the symmetry variable, $F(\xi)$ and $G(\xi)$ are invariant functions related to θ and ρ respectively, and have to be determined using the reduced differential equations. The different classes of symmetry reductions are summarized in Tables II and III. They lead us to fourteen different types of solutions.

1.3.2. Group-invariant Solutions of the Chaplygin Model

Let us now discuss certain classes of solutions to the Chaplygin equations obtained from the solutions to the reduced equations determined in Subsection 1.3.1. We perform a singularity analysis to determine which of these reduced ODE's can be transformed to the standard Painlevé form.

For the case $\mathcal{L}_1$, we get

$$\theta(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{a_0}} \ln\left(\frac{\sqrt{a_0}x^2 + t}{\sqrt{a_0}x^2 - t}\right) + c_0, \qquad \rho(x,t) = \sqrt{\frac{2\lambda}{a_0}}\left(\frac{t^2 - a_0x^4}{x^3}\right), \quad (1.18)$$

where a_0 and c_0 are real constants, and $a_0 \neq 0$. The velocity is given by

$$v(x,t) = \frac{xt}{t^2 - a_0x^4}. \quad (1.19)$$

TAB. II. Invariants of the subalgebras of the Lie algebra $\mathcal{G}$

Subalgebra	Symmetry variable	Function θ	Function ρ
$\mathcal{L}_1 = \{D_1\}$	$\xi = \frac{\sqrt{t}}{x}$	$\theta = F(\xi)$	$\rho = \sqrt{t}G(\xi)$
$\mathcal{L}_2 = \{D_2\}$	$\xi = t$	$\theta = x^2F(\xi)$	$\rho = \frac{1}{x}G(\xi)$
$\mathcal{L}_3 = \{B\}$	$\xi = t$	$\theta = F(\xi) + \frac{1}{2\xi}x^2$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{L}_{4,-1} = \{D_1 - D_2\}$	$\xi = x$	$\theta = \frac{1}{t}F(\xi)$	$\rho = tG(\xi)$
$\mathcal{L}_{4,1} = \{D_1 + D_2\}$	$\xi = \sqrt{\frac{t}{x}}$	$\theta = tF(\xi)$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{L}_{4,a} = \{D_1 + aD_2,\ a \neq \pm 1, 0\}$	$\xi = t^{1/2}x^{-\left(\frac{1}{1+a}\right)}$	$\theta = t^aF(\xi)$	$\rho = t^{\left(\frac{1-a}{2}\right)}G(\xi)$
$\mathcal{L}_{5,\varepsilon} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = \frac{2x}{t} - \varepsilon \ln t$	$\theta = \frac{1}{2}tF(\xi) + \frac{\varepsilon}{4}\xi t \ln t + \frac{1}{8}t(\ln t)^2$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{N}_1 = \{P_0\}$	$\xi = x$	$\theta = F(\xi)$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{N}_2 = \{P_1\}$	$\xi = t$	$\theta = F(\xi)$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{N}_{4,\varepsilon} = \{Z + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = x$	$\theta = F(\xi) + \varepsilon t$	$\rho = G(\xi)$
$\mathcal{K}_{1,\varepsilon} = \{D_1 + \varepsilon Z,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = \frac{\sqrt{t}}{x}$	$\theta = F(\xi) + \varepsilon \ln x$	$\rho = xG(\xi)$
$\mathcal{K}_{2,\varepsilon} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = x - \frac{1}{2}\varepsilon \ln t$	$\theta = \frac{1}{t}F(\xi)$	$\rho = tG(\xi)$
$\mathcal{K}_{3,\varepsilon} = \{D_2 + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = xe^{-\varepsilon t}$	$\theta = x^2F(\xi)$	$\rho = \frac{1}{x}G(\xi)$
$\mathcal{K}_{4,\varepsilon} = \{B + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = \varepsilon x - \frac{1}{2}t^2$	$\theta = F(\xi) + \xi t + \frac{1}{6}t^3$	$\rho = G(\xi)$

TAB. III. Reduced equations of the subalgebras of the Lie algebra $\mathcal{G}$

Subalgebra	Equation in G	Equation in F
$\mathcal{L}_1$	$G = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}\xi F_\xi + \frac{1}{2}\xi^4(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$\xi^2 F_{\xi\xi} = \xi F_\xi + 4\xi^4(F_\xi)^2$
$\mathcal{L}_2$	$G = \sqrt{\lambda}\left(F_\xi + 2F^2\right)^{-1/2}$	$F_{\xi\xi} + 4FF_\xi = 0$
$\mathcal{L}_3$	$G = \sqrt{\lambda}\left(F_\xi\right)^{-1/2}$	$\xi F_{\xi\xi} - 2F_\xi = 0$
$\mathcal{L}_{4,-1}$	$G = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}(F_\xi)^2 - F\right)^{-1/2}$	$FF_{\xi\xi} - (F_\xi)^2 + F = 0$
$\mathcal{L}_{4,1}$	$G = \sqrt{\lambda}\left(F + \frac{1}{2}\xi F_\xi + \frac{1}{8}\xi^6(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$-\frac{3}{8}\xi F_\xi + \frac{3}{4}\xi^5 FF_\xi - \frac{1}{8}\xi^2 F_{\xi\xi} + \frac{1}{4}\xi^6 FF_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{L}_{4,a}$	$G = \sqrt{\lambda}\Big(aF + \frac{1}{2}\xi F_\xi + \frac{1}{2(a+1)^2}\xi^{2a+4}(F_\xi)^2\Big)^{-1/2}$	$\frac{1}{2}a(1-a)F + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}a\right)\xi F_\xi + \frac{(1-a)}{2(1+a)^2}\xi^{2a+4}(F_\xi)^2 + \frac{a(a+2)}{(a+1)^2}\xi^{2a+3}FF_\xi - \frac{1}{8}\xi^2 F_{\xi\xi} + \frac{a}{(a+1)^2}\xi^{2a+4}FF_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{L}_{5,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\Big(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}\varepsilon F_\xi + \frac{1}{2}(F_\xi)^2 - \frac{1}{2}\xi F_\xi + \frac{1}{4}\varepsilon\xi\Big)^{-1/2}$	$2\varepsilon F_\xi + 2\xi^2 F_{\xi\xi} - \varepsilon\xi + 2F_{\xi\xi} - 1 - 8FF_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{N}_1$	$G = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$0 = 0$
$\mathcal{N}_2$	$G = \sqrt{\lambda}\left(F_\xi\right)^{-1/2}$	$F_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{N}_{4,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$F_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{K}_{1,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\Big(\frac{1}{2\xi}F_\xi + \frac{1}{2}\xi^2(F_\xi)^2 - \varepsilon\xi F_\xi + \frac{1}{2}\Big)^{-1/2}$	$F_\xi - \xi F_{\xi\xi} + 4\varepsilon\xi^3 F_{\xi\xi} + 4\xi^3(F_\xi)^2 = 0$
$\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\left(-F - \frac{1}{2}\varepsilon F_\xi + \frac{1}{2}(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$F + \frac{3}{4}\varepsilon F_\xi + FF_{\xi\xi} + \frac{1}{8}F_{\xi\xi} - (F_\xi)^2 = 0$
$\mathcal{K}_{3,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\Big(-\varepsilon\xi F_\xi + 2F^2 + 2\xi FF_\xi + \frac{1}{2}\xi^2(F_\xi)^2\Big)^{-1/2}$	$F_\xi + \xi F_{\xi\xi} - 8\varepsilon FF_\xi + 2\xi\varepsilon(F_\xi)^2 - 4\varepsilon\xi FF_{\xi\xi} = 0$
$\mathcal{K}_{4,\varepsilon}$	$G = \sqrt{\lambda}\left(\xi + \frac{1}{2}(F_\xi)^2\right)^{-1/2}$	$\xi F_{\xi\xi} - \frac{1}{2}F_\xi = 0$

This solution is defined for $\sqrt{a_0}x^2 > |t|$. It is noticeable that at $t = 0$ this solution reduces to $\theta = c_0$, $\rho = \sqrt{2\lambda a_0}x$. Thus, we have a zero velocity and linear density of the fluid.

In an analysis performed on the Chaplygin gas in one spatial dimension, Jackiw [1] considered the following method in order to determine solutions of the Chaplygin gas equations. A Legendre transform is used to exchange the independent variables (x, t) with the dependent ones (θ, ρ). In fact, the new independent variables used are

$$s = \sqrt{2\lambda}/\rho\ , \qquad p = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \theta_x, \tag{1.20}$$

where p is exactly the velocity $v(x,t)$. The following function of s and p is then defined :

$$\Psi(p, s) = \theta(x,t) - t\theta_t - x\theta_x. \tag{1.21}$$

From the equations (1.12) it is easily shown that

$$\Psi(p, s) = \theta(x,t) + \frac{1}{2}t(p^2 - s^2) - xp \tag{1.22}$$

and so

$$\frac{\partial\Psi}{\partial p} = tp - x\ , \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial s} = -ts. \tag{1.23}$$

The equations (1.12) can then be re-written as the linear equation

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial\Psi}{\partial s} = 0. \tag{1.24}$$

The general solution of (1.24) is given in terms of two arbitrary functions $f = f(p+s)$ and $g = g(p-s)$ (where $p \pm s$ are called Riemann co-ordinates) :

$$\Psi(p, s) = f(p+s) - sf'(p+s) + g(p-s) + sg'(p-s). \tag{1.25}$$

It is easy to show that the solution (1.18) corresponds to Jackiw's solution where

$$\Psi(p, s) = \frac{1}{4\sqrt{a_0}}\ln\left(\frac{s+p}{s-p}\right) + c_0 + \frac{1}{2\sqrt{a_0}}\frac{sp}{(s-p)(s+p)}. \tag{1.26}$$

and

$$f(z) = \frac{1}{4\sqrt{a_0}}\ln z + \frac{1}{2}c_0, \qquad g(-z) = -\frac{1}{4\sqrt{a_0}}\ln z + \frac{1}{2}c_0.$$

where, for each of the functions f and g, the variable z represents the corresponding argument as described in equation (1.25).

For $\mathcal{L}_2$, we have

$$\theta(x,t) \;=\; -a_0 x^2 \left(\frac{1+\mathrm{e}^{4a_0(t-t_0)}}{1-\mathrm{e}^{4a_0(t-t_0)}}\right) , \qquad \rho(x,t) \;=\; \sqrt{\frac{\lambda}{2a_0^2}\frac{1}{x}}, \tag{1.27}$$

$$v(x,t) \;=\; -2a_0 x \left(\frac{1+\mathrm{e}^{4a_0(t-t_0)}}{1-\mathrm{e}^{4a_0(t-t_0)}}\right), \tag{1.28}$$

where a_0 and t_0 are real constants, and $a_0 \neq 0$. This solution has a singularity at line $t = t_0$ which seems to indicate that it does not correspond to a physical theory at time t_0. As $t \longrightarrow +\infty$, θ approaches the function $f_+(x) = ax^2$, and as $t \longrightarrow -\infty$ it approaches $f_-(x) = -ax^2$. The density ρ has a pole at $x = 0$ and is constant in time. This solution corresponds to the function (1.25) given explicitly by

$$\Psi(p,s) \;=\; -\frac{sp}{4a_0} \;+\; \frac{1}{8a_0}(p^2-s^2)\ln\left(\frac{p+s}{p-s}\right) \;+\; \frac{1}{2}t_0(p^2-s^2),$$

where

$$f(z) \;=\; \frac{t_0}{4}z^2 \;+\; \frac{1}{8a_0}z^2\ln z, \qquad g(z) \;=\; \frac{t_0}{4}z^2 \;-\; \frac{1}{8a_0}z^2\ln z. \tag{1.29}$$

For $\mathcal{L}_3$, we have

$$\theta(x,t) \;=\; \frac{x^2}{2t} \;+\; \frac{\lambda t^3}{3a_0^2} \;+\; c_0 \;, \qquad \rho(x,t) \;=\; \frac{a_0}{t}, \tag{1.30}$$

so that the velocity is now

$$v(x,t) \;=\; \frac{x}{t}, \tag{1.31}$$

where a_0 and c_0 are real constants, and $a_0 \neq 0$. There is a pole singularity at $t = 0$. As $t \longrightarrow \infty$, the velocity potential θ becomes unbounded and the density ρ approaches zero. The velocity (1.31) is linear in x, but also approaches zero as $t \longrightarrow \infty$. This solution corresponds to the case

$$\Psi(p,s) \;=\; c_0 \;-\; \frac{a_0 s^3}{3\sqrt{2\lambda}}, \tag{1.32}$$

where f and g in (1.25) are given by

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(c_0 + \frac{1}{6\sqrt{2\lambda}}a_0 z^3\right), \qquad g(z) \;=\; \frac{1}{2}\left(c_0 - \frac{1}{6\sqrt{2\lambda}}a_0 z^3\right).$$

It is interesting to note that the solution (1.32) of the equation (1.24) is invariant under translation by the variable p. This means that invariance under Galilean boost of the original set (1.12) implies a p-invariant solution for (1.24).

For $\mathcal{L}_{4,-1}$, we have

$$\begin{aligned}
\theta(x,t) &= \frac{2}{kt}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}(x+c_0)\right), \\
\rho(x,t) &= \sqrt{\frac{k\lambda}{2}}\frac{t}{\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{k}(x+c_0)\right)},
\end{aligned} \tag{1.33}$$

where k and c_0 are real constants. It is possible to rewrite this solution in a more familiar form. If we take $c_0 = \frac{i\pi}{\sqrt{k}}$ and define $a_0 = \frac{1}{2}\sqrt{k}$, we obtain the solution

$$\theta(x,t) = -\frac{1}{2a_0^2 t}\cosh^2(a_0 x), \qquad \rho(x,t) = \sqrt{2\lambda}\frac{a_0 t}{\cosh^2(a_0 x)}, \tag{1.34}$$

$$v(x,t) = -\frac{1}{a_0 t}\cosh(a_0 x)\,\sinh(a_0 x), \tag{1.35}$$

which is exactly the soliton solution given by Jackiw **[1]**. This solution is not singular in x. The density ρ is zero at time $t = 0$ and becomes unbounded as $t \longrightarrow \infty$. This solution corresponds to the case

$$\Psi(p,s) = \frac{p}{2a_0}\ln\left(\frac{s+p}{s-p}\right) - \frac{s}{a_0}, \tag{1.36}$$

where $\Psi(p,s) = (1.25)$ with

$$f(z) = g(-z) = \frac{z}{2a_0}\ln z.$$

For $\mathcal{L}_{4,1}$, we get

$$\theta(x,t) = a_0 t - \frac{a_1}{2}x, \qquad \rho(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{8}a_1^2 + a_0}}, \tag{1.37}$$

Here ρ and v are constant. In this case, the variables p and s defined in equation (1.20) are both constant, and so the change of variable $(x,t) \longrightarrow (s,p)$ is non-invertible. This singular solution therefore cannot be found from the general solution proposed by Jackiw in the sense that we cannot find corresponding functions $\Psi(p,s)$, $f(z)$ and $g(z)$.

For the case $\mathcal{L}_{1,a}$ with $a \neq \pm 1, 0$, we have to solve the equation for F listed in Table III. The analysis of this equation gives rise to a family of ODE's which do not enter the classification of Painlevé-Gambier **[8, 9]** since they do not possess the Painlevé property **[10]**.

For $\mathcal{L}_{5,\varepsilon}$, the method of symmetry reduction on ODE's can be used to reduce the order of equation for F listed in Table III. Using the infinitesimal symmetry generator $2\partial_x + x\partial_F$, we make the following change of variable [**6**]

$$y = 4F - x^2, \qquad w = \frac{1}{2}x, \tag{1.38}$$

which allows us to rewrite the equation as

$$2(y-1)w_{yy} + 16(1-y)(w_y)^3 + 4\varepsilon(w_y)^2 = 0. \tag{1.39}$$

Setting $z(y) = w_y$, we obtain the first-order ODE

$$2(y-1)z_y + 16(1-y)z^3 + 4\varepsilon z^2 = 0, \tag{1.40}$$

which is Abel's Equation of the first kind, and therefore does not possess explicit analytical solutions [**11**]. In the literature [**12**] one can find existence theorems for solutions of (1.40) with property $z_y(0) = 0$ and $\lim_{u\to\infty} z(u) = 0$. For some solutions their Taylor expansions were found and others are given in tables [**12**].

For $\mathcal{N}_1$, $\theta = \theta(x)$ is an arbitrary function of x and we have

$$\rho = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\theta_x}, \tag{1.41}$$

$$v(x,t) = \theta_x \neq 0. \tag{1.42}$$

Thus, any static velocity potential will satisfy the system of equations (1.12) provided that the density is also static and is related to θ through equation (1.41). Such a solution cannot be obtained from the general solution (1.25) since the change of variables $(x,t) \to (s,p)$ is again singular. Indeed, we have $s = p = \theta_x$.

For $\mathcal{N}_2$, we have

$$\theta(x,t) = \frac{\lambda}{a_0^2}t + c_0\,, \qquad \rho(x,t) = a_0. \tag{1.43}$$

Here we obtain uniform (in x) solutions where the potential θ evolves in time in a linear manner. Thus, the velocity is zero and the density constant in both time and space.

For $\mathcal{N}_{4,\varepsilon}$, we have

$$\theta(x,t) = a_0 x + \varepsilon t + a_1\,, \qquad \rho(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{2}a_0^2 + \varepsilon}} \tag{1.44}$$

and

$$v(x,t) = a_0, \tag{1.45}$$

where a_0 and a_1 are constants. Again, we have a trivial constant solution.

For $\mathcal{K}_{1,\varepsilon}$, we get

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon \ln(x^2 - 2\varepsilon t) + c_0\,, \qquad \rho(x,t) = \frac{\sqrt{2\lambda}(x^2 - 2\varepsilon t)}{\sqrt{4\varepsilon t - x^2}}, \tag{1.46}$$

$$v(x,t) = \frac{\varepsilon x}{x^2 - 2\varepsilon t}. \tag{1.47}$$

The two cases $\varepsilon = 1$ and $\varepsilon = -1$ are qualitatively different. When $\varepsilon = 1$ we require $2t < x^2 < 4t$ for the solution to be defined. When $\varepsilon = -1$ the condition becomes $-2t < x^2 < -4t$, which implies that the density ρ is real-valued only for negative values of t. Thus, it does not correspond to a physical density. The solution (1.46) corresponds to the case

$$\Psi(p,s) = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{(s^2 - 3p^2)}{(p^2 - s^2)} - \frac{1}{2}\varepsilon \ln(p^2 - s^2) + \frac{1}{2}\varepsilon \ln 2 + c_0, \tag{1.48}$$

where $\Psi(p,s) = (1.25)$ with

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{2}\varepsilon \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{z}\right) - \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}c_0.$$

For $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$, we get

$$\theta(x,t) = te^{4\varepsilon(x_0 - x)}\,, \qquad \rho(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{e^{2\varepsilon(x_0 - x)}\sqrt{1 + 8t^2 e^{4\varepsilon(x_0 - x)}}}, \tag{1.49}$$

$$v(x,t) = -4\varepsilon t e^{4\varepsilon(x_0 - x)}. \tag{1.50}$$

Thus ρ is always a finite, non-zero and positive function, while θ becomes infinite as $x \to -\infty$ or $|t| \to \infty$. This solution corresponds to the case

$$\Psi(p,s) = \frac{1}{4}\varepsilon p \ln\left(\frac{1}{2}(s^2 - p^2)\right) - x_0 p, \tag{1.51}$$

where $\Psi(p,s) = (1.25)$ with

$$f(z) = -g(-z) = \frac{1}{4}\varepsilon z \ln z - \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{8}\varepsilon \ln 2\right) z.$$

For $\mathcal{K}_{3,\varepsilon}$, we have

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{a_0 + 2\varepsilon t} + \varepsilon x^2\right)\,, \qquad \rho(x,t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon e^{a_0 + 2\varepsilon t} + \frac{1}{2}x^2}}, \tag{1.52}$$

$$v(x,t) \;=\; \varepsilon x. \tag{1.53}$$

Here θ and ρ are always non-zero, finite and positive. As $t \to \infty$ or $|x| \to \infty$, θ becomes unbounded and ρ approaches zero. This solution corresponds to the case

$$\Psi(p,s) = \frac{1}{4}\varepsilon\left(s^2+p^2\right) - \frac{1}{4}\varepsilon(s^2-p^2)\ln\left(\frac{1}{2}\varepsilon(s^2-p^2)\right) + \frac{1}{4}\varepsilon(s^2-p^2)\,a_0 - \varepsilon p^2, \tag{1.54}$$

where $\Psi(p,s) =$ (1.25) with

$$f(z) \;=\; g(-z) \;=\; -\frac{3}{8}\varepsilon z^2 \;-\; \frac{1}{8}\varepsilon a_0 z^2 \;+\; \frac{1}{8}\varepsilon z^2 \ln\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

For $\mathcal{K}_{4,\varepsilon}$, we have

$$\theta(x,t) = \varepsilon x t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}a_0\varepsilon\frac{\left(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2\right)^{3/2}}{\sqrt{\lambda - a_0^2/2}} + c_0, \qquad \rho(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda - a_0^2/2}{\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2}}, \tag{1.55}$$

$$v(x,t) \;=\; \varepsilon t \;+\; \frac{a_0}{\sqrt{\lambda - a_0^2/2}}\left(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2\right)^{1/2}, \tag{1.56}$$

where $x > \frac{1}{2}t^2$ (in the case where $\varepsilon = 1$) or $x < -\frac{1}{2}t^2$ (in the case where $\varepsilon = -1$). This solution corresponds to the case

$$\Psi(p,s) \;=\; \frac{1}{6}\varepsilon p^3 \;+\; \frac{1}{3}\varepsilon\frac{a_0^3}{(2\lambda)^{3/2}}s^3 \;-\; \frac{1}{2}\varepsilon p s^2 \;+\; \frac{2}{3}\varepsilon\frac{a_0}{(2\lambda)^{3/2}}\sqrt{\lambda - a_0^2/2}\quad s^3, \tag{1.57}$$

where $\Psi(p,s) =$ (1.25) with

$$f(z) \;=\; \frac{1}{12}\varepsilon z^3 \;-\; \frac{1}{12}\varepsilon\frac{a_0^3}{(2\lambda)^{3/2}}z^3 \;-\; \frac{1}{6}\varepsilon\frac{a_0}{(2\lambda)^{3/2}}\sqrt{\lambda - a_0^2/2}\quad z^3,$$

$$g(z) \;=\; \frac{1}{12}\varepsilon z^3 \;+\; \frac{1}{12}\varepsilon\frac{a_0^3}{(2\lambda)^{3/2}}z^3 \;+\; \frac{1}{6}\varepsilon\frac{a_0}{(2\lambda)^{3/2}}\sqrt{\lambda - a_0^2/2}\quad z^3.$$

It has therefore been demonstrated that for the subalgebras of types $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_{1,-1}\}$ and $\{\mathcal{K}_{1,\varepsilon}, \mathcal{K}_{2,\varepsilon}, \mathcal{K}_{3,\varepsilon}, \mathcal{K}_{4,\varepsilon}\}$, the invariant solutions fall into the general solution (1.25) given by Jackiw. However, for the subalgebras $\{\mathcal{L}_{1,1}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_{4,\varepsilon}\}$, the transformations $(x,t) \to (s,p)$ are non-invertible and so the invariant solutions are not included in the general solution (1.25).

1.3.3. Solutions of the Born-Infeld Model

Each solution of the Chaplygin equations (1.12) can be used to obtain an equivalent solution of the relativistic Born-Infeld equations (1.10) and (1.11) in one spatial dimension. Since the Chaplygin and Born-Infeld models involve two distinct parametrizations of the Nambu-Goto target space variables X^0 and X^{d+1}, we equate these variables to both their relativistic and non-relativistic representations :

$$X^0 = ct_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t_{NR} + \theta_{NR}(t_{NR}, \mathbf{r})\right), \tag{1.58}$$

$$X^{d+1} = \frac{1}{c}\theta(t_R, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t_{NR} - \theta_{NR}(t_{NR}, \mathbf{r})\right). \tag{1.59}$$

Renaming the time variables $T = \frac{1}{c}t_{NR}$ and $t = t_R$, we obtain the following method of solution transformation described by Jackiw [1]. If $\theta_{NR}(\mathbf{r}, t)$ is a solution of the Chaplygin equation (1.4), then a solution $\theta_R(\mathbf{r}, t)$ of the Born-Infeld equation can be determined as follows. First, determine the function $T(\mathbf{r}, t)$ from the equation

$$T + \frac{1}{c^2}\theta_{NR}(\mathbf{r}, T) = \sqrt{2}t, \tag{1.60}$$

then

$$\theta_R(\mathbf{r}, T) = \frac{1}{\sqrt{2}}c^2 T - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{NR}(\mathbf{r}, T) = c^2(\sqrt{2}T - t) \tag{1.61}$$

is an associated Born-Infeld solution. Since the equation (1.60) cannot always be solved explicitly for $T(\mathbf{r}, t)$ it follows that explicit Born-Infeld solutions cannot always be found in this manner. For instance, in the case of $\mathcal{L}_1$, the Born-Infeld solution is

$$\theta_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}c^2 T - \frac{1}{4\sqrt{2a_0}}\ln\left(\frac{\sqrt{a_0}x^2 + T}{\sqrt{a_0}x^2 - T}\right) - \frac{c^2}{\sqrt{2}}a_1, \tag{1.62}$$

where $T(x, t)$ satisfies the equation

$$T + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{4\sqrt{a_0}}\ln\left(\frac{\sqrt{a_0}x^2 + T}{\sqrt{a_0}x^2 - T}\right)\right) + a_1 = \sqrt{2}t \tag{1.63}$$

and the density (for any general solution θ_R) is

$$\rho_R(x, t) = \frac{a(\theta_R)_t}{c^2\sqrt{c^2 - \partial_\mu(\theta_R)\partial^\mu(\theta_R)}}. \tag{1.64}$$

However, for the subalgebras $\mathcal{L}_{4,1}$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_{4,\varepsilon}$ and $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$, we do obtain explicit Born-Infeld solutions equivalent to the corresponding Chaplygin solutions.

For $\mathcal{L}_{4,1}$, we have

$$\begin{aligned} \theta_R(x,t) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}a_0 x + \left(1-\frac{a_1}{c^2}\right)c^2 t}{1+\frac{a_1}{c^2}} , \\ \rho_R(x,t) &= \frac{a\left(1-\frac{a_1}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{a_1}{c^2}\right)\sqrt{c^2+\frac{a_0^2}{2(1+a_1/c^2)^2}}} . \end{aligned} \tag{1.65}$$

This represents a travelling wave solution.

For $\mathcal{N}_1$, we have

$$\theta_R(x,t) = c^2 t - \sqrt{2} f(x) , \qquad \rho_R(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{2}\left(\frac{df}{dx}\right)} . \tag{1.66}$$

where $f = f(x)$ is an arbitrary function, and is in fact the non-relativistic solution $\theta_{NR} = f(x)$. This is a generalized travelling wave (ie Riemann wave). The gradient catastrophe occurs where $\frac{df}{dx} = 0$, which allows a shock wave.

For $\mathcal{N}_2$, we have

$$\theta_R(x,t) = a_0 t + c_0 , \qquad \rho_R(x,t) = \frac{-a a_0}{c\sqrt{c^4 - a_0^2}} . \tag{1.67}$$

where $|a_0| < c^2$. This is a trivial solution since using the invariance with respect to t leads us to a constant solution.

For $\mathcal{N}_{4,\varepsilon}$, we have

$$\theta_R(x,t) = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{c^2}}\left((c^2-\varepsilon)t + a_0 x + a_1\right) , \qquad \rho_R(x,t) = \frac{-a(c^2-\varepsilon)}{c^2\sqrt{4\varepsilon + a_0^2}} , \tag{1.68}$$

where if $\varepsilon = -1$ then $|a_0| > 2$. This represents a travelling wave.

For $\mathcal{K}_{2,\varepsilon}$, we have

$$\begin{aligned} \theta_R(x,t) &= \frac{c^2 t\left(c^2 - e^{4\varepsilon(x_0-x)}\right)}{\left(c^2 + e^{4\varepsilon(x_0-x)}\right)} , \\ \rho_R(x,t) &= \frac{-a\left(c^4 - e^{8\varepsilon(x_0-x)}\right)}{\sqrt{4c^4 e^{4\varepsilon(x_0-x)}\left(c^2+e^{4\varepsilon(x_0-x)}\right)^2 + 64 c^8 t^2 e^{4\varepsilon(x_0-x)}}} . \end{aligned} \tag{1.69}$$

This is a kink type solution.

1.4. THE METHOD OF DIFFERENTIAL CONSTRAINTS

We determined in Section 1.3 that the group-invariant solutions of the Chaplygin system (1.12) were either singular or derivable from the general solution of the second-order partial differential equation (1.24). A further generalization of the classical symmetry reduction is the introduction of the general "side conditions" method **[13]**. This method includes all known methods for determining special classes of solutions of PDE's (among others group-invariant solutions, non-classical and weak symmetries, partially invariant solutions, separation of variables, and many others). Differential constraints possess a group interpretation as "conditional symmetries" **[14, 15, 16]**. It consists basically in modifying the original system by adding to it certain compatible differential constraints. The overdetermined system of equations obtained in this way admits, in some cases, a larger class of Lie point symmetry groups, and consequently can provide new classes of solutions of the original system. In this section our choice of differential constraints is motivated by our main aim which is the construction of multiplicative separation of dependent variables

$$u_i(x,t) = f_i(x)g_i(t), \qquad i = 1,2, \tag{1.70}$$

for some functions f_i and g_i of one variable. Here, u_1 and u_2 stand for ρ and θ respectively. Ansatz (1.70) corresponds to the following second order differential constraints

$$\partial_x \partial_t \ln u_i = 0, \qquad i = 1,2. \tag{1.71}$$

Note that the differential constraints (1.71) are no longer restricted to be first order PDE's provided by the characteristics of symmetries generated by (1.13). Hence, according to Olver **[6]** solutions of the overdetermined system composed of the Chaplygin equations (1.12) (or Born-Infeld equations (1.10), (1.11)) subjected to (1.71) are no longer group-invariant solutions.

We now show that these forms of constraints are compatible with the Chaplygin system (1.12) and enable us to construct several families of solitonlike solutions. Indeed, substituting (1.70) into (1.12) we obtain a system of differential equations

$$
\begin{aligned}
g_{2,t} f_2 + \frac{1}{2} g_2^2 (f_{2,x})^2 &= \frac{\lambda}{f_1^2 g_1^2}, \\
g_{1,t} f_1 + g_1 g_2 f_{1,x} f_{2,x} + g_1 g_2 f_1 f_{2,xx} &= 0,
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

Eliminating function $f_1 g_1$ from (1.72) we obtain

$$
-\frac{1}{2} g_{2,tt} f_2 - g_2 g_{2,t} (f_{2,x})^2 + g_2 g_{2,t} f_2 f_{2,xx} = 0. \tag{1.73}
$$

Integrating with respect to t and relabeling the functions f_2 and g_2 as f and g respectively, we obtain

$$
-\frac{1}{2} g_t f - \frac{1}{2} g^2 (f_x)^2 + \frac{1}{2} g^2 f f_{xx} = \gamma(x), \tag{1.74}
$$

Let us consider separately three cases, namely (a) the case in which $\gamma(x)$ vanishes everywhere, (b) the case where $\gamma(x) = f$ and $f f_{xx} - (f_x)^2 = f$, and (c) the case where $\gamma(x) = f$ and $f f_{xx} - (f_x)^2 = -f$. It is easy to show that in case (a), when $\gamma(x) = 0$ identically, the solution of the system (1.74) takes the form

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= \frac{2K_2}{K_3(K_2 t + K_1)} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x + x_0)\right), \\
\rho(x,t) &= \sqrt{\frac{K_3 \lambda}{2}} \frac{K_2 t + K_1}{K_2 \sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x + x_0)\right)}.
\end{aligned}
\tag{1.75}
$$

For $K_3 \neq 0$ and $t \neq -\frac{K_1}{K_2}$, the expressions (1.75) represent a bump-type solution. Making use of the transformations (1.60) and (1.61), we get a solution of the Born-Infeld equation (1.9)

$$
\begin{aligned}
\theta_R(x,t) = &- \frac{c^2 K_1}{\sqrt{2} K_2} \\
&\pm \frac{c^2}{\sqrt{2} K_2} \sqrt{2 K_2^2 t^2 + 2\sqrt{2} K_1 K_2 t + K_1^2 - \frac{8 K_2^2}{c^2 K_3} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x + x_0)\right)}
\end{aligned}
\tag{1.76}
$$

This is a bump type solution, called in literature a Gaussian solution [17].

In the cases (b) and (c), the equation (1.74) can be integrated to give the solutions

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= -\frac{2\sqrt{2}}{K_3}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\left(\frac{1+e^{2\sqrt{2}(t+K_1)}}{1-e^{2\sqrt{2}(t+K_1)}}\right),\\
\rho(x,t) &= \sqrt{\lambda}\Bigg\{\frac{4}{K_3}\frac{\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)}{(1-e^{2\sqrt{2}(t+K_1)})^2}\Bigg(-4e^{2\sqrt{2}(t+K_1)}\\
&\quad+\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)(1+e^{2\sqrt{2}(t+K_1)})^2\Bigg)\Bigg\}^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{1.77}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= \frac{2\sqrt{2}}{K_3}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\tan(\sqrt{2}(t_0-t)),\\
\rho(x,t) &= \sqrt{\lambda}\Bigg\{\frac{4}{K_3}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\Bigg(\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\times\\
&\quad\tan^2(\sqrt{2}(t_0-t))-\sec^2(\sqrt{2}(t_0-t))\Bigg)\Bigg\}^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{1.78}
$$

respectively. For $K_3 \neq 0$ and $t \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 1 - K_1$, the solution (1.77) represents a bump-type solution. With a specific choice of the constants K_1, K_3 and x_0 such that the density ρ is non-singular at $x = 0$, we get for the solution (1.77) the functions

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^2 x\left(\frac{1+e^{2\sqrt{2}t}}{1-e^{2\sqrt{2}t}}\right),\\
\rho(x,t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\cosh x}\left(\frac{(1-e^{2\sqrt{2}t})^2}{4e^{2\sqrt{2}t}+(1+e^{2\sqrt{2}t})^2\sinh^2 x}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

These functions are represented in Figures 1 and 2. For the solution (1.78), the same choice for the constants K_1, K_3 and x_0, along with $t_0 = 0$, lead to

$$
\begin{aligned}
\theta(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh^2 x\tan(\sqrt{2}t),\\
\rho(x,t) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\cosh x}\left(\frac{1}{\sec^2(\sqrt{2}t)+\sinh^2 x\tan^2(\sqrt{2}t)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{1.80}
$$

These functions are represented in Figures 3 and 4. For this solution (1.78), the function $\theta(x,t)$ includes discontinuities at $t = t_0 + n\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, where n is an integer.

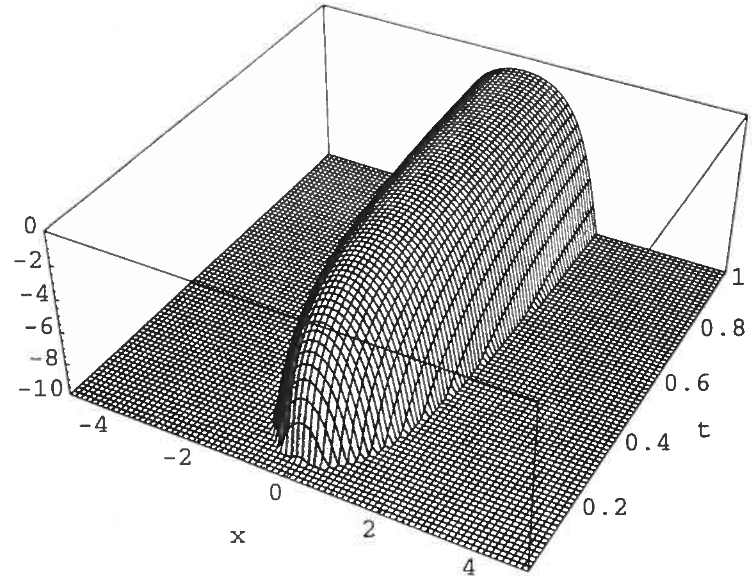

FIG. 1. The function $\theta(x,t)$ in eq. (1.79)

The density $\rho(x,t)$ is defined and continuous everywhere and is a multi-bump solution.

