

Université de Montréal

**AUTOMORPHISMES ET ISOMORPHISMES DES
GRAPHES DE CAYLEY**

par

J. Fournier

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en mathématiques

12 avril 2005



QA

3

U54

2005

V.006

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**AUTOMORPHISMES ET ISOMORPHISMES DES
GRAPHES DE CAYLEY**

présentée par

J. Fournier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Abraham Broer

(président-rapporteur)

Gert Sabidussi

(directeur de recherche)

Yvo Rosenberg

(membre du jury)

Dragan Marušič

(examineur externe)

Gena Hahn

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

30 mars 2005

SOMMAIRE

L'intérêt que l'on porte aux graphes de Cayley, autant dans les mathématiques fondamentales qu'appliquées, provient principalement de leurs groupes d'automorphismes. Malgré cela, le problème de déterminer à quoi est égal ce groupe en général reste essentiellement ouvert. C'est le premier problème que nous étudions dans cette thèse.

Les premiers chercheurs à travailler sur cette question furent Babai et Godsil. Ils conjecturèrent dans [4] que pratiquement tous les graphes de Cayley $\Gamma(G, S)$ sont des GRR, c'est-à-dire possèdent comme uniques automorphismes les translations à gauche du groupe G , dénoté $L(G)$. Bien que cette conjecture soit probablement vraie, de nombreuses familles connues de graphes de Cayley ne sont pas constituées de GRR. Ce phénomène, à priori surprenant, s'explique par le fait que les ensembles de générateurs de ces graphes de Cayley possèdent des symétries et que ces symétries correspondent à des automorphismes qui ne sont pas des translations. Afin d'englober ces graphes de Cayley qui ne sont pas des GRR, la notion de graphe de Cayley holomorphe est introduite : un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est holomorphe¹ si son groupe d'automorphismes est le produit de $L(G)$ et $\text{Aut}_S G$, le sous-groupe des automorphismes de G qui stabilisent S , l'ensemble des générateurs du graphe.

Au chapitre 1 nous présentons de nouveaux outils pour déterminer le groupe d'automorphismes d'un graphe de Cayley. Au chapitre 2 nous déterminons le groupe d'automorphismes des graphes de Cayley engendrés par des transpositions, c'est-à-dire les graphes de Cayley de la forme $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{S}_n, S)$, où S est un ensemble de transpositions qui engendre le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Nous démontrerons que tous les graphes de

¹Beaucoup d'auteurs emploient le terme normal au lieu d'holomorphe.

Cayley de cette forme sont holomorphes, c'est-à-dire ont tous comme groupe d'automorphismes $\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)\text{Aut}_S\mathfrak{S}_n$, à l'exception de ceux pour lesquels le graphe de transpositions ² de S , dénoté T_S , est un carré ou un graphe complet d'ordre supérieur à 2. Nous prouverons aussi que si $n \geq 3$, $\text{Aut}_S\mathfrak{S}_n \simeq \text{Aut}T_S$. Ces deux résultats généralisent le théorème de Godsil et Royle [15] qui affirme que $\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)$ si S est un ensemble minimal de générateurs de \mathfrak{S}_n et le groupe d'automorphismes de T_S est trivial. Au chapitre 3 nous montrons l'existence de nouvelles classes de graphes de Cayley holomorphes, les plus importantes étant une classe basée sur des groupes abéliens, une classe engendrée par des involutions, et une classe de graphes basés sur des groupes symétriques ou alternés et engendrés par des transpositions et des cycles de longueur 3.

Le second problème que nous étudions est celui de l'isomorphisme entre les graphes de Cayley, qui consiste à déterminer quand $\Gamma(G, S) \simeq \Gamma(H, T)$. Ce problème est un problème très complexe dont la solution dépend du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley considérés. Puisque les recherches³ récentes portent à croire que la majorité des graphes de Cayley sont holomorphes et que l'on a une connaissance précise du groupe d'automorphismes de ces graphes, nous nous sommes restreints à cette classe. Notre objectif est d'obtenir des résultats plus forts que dans le cas général pour une grande partie des graphes de Cayley.

Nous aborderons ce problème en deux étapes. Nous étudions dans un premier temps, au chapitre 6, l'isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur un groupe fixé. Cela nous permettra en particulier de caractériser les graphes de Cayley holomorphes qui sont CI⁴, ce qui répond à une question que soulève Cai Heng Li dans [21].

²Le graphe de transposition de S est le graphe ayant $\{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets et $\{[i, j] : (ij) \in S\}$ comme ensemble d'arêtes.

³Voir, par exemple, l'article [29] par Ming Yao Xu.

⁴Un graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$ est CI s'il se représente de façon unique sur G , c'est-à-dire si $\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S)$ entraîne qu'il existe $\sigma \in \text{Aut}G$ tel que $T = \sigma(S)$.

Ensuite, au chapitre 7, nous nous penchons sur l'isomorphie entre les graphes de Cayley holomorphes basés sur des groupes différents. Les résultats de ces deux chapitres nous permettront de résoudre le problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes basés sur un groupe cyclique, un groupe simple, un groupe symétrique, un produit direct de deux groupes simples non abéliens, un produit semi-direct non trivial⁵ de deux groupes simples (pour les graphes de Cayley holomorphes complets⁶).

Mots-clés : graphe de Cayley holomorphe, graphe de Cayley normal, GRR, graphe de transpositions, homomorphisme-croisé, dérivation, sous-groupe d'un produit semi-direct, graphe de Cayley CI, réseau de processeurs, architecture parallèle.

⁵ $K \rtimes_{\theta} Q$ est non trivial si $\text{Ker}(\theta) \neq Q$.

⁶Un graphe de Cayley holomorphe est complet si $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$.

SUMMARY

The interest for Cayley graphs, in fundamental or applied mathematics, comes mainly from their automorphism group. Despite this fact, the problem of determining what this group is equal to in general is still essentially open. This is the first problem we study in this thesis.

The first researchers to work on this question were Babai and Godsil. They conjectured in [4] that almost all Cayley graphs $\Gamma(G, S)$ are GRR, which means that they have the group of left translations $L(G)$ as their full automorphism group. Even if this conjecture is probably true, a lot of well known families of Cayley graphs are not constituted of GRR. This phenomena, a priori surprising, can be explained by the fact that the generating sets of these Cayley graphs have symmetries and that these symmetries correspond to automorphisms that are not left translations. In order to include these graphs which are not GRR, we introduce the notion of holomorphic Cayley graph : a Cayley graph $\Gamma = \Gamma(G, S)$ is holomorphic⁷ if its automorphism group is the product of $L(G)$ and $\text{Aut}_S G$, the subgroup of automorphisms of G that stabilize S , the generating set of the graph.

In chapter 1 we present new tools to determine the automorphism group of a Cayley graph. In chapter 2 we determine the automorphism group of all Cayley graphs generated by transpositions, which are the graphs of the form $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{S}_n, S)$, where S is a set of transpositions that generates the symmetric group \mathfrak{S}_n . We prove that all these graphs are holomorphic, thus that their automorphism group is $\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)\text{Aut}_S\mathfrak{S}_n$, except for the one such that the transposition graph⁸ of S , denoted T_S , is a square or

⁷A lot of authors use the term normal instead of holomorphic.

⁸The transposition graph of S is the graph with $\{1, 2, \dots, n\}$ as vertex set and $\{[i, j] : (ij) \in S\}$ as edge set.

a complete graph of order greater than 2. We will show also that $\text{Aut}_S \mathfrak{S}_n \simeq \text{Aut} T_S$ if $n \geq 3$. These two results generalize the theorem of Godsil and Royle [15] which states that $\text{Aut} \Gamma = L(\mathfrak{S}_n)$ if S is a minimal generating set of \mathfrak{S}_n and the automorphism group of T_S is trivial. In chapter 3 we prove the existence of new classes of holomorphic Cayley graphs, the most important being a class based on abelian groups, a class generated by involutions, and a class based on alternate or symmetric groups and generated by transpositions and cycles of length 3.

The second problem we will study is the isomorphism between Cayley graphs, that consist in determining when $\Gamma(G, S) \simeq \Gamma(H, T)$. This problem is very complex and its solution depends on the automorphism group of the considered Cayley graphs. Since recent research⁹ suggest that the majority of Cayley graphs are holomorphic and that we have a precise knowledge of the automorphism group of these graphs, we have restricted ourselves to this class. Our goal is to obtain stronger results than in the general case on an important class of Cayley graphs.

We will approach this question in two steps. We will first study, in chapter 6, the isomorphism between Cayley graphs based on a fixed group. This will allow us in particular to characterize holomorphic Cayley graphs that are CI¹⁰, which answers a question raised by Cai Heng Li in [21]. Next, in chapter 7, we will work on the isomorphism between Cayley graphs based on different groups. The results of these two chapters will allow us to solve the isomorphism problem for holomorphic Cayley graphs based on a cyclic group, a simple group, a symmetric group, a direct product of two non abelian simple groups, and a non trivial¹¹ semi-direct product of two simple groups (for complete¹² holomorphic Cayley graphs).

⁹See, for example, the paper [29] by Ming Yao Xu.

¹⁰A Cayley graph $\Gamma(G, S)$ is CI if it can be uniquely represented on G , which means that $\Gamma(G, T), \simeq \Gamma(G, S)$ implies that there exists $\sigma \in \text{Aut} G$ such that $T = \sigma(S)$.

¹¹ $K \rtimes_{\theta} Q$ is non trivial if $\text{Ker}(\theta) \neq Q$.

¹²A holomorphic Cayley graph is complete if $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$.

Keywords : holomorphic Cayley graph, normal Cayley graph, transposition, derivation, cross-homomorphism, subgroup of semi-direct product, CI Cayley graph, processors network, parallel computing.

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord exprimer ma profonde gratitude à mon directeur, M. Sabidussi, qui m'a offert un sujet de recherche passionnant et foisonnant, et son aide inestimable durant la rédaction de cette thèse. Sans son haut niveau d'exigence, plusieurs idées importantes de ce travail seraient restées cachées dans des preuves.

Je ne serais remercier suffisamment Yannick Delbecque. Ses conseils, sa curiosité et sa disponibilité ont fait de lui un allié vital durant toutes les années que j'ai consacrées à ce travail.

J'aimerais remercier ensuite mes parents et ma soeur pour leur présence et leur soutien durant toutes mes études.

Je souhaite aussi remercier de tout coeur tous mes amis du département. En partageant avec moi leur joie et leur humanité, ils ont fait que ces années comptent parmi les plus belles de ma vie. J'aimerais souligner l'apport de certains d'entre eux : Julien Marcil et Philippe Beaudoin pour leur programme qui invalida une de mes conjectures et me sauva de plusieurs mois de travail inutile, Gabriel Chênevert pour ses avis éclairants sur certains problèmes de notation et de terminologie, et Nicolas Beauchemin pour l'aide qu'il m'a donnée quand Latex me refusait sa collaboration.

Je désire finalement remercier le CRSNG, le FCAR, et l'ISM de leur soutien financier, sans lequel l'accomplissement de ce travail aurait été impossible.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	5
Summary	9
Remerciements	13
Liste des figures	21
Introduction	23
Chapitre 1. Les graphes de Cayley et leurs automorphismes	41
1.1. Introduction	41
1.2. Préalables	42
1.3. Les graphes de Cayley	43
1.3.1. Automorphismes des graphes de Cayley	44
1.3.2. Graphes de Cayley holomorphes	45
1.3.3. Graphes de Cayley localement holomorphes	47
1.4. Localisations et déviateurs	49
1.4.1. Les localisations	50
1.4.2. Les déviateurs	53
1.4.3. Déviateurs et graphes de Cayley holomorphes	55
1.4.4. Déviateurs et graphes de Cayley localement holomorphes	56
1.4.5. Localisations et critère d'isomorphie	57
1.4.6. Diviseurs premiers de l'ordre des groupes $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$	59

Chapitre 4. Les Homomorphismes croisés	131
4.1. Introduction	131
4.2. Préalables	132
4.3. Définition des homomorphismes croisés	133
4.4. Propriétés élémentaires des homomorphismes croisés	135
4.5. Isomorphismes de groupes et isomorphismes croisés	139
4.5.1. Isomorphismes de graphes de Cayley	141
4.6. Calcul des homomorphismes croisés	141
4.6.1. Méthode générale	142
4.6.2. Homomorphismes croisés définis sur Z_n	146
4.6.3. Méthode par factorisation	149
Chapitre 5. Les sous-groupes d'un produit semi-direct	153
5.1. Introduction	153
5.2. Préalables	153
5.3. Résultats principaux	154
5.3.1. Première décomposition	158
5.3.2. Application	160
5.3.3. Deuxième décomposition	162
5.3.4. Application	165
5.3.5. Caractérisation des sous-groupes normaux d'un produit semi-direct .	166
5.3.6. Applications	171
Chapitre 6. Isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur un groupe fixé	175
6.1. Introduction	175
6.2. Résultat principal	176

6.3.	Caractérisation des graphes de Cayley holomorphes CI	177
6.4.	Applications	180
6.4.1.	Groupe cyclique	180
6.4.2.	Groupe simple	180
6.4.3.	Produit direct de deux groupes simples	181
6.4.4.	Produit semi-direct de deux groupes simples	184
6.4.4.1.	Première famille	186
6.4.4.2.	Deuxième famille	187
6.4.4.3.	Troisième famille	188
6.4.4.4.	Quatrième famille	188
6.4.4.5.	Groupe symétrique	190
Chapitre 7. Isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur différents groupes		193
7.1.	Introduction	193
7.2.	Préliminaires	194
7.3.	Sous-groupes réguliers de l'holomorphe relatif	199
7.3.1.	Sous-groupes réguliers normaux de l'holomorphe relatif	201
7.3.2.	Décomposition simplifiée des sous-groupes réguliers normaux	204
7.4.	Applications	207
7.4.1.	Groupe cyclique	208
7.4.2.	Groupe simple	209
7.4.3.	Produit direct de deux groupes simples	211
7.4.4.	Produit semi-direct de deux groupes simples	212
7.4.4.1.	Première famille	213
7.4.4.2.	Deuxième famille	213
7.4.4.3.	Groupe symétrique	218

Conclusion 219

Bibliographie..... 221

LISTE DES FIGURES

0.1	Réseau de processeurs carré	24
0.2	Le cube tronqué	24
0.3	Le carré et deux de ses symétries	25
0.4	Réseau de processeurs en série	27
0.5	Réseau de processeurs complet	27
0.6	Réseau de processeurs qui est un graphe de Cayley	28
0.7	Le graphe de Cayley $MBS(4)$ et $T_{\{(12),(23),(34),(14)\}}$	30
0.8	Deux graphes isomorphes	35
1.1	Les cubes Γ_1 et Γ_2	46
2.1	Le graphe de Cayley $MBS(4) = \Gamma(\{(12), (23), (34), (14)\})$	76
3.1	Le graphe de transpositions T_S et le diagramme des commutateurs C_S	93
3.2	Deux sous-graphes de $\bar{\Gamma}$	105
3.3	Le graphe d'action A_{S_1} et le diagramme de commutateurs C_{S_1}	109
3.4	Le graphe d'action A_{S_2} et le diagramme de commutateurs $C_{S_2/-}$	110
3.5	Le graphe d'action A_{S_3} et le diagramme de commutateurs $C_{S_3/-}$	111
3.6	Le graphe d'action A_{T_n} et le diagramme de commutateurs $C_{T_n/-}$	112
3.7	Le graphe d'action A_S et le diagramme de commutateurs C_S	112
3.8	Diagrammes des commutateurs non rigides	117
3.9	Le graphe d'action A_S et le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col}	121

- 3.10 Le graphe $\Gamma(\{(12), (234)^{\pm 1}\})$ (cube tronqué) 125
- 3.11 Le graphe $\Gamma(\{(123)^{\pm 1}, (234)^{\pm 1}\})$ (line-graphe du cube)..... 126

INTRODUCTION

La majorité des ordinateurs les plus puissants du monde sont des ordinateurs à architecture parallèle. Leur puissance provient du fait qu'ils sont munis de plusieurs processeurs qui peuvent partitionner une tâche et traiter parallèlement ses différentes parties. Le niveau de performance d'un ordinateur à architecture parallèle dépend en grande partie du réseau d'interconnexion entre ses processeurs, qui détermine l'efficacité avec laquelle les processeurs peuvent échanger de l'information. C'est pourquoi de nombreux mathématiciens ont cherché au cours des dernières années de nouveaux schèmes d'interconnexion de haute performance. Le modèle de réseau d'interconnexion le plus prometteur est celui des graphes de Cayley. Ces graphes représentent un réservoir énorme de réseaux susceptibles de constituer d'excellentes architectures. Cette thèse est consacrée à ces graphes. Les résultats que nous présentons sont du domaine des mathématiques fondamentales, mais plusieurs d'entre eux ont été développés en vue de faciliter la recherche de graphes de Cayley donnant des réseaux de processeurs de haute performance.

Rappelons d'abord ce que sont les graphes. Ces objets sont communément utilisés en mathématiques appliquées pour modéliser les réseaux, comme les réseaux de processeurs (il pourrait s'agir aussi de réseaux routiers, de réseaux téléphoniques, etc.). Un réseau de processeurs constitué de quatre processeurs p_1 , p_2 , p_3 et p_4 , dans lequel p_1 peut échanger des messages directement avec p_2 , de même que p_2 avec p_3 , p_3 avec p_4 et p_4 avec p_1 , peut être représenté par le graphe illustré à la figure 0.1.

Les sommets de ce graphe (les gros points) représentent les processeurs du réseau et les arêtes (les segments de droite joignant les gros points) représentent les canaux de communication entre les processeurs. Deux sommets liés par une arête correspondent à deux processeurs pouvant échanger des messages directement.

Formellement, un graphe Γ est la donnée d'un ensemble de sommets $V(\Gamma)$ et d'un ensemble $E(\Gamma) \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V(\Gamma) \text{ et } x \neq y\}$ de paires d'éléments de $V(\Gamma)$, appelé l'ensemble des arêtes de Γ . Si $\{x, y\}$ est une paire de $E(\Gamma)$, on écrit $[x, y] \in E(\Gamma)$, et on dit que x est adjacent à y . Les sommets du graphe à la figure 0.1 sont p_1, p_2, p_3 et p_4 , et ses arêtes sont $[p_1, p_2], [p_2, p_3], [p_3, p_4], [p_4, p_1]$.



FIG. 0.1. Réseau de processeurs carré

Les graphes de Cayley sont une classe particulière de graphes. Voici comment ils sont définis. Si G est un groupe et S un ensemble de générateurs de G , le graphe de Cayley associé à G et S , noté $\Gamma(G, S)$, est le graphe ayant G comme ensemble de sommets et comme arêtes l'ensemble des $[x, xa]$, $x \in G$ et $a \in S$. Par exemple, le cube tronqué représenté à la figure 0.2 est un graphe de Cayley basé sur le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 et engendré par l'ensemble de générateurs $\{(12), (234)^{\pm 1}\}$, et le carré, représenté à la figure 0.3, est un graphe de Cayley basé sur Z_4 et engendré par $S = \{1, 3\}$.

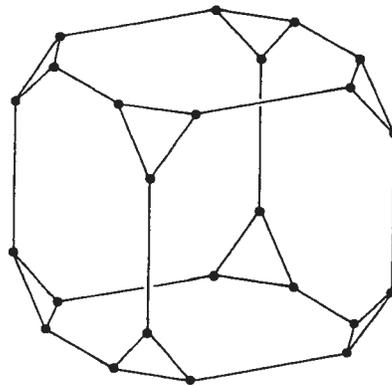


FIG. 0.2. Le cube tronqué

La spécificité des graphes de Cayley vient de leurs automorphismes appelés aussi symétries. Un automorphisme d'un graphe Γ est une permutation σ des sommets de Γ qui préserve l'adjacence, c'est-à-dire qui satisfait à

$$[x, y] \in E(\Gamma) \iff [\sigma(x), \sigma(y)] \in E(\Gamma).$$

L'ensemble des automorphismes de Γ forment un groupe sous l'opération de composition de fonctions, dénoté $\text{Aut}\Gamma$. Par exemple, nous avons représenté à la figure 0.3 le graphe carré ainsi que deux de ses automorphismes : la rotation de 90 degrés dans le sens anti-horaire et la réflexion par rapport à la ligne pointillée. Ces deux automorphismes engendrent à eux deux $\text{Aut}\Gamma$.

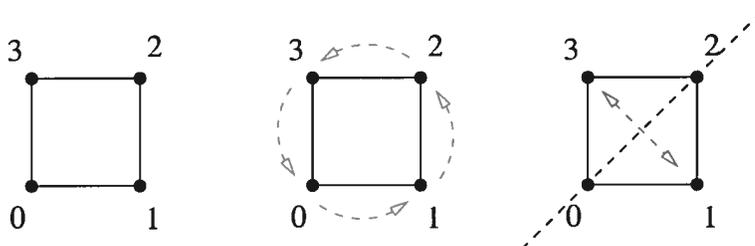


FIG. 0.3. Le carré et deux de ses symétries

Le groupe d'automorphismes d'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ contient deux sous-groupes importants. Le premier est $L(G) = \{\lambda_u : u \in G\}$, l'ensemble des translations à gauche de G , où $\lambda_u : G \rightarrow G$ dénote l'application définie par $\lambda_u(x) = ux$, $x \in G$. Le second est $\text{Aut}_S G$, l'ensemble des automorphismes de G qui stabilisent S . $\text{Aut}_S G$ est un sous-groupe de $\text{Aut}_1 \Gamma$, l'ensemble des automorphismes de Γ qui fixent 1 , l'élément neutre du groupe G . Nous appellerons le produit de ces deux groupes l'*holomorphe de G relatif à S* et le noterons $\text{Hol}_S(G) = L(G)\text{Aut}_S G$. De plus, nous dirons du graphe de Cayley Γ qu'il est *holomorphe* si $\text{Aut}\Gamma = \text{Hol}_S(G)$. Par exemple, le carré, représenté à la figure 0.3, vue comme graphe de de Cayley basé sur Z_4 et engendré par $S = \{1, 3\}$, est holomorphe. En effet, les translations $\lambda_k : i \mapsto k + i$ sont les rotations du carré et $\text{Aut}_S G$ est le groupe constitué de la réflexion par rapport à l'axe pointillé et de la permutation identité. On a donc bien $\text{Aut}\Gamma = L(Z_4)\text{Aut}_S Z_4 = \text{Hol}_S(Z_4)$.

Le groupe d'automorphismes d'un graphe décrit certaines propriétés de la forme du graphe. Par exemple, dans le graphe carré représenté à la figure 0.3, les sommets sont tous identiques, en ce sens qu'on ne peut les distinguer que par leur nom. Cela se traduit, dans le groupe d'automorphismes du graphe, par la présence, pour chaque paire de sommets $\{i, j\}$, d'une symétrie qui envoie i sur j . On dit des graphes ayant cette propriété que leur groupe d'automorphismes agit transitivement sur l'ensemble de leurs sommets. Les graphes de Cayley ont tous cette propriété. Le graphe à la figure 0.2 en est un autre exemple. Les graphes de Cayley sont caractérisés par une propriété un peu plus forte que cette transitivité :

Théorème 0.1. (Sabidussi, [26]) *Un graphe Γ est un graphe de Cayley si et seulement son groupe d'automorphismes $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe R qui satisfait à*

$$\forall x, y \in V(\Gamma) \text{ il existe un unique } \sigma \in R \text{ tel que } \sigma(x) = y. \quad (0.1)$$

On dit d'un tel groupe R qu'il agit de façon régulière sur les sommets de Γ ou simplement qu'il est régulier. Remarquons que si $\Gamma = \Gamma(G, S)$, l'ensemble des translations $L(G)$ est un sous-groupe régulier de $\text{Aut}\Gamma$.

Les graphes de Cayley sont donc caractérisés par leur groupe d'automorphismes. Ce sont ces mêmes automorphismes qui font de ces graphes de bons schèmes d'interconnexion pour les réseaux de processeurs. Voyons pourquoi. Comme la plupart des problèmes de design, la conception de réseaux de processeurs est un problème d'optimisation dans lequel il faut maximiser le rapport performance-coût. Voici quelques-unes des caractéristiques importantes qu'un graphe doit avoir pour donner un réseau de processeurs performant et économique :

- Un petit diamètre. Le diamètre d'un graphe est la distance maximale séparant deux sommets. Le diamètre donne une mesure du temps maximal qu'un message prend pour se rendre d'un processeur à un autre ;
- Une haute connectivité. La connectivité d'un graphe est le nombre minimal de sommets qui doivent être enlevés pour déconnecter le graphe. La connectivité est

une mesure du niveau de résistance d'un réseau aux bris des processeurs et de leurs liens ;

- Un petit degré. Le degré est le nombre d'arêtes incidentes à un sommet. Le degré est une mesure du nombre de messages qu'un processeur peut recevoir ou transmettre simultanément dans un réseau. Cela représente une contrainte sévère qui a une influence importante sur le prix des processeurs.

Remarquons que la recherche d'un petit diamètre et d'un haut niveau de connectivité s'oppose à la recherche d'un petit degré. Par exemple, si l'on cherchait un réseau de 12 processeurs, le graphe donnant le réseau le moins coûteux (les sommets sont de degré 1 ou 2) serait :



FIG. 0.4. Réseau de processeurs en série

Mais la communication dans ce graphe est peu efficace car son diamètre est égal à 11, le pire diamètre que puisse avoir un graphe ayant 12 sommets. De plus, ce réseau est très sensible aux bris de processeurs : il suffit qu'un seul processeur tombe en panne pour que le réseau soit scindé en deux.

À l'opposé, le graphe représenté à la figure 0.5 est un graphe complet. Il possède un diamètre égal à 1, une connectivité maximale, mais un degré égal à 11, ce qui en ferait un réseau très dispendieux.

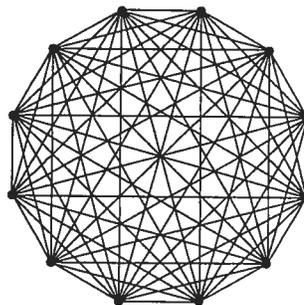


FIG. 0.5. Réseau de processeurs complet

La raison principale pour laquelle les graphes de Cayley donnent souvent d'excellentes architectures pour les réseaux de processeurs, est qu'ils constituent de très bon compromis entre performance et coût. *Leur haut niveau de symétrie assure une répartition homogène de leurs arêtes entre leurs sommets, ce qui procure à ces graphes une bonne connectivité et un bon diamètre, même quand leur degré est relativement bas.* Par exemple, le graphe de Cayley de la figure 0.6, ayant 12 sommets comme les deux graphes précédents, possède un diamètre égal à 3, une connectivité égale à 4 et un degré égal à 4.

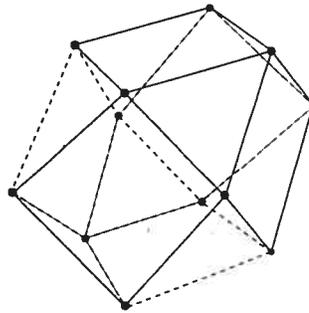


FIG. 0.6. Réseau de processeurs qui est un graphe de Cayley

D'autres propriétés, qui découlent des particularités du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley, font de ces graphes de bons réseaux de processeurs. Par exemple, Heydemann, Meyer, Opatrný et SotEAU [17] ont prouvé, en utilisant le sous-groupe d'automorphismes d'action régulière, que les graphes de Cayley possèdent un routage équilibré, c'est-à-dire un ensemble de chemins dans le graphe permettant la transmission de messages entre les processeurs, qui minimise les engorgements. Finalement, certaines de ces propriétés sont propres à des familles particulières de graphes de Cayley. Par exemple, Bermond, Kodate et Perennes [7] ont démontré qu'une classe de graphes de Cayley ayant un automorphisme particulier, appelé "rotation complète", possède un algorithme de diffusion optimal qui permet de diffuser un message d'un processeur à tous les autres processeurs du réseau en un temps minimal.

Ainsi, l'intérêt que l'on porte aux graphes de Cayley, autant en mathématique fondamentale que dans les applications, est dû principalement à leurs automorphismes.

Malgré cela, le problème de déterminer à quoi est égal ce groupe en général reste essentiellement ouvert. Cette question est la première à laquelle nous nous sommes intéressés.

Les premiers chercheurs à travailler sur ce problème furent Babai et Godsil. Ils conjecturèrent, dans l'article [4] publié en 1982, que la grande majorité des graphes Cayley sont des GRR¹³ (c'est-à-dire possèdent comme uniques automorphismes les translations à gauche ou encore satisfont à $\text{Aut}_1\Gamma = \{\text{Id}\}$) et ils démontrèrent cette conjecture pour les graphes de Cayley basés sur un groupe nilpotent non-abélien d'ordre impair¹⁴. Bien que cette conjecture soit probablement vraie, de nombreuses familles connues de graphes de Cayley ne sont pas constituées de GRR (par exemple, les graphes de tri par percolation (bubble sort), les graphes étoiles, les hypercubes, tous des graphes utilisés dans le design de réseaux de processeurs, ne sont pas des GRR). Pourquoi ? L'argument de Babai et Godsil repose, entre autres choses, sur le fait que pour la majorité des graphes de Cayley $\Gamma(G, S)$, le groupe $\text{Aut}_S G$ est trivial¹⁵. Or, les graphes de Cayley des familles mentionnées plus haut ne satisfont pas cette propriété. Cela vient du fait que leur ensemble de générateurs possède des symétries et que ces symétries correspondent à des automorphismes appartenant à $\text{Aut}_S G$. Dans le cas des graphes de Cayley engendrés par des transpositions, cette correspondance se voit facilement. Considérons, par exemple, le graphe de Cayley de tri par percolation modifié MBS(4) qui est basé sur $G = \mathfrak{S}_4$ et engendré par $S = \{(12), (23), (34), (14)\}$. L'ensemble de générateurs S peut être représenté par un graphe, appelé le graphe de transpositions, ayant $\{1, 2, 3, 4\}$ comme sommets et $\{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [1, 4]\}$ comme arêtes, et qui est noté T_S . Le graphe de transpositions de S et le graphe MBS(4) sont représentés à la figure 0.7.

¹³À l'exception des graphes de Cayley basés sur certaines classes connues de groupes pour lesquels il n'existe aucun graphe de Cayley ayant cette propriété.

¹⁴Ils démontrèrent que la probabilité qu'un tel graphe ne soit pas un GRR est plus petite que $(0.91 + o(1))\sqrt{g}$, où g est l'ordre de G , donc qu'elle tend vers 0 quand g tend vers l'infini.

¹⁵Ils prouvèrent que la probabilité que $\text{Aut}_S G \neq \text{Id}$ est inférieure à $2^{-g/4 + (\log_2 g)^2}$ et donc tend vers 0 quand g tend vers l'infini.

Si ω est une symétrie du graphe de transpositions, ω est une permutation appartenant à \mathfrak{S}_4 qui, on peut le vérifier sans difficulté, stabilise S sous l'action de conjugaison. L'application $\gamma_\omega : x \mapsto \omega x \omega^{-1}$ est donc un automorphisme de \mathfrak{S}_4 qui stabilise S . Ainsi, à chacune des symétries du graphe de transpositions correspond un automorphisme de Γ appartenant à $\text{Aut}_5 \mathfrak{S}_4$. Par exemple, si $\omega = (13)(24)$ (la rotation de 180 degrés), γ_ω est la symétrie de Γ par rapport à l'axe passant par les sommets 1234 et 2143.

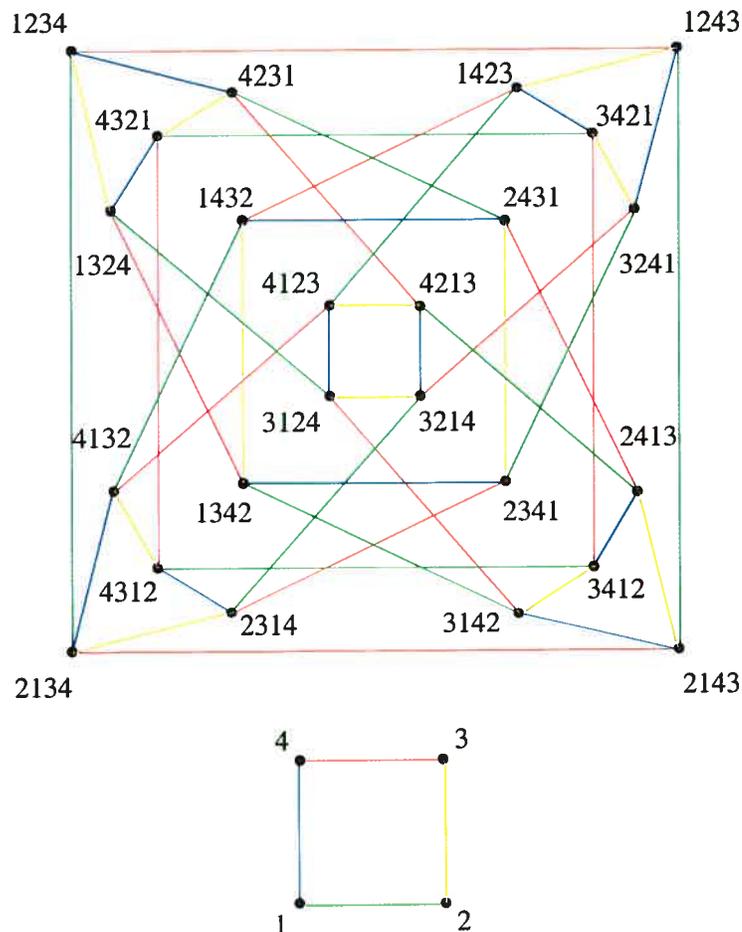


FIG. 0.7. Le graphe de Cayley $MBS(4)$ et $T_{\{(12),(23),(34),(14)\}}$.

Afin d'établir une conjecture générale englobant les graphes de Cayley ayant un groupe $\text{Aut}_5 G$ non trivial, nous avons étudié en premier lieu les graphes de Cayley

basés sur le groupe symétrique, engendrés par des transpositions¹⁶. Ces travaux nous ont permis de démontrer que ces graphes sont tous holomorphes, c'est-à-dire ont tous comme groupe d'automorphismes

$$\text{Hol}_S(G) = L(G)\text{Aut}_S G, \quad (0.2)$$

à l'exception de ceux dont le graphe de transpositions est un carré ou un graphe complet d'ordre supérieur à 2. Ce résultat suggère que *la vaste majorité des graphes de Cayley sont holomorphes*. Cette dernière proposition généralise la conjecture de Babai et Godsil puisqu'elle entraîne, sachant qu'une très forte proportion des graphes de Cayley satisfont à $\text{Aut}_S G = \text{Id}$, que la grande majorité des graphes de Cayley vérifient

$$\text{Aut}\Gamma = L(G)\text{Aut}_S G = L(G),$$

et donc sont des GRR.

À l'époque de cette découverte, l'auteur ne connaissait pas encore les travaux de Ming Yao Xu [29] qui fut le premier à définir le concept de graphes de Cayley holomorphes¹⁷ et qui conjectura que la vaste majorité des graphes de Cayley sont holomorphes. Notre découverte tend donc à démontrer que la conjecture de Ming Yao Xu est vraie. Mais elle suggère plus : *parmi la classe des graphes de Cayley qui ne sont pas des GRR (c'est-à-dire les graphes de Cayley ayant des automorphismes différents de l'identité qui fixe l'élément neutre du groupe sous-jacent, contenant par exemple les graphes de Cayley dont le groupe $\text{Aut}_S G$ est non trivial), la grande majorité des graphes sont holomorphes*.

Les trois premiers chapitres de cette thèse sont consacrés à l'étude du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley dans le but de démontrer l'existence de familles importantes de graphes de Cayley holomorphes, pour appuyer la conjecture de Ming

¹⁶Cette classe de graphes contient plusieurs familles importantes de graphes de Cayley. Par exemple, les graphes de tri par percolation et les graphes étoilés en font partie.

¹⁷Cet auteur emploie le terme normal au lieu d'holomorphe car $\text{Aut}\Gamma = L(G)\text{Aut}_S G$ si et seulement si $L(G)$ est un sous-groupe normal de $\text{Aut}\Gamma$.

Yao Xu et l'idée selon laquelle parmi la classe des graphes de Cayley qui ne sont pas des GRR, la grande majorité des graphes sont holomorphes.

Notons qu'il est la plupart du temps difficile de démontrer qu'un graphe de Cayley est holomorphe. En fait, les seuls groupes pour lesquels on connaît quels graphes de Cayley sont holomorphes et lesquels ne le sont pas sont les groupes cycliques d'ordre premier [1], les groupes d'ordre deux fois un premier [11] et les groupes d'ordre un premier au carré [9]. Fang, Li, Wang et Xu [12] ont démontré que la vaste majorité des graphes de Cayley cubiques basés sur un groupe simple non abélien sont holomorphes. Baik, Feng, Sim, Xu [5, 6] ont déterminé tous les graphes de Cayley basés sur un groupe abélien et de degré plus petit que 6 qui ne sont pas holomorphes. Feng, Kwak et Wang [13] ont démontré que tous les graphes de Cayley de degré 4 basés sur un p -groupe de classe de nilpotence 2 pour un premier p impair sont holomorphes.

L'approche que nous avons adoptée pour étudier les automorphismes des graphes de Cayley est présentée au chapitre 1. Elle consiste à voir les arêtes d'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ colorées par le générateur qu'elles représentent. L'intérêt de ce coloriage réside dans le fait qu'il donne une caractérisation simple des automorphismes de Γ appartenant à $L(G)$, $\text{Aut}_S G$ et $\text{Hol}_S(G)$.

Les éléments de $L(G)$ sont les automorphismes de Γ qui fixent les couleurs, c'est-à-dire les automorphismes qui stabilisent, pour chaque couleur, l'ensemble des arêtes de cette couleur. Les éléments de $\text{Aut}_S G$ sont les automorphismes de Γ qui fixent l'élément neutre du groupe G et qui déplacent en bloc les couleurs : si une arête colorée par a est envoyée sur une arête colorée par b , alors, toutes les arêtes de couleur a sont envoyées sur des arêtes de couleur b . La symétrie du graphe de Cayley MBS(4) (représenté à la figure 0.7) par rapport à l'axe traversant les sommets 1234 et 2143 est un exemple d'*automorphisme de groupe*. Les éléments de $\text{Hol}_S(G)$ sont les automorphismes de Γ qui déplacent les couleurs en bloc. Par exemple, on peut montrer à l'aide de cette caractérisation que le graphe de Cayley MBS(4) n'est pas holomorphe : il suffit de remarquer que la rotation de 90 degrés dans le sens horaire de sa représentation à la figure 0.7 est un automorphisme qui ne déplace pas les couleurs en bloc (l'arête

[1234, 4231] est envoyée sur [1243, 3241], tandis que l'arête [1432, 2431] est envoyée sur [2431, 2341]).

Afin de travailler avec cette caractérisation des automorphismes appartenant à l'holomorphe relatif $\text{Hol}_S(G)$ et montrer l'holomorphie de classes de graphes de Cayley, nous introduisons deux nouveaux outils : les *localisations* et les *déviateurs*. Les localisations permettent de décrire l'action des automorphismes de Γ sur les couleurs. Si σ est un automorphisme de Γ , l'ensemble des localisations de σ est une famille de permutations des couleurs indicées par les sommets de Γ . Si x est un de ces sommets, la localisation de σ en x , notée σ_x , est la permutation des couleurs des arêtes incidentes à x induite par σ . Les localisations sont au centre de notre analyse du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley. Nous les utiliserons pour exploiter l'information que nous recueillerons sur l'action locale¹⁸ de $\text{Aut}\Gamma$ afin d'obtenir des résultats sur l'action globale de $\text{Aut}\Gamma$ sur $V(\Gamma)$. Les déviateurs quant à eux permettent de mesurer la déviation d'un graphe de Cayley de l'holomorphie.

Le chapitre 2 contient nos résultats sur le groupe d'automorphismes des graphes de Cayley engendrés par des transpositions. Plusieurs familles connues de graphes sont engendrées par des transpositions : les graphes de tri par percolation, les graphes étoiles et les hypercubes en sont des exemples. L'outil principal propre à ce chapitre est le *graphe de transpositions*. Si S est un ensemble de transpositions qui engendre \mathfrak{S}_n , le graphe de transpositions de S , noté T_S , est le graphe ayant comme sommets $\{1, 2, \dots, n\}$ et comme arêtes $\{[i, j] : (ij) \in S\}$. Nous montrerons que les localisations (qui sont, rappelons-le, des permutations de S) sont induites par des automorphismes de T_S , c'est-à-dire pour toute localisation $\sigma_{(x)}$ il existe un automorphisme α de T_S tel que

$$\sigma_{(x)}((ij)) = (\alpha(i) \alpha(j)), (ij) \in S.$$

Ce résultat sera d'une grande utilité pour démontrer que les graphes de Cayley basés sur un groupe symétrique $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{S}_n, S)$ et engendrés par des transpositions sont tous

¹⁸C'est-à-dire l'action des automorphismes de Γ fixant $\mathbf{1}$ sur S , les voisins de $\mathbf{1}$.

holomorphes, c'est-à-dire satisfont à

$$\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)\text{Aut}_S\mathfrak{S}_n,$$

à l'exception de ceux dont le graphe de transpositions est un carré ou un graphe complet d'ordre supérieur à 2. Nous montrerons aussi que $\text{Aut}_S\mathfrak{S}_n \simeq \text{Aut}T_S$ si $n \geq 3$. Ces deux résultats généralisent le théorème de Godsil et Royle [15] qui affirme que $\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)$ si S est un ensemble minimal de générateurs de \mathfrak{S}_n et le groupe d'automorphismes de T_S est trivial. Ils entraînent aussi que Γ est un GRR si et seulement si $\text{Aut}T_S$ est trivial, et que Γ est arête-transitif si et seulement si T_S l'est. Nous verrons finalement que si $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ sont deux graphes de Cayley engendrés par des transpositions, alors $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ si et seulement si $T_{S_1} \simeq T_{S_2}$.

Dans le chapitre 3 nous démontrons l'existence de nouvelles classes de graphes de Cayley holomorphes. Nous ferons appel au *diagramme des commutateurs* pour parvenir à ces résultats. Le diagramme des commutateurs joue le rôle du graphe de transpositions pour les ensembles de générateurs qui ne sont pas constitués uniquement de transpositions. Si G est un groupe et S un ensemble de générateurs de G , le diagramme de commutateurs de S , noté C_S , est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et comme arêtes $\{[a, b] : ab = ba \text{ et } a \neq b\}$. Nous montrerons que les localisations d'une classe importante de graphes de Cayley, les graphes à commutateurs stables¹⁹, sont des automorphismes du diagramme des commutateurs. Les localisations et le diagramme des commutateurs nous permettront de démontrer, entre autres, que

- les graphes de Cayley basés sur un groupe abélien sont holomorphes si et seulement s'ils sont à commutateurs stables ; nous montrerons en particulier que tout graphe de Cayley basé sur un groupe abélien d'ordre impair et engendré par un sous-ensemble de Cayley minimal²⁰ est holomorphe ;

¹⁹Un graphe de Cayley Γ est à commutateurs stables si, pour tout automorphisme σ de Γ fixant 1 , l'image par σ de tout carré commutateur $1, a, ab, aba^{-1}, aba^{-1}b^{-1} = 1, a \neq b$, est un carré commutateur.

²⁰ S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G , si S engendre G , $1_G \notin G$ et pour tout $a \in S$, $a \notin \langle S \setminus \{a, a^{-1}\} \rangle$.

- les graphes de Cayley engendrés par un ensemble d'involutions sont holomorphes s'ils sont à commutateurs stables et si leur diagramme des commutateurs est rigide ;
- les graphes de Cayley basés sur le groupe symétrique ou alterné, engendrés par des transpositions et des cycles de longueur 3, sont holomorphes s'ils sont à commutateur stable et si leur diagramme des commutateurs est quasi-rigide.