Once again, we obtain the Born-Infeld solutions :

$$\theta_R(x,t) = c^2(\sqrt{2}T - t), \tag{1.81}$$

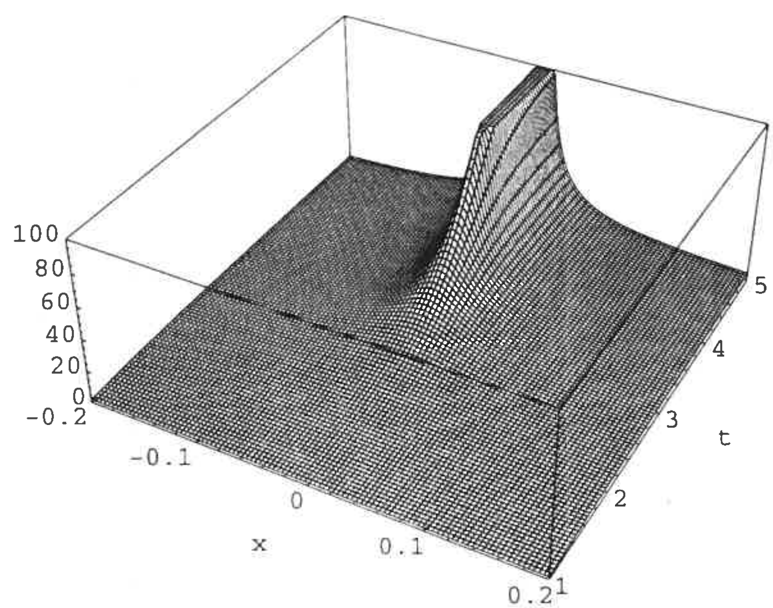

FIG. 2. The function $\rho(x,t)$ in eq. (1.79)

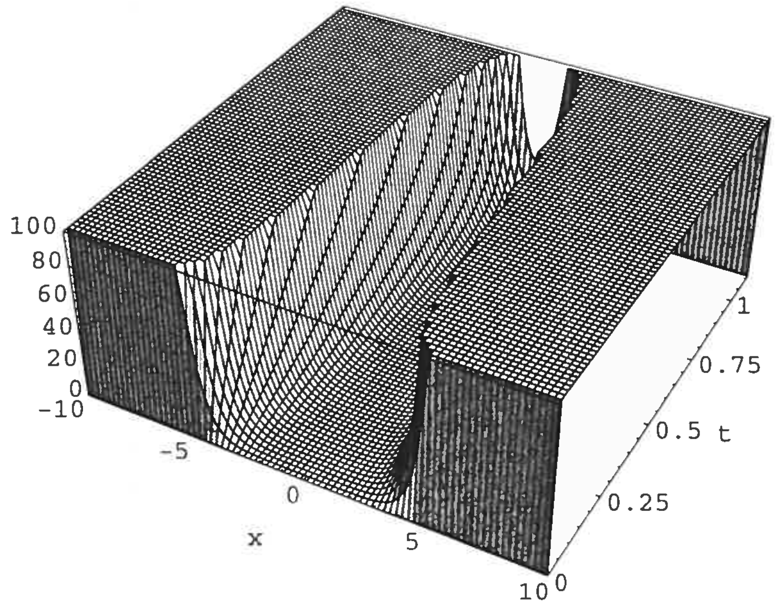

FIG. 3. The function $\theta(x,t)$ in eq. (1.80)

where $T(x,t)$ satisfies the equations

$$T + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{K_3}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(T+K_1)}}{1-\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(T+K_1)}}\right)\right) = \sqrt{2}t, \quad (1.82)$$

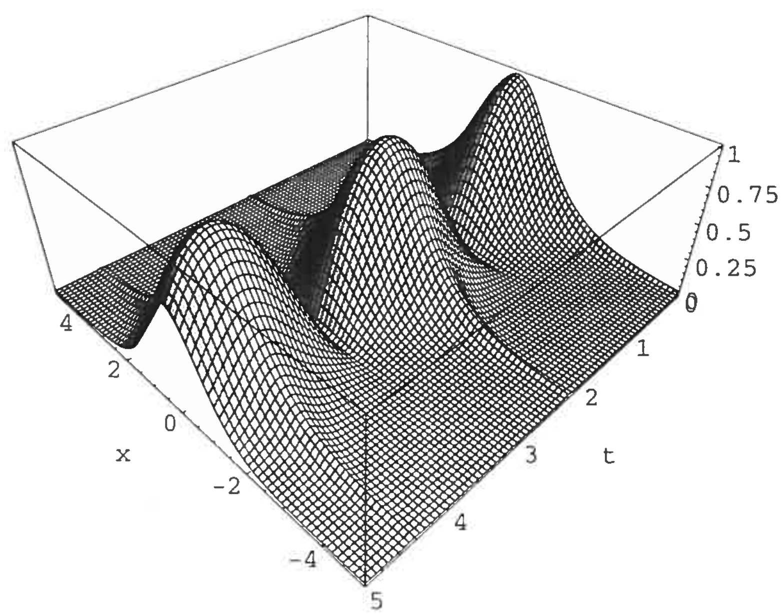

FIG. 4. The function $\rho(x,t)$ in eq. (1.80)

and

$$T+\frac{1}{c^2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{K_3}\sinh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{K_3}(x+x_0)\right)\tan\left(\sqrt{2}(t_0-T)\right)\right) = \sqrt{2}t, \tag{1.83}$$

respectively.

It is manifest that the solution (1.75), corresponding to case (a) is simply a generalization of the solution (1.33), found in Section 1.3 for the case $\mathcal{L}_{4,-1}$. In fact, solution (1.33) is the special case where $K_2 = 1$, $K_1 = 0$. By the simple change of variable $t \longrightarrow \frac{1}{K_2}(t-K_1)$, (1.33) can be transformed to its generalized counterpart (1.75). For each of the solutions (1.77) and (1.78), corresponding to cases (b) and (c) respectively, the Jacobian of the transformation

$$J = \frac{\partial(p,s)}{\partial(x,t)} \tag{1.84}$$

is non-zero. This would indicate that the change of variables is invertible. However, attempts to invert the transformation lead to transcendental trigonometric equations for the variables x and t in both cases, so it is not possible to determine equivalent functions $\Psi(p,s)$. Therefore, we cannot determine whether or not the solutions (1.77) and (1.78) correspond to the general solution of Jackiw [**1**].

1.5. Concluding Remarks

Group-invariant solutions of the Chaplygin gas equations have been determined for the one-dimensional subalgebras of the general Chaplygin Lie algebra. In addition, based on these solutions, a number of explicit solutions of the Born-Infeld relativistic model have been determined. The non-singular solutions (where the transformation $(x,t) \longrightarrow (s,p)$ is invertible) were found to be linked to special cases of the general solution described by Jackiw's approach [**1**]. Certain classes of solutions were found in which the density ρ of the fluid is constant in both time and space. These solutions were found not to be included in the classification presented in Jackiw [**1**]. In some cases, the reduced equations for the subalgebras $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{N}_2$ and $\mathcal{N}_{4,\varepsilon}$ satisfy the first and fifth Painlevé equations [**10**]. In summary, we can state that the symmetry reduction method in the version presented here proved to be a useful tool in the sense that in the cases of Chaplygin and Born-Infeld it led to many new interesting solutions, among them kinks, bumps and multi-wave solutions.

A question arises as to whether our approach can be extended to obtain partially invariant solutions **[18]** with defect structure $\delta = 1$. Further, can it provide new classes of solutions which will describe more diverse types of solutions than those found in group-invariant cases. This will be discussed in more detail in a future work.

Acknowledgements

The authors' research was partially supported by research grants from NSERC of Canada and FCAR du Québec.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes* (Springer-Verlag, New York, 2002).

[2] S. A. Chaplygin, *On Gas Jets* (GITTL, Moscow-Leningrad, 1949).

[3] A. J. Hariton, *Equations du gaz de Chaplygin et supersymétries*. M.Sc. Thesis, Université de Montréal, 2001.

[4] R. Jackiw and A. P. Polychronakos, "Supersymmetric Fluid Mechanics," *Phys. Rev.* **D62**, 085019 (2000).

[5] T. S. Nyawelo, J. W. van Holten and S. G. Nibbelink, "Superhydrodynamics," *Phys. Rev.* **D64**, 021701 (2001).

[6] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1986).

[7]. P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrech, 1993), 429.

[8] P. Painlevé, "Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme," *Acta Math.* **25**, 1 (1902).

[9] B. Gambier, "Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes," *Acta Math.* **33**, 1 (1910).

[10] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications Inc., New York, 1956).

[11] G. Murphy, *Ordinary Differential Equations* (D. Van Nostrand, New York, 1960).

[12] R. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations* (Dover, New York, 1960).

[13] P. J. Olver, "Direct Reduction and Differential Constraints," *Proc. Roy. Soc. London* **A444**, Nr. 1922, 509-523 (1994).

[14] P. J. Olver and E. M. Vorobev, "Nonclassical and Conditional Symmetries," in CRC Handbook of Lie Group Analysis, Editor : N H Ibragimov, CRC Press, London, 1995, Vol. 3, Chapt XI.

[15] W. I. Fushchych, "Conditional Symmetry of Equations of Mathematical Physics," *Ukrain. Math. J.* **43**, 1456-1470 (1991).

[16] P. A. Clarkson and P. Winternitz, "Symmetry Reduction and Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," Proceedings of the "Painlevé Property One Century Later", Editor : R. Conte, Springer-Verlag, Berlin,, 591-660 (1999).

[17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (2nd edition, Pergamon Press, Oxford, 1987).

[18] L. V. Ovsiannikov, *Group Properties of Differential Equations*(in Russian) (Novosibirsk, 1962) ; *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, 1986).

Chapitre 2

PARTIALLY INVARIANT SOLUTIONS OF MODELS OBTAINED FROM THE NAMBU-GOTO ACTION

Auteurs : A. M. Grundland and A. J. Hariton.
Référence : *J. Math. Phys.* **45**, 3239-3265 (2004).

Résumé

Dans cet article, nous discutons le concept de solutions partiellement invariantes dans le contexte de modèles dérivés de l'action Nambu-Goto. En particulier, nous considérons le fluide non-relativiste appelé gaz de Chaplygin, et le modèle relativiste de Born-Infeld pour un champ scalaire. À l'aide d'une méthode systématique basée sur la classification des sous-groupes du groupe d'invariance, nous construisons des classes de solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$. Nous avons effectué une classification complète des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de symétries ayant des orbites génériques de dimension 2. Ces sous-algèbres nous permettent d'introduire les variables de symétries correspondantes, puis de réduire les équations originales initiales à différentes classes non-équivalentes d'équations aux dérivées partielles et d'équations différentielles ordinaires. La résolution de ces systèmes réduits nous a donné plusieurs nouvelles solutions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld. Les solutions représent des ondes de propagation, des ondes centrées, des solitons algébriques, des "kink", des "bump", et des solutions exprimés à partir des fonctions elliptiques de Jacobi.

Abstract

The concept of partially invariant solutions is discussed in the framework of the group analysis of models derived from the Nambu-Goto action. In particular, we consider the non-relativistic Chaplygin gas and the relativistic Born-Infeld theory for a scalar field. Using a general systematic approach based on subgroup classification methods, non-trivial partially invariant solutions with defect structure $\delta = 1$ are constructed. For this purpose, a classification of the subgroups of the Lie point symmetry group, which have generic orbits of dimension 2, has been performed. These subgroups allow us to introduce the corresponding symmetry variables and next to reduce the initial equations to different nonequivalent classes of PDEs and ODEs. The ODEs can be transformed to standard form and, in some cases, solved in terms of elementary and Jacobi elliptic functions. This results in a large number of new partially invariant solutions, which are determined to be either reducible or irreducible with respect to the symmetry group. Some physical interpretation of the results in the area of fluid dynamics and field theory are discussed. The solutions represent travelling and centered waves, algebraic solitons, kinks, bumps, cnoidal and snoidal waves.

2.1. Introduction : Models derived from the Nambu-Goto action

A few years ago, R. Jackiw [1] thoroughly analyzed and reviewed the subject of the motion of a d-brane in $(d+1)$ spatial dimensions moving in $(d+1,1)-$dimensional space-time, and showed that it is described by the Nambu-Goto action. This has generated quite a lot of interest (see eg. [2, 3, 4], and has led to the investigation of symmetry properties of relativistic and non-relativistic models in field theory [5]. Exploiting this connection, we will extend the analysis in [5] to the case when these models admit partially invariant solutions. According to[1], we start by introducing the variables of the target space-time $X^\mu = (X^0, X^1, \ldots, X^d, X^{d+1})$ in which the d-brane moves, and the world-volume variables $\phi^\alpha = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$ which parametrize the d-dimensional extended object evolving in ϕ^0. Then the motion of the d-brane is governed by the Nambu-Goto action

$$I_{NG} = \int d\phi^0\, d\phi^1 \ldots d\phi^d \sqrt{(-1)^d \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial \phi^\beta}\right)}. \tag{2.1}$$

The action (2.1) is parametrization-invariant, and different choices of parametrization lead to various field theory models. Recently, this concept has been applied to the theory of strings and superstrings [6, 7]. In particular, it has been established that for strings moving in flat spacetime, the Nambu-Goto action (2.1) reduces to the Polyakov action

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\xi \sqrt{-det(g)}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

where $g_{\alpha\beta}$ is the world-sheet metric $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X$. Varying the action with respect to the metric leads to the stress tensor

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}\partial_\gamma X \partial_\delta X. \tag{2.3}$$

Classically, both actions are equivalent.

In particular, we are interested in the two specific cases represented by the light-cone parametrization, which leads to a non-relativistic fluid dynamical system (Chaplygin gas), and the Cartesian parametrization, which leads to a relativistic Born-Infeld model. In both cases, we choose $(X^1, X^2, \ldots, X^d)$ to coincide with $(\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^d)$ and rename them for physical interpretation as the spatial position vector $\mathbf{r}$ in d dimensions. The remaining variables X^0, X^{d+1} and ϕ^0 are treated separately for each of the two parametrizations.

2.1.1. The Chaplygin Gas

For the light-cone parametrization, we define

$$X^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^{d+1}) = t, \qquad X^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 - X^{d+1}) = \theta(\mathbf{r}, t), \tag{2.4}$$

and then identify t with $\sqrt{2\lambda}\,\phi^0$, where $\lambda > 0$ is a constant. The Nambu-Goto action (2.1) then reduces to the action [**1**]

$$I_\lambda = -2\sqrt{\lambda} \int dt\, d\mathbf{r} \sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}, \tag{2.5}$$

which in turn leads to an Euler-Lagrange equation of the form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\theta}{\sqrt{\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2}}\right) = 0. \tag{2.6}$$

Equation (2.6) is equivalent to the system of differential equations governing the Chaplygin gas [**8**]

$$\rho_t + (\nabla\rho)\cdot(\nabla\theta) + \rho\,(\nabla^2\theta) = 0, \tag{2.7a}$$

$$\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2}. \tag{2.7b}$$

where $\lambda > 0$ is a constant. Here, $\rho(\mathbf{r}, t)$ is the density and $\theta(\mathbf{r}, t)$ the velocity potential of an ideal non-relativistic fluid of zero vorticity in which the pressure P is related to the density by the polytropic relation [**1**]

$$P = \frac{-2\lambda}{\rho}. \tag{2.8}$$

The vanishing vorticity allows us to write the velocity $\mathbf{v}$ of the fluids as the gradient of the potential : $\mathbf{v} = \nabla\theta$. Here, equations (2.7a) and (2.7b) correspond respectively to the equation of continuity and Euler's force equation, where the current is given by $j = \rho\nabla\theta$. In the case where $\lambda \neq 0$ it is possible to eliminate the variable ρ by using equation (2.7b) to express it in terms of θ. In this way the system (2.7) reduces to equation (2.6).

Equations (2.7) can also be considered in the case where $\lambda = 0$. In this case, the variable ρ becomes completely independent, and the equations (2.7) are decoupled. The force equation (2.7b) can be solved for θ, and then the continuity equation (2.7a) solved for ρ. A detailed discussion of the symmetry group in one spatial dimension can be found in **[9]**. This case is not derived from the Nambu-Goto d-brane. Subsequently, in this paper, we will consider only the interactive case ($\lambda \neq 0$).

2.1.2. The Born-Infeld Model

For the Cartesian parametrization, the variable X^0 is renamed ct, where c is the speed of light, and is also identified with $c\phi^0$. The remaining target space variable X^{d+1} is renamed $\theta(\mathbf{r}, t)/c$, which is a function of $\mathbf{r}$ and t. The Nambu-Goto action (2.1) then reduces to the action **[1]**

$$I_a = -a \int dt\, d\mathbf{r} \sqrt{c^2 - (\partial_\mu\theta)^2}, \tag{2.9}$$

and the corresponding Euler-Lagrange equation is found to be

$$\partial^\nu \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - (\partial_\mu\theta)^2}}\, \partial_\nu\theta \right) = 0. \tag{2.10}$$

Equation (2.10) corresponds to the equations

$$\rho_t + \nabla \cdot \left(\nabla\theta \sqrt{\frac{\rho^2 c^2 + a^2}{c^2 + (\nabla\theta)^2}} \right) = 0, \tag{2.11a}$$

$$\theta_t + \rho c^2 \sqrt{\frac{c^2 + (\nabla\theta)^2}{\rho^2 c^2 + a^2}} = 0. \tag{2.11b}$$

This is the Born-Infeld theory for a scalar field θ discussed in **[1]**. This theory is related to the nonlinear electrodynamics approach of Born and Infeld **[10, 11]**, where the equations of motion were derived from the Lagrangian

$$L_{BI} = b^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)/b^2 - \left(\vec{E} \cdot \vec{B}\right)^2/b^4} \right]. \tag{2.12}$$

Here, $\vec{E}$ and $\vec{B}$ are the spatial components of the electric and magnetic fields respectively. The connection between Lagrangians (2.9) and (2.12), in the case where $b^2 = -a$, is described by the following relation

$$\frac{\vec{E}^2 - \vec{B}^2}{b^2} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4} = -\left(c^2 - (\partial_\mu \theta)^2\right) \pm 2\sqrt{c^2 - (\partial_\mu \theta)^2}. \qquad (2.13)$$

It should be noted that at the limit where $c \to \infty$ the relativistic Born-Infeld Lagrangian and equations reduce to the non-relativistic Chaplygin Lagrangian and equations discussed previously, where λ is identified with $a^2/2$. A solution $\theta_{NR}(\mathbf{r}, t)$ of the Chaplygin equation (2.6) is thus related to its relativistic counterpart $\theta_R(\mathbf{r}, t)$ for the Born-Infeld equation (2.10). This will be discussed in further detail in Subsection 2.4.5.

The majority of known solutions in the literature for the Chaplygin and Born-Infeld equations are simple Riemann waves and their superpositions [**12**]. In those cases, the equations were generally solved only in the hyperbolic region

$$c^2 + (\theta_x)^2 - \frac{(\theta_t)^2}{c^2} > 0. \qquad (2.14)$$

Solutions of these equations obtained from the symmetry reduction method are not necessarily required to obey differential inequality (2.14), as can be seen in [**5**].

2.1.3. Objectives and Organization

Our objective in this paper is to study the partially invariant solutions of the Chaplygin and Born-Infeld systems of equations based on the Lie algebra L of the group of symmetries G of the Chaplygin system. We look for new classes of solutions which are not necessarily G-invariant. Partially invariant solutions are of interest for the following reasons. They can be constructed from a simple algorithm similar to the one employed for the G-invariant case. Also, partially invariant solutions may be used to solve larger classes of initial value problems than the G-invariant solutions. Finally, once a partially invariant solution is found under a subgroup G_0, it is possible to verify whether or not it is invariant under some subgroup of the full group G. Such invariant solutions would be considerably more difficult to obtain directly from the standard symmetry reduction method, since in some cases it requires us to solve nonlinear PDEs instead of ODEs.

This paper is organized as follows. Section 2.2 is devoted to a description of the symmetry group structure of the Chalygin and Born-Infeld systems. The properties of the Chaplygin symmetry Lie algebra L are discussed, and we perform a classification of L into conjugate classes of subalgebras, having generic orbits of dimension 2. A complete list of the two-dimensional subalgebras of L is given. In Section 2.3, we give a brief theoretical background needed to understand the theory of partially invariant solutions, which includes an algorithm for constructing such classes of solutions. In Section 2.4, we describe and discuss certain classes of partially invariant solutions of the Chaplygin and Born-Infeld equations. All obtained solutions are computed from two-dimensional subalgebras, and have defect structure $\delta = 1$. Finally, Section 2.5 contains observations and a discussion of further applications of our results.

2.2. Structure of the Symmetry Lie Algebra

2.2.1. Symmetry properties of the Chaplygin and Born-Infeld Equations

The Lie algebra L of Chaplygin gas equations (2.7) in one spatial dimension is spanned by the six independent vector fields **[5, 9]** :

$$\begin{gathered} P_1 = \partial_x \,, \qquad P_0 = \partial_t \,, \qquad B = t\partial_x + x\partial_\theta \,, \qquad Z = \partial_\theta \,, \\ D_1 = x\partial_x + 2t\partial_t + \rho\partial_\rho \,, \qquad D_2 = x\partial_x + 2\theta\partial_\theta - \rho\partial_\rho . \end{gathered} \tag{2.15}$$

Here, P_0 and P_1 represent translations in the independent variables t and x respectively, B consists of a Galilean boost, Z corresponds to a shift in the potential θ, and D_1 and D_2 are dilations in the dependent and independent variables. The commutation relations between the generators of the Lie algebra L are summarized in Table IV :

Using the transformations of the Nambu-Goto parametrizations, we may transform the generators of the Chaplygin Lie algebra L into infinitesimal symmetries of the Born-Infeld equations (2.11). We first transform the variables x, t and θ

TAB. IV. Commutation table for the Lie algebra L spanned by the vector fields (2.15)

X\Y	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{D_2}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_0}$
$\mathbf{D_1}$	0	0	B	0	$-P_1$	$-2P_0$
$\mathbf{D_2}$	0	0	$-B$	$-2Z$	$-P_1$	0
$\mathbf{B}$	$-B$	B	0	0	$-Z$	$-P_1$
$\mathbf{Z}$	0	$2Z$	0	0	0	0
$\mathbf{P_1}$	P_1	P_1	Z	0	0	0
$\mathbf{P_0}$	$2P_0$	0	P_1	0	0	0

of the Chaplygin gas equations back into the Nambu-Goto target space variables X^0, X^1, X^2 :

$$X^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+\theta), \qquad X^1 = x, \qquad X^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-\theta). \tag{2.16}$$

Thus, the derivatives may be transformed to

$$\partial_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{X^0} + \partial_{X^2}), \qquad \partial_x = \partial_{X^1}, \qquad \partial_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{X^0} - \partial_{X^2}). \tag{2.17}$$

Note that under this transformation, $\rho \rightarrow \infty$, so that in order to keep the transformations finite it is necessary to set $\partial_\rho = 0$. We therefore obtain the generators

$$\begin{aligned}
&P_1 = \partial_{X^1}, \qquad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{X^0} + \partial_{X^2}), \\
&B = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^2)\partial_{X^1} + \frac{X^1}{\sqrt{2}}\left(\partial_{X^0} - \partial_{X^2}\right), \\
&Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{X^0} - \partial_{X^2}), \qquad D_1 = X^1\partial_{X^1} + (X^0 + X^2)\left(\partial_{X^0} + \partial_{X^2}\right), \\
&D_2 = X^1\partial_{X^1} + (X^0 - X^2)\left(\partial_{X^0} - \partial_{X^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

and the commutation relations for the transformed generators (2.18) are identical to those given in Table IV. Thus, it is possible to pass from one system of generators to another through the transformations (2.16). We then proceed to transform the Nambu-Goto target space variables into the equivalent Born-Infeld variables

$$t = \frac{1}{c}X^0, \qquad x = X^1, \qquad \theta = cX^2, \tag{2.19}$$

which leads to the generators

$$\begin{aligned}
&\widehat{P_1} = \partial_x \ , \qquad \widehat{P_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{c}\partial_t + c\partial_\theta), \\
&\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + \frac{1}{c}\theta)\partial_x + \frac{x}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{c}\partial_t - c\partial_\theta\right), \\
&\widehat{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{c}\partial_t - c\partial_\theta), \qquad \widehat{D_1} = x\partial_x + (ct + \frac{1}{c}\theta)\left(\frac{1}{c}\partial_t + c\partial_\theta\right), \\
&\widehat{D_2} = x\partial_x + (ct - \frac{1}{c}\theta)\left(\frac{1}{c}\partial_t - c\partial_\theta\right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

As in the previous case, the commutation relations between the generators (2.20) are identical to those relations given in Table IV.

Finally, we note that, for the Chaplygin equations, there exists an infinite number of preserved quantities [1]

$$I_n^{\pm} = \int dx\rho\left(\theta_x \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\right)^n. \tag{2.21}$$

Consequently, we can use the transformations (2.16) and (2.19) to derive the corresponding quantities of the Born-Infeld equations

$$J_n^{\pm} = \sqrt{2\lambda}\int dx\left((\theta_x)^2 - \theta_t\right)^{-1/2}\left(-\theta_x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\theta_x)^2 - \theta_t\right)^{1/2}\right)^n. \tag{2.22}$$

This suggests that both models are completely integrable.

2.2.2. Classification of the Two-Dimensional Subalgebras

Here, we summarize the results obtained from the classification of the 2-dimensional subalgebras of L, the Lie algebra of the Chaplygin equations (2.7). This result can be extended to include the Born-Infeld equations through the reparametrizations (2.16) and (2.19). We focus exclusively on two-dimensional subalgebras because its symmetry reduction leads us mainly to solve ODEs. In order to classify the subalgebras, we can decompose the structure of L into the following solvable semi-direct sum

$$L = \{\{D_1, D_2\} \supset\!\!\!\!\!+ \{B\}\} \quad \supset\!\!\!\!\!+ \quad \{Z, P_1, P_0\}, \tag{2.23}$$

We perform the classification in three steps, using the procedures described in [**13**]. The full details are presented in Annexe C of this thesis.

(i) Consider first the abelian algebra $A = \{D_1, D_2\}$. Its subspaces are

$$\begin{aligned} &A_1 = \{0\}, \qquad A_2 = \{D_1\}, \qquad A_3 = \{D_2\}, \\ &A_4 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\}, \qquad A_5 = \{D_1, D_2\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Since A is an abelian algebra, all of its subspaces are subalgebras, and each of them is conjugate only to itself under action by the group

$$G_A = \mathbf{e}^{\{D_1, D_2\}} = \{g = \mathbf{e}^{\lambda Y} \ : \ Y \in \{D_1, D_2\}\} \tag{2.25}$$

generated by A. For each subalgebra A_i of A, its normalizer in G_A

$$Nor\,(A_i, G_A) = \{g \in G_A \ : \ gXg^{-1} \in A_i, \forall X \in A_i\}, \tag{2.26}$$

is simply G_A.

(ii) As a next step, let us now consider the algebra

$$F = \{D_1, D_2, B\} = \{\{D_1, D_2\} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} \{B\}\} = A \mathbin{\supset\!\!\!\!+} B. \tag{2.27}$$

The splitting subalgebras of F are

$$\begin{aligned} &F_1 = \{0\}, \qquad F_2 = \{B\}, \qquad F_3 = \{D_1\}, \qquad F_4 = \{D_1, B\}, \\ &F_5 = \{D_2\}, \qquad F_6 = \{D_2, B\}, \qquad F_7 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\}, \\ &F_8 = \{D_1 + aD_2, B\}_{a \neq 0}, \qquad F_9 = \{D_1, D_2\}, \qquad F_{10} = \{D_1, D_2, B\} = F. \end{aligned} \tag{2.28}$$

In addition, by considering the case of F_7 where $a = 1$, we obtain the following non-splitting subalgebra of F

$$F_{11} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, \varepsilon = \pm 1\}. \tag{2.29}$$

The normalizers of these subalgebras in the group $G_F = \mathbf{e}^{\{D_1, D_2, B\}}$ are presented in Table V.

(iii) Finally, the complete Lie algebra L can be decomposed as a semi-direct sum of the previouly considered algebra F and the abelian algebra N :

$$L = \{D_1, D_2, B, Z, P_1, P_0\} = F \mathbin{\supset\!\!\!\!+} N, \tag{2.30}$$

TAB. V. Classes of subalgebras of $F = \{D_1, D_2, B\}$

Subalgebra $F_i \subseteq F$	$Nor(F_i, G_F)$
$F_1 = \{0\}$	G_F
$F_2 = \{B\}$	G_F
$F_3 = \{D_1\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_4 = \{D_1, B\}$	G_F
$F_5 = \{D_2\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_6 = \{D_2, B\}$	G_F
$F_7 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\}$	$\begin{cases} G_F & \text{if } a = 1, \\ e^{\{D_1, D_2\}} & \text{if } a \neq 1. \end{cases}$
$F_8 = \{D_1 + aD_2, B\}_{a \neq 0}$	G_F
$F_9 = \{D_1, D_2\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_{10} = \{D_1, D_2, B\}$	G_F
$F_{11} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, \varepsilon = \pm 1\}$	$e^{\{D_1 + D_2, B\}}$

where $F = \{D_1, D_2, B\}$, and $N = \{Z, P_1, P_0\}$ is abelian. The two-dimensional splitting and non-splitting subalgebras of L are summarized in Tables VI and VII respectively.

The usefulness of the classification is demonstrated in the fact that it allows us to find all corresponding reductions of the Chaplygin equations under the classified non-equivalent two-dimensional subalgebras of the symmetry algebra L. For each conjugacy class given in Tables VI and VII, we evaluate the invariants of the corresponding Lie subgroup, and also the corresponding reduced differential equations. We summarize the results in Tables VIII and IX. Solutions of these equations will be analyzed in detail in Section 2.4.

2.3. Partially Invariant Solutions of a System of PDEs

The concept of partially invariant solutions originates from the work of L. Ovsiannikov [**14**] and since then has been extensively developed by many authors (see e.g. [**15, 16, 17, 18, 19, 20, 21**]). These types of solutions can be understood

TAB. VI. Classes of 2-dimensional splitting algebras of L

Splitting algebra $L_{i,\alpha}$	$Nor(L_{i,\alpha}, G)$
$L_{1,6} = \{Z, P_1\}$	G
$L_{1,7} = \{Z, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{1,8} = \{P_1, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{1,9} = \{P_1, P_0 + \varepsilon Z\}$ $_{\varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1+D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{2,2} = \{B, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z,P_1\}}$
$L_{3,2} = \{D_1, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z\}}$
$L_{3,3} = \{D_1, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1\}}$
$L_{3,4} = \{D_1, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_0\}}$
$L_{4,1} = \{D_1, B\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z\}}$
$L_{5,2} = \{D_2, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_0\}}$
$L_{5,3} = \{D_2, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_1,P_0\}}$
$L_{5,4} = \{D_2, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_0\}}$
$L_{6,1} = \{D_2, B\}$	$e^{\{D_1,D_2,B\}}$
$L_{7,2}$ $_{(a=1)} = \{D_1 + D_2, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z\}}$
$L_{7,3}$ $_{(a=1)} = \{D_1 + D_2, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_1\}}$
$L_{7,4}$ $_{(a=1)} = \{D_1 + D_2, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_0\}}$
$L_{7,5}$ $_{(a=1)} = \{D_1 + D_2, P_0 + \varepsilon Z\}$ $_{\varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1+D_2,P_0+\varepsilon Z\}}$
$L_{7,2}$ $_{(a\neq1)} = \{D_1 + aD_2, Z\}$ $_{a\neq0,1}$	$\begin{cases} e^{\{D_1,D_2,Z,P_1\}} & \text{if } a=-1, \\ e^{\{D_1,D_2,Z\}} & \text{if } a\neq-1. \end{cases}$
$L_{7,3}$ $_{(a\neq1)} = \{D_1 + aD_2, P_1\}$ $_{a\neq0,1}$	$e^{\{D_1,D_2,P_1\}}$
$L_{7,4}$ $_{(a\neq1)} = \{D_1 + aD_2, P_0\}$ $_{a\neq0,1}$	$\begin{cases} e^{\{D_1,D_2,P_1,P_0\}} & \text{if } a=-1, \\ e^{\{D_1,D_2,P_0\}} & \text{if } a\neq-1. \end{cases}$
$L_{8,1} = \{D_1 + aD_2, B\}$ $_{a\neq0}$	$e^{\{D_1,D_2,B\}}$
$L_{9,1} = \{D_1, D_2\}$	$e^{\{D_1,D_2\}}$
$L_{11,2} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, Z\}$ $_{\varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1+D_2,B,Z\}}$

TAB. VII. Classes of 2-dimensional non-splitting algebras of L

Splitting algebra $\mathcal{L}_{i,\alpha}$	$Nor(\mathcal{L}_{i,\alpha}, G)$
$\mathcal{L}_{2,2} = \{B + \varepsilon P_0, Z\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1+3D_2, B+\varepsilon P_0, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{3,3} = \{D_1 + \varepsilon Z, P_1\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{3,4} = \{D_1 + \varepsilon Z, P_0\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1, Z, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{4,1} = \{D_1 + \varepsilon Z, B\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1, B, Z\}}$
$\mathcal{L}_{5,2} = \{D_2 + \varepsilon P_0, Z\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_2, Z, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{5,3} = \{D_2 + \varepsilon P_0, P_1\} \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_2, P_1, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{7,2} \quad {}_{(a\neq 1)} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1, Z\} \quad a\neq 0,1 \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1-D_2, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{7,4} \quad {}_{(a\neq 1)} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1, P_0\} \quad a\neq 0,1 \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1-D_2, P_1, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{8,1} = \{D_1 + 3D_2, B + \varepsilon P_0\} \quad a\neq 0 \quad \varepsilon=\pm 1$	$\mathbf{e}^{\{D_1+3D_2, B+\varepsilon P_0\}}$

as an extension of the group invariant solutions. In the case of partially invariant solutions, the graph of the solution Γ_f is no longer a G-invariant set (i.e. $G(\Gamma_f) \neq \Gamma_f$) but the difference between the dimensions of the manifolds $G(\Gamma_f)$ and Γ_f has to satisfy the condition

$$0 < \delta = dim G(\Gamma_f) - dim \Gamma_f < min(s, q), \tag{2.31}$$

where δ is called the defect structure of a solution with respect to the group G. Here, we assume that the transformed graph Γ_f under the action of G has a submanifold structure. We denote by s the dimension of the orbit of G and by q the number of dependent variables appearing in the considered system of m PDEs in p independent variables

$$\Delta^l(x, u^{(k)}) = 0, \quad l = 1, \ldots, m. \tag{2.32}$$

For the computational purpose of constructing partially invariant solutions it is convenient to evaluate the defect structure δ of a solution of system (2.32) based on the $q \times s$ characteristic matrix

$$Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = \left(\phi_k^\alpha(x, u) - \xi_k^i(x, u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right), \quad \alpha = 1, \ldots, q, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{2.33}$$

TAB. VIII. Invariants of the 2-dimensional subalgebras of L

Subalgebra	Invariants	Relations and Change of Variable
$L_{1,6}$	$t,\quad \rho$	$\rho = \rho(t)$
$L_{1,7}$	$x,\quad \rho$	$\rho = \rho(x)$
$L_{1,8}$	$\theta,\quad \rho$	$\theta = F(\rho)$
$L_{1,9}$	$\rho,\quad \theta - \varepsilon t$	$\theta = F(\rho) + \varepsilon t$
$L_{2,2}$	$t,\quad \rho$	$\rho = \rho(t)$
$L_{3,2}$	$\frac{x^2}{t},\quad \frac{\rho}{x}$	$\rho = \sqrt{\xi\eta}F(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = \frac{x^2}{t},\quad \eta = t$
$L_{3,3}$	$\theta,\quad \frac{\rho}{\sqrt{t}}$	$\theta = F(\frac{\rho}{\sqrt{t}})$
$L_{3,4}$	$\theta,\quad \frac{\rho}{x}$	$\theta = F(\frac{\rho}{x})$
$L_{4,1}$	$\frac{\rho}{\sqrt{t}},\quad \theta - \frac{x^2}{2t}$	$\theta = F(\frac{\rho}{\sqrt{t}}) + \frac{x^2}{2t}$
$L_{5,2}$	$t,\quad x\rho$	$\rho = \frac{1}{x}F(t)$
$L_{5,3}$	$t,\quad \rho^2\theta$	$\theta = \frac{F(t)}{\rho^2}$
$L_{5,4}$	$\frac{\theta}{x^2},\quad x\rho$	$\theta = x^2F(x\rho)$
$L_{6,1}$	$t,\quad \rho^2\left(\theta - \frac{x^2}{2t}\right)$	$\theta = \frac{F(t)}{\rho^2} + \frac{x^2}{2t}$
$L_{7,2}$ $(a=1)$	$\frac{x}{t},\quad \rho$	$\rho = \rho(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = \frac{x}{t},\quad \eta = t$
$L_{7,3}$ $(a=1)$	$\rho, \frac{\theta}{t}$	$\theta = tF(\rho)$
$L_{7,4}$ $(a=1)$	$\rho,\quad \frac{\theta}{x}$	$\theta = xF(\rho)$
$L_{7,5}$ $(a=1)$	$\rho,\quad \frac{1}{x}(\theta - \varepsilon t)$	$\theta = xF(\rho) + \varepsilon t$
$L_{7,2}$ $(a\neq 1)$	$\frac{t^{1+a}}{x^2},\quad \frac{t^{1-a}}{\rho^2}$	$\rho = t^{\frac{1-a}{2}}F(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = \frac{t^{1+a}}{x^2},\quad \eta = t$
$L_{7,3}$ $(a\neq 1)$	$t^{\frac{a-1}{2}}\rho,\quad t^{-a}\theta$	$\theta = t^aF\left(t^{\frac{a-1}{2}}\rho\right)$
$L_{7,4}$ $(a=-1)$	$x,\quad \theta\rho$	$\theta = \frac{F(x)}{\rho}$
$L_{7,4}$ $(a\neq 1,-1)$	$x^{\frac{a-1}{a+1}}\rho,\quad x^{\frac{-2a}{a+1}}\theta$	$\theta = x^{\frac{2a}{a+1}}F\left(x^{\frac{a-1}{a+1}}\rho\right)$
$L_{8,1}$	$t^{\frac{a-1}{2}}\rho,\quad t^{-a}\left(\theta - \frac{x^2}{2t}\right)$	$\theta = t^aF\left(t^{\frac{a-1}{2}}\rho\right) + \frac{x^2}{2t}$
$L_{9,1}$	$\frac{\theta t}{x^2},\quad \frac{\rho x}{t}$	$\theta = \frac{x^2}{t}F\left(\frac{x}{t}\rho\right)$
$L_{11,2}$	$\frac{2x}{t} - \varepsilon\ln t,\quad \rho$	$\rho = \rho(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = \frac{2x}{t} - \varepsilon\ln t,\quad \eta = t$
$\mathcal{L}_{2,2}$	$\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2,\quad \rho$	$\rho = \rho(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = \varepsilon x - \frac{1}{2}t^2,\quad \eta = t$
$\mathcal{L}_{3,3}$	$\frac{\rho^2}{t},\quad \theta - \frac{1}{2}\varepsilon\ln t$	$\theta = F\left(\frac{\rho^2}{t}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\ln t$
$\mathcal{L}_{3,4}$	$\frac{\rho}{x},\quad \theta - \varepsilon\ln x$	$\theta = F(\frac{\rho}{x}) + \varepsilon\ln x$
$\mathcal{L}_{4,1}$	$\frac{\rho}{\sqrt{t}},\quad \theta - \frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2}\varepsilon\ln t$	$\theta = F(\frac{\rho}{\sqrt{t}}) + \frac{x^2}{2t} + \frac{1}{2}\varepsilon\ln t$
$\mathcal{L}_{5,2}$	$x\mathrm{e}^{-\varepsilon t},\quad x\rho$	$\rho = \frac{\eta}{\xi}F(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = x\mathrm{e}^{-\varepsilon t},\quad \eta = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}$
$\mathcal{L}_{5,3}$	$\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}\theta,\quad \mathrm{e}^{\varepsilon t}\rho$	$\theta = \mathrm{e}^{2\varepsilon t}F(\mathrm{e}^{\varepsilon t}\rho)$
$\mathcal{L}_{7,2}$ $(a\neq 1)$	$x - \frac{1}{2}\varepsilon\ln t,\quad \frac{\rho}{t}$	$\rho = \eta F(\xi),\quad \theta = \theta(\xi,\eta),\quad \xi = x - \frac{1}{2}\varepsilon\ln t,\quad \eta = t$
$\mathcal{L}_{7,4}$ $(a\neq 1)$	$\mathrm{e}^{2\varepsilon x}\theta,\quad \mathrm{e}^{-2\varepsilon x}\rho$	$\theta = \mathrm{e}^{-2\varepsilon x}F(\mathrm{e}^{-2\varepsilon x}\rho)$
$\mathcal{L}_{8,1}$	$\rho(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{1/2}$, $(\theta - \varepsilon xt + \frac{1}{3}t^3)(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-3/2}$	$\theta = (\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{3/2}F\left((\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{1/2}\rho\right) + \varepsilon xt - \frac{1}{3}t^3$

TAB. IX. Reduced Equations obtained from the 2-dimensional subalgebras of L. Splitting subalgebras are denoted by $L_{i,\alpha}$ and non-splitting subalgebras by $\mathcal{L}_{i,\alpha}$

Subalgebra	Reduced Equation(s)
$L_{1,6}$	$-\theta_{tt} - \theta_x\theta_{xt} + 2\theta_t\theta_{xx} + (\theta_x)^2\theta_{xx} = 0, \quad \theta_{xt} + \theta_x\theta_{xx} = 0, \quad \rho(t) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^2\right)^{-1/2}$
$L_{1,7}$	$2\theta_t\theta_{xx} - \theta_x\theta_{xt} = 0, \quad \theta_{tt} + \theta_x\theta_{xt} = 0, \quad \rho(x) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^2\right)^{-1/2}$
$L_{1,8}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^3(F')^2} = 0$
$L_{1,9}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda}{\rho^3(F')^2} - \frac{\varepsilon}{\rho(F')^2}\right) = 0$
$L_{2,2}$	$-\theta_{tt} - \theta_x\theta_{xt} + 2\theta_t\theta_{xx} + (\theta_x)^2\theta_{xx} = 0, \quad \theta_{xt} + \theta_x\theta_{xx} = 0, \quad \rho(t) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_t + \frac{1}{2}(\theta_x)^2\right)^{-1/2}$
$L_{3,2}$	$8\xi\eta\theta_\eta\theta_{\xi\xi} + 4\eta\theta_\xi\theta_\eta + 4\xi(\theta_\xi)^2 - 2\xi\theta_\xi - \xi^2\theta_{\xi\xi} + \eta\theta_\eta - 4\xi\eta\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + \xi\eta\theta_{\xi\eta} = 0,$ $4\xi\theta_\xi\theta_{\xi\eta} - \xi\theta_{\xi\eta} + \theta_\eta + \eta\theta_{\eta\eta} = 0,$ $F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(2\xi^2(\theta_\xi)^2 - \xi^2\theta_\xi + \xi\eta\theta_\eta\right)^{-1/2}$
$L_{3,3}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t}{\rho^3(F')^2} + \frac{1}{2\sqrt{t}F'}\right) = 0$
$L_{3,4}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{x}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\rho\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x) + \left(\frac{\lambda x^2}{\rho^3(F')^2} + \frac{3}{2x^2}\rho + \frac{1}{x^3}\rho^2\frac{F''}{F'}\right) = 0$
$L_{4,1}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t}{\rho^3(F')^2} + \frac{3}{2\sqrt{t}F'}\right) = 0$
$L_{5,2}$	$x\theta_{tt} + x\theta_x\theta_{xt} - 2x\theta_t\theta_{xx} - x(\theta_x)^2\theta_{xx} + 2\theta_x\theta_t + (\theta_x)^3 = 0,$ $-2\theta_t + x\theta_{xt} - (\theta_x)^2 + \frac{1}{2}x\theta_x\theta_{xx} = 0, \quad F(t) = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{x^2}\theta_t + \frac{1}{2x^2}(\theta_x)^2\right)^{-1/2}$
$L_{5,3}$	$\rho_{xx} - \frac{5}{2\rho}(\rho_x)^2 - \frac{1}{4}\rho^3\frac{F'}{F^2} + \frac{\lambda\rho^3}{4F^2} = 0$
$L_{5,4}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + x\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{6}{x} + \frac{2\rho F''}{F'}\right)(\rho_x) + \left(\frac{\lambda}{x^6\rho^3(F')^2} + \frac{7}{2x^2}\rho + \frac{1}{x}\rho^2\frac{F''}{F'} - \frac{2}{x^4}\frac{F^2}{(F')^2}\frac{1}{\rho}\right) = 0$
$L_{6,1}$	$\rho_{xx} - \frac{5}{2\rho}(\rho_x)^2 - \frac{1}{2tF}\rho^3 - \frac{F'}{4F^2}\rho^3 + \frac{\lambda\rho^3}{4F^2} = 0$
$L_{7,2}$ $(a=1)$	$(2\eta^2\theta_\eta - \xi\eta\theta_\xi)\theta_{\xi\xi} + (\xi\eta - \eta^2)\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + (\theta_\xi)^2\theta_{\xi\xi} - (\theta_\xi)^2\theta_{\xi\eta} + \eta(\theta_\xi)^2 - \xi^2\eta^2\theta_{\xi\xi}$ $+\xi\eta^3\theta_{\xi\eta} - \xi\eta^2\theta_\xi = 0,$ $\xi\eta\theta_\xi - \xi\eta^2\theta_{\xi\eta} + \eta^3\theta_{\eta\eta} - (\theta_\xi)^2 + \eta\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $\rho(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(-\frac{\xi}{\eta}\theta_\xi + \theta_\eta + \frac{1}{2\eta^2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$L_{7,3}$ $(a=1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda}{t^2\rho^3(F')^2} - \frac{F}{t^2(F')^2\rho}\right) = 0$
$L_{7,4}$ $(a=1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \frac{2}{x}\rho_x + \left(\frac{\lambda}{x^2\rho^3(F')^2} - \frac{F^2}{2x^2(F')^2\rho}\right) = 0$
$L_{7,5}$ $(a=1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \frac{2}{x}\rho_x + \left(\frac{2\lambda - \rho^2F^2 - 2\varepsilon\rho^2}{2x^2(F')^2\rho^3}\right) = 0$
$L_{7,2}$ $(a\neq1)$	$2\xi^3\eta^{-\frac{1}{2}(1+5a)}(\theta_\xi)^2 - a(a+1)\xi\eta^{-\frac{1}{2}(1+3a)}\theta_\xi + 4\xi^3\eta^{\frac{1}{2}(1-5a)}\theta_\eta\theta_{\xi\xi} + 6\xi^2\eta^{\frac{1}{2}(1-5a)}\theta_\xi\theta_\eta$ $+\frac{1}{2}(1-a)\eta^{\frac{1}{2}(1-3a)}\theta_\eta - 2\xi^3\eta^{\frac{1}{2}(1-5a)}\theta_\xi\theta_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(a+1)^2\xi^2\eta^{-\frac{1}{2}(1+3a)}\theta_{\xi\xi}$ $-\frac{1}{2}(a+1)\xi\eta^{\frac{1}{2}(1-3a)}\theta_{\xi\eta} = 0,$ $(1-a)\eta^{-a}\theta_\eta - a(a+1)\xi\eta^{-(a+1)}\theta_\xi + (a+1)\xi\eta^{-a}\theta_{\xi\eta} + \eta^{(1-a)}\theta_{\eta\eta}$ $-4a\xi^3\eta^{-(2a+1)}(\theta_\xi)^2 + 4\xi^3\eta^{-2a}\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left((a+1)\xi\eta^{-a}\theta_\xi + \eta^{(1-a)}\theta_\eta + 2\xi^3\eta^{-2a}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$L_{7,3}$ $(a\neq1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + t^{\frac{a-1}{2}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t^{(1-3a)}}{\rho^3(F')^2} - \frac{at^{-2a}F}{(F')^2\rho} + \frac{(1-a)}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}(1+3a)}}{F'}\right) = 0$
$L_{7,4}$ $(a=-1)$	$\rho_{xx} - \frac{3}{2\rho}(\rho_x)^2 + \frac{2F'}{F}\rho_x + \left(\frac{\lambda\rho}{F^2} - \frac{(F')^2\rho}{2F^2} - \frac{F''}{F}\rho\right) = 0$
$L_{7,4}$ $(a\neq1,-1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + x^{\frac{a-1}{a+1}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{(6a-2)}{(a+1)}x^{-1} + \frac{(2a-2)}{(a+1)}x^{-\frac{2}{a+1}}\frac{F''}{F'}\rho\right)(\rho_x)$ $+\left(\frac{\lambda x^{\frac{2-6a}{a-1}}}{\rho^3(F')^2} - \frac{(2a)^2}{2(a+1)^2}x^{-\frac{4a}{a-1}}\frac{F^2}{(F')^2\rho} + \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}x^{-\frac{(a+3)}{(a+1)}}\frac{F''}{F'}\rho^2 + \frac{(7a-3)(a-1)}{2(a+1)^2}x^{-2}\rho\right) = 0$
$L_{8,1}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + t^{\frac{a-1}{2}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t^{(1-3a)}}{\rho^3(F')^2} - \frac{(a-3)}{2}t^{-\frac{(3a+1)}{2}}\frac{1}{F'} - at^{-2a}\frac{F}{(F')^2\rho}\right) = 0$

TAB. IX. (continued)

Subalgebra	Reduced Equation(s)
$L_{9,1}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{x}{t}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{6}{x} + \frac{2}{t}\frac{F''}{F'}\rho\right)(\rho_x)$ $+ \left(\frac{\lambda t^4}{x^6(F')^2\rho^3} + \frac{t^2(F-2F^2)}{x^4(F')^2\rho} + \frac{t}{x^3F'} + \frac{1}{xt}\frac{F''}{F'}\rho^2 + \frac{7}{2x^2}\rho\right) = 0$
$L_{11,2}$	$4\theta_\eta\theta_{\xi\xi} - 2\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + \frac{2}{\eta}(\theta_\xi)^2 + \frac{1}{2}(\xi + \varepsilon + \varepsilon\ln\eta)(\eta\theta_{\xi\eta} - \theta_\xi) - \frac{1}{2}(\xi + \varepsilon + \varepsilon\ln\eta)^2\theta_{\xi\xi} = 0,$ $\theta_{\eta\eta} + (\xi + \varepsilon + \varepsilon\ln\eta)(\frac{1}{\eta^2}\theta_\xi - \frac{1}{\eta}\theta_{\xi\eta}) - \frac{\varepsilon}{\eta^2}\theta_\xi - \frac{4}{\eta^3}(\theta_\xi)^2 + \frac{4}{\eta^2}\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $\rho(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_\eta - \frac{1}{\eta}(\xi + \varepsilon + \varepsilon\ln\eta)\theta_\xi + \frac{2}{\eta^2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$\mathcal{L}_{2,2}$	$2\theta_\eta\theta_{\xi\xi} + \eta\theta_{\xi\eta} - \eta^2\theta_{\xi\xi} - \theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $\theta_{\eta\eta} - \theta_\xi - \eta\theta_{\xi\eta} + \theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $\rho(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_\eta - \eta\theta_\xi + \frac{1}{2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$\mathcal{L}_{3,3}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{3}{2\rho} + \frac{2\rho}{t}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t^2}{4\rho^5(F')^2} + \frac{1}{4\rho F'} - \frac{\varepsilon t}{8\rho^3(F')^2}\right) = 0$
$\mathcal{L}_{3,4}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{x}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2\rho}{x^2}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x) + \left(\frac{\lambda x^2}{\rho^3(F')^2} + \frac{3\rho}{2x^2} + \frac{\rho^2}{x^3}\frac{F''}{F'} - \frac{1}{2\rho(F')^2}\right) = 0$
$\mathcal{L}_{4,1}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda t}{\rho^3(F')^2} + \frac{3}{2\sqrt{t}F'} - \frac{\varepsilon}{2\rho(F')^2}\right) = 0$
$\mathcal{L}_{5,2}$	$2\varepsilon\eta^3\theta_\eta\theta_{\xi\xi} - \varepsilon\eta^3\theta_\xi\theta_{\xi\eta} - \xi\theta_\xi + \xi^2\theta_{\xi\xi} - 2\eta\theta_\eta + \xi\eta\theta_{\xi\eta} = 0,$ $2\xi\theta_\xi + \xi\eta\theta_{\xi\eta} + 3\eta\theta_\eta + \eta^2\theta_{\eta\eta} - 2\varepsilon\eta^2(\theta_\xi)^2 - \varepsilon\eta^3\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon\eta^2}{\xi}\theta_\xi - \frac{\varepsilon\eta^3}{\xi^2}\theta_\eta + \frac{1}{2}\frac{\eta^4}{\xi^2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$\mathcal{L}_{5,3}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \mathrm{e}^{\varepsilon t}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{6\varepsilon t}\rho^3(F')^2} - \frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{3\varepsilon t}F'} - \frac{2\varepsilon F}{\mathrm{e}^{4\varepsilon t}\rho(F')^2}\right) = 0$
$\mathcal{L}_{7,2}$ $(a\neq 1)$	$-4\varepsilon\eta\theta_\xi + 8\eta^2\theta_\eta + 4\eta^2(\theta_\xi)^2 + 8\eta^3\theta_\eta\theta_{\xi\xi} - \eta\theta_{\xi\xi} + 2\varepsilon\eta^2\theta_{\xi\eta} - 4\eta^3\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $-\varepsilon\theta_\xi - \varepsilon\eta\theta_{\xi\eta} + 4\eta\theta_\eta + 2\eta^2\theta_{\eta\eta} + 2\eta(\theta_\xi)^2 + 2\eta^2\theta_\xi\theta_{\xi\eta} = 0,$ $F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon\eta}{2}\theta_\xi + \eta^2\theta_\eta + \frac{1}{2}\eta^2(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}$
$\mathcal{L}_{7,4}$ $(a\neq 1)$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \mathrm{e}^{-2\varepsilon x}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 - \left(8\varepsilon + 4\varepsilon\mathrm{e}^{-2\varepsilon x}\frac{F''}{F'}\rho\right)(\rho_x)$ $+ \left(\frac{\lambda\mathrm{e}^{8\varepsilon x}}{\rho^3(F')^2} + 10\rho + 4\mathrm{e}^{-2\varepsilon x}\frac{F''}{F'}\rho^2 - \frac{2\mathrm{e}^{4\varepsilon x}F^2}{\rho(F')^2}\right) = 0$
$\mathcal{L}_{8,1}$	$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + (\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{1/2}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(4\varepsilon(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-1} + \varepsilon(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-1/2}\frac{F''}{F'}\rho\right)(\rho_x)$ $+ \left(\frac{\lambda}{(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^4\rho^3(F')^2} + \frac{9}{8}(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-2}\rho + \frac{1}{4}(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-3/2}\frac{F''}{F'}\rho^2\right)$ $- \left((\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-3}\frac{1}{(F')^2\rho} + \frac{9}{8}(\varepsilon x - \frac{1}{2}t^2)^{-3}\frac{F^2}{(F')^2\rho}\right) = 0$

of the infinitesimal symmetry generators

$$v_k = \xi_k^i(x,u)\partial_{x^i} + \phi_k^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}, \quad k = 1,\ldots,s, \tag{2.34}$$

of s-dimensional subgroup G_0. We will assume throughout the rest of this paper that each subgroup G_0 acts regularly and transversally on the space of independent and dependent variables $M = X \times U$. That is, the rank condition

$$rank\{\xi_a^i(x,u)\} = rank\{\xi_a^i(x,u), \phi_a^\alpha(x,u)\} = s, \tag{2.35}$$

is satisfied **[18]**. According to **[19]**, the function $u = f(x)$ is a partially invariant solution of system (2.32) with defect δ if and only if

$$rankQ(x, u^{(1)}) = \delta. \tag{2.36}$$

Now, we present the algorithm for constructing partially invariant solutions with defect structure δ. The procedure involves the following steps :

1. Construct a complete set of functionally independent invariants for a subgroup G_i of G. If the set $\{v_1, \ldots, v_r\}$ is a basis of fibre preserving infinitesimal generators of the Lie algebra $L_i = exp(G_i)$, where

$$v_b = \xi_b^i(x)\partial_{x^i} + \phi_b^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}, \quad b = 1, \ldots, r, \tag{2.37}$$

then I is an invariant of G_i if and only if $v_b(I) = 0$ for all $b = 1, \ldots, r$. We obtain a set of functionally independent invariants of the form

$$\{\eta^k(x), I^j(x,u)\}, \tag{2.38}$$

where $k = 1, \ldots, p + \delta - s$ and $j = 1, \ldots, q - \delta$. Then the rank of the Jacobian matrix J is given by

$$rank(J) = rank\left(\frac{\partial\left(I^1(x,u), \ldots, I^{q-\delta}(x,u)\right)}{\partial(u^1, \ldots, u^q)}\right) = q - \delta. \tag{2.39}$$

2. Express the $(p+\delta)$-dimensional manifold $G_i\Gamma_f$ in terms of the invariants (2.38). Note that $G_i\Gamma_f$ is the smallest invariant manifold containing Γ_f, with respect to the action of the group G_i. This manifold is determined by equations of the form

$$I^j(x,u) = f^j(\eta^1(x), \ldots, \eta^{p+\delta-s}(x)), \quad j = 1, \ldots, q - \delta. \tag{2.40}$$

where f^j are arbitrary functions of their arguments.

3. From equation (2.39) and by applying the implicit function theorem to equations (2.40), we can express $(q - \delta)$ dependent variables u^a as functions of $l \leq p$ independent variables x^i, of $(q-\delta)$ arbitrary functions ψ^a and of δ remaining dependent variables u^j

$$u^a = \psi^a\left(f^j\left(\eta^1(x), \ldots, \eta^{p+\delta-s}(x)\right), x^l, u^i\right), \quad a = 1, \ldots, q - \delta. \tag{2.41}$$

4. Substitute these $(q - \delta)$ dependent variables u^a into the original system of equations (2.32) and reduce the problem to a differential system of equations (so called system Δ') for δ dependent variables.

5. Find leading derivatives among the δ dependent variables and next compute all possible compatibility conditions (modulo these leading derivatives). These conditions imply some constraints on arbitrary functions ψ^a (appearing in (2.41)) which form differential equations (so called system Δ/G_i) involving $(q-\delta)$ dependent variables u^a and $p+\delta-r$ independent variables.

6. Solve the system Δ/G_i.

7. From each solution of Δ/G_i integrate the initial system Δ. This procedure generates different classes of partially invariant solutions with given defect δ to the basic system Δ.

There is no longer a one-to-one correspondence between partially invariant solutions of the initial system Δ and solutions of the system Δ/G_i. For any solution of the system Δ/G_i we obtain, using the above procedure, a family of solutions of the original system Δ.

Note that once these computations are completed, we could check whether the obtained solutions are invariant with respect to some subgroups of the symmetry group G. A partially invariant solution $u = f(x)$, with respect to a subgroup G_i is called reducible with respect to the full group G if

(i) there exists a subgroup $G_a \subset G$ for which $u = f(x)$ is G_a-invariant

(ii) the dimension of the orbit of the graph Γ_f under action by G_a satisfies the inequality

$$s_1 = dim(G_a\Gamma_f) \geq s - \delta. \tag{2.42}$$

We are interested in the case of reducible partially invariant solutions, since reducible solutions can be computed from reduced systems involving $p-s_1$ independent variables, where $p - s_1 \leq p + \delta - s$. Therefore, these reduced systems are easier to solve than the systems Δ/G_i and Δ' which we have to solve to obtain partially invariant solutions.

In order to check whether a partially invariant solution is reducible under any subalgebra of the full symmetry algebra L, one can examine the kernal K of the characteristic matrix Q of L. If a non-zero subspace of K can be generated by constant vectors, then the solution will be invariant with respect to the subalgebra identified by these vectors. In the case of the Chaplygin equations (2.7), the characteristic matrix Q is

$$Q = \begin{pmatrix} -\theta_x & -\theta_t & 1 & (x - t\theta_x) & (-x\theta_x - 2t\theta_t) & (2\theta - x\theta_x) \\ -\rho_x & -\rho_t & 0 & (-t\rho_x) & (\rho - x\rho_x - 2t\rho_t) & (-\rho - x\rho_x) \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Here, each constant vector $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_6)$ in the kernal K corresponds to reducibility by the subalgebra

$$\mathcal{S} = \{a_1 P_1 + a_2 P_0 + a_3 Z + a_4 B + a_5 D_1 + a_6 D_2\}. \tag{2.44}$$

In the non-reducible case, the only constant vector in the kernal K is the zero vector $\mathbf{a} = 0$.

2.4. Partially Invariant Solutions of the Chaplygin and Born-Infeld Equations

In this section, we discuss the reduced PDEs and ODEs obtained in Table IX, providing partially invariant solutions of the Chaplygin equations (2.7) and Born-Infeld equations (2.11) where it is possible. All of these solutions have the defect $\delta = 1$ and are computed from two-dimensional symmetry subalgebras of the algebra L. Here, we operate under the hypothesis that the subgroups $G_i \subset G$ are acting regularly and transversally with 2-dimensional orbits. We identify the following five types of solutions.

2.4.1. Static Solutions

Let us discuss some classes of static (time-independent) solutions of the Chaplygin equations (2.7) which can be obtained directly from PDEs and ODEs associated to the subalgebras listed in Table IX. We discuss the results obtained individually for each subalgebra.

For the subalgebra $L_{1,8}$, the differential equation to be solved is

$$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^3 (F')^2} = 0, \tag{2.45}$$

where F is some function of ρ. We may solve this equation as an ordinary differential equation for ρ in terms of x, provided that we remember to set all constants of integration to be functions of t. We compare equation (2.45) to equation C 6.54 in [22]

$$y'' + f(y)y'^2 + g(y)y' + h(y) = 0. \tag{2.46}$$

Here, we identify the following functions : $f(y) = \frac{1}{2y} + \frac{F''}{F'}$, $g(y) = 0$, and $h(y) = \frac{\lambda}{y^3(F')^2}$. We introduce the quantity $p(y) = y'(x)$, so that equation (2.46) becomes

$$pp' + \left(\frac{1}{2y} + \frac{F''}{F'}\right)p^2 + \frac{\lambda}{y^3(F')^2} = 0. \tag{2.47}$$

Setting $q = p^2$, we transform the equation again to

$$\frac{1}{2}q' + \left(\frac{1}{2y} + \frac{F''}{F'}\right)q + \frac{\lambda}{y^3(F')^2} = 0. \tag{2.48}$$

The general solution of equation (2.48) is given by the following quadrature :

$$q(y) = \frac{1}{y}\mathbf{e}^{-2\int \frac{F''}{F'}dy}\left[K_0 - 2\lambda \int \frac{1}{y^2(F')^2}\mathbf{e}^{2\int \frac{F''}{F'}dy}dy\right]. \tag{2.49}$$

Thus, since $y' = q(y)^{1/2}$, the solution $y = y(x)$ is found implicitly through the following relation

$$\int \frac{dy}{q(y)^{1/2}} = x + c_0, \tag{2.50}$$

so that $\rho(x,t)$ is found by setting the constants of $y(x)$ to be functions of t, and θ is found by setting $\theta = F(\rho)$. This method can be used in general for all differential equations of the form

$$\rho_{xx} + f(\rho)(\rho_x)^2 + g(\rho) = 0, \tag{2.51}$$

which include the reduced equations corresponding to the splitting subalgebras $L_{1,9}$, $L_{3,3}$, $L_{4,1}$, $L_{5,3}$, $L_{6,1}$, $L_{7,3}$ (for all values of a), $L_{8,1}$, and the non-splitting subalgebras $\mathcal{L}_{3,3}$, $\mathcal{L}_{4,1}$, $\mathcal{L}_{5,3}$.

To find a particular solution of equation (2.45), we set the condition $\frac{1}{2\rho} + F''F' = 0$, so that $F(\rho) = 2K_0\rho^{1/2} + K_1$. Having fixed the function $F(\rho)$, equation (2.45) reduces to

$$\rho_{xx} + \frac{\lambda}{K_0^2\rho^2} = 0. \tag{2.52}$$

which yields the explicit solution

$$\theta(x,t) = 2K_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{K_0^2}}x + K_2\right)^{1/3} + K_1,$$
$$\rho(x,t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{K_0^2}}x + K_2\right)^{2/3}. \tag{2.53}$$

This is a static algebraic solution, with no singularities, and is unbounded at large values of x. It admits the gradient catastrophe since the velocity is unbounded at $x = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{K_0^2}{2\lambda}}K_2$.

Another class of solutions is provided from the subalgebra $L_{3,2}$. In this case, we have to solve a set of two partial differential equations for θ, in variables ξ and η, which are listed in Table IX :

$$8\xi\eta\theta_\eta\theta_{\xi\xi} + 4\eta\theta_\xi\theta_\eta + 4\xi(\theta_\xi)^2 - 2\xi\theta_\xi - \xi^2\theta_{\xi\xi} + \eta\theta_\eta - 4\xi\eta\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + \xi\eta\theta_{\xi\eta} = 0, \tag{2.54}$$

$$4\xi\theta_\xi\theta_{\xi\eta} - \xi\theta_{\xi\eta} + \theta_\eta + \eta\theta_{\eta\eta} = 0, \tag{2.55}$$

The second equation (2.55) corresponds to the fact that $F_\eta = 0$ since $F(\xi)$ is a function of ξ only. The function F is related to θ through the formula

$$F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(2\xi^2(\theta_\xi)^2 - \xi^2\theta_\xi + \xi\eta\theta_\eta\right)^{-1/2}. \tag{2.56}$$

A number of solutions $\theta(\xi,\eta)$ can be found to the system of equations (2.54) and (2.55) by setting certain conditions on the derivatives of θ. By setting $\theta_{\xi\xi} = f(\eta)$, we obtain the solution of the reduced equations

$$\theta = \frac{\xi\eta}{2\eta + C_0} + C_1. \tag{2.57}$$

This solution however leads to an infinite value for the function F (and therefore an infinite density ρ). On the other hand, if we make the assumption that $\theta_{\xi\eta} = 0$, that is $\theta = f(\xi) + g(\eta)$, then one possible solution of the reduced equations is

$$\theta = K_0 \ln(\xi\eta) + K_1. \tag{2.58}$$

The formula (2.56) gives the finite value $F = \frac{\lambda}{2K_0^2}$ and so we obtain the static solution

$$\theta(x,t) = K_0 \ln(x^2) + K_1, \qquad \rho(x,t) = \frac{\lambda}{2K_0^2}x. \tag{2.59}$$

This solution is a singular solution which admits a branch point at $x = 0$. Consequently, the velocity $\mathbf{v}$ of the fluid is singular there. Since the density ρ vanishes at that point, the entire line $x = 0$ must be physically excluded from the domain of the fluid.

Consider the subalgebra $L_{3,4}$. In this case, the reduced differential equation to be solved is

$$\begin{aligned} \rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{x}\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\rho\frac{F''}{F'}\right)(\rho_x) \\ + \left(\frac{\lambda x^2}{\rho^3(F')^2} + \frac{3}{2x^2}\rho + \frac{1}{x^3}\rho^2\frac{F''}{F'}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

where F is a function of ρ/x. This equation is different from the one considered previously for $L_{1,8}$ in the sense that there exists a non-zero coefficient of ρ_x, in both x and ρ. Thus, equation (2.46) can no longer be used. However, in the case when $F(\xi) = K_0\xi^{1/2} + K_1$, equation (2.60) is a special case of equation C 6.70 discussed in **[22]** :

$$y'' = x^{a-2} f\left(\frac{y}{x^a}, \frac{xy'}{x^a}\right), \tag{2.61}$$

where $a = 1$ and

$$f\left(\frac{y}{x}, y'\right) = y' - \frac{y}{x} - \frac{4\lambda}{K_0^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}. \tag{2.62}$$

Making the substitution $y(x) = x\eta(\xi)$, where $\xi = \ln x$, we obtain the equation

$$\eta'' + \frac{4\lambda}{K_0^2\eta^2} = 0, \tag{2.63}$$

which leads to the first integral

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{8\lambda}{K_0^2\eta} + K_3}. \tag{2.64}$$

For the special case where $K_3 = 0$, we obtain

$$y(x) = x\left(\frac{3}{K_0}\sqrt{2\lambda}\ln|x| + K_4\right)^{2/3}. \tag{2.65}$$

which leads to the static solution

$$\begin{aligned} \theta &= K_0\left(\frac{3}{K_0}\sqrt{2\lambda}\ln|x| + K_4\right)^{1/3} + K_1, \\ \rho &= x\left(\frac{3}{K_0}\sqrt{2\lambda}\ln|x| + K_4\right)^{2/3}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

This solution is singular with a branch point at $x = 0$. Therefore, we have a situation similar to that of solution (2.59) above, since the entire line $x = 0$ must be excluded from the domain of the solution.

For the subalgebra $L_{5,3}$, the differential equation to be solved is

$$\rho_{xx} - \frac{5}{2\rho}(\rho_x)^2 - \frac{1}{4}\rho^3\frac{F'}{F^2} + \frac{\lambda\rho^3}{4F^2} = 0, \tag{2.67}$$

where F is an arbitrary function of t. In the case where $\rho_{xx} = \frac{2}{\rho}(\rho_x)^2$ and $F = K_0$ is chosen to be a constant, equation (2.67) is satisfied by the static solution

$$\theta = K_0\left(K_2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2K_0^2}}x\right)^2, \qquad \rho = \frac{1}{K_2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2K_0^2}}x}. \tag{2.68}$$

This solution has a simple pole at $x = K_2\sqrt{2K_0^2/\lambda}$. Asymptotically, it is unbounded when $x \to \pm\infty$. In general, equation (2.67) can be solved by the quadrature

$$x = \int \frac{d\rho}{\rho^2(\ln\rho)(\frac{\lambda - F'}{2F^2} - C_0\rho)^{1/2}}, \tag{2.69}$$

leading to a singular solution.

A class of solutions of (2.7) corresponding to the subalgebra $L_{7,2}$, $a \neq 1$, can be constructed by solving the set of two partial differential equations for θ, in the two independent variables of ξ and η, as listed in Table IX. The function F is related to θ through the relation

$$F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left((a+1)\xi\eta^{-a}\theta_\xi + \eta^{(1-a)}\theta_\eta + 2\xi^3\eta^{-2a}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.70}$$

For the case $a = -\frac{1}{2}$, the assumption $\theta_{\xi\xi} = 0$ yields the solution of the reduced equations

$$\theta = K_0\eta^{-1/2}\xi + K_1, \qquad F = \sqrt{\frac{\lambda}{2K_0^2}}\xi^{-3/2}, \tag{2.71}$$

which leads to the algebraic solution

$$\theta = \frac{K_0}{x^2} + K_1, \qquad \rho = \sqrt{\frac{\lambda}{2K_0^2}}x^3. \tag{2.72}$$

This solution admits a double pole at $x = 0$. Asymptotically, the velocity of the fluid flow is bounded, but the density is not.

In the case of the non-splitting subalgebra $\mathcal{L}_{5.2}$, the function F is related to θ through the relation

$$F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon\eta^2}{\xi}\theta_\xi - \frac{\varepsilon\eta^3}{\xi^2}\theta_\eta + \frac{1}{2}\frac{\eta^4}{\xi^2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.73}$$

By setting $\theta_{\xi\xi} = f(\eta)$, we obtain the solution of the reduced equations

$$\theta = \frac{K_0\xi^2}{2\eta^2} + K_1, \tag{2.74}$$

from where we obtain the algebraic solution of the initial equations

$$\theta = \frac{1}{2}K_0x^2 + K_1, \qquad \rho = \frac{\sqrt{2\lambda}}{K_0x}, \tag{2.75}$$

admitting a simple pole at $x = 0$. This solution is unbounded, but the velocity does not admit the gradient catastrophe. Note that we also obtain this solution for the subalgebra $L_{5,4}$, in the case where the function F is a constant. All of the static solutions given above are expressed in terms of elementary functions and are reducible with respect to the one-dimensional subalgebra $\{P_0\}$. The structure of the singularities consists of poles and branch points only.

2.4.2. Explicit Non-static solutions

Let us now discuss certain classes of non-static solutions of the Chaplygin equations (2.7) which can be obtained directly by applying the procedure presented in Section 2.3 to the reduced equations listed in Table IX. Here, we present only the results.

For the subalgebra $L_{1,6}$, we obtain the algebraic solution

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \frac{1}{2(t-t_0)}x^2 + \frac{K_1}{t-t_0}x + \frac{\lambda}{3K_2^2}(t-t_0)^3 + \frac{K_1^2}{2(t-t_0)} + K_3,\\ \rho(x,t) &= \frac{K_2}{t-t_0},\end{aligned} \tag{2.76}$$

which admits a simple pole at $t = t_0$. Evaluating the characteristic matrix (2.43) for solution (2.76), we find that the only constant vectors in the kernal are multiples of the vector

$$\mathbf{a} = (t_0, 0, -1, -1, 0, 0). \tag{2.77}$$

Therefore, this solution is reducible with respect to the full group G by the one-dimensional subalgebra $S_{1,6} = \{t_0P_1 - K_1Z - B\}$.

Similarly, for the subalgebra $L_{2,2}$, we obtain the solution

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \frac{a_1x^2}{2(a_1t+a_0)} + \frac{a_2x}{(a_1t+a_0)} + \frac{1}{3}\lambda a_1^2t^3 + \lambda a_1a_0t^2 + \lambda a_0^2t \\ &+ \frac{a_2^2}{2a_1(a_1t+a_0)} + a_3, \\ \rho(x,t) &= \frac{1}{a_1t+a_0}.\end{aligned} \tag{2.78}$$

We note that solution (2.78) is identical to the solution (2.76) found in the previous case for subalgebra $L_{1,6}$. Here, the simple pole is at $t = a_0/a_1$. We note that both solutions (2.76) and (2.78) represent centered wave type solutions.

A similar situation to that of $L_{1,6}$ and $L_{2,2}$ occurs for the two subalgebras $L_{1,7}$ and $L_{5,2}$. In the case of $L_{1,7}$, we obtain the exponential-type solution

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= -\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}K_1(x-x_0)^2\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(t-t_0)}}{1-\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(t-t_0)}}\right) + K_2, \\ \mathbf{v}(x,t) &= -\sqrt{2\lambda}K_1(x-x_0)\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(t-t_0)}}{1-\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(t-t_0)}}\right), \\ \rho(x,t) &= -\frac{1}{K_1(x-x_0)}.\end{aligned} \tag{2.79}$$

This solution has simple poles at $x = x_0$ and $t = t_0$, and is reducible by the one-dimensional subalgebra $S_{1,7} = \{D_2 - x_0P_1\}$.