Le second problème que nous étudierons est celui de l'*isomorphie entre les graphes de Cayley*, qui consiste à déterminer quand

$$\Gamma(G, S) \simeq \Gamma(H, T).$$

Les chapitres 4, 5, 6 et 7 lui sont consacrés. Rappelons que deux graphes Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes s'il existe une bijection σ des sommets de Γ_1 dans les sommets de Γ_2 telle que

$$[x, y] \in E(\Gamma_1) \iff [\sigma(x), \sigma(y)] \in E(\Gamma_2).$$

Deux graphes sont isomorphes s'ils définissent le même réseau d'adjacence. Par exemple, les deux graphes représentés à la figure 0.8 sont isomorphes. Deux graphes isomorphes

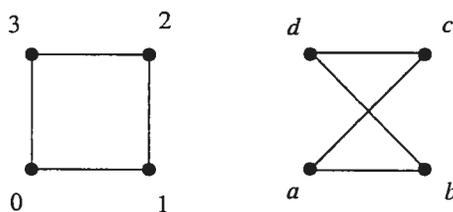


FIG. 0.8. Deux graphes isomorphes

sont à toutes fins pratiques identiques ; En particulier ils donnent le même réseau de processeurs.

Pour comprendre l'intérêt de ce problème, revenons aux réseaux de processeurs. Supposons que l'on cherche à déterminer le meilleur réseau de 100 processeurs parmi les graphes de Cayley. Il faudrait, pour y parvenir, considérer l'ensemble de tous les

graphes de Cayley $\Gamma(G, S)$ pour G un groupe d'ordre 100 et S un ensemble de générateurs de G , et calculer, pour chacun de ces graphes, son diamètre, sa connectivité, son degré et toutes les autres caractéristiques dont dépend le niveau de performance d'un réseau. Or, cette classe de graphes est immense et le calcul des caractéristiques énumérées ci-haut est long. Déterminer les graphes de Cayley d'ordre 100 isomorphes réduit le temps de calcul. Cela permet d'obtenir une partition de cet ensemble de graphes en classes d'isomorphie. Puisque les graphes d'une classe donnent le même réseau de processeurs, il suffit de déterminer les caractéristiques d'un graphe par classe d'isomorphie. Cela réduit le temps de calcul et donc améliore énormément l'efficacité des recherches de réseaux de haute performance.

Ce problème d'isomorphie est un problème très complexe ²¹ dont la solution dépend du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley considérés. Puisque probablement la grande majorité des graphes de Cayley sont holomorphes et que l'on a une connaissance précise du groupe d'automorphismes de ces graphes, nous nous sommes restreints à cette classe de graphes. Notre objectif est d'obtenir des résultats plus forts que dans le cas général pour une grande partie des graphes de Cayley.

Nous aborderons ce problème en deux étapes. Nous étudierons dans un premier temps, au chapitre 6, l'isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur un groupe fixé : étant donné un graphe de Cayley sur G holomorphe $\Gamma(G, S)$, pour quels autres ensembles T de générateurs de G a-t-on

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S)?$$

Nous donnerons une caractérisation des sous-ensembles T ayant cette propriété. Cela nous permettra en particulier de caractériser les graphes de Cayley holomorphes $\Gamma(G, S)$

²¹Par exemple, Dixon a étudié dans [10] la représentation des hypercubes comme graphe de Cayley, c'est-à-dire déterminer les paires non équivalentes (G, S) dont le graphe de Cayley est isomorphe à un hypercube. Il a démontré que pour les hypercubes de dimension $d = 3, 4, 5, 6$ il y a respectivement 4, 14, 45, 238 graphes possibles. Mais le problème pour les dimensions supérieures reste ouvert.

qui se représentent de façon unique sur G , c'est-à-dire qui satisfont à

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S) \implies \exists_{\sigma \in \text{Aut}G} T = \sigma(S).$$

Rappelons qu'un graphe de Cayley vérifiant cette propriété est appelé graphe de Cayley CI. À l'aide de cette caractérisation, nous déterminerons quels sont les graphes de Cayley holomorphes CI basés sur :

- un groupe cyclique ;
- un groupe simple : nous verrons qu'ils sont tous CI ;
- un produit direct de deux groupes simples non abéliens : nous prouverons qu'ils sont CI si et seulement si $N_G(S)$, le normalisateur de S dans G , ne contient pas de sous-groupe isomorphe à un des deux groupes simples du produit ;
- un produit semi-direct non trivial²² de deux groupes simples, pour les graphes de Cayley holomorphes complets²³ ; en particulier sur un groupe symétrique \mathfrak{S}_n : nous démontrerons qu'ils sont CI si et seulement si $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ ne contient pas de permutation paire d'ordre 2.

Déterminer les graphes de Cayley CI est probablement le problème qui a été, ces dernières années, l'objet du plus grand nombre de publications dans le domaine des graphes de Cayley. Cai Heng Li fait une revue exhaustive des recherches sur cette question dans [21] et suggère quelques nouveaux problèmes. La caractérisation que l'on donne des graphes de Cayley holomorphes CI solutionne l'un de ces problèmes.

Nous étudierons ensuite, au chapitre 7, l'isomorphie entre les graphes de Cayley holomorphes *basés sur des groupes différents* : étant donné un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma(G, S)$, sur quels autres groupes peut-on obtenir un graphe de Cayley holomorphe isomorphe à $\Gamma(G, S)$? Nous donnerons, au chapitre 7, une décomposition des groupes ayant cette propriété. Nous utiliserons ce résultat pour trouver sur quels autres groupes peuvent être représentés, comme graphe de Cayley holomorphe, les graphes de Cayley holomorphes basés sur :

²² $K \rtimes_{\theta} Q$ est non trivial si $\text{Ker}(\theta) \neq Q$.

²³Un graphe de Cayley holomorphe est complet si $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$.

- un groupe cyclique ;
- un groupe simple ;
- un produit direct de deux groupes simples non abéliens ;
- un produit semi-direct non trivial de deux groupes simples, pour les graphes de Cayley holomorphes complets (en particulier sur un groupe symétrique).

Nous démontrerons aussi un résultat qui donne une décomposition de tous les groupes sur lesquels un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur un groupe abélien peut être représenté (pas seulement comme graphe de Cayley holomorphe).

Notons que le problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur des groupes différents est très complexe. Les résultats existants, trouvés sans restriction aux graphes de Cayley holomorphes, ont été obtenus pour les graphes de Cayley basés sur un groupe d'ordre un premier au carré [18] ou d'ordre une puissance impaire d'un premier [23], et pour des familles particulières de graphes : les graphes complets à d parties, les produits cartésiens de cycles de même longueur, les hypercubes et les graphes qui sont un produit lexicographique de la forme $C_n[\overline{K_n}]$. De plus, ces résultats sont parfois partiels. Pour une revue des recherches sur cette question nous référons le lecteur à l'article [21] de Cai Heng Li.

Un outil est au coeur de la résolution des deux parties du problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes : les homomorphismes croisés. Ces applications, qui généralisent les homomorphismes usuels entre les groupes, sont présentées au chapitre 4. Elles apparaissent naturellement dans la résolution du problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes pour deux raisons.

Premièrement, nous verrons que si Γ_1 et Γ_2 sont deux graphes de Cayley isomorphes et Γ_2 est holomorphe, tout isomorphisme de Γ_1 dans Γ_2 qui envoie $\mathbf{1}_{G_1}$ sur $\mathbf{1}_{G_2}$ est un isomorphisme croisé. Ce résultat est démontré au chapitre 6 (proposition 6.4).

Deuxièmement, les homomorphismes croisés seront utiles pour résoudre le deuxième problème d'isomorphie, c'est-à-dire trouver les groupes H sur lesquels on peut obtenir

un graphe isomorphe à $\Gamma = \Gamma(G, S)$. Pour expliquer pourquoi, rappelons que Sabidussi [26] a démontré qu'un graphe Γ peut être représenté sur un groupe H si et seulement si $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe isomorphe à H agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Puisque le groupe d'automorphismes d'un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est égal à $\text{Aut}\Gamma = L(G) \rtimes \text{Aut}_S G$, nous aurons besoin de résultats pour trouver les sous-groupes de produits semi-directs. Nous utiliserons les homomorphismes croisés au chapitre 5 pour construire ces résultats.

Chapitre 1

LES GRAPHES DE CAYLEY ET LEURS AUTOMORPHISMES

1.1. INTRODUCTION

Les trois premiers chapitres de cette thèse sont consacrés à l'étude du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley. Notre but premier y est de démontrer l'existence de familles importantes de graphes de Cayley holomorphes, c'est-à-dire de graphes de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ ayant comme seuls automorphismes les translations à gauche du groupe G , et les automorphismes du groupe G qui stabilise S .

Puisque les graphes de Cayley ont en général une structure globale très complexe, nous tenterons d'exploiter au maximum leur structure locale, c'est-à-dire leur structure proche de l'identité du groupe sous-jacent. C'est pourquoi, pour analyser le groupe d'automorphismes d'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ dans l'espoir de démontrer qu'il est holomorphe, nous procéderons en deux étapes. Nous commencerons par étudier l'action locale des automorphismes de Γ , c'est-à-dire l'action des automorphismes de Γ fixant 1_G sur S , les voisins de 1_G , cela afin de prouver qu'ils agissent sur ces voisins comme le font les automorphismes de G qui stabilisent S . Nous utiliserons ensuite l'information que nous aurons recueillie sur l'action locale, pour obtenir des résultats sur la structure globale de $\text{Aut}\Gamma$. Nous présentons dans ce chapitre les concepts et outils que nous emploierons, les plus importants étant la notion de graphe de Cayley *localement holomorphe*, de *localisation* et de *déviateurs*.

1.2. PRÉALABLES

Nous introduisons dans cette section la terminologie et la notation qui seront utilisées dans cette thèse.

Définition 1.1. (*Grphe non orienté*) Un *grphe* Γ est la donnée d'un ensemble de sommets $V(\Gamma)$ et d'un ensemble $E(\Gamma)$ de paires d'éléments de $V(\Gamma)$ appelé l'ensemble des arêtes de Γ . Si $\{x, y\} \in E(\Gamma)$, on dit que x est adjacent à y et on écrit $[x, y] \in E(\Gamma)$.

Si $x \in V(\Gamma)$, l'ensemble des voisins de x est $N(x) = \{y \in V(\Gamma) : [x, y] \in E(\Gamma)\}$. Nous écrivons $N(x; \Gamma)$ si l'on veut préciser le grphe sur lequel on travaille. Un chemin entre deux sommets $x, y \in V(\Gamma)$ est une suite de sommets de Γ de la forme $\langle x = z_1, z_2, \dots, z_n = y \rangle$ telle que $[z_i, z_{i+1}]$ est une arête pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$. La distance entre deux sommets x et y , noté $\text{dist}(x, y)$, est la longueur du plus court chemin entre x et y . Une (x, y) -géodésique est un chemin de longueur $\text{dist}(x, y)$ entre x et y . Enfin, $N_k(x)$ est l'ensemble des sommets de Γ dont la distance à x égale à k et $B_k(x)$, la boule de rayon k centrée en x , est l'ensemble des sommets de Γ à distance de x plus petite ou égale à k .

Définition 1.2. (*Grphe orienté*) Un *grphe orienté* Γ est la donnée d'un ensemble de sommets $V(\Gamma)$ et d'une relation anti-réflexive $E(\Gamma) \subseteq V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ appelée l'ensemble des arcs de Γ .

Si $x \in V(\Gamma)$, l'ensemble des voisins positifs de x est $N^+(x) = \{y \in V(\Gamma) : (x, y) \in E(\Gamma)\}$, l'ensemble des voisins négatifs de x est $N^-(x) = \{y \in V(\Gamma) : (y, x) \in E(\Gamma)\}$ et l'ensemble des voisins de x est $N(x) = N^+(x) \cup N^-(x)$. L'ombre de Γ est le grphe non orienté $\bar{\Gamma}$ obtenu en oubliant l'orientation des arcs. Un chemin entre deux sommets $x, y \in V(\Gamma)$ est un chemin dans l'ombre de Γ . La distance entre deux sommets $x, y \in V(\Gamma)$ est donc la distance entre x et y dans l'ombre de Γ . La notion de géodésique et les ensembles $N_k(x)$ et $B_k(x)$ sont définis en utilisant cette distance.

Définition 1.3. (*Isomorphisme et automorphisme de grphe*) Si Γ et Γ' sont deux graphes, un *isomorphisme* $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est une bijection de $V(\Gamma)$ dans $V(\Gamma')$ qui préserve l'adjacence, c'est-à-dire qui satisfait à $[x, y] \in E(\Gamma) \iff [\sigma(x), \sigma(y)] \in E(\Gamma')$. Si Γ et Γ' sont deux graphes orientés, un *isomorphisme* $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est une bijection de

$V(\Gamma)$ dans $V(\Gamma')$ qui satisfait à $(x, y) \in E(\Gamma) \iff (\sigma(x), \sigma(y)) \in E(\Gamma')$. Un *automorphisme* de Γ est un isomorphisme de Γ dans Γ .

L'ensemble des automorphismes de Γ forme un groupe sous la composition de fonctions, dénoté $\text{Aut}\Gamma$.

Remarquons que si Γ est un graphe orienté tel que $E(\Gamma)$ est une relation symétrique sur $V(\Gamma)$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in E(\Gamma) \implies (y, x) \in E(\Gamma)$), alors Γ et son ombre $\bar{\Gamma}$ possèdent les mêmes propriétés, en particulier ils ont le même groupe d'automorphismes. C'est pourquoi nous identifierons souvent Γ à $\bar{\Gamma}$ quand $E(\Gamma)$ est symétrique.

Pour finir, voici la définition du stabilisateur :

Définition 1.4. (*Stabilisateur*) Soit H un groupe de permutations agissant sur un ensemble E . Si $S \subset E$, le *stabilisateur de S* , dénoté H_S , est le sous-groupe des permutations de H qui stabilisent S , c'est-à-dire

$$H_S = \{f \in H : f(S) \subseteq S\}.$$

Si $S = \{x\}$, nous écrirons simplement H_x .

Si H est le groupe d'automorphismes d'un groupe G ou d'un graphe Γ , nous écrirons $\text{Aut}_S G$ et $\text{Aut}_S \Gamma$ pour dénoter les stabilisateurs de S dans $\text{Aut}G$ et $\text{Aut}\Gamma$.

1.3. LES GRAPHS DE CAYLEY

Si G est un groupe, nous utiliserons 1 ou 1_G pour dénoter l'élément neutre de G .

Définition 1.5. (*Sous-ensemble de Cayley*) Soit G un groupe ayant 1 comme identité. Un ensemble S de générateurs de G ne contenant pas 1 est appelé un *sous-ensemble de Cayley de G* . Un sous-ensemble de Cayley S est dit *symétrique* si $a \in S \implies a^{-1} \in S$. Un sous-ensemble de Cayley S est dit *anti-symétrique* si $(a \in S \text{ et } o(a) > 2) \implies a^{-1} \notin S$.

Définition 1.6. (*Grapshe de Cayley non orienté*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley symétrique de G . Le *grapshe de Cayley* $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est le grapshe ayant G comme ensemble de sommets et $\{[x, y] : x^{-1}y \in S\}$ comme ensemble d'arêtes.

Définition 1.7. (*Grapshe de Cayley orienté*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G . Le *grapshe de Cayley orienté* $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est le grapshe orienté ayant G comme ensemble de sommets et $\{(x, y) : x^{-1}y \in S\}$ comme ensemble d'arcs.

Nous écrivons parfois $\Gamma(S)$ au lieu de $\Gamma(G, S)$.

Remarquons que si $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est un grapshe de Cayley orienté, l'ensemble des voisins de l'identité de G est égal à \bar{S} , la fermeture de S , définie comme suit :

Définition 1.8. (*Fermeture de S*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de G . La *fermeture* (plus précisément la *fermeture symétrique*) de S est $\bar{S} = S \cup S^{-1}$.

Cette thèse traite des graphes de Cayley orientés, à l'exception du chapitre 2 qui porte sur des graphes de Cayley non orientés. Mais évidemment, la majorité de nos résultats s'applique aussi aux graphes de Cayley non orientés puisque si S est symétrique, le grapshe de Cayley orienté engendré par S est équivalent à son ombre, le grapshe de Cayley non orienté engendré par S . Pour alléger nos figures, nous représenterons la plupart du temps les graphes de Cayley orientés engendrés par un sous-ensemble de Cayley symétrique par leur ombre.

1.3.1. Automorphismes des graphes de Cayley

Les faits suivants sont bien connus et remontent à Cayley. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ et $u \in G$. L'application $\lambda_u : G \rightarrow G$ définie par la règle

$$\lambda_u(x) = ux, \quad x \in G,$$

est un automorphisme de Γ , appelé *translation à gauche* de G ou simplement translation. L'ensemble des translations à gauche de G , dénoté $L(G)$, est un sous-groupe de $\text{Aut}\Gamma$ qui est isomorphe à G et qui agit régulièrement sur $V(\Gamma)$.

Le théorème suivant de Sabidussi [26] caractérise les graphes de Cayley orientés :

Théorème 1.9. *Un grapshe orienté Γ est un grapshe de Cayley orienté si et seulement si $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.*

La spécificité des graphes de Cayley provient donc de leur groupe d'automorphismes. C'est pourquoi il est intéressant d'étudier ce groupe plus en profondeur.

Ce que nous savons à présent du groupe d'automorphismes de $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est qu'il contient le groupe des translations $L(G)$. Si σ est un automorphisme de Γ , ces translations nous permettent d'obtenir la factorisation

$$\sigma = \lambda_{\sigma(1)} \circ (\lambda_{\sigma(1)^{-1}} \circ \sigma),$$

où $\lambda_{\sigma(1)^{-1}} \circ \sigma$ est un automorphisme de Γ stabilisant 1 . Si $\text{Aut}_1\Gamma$ dénote l'ensemble des automorphismes de Γ qui fixe 1 , cela donne la décomposition suivante :

Proposition 1.10. (*Décomposition de $\text{Aut}\Gamma$*) Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Alors

$$\text{Aut}\Gamma = L(G)\text{Aut}_1\Gamma.$$

De plus, si $\sigma \in \text{Aut}\Gamma$, il existe un unique $x \in G$ et $\tau \in \text{Aut}_1\Gamma$ donnant

$$\sigma = \lambda_x \circ \tau.$$

Par conséquent, dans le cas des graphes de Cayley, l'étude de $\text{Aut}\Gamma$ peut se réduire à l'étude de $\text{Aut}_1\Gamma$.

En plus des translations à gauche, une autre classe d'automorphismes de Γ découle directement de la structure du groupe G .

Proposition 1.11. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$. Le stabilisateur de S dans $\text{Aut}G$, dénoté $\text{Aut}_S G$, est un sous-groupe de $\text{Aut}_1\Gamma$. Ce sous-groupe est le normalisateur de $L(G)$ dans $\text{Aut}_1\Gamma$.

Remarque 1.12. Puisque les automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma$ doivent stabiliser le voisinage de 1_G dans Γ , c'est-à-dire S , les éléments de $\text{Aut}_S G$ sont les seuls automorphismes du groupe G qui sont des automorphismes de Γ .

1.3.2. Graphes de Cayley holomorphes

Le produit du groupe des translations à gauche et de celui des automorphismes de groupes stabilisant S sera appelé *l'holomorphe de G relatif à S* puisqu'il est, comme l'holomorphe usuel, un produit de $L(G)$ et d'un groupe d'automorphismes de G , en l'occurrence $\text{Aut}G$ relativisé à S . Nous le noterons $\text{Hol}_S(G)$. Remarquons que tout comme l'holomorphe de G , l'holomorphe de G relatif à S est isomorphe à un produit

semi-direct :

$$\text{Hol}_S(G) \simeq L(G) \rtimes \text{Aut}_S G.$$

Il est naturel de demander quand $\text{Aut}_1 \Gamma$ est égal à $\text{Aut}_S G$. Si un graphe de Cayley vérifie cette propriété, alors

$$\text{Aut} \Gamma = L(G) \text{Aut}_S G = \text{Hol}_S(G).$$

C'est pourquoi nous dirons des graphes vérifiant cette propriété qu'ils sont holomorphes :

Définition 1.13. (*Grappe de Cayley holomorphe*) Un graphe de Cayley orienté $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est dit *holomorphe* si

$$\text{Aut}_1 \Gamma = \text{Aut}_S G.$$

Ces graphes de Cayley furent définis en premier lieu par Ming Yao Xu [29]. Cet auteur conjectura que la vaste majorité des graphes de Cayley sont holomorphes. L'objectif des trois premiers chapitres de cette thèse est de montrer que d'importantes familles de graphes de Cayley sont holomorphes afin de renforcer cette conjecture.

Rappelons que Ming Yao Xu emploie le terme normal au lieu d'holomorphe car un graphe de Cayley est holomorphe si et seulement si le groupe des translations $L(G)$ est normal dans $\text{Aut} \Gamma$. Cette équivalence découle de la proposition 1.11.

Malgré le langage convenable introduit dans la définition 1.13, le fait d'être holomorphe est une propriété non pas du graphe mais de la paire (G, S) : si $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ est holomorphe et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ est isomorphe à Γ_1 , alors Γ_2 n'est pas forcément holomorphe. Voici un exemple :

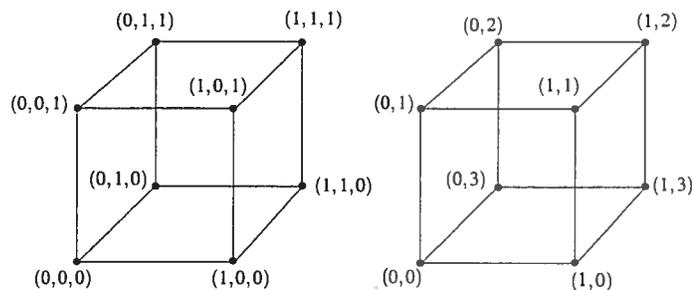


FIG. 1.1. Les cubes Γ_1 et Γ_2 .

Exemple 1.14. Le graphe $\Gamma_1 = \Gamma((\mathbb{Z}_2)^3, \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$ est holomorphe, tandis que $\Gamma_2 = \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \{(1, 0), \pm(0, 1)\})$ ne l'est pas. Or tous deux sont isomorphes au cube de dimension trois, comme on peut le voir à la figure 1.1.

Pour voir pourquoi Γ_2 n'est pas holomorphe, il suffit de constater que les automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma_2$ peuvent envoyer un générateur d'ordre 2 sur un générateur d'ordre 4 puisqu'ils peuvent interchanger les carrés

$$\langle (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0) \rangle \text{ et } \langle (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 0) \rangle.$$

Remarquons que ces carrés découlent respectivement de la relation de commutation $(1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = 0$ et de la relation cyclique $(0, 1) + (0, 1) + (0, 1) + (0, 1) = 0$. Nous montrerons au chapitre 3 que de nombreux graphes de Cayley respectant ces deux types de relations sont holomorphes.

1.3.3. Graphes de Cayley localement holomorphes

Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté quelconque. Afin de trouver des conditions forçant Γ à être holomorphe, nous avons besoin de comparer l'action des deux groupes $\text{Aut}_1\Gamma$ et $\text{Aut}_S G$ sur \bar{S} . Dans ce but nous introduisons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_S G & \xrightarrow{i} & \text{Aut}_1\Gamma \\ & \searrow s & \downarrow r \\ & & \mathfrak{S}_{\bar{S}} \end{array} \quad (1.1)$$

où :

i est l'inclusion de $\text{Aut}_S G$ dans $\text{Aut}_1\Gamma$;

r est la restriction de l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ à \bar{S} (considéré comme ensemble de voisins de 1 dans Γ) et $\mathfrak{S}_{\bar{S}}$ est le groupe symétrique sur \bar{S} ;

s est la restriction de l'action de $\text{Aut}_S G$ à \bar{S} .

Remarquons que les automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1 \Gamma$ stabilisent l'ensemble d'arcs $\{(1, a) : a \in S\}$. Le groupe $\text{Im}(r)$ est donc constitué, comme le groupe $\text{Im}(s)$, de permutations qui stabilisent S .

Les applications i , r et s sont des homomorphismes. Elles vérifient les propriétés suivantes, où $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$ dénote le sous-groupe de $\text{Aut}_1 \Gamma$ qui fixe les sommets de la boule $B_1(\mathbf{1})$.

- (1) $s = r \circ i$ (commutativité du diagramme) ;
- (2) $\text{Ker}(r) = \text{Aut}^{(1)} \Gamma$;
- (3) s est un monomorphisme ;
- (4) $\text{Im}(s) \subseteq \text{Im}(r)$.

Un cas particulier important de la propriété (4) est spécifié par la définition suivante :

Définition 1.15. (*Grappe localement holomorphe*) Un graphe de Cayley orienté $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est dit *localement holomorphe* si $\text{Im}(r) = \text{Im}(s)$.

En d'autres mots, Γ est localement holomorphe si les automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1 \Gamma$ permutent les éléments de \bar{S} comme le font les automorphismes de G qui stabilisent S .

Si Γ est localement holomorphe, $\text{Aut}_1 \Gamma$ se factorise comme suit :

Proposition 1.16. (*Décomposition de $\text{Aut}_1 \Gamma$*) Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley localement holomorphe. Alors

$$\text{Aut}_1 \Gamma \simeq \text{Aut}_S G \rtimes \text{Aut}^{(1)} \Gamma.$$

DÉMONSTRATION. Puisque $\text{Im}(r) = \text{Im}(s)$ et que s est injectif, $s^{-1} \circ r$ est une rétraction de $\text{Aut}_1 \Gamma$ sur $\text{Aut}_S G$ ayant $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$ comme noyau. Par un théorème standard sur les produits semi-directs (voir par exemple Rotman [25] p.22), $\text{Aut}_1 \Gamma \simeq \text{Aut}_S G \rtimes \text{Aut}^{(1)} \Gamma$. \square

La proposition suivante justifie le choix du terme "localement holomorphe".

Proposition 1.17. *Un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est holomorphe si et seulement si il est localement holomorphe et $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G$.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, si Γ est holomorphe, $i = \text{Id}$. Par conséquent $s = r \circ i = r$. Donc $\text{Im}(s) = \text{Im}(r)$. De plus, puisque s est un monomorphisme, $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Ker}(r) = \text{Id}_G$.

Réciproquement, supposons que Γ est localement holomorphe et que $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G$. Alors, par la proposition 1.16, $\text{Aut}_1\Gamma \simeq \text{Aut}_S G \times \text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Aut}_S G$. \square

Remarque 1.18. La proposition 1.17 entraîne en particulier que si $\text{Aut}^{(1)}\Gamma \neq \text{Id}_G$, alors Γ n'est pas holomorphe. Cette condition est souvent utile pour vérifier qu'un graphe de Cayley orienté n'est pas holomorphe.

Pour conclure cette section notons qu'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ peut satisfaire l'équation

$$\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G \tag{1.2}$$

sans être localement holomorphe et que, réciproquement, un graphe de Cayley peut être localement holomorphe sans satisfaire à l'équation (1.2).

Exemple 1.19. Le graphe $\Gamma_2 = \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \{(1, 0), \pm(0, 1)\})$ de l'exemple 1.14 n'est pas localement holomorphe mais satisfait l'équation (1.2). Nous verrons au chapitre 2 que $\text{MBS}(4) = \Gamma(\mathfrak{S}_4, \{(12), (23), (34), (14)\})$ est localement holomorphe mais ne vérifie pas l'équation (1.2) (voir le théorème 2.8 et la proposition 2.15).

1.4. LOCALISATIONS ET DÉVIATEURS.

Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. L'approche que nous avons adoptée pour analyser le groupe d'automorphismes de Γ est de voir chaque arc de Γ coloré par le générateur qu'il représente. L'intérêt de ce coloriage réside dans le fait qu'il donne une caractérisation simple des automorphismes de Γ appartenant à $L(G)$, $\text{Aut}_S G$ et $\text{Hol}_S(G)$. Les éléments de $L(G)$ sont les automorphismes de Γ qui fixent les couleurs, c'est-à-dire les automorphismes qui stabilisent, pour chaque couleur, l'ensemble des arcs ayant cette couleur. Les éléments $\text{Aut}_S G$ sont les automorphismes de Γ qui fixent

l'élément neutre du groupe G et qui déplacent en bloc les couleurs : si un arc coloré par a est envoyé sur un arc coloré par b , alors tous les arcs portant la couleur a sont envoyés sur des arcs portant la couleur b . Les éléments de $\text{Hol}_S(G)$ sont quant à eux les automorphismes de Γ qui déplacent les couleurs en bloc.

1.4.1. Les localisations

Afin de décrire l'action des automorphismes de Γ sur les couleurs, nous introduisons les localisations. Si σ est un automorphisme de Γ , l'ensemble des localisations de σ est une famille de permutations des couleurs \bar{S} , indicées par les sommets de Γ . Pour des raisons techniques, l'arc (x, xa) de couleur a est perçu par le sommet $y = xa$ de couleur a^{-1} . C'est pourquoi nous utilisons \bar{S} comme ensemble de couleurs.

Les localisations sont au centre de notre analyse du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley car elles permettent d'exploiter l'information recueillie sur l'action locale de $\text{Aut}\Gamma$ (c'est-à-dire l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ sur \bar{S}) pour obtenir des résultats sur l'action globale de $\text{Aut}\Gamma$.

Définition 1.20. Pour $\sigma \in \text{Aut}\Gamma$ et $x \in V(\Gamma)$ posons

$$\sigma^{(x)} = \lambda_{\sigma(x)^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_x.$$

L'application

$$\sigma_{(x)} := r(\sigma^{(x)}) : \bar{S} \longrightarrow \bar{S}$$

est appelée la *localisation de σ en x* .

Remarquons que $\sigma^{(x)} \in \text{Aut}\Gamma$. Écrivons explicitement,

$$\sigma^{(x)}(y) = \sigma(x)^{-1} \sigma(xy), \quad y \in V(\Gamma), \quad (1.3)$$

$$\sigma_{(x)}(a) = \sigma(x)^{-1} \sigma(xa), \quad a \in \bar{S}. \quad (1.4)$$

Par conséquent, l'automorphisme $\sigma^{(x)}$ appartient à $\text{Aut}_1\Gamma$ et agit autour de l'identité comme le fait σ autour de x , en ce sens que

$$\sigma(xy) = \sigma(x) \sigma^{(x)}(y), \quad (1.5)$$

et $\sigma_{(x)}$ est une *permutation de \bar{S} qui représente l'action induite par σ sur les couleurs des arcs incidents à x* ¹. Cette permutation décrit comment σ envoie les voisins de x sur les voisins de $\sigma(x)$ puisque

$$\sigma((x, xa)) = (\sigma(x), \sigma(x)\sigma_{(x)}(a)), \text{ pour } a \in S, \quad (1.6)$$

et

$$\sigma((xa, x)) = (\sigma(x)\sigma_{(x)}(a), \sigma(x)), \text{ pour } a \in \bar{S} \setminus S. \quad (1.7)$$

C'est à cause de cette propriété que $\sigma_{(x)}$ est appelée la localisation de σ en x . Remarquons que les localisations sont obtenues en prenant la restriction à \bar{S} d'automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma$. *Par conséquent, toute information sur l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ sur \bar{S} se traduit en information sur les localisations. En particulier, si Γ est localement holomorphe, les localisations sont des restrictions à S d'automorphismes appartenant à $\text{Aut}_S G$.*

Pour des raisons techniques, voici quelques propriétés des automorphismes de la forme $\sigma^{(x)}$:

$$(P.1) \quad (\sigma \circ \tau)^{(x)} = \sigma^{(\tau(x))} \circ \tau^{(x)};$$

$$(P.2) \quad \sigma^{(xy)} = (\sigma^{(x)})^{(y)};$$

$$(P.3) \quad \text{si } \sigma \text{ fixe } x, \sigma^{(x)} = \lambda_{x^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_x. \text{ L'automorphisme } \sigma^{(x)} \text{ est donc dans ce cas conjugué à } \sigma \text{ dans } L(G);$$

$$(P.4) \quad \text{si } \sigma \in \text{Aut}_1\Gamma, \text{ alors } \sigma^{(1)} = \sigma.$$

¹Par exemple, si σ envoie l'arc incident à x coloré par a sur un arc coloré par b , alors $\sigma_{(x)}(a) = b$.

Nous donnons ici la preuve de deux de ces propriétés :

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(\tau(x))} \circ \tau^{(x)} &= (\lambda_{\sigma(\tau(x))^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_{\tau(x)}) \circ (\lambda_{\tau(x)^{-1}} \circ \tau \circ \lambda_x) \\
 &= (\sigma \circ \tau)^{(x)}; \\
 (\sigma^{(x)})^{(y)} &= \lambda_{\sigma^{(x)}(y)^{-1}} \circ \sigma^{(x)} \circ \lambda_{(y)} \\
 &= \lambda_{\sigma(xy)^{-1} \sigma(x)} \circ (\lambda_{\sigma(x)^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_x) \circ \lambda_y \\
 &= \lambda_{\sigma(xy)^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_{xy} \\
 &= \sigma^{(xy)}.
 \end{aligned}$$

Les localisations satisfont quand à elles les propriétés (où $\sigma, \tau \in \text{Aut}\Gamma$ et $x, y \in V(\Gamma)$) :

(P.5) $(\sigma \circ \tau)_{(x)} = \sigma_{(\tau(x))} \circ \tau_{(x)}$;

(P.6) $(\sigma^{(x)})_{(y)} = \sigma_{(xy)}$;

(P.7) si $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, alors $\sigma_{(1)} = r(\sigma) = \sigma|_{\bar{S}}$;

(P.8) σ est une translation à gauche si et seulement si $\sigma_{(x)} = \text{Id}_{\bar{S}}$, pour tout $x \in V(\Gamma)$.
(Cette proposition signifie que les translations à gauche sont les automorphismes de Γ qui fixent les couleurs.)

(P.9) $\sigma \in \text{Hol}_S(G)$ si et seulement si $\sigma_{(x)} = \sigma_{(1)} = r(\sigma)$, pour tout $x \in V(\Gamma)$;
(Cette proposition signifie que les automorphismes dans l'holomorphe de G relatif à S sont les automorphismes de Γ qui déplacent les couleurs en blocs.)

Remarquons que la propriété (P.9) donne une caractérisation des graphes de Cayley holomorphes : un graphe de Cayley Γ est holomorphe si et seulement si, pour tout $\sigma \in \text{Aut}\Gamma$, toutes les localisations de σ sont égales, c'est-à-dire indépendantes du sommet de localisation.

Si $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, les localisations $\{\sigma_{(x)} : x \in V(\Gamma)\}$ décrivent entièrement σ :

Proposition 1.21. Soit $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$ et $x = a_1 a_2 \dots a_l \in V(\Gamma)$, où $a_1, a_2, \dots, a_l \in \bar{S}$. Posons $x_0 = \mathbf{1}$ et $x_i = a_1 a_2 \dots a_i$ pour $i = 1, \dots, l$. Alors

$$\sigma(x) = \prod_{i=0}^{l-1} \sigma_{(x_i)}(a_{i+1}). \quad (1.8)$$

DÉMONSTRATION. Découle immédiatement du fait que

$$\sigma_{(x_i)}(a_{i+1}) = \sigma(x_i)^{-1} \sigma(x_i a_{i+1}) = \sigma(x_i)^{-1} \sigma(x_{i+1}).$$

□

La proposition 1.21 a comme corollaires les propriétés suivantes. Pour $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$

(P.10) $\sigma = \text{Id}_G$ si et seulement si $\sigma_{(x)} = \text{Id}_{\bar{S}}$, pour tout $x \in V(\Gamma)$;

(P.11) $\sigma \in \text{Aut}_S G$ si et seulement si $\sigma_{(x)} = \sigma_{(\mathbf{1})} = r(\sigma)$, pour tout $x \in V(\Gamma)$;

(Cette proposition signifie que les automorphismes de G qui stabilisent S sont les automorphismes de Γ qui fixent $\mathbf{1}$ et qui déplacent les couleurs en blocs ;)

(P.12) Si $\sigma = \tau \circ \nu$, où $\tau \in \text{Aut}_S G$ et $\nu \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$ (la décomposition de la proposition 1.16) alors $\sigma_{(\mathbf{1})} = r(\tau)$ et $\sigma_{(x)} = r(\tau) \circ \nu_{(x)}$.

(P.13) Si $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$ dénote le sous-groupe de $\text{Aut}_1 \Gamma$ qui fixe les sommets de la boule de rayon k autour de $\mathbf{1}$, $\sigma \in \text{Aut}^{(k)} \Gamma$ si et seulement si $\sigma_{(x)} = \text{Id}_{\bar{S}}$, pour tout $x \in B_{k-1}(\mathbf{1})$.

1.4.2. Les déviateurs

Pour démontrer qu'un graphe de Cayley Γ est holomorphe il faut montrer que pour tout $\sigma \in \text{Aut} \Gamma$, les localisations de σ satisfont à

$$\sigma_{(x)} = \sigma_{(\mathbf{1})}, \text{ pour tout } x \in V(\Gamma).$$

Pour comparer $\sigma_{(x)}$ à $\sigma_{(\mathbf{1})}$ on introduit les *ensembles déviateurs* :

$$\Delta_a = \{(\sigma_{(\mathbf{1})})^{-1} \sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma\}, a \in \bar{S}.$$

Comme le montre la prochaine proposition, l'intérêt de ces ensembles réside dans le fait qu'ils permettent de majorer la déviation des localisations $\sigma_{(x)}$, $x \in G$, de la localisation $\sigma_{(1)}$.

Proposition 1.22. *Soit $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$, $x = a_1 a_2 \dots a_l \in V(\Gamma)$, où $a_1, a_2, \dots, a_l \in \bar{S}$. Alors il existe $\eta_i \in \Delta_{a_i}$, $i = 1, \dots, l$, donnant*

$$\sigma_{(x)} = \sigma_{(1)} \circ \eta_1 \circ \dots \circ \eta_l.$$

DÉMONSTRATION. Si $x_i = a_1 \dots a_i$, pour $i = 0, \dots, l$, alors

$$\begin{aligned} \sigma_{(x)} = \sigma_{(x_l)} &= (\sigma_{(1)}(\sigma_{(1)})^{-1})(\sigma_{(x_1)}(\sigma_{(x_1)})^{-1}) \dots (\sigma_{(x_{l-1})}(\sigma_{(x_{l-1})})^{-1}) \sigma_{(x_l)} \\ &= \sigma_{(1)} ((\sigma_{(1)})^{-1} \sigma_{(x_1)}) ((\sigma_{(x_1)})^{-1} \sigma_{(x_2)}) \dots ((\sigma_{(x_{l-1})})^{-1} \sigma_{(x_l)}). \end{aligned}$$

Posons, pour un $i \in \{1, \dots, l\}$ fixé,

$$\tau = \sigma^{(x_{i-1})}.$$

Alors, par (P.6),

$$\tau_{(1)} = (\sigma^{(x_{i-1})})_{(1)} = \sigma_{(x_{i-1})}$$

et

$$\tau_{(a_i)} = (\sigma^{(x_{i-1})})_{(a_i)} = \sigma_{(x_{i-1} a_i)} = \sigma_{(x_i)},$$

donc

$$\eta_i := (\sigma_{(x_{i-1})})^{-1} \sigma_{(x_i)} = (\tau_{(1)})^{-1} \tau_{(a_i)} \in \Delta_{a_i}.$$

□

Remarque 1.23. Soit $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$, $x \in G$ et $a \in \bar{S}$. La preuve de la proposition 1.22 implique que $(\sigma_{(x)})^{-1} \sigma_{(xa)} \in \Delta_a$.

Le prochain résultat, qui est un corollaire de la proposition 1.22, montre que toute localisation $\sigma_{(x)}$ d'un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$ est un produit d'éléments appartenant aux déviateurs. Donc, en un sens, les déviateurs "engendrent" les localisations des automorphismes appartenant à $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$.

Corollaire 1.24. Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ et $x = a_1 a_2 \dots a_l \in V(\Gamma)$, où $a_1, a_2, \dots, a_l \in \bar{S}$. Alors il existe $\eta_i \in \Delta_{a_i}$, pour $i = 1, \dots, l$, donnant

$$\sigma_{(x)} = \eta_1 \circ \eta_2 \circ \dots \circ \eta_l.$$

1.4.3. Déviateurs et graphes de Cayley holomorphes

On peut vérifier aisément à l'aide des ensembles déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$, si un graphe de Cayley est holomorphe :

Proposition 1.25. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Alors Γ est holomorphe si et seulement si les ensembles déviateurs sont triviaux, c'est-à-dire si

$$\Delta_a = \text{Id}_{\bar{S}}, \forall a \in \bar{S}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, Γ est holomorphe si et seulement si

$$\text{Aut}_1\Gamma = \text{Aut}_S G,$$

c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$

$$\sigma_{(x)} = \sigma_{(1)} \text{ pour tout } x \in V(\Gamma). \quad (1.9)$$

Si Γ est holomorphe, alors, pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$,

$$(\sigma_{(1)})^{-1} \sigma_{(a)} = (\sigma_{(1)})^{-1} \sigma_{(1)} = \text{Id}_{\bar{S}}.$$

Donc les déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$, sont tous égaux à $\text{Id}_{\bar{S}}$.

Réciproquement, si les déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$, sont triviaux, la proposition 1.22 implique que l'équation (1.9) est satisfaite pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, donc que Γ est holomorphe. \square

Les déviateurs donnent donc en un sens une mesure de la déviation de Γ de l'holomorphie : si les déviateurs sont petits, Γ est proche d'être holomorphe, si les déviateurs sont grands, Γ est loin d'être holomorphe. C'est pourquoi ces ensembles sont appelés les déviateurs.

1.4.4. Déviateurs et graphes de Cayley localement holomorphes

Dans le cas des graphes de Cayley orientés localement holomorphes, les déviateurs deviennent des groupes et leur calcul se simplifie. Pour le voir introduisons les ensembles

$$(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)} = \{\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma\}, a \in \bar{S}. \quad (1.10)$$

Remarquons que ces ensembles sont des groupes. En effet, si $a \in \bar{S}$, la propriété (P.3) implique que

$$(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)} = r(\lambda_{a^{-1}} \circ \text{Aut}^{(1)}\Gamma \circ \lambda_a),$$

donc que $(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}$ est une image homomorphe du groupe $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$.

Rappelons que $\sigma_{(a)}$ décrit comment σ envoie les voisins de a sur les voisins de $\sigma(a)$ (voir les équations 1.6 et 1.7). Si $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ et $a \in \bar{S}$, alors σ fixe a . Donc σ stabilise l'ensemble des voisins de a . Par conséquent le groupe $(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}$ décrit comment $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ permute les voisins de a . Voici le résultat :

Proposition 1.26. *Si Γ est localement holomorphe, alors les déviateurs sont des groupes et, pour tout $a \in \bar{S}$,*

$$\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}.$$

DÉMONSTRATION. D'une part

$$\Delta_a \supseteq \{(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma\} = \{\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma\} = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}.$$

D'autre part, si $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, il existe $\tau \in \text{Aut}_S G$ et $\nu \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ donnant $\sigma = \tau \circ \nu$ (la décomposition de la proposition 1.16) et vérifiant $\tau_{(y)} = r(\tau) = \sigma_{(1)}$ pour tout $y \in G$ (voir (P.11) et (P.12)). En isolant ν et en appliquant la propriété (P.5) on obtient

$$\nu_{(a)} = (\tau^{-1})_{(\sigma(a))} \circ \sigma_{(a)} = (\sigma_{(1)})^{-1} \circ \sigma_{(a)},$$

qui implique que $(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} \in (\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}$. □

Quand Γ sera localement holomorphe nous appellerons les $\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)}$, $a \in \bar{S}$, les *groupes déviateurs* de Γ .

Si Γ est localement holomorphe, il existe une relation étroite entre l'action de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ sur $V(\Gamma)$ et l'action des groupes déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$, sur \bar{S} . Les propositions suivantes sont des exemples de cette relation.

Proposition 1.27. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley localement holomorphe. Alors $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G$ si et seulement si les groupes déviateurs sont triviaux, c'est-à-dire si

$$\Delta_a = \text{Id}_{\bar{S}}, \forall a \in \bar{S}.$$

DÉMONSTRATION. Découle de la proposition 1.21, du corollaire 1.24 et de la proposition 1.26. \square

Proposition 1.28. Soit $\Gamma = \Gamma$ un graphe de Cayley localement holomorphe. Si un nombre premier p divise l'ordre de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$, alors p divise l'ordre d'un des groupes déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$.

Réciproquement, si un premier p divise l'ordre d'un des groupes déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$, alors p divise l'ordre de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$.

DÉMONSTRATION. Découle de la proposition 1.35 que nous prouverons à la fin du chapitre. \square

Proposition 1.29. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley localement holomorphe et S' un sous-ensemble de S . Alors $\Gamma' = \Gamma(S')$ est stabilisé par $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ si et seulement si S' est stabilisé par les groupes déviateurs Δ_a , $a \in S'$.

DÉMONSTRATION. Découle de la proposition 1.21, du corollaire 1.24 et de la proposition 1.26. \square

1.4.5. Localisations et critère d'isomorphie

Voici un autre résultat illustrant le lien entre les automorphismes d'un graphe de Cayley orienté Γ fixant $\mathbf{1}$ et leurs localisations. Nous l'utiliserons au chapitre 3.

Proposition 1.30. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté, $S_1, S_2 \subseteq S$ et $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$. Alors $\sigma(\Gamma(S_1)) = \Gamma(S_2)$ si et seulement si

$$\sigma_{(x)}(S_1) = S_2, \text{ pour tout } x \in V(\Gamma(S_1)). \quad (1.11)$$

Remarque 1.31. Si $\sigma(\Gamma(S_1)) = \Gamma(S_2)$, alors

$$\sigma|_{\Gamma(S_1)} : \Gamma(S_1) \longrightarrow \Gamma(S_2)$$

est un isomorphisme de graphes. La proposition 1.30 est donc un critère pour l'isomorphisme de $\Gamma(S_1)$ et $\Gamma(S_2)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.30. Montrons d'abord la nécessité de (1.11). Si $x \in V(\Gamma(S_1))$ et $a \in S_1$, alors

$$(\sigma(x), \sigma(xa)) \in E(\Gamma(S_2)),$$

donc

$$\sigma_{(x)}(a) = \sigma(x)^{-1} \sigma(xa) \in S_2.$$

De plus, puisque l'application suivante est une bijection

$$\begin{aligned} \sigma|_{N(x; \Gamma(S_1))} : N(x; \Gamma(S_1)) &\longrightarrow N(\sigma(x); \Gamma(S_2)) \\ xa &\mapsto \sigma(xa) = \sigma(x) \sigma_{(x)}(a), \end{aligned}$$

la restriction

$$\sigma_{(x)}|_{S_1} : S_1 \longrightarrow S_2$$

est aussi bijective.

Pour démontrer la réciproque, remarquons premièrement que si $x = a_1 a_2 \dots a_l \in V(\Gamma(S_1))$, où $a_1, a_2, \dots, a_l \in S_1$, et si $x_i = a_1 a_2 \dots a_i$, alors

$$\sigma(x) = \prod_{i=0}^{l-1} \sigma_{(x_i)}(a_{i+1}) \in V(\Gamma(S_2)),$$

car $\sigma_{(x_i)}(a_{i+1}) \in S_2$ pour $i = 0, 1, \dots, l-1$. Donc

$$\sigma(V(\Gamma(S_1))) \subseteq V(\Gamma(S_2)).$$

Pour vérifier que $\sigma(V(\Gamma(S_1))) = V(\Gamma(S_2))$, considérons $y = b_1 b_2 \dots b_l \in V(\Gamma(S_2))$, où $b_1, b_2, \dots, b_l \in S_2$, et construisons $x \in V(\Gamma(S_1))$ satisfaisant à $\sigma(x) = y$. Posons $x_0 = \mathbf{1}$, et pour $i = 1, 2, \dots, l$ définissons par récurrence $a_i = (\sigma_{(x_{i-1})})^{-1}(b_i)$ et $x_i = a_1 a_2 \dots a_i$. Alors, si $x = x_l$,

$$\sigma(x) = \prod_{i=0}^{l-1} \sigma_{(x_i)}(a_{i+1}) = \prod_{i=0}^{l-1} b_{i+1} = y.$$

Finalement, $\sigma|_{\Gamma(S_1)} : \Gamma(S_1) \longrightarrow \Gamma(S_2)$ est un homomorphisme de graphes, puisque, pour tout $x \in V(\Gamma(S_1))$ et $a \in S_1$, on a

$$\sigma_{(x)}(a) \in S_2,$$

donc que

$$\sigma((x, xa)) = (\sigma(x), \sigma_{(x)}(a)) \in E(\Gamma(S_2)).$$

Ainsi $\sigma(E(\Gamma(S_1))) = E(\Gamma(S_2))$. □

1.4.6. Diviseurs premiers de l'ordre des groupes $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$

Considérons $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$, le sous-groupe de $\text{Aut}_1 \Gamma$ qui fixe les sommets de la boule de rayon k autour de $\mathbf{1}$. Nous démontrerons ici un théorème permettant de déterminer, à l'aide des localisations, les diviseurs premiers de l'ordre des groupes de la chaîne :

$$\text{Aut}_1 \Gamma = \text{Aut}^{(0)} \Gamma > \text{Aut}^{(1)} \Gamma > \dots > \text{Aut}^{(k)} \Gamma > \dots$$

Soit $k \in \mathbf{N}$ et $x \in N_k(\mathbf{1})$. Considérons l'ensemble de localisations :

$$(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)} := \{\sigma_{(x)} : \sigma \in \text{Aut}^{(k)} \Gamma\}.$$

Cet ensemble est un groupe car il est une image homomorphe du groupe $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$, puisque par la propriété (P.3)

$$(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)} = r(\lambda_{x^{-1}} \circ \text{Aut}^{(k)} \Gamma \circ \lambda_x).$$

Ce groupe décrit comment $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$ agit sur les couleurs des arcs incidentes à x .

La famille des groupes $(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)}$, $x \in N_k(\mathbf{1})$, permet de déterminer les diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$:

Théorème 1.32. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et k un nombre naturel. Si un nombre premier p divise $o(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)$, alors p divise l'ordre d'un des groupes $(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)}$, $x \in N_k(\mathbf{1})$.

Réciproquement, si un premier p divise l'ordre d'un des groupes $(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)}$, $x \in N_k(\mathbf{1})$, alors p divise $o(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)$.

Nous nous servons du lemme suivant pour faire la preuve de ce théorème.

Lemme 1.33. Soit σ un automorphisme appartenant à $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$, différent de l'identité. Alors il existe $\tau \in \text{Aut}^{(k)} \Gamma$, conjugué à σ dans $L(G)$, et $x \in N_k(\mathbf{1})$ tels que $\tau_{(x)} \neq \text{Id}_{\bar{S}}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit $l = \max\{i : \sigma \in \text{Aut}^{(i)} \Gamma\}$. Puisque $\sigma \in \text{Aut}^{(k)} \Gamma$ et $\sigma \neq \text{Id}_G$, $k \leq l < \text{diam} \Gamma$. Par définition de l , on a $\sigma \notin \text{Aut}^{(l+1)} \Gamma$. Cela entraîne, par la propriété (P.13), l'existence d'un $z \in N_l(\mathbf{1})$ tel que $\sigma_{(z)} \neq \text{Id}_{\bar{S}}$.

Choisissons w , un sommet de Γ à distance k de z et à distance $l - k$ de $\mathbf{1}$ (donc, un sommet d'une $(\mathbf{1}, z)$ -géodésique), et considérons

$$\tau = \sigma^{(w)}.$$

Alors, τ est conjugué à σ dans $L(G)$, puisque

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma^{(w)} \\ &= \lambda_{\sigma(w)^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_w \\ &= \lambda_{w^{-1}} \circ \sigma \circ \lambda_w \quad (\text{car } w \in B_l(\mathbf{1})). \end{aligned}$$

De plus, τ appartient à $\text{Aut}^{(k)} \Gamma$, car, pour tout $y \in B_k(\mathbf{1})$, on a

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{1}, wy) &\leq \text{dist}(\mathbf{1}, w) + \text{dist}(w, wy) \\ &= \text{dist}(\mathbf{1}, w) + \text{dist}(\mathbf{1}, y) \\ &\leq (l - k) + k \\ &= l, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\tau(y) &= w^{-1}\sigma(wy) \\ &= w^{-1}wy \quad (\text{car } wy \in B_l(\mathbf{1})). \\ &= y.\end{aligned}$$

Finalement, $x := w^{-1}z$ est un élément de $N_k(\mathbf{1})$ satisfaisant à

$$\tau_{(x)} = (\sigma^{(w)})_{(w^{-1}z)} = \sigma_{(z)} \neq \text{Id}_{\bar{S}}.$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit p un diviseur premier de $o(\text{Aut}^{(k)}\Gamma)$ et $\sigma \in \text{Aut}^{(k)}\Gamma$ d'ordre p . Par le lemme 1.33, il existe $\tau \in \text{Aut}^{(k)}\Gamma$ conjugué à σ dans $L(G)$, et $x \in N_k(\mathbf{1})$ tels que $\tau_{(x)} \neq \text{Id}_{\bar{S}}$. Puisque

$$\tau_{(x)} = r(\lambda_{x^{-1}} \circ \tau \circ \lambda_x),$$

l'ordre de $\tau_{(x)}$ divise $o(\tau) = o(\sigma)$. Cela entraîne que $o(\tau_{(x)}) = p$, et donc que p divise l'ordre de $(\text{Aut}^{(k)}\Gamma)_{(x)}$.

Réciproquement, si $x \in N_k(\mathbf{1})$, le groupe $(\text{Aut}^{(k)}\Gamma)_{(x)}$ est une image homomorphe du groupe $\text{Aut}^{(k)}\Gamma$. Donc, les diviseurs premiers de $(\text{Aut}^{(k)}\Gamma)_{(x)}$ sont inclus dans l'ensemble des diviseurs premiers de $\text{Aut}^{(k)}\Gamma$. □

Nous n'utiliserons pas dans cette thèse le théorème 1.32 sous sa forme générale, mais plutôt les deux propositions qui suivent qui sont ses corollaires.

Proposition 1.34. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Alors $o(\text{Aut}_1\Gamma)$ et $o(\text{Im}(r))$ ont les mêmes diviseurs premiers.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle du cas $k = 0$ du théorème 1.32 et de l'équation

$$(\text{Aut}^{(0)}\Gamma)_{(\mathbf{1})} = (\text{Aut}_1\Gamma)_{(\mathbf{1})} = \text{Im}(r).$$

□

Pour $k = 1$, les $(\text{Aut}^{(k)} \Gamma)_{(x)}$, $x \in N_k(\mathbf{1})$, deviennent les groupes déviateurs $\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)} \Gamma)_{(a)}$, $a \in \bar{S}$, définis à la section 1.4.4. Les groupes déviateurs permettent de trouver les diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$:

Proposition 1.35. *Soit $\Gamma = \Gamma(\dot{G}, S)$ un graphe de Cayley orienté. Si un premier p divise $o(\text{Aut}^{(1)} \Gamma)$, alors p divise l'ordre d'un des groupes déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$.*

Réciproquement, si un premier p divise l'ordre d'un des groupes Δ_a , $a \in \bar{S}$, alors p divise $o(\text{Aut}^{(1)} \Gamma)$.

Chapitre 2

GRAPHES DE CAYLEY ENGENDRÉS PAR DES TRANSPOSITIONS

2.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous déterminons le groupe d'automorphismes de tous les graphes de Cayley basés sur un groupe symétrique ou sur un produit de groupes symétriques et engendrés par des transpositions. Nous montrerons que ces graphes sont tous holomorphes, à l'exception de ceux dont le graphe de transpositions contient une composante qui est un graphe complet d'ordre supérieur à 3 ou un graphe carré. Notons que la famille des graphes de Cayley engendrés par des transpositions contient plusieurs familles importantes de graphes de Cayley :

- les graphes de tri par percolation $BS(n) = \Gamma(\mathfrak{S}_n, \{(12), (23), \dots, ((n-1)n)\})$;
- les graphes de tri par percolation modifiés
 $MBS(n) = \Gamma(\mathfrak{S}_n, \{(12), (23), \dots, ((n-1)n), (n1)\})$.
- les graphes étoiles $ST(n) = \Gamma(\mathfrak{S}_n, \{(12), (13), \dots, (1n)\})$;
- les graphes étoiles généralisés $MST(n, k) = \Gamma(\mathfrak{S}_n, \{(ij) : 1 \leq i \leq k \text{ et } k+1 \leq j \leq n\})$;
- Les graphes à transpositions complètes
 $CT(n) = \Gamma(\mathfrak{S}_n, \{(ij) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\})$.
- Les hypercubes
 $H(n) = \Gamma(\mathfrak{S}_{\{1,2\}} \times \mathfrak{S}_{\{3,4\}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\{2n-1,2n\}}, \{(12), (34) \dots ((2n-1)2n)\})$.

Tout au long de ce chapitre, S représentera un ensemble de transpositions de \mathfrak{S}_n tel que $\text{supp}(S) = \{1, 2, \dots, n\}$, G le groupe engendré par S et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ le graphe

de Cayley basé sur G et engendré par S . Remarquons que S est toujours un sous-ensemble de Cayley de G qui est symétrique car $a \in S \implies a^{-1} = a \in S$. Puisque S est symétrique, $\bar{S} = S$. Nous remplacerons donc \bar{S} par S quand nous ferons appel aux résultats du chapitre 1.

2.2. LE GRAPHE DE TRANSPOSITIONS

L'ensemble de transpositions S porte une structure qui découle du comportement de ses éléments par rapport à la multiplication dans \mathfrak{S}_n : deux éléments peuvent commuter ou non. Le graphe de transpositions (introduit pour la première fois par Polya), que nous définissons dans le prochain énoncé, encode cette information. Il sera un outil important d'analyse des symétries de Γ .

Définition 2.1. Le *graphe de transpositions* de S , dénoté T_S , est le graphe ayant $\text{supp}(S) = \{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets et $\{[i, j] : (ij) \in S\}$ comme ensemble d'arêtes.

Remarque 2.2. Les arêtes de T_S représentent les transpositions appartenant à S . Pour cette raison, nous dirons souvent d'une transposition qu'elle "est une arête" et de deux transpositions qu'elles sont "adjacentes" si les arêtes de T_S qui les représentent ont un sommet en commun.

Remarquons que le groupe engendré par S est égal à \mathfrak{S}_n si et seulement si T_S est connexe. Si T_S n'est pas connexe, G est un produit direct de groupes symétriques.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous montrerons que tout graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$, engendré par des transpositions, est holomorphe, c'est-à-dire a comme groupe d'automorphismes

$$\text{Aut}\Gamma = L(G)\text{Aut}_S G,$$

sauf si le graphe de transpositions de S contient une composante qui est un graphe complet d'ordre supérieur à 3 ou un graphe carré. Nous montrerons aussi que

$$\text{Aut}_S G \simeq \text{Aut}T_S$$

si T_S ne contient pas d'arêtes isolés. Ces deux résultats généralisent le théorème de Godsil et Royle [15] qui affirme, dans le cas où $G = \mathfrak{S}_n$ (c'est-à-dire quand T_S est connexe), que $\text{Aut}\Gamma = L(\mathfrak{S}_n)$ si S est un ensemble minimal de générateurs de \mathfrak{S}_n et le groupe d'automorphismes de T_S est trivial. Ces deux résultats entraînent aussi que Γ est un GRR si et seulement si $\text{Aut}T_S$ est trivial, et que Γ est arête-transitif si et seulement si T_S l'est. Nous verrons finalement que si $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ sont deux graphes de Cayley engendrés par des transpositions, alors $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ si et seulement si $T_{S_1} \simeq T_{S_2}$.

Revenons au diagramme (1.1) que nous avons introduit pour comparer l'action des groupes $\text{Aut}_1\Gamma$ et $\text{Aut}_S G$ sur $\bar{S} = S$. Le graphe de transpositions T_S permet d'y ajouter l'homomorphisme γ :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Aut}T_S & \xrightarrow{\gamma} & \text{Aut}_S G & \xrightarrow{i} & \text{Aut}_1\Gamma \\ & & & \searrow s & \downarrow r \\ & & & & \mathfrak{S}_S \end{array}$$

L'homomorphisme γ est défini par la règle $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$, où γ_α dénote la conjugaison par α . Remarquons que si $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ est un automorphisme de T_S , γ_α est bien un automorphisme de G qui stabilise S , car

Proposition 2.3. $\text{Aut}T_S = N_{\mathfrak{S}_n}(S)$, le normalisateur de S dans \mathfrak{S}_n .

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha \in \mathfrak{S}_n$. Puisque T_S est fini, $\alpha \in \text{Aut}T_S$ si et seulement si

$$[i, j] \in E(T_S) \implies [\alpha(i), \alpha(j)] \in E(T_S),$$

ce qui est équivalent à

$$(ij) \in S \implies \alpha(ij)\alpha^{-1} = (\alpha(i)\alpha(j)) \in S$$

(car $[i, j] \in E(T_S)$ si et seulement si $(ij) \in S$), et donc à $\alpha \in N_{\mathfrak{S}_n}(S)$. □

Le noyau de γ est le groupe engendré par l'ensemble de transpositions $\{(ij) : [i, j] \text{ est une arête isolée de } T_S\}$, c'est-à-dire l'ensemble des transpositions de S disjointes des autres transpositions de S . L'homomorphisme γ est donc injectif si et seulement si T_S ne contient pas d'arêtes isolées.

Remarquons finalement qu'en identifiant S aux arêtes de T_S , la permutation $s(\gamma_\alpha)$ peut être vu comme l'automorphisme du line-graphe $L(T_S)$ induit par α , car

$$[s(\gamma_\alpha)]((ij)) = (\alpha(i)\alpha(j)).$$

2.3. HOLOMORPHIE LOCALE

Le but principal de cette section est de démontrer que Γ est localement holomorphe, c'est-à-dire que $\text{Aut}_1\Gamma$ agit sur S comme $\text{Aut}_S G$.

Pour obtenir ce résultat nous montrerons que

$$\text{Im}(r) = \text{Im}(s \circ \gamma). \quad (2.1)$$

Cette équation signifie que toute restriction $r(\sigma)$, $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, peut être vu comme un automorphisme du line-graphe $L(T_S)$ induit par un automorphisme de T_S . Pour montrer que l'équation (2.1) est vérifiée, nous aurons besoin des résultats qui suivent sur la structure de Γ .

Lemme 2.4. *Soit a, b deux transpositions distinctes de S . Le nombre de $(1, ab)$ -géodésiques dans Γ est :*

2, si a et b sont des arêtes non adjacentes de T_S ; ces géodésiques sont $\langle 1, a, ab \rangle$ et $\langle 1, b, ba = ab \rangle$;

1, si a et b sont deux arêtes adjacentes de T_S qui ne font pas partie d'un même triangle de T_S ; cette géodésique est $\langle 1, a, ab \rangle$;

3, si a et b sont deux arêtes d'un triangle de T_S ; si c est la troisième arête du triangle, les trois géodésiques sont $\langle 1, a, ab \rangle$, $\langle 1, b, bc = ab \rangle$ et $\langle 1, c, ca = ab \rangle$.

DÉMONSTRATION. Soit $a', b' \in S$ tels que $a'b' = ab$. Il est clair que a' et b' sont deux transpositions adjacentes si et seulement si a et b le sont.

Si a et b sont adjacentes, on peut supposer sans perdre de généralité que $a = (12)$, $b = (23)$, $a' = (ij)$ et $b' = (jk)$. On obtient ainsi que $(ijk) = (123)$. Par conséquent a', b' sont ou bien égales à $(12), (23)$ ou à $(23), (13)$ ou à $(13), (12)$. Il y a donc dans ce cas trois $(1, ab)$ -géodésiques dans Γ si $(13) \in S$ et une sinon.

Si a et b ne sont pas adjacentes, alors il est clair que a', b' sont égales à a, b ou à b, a . □

Lemme 2.5. *Soit a, b, c des transpositions distinctes de S . Alors*

- (i) *il y a un unique carré dans Γ qui passe par a et b si et seulement si a n'est pas adjacente à b . De plus, ce carré est $\Gamma(\{a, b\})$.*
- (ii) *il y a un unique $K_{3,3}$ dans Γ qui contient a, b et c si et seulement si a, b, c sont les arêtes d'un triangle de T_S . De plus, ce $K_{3,3}$ est $\Gamma(\{a, b, c\})$.*

DÉMONSTRATION. Par la définition de l'adjacence dans Γ , si x est un voisin commun de a et b , il existe $a', b' \in S$ telles que $x = aa' = bb'$. Cela entraîne que $ab = a'b'$ et que $\langle 1, a', a'b' \rangle$ est une $(1, ab)$ -géodésique de Γ . Il est facile de vérifier, à l'aide du lemme 2.4, que la paire a', b' est égale à a, b ou à b, a , si a et b sont des arêtes non adjacentes de T_S ; à a, b , si a et b sont des arêtes adjacentes de T_S non incluses dans un de ses triangles; et à a, b ou à b, c ou à c, a , si a, b et c forment un triangle dans T_S . Par conséquent, x est égal à 1 ou à ab , si a et b sont des arêtes non adjacentes de T_S ; à 1 , si a et b sont des arêtes adjacentes de T_S non incluses ensemble dans un triangle de T_S ; et à 1 ou à ab ou à ba , si a, b, c forment un triangle dans T_S , dans quel cas ab et ba sont aussi adjacents à c . Le résultat découle aisément de ces observations. □

Nous sommes maintenant près à démontrer que l'équation (2.1) est satisfaite.

Proposition 2.6. *Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, la restriction $r(\sigma)$ est un automorphisme du line-graphe $L(T_S)$ qui est induit par un automorphisme de T_S . Donc*

$$\text{Im}(r) = \text{Im}(s \circ \gamma).$$

DÉMONSTRATION. Soit σ un automorphisme de Γ qui fixe $\mathbf{1}$. Par le lemme 2.5, $r(\sigma)$ stabilise l'ensemble des paires d'arêtes non adjacentes et l'ensemble des triangles de T_S . Donc, par le théorème de Whitney sur l'isomorphisme entre le groupe d'automorphismes d'un graphe et le groupe d'automorphismes de son line-graphe[28], $r(\sigma)$ est un automorphisme de $L(T_S)$ induit par un automorphisme de T_S . \square

Remarque 2.7.

- (i) Un graphe Γ est *arête-transitif* si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur l'ensemble de ses arêtes. Si $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est un graphe de Cayley, le lemme de Biggs [8] nous assure que cette propriété est vérifiée si et seulement si $\text{Aut}_1\Gamma$ agit transitivement sur S , les voisins de $\mathbf{1}$. Par conséquent, la proposition 2.6 implique qu'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$, engendré par un ensemble de transpositions S , est arête-transitif si et seulement si T_S est arête-transitif.
- (ii) Soit $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ deux graphes de Cayley engendrés par des transpositions. Une preuve similaire à celle de la proposition 2.6 montre que si σ est un isomorphisme de Γ_1 dans Γ_2 qui envoie $\mathbf{1}_{G_1}$ sur $\mathbf{1}_{G_2}$, alors $\sigma|_{S_1}$ est un isomorphisme du line-graphe $L(T_{S_1})$ sur le line-graphe $L(T_{S_2})$ qui est induit un isomorphisme de T_{S_1} dans T_{S_2} . Par conséquent, Γ_1 est isomorphe à Γ_2 si et seulement si T_{S_1} est isomorphe à T_{S_2} .

La proposition 2.6 a deux conséquences importantes qui découlent du fait que les inclusions suivantes sont des égalités :

$$\text{Im}(r) \supseteq \text{Im}(s) \supseteq \text{Im}(s \circ \gamma) = \text{Im}(r). \quad (2.2)$$

Premièrement, $\text{Im}(r) = \text{Im}(s)$:

Théorème 2.8. *Le graphe de Cayley Γ est localement holomorphe, c'est-à-dire $\text{Aut}_1\Gamma$ agit sur S comme $\text{Aut}_S G$.*

Deuxièmement :

Théorème 2.9. *Le groupe $\text{Aut}_S G$ agit sur S de la même façon que $\text{Aut}T_S$ agit sur $E(S)$. Précisément, l'homomorphisme $\gamma : \text{Aut}T_S \longrightarrow \text{Aut}_S G$ est surjectif, c'est-à-dire*

tout automorphisme $\sigma \in \text{Aut}_S G$ s'écrit comme

$$\sigma = \gamma_\alpha, \text{ pour } \alpha \in \text{Aut} T_S.$$

De plus, si T_S ne contient pas d'arêtes isolées, alors γ est un isomorphisme, donc

$$\text{Aut}_S G \simeq \text{Aut} T_S.$$

DÉMONSTRATION. Découle du fait que $\text{Im}(s) = \text{Im}(s \circ \gamma)$ et que s est injectif. \square

Puisque les localisations sont des restrictions à S d'automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1 \Gamma$, la proposition 2.6 impose une contrainte importante aux localisations :

Proposition 2.10. *Pour tout $\sigma \in \text{Aut} \Gamma$ et $x \in V(\Gamma)$, la localisation $\sigma_{(x)}$ est un automorphisme du line-graphe $L(T_S)$ qui est induit par un automorphisme de T_S .*

DÉMONSTRATION. Découle immédiatement de la proposition 2.6. \square

Nous dénoterons par $\sigma_{(x)}^\bullet$ l'automorphisme de T_S qui induit $\sigma_{(x)}$. Pour expliciter le lien entre $\sigma_{(x)}$ et $\sigma_{(x)}^\bullet$ rappelons que si $\alpha \in \text{Aut} T_S$, l'automorphisme de $L(T_S)$ induit par α est $r(\gamma_\alpha)$. Donc $\sigma_{(x)} = r(\gamma_{\sigma_{(x)}^\bullet}) = \gamma_{\sigma_{(x)}^\bullet}|_S$, ou explicitement

$$[\sigma_{(x)}]((ij)) = (\sigma_{(x)}^\bullet(i) \sigma_{(x)}^\bullet(j)), (ij) \in S. \quad (2.3)$$

Quand une des composantes de T_S est une arête isolée, $\sigma_{(x)}^\bullet$ n'est pas déterminé de façon unique. Pour lever cette indétermination, on choisit une transversale $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ de $\text{Ker}(s \circ \gamma)$ dans $\text{Aut} T_S$, et on pose $\sigma_{(x)}^\bullet = \alpha_i$ si $\sigma_{(x)} = r(\gamma_{\alpha_i}) = \gamma_{\alpha_i}|_S$.

Rappelons que puisque Γ est localement holomorphe, on obtient, par la proposition 1.16, la factorisation du groupe $\text{Aut}_1 \Gamma$ suivante :

$$\text{Aut}_1 \Gamma \simeq \text{Aut}_S G \times \text{Aut}^{(1)} \Gamma.$$

Notre intérêt se concentre donc sur le premier facteur de ce produit.

2.4. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Nous démontrons dans cette section les résultats principaux de ce chapitre qui disent quels graphes de Cayley engendrés par des transposition sont holomorphes. Pour obtenir ce résultat il reste à calculer $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$.

Pour calculer $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ nous utiliserons les localisations et les groupes déviateurs. Rappelons que puisque Γ est localement holomorphe, il existe une relation étroite entre l'action de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ sur $V(\Gamma)$ et l'action des groupes déviateurs Δ_a , $a \in S$, sur S . Les propositions 1.27 et 1.29, que nous énonçons de nouveaux ici, sont les deux manifestations de cette relation que nous emploierons.

Proposition 2.11. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley localement holomorphe. Alors $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G$ si et seulement si les groupes déviateurs sont triviaux, c'est-à-dire si*

$$\Delta_a = \text{Id}_S, \forall a \in S.$$

Proposition 2.12. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley localement holomorphe et S' un sous-ensemble de S . Alors $\Gamma' = \Gamma(S')$ est stabilisé par $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ si et seulement si S' est stabilisé par les groupes déviateurs Δ_a , $a \in S'$.*

La correspondance entre l'action de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ sur $V(\Gamma)$ et l'action sur S des groupes déviateurs Δ_a , $a \in S$, est l'outil principal que nous utiliserons pour déterminer $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$. La plupart des résultats qui suivent dans ce chapitre peuvent être regardés comme des résultats sur le groupe $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ ou comme des résultats sur les groupes déviateurs Δ_a , $a \in S$.

Remarquons avant de poursuivre que si $\text{Aut}_a L(T_S)$ dénote le groupe des automorphismes de $L(T_S)$ qui fixent a , on a :

Proposition 2.13. *Pour tout $a \in S$, on a $\Delta_a < \text{Aut}_a L(T_S)$. En particulier, si $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ et $a \in S$, alors*

$$\sigma_{(a)}(a) = a.$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 1.26,

$$\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma)_{(a)} = \{\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma\}.$$

De plus, si $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ et $a \in S$, la localisation $\sigma_{(a)}$ est un automorphisme de $L(T_S)$, par la proposition 2.10, et

$$\begin{aligned}\sigma_{(a)}(a) &= \sigma(a)^{-1}\sigma(aa) \\ &= \sigma(a) \quad (\text{car } S \text{ est constitué d'éléments d'ordre } 2) \\ &= a \quad (\text{car } \sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma).\end{aligned}$$

□

Nous procéderons en deux étapes pour analyser l'action de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ sur $V(\Gamma)$ (et donc simultanément l'action des groupes Δ_a , $a \in S$, sur S). Nous déterminerons en premier lieu des ensembles stabilisés par ces actions. Nous calculerons ensuite comment ces actions agissent à l'intérieur de ces ensembles.

Proposition 2.14. *Soit S' un sous-ensemble de S . Si $T_{S'}$ est un des graphes suivants*

- (i) *une paire d'arêtes non adjacentes ;*
- (ii) *un graphe complet ;*
- (iii) *un carré non inclus dans un graphe complet de T_S ;*
- (iv) *une paire d'arêtes adjacentes de T_S non incluse dans un de ses triangles ou un de ses carrés ;*

alors $\Gamma' = \Gamma(S')$ est stabilisé par $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$, et S' est stabilisé par les groupes Δ_a , $a \in S'$.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$, et S' un sous-ensemble de S tel que décrit dans l'énoncé de la proposition. Par le corollaire 2.12 il suffit de démontrer que σ stabilise Γ' ou que $\sigma_{(a)}$ stabilise S' pour tout $a \in S'$.

(i) Si $T_{S'}$ est une paire d'arêtes non adjacentes de T_S , Γ' est l'unique carré de Γ passant par S' . Donc σ stabilise Γ' .

(ii) Si $T_{S'}$ est un graphe complet d'ordre 2, alors $S' = \{a\}$. Puisque $\sigma_{(a)}(a) = a$ par la proposition 2.13, alors $\sigma_{(a)}$ stabilise S' .

Si $T_{S'}$ est un triangle, Γ' est l'unique $K_{3,3}$ de Γ passant par S' . Donc σ stabilise Γ' .

Supposons à présent que $T_{S'}$ est un graphe complet d'ordre supérieur à 3, et considérons $a = (ij) \in S'$. Tout d'abord, $\sigma_{(a)}$ fixe a . De plus, le fait que les sous-graphes de Γ engendrés par les triangles de T_S sont stabilisés par $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$ entraîne, par le corollaire 2.12, que $\sigma_{(a)}$ stabilise chaque triangle de $T_{S'}$ contenant a . Par conséquent $\sigma_{(a)}^\bullet$ stabilise $\text{supp}(S')$ (en effet, $\sigma_{(a)}^\bullet$ fixe tous les éléments de $\text{supp}(S')$ individuellement, sauf possiblement i et j), et donc $\sigma_{(a)}$ stabilise S' .

(iii) Si $T_{S'}$ est un carré, considérons a, b une de ses paires d'arêtes opposées. Alors $\sigma_{(a)}$ fixe a et stabilise $\{a, b\}$ par (i). Puisque S' n'est pas inclus dans un graphe complet de T_S , l'application $\sigma_{(a)}^\bullet$ fixe les quatre sommets de $T_{S'}$ individuellement, ou interchange simultanément les sommets de a et de b . Donc $\sigma_{(a)}$ stabilise S' .

(iv) Supposons finalement que $S' = \{a, b\}$ est une paire d'arêtes adjacentes de T_S non incluse dans un de ses triangles ou un de ses carrés. Alors Γ' est composé de deux $(\mathbf{1}, aba)$ -géodésiques : $\langle \mathbf{1}, a, ab, aba \rangle$ et $\langle \mathbf{1}, b, ba, bab \rangle$. Si elles sont envoyées respectivement par σ sur les $(\mathbf{1}, \sigma(aba))$ -géodésiques $\langle \mathbf{1}, a, aa_1, aa_1a_2 \rangle$ et $\langle \mathbf{1}, b, bb_1, bb_1b_2 \rangle$, alors $aa_1a_2 = bb_1b_2$. Pour vérifier que σ stabilise Γ' , il suffit de prouver que $b_1 = a_2 = a$ et $a_1 = b_2 = b$.

Considérons $T_{\{a, a_1, a_2\}}$. Puisque $\{a, a_1\} = \sigma_{(a)}(\{a, b\})$ et que $\{a_1, a_2\} = \sigma_{(ab)}(\{a, b\})$, alors $\{a, a_1\}$ et $\{a_1, a_2\}$ sont des paires d'arêtes adjacentes de T_S non incluses dans un de ses triangles ou un de ses carrés. Par conséquent $T_{\{a, a_1, a_2\}}$ est isomorphe ou bien à une chaîne de longueur 2, avec $a_2 = a$, ou à une chaîne de longueur 3 ayant a_1 comme arête centrale, ou à $K_{1,3}$.

Prouvons d'abord que les deux derniers cas sont impossibles. Supposons par exemple que nous sommes dans le second cas et que $a = (12)$, $a_1 = (23)$ et $a_2 = (34)$; Le troisième cas peut être éliminé de façon similaire. Puisque $bb_1b_2 = aa_1a_2 = (1234)$, alors $\{1, 2, 3, 4\}$ est un sous-ensemble de $\text{supp}(\{b, b_1, b_2\})$. De plus $|\text{supp}(\{b, b_1, b_2\})| \leq 4$, puisque b, b_1, b_2 est une chaîne d'arêtes adjacentes, comme a, a_1 , et a_2 . Donc $\text{supp}(\{b, b_1, b_2\}) = \{1, 2, 3, 4\}$. Remarquons aussi que $(14), (13), (24) \notin S$, car les paires $\{a, a_1\}$ et $\{a_1, a_2\}$ ne font partie d'aucun triangle ou carré de T_S . Il en découle que $\{b, b_1, b_2\} \subseteq \{(12), (23), (34)\}$. Puisque b est une transposition adjacente à $a = (12)$, que b_1 est adjacente à b et

que b_2 est adjacente à b_1 , cela laisse deux possibilités : le triplet b, b_1, b_2 est égal à $(23), (12), (23)$ ou à $(23), (34), (23)$. Dans chacun de ces deux cas le produit bb_1b_2 est différent de (1234) . Cela est une contradiction.

Par conséquent $a_2 = a$ et $T_{\{a, a_1, a_2\}}$ est une chaîne de longueur 2, et de façon similaire, $b_2 = b$ et $T_{\{b, b_1, b_2\}}$ est une chaîne de longueur 2. Il reste à vérifier que $a_1 = b$ et $b_1 = a$.

Supposons que $a = (12)$ et $b = (23)$. Puisque a_1 est adjacente à a et qu'aucun triangle de T_S ne contient a et b , alors la transposition a_1 est égale à $(1i)$ avec $i \notin \{1, 2, 3\}$, ou à $(2i)$ avec $i \notin \{1, 2\}$. Dans le premier cas $b_1 = baa_1a_2b_2 = baa_1ab = (3i)$ forme un carré dans T_S avec a, b et a_1 . Dans le second cas, si $i \neq 3$, alors $b_1 = (1i)$ n'est pas adjacente à b . Donc $a_1 = (23) = b$ et $b_1 = (12) = a$. Cela conclut la preuve. \square

Si S' est un sous-ensemble de S d'une des quatre formes énumérées dans la proposition 2.14 et $\Gamma' = \Gamma(S')$, alors pour tout $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ et $a \in S'$,

$$\sigma|_{V(\Gamma')} \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma'$$

et

$$\sigma_{(a)}|_{S'} = (\sigma|_{\Gamma'})_{(a)} \in (\text{Aut}^{(1)}\Gamma')_{(a)} = \Delta_a(\Gamma').$$

Il est donc intéressant de déterminer, pour chacune de ces formes de S' , le groupe $\text{Aut}^{(1)}\Gamma'$ et les groupes $\Delta_a(\Gamma')$, $a \in S'$.

Proposition 2.15. *Soit S' un ensemble de transpositions de \mathfrak{S}_n , G' le groupe engendré par S' et $\Gamma' = \Gamma(S')$.*

- (i) *Si $T_{S'}$ est une paire d'arêtes adjacentes, alors $\text{Aut}^{(1)}\Gamma' = \{\text{Id}_{G'}\}$, et $\Delta_a(\Gamma') = \{\text{Id}_{S'}\}$ pour tout $a \in S'$.*
- (ii) *Si $T_{S'}$ est un graphe complet d'ordre supérieur à 2, alors $\text{Aut}^{(1)}\Gamma' = \{1_{G'}, \iota\}$, où $\iota(x) = x^{-1}$. De plus, $\iota_{(x)}^\bullet = x$ pour tout $x \in G'$, et $\Delta_a(\Gamma')^\bullet = \{\text{Id}_{\text{supp}(S')}, a\}$ pour tout $a \in S'$.*
- (iii) *Si $T_{S'}$ est un carré et $S' = \{a_k = (ik i_{(k+1) \bmod 4}) : k = 0, 1, 2, 3\}$, alors $\text{Aut}^{(1)}\Gamma' = \{\text{Id}_{G'}, \rho_1, \rho_2, \rho_1 \circ \rho_2\}$. Les automorphismes ρ_1 et ρ_2 interchangent les sommets*

des deux carrés de Γ' : l'automorphisme ρ_1 interchange a_0a_3 , $a_0a_3a_0$, a_2a_1 , $a_0a_3a_2$ avec a_0a_1 , $a_0a_1a_2$, a_2a_3 , $a_0a_1a_0$ et ρ_2 interchange a_1a_0 , $a_1a_0a_1$, a_3a_2 , $a_1a_0a_3$ avec a_1a_2 , $a_1a_2a_3$, a_3a_0 , $a_1a_2a_1$. De plus

$$(\rho_1)_{a_0a_3}^\bullet = (\rho_2)_{(a_1)}^\bullet = (\rho_1 \circ \rho_2)_{(a_1)}^\bullet = (i_0 i_3)(i_1 i_2) = a_1a_3,$$

$$(\rho_1)_{(a_0)}^\bullet = (\rho_2)_{(a_1a_0)}^\bullet = (\rho_1 \circ \rho_2)_{(a_0)}^\bullet = (i_0 i_1)(i_2 i_3) = a_0a_2,$$

$$\Delta_{a_k}(\Gamma')^\bullet = \{\text{Id}_{\text{supp}(S')}, a_k a_{(k+2) \bmod 4}\}.$$

DÉMONSTRATION.

(i) et (ii). Si $T_{S'}$ est une paire d'arêtes, alors Γ' est un cycle de longueur 6 si les arêtes sont adjacentes, et est un carré sinon. Donc $\text{Aut}^{(1)}\Gamma' = \{\text{Id}_{G'}\}$.

(iii). Si $T_{S'}$ est un graphe complet, alors S' est un sous-ensemble normal de G' . Par conséquent, il est facile de voir que l'inversion ι appartient à $\text{Aut}^{(1)}\Gamma'$. De plus, si $x \in V(\Gamma')$, alors $\iota_{(x)}(a) = \iota(x)^{-1}\iota(xa) = xax^{-1}$. Ainsi $\iota_{(x)} = r(\gamma_x)$ ou encore $\iota_{(x)}^\bullet = x$, donc $\Delta_a(\Gamma')^\bullet = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma')_{(a)}^\bullet \supseteq \{\text{Id}_{\text{supp}(S')}, a\}$.

Pour démontrer que $\text{Aut}^{(1)}\Gamma' = \{\text{Id}_{G'}, \iota\}$, vérifions d'abord que

$$\Delta_a(\Gamma')^\bullet = (\text{Aut}^{(1)}\Gamma')_{(a)}^\bullet \subseteq \{\text{Id}_{\text{supp}(S')}, a\}.$$

Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma'$ et $a = (ij) \in S'$. Puisque $\sigma_{(a)}$ fixe a et stabilise les triangles de $T_{S'}$ contenant a (par les propositions 2.13 et 2.14), alors $\sigma_{(a)}^\bullet$ fixe tous les éléments de $\text{supp}(S')$, sauf possiblement i et j . Donc $\sigma_{(a)}^\bullet$ est égal à $\text{Id}_{\text{supp}(S')}$ ou à a . Cela démontre ce que l'on voulait.

Considérons à présent un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}\Gamma$. Montrons que si pour $x \in V(\Gamma')$ il existe $a \in S'$ tel que $\sigma_{(xa)} \neq \sigma_{(x)}$, alors

$$\sigma_{(xb)}^\bullet = \sigma_{(x)}^\bullet \circ b, \text{ pour tout } b \in S'.$$

Soit $x \in V(\Gamma')$ et $a \in S'$ tels que $\sigma_{(xa)} \neq \sigma_{(x)}$. Par la proposition 1.16, il existe $\tau \in \text{Aut}_{S'}G$ et $\nu \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ vérifiant

$$\sigma^{(x)} = \tau \circ \nu.$$

Par les propriétés (P.6) et (P.12),

$$\sigma_{(xb)} = (\sigma^{(x)})_{(b)} = r(\tau) \circ \nu_{(b)} = \sigma_{(x)} \circ \nu_{(b)}, \text{ pour tout } b \in S' \quad (2.4)$$

car

$$\sigma_{(x)} = (\sigma^{(x)})_{(1)} = r(\tau) \circ \nu_{(1)} = r(\tau).$$

Comme $\sigma_{(xa)} \neq \sigma_{(x)}$, l'équation (2.4) implique que $\nu_{(a)} \neq \text{Id}_{S'}$, donc que $\nu_{(a)}^\bullet = a$, car $\nu_{(a)}^\bullet \in (\text{Aut}^{(1)} \Gamma')_{(a)}^\bullet = \Delta_a(\Gamma')^\bullet$. De plus, si b est une arête de $T_{S'}$ adjacente à a , et c est la troisième arête du triangle de $T_{S'}$ contenant a et b , alors $aca = b$, donc

$$\nu_{(b)}(a) = \nu_{(b)}^{-1} \nu_{(ba)} = b \nu_{(ac)} = b \nu_{(a)} \nu_{(a)}(c) = b \alpha_a(c) = bab = c.$$

Par conséquent $\nu_{(b)}^\bullet = b$, car $\text{Id}_{\text{supp}(S')} \neq \nu_{(b)}^\bullet \in (\text{Aut}^{(1)} \Gamma')_{(b)}^\bullet = \Delta_b(\Gamma')^\bullet$. Finalement, en répétant le même raisonnement avec les arêtes de $T_{S'}$ adjacentes aux arêtes voisines de a , on obtient que $\nu_{(b)}^\bullet = b$, pour tout $b \in S'$, donc que

$$\sigma_{(xb)}^\bullet = \sigma_{(x)}^\bullet \circ b, \text{ pour tout } b \in S'.$$

Considérons enfin un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma'$. À l'aide de ce qui a été prouvé précédemment on peut démontrer, en utilisant le fait que Γ est connexe, que $\sigma_{(x)} = \text{Id}_{S'}$ pour tout $x \in V(\Gamma')$, ou que $\sigma_{(x)}^\bullet = x$ pour tout $x \in V(\Gamma')$. Donc, par la proposition 1.21, σ est égal à $\text{Id}_{G'}$ ou à ι .