In the case of subalgebra $L_{5,2}$, the solution is given by

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{2C_0}x^2\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{C_0}(t-t_0)}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{C_0}(t-t_0)}-1}\right), \\ \mathbf{v}(x,t) &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{C_0}x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{C_0}(t-t_0)}+1}{\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{2\lambda}}{C_0}(t-t_0)}-1}\right), \qquad \rho(x,t) = \frac{C_0}{x}.\end{aligned} \tag{2.80}$$

Indeed, up to a translational shift in x and t, solution (2.80) is identical to solution (2.79). The pole in x is now at $x = 0$. Both solutions (2.79) and (2.80) have a singularity at line $t = t_0$, as well as at line $x = x_0$ (for (2.79)) or $x = 0$ (for (2.80)). When $K_1 > 0$, the asymptotic behavior is as follows. As $t \to \infty$, the quantity θ approaches the function $f_+(x) = a(x-x_0)^2$, and as $t \to -\infty$, it approaches the function $f_-(x) = -a(x-x_0)^2$. The density has a simple pole at $x = x_0$, and is constant in time. Both solutions correspond to kinks, and since the current for solution (2.79)

$$j = \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} = \sqrt{2\lambda} \left(\frac{1 + e^{2\sqrt{2\lambda} K_1 (t - t_0)}}{1 - e^{2\sqrt{2\lambda} K_1 (t - t_0)}} \right), \tag{2.81}$$

is preserved in x, this suggests the complete integrability of system (2.7).

For the non-splitting subalgebra $\mathcal{L}_{2,2}$, the density ρ is related to θ through the relation

$$\rho(\xi) = \sqrt{\lambda} \left(\theta_\eta - \eta \theta_\xi + \frac{1}{2} (\theta_\xi)^2 \right)^{-1/2}. \tag{2.82}$$

The assumption $\theta_{\xi\xi} = 0$ yields the polynomial solution of the reduced equations

$$\theta = \xi \eta + \frac{1}{6} \eta^3 + K_1 \eta + K_0, \tag{2.83}$$

which leads to the partially invariant solution

$$\theta = \varepsilon x t - \frac{1}{3} t^3 + K_1 t + K_0, \qquad \mathbf{v}(x,t) = \varepsilon t, \qquad \rho = \sqrt{\lambda} (\varepsilon x - \frac{1}{2} t^2 + K_1)^{-1/2}. \tag{2.84}$$

This solution is reducible by the two-dimensional subalgebra $\mathcal{S}_{2,2} = \{\varepsilon P_0 + \varepsilon K_1 Z + B, 4\varepsilon K_1 P_1 - 6K_0 Z + D_1\}$. Consequently, solution (2.84) can be obtained either as a partially invariant solution with $\delta = 1$ with respect to the subalgebra $\mathcal{L}_{2,2}$, or as a G-invariant solution ($\delta = 0$) with respect to the subalgebra $\mathcal{S}_{2,2}$.

For the subalgebra $L_{7,2}$, $a = 1$, we have a set of two partial differential equations for θ listed in Table IX. The density ρ is linked to θ through the relation

$$\rho(\xi) = \sqrt{\lambda} \left(-\frac{\xi}{\eta} \theta_\xi + \theta_\eta + \frac{1}{2\eta^2} (\theta_\xi)^2 \right)^{-1/2}. \tag{2.85}$$

We obtain two different solutions to the reduced system. First, we have

$$\theta = \frac{1}{2} \eta \xi^2 + C_0, \tag{2.86}$$

which leads to an infinite density. Also, we have

$$\theta = K_0 \eta + K_1, \tag{2.87}$$

from where we obtain the trivial constant-density solution

$$\theta = K_0 t + K_1, \qquad \rho = \sqrt{\frac{\lambda}{K_0}}. \tag{2.88}$$

Solution (2.88) nevertheless has a characteristic matrix of rank 1, and is therefore partially invariant. In this case, the solution is reducible by the subalgebra $S_{7,2} = \{P_1, P_0 + K_0 Z, -2K_1 Z + D_1 + D_2\}$.

For the subalgebra $L_{11,2}$, the density ρ is related to θ through the relation

$$\rho(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(\theta_\eta - \frac{1}{\eta}\left(\xi + \varepsilon + \varepsilon \ln \eta\right)\theta_\xi + \frac{2}{\eta^2}(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}. \tag{2.89}$$

The assumption $\theta_{\xi\eta} = K_0$ yields the solution of the reduced equations

$$\theta = K_0 \xi\eta + K_0 \varepsilon \eta \ln \eta + (K_1 - K_0\varepsilon)\eta + K_2, \qquad K_0, K_1, K_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.90}$$

which leads to the constant-density solution

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= 2K_0 x + (K_1 - K_0\varepsilon)t + K_2, \\ \rho &= \sqrt{\lambda}(K_1 + 2K_0^2 - K_0\varepsilon)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.91}$$

This solution is reducible by the subalgebra $S_{11,2} = \{P_1 + 2K_0 Z, P_0 + (K_1 - K_0\varepsilon)Z, D_1 + D_2 - 2K_2 Z\}$, and represents a travelling wave.

Finally, it is interesting to note that the subalgebra $L_{7,4}$, where $a = -1$, leads to a bump-type solution. The reduced equation of the subalgebra has the form

$$\rho_{xx} - \frac{3}{2\rho}(\rho_x)^2 + \frac{2F'}{F}\rho_x + \left(\frac{\lambda\rho}{F^2} - \frac{(F')^2\rho}{2F^2} - \frac{F''}{F}\rho\right) = 0, \tag{2.92}$$

where F is a function of x. For the special case where $F = K_0$, the equation becomes

$$\rho_{xx} - \frac{3}{2\rho}(\rho_x)^2 + \frac{\lambda}{F^2}\rho = 0. \tag{2.93}$$

We can integrate equation (2.93) twice and obtain the explicit form of the bump solution

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= -\frac{\lambda(t-t_0)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}(x+C)\right)}, \\ \theta(x,t) &= -\frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}(x+C)\right)}{\lambda(t-t_0)}, \end{aligned} \tag{2.94}$$

which is reducible by the subalgebra $S_{7,4} = \{D_1 - D_2 - 2t_0 P_0\}$. The velocity potential θ admits a simple pole at $t = t_0$. For large values of x, the density ρ is bounded and tends to zero, but the velocity potential is unbounded. It should be noted that θ decreases with time provided that we exclude the region around the pole at t_0. Also, since the current

$$j = \sqrt{2\lambda}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}(x+C)\right), \tag{2.95}$$

is preserved in time t, and since there exists an infinite number of preserved quantities, the complete integrability of the Chaplygin equation (2.7) is established.

2.4.3. Implicit Solutions expressed in terms of elementary functions

A localized solution of (2.7) can be obtained from the subalgebra $L_{6,1}$. The reduced differential equation from Table IX takes the form

$$\rho_{xx} - \frac{5}{2\rho}(\rho_x)^2 - \frac{1}{2tF}\rho^3 - \frac{F'}{4F^2}\rho^3 + \frac{\lambda\rho^3}{4F^2} = 0, \tag{2.96}$$

where F is a function of t. In the case where $F(t) = 1$ we can integrate equation (2.96), and this results in the solution given in implicit form

$$-\frac{1}{2K_0\rho}\sqrt{K_1\rho + 2K_0} + \varepsilon\frac{K_1}{(2\varepsilon K_0)^{3/2}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{K_1\rho+2K_0}{2\varepsilon K_0}}\right) = x + C_0, \tag{2.97}$$

where $K_0(t) = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2t}$, and $\varepsilon = \frac{|K_0(t)|}{K_0(t)}$. This solution represents a kink in the regions where the derivatives of ρ and θ are finite and the gradient catastrophe does not occur. An analysis of the characteristic matrix (2.43) indicates that the only constant vector in the kernal is the zero vector. Therefore, solution (2.97) is irreducible with respect to the full group G.

2.4.4. Solutions in terms of Jacobi elliptic functions

We now discuss solutions which can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions. For the subalgebra $L_{1,9}$, the basic Chaplygin system (2.7) is reduced to the following differential equation

$$\rho_{xx} + \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{F''}{F'}\right)(\rho_x)^2 + \left(\frac{\lambda}{\rho^3(F')^2} - \frac{\varepsilon}{\rho(F')^2}\right) = 0. \tag{2.98}$$

Equation (2.98) has the Painlevé property (no movable singularities other than poles) if and only if

$$F(\rho) = 2K_0\rho^{1/2} + K_1, \tag{2.99}$$

where K_0 and K_1 are functions of t. So, equation (2.98) becomes

$$\rho_{xx} + \frac{\lambda}{K_0^2 \rho^2} - \frac{\varepsilon}{K_0^2} = 0, \tag{2.100}$$

the solution of which can be expressed by quadrature

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{K_0^2}\rho^3 + K_2\rho^2 + \frac{2\lambda}{K_0^2}\rho}} = x + K_3. \tag{2.101}$$

Equation (2.101) can be solved in terms of elliptic functions **[23]** or degenerate cases thereof (i.e. elementary functions). We can integrate ODE (2.100) once and write the obtained first-order equation

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3), \tag{2.102}$$

where the constants ρ_1, ρ_2, ρ_3 satisfy the relations

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= -\frac{1}{2}\varepsilon K_2 K_0^2, \\ \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3 &= \varepsilon\lambda, \\ \rho_1\rho_2\rho_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.103}$$

When all three roots ρ_i of the polynomial in equation (2.102) are different, then the solution can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions. The results for different ordering of the roots $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ are summarized in Table X.

The moduli k of the Jacobi elliptic functions can be chosen in such a way that $0 < k^2 < 1$. This ensures that the elliptic solutions possess one real and one purely imaginary period and that for real arguments x we have

$$-1 \leq sn(x,k) \leq 1, \qquad -1 \leq cn(x,k) \leq 1, \qquad \sqrt{1-k^2} \leq dn(x,k) \leq 1. \tag{2.104}$$

Note that non-singular periodic solutions can be physically interpreted as kinks, bumps, cnoidal and snoidal waves, depending on the asymptotic behavior of the modulus k. Singular solutions represent static structures which develop from a point or a line into a growing sphere or cylinder.

Elementary solutions take place when two of the roots are identical, $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2$ and $\rho_3 = 0$. Then we obtain $\lambda = \frac{1}{16}\varepsilon K_2^2 K_0^4$, and equation (2.102) becomes

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\rho}(\rho + \frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2)^2. \tag{2.105}$$

TAB. X. Jacobi elliptic solutions corresponding to the subalgebra $L_{1,9}$ of the Chaplygin equation. Reduction to the ODE $\varepsilon y'' + \alpha y^{-2} + \beta$, $\varepsilon = \pm 1$, where $\alpha = \lambda K_0^{-2}$, $\beta = -\varepsilon K_0^{-2}$. The function $U(\rho)$ is such that $U(\rho) = x + c_0$. The constants are defined to be $m = \frac{1}{4} K_2 K_0^2 + \left(\frac{1}{16} K_2^2 K_0^4 + \lambda\right)^{1/2}$, $n = -\lambda \left(\frac{1}{4} K_2 K_0^2 + \left(\frac{1}{16} K_2^2 K_0^4 + \lambda\right)^{1/2}\right)^{-1}$, $p_\pm = -\frac{1}{4} K_2 K_0^2 \pm \left(\frac{1}{16} K_2^2 K_0^4 - \lambda\right)^{1/2}$, $q_\pm = \lambda\Big(-\frac{1}{4} K_2 K_0^2 \pm \left(\frac{1}{16} K_2^2 K_0^4 - \lambda\right)^{1/2}\Big)^{-1}$.

No.	Order of roots	Function $U(\rho)$	Modulus k and parameters
1	$\rho \leq c < 0 < a$ $\varepsilon = -1$ $a = m$ $c = n$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{(a-c)^{1/2}}\right)$ $[c\, u_1 + (a-c)E(u_1) + (a-c)dn(u_1)cs(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{a}{a-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{a-c}{a-\rho}\right)^{1/2}$
2	$\rho < c < 0 < a$ $\varepsilon = -1$ $a = m$ $c = n$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2c}{(a-c)^{1/2} k'^2}\right)$ $[k'^2 u_1 - E(u_1) + dn(u_1)tn(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{a}{a-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{\rho-c}{\rho}\right)^{1/2}$ $k' = (1-k^2)^{1/2}$
3	$c < \rho \leq b < 0$ $\varepsilon = 1$ $b = p_\pm$ $c = q_\pm$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{(-c)^{1/2}}\right)$ $\left[c\, u_1 - \frac{(c-b)}{k^2}(u_1 - E(u_1))\right]$	$-1 < k = \left(\frac{b-c}{-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{\rho-c}{b-c}\right)^{1/2}$
4	$c \leq \rho < b < 0$ $\varepsilon = 1$ $b = p_\pm$ $c = q_\pm$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2b}{(-c)^{1/2} k'^2}\right)$ $[E(u_1) - k^2 sn(u_1)cd(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{b-c}{-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{b-\rho}{(c-b)\rho}\right)^{1/2}$ $k' = (1-k^2)^{1/2}$
5	$c < 0 < \rho \leq a$ $\varepsilon = -1$ $a = m$ $c = n$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{-2c}{(a-c)^{1/2} k'^2}\right)$ $[E(u_1) - k'^2 u_1 - k^2\ sn(u_1)cd(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{a}{a-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{(a-c)\rho}{a(\rho-c)}\right)^{1/2}$ $k' = (1-k^2)^{1/2}$
6	$c < 0 \leq \rho < a$ $\varepsilon = -1$ $a = m$ $c = n$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2a}{(a-c)^{1/2} k^2}\right) [E(u_1) - k'^2 u_1]$	$-1 < k = \left(\frac{a}{a-c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{a-\rho}{a}\right)^{1/2}$ $k' = (1-k^2)^{1/2}$
7	$c < b < 0 < \rho$ $\varepsilon = 1$ $b = p_\pm$ $c = q_\pm$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \frac{-2b}{k'^2(-c)^{1/2}} [dn(u_1)tn(u_1) - E(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{c-b}{c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{\rho}{\rho-b}\right)^{1/2}$

TAB. X. (continued)

No.	Order of roots	Function $U(\rho)$	Modulus k and parameters
8	$c < b < 0 \leq \rho < \infty$ $\varepsilon = 1$ $b = p_\pm$ $c = q_\pm$	$\left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} \frac{2c}{(-c)^{1/2}} [E(u_1) + dn(u_1)cs(u_1)]$	$-1 < k = \left(\frac{c-b}{c}\right)^{1/2} < 1$ $sn(u_1) = \left(\frac{c}{c-\rho}\right)^{1/2}$
9	$0 < \rho$, and $b, c \in C$ $\varepsilon = 1$ $b = -\frac{K_0^2 K_2}{4} \pm$ $i\left(\lambda - \frac{K_0^4 K_2^2}{16}\right)^{1/2}$ $c = \bar{b}$	$\lambda^{1/4} \left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2} [-F(\phi, k)$ $+2\left(u_1 - E(u_1) + \frac{sn(u_1)dn(u_1)}{1+cn(u_1)}\right)]$	$-1 < k = \left(\frac{\lambda^{1/2} - \frac{1}{4}K_0^2 K_2}{2\lambda^{1/2}}\right)^{1/2} < 1$ $cn(u_1) = \frac{\lambda^{1/2} - \rho}{\lambda^{1/2} + \rho}$ $\phi = cos^{-1}\left(\frac{\lambda^{1/2} - \rho}{\lambda^{1/2} + \rho}\right)$
10	$0 < \rho < \infty$, and $b, c \in C$ $\varepsilon = 1$ $b = -\frac{K_0^2 K_2}{4} \pm$ $i\left(\lambda - \frac{K_0^4 K_2^2}{16}\right)^{1/2}$ $c = \bar{b}$	$\lambda^{1/4} \left(\frac{K_0^2}{2}\right)^{1/2}$ $\left[u_1 - 2E(u_1) - 2\frac{sn(u_1)dn(u_1)}{1-cn(u_1)}\right]$	$-1 < k = \left(\frac{\lambda^{1/2} - \frac{1}{4}K_0^2 K_2}{2\lambda^{1/2}}\right)^{1/2} < 1$ $cn(u_1) = \frac{\rho - \lambda^{1/2}}{\rho + \lambda^{1/2}}$ $\phi = cos^{-1}\left(\frac{\rho - \lambda^{1/2}}{\rho + \lambda^{1/2}}\right)$

The general integral is given in implicit form

$$2\rho^{1/2} - (-\frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2)^{1/2} \ln \left(\frac{(-\frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2)^{1/2} + (\rho)^{1/2}}{(-\frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2)^{1/2} - (\rho)^{1/2}} \right) = \pm x + C_0, \qquad (2.106)$$

which is a singular solution admitting a branch point at $\rho = -\frac{1}{4}\varepsilon K_2 K_0^2$.

By means of the non-splitting subalgebra $\mathcal{L}_{3,4}$, the reduced equation from Table IX obtained when we set $F(\xi) = K_0 \xi^{1/2} + K_1$, as in the previous cases, is

$$\rho_{xx} - \frac{1}{x}\rho_x + \frac{1}{x^2}\rho + \frac{4\lambda x}{K_0^2 \rho^2} - \frac{2}{K_0^2 x} = 0. \qquad (2.107)$$

This is once again a special case of equation (2.61), except that the coefficient function is now given by

$$f\left(\frac{y}{x}, y'\right) = y' - \frac{y}{x} - \frac{4\lambda}{K_0^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} + \frac{2}{K_0^2}. \tag{2.108}$$

where $a = 1$. Making the change of variable $\rho(x) = x\eta(\xi)$ where $\xi = \ln x$ into (2.107), we obtain the first integral

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \frac{8\lambda}{K_0^2\eta} + \frac{4\eta}{K_0^2} + K_3. \tag{2.109}$$

This leads to the quadrature

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{8\lambda}{K_0^2\eta} + \frac{4\eta}{K_0^2} + K_3}} = \xi + c_0, \tag{2.110}$$

which can be solved in terms of elliptic functions [23]. The solutions $\eta = \eta(\xi)$ are found in exactly the same manner as for the previous case ($\rho = \rho(x)$) for subalgebra $L_{1,9}$, except that the coefficients are now different. The right-hand sides of equations (2.103) in terms of η become $-\frac{1}{4}K_3K_0^2$, 2λ and 0 respectively. The coefficient ε which previously appeared for the subalgebra $L_{1,9}$ is always set to 1, which means that only those root orderings previously corresponding to the positive branch of ε are included. All implicit partially invariant solutions obtained in Subsection 2.4.4 are irreducible with respect to the full group G. This is due to the fact that the kernal of the characteristic matrix (2.43), built from the derivatives of ρ and θ, does not contain any non-zero constant vectors.

It should be noted that Chaplygin solutions have been found for the two-dimensional subalgebras which have not been discussed above. In order to be concise, we have omitted them from this paper, and limit ourselves to a few general comments. In the cases of subalgebras $L_{3,3}$, $\mathcal{L}_{3,3}$, $L_{4,1}$, $\mathcal{L}_{4,1}$, $\mathcal{L}_{5,3}$, $L_{7,3}(a = 1)$, $L_{7,3}(a \neq 1)$ and $L_{8,1}$, solutions of the reduced equations in Table IX were found implicitly by quadrature. As an example, we present the solution for subalgebra $L_{3,3}$:

$$\int \left(\frac{2\lambda\sqrt{t}}{K_0^2\rho} - \frac{2\rho^{3/2}}{3t^{3/4}K_0} + K_2\right)^{-1/2} d\rho = x + C_0. \tag{2.111}$$

For the subalgebras $L_{7,4}$, $(a = 1)$, $L_{7,5}$, $(a = 1)$, $L_{7,4}$, $(a \neq 1)$, $L_{9,1}$, $\mathcal{L}_{7,4}$, $(a \neq 1)$ and $\mathcal{L}_{8,1}$, G-invariant solutions have been constructed. Finally, for subalgebra

$\mathcal{L}_{7.2}(a \neq 1)$, a Chaplygin solution has been determined which has infinite density. However, its equivalent Born-Infeld solution has a finite density, as will be shown in the next subsection.

2.4.5. Solutions of the Born-Infeld equations

Each solution of the nonrelativistic Chaplygin equations (2.7) can where possible be used to obtain a corresponding solution of the relativistic Born-Infeld equations (2.11) in one spatial dimension. Since the Chaplygin and Born-Infeld models involve two distinct parametrizations of the Nambu-Goto target space variables X^0 and X^{d+1}, we equate these variables to both their relativistic and non-relativistic representations :

$$\begin{aligned} X^0 &= ct_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t_{NR} + \theta_{NR}(t_{NR}, \mathbf{r})\right), \\ X^{d+1} &= \frac{1}{c}\theta(t_R, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t_{NR} - \theta_{NR}(t_{NR}, \mathbf{r})\right). \end{aligned} \tag{2.112}$$

Renaming the time variables $T = \frac{1}{c}t_{NR}$ and $t = t_R$, we obtain the following method of solution transformation described by Jackiw [**1**]. If $\theta_{NR}(\mathbf{r}, t)$ is a solution of the Chaplygin equation (2.6), then a solution $\theta_R(\mathbf{r}, t)$ of the Born-Infeld equation can be determined as follows. First, we determine the function $T(\mathbf{r}, t)$ from the equation

$$T + \frac{1}{c^2}\theta_{NR}(\mathbf{r}, T) = \sqrt{2}t, \tag{2.113}$$

then we obtain the relativistic Born-Infeld solution

$$\theta_R(\mathbf{r}, T) = \frac{1}{\sqrt{2}}c^2 T - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{NR}(\mathbf{r}, T) = c^2(\sqrt{2}T - t), \tag{2.114}$$

which is associated to the Chaplygin solution θ_{NR}. Since equation (2.113) cannot always be solved explicitly for $T(\mathbf{r}, t)$ it follows that explicit Born-Infeld solutions cannot always be found in this manner. However, the following classes of solutions of the Born-Infeld equation (2.10) can be constructed. We summarize the results as follows.

For each static solution $\theta_{NR}(x)$ given in Subsection 2.4.1, we can find the equivalent Born-Infeld solution

$$\theta_R(x,t) = c^2 t - \sqrt{2}\theta_{NR}(x), \qquad \rho_R(x) = \frac{a}{\sqrt{2}\left(\frac{d}{dx}\theta_{NR}(x)\right)}, \tag{2.115}$$

where a is related to λ through the relation $\lambda = a^2/2$. Thus, for example, we obtain for the subalgebra $L_{1,8}$ the solution of the Born-Infeld equation (2.11) of the form

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= c^2 t - 2\sqrt{2}K_0\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{K_0^2}}x + K_2\right)^{1/3} - \sqrt{2}K_1, \\ \rho(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{K_0^2}}x + K_2\right)^{2/3}. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Since the coordinate transformation (2.112) is non-singular, solution (2.116) is reducible by the sub algebra $\{\widehat{P_0}\}$ given in (2.20). It is to be noted that the static Chaplygin solutions are transformed to non-stationary solutions of the Born-Infeld equations.

For the subalgebras $L_{1,6}$ and $L_{2,2}$, equation (2.113) takes the following polynomial form :

$$\begin{aligned} &\lambda T^4 - 4\lambda t_0 T^3 + (2c^2K_2^2 - 2\sqrt{2}c^2K_2^2 + 6\lambda t_0^2)T^2 \\ &\quad + (2\sqrt{2}c^2K_2^2 t_0 - 2c^2K_2^2 t_0 + 2K_3K_2^2 - 4\lambda t_0^3)T \\ &\quad + (\lambda t_0^4 + K_1^2K_2^2 + K_2^2x^2 + 2K_1K_2^2 x - 2K_3K_2^2 t_0) = 0. \end{aligned} \tag{2.117}$$

This is a quartic equation which can be solved explicitly through the method of Ferrari, by solving the resolvent cubic equation [**24**]. The quantity T can be expressed as a function of x and t. Since the solution has a complicated form, we will not present it here.

In the case of subalgebras $L_{1,7}$ and $L_{5,2}$, equation (2.113) has the transcendental form for T

$$T - \frac{1}{2c^2}\sqrt{2\lambda}K_1(x-x_0)^2\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(T-t_0)}}{1-\mathrm{e}^{2\sqrt{2\lambda}K_1(T-t_0)}}\right) + \frac{K_2}{c^2} = \sqrt{2}t. \tag{2.118}$$

which cannot be solved explicitly as a function of x and t.

The associated equation (2.113) for the subalgebra $\mathcal{L}_{2,2}$ reduces to the cubic form

$$T^3 - 3(c^2 + \varepsilon x + K_1)T - 3(K_0 - \sqrt{2}c^2 t) = 0. \qquad (2.119)$$

The solution of this equation is given by Cardan's formula for the roots of a cubic

$$\begin{aligned} T(x,t) = & \\ & \left(\frac{3}{2}(K_0 - \sqrt{2}c^2 t) + \left(\frac{9}{4}(K_0 - \sqrt{2}c^2 t)^2 + (c^2 + \varepsilon x + K_1)^3\right)^{1/2}\right)^{1/3} \\ & + \left(\frac{3}{2}(K_0 - \sqrt{2}c^2 t) - \left(\frac{9}{4}(K_0 - \sqrt{2}c^2 t)^2 + (c^2 + \varepsilon x + K_1)^3\right)^{1/2}\right)^{1/3}, \end{aligned} \qquad (2.120)$$

and the solution can be expressed simply as $\theta_R(x,t) = c^2(\sqrt{2}T - t)$.

For the subalgebra $L_{7,2}$, $(a = 1)$, the solution (2.88) leads to a rather trivial solution, namely

$$\theta(x,t) = \frac{c^2\left((c^2 + K_0)t - \sqrt{2}K_1\right)}{c^2 - K_0}, \qquad \rho(x,t) = \frac{a(c^2 + K_0)}{c^2\sqrt{-4K_0}}. \qquad (2.121)$$

The associated Born-Infeld solution for the subalgebra $L_{11,2}$ takes the form

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{c^2}{c^2 - K_1 + K_0\varepsilon}\left((c^2 + K_1 - K_0\varepsilon)t - 2\sqrt{2}K_0 x - \sqrt{2}K_2\right), \\ \rho(x,t) &= \frac{a(c^2 + K_1 - K_0\varepsilon)}{\sqrt{c^2\left(c^4 - (K_1 - K_0\varepsilon)^2\right) + 8c^4 K_0^2}}. \end{aligned} \qquad (2.122)$$

Finally, for the Chaplygin bump solution (2.94) corresponding to the subalgebra $L_{7,4}(a = -1)$, the associated Born-Infeld solution is given by

$$\theta(x,t) = \frac{c^2 t_0}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{2}c^2\left(\frac{(t_0 - \sqrt{2}t)^2}{4} + \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda}(x + C)\right)}{c^2\lambda}\right)^{1/2}, \qquad (2.123)$$

which is non-singular and asymptotically unbounded. Since they correspond respectively to the reducible Chaplygin solutions (2.88), (2.91) and (2.94), the Born-Infeld solutions (2.121), (2.122) and (2.123) are reducible by the transformed subalgebras corresponding to $S_{7,2}$, $S_{11,2}$ and $S_{7,4}$ respectively.

We note that the Jacobi elliptic solutions described in Subsection 2.4.4 can be transformed to hyperelliptic solutions of the Born-Infeld equations. Due to the complexity of the expressions involved, we will not include them here.

In addition to the solutions discussed above, it should be noted that certain solutions to the reduced equations in Table IX lead to Chaplygin solutions with infinite density which were not discussed previously due to physical considerations. However, these "solutions" can be used to determine finite-density Born-Infeld solutions. As an example, we consider the subalgebra $\mathcal{L}_{7,2}(a \neq 1)$. A solution to the reduced equations in Table IX is

$$\begin{aligned} \theta_{NR} &= K_0\xi + \frac{\varepsilon K_0}{2}\ln\eta - \frac{K_0^2}{2}\eta + K_1 && (2.124) \\ &= K_0 x - \frac{K_0^2}{2}t + K_1. && (2.125) \end{aligned}$$

Since the function F is related to θ by the relation

$$F(\xi) = \sqrt{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon\eta}{2}\theta_\xi + \eta^2\theta_\eta + \frac{1}{2}\eta^2(\theta_\xi)^2\right)^{-1/2}, \tag{2.126}$$

the non-relativistic density ρ_{NR} becomes infinite. However, if we transform the non-relativistic θ-function (2.125) into its relativistic (Born-Infeld) equivalent

$$\theta(x,t) = \frac{c^2}{c^2 - \frac{K_0^2}{2}}\left((c^2 + \frac{K_0^2}{2})t - \sqrt{2}K_0^2 x - \sqrt{2}K_1\right), \tag{2.127}$$

then we obtain a finite (though constant) density

$$\rho(x,t) = \varepsilon\left(\frac{a^2c^4(c^2+\frac{K_0^2}{2})^2}{2K_0^2c^8(K_0^2-1)}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{2.128}$$

which represents a travelling wave similar to that of solution (2.122). The negative branch ($\varepsilon = -1$) could be interpreted as an antiparticle density.

2.5. Summary and Concluding Remarks

The main purpose of this paper has been to provide a great variety of exact analytic solutions through the systematic use of the subgroup structure of the Chaplygin and Born-Infeld equations in $(1+1)$ dimensions. We concentrate exclusively on partially invariant solutions. Under the hypothesis that the subgroups $G_i \subset G$ are acting regularly with 2-dimensional orbits and that the transformed graphs $G_i(\Gamma_f)$ are submanifolds, we construct and investigate partially invariant solutions with defect structure $\delta = 1$. We can summarize the results which were obtained using the proposed algorithm in Section 2.3, with the following cases.

(1) Elementary solutions, that is, algebraic with one or two simple poles, trigonometric, hyperbolic and logarithmic.

(2) Implicit solutions in terms of elementary functions.

(3) Doubly periodic solutions which can be expressed in terms of Jacobi elliptic functions sn, cn and dn.

The explicit partially invariant solutions were found to be reducible, in most cases by one-dimensional subalgebras of L. It should be noted that these types of solutions are difficult to obtain using the standard symmetry reduction method. All implicit solutions are irreducible with respect to the full group G.

The analysis described in this paper could be extended in several directions. Firstly, it should be remembered that the elimination of ρ in the equations of motion (2.7) and (2.11) was only made possible when the constants λ and a respectively do not vanish. These quantities correspond to a d-brane "tension" which must not vanish if the Nambu-Goto action (2.1) is to generate dynamics [**1**]. Consequently, it is reasonable to suppose that an action for a "tensionless" d-brane could lead to the non-interactive (free) Chaplygin and Born-Infeld theories, where $\lambda = 0$ and $a = 0$, respectively. More generally, it may be interesting to investigate partially invariant solutions of the more general form of the Nambu-Goto action.

Secondly, the question also arises as to whether our approach can be extended to a supersymmetric version of the Chaplygin model. Recently, such a generalization has been achieved by Jackiw and Polychronakos [**25**] where, in particular, the explicit representation has been derived from a supermembrane. A group analysis of this supersymmetric planar model can, through the use of Grassmann variables and the Legendre transformation, provide us with new classes of generalized solutions of this model. This work is currently undertaken [**26**].

Finally, using group theoretical techniques, the authors plan to generate, in a systematic way, invariant and partially invariant solutions of the Born-Infeld equations in (3+1) dimensions. The concept of weak transversality for these types of solutions could also be investigated. This task will be undertaken in a future work.

Acknowledgements

One of the authors, A.M.G., would like to thank Professor R. Jackiw, Massachusetts Institute of Technology, for helpful discussions on this topic. The authors' research was partially supported by research grants from NSERC of Canada and FQRNT du Québec.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes* (Springer-Verlag, New York, 2002).

[2] R. Jackiw and A.P. Polychronakos, *Proc. Steklov Inst. Math.* **226**, 193 (1999).

[3] M. Bordemann and J. Hoppe, *Phys. Lett.* **B317**, 315 (1993).

[4] B. Barbashov and N. Chernikov, "Solution of the two plane wave scattering problem in a nonlinear scalar field theory of the Born-Infeld type," *JETP* **24**, 437-442 (1967).

[5] A. M. Grundland, A. J. Hariton and V. Hussin, "Group-invariant solutions of relativistic and nonrelativistic models in field theory," *J. Math. Phys.* **44**, 2874-2890 (2003).

[6] E. Kiritsis, *Introduction to Superstring Theory* (Leuven University Press, 1998).

[7] A. Polyakov, *Phys. Lett.* **B103**, 207-211 (1981).

[8] S. A. Chaplygin, *On Gas Jets* (GITTL, Moscow-Leningrad, 1949).

[9] A. J. Hariton, *Equations du gaz de Chaplygin et supersymétries*, M.Sc. Thesis, Université de Montréal, 2001.

[10] M. Born and L. Infield, "Foundations of the New Field Theory," *Proc. Roy. Soc.* **A144**, 425 (1934).

[11] I. Bialynicki-Birula, "Field Theory of Photon Dust," *Acta Phys. Pol.* **B23**, 553 (1992).

[12] G B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley and Sons, New York, 1974).

[13] P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrech, 1993), 429.

[14] L. V. Ovsiannikov, *Group Properties of Differential Equations*(in Russian) (Novosibirsk, 1962) ; *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, 1986).

[15] *CRC Handbook on Lie Group Methods for Differential Equations*, edited by N. H. Ibragimov (CRC, Boca Raton, FL, 1996), Vol. 3.

[16] P. A. Clarkson and P. Winternitz, "Symmetry Reduction and Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," Proceedings of the "Painlevé Property One Century Later", Editor : R. Conte, Springer-Verlag, Berlin,, 591-660 (1999).

[17] G. Gaeta, *Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

[18] A. M. Grundland, P. Tempesta and P. Winternitz, "Weak transversality and partially invariant solutions," *J. Math. Phys.* **44**, 2704-2722 (2003).

[19] P. Olver, "Symmetry and Explicit Solutions of Partial Differential Equations," *Appl. Num. Math.* **10**, 307 (1992).

[20] J. Ondich, "The reducibility of partially invariant solutions of systems of partial differential equations," *Euro. J. Appl. Math.* **6**, 329 (1995).

[21] A. M. Grundland and L. Lalague, "Invariant and partially invariant solutions of the equations describing a non-stationary and isentropic flow for an ideal and compressible fluid in $(3+1)$ dimensions," *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**. 1723-1739 (1996).

[22] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I* (B. G. Teubner. Stuttgart, 1983).

[23] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists* (Springer-Verlag, New York, 1971).

[24] B. King. *Beyond the Quartic Equation* (Birkhäuser, Boston, 1996).

[25] R. Jackiw and A.P. Polychronakos, "Supersymmetric Fluid Mechanics," *Phys.Rev.* **D62**. 085019 (2000).

[26] A. J. Hariton and V. Hussin, "Invariant solutions of a supersymmetric fluid model," soumis le 6 janvier 2005 au Journal of Physics A.

Chapitre 3

INVARIANT SOLUTIONS OF A SUPERSYMMETRIC FLUID MODEL

Auteurs : A. J. Hariton and V. Hussin.

Référence : soumis le 6 janvier 2005 au Journal of Physics A.

Résumé

Dans cet article, nous présentons une procédure qui nous permet de construire des solutions invariantes du gaz supersymétrique de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions. Nous utilisons une généralisation de la transformée de Legendre afin de transformer le système d'équations originales en un nouvel ensemble d'équations différentielles ayant comme variables indépendantes la vitesse du fluide et la vitesse du son dans le fluide. Les propriétés symétriques des équations et leurs algèbres de Lie sont décrites pour les deux systèmes de coordonnées, et nous faisons appel à une classification systématique des sous-groupes pour obtenir certaines classes de solutions invariantes des équations transformées. Lorsque cela est possible, nous utilisons la transformée de Legendre pour obtenir des solutions équivalentes des équations originales du modèle linéaire supersymétrique. Nous présentons également certains éléments de base qui peuvent servir à étendre la méthode au cas planaire supersymétrique. En particulier, l'analogue en $(2+1)$ dimensions de l'équation dans le système de coordonnées transformées a été déterminé, ainsi que certaines symétries. Pour un certain cas spécifique, il a été démontré qu'il est possible d'invertir et d'étendre une solution invariante de l'équation transformée afin d'obtenir une solution du gaz planaire supersymétrique de Chaplygin.

Abstract

In this article, we present a method for constructing invariant solutions of the supersymmetric Chaplygin gas in $(1+1)$ dimensions. This approach is based on the use of a generalized Legendre transformation, through which we transform the original field equations into a new set of equations involving the velocity and sound speed of the fluid as independent variables. We describe the Lie symmetry properties of the equations in both coordinate systems, and make use of a systematic subgroup classification to determine certain classes of group-invariant solutions of the transformed field equations. Where it is possible, the Legendre transformation is applied in reverse in order to obtain equivalent solutions of the standard field equations. A number of analytic solutions of the supersymmetric Chaplygin gas in one spatial dimension are found. In addition, certain basic elements of a possible extension of our method to the supersymmetric Chaplygin gas in two spatial dimensions have been formulated. In particular, the $(2+1)$-dimensional analogue of the transformed equation has been determined, and some of its Lie point symmetries have been identified. For a certain specific case, it has been demonstrated how an invariant solution can be inverted and then extended to a solution of the planar supersymmetric model.