La preuve de la troisième partie de la proposition est laissée au lecteur et peut être obtenue à l'aide de la représentation du graphe MBS(4) donnée à la page suivante. \square

Ce résultat a comme corollaire la proposition suivante :

Proposition 2.16. *Le graphe de tri par percolation modifié MBS(4) et les graphes à transpositions complètes $\text{CT}(n)$, $n \geq 3$, ne sont pas holomorphes. De plus, $\text{Aut}^{(1)} \text{CT}(n) \simeq \mathbb{Z}_2$ et $\text{Aut}^{(1)} \text{MBS}(4) \simeq V$ (le groupe de Klein).*

Remarque 2.17. Il était facile de prédire que les graphes $\text{CT}(n)$, $n \geq 3$, ne sont pas holomorphes puisque ces graphes sont des graphes de Cayley normaux¹ basés sur des

¹Un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est normal si S est un sous-ensemble normal de G , c'est-à-dire si $xSx^{-1} = S$ pour tout $x \in G$.

groupes non abéliens. En effet, si G est un groupe non abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley normal sur G , l'inversion ι est un automorphisme appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma$ qui n'est pas un automorphisme de G , donc $\text{Aut}_1\Gamma \neq \text{Aut}_S G$. Nous verrons, au chapitre 4, que l'inversion appartient à une famille plus large d'automorphismes de graphes de Cayley qui ne sont pas des automorphismes de groupes : la famille des automorphismes croisés non triviaux.

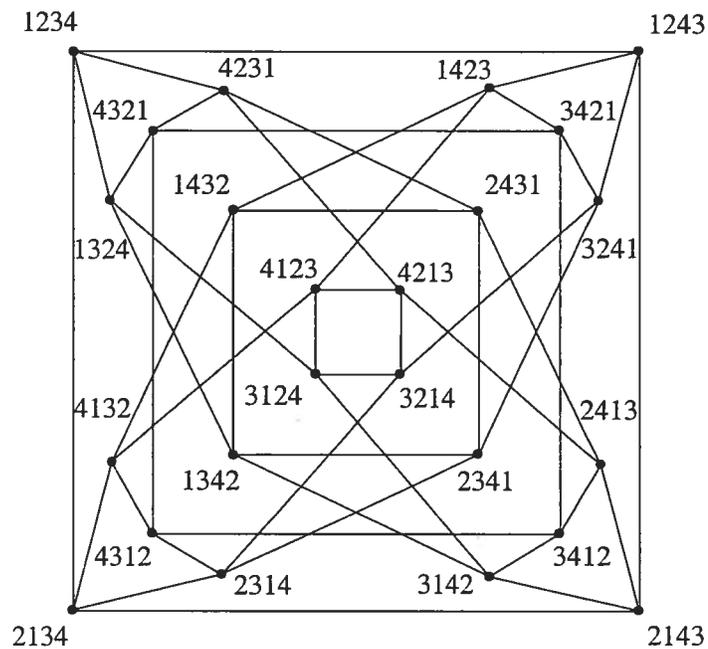


FIG. 2.1. Le graphe de Cayley $\text{MBS}(4) = \Gamma(\{(12), (23), (34), (14)\})$

Les deux propositions précédentes ont comme corollaire le résultat suivant qui sera utile pour calculer $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ dans le cas général.

Corollaire 2.18. *Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$. Si a, b est une paire d'arêtes non adjacentes de T_S ou une paire d'arêtes adjacentes de T_S non incluses dans un de ses carrés ou un de ses triangles, alors*

$$\sigma_{(a)}(b) = b. \quad (2.5)$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$, $S' = \{a, b\}$ une paire d'arêtes telle que décrite dans l'énoncé du résultat, G' le groupe engendré par S' et $\Gamma' = \Gamma(G', S')$. Par la proposition 2.14,

$$\sigma|_{G'} \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma'$$

et

$$\sigma_{(a)}|_{S'} = (\sigma|_{G'})_{(a)}.$$

Par conséquent, puisque par la proposition 2.15 $\text{Aut}^{(1)} \Gamma'$ est trivial, alors $\sigma_{(a)}|_{S'}$ l'est aussi, donc $\sigma_{(a)}(b) = b$. \square

Nous sommes maintenant prêts à calculer $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$ dans le cas où T_S est connexe.

Théorème 2.19. *Si T_S est un graphe connexe qui n'est ni un carré, ni un graphe complet d'ordre supérieur à 2, alors $\text{Aut}^{(1)} \Gamma = \{\text{Id}_G\}$.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 2.11 il suffit de prouver que

$$\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)} \Gamma)_{(a)} = \{\text{Id}_S\} \text{ pour tout } a \in S.$$

Soit $\sigma \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$ et $a \in S$. Nous prouverons que $\sigma_{(a)} = \text{Id}_S$ par contradiction. Supposons l'existence d'un $b \in S$ tel que $\sigma_{(a)}(b) \neq b$. Nous savons, par la proposition 2.13 et le corollaire 2.18, que $\sigma_{(a)}$ fixe a , les arêtes de T_S non adjacentes à a et les arêtes adjacentes à a qui ne sont pas incluses dans un triangle ou un carré de T_S avec a . Donc a, b sont ou bien deux arêtes d'un triangle de T_S ou deux arêtes adjacentes d'un carré de T_S .

Supposons d'abord que a et b appartiennent à un triangle de T_S . Soit S' un sous-ensemble maximal de S contenant $\{a, b\}$ et formant un graphe complet dans T_S . Considérons G' le groupe engendré par S' , et $\Gamma' = \Gamma(G', S')$.

Par la proposition 2.14, $\sigma|_{G'} \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma'$ et $\sigma_{(x)}|_{S'} \in \text{Aut}L(T_{S'})$ pour tout $x \in G'$. De plus $\sigma_{(a)}(b) \neq b$ implique que $\sigma|_{G'}$ n'est pas égal à $\text{Id}_{G'}$. Donc, par la proposition 2.15,

$$\sigma_{(x)}^\bullet|_{\text{supp}(S')} = x|_{\text{supp}(S')} \text{ pour tout } x \in G'. \quad (2.6)$$

Remarquons d'abord que l'équation (2.6) implique qu'aucune paire de sommets de $T_{S'}$ ont un voisin commun dans $\text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$. Pour le voir, supposons que i', j' est

une telle paire et que $i \in \text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$ est un de leurs voisins communs. Alors, par le corollaire 2.18, si $k' \in \text{supp}(S')$ est différent de i', j' , la localisation $\sigma_{(j'k')}$ fixe (ii') , car $(j'k')$ est non adjacente à (ii') . Donc l'application $\sigma_{(j'k')}$ fixe i , puisqu'elle stabilise $\text{supp}(S')$. De plus $\sigma_{(j'k')}(j') = k'$, par (2.6). Par conséquent $\sigma_{(j'k')}((ij')) = (ik')$. Comme cela est vrai pour tout $k' \in \text{supp}(S')$ différent de i' et j' , alors i est adjacent à tous les sommets de $T_{S'}$. Cela contredit la maximalité de $T_{S'}$.

Remarquons aussi qu'il n'y a pas de carré dans T_S ayant une arête $(ij) \in S \setminus S'$ et une arête $(i'j') \in S'$. Dans le cas contraire, si (ii') et (jj') sont les deux autres arêtes d'un de ces carrés, et $k' \in \text{supp}(S')$ est un sommet différent de i', j' , alors $\sigma_{(i'k')}$ fixe (ij) et $\sigma_{(i'k')}(i') = k'$ par le corollaire 2.18 et l'équation (2.6). Par conséquent $\sigma_{(i'k')}((ii'))$ est ou bien égal à (ik') ou à (jk') . Donc i ou j possède deux voisins dans $T_{S'}$. Cela constitue une contradiction à notre première observation.

Par hypothèse T_S n'est pas un graphe complet. Donc il existe $i \in \text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$ et $i' \in \text{supp}(S')$ tels que $(ii') \in S$. Si j' est un sommet de $T_{S'}$ différent de i' , alors $\sigma_{(i'j')}$ fixe (ii') , car, par les deux paragraphes précédents, aucun triangle et aucun carré de T_S ne contiennent $(i'j')$ et (ii') . Mais $\sigma_{(i'j')}(i') = j'$. Contradiction.

Supposons à présent que a, b sont deux arêtes adjacentes d'un carré de T_S non incluses dans un de ses triangles. Soit $S' = \{(i'_k i'_{(k+1) \bmod 4}) : k = 0, \dots, 3\}$ les arêtes de ce carré, avec $a = (i'_0 i'_1)$ et $b = (i'_1 i'_2)$. Soit G' le groupe engendré par S' , et $\Gamma' = \Gamma(G', S')$.

Puisque $T_{S'}$ n'est pas inclus dans un graphe complet de T_S , la proposition 2.14 entraîne que $\sigma|_{G'} \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma'$ et que $\sigma_{(x)}|_{S'} \in \text{Aut}L(T_{S'})$ pour tout $x \in G'$.

L'hypothèse $\sigma_{(a)}(b) \neq b$ implique, par la proposition 2.15, que $\sigma_{(a)}|_{\text{supp}(S')} = (i'_0 i'_1)(i'_2 i'_3)$. Elle entraîne aussi que $\sigma|_{G'}$ n'est pas égal à $\text{Id}_{G'}$, et donc, par la proposition 2.15, que $\sigma_{(x)}|_{\text{supp}(S')} = (i'_0 i'_3)(i'_1 i'_2)$ pour un $x \in G'$.

Par hypothèse T_S n'est pas un carré. Il s'en suit qu'ou bien $(i'_1 i'_3) \in S$, ou bien $(i_{k_0} i'_{k_0}) \in S$ avec $i_{k_0} \in \text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$ et $i'_{k_0} \in \text{supp}(S')$.

Si $(i'_1 i'_3) \in S$, alors $\sigma_{(a)}((i'_1 i'_3)) = (i'_0 i'_2) \in S$ entraîne que a et b appartiennent à un triangle de T_S . Cela est une contradiction.

Si $(i_{k_0} i'_{k_0}) \in S$ avec $i_{k_0} \in \text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$ et $i'_{k_0} \in \text{supp}(S')$, alors l'action de $\sigma_{(a)}$ et $\sigma_{(x)}$ sur cette arête donne, pour $k \in \{0, \dots, 3\}$, un sommet $i_k \in \text{supp}(S) \setminus \text{supp}(S')$ adjacent à i'_k . Finalement l'arête $(i_2 i'_2)$ est fixé par $\sigma_{(a)}$, puisqu'elle n'est pas adjacente à a . Mais $\sigma_{(a)}^\bullet(i'_2) = i'_3$. Cela est aussi une contradiction. \square

Du théorème 2.19 découle notre résultat principal :

Théorème 2.20. *Si T_S est un graphe connexe, alors Γ est holomorphe si et seulement si T_S n'est ni un carré, ni un graphe complet d'ordre supérieur à 2. De plus, dans ce cas, si $n \geq 3$, alors*

$$\text{Aut}_1 \Gamma \simeq \text{Aut} T_S.$$

Remarque 2.21. Rappelons que si T_S est connexe, le groupe engendré par S qui constitue l'ensemble de sommets de Γ est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Ce résultat démontre donc que les symétries de Γ , un graphe d'ordre $n!$, sont inscrites dans le graphe de transpositions T_S , un graphe d'ordre n .

Le théorème 2.20 montre en particulier que les graphes suivants sont holomorphes :

- les graphes de tri par percolation $\text{BS}(n)$;
- les graphes de tri par percolation modifiés $\text{MBS}(n)$, à l'exception de $\text{MST}(3)$ et $\text{MST}(4)$;
- les graphes étoiles $\text{ST}(n)$;
- les graphes étoiles généralisés $\text{MST}(n, k)$, à l'exception de $\text{MST}(4, 2)$;

Il reste à étudier les cas où le graphe de transpositions n'est pas connexe. Soit S_1, S_2, \dots, S_m les composantes de $L(T_S)$, et posons $G_i = \langle S_i \rangle$. Alors, pour $i \neq j$, les éléments de G_i commutent avec les éléments de G_j . Par conséquent $V(\Gamma)$ est isomorphe au produit direct des groupes G_1, G_2, \dots, G_m . Si $x^{(i)}$ dénote la i^{me} coordonnée de $x \in V(\Gamma)$ dans ce produit, il est facile de vérifier que l'application $x \mapsto (x^{(i)})_{i=1, \dots, m}$ est un isomorphisme de graphes de Γ dans le produit cartésien $\square_{i=1}^m \Gamma(G_i, S_i)$. Rappelons que le produit cartésien des graphes Γ_1 et Γ_2 est le graphe ayant comme ensemble de sommets $V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$ et comme ensemble d'arêtes l'union des ensembles

$$\{[(x^{(1)}, x^{(2)}), (x^{(1)}, y^{(2)})] : [x^{(2)}, y^{(2)}] \in E(\Gamma_2)\}$$

et

$$\{[(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, x^{(2)})] : [x^{(1)}, y^{(1)}] \in E(\Gamma_1)\}.$$

Le prochain théorème montre que $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$ est isomorphe au produit direct $\prod_{i=1}^m \text{Aut}^{(1)} \Gamma(G_i, S_i)$.

Théorème 2.22. *Soit S_1, S_2, \dots, S_m les composantes connexes de $L(T_S)$ et G_i le groupe engendré par S_i , pour $i = 1, \dots, m$. Alors*

$$\text{Aut}^{(1)} \Gamma \simeq \prod_{i=1}^m \text{Aut}^{(1)} \Gamma(G_i, S_i).$$

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que l'application $(\sigma_i)_{i=1, \dots, m} \mapsto \tilde{\sigma}$ définie par $\tilde{\sigma}(x)^{(i)} = \sigma_i(x^{(i)})$ est un monomorphisme de $\prod_{i=1}^m \text{Aut}^{(1)} \Gamma(G_i, S_i)$ dans $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$.

Pour prouver qu'elle est surjective, considérons $\sigma \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$, et prouvons que $\sigma|_{G_i} \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma(G_i, S_i)$, pour $i = 1, \dots, m$, et que $(\sigma|_{G_i})_{i=1, \dots, m} \mapsto \sigma$.

Observons d'abord que les groupes $\Delta_a = (\text{Aut}^{(1)} \Gamma)_{(a)}$, $a \in S$, stabilisent S_1, S_2, \dots, S_m . En effet, si $\tau \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma$ et $a \in S_i$, alors $\tau_{(a)}$ fixe toutes les arêtes de T_S non adjacente à a . Par conséquent, $\tau_{(a)}$ fixe point par point S_j , pour $j \neq i$, et stabilise S_i .

Cette observation montre, par la proposition 2.12, que les graphes $\Gamma(G_i, S_i)$, $i = 1, \dots, m$, sont stabilisés par $\text{Aut}^{(1)} \Gamma$, et donc que $\sigma|_{G_i} \in \text{Aut}^{(1)} \Gamma(G_i, S_i)$ pour $i = 1, \dots, m$.

Elle entraîne aussi que $\sigma_{(x)}$ stabilise S_1, S_2, \dots, S_m pour tout $x \in V(\Gamma)$, puisque par le corollaire 1.24, $\sigma_{(x)}$ est un produit d'éléments des groupes Δ_a , $a \in S$.

Il reste à vérifier que $(\sigma|_{G_i})_{i=1, \dots, m} \mapsto \sigma$, c'est-à-dire que

$$\sigma(x)^{(i)} = \sigma|_{G_i}(x^{(i)}) \text{ pour tout } x \in G \text{ et } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Soit $x \in V(\Gamma)$ et $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$. Choisissons $a_1, a_2, \dots, a_j \in S_{i_0}$ et $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_k \in S \setminus S_{i_0}$ tels que $x = a_1 a_2 \dots a_j \dots a_k$ et posons $x_i = a_1 a_2 \dots a_i$ pour $i = 0, 1, \dots, m$. Alors $x^{(i_0)} = a_1 a_2 \dots a_j = x_j$ et, par la proposition 1.21,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \prod_{i=1}^k \sigma_{(x_{i-1})}(a_i) = \prod_{i=1}^j \sigma_{(x_{i-1})}(a_i) \prod_{i=j+1}^k \sigma_{(x_{i-1})}(a_i) \\ &= \sigma(x_j) \prod_{i=j+1}^k \sigma_{(x_{i-1})}(a_i) = \sigma(x^{(i_0)}) \prod_{i=j+1}^k \sigma_{(x_{i-1})}(a_i). \end{aligned}$$

Or, par les observations faites précédemment,

$$\sigma(x^{(i_0)}) \in G_{i_0}$$

et

$$\prod_{i=j+1}^k \sigma_{(x_{i-1})}(a_i) \in \prod_{i \neq i_0} G_i.$$

Donc $\sigma(x)^{(i_0)} = \sigma(x^{(i_0)}) = \sigma|_{G_{i_0}}(x^{(i_0)})$. □

Théorème 2.23. *Le graphe de Cayley Γ est holomorphe si et seulement si aucune des composantes connexes de T_S n'est un carré, ou un graphe complet d'ordre supérieur à 2. De plus, dans ce cas, si T_S ne contient pas d'arêtes isolées, alors*

$$\text{Aut}_1 \Gamma \simeq \text{Aut} T_S.$$

Le théorème 2.23 montre en particulier que les hypercubes $H(n)$ sont holomorphes.

Chapitre 3

LE DIAGRAMME DES COMMUTATEURS

3.1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de démontrer l'existence de nouvelles classes de graphes de Cayley holomorphes, cela afin d'appuyer la conjecture selon laquelle la vaste majorité des graphes de Cayley sont holomorphes.

Pour cela, nous introduisons trois sortes de cycles présents dans tous les graphes de Cayley, les carrés commutateurs, les cycles monochromatiques et les cycles bichromatiques, qui correspondent à trois propriétés de stabilité locale : un graphe de Cayley est à commutateurs stables si ses automorphismes préservent les carrés commutateurs, à puissances stables si ses automorphismes préservent les cycles monochromatiques, et à cycles bichromatiques stables si ses automorphismes préservent les cycles bichromatiques. Ces trois propriétés de stabilité locale donnent une caractérisation de l'holomorphie : un graphe de Cayley est holomorphe si et seulement s'il vérifie ces trois propriétés.

Il est malheureusement difficile en pratique de déterminer si un graphe de Cayley est à cycles bichromatiques stables. Par contre, il est dans certains cas facile de démontrer qu'un graphe est à puissances stables, et il est souvent facile démontrer qu'un graphe est à commutateurs stables. C'est pourquoi nous avons consacré ce chapitre à déterminer sous quelles conditions les graphes de Cayley à commutateurs stables, et les graphes de Cayley à commutateurs stables et à puissances stables, sont holomorphes.

Pour y parvenir nous introduirons le diagramme des commutateurs. Il jouera le rôle du graphe de transpositions pour les ensembles de générateurs qui ne sont pas

constitués uniquement de transpositions, et nous permettra de traduire, en terme des localisations et des déviateurs, les propriétés de stabilité locale. Cela nous permettra de démontrer entre autres que :

- les graphes de Cayley basés sur un groupe abélien sont holomorphes si et seulement s'ils sont à commutateurs stables ; nous montrerons en particulier que tout graphe de Cayley basé sur un groupe abélien d'ordre impair et engendré par un sous-ensemble de Cayley minimal est holomorphe ;
- les graphes de Cayley engendrés par un ensemble d'involutions sont holomorphes s'ils sont à commutateurs stables et si leur diagramme des commutateurs est rigide ;
- plus généralement, les graphes de Cayley orientés engendrés par un sous-ensemble de Cayley anti-symétrique sont holomorphes s'ils sont à commutateurs stables et si leur diagramme des commutateurs est rigide ;
- les graphes de Cayley basés sur le groupe symétrique ou alterné, engendrés par des transpositions et des cycles de longueur 3, sont holomorphes s'ils sont à commutateur stable et si leur diagramme des commutateurs est quasi-rigide.

3.2. PRÉALABLES

Rappelons que l'ombre d'un graphe orienté est le graphe non orienté $\bar{\Gamma}$ obtenu en oubliant l'orientation des arcs. Si Γ est un graphe de Cayley orienté, son ombre peut-être obtenue comme suit :

Proposition 3.1. (*Ombre de Γ*) Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. L'ombre de Γ est le graphe de Cayley

$$\bar{\Gamma} = \Gamma(G, \bar{S}).$$

Définition 3.2. (*Ensemble fermé dans S*) Soit G un groupe et $S \subseteq G$. Un sous-ensemble $S_1 \subseteq S$ est dit *fermé* dans S si

$$S_1 = \bar{S}_1 \cap S.$$

3.3. PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ LOCALE

Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G . Tout au long de ce chapitre Γ dénotera le graphe de Cayley orienté $\Gamma(G, S)$.

Le résultat suivant est le point de départ de notre cheminement.

Proposition 3.3. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Alors Γ est holomorphe si et seulement si pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$:*

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \quad \forall a, b \in \bar{S}. \quad (3.1)$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 1.25 il suffit de vérifier que pour tout $a \in \bar{S}$,

$$\Delta_a = \{(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}_1\Gamma\} = \text{Id}_{\bar{S}}.$$

Soit $a \in \bar{S}$ et $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$. Pour tout $b \in \bar{S}$

$$\sigma_{(a)}(b) = \sigma(a)^{-1}\sigma(ab) = \sigma(a)^{-1}\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(b) = \sigma_{(1)}(b),$$

donc $(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} = \text{Id}_{\bar{S}}$. □

La condition (3.1) peut se diviser en trois sous-conditions :

(i) Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a, b \in \bar{S}$ tels que $b \notin \{a, a^{-1}\}$ et $ab = ba$

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = \sigma(b)\sigma(a);$$

(ii) Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$

$$\sigma(a^2) = \sigma(a)^2;$$

(iii) Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a, b \in \bar{S}$ tels que $ab \neq ba$

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \neq \sigma(b)\sigma(a).$$

Remarquons que ces conditions dépendent uniquement de l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ sur $B_2(\mathbf{1})$. C'est pourquoi nous les appellerons *les conditions d'action locale*.

Les trois conditions d'action locale sont équivalentes à trois propriétés de stabilité locale. Pour introduire ces propriétés nous aurons besoin de trois éléments de structure de Γ . Dans la définition de ces éléments de structure, nous considérerons chaque arc de Γ comme étant coloré par le générateur qu'il représente.

- **Carrés commutateurs** : Si a, b sont deux éléments de \bar{S} tels que $b \notin \{a, a^{-1}\}$ et $ab = ba$, nous dénotons $Q_{a,b}$ le sous-graphe de Γ ayant comme ensemble de sommets $\{1, a, ab, b\}$ et comme arcs tous les arcs de Γ portant une couleur appartenant à l'ensemble $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\} \cap S$. Puisque les $Q_{a,b}$ sont des carrés et sont induits par des relations de commutation, nous les appellerons les *carrés commutateurs* de Γ .
- **Cycles monochromatiques** : Si a est un élément de \bar{S} , le graphe

$$\Gamma_a = \begin{cases} \Gamma(\{a\}) & \text{si } a \in S, \\ \Gamma(\{a^{-1}\}) & \text{si } a \notin S. \end{cases}$$

est un cycle de Γ , composé uniquement d'arcs de couleur a ou d'arcs de couleur a^{-1} . C'est pourquoi nous appellerons ces cycles, les *cycles monochromatiques* de Γ .

- **Cycles bichromatiques** : Si a, b sont deux éléments de \bar{S} tels que $ab \neq ba$, nous dénotons $B_{a,b}$ le sous-graphe de Γ ayant comme sommets

$$1, a, ab, \dots, (ab)^{n-1}, (ab)^{n-1}a, (ab)^n = 1$$

et comme arcs tous les arcs de Γ joignant deux sommets consécutifs de cette liste, c'est-à-dire deux sommets de la forme $(ab)^i, (ab)^i a$ ou $(ab)^i a, (ab)^{i+1}$. Remarquons que ce graphe est un cycle composé d'arcs de couleur a et/ou d'arcs de couleur inverse a^{-1} , et d'arcs de couleur b et/ou d'arcs de couleurs inverse b^{-1} . C'est pourquoi nous appellerons ces cycles, les *cycles bichromatiques* de Γ .

Voici les trois propriétés de stabilité locale dont nous parlions plus haut. *Ces trois propriétés sont satisfaites par tous les graphes de Cayley holomorphes*. Elles ont trait à l'action locale de $\text{Aut}_1 \Gamma$, en ce sens que l'on peut déterminer si elles sont satisfaites en considérant uniquement l'action de $\text{Aut}_1 \Gamma$ "proche" de l'identité. Nous prouverons plus loin qu'elles sont équivalentes aux trois conditions d'action locale vues plus haut.

Propriété 1. (*Stabilité des carrés commutateurs*)

Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, et $a, b \in \bar{S}$ tels que $b \notin \{a, a^{-1}\}$ et $ab = ba$,

$\sigma(Q_{a,b})$ est un carré commutateur de Γ ,

c'est-à-dire

$$\sigma(Q_{a,b}) = Q_{\sigma(a),\sigma(b)}. \quad (3.2)$$

(3.2) est équivalent à

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = \sigma(b)\sigma(a). \quad (3.3)$$

Notons d'abord que $\sigma(Q_{a,b}) = Q_{\sigma(a),\sigma(b)}$ signifie que les sommets et les arcs de $Q_{a,b}$ sont envoyés sur les arcs et sommets de $Q_{\sigma(a),\sigma(b)}$. Si Γ vérifie la propriété 1, nous dirons que Γ est un *graphe à commutateurs stables* (CS, "commutator stable"). Remarquons que si Γ est holomorphe, Γ est CS, car les automorphismes appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma$ satisfont l'équation (3.3), puisqu'ils sont des automorphismes de groupes. Remarquons aussi qu'il suffit de connaître l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ sur $B_2(1)$ pour déterminer que Γ est CS.

Propriété 2. (*Stabilité des cycles monochromatiques*)

Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$,

$\sigma(\Gamma_a)$ est un cycle monochromatique de Γ ,

c'est-à-dire

$$\sigma(\Gamma_a) = \Gamma_{\sigma(a)}. \quad (3.4)$$

(3.4) est équivalent à

$$\sigma(a^i) = \sigma(a)^i \text{ pour tout } i \in \mathbf{N}. \quad (3.5)$$

Quand Γ vérifiera la propriété 2, nous dirons qu'il est un *graphe à puissances stables* (PS, "power stable"). Cette propriété est aussi satisfaite par tous les graphes de Cayley holomorphes. Notons que plus les éléments de S sont d'ordre élevé, plus les cycles monochromatiques sont longs et donc, en général, plus il est difficile de démontrer que Γ est PS.

Remarque 3.4. L'équation (3.5) implique qu'un élément a d'ordre 2 de \bar{S} est à puissances stables (c'est-à-dire satisfait l'équation (3.5) pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$) si et seulement si il est envoyé par tout automorphisme appartenant à $\text{Aut}_1\Gamma$ sur un élément du même ordre. Ainsi, les involutions de \bar{S} sont à puissances stables si et seulement si elles sont stabilisées (comme ensemble) par les automorphismes dans $\text{Aut}_1\Gamma$. Cela implique en particulier que tout graphe de Cayley engendré par des involutions est PS.

Bien que cette propriété dépend de l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ loin de l'identité quand certains générateurs sont d'ordre élevé, on peut s'assurer qu'elle est vérifiée si l'on connaît l'action de $\text{Aut}_1\Gamma$ sur $N_1(\mathbf{1}) = \bar{S}$:

Proposition 3.5. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) Γ est PS ;
- (ii) $\text{Aut}_1\Gamma$ permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$;
(Nous dirons que $\text{Aut}_1\Gamma$ stabilise les inverses dans \bar{S}) ;
- (iii) Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$ pour tout $a \in \bar{S}$.

Remarque 3.6. Il suffit de s'assurer que $\text{Aut}_1\Gamma$ permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$ d'ordre supérieur à 2, pour vérifier que $\text{Aut}_1\Gamma$ stabilise les inverses dans \bar{S} .

DÉMONSTRATION.

(i) \implies (ii). Si Γ est PS, $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$, σ envoie Γ_a sur un cycle monochromatique, soit $\Gamma_{\sigma(a)}$. Cela entraîne que

$$\sigma(N(\mathbf{1}; \Gamma_a)) = N(\mathbf{1}; \Gamma_{\sigma(a)}),$$

donc que

$$\sigma(\{a, a^{-1}\}) = \{\sigma(a), \sigma(a)^{-1}\}.$$

(ii) \implies (iii). Soit $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$. Si l'ordre de a est supérieur à 2, le fait que $\text{Aut}_1\Gamma$ permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$, entraîne que la paire $\{a, a^{-1}\}$ est envoyée par σ sur $\{\sigma(a), \sigma(a)^{-1}\}$. Cela implique d'une part que

$$\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1},$$

et d'autre part que $\text{Aut}_1\Gamma$ stabilise l'ensemble des éléments de \bar{S} d'ordre supérieur à 2, donc aussi ses éléments d'ordre 2. Par conséquent, si $o(a) = 2$,

$$\sigma(a^{-1}) = \sigma(a) = \sigma(a)^{-1},$$

car $\sigma(a)$ est d'ordre 2.

(iii) \implies (i). Soit $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a \in \bar{S}$. Montrons que l'équation (3.5) est satisfaite.

Remarquons que si a est d'ordre n et $1 < j < n$, alors

$$\begin{aligned} \sigma^{(a^j)}(a)^{-1} &= \sigma^{(a^j)}(a^{-1}) \quad (\text{par propriété}) \\ &= (\sigma^{(a^j)^{-1}}\sigma^{(a^j)})\sigma^{(a^j)}(a^{-1}) \\ &= \sigma^{(a^j)^{-1}}\sigma^{(a^j a^{-1})} \quad (\text{par 1.5}) \\ &= \sigma^{(a^{j-1}a)^{-1}}\sigma^{(a^{j-1})} \\ &= (\sigma^{(a^{j-1})}\sigma^{(a^{j-1})}(a))^{-1}\sigma^{(a^{j-1})} \quad (\text{par 1.5}) \\ &= (\sigma^{(a^{j-1})}(a))^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma_{(a^j)}(a) = \sigma^{(a^j)}(a) = \sigma^{(a^{j-1})}(a) = \sigma_{(a^{j-1})}(a).$$

Puisque cela est vrai pour tout $1 < j < n$, on obtient

$$\sigma_{(a^{n-1})}(a) = \sigma_{(a^{n-2})}(a) = \dots = \sigma_{(1)}(a) = \sigma(a).$$

Cela implique, par la proposition 1.21, que pour $1 < j < n$

$$\sigma^{(a^j)} = \prod_{i=0}^{j-1} \sigma_{(a^i)}(a) = \sigma(a)^j.$$

□

Propriété 3. (*Stabilité des cycles bichromatiques*)

Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $a, b \in \bar{S}$ tels que $ab \neq ba$,

$\sigma(B_{a,b})$ est un cycle bichromatique de Γ ,

c'est-à-dire

$$\sigma(B_{a,b}) = B_{\sigma(a),\sigma(b)}. \quad (3.6)$$

(3.6) est équivalent à $\sigma(a)\sigma(b) \neq \sigma(b)\sigma(a)$ et, pour tout $i \in \mathbf{N}$,

$$\sigma((ab)^i) = (\sigma(a)\sigma(b))^i \quad \text{et} \quad \sigma((ab)^i a) = (\sigma(a)\sigma(b))^i \sigma(a). \quad (3.7)$$

Quand Γ vérifiera la propriété 3, nous dirons qu'il est un *graphe à cycles bichromatiques stables* (BS, "bichromatic stable"). Cette propriété est aussi satisfaite par tous les graphes de Cayley holomorphes.

La stabilité des cycles bichromatiques est, des trois propriétés de stabilité locale, la plus difficile à vérifier. Cela vient du fait que les cycles bichromatiques sont souvent longs et qu'il faut donc tenir compte de la structure de Γ relativement loin de l'identité pour s'assurer qu'ils sont stabilisés.

3.3.1. Caractérisation de l'holomorphie par les propriétés de stabilité locale

Pour conclure cette section nous démontrons l'équivalence entre les propriétés de stabilité locale et les conditions d'action locales. Cela nous donnera une caractérisation de l'holomorphie par les propriétés de stabilité locale. Nous ne l'utiliserons pas mais elle est néanmoins intéressante.

Proposition 3.7. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$.*

- (i) Γ vérifie la condition d'action locale (i) si et seulement si Γ est CS.
- (ii) Γ vérifie la condition d'action locale (ii) si et seulement si Γ est PS.
- (iii) Si Γ est BS alors Γ vérifie la condition d'action locale (iii). De plus, si Γ est PS, alors Γ est BS si et seulement si Γ vérifie la condition d'action locale (iii).

DÉMONSTRATION. L'équivalence (i) et l'implication (\implies) de (ii) sont évidentes. Pour montrer l'implication (\impliedby) de (ii) il suffit, par la proposition 3.5, de vérifier que pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$ et $a \in \bar{S}$.

$$\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}.$$

Soit $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$ et $a \in \bar{S}$. Considérons l'automorphisme $\sigma^{(a)} \in \text{Aut}_1 \Gamma$ défini par $\sigma^{(a)}(x) = \sigma(a)^{-1} \sigma(ax)$. Tout d'abord

$$\sigma^{(a)}(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} \sigma(aa^{-1}) = \sigma(a)^{-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma(a)^{-1} \sigma(a)^{-1} &= \sigma^{(a)}(a^{-1}) \sigma^{(a)}(a^{-1}) \\ &= \sigma^{(a)}(a^{-1} a^{-1}) \quad (\text{par hypothèse}) \\ &= \sigma(a)^{-1} \sigma(aa^{-1} a^{-1}) \\ &= \sigma(a)^{-1} \sigma(a^{-1}), \end{aligned}$$

donc $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.

La preuve du point (iii) est laissée au lecteur. □

Le prochain théorème montre que les propriétés de stabilité locale caractérisent l'holomorphie.

Théorème 3.8. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Alors Γ est holomorphe si et seulement si Γ est CS, PS et BS.*

DÉMONSTRATION. Découle des propositions 3.3 et 3.7. □

3.4. DIAGRAMME DES COMMUTATEURS

La raison pour laquelle nous n'utiliserons pas la caractérisation de l'holomorphie de la section précédente pour déterminer si un graphe de Cayley est holomorphe est qu'il est en général difficile de vérifier qu'un graphe est à cycles bichromatiques stables. Par contre, il est dans certains cas facile de démontrer qu'un graphe est à puissances stables, et il est souvent facile démontrer qu'un graphe est à commutateurs stables. C'est pourquoi nous avons consacré ce chapitre à déterminer sous quelles conditions les graphes de Cayley à commutateurs stables, et les graphes de Cayley à commutateurs stables et à puissances stables, sont holomorphes.

Afin d'exploiter au maximum la propriété de ces graphes, nous introduisons le diagramme des commutateurs qui représente, sous forme d'un graphe défini sur \bar{S} , les relations de commutation entre les éléments de S , et, quand il est coloré, l'ordre des cycles monochromatiques. Le diagramme des commutateurs nous permettra de traduire, en terme des localisations et des déviateurs, les propriétés de stabilité locale. Nous utiliserons ces résultats à la section 3.6 pour démontrer l'holomorphie de classes importantes de graphes de Cayley.

Définition 3.9. (*Diagramme des commutateurs*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G .

- (i) Le *diagramme des commutateurs* de S , noté C_S , est le graphe non orienté ayant \bar{S} comme ensemble de sommets et $\{[a, b] : b \notin \{a, a^{-1}\} \text{ et } ab = ba\}$ comme ensemble d'arêtes.
- (ii) Le *diagramme des commutateurs coloré* de S , noté C_S^{col} , est obtenu en colorant les sommets de C_S par leur ordre dans G .

Remarque 3.10.

- (i) Remarquons que deux éléments de \bar{S} sont adjacents dans C_S si et seulement si ils appartiennent à un carré commutateur de Γ .
- (ii) Si a est un élément de \bar{S} d'ordre supérieur à 2, alors $\{a, a^{-1}\}$ est une paire de sommets jumeaux de C_S .
- (iii) Nous utiliserons parfois le *diagramme des commutateurs quotient* $C_{S/-}$ et le *diagramme des commutateurs coloré quotient* $C_{S/-}^{\text{col}}$ obtenus en identifiant chaque élément de \bar{S} à son inverse. Les sommets de ces deux diagrammes sont donc les $\bar{a} = \{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$, et leurs arêtes les $[\bar{a}, \bar{b}]$, avec $\bar{a} \neq \bar{b}$ et $ab = ba$.

Voici quelques exemples de diagrammes des commutateurs.

Exemple 3.11. Soit S un ensemble de transpositions et G le groupe engendré par S . Puisque deux transpositions commutent si et seulement si elles sont disjointes, le diagramme des commutateurs de S est le complémentaire du line-graphe de T_S . Par

exemple, si $S = \{(12), (23), (34), (14)\}$ le graphe de transpositions et le diagramme des commutateurs sont donnés à la figure 3.1 :

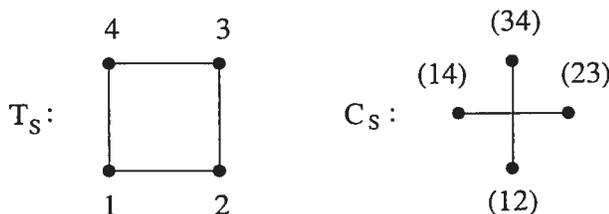
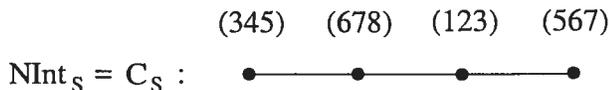


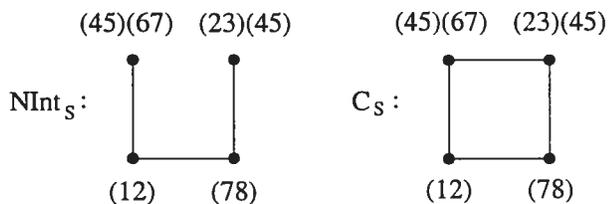
FIG. 3.1. Le graphe de transpositions T_S et le diagramme des commutateurs C_S .

Si S est un ensemble de permutations, le *graphe de non-intersection des supports des éléments de S* , noté $NInt_S$, est le graphe ayant \bar{S} comme ensemble de sommets et dans lequel a est adjacent à b si et seulement si $\text{supp}(a) \cap \text{supp}(b) = \emptyset$. Le diagramme des commutateurs de S contient toujours $NInt_S$ comme sous-graphe partiel (spanning subgraph) :

Exemple 3.12. Si $S = \{(123), (345), (456), (678)\}$ les graphes $NInt_S$ et C_S sont :



Exemple 3.13. Si $S = \{(12), (23)(45), (45)(67), (78)\}$, les graphes $NInt_S$ et C_S sont :



3.4.1. Diagramme des commutateurs et localisations

Nous déterminons ici les contraintes qu'imposent les propriétés de stabilité locale à l'action de $\text{Aut}_1 \Gamma$ restreinte à \bar{S} , cela afin d'obtenir de l'information sur les localisations.

Soit $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$. Rappelons que

$$r(\sigma) = \sigma|_{\bar{S}}$$

est une permutation de \bar{S} qui stabilise S . Nous verrons que si Γ est CS, alors $r(\sigma)$ est un automorphisme de C_S , donc que

$$r(\sigma) \in \text{Aut}_S C_S.$$

Si $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ dénote l'ensemble des automorphismes dans $\text{Aut}_S C_S$ qui

- permutent entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$;
(Nous dirons de ces automorphismes qu'ils *stabilisent les inverses*);
- préservent l'ordre des éléments de \bar{S} , vus comme éléments de G ,

nous montrerons aussi que si Γ est CS et PS,

$$r(\sigma) \in \text{Aut}_S C_S^{\text{col}}.$$

Dans la suite de ce texte nous ignorerons les automorphismes de C_S qui ne stabilisent pas S . Nous dirons donc de $\text{Aut}_S C_S$ et $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ qu'ils sont respectivement les "groupes d'automorphismes" des diagrammes C_S et C_S^{col} .

Remarque 3.14. Si a et a^{-1} sont deux éléments distincts de S , la transposition (aa^{-1}) est un automorphisme de C_S et de C_S^{col} .

Proposition 3.15. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$.

- (i) Si Γ est CS, alors $r(\sigma)$, la restriction de σ à \bar{S} , est un automorphisme de C_S .
- (ii) Si Γ est PS, alors $r(\sigma)$
 - stabilise les inverses;
 - préserve l'ordre des éléments de \bar{S} , vus comme éléments de G .
- (iii) Si Γ est CS et PS, alors $r(\sigma)$ est un automorphisme de C_S^{col} .

Ainsi, si Γ est CS, r est un homomorphisme de $\text{Aut}_1\Gamma$ dans $\text{Aut}_S C_S$, et si Γ est CS et PS, r est un homomorphisme de $\text{Aut}_1\Gamma$ dans $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$.

La proposition 3.15 découle du lemme suivant :

Lemme 3.16. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$.*

- (i) *Si Γ est CS, alors $r(\sigma)$ permute entre elles les paires appartenant à $\{\{a, b\} \subseteq \bar{S} : b \notin \{a, a^{-1}\} \text{ et } ab = ba\}$.*
- (ii) *Si Γ est PS, alors $r(\sigma)$*
 - *stabilise les inverses, c'est-à-dire permute entre eux les ensembles appartenant à $\{\{a, a^{-1}\} : a \in \bar{S}\}$;*
 - *préserve l'ordre des éléments de \bar{S} , vus comme éléments de G .*
- (iii) *Si Γ est BS, alors $r(\sigma)$ permute entre elles les paires appartenant à $\{\{a, b\} \subseteq \bar{S} : ab \neq ba\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$.

(i) Si $\{a, b\}$ est une paire de la forme décrite dans l'énoncé, a, b appartiennent à un carré commutateur, soit $Q_{a,b}$. Par hypothèse, le carré commutateur $Q_{a,b}$ est envoyé par σ sur un autre carré commutateur, soit $Q_{\sigma(a), \sigma(b)}$. Cela entraîne que $r(\sigma)(\{a, b\}) = \sigma(\{a, b\}) = \{\sigma(a), \sigma(b)\}$ est une paire de la même forme que $\{a, b\}$.

(ii) Si Γ est PS et $a \in \bar{S}$, σ envoie Γ_a sur un cycle monochromatique, soit $\Gamma_{\sigma(a)}$. Puisque σ est un automorphisme, ces deux cycles sont de la même longueur. Donc $o(\sigma(a)) = o(a)$. De plus, par la proposition 3.5, σ permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$. Par conséquent $r(\sigma)$, la restriction de σ à \bar{S} , fait de même. Donc $r(\sigma)$ stabilise les inverses.

(iii) Cette vérification est laissée au lecteur. □

Puisque les localisations $\sigma_{(x)}$ sont obtenues en prenant la restriction à \bar{S} des automorphismes $\sigma^{(x)} \in \text{Aut}_1\Gamma$, la proposition 3.15 donne :

Corollaire 3.17. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté, $\sigma \in \text{Aut}\Gamma$, $x \in V(\Gamma)$ et $\sigma_{(x)}$, la localisation de σ en x .*

- (i) *Si Γ est CS, alors $\sigma_{(x)} \in \text{Aut}_S C_S$;*
- (ii) *Si Γ est CS et PS, alors $\sigma_{(x)} \in \text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$.*

Le résultat suivant est une espèce de réciproque de l'énoncé (ii) de la proposition 3.15. Il montre que sous l'hypothèse que $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, les deux premières propriétés de stabilité locale ne sont pas indépendantes.

Proposition 3.18. *Soit Γ un graphe de Cayley orienté CS . Si $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, alors Γ est PS. En particulier, si $C_{S/-}$ ne contient pas de sommets jumeaux, alors Γ est PS.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 3.15, l'image de r (la restriction de l'action de $\text{Aut}_1 \Gamma$ à \bar{S}) est un sous-groupe de $\text{Aut}_S C_S$. Puisque par hypothèse $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, $\text{Aut}_1 \Gamma$ fait de même, et le résultat découle de la proposition 3.5.

Pour la deuxième partie de la proposition, montrons que si $C_{S/-}$ ne contient pas de sommets jumeaux, alors $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, c'est-à-dire permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$. Soit $\sigma \in \text{Aut} C_S$ et $a \in \bar{S}$ d'ordre supérieur à 2. Puisque $\{a, a^{-1}\}$ est une paire de sommets jumeaux de C_S , alors $\{\sigma(a), \sigma(a^{-1})\}$ est aussi une paire de sommets jumeaux de C_S , donc $\overline{\sigma(a)}$ et $\overline{\sigma(a^{-1})}$ ont les mêmes voisins dans $C_{S/-}$. Comme $C_{S/-}$ ne contient pas de sommets jumeaux, $\overline{\sigma(a)} = \overline{\sigma(a^{-1})}$. Cela entraîne que $\{\sigma(a), \sigma(a^{-1})\} = \{\sigma(a), \sigma(a)^{-1}\}$. \square

3.4.2. Diagramme des commutateurs et déviateurs

Dans cette section nous déterminons les contraintes qu'imposent les propriétés de stabilité locale aux déviateurs Δ_a , $a \in \bar{S}$. Ces résultats nous seront utiles puisque les déviateurs donnent une caractérisation de l'holomorphie.

Dans le lemme suivant, $N(a)$ dénote l'ensemble des voisins de a dans C_S et Δ_a fixe $N(a)$ signifie que $\eta(b) = b$ pour tout $\eta \in \Delta_a$ et $b \in N(a)$.

Lemme 3.19. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et $a \in \bar{S}$.*

- (i) *Si Γ est CS, alors le déviateur Δ_a fixe $N(a)$;*
- (ii) *Si Γ est PS, alors le déviateur Δ_a fixe $\{a, a^{-1}\}$;*
- (iii) *Si Γ est BS, alors le déviateur Δ_a fixe $\bar{S} \setminus (N(a) \cup \{a, a^{-1}\})$.*

Remarque 3.20.

- (i) $N(a)$ est l'ensemble des éléments de \bar{S} qui appartiennent à un carré commutateur de Γ avec a ;
- (ii) $\{a, a^{-1}\}$ est l'ensemble des éléments de \bar{S} qui appartiennent à un cycle monochromatique de Γ avec a ;
- (iii) $\bar{S} \setminus (N(a) \cup \{a, a^{-1}\})$ est l'ensemble des éléments de \bar{S} qui appartiennent à un cycle bichromatique de Γ avec a .

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.19. Rappelons que

$$\Delta_a = \{(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}_1\Gamma\}.$$

Soit $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$, et $a, b \in \bar{S}$. L'équation (1.4) entraîne que

$$\sigma_{(a)}(b) = \sigma(a)^{-1}\sigma(ab). \quad (3.8)$$

- (i) Si Γ est CS et b est un voisin de a , alors

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

donc

$$\sigma_{(a)}(b) = (\sigma(a))^{-1}(\sigma(a)\sigma(b)) = \sigma(b) = \sigma_{(1)}(b).$$

Par conséquent

$$(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)}(b) = b.$$

- (ii) Si Γ est PS, alors l'équation

$$\sigma(a^2) = \sigma(a)^2,$$

implique par (3.8) que

$$\sigma_{(a)}(a) = \sigma(a)^{-1}\sigma(a)^2 = \sigma(a) = \sigma_{(1)}(a).$$

De plus,

$$\sigma_{(a)}(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}\sigma(aa^{-1}) = \sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1}) = \sigma_{(1)}(a^{-1}).$$

Ainsi, pour $b \in \{a, a^{-1}\}$, on a

$$(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)}(b) = b.$$

(iii) Si Γ est BS et $b \in \bar{S} \setminus (N(a) \cup \{a, a^{-1}\})$, alors

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b),$$

donc

$$\sigma_{(a)}(b) = (\sigma(a))^{-1}(\sigma(a)\sigma(b)) = \sigma(b) = \sigma_{(1)}(b).$$

Par conséquent

$$(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)}(b) = b.$$

□

Pour $a \in \bar{S}$, définissons les groupes

$$D_a = \{\eta \in \text{Aut}_S C_S : \eta \text{ fixe } N(a)\},$$

et

$$D_a^{\text{col}} = \{\eta \in \text{Aut}_S C_S^{\text{col}} : \eta \text{ fixe } B_1(a, a^{-1})\},$$

où $B_1(a, a^{-1}) := N(a) \cup N(a^{-1}) = N(a) \cup \{a, a^{-1}\}$.

D_a est le sous-groupe des automorphismes de C_S qui fixe les voisins de a , et D_a^{col} le sous-groupe des automorphismes de C_S^{col} qui fixe les voisins de a , ainsi que a et a^{-1} .

Voici le résultat principal de cette section :

Proposition 3.21. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et $a \in \bar{S}$.*

- (i) *Si Γ est CS, alors le déviateur Δ_a satisfait à $\Delta_a \subseteq D_a$;*
- (ii) *Si Γ est CS et PS, alors le déviateur Δ_a satisfait à $\Delta_a \subseteq D_a^{\text{col}}$.*

DÉMONSTRATION.

(i) Puisque Γ est CS, le corollaire 3.17 implique que les localisations appartiennent à $\text{Aut}_S C_S$. Donc $\Delta_a = \{(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma\} \subseteq \text{Aut}_S C_S$. Le reste découle du lemme 3.19.

(ii) Se prouve de façon similaire à (i). □

3.4.3. Décomposition de $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$

Pour conclure cette section, nous montrons une décomposition de $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ que nous emploierons à la section 3.6.

Rappelons que par définition les automorphisme appartenant à $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ stabilisent les inverses. Cela permet d'obtenir une factorisation du groupe d'automorphismes du diagramme des commutateurs coloré $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ dont l'un des deux facteurs sera $\text{Aut}_{S/-}^{\text{col}}$. Considérons l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : \text{Aut}_S C_S^{\text{col}} &\longrightarrow \text{Aut}_{S/-}^{\text{col}} \\ \eta &\longmapsto \bar{\eta} \end{aligned}$$

où $\bar{\eta}$ est définie en posant $\bar{\eta}(\bar{a}) = \overline{\eta(a)}$. Notons que $\bar{\eta}$ est bien défini car $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ permute entre eux les ensembles $\{a, a^{-1}\}$, $a \in \bar{S}$. Le noyau de ϕ est

$$\text{Ker}(\phi) = \langle \{(aa^{-1}) : o(a) > 2 \text{ et } \{a, a^{-1}\} \subseteq S\} \rangle.$$

De plus, puisque les automorphismes dans $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ stabilisent S , ils stabilisent (comme ensemble) l'ensemble des paires $\{\{a, a^{-1}\} : \{a, a^{-1}\} \subseteq S\}$. Ainsi,

$$\text{Im}(\phi) = \{\eta \in \text{Aut}_{S/-}^{\text{col}} : \eta \text{ stabilise } \{\bar{a} : \{a, a^{-1}\} \subseteq S\}\}.$$

On peut montrer que $\text{Ker}(\phi)$ possède un complément dans $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$, c'est-à-dire un sous-groupe de $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ qui intersecte $\text{Ker}(\phi)$ de façon triviale et qui engendre $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ avec $\text{Ker}(\phi)$. Par conséquent

$$\text{Aut}_S C_S^{\text{col}} \simeq \text{Ker}(\phi) \rtimes \text{Im}(\phi).$$

Quand S est un sous-ensemble de Cayley de G symétrique ou anti-symétrique cela donne la factorisation suivante du groupe d'automorphismes du diagramme des commutateurs coloré.

Proposition 3.22. *Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G .*

(i) *Si S est symétrique*

$$\text{Aut}_S C_S^{\text{col}} \simeq \text{Ker}(\phi) \rtimes \text{Aut}_{S/-}^{\text{col}}.$$

En particulier $o(\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}) = 2^k o(\text{Aut} C_{S/-}^{\text{col}})$, où k est le nombre de paires de la forme $\{a, a^{-1}\}$, vérifiant $o(a) > 2$ et $\{a, a^{-1}\} \subseteq S$.

(ii) Si S est anti-symétrique

$$\text{Aut}_S C_S^{\text{col}} \simeq \text{Aut} C_{S/-}^{\text{col}}.$$

En particulier $o(\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}) = o(\text{Aut} C_{S/-}^{\text{col}})$.

DÉMONSTRATION. Découle du fait que si S est symétrique, alors $\text{Im}(\phi) = \text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$, et que si S est anti-symétrique, $\text{Ker}(\phi) = \text{Id}$ et $\text{Im}(\phi) = \text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$. \square

3.5. CLASSES DE GRAPHES DE CAYLEY CS ET PS

Dans la prochaine section, nous présentons des résultats donnant des conditions sous lesquelles les graphes de Cayley CS, et les graphes de Cayley CS et PS sont holomorphes. Nous exhibons ici quelques classes importantes de graphes de Cayley CS et, CS et PS auxquels nous pourrons appliquer ces résultats.

Nous aurons besoin de résultats sur les cycles de longueur 3 et 4 présents dans les graphes de Cayley.

Soit

$$Q : \langle x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = x_0 \rangle$$

un cycle de $\bar{\Gamma}$. Si $a_i = x_{i-1}^{-1} x_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, sont les générateurs associés aux arcs du cycle, alors

$$a_1 a_2 \dots a_l = \mathbf{1}. \quad (3.9)$$

Nous dirons du cycle Q qu'il est induit par cette relation. Les relations obtenues à partir de la relation (3.9) par des multiplications à gauche et à droite par des a_i sont dites équivalentes à la relation (3.9). Si

$$b_1 \dots b_j = c_1 \dots c_k, \quad j + k = l,$$

est une de ces relations, nous dirons aussi du cycle Q qu'il est induit par cette relation.

Lemme 3.23. (Cycles de longueur 3) Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Tout cycle de longueur 3 dans $\bar{\Gamma}$ est induit par une relation entre les éléments de \bar{S} d'un des deux types suivants :

- (i) $a = bc$,
où $a, b, c \in \bar{S}$, tels que $b, c \notin \{a, a^{-1}\}$;
- (ii) $a^3 = 1$,
où $a \in \bar{S}$;

Lemme 3.24. (Cycles de longueur 4) Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Tout cycle de longueur 4 dans $\bar{\Gamma}$ est induit par une relation entre les éléments de \bar{S} d'un des six types suivants :

- (i) $a = bcd$, où $a, b, c, d \in \bar{S}$, tels que $b, c, d \notin \{a, a^{-1}\}$;
- (ii) $a^4 = 1$, où $a \in \bar{S}$, tel que $o(a) = 4$;
- (iii) $a^2 = b^2$, où $a, b \in \bar{S}$, tels que $o(a), o(b) > 2$ et $b \notin \{a, a^{-1}\}$;
- (iv) $(ab)^2 = 1$, où $a, b \in \bar{S}$, tels que $o(a) > 2$ ou $o(b) > 2$ et $b \notin \{a, a^{-1}\}$;
- (v) $aba^{-1} = b^{-1}$, où $a, b \in \bar{S}$, tels que $o(b) > 2$ et $b \notin \{a, a^{-1}\}$;
- (vi) $ab = ba$, où $a, b \in \bar{S}$, tels que $b \notin \{a, a^{-1}\}$;

DÉMONSTRATION. Soit $Q : \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = x_0 \rangle$ un cycle de longueur 4 de $\bar{\Gamma}$, et posons $a_i = x_{i-1}^{-1}x_i$, pour $i = 1, \dots, 4$. Alors $a_1a_2a_3a_4 = 1$.

S'il existe $k \in \{1, \dots, 4\}$, tel que $a_i \notin \{a_k, a_k^{-1}\}$ pour tout $i \neq k$, alors, en isolant a_k , on obtient une relation de type (i).

Si on ne peut trouver un tel k , il existe $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ tels que $a_{k_2} = a_{k_1}^{\pm 1}$ et $a_{k_4} = a_{k_3}^{\pm 1}$. Si en plus $a_{k_4} = a_{k_2}^{\pm 1}$, les a_i doivent être tous égaux et d'ordre 4 pour induire un 4-cycle dans $\bar{\Gamma}$. On obtient donc dans ce cas une relation de type (ii). Si $a_{k_4} \neq a_{k_2}^{\pm 1}$, on obtient une relation de la forme $(ab)^2 = 1$ ou $aba^{-1} = b^{-1}$ ou $ab = ba$ dans le cas $|k_2 - k_1| = |k_4 - k_3| = 2$, et une relation de la forme $a^2 = b^2$ dans le cas contraire. Si les contraintes sur l'ordre de a et b énoncées dans le lemme ne sont pas satisfaites, les trois premières relations sont équivalentes à la relation $ab = ba$ et la dernière n'induit

pas de 4-cycle dans $\bar{\Gamma}$. Par contre, si elles le sont, on obtient respectivement une relation de type (iv), (v), (vi), et (iii). \square

Remarque 3.25. Si S est un sous-ensemble de Cayley minimal¹ de G , alors il n'y a pas de relation de longueur 3 ou 4 de type (i) entre les éléments de \bar{S} .

La proposition suivante donne la classe de graphes de Cayley CS la plus grande que nous ayons trouvé.

Proposition 3.26. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. S'il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou (v), alors Γ est CS.

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier, sachant que toutes les relations de longueur 4 entre les éléments de \bar{S} sont de type (vi), que les seuls sous-graphes induits de forme carrée de Γ passant par 1 sont les carrés commutateurs. Il s'en suit que $\text{Aut}_1\Gamma$ stabilise l'ensemble de ces sous-graphes. \square

La classe de graphes de la proposition 3.26 nous permet d'obtenir, à l'aide de la proposition 3.18, une grande classe de graphes de Cayley CS et PS :

Proposition 3.27. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et supposons qu'il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou (v). Si $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, alors Γ est CS et PS. En particulier, si $C_{S/-}$ ne contient pas de sommets jumeaux, alors Γ est CS et PS.

3.5.1. Graphes de Cayley CS et PS basés sur des groupes de permutations

Nous appliquerons dans cette section les résultats de la section 3.5 pour obtenir des graphes de Cayley CS et PS basés sur des groupes de permutations.

Puisque nous nous intéresserons particulièrement aux graphes de Cayley engendrés par des transpositions et des 3-cycles, le lemme suivant nous sera utile.

¹C'est-à-dire pour tout $a \in \bar{S}$, $a \notin \langle \bar{S} \setminus \{a, a^{-1}\} \rangle$.

Lemme 3.28. (*Produits de 2 et 3 cycles*) Les produits possibles de deux cycles non disjoints de longueur 2 ou 3 sont :

- (i) $(i_1 i_2 i_3)(i_3 i_4 i_5) = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$;
- (ii) $(i_1 i_2 i_3)(i_2 i_3 i_4) = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$;
- (iii) $(i_1 i_2 i_3)(i_3 i_2 i_4) = (i_1 i_2 i_4)$;
- (iv) $(i_1 i_2 i_3)(i_2 i_3) = (i_1 i_2)$;
- (v) $(i_1 i_2)(i_1 i_2 i_3) = (i_1 i_3)$;
- (vi) $(i_1 i_2 i_3)(i_3 i_4) = (i_1 i_2 i_3 i_4)$;
- (vii) $(i_1 i_2)(i_2 i_3 i_4) = (i_1 i_2 i_3 i_4)$.

Voici trois classes importantes de graphes de Cayley CS et PS :

Proposition 3.29. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté, où G est un groupe de permutations. Si Γ vérifie une des conditions suivantes, alors Γ est CS et PS.

- (i) S est un ensemble de transpositions.
- (ii) S est constitué d'involutions, et il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 4 de type (i).
- (iii) S est un ensemble de transpositions et de 3-cycles et il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 3 ou 4 de type (i), et de relation de type (iv) pour a ou b d'ordre 2.

DÉMONSTRATION.

(i) Dans le cas où S est un ensemble de transpositions, Γ contient deux types de carrés : les carrés commutateurs et les carrés correspondant à la relation $a = bcb$, où a , b et c forment un triangle dans le graphe de transpositions T_S . Les carrés du second type font partie d'un $K_{3,3}$ de Γ , soit $\Gamma(\{a, b, c\})$, tandis que les carrés commutateurs ne font partie d'aucun $K_{3,3}$. Par conséquent, $\text{Aut}_1 \Gamma$ stabilise l'ensemble des carrés commutateurs. Donc Γ est CS. De plus, par la remarque 3.4, tout graphe de Cayley engendré par des involutions est PS. Donc Γ est PS.

(ii) Puisque S est constitué d'involutions, il y a entre les éléments de \bar{S} uniquement des relations de type (vi). Par la proposition 3.26, Γ est donc CS. De plus Γ est PS par la remarque 3.4.

(iii) Tout d'abord, puisque les seules relations de longueur 3 entre les éléments de \bar{S} sont de type (ii), les seuls triangles de Γ sont les 3-cycles monochromatiques. Ils doivent donc être permutés entre eux par $\text{Aut}_1\Gamma$. Donc Γ est PS.

Pour démontrer que Γ est CS, considérons un carré commutateur Q_{c_0, d_0} , un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}_1\Gamma$ et $Q = \sigma(Q_{c_0, d_0})$. Nous savons que Q est induit par une relation de longueur 4 d'un des six types énoncés dans le lemme 3.24. Montrons qu'il ne peut pas être induit par une relation d'un des cinq premiers types.

A cause des hypothèses, il ne peut être induit par une relation de type (i) ou (ii). Il ne peut pas non plus être induit par une relation de type (iii), car, pour a et b d'ordre 3 et $b \notin \{a, a^{-1}\}$, on a $a^2 \neq b^2$.

Pour vérifier qu'il ne peut être induit par une relation de type (iv) nous procéderons par contradiction. Supposons que Q est induit par une relation de type (iv), c'est-à-dire une relation de la forme $(ab)^2 = 1$, où $a, b \in \bar{S}$. Remarquons que cette relation induit deux 4-cycles passant par $\mathbf{1}$: $\langle \mathbf{1}, a, ab, aba = b^{-1} \rangle$ et $\langle \mathbf{1}, b, ba, bab = a^{-1} \rangle$. Par conséquent, si on pose

$$c = \sigma(c_0) \text{ et } d = \sigma(d_0),$$

on peut supposer sans perdre de généralité (car les rôles de c et d sont interchangeable) que $c, d = a, b^{-1}$ ou $c, d = b, a^{-1}$. Il est facile de vérifier que dans les deux cas

$$(cd^{-1})^2 = 1. \quad (3.10)$$

Puisque cette relation est de type (iv), c et d sont, par hypothèse, d'ordre 3. Comme Γ est PS, la restriction de σ à \bar{S} préserve l'ordre de ses éléments, vus comme éléments de G (voir proposition 3.15(ii)). Donc c_0 et d_0 sont aussi d'ordre 3. Cette constatation et le fait que $c_0d_0 = d_0c_0$ et que $(cd^{-1})^2 = 1$ ont pour conséquence que les deux graphes de la figure 3.2 sont des sous-graphes de $\bar{\Gamma}$. Montrons que l'image par σ du graphe de

gauche de cette figure est le graphe de droite de la même figure. Puisque Γ est PS, on a

$$\sigma(c_0^2) = \sigma(c_0)^2 = c^2.$$

De plus,

$$\sigma(c_0 d_0) = dc^{-1} = dc^2,$$

car dc^{-1} est le quatrième sommet du 4-cycle induit par la relation (3.10). Cela entraîne que

$$\begin{aligned} \sigma^{(d_0)}(c_0) &= \sigma(d_0)^{-1} \sigma(d_0 c_0) = \sigma(d_0)^{-1} \sigma(c_0 d_0) \\ &= d^{-1}(dc^{-1}) \\ &= c^{-1}, \end{aligned}$$

donc que

$$\begin{aligned} \sigma(d_0 c_0^2) &= \sigma(d_0) \sigma^{(d_0)}(c_0^2) \\ &= \sigma(d_0) \sigma^{(d_0)}(c_0)^2 \quad (\text{car } \Gamma \text{ est PS}) \\ &= d(c^{-1})^2 \\ &= dc. \end{aligned}$$

Ainsi

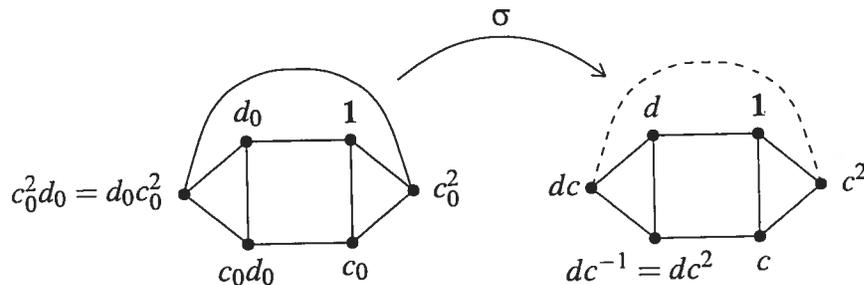


FIG. 3.2. Deux sous-graphes de $\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned} [\sigma(c_0^2 d_0), \sigma(c_0^2)] &= [\sigma(d_0 c_0^2), \sigma(c_0^2)] = [dc, c^2] \\ &= [c^2, dc] \in E(\bar{\Gamma}), \end{aligned}$$

donc

$$(c^2)^{-1}dc = cdc \in \bar{S}.$$

Or, par le lemme 3.28, l'équation (3.10) ne peut être satisfaite par c et d que s'ils sont de la forme $c = (i_1i_2i_3)$ et $d = (i_3i_2i_4)$, ce qui implique que

$$cdc = (i_1i_4)(i_2i_3) \notin \bar{S}.$$

Cela est une contradiction.

On distingue deux cas pour démontrer que Q n'est pas induit par une relation de type (v), c'est-à-dire une relation de la forme

$$aba^{-1} = b^{-1}, \quad (3.11)$$

pour $a, b \in \bar{S}$ tels que $o(b) > 2$ et $b \notin \{a, a^{-1}\}$. Si a est d'ordre 2,

$$aba^{-1} = aba = b^{-1}$$

est une relation équivalente à une relation de type (iv). Cela nous ramène au cas précédent. Sinon, a et b sont d'ordre 3. Supposons sans perdre de généralité que $b = (123)$. Alors, par l'équation (3.11),

$$(132) = b^{-1} = aba^{-1} = (a(1)a(2)a(3)),$$

ce qui entraîne que a doit fixer un des éléments 1, 2, 3, et donc ne peut être un 3-cycle.

Ainsi, Q est induit par une relation de type (vi), puisqu'il n'est pas induit par une relation d'un des cinq premiers types. Donc Q est un carré commutateur. \square

3.5.2. Le graphe d'action

Pour obtenir des classes de graphes CS et PS, à l'aide des énoncés (ii) et (iii) de la proposition 3.29, nous aurons besoin de vérifier qu'il n'y a pas de relation de longueur 3 ou 4 de type (i) entre les éléments de \bar{S} . Dans ce but, rappelons que si S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G , il n'y a pas de relation de ce type entre les éléments de \bar{S} .

Si G est un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley de G , une condition simple permet de s'assurer que S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G . Pour formuler cette condition nous aurons besoin d'un nouveau graphe qui est une généralisation du graphe de transpositions.

Définition 3.30. (*Graphe d'action de S*) Soit G un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley de G . Le *graphe d'action de S* , noté A_S , est le multigraphe orienté à arcs colorés ayant $\text{supp}(G)$ comme ensemble de sommets et dont $E(A_S)$ consiste en les arcs

$$(i, a(i))_a, \quad i \in \text{supp}(a), \quad a \in S,$$

l'indice a signifiant que l'arc est muni de la couleur a .

Remarque 3.31.

- (i) Il peut arriver que $a(i) = a'(i)$ pour deux générateurs distincts $a, a' \in S$. Néanmoins, $(i, a(i))_a$ et $(i, a(i))_{a'}$ sont bien deux arcs distincts de A_S .
- (ii) Si $a, a^{-1} \in S$, nous représenterons dans nos dessins les deux arcs $(i, a(i))_a$ et $(a(i), i)_{a^{-1}}$ comme une arête portant la couleur $\bar{a} = \{a, a^{-1}\}$.

À chaque sous-ensemble $S_1 \subseteq S$ correspond l'ensemble des arcs de A_S portant une des couleurs de S_1 :

$$E(S_1) = \{(i, a(i))_a : a \in S_1, i \in \text{supp}(a)\}.$$

La condition de minimalité pour les ensembles de permutations à laquelle nous avons fait allusion est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.32. *Soit G un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley de G . Si, pour tout $a \in \bar{S}$, $E(a, a^{-1})$ est une coupe² de $A_{\bar{S}}$, alors S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G .*

²Une coupe est un ensemble d'arcs dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \bar{S}$. Comme $E(a, a^{-1})$ est une coupe de $A_{\bar{S}}$, il existe $i, j \in V(A_{\bar{S}})$ tels que $a(i) = j$, et i et j appartiennent à deux composantes différentes de $A_{\bar{S}} - E(a, a^{-1})$. Donc a n'est pas dans le sous-groupe de G engendré par $\bar{S} \setminus \{a, a^{-1}\}$. \square

Remarque 3.33. Ce critère permet de déterminer facilement dans plusieurs cas que S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G . Mais de nombreux sous-ensembles de Cayley S sont minimaux et ne vérifient pas cette condition.

La proposition 3.29(ii) et le lemme précédent entraînent les deux parties du résultat suivant :

Proposition 3.34. *Soit G un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley minimal de G constitué d'involutions. Alors $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est CS et PS.*

En particulier, si S est un ensemble d'involutions tel que pour tout $a \in S$, $E(a)$ est une coupe de A_S , alors Γ est CS et PS.

En particulier, si S est un ensemble de transpositions tel que T_S est une forêt, alors Γ est CS et PS.

La proposition 3.29(iii) et le lemme 3.32 permettent d'obtenir aussi une classe de graphes de Cayley orientés CS et PS engendrés par des transpositions et des cycles de longueur 3.

Proposition 3.35. *Soit G un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley de G constitué de transpositions et de 3-cycles. Alors $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est CS et PS si pour tout $a \in \bar{S}$, $E(a, a^{-1})$ est une coupe de $A_{\bar{S}}$.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 3.29 il suffit de vérifier qu'il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 3 ou 4 de type (i), et de relation de type (iv) pour a ou b d'ordre 2. Puisque pour tout $a \in \bar{S}$, $E(a, a^{-1})$ est une coupe de $A_{\bar{S}}$, alors S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G , donc les relations de type (i) sont prosrites entre les éléments de \bar{S} . De plus, s'il existait une relation de type (iv) pour a ou b d'ordre 2 appartenant à \bar{S} , a et b seraient, par lemme 3.29, de la forme $a = (i_1 i_2), b = (i_2 i_3 i_4)$, dans quel cas $E(a, a^{-1})$ ne serait pas une coupe de $A_{\bar{S}}$, ou de

la forme $a = (i_1 i_2 i_3), b = (i_2 i_3)$, dans quel cas $E(b, b^{-1})$ ne serait pas une coupe de $A_{\bar{S}}$. \square

Remarque 3.36. Le groupe G de la proposition 3.35 est :

- isomorphe à \mathfrak{A}_n , si A_S est connexe et si S est constitué uniquement de 3-cycles ;
- isomorphe à \mathfrak{S}_n , si A_S est connexe et si S contient au moins une transposition ;
- un produit direct de groupes alternés et de groupes symétriques si A_S n'est pas connexe.

3.5.3. Exemples de graphes Cayley CS et PS

Exemple 3.37. Soit G_1 le groupe engendré par l'ensemble

$$S_1 = \{(1, 2, 3)^{\pm 1}, (2, 3, 4, 5, 6)^{\pm 1}, (5, 7)\},$$

dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.3. Alors $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ est CS et PS.

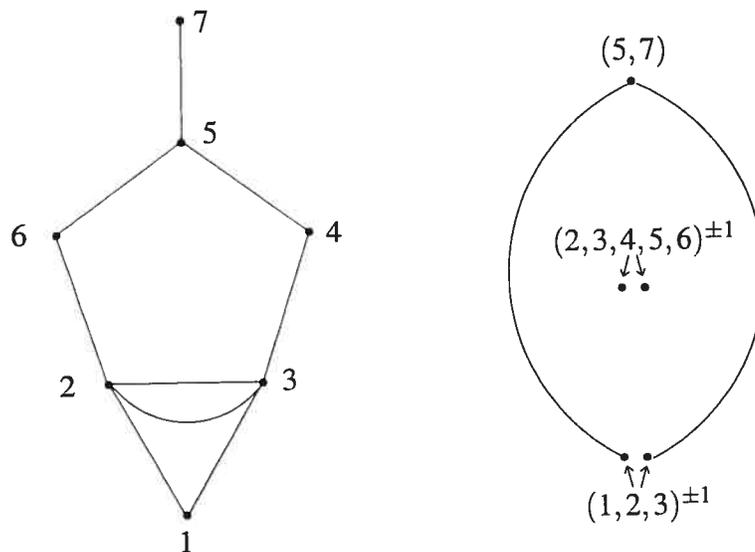


FIG. 3.3. Le graphe d'action A_{S_1} et le diagramme de commutateurs C_{S_1}

DÉMONSTRATION. Pour le prouver il suffit, par la proposition 3.27, de vérifier qu'il n'y a pas entre les éléments de \bar{S}_1 de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou

(v), et que $\text{Aut}_{S_1} C_{S_1}$ stabilise les inverses. Par le lemme 3.32, S_1 est un sous-ensemble de Cayley minimal de G_1 . Donc il n'y a pas de relation de type (i). La vérification de l'absence de relations de type (ii), (iii), (iv), et (v) se fait aisément et est laissée au lecteur. Finalement, on peut s'assurer à l'aide de la figure 3.3 que $\text{Aut}_{S_1} C_{S_1}$ stabilise les inverses. Par conséquent Γ_1 est CS et PS. \square

Dans les exemples suivants S^f dénote \bar{S} , la fermeture de S .

Exemple 3.38. Soit G_2 le groupe engendré par

$$S_2 = \{(1, 2, 3), (2, 14), (3, 4, 5), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (6, 7, 13), (8, 9, 10), (10, 11, 12), (13, 14, 15)\}^f,$$

dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.4. Alors $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ est CS et PS.

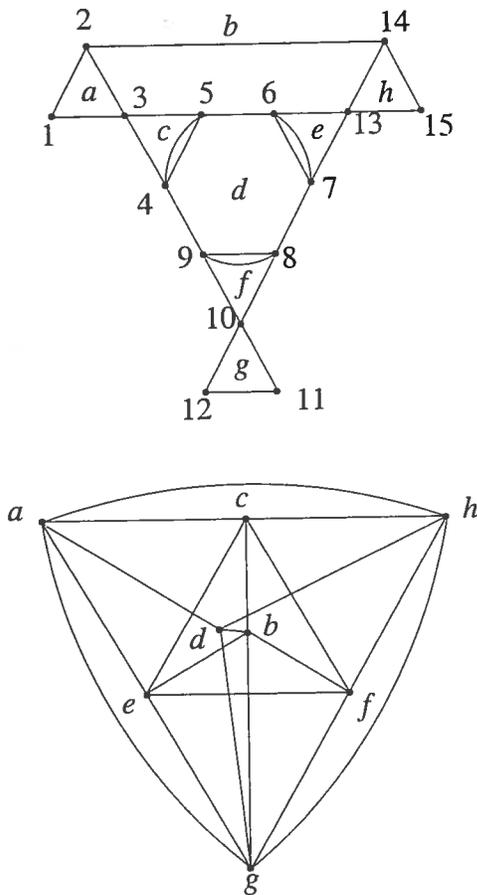


FIG. 3.4. Le graphe d'action A_{S_2} et le diagramme de commutateurs $C_{S_2/-}$

DÉMONSTRATION. Pour le montrer on utilise encore la proposition 3.27. Dans ce cas S_2 n'est pas un sous-ensemble de Cayley minimal de G_2 . Mais on peut quand même montrer qu'il n'y a pas de relation de type (i) entre les éléments de S_2 . Posons $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 14)$, $c = (3, 4, 5)$, $d = (4, 5, 6, 7, 8, 9)$, $e = (6, 7, 13)$, $f = (8, 9, 10)$, $g = (10, 11, 12)$, $h = (13, 14, 15)$. Puisque pour tout $x \in \{a^{\pm 1}, d^{\pm 1}, f^{\pm 1}, g^{\pm 1}, h^{\pm 1}\}$, $E(x, x^{-1})$ est une coupe de A_{S_2} , ces générateurs sont indépendants des autres éléments de S_2 . De plus, pour $x \in \{b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, e^{\pm 1}\}$, il est facile de vérifier, à l'aide du graphe d'action A_{S_2} , que tout produit d'éléments dans $S_2 \setminus \{x, x^{-1}\}$ donnant x , est de longueur supérieur à 4. Cela démontre l'absence de relations de type (i). On peut aussi vérifier aisément l'absence de relation de type (ii), (iii), (iv), et (v).

Finalement, Γ_2 est PS par la proposition 3.18, car $C_{S_2/-}$ ne possède pas de sommets jumeaux. \square

Exemple 3.39. Soit G_3 le groupe engendré par

$$S_3 = \{(1, 2), (2, 3, 4)^{\pm 1}, (4, 5, 6)^{\pm 1}, (6, 7), (3, 5, 8)^{\pm 1}, (8, 9)\},$$

dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.5. Alors, par la proposition 3.35, $\Gamma_3 = \Gamma(G_3, S_3)$ est CS et PS.

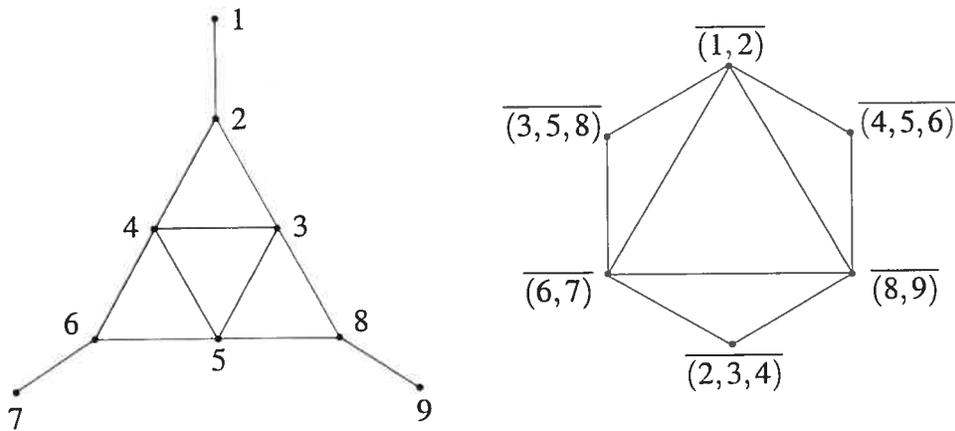


FIG. 3.5. Le graphe d'action A_{S_3} et le diagramme des commutateurs $C_{S_3/-}$

Exemple 3.40. Soit $n \geq 3$ un entier et T_n le sous-ensemble de Cayley du groupe alterné \mathfrak{A}_n , défini par

$$T_n = \begin{cases} \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-1, 2k, 2k+1)\}^f & \text{si } n = 2k+1, \\ \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-2, 2k-1, 2k)\}^f & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.6. Alors, par la proposition 3.35, $\Gamma_n = \Gamma(\mathfrak{A}_n, T_n)$ est CS et PS.

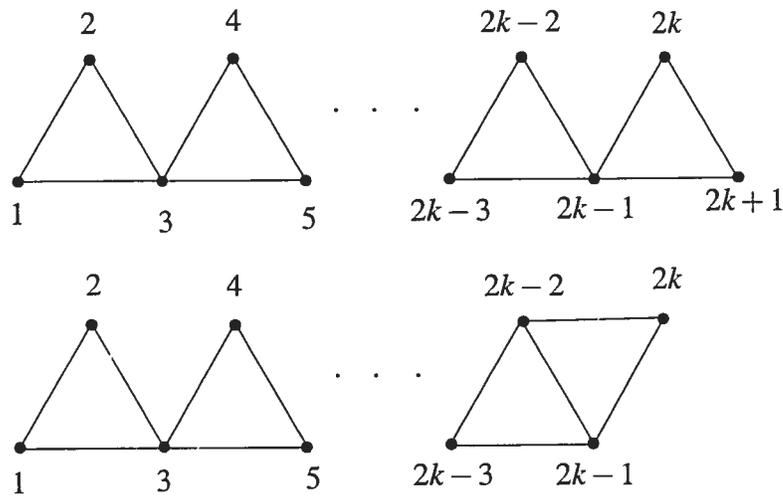


FIG. 3.6. Le graphe d'action A_{T_n} et le diagramme de commutateurs $C_{T_n/-}$

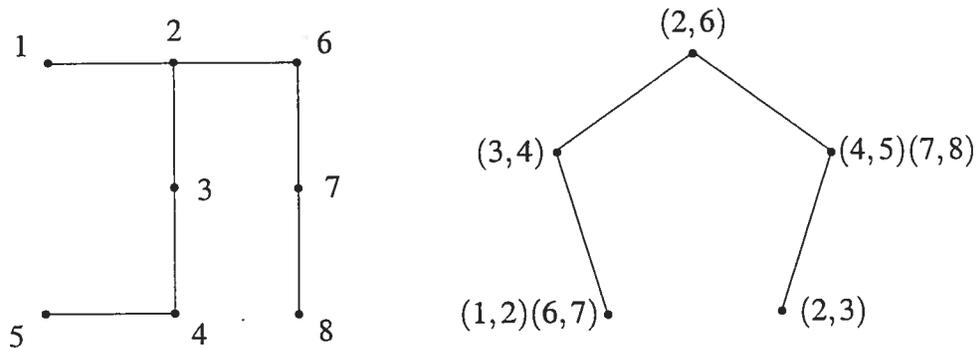


FIG. 3.7. Le graphe d'action A_S et le diagramme de commutateurs C_S

Exemple 3.41. Soit G_4 le groupe engendré par

$$S_4 = \{(1,2)(6,7), (2,3), (2,6), (3,4), (4,5)(7,8)\},$$

dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.7. Alors, par la proposition 3.34, $\Gamma_4 = \Gamma(G_4, S_4)$ est CS et PS.

3.6. RÉSULTATS SUR $\text{Aut}\Gamma$

Nous présentons ici les résultats sur $\text{Aut}\Gamma$ qui découlent de la section 3.4. Les principaux d'entre eux donnent des conditions sous lesquelles les graphes de Cayley CS, et les graphes de Cayley CS et PS sont holomorphes.

3.6.1. Diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}_1\Gamma$

Tout d'abord, les propositions 1.34 et 3.15 donnent un sur-ensemble de l'ensemble des diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}_1\Gamma$:

Théorème 3.42. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté.*

- (i) *Si Γ est CS, alors tout diviseur premier de $o(\text{Aut}_1\Gamma)$ divise $o(\text{Aut}_S C_S)$.*
- (ii) *Si Γ est CS et PS, alors tout diviseur premier de $o(\text{Aut}_1\Gamma)$ divise $o(\text{Aut}_S C_S^{\text{col}})$.*

DÉMONSTRATION.

(i) Par la proposition 1.34, $o(\text{Aut}_1\Gamma)$ et $o(\text{Im}(r))$ ont les mêmes diviseurs premiers. De plus, puisque Γ est CS, la proposition 3.15 implique que $\text{Im}(r) < \text{Aut}_S C_S$. Par conséquent, si un premier p divise $o(\text{Aut}_1\Gamma)$, p divise $o(\text{Aut}_S C_S)$.

(ii) Se prouve de façon similaire à (i). □

Exemple 3.43. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté.

- (i) Si $S = S_1 = \{(1, 2, 3)^{\pm 1}, (2, 3, 4, 5, 6)^{\pm 1}, (5, 7)\}$ (voir figure 3.3), alors $\text{Aut}_S C_S$ est d'ordre 4, donc $\text{Aut}_1\Gamma$ est un 2-groupe. Le groupe $\text{Aut}_1\Gamma$ est en fait d'ordre 2.
- (ii) Si $S = S_2$ (voir exemple 3.38 et figure 3.4), le seul automorphisme non trivial de $C_{S/-}$ est l'involution $\eta = (ah)(ce)$, donc l'ordre de $\text{Aut}_S C_{S/-}^{\text{col}}$ est 2. Par la proposition 3.22, $o(\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}) = 2^k o(\text{Aut}_S C_{S/-}^{\text{col}})$ pour $k \in \mathbb{N}$. Donc $\text{Aut}_1\Gamma$ est un 2-groupe.

(iii) Si $S = S_3$ (voir exemple 3.39 et figure 3.5), l'ordre de $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ est 6. Par la proposition 3.22, $o(\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}) = 2^k \cdot 6$, donc les diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}_1 \Gamma$ sont inclus dans l'ensemble $\{2, 3\}$. L'ordre de $\text{Aut}_1 \Gamma$ est en fait 6.

Un *GRR* (*graphical regular representation*) d'un groupe G est un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ ayant $L(G)$ comme groupe d'automorphismes. Puisque

$$\text{Aut} \Gamma = L(G) \text{Aut}_1 \Gamma, \text{ où } L(G) \cap \text{Aut}_1 \Gamma = \text{Id},$$

Γ est un *GRR* si et seulement si $\text{Aut}_1 \Gamma = \text{Id}$. Le théorème 3.42 nous donne donc, en supposant que le diagramme des commutateurs ne possède aucun automorphisme non trivial, une classe de graphes de Cayley orientés constituée de *GRR* :

Théorème 3.44. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté.*

- (i) *Si Γ est CS, et $\text{Aut}_S C_S$ est trivial, alors Γ est un *GRR*.*
- (ii) *Si Γ est CS et PS, et $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ est trivial, alors Γ est un *GRR*.*

Rappelons que si b est un élément de \bar{S} d'ordre supérieur à 2, tel que $\{b, b^{-1}\} \subseteq S$, alors $\{b, b^{-1}\}$ est une paire de sommets jumeaux des diagrammes C_S et C_S^{col} qui est contenue dans S . Donc (bb^{-1}) est un automorphisme de ces diagrammes (voir les remarques 3.10 et 3.14). Par conséquent, le théorème 3.44 ne s'applique qu'aux graphes de Cayley orientés engendrés par un sous-ensemble de Cayley anti-symétrique. Il s'applique donc en particulier à tous les graphes de Cayley engendrés par des involutions.

Nous utiliserons la proposition suivante pour donner des exemples d'applications du théorème 3.44 et des prochains théorèmes.

Proposition 3.45. *Soit S un sous-ensemble de Cayley d'un groupe G , S' un transversal³ de la famille $\{a, a^{-1}\}, a \in \bar{S}$, et $\Gamma = \Gamma(G, S)$, $\Gamma' = \Gamma(G, S')$ les deux graphes de Cayley orientés qu'ils engendrent.*

- (i) *Si Γ est CS, alors Γ' est CS ;*
- (ii) *Si Γ est PS, alors Γ' est PS.*

³ S' est donc un sous-ensemble anti-symétrique de S qui contient un élément de chaque paire $\{a, a^{-1}\}, a \in \bar{S}$.

DÉMONSTRATION. Découle directement de la définition des propriétés de stabilité locale et du fait que $\text{Aut}_1 \Gamma'$ est un sous-groupe de $\text{Aut}_1 \Gamma$. \square

Exemple 3.46. Soit

$$S'_1 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4, 5, 6), (5, 7)\}$$

et G_1 le groupe engendré par S'_1 . Alors le graphe de Cayley orienté $\Gamma'_1 = \Gamma(G_1, S'_1)$ est un GRR.

DÉMONSTRATION. Remarquons que S'_1 est un transversal de la famille $\{a, a^{-1}\}, a \in \overline{S}_1$ (S_1 est défini dans l'exemple 3.37). Puisque $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ est CS et PS, $\Gamma'_1 = \Gamma(G_1, S'_1)$ est aussi CS et PS (par la proposition 3.45). De plus, le diagramme des commutateurs coloré $C_{S'_1}^{\text{col}}$ est constitué d'un sommet isolé, le générateur $(2, 3, 4, 5, 6)$, et d'une arête ayant comme extrémités $(1, 2, 3)$ et $(5, 7)$. Puisque les automorphismes de $C_{S'_1}^{\text{col}}$ préservent l'ordre des générateurs, $\text{Aut}_S C_{S'_1}^{\text{col}}$ est trivial, donc Γ'_1 est un GRR. \square

3.6.2. Graphes de Cayley orientés holomorphes et rigidité de C_S et C_S^{col}

Les propositions 1.25 et 3.21 donnent quant à elles une classe de graphes de Cayley holomorphes. Introduisons d'abord une définition.

Définition 3.47. (*Rigidité*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G .

- (i) Le diagramme des commutateurs C_S est dit *rigide* si les groupes $D_a, a \in \overline{S}$, sont triviaux.
- (ii) Le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col} est dit *rigide* si les groupes $D_a^{\text{col}}, a \in \overline{S}$, sont triviaux.