3.1. INTRODUCTION

A few years ago, a series of lectures were given by R. Jackiw on the subject of fluid mechanics [**1**]. A number of topics were covered, including a general description of fluids with vanishing and non-vanishing vorticity and the properties of certain specific models. In particular, it was shown that two distinct parametrizations of the Nambu-Goto action for a d-brane evolving in a $(d+1,1)$-dimensional target space-time lead respectively to two specific fluid dynamical models, namely the Galileo-invariant Chaplygin gas in d spatial dimensions and the Poincaré-invariant Born-Infeld model for a scalar in d spatial dimensions. The symmetry Lie algebras of the Chaplygin and Born-Infeld equations in one spatial dimension were systematically analyzed, and a full classification of the one and two-dimensional subalgebras was performed [**2, 3**]. A number of classes of invariant and partially invariant solutions were obtained.

In addition, a number of highly original theories of fluid mechanics were proposed by Jackiw et al. [**1**]. These extensions of the classical theory were based primarily on the application of methods previously used in particle physics to the context of a classical field theory. Of special interest was the generalization of the Chaplygin gas models in one and two spatial dimensions to supersymmetric theories involving Grassmann (fermionic) variables. While the one dimensional case [**4**] is the main focus of this article, a number of important observations are made concerning the two-dimensional supersymmetric theory.

The primary purpose of this article is to employ a generalized version of the Legendre transformation in order to determine invariant solutions of the supersymmetric Chaplygin gas in $(1+1)$ dimensions. We want to put a new light on the equations of motion by solving them while taking into account their invariance properties in the previously obtained results [**2**]. Emphasis will be placed on the search for solutions through the formulation of the field equations in the new transformed coordinates. Let us mention that the Legendre transformation leads to a linearisation of the equations only for the one-dimensional supersymmetric theory. In this case, the general solution can be obtained. Our aim in searching for special solutions is to understand deeply the connection between invariant solutions in both coordinate systems and eventually use them to fully extend our analysis to the supersymmetric model in $(2+1)$ dimensions.

This article is organized as follows. In section 3.2, we examine the field equations for the supersymmetric Chaplygin gas on a line, and present a method for constructing group-invariant solutions through a generalization of the Legendre transformation. Section 3.3 is devoted to a description of the Lie symmetry structure of both the standard equations of the $(1+1)$-dimensional supersymmetric Chaplygin gas (Lie superalgebra $\mathcal{G}_s$) and their transformed version (Lie algebra $\mathcal{L}$). We recall the classification of one-dimensional subalgebras of the bosonic sector of $\mathcal{G}_s$, and then perform the same analysis for the one-dimensional subalgebras of the finite sector of $\mathcal{L}$. In section 3.4, we make use of the classification of $\mathcal{L}$ in order to describe and discuss certain classes of group-invariant solutions of the transformed field equations. Where it is possible, the Legendre transformation is applied in reverse in order to obtain equivalent solutions of the standard field equations which are then extended to full solutions of the linear fermionic model. The connection between the latter and solutions obtained directly from the classification of $\mathcal{G}_s$ is examined. In section 3.5, we discuss how our analysis could be extended to the case of the supersymmetric Chaplygin gas on a plane, through the use of a generalized Legendre transformation in three independent variables. Invariant solutions of the planar supersymmetric model are obtained. Finally, section 3.6 contains observations and a discussion of further applications of our results.

3.2. Supersymmetric Chaplygin gas in one dimension

A supersymmetric generalization of the Chaplygin gas on a line was proposed in 2001 by Bergner and Jackiw [4]. The velocity of the fluid v is supplemented by a Grassmann variable or fermionic field $\psi(t,x)$ such that

$$v = \theta_x - \frac{1}{2}\psi\psi_x. \tag{3.1}$$

The equations of motion read

$$\rho_t + \partial_x(\rho v) = 0, \tag{3.2}$$

$$\theta_t + v\theta_x = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi\psi_x, \tag{3.3}$$

$$\psi_t + \left(v + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\right)\psi_x = 0. \tag{3.4}$$

The continuity equation (3.2) and the Euler equation (3.3) are therefore modified from their original form in order to include the Grassmann variable ψ, while the equation (3.4) is new. The velocity v satisfies the evolution equation

$$v_t + vv_x = \partial_x\left(\frac{\lambda}{\rho^2}\right). \tag{3.5}$$

Instead of using the density ρ, we make use of the sound speed variable

$$s = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}, \tag{3.6}$$

so that the equations of motion (3.2-3.4) become

$$s_t = -vs_x + sv_x, \tag{3.7}$$

$$\theta_t = -v\theta_x + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s\psi\psi_x, \tag{3.8}$$

$$\psi_t = -(v+s)\psi_x. \tag{3.9}$$

and equation (3.5) becomes

$$v_t + vv_x = ss_x. \tag{3.10}$$

It is to be noted that in the case where $\psi\psi_x = 0$, the equations (3.7-3.10) are decoupled, and that solutions (θ, s) of the supersymmetric equations are simply those of the ordinary (bosonic) Chaplygin equations, while equation (3.9) becomes linear in ψ.

Let us recall that the Legendre transformation has been performed on the bosonic Chaplygin gas equations (i.e when $\psi = 0$) in order to linearize them and obtain the general solution [**1**]. Using this result as an inspiration, we extend the method to the supersymmetric case. We begin with the dependent variables

$$q = \theta_t - \frac{1}{2}\psi\psi_t, \qquad v = \theta_x - \frac{1}{2}\psi\psi_x. \tag{3.11}$$

Using equations (3.8) and (3.9) to substitute the values of θ_t and ψ_t into q, we obtain the following relationship which links s to v and q :

$$s^2 = 2q + v^2. \tag{3.12}$$

Later, it will be convenient to use the (s, v) coordinate system instead of (q, v). Equation (3.7), when expressed in terms of v and q then becomes

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) - 2q\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{3.13}$$

We modify equation (3.13) to a differential equation for x and t in terms of v and q. Indeed, the change of variables $(t, x) \leftrightarrow (q, v)$ implies that

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad \frac{\partial t}{\partial q} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{3.14}$$

where $J = \partial(q, v)/\partial(t, x)$ is the Jacobian of the change of variables. Equation (3.13) is then transformed to

$$-\frac{\partial x}{\partial v} + v(\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial t}{\partial v}) + 2q\frac{\partial t}{\partial q} = 0. \tag{3.15}$$

By analogy with the ordinary case, we postulate the existence of a function $W = W(q, v)$ such that

$$t = W_q, \qquad x = W_v. \tag{3.16}$$

Equation (3.15) can be rewritten through relations (3.16) as

$$W_{vv} - 2vW_{qv} - 2qW_{qq} = 0. \tag{3.17}$$

We now change to the coordinates (s, v). Using (3.12) and writing $W(q, v) = W(s, v)$, we finally get the equation

$$W_{vv} - W_{ss} + \frac{2}{s}W_s = 0, \tag{3.18}$$

for which the general solution is given by Jackiw [1] :

$$W(v, s) = f(v + s) - sf'(v + s) + g(v - s) + sg'(v - s), \tag{3.19}$$

where f and g are arbitrary functions in their respective arguments.

We must now incorporate the fermionic field $\psi(t, x)$ into this framework. We begin by expressing ψ in terms of the coordinates s and v :

$$\psi(t, x) = \psi(t(s, v), x(s, v)) = \chi(s, v). \tag{3.20}$$

Using the change of variables in the derivatives given by

$$\partial_t = s_t\partial_s + v_t\partial_v, \qquad \partial_x = s_x\partial_s + v_x\partial_v. \tag{3.21}$$

and the fact that s_t and v_t may be deduced from (3.7) and (3.10), we deduce the equation on χ from the equation (3.9). Indeed, we get

$$(s_x + v_x)(\chi_s + \chi_v) = 0, \tag{3.22}$$

which implies that

$$\chi_s + \chi_v = 0, \tag{3.23}$$

if $s_x + v_x \neq 0$. The general solution is therefore

$$\chi(s, v) = \phi(v - s), \tag{3.24}$$

where ϕ is an arbitrary function of $v - s$. This has been deduced directly by Jackiw [1]. Let us show that the condition $s_x + v_x \neq 0$ is in fact redundant if we take into account the form (3.19) of the general solution W. Indeed,

$$s_x + v_x = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad s(W_{sv} - W_{ss}) + W_s = 0, \qquad (s \neq 0), \tag{3.25}$$

since we can write (from (3.12), (3.14) and (3.16))

$$s_x = \frac{J}{s}\left(v\frac{\partial t}{\partial q} - \frac{\partial t}{\partial v}\right) = -\frac{J}{s^2}W_{sv}, \tag{3.26}$$

$$v_x = J\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{J}{s^3}(sW_{ss} - W_s). \tag{3.27}$$

Inserting $W = (3.19)$ into (3.25), we get $g''' = 0$. Using $g(v - s) = a(v - s)^2 + b(v - s) + c$, the original variables t and x may be written (from (3.16) and (3.19)) as

$$\begin{aligned} t &= -f''(v + s) - 2a, \\ x &= f'(v + s) - (v + s)f''(v + s) + b, \end{aligned} \tag{3.28}$$

showing that the change of variables $(t, x) \leftrightarrow (s, v)$ is not invertible.

3.3. Structure of the symmetry Lie superalgebra

3.3.1. The standard form of the field equation

The Lie algebra $\mathcal{G}$ of the supersymmetric Chaplygin gas equations (3.2-3.4) in one spatial dimension is spanned by the six independent vector fields [**2, 5**] :

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t\ , \qquad P_1 = \partial_x\ , \qquad B = t\partial_x + x\partial_\theta\ , \qquad Z = \partial_\theta\ , \\ &D_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + \rho\partial_\rho\ , \qquad D_2 = x\partial_x + 2\theta\partial_\theta - \rho\partial_\rho + \psi\partial_\psi . \end{aligned} \tag{3.29}$$

Here, P_0 and P_1 represent translations in the independent variables t and x respectively, B consists of a Galilean boost, Z corresponds to a shift in the potential θ, and D_1 and D_2 are dilations in the dependent and independent variables. In addition, we have the following two supersymmetries which link the bosonic and fermionic variables :

$$Q = \psi\partial_x - \rho\psi_x\partial_\rho + \left(\frac{1}{2}\psi\theta_x - \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi\right)\partial_\theta + \left(\frac{1}{2}\psi\psi_x - \theta_x + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\right)\partial_\psi, \tag{3.30}$$

and

$$\tilde{Q} = -\frac{1}{2}\psi\partial_\theta - \partial_\psi. \tag{3.31}$$

These transformations correspond to the conserved charges and supercharges identified by Jackiw and Bergner [**1, 4**], and can be derived by the use of Noether's Theorem. The vector fields (3.29)-(3.31) therefore generate a Lie superalgebra $\mathcal{G}_s$ whose supercommutation relations are given in Table XI. It should be noted that these relations consist of commutators

$$[A, B] = AB - BA, \tag{3.32}$$

in the case where at least one of A and B is even (bosonic), and of anticommutators

$$\{A, B\} = AB + BA, \tag{3.33}$$

in the case where both A and B are odd (fermionic).

The classification of subalgebras of the bosonic sector $\mathcal{G}$ of $\mathcal{G}_s$ has already been performed [**2, 3**]. We are interested here only in one-dimensional such subalgebras.

TAB. XI. Supercommutation table for the Lie superalgebra $\mathcal{G}_s$.

X\Y	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{D_2}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_0}$	$\mathbf{Q}$	$\tilde{\mathbf{Q}}$
$\mathbf{D_1}$	0	0	B	0	$-P_1$	$-2P_0$	$-Q$	0
$\mathbf{D_2}$	0	0	$-B$	$-2Z$	$-P_1$	0	0	$-\tilde{Q}$
$\mathbf{B}$	$-B$	B	0	0	$-Z$	$-P_1$	$\tilde{Q}$	0
$\mathbf{Z}$	0	$2Z$	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{P_1}$	P_1	P_1	Z	0	0	0	0	0
$\mathbf{P_0}$	$2P_0$	0	P_1	0	0	0	0	0
$\mathbf{Q}$	Q	0	$-\tilde{Q}$	0	0	0	$2P_0$	$-P_1$
$\tilde{\mathbf{Q}}$	0	$\tilde{Q}$	0	0	0	0	$-P_1$	Z

There are the splitting subalgebras

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_1 = \{D_1\}\ , \qquad \mathcal{L}_2 = \{D_2\}\ , \qquad \mathcal{L}_3 = \{B\}\ , \qquad \mathcal{L}_{4,a} = \{D_1 + aD_2,\ a \neq 0\}\ , \\ \mathcal{L}_{5,\varepsilon} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B,\ \varepsilon = \pm 1\}\ , \\ \mathcal{N}_1 = \{P_0\}\ , \qquad \mathcal{N}_2 = \{P_1\}\ , \qquad \mathcal{N}_3 = \{Z\}\ , \qquad \mathcal{N}_{4,\varepsilon} = \{Z + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\},\end{gathered} \tag{3.34}$$

and the non-splitting ones

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}_{1,\varepsilon} = \{D_1 + \varepsilon Z,\ \varepsilon = \pm 1\}\ , \qquad \mathcal{K}_{2,\varepsilon} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1,\ \varepsilon = \pm 1\}\ , \\ &\mathcal{K}_{3,\varepsilon} = \{D_2 + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}\ , \qquad \mathcal{K}_{4,\varepsilon} = \{B + \varepsilon P_0,\ \varepsilon = \pm 1\}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

All of these subalgebras, except $\mathcal{N}_3$ which does not contain any derivative with respect to the independent variables t and x, have been used to construct specific invariant solutions of equations (3.2) and (3.3) in the bosonic case. **[2]**. Generators of supersymmetries like (3.30) and (3.31) cannot be included because they give rise by anticommutation to a bosonic generator, leading thus to a two-dimensional subalgebra. For instance, any subsuperalgebra containing the generator Q must necessarily also contain P_0. Consequently, any solution invariant under Q will belong to the class of invariant solutions corresponding to subalgebra $\mathcal{N}_1$, and will therefore not be fundamentally distinguishable from solutions obtained from $\mathcal{N}_1$.

3.3.2. The transformed equation

Let us now consider the Lie algebra $\mathcal{L}$ of the transformed equation (3.18). It is easy to show [6] that this algebra is spanned by the generators :

$$\begin{aligned} D &= s\partial_s + v\partial_v + W\partial_W \ , \qquad V = \partial_v \ , \\ C &= sv\partial_s + \frac{1}{2}(s^2+v^2)\partial_v + vW\partial_W \ , \\ M &= W\partial_W \ , \qquad S_\beta = \beta(s,v)\partial_W , \end{aligned} \tag{3.36}$$

where the function β satisfies equation (3.18). It should be noted that, contrary to the Lie algebra $\mathcal{G}$ in the case of the standard equations, $\mathcal{L}$ contains an infinite-dimensional family of symmetries S_β. This allows us to extend our invariance analysis to a much greater class of subalgebras, and therefore potentially obtain additional invariant solutions of the one-dimensional supersymmetric model. The commutation relations are summarized in Table XII. In addition, for any two solutions β_1 and β_2 of equation (3.18), $[S_{\beta_1}, S_{\beta_2}] = 0$.

TAB. XII. Commutation table for the Lie algebra $\mathcal{L}$ spanned by the vector fields (3.36).

X\Y	D	V	C	M	$\mathbf{S}_\beta$
D	0	$-V$	C	0	$S_{(s\beta_s+v\beta_v-\beta)}$
V	V	0	D	0	S_{β_v}
C	$-C$	$-D$	0	0	$S_{(sv\beta_s+\frac{1}{2}(s^2+v^2)\beta_v-v\beta)}$
M	0	0	0	0	$-S_\beta$
$\mathbf{S}_\beta$	$S_{(\beta-s\beta_s-v\beta_v)}$	$-S_{\beta_v}$	$S_{(v\beta-sv\beta_s-\frac{1}{2}(s^2+v^2)\beta_v)}$	S_β	0

In order to classify the subalgebras, we decompose the structure of $\mathcal{L}$ into the following form

$$\mathcal{L} = \{\{D,V,C\} \ni \{M\}\} \quad \ni_\beta \quad \{S_\beta\}. \tag{3.37}$$

Concentrating once again on the one-dimensional subalgebras, we perform the classification in three steps [7].

(1) The simple algebra $\mathcal{F} = \{D, V, C\}$ is isomorphic to the Lie algebra $o(2,1)$ whose subalgebra classification is known [**7**]. Its one-dimensional subalgebras are

$$\mathcal{F}_{1,1} = \{D\}, \qquad \mathcal{F}_{1,2} = \{V\}, \qquad \mathcal{F}_{1,3} = \{2V + C\}. \tag{3.38}$$

(2) Next, we consider the direct sum

$$\mathcal{S} = \{\{D, V, C\} \ni \{M\}\}. \tag{3.39}$$

The one-dimensional splitting subalgebras of $\mathcal{S}$ are

$$\mathcal{S}_1 = \{M\}, \qquad \mathcal{S}_2 = \{D\}, \qquad \mathcal{S}_3 = \{V\}, \qquad \mathcal{S}_4 = \{2V + C\}. \tag{3.40}$$

In addition, we obtain the following non-splitting subalgebras of $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{5,a} = \{D + aM, a \neq 0\}, \qquad \mathcal{S}_{6,\varepsilon} = \{V + \varepsilon M, \varepsilon = \pm 1\}, \\ &\mathcal{S}_{7,a} = \{2V + C + aM, a \neq 0\}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

(3) The complete Lie algebra $\mathcal{L}$ is constructed through the semi-direct sum of the previously considered algebra $\mathcal{S}$ with the infinite dimensional Lie algebra spanned by the generators S_β. Each solution $\beta(s, v)$ of equation (3.18) imposes a different structure on the further classification of the subalgebras of the semi-direct sum. We will consider several instances of this.

The usefulness of the classification is demonstrated in the fact that it allows us to find all corresponding symmetry reductions of equation (3.18) under the classified non-equivalent subalgebras of the symmetry algebra $\mathcal{S}$.

3.4. Group-invariant solutions

3.4.1. Solutions of the bosonic model

In this section, we proceed to describe the solutions of the transformed differential equation (3.18) which are invariant under the one-dimensional subalgebras of $\mathcal{S}$. For each conjugacy class given above, we evaluate the invariants of the corresponding Lie subalgebra, and also the corresponding reduced differential equation. From the solution of each reduced equation, we obtain the respective solution $W(s,v)$ of the transformed differential equation (3.18), and the results are summarized in Tables XIII and XIV. In addition, we also consider certain subalgebras of $\mathcal{L}$ involving generators of type S_β.

TAB. XIII. Invariants of the one-dimensional subalgebras of $\mathcal{S}$.

Subalgebra	Symmetry variable(s)	Function W
$\{M\}$	$\xi = s, v$	No function
$\{D\}$	$\xi = \frac{v}{s}$	$W = sF(\xi)$
$\{V\}$	$\xi = s$	$W = F(\xi)$
$\{2V + C\}$	$\xi = \frac{s^2-v^2-4}{s}$	$W = sF(\xi)$
$\{D + aM, a \neq 0\}$	$\xi = \frac{v}{s}$	$W = s^{a+1}F(\xi)$
$\{V + \varepsilon M, \varepsilon = \pm 1\}$	$\xi = s$	$W = \mathrm{e}^{\varepsilon v}F(\xi)$
$\{2V + C + aM, a \neq 0\}$	$\xi = \frac{s^2-v^2-4}{s}$	$W = s\mathrm{e}^{\frac{a}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v^2-s^2-4}{4v}\right)}F(\xi)$

TAB. XIV. Reduced Equations and solutions $W(s,v)$ obtained from one-dimensional subalgebras of $\mathcal{S}$ (K_0 and K_1 are arbitrary constants).

Subalgebra	Reduced Equation(s)	Solution $W(s,v)$
$\{D\}$	$(1-\xi^2)F_{\xi\xi} - 2\xi F_\xi + 2F = 0$	$K_0 v + K_1 s - \frac{1}{2}K_1 v \ln\left(\frac{s+v}{s-v}\right)$
$\{V\}$	$\frac{2}{\xi}F_\xi - F_{\xi\xi} = 0$	$\frac{1}{3}K_0 s^3 + K_1$
$\{2V + C\}$	$(\xi^2+16)F_{\xi\xi} + 2\xi F_\xi - 2F = 0$	$K_0(s^2-v^2-4) + K_1\left(s + \frac{1}{4}(s^2-v^2-4)\tan^{-1}\left(\frac{s^2-v^2-4}{4s}\right)\right)$
$\{D - M\}$	$(1-\xi^2)F_{\xi\xi} - 4\xi F_\xi = 0$	$K_0\left(\ln\left(\frac{s+v}{s-v}\right) + \frac{2vs}{s^2-v^2}\right) + K_1$
$\{D + M\}$	$(1-\xi^2)F_{\xi\xi} + 2F = 0$	$K_0(s^2-v^2) + K_1\left(vs + \frac{1}{2}(s^2-v^2)\ln\left(\frac{v+s}{v-s}\right)\right)$
$\{D + aM\}$ $(a \neq -1, 0, 1)$	$(1-\xi^2)F_{\xi\xi} + 2(a-1)\xi F_\xi$ $-(a+1)(a-2)F = 0$	$K_0(v-s)^a(v+as) + K_1(v+s)^a(v-as)$
$\{V + \varepsilon M\}$ $(\varepsilon = \pm 1)$	$F_{\xi\xi} - \frac{2}{\xi}F_\xi - F = 0$	$K_0(s-1)\mathrm{e}^{(\varepsilon v+s)} + K_1(s+1)\mathrm{e}^{(\varepsilon v-s)}$
$\{2V + C$ $+aM\}_{(a\neq 0)}$	$(\xi^2+16)^2F_{\xi\xi} + 2\xi(\xi^2+16)F_\xi$ $-2(\xi^2+16+2a^2)F = 0$	$\mathrm{e}^{\frac{a}{2}\tan^{-1}\left(\frac{v^2-s^2-4}{4v}\right)} \times$ $\left[K_0(s^2-v^2-4+2sa)\left(\frac{(-v+s+2i)(v+s+2i)}{(v+s-2i)(v-s+2i)}\right)^{\frac{ai}{4}}\right.$ $\left.+K_1(v^2-s^2+4+2sa)\left(\frac{(v+s-2i)(v-s+2i)}{(-v+s+2i)(v+s+2i)}\right)^{\frac{ai}{4}}\right]$

Where it is possible, the Legendre transformation is applied in reverse in order to obtain the solutions $\theta(t,x)$, $\rho(t,x)$ and $\psi(t,x)$ of the original Chaplygin equations. We may proceed directly from the system of coordinates $(s, v, W(s,v))$ to the standard system of coordinates $(t, x, \theta(t,x))$ through the following procedure. We first determine t and x as functions of s and v through the relations

$$t = -\frac{1}{s}W_s, \qquad x = -W_v - \frac{v}{s}W_s. \tag{3.42}$$

This change of variables can in principle be inverted (provided that the Jacobian J does not vanish), and we obtain s and v as functions of t and x. The solution $\rho(t,x)$ is directly obtained through the relation

$$\rho(t,x) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{s(t,x)}, \tag{3.43}$$

and the function $\theta(t,x)$ is determined by

$$\theta(t,x) = W(s,v) + xv + \frac{1}{2}t(s^2 - v^2). \tag{3.44}$$

The solutions $\theta(t,x)$ constructed through the above procedure are compared with those determined directly in [2] from the subgroup structure of the standard equations. The results are presented in Table XV. In the case of subalgebra $\{D + 2M\}$, we obtain an equivalence with two distinct subalgebras, $\{D_1 + 3D_2\}$ and $\{B + \varepsilon P_0\}$. This occurs because the associated solution is in fact invariant under the two-dimensional subalgebra $\{D_1 + 3D_2, B + \varepsilon P_0\}$, which indicates that the two distinct one-dimensional subalgebras generate the same orbit.

Let us demonstrate the procedure through the following example. For the subalgebra $\{D + M\}$, the general solution of the transformed equation (3.18) is

$$W(s,v) = K_0(s^2 - v^2) + K_1\left(vs + \frac{1}{2}(s^2 - v^2)\ln\left(\frac{v+s}{v-s}\right)\right). \tag{3.45}$$

From the relations (3.42), we get the transformation

$$t = -2K_0 - K_1 \ln\left(\frac{v+s}{v-s}\right), \qquad x = -2K_1 s, \tag{3.46}$$

which may be inverted to give

$$v = \frac{1}{2K_1}x\frac{(1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{K_1}(t+2K_0)})}{(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{K_1}(t+2K_0)})}, \qquad s = -\frac{1}{2K_1}x. \tag{3.47}$$

TAB. XV. Bosonic solutions obtained from one-dimensional subalgebras of $\mathcal{S}$.

Subalgebra	Solution $\theta(t,x)$, $\rho(t,x)$	Link with the algebra $\mathcal{G}$
$\{V\}$	$\theta(t,x) = \frac{x^2}{2t} + \frac{t^3}{6K_0^2} + K_1$ $\rho(t,x) = -\frac{\sqrt{2\lambda}K_0}{t}$	$\{B\}$
$\{D\}$	$\theta(t,x) = -\frac{K_1^2}{2t}\cosh^2\left(\frac{1}{K_1}(x+K_0)\right)$ $\rho(t,x) = -\frac{\sqrt{2\lambda}t}{K_1\cosh^2\left(\frac{1}{K_1}(x+K_0)\right)}$	$\{D_1 - D_2\}$
$\{D-M\}$	$\theta(t,x) = K_0\ln\left(\frac{x^2+4K_0t}{x^2-4K_0t}\right) + K_1$ $\rho(t,x) = \sqrt{2\lambda}\left(\frac{16K_0^2t^2-x^4}{4K_0x^3}\right)$	$\{D_1\}$
$\{D+M\}$	$\theta(t,x) = -\frac{x^2}{4K_1}\frac{\left(1+e^{K_1^{-1}(t+2K_0)}\right)}{\left(1-e^{K_1^{-1}(t+2K_0)}\right)}$ $\rho(t,x) = -\frac{2K_1\sqrt{2\lambda}}{x}$	$\{D_2\}$
$\{D+2M\}$	$\theta(t,x) = \frac{K_1}{108K_0^2}\frac{(12K_0x-t^2)^{3/2}}{\sqrt{4K_0^2-K_1^2}} + \frac{xt}{6K_0} - \frac{t^3}{108K_0^2}$ $\rho(t,x) = 3\sqrt{2\lambda}\frac{\sqrt{4K_0^2-K_1^2}}{\sqrt{12K_0x-t^2}}$	$\{D_1+3D_2\}$, $\{B+\varepsilon P_0\}$

Equation (3.44) then yields the solution

$$\theta(t,x) = -\frac{x^2}{4K_1}\frac{\left(1+e^{K_1^{-1}(t+2K_0)}\right)}{\left(1-e^{K_1^{-1}(t+2K_0)}\right)}, \tag{3.48}$$

which is of the same form as the solution invariant under the subalgebra $\{D_2\}$ of $\mathcal{G}$, as expected from the fact that the change of variables (3.46) transforms the differential operator $s\partial_s + v\partial_v$ to $x\partial_x$.

3.4.2. Additional subalgebras of $\mathcal{S}$

We now return to the discussion of the solution for the subalgebra $\{D+aM\}$ where $a \neq 0, \pm 1, 2$. The solution in (s,v) space is given by

$$W(s,v) = K_0(v-s)^a(v+as) + K_1(v+s)^a(v-as). \tag{3.49}$$

so that the transformations to the (t, x) coordinate system are given by :

$$\begin{aligned} t &= a(a+1)\left(K_0(v-s)^{a-1} + K_1(v+s)^{a-1}\right), \\ x &= \left(a^2-1\right)\left(K_0(v-s)^a + K_1(v+s)^a\right), \end{aligned} \tag{3.50}$$

which is not easy to invert in the general case. The corresponding solution $\theta(t, x)$ may however be written in terms of the variables v and s :

$$\theta(t, x) = \frac{1}{2}a(a-1)\left(K_0(v-s)^{a+1} + K_1(v+s)^{a+1}\right). \tag{3.51}$$

If we proceed to use the change of variables (3.50) to transform the differential operator $s\partial_s + v\partial_v$ in a manner analogous to that performed for the case $\{D+M\}$ above, we find

$$s\partial_s + v\partial_v \;\; \longrightarrow \;\; (a-1)t\partial_t + ax\partial_x. \tag{3.52}$$

This is equivalent to the independent variable terms in the vector field $((a-1)/2)D_1 + ((a+1)/2)D_2$ in the (t, x) space. Thus we make the correspondence

$$D + aM \qquad \longleftrightarrow \qquad (a-1)D_1 + (a+1)D_2. \tag{3.53}$$

This is consistent with the results given in Table XV. Indeed, the cases $a = 0, -1, 1, 2$ respectively link subalgebras $\{D\}$, $\{D-M\}$, $\{D+M\}$, $\{D+2M\}$ in (s, v) space with subalgebras $\{D_1 - D_2\}$, $\{D_1\}$, $\{D_2\}$ and $\{D_1 + 3D_2\}$ in (t, x) space.

Let us mention in particular the new case where $a = 1/2$. The invariants are

$$\xi = \frac{v}{s}, \qquad s^{-3/2}W, \tag{3.54}$$

so that the solution $W(s, v)$ of equation (3.18) is of the form

$$W = K_0(v-s)^{1/2}(v + \frac{1}{2}s) + K_1(v+s)^{1/2}(v - \frac{1}{2}s). \tag{3.55}$$

From the relations (3.42), we get the transformation

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{4}K_0(v-s)^{1/2} - \frac{3}{4}K_1(v+s)^{1/2}, \\ t &= \frac{3}{4}K_0(v-s)^{-1/2} + \frac{3}{4}K_1(v+s)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

The Jacobian J is given by

$$J = -\frac{9K_0K_1s}{16(v-s)^{3/2}(v+s)^{3/2}}. \tag{3.57}$$

and so the constants K_0 and K_1 must both be non-zero if solution (3.55) is to be invertible through the Legendre transformation. In the specific case where $K_0 = K_1$ we can invert the relations (3.56) to obtain

$$s = \frac{4x}{9K_0^2 t}\sqrt{9K_0^2 xt + 4x^2t^2}, \qquad v = \frac{8x^2}{9K_0^2} + \frac{x}{t}. \tag{3.58}$$

The corresponding solution is therefore given by

$$\theta(t,x) = \frac{x^2}{2t} + \frac{8x^3}{27K_0^2}, \qquad \rho(t,x) = \frac{9\sqrt{2\lambda}K_0^2 t}{4x\sqrt{9K_0^2 xt + 4x^2t^2}}. \tag{3.59}$$

This corresponds to a solution invariant under the subalgebra $\{D_1 - 3D_2\}$ of $\mathcal{G}$, which has not been given before.

For the subalgebra $\{V + \varepsilon M\}$, the solution is given by

$$W(s,v) = K_0(s-1)\mathrm{e}^{(\varepsilon v + s)} + K_1(s+1)\mathrm{e}^{(\varepsilon v - s)}. \tag{3.60}$$

The transformations linking the (t, x) and (s, v) coordinate systems are given by :

$$\begin{aligned} t &= -K_0\mathrm{e}^{s+\varepsilon v} + K_1\mathrm{e}^{-s+\varepsilon v}, \\ x &= -K_0\left(v + (s-1)\varepsilon\right)\mathrm{e}^{s+\varepsilon v} + K_1\left(v - (s+1)\varepsilon\right)\mathrm{e}^{-s+\varepsilon v}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Since the Jacobian cannot be allowed to vanish, the constants K_0 and K_1 are required to be nonzero. Even in the simplest case where $K_0 = K_1$, the change of variables (3.61) is difficult to invert. In terms of the variables s and v, the corresponding solution $\theta(t, x)$ can be written

$$\begin{aligned} \theta(t,x) =& K_0\left((1-\varepsilon v)(s-1) - \frac{1}{2}(v^2+s^2)\right)\mathrm{e}^{(\varepsilon v+s)} \\ &+ K_1\left((1-\varepsilon v)(s+1) + \frac{1}{2}(v^2+s^2)\right)\mathrm{e}^{(\varepsilon v-s)}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

If we proceed to use the change of variables (3.61) to transform the differential operator, we obtain

$$\partial_v \quad \longrightarrow \quad \varepsilon t\partial_t + (\varepsilon x + t)\,\partial_x \tag{3.63}$$

$$= \quad t\partial_x + \varepsilon(x\partial_x + t\partial_t). \tag{3.64}$$

This is equivalent to the independent variable terms in the vector field $B + \frac{1}{2}\varepsilon(D_1 + D_2)$ in the (t, x) space, which is similar but not identical to the subalgebra

$\{D_1 + D_2 + \varepsilon B\}$ identified in (3.34). The solution corresponding to this particular subalgebra had not been found previously.

For the subalgebras $\{2V + C\}$, and $\{2V + C + aM\}$, the change of variables (3.42) is difficult to invert, and corresponding solutions of the field equations in (t, x) space have not been found. In the case of $\{2V + C\}$, we require that K_1 be non-zero in order to obtain a nonvanishing Jacobian. For $\{2V + C + aM\}$, both K_0 and K_1 must be different from zero.

3.4.3. Subalgebras involving S_β

The question arises as to whether additional solutions of the field equations (3.2), (3.3) and (3.4) may be found from subalgebras involving generators of the form S_β. Let us observe the effect of applying group conjugation by such an element to the generator $V = \partial_v$. If we define

$$Y = kS_\beta = k\beta(s, v)\partial_W, \tag{3.65}$$

where k is a constant, then the commutator terms in the Campbell-Baker-Hausdorff formula read

$$[Y, V] = -kS_{\beta_v}, \qquad [Y, [Y, V]] = 0, \qquad [Y, [Y, [Y, V]]] = 0, \qquad \ldots, \tag{3.66}$$

so that the generator V is conjugate to $V - kS_{\beta_v}$. Thus, in order to obtain a new solution which is not a trivial extension of the solution already found for V, we must consider the subalgebra spanned by an element of the form $V + S_\alpha$, where $\alpha(s, v)$ obeys the following conditions :

(1) α is a solution of equation (3.18),

(2) there does not exist any solution $\beta(s, v)$ of (3.18) such that $\alpha = \beta_v$.

Thus, for instance, since the function $\beta(s, v) = kv$ (k is a constant) is such that $\beta_v = k$, the subalgebra $\{V + S_k\}$ is conjugate to $\{V\}$. In this case, the associated invariant solution is found to be

$$W(s, v) = \frac{1}{3}K_0 s^3 + K_1 + kv, \tag{3.67}$$

which is simply a linear combination of solutions previously determined for subalgebras $\{V\}$ and $\{D\}$. In (t,x) space, we obtain the solution

$$\theta(t,x) = \frac{(x+k)^2}{2t} + \frac{t^3}{6K_0^2} + K_1, \tag{3.68}$$

which differs from the case found for V only by the addition of a constant to x.

For the general case, consider the subalgebra spanned by the generator

$$V + S_\alpha = \partial_v + \alpha(s,v)\partial_W. \tag{3.69}$$

A solution $W(s,v)$ invariant under this subalgebra must take the form

$$W(s,v) = \int \alpha(s,\xi)d\xi + F(s), \tag{3.70}$$

and it is manifest that if such a solution exists, then $W_v = \alpha$, which implies that the generator (3.69) is conjugate to V.

A similar principle applies if we seek solutions invariant under a subalgebra of the form $D + aM + S_\alpha$, where $a \neq 0$ and α is a solution of (3.18). The resulting solution will be fundamentally different from those previously found only if there does not exist a solution β of (3.18) such that

$$(a+1)\beta - s\beta_s - v\beta_v = 0. \tag{3.71}$$

A solution $W(s,v)$ invariant under this subalgebra must take the form

$$W(s,v) = s^{a+1}\left(F\left(\frac{v}{s}\right) + \int \frac{\alpha(\sigma,v)}{\sigma^{a+2}}d\sigma\right). \tag{3.72}$$

For the general case, it has not been determined which conditions apply on the fuction α in order to satisfy condition (3.71). In three specific instances, however, solutions have been obtained which are not linear combinations of those previously determined. Indeed, this allows us to establish a link with solutions already found for the subalgebras $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ and $\mathcal{K}_3$ [**2**].