En d'autres mots, le diagramme des commutateurs C_S est rigide si ses automorphismes ne peuvent fixer les sommets d'un voisinage $N(a), a \in \overline{S}$, sans fixer tous ses sommets. Et, le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col} est rigide, si ses automorphismes ne peuvent fixer les sommets d'une boule $B_1(a, a^{-1}), a \in \overline{S}$, sans fixer tous ses sommets.

Notons que l'on peut prolonger la définition de rigidité aux diagrammes des commutateurs quotients : le diagramme des commutateurs $C_{S/-}$ est rigide si les groupes suivants sont triviaux

$$D_{\bar{a}} = \{\eta \in \text{Aut}C_{S/-} : \eta \text{ fixe } N(\bar{a})\}, a \in \bar{S},$$

et le diagramme des commutateurs coloré quotient $C_{S/-}^{\text{col}}$ est rigide si les groupes suivants sont triviaux

$$D_{\bar{a}}^{\text{col}} = \{\eta \in \text{Aut}C_{S/-}^{\text{col}} : \eta \text{ fixe } B_1(\bar{a})\}, a \in \bar{S}.$$

Théorème 3.48. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Alors, dans les deux cas suivants, Γ est holomorphe :*

- (i) Γ est CS, et C_S est rigide.
- (ii) Γ est CS et PS, et C_S^{col} est rigide.

DÉMONSTRATION.

(i) Par la proposition 1.25, il suffit de vérifier que les déviateurs sont triviaux, c'est-à-dire que

$$\Delta_a = \text{Id}_{\bar{S}} \text{ pour tout } a \in \bar{S}. \quad (3.12)$$

Puisque Γ est CS, la proposition 3.21 nous assure que $\Delta_a \subseteq D_a$. Or, la rigidité de C_S implique que $D_a = \text{Id}_{\bar{S}}$ pour tout $a \in \bar{S}$, donc que l'équation (3.12) est satisfaite.

(ii) Se prouve de façon similaire à (i). □

Remarquons que le diagramme des commutateurs C_S ne peut être rigide si S contient un élément b qui vérifie la condition suivante :

- b est d'ordre supérieur à 2 et $\{b, b^{-1}\} \subseteq S$.

En effet, dans ce cas la transposition (bb^{-1}) appartient à D_b , car $\{b, b^{-1}\}$ est une paire de sommets jumeaux du diagramme C_S qui est contenue dans S .

Le diagramme des commutateurs C_S^{col} quant à lui ne peut être rigide si S contient un élément b qui vérifie les deux conditions suivantes :

- b est d'ordre supérieur à 2 et $\{b, b^{-1}\} \subseteq S$;

- b n'est pas dans le centre de G .

En effet, si S possède un tel élément, la transposition (bb^{-1}) est un automorphisme de C_S^{col} . De plus, puisque S engendre G , S doit contenir un élément a qui ne commute pas avec b . Cela entraîne que

$$\{b, b^{-1}\} \subseteq S \setminus B_1(a, a^{-1}),$$

donc que le groupe D_a^{col} peut transposer b et b^{-1} .

Par exemple, dans le cas du diagramme des commutateurs de la figure 3.8(i), les groupes D_a et D_a^{col} sont respectivement égaux à $\{\text{Id}, (aa^{-1}), (bb^{-1})\}$ et à $\{\text{Id}, (bb^{-1})\}$, tandis que pour le diagramme des commutateurs de la figure 3.8(ii) ils sont égaux à $\{\text{Id}, (aa^{-1}), \}$ et à $\{\text{Id}\}$. Le groupe D_a est donc non trivial pour ces deux diagrammes et le groupe D_a^{col} est non trivial pour le premier diagramme et trivial pour le second.

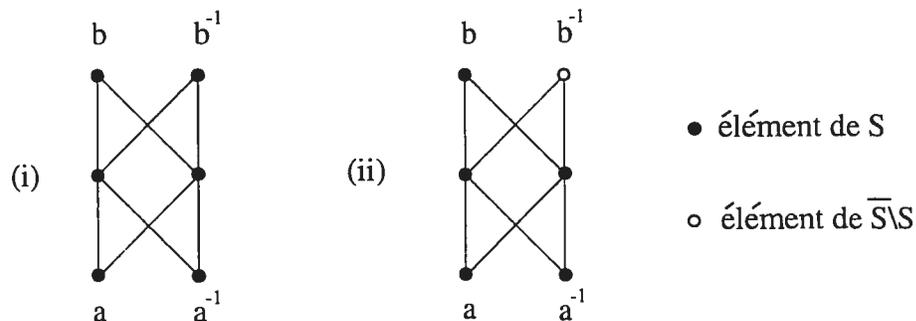


FIG. 3.8. Diagrammes des commutateurs non rigides

Le théorème 3.48 s'applique donc entre autres *aux graphes de Cayley orientés basés sur un groupe abélien, et aux graphes de Cayley orientés engendrés par un sous-ensemble de Cayley anti-symétrique, et donc, en particulier, aux graphes de Cayley engendrés par des involutions.*

Pour les graphes de Cayley orientés $\Gamma = \Gamma(G, S)$ basés sur un groupe abélien, le théorème 3.48 permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que Γ soit holomorphe :

Théorème 3.49. *Soit G un groupe abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Alors Γ est holomorphe si et seulement si Γ est CS.*

Remarque 3.50. Baik, Feng, Sim et Xu démontrent dans [5] un condition suffisante pour qu'un graphe de Cayley basé sur un groupe abélien soit holomorphe : si G est un groupe abélien et S un ensemble de générateurs de G ne contenant pas 1 et satisfaisant à

$$\forall s,t,u,v \in S \quad st = uv \neq 1 \implies \{s,t\} = \{u,v\},$$

alors $\Gamma(G, S)$ est holomorphe. Le théorème 3.49 est un raffinement de ce résultat.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que Γ est CS. Montrons que Γ est PS et que C_S^{col} est rigide. Puisque les seules paires de sommets non adjacents de C_S sont les $\{a, a^{-1}\} \subseteq \bar{S}$, tel que $a^{-1} \neq a$, alors $\text{Aut}_S C_S$ permute entre eux ces ensembles. Par conséquent, par la proposition 3.18, Γ est PS. De plus, si $a \in \bar{S}$, alors $B_1(a, a^{-1}) = \bar{S}$. Par conséquent, pour tout $a \in \bar{S}$, D_a^{col} est trivial, donc C_S^{col} est rigide. Ainsi, par le théorème 3.48, Γ est holomorphe. L'implication inverse est trivial puisque tout graphe de Cayley holomorphe est CS. \square

Le résultat suivant est un corollaire du théorème 3.49 et de la proposition 3.26.

Théorème 3.51. *Soit G un groupe abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Si S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G et s'il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 4 de type (ii), (iii) ou (iv), alors Γ est holomorphe.*

En particulier, si G est d'ordre impair et S est un sous-ensemble de Cayley minimal de G , alors Γ est holomorphe.

Le prochain théorème est une application du théorème 3.48. Il donne une classe de graphes de Cayley orientés holomorphes engendrés par des sous-ensembles de Cayley anti-symétriques et donc, en particulier, une classe de graphes de Cayley holomorphes engendrés par des involutions.

Théorème 3.52. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté engendrés par un sous-ensemble de Cayley anti-symétrique S . Alors, dans les deux cas suivants, Γ est holomorphe :*

- (i) *Il n'y a pas entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou (v), et $C_{S/-}$ est rigide.*

- (ii) il n'y a pas entre les éléments de \overline{S} de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou (v), $\text{Aut}_S C_S$ stabilise les inverses, et $C_{S/-}^{\text{col}}$ est rigide.

DÉMONSTRATION. Découle des propositions 3.26 et 3.27, et du fait que pour un sous-ensemble de Cayley anti-symétrique S , les diagrammes C_S et C_S^{col} sont rigides si et seulement si leur quotient $C_{S/-}$ et $C_{S/-}^{\text{col}}$ le sont. \square

Voici des exemples d'applications des théorèmes 3.48 et 3.52 à des graphes de Cayley basés sur des groupes non abéliens et engendrés par des sous-ensembles de Cayley anti-symétriques.

Exemple 3.53. Les graphes de Cayley orientés engendrés par les ensembles suivants de générateurs sont holomorphes.

- (i) $S'_2 = \{(1, 2, 3), (2, 14), (3, 4, 5), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (6, 7, 13), (8, 9, 10), (10, 11, 12), (13, 14, 15)\}$;
- (ii) $S'_3 = \{(1, 2), (2, 3, 4), (4, 5, 6), (6, 7), (3, 5, 8), (8, 9)\}$;
- (iii) $T'_n = \begin{cases} \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-1, 2k, 2k+1)\} & \text{si } n = 2k+1, \\ \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-2, 2k-1, 2k)\} & \text{si } n = 2k, \\ \text{pour } n \geq 3 \text{ et } n \neq 6, 7; \end{cases}$
- (iv) $S_4 = \{(1, 2)(6, 7), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 5)(7, 8)\}$.

DÉMONSTRATION.

(i) S'_2 est un transversal de la famille $\{a, a^{-1}\}$, $a \in S_2$, où S_2 est le sous-ensemble de Cayley défini à l'exemple 3.38. Donc S'_2 est anti-symétrique. De plus, nous l'avons dans cet exemple, il n'y a pas entre les éléments de $\overline{S'_2} = S_2$ de relation de longueur 4 de type (i), (ii), (iii), (iv), ou (v). Finalement, en vérifiant que $C_{S'_2/-}^{\text{col}}$ possède comme unique automorphisme non-trivial $(ah)(ec)$, il est facile de voir $C_{S'_2/-}^{\text{col}}$ est rigide. Ainsi, par le théorème 3.52, Γ'_2 est holomorphe.

(iii) Par la proposition 3.35, le graphe de Cayley $\Gamma(\mathcal{A}_n, T'_n)$ est CS et PS. Si $n \geq 3$ et $n \neq 6, 7$, alors $C_{T'_n}^{\text{col}}$ est rigide. Pour $n = 6, 7$ on a $T'_6 = \{(123), (345), (456)\}$ et $T'_7 = \{(123), (345), (567)\}$. Dans ces deux cas, le diagramme des commutateurs coloré est constitué d'un sommet isolé (le générateur (345)) et d'une arête. Le groupe

$D_{(345)}^{\text{col}}$ peut donc interchanger les deux extrémités de cette arête. Le diagramme des commutateurs coloré $C_{T_n}^{\text{col}}$ n'est donc pas rigide si $n = 6, 7$.

(iv) Nous avons démontré dans l'exemple 3.41 que le graphe $\Gamma_4 = \Gamma(S_4)$ est CS et PS. Le diagramme des commutateurs de S_4 est représenté à la figure 3.7. On peut y vérifier que tous les groupes $D_a, a \in \bar{S}$, sont triviaux. Par exemple,

$$D_{(12)(67)} = \{\eta \in \text{Aut}_S C_{S_4} : \eta \text{ fixe } (34)\} = \text{Id}_{S_4}.$$

Puisque C_{S_4} est rigide, alors $\Gamma_4 = \Gamma(S_4)$ est holomorphe.

La preuve du cas (ii) est similaire à celle de (i) et (iii). \square

3.6.3. Graphes de Cayley orientés holomorphes et quasi-rigidité de C_S^{col}

Pour les raisons mentionnées ci-haut, les diagrammes C_S et C_S^{col} sont rarement rigides. C'est pourquoi le théorème 3.48 s'applique à des classes restreintes de graphes de Cayley orientés. Pour démontrer l'existence de classes plus larges de graphes de Cayley orientés holomorphes, nous introduisons une propriété moins restrictive que la rigidité, que nous appellerons quasi-rigidité.

Définition 3.54. (*Quasi-rigidité*) Soit G un groupe et S un sous-ensemble de Cayley de G . Le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col} est dit *quasi rigide* si les groupes $D_a^{\text{col}}, a \in \bar{S}$, stabilisent chaque ensemble de la forme $\{b, b^{-1}\}, b \in \bar{S}$.

Le diagramme C_S^{col} est donc quasi rigide si les groupes $D_a^{\text{col}}, a \in \bar{S}$, contiennent uniquement des transpositions de la forme $(bb^{-1}), \{b, b^{-1}\} \subseteq S$.

Remarquons que le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col} est quasi rigide si et seulement si le diagramme des commutateurs coloré quotient $C_{S/-}^{\text{col}}$ est rigide :

Proposition 3.55. *Le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col} est quasi rigide si et seulement si le diagramme des commutateurs coloré quotient $C_{S/-}^{\text{col}}$ est rigide.*

DÉMONSTRATION. Cette équivalence découle du fait que $\text{Aut}_S C_S^{\text{col}}$ est constitué d'automorphismes permutant entre eux les ensembles $a = \{a, a^{-1}\}, a \in \bar{S}$. \square

Voici un exemple de sous-ensemble de Cayley ayant un diagramme des commutateurs coloré qui n'est pas rigide, mais qui est quasi rigide.

Exemple 3.56. Soit $S = \{(1, 2, 3, 4, 5)^{\pm 1}, (5, 6, 7)^{\pm 1}, (6, 7, 8)^{\pm 1}\}$ l'ensemble de permutations dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.9. Posons $a = (1, 2, 3, 4, 5)$, $b = (5, 6, 7)$ et $c = (6, 7, 8)$. Alors C_S^{col} est rigide puisque $D_a^{\text{col}} = D_{a^{-1}}^{\text{col}} = D_c^{\text{col}} = D_{c^{-1}}^{\text{col}} = \langle (bb^{-1}) \rangle$ et $D_b^{\text{col}} = D_{b^{-1}}^{\text{col}} = \langle (aa^{-1}), (cc^{-1}) \rangle$. L'involution $(ac)(a^{-1}c^{-1})$ n'appartient pas à D_b^{col} car les automorphismes de C_S^{col} préservent les couleurs, c'est-à-dire l'ordre des générateurs.

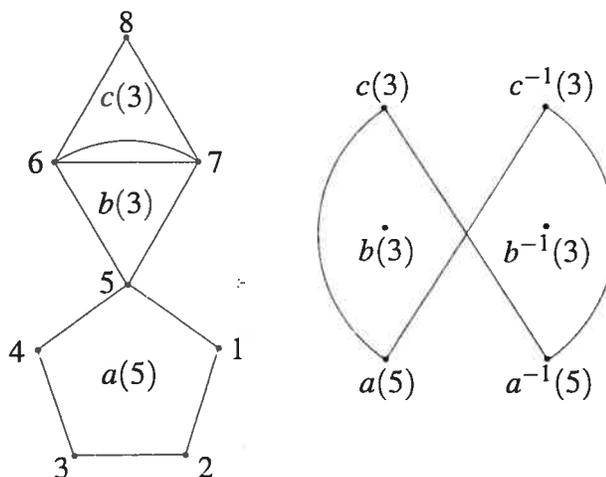


FIG. 3.9. Le graphe d'action A_S et le diagramme des commutateurs coloré C_S^{col}

Le théorème suivant montre, sous quelles conditions, un graphe de Cayley CS et PS ayant un diagramme des commutateurs coloré quasi rigide est holomorphe. Nous l'utiliserons à la section 3.6.4 pour exhiber une classe importante de graphes de Cayley basés sur le groupe symétrique ou le groupe alterné.

Théorème 3.57. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley CS et PS. Supposons aussi que le diagramme C_S^{col} est quasi rigide. Alors Γ est holomorphe si pour tout $a, b \in S$ vérifiant

- (1) $ab \neq ba$;
- (2) $o(b) > 2$ et $\{b, b^{-1}\} \subseteq S$;

il existe un sous-ensemble $S_1 \subseteq S$ fermé dans S , contenant $\{a, b\}$, tel que :

- (i) $\Gamma(S_1)$ est holomorphe ;

- (ii) pour tout $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$, il existe un isomorphisme de groupes $\nu : \langle S_1 \rangle \longrightarrow \langle \sigma(S_1) \rangle$ tel que $\nu(S_1) = \sigma(S_1)$.

Remarque 3.58.

- (i) Il suffira souvent de prendre comme S_1 le plus petit sous-ensemble fermé dans S contenant $\{a, b\}$, soit $S_1 = \overline{\{a, b\}} \cap S$.
- (ii) Si Γ est localement holomorphe, la condition (ii) est satisfaite pour tout sous-ensemble $S_1 \subseteq S$.

Pour faire la preuve du théorème 3.57 nous ferons appel au lemme suivant :

Lemme 3.59. Soit $\Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley CS et PS , et $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$. Si C_S^{col} est quasi rigide, alors pour tout sous-ensemble $S_1 \subseteq S$ fermé dans S , la restriction $\sigma|_{\Gamma(S_1)}$ est un isomorphisme de $\Gamma(S_1)$ dans $\Gamma(\sigma(S_1))$ qui fixe 1.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 1.30 et la remarque 1.31, il suffit de vérifier que

$$\sigma_{(x)}(S_1) = \sigma(S_1), \quad \forall x \in V(\Gamma(S_1)). \quad (3.13)$$

Soit $x \in V(\Gamma(S_1))$. Par la proposition 1.22, $\sigma_{(x)}$ se factorise en

$$\sigma_{(x)} = \sigma_{(1)} \circ \eta,$$

où η est un produit d'éléments appartenant aux Δ_a , $a \in \bar{S}$. Pour montrer l'équation (3.13), prouvons que

$$\eta(S_1) = S_1.$$

Soit $b \in S_1$. Vérifions que

$$\eta(b) \in S_1.$$

Par la proposition 3.21,

$$\Delta_a \subseteq D_a^{\text{col}}, \quad \forall a \in \bar{S}.$$

Puisque C_S^{col} est quasi rigide, cette inclusion entraîne que les Δ_a , $a \in \bar{S}$, stabilisent $\{b, b^{-1}\}$. Puisque η est engendré par les Δ_a , $a \in \bar{S}$, η fait de même, c'est-à-dire

$$\eta(\{b, b^{-1}\}) = \{b, b^{-1}\}.$$

Par conséquent, si $\{b, b^{-1}\} \subseteq S_1$, alors

$$\eta(b) \in \{b, b^{-1}\} \subseteq S_1;$$

et si $\{b, b^{-1}\} \not\subseteq S_1$, alors $b^{-1} \notin S_1$, donc $b^{-1} \notin S$, car S_1 est fermé dans S , et

$$\eta(b) = b \in S_1 \quad (\text{car } \eta \text{ stabilise } S).$$

□

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.57. Par la proposition 1.25, il suffit de vérifier que

$$\Delta_a = \text{Id}_{\bar{S}} \quad \forall a \in \bar{S}.$$

Soit $a \in S$. Rappelons que

$$\Delta_a = \{(\sigma_{(1)})^{-1} \sigma_{(a)} : \sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma\}.$$

Considérons un élément quelconque $\eta = (\sigma_{(1)})^{-1} \circ \sigma_{(a)} \in \Delta_a$, et montrons que $\eta = \text{Id}_{\bar{S}}$.

Par la proposition 3.21,

$$\eta \in D_a^{\text{col}}. \quad (3.14)$$

Par conséquent, η fixe les éléments de \bar{S} appartenant à $B_1(a, a^{-1})$. Il reste à s'assurer que η fixe les éléments de \bar{S} n'appartenant pas à cet ensemble. Soit $b \in \bar{S}$ un de ces éléments. L'inclusion 3.14 entraîne que

$$\eta(\{b, b^{-1}\}) = \{b, b^{-1}\}. \quad (3.15)$$

Si $b \in S$ et $b^{-1} \in \bar{S} \setminus S$ (ou l'inverse), η fixe b et b^{-1} , car η stabilise S . Pour traiter le cas $\{b, b^{-1}\} \subseteq S$, considérons

$$S_0 = \begin{cases} \{a, b\} & \text{si } a \in S, \\ \{a^{-1}, b\} & \text{si } a \notin S \text{ et } a^{-1} \in S, \end{cases}$$

S_1 le sous-ensemble contenant S_0 donné par l'énoncé, et $S_2 = \sigma(S_1)$. Par le lemme 3.59, la restriction $\sigma|_{\Gamma(S_1)}$ est un isomorphisme de graphes de $\Gamma(S_1)$ dans $\Gamma(S_2)$, qui

fixe **1**. De plus, par hypothèse, $S_2 = \sigma(S_1) \simeq S_1$. Donc, il existe un isomorphisme de groupes

$$v : \langle S_2 \rangle \longrightarrow \langle S_1 \rangle$$

tel que $v(S_2) = S_1$. Il est facile de voir que cela implique que v est un isomorphisme de graphes de $\Gamma(S_2)$ dans $\Gamma(S_1)$. Il s'en suit que le produit $v \circ \sigma|_{\Gamma(S_1)}$ est un automorphisme de $\Gamma(S_1)$ qui fixe **1**. Puisque $\Gamma(S_1)$ est holomorphe, ce produit doit être un automorphisme du groupe $\langle S_1 \rangle$. Cela entraîne que $\sigma|_{\Gamma(S_1)}$ est un isomorphisme de groupes, car v en est un. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sigma_{(a)}(b) &= \sigma(a)^{-1} \sigma(ab) \\ &= \sigma(a)^{-1} \sigma(a) \sigma(b) \\ &= \sigma(b) \\ &= \sigma_{(1)}(b) \end{aligned}$$

qui implique que

$$\eta(b) = (\sigma_{(1)})^{-1} \circ \sigma_{(a)}(b) = b,$$

et donc aussi, par l'équation (3.15), que

$$\eta(b^{-1}) = b^{-1}.$$

Ainsi, puisque η fixe les éléments de \bar{S} appartenant à $B_1(a, a^{-1})$ et les éléments de \bar{S} n'appartenant pas à cet ensemble

$$\eta = \text{Id}_{\bar{S}}.$$

□

3.6.4. Classe de graphes de Cayley orientés holomorphes engendrés par des transpositions et des 3-cycles

Le prochain résultat est une application du théorème 3.57. Il donne une classe importante de graphes de Cayley basés sur le groupe symétrique ou le groupe alterné, et engendrés par des transpositions et des cycles de longueur 3.

Théorème 3.60. Soit G un groupe de permutations et S un sous-ensemble de Cayley de G constitué de transpositions et de 3-cycles. Alors $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est holomorphe si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) il n'y a pas de entre les éléments de \bar{S} de relation de longueur 3 ou 4 de type (i), et de relation de type (iv) pour a ou b d'ordre 2 (voir lemmes 3.23 et 3.24).
- (ii) C_S^{col} est quasi rigide ;

Nous aurons besoin de deux lemmes pour démontrer ce résultat.

Lemme 3.61. Soit G un groupe de permutation, S un sous-ensemble de Cayley de G satisfaisant les hypothèses du théorème 3.60, $a, b \in S$ deux cycles de longueur 2 ou 3 tels que $ab \neq ba$, et $S_1 = \overline{\{a, b\}}$. Alors $\Gamma = \Gamma(S_1)$ est holomorphe.

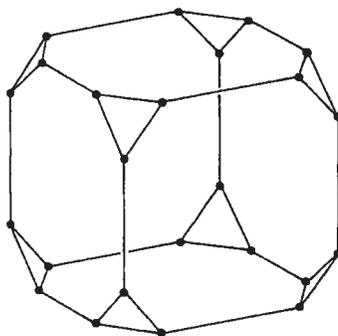


FIG. 3.10. Le graphe $\Gamma(\{(12), (234)^{\pm 1}\})$ (cube tronqué)

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que S_1 est d'une des quatre formes suivantes

- (i) $\{(i_1 i_2), (i_1 i_3)\}$;
- (ii) $\{(i_1 i_2), (i_2 i_3 i_4)^{\pm 1}\}$;
- (iii) $\{(i_1 i_2 i_3)^{\pm 1}, (i_2 i_3 i_4)^{\pm 1}\}$;
- (iv) $\{(i_1 i_2 i_3)^{\pm 1}, (i_3 i_4 i_5)^{\pm 1}\}$;

La forme $\{a = (i_1 i_2), b = (i_1 i_2 i_3)^{\pm 1}\}$ est exclues puisque nous aurions $(ab)^2 = 1$, qui est une relation de type (iv) proscrite par hypothèse. Si S_1 est de la première forme, Γ est un cycle de longueur 6 et est donc holomorphe. On peut montrer qu'un graphe

de Cayley engendré par un ensemble S_1 de forme (ii), (iii) est holomorphe à l'aide des figures 3.10 et 3.11, en vérifiant qu'il est localement holomorphe et qu'il satisfait l'équation $\text{Aut}^{(1)} \Gamma = \text{Id}$. Les graphes de Cayley engendrés par un ensemble S_1 de forme (iv) sont d'ordre 60. Il est donc plus difficile de les représenter par un dessin. Il est par contre aisé de vérifier qu'ils sont holomorphes à l'aide du logiciel GAP. \square

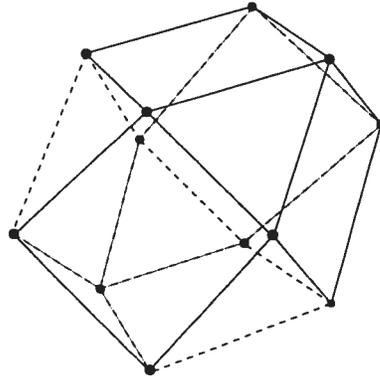


FIG. 3.11. Le graphe $\Gamma(\{(123)^{\pm 1}, (234)^{\pm 1}\})$ (line-graphe du cube)

Lemme 3.62. Soit G un groupe de permutation, S un sous-ensemble de Cayley de G satisfaisant les hypothèses du théorème 3.60, et $a, b, c, d \in S$ quatre cycles de longueur 2 ou 3 de G tels que $ab \neq ba$ et $cd \neq dc$. Soit S_1, S_2 satisfaisant à $\{a, b\} \subseteq S_1 \subseteq \overline{\{a, b\}}$ et $\{c, d\} \subseteq S_2 \subseteq \overline{\{c, d\}}$. Alors, si $\Gamma(S_1) \simeq \Gamma(S_2)$, il existe un isomorphisme $\nu : \langle S_1 \rangle \longrightarrow \langle S_2 \rangle$ tel que $\nu(S_1) = S_2$.

DÉMONSTRATION. Remarquons qu'il suffit de prouver que $A_{S_1} \simeq A_{S_2}$ pour s'assurer l'existence d'un isomorphisme ν tel que cherché. Considérons $G_1 = \langle S_1 \rangle$ et $G_2 = \langle S_2 \rangle$. Si $\Gamma(S_1)$ est isomorphe à $\Gamma(S_2)$, alors

$$|G_1| = |G_2| \tag{3.16}$$

et

$$|S_1| = |S_2|. \tag{3.17}$$

Remarquons aussi que les ensembles $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$ sont d'une des quatre formes énoncées dans la preuve du lemme 3.61 et que ces ensembles génèrent respectivement des

groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_4 et \mathfrak{A}_5 , donc d'ordres 6, 24, 12 et 60. Pour que l'équation (3.16) soit satisfaites il faut donc que $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$ soient du même type. Si $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$ sont de type (ii), (iii), ou (v), il est facile de voir que l'équation (3.17) implique que $A_{S_1} \simeq A_{S_2}$. Si $\overline{S_1}$ et $\overline{S_2}$ sont de type (iv), l'équation (3.17) implique aussi que $A_{S_1} \simeq A_{S_2}$, sauf dans le cas où S_1 et S_2 sont de la forme $S_1 = \{(i_1 i_2 i_3), (i_2 i_3 i_4)\}$ et $S_2 = \{(i_1 i_2 i_3), (i_2 i_3 i_4)^{-1}\}$. Or, dans ce dernier cas, $\Gamma(S_1)$ n'est pas isomorphe à $\Gamma(S_2)$ (des graphes isomorphes à $\Gamma(S_1)$ et $\Gamma(S_2)$ peuvent être obtenus en orientant le graphe de la figure 3.11. Le premier contient des 4-cycles orientés tandis que second n'en contient pas). Cela conclut la preuve. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.60. Ce résultat découle du théorème 3.57. Considérons a, b une paire d'éléments de S tel que décrite dans l'énoncé de ce résultat, et montrons l'existence d'un sous-ensemble $S_1 \subseteq S$ fermé dans S vérifiant les propriétés (i) et (ii) du même énoncé.

Posons $S_1 = \overline{\{a, b\}} \cap S$. Premièrement $\Gamma(S_1)$ est holomorphe puisque, par le lemme 3.61, son ombre l'est. De plus, par le lemme 3.59, si $\sigma \in \text{Aut}_1 \Gamma$, la restriction $\sigma|_{\Gamma(S_1)}$ est un isomorphisme de $\Gamma(S_1)$ dans $\Gamma(\sigma(S_1))$, donc $\Gamma(S_1) \simeq \Gamma(\sigma(S_1))$. Cela entraîne, par le lemme 3.62, l'existence d'un isomorphisme $v : \langle S_1 \rangle \longrightarrow \langle \sigma(S_1) \rangle$ tel que $v(S_1) = \sigma(S_1)$. Donc les deux propriétés que doit satisfaire S_1 sont vérifiées. \square

Voici des exemples de graphes de Cayley holomorphes que donne le théorème 3.60.

Exemple 3.63. Les graphes de Cayley engendrés par les ensembles suivants de générateurs sont holomorphes.

$$(i) S_3 = \{(1, 2), (2, 3, 4)^{\pm 1}, (4, 5, 6)^{\pm 1}, (6, 7), (3, 5, 8)^{\pm 1}, (8, 9)\},$$

(voir exemple 3.39 et figure 3.5) ;

$$(ii) T_n = \begin{cases} \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-1, 2k, 2k+1)\}^f & \text{si } n = 2k+1, \\ \{(123), (345), \dots, (2k-3, 2k-2, 2k-1), (2k-2, 2k-1, 2k)\}^f & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

pour $n \geq 3$ et $n \neq 6, 7$ (voir exemple 3.40 et figure 3.6).

3.6.5. Diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$

Rappelons qu'un graphe de Cayley orienté Γ est holomorphe si et seulement si Γ est localement holomorphe et $\text{Aut}^{(1)}\Gamma = \text{Id}_G$ (voir proposition 1.17). L'ordre de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ mesure en partie la déviation de Γ de l'holomorphie.

Si aucun des deux théorèmes 3.48 et 3.57 ne s'applique pour démontrer que Γ est holomorphe, on peut tout de même trouver un sur-ensemble des diviseurs premiers de l'ordre de $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$:

Théorème 3.64. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G .*

- (i) *Si Γ est CS, tout diviseur premier de $o(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)$ divise l'ordre d'un des $\{D_a : a \in \bar{S}\}$.*
- (ii) *Si Γ est CS et PS, tout diviseur premier de $o(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)$ divise l'ordre d'un des $\{D_a^{\text{col}} : a \in \bar{S}\}$.*

DÉMONSTRATION.

(i) Soit p un diviseur premier de $o(\text{Aut}^{(1)}\Gamma)$. Par le théorème 1.35, il existe $a \in \bar{S}$ et $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ tels que $o(\sigma_{(a)}) = p$. Or, la différence entre $\sigma_{(a)}$ et $\sigma_{(1)}$, $(\sigma_{(1)})^{-1}\sigma_{(a)}$, est égale à $\sigma_{(a)}$ (car $\sigma \in \text{Aut}^{(1)}\Gamma$ si et seulement si $\sigma_{(1)} = \text{Id}$), et appartient à D_a , par la proposition 3.21. Donc p divise $o(D_a)$.

(ii) Se prouve de façon similaire à (i). □

Après avoir créé une banque importante de graphes de Cayley et déterminé leur groupe d'automorphismes, nous avons constaté que dans la grande majorité des cas générés, $\text{Aut}_1\Gamma$ est un 2-groupe. Le corollaire suivant du théorème 3.64 explique une partie de ce phénomène :

Théorème 3.65. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Alors, $\text{Aut}^{(1)}\Gamma$ est un 2-groupe dans les deux cas suivants :*

- (i) *Γ est CS et C_S est quasi rigide.*
- (ii) *Γ est CS et PS, et C_S^{col} est quasi rigide.*

Exemple 3.66.

(i) Considérons G_1 le groupe engendré par

$$S_1 = \{(1, 2, 3)^{\pm 1}, (2, 3, 4, 5, 6)^{\pm 1}, (5, 7)\}$$

(dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.3), et $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$. Alors $\text{Aut}^{(1)} \Gamma_1$ est un 2-groupe.

(ii) Considérons G_2 le groupe engendré par

$$S_2 = \{(1, 2, 3), (2, 14), (3, 4, 5), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (6, 7, 13), (8, 9, 10), (10, 11, 12), (13, 14, 15)\}^f$$

(dont le graphe d'action et le diagramme des commutateurs sont représentés à la figure 3.4), et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$. Alors $\text{Aut}^{(1)} \Gamma_2$ est un 2-groupe.

Chapitre 4

LES HOMOMORPHISMES CROISÉS

4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est le premier chapitre de la deuxième partie de cette thèse. Le but de cette partie est d'étudier le problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley orientés, c'est-à-dire de déterminer quand

$$\Gamma(G, S) \simeq \Gamma(H, T)?$$

Rappelons que deux graphes orientés Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de Γ_1 dans Γ_2 , c'est-à-dire une bijection σ des sommets de Γ_1 dans les sommets de Γ_2 telle que

$$(x, y) \in E(\Gamma_1) \iff (\sigma(x), \sigma(y)) \in E(\Gamma_2).$$

Ce problème d'isomorphie est un problème très complexe dont la solution dépend du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley en jeu. Puisque probablement la grande majorité des graphes de Cayley sont holomorphes et que l'on a une connaissance précise du groupe d'automorphismes de ces graphes, nous nous sommes restreint à cette classe dans l'espoir d'obtenir des résultats plus forts que dans le cas général.

Nous aborderons ce problème d'isomorphie en deux étapes. Nous étudierons dans un premier temps, au chapitre 6, le problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur un groupe fixé : étant donné un graphe de Cayley sur G holomorphe $\Gamma(G, S)$, pour quels autres ensembles T de générateurs de G a-t-on

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S)?$$

Nous étudierons ensuite, au chapitre 7, le problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley holomorphes basés sur des groupes différents : étant donné un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma(G, S)$, sur quels autres groupes H peut-on obtenir un graphe de Cayley holomorphe isomorphe à $\Gamma(G, S)$?

Ce chapitre présente des applications qui généralisent les homomorphismes usuels entre les groupes et qui sont au coeur de la résolution du problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes : les homomorphismes croisés. Ces applications apparaissent naturellement dans la résolution de ce problème pour deux raisons.

Premièrement, nous verrons que si Γ_1 et Γ_2 sont deux graphes de Cayley isomorphes et Γ_2 est holomorphe, tout isomorphisme de Γ_1 dans Γ_2 qui envoie 1_{G_1} sur 1_{G_2} est un isomorphisme croisé. Ce résultat est démontré au chapitre 6 (proposition 6.4).

Deuxièmement, les homomorphismes croisés seront utiles pour résoudre le deuxième problème d'isomorphie, c'est-à-dire trouver les groupes H sur lesquels on peut obtenir un graphe isomorphe à $\Gamma = \Gamma(G, S)$. Pour expliquer pourquoi, rappelons que Sabidussi [26] a démontré qu'un graphe Γ peut être représenté sur un groupe H si et seulement si $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe isomorphe à H agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Puisque le groupe d'automorphismes d'un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est égal à $\text{Aut}\Gamma = L(G) \rtimes \text{Aut}_S G$, nous aurons besoin de résultats pour trouver les sous-groupes de produits semi-directs. Nous utiliserons les homomorphismes croisés au chapitre 5 pour construire ces résultats.

4.2. PRÉALABLES

Si $f : G \longrightarrow H$ est une fonction et $K \subseteq G$, $f[K] = \{f(x) : x \in K\}$.

Si $f : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme dont le noyau est égal à G , nous dirons de f qu'il est un homomorphisme trivial.

Nous aurons besoin des anti-homomorphismes :

Définition 4.1. (*Anti-homomorphisme*) Soit G et H deux groupes. Une application $\alpha : G \longrightarrow H$ est un *anti-homomorphisme* si pour tout $x, y \in G$ $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$. Un *anti-isomorphisme* est un anti-homomorphisme bijectif.

Proposition 4.2. *Si $\alpha : G \longrightarrow H$ est un anti-homomorphisme, il existe un homomorphisme $f : G \longrightarrow H$ satisfaisant à $\alpha(x) = f(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$.*

4.3. DÉFINITION DES HOMOMORPHISMES CROISÉS

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, nous aurons besoin, pour résoudre le deuxième problème d'isomorphie, d'outils permettant de trouver les sous-groupes du groupe d'automorphismes des graphes de Cayley holomorphes. Rappelons que le groupe d'automorphismes de ces graphes est isomorphe au produit semi-direct $L(G) \rtimes \text{Aut}_s G$. Un théorème caractérisant les sous-groupes d'un tel produit serait donc d'une grande utilité. Un théorème de cette espèce existe déjà dans le cas du produit direct :

Théorème 4.3. *Tout sous-groupe H du produit direct $G_1 \times G_2$ s'écrit comme*

$$H = \bigcup_{yN_2 \in H_2/N_2} f(yN_2) \times yN_2,$$

où $N_i \triangleleft H_i$ sont deux sous-groupes de G_i , $i = 1, 2$, et f est un isomorphisme entre H_2/N_2 et H_1/N_1 .

La preuve de ce théorème fait appel aux deux projections σ_1 et σ_2 , associant au couple (x, y) , x et y respectivement. Dans le cas du produit direct, ces deux projections sont des homomorphismes. Il n'en va pas de même pour le produit semi-direct.

Pour le voir, considérons le produit semi-direct $K \rtimes_{\theta} Q$ et les projections σ_K et σ_Q de $K \rtimes_{\theta} Q$ dans K et Q respectivement. Si $(a, x), (b, y)$ appartiennent à $K \rtimes_{\theta} Q$, $(a, x)(b, y) = (a\theta_x(b), xy)$. Par conséquent,

$$\sigma_Q((a, x)(b, y)) = xy = \sigma_Q((a, x))\sigma_Q((b, y)).$$

Ainsi

Proposition 4.4. *La projection $\sigma_Q : K \rtimes_{\theta} Q \longrightarrow Q$ est un homomorphisme.*

Par contre

$$\begin{aligned}\sigma_K((a,x)(b,y)) &= a\theta_x(b) \\ &= \sigma_K((a,x))[\theta \circ \sigma_Q(a,x)](\sigma_K(b,y))\end{aligned}$$

Donc σ_K n'est pas un homomorphisme. Cela justifie la définition suivante :

Définition 4.5. Soit G, H deux groupes et $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}H$ un homomorphisme. Une application $\alpha : G \longrightarrow H$ est un *homomorphisme croisé* associé à θ si pour tout $x, y \in G$

$$\alpha(xy) = \alpha(x)[\theta(x)](\alpha(y)).$$

Nous dirons aussi de α qu'il est un θ -homomorphisme.

Remarque 4.6.

- (i) Pour abrégé la notation, $\theta(x)$ sera souvent noté θ_x .
- (ii) Un θ -homomorphisme α est un homomorphisme si et seulement si $\text{Ker}(\theta) = G$. Si θ est un homomorphisme trivial, nous dirons de α qu'il est un homomorphisme croisé trivial.
- (iii) Nous emploierons les termes *épimorphisme croisé*, *monomorphisme croisé* et *isomorphisme croisé* quand nous parlerons d'homomorphismes croisés surjectifs, injectifs et bijectifs. Nous utiliserons aussi les termes *endomorphisme croisé* et *automorphisme croisé* pour parler d'homomorphismes croisés et d'isomorphismes croisés d'un groupe dans lui même.
- (iv) Si $\alpha : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme croisé, $\text{Im}(\alpha)$ n'est pas nécessairement un sous-groupe de H . Nous dirons d'un homomorphisme croisé $\alpha : G \longrightarrow H$ qu'il est *quasi-surjectif* si $\text{Im}(\alpha)$ engendre H .

Le mot *dérivation* est le terme plus utilisé dans la littérature pour désigner un homomorphisme croisé. Nous avons préféré homomorphisme croisé pour avoir accès aux termes isomorphisme croisé, automorphisme croisé, etc.

Nous l'avons vu plus haut :

Proposition 4.7. La projection $\sigma_K : K \rtimes_{\theta} Q \longrightarrow K$ est un $(\theta \circ \sigma_Q)$ -homomorphisme.

Cette projection jouera un rôle crucial dans l'analyse des sous-groupes du produit semi-direct.

Nous terminons cette section en présentant une classe importante d'homomorphismes croisés.

Proposition 4.8. *Si f et g sont deux homomorphismes de G dans H , l'application définie par $\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}$ est un $(\gamma \circ g)$ -homomorphisme de G dans H .*

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned}\alpha(xy) &= f(xy)g(xy)^{-1} \\ &= f(x)f(y)g(y)^{-1}g(x)^{-1} \\ &= f(x)g(x)^{-1}g(x)f(y)g(y)^{-1}g(x)^{-1} \\ &= \alpha(x)\gamma_{g(x)}(\alpha(y))\end{aligned}$$

□

En particulier :

Exemple 4.9. Si G est un groupe, l'application inversion

$$\begin{aligned}\iota : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1}\end{aligned}$$

est un γ -automorphisme.

Exemple 4.10. Plus généralement, si $\alpha : G \longrightarrow H$ est un anti-homomorphisme, alors α est un homomorphisme croisé puisque, par la proposition 4.2, il existe un homomorphisme $f : G \longrightarrow H$ tel que $\alpha(x) = f(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$.

4.4. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES HOMOMORPHISMES CROISÉS

Nous présentons dans cette section quelques résultats de base sur les homomorphismes croisés.

Proposition 4.11. *Soit $\alpha : G \longrightarrow H$ un θ -homomorphisme. Alors*

- (i) $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
- (ii) $\alpha(x^{-1}) = \theta_{x^{-1}}(\alpha(x)^{-1})$;
- (iii) $\text{Ker}(\alpha) < G$;
- (iv) $\alpha(x) = \alpha(y) \iff x^{-1}y \in \text{Ker}(\alpha)$;
- (v) Si α est quasi-surjectif, alors $\text{Ker}(\alpha) \triangleleft G \iff \text{Ker}(\alpha) < \text{Ker}(\theta)$;
- (vi) Si $L < G$, alors $\alpha[L] < H \iff \theta_L[\alpha[L]] \subseteq \alpha[L]$;
- (vii) Si $f : F \longrightarrow G$ est un homomorphisme, $\alpha \circ f$ est un $(\theta \circ f)$ -homomorphisme ;
- (viii) Si $f : H \longrightarrow K$ est un isomorphisme, $f \circ \alpha$ est un $(\gamma_f \circ \theta)$ -homomorphisme.

DÉMONSTRATION. La preuve des points (i) à (iv) se trouve dans Rotman [25]. Notons que cet auteur emploie le terme *derivation* pour désigner un homomorphisme croisé.

Pour (v), remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(\alpha) \triangleleft G &\iff \alpha(yxy^{-1}) = \mathbf{1}, \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G \\
 &\iff \alpha(y)\theta_y(\alpha(x))\theta_{yx}(\alpha(y^{-1})) = \mathbf{1}, \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G \\
 &\iff \alpha(y)\theta_{yx}(\theta_{y^{-1}}(\alpha(y)^{-1})) = \mathbf{1}, \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G \\
 &\iff \alpha(y)\theta_{yxy^{-1}}(\alpha(y)^{-1}) = \mathbf{1}, \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G \\
 &\iff \theta_{yxy^{-1}}(\alpha(y)) = \alpha(y), \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G.
 \end{aligned}$$

Si $\text{Ker}(\alpha) \triangleleft G$, cette dernière équation est équivalente à

$$\theta_x(\alpha(y)) = \alpha(y), \forall x \in \text{Ker}(\alpha) \forall y \in G \iff \text{Ker}(\alpha) < \text{Ker}(\theta),$$

car $\alpha[G]$ engendre H .

Inversement, si $\text{Ker}(\alpha) < \text{Ker}(\theta)$, alors pour tout $x \in \text{Ker}(\alpha)$ et $y \in G$,

$$yxy^{-1} \in \text{Ker}(\theta) \implies \theta_{yxy^{-1}}(\alpha(y)) = \alpha(y).$$

Donc $\text{Ker}(\alpha) \triangleleft G$.

Pour (vi), on a

$$\begin{aligned}
\alpha[L] < H &\iff \alpha(x)^{-1}\alpha(y) \in \alpha[L], \forall x, y \in L \\
&\iff \alpha(x)^{-1}\alpha(xy) \in \alpha[L], \forall x, y \in L \\
&\iff \alpha(x)^{-1}\alpha(x)\theta_x(\alpha(y)) = \theta_x(\alpha(y)) \in \alpha[L], \forall x, y \in L \\
&\iff \theta_L[\alpha[L]] \subseteq \alpha[L].
\end{aligned}$$

Pour (vii), si $x, y \in G$, on a

$$[\alpha \circ f](xy) = \alpha(f(x)) \cdot [\theta_{f(x)}](\alpha(f(y)))$$

Donc $\alpha \circ f$ est un homomorphisme croisé associé à $\theta \circ f$.

Pour (viii), si $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned}
[f \circ \alpha](xy) &= f(\alpha(x)\theta_x(\alpha(y))) \\
&= f(\alpha(x))f(\theta_x(\alpha(y))) \\
&= [f \circ \alpha](x) [f \circ \theta_x \circ f^{-1} \circ f](\alpha(y)) \\
&= [f \circ \alpha](x) [\gamma_f(\theta_x)]([f \circ \alpha](y)).
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.12. Remarquons que le point (iv) montre que α est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\alpha) = 1$.

Le résultat suivant généralise le théorème fondamental des homomorphismes aux homomorphismes croisés.

Théorème 4.13. (Théorème fondamental des homomorphismes croisés) *Soit G, H, K trois groupes, f un épimorphisme de K sur G , η un homomorphisme de K dans $\text{Aut}H$ et $\beta : K \longrightarrow H$ un η -homomorphisme. Il existe un homomorphisme θ faisant commuter*

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta} & \text{Aut}H \\ f \downarrow & \nearrow \theta & \\ G & & \end{array}$$

si et seulement si $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(\eta)$, et un θ -homomorphisme α faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\beta} & H \\ f \downarrow & \nearrow \alpha & \\ G & & \end{array}$$

si et seulement si $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(\beta)$. De plus, si ils existent, cet homomorphisme et ce θ -homomorphisme sont uniques. Finalement, α est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\beta) = \text{Ker}(f)$; surjectif si et seulement si β est surjectif; quasi-surjectif si β l'est.

DÉMONSTRATION. L'existence et l'unicité de θ découlent directement du théorème fondamental des homomorphismes.

Pour démontrer l'existence de l'homomorphisme croisé α , posons, pour $x \in G$, $\alpha(x) = \beta(u)$, où $u \in K$ satisfaisant à $f(u) = x$.

Montrons que α est bien défini. Si v satisfait aussi à $f(v) = x$, alors $u^{-1}v \in \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(\beta)$, et donc, par la proposition 4.11(iv), $\beta(v) = \beta(u)$.

Vérifions que α est un θ -homomorphisme. Soit $x, y \in G$ et $u, v \in K$ satisfaisant à $f(u) = x$, à $f(v) = y$, et donc à $f(uv) = xy$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha(xy) &= \beta(uv) \\ &= \beta(u) \cdot \eta_u(\beta(v)) \\ &= \alpha(x) \cdot \theta_x(\alpha(y)). \end{aligned}$$

La nécessité de la condition, l'unicité de α et les affirmations sur son injectivité, sur sa surjectivité et sur sa quasi-surjectivité se démontrent facilement. \square

4.5. ISOMORPHISMES DE GROUPE ET ISOMORPHISMES CROISÉS

Nous présentons ici des propriétés des isomorphismes croisés qui joueront un rôle central dans la résolution du problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley orientés holomorphes. Ces propriétés généralisent certaines propriétés des isomorphismes de groupe usuels.

Rappelons que la conjugaison d'une translation par un isomorphisme de groupe est aussi une translation :

Proposition 4.14. *Soit G et H deux groupes, f un isomorphisme de G dans H . Alors, pour tout $x \in G$,*

$$f \circ \lambda_x \circ f^{-1} \in L(H)$$

et $f \circ \lambda_x \circ f^{-1} = \lambda_{f(x)}$.

Inversement :

Proposition 4.15. *Toute bijection f de G dans H qui envoie 1_G sur 1_H , telle que pour tout $x \in G$*

$$f \circ \lambda_x \circ f^{-1} \in L(H),$$

est un isomorphisme de groupe.

En particulier :

Proposition 4.16. *Soit G un groupe. Alors*

$$N_{\mathfrak{S}_G}(L(G)) = \text{Hol}(G).$$

Les isomorphismes croisés permettent d'obtenir une généralisation des propositions 4.14 et 4.15.

Proposition 4.17. *Soit G et H deux groupes et α un θ -isomorphisme de G dans H . Alors, pour tout $x \in G$,*

$$\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} \in \text{Hol}(H)$$

et $\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} = \lambda_{\alpha(x)} \circ \theta(x)$.

DÉMONSTRATION. Puisque pour tout $y \in H$

$$\begin{aligned}\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1}(\alpha(y)) &= \alpha(xy) \\ &= \alpha(x)\theta_x(\alpha(y)) \\ &= \lambda_{\alpha(x)} \circ \theta_x(\alpha(y)),\end{aligned}$$

alors $\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} = \lambda_{\alpha(x)} \circ \theta(x)$ □

Inversement :

Proposition 4.18. *Toute bijection α de G dans H qui envoie $\mathbf{1}_G$ sur $\mathbf{1}_H$, telle que pour tout $x \in G$*

$$\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} \in \text{Hol}(H),$$

est un isomorphisme croisé.

DÉMONSTRATION. Soit α une bijection satisfaisant les hypothèses de la proposition. Définissons $\beta : H \rightarrow G$ et $\theta : H \rightarrow \text{Aut}G$ en posant

$$\alpha \lambda_x \alpha^{-1} = \lambda_{\beta(x)} \circ \theta(x), \quad \forall x \in H.$$

En appliquant chaque coté de cette équation à $\mathbf{1}_H$ on obtient

$$\alpha(x) = \alpha \lambda_x \alpha^{-1}(\mathbf{1}_H) = \lambda_{\beta(x)} \theta(x)(\mathbf{1}_G) = \beta(x).$$

Donc $\alpha = \beta$. Finalement

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha(xy)} \theta(xy) &= \alpha \lambda_{xy} \alpha^{-1} \\ &= \alpha \lambda_x \alpha^{-1} \alpha \lambda_y \alpha^{-1} \\ &= \lambda_{\alpha(x)} \theta(x) \lambda_{\alpha(y)} \theta(y) \\ &= \lambda_{\alpha(x)} \lambda_{[\theta(x)](\alpha(y))} \theta(x) \theta(y) \\ &= \lambda_{\alpha(x)[\theta(x)](\alpha(y))} \theta(x) \theta(y).\end{aligned}$$

Par conséquent $\alpha(xy) = \alpha(x)[\theta(x)](\alpha(y))$ et $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$. Donc θ est un homomorphisme et α est un θ -isomorphisme. □

4.5.1. Isomorphismes de graphes de Cayley

Rappelons que :

Proposition 4.19. *Soit $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ deux graphes de Cayley orientés. Si f est un isomorphisme de G_1 dans G_2 qui satisfait à $f[S_1] = S_2$, alors f est un isomorphisme de graphe de Γ_1 dans Γ_2 .*

Les isomorphismes croisés généralisent cette propriété des isomorphismes de groupes ; tout comme ces derniers, ils fournissent une classe d'isomorphismes entre les graphes de Cayley.

Proposition 4.20. *Soit $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ deux graphes de Cayley orientés. Si $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ est un isomorphisme croisé qui satisfait à $\alpha[S_1] = S_2$, associé à un homomorphisme $\theta : G_1 \longrightarrow \text{Aut}_{S_2} G_2$, alors α est un isomorphisme de graphe de Γ_1 dans Γ_2 .*

DÉMONSTRATION. Cette proposition découle du fait que la règle

$$(x, xa) \mapsto \alpha((x, xa)) = (\alpha(x), \alpha(x)[\theta_x](\alpha(a)))$$

définit une application de $E(\Gamma_1)$ dans $E(\Gamma_2)$, puisque $\theta_x(\alpha(a)) \in S_2$. Cette application est bijective car $\alpha[S_1] = S_2$. \square

Remarque 4.21. La proposition 4.20 donne une classe d'automorphismes des graphes de Cayley. En effet, si $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est un graphe de Cayley et si α est un automorphisme croisé de G qui satisfait à $\alpha[S] = S$, associé à un homomorphisme $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$, alors α est un automorphisme de Γ .

Par exemple, si S est un sous-ensemble de Cayley symétrique de G qui est normal dans G alors ι , l'inversion dans G (qui est, rappelons-le, un automorphisme croisé de G associé à l'homomorphisme γ), est un automorphisme de Γ .

4.6. CALCUL DES HOMOMORPHISMES CROISÉS

Nous aurons besoin, afin d'appliquer les résultats que nous développerons dans la suite de ce chapitre, de déterminer l'ensemble des homomorphismes croisés entre deux

groupes G et H . Nous présenterons dans cette section deux outils pour y parvenir. Nous verrons d'abord une méthode générale, faisant appel à la théorie des présentations. Puis une seconde méthode, qui repose sur la proposition 4.8 : si f et g sont deux homomorphismes de G dans H , l'application $\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}$ est un homomorphisme croisé de G dans H . Nous déterminerons sous quelles conditions un homomorphisme croisé $\alpha : G \longrightarrow H$ peut se factoriser de cette façon.

4.6.1. Méthode générale

Soit G, H deux groupes, S un ensemble de générateurs de G , $F(S)$ le groupe libre sur S et $\varepsilon : F(S) \longrightarrow G$ l'homomorphisme évaluation.

Pour déterminer l'ensemble des homomorphismes croisés de G dans H à l'aide de cette méthode, nous considérerons, pour chacun des homomorphismes $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}H$, l'homomorphisme $\eta = \theta \circ \varepsilon$:

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\eta} & \text{Aut}H \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \theta & \\ G & & \end{array}$$

Puis, nous considérerons l'ensemble des homomorphismes croisés $\beta : F(S) \longrightarrow H$ associé à l'homomorphisme η , et déterminerons, parmi ces applications, celles qui induisent un θ -homomorphisme $\alpha : G \longrightarrow H$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\beta} & H \\ \varepsilon \downarrow & \dashrightarrow \alpha & \\ G & & \end{array}$$

Remarque 4.22. Remarquons que tout homomorphisme croisé $\alpha : G \longrightarrow H$ peut s'obtenir de cette façon puisqu'il est l'unique homomorphisme croisé faisant commuter le

diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\alpha \circ \varepsilon} & H \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \alpha & \\ G & & \end{array} .$$

Tout d'abord, toute application $\pi : S \longrightarrow H$ se prolonge de façon unique à un η -homomorphisme de $F(S)$ dans H :

Proposition 4.23. *Soit S un ensemble de symboles, $\eta : F(S) \longrightarrow \text{Aut}H$ un homomorphisme et π une application de S dans H . Alors il existe un unique η -homomorphisme β faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi} & H \\ i \downarrow & \nearrow \beta & \\ F(S) & & \end{array}$$

De plus, si on prolonge π à $\bar{S} = S \cup S^{-1}$ en posant $\pi(a^{-1}) = \eta_{a^{-1}}(\pi(a)^{-1})$ pour tout $a \in S$, β satisfait à

$$\beta(a_1 \dots a_l) = \pi(a_1) \cdot \eta_{a_1}(\pi(a_2)) \dots \eta_{a_1 \dots a_{l-1}}(\pi(a_l)) = \prod_{k=0}^{l-1} \eta_{a_1 \dots a_k}(\pi(a_{k+1})).$$

DÉMONSTRATION. Montrons que β , tel que défini dans l'énoncé, est un η -homomorphisme faisant commuter le diagramme. Vérifions tout d'abord que β est bien défini. Pour s'en assurer, il suffit de montrer que $\beta(a_1 \dots a_l) = \beta(a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_l)$ si $a_{i+1} = a_i^{-1}$. Soit $u = a_1 \dots a_l \in F(S)$ tel que $a_{i+1} = a_i^{-1}$ pour un certain i . Posons $u_k = a_1 a_2 \dots a_k$. Alors

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \pi(a_1) \dots \eta_{u_{i-2}}(\pi(a_{i-1})) \cdot \eta_{u_{i-1}}(\pi(a_i)) \cdot \eta_{u_i}(\pi(a_{i+1})) \cdot \eta_{u_{i+1}}(\pi(a_{i+2})) \dots \\ &= \pi(a_1) \dots \eta_{u_{i-2}}(\pi(a_{i-1})) \cdot \eta_{u_{i-1}}(\pi(a_i) \cdot \eta_{a_i}(\pi(a_{i+1}))) \cdot \eta_{u_{i+1}}(\pi(a_{i+2})) \dots \end{aligned}$$

Puisque $\pi(a_i) \cdot \eta_{a_i}(\pi(a_{i+1})) = 1$ (voir proposition 4.11(ii)) et $u_{i+1} = u_{i-1}$, cette dernière équation donne

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \pi(a_1) \dots \eta_{u_{i-2}}(\pi(a_{i-1})) \cdot \eta_{u_{i-1}}(\pi(a_{i+2})) \dots \\ &= \beta(a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_l). \end{aligned}$$

De plus, β est un η -homomorphisme, car si $u = a_1 \dots a_l, v = b_1 \dots b_m \in F(S)$,

$$\begin{aligned}\beta(uv) &= \pi(a_1) \dots \eta_{a_1 \dots a_{l-1}}(\pi(a_l)) \cdot \eta_u(\pi(b_1)) \dots \eta_{ub_1 \dots b_{m-1}}(\pi(b_m)) \\ &= \beta(u) \cdot \eta_u(\pi(b_1)) \dots \eta_{b_1 \dots b_{m-1}}(\pi(b_m)) \\ &= \beta(u) \cdot \eta_u(\beta(v))\end{aligned}$$

Finalement, β fait commuter le diagramme de l'énoncé, car $\beta(a) = \pi(a)$ pour tout $a \in S$.

Il reste à démontrer que tout η -homomorphisme β' faisant commuter le diagramme est égal à β . Si $u = a_1 \dots a_l \in F(S)$,

$$\beta'(u) = \beta'(a_1) \cdot \eta_{a_1}(\beta'(a_2)) \dots \eta_{a_1 \dots a_{l-1}}(\beta'(a_l)).$$

Or, si $a_i \in S$,

$$\beta'(a_i) = \pi(a_i),$$

et si $a_i = a^{-1} \in S^{-1}$,

$$1 = \beta'(a^{-1}a) = \beta'(a^{-1}) \cdot \eta_{a^{-1}}(\beta'(a))$$

entraîne que

$$\begin{aligned}\beta'(a_i) = \beta'(a^{-1}) &= \eta_{a^{-1}}(\beta'(a)^{-1}) \\ &= \eta_{a^{-1}}(\pi(a)^{-1}) \\ &= \pi(a_i).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\beta'(a_i) = \pi(a_i)$ pour tout i . Donc $\beta'(u) = \beta(u)$. □

Si G est un groupe et S un ensemble de générateurs de G , le théorème fondamental des homomorphismes croisés permet de déterminer quand un η -homomorphisme $\beta : F(S) \longrightarrow H$ induit un homomorphisme croisé de G dans H .

Proposition 4.24. *Soit G un groupe, S un ensemble de générateurs de G , θ un homomorphisme de G dans $\text{Aut}H$, $\eta = \theta \circ \varepsilon$ et β un η -homomorphisme. Il existe un*

θ -homomorphisme α faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\beta} & H \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \alpha & \\ G & & \end{array}$$

si et seulement si $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$. De plus, si il existe, ce θ -homomorphisme est unique.

Il pourrait être difficile en général de vérifier que $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$. Dans le cas des homomorphismes, il suffit de trouver une présentation (S, \mathfrak{R}) de G et de montrer que $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$. En effet, puisque \mathfrak{R} est par définition un sous-ensemble de $F(S)$ qui engendre comme plus petit sous-groupe normal le groupe $\text{Ker}(\varepsilon)$, l'inclusion $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$ implique que $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$, car $\text{Ker}(\beta)$ est un sous-groupe normal de $F(S)$ quand β est un homomorphisme.

Dans le cas des homomorphismes croisés, cet argument ne fonctionne pas puisque $\text{Ker}(\beta)$ n'est pas en général un sous-groupe normal de $F(S)$. Malgré cela, $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$ est tout de même une inclusion nous assurant que $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$:

Théorème 4.25. Soit G un groupe, (S, \mathfrak{R}) une présentation de G , θ un homomorphisme de G dans $\text{Aut}H$, $\eta = \theta \circ \varepsilon$, et β un η -homomorphisme. Il existe un θ -homomorphisme α faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\beta} & H \\ \varepsilon \downarrow & \nearrow \alpha & \\ G & & \end{array}$$

si et seulement si $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$. De plus, si il existe, ce θ -homomorphisme est unique.

Nous utiliserons dans la preuve suivante l'égalité

$$\text{Ker}(\varepsilon) = \langle \{vuv^{-1} : u \in \mathfrak{R} \text{ et } v \in F(S)\} \rangle,$$

qui découle du fait que le plus petit sous-groupe normal de $F(S)$ engendré par \mathfrak{R} est $\text{Ker}(\varepsilon)$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.24, il faut démontrer que $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$ si et seulement si $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$. L'inclusion $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta)$ est évidemment nécessaire pour que $\text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$. Pour démontrer que $\mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta) \implies \text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\beta)$, remarquons que

$$\{vuv^{-1} : u \in \mathfrak{R} \text{ et } v \in F(S)\} \subseteq \text{Ker}(\beta),$$

car pour tout $u \in \mathfrak{R}$ et $v \in F(S)$ on a

$$\begin{aligned} \beta(vuv^{-1}) &= \beta(v) \cdot \eta_v(\beta(u)) \cdot \eta_u(\beta(v^{-1})) \\ &= \beta(v) \cdot \eta_v(\beta(v^{-1})) \quad (\text{car par hypothèse } u \in \mathfrak{R} \subseteq \text{Ker}(\beta) \text{ et } u \in \text{Ker}(\varepsilon) \subseteq \text{Ker}(\eta)) \\ &= \beta(v) \cdot \eta_v(\eta_{v^{-1}}(\beta(v)^{-1})) \quad (\text{par la proposition 4.11(ii)}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\text{Ker}(\beta)$ est un sous-groupe de $F(S)$, cela entraîne que $\text{Ker}(\varepsilon) = \langle \{vuv^{-1} : u \in \mathfrak{R} \text{ et } v \in F(S)\} \rangle \subseteq \text{Ker}(\beta)$. \square

4.6.2. Homomorphismes croisés définis sur Z_n

Nous déterminerons dans cette section les homomorphismes croisés de Z_n dans un groupe H quelconque. Nous calculerons en particulier tous les automorphismes croisés de Z_n . La preuve de ces résultats illustre comment utiliser les résultats précédents.

Dans la suite de cette section, $o^+(m)$ dénote l'ordre additif d'un élément $m \in Z_n$, μ_a dénote l'application de Z_n dans Z_n définie par $\mu_a(b) := ab$, $U(Z_n)$ dénote le groupe des unités de Z_n et $o(a)$ dénote l'ordre multiplicatif d'un élément $a \in U(Z_n)$.

Proposition 4.26. (*Homomorphismes croisés de Z_n dans H*) Soit H un groupe, n un nombre naturel, f un automorphisme de H dont l'ordre divise n , et $z \in H$. Si

$$\prod_{k=0}^{n-1} f^k(z) = 1_H,$$

alors l'application définie par

$$\alpha(0) = 1_H \text{ et } \alpha(i) = \prod_{k=0}^{i-1} f^k(z)$$

est un homomorphisme croisé de Z_n dans H , associé à l'homomorphisme θ défini par $\theta(i) = f^i$.

De plus, tout homomorphisme croisé de Z_n dans H est de cette forme.

DÉMONSTRATION. Considérons $S = \{1\}$ comme ensemble de générateurs de Z_n . Soit θ un homomorphisme quelconque de Z_n dans $\text{Aut}H$, $\eta = \theta \circ \varepsilon : F(S) \longrightarrow \text{Aut}H$, π une application de S dans H , et $\beta : F(S) \longrightarrow H$ l'unique η -homomorphisme prolongeant π . Posons $f = \theta(1) = \eta(1)$ et $z = \pi(1)$. Alors $o(f)$ divise n , $\eta(1^i) = \theta_i = f^i$ et, par la proposition 4.23,

$$\beta(1^i) = \prod_{k=0}^{i-1} \eta_{1^k}(\pi(1)) = \prod_{k=0}^{i-1} f^k(z).$$

Par le théorème 4.25, l'équation $\alpha(i) = \alpha(\varepsilon(1^i)) = \beta(i) = \prod_{k=0}^{i-1} f^k(z)$ définit un homomorphisme croisé de Z_n dans H si et seulement si

$$n \in \text{Ker}(\beta) \iff \prod_{k=0}^{n-1} f^k(z) = 1_H.$$

□

Proposition 4.27. (Automorphismes croisés de Z_n) Soit n un nombre naturel, et a, b deux unités de Z_n . Posons $S_a = 1 + a + \dots + a^{o(a)-1}$. Si

$$(n, S_a) | o(a)$$

alors l'application définie par

$$\alpha(i) = b(1 + a + \dots + a^{i-1})$$

est un automorphisme croisé de Z_n associé à l'homomorphisme θ défini par $\theta(i) = \mu_{a^i}$.

De plus, tout automorphisme croisé de Z_n est de cette forme.

DÉMONSTRATION. Soit α un endomorphisme croisé de Z_n . Par la proposition 4.26, il existe une unité a de Z_n et $b \in Z_n$ satisfaisant à $o(a) | n$ et à $\sum_{k=0}^{n-1} a^k b = 0$, tels que pour

tout $i \in Z_n$,

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= \sum_{k=0}^{i-1} a^k b \\ &= b \sum_{k=0}^{i-1} a^k \\ &= \mu_b \circ \alpha'(i),\end{aligned}$$

où α' est l'application définie par $\alpha'(i) = \sum_{k=0}^{i-1} a^k$.

L'endomorphisme croisé α est bijectif si et seulement si μ_b et α' le sont, ce qui est équivalent à μ_b surjectif et $\text{Ker}(\alpha') = 0$ (car Z_n est d'ordre fini). La première de ces deux conditions est équivalente à $b \in U(Z_n)$. Pour déterminer à quoi est équivalente la seconde, calculons $\text{Ker}(\alpha')$. Considérons $i \in Z_n$ tel que

$$\alpha'(i) = \sum_{k=0}^{i-1} a^k = 0. \quad (4.1)$$

Puisque $a^i - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{i-1} a^k = 0$, $o(a)$ divise i . Par conséquent

$$i = jo(a), \text{ pour un certain } j \in \mathbf{N},$$

et

$$\begin{aligned}0 = \sum_{k=0}^{i-1} a^k &= (1 + a + \dots + a^{o(a)-1}) + \dots + (a^{(j-1)o(a)} + \dots + a^{jo(a)-1}) \\ &= j(\sum_{k=0}^{o(a)-1} a^k) = jS_a.\end{aligned}$$

Donc j est un multiple de $o^+(S_a) (= \frac{n}{(n, S_a)})$. Cela démontre que si $i \in \text{Ker}(\alpha')$, i est de la forme

$$\begin{aligned}i &= jo(a) \\ &= mo^+(S_a)o(a), \text{ pour un certain } m \in \mathbf{N}.\end{aligned}$$

On peut vérifier que la réciproque de cette affirmation est vraie aussi. Par conséquent $\text{Ker}(\alpha')$ est le sous-groupe de Z_n constitué des multiples de $o^+(S_a)o(a)$. Cela permet de déduire que $\text{Ker}(\alpha') = \{0\}$ si et seulement si $n | o^+(S_a)o(a)$. Donc α est bijectif si et

seulement si $b \in U(Z_n)$ et

$$\begin{aligned}
 n|o^+(S_a)o(a) &\iff n|\frac{n}{(n, S_a)}o(a) \\
 &\iff \frac{n}{(n, S_a)}o(a) = mn \quad (\text{pour un certain } m \in \mathbf{N}) \\
 &\iff o(a) = m(n, S_a) \\
 &\iff (n, S_a)|o(a).
 \end{aligned}$$

□

4.6.3. Méthode par factorisation

Rappelons nous que si f et g sont deux homomorphismes de G dans H , la fonction $\alpha : G \longrightarrow H$ définie par $\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}$ est un $(\gamma \circ g)$ -homomorphisme. Dans cette section, nous tenterons de déterminer sous quelles conditions un homomorphisme croisé α se factorise de cette façon.

Remarquons d'abord que si un homomorphisme croisé se factorise de cette façon, son noyau et son image sont liés aux noyaux et aux images de f et g :

Proposition 4.28. *Si f et g sont deux homomorphismes de G dans H , et $\alpha : G \longrightarrow H$ est l'homomorphisme croisé défini par $\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}$, alors*

- (i) $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) < \text{Ker}(\alpha)$;
- (ii) $\text{Im}(\alpha) \subseteq \text{Im}(f)\text{Im}(g)$. Donc $|\text{Im}(\alpha)| \leq |\text{Im}(f)||\text{Im}(g)|$.

La proposition suivante est la factorisation la plus générale que nous avons obtenu. γ y dénote l'homomorphisme conjugaison de H dans $\text{Aut}H$, et $\gamma_{\text{Aut}H}$ l'homomorphisme conjugaison de $\text{Aut}H$ dans $\text{Aut}(\text{Aut}H)$.

Proposition 4.29. *Soit G, H deux groupes et $\alpha : G \longrightarrow H$ un θ -homomorphisme. Alors $\beta = \gamma \circ \alpha : G \longrightarrow \text{Inn}(H)$ est un homomorphisme croisé associé à $\gamma_{\text{Aut}H} \circ \theta$. De plus, il existe un homomorphisme $\eta : G \longrightarrow \text{Aut}H$ nous donnant la factorisation*

$$\beta(x) = \eta(x)\theta(x)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Vérifions tout d'abord que β est un $\gamma_{\text{Aut}H} \circ \theta$ -homomorphisme.

$$\begin{aligned}
 \beta(xy) &= \gamma(\alpha(xy)) \\
 &= \gamma(\alpha(x)[\theta_x](\alpha(y))) \\
 &= \gamma(\alpha(x))\gamma([\theta_x](\alpha(y))) \\
 &= \beta(x)\theta_x\gamma(\alpha(y))\theta_x^{-1} \text{ (par la proposition 5.2)} \\
 &= \beta(x)[\gamma_{\text{Aut}H, \theta_x}](\beta(y)) \\
 &= \beta(x)[\gamma_{\text{Aut}H} \circ \theta(x)](\beta(y)).
 \end{aligned}$$

Pour démontrer l'existence de la factorisation décrite dans l'énoncé, définissons η en posant $\eta(x) = \beta(x)\theta(x)$, pour $x \in G$. Alors

$$\begin{aligned}
 \eta(xy) &= \beta(xy)\theta(xy) \\
 &= \beta(x)[\gamma_{\text{Aut}H} \circ \theta(x)](\beta(y))\theta_x\theta_y \\
 &= \beta(x)\theta_x\beta(y)\theta_x^{-1}\theta_x\theta_y \\
 &= \beta(x)\theta_x\beta(y)\theta_y \\
 &= \eta(x)\eta(y).
 \end{aligned}$$

L'application η est donc un homomorphisme satisfaisant à

$$\beta(x) = \eta(x)\theta(x)^{-1}.$$

□

Corollaire 4.30. *Si H est un groupe à centre trivial, tout θ -homomorphisme $\alpha : G \rightarrow H$ se factorise comme*

$$\alpha(x) = \gamma^{-1}(\eta(x)\theta(x)^{-1}),$$

où η est homomorphisme de G dans $\text{Aut}H$.

En particulier, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(H)$, on obtient :

Corollaire 4.31. *Si H est un groupe à centre trivial, alors tout homomorphisme croisé $\alpha : G \longrightarrow H$, associé à un homomorphisme $\theta : G \longrightarrow \text{Inn}(H)$, se factorise en*

$$\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1},$$

où f et g sont deux homomorphismes de G dans H et g satisfait à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in G$.

Plus généralement :

Proposition 4.32. *Soit $\theta : G \longrightarrow \text{Inn}(H)$ un homomorphisme et α un θ -homomorphisme de G dans H . Si $C(H)$ possède un complément T dans $\gamma^{-1}(\text{Im}(\theta))$, alors il existe deux homomorphismes $f : G \longrightarrow H$, et $g : G \longrightarrow T$ satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$, donnant la factorisation*

$$\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. À chaque x dans G correspond un unique $g(x)$ dans T satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$. Si $x, y \in G$,

$$\gamma_{g(x)g(y)} = \gamma_{g(x)}\gamma_{g(y)} = \theta_x\theta_y = \theta_{xy} = \gamma_{g(xy)} \Leftrightarrow g(x)g(y)g(xy)^{-1} \in C(H).$$

Par conséquent $g(xy) = g(x)g(y)$, car $g(x)g(y)g(xy)^{-1} \in C(H) \cap T = \mathbf{1}_H$. L'application g est donc un homomorphisme de G dans H satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$.

Pour obtenir la factorisation de α , posons $f(x) = \alpha(x)g(x)$ pour $x \in G$. On a

$$\begin{aligned} f(xy) &= \alpha(xy)g(xy) \\ &= \alpha(x)[\theta_x](\alpha(y))g(x)g(y) \\ &= \alpha(x)[\gamma_{g(x)}](\alpha(y))g(x)g(y) \\ &= \alpha(x)g(x)\alpha(y)g(y) \\ &= f(x)f(y), \end{aligned}$$

Donc f est un homomorphisme satisfaisant à $\alpha(x) = f(x)g(x)^{-1}$. □

Chapitre 5

LES SOUS-GROUPES D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT

5.1. INTRODUCTION

Dans le présent chapitre nous développons des théorèmes permettant de trouver les sous-groupes d'un produit semi-direct $K \rtimes_{\theta} Q$. Ces résultats donnent, quand ils s'appliquent, une décomposition des sous-groupes de $K \rtimes_{\theta} Q$ en fonction des facteurs K et Q , et de l'homomorphisme θ . Ces résultats serviront à résoudre le problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley holomorphes basés sur des groupes différents. Nous les utiliserons aussi pour obtenir des résultats de structure sur les produits semi-directs non triviaux de groupes simples, groupes sur lesquels sont basées certaines des classes importantes de graphes de Cayley que nous étudierons, contenant par exemple la classe des graphes de Cayley basés sur un groupe symétrique.

5.2. PRÉALABLES

Proposition 5.1. *Soit G et H deux groupes, f un isomorphisme de G dans H et $z \in G$.*

Alors

$$f\gamma_z f^{-1} = \gamma_{f(z)}.$$

En particulier,

Proposition 5.2. *Soit G un groupe, f un automorphisme de G et $z \in G$. Alors*

$$f\gamma_z f^{-1} = \gamma_{f(z)}.$$

Par conséquent $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}G$.

Proposition 5.3. *Tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.*

Proposition 5.4. *Si $H \triangleleft G$ et si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble.*

Théorème 5.5. (“Conjecture” de Schreier, [16]) *Si G est un groupe simple fini, le groupe $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$ est un groupe résoluble.*

Nous exploiterons ce théorème à l'aide du résultat suivant :

Proposition 5.6. *Soit G un groupe tel que $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$ est résoluble. Si H est un sous-groupe de $\text{Aut}G$ tel que H/N est non résoluble pour tout sous-groupe normal N de H différent de H , alors $H < \text{Inn}(G)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $(H\text{Inn}(G))/\text{Inn}(G)$ est un sous-groupe de $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$, $(H\text{Inn}(G))/\text{Inn}(G)$ est résoluble. Or, par le premier théorème d'isomorphie, $(H\text{Inn}(G))/\text{Inn}(G)$ est isomorphe au groupe $H/(H \cap \text{Inn}(G))$, qui est résoluble seulement si $H \cap \text{Inn}(G) = H$. Par conséquent, $H \subseteq \text{Inn}(G)$. \square

5.3. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Commençons par quelques préliminaires. Soit

$$H < K \rtimes_{\theta} Q.$$

Considérons les deux projections

$$\begin{array}{ll} \sigma_K : H \longrightarrow K & \sigma_Q : H \longrightarrow Q \\ (a, x) \mapsto a & (a, x) \mapsto x \end{array}$$

On se rappelle que σ_Q est un homomorphisme et que σ_K est un homomorphisme croisé associé à $\theta \circ \sigma_Q$. Posons

$$\begin{array}{ll} H_K = \langle \text{Im}(\sigma_K) \rangle & H_Q = \text{Im}(\sigma_Q) \\ N_K = \sigma_K[\text{Ker}(\sigma_Q)] & N_Q = \sigma_Q[\text{Ker}(\sigma_K)] \end{array}$$

On a

Proposition 5.7. *Les ensembles H_K , N_K , H_Q et N_Q sont des sous-groupes de K et Q respectivement.*

Remarquons qu'il est impossible d'obtenir une décomposition aussi générale que celle des sous-groupes d'un produit direct (voir théorème 4.3), car N_K et N_Q ne sont pas toujours des sous-groupes normaux de H_K et H_Q respectivement.

Pour décomposer H , nous construirons un nouveau produit semi-direct $\tilde{G} = H_K/N_K \rtimes H_Q$, contenant une image homomorphe \tilde{H} de H , de sorte que la projection $\tilde{\sigma}_Q : \tilde{H} \rightarrow H_Q$ soit une bijection.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{H} & \\ \swarrow & & \searrow \\ H_K/N_K & & H_Q \end{array} \quad \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_K \quad \tilde{\sigma}_Q \\ \tilde{\sigma}_Q^{-1} \end{array}$$

Nous obtiendrons ainsi, un homomorphisme croisé $\beta = \tilde{\sigma}_K \circ \tilde{\sigma}_Q^{-1} : H_Q \rightarrow H_K/N_K$, donnant la décomposition

$$H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}.$$

Les translatsés de N_K (les $\beta(x)$) sont vus ici comme des sous-ensembles de H_K .

Pour affiner cette décomposition, nous formerons ensuite un autre produit semi-direct, $\bar{G} = H_K/N_K \rtimes H_Q/N_Q$, contenant aussi une image homomorphe \bar{H} de H , de sorte que $\bar{\sigma}_Q$ soit une bijection, que $\bar{\sigma}_K$ soit une injection et donc que $\alpha = \bar{\sigma}_K \circ \bar{\sigma}_Q^{-1}$ soit aussi une injection. Nous obtiendrons de cette façon un monomorphisme croisé $\alpha : H_Q/N_Q \rightarrow H_K/N_K$ donnant

$$H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q.$$

Il nous faudra pour former les deux produits semi-directs $\tilde{G} = H_K/N_K \rtimes H_Q$ et $\bar{G} = H_K/N_K \rtimes H_Q/N_Q$, quand cela sera possible, deux homomorphismes. Un premier $\tilde{\theta}$ de H_Q dans $\text{Aut}(H_K/N_K)$, un second de H_Q/N_Q dans $\text{Aut}(H_K/N_K)$.

Avant de continuer introduisons une définition et un lemme.

Définition 5.8. (*f préserve N*) Soit H un groupe, f un automorphisme de H et N un sous-groupe de H . Nous dirons que f préserve N si $f[N] = N$.

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 5.9. Soit G et H deux groupes, N un sous-groupe de H , et $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}H$ un homomorphisme. Si $\theta[G]$ stabilise N (c'est-à-dire pour tout $x \in G$ on a $\theta_x[N] \subseteq N$) alors $\theta[G]$ préserve N (c'est-à-dire pour tout $x \in G$ on a $\theta_x[N] = N$).

Afin de définir les deux homomorphismes $\tilde{\theta}$ et $\bar{\theta}$ remarquons que :

Proposition 5.10. (L'automorphisme induit \tilde{f})

Soit H un groupe, N un sous-groupe normal de H et f un automorphisme de H . Cet automorphisme induit un automorphisme \tilde{f} de H/N faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & H \\ \nu_N \downarrow & & \downarrow \nu_N \\ H/N & \xrightarrow{\tilde{f}} & H/N \end{array}$$

c'est-à-dire vérifiant l'équation $\tilde{f}(xN) = f(x)N \forall x \in H$, si et seulement si f préserve N (c'est-à-dire si $f[N] = N$). De plus, si il existe, cet automorphisme est unique.

DÉMONSTRATION. Par le théorème fondamental des homomorphismes, il existe un automorphisme faisant commuter le diagramme de l'énoncé si et seulement si $\nu_N \circ f$ est surjectif et

$$\begin{aligned} N = \text{Ker}(\nu_N) &= \text{Ker}(\nu_N \circ f) \\ &= f^{-1}[N]. \end{aligned}$$

La première condition est toujours satisfaite. La seconde est équivalente à $f[N] = N$. □

On en déduit la proposition :

Proposition 5.11. (L'homomorphisme induit $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$)

Si $N_K \triangleleft H_K$, l'homomorphisme $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ induit un homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ vérifiant l'équation

$$\tilde{\theta}(x) = \widetilde{\theta(x)}, \forall x \in H_Q,$$

si et seulement si $\theta[H_Q]$ préserve H_K et N_K . De plus, si il existe, cet homomorphisme est unique.

DÉMONSTRATION. La nécessité découle directement de la proposition 5.10. Pour démontrer la suffisance, remarquons d'abord que si pour $x \in H_Q$ on a $\theta_x[H_K] = H_K$ et $\theta_x[N_K] = N_K$, alors $\theta_{x|H_K} \in \text{Aut}H_K$ et $\theta_{x|N_K} \in \text{Aut}N_K$. Cela nous permet d'appliquer le résultat précédant et d'obtenir, pour tout $x \in H_Q$, un automorphisme $\tilde{\theta}_x$ de H_K/N_K . On peut donc définir une application $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ en posant $\tilde{\theta}(x) = \tilde{\theta}_x$. Il est facile de vérifier que cette application est un homomorphisme. \square

Proposition 5.12. (L'homomorphisme induit $\tilde{\theta} : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$)

Si $N_K \triangleleft H_K$ et $N_Q \triangleleft H_Q$, l'homomorphisme $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ induit un homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ vérifiant l'équation

$$\tilde{\theta}(xN_Q) = \widetilde{\theta(x)}, \quad \forall xN_Q \in H_Q/N_Q$$

si et seulement si $\theta[H_Q]$ préserve H_K et N_K , et $N_Q \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta})$. De plus, si il existe, cet homomorphisme est unique.

DÉMONSTRATION. Vérifions en premier lieu la suffisance. Si $\theta[H_Q]$ préserve H_K et N_K , l'homomorphisme θ induit un homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ vérifiant l'équation

$$\tilde{\theta}(x) = \widetilde{\theta(x)}, \quad \forall x \in H_Q.$$

Si en plus $N_Q \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta})$, alors, par le théorème fondamental des homomorphismes, il existe un homomorphisme $\bar{\theta}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_Q & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \text{Aut}(H_K/N_K) , \\ \nu_{N_Q} \downarrow & \nearrow \bar{\theta} & \\ H_Q/N_Q & & \end{array}$$

c'est-à-dire vérifiant l'équation

$$\bar{\theta}(xN_Q) = \bar{\theta} \circ \nu_{N_Q}(x) = \tilde{\theta}(x) = \widetilde{\theta(x)}, \quad \forall x \in H_Q.$$

Inversement, si θ induit un tel homomorphisme, l'équation $\tilde{\theta} = \bar{\theta} \circ \nu_{N_Q}$ définit un homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ vérifiant l'équation

$$\tilde{\theta}(x) = \widetilde{\theta(x)}, \forall x \in H_Q.$$

Ainsi, par la proposition 5.11, $\theta[H_Q]$ préserve H_K et N_K . De plus, comme $\tilde{\theta}$ fait commuter le diagramme précédant, $N_Q = \text{Ker}(\nu_{N_Q}) \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta})$. \square

5.3.1. Première décomposition

Nous sommes maintenant prêts à démontrer la décomposition la plus générale que nous avons obtenue :

Théorème 5.13. *Soit $H < K \rtimes_{\theta} Q$. Si $N_K \triangleleft H_K$, H s'écrit comme*

$$H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}$$

où $\beta : H_Q \longrightarrow H_K/N_K$ est un homomorphisme croisé quasi-surjectif associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ .

Inversement :

Théorème 5.14. *Si $N_K \triangleleft H_K < K$, si $H_Q < Q$, si $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ est un homomorphisme induit par θ , et si $\beta : H_Q \longrightarrow H_K/N_K$ est un homomorphisme croisé associé à $\tilde{\theta}$, alors*

$$H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}$$

est un sous-groupe de $K \rtimes_{\theta} Q$.

Remarque 5.15. Notons que si K est abélien, le théorème 5.13 donne une décomposition de tous les sous-groupes de $K \rtimes_{\theta} Q$.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 5.13 et 5.14. Prouvons d'abord le théorème 5.13. Remarquons pour commencer deux choses. Premièrement, puisque $H < K \rtimes_{\theta} Q$, pour tout $(a, x), (b, y) \in H$ on a

$$\begin{aligned} (a, x)(b, y) = (a\theta_x(b), xy) \in H &\implies a\theta_x(b) \in H_K \\ &\implies \theta_x(b) \in H_K, \text{ (car } a \in H_K). \end{aligned}$$

Cette inclusion implique que

$$\theta_x[H_K] \subseteq H_K, \forall x \in H_Q.$$

Donc, par le lemme 5.9, le groupe $\theta[H_Q]$ préserve H_K . Deuxièmement, $\text{Ker}(\sigma_Q) \triangleleft H$ nous donne, pour tout $(a, x) \in H$ et $b \in N_K$,

$$(a, x)(b, \mathbf{1})(a, x)^{-1} = (a\theta_x(b)a^{-1}, \mathbf{1}) \in H,$$

ce qui entraîne que

$$a\theta_x(b)a^{-1} \in N_K \iff \theta_x(b) \in a^{-1}N_K a = N_K,$$

donc que $\theta[H_Q]$ préserve N_K .

Ainsi, par la proposition 5.11, il existe un homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ . Considérons le groupe $H_K/N_K \rtimes_{\tilde{\theta}} H_Q$, contenant le sous-groupe $\tilde{H} = \{(aN_K, x) : (a, x) \in H\}$, l'image de H par l'homomorphisme $(a, x) \mapsto (aN_K, x)$. Remarquons que, puisque $N_K \times \mathbf{1} \subseteq H$, on a

$$(a, x) \in H \iff (aN_K, x) \in \tilde{H} \iff aN_K \times \{x\} \subseteq H. \quad (5.1)$$

Il est facile de vérifier que la projection $\tilde{\sigma}_{H_Q} : \tilde{H} \longrightarrow H_Q$ est surjective. Elle est aussi injective, car $(aN_K, x) \in \text{Ker}(\tilde{\sigma}_{H_Q})$ entraîne que $x = \mathbf{1}$ et donc, par l'équivalence (5.1), que $a \in N_K$. Puisque $\tilde{\sigma}_{H_Q}$ est une bijection, on peut définir l'application $\beta : H_Q \longrightarrow H_K/N_K$ en posant $\beta = \tilde{\sigma}_{H_K/N_K} \circ \tilde{\sigma}_{H_Q}^{-1}$. La proposition 4.11(7), le fait que $\tilde{\sigma}_{H_K/N_K}$ est un $(\tilde{\theta} \circ \tilde{\sigma}_{H_Q})$ -homomorphisme et le fait que $\tilde{\sigma}_{H_Q}^{-1}$ est un homomorphisme, impliquent que β est un $\tilde{\theta}$ -homomorphisme. De plus, puisque $\tilde{\sigma}_{H_Q}$ est un isomorphisme, chaque $x \in H_Q$ appartient à une seule paire de \tilde{H} , soit $(\beta(x), x)$. On obtient ainsi, en utilisant l'équivalence (5.1) et en considérant les translatés de N_K comme des sous-ensembles de H_K , la décomposition

$$H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}.$$

Inversement, considérons $N_K, H_K, H_Q, \tilde{\theta}$ et β satisfaisant les hypothèses du théorème 5.14, et vérifions que $H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}$ est un sous-groupe de $K \rtimes_{\theta} Q$. Pour

cela remarquons que

$$(a, x) \in H \iff \beta(x) = aN_K.$$

Par conséquent, si $(a, x), (b, y) \in H$,

$$(a, x), (b, y) = (a\theta_x(b), xy) \in H$$

car

$$\begin{aligned} \beta(xy) &= \beta(x)\tilde{\theta}_x(\beta(y)) \\ &= aN_K\tilde{\theta}_x(bN_K) \\ &= aN_K\theta_x(b)N_K \\ &= a\theta_x(b)N_K. \end{aligned}$$

□

5.3.2. Application

Nous étudierons à fond, aux chapitres 6 et 7, le problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley basés sur un produit semi-direct non trivial de deux groupes simples finis, c'est-à-dire un groupe de la forme $K \rtimes_{\theta} Q$, où K et Q sont simples et finis, et θ est un homomorphisme non trivial.