(1) For $\beta = 1$, let us consider the subalgebra $\{D - M + c\varepsilon S_1\}$. The invariants are

$$\xi = \frac{v}{s}, \qquad W - (c\varepsilon)\ln(s), \tag{3.73}$$

so that the solution $W(s,v)$ of equation (3.18) is of the form

$$W(s,v) = F\left(\frac{v}{s}\right) + (c\varepsilon)\ln(s), \tag{3.74}$$

where F satisfies the following differential equation :

$$(1-\xi^2)F_{\xi\xi} - 4\xi F_\xi + 3c\varepsilon = 0. \tag{3.75}$$

The solution is given by

$$\begin{aligned} W(s,v) = &C_1\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{v+s}{v-s}\right) - \frac{1}{2}\frac{vs}{v^2-s^2}\right) \\ &+ c\varepsilon\left(\frac{1}{2}\ln(v^2-s^2) + \frac{s^2}{v^2-s^2}\right) + C_2. \end{aligned} \tag{3.76}$$

The change of variables (3.42) is difficult to invert in the general case, but in the specific case where $C_1 = 0$ we obtain

$$v(t,x) = -\frac{\varepsilon cx}{x^2+2\varepsilon ct}, \qquad s(t,x) = -\frac{c^2x^2+4\varepsilon c^3 t}{(x^2+2\varepsilon ct)^2}, \tag{3.77}$$

and the equivalent solution of the Chaplygin gas equation is thus

$$\theta(t,x) = \frac{1}{2}c\varepsilon\ln\left(\frac{2c^2}{x^2+2\varepsilon ct}\right) - \frac{3}{2}c\varepsilon + C_2. \tag{3.78}$$

This corresponds to a solution invariant under the subalgebra $\mathcal{K}_1$ of $\mathcal{G}$.

(2) For $\beta = v$, let us take the subalgebra $\{D + c\varepsilon S_v\}$. The invariants are

$$\xi = \frac{v}{s}, \qquad \frac{W}{v} - (c\varepsilon)\ln(v), \tag{3.79}$$

so that the solution $W(s,v)$ of equation (3.18) is of the form

$$W(s,v) = vF\left(\frac{v}{s}\right) + (c\varepsilon)v\ln(v), \tag{3.80}$$

where F satisfies

$$(\xi^2-\xi^4)F_{\xi\xi} + (2\xi - 4\xi^3)F_\xi + c\varepsilon = 0. \tag{3.81}$$

The solution is given by

$$W(s,v) = C_1\left(s + \frac{1}{2}v\ln\left(\frac{v-s}{v+s}\right)\right) + C_2 v + \frac{1}{2}c\varepsilon v\ln(v^2-s^2). \tag{3.82}$$

In the specific case where $C_1 = 0$ we obtain

$$v(t,x) = \frac{\varepsilon t}{c}e^{-\frac{2\varepsilon}{c}(x+C_2)}, \qquad s(t,x) = \sqrt{\frac{t^2}{c^2}e^{-\frac{4\varepsilon}{c}(x+C_2)} - e^{-\frac{2\varepsilon}{c}(x+C_2)}}, \tag{3.83}$$

and the equivalent solution of the Chaplygin gas equation is found to be

$$\theta(t,x) = -\frac{1}{2}te^{-\frac{2\varepsilon}{c}(x+C_2)}. \tag{3.84}$$

This corresponds to a solution invariant under the subalgebra $\mathcal{K}_2$ of $\mathcal{G}$.

(3) For $\beta = s^2 - v^2$, let us take the subalgebra $\{D + M + c\varepsilon S_{(s^2-v^2)}\}$. The invariants are

$$\xi = \frac{v}{s}, \qquad \frac{W}{s^2 - v^2} - \frac{1}{2}(c\varepsilon)\ln(s^2 - v^2), \tag{3.85}$$

so that the solution $W(s, v)$ of equation (3.18) is of the form

$$W(s, v) = (s^2 - v^2)F\left(\frac{v}{s}\right) + \frac{1}{2}c\varepsilon(s^2 - v^2)\ln(s^2 - v^2), \tag{3.86}$$

where F satisfies

$$(\xi^4 - 2\xi^2 + 1)F_{\xi\xi} + (4\xi^3 - 4\xi)F_\xi - 2c\varepsilon = 0. \tag{3.87}$$

The solution is given by

$$\begin{aligned} W(s, v) =& C_1\left(\frac{1}{2}sv + \frac{1}{4}(s^2 - v^2)\ln\left(\frac{v+s}{v-s}\right)\right) + C_2(s^2 - v^2) \\ &+ c\varepsilon\left(s^2 + \frac{1}{2}(s^2 - v^2)\ln\left(s^2 - v^2\right)\right). \end{aligned} \tag{3.88}$$

In the specific case where $C_1 = 0$ we obtain

$$v(t, x) = -\frac{\varepsilon x}{2c}, \qquad s(t, x) = \sqrt{\frac{x^2}{4c^2} + \mathbf{e}^{-\frac{\varepsilon}{c}(t+3c\varepsilon+2C_2)}}, \tag{3.89}$$

and the equivalent solution of the Chaplygin gas equation is therefore

$$\theta(t, x) = -\frac{\varepsilon}{4c}x^2 - \frac{1}{2}c\varepsilon\mathbf{e}^{-\frac{\varepsilon}{c}(t+3c\varepsilon+2C_2)}. \tag{3.90}$$

This corresponds to a solution invariant under the subalgebra $\mathcal{K}_3$ of $\mathcal{G}$.

3.4.4. Solutions of the linear supersymmetric model

Solutions of the complete linear supersymmetric model can be determined from the solutions of the bosonic model described in the previous subsections. The fermionic scalar $\psi(t, x)$ is found through equation (3.24) by substituting the previously determined values of s and v as functions of t and x

$$\psi(t, x) = \phi(v - s), \tag{3.91}$$

where ϕ is an arbitrary function. The resulting functions for each of the cases which we were able to successfully invert in the subsections above are listed in Table XVI.

TAB. XVI. Fermionic potential $\psi(t,x)$ corresponding to the bosonic solutions.

Subalgebra	Solution $\psi(t,x)$
$\{V\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{x}{t} + \frac{t}{K_0}\right)$
$\{D\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{K_1}{2t}\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2}{K_1}(x+K_0)}\right)\right)$
$\{D-M\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{4K_0 x}{4K_0 t + x^2}\right)$
$\{D+M\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{2xK_1^{-1}}{\left(\mathrm{e}^{K_1^{-1}(t+2K_0)}-1\right)}\right)$
$\{D+2M\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{t}{6K_0} + \frac{1}{6K_0}(K_1 - 2K_0)\frac{\sqrt{12K_0 x - t^2}}{\sqrt{4K_0^2 - K_1^2}}\right)$
$\{D+\frac{1}{2}M\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{8x^2}{9K_0^2} + \frac{x}{t} - \frac{4x}{9K_0^2 t}\sqrt{9K_0^2 xt + 4x^2t^2}\right)$
$\{D - M + c\varepsilon S_1\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{4\varepsilon c^3 t - 2c^2 xt + c^2x^2 - \varepsilon c x^3}{(x^2+2\varepsilon ct)^2}\right)$
$\{D + c\varepsilon S_v\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{\varepsilon t}{c}\mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{c}(x+C_2)} - \sqrt{\frac{t^2}{c^2}\mathrm{e}^{-\frac{4\varepsilon}{c}(x+C_2)} - \mathrm{e}^{-\frac{2\varepsilon}{c}(x+C_2)}}\right)$
$\{D + M + c\varepsilon S_{(s^2-v^2)}\}$	$\psi(t,x) = \phi\left(\frac{\varepsilon x}{2c} + \sqrt{\frac{x^2}{4c^2} + \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{c}(t+3c\varepsilon+2C_2)}}\right)$

3.5. EXTENSION TO THE $(2+1)$-DIMENSIONAL CASE

3.5.1. Standard form of the planar model and invariant superalgebra

We now proceed to examine the supersymmetric planar model proposed by R. Jackiw and A. P. Polychronakos [8] and make a few observations concerning the possibility of extending our analysis to the $(2+1)$-dimensional case. Here, the velocity $\mathbf{v}$ of the fluid is supplemented by Grassmann (fermionic) variables ψ_a, $a = 1, 2$, that form a Majorana spinor ψ (real, two-component) [1]. The velocity is then

$$\mathbf{v} = \nabla\theta - \frac{1}{2}\psi^t \nabla\psi, \tag{3.92}$$

where θ is the bosonic scalar potential. The field equations which govern the motion of the supersymmetric fluid, and involve the potentials θ and ψ and the density of the fluid ρ, read

$$\begin{aligned} &\rho_t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ &\theta_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi^t\alpha\cdot\nabla\psi, \\ &\psi_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\psi = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\alpha\cdot\nabla\psi, \end{aligned} \tag{3.93}$$

where

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \qquad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Combining the field equations (3.93) with (3.92), we obtain the following field equation for the velocity

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{\lambda}{\rho^2}\right) + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}(\nabla\psi)^t(\alpha\cdot\nabla\psi). \tag{3.95}$$

As in the one-dimensional case, a superalgebra of symmetries and supersymmetries of the field equations (3.93) has been given **[1, 8]**. The symmetry generators are associated with a nonrelativistic similitude algebra containing the six generators of the Galilean algebra in $(2+1)$ dimensions; i.e.**[5]**

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_t, \qquad P_1 = \partial_x, \qquad P_2 = \partial_y, \\ &B_1 = t\partial_x + x\partial_\theta, \qquad B_2 = t\partial_y + y\partial_\theta, \\ &R = -y\partial_x + x\partial_y + \frac{1}{2}\psi_2\partial_{\psi_1} - \frac{1}{2}\psi_1\partial_{\psi_2}, \end{aligned} \tag{3.96}$$

along with the following dilations

$$D_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + \rho\partial_\rho, \qquad D_2 = x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta - \rho\partial_\rho + \psi_1\partial_{\psi_1} + \psi_2\partial_{\psi_2}. \tag{3.97}$$

In addition, we still have the potential shift symmetry $Z = \partial_\theta$. Moreover, the following supersymmetry transformations leave equations (3.93) invariant **[1, 5]**

$$\begin{aligned} &x' = x + \eta\alpha_1\psi, \qquad y' = y + \eta\alpha_2\psi, \qquad t' = t, \\ &\rho' = \rho - (\eta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi)\rho, \\ &\theta' = \theta + \frac{1}{2}(\eta\boldsymbol{\alpha}\psi)\cdot\mathbf{v} + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\eta\psi, \\ &\psi' = \psi - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}\eta) - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}\eta, \end{aligned} \tag{3.98}$$

and

$$\begin{aligned} x' &= x, \qquad y' = y, \qquad t' = t, \\ \rho' &= \rho, \\ \theta' &= \theta - \frac{1}{2}\tilde{\eta}\psi, \\ \psi' &= \psi - \tilde{\eta}, \end{aligned} \tag{3.99}$$

where $\eta = (\eta^1, \eta^2)$ and $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2)$ correspond to fermionic constant parameters. The corresponding supersymmetric infinitesimal generators are identified as

$$\begin{aligned} Q_1 &= \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \psi_1 \frac{\partial}{\partial y} - \rho(\psi_{2x} + \psi_{1y}) \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\theta_x \psi_2 - \frac{1}{4}\psi_1 \psi_{1x} \psi_2 + \frac{1}{2}\theta_y \psi_1 - \frac{1}{4}\psi_2 \psi_{2y} \psi_1 + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi_1 \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left(-\theta_y + \frac{1}{2}\psi\psi_y - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \left(-\theta_x + \frac{1}{2}\psi\psi_x \right) \frac{\partial}{\partial \psi_2}, \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \rho(\psi_{1x} - \psi_{2y}) \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &+ \left(\frac{1}{2}\theta_x \psi_1 - \frac{1}{4}\psi_2 \psi_{2x} \psi_1 - \frac{1}{2}\theta_y \psi_2 + \frac{1}{4}\psi_1 \psi_{1y} \psi_2 + \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\rho}\psi_2 \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left(-\theta_x + \frac{1}{2}\psi\psi_x \right) \frac{\partial}{\partial \psi_1} + \left(\theta_y - \frac{1}{2}\psi\psi_y - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \psi_2}, \end{aligned} \tag{3.101}$$

and

$$\tilde{Q}_1 = -\frac{1}{2}\psi_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \psi_1}, \tag{3.102}$$

$$\tilde{Q}_2 = -\frac{1}{2}\psi_2 \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \psi_2}, \tag{3.103}$$

where Q_1 is associated with η^1, Q_2 with η^2, $\tilde{Q}_1$ with $\tilde{\eta}^1$ and $\tilde{Q}_2$ with $\tilde{\eta}^2$. The commutation relations between all of the infinitesimal generators can be easily computed through the use of prolongation formulas (see Chapters 2 and 5 of [**6**]).

3.5.2. Transformed equation

The desired result would be to find a system of transformed equations analogous to (3.18) and (3.23) in order to solve the field equations (3.93) through the use of a generalized Legendre transformation in two spatial dimensions. This has not yet been achieved for the general $(2+1)$-dimensional case, but a few elements of the theory can be discussed. In analogy with the transformation (3.11), we set

$$q = \theta_t - \frac{1}{2}\psi^t\psi_t, \qquad v_1 = \theta_x - \frac{1}{2}\psi^t\psi_x, \qquad v_2 = \theta_y - \frac{1}{2}\psi^t\psi_y, \tag{3.104}$$

and we postulate the existence of a function $\omega(q, v_1, v_2)$ such that

$$\theta(t, x, y) + \omega(q, v_1, v_2) = tq + xv_1 + yv_2. \tag{3.105}$$

As in the one-dimensional case, we once again introduce the sound speed $s = \sqrt{2\lambda}/\rho$. Making use of the field equations (3.93), we obtain the following relation between s, q, v_1 and v_2

$$s^2 = 2q + v_1^2 + v_2^2. \tag{3.106}$$

Finally, if we consider ω as a function of s, v_1 and v_2 such that

$$\omega(q, v_1, v_2) = W(s, v_1, v_2), \tag{3.107}$$

the field equation for θ may be transformed to the following uniformly quadratic equation for W :

$$\begin{aligned} &- 3(W_s)^2 - 2sW_sW_{v_1v_1} - 2sW_sW_{v_2v_2} + 2sW_sW_{ss} + s^2(W_{v_1v_2})^2 \\ &- s^2W_{v_1v_1}W_{v_2v_2} + s^2W_{v_1v_1}W_{ss} + s^2W_{v_2v_2}W_{ss} - s^2(W_{v_2s})^2 \\ &- s^2(W_{v_1s})^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.108}$$

The symmetry Lie algebra of this equation has not been fully determined, but the following generators constitute a partial list :

$$\begin{aligned} D = s\partial_s + v_1\partial_{v_1} + v_2\partial_{v_2} + W\partial_W \ , \qquad V_1 = \partial_{v_1} \ , \qquad V_2 = \partial_{v_2} \ , \\ M = W\partial_W \ , \qquad R_v = -v_2\partial_{v_1} + v_1\partial_{v_2}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

The fermionic set of equations in (3.93) must also be written in the new variables (s, v_1, v_2). The explicit form is in fact very complicated and will not be relevant here. It is obtained by making the change of variables $(t, x, y) \leftrightarrow (s, v_1, v_2)$ in the set of equations :

$$\psi_{1,t} = -v_1\psi_{1,x} - (s - v_2)\psi_{1,y} + s\psi_{2,x}, \tag{3.110}$$

$$\psi_{2,t} = -v_1\psi_{2,x} - (s + v_2)\psi_{2,y} + s\psi_{1,x}. \tag{3.111}$$

It is important to mention here that in the new variables the transformed equations decouple and it is therefore reasonable to suppose that solutions of equation (3.108) could serve as the primary element in the construction of solutions of the planar supersymmetric model in the general case.

3.5.3. Invariant solutions of the supersymmetric planar model

The question arises as to whether it is possible to find solutions of the planar model which are invariant under the supersymmetric transformations themselves. Inspiring ourselves from the methods used in article [**9**] for the super Korteweg-de Vries equation, we provide a partial answer to this question. Instead of using the supersymmetric generators (3.100), (3.101), (3.102) and (3.103) independently, it may be more to our advantage to consider a complex linear combination. For example, the combined generator $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 - i\tilde{Q}_2$ has the property that $\tilde{Q}^2 = 0$, while the squares of the generators Q_1, Q_2, $\tilde{Q}_1$ and $\tilde{Q}_2$ are bosonic translation generators. A solution of the field equations (3.93) will be invariant under the $\tilde{Q}$ supersymmetry only if the fermionic fields ψ_1 and ψ_2 satisfy the condition $\psi_2 = -i\psi_1$. Therefore, in order to impose $\tilde{Q}$-invariance, we are required to complexify the fermionic fields. Under these conditions, the bosonic fields θ and ρ will be preserved and we obtain the following simplifications :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \nabla\psi = (\psi_{1,y} - \psi_{1,x}) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &= -i\,(\partial_x + i\partial_y)\,\psi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= -2i\,(\partial_{\bar{z}}\psi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.112}$$

using the change of variables $z = x + iy$ (and $\bar{z} = x - iy$). The field equations (3.93) now read

$$\begin{aligned} &\rho_t + \nabla \cdot (\rho\nabla\theta) = 0, \\ &\theta_t + \frac{1}{2}(\nabla\theta)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\rho} i\psi_1\,(\partial_{\bar{z}}\psi_1), \\ &\psi_{1,t} + \nabla\theta \cdot \nabla\psi_1 = -\frac{2\sqrt{2\lambda}}{\rho} i\,(\partial_{\bar{z}}\psi_1), \\ &\psi_{1,t} + \nabla\theta \cdot \nabla\psi_1 = +\frac{2\sqrt{2\lambda}}{\rho} i\,(\partial_{\bar{z}}\psi_1). \end{aligned} \tag{3.113}$$

As a consequence of the last two equations, we get

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = 0, \tag{3.114}$$

which implies that the fermionic potential is of the form $\psi_1 = \psi_1(z,t)$.

Therefore, given any solution $\theta(t,x,y)$, $\rho(t,x,y)$ of the bosonic planar Chaplygin gas model (where $\psi_1 = 0$), the first two equations of (3.113) will be satisfied identically. The last two equations of (3.113) imply that for any generalization of the bosonic solution to a solution of the supersymmetric planar model, the fermionic potential ψ_1 must satisfy the equation

$$\psi_{1,t} = -\left(\theta_x + i\theta_y\right)\psi_{1,z}. \tag{3.115}$$

Finally, let us give some examples of solutions to the supersymmetric planar model constructed through the method described above. It is easy to show that the Legendre-transformed equation in two spatial equations, given in (3.108), admits in particular the symmetry subalgebra $\{V_1, V_2, R_v\}$ which consists of translation and rotation generators. Let us therefore consider solutions of equation (3.108) which are invariant under this subalgebra. The invariants are s and W, which implies a solution of the form $W = W(s)$. Equation (3.108) thus simplifies to the form

$$-3(W_s)^2 + 2sW_sW_{ss} = 0, \tag{3.116}$$

and leads to the invariant solution

$$W = \frac{2}{5}K_0 s^{5/2} + K_1, \tag{3.117}$$

which may be inverted through the two-dimensional Legendre transformation equations (3.105), (3.106) and (3.107) to give the bosonic solution

$$\theta(t,x,y) = \frac{x^2}{2t} + \frac{y^2}{2t} + \frac{1}{10K_0^4}t^5 + K_1, \qquad \rho(t,x,y) = \frac{\sqrt{2\lambda}K_0^{-2}}{t^2}. \tag{3.118}$$

Solution (3.118) is invariant under the subalgebra $\{B_1, B_2, R\}$ in the original (t,x,y) space.

Postulating a solution of the form $\psi_2 = -i\psi_1$, we apply equation (3.115) to the bosonic solution (3.118). The equation becomes

$$\psi_{1,t} = -\frac{z}{t}\psi_{1,z}, \tag{3.119}$$

which gives us the fermionic potentials

$$\psi_1(t,x,y) = \frac{C_0 t}{x+iy}, \qquad \psi_2(t,x,y) = \frac{C_0 t}{ix-y}. \tag{3.120}$$

Here, C_0 is a constant fermionic (odd-valued) Grassmann variable. Equations (3.118) and (3.120) together constitute a solution of the supersymmetric planar model.

Solutions can also be obtained using the field equations (3.93) directly. For instance, if we seek a solution which is invariant under the subsuperalgebra $\{D_1 - D_2, R, \tilde{Q}\}$, one possibility is

$$\theta(t,x,y) = -\frac{1}{2t}(x^2+y^2), \qquad \rho(t,x,y) = \frac{\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3.121}$$

Equation (3.115) then allows us to determine the fermionic functions

$$\psi_1(t,x,y) = C_1 t(x+iy), \qquad \psi_2(t,x,y) = C_1 t(-ix+y), \tag{3.122}$$

where C_1 is a fermionic constant.

Let us mention that the bosonic soliton solution

$$\theta(t,x,y) = \frac{\sinh^2(\alpha x+\beta y)}{2(\alpha^2+\beta^2)t}, \qquad \rho(t,x,y) = \frac{\sqrt{2\lambda(\alpha^2+\beta^2)}t}{\sinh^2(\alpha x+\beta y)}, \tag{3.123}$$

cannot be extended to a non-trivial supersymmetric solution since equation (3.115) is not compatible (i.e. x and y cannot be combined to obtain z).

3.6. Summary and Concluding Remarks

Through the use of a generalized Legendre transformation, a number of analytic solutions have been found for the supersymmetric Chaplygin gas in one spatial dimension. For this purpose, the subalgebra structure of the symmetry Lie algebra $\mathcal{L}$ was used to obtain group-invariant solutions of the transformed field equation (3.18). In many cases, these corresponded (via the Legendre transformation) to previously determined solutions of the standard field equations (3.2), (3.3), (3.4) which are invariant with respect to subalgebras of the Lie symmetry superalgebra $\mathcal{G}_s$, or generalizations of such solutions. In other cases, the solutions were completely new. Importantly, due to the very simple form of equation (3.23) for the field χ, the transformation from the (t, x) space to the (s, v) space allowed us to easily obtain the form of the fermionic potential ψ.

In addition, certain basic elements of a possible extension of our method to the supersymmetric planar model have been formulated. In particular, the $(2+1)$-dimensional analogue (3.108) of the transformed equation (3.18) has been determined, and some of its Lie point symmetries in (s, v_1, v_2) space have been identified. For the specific case where $\psi_2 = -i\psi_1$, it has been shown how an invariant solution of (3.108) can be inverted through the Legendre transformation and then extended to a solution of the planar supersymmetric model. In the general case, it has not yet been determined how to incorporate the fermionic potentials ψ_1 and ψ_2 into the framework of a generalized Legendre transformation in $(2+1)$ dimensions. In particular, the analogue of equation (3.23) for the planar case remains undiscovered.

Acknowledgements

The authors' research was partially supported by research grants from NSERC of Canada and FQRNT du Québec.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes* (Springer-Verlag, New York, 2002).

[2] A. M. Grundland, A. J. Hariton and V. Hussin, "Group-invariant solutions of relativistic and nonrelativistic models in field theory," *J. Math. Phys.* **44**, 2874-2890 (2003).

[3] A. M. Grundland and A. J. Hariton, "Partially invariant solutions of models obtained from the Nambu-Goto action," *J. Math. Phys.* **45**, 3239-3265 (2004).

[4] Y. Bergner and R. Jackiw, "Integrable supersymmetric fluid mechanics from superstrings," *Phys. Lett.* **A284**, 146-151 (2001).

[5] A. J. Hariton, *Équations du gaz de Chaplygin et supersymétries*, Masters' Thesis, Université de Montréal, 2001.

[6] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1986).

[7] P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrecht, 1993), 429.

[8] R. Jackiw and A. P. Polychronakos, "Supersymmetric Fluid Mechanics," *Phys. Rev. D* **62**, 085019 (2000).

[9] M. A. Ayari, V. Hussin and P. Winternitz, *J. Math. Phys.* **40**, 1951 (1999).

Chapitre 4

CONCLUSIONS

4.1. Résumé des résultats

Dans ce travail, nous avons examiné en détails les propriétés de symétrie des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions. Nous avons aussi étudié le lien entre les propriétés de ces modèles et celles de la théorie de Nambu-Goto pour une d-brane. À l'aide d'une classification systématique des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de symétrie du gaz de Chaplygin, nous avons réussi à construire plusieurs nouvelles classes de solutions exactes et explicites de ce modèle de fluide nonrelativiste. Pour les sous-algèbres de dimension 1, les solutions obtenues sont invariantes, alors que pour les sous-algèbres de dimension 2, nous avons déterminé des solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$. Le lien entre les propriétés et les solutions des modèles de Chaplygin et de Born-Infeld nous a également permis d'obtenir plusieurs familles de solutions invariantes et partiellement invariantes du système de Born-Infeld.

Les solutions invariantes ont été déterminées à partir de la méthode classique de réduction par symétries ponctuelles de Lie. Elles peuvent être classifiées comme étant soit non-singulières soit singulières par rapport à la transformation modifiée de Legendre $(x,t) \rightarrow (s,p)$ décrite dans le chapitre 1. Les solutions non-singulières (où la transformation est inversible) correspondent à des cas spéciaux de la solution générale présentée par Jackiw [1], ce qui n'est pas le cas de certaines solutions singulières ayant une densité constante. Les solutions obtenues sont de type algébriques, rationnelles et solitoniques (y compris de type "bump", "kink" et onde multiple). Certaines solutions séparables furent également obtenues, représentant un cas spécial de solutions conditionnellement invariantes.

Les solutions partiellement invariantes des équations de Chaplygin et de Born-Infeld furent obtenues à l'aide d'une version généralisée de l'algorithme de réduction, développé par plusieurs auteurs (e.g. [**2, 3**]). En utilisant l'hypothèse que les sous-algèbres de dimension 2 agissent régulièrement et transversalement, des solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$ furent obtenues. Grâce à l'affaiblissement de la contrainte à satisfaire dans le cas de l'invariance partielle ($\delta = 1$ plutôt que $\delta = 0$), nous avons réussi à obtenir une plus grande variété de solutions analytiques, incluant des ondes de propagation, des ondes centrées, des solitons ainsi que des solutions exprimées à partir des fonctions elliptiques de Jacobi. Pour ces dernières, le module k est choisi de telle façon que $0 < k^2 < 1$, ce qui assure que les solutions elliptiques possèdent des valeurs réelles.

Finalement, nous avons obtenu plusieurs solutions des modèles supersymétriques du gaz de Chaplygin en $(1 + 1)$ et $(2 + 1)$ dimensions. En utilisant une généralisation de la transformée de Legendre, nous avons transformé le système des équations du mouvement du système supersymétrique linéaire en un nouveau système ayant comme variables indépendantes la vitesse du fluide et celle du son dans le fluide. Grâce à une classification des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de l'équation transformée, nous avons obtenu plusieurs classes de solutions invariantes de cette dernière. Une méthode analogue pour trouver des solutions invariantes du modèle supersymétrique planaire, où $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ représente un spineur fermionique, n'a pas encore été formulée en toute généralité. Cependant, quelques éléments de base d'une procédure possible ont été identifiés. En particulier, l'équation bosonique transformée analogue à celle du cas $(1+1)$-dimensionnel a été déterminée. Il a aussi été démontré pour le cas spécial où $\psi_2 = -i\psi_1$ comment une solution invariante de l'équation transformée peut être inversée à l'aide d'une transformée de Legendre généralisée en $(2 + 1)$ dimensions et étendue à une solution du modèle planaire supersymétrique. Bien que le cas planaire soit difficile à résoudre, les résultats obtenus pour le cas linéaire laisse entrevoir un espoir de progrès dans les prochains mois. Les potentiels fermioniques peuvent être interpretés physiquement comme correspondant à des charges fermioniques.

Il est pertinent dans le contexte des solutions particulières analytiques de s'interroger sur l'interprétation physique. Nous pouvons répondre en partie à cette question en observant que certaines propriétés qualitatives de ces solutions seraient difficiles à détecter numériquement. L'existence de différents types de solutions périodiques ou localisées des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en sont un exemple. À partir de méthodes perturbatives, il devrait être possible d'étudier la stabilité de ces solutions.

4.2. Perspectives Futures

Il est possible d'étendre cette étude dans plusieurs directions. Mentionnons certains projets envisagés pour l'avenir.

Un des objectifs de développement futur impliquerait l'application d'une certaine version de la méthode des symétries conditionnelles aux équations de l'électrodynamique nonlinéaire de Born-Infeld en $(3+1)$ dimensions. Cela permettrait de construire des classes de solutions représentant des ondes simples et leurs superpositions (ondes multiples).

La densité lagrangienne des équations de Born-Infeld est construite à partir de deux champs éléctromagnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, et est donnée dans [**4, 5**]. Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes, exprimées en termes des champs canoniques $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ sont données sous la forme évolutive

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times \frac{\mathbf{D} - (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}/b^2}{\sqrt{1 + (\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2)/b^2 + (\mathbf{D} \times \mathbf{B})^2/b^4}}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \partial_t \mathbf{D} &= \nabla \times \frac{\mathbf{B} + (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{D}/b^2}{\sqrt{1 + (\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2)/b^2 + (\mathbf{D} \times \mathbf{B})^2/b^4}}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où b est un paramètre. Il a été démontré [**6, 7**] que si les données initiales en $t = 0$ pour le système (4.1) sont telles que $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ obéissent la condition de divergence nulle, alors cette condition sera satisfaite pour tout $t > 0$ du au caractère évolutif du système hyperbolique (4.1) qui est de la forme

$$u_t + \sum_{i=1}^{3} A^i(u)u_i = 0, \tag{4.2}$$

où $u = (u^1, \ldots, u^6) = (\mathbf{B}, \mathbf{D})$, et A^1,A^2,A^3 sont des fonctions matricielles de u de format 6×6. Nous cherchons une solution de la forme

$$u = f\left(r^1(x,u), r^2(x,u), r^3(x,u)\right), \tag{4.3}$$

où $r^s = \lambda^s_\mu(u)x^\mu$, $s = 1, 2, 3$, sont des invariants de Riemann associés aux vecteurs d'ondes $\lambda^s = (\lambda^s_0, \lambda^s_1, \lambda^s_2, \lambda^s_3)$. Les vecteurs d'ondes λ^s doivent satisfaire la propriété $ker\left(\lambda^s_0 + \lambda^s_\mu A^\mu\right) \neq 0$. Une solution du type (4.3) constitue une onde simple, double ou triple, dont le rang est au plus égal à 3. Cette solution est une extension des solutions d'ondes de Riemann pour l'équation de Born-Infeld discutée par Jackiw [**1**]. Si le vecteur $\xi(u) = (\xi^0(u), \xi^1(u), \xi^2(u), \xi^3(u))^T$ satisfait la condition d'orthogonalité : $\lambda^s_\mu \cdot \xi^\mu = 0$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, alors le graphe d'une solution $\Gamma = (x, u(x))$ est invariant sous l'action du champ de vecteurs

$$X = \xi^\mu(u)\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{4.4}$$

sur l'espace $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6$. L'ensemble $(r^1, r^2, r^3, u^1, \ldots, u^6)$ constitue un ensemble complet d'invariants du champ de vecteurs (4.4). Cela nous permettra de construire des nouvelles classes de solutions par la méthode des invariants de Riemann [**8**], qui seront plus diverses que celles obtenues précédemment.

Une autre avenue à poursuivre serait d'exploiter le concept de la transversalité faible [**9, 10**]. Cela constitue une extension directe de la méthode classique de réduction par symétrie. Soit G le groupe de symétries d'un système d'équations différentielles, G_0 un sous-groupe de G, et $\mathcal{G}_0$ la sous-algèbre de Lie correspondante, engendrée par les champs de vecteurs

$$X_a = \xi^i_a(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^\alpha_a(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \qquad i = 1, \ldots, p, \qquad \alpha = 1, \ldots, q, \qquad a = 1, \ldots, r_0 = dim(\mathcal{G}_0). \tag{4.5}$$

Si G_0 agit régulièrement et transversalement sur l'espace des variables indépendantes et dépendantes $M = X \times U$, alors la condition suivante est satisfaite :

$$rank(\Omega_1) = rank(\Omega_2) = s, \tag{4.6}$$

où les matrices Ω_1 et Ω_2 sont définies par

$$\Omega_1 = \{\xi^i_a(x,u)\} \in \mathbb{R}^{r_0 \times p}, \qquad \Omega_2 = \{\xi^i_a(x,u), \phi^\alpha_a(x,u)\} \in \mathbb{R}^{r_0 \times (p+q)}. \tag{4.7}$$

Notons que s est égal à la dimension des orbites génériques de G_0 sur M. Si la condition de transversalité (4.6) est satisfaite localement, alors la méthode classique de réduction par symétries est directement applicable. Cela signifie que toutes les variables dépendantes peuvent être exprimées en fonctions des invariants et que nous obtenons immédiatement la réduction à un système d'équations en $p - s$ variables indépendantes. La condition de rang (4.6) est appelée transversalité forte. Dans le cas où la condition (4.6) n'est pas satisfaite sur l'espace M entier, mais plutôt sur un sous-ensemble N de M, nous appelons cette condition transversalité faible. Il fut démontré que pour les équations de Navier-Stokes **[10]** il existe des solutions invariantes et partiellement invariantes pour lesquelles la condition de transversalité faible est satisfaite. Il serait intéressant d'étudier le rôle de la transversalité faible dans le contexte des solutions invariantes et partiellement invariantes des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(3 + 1)$ dimensions.

Il serait aussi envisageable d'étendre notre analyse au cas plus général de la d-brane de Nambu-Goto elle-même, en $(d+1, 1)$ dimensions. En particulier, il serait intéressant de faire l'analyse des symétries ainsi que des solutions invariantes et partiellement invariantes analogues à celles construites pour les modèles de Chaplygin et Born-Infeld. L'action de Nambu-Goto pour une d-brane comprend les variables d'espace-temps $(X^0, X^1, \ldots, X^d, X^{d+1})$ dans lequel la d-brane évolue, ainsi que les variables de paramétrisation de la d-brane $(\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^d)$. La densité lagrangienne est donnée par **[1]**

$$\mathcal{L}_{NG} = \left((-1)^d \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial \phi^\beta}\right)\right)^{1/2}. \tag{4.8}$$

En utilisant le changement de variables

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 - X^{d+1}\right), \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X^0 + X^{d+1}\right), \qquad \mathbf{X} = (X^1, \ldots, X^d), \quad (4.9)$$

de telle sorte que θ et $\mathbf{X}$ soient des fonctions de τ et des ϕ^i, ainsi que la paramétrisation $\phi^0 = \tau$, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \phi^i}\left(g g_{ij} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi^j}\right), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \partial \mathbf{X} \cdot \partial \mathbf{X} \partial \tau + g\right), \qquad (4.10)$$

où $g_{ij} = -(\partial \mathbf{X}/\partial \phi^i) \cdot (\partial \mathbf{X}/\partial \phi^j)$ et $g = \det(g_{ij})$, sujet à la contrainte différentielle

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi^i}. \qquad (4.11)$$

Pour le cas $d = 1$, il a été démontré **[11, 1]** que les équations (4.10) et (4.11) peuvent être résolues complètement. Nous obtenons la solution générale sous la forme d'une onde double de Riemann

$$\begin{aligned} X(\tau, \phi) &= F_+(\tau + \phi) + F_-(\tau - \phi), \\ \theta(\tau, \phi) &= \int^{\tau+\phi} \left[F_+'(z)\right]^2 dz \int^{\tau-\phi} \left[F_-'(z)\right]^2 dz, \end{aligned} \qquad (4.12)$$

où F_+ et F_- sont des fonctions arbitraires de leurs arguments. Pour le cas où $d > 1$, Bazeia **[11]** a identifié une certaine classe de solutions sphériquement symétriques

$$\theta(\tau, \phi^i) = -\frac{R^2}{2(d-1)\tau}, \text{ où } \quad R(\tau, \phi^i) = \left(d^{1/2}\frac{\phi^1}{\tau}\right)^{\frac{1}{(d-1)}}. \qquad (4.13)$$

Il est à espérer qu'une étude systématique des propriétés d'invariance complète et partielle des équations (4.10) et (4.11) mène à plusieurs classes additionnelles de solutions de la d-brane de Nambu-Goto pour le cas $d > 1$.

Il serait également intéressant d'étudier les modèles de supermembranes associés aux théories supersymétriques linéaires et planaires du gaz de Chaplygin, dont le Lagrangien est donné dans **[1, 12]**. Une étude des équations d'Euler-Lagrange pourrait décrire des phénomènes physiques reliés aux variables fermioniques ψ.

Finalement, notons que dans la littérature du sujet des d-branes **[13, 14, 15]**, une extension de la théorie de Nambu-Goto fut représentée par la théorie de

Dirac-Born-Infeld. En effet, il y a un terme additionnel qui s'ajoute à la matrice inclue dans la définition de l'action de Nambu-Goto. La densité lagrangienne de Dirac-Born-Infeld inclut une surface d'univers de dimension n évoluant dans un espace-temps de dimension d, ainsi qu'un champ abélien de jauge :

$$\mathcal{L} = \left[\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x_i}\frac{\partial X_\mu}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\right)\right]^{1/2}. \tag{4.14}$$

Les équations d'Euler-Lagrange dépendent de façon essentielle du potentiel de jauge A_i. Dans le cas limite où $A_i \to 0$, nous réduisons le problème au cas de Nambu-Goto $d > 1$. Cela pourrait clarifier certains problèmes associés à l'action de Schild [**13**], qui peut être interprétée comme la limite de la théorie de Yang-Mills en couplage avec le groupe de jauge $SU(N)$ lorsque $N \to \infty$. Il serait pertinent d'explorer le lien entre ces théories et le modèle de Dirac-Born-Infeld.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Jackiw, *A Particle Theorist's Lectures on Supersymmetric Non-Abelian Fluid Mechanics and d-branes* (Springer-Verlag, New York, 2002).

[2] J. Ondich, "The reducibility of partially invariant solutions of systems of partial differential equations." *Euro. Jnl. Appl. Math.* **6**, 329-354 (1995).

[3] P. J. Olver, "Symmetry and Explicit Solutions of Partial Differential Equations," *Appl. Num. Math.* **10**, 307-324 (1992).

[4] I. Bialynicki-Birula, "Field Theory of Photon Dust," *Acta Phys. Pol.* **B23**, 553 (1992).

[5] A. M. Grundland and A. J. Hariton, "Partially invariant solutions of models obtained from the Nambu-Goto action," *J. Math. Phys.* **45**, 3239-3265 (2004).

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. 2* (Interscience, New York, 1962).

[7] R. Courant and K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves* (Interscience Publications, New York, 1948).

[8] A. M. Grundland and R. Zelazny "Simple waves in quasilinear hyperbolic systems," Part I and II, *J. Math. Phys.* **24**, 9 (1983).

[9] I. M. Anderson, M. E. Fels and C. G. Torre "Group invariant solutions without transversality," *Commun. Math. Phys.* **212**, 653-686 (2000).

[10] A. M. Grundland, P. Tempesta and P. Winternitz, "Weak transversality and partially invariant solutions," *J. Math. Phys.* **44**, 2704-2722 (2003).

[11] D. Bazeia, "Galileo invariant system and the motion of relativistic d-branes," *Phys. Rev.* **D59**, 085007 (1999).

[12] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, *Nuclear Phys. B* **305**[FS23], 525 (1988).

[13] D. B. Fairlie, "Dirac-Born-Infeld Equations," *Phys. Lett.* **B456**, 141-146 (1999).

[14] N. Grandi, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, "Monopoles in non-Abelian Dirac-Born-Infeld Theory," *Phys. Rev.* **D59**, 125014 (1999).

[15] T. Ioannidou, G. Papadopoulos and P. M. Sutcliffe, "Non-BPS Dirac-Born-Infeld Solitons," *JHEP* **9909**, 016 (1999).

Annexe A

SYMÉTRIES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SOLUTIONS

A.1. Groupe de symétries d'un système d'équations différentielles

Nous faisons un rappel de la méthode qui permet de trouver les symétries d'un système d'équations différentielles. Cette méthode, proposée dans le livre de P. J. Olver [**1**], ainsi que celui de D. H. Sattinger et O. L. Weaver [**2**] utilise la prolongation de transformations infinitésimales à un espace fibré des jets, $\mathcal{J}_k$, incluant non seulement les variables indépendantes et dépendantes, mais aussi les dérivées de ces dernières. Une condition reliant le système d'équations à sa prolongation permet de déterminer quand un champ de vecteurs constitue un générateur de groupes de symétries à un paramètre.

Un système d'équations différentielles est défini par les q équations

$$\Delta^1 = 0, \qquad \Delta^2 = 0, \qquad \cdots, \Delta^q = 0 \tag{A.1}$$

où Δ^1, Δ^2, $\cdots$, Δ^q sont fonctions des variables indépendantes $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$, des variables dépendantes $u = (u^1, u^2, \cdots u^m)$ (fonctions des x_i) et des dérivées des u_j par rapport aux x_i (jusqu'à un ordre fini). L'espace de base des variables est donc représenté par $X \times U = \{(x_1, \cdots, x_n, u^1, \cdots u^m)\}$. Nous voulons déterminer les transformations de l'espace $X \times U$ qui laissent invariant l'ensemble des solutions du système $\Delta_k = 0$, c'est-à-dire qui envoient chaque solution $u(x)$ à une autre solution $\tilde{u}(\tilde{x})$. Sous une telle transformation, le graphe

$\Gamma = \{(x, u) : u = u(x)\}$ de la fonction $u = u(x)$ est transformé en un nouveau graphe $\tilde{\Gamma} = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) : \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})\}$.

En général, si on considère G un groupe agissant sur les points de l'espace $X \times U$, représenté par les transformations Φ_g, puisque $\Phi_{(g_1 \cdot g_2)} = \Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2}$, alors le graphe sous cette transformation est

$$\tilde{\Gamma}_{g_1 \cdot g_2} = \Phi_{(g_1 \cdot g_2)}(\Gamma) = \Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(\Gamma)) \quad . \tag{A.2}$$

L'action du groupe G peut être prolongée pour inclure les dérivées des variables dépendantes.

Définissons un multi-indice $J = (j_1, j_2, \cdots j_n)$, où chaque j_i est un entier non-négatif. Définissons aussi l'espace $\mathcal{J}_k$ comme étant l'espace de coordonnées (x_i, u^l, u^l_J), où $i = 1, \cdots n$, $l = 1, \cdots, r$, et $|J| = j_1 + j_2 + \cdots + j_n \leq k$. Chaque fonction $u(x) = (u^1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, u^r(x_1, \cdots, x_n))$ définit alors une sous-variété dans l'espace $\mathcal{J}_k$, donnée par $(x_i, u^l(x), u^l_J(x))$, où

$$u^l_J(x) = \frac{\partial^{|J|} u^l(x)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} = \partial_J u^l(x). \tag{A.3}$$

L'espace $\mathcal{J}_k$ est appelé *espace fibré des jets d'ordre* k.

Une action Φ_g sur l'espace $X \times U$ induit une action $\Phi_g^{(k)}$ sur l'espace $\mathcal{J}_k$, qu'on appelle la *prolongation de* Φ_g *d'ordre* k . Si on considère un groupe de transformations à un paramètre Φ_ε tel que :

$$\tilde{x}_i = X^i(x, u, \varepsilon) \quad , \quad \tilde{u}^j = U^j(x, u, \varepsilon), \tag{A.4}$$

où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, le générateur infinitésimal de ce groupe $\alpha = \frac{d}{d\varepsilon}(\Phi_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ est donné par

$$\alpha = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \quad , \tag{A.5}$$

où $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $\phi^j = \phi^j(x, u)$ satisfont les équations

$$\frac{d}{d\varepsilon} X^i|_{\varepsilon=0} = \xi^i, \qquad \frac{d}{d\varepsilon} U^j|_{\varepsilon=0} = \phi^j.$$

Sur l'espace $\mathcal{J}_k$, nous définissons l'opération :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l,J} u^l_{J_i} \frac{\partial}{\partial u^l_J}, \quad \text{où} \quad J_i = (j_1, \ldots, j_{i-1}, j_i + 1, j_{i+1}, \ldots, j_n)). \tag{A.6}$$

Il est clair que D_i agit comme une dérivée totale :

$$D_i f(x, u(x), u_J(x)) = \frac{d}{dx_i} f(x, u(x), u_J(x)) \quad .$$

Plus généralement, pour $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, nous définissons :

$$D_J = \underbrace{D_1 D_1 \cdots D_1}_{j_1} \cdots \underbrace{D_n D_n \cdots D_n}_{j_n} \tag{A.7}$$

Pour le champ de vecteurs α défini dans (A.5), nous avons le résultat suivant :

Théorème A.1.1. *Si $\alpha = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi^j \frac{\partial}{\partial u^j}$, alors la prolongation d'ordre k pour α est*

$$pr^{(k)}(\alpha) = \alpha + \sum_{l,J} \phi^l_J \frac{\partial}{\partial u^l_J}, \tag{A.8}$$

où, en général, ϕ^l_J est donné par

$$\phi^l_J = D_J(\phi^l - \xi^m u^l_m) + (D_m u^l_J)\xi^m. \tag{A.9}$$

Un système d'équations différentielles d'ordre (maximum) k est défini par une fonction

$$\Delta(x_i, u^l, u^l_J) = (\Delta^1(x_i, u^l, u^l_J), \cdots, \Delta^q(x_i, u^l, u^l_J)) \tag{A.10}$$

de $\mathcal{J}_k$ dans $\mathbb{R}^q$, telle que l'espace des valeurs x_i, u^l, u^l_J dans $\mathcal{J}_k$ où $\Delta = 0$ forme une sous-variété de $\mathcal{J}_k$. Notre système est défini par $\Delta = 0$ et une solution est donc une courbe $(x_i, u^l(x), u^l_J(x))$ dans $\mathcal{J}_k$.

Théorème A.1.2. *Soit G un groupe connexe agissant localement sur $X \times U$ par les transformations*

$$\tilde{x}_i = X^i(x, u, g) \quad , \quad \tilde{u}^j = U^j(x, u, g).$$

où $g \in G$ et $\Delta(x, u, u_J)$ est un système d'équations différentielles. Alors, l'action du groupe G préserve les solutions de $\Delta = 0$ (i.e. si $u(x)$ est une solution, $\tilde{u}(\tilde{x})$ l'est aussi) si et seulement si

$$\left[pr^{(k)}(\alpha)\right](\Delta) = 0 \text{ quand } \Delta = 0, \tag{A.11}$$

pour tout générateur infinitésimal α de l'action du groupe.

A.2. Classification des sous-algèbres d'une algèbre de Lie

Une des applications les plus importantes des groupes de symétries des systèmes d'équations différentielles est la réduction par symétrie. Soit G un groupe de symétries d'un système d'équations différentielles Δ et $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie associée, alors pour chaque sous-groupe G_0 de G, nous cherchons une solution dont le graphe Γ est invariant sous l'action du sous-groupe G_0. Ces solutions sont appelées *groupe-invariantes*, G_0-invariantes, ou simplement invariantes. Pour trouver tous les types de solutions groupe-invariantes de Δ, il est nécessaire de faire une classification des sous-algèbres de $\mathcal{L}$.

Considérons une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie N, et soit G le groupe d'automorphismes de $\mathcal{L}$:

$$G\mathcal{L}G^{-1} = \mathcal{L}. \tag{A.12}$$

Nous voulons obtenir une liste représentative des sous-algèbres $\mathcal{L}_i$ de $\mathcal{L}$ telle que chaque sous-algèbre de $\mathcal{L}$ est conjuguée à un et seulement un élément de la liste. Deux sous-algèbres $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_j$ sont conjuguées sous G si et seulement si

$$G\mathcal{L}_jG^{-1} = \mathcal{L}_i. \tag{A.13}$$

Autrement dit, pour tout élément $x \in \mathcal{L}_j$, il existe un élément $y \in \mathcal{L}_i$ et un élément $g \in G$ tel que

$$gxg^{-1} = y. \tag{A.14}$$

Il est à noter que toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie peut être écrite comme une somme semi-directe

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \ni\!\!\!+ \mathcal{R}, \tag{A.15}$$

où $\mathcal{S}$ est une algèbre semi-simple (somme directe d'algèbres simples) et $\mathcal{R}$ le radical (idéal maximal résoluble) de $\mathcal{L}$. Cette forme est appelée *décomposition de Levi*.

La classification des sous-algèbres d'une algèbre de Lie arbitraire revient donc à faire le travail dans trois cas suivants [**3**] :

1. L'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est simple.

2. L'algèbre de Lie est une somme directe de deux algèbres :

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \tag{A.16}$$

3. L'algèbre de Lie est une somme semi-directe de deux algèbres :

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \niplus \mathcal{N} \tag{A.17}$$

A.2.1. Sous-algèbres d'une algèbre de Lie simple

Si $\mathcal{L}$ est simple, nous commençons par trouver toutes les sous-algèbres *maximales* de $\mathcal{L}$. Une sous-algèbre $\mathcal{L}_M \subset \mathcal{L}$ est dite maximale si les relations

$$\mathcal{L}_M \subseteq \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}, \qquad [\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}] \subseteq \tilde{\mathcal{L}}, \tag{A.18}$$

impliquent que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_M \qquad \text{ou} \qquad \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}. \tag{A.19}$$

Nous considérons une représentation fidèle irréductible de dimension finie $E(\mathcal{L})$ par des matrices réelles ou complexes, sur un espace vectoriel V de dimension $N_0 < \infty$ (choisie aussi petite que possible). Toute sous-algèbre $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ sera plongée dans la représentation soit de façon réductible ou irréductible.

Dans le cas où une sous-algèbre maximale $\mathcal{L}_M$ est plongée de façon réductible, elle laisse un sous-espace $V_0 \subset V$ invariant. Pour trouver les matrices représentant $\mathcal{L}_M$, il suffit donc de classifier les sous-espaces $V_0 \subset V$ sous l'action du groupe G, de choisir un sous-espace représentatif pour chaque classe, et de trouver les matrices qui laissent invariant ce sous-espace.

Dans le cas où une sous-algèbre maximale $\mathcal{L}_M$ est plongée de façon irréductible, elle doit être simple, semi-simple ou réductive (une somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne). Pour chaque algèbre de Lie simple, les sous-algèbres semi-simples sont connues, et les sous-algèbres réductives sont obtenues des semi-simples en trouvant leur centralisateur en $\mathcal{L}$:

$$\text{Cent}(\mathcal{L}_M, \mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} \quad | \quad [x, \mathcal{L}_M] = 0\}. \tag{A.20}$$

Une fois que nous avons trouvé les sous-algèbres maximales, nous continuons à trouver les autres sous-algèbres de façon semblable.

A.2.2. Sous-algèbres d'une somme directe de deux algèbres

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie telle que

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \qquad \dim \mathcal{A} = n_a, \qquad \dim \mathcal{B} = n_b, \qquad 1 \leq n_a, n_b \leq \infty, \quad (A.21)$$

nous utilisons la méthode de Goursat pour obtenir deux types de sous-algèbres : "twisted" et "non-twisted". Nous classifions alors les sous-algèbres de $\mathcal{L}$ en classes de conjugaison sous l'action du groupe de Lie associé à $\mathcal{L}$ donné par

$$G = G_{\mathcal{A}} \otimes G_{\mathcal{B}}, \qquad G_{\mathcal{A}} = \exp \mathcal{A}, \qquad G_{\mathcal{B}} = \exp \mathcal{B}. \qquad (A.22)$$

Les algèbres *"non-twisted"* sont les sous-algèbres conjuguées aux sommes directes des sous-algèbres $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, et peuvent être représentées par les sommes directes

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B}_0, \qquad \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}, \qquad \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}. \qquad (A.23)$$

Les algèbres *"twisted"* sont les sous-algèbres qui ne sont pas conjuguées aux sommes directes de la forme (A.23).

A.2.3. Sous-algèbres d'une somme semi-directe de deux algèbres

Si $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie telle que

$$\mathcal{L} = \mathcal{F} \ni\!\!\!\!+ \mathcal{N}, \qquad [\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}, \qquad [\mathcal{N}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}, \qquad [\mathcal{F}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}, \quad (A.24)$$

nous obtenons deux types de sous-algèbres : "splitting" et "non-splitting". Une sous-algèbre $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ est "splitting" si elle est une somme semi-directe de sous-algèbres de ses deux composantes :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{F}_0 \ni\!\!\!\!+ \mathcal{N}_0, \qquad \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}, \qquad \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}. \qquad (A.25)$$

Les sous-algèbres "non-splitting" sont celles qui ne sont conjuguées à aucune algèbre "splitting". Elles sont analogues aux sous-algèbres "twisted" de Goursat.

A.3. Solutions invariantes et partiellement invariantes

L'idée principale de la réduction par symétrie est de prendre un sous-groupe G_0 du groupe G de symétries d'un système Δ et de chercher des solutions de Δ qui sont invariantes sous l'action de G_0. Une telle solution est appelée *groupe-invariante*. Nous identifions ici une solution avec son graphe dans l'espace de coordonnées $X \times U$, donc le graphe d'une solution groupe-invariante sera préservé sous l'action du sous-groupe. En 1962, L.V. Ovsiannikov a introduit une extension de l'invariance des solutions en introduisant les solutions *partiellement invariantes* [**4**]. Considérons un graphe Γ de dimension maximale p, correspondant à une solution d'un système en p variables indépendantes. Si un groupe de Lie G de transformations sur les points de l'espace laisse Γ invariant, alors la solution est groupe-invariante. Si, sous l'action du groupe G, le graphe Γ génère un orbite $G(\Gamma)$ de dimension $p+\delta$ (où $\delta > 0$ est inférieur à la dimension des orbites de G dans l'espace), alors la solution est dite *partiellement invariante avec défaut de structure* δ [**5**].

Nous utilisons ici les notations suivantes [**5**]. Toutes les fonctions et variétés seront infiniment différentiables (C'^{∞}), et seront caractérisées par un système fixe de coordonnées $X \times U = \{(x,u) | x = (x_1, \ldots, x_p) \in X, u = (u_1, \ldots, u_q) \in U\}$. Les groupes de Lie ($G$ ou H) seront des groupes de transformations de coordonnées euclidiennes de $\mathbb{R}^n$, où $n = p + q$, et leurs algèbres de Lie génératrices seront données par $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Ces groupes connexes agiront de façon régulière et, donc, les orbites de G auront une dimension uniforme. Cette dimension commune des orbites sera indiquée par r. Une solution $u = u(x)$ d'un système $\Delta = 0$ est identifiée avec son graphe

$$\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q) | \Delta(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q) = 0\}, \tag{A.26}$$

qui constitue une varieté de dimension p dans un espace de dimension $n = p + q$. Une fonction $\eta(x,u)$ est appelée un *invariant* du groupe de transformations G s'il ne change pas sous l'action de G, c'est-à-dire si

$$\eta\left(g \cdot (x,u)\right) = \eta(x,u), \qquad \text{pour tout} \quad g \in G. \tag{A.27}$$

Cette condition sera vérifiée si $\mathbf{v}[\eta] = 0$ pour tout générateur infinitésimal $\mathbf{v}$ de G. Un résultat important affirme qu'un groupe de transformations régulier avec orbites de dimension r aura un ensemble complet de $(p+q-r)$ invariants fonctionnellement indépendants **[6]**.

Définition A.3.1. *Soit G un groupe de transformations sur une varieté M à n dimensions, agissant régulièrement sur M avec orbites de dimension r. Soit $\Gamma \subset M$ une sous-varieté de dimension p. Supposons que le sous-espace de $T_x M$ engendré par $T_x\Gamma$ et les générateurs de l'algèbre de G soit de dimension $p+\delta$, alors Γ a le défaut de structure δ par rapport à G. Si $\delta < min(r, n - dim\Gamma)$, Γ est dit partiellement invariant avec défaut de structure δ.*

Nous considérons le cas spécifique où M est un sous-ensemble ouvert de $X \times U$. Une solution est partiellement invariante si et seulement si son graphe l'est. Il est à noter que $\delta \leq \ min(r, n - dim\Gamma)$, puisque la dimension de $G(\Gamma)$ ne peut pas être supérieure à $r + dim(\Gamma)$ ou n. Dans le cas de l'égalité, la dimension de $G(\Gamma)$ est aussi grande que possible. Dans le cas où Γ représente le graphe d'une solution, une telle solution est appelée *générique* ou *typique*. Ce type de solution est exclue de la définition de partiellement invariant.

Définition A.3.2. *Soient $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ des champs de vecteurs définis sur un ensemble ouvert, $M \subset X \times U$, de dimension $n = p+q$. Soit $f : W \subset X \to U$ une fonction lisse dont le graphe Γ est une sous-varieté de M de dimension p. La matrice caractéristique de $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ est la matrice de format $q \times s$:*

$$Q(x; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) = \left[Q_{ij}(x, f^{(1)})\right] = \left[\mathbf{w}_j\left(u_i - f_i(x)\right)\right], \tag{A.28}$$

où les lignes $i = 1, \ldots, q$ correspondent aux coordonnées de U, et les colonnes $j = 1, \ldots, s$ libellent les champs de vecteurs.

Une des propriétés les plus importantes de la matrice Q est que son rang est égal au défaut de structure de la solution $u = f(x)$ considérée :

$$rank(Q) = \delta. \tag{A.29}$$

Donc, en particulier, une solution est groupe-invariante sous le groupe G avec générateurs $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ si et seulement si $Q(x; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s) = 0$.

Proposition A.3.1. *Soit $u = f(x)$ une solution du système d'équations $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m) = 0$ et soit $\mathbf{w}$ une symétrie de Δ. Soient $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ les composantes du vecteur $Q(x; \mathbf{w})$, alors les q fonctions $\{Q_1, \ldots, Q_q\}$ satisfont les équations différentielles suivantes :*

$$\sum_{0 \leq |J| \leq n} \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^j}(x, u^{(n)}(x)) \frac{\partial}{\partial x_J}(Q_j(x)) \; = \; 0. \tag{A.30}$$

Si Γ est le graphe d'une solution G-invariante dans un espace de coordonnées $M \subset X \times U$, alors Γ est l'union d'une famille d'orbites de G. Dans l'espace quotient M/G consistant en les orbites de G dans M, cette famille représente une sous-variété de dimension $p - r$. Cela signifie que nous avons besoin d'une famille d'orbites à $p - r$ paramètres pour générer la solution Γ et que pour notre système d'équations différentielles Δ, il existe un système d'équations réduites Δ/G défini sur M/G, en $p - r$ variables indépendantes, pour lequel on a une correspondance biunivoque entre les solutions de Δ/G et les solutions G-invariantes de Δ.

L'idée est généralement semblable pour le cas d'une solution partiellement invariante. La variété invariante est maintenant $G(\Gamma)$ au lieu de Γ, et sa dimension est $p + \delta$ au lieu de p. Nous définissons le concept du rang d'une solution partiellement invariante.

Définition A.3.3. *Le* rang *d'une solution partiellement invariante est défini comme $\rho = p + \delta - r$.*

Le rang et défaut de structure d'une solution partiellement invariante vérifient certaines inégalités utiles.

Proposition A.3.2. *Soit G un groupe de symétrie d'un système Δ, δ et ρ le défaut de structure et le rang d'une solution partiellement invariante avec graphe Γ. Soit $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_s)$ un ensemble complet d'invariants fonctionnellement indépendants pour G et soit $t = rang(\frac{\partial \zeta}{\partial u})$. Alors on a :*

$$\begin{array}{llll} \delta < r, & \delta < q, & \delta \geq r - p, & \delta \geq q - t, \\ \rho < p, & \rho < s, & \rho \geq 0, & \rho \geq s - t, \end{array} \tag{A.31}$$

Définition A.3.4. *Une solution partiellement invariante de Δ avec défaut de structure δ par rapport à G est appelée* réductible *s'il existe un sous-groupe H de*

G avec orbites de dimension supérieure ou égale à $r - \delta$, pour lequel la solution est invariante.

L'algorithme de Lie pour trouver les solutions groupes-invariantes se décrit par les étapes suivantes :

(1) construire un ensemble complet d'invariants pour G ;

(2) exprimer les variables invariantes dépendantes en fonctions des variables invariantes indépendantes, puis isoler les variables dépendantes originales ;

(3) calculer les dérivées des variables dépendantes, puis les remplacer dans Δ pour obtenir Δ/G ;

(4) résoudre Δ/G ;

(5) déterminer les variables dépendantes à partir de la solution de Δ/G.

Par exemple, si nous considérons le système d'équations

$$u_t = v_x, \qquad v_t = u_x. \tag{A.32}$$

Ici, $p = 2$ et $q = 2$. Parmi les symétries de ce système, nous avons le générateur

$$x\partial_x + t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v. \tag{A.33}$$

Puisque $r = 1$, nous obtenons un ensemble complet de $p + q - r = 3$ invariants fonctionnellement indépendants : v/u, x/t, u/x. Donc le graphe Γ de toute solution groupe-invariante sera de dimension 2 et peut être écrit comme l'espace des zéros de deux fonctions qui dépendent seulement des invariants :

$$\Gamma = \{(x,t,u,v)|\omega\left(\frac{v}{u},\frac{x}{t},\frac{u}{x}\right) = 0, \eta\left(\frac{v}{u},\frac{x}{t},\frac{u}{x}\right) = 0\}. \tag{A.34}$$

Nous exprimons les invariants dépendants en fonction de l'invariant indépendant :

$$\frac{u}{x} = \phi(\frac{x}{t}), \qquad \frac{v}{u} = \psi(\frac{x}{t}), \tag{A.35}$$

d'où nous obtenons

$$u = x\phi(\frac{x}{t}), \qquad v = x\phi(\frac{x}{t})\psi(\frac{x}{t}). \tag{A.36}$$

En calculant les dérivées de u et v et en remplaçant dans (A.32), nous obtenons le système Δ/G

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) + \lambda\phi'(\lambda) + \lambda^2\zeta'(\lambda) &= 0, \\ \zeta(\lambda) + \lambda\zeta'(\lambda) + \lambda^2\phi'(\lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{A.37}$$

où $\lambda = x/t$ et $\zeta = \phi\psi$. En intégrant ces équations, nous obtenons

$$\phi = c_1 + \frac{c_2}{\lambda}, \qquad \zeta = c_2 + \frac{c_1}{\lambda}, \tag{A.38}$$

et ainsi les solutions

$$u = c_1 x + c_2 t, \qquad v = c_2 x + c_1 t. \tag{A.39}$$

Ce qui est remarquable avec l'algorithme de Lie, c'est qu'il génère une équation réduite Δ/G qui dépend seulement des invariants de l'action de G. Donc, le système original avec p variables indépendantes et q variables dépendantes est remplacé par un système avec q variables dépendantes mais seulement $p-r$ variables indépendantes. Ceci représente une simplification du problème. En particulier, lorsque $r = p-1$, une équation différentielle aux dérivées partielles (PDE) est remplacée par une équation différentielle ordinaire (ODE).

Dans le cas de solutions partiellement invariantes, l'algorithme doit être modifié car le graphe Γ n'est plus invariant. Les étapes seront maintenant [**5**, **7**] :

(1) construire un ensemble complet d'invariants pour G ;

(2) exprimer la variété $G(\Gamma)$ en fonction des invariants ;

(3) exprimer les variables invariantes dépendantes en fonctions des variables invariantes indépendantes, puis isoler les variables dépendantes originales ;

(4) calculer les dérivées des variables dépendantes, puis les remplacer dans Δ pour obtenir un système Δ' qui dépend non seulement des invariants, mais aussi des variables dépendantes originales ;

(5) utiliser les conditions d'intégrabilité pour déterminer un système Δ/G qui dépend seulement des invariants ;

(6) résoudre Δ/G ;

(7) utiliser la solution de Δ/G pour résoudre Δ', puis déterminer les variables dépendantes à partir de la solution de Δ'.

L'algorithme réduit le système Δ à un système plus simple Δ/G avec $q-\delta$ variables dépendantes et $p+\delta-r$ variables indépendantes. Puisque $r > \delta$, ce système a moins de variables dépendantes et indépendantes que Δ, ce qui semble simplifier le problème plus que dans le cas invariant. Cependant, dans le cas partiellement invariant, il est également nécessaire de résoudre un second système Δ' après avoir résolu Δ/G. Dans ce cas, il n'existe plus une correspondance biunivoque entre les solutions partiellement invariantes de Δ et les solutions de Δ/G. En effet, pour toute solution de Δ/G, chaque solution de Δ' génère une solution différente de Δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1986).

[2] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics* (Springer-Verlag, NY, 1986).

[3] P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrecht, 1993), 429.

[4] L. V. Ovsiannikov, *Group Properties of Differential Equations*(in Russian) (Novosibirsk, 1962) ; *Group Analysis of Differential Equations* (Academic Press, 1986).

[5] J. Ondich, "The reducibility of partially invariant solutions of systems of partial differential equations," *Euro. Jnl. Appl. Math.* **6**, 329-354 (1995).

[6] P. J. Olver, "Direct Reduction and Differential Constraints," *Proc. Roy. Soc. London* **A444**, Nr. 1922, 509-523 (1994).

[7] A. M. Grundland and L. Lalague, "Invariant and partially-invariant solutions of the equations describing a non-stationary and isentropic flow for an ideal and compressible fluid in $(3+1)$ dimensions," *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**, 1723-1739 (1995).

Annexe B

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À VALEURS DE GRASSMANN ET SUPERSYMÉTRIES

Dans cette annexe, nous introduisons les concepts d'espace vectoriel gradué, d'algèbre de Grassmann B_L contenant des variables paires et impaires et de superespace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ formé de coordonnées à valeurs de Grassmann. Nous discutons ensuite des fonctions à valeurs de Grassmann (superchamps) définies sur un superespace et les notions de superalgèbres et supergroupes de Lie sont ensuite données. Ces éléments sont tirés principalement du livre de J. F. Cornwell [1]. Nous rappelons également la méthode de calcul de symétries pour un système d'équations différentielles à variables de Grassmann.

B.1. ESPACE VECTORIEL GRADUÉ ET ALGÈBRES DE GRASSMANN

Soit V un espace vectoriel de dimension $(m+n)$, dont les éléments de base sont $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}$. Chaque élément a de V peut donc être écrit

$$a = \sum_{j=1}^{m+n} \mu_j a_j, \tag{B.1}$$

où les coefficients μ_j sont réels. Une *graduation* peut alors être définie sur l'espace en posant que chaque élément de la forme

$$a = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j \tag{B.2}$$

est *pair*, alors que chaque élément de la forme

$$a = \sum_{j=m+1}^{m+n} \mu_j a_j \tag{B.3}$$

est *impair*. Si on définit V_0 comme étant l'espace d'éléments pairs de V et V_1 comme étant l'espace d'éléments impairs, on en déduit que V est la somme directe de V_0 et V_1 : $V = V_0 \oplus V_1$.

Définition B.1.1. *Tout élément $a \in V$ qui est soit pair soit impair est dit* homogène. *Le* degré *d'un élément homogène est défini comme :*

$$deg(a) = \begin{cases} 0 & si \quad a \in V_0, \\ 1 & si \quad a \in V_1. \end{cases}$$

Définition B.1.2. *Une* superalgèbre associative *est un espace gradué V muni d'un produit $V \times V \to V$: $(a, b) \mapsto ab$ tel que :*

1. $\forall a, b, a', b' \in V$, *et* $\mu, \lambda, \mu', \lambda' \in \mathbb{R}$:

$$(\mu a + \mu' a')(\lambda b + \lambda' b') = \mu\lambda(ab) + \mu\lambda'(ab') + \mu'\lambda(a'b) + \mu'\lambda'(a'b'), \tag{B.4}$$

2. $\forall a, b, c \in V$:

$$(ab)c = a(bc), \tag{B.5}$$

3. $\forall a, b$:

$$\begin{aligned} a \in V_0 \quad et \quad b \in V_0 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_0, \\ a \in V_1 \quad et \quad b \in V_1 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_0, \\ a \in V_0 \quad et \quad b \in V_1 \quad &\Longrightarrow \quad ab \in V_1. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Définition B.1.3. *Une superalgèbre associative est dite* commutative *si*

$$ba = (-1)^{(dega)(degb)} ab, \tag{B.7}$$

pour tous éléments a, b homogènes dans V. Donc,

$$ba = \begin{cases} -ab & si \quad a \quad et \quad b \quad sont\ impairs, \\ ab & autrement. \end{cases}$$

L'algèbre de Grassmann est un exemple particulier de superalgèbre associative, construite en partant d'un ensemble de L générateurs, θ_1, θ_2, $\cdots$, θ_L et en définissant les produits $\theta_k\theta_j$ tels que :

1. $(\theta_j\theta_k)\theta_l = \theta_j(\theta_k\theta_l), \forall j,k,l = 1,2,\ldots,L$ (associative), (B.8)
2. $\theta_j\theta_k = -\theta_k\theta_j$ (donc $\theta_j^2 = 0$), (B.9)
3. chaque produit non-nul $\theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_r}$ de r générateurs est linéairement indépendant des produits avec moins de r générateurs. (B.10)

Si à tous les produits non-nuls et indépendants de ces générateurs, on ajoute le générateur 1 vérifiant $1\cdot 1 = 1$ et $1\theta_j = \theta_j 1 = \theta_j$, alors on obtient une base de 2^L éléments. Ces éléments peuvent être dénotés

$$\theta_\mu = \theta_{j_1}\theta_{j_2}\cdots\theta_{j_r}, \quad 1 \leq r \leq L, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq L,$$

et engendrent un espace vectoriel dont chaque élément s'écrit

$$B = \sum_\mu B_\mu\theta_\mu, \quad \text{où} \quad B_\mu \in \mathbb{R}.$$

La graduation est définie de la façon suivante : chaque élément θ_μ sera considéré pair s'il est formé d'un produit d'un nombre pair des θ_j ou si $\theta_\mu = 1$; il sera considéré impair s'il est formé d'un produit d'un nombre impair des θ_j. L'élément pair (impair) le plus général est une combinaison linéaire arbitraire d'éléments pairs (impairs) de la base. Cette superalgèbre associative, appelée *algèbre de Grassmann* est notée $\mathbb{R}B_L$. Les sous-espaces pairs et impairs sont notés $\mathbb{R}B_{L_0}$ et $\mathbb{R}B_{L_1}$ respectivement.

Nous voulons maintenant introduire le concept de *superespace* $\mathbb{R}B_L^{m,n}$. Le superespace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ est formé de m copies du sous-espace pair $\mathbb{R}B_{L_0}$ et de n copies du sous-espace impair $\mathbb{R}B_{L_1}$. Chaque élément $(\mathbf{X};\mathbf{\Theta})$ de $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ est de la forme

$$(\mathbf{X};\mathbf{\Theta}) = (X_1, X_2, \ldots, X_m; \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n), \tag{B.11}$$

où $X_i \in \mathbb{R}B_{L_0}$, $\quad i = 1, \cdots, m$ et $\Theta_j \in \mathbb{R}B_{L_1}$, $\quad j = 1, \cdots, n$. Donc, en général, on a :

$$X_i = \sum_{\mu} X_i^{\mu} \theta_{\mu}, \tag{B.12}$$

où seuls les indices μ *pairs* apparaissent, et

$$\Theta_j = \sum_{\mu} \Theta_j^{\mu} \theta_{\mu}, \tag{B.13}$$

où seuls les indices μ *impairs* apparaissent. L'espace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ est donc de dimension $(m+n)2^{L-1}$. En particulier, l'algèbre de Grassmann est équivalente au cas $(m, n) = (1, 1)$. Nous pouvons définir une norme sur $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ comme étant

$$\|(\mathbf{X}; \mathbf{\Theta})\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu} |X_i^{\mu}| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\mu} |\Theta_j^{\mu}|. \tag{B.14}$$

Elle vérifie évidemment toutes les propriétés nécessaires d'une norme. Il est alors possible de définir la métrique :

$$d_{m.n}\left((\mathbf{X}; \mathbf{\Theta}), (\mathbf{X}'; \mathbf{\Theta}')\right) = \|(\mathbf{X}; \mathbf{\Theta}) - (\mathbf{X}'; \mathbf{\Theta}')\| \tag{B.15}$$

sur l'espace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$. Utilisant cette métrique, nous pouvons alors doter l'espace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$ de la topologie habituelle.

On peut à présent définir le concept de fonction à valeurs de Grassmann. On peut considérer deux types de telles fonctions. Le premier type consiste à prendre des fonctions définies sur un espace ouvert V de $\mathbb{R}^m$ et à valeurs dans $\mathbb{R}B_L$. Ainsi $\mathcal{F} : V \longrightarrow \mathbb{R}B_L$ est telle qu'associe à chaque point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de $\mathbb{R}^m$ un élément $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}B_L$ pouvant être écrit sous la forme

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu} \mathcal{F}_{\mu}(\mathbf{x}) \theta_{\mu}, \tag{B.16}$$

où chaque $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ est une fonction $V \to \mathbb{R}$.

Le deuxième type consiste, plus généralement, en les fonctions définies sur un espace ouvert U du superespace $\mathbb{R}B_L^{m,n}$. La fonction $F : U \longrightarrow \mathbb{R}B_L$ associe à chaque point $(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})$ du superespace un élément de Grassmann de la forme

$$F(\mathbf{X}.\mathbf{\Theta}) = \sum_{\mu} F_{\mu}(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}) \theta_{\mu}. \tag{B.17}$$

où chaque F_μ est une fonction $U \to \mathbb{R}$. Une telle fonction est également appelée un *superchamp*. Si $n = 0$ et μ est limité à la valeur pour laquelle $\theta_\mu = 1$, on obtient évidemment le cas précédent. La fonction F est appelée *paire* si les fonctions F_μ sont nulles pour tout μ impair et *impaire* si les F_μ sont nulles pour les μ pairs.

Les notions de continuité et de différentiabilité peuvent également être étendue aux fonctions à valeurs de Grassmann. En utilisant la métrique $d_{m,n}(\cdot,\cdot)$ définie dans la section précédente, nous pouvons généraliser la définition de continuité à une fonction à valeurs de Grassmann, définie dans $\mathbb{R}B_L^{m,n}$. Une telle fonction $F : U \longrightarrow \mathbb{R}B_L$ est *continue au point* $(\mathbf{X_0}, \mathbf{\Theta_0})$ si $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$:

$$d_{m,n}\left((\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}), (\mathbf{X_0}, \mathbf{\Theta_0})\right) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{1,1}\left(F(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}), F(\mathbf{X_0}, \mathbf{\Theta_0})\right) < \varepsilon. \tag{B.18}$$

La différentiation est généralisée de façon suivante.

Définition B.1.4. *Soit $F : U \longrightarrow \mathbb{R}B_L$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}B_L^{m,n}$. Supposons qu'il existe m fonctions $\frac{\partial F}{\partial X_j}(j = 1, \ldots, m)$ et n fonctions $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}(k = 1, \ldots, n)$, toutes de $U \to \mathbb{R}B_L$ telles que*

$$F(\mathbf{X}+\mathbf{Y}, \mathbf{\Theta}+\mathbf{\Psi}) = F(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}) + \sum_{j=1}^{m} Y_j \frac{\partial F(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})}{\partial X_j} \tag{B.19}$$

$$= + \sum_{k=1}^{n} \Psi_k \frac{\partial F(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})}{\partial \Theta_k} + \|(\mathbf{Y}, \mathbf{\Psi})\| \eta(\mathbf{Y}, \mathbf{\Psi}), \tag{B.20}$$

où $(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})$ et $(\mathbf{X}+\mathbf{Y}, \mathbf{\Theta}+\mathbf{\Psi}) \in U$ et $\eta : \mathbb{R}B_L^{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}B_L$ sont tels que

$$\|\eta(\mathbf{Y}, \mathbf{\Psi})\| \to 0 \quad si \quad \|(\mathbf{Y}, \mathbf{\Psi})\| \to 0. \tag{B.21}$$

Alors, F est dite différentiable *sur U, et les fonctions $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ et $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ sont appelées les* dérivées partielles *de F.*

Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont complètement determinées. Cependant, ce n'est pas tout-à-fait le cas pour une dérivée de la forme $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$, car la composante proportionnelle à $\theta_1\theta_2\ldots\theta_L$ peut être arbitraire (car multipliée par la variable *impaire* Ψ_k, elle donne toujours zéro). Notons que si F est paire, alors les $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont paires et les $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ sont impaires. Si F est impaire, c'est le contraire : les $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ sont impaires et les $\frac{\partial F}{\partial \Theta_k}$ paires. Les dérivées partielles $\partial/\partial x_j$ sont considérées comme étant des quantités paires, tandis que les dérivées $\partial/\partial \theta_k$ sont considérées impaires et vérifient :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0. \tag{B.22}$$

A partir de la définition, on peut déterminer les dérivées successives de $F(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})$. Si toutes les dérivées de F existent sur un ouvert U de $\mathbb{R}B_L^{m,n}$, alors la fonction est dite *superanalytique* sur U.

B.2. Superalgèbres de Lie

Définition B.2.1. *Soit V un espace vectoriel gradué, V_0 et V_1 ses sous-ensembles pairs et impairs, de dimension m et n respectivement $(m, n \geq 0, m+n \geq 1)$. Supposons également que pour tous éléments $a, b \in V$, il existe un commutateur (supercommutateur) $[a, b]$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *(i)* $\forall a, b \in V,\ [a, b] \in V,$
- *(ii)* $\forall a, b \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ [\alpha a + \beta b, c] = \alpha\,[a, c] + \beta\,[b, c],$
- *(iii)* *si a et b sont homogènes, alors $[a, b]$ est homogène de degré $(deg\ a + deg\ b) mod\ 2$. Donc, $[a, b]$ est* pair *si a et b sont tous deux pairs ou tous deux impairs, et* impairs *si un est pair et l'autre impair,*
- *(iv)* *si a et b sont homogènes, alors*

$$[b, a] = -(-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}[a, b], \tag{B.23}$$

.

- *(v)* *si a, b, et c sont homogènes, alors ils obéissent l'identité de Jacobi :*

$$\begin{aligned}[a, [b, c]]\,(-1)^{(deg\ a)(deg\ c)} + [b, [c, a]]\,(-1)^{(deg\ b)(deg\ a)} \\ + [c, [a, b]]\,(-1)^{(deg\ c)(deg\ b)} = 0.\end{aligned} \tag{B.24}$$

Alors V est dite une superalgèbre de Lie *de dimension paire m et de dimension impaire n, et on note :* $\quad dim(V) = (m|n)$.

En particulier, une superalgèbre de Lie peut être construite à partir d'une superalgèbre associative en définissant

$$[a, b] = ab - (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}ba. \tag{B.25}$$

Lorsque a et b sont tous les deux impairs, on utilisera le symbole $\{a, b\}$ plutôt que $[a, b]$ pour représenter le crochet (B.25).

B.3. Equations différentielles et supersymétries

Il est possible, en général, d'étendre la méthode de calcul des symétries décrite dans l'annexe A à un système d'équations différentielles à variables de Grassmann. En effet, nous considérons maintenant un système de la forme :

$$\Delta_\nu(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta}, \mathbf{A}^{(k_1)}, \mathbf{Q}^{(k_2)}) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, s, \tag{B.26}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{sont les variables indépendantes paires,} \\
\mathbf{\Theta} &= \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\} \text{sont les variables indépendantes impaires,} \\
\mathbf{A} &= \{A^1, A^2, \ldots, A^q\} \text{sont les variables dépendantes paires,} \\
\mathbf{Q} &= \{Q^1, Q^2, \ldots, Q^p\} \text{sont les variables dépendantes impaires.}
\end{aligned}$$

Les transformations sur les variables indépendantes et dépendantes (mais pas leurs dérivées) sont alors générées par des champs de vecteurs de la forme :

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{m} \Xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \Gamma^j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{r=1}^{q} \Phi^r \frac{\partial}{\partial A^r} + \sum_{l=1}^{p} \Lambda^l \frac{\partial}{\partial Q^l}, \tag{B.27}$$

où les fonctions Ξ^i, Γ^j, Φ^r et Λ^l dépendent de ($\mathbf{X}$,$\mathbf{\Theta}$,$\mathbf{A}^{(k_1)}$, $\mathbf{Q}^{(k_2)}$). Les générateurs de symétries sont calculés de façon analogue à ceux du cas ordinaire, mais avec la complication qu'il faut tenir compte d'un changement de signe lorsque deux variables de Grassmann impaires sont interverties : $\theta_a\theta_b = -\theta_b\theta_a$. Les dérivées par rapport à ces variables, $\partial_{\theta_1}, \partial_{\theta_2}, \ldots, \partial_{\theta_j}$ doivent être considérées impaires également. Par exemple :

$$\partial_{\theta_1}(\theta_2\theta_1) = -\theta_2\partial_{\theta_1}(\theta_1) = -\theta_2.$$

Les générateurs que nous obtiendrons pourront donc être pairs ou impairs et formeront une superalgèbre de Lie.

Une *supersymétrie* est une symétrie qui relie les variables paires et impaires de façon non-triviale. Ces transformations sont générées par des générateurs impairs de symétries et les charges conservées obtenues par le théorème de Noether le seront également. Les commutateurs entre les différents générateurs qui forment la structure de la superalgèbre sont définis comme étant :

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= B_1B_2 - B_2B_1, \text{ si } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont pairs,} \\ [B, Q] &= BQ - QB, \text{ si } B \text{ est pair et } Q \text{ est impair,} \\ \{Q_1, Q_2\} &= Q_1Q_2 + Q_2Q_1, \text{ si } Q_1 \text{ et } Q_2 \text{ sont impairs.} \end{aligned} \tag{B.28}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics, Volume III* (Academic Press, London, 1989).

Annexe C

CLASSIFICATION DE L'ALGÈBRE DE LIE DU GAZ DE CHAPLYGIN

L'objectif de cette annexe est de présenter en détail la classification des sous-algèbres à deux dimensions de l'algèbre de Lie L, décrite dans le chapitre 2, équation (2.15), pour les équations de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions. Cette classification est pertinente, car elle nous permet de construire des solutions partiellement invariantes du modèle de Chaplygin avec défaut de structure $\delta = 1$. Elle peut également être appliquée à l'algèbre de Born-Infeld suite aux reparamétrisations (2.16) et (2.19). Afin de classifier ces sous-algèbres, nous commençons par décomposer la structure de L en la somme semi-directe suivante :

$$L = \{\{D_1, D_2\} \ni \{B\}\} \quad \ni \quad \{Z, P_1, P_0\}, \tag{C.1}$$

La classification est accomplie en trois étapes, utilisant la méthode et la notation présentées dans l'article [**1**].

(i) Sous-algèbres de l'algèbre abélienne $A = \{D_1, D_2\}$:

$$\begin{aligned} &A_1 = \{0\}, \qquad A_2 = \{D_1\}, \qquad A_3 = \{D_2\}, \\ &A_4 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\}, \qquad A_5 = \{D_1, D_2\}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

(ii) Pour la prochaine étape de notre classification, nous considérons la somme semi-directe

$$F = \{D_1, D_2, B\} = \{D_1, D_2\} \ni\!\!\!\!\supset \{B\} = A \ni\!\!\!\!\supset \{B\}. \tag{C.3}$$

Les sous-espaces de $\{B\}$ sont $\{0\}$ and $\{B\}$, tous les deux invariants sous l'action de A. Autrement dit, pour chaque sous-algèbre A_i de A, nous avons

$$[A_i, \{0\}] \subseteq \{0\}, \text{ et } [A_i, \{B\}] \subseteq \{B\}. \tag{C.4}$$

Les sous-algèbres splitting de F sont alors données par

$$\begin{aligned}
&F_1 = \{0\}, \quad F_2 = \{B\}, \quad F_3 = \{D_1\}, \quad F_4 = \{D_1, B\},\\
&F_5 = \{D_2\}, \quad F_6 = \{D_2, B\}, \quad F_7 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\},\\
&F_8 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0, B\}, \quad F_9 = \{D_1, D_2\},\\
&F_{10} = \{D_1, D_2, B\} = F.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

En considérant le cas spécifique de F_7 où $a = 1$, nous obtenons également la sous-algèbre non-splitting suivante :

$$F_{11} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, \varepsilon = \pm 1\}. \tag{C.6}$$

Les normalisateurs des sous-algèbres (C.5) et (C.6) dans le groupe $G_F = \mathbf{e}^{\{D_1, D_2, B\}}$ sont donnés dans la Table XVII.

(iii) Portons maintenant notre attention sur l'algèbre de Lie complète L qui peut être décomposée en la somme semi-directe de notre algèbre F, étudiée dans l'étape précédente, et l'algèbre abélienne $N = \{Z, P_1, P_0\}$. On a explicitement

$$L = \{D_1, D_2, B, Z, P_1, P_0\} = F \ni\!\!\!\!\supset N. \tag{C.7}$$

Nous ne considérerons ici que les sous-algèbres de L de dimension 2, car nous cherchons des solutions partiellement invariantes avec défaut de structure $\delta = 1$. Une sous-algèbre de dimension supérieure à 2 serait associée à une solution générique du gaz de Chaplygin.

Commençons par déterminer les algèbres splitting de L. Pour chaque sous-algèbre F_i de F, nous devons trouver toutes les sous-algèbres invariantes de N.

TAB. XVII. Classes des sous-algèbres de $F = \{D_1, D_2, B\}$

Sous-algèbre $F_i \subseteq F$	$Nor(F_i, G_F)$
$F_1 = \{0\}$	G_F
$F_2 = \{B\}$	G_F
$F_3 = \{D_1\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_4 = \{D_1, B\}$	G_F
$F_5 = \{D_2\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_6 = \{D_2, B\}$	G_F
$F_7 = \{D_1 + aD_2, a \neq 0\}$	$\begin{cases} G_F & \text{si } a = 1, \\ e^{\{D_1, D_2\}} & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$
$F_8 = \{D_1 + aD_2, B\}_{a \neq 0}$	G_F
$F_9 = \{D_1, D_2\}$	$e^{\{D_1, D_2\}}$
$F_{10} = \{D_1, D_2, B\}$	G_F
$F_{11} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, \varepsilon = \pm 1\}$	$e^{\{D_1 + D_2, B\}}$

Nous cherchons donc tous les sous-espaces $\widetilde{N}_{i,\alpha}$ de N tels que

$$(a) : [\widetilde{N}_{i,\alpha}, \widetilde{N}_{i,\alpha}] \subseteq \widetilde{N}_{i,\alpha} \quad \text{et} \quad (b) : [F_i, \widetilde{N}_{i,\alpha}] \subseteq \widetilde{N}_{i,\alpha}. \tag{C.8}$$

Puisque N est abélienne, tous ses sous-espaces satisfont la condition (a). Il suffit donc de vérifier la condition d'invariance (b) pour chaque F_i. Cela fait, nous classifions ces sous-algèbres $\widetilde{N}_{i,\alpha}$ en classes de conjugaison sous l'action du normalisateur $Nor\,(F_i, G_F)$.

Pour $F_1 = \{0\}$, il est évident que $[F_1, \widetilde{N}_{1,\alpha}] = \{0\} \subseteq \widetilde{N}_{i,\alpha}$, pour tout $\widetilde{N}_{i,\alpha}$, et en conséquence tout sous-espace de N constitue une sous-algèbre invariante. Il existe quatre types de sous-espaces de N, de dimension 0, 1, 2 ou 3, que nous classifions sous l'action de $Nor\,(F_1, G_F) = G_F$.

Considérons en premier lieu l'unique sous-espace de dimension 0 :

$$N_{1,1} = \{0\}. \tag{C.9}$$

Il est évident que la conjugaison de l'élément zéro ne mène à rien d'autre que zéro. Le sous-espace $\{0\}$ est donc l'unique élément dans sa classe conjuguée.

Pour classifier les sous-espaces de dimension 1, observons ce qui se passe lorsqu'on conjugue chacun des générateurs Z, P_1, P_0 de N par un élément $g \in G_F$, tel que $g = \mathrm{e}^Y$, où $Y = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma B$. Nous obtenons les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} &[Y, Z] = -2\beta Z, \qquad [Y, P_1] = -(\alpha+\beta)P_1 - \gamma Z, \\ &[Y, P_0] = -2\alpha P_0 - \gamma P_1. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Lorsque le générateur Z est conjugué par $g = \mathrm{e}^Y$, Z est transformé en

$$\mathrm{e}^Y \ Z \ \mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-2\beta} Z. \tag{C.11}$$

La sous-algèbre $\{Z\}$ n'est donc conjuguée qu'à elle-même, et forme sa propre classe de conjugaison

$$N_{1,2} = \{Z\}. \tag{C.12}$$

Il est à noter que toute solution des équations de Chaplygin (2.7) est partiellement invariante par rapport à la sous-algèbre $\{Z\}$, car le graphe $(x, t, \theta(x,t))$ de la fonction $\theta(x,t)$ n'est jamais invariant sous la transformation $\theta \longrightarrow \theta + \varepsilon$, où ε est une constante, mais génère plutôt un orbite de dimension 3. Cela correspond au fait que le rang de la matrice caractéristique

$$Q = (1, 0), \tag{C.13}$$

de $\{Z\}$ est égal à 1 pour toutes les solutions.

L'élément P_1 est transformé en

$$\mathrm{e}^Y \ P_1 \ \mathrm{e}^{-Y} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} P_1 + \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)} \left(\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} - \mathrm{e}^{-2\beta}\right) Z & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \mathrm{e}^{-2\alpha} P_1 - \gamma \mathrm{e}^{-2\alpha} Z & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{C.14}$$

Donc, en faisant varier le paramètre γ, nous pouvons générer à partir de la sous-algèbre $\{P_1\}$ toutes les sous-algèbres de la forme $\{P_1 + cZ\}$ où c est une constante réelle. En conséquence, tout le plan (Z, P_1) est couvert par

$$N_{1,3} = \{P_1\}, \tag{C.15}$$

dans le sens que tout sous-espace situé dans le plan (Z, P_1) est conjugué soit à $\{P_1\}$ soit à $\{Z\}$.

L'élément P_0 est transformé en

$$\mathrm{e}^{Y}\ P_0\ \mathrm{e}^{-Y} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2\alpha}P_0 - \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} - \mathrm{e}^{-2\alpha}\right)P_1 & \\ \qquad + \frac{\gamma^2}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha} + \mathrm{e}^{-2\beta} - 2\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\right)Z & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ \mathrm{e}^{-2\alpha}P_0 - \gamma\mathrm{e}^{-2\alpha}P_1 + \frac{1}{2}\gamma^2\mathrm{e}^{-2\alpha}Z & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{C.16}$$

Donc, en faisant varier les paramètres γ (lorsque $\alpha = \beta$) et $\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}(\mathrm{e}^{\alpha-\beta} - 1)$ (lorsque $\alpha \neq \beta$), nous pouvons ajuster le coefficient de P_1 par rapport à P_0 à n'importe quelle valeur réelle. Cependant, cela fixera également le coefficient de Z, et il existera donc des sous-espaces à l'extérieur du plan (Z, P_1) qui ne seront pas conjugués à $\{P_0\}$.

$$N_{1,4} = \{P_0\}. \tag{C.17}$$

Il est possible de rendre les transformations sur les sous-espaces $\{Z\}$, $\{P_1\}$ et $\{P_0\}$ plus transparentes en les écrivant sous la forme suivante, où le symbole $\longrightarrow$ représente la conjugation par l'élément $g = \mathrm{e}^{Y}$ de G_F :

$$\{Z\} \longrightarrow \{Z\}, \tag{C.18}$$

$$\{P_1\} \longrightarrow \begin{cases} \{P_1 - \gamma Z\} \text{ si } \alpha = \beta, \\ \{P_1 - \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}\left(\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)} - 1\right)Z\} \text{ si } \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{C.19}$$

$$\{P_0\} \longrightarrow \begin{cases} \{P_0 - \gamma P_1 + \frac{1}{2}\gamma^2 Z\} \text{ si } \alpha = \beta, \\ \{P_0 - \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}\left(\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)} - 1\right)P_1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}\left(\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)} - 1\right)^2 Z\} \text{ si } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{C.20}$$

Afin de permettre une variation dans le coefficient de Z, considérons la sous-algèbre engendrée par le vecteur $P_0 + \varepsilon Z$, où $\varepsilon = \pm 1$. Pour le cas $\alpha \neq \beta$, cet élément est transformé en

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{Y}\ (P_0 + \varepsilon Z)\ \mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-2\alpha}P_0 \ &- \ \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} - \mathrm{e}^{-2\alpha}\right)P_1 \ + \\ &\left(\frac{\gamma^2}{2(\alpha-\beta)^2}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha} + \mathrm{e}^{-2\beta} - 2\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\right) + \varepsilon\mathrm{e}^{-2\beta}\right)Z. \end{aligned} \tag{C.21}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\{P_0 + Z\} \longrightarrow \{P_0 - &\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}\left(\mathbf{e}^{(\alpha-\beta)}-1\right)P_1 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}\left(\mathbf{e}^{(\alpha-\beta)}-1\right)^2 + \varepsilon\mathbf{e}^{2(\alpha-\beta)}\right)Z\}.\end{aligned} \tag{C.22}$$

Si nous fixons la valeur de $\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}(\mathbf{e}^{(\alpha-\beta)}-1)$, il est possible de varier $(\alpha-\beta)$ à condition que γ soit choisi de telle sorte à garder $\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}(\mathbf{e}^{(\alpha-\beta)}-1)$ constant. Dans le cas où $\varepsilon = 1$, le coefficient de Z peut être augmenté (mais pas diminué) par un facteur de $\mathbf{e}^{2(\alpha-\beta)}Z$. De façon similaire, dans le cas où $\varepsilon = -1$, le coefficient de Z peut être diminué (mais pas augmenté) par un facteur de $\mathbf{e}^{2(\alpha-\beta)}Z$. Donc, les vecteurs $P_0 + Z$ et $P_0 - Z$ génèrent ensemble par conjugaison le reste des sous-espaces à une dimension de N :

$$N_{1,5} = \{P_0 + \varepsilon Z, \varepsilon = \pm 1\}. \tag{C.23}$$

Nous devons maintenant considérer les sous-algèbres de N de dimension 2. Chaque sous-espace de dimension 2 est généré par deux vecteurs linéairement indépendants, et chacun de ces vecteurs se trouve dans une des classes de conjugaison de sous-algèbres unidimensionnelles décrite précédemment. Sous n'importe quelle conjugaison, chacun des deux vecteurs restera dans sa propre classe respective. Nous considérons les quatre sous-espaces 2-dimensionnels suivants :

$$(i) \qquad N_{1,6} = \{Z, P_1\}. \tag{C.24}$$

Sous l'effet d'une conjugaison, le vecteur Z ne change pas tandis que P_1 est transformé en un vecteur de forme $P_1 + cZ$, où c est une constante réelle. Le sous-espace 2-dimensionnel conjugué est donc l'espace généré par les vecteurs Z et $P_1 + cZ$, qui est simplement l'espace $\{Z, P_1\}$. Donc, $N_{1,6}$ est l'unique élément dans sa classe de conjugaison. Il est utile de remarquer qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-espaces 2-dimensionnels de N et les sous-espaces unidimensionnels qui leur sont perpendiculaires (normaux). Le sous-espace $N_{1,6}$ correspond au sous-espace normal $\{P_0\}$.

$$(ii) \qquad N_{1,7} = \{Z, P_0\}. \tag{C.25}$$

Ici, Z ne change pas tandis que P_0 est transformé en un vecteur de type $P_0 - cP_1 + \frac{1}{2}c^2 Z$, où c est une constante. Les sous-algèbres conjuguées à $N_{1,7}$ sont donc celles du type $\{Z, P_0 - cP_1\}$, c'est-à-dire celles qui contiennent l'axe des Z (à l'exception de $\{Z, P_1\}$). Elles correspondent aux sous-espaces normaux $P_1 + cP_0$ et nous avons donc couvert tous les sous-espaces 2-dimensionnels dont la normale se trouve dans le plan (P_1, P_0).

$$(iii) \qquad N_{1,8} = \{P_1, P_0\}. \tag{C.26}$$

Puisque $P_1 \longrightarrow P_1 - cZ$ et $P_0 \longrightarrow P_0 - cP_1 + \frac{1}{2}c^2 Z$, la normale à l'espace conjugué est donnée par le produit vectoriel

$$(P_1 - cZ) \times (P_0 - cP_1 + \frac{1}{2}c^2 Z) = Z + cP_1 + \frac{1}{2}c^2 P_0. \tag{C.27}$$

En conséquence, le coefficient de P_1 de la normale peut être fixé arbitrairement. Une fois de plus, cependant, cela fixe aussi le coefficient de P_0. Afin de pouvoir générer par conjugaison toutes les autres normales, nous considérons le sous-espace

$$(iv) \qquad N_{1,9} = \{P_1, P_0 + \varepsilon Z, \varepsilon = \pm 1\}. \tag{C.28}$$

Suite à une conjugaison par un élément de G_F tel que $\alpha \neq \beta$, et en définissant $c = \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)}(\mathrm{e}^{\alpha-\beta} - 1)$, nous obtenons

$$P_1 \longrightarrow P_1 - cZ \text{ et } P_0 + \varepsilon Z \longrightarrow P_0 - cP_1 + \left(\frac{1}{2}c^2 + \varepsilon \mathrm{e}^{2(\alpha-\beta)}\right) Z. \tag{C.29}$$

La normale à l'espace conjugué est alors

$$Z + cP_1 + \left(\frac{1}{2}c^2 - \varepsilon \mathrm{e}^{2(\alpha-\beta)}\right) P_0. \tag{C.30}$$

Si nous fixons la valeur de c en permettant à $(\alpha - \beta)$ et ε de varier, il est possible de fixer arbitrairement le coefficient de P_0 pour chaque valeur fixée du coefficient de P_1, ce qui nous permet de couvrir toutes les autres normales dans N.

Le seul sous-espace de N de dimension 3 est N lui-même. Puisque nous ne cherchons que les sous-algèbres de L de dimension 2, il n'est pas nécessaire d'étudier ce cas.

Pour $F_2 = \{B\}$, nous avons trivialement la sous-algèbre de dimension 0 :

$$N_{2,1} = \{0\} \tag{C.31}$$

Il est maintenant nécessaire de déterminer quels sous-espaces $\widetilde{N}_{i,\alpha}$ de N satisfont la condition $[F_i, \widetilde{N}_{i,\alpha}] \subseteq \widetilde{N}_{i,\alpha}$. Pour un sous-espace unidimensionnel $\{X\}$ généré par le vecteur $X = kZ + mP_1 + nP_0$, il faut que

$$[B, kZ + mP_1 + nP_0] = c(kZ + mP_1 + nP_0), \tag{C.32}$$

où c est une constante de proportionalité de valeur réelle. Puisque $[B, kZ + mP_1 + nP_0] = -mZ - nP_1$, nous obtenons le système :

$$-m = ck, \qquad -n = cm, \qquad 0 = cn. \tag{C.33}$$

Les seules solutions admissibles sont celles où $m = n = 0$, et donc la seule sous-algèbre unidimensionnelle de N invariante sous F_2 est

$$N_{2,2} = \{Z\}. \tag{C.34}$$

Puisque F_2 est déjà une sous-algèbre de dimension 1 et nous ne cherchons que les sous-algèbres de L de dimension 2, il n'est pas nécessaire pour ce cas de considérer les sous-algèbres de N de dimension 2.

Nous procédons de façon analogue pour déterminer les sous-algèbres de N invariantes sous les algèbres F_3, F_5, F_7 et F_{11}. Puisque F_4, F_6, F_8 et F_9 sont déjà des algèbres à deux dimensions, nous ne considérons que la sous-algèbre invariante $N_{i,1} = \{0\}$ pour ces cas. Puisque F_{10} est une algèbre à trois dimensions, il n'y a pas de sous-algèbres splitting 2-dimensionnelles de L correspondantes. Les algèbres splitting de L sont celles de la forme

$$L_{i,\alpha} = F_i \ni N_{i,\alpha}. \tag{C.35}$$

Les algèbres splitting de L à deux dimensions sont présentées dans la Table XVIII.

Pour déterminer les sous-algèbres non-splitting de $L = F \ni N$, nous considérons chaque algèbre splitting de L séparément. Chaque algèbre splitting de type $L_{i,\alpha}$ possède une base $\{B_a, X_j\}$ composée des éléments $B_a \in F$, $1 \leq a \leq dim(F_i)$,

TAB. XVIII. Classes d'algèbres splitting de L à deux dimensions

Algèbre splitting $L_{i,\alpha}$	$Nor(L_{i,\alpha}, G)$
$L_{1,6} = \{Z, P_1\}$	G
$L_{1,7} = \{Z, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{1,8} = \{P_1, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{1,9} = \{P_1, P_0 + \varepsilon Z\}$ $\quad \varepsilon=\pm 1$	$e^{\{D_1+D_2,Z,P_1,P_0\}}$
$L_{2,2} = \{B, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z,P_1\}}$
$L_{3,2} = \{D_1, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z\}}$
$L_{3,3} = \{D_1, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_1\}}$
$L_{3,4} = \{D_1, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_0\}}$
$L_{4,1} = \{D_1, B\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z\}}$
$L_{5,2} = \{D_2, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,Z,P_0\}}$
$L_{5,3} = \{D_2, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_1,P_0\}}$
$L_{5,4} = \{D_2, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_0\}}$
$L_{6,1} = \{D_2, B\}$	$e^{\{D_1,D_2,B\}}$
$L_{7,2}\ (a=1) = \{D_1 + D_2, Z\}$	$e^{\{D_1,D_2,B,Z\}}$
$L_{7,3}\ (a=1) = \{D_1 + D_2, P_1\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_1\}}$
$L_{7,4}\ (a=1) = \{D_1 + D_2, P_0\}$	$e^{\{D_1,D_2,P_0\}}$
$L_{7,5}\ (a=1) = \{D_1 + D_2, P_0 + \varepsilon Z\}$ $\quad \varepsilon=\pm 1$	$e^{\{D_1+D_2,P_0+\varepsilon Z\}}$
$L_{7,2}\ (a\neq 1) = \{D_1 + aD_2, Z\}$ $\quad a\neq 0,1$	$\begin{cases} e^{\{D_1,D_2,Z,P_1\}} & \text{si } a=-1, \\ e^{\{D_1,D_2,Z\}} & \text{si } a\neq -1. \end{cases}$
$L_{7,3}\ (a\neq 1) = \{D_1 + aD_2, P_1\}$ $\quad a\neq 0,1$	$e^{\{D_1,D_2,P_1\}}$
$L_{7,4}\ (a\neq 1) = \{D_1 + aD_2, P_0\}$ $\quad a\neq 0,1$	$\begin{cases} e^{\{D_1,D_2,P_1,P_0\}} & \text{si } a=-1, \\ e^{\{D_1,D_2,P_0\}} & \text{si } a\neq -1. \end{cases}$
$L_{8,1} = \{D_1 + aD_2, B\}$ $\quad a\neq 0$	$e^{\{D_1,D_2,B\}}$
$L_{9,1} = \{D_1, D_2\}$	$e^{\{D_1,D_2\}}$
$L_{11,2} = \{D_1 + D_2 + \varepsilon B, Z\}$ $\quad \varepsilon=\pm 1$	$e^{\{D_1+D_2,B,Z\}}$

et $X_j \in N$, $1 \leq j \leq dim(N_{i,\alpha})$. Nous pouvons augmenter la base $\{X_j\}$ de $N_{i,\alpha}$ en une base $\{X_j, Y_\mu\}$ de N en ajoutant les éléments Y_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, s$, où $s = dim(N) - dim(N_{i,\alpha})$. Nous considérons alors l'espace

$$V = \{B_a + \sum_{\mu=1}^{s} c_{a\mu} Y_\mu, X_j\}, \tag{C.36}$$

où $c_{a\mu}$ sont des constantes réelles, comme possibilité pour une algèbre non-splitting. Nous utilisons les relations

$$[B_a, B_b] = f^c_{ab} B_c, \quad [B_a, Y_\mu] = \rho^\nu_{a\mu} Y_\nu + \sigma^m_{a\mu} X_m, \tag{C.37}$$

ainsi que la condition suivante sur les constants de structure :

$$c_{b\nu}\rho^\alpha_{a\nu} - c_{a\mu}\rho^\alpha_{b\mu} - c_{c\alpha} f^c_{ab} = 0. \tag{C.38}$$

Les relations (C.37) et (C.38) sont les conditions qui doivent être satisfaites par les constantes $c_{a\mu}$ pour que V soit une algèbre. Nous examinons ensuite les cocycles

$$\mathbf{e}^{\lambda_\mu Y_\mu} B_a \mathbf{e}^{-\lambda_\mu Y_\mu} = B_a + \lambda_\mu [Y_\mu, B_a], \tag{C.39}$$

afin de déterminer quels constantes $c_{a\mu}$ peuvent être éliminées par simple conjugaison. Finalement, nous classifions les résultats par rapport à la conjugaison par $Nor(L_{i,\alpha}, G)$.

À titre d'exemple, examinons l'algèbre splitting $L_{2,2} = \{B, Z\}$. Nous identifions :

$$\begin{gathered} B_1 = B, \qquad X_1 = Z, \qquad Y_1 = P_1, \qquad Y_2 = P_0, \\ [B, B] = 0, \qquad [B, P_1] = -Z, \qquad [B, P_0] = -P_1. \end{gathered} \tag{C.40}$$

et donc, $f^1_{11} = 0$, $\rho^1_{11} = 0$, $\rho^2_{11} = 0$, $\rho^1_{12} = -1$, $\rho^2_{12} = 0$. L'espace candidat est donc

$$V = \{B + c_{11}P_1 + c_{12}P_0, Z\}, \tag{C.41}$$

et puisqu'il n'y a qu'un seul élément de type B_a, l'équation (C.38) est satisfaite identiquement par anti-symétrie. Nous analysons alors les cocycles

$$B_a + \lambda_\mu [Y_\mu, B_a] = B + \lambda_1 [P_1, B] + \lambda_2 [P_0, B] = B + \lambda_1 Z + \lambda_2 P_1. \tag{C.42}$$

En fixant $\lambda_2 = -c_{11}$, il est facile de voir que l'espace V est conjugué à l'espace

$$\{(B+\lambda_1 Z - c_{11}P_1) + c_{11}P_1 + c_{12}P_0, Z\} = \{B + c_{12}P_0, Z\}. \tag{C.43}$$

Cependant, la seconde constante c_{12} ne peut pas être éliminée par cette méthode, et il est donc nécessaire de classifier les algèbres non-splitting possibles de la forme

$$\{B + c_0 P_0, Z\}, \tag{C.44}$$

où c_0 est une constante, sous l'action du groupe normalisateur $Nor(L_{2,2}, G) = \mathbf{e}^{\{D_1, D_2, B, Z, P_1\}}$.

Considérons l'élément $X = B + c_0 P_0 + mZ$, où m est une constante réelle, et observons ce qui se passe lorsqu'il est conjugué par l'élément de $Nor(L_{2,2}, G)$

$$g = \mathbf{e}^Y, \text{ où } Y = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma B + \delta Z + \eta P_1. \tag{C.45}$$

Les deux premiers coefficients du développement en séries de puissances de l'exponentielle sont :

$$\begin{aligned} [Y, X] &= (\alpha-\beta)B - 2\alpha c_0 P_0 + (\eta - 2m\beta)Z - \gamma c_0 P_1, \\ [Y,[Y,X]] &= (\alpha-\beta)^2 B + (2\alpha)^2 c_0 P_0 + \gamma\,(3\alpha+\beta)\, c_0 P_1 \\ &\quad + \left(\eta(\alpha-\beta) - 2m\beta(\eta - 2m\beta) + \gamma^2 c_0\right) Z. \end{aligned} \tag{C.46}$$

En fixant $\gamma = 0$ et en calculant les termes additionnels, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^Y\ X\ \mathbf{e}^{-Y} &= \mathbf{e}^{(\alpha-\beta)}B + \mathbf{e}^{-2\alpha}c_0 P_0 + \phi(\alpha,\beta,\eta,m)Z \\ &\subseteq \{B + \mathbf{e}^{\beta-3\alpha}c_0 P_0, Z\}. \end{aligned} \tag{C.47}$$

En variant les valeurs de α et β, on peut voir que toutes les algèbres de la forme $\{B + c_0 P_0, Z\}$, où c_0 est positive, sont conjuguées à l'algèbre $\{B + P_0, Z\}$. Par ailleurs, celles où c_0 est negative sont conjuguées à l'algèbre $\{B - P_0, Z\}$. Nous obtenons alors l'algèbre non-splitting

$$\mathcal{L}_{2,2} = \{B + \varepsilon P_0, Z\}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{C.48}$$

correspondant à l'algèbre splitting $L_{2,2} = \{B, Z\}$.

Nous répétons cette procédure pour toutes les autres algèbres splitting $L_{i,\alpha}$ de la Table XVIII. Certaines algèbres splitting n'ont aucune algèbre non-splitting correspondante, puisque soit toutes les constantes $c_{a\mu}$ sont éliminées par les cocycles, où alors il n'existe pas d'éléments de type B_a dans la base de l'algèbre $L_{i.\alpha}$ (pour les cas où $F_i = \{0\}$). Dans chaque cas, l'algèbre non-splitting qui correspond à $L_{i,\alpha}$, si elle existe, est appelée $\mathcal{L}_{i,\alpha}$. Les algèbres non-splitting de L à deux dimensions sont présentées dans la Table XIX.

TAB. XIX. Classes d'algèbres non-splitting de L à deux dimensions

Algèbre non-splitting $\mathcal{L}_{i,\alpha}$	$Nor(\mathcal{L}_{i,\alpha}, G)$
$\mathcal{L}_{2,2} = \{B + \varepsilon P_0, Z\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1+3D_2, B+\varepsilon P_0, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{3,3} = \{D_1 + \varepsilon Z, P_1\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{3,4} = \{D_1 + \varepsilon Z, P_0\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1, Z, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{4,1} = \{D_1 + \varepsilon Z, B\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1, B, Z\}}$
$\mathcal{L}_{5,2} = \{D_2 + \varepsilon P_0, Z\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_2, Z, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{5,3} = \{D_2 + \varepsilon P_0, P_1\} \quad {\scriptstyle \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_2, P_1, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{7,2} \ {\scriptstyle (a\neq1)} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1, Z\} \quad {\scriptstyle a\neq0,1 \quad \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1-D_2, Z, P_1\}}$
$\mathcal{L}_{7,4} \ {\scriptstyle (a\neq1)} = \{D_1 - D_2 + \varepsilon P_1, P_0\} \quad {\scriptstyle a\neq0,1 \quad \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1-D_2, P_1, P_0\}}$
$\mathcal{L}_{8,1} = \{D_1 + 3D_2, B + \varepsilon P_0\} \quad {\scriptstyle a\neq0 \quad \varepsilon=\pm1}$	$e^{\{D_1+3D_2, B+\varepsilon P_0\}}$

Nous nous sommes servis de cette classification pour trouver toutes les réductions non-équivalentes correspondantes des équations du gaz de Chaplygin sous les sous-algèbres de L à deux dimensions. Pour chaque classe de conjugaison donnée dans les Tables XVIII et XIX, nous avons évalué les invariants de la sous-algèbre de Lie correspondante, ainsi que les équations réduites associées. Les résultats de cette classification sont utilisés systématiquement dans le chapitre 2 afin de déterminer les réductions menant à des solutions partiellement invariantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Winternitz, "Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories*, Eds. L.A. Ibort and M.A. Rodriguez (Kluwer, Dordrecht, 1993), 429.