Pour y parvenir, nous aurons besoin de la proposition 5.17 qui donne les sous-groupes isomorphes à K et Q de ces produits. Pour faire la preuve de cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.16. *Soit $G = K \rtimes_{\theta} Q$ un produit semi-direct non trivial de deux groupes simples finis.*

- (i) *Si Q est un groupe non abélien, alors K est non abélien et $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$.*
- (ii) *Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors K est non abélien et il existe un unique monomorphisme $g : Q \longrightarrow K$ satisfaisant à $\theta(x) = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$. En particulier, $|Q| \leq |K|$.*

DÉMONSTRATION. Si Q est un groupe non abélien, alors $\text{Im}(\theta)$ est un sous-groupe simple non résoluble de $\text{Aut}K$. Cela entraîne d'une part que K est non abélien (si K

était abélien, K serait isomorphe à Z_p , donc $\text{Aut}K$ serait résoluble) et, d'autre part, par le théorème 5.5 et la proposition 5.6, que $\text{Im}(\theta) < \text{Inn}(K)$.

Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors K est un groupe non abélien, car par hypothèse $\text{Im}(\theta)$ est non trivial. Par conséquent le centre de K est trivial, $\gamma : K \longrightarrow \text{Inn}(K)$ est un isomorphisme, donc $g = \gamma^{-1} \circ \theta$ est l'unique monomorphisme de Q dans K qui satisfait à $\theta(x) = \gamma_{g(x)}$ pour $x \in Q$. \square

Proposition 5.17. *Soit $G = K \rtimes_{\theta} Q$, où K et Q sont deux groupes simples finis et $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme non trivial.*

(i) *Les sous-groupes de G isomorphes à Q sont*

- $H_K \times \mathbf{1}$, si $H_K \simeq Q$;
- $\{(f(x)g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, si $f, g : Q \longrightarrow K$ sont deux homomorphismes et si g est le monomorphisme satisfaisant à $\theta(x) = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$;
- $\{(\prod_{k=0}^{i-1} \theta_k(z), i) : i \in Q\}$, si $Q \simeq Z_p$, si $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$ et si $z \in K$ satisfait à $\prod_{k=0}^{p-1} \theta_k(z) = \mathbf{1}$.

(ii) *Les sous-groupes de G isomorphes à K sont*

- $K \times \mathbf{1}$;

en plus de ceux isomorphes à Q si $K \simeq Q$.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe de G isomorphe à K ou à Q . Considérons $\sigma_K : H \longrightarrow K$, $\sigma_Q : H \longrightarrow Q$, H_K , H_Q et N_K tels que définis dans les préliminaires au début du chapitre. Rappelons que σ_Q est un homomorphisme.

Cas $H \simeq Q$.

Puisque H est simple, $\text{Ker}(\sigma_Q)$ est égal à H ou à $\mathbf{1}$. Dans le premier cas, $H < K \times \mathbf{1}$. Par conséquent $H = H_K \times \mathbf{1}$, avec $H_K \simeq Q$. Dans le second cas σ_Q est un monomorphisme de H dans Q . Puisque $H \simeq Q$ et que Q est d'ordre fini, σ_Q est surjectif. Par conséquent $H_Q = \text{Im}(\sigma_Q) = Q$ et $N_K = \sigma_K[\text{Ker}(\sigma_Q)] = \mathbf{1} \triangleleft H_K$. Cela entraîne, par le théorème 5.13, l'existence d'un θ -homomorphisme croisé $\beta : H_Q \longrightarrow H_K \subseteq K$,

donnant la factorisation $H = \bigcup_{x \in Q} \beta(x) \times \{x\}$. On distingue ici deux possibilités : $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$.

La première inclusion implique, par le lemme 5.16, que le groupe K est non abélien et donc que le centre de K est trivial. La proposition 4.31 donne la factorisation $\beta(x) = f(x)g(x)^{-1}$, où f et g sont deux homomorphismes de Q dans K , et g satisfait à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$, pour tout $x \in Q$. Le groupe H s'écrit dans ce cas $H = \{(f(x)g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$.

Si $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$, le lemme 5.16 entraîne que Q est un groupe abélien. Puisque Q est simple, Q est isomorphe à Z_p pour un certain p premier. Par la proposition 4.26, $\beta(i) = \prod_{k=0}^{i-1} \theta_k(z)$, où $z \in K$ satisfait à $\prod_{k=0}^{p-1} \theta_k(z) = 1$. Cela nous donne $H = \{(\prod_{k=0}^{i-1} \theta_k(z), i) : i \in Q\}$.

Cas $H \simeq K$.

Si $\text{Ker}(\sigma_Q) = H$, alors $H < K \times 1$. Donc $H = K \times 1$. Sinon $\text{Ker}(\sigma_Q) = 1$, ce qui implique que σ_Q est un monomorphisme de $H (\simeq K)$ dans Q , donc en particulier que $|K| \leq |Q|$. Montrons que $\sigma_Q : H \rightarrow Q$ est un isomorphisme. Cela entraînera que $K \simeq H \simeq Q$, qui nous ramènera au cas précédent. On distingue encore les deux possibilités $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$.

Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, le lemme 5.16 implique que $|Q| \leq |K|$, ce qui entraîne que σ_Q est un isomorphisme.

Sinon, $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$. De la même manière que nous l'avons démontré plus haut, on obtient que Q est isomorphe à Z_p . Puisque $\text{Im}(\sigma_Q)$ est un sous-groupe non trivial de Q , $\text{Im}(\sigma_Q)$ est égal à Q . Encore une fois σ_Q est un isomorphisme de H dans Q . \square

5.3.3. Deuxième décomposition

Théorème 5.18. *Soit $H < K \rtimes_{\theta} Q$. Si $N_K \triangleleft H_K$ et $N_Q \triangleleft H_Q$, alors H s'écrit comme*

$$H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q,$$

où $\alpha : H_Q/N_Q \rightarrow H_K/N_K$ est un monomorphisme croisé quasi-surjectif associé à l'homomorphisme $\bar{\theta} : H_Q/N_Q \rightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ .

Inversement :

Théorème 5.19. Si $N_K \triangleleft H_K < K$, si $N_Q \triangleleft H_Q < Q$, si $\bar{\theta} : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ est un homomorphisme induit par θ et si $\alpha : H_Q/N_Q \longrightarrow H_K/N_K$ est un monomorphisme croisé, associé à $\bar{\theta}$, alors

$$H = \bigcup_{x \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q$$

est un sous-groupe de $K \rtimes_{\theta} Q$.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 5.18 et 5.19. Commençons par la preuve du théorème 5.18. Le théorème 5.13 nous assure l'existence d'un homomorphisme croisé $\beta : H_Q \longrightarrow H_K/N_K$ associé à l'homomorphisme $\bar{\theta} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ , nous donnant la décomposition $H = \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}$. Par le théorème fondamental des homomorphismes croisés, il existe un homomorphisme $\bar{\theta} : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_Q & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \text{Aut}(H_K/N_K) \\ \downarrow v_{N_Q} & \nearrow \bar{\theta} & \\ H_Q/N_Q & & \end{array}$$

c'est-à-dire un homomorphisme de H_Q/N_Q dans $\text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ (voir la proposition 5.12), si et seulement si $N_Q = \text{Ker}(v_{N_Q}) \subseteq \text{Ker}(\bar{\theta})$, et un $\bar{\theta}$ -monomorphisme α faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_Q & \xrightarrow{\beta} & H_K/N_K \\ \downarrow v_{N_Q} & \nearrow \alpha & \\ H_Q/N_Q & & \end{array}$$

si et seulement si $\text{Ker}(v_{N_Q}) = \text{Ker}(\beta)$.

Pour vérifier l'inclusion $N_Q \subseteq \text{Ker}(\bar{\theta})$, remarquons que, pour tout $(a, x) \in H$ et $y \in N_Q$,

$$(a, x)(1, y)(a, x)^{-1} = (a\theta_{xyx^{-1}}(a^{-1}), xyx^{-1}) \in H.$$

Puisque $N_Q \triangleleft H_Q$, $xyx^{-1} \in N_Q$ dans la précédente équation, donc $a\theta_{xyx^{-1}}(a^{-1}) \in N_K$. Cette inclusion implique que $\theta_{xyx^{-1}}(a)N_K = aN_K$. Comme cela est vrai pour tout $(a, x) \in H$ et $y \in N_Q$, on obtient, pour tout $z \in N_Q$,

$$\tilde{\theta}_z(aN_K) = \theta_z(a)N_K = aN_K \quad \forall a \in \text{Im}(\sigma_K).$$

Par conséquent $N_Q \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta})$.

Pour démontrer l'équation $N_Q = \text{Ker}(\nu_{N_Q}) = \text{Ker}(\beta)$, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\beta) &\iff N_K \times \{x\} = \beta(x) \times \{x\} \subseteq H \\ &\iff (1, x) \in H \\ &\iff x \in N_Q. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un monomorphisme croisé α faisant commuter le diagramme précédent, associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$. Il est quasi-surjectif car β l'est. De plus,

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\} \\ &= \bigcup_{x \in H_Q} \alpha \circ \nu_{N_Q}(x) \times \{x\} \\ &= \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q. \end{aligned}$$

Inversement, considérons $N_K, H_K, N_Q, H_Q, \tilde{\theta}$ et α satisfaisant les hypothèses du théorème 5.19, et vérifions que $H = \bigcup_{x \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q$ est un sous-groupe de $K \rtimes_{\theta} Q$. Considérons $\beta = \alpha \circ \nu_{N_Q}$. Par la proposition 4.11(vii), β est un homomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} = \tilde{\theta} \circ \nu_{N_Q} : H_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ satisfaisant à $\tilde{\theta}_x(aN_K) = \tilde{\theta}_{xN_Q}(aN_K) = \theta_x(a)N_K$, donc à l'homomorphisme de H_Q dans $\text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ . De plus,

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q \\ &= \bigcup_{x \in H_Q} \beta(x) \times \{x\}. \end{aligned}$$

Par le théorème 5.14, H est donc un sous-groupe de $K \rtimes_{\theta} Q$. \square

5.3.4. Application

L'exemple qui suit est une application des théorèmes 5.18 et 5.19. Nous y calculons l'ensemble des sous-groupes du groupe diédral D_n . Rappelons nous que $D_n \simeq Z_n \rtimes_{\theta} Z_2$, où θ_1 est l'automorphisme inversion défini par $\theta_1(i) = -i$.

Exemple 5.20. L'ensemble des sous-groupes du groupe diédral $D_n \simeq Z_n \rtimes Z_2$ est constitué de tous les groupes d'une des formes suivantes :

- $H_1 \times 0$, où $H_1 < Z_n$;
- $H_1 \times Z_2$, où $H_1 < Z_n$;
- $(N_1 \times 0) \cup ((k + N_1) \times \{1\})$, où $N_1 < Z_n$ et $k \in Z_n \setminus N_1$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord on vérifie facilement que chacune de ces formes donne un sous-groupe de D_n . Pour montrer que tout sous-groupe de D_n est de l'une de ces formes, considérons un sous-groupe H de D_n quelconque. Soit σ_1 et σ_2 les projections de $Z_n \rtimes Z_2$ dans Z_n et Z_2 . Considérons $H_1 = \langle \sigma_1[H] \rangle$, $H_2 = \sigma_2[H]$ et $N_i = \sigma_i[\text{Ker}(\sigma_j)]$, pour $i, j \in \{1, 2\}$ et $j \neq i$. Puisque Z_2 et Z_n sont abéliens, $N_i \triangleleft H_i$. Par conséquent, selon le théorème 5.18, il existe un monomorphisme croisé quasi-surjectif $\alpha : H_2/N_2 \longrightarrow H_1/N_1$, associé à l'homomorphisme $\bar{\theta}$ vérifiant

$$\bar{\theta}_{j+N_2}(i+N_1) = \theta_j(i) + N_1 = (-1)^j i + N_1,$$

donnant la décomposition

$$H = \bigcup_{j+N_2 \in H_2/N_2} \alpha(j+N_2) \times (j+N_2).$$

Si $H_2 = 0$, alors H est de la première forme.

Si $H_2 = N_2 = Z_2$, alors H est de la deuxième forme.

Si $H_2 = Z_2$ et $N_2 = 0$, alors $H_2/N_2 \simeq Z_2$. De plus, puisque α est injectif, il existe $k \in Z_n \setminus N_1$ tel que

$$\alpha(j) = jk + N_1, \forall j \in Z_2.$$

On obtient donc dans ce cas le sous-groupe $(N_1 \times 0) \cup ((k + N_1) \times \{1\})$. \square

5.3.5. Caractérisation des sous-groupes normaux d'un produit semi-direct

Les théorèmes 5.18 et 5.19 permettent d'obtenir une caractérisation des sous-groupes normaux d'un produit semi-direct :

Théorème 5.21. *Si $H \triangleleft K \rtimes_{\theta} Q$, alors $N_K \triangleleft K$, N_K et H_K sont stabilisés par l'action de Q , et N_Q et H_Q sont normaux dans Q . De plus, il existe un homomorphisme $\bar{\theta} : Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(K/N_K)$ induit par θ et un isomorphisme $h : H_Q/N_Q \longrightarrow H_K/N_K$ satisfaisant à*

- (i) $\bar{\theta}(xN_Q) = \gamma_{h(xN_Q)}, \forall xN_Q \in H_Q/N_Q$;
- (ii) $\bar{\theta}(yN_Q)|_{H_K/N_K} = h \circ \gamma_{yN_Q} \circ h^{-1}, \forall yN_Q \in Q/N_Q$,

donnant la décomposition

$$H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} h(xN_Q)^{-1} \times xN_Q.$$

Inversement, si $N_K, H_K, N_Q, H_Q, \bar{\theta}$ et h satisfont aux conditions énumérées ci-haut, alors $H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} h(xN_Q)^{-1} \times xN_Q$ est un sous-groupe normal de $K \rtimes_{\theta} Q$.

Remarque 5.22. Les équations (i) et (ii) sont respectivement équivalentes aux inclusions $K \times \mathbf{1} \subseteq N_{K \rtimes_{\theta} Q}(H)$ et $\mathbf{1} \times Q \subseteq N_{K \rtimes_{\theta} Q}(H)$. Elles traduisent donc deux faits très différents. Malgré cela elles ne sont pas toujours indépendantes. Par exemple, si $H_Q = Q$, (ii) implique (i), et, si $H_Q = Q$ et $H_K = K$, alors (ii) est équivalente à (i).

DÉMONSTRATION. Considérons N_K, H_K, N_Q, H_Q tel que définis au dans les préliminaires au début du chapitre. Leurs propriétés énoncés au début du théorème et celles qui assurent l'existence de l'homomorphisme $\bar{\theta}$ se déduisent des deux inclusions découlant de la normalité de H dans $K \rtimes_{\theta} Q$ qui suivent :

$$\forall (a, x) \in H, \forall b \in K, \forall y \in Q$$

$$(b, \mathbf{1})(a, x)(b, \mathbf{1})^{-1} = (ba\theta_x(b^{-1}), x) \in H \quad (5.2)$$

et

$$(\mathbf{1}, y)(a, x)(\mathbf{1}, y)^{-1} = (\theta_y(a), yxy^{-1}) \in H. \quad (5.3)$$

On obtient d'abord, en posant $x = \mathbf{1}$ dans l'inclusion (5.2), que

$$bab^{-1} \in N_K, \forall b \in K \forall a \in N_K,$$

qui implique que

$$N_K \triangleleft K. \quad (5.4)$$

Puis on déduit de l'inclusion (5.3) quatre choses. D'abord, en posant $a = \mathbf{1}$ on obtient que

$$(\mathbf{1}, yxy^{-1}) \in H, \forall y \in Q \forall x \in N_Q,$$

donc que

$$N_Q \triangleleft Q.$$

On déduit aussi que

$$yxy^{-1} \in H_Q, \forall y \in Q \forall x \in H_Q,$$

c'est-à-dire que

$$H_Q \triangleleft Q.$$

Puisque

$$\theta_y(a) \in \sigma_K[H], \forall y \in Q \forall a \in \sigma_K[H],$$

qui implique que

$$\theta_y(\sigma_K[H]) \subseteq \sigma_K[H], \forall y \in Q, \quad (5.5)$$

donc que

$$\theta[Q] \text{ préserve } H_K. \quad (5.6)$$

Et, en posant $x = \mathbf{1}$ on obtient que

$$\theta_y(a) \in N_K, \forall y \in Q \forall a \in N_K,$$

donc que

$$\theta[Q] \text{ préserve } N_K. \quad (5.7)$$

Finalement, l'inclusion (5.3) montre, en posant $a = \mathbf{1}$, que pour tout $x \in N_Q$ et $b \in K$

$$\begin{aligned} (b\theta_x(b^{-1}), x) \in H &\iff b\theta_x(b^{-1}) \in N_K \\ &\iff \theta_x(b)N_K = bN_K, \end{aligned}$$

donc que

$$N_Q \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta}). \quad (5.8)$$

Puisque $N_K \triangleleft K$, $N_Q \triangleleft Q$, $\theta[Q]$ préserve K et N_K , et $N_Q \subseteq \text{Ker}(\tilde{\theta})$, la proposition 5.12 implique qu'il existe un homomorphisme $\bar{\theta} : Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(K/N_K)$ induit par θ (cet homomorphisme est l'homomorphisme $\bar{\theta}$ dans l'énoncé du théorème). De plus, comme $N_K \triangleleft H_K$ et $N_Q \triangleleft H_Q$, il existe, par le théorème 5.18, un monomorphisme croisé quasi-surjectif $\alpha : H_Q/N_Q \longrightarrow H_K/N_K$, associé à l'homomorphisme $\bar{\theta}' : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ induit par θ , donnant la décomposition

$$H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} \alpha(xN_Q) \times xN_Q.$$

Remarquons que puisque $\bar{\theta}$ et $\bar{\theta}'$ sont tous deux induits par θ , on a

$$\bar{\theta}'(xN_Q) = \bar{\theta}(xN_Q)|_{H_K/N_K}, \quad \forall xN_Q \in H_Q/N_Q.$$

Par conséquent

$$\alpha(xyN_Q) = \alpha(xN_Q)\bar{\theta}_{xN_Q}(\alpha(yN_Q)) \quad \forall xN_Q, yN_Q \in H_Q/N_Q.$$

Montrons que le monomorphisme croisé α est un anti-isomorphisme. D'abord α est plus que quasi-surjectif : il est surjectif. En effet, la proposition 4.11(vi) et le fait que σ_K est un $(\theta \circ \sigma_Q)$ -homomorphisme, entraîne que $\sigma_K[H]$ est un groupe, puisque

$$\begin{aligned} [\theta \circ \sigma_Q[H]](\sigma_K[H]) &= \theta_{H_Q}(\sigma_K[H]) \\ &= \sigma_K[H] \quad (\text{par l'inclusion (5.5)}). \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\text{Im}(\alpha)$ est aussi un groupe, car $\text{Im}(\alpha) = \sigma_K[H]/N_K$. Donc

$$H_K = \langle \text{Im}(\alpha) \rangle = \text{Im}(\alpha).$$

Par conséquent α est surjectif. Donc α est un isomorphisme croisé. De plus,

$$\bar{\theta}_{xN_Q} = \gamma_{\alpha(xN_Q)^{-1}}, \forall xN_Q \in H_Q/N_Q, \quad (5.9)$$

car de l'inclusion (5.2) découle le fait que, pour tout $(a, x) \in H$ et $b \in K$,

$$\begin{aligned} (ba\theta_x(b^{-1}), x)(a, x)^{-1} \in H &\iff (ba\theta_x(b^{-1})a^{-1}, 1) \in H \\ &\iff ba\theta_x(b^{-1})a^{-1} \in N_K \\ &\iff \theta_x(b^{-1})N_K = a^{-1}b^{-1}aN_K \\ &\iff \theta_x(b)N_K = \gamma_{a^{-1}N_K}(bN_K) \\ &\iff \theta_x(b)N_K = \gamma_{\alpha(xN_Q)^{-1}}(bN_K) \\ &\iff \bar{\theta}_{xN_Q}(bN_K) = \gamma_{\alpha(xN_Q)^{-1}}(bN_K). \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \alpha(xyN_Q) &= \alpha(xN_Q)\bar{\theta}_{xN_Q}(\alpha(yN_Q)) \\ &= \alpha(xN_Q)\gamma_{\alpha(xN_Q)^{-1}}(\alpha(yN_Q)) \\ &= \alpha(yN_Q)\alpha(xN_Q). \end{aligned}$$

Ainsi α est un anti-isomorphisme. Cela entraîne l'existence d'un isomorphisme $h : H_Q/N_Q \rightarrow H_K/N_K$ tel que

$$\alpha(xN_Q) = h(xN_Q)^{-1}, \forall xN_Q \in H_Q/N_Q.$$

La décomposition devient

$$H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} h(xN_Q)^{-1} \times xN_Q.$$

Il reste à vérifier que les deux propriétés de h énoncées dans le théorème sont satisfaites. La première a déjà été démontrée (voir l'équation (5.9)). La deuxième découle

de l'inclusion (5.3), puisque pour tout $(a, x) \in H$ et $y \in Q$ on a

$$\begin{aligned}
(\theta_y(a), yxy^{-1}) \in H &\iff \theta_y(a)N_K \times yxy^{-1}N_Q \subseteq H \\
&\iff \theta_y(a)N_K = h(yxy^{-1}N_Q)^{-1} = h \circ \gamma_{yN_Q}(xN_Q)^{-1} \\
&\iff \bar{\theta}_{yN_Q}(aN_K) = h \circ \gamma_{yN_Q}(h^{-1}(aN_K)^{-1})^{-1} \\
&\iff \bar{\theta}_{yN_Q}(aN_K) = h \circ \gamma_{yN_Q} \circ h^{-1}(aN_K),
\end{aligned}$$

donc que

$$\bar{\theta}_{yN_Q}|_{H_K/N_K} = h \circ \gamma_{yN_Q} \circ h^{-1}, \quad \forall yN_Q \in Q/N_Q. \quad (5.10)$$

Inversement, considérons $N_K, H_K, H_Q, N_Q, \bar{\theta}$ et h satisfaisant les hypothèses de la deuxième partie du théorème. Par la proposition 4.7, l'application $xN_Q \mapsto h(xN_Q)^{-1}$ est un homomorphisme croisé, associé à l'homomorphisme $\bar{\theta}' : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ défini par $\bar{\theta}'(xN_Q) = \gamma_{h(xN_Q)}$. La première propriété de h de l'énoncé du théorème implique donc que

$$\bar{\theta}'(xN_Q) = \bar{\theta}(xN_Q)|_{H_K/N_K}, \quad \forall xN_Q \in H_Q/N_Q. \quad (5.11)$$

Par conséquent $\bar{\theta}' : H_Q/N_Q \longrightarrow \text{Aut}(H_K/N_K)$ est un homomorphisme induit par θ . Cela entraîne, par le théorème 5.19, que $H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} h(xN_Q)^{-1} \times xN_Q$ est un sous-groupe de G . De plus, la suite d'équivalences précédant l'équation (5.9) et celle précédant l'équation (5.10) démontrent respectivement que la première propriété de h dans l'énoncé du théorème est équivalente à

$$(ba\theta_x(b^{-1}), x) = (b, \mathbf{1})(a, x)(b, \mathbf{1})^{-1} \in H, \quad \forall (a, x) \in H \quad \forall b \in K,$$

et que la deuxième propriété de h est équivalente à

$$(\theta_y(a), yxy^{-1}) = (\mathbf{1}, y)(a, x)(\mathbf{1}, y)^{-1} \in H, \quad \forall (a, x) \in H \quad \forall y \in Q,$$

c'est-à-dire que $K \times \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \times Q$ normalisent H . Par conséquent H est normal dans G . □

5.3.6. Applications

La proposition suivante donne les sous-groupes normaux propres des produits semi-directs non triviaux de deux groupes simples finis. Nous utiliserons plus tard ce résultat pour résoudre le problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley basés sur ces groupes.

Proposition 5.23. *Si $G = K \rtimes_{\theta} Q$, où K et Q sont deux groupes simples finis et $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ est un homomorphisme non trivial, alors les seuls sous-groupes normaux propres de G sont :*

- $K \times \mathbf{1}$;
- $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et si $g : Q \longrightarrow K$ est le monomorphisme satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$.

Remarque 5.24.

- (i) Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors $G \simeq K \times Q$.
- (ii) Si Q est non abélien, alors K est aussi non abélien et $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$. De plus, il existe un unique monomorphisme $g : Q \longrightarrow K$, donnant $\theta(x) = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$ (voir le lemme 5.16).
- (iii) Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, l'application définie par $h(a, x) = ag(x)$ est un homomorphisme de G dans K qui est surjectif et qui a comme noyau $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$. Par conséquent, puisque $G/\text{Ker}(h) \simeq \text{Im}(h)$, le quotient de G par $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$ est isomorphe à K .

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $H \triangleleft G$. Considérons les groupes $H_K, N_K, H_Q, N_Q, \bar{\theta}$ et l'isomorphisme $h : H_Q/N_Q \longrightarrow H_K/N_K$ donnés par le théorème 5.21 satisfaisant à $H = \bigcup_{xN_Q \in H_Q/N_Q} h(xN_Q)^{-1} \times xN_Q$.

Si $H_Q = N_Q$, alors $H_K = N_K$. Puisque $N_Q \in \{\mathbf{1}, Q\}$ et $N_K \in \{\mathbf{1}, K\}$ cela donne quatre H possibles : $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$, $K \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \times Q$ et $K \times Q$. Tous ces sous-groupes sont normaux, sauf $\mathbf{1} \times Q$.

Si $H_Q = Q$ et $N_Q = 1$, alors $H_K/N_K \simeq H_Q/N_Q$ entraîne que $N_K = 1$ et que $H_K \simeq Q$. Cela donne comme $H = \bigcup_{x \in Q} \{h(x)^{-1}\} \times \{x\}$, où h est un isomorphisme de Q dans H_K . Cet ensemble forme un sous-groupe normal de G si et seulement si h satisfait les deux conditions du théorème 5.21. La première est vérifiée si et seulement si

$$\theta(x) = \gamma_{h(x)}, \quad \forall x \in Q. \quad (5.12)$$

La deuxième est vérifiée si et seulement si pour tout $y \in Q$

$$\begin{aligned} \theta(y)|_{H_K} &= h \circ \gamma_y \circ h^{-1} \\ &= \gamma_{h(y)} \text{ (par la proposition 5.1),} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si l'équation (5.12) est vérifiée. Par conséquent,

$$H = \bigcup_{x \in Q} \{h(x)^{-1}\} \times \{x\}$$

est un sous-groupe normal de G si et seulement si $\theta(x) = \gamma_{h(x)}$ pour tout $x \in Q$, c'est-à-dire si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et h est égal à g , l'homomorphisme défini à la remarque 5.24(i). \square

La proposition 5.23 implique par exemple que :

Exemple 5.25. Si $n \neq 4$, le seul sous-groupe normal propre de \mathfrak{S}_n est \mathfrak{A}_n . Cela découle du fait que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$ (où $\theta(1) = \gamma_{(12)}$), que \mathfrak{A}_n est simple si $n \neq 4$ et que $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(\mathfrak{A}_n)$.

Voici une autre application du théorème 5.21. Remarquons que ce résultat s'obtient aussi aisément à partir du théorème 4.3.

Théorème 5.26. Si $H \triangleleft G_1 \times G_2$, alors il existe $N_i < H_i$ des sous-groupes normaux de G_i satisfaisant à $H_i/N_i \subseteq C(G_i/N_i)$, pour $i = 1, 2$, et $f : H_2/N_2 \rightarrow H_1/N_1$ un isomorphisme donnant la décomposition

$$H = \bigcup_{yN_2 \in H_2/N_2} f(yN_2) \times yN_2.$$

Inversement, si N_1, H_1, N_2, H_2 et f satisfont les propriétés énumérées ci-haut, alors $H = \bigcup_{yN_2 \in H_2/N_2} f(yN_2) \times yN_2$ est un sous-groupe normal de $G_1 \times G_2$.

DÉMONSTRATION. Puisque $H \triangleleft G_1 \times G_2 = G_1 \rtimes_{\theta} G_2$ où $\theta : G_2 \longrightarrow \text{Aut}G_1$ est l'homomorphisme défini par $\theta(x) = \text{Id}_{G_1}$ pour $x \in G_2$, on obtient, par le théorème 5.21, des sous-groupes $N_1 < H_1 < G_1$ et $N_2 < H_2 < G_2$, avec $N_1 \triangleleft G_1$, et $N_2, H_2 \triangleleft G_2$. On obtient aussi un isomorphisme $h : H_2/N_2 \longrightarrow H_1/N_1$ satisfaisant à

$$\text{Id}_{G_1/N_1} = \gamma_{h(xN_2)}, \forall xN_2 \in H_2/N_2,$$

à

$$\text{Id}_{H_1/N_1} = h \circ \gamma_{yN_2} \circ h^{-1}, \forall yN_2 \in G_2/N_2,$$

et donnant

$$H = \bigcup_{yN_2 \in H_2/N_2} h(yN_2)^{-1} \times yN_2.$$

La deuxième équation entraîne que

$$\gamma_{yN_2} = h^{-1} \circ \text{Id}_{H_1/N_1} \circ h = \text{Id}_{H_2/N_2}, \forall yN_2 \in G_2/N_2,$$

donc que

$$H_2/N_2 \subseteq C(G_2/N_2).$$

De la première équation découle le fait que

$$H_1/N_1 \subseteq C(G_1/N_1).$$

Cette inclusion entraîne, selon le théorème de correspondance, que H_1 est normal dans G_1 . Elle implique aussi que H_1/N_1 est abélien. Par conséquent, l'application $f : H_2/N_2 \longrightarrow H_1/N_1$ définie par $f(xN_2) = h(xN_2)^{-1}$ est un homomorphisme. On obtient ainsi la décomposition

$$H = \bigcup_{yN_2 \in H_2/N_2} f(yN_2) \times yN_2.$$

La réciproque se déduit aisément du théorème précédent. \square

Chapitre 6

ISOMORPHIE ENTRE LES GRAPHES DE CAYLEY BASÉS SUR UN GROUPE FIXÉ

6.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré au problème d'isomorphie entre les graphes de Cayley basés sur un groupe fixé, qui consiste à déterminer, pour un groupe donné G et un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma(G, S)$, les ensembles T de générateurs de G pour lesquels

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S).$$

Nous donnerons une réponse précise à cette question à l'aide des automorphismes croisés. Cela nous permettra en particulier de caractériser les graphes de Cayley holomorphes $\Gamma(G, S)$ qui se représentent de façon unique sur G , c'est-à-dire qui satisfont à

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S) \implies \exists \sigma \in \text{Aut} G T = \sigma[S].$$

Rappelons qu'un graphe vérifiant cette propriété est appelé *graphe de Cayley CI*. Nous déterminerons en particulier avec exactitude les graphes de Cayley holomorphes CI basés sur :

- un groupe cyclique ;
- un groupe simple : nous verrons par exemple qu'ils sont tous CI dans le cas non orienté ;
- un produit direct de deux groupes simples non abéliens : nous prouverons qu'ils sont CI si et seulement si $N_G(S)$, le normalisateur de S dans G , ne contient pas de sous-groupe isomorphe à un des deux groupes simples du produit ;

- un produit semi-direct non trivial de deux groupes simples, pour les graphes de Cayley holomorphes complets¹ ;
- un groupe symétrique \mathfrak{S}_n : nous démontrerons qu'ils sont CI si et seulement si $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ ne contient pas de permutation paire d'ordre 2.

Déterminer les graphes de Cayley CI est probablement le problème qui a été ces dernières années l'objet du plus grand nombre de publications dans le domaine des graphes de Cayley. Cai Heng Li fait une revue exhaustive des recherches sur cette question dans [21] et suggère quelques nouveaux problèmes. La caractérisation que l'on donne des graphes de Cayley holomorphes CI solutionne l'un de ces problèmes.

6.2. RÉSULTAT PRINCIPAL

Le prochain théorème est le résultat principal de ce chapitre. Il donne, pour un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma(G, S)$, tous les ensembles de générateurs T de G pour lesquels $\Gamma(G, T)$ est isomorphe à $\Gamma(G, S)$.

Théorème 6.1. *Soit $\Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe. Si T est un ensemble de Cayley de G tel que*

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S),$$

alors il existe un automorphisme croisé α de G associé à un homomorphisme $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$ tel que $\alpha[T] = S$.

Inversement, tout ensemble de la forme du théorème 6.1 donne un graphe de Cayley isomorphe à $\Gamma(G, S)$:

Proposition 6.2. *Soit $\Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Si α est un automorphisme croisé de G associé à un homomorphisme $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$, et $T = \alpha^{-1}[S]$, alors*

$$\Gamma(G, T) \simeq \Gamma(G, S).$$

Remarque 6.3. Rappelons qu'un graphe de Cayley $\Gamma(G, T)$ isomorphe à un graphe de Cayley holomorphe $\Gamma(G, S)$ n'est pas nécessairement holomorphe.

¹Un graphe de Cayley holomorphe est complet si $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$.

La proposition 6.2 est une conséquence directe de la proposition 4.20. Le théorème 6.1 quand à lui découle de la prochaine proposition, qui stipule que toute isomorphisme d'un graphe de Cayley Γ_1 dans un graphe de Cayley holomorphe Γ_2 est un isomorphisme croisé :

Proposition 6.4. *Soit $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, S_1)$ et $\Gamma_2 = \Gamma(G_2, S_2)$ deux graphes de Cayley orientés isomorphes. Si Γ_2 est holomorphe, tout isomorphisme α de Γ_1 dans Γ_2 qui envoie $\mathbf{1}_{G_1}$ sur $\mathbf{1}_{G_2}$ est un isomorphisme croisé associé à un homomorphisme $\theta : G_1 \longrightarrow \text{Aut}_{S_2} G_2$, et α satisfait à $\alpha[S_1] = S_2$.*

DÉMONSTRATION. Considérons $\alpha : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, un isomorphisme qui envoie $\mathbf{1}_{G_1}$ sur $\mathbf{1}_{G_2}$. Pour tout $x \in G_1$,

$$\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} \in \text{Aut} \Gamma_2 = \text{Hol}_{S_2}(G_2) < \text{Hol}(G_2).$$

Donc $\alpha \circ L(G_1) \circ \alpha^{-1}$ est un sous-groupe de $\text{Hol}(G_2)$. Par la proposition 4.18, α est donc un isomorphisme croisé et, si θ est l'homomorphisme associé à α , $\alpha \circ \lambda_x \circ \alpha^{-1} = \lambda_{\alpha(x)} \circ \theta(x)$. De plus, le fait que $\text{Aut} \Gamma_2 = L(G_2) \text{Aut}_{S_2} G_2$ entraîne que $\theta(x) \in \text{Aut}_{S_2} G_2$ pour tout $x \in G_1$. Par conséquent θ est un homomorphisme de G_1 dans $\text{Aut}_{S_2} G_2$ et α un θ -isomorphisme. Finalement, puisque $\alpha(\mathbf{1}_{G_1}) = \mathbf{1}_{G_2}$, α induit une bijection de $N^+(\Gamma_1)$ dans $N^+(\Gamma_2)$, donc $\alpha[S_1] = S_2$. \square

6.3. CARACTÉRISATION DES GRAPHES DE CAYLEY HOLOMORPHES CI

Rappelons d'abord qu'un graphe de Cayley $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est CI s'il se représente de façon unique sur G :

Définition 6.5. (*Grappe de Cayley CI*) Un graphe de Cayley orienté $\Gamma(G, S)$ est CI si pour tout graphe de Cayley orienté $\Gamma(G, T)$ isomorphe à $\Gamma(G, S)$ il existe un automorphisme f de G tel que $T = f[S]$.

Alspach et Parson [2] ainsi que Babai [3] ont démontré un théorème important qui stipule qu'un graphe de Cayley Γ est CI si et seulement si les sous-groupes d'action régulière isomorphes à G de $\text{Aut}\Gamma$ sont conjugués. Ce résultat permet de déterminer si un graphe de Cayley est CI à partir de son groupe d'automorphismes. Puisque probablement la majorité des graphes de Cayley sont holomorphes et que l'on a une connaissance précise de leur groupe d'automorphismes, il est naturel de se demander si l'on peut obtenir un résultat particulier pour cette classe de graphes, permettant de déterminer lesquels sont CI.

Le théorème suivant est notre réponse à cette question. Il donne une caractérisation des graphes de Cayley orientés holomorphes qui sont CI. Cela solutionne un problème posé par Cai Heng Li dans [21].

Théorème 6.6. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe. Alors Γ est CI si et seulement si, pour tout homomorphisme non trivial $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$, G ne possède pas d'automorphisme croisé associé à θ .*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que pour tout homomorphisme non trivial $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$, G ne possède pas d'automorphisme croisé associé à θ . Si $\Gamma' = \Gamma(G, T)$ est isomorphe à Γ et $\alpha : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ est un isomorphisme qui envoie $\mathbf{1}_H$ sur $\mathbf{1}_G$, alors, par la proposition 6.4, α est un automorphisme croisé de G qui envoie T sur S . L'hypothèse implique qu'il est associé à un homomorphisme trivial. Par conséquent α est un isomorphisme de groupe qui envoie T sur S . Ainsi T est isomorphe à S .

Réciproquement, supposons que Γ est CI. Choisissons un automorphisme croisé $\alpha : G \longrightarrow G$, associé à un homomorphisme $\theta : H \longrightarrow \text{Aut}_S G$, et montrons que θ est trivial. Considérons le graphe de Cayley orienté $\Gamma' = \Gamma(G, \alpha^{-1}[S])$. Par la proposition 4.20, α est un isomorphisme de graphe de Γ' dans Γ . Puisque Γ est CI, il existe $f \in \text{Aut}G$ tel que $T = f[S]$. Le produit $\alpha \circ f$ est donc un automorphisme de Γ qui fixe $\mathbf{1}_G$. Comme Γ est holomorphe, $\alpha \circ f \in \text{Aut}_S G$. Par conséquent $\alpha \in \text{Aut}G$. Donc θ est trivial. \square

Remarque 6.7. À chaque automorphisme croisé α de G , associé à un homomorphisme non trivial θ de G dans $\text{Aut}_S G$, correspond $\Gamma(G, \alpha^{-1}[S])$, un graphe de Cayley orienté

isomorphe à $\Gamma(G, S)$, qui est engendré par un sous-ensemble de Cayley non isomorphe à S .

Pour conclure cette section, nous démontrons deux critères qui permettent de montrer, dans des cas particuliers, qu'un graphe de Cayley orienté holomorphe n'est pas CI. Nous aurons besoin des deux définitions suivantes pour énoncer le premier de ces deux résultats.

Définition 6.8. (*Sous-ensemble normal*) Un sous-ensemble S d'un groupe G est dit *normal* si $xSx^{-1} \subseteq S \forall x \in G$, c'est-à-dire si $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$. Nous écrivons $S \triangleleft G$.

Définition 6.9. (*Graphe de Cayley orienté normal*) Un graphe de Cayley orienté $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est dit *normal* si S est un sous-ensemble normal de G .

Remarque 6.10. Un graphe de Cayley Γ (non orienté) normal basé sur un groupe non abélien ne peut être holomorphe car l'inversion est un automorphisme de Γ fixant 1 qui n'est pas un automorphisme de groupe.

Voici le premier critère :

Proposition 6.11. *Si G est un groupe non abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ est un graphe de Cayley orienté holomorphe qui est normal, alors Γ n'est pas CI.*

DÉMONSTRATION. L'application inversion $\iota : G \rightarrow G$ est un automorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\gamma : G \rightarrow \text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$. Puisque G est non abélien, γ est un homomorphisme non trivial. Par conséquent, par le théorème 6.6, Γ n'est pas CI. \square

Voici le second critère :

Proposition 6.12. *Soit G un groupe fini et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe. Si $g : G \rightarrow N_G(S)$ est un homomorphisme ayant comme seul point fixe 1 et si $\text{Im}(g) \not\subseteq C(G)$, alors Γ n'est pas un graphe de Cayley CI.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.8, l'application définie pour $x \in G$ par $\alpha(x) = xg(x)^{-1}$ est un endomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\theta = \gamma \circ g : G \rightarrow \text{Aut}_S G$. Le noyau de cet endomorphisme est différent de G , puisque $\text{Im}(g) \not\subseteq C(G) =$

$\text{Ker}(\gamma)$. De plus, $\text{Ker}(\alpha) = \{x : g(x) = x\} = 1$. Donc α est bijectif. Par le théorème 6.6, Γ n'est pas CI. \square

6.4. APPLICATIONS

Dans cette section nous déterminons quels sont les graphes de Cayley orientés holomorphes CI basés sur les groupes que nous avons énumérés au début de ce chapitre.

6.4.1. Groupe cyclique

Commençons par le groupe cyclique Z_n . Définissons

$$U_S(Z_n) = \{u \in U(Z_n) : uS = S\}. \quad (6.1)$$

Voici notre résultat. Il découle directement du théorème 6.6 et de la proposition 4.27.

Théorème 6.13. *Soit n un entier et $\Gamma = \Gamma(Z_n, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe sur Z_n . Alors Γ est CI si et seulement si pour tout $a \in U_S(Z_n)$ différent de 1 on a*

$$(n, S_a) \nmid o(a), \quad \text{où } S_a = 1 + a + \dots + a^{o(a)-1}.$$

6.4.2. Groupe simple

Le résultat suivant est bien connue (voir par exemple [20]) :

Théorème 6.14. *Si p est un nombre premier, tout graphe de Cayley orienté sur Z_p est CI.*

En particulier, tous les graphes de Cayley orientés holomorphes sur Z_p sont CI. Voici le résultat que nous avons obtenu pour les groupes simples non abéliens.

Théorème 6.15. *Soit G un groupe simple non abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe sur G . Alors Γ est CI si et seulement si Γ n'est pas normal.*

DÉMONSTRATION. Si $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$, Γ n'est pas CI par la proposition 6.11.

Réciproquement, si Γ n'est pas CI, il existe un homomorphisme $\theta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G$ ayant un noyau différent de G . Puisque G est simple, $\text{Ker}(\theta)$ doit être égal à 1_G . L'homomorphisme θ est donc injectif et $\text{Im}(\theta) \simeq G$. Par conséquent, $\text{Im}(\theta)$ est un sous-groupe non résoluble de $\text{Aut}G$, ayant comme seul sous-groupe normal différent de $\text{Im}(\theta)$ le groupe trivial. Cela implique, par le théorème 5.5 et par la proposition 5.6, que $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(G)$, donc que $\text{Inn}(G) = \text{Im}(\theta) \subseteq \text{Aut}_S G$. \square

Puisque les graphes de Cayley non orientés holomorphes basés sur un groupe non abélien ne peuvent être normaux, les théorèmes 6.14 et 6.15 donnent le résultat suivant :

Théorème 6.16. *Tout graphe de Cayley non orienté holomorphe sur un groupe simple est CI.*

6.4.3. Produit direct de deux groupes simples

Voici le résultat pour les graphes de Cayley orientés holomorphes basés sur le produit direct de deux groupes simples non abéliens :

Théorème 6.17.

- (i) *Soit G_1, G_2 deux groupes simples finis non abéliens, $G = G_1 \times G_2$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe sur G . Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Aut}_S G$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à G_1 ou à G_2 .*
- (ii) *Si $\text{Aut}_S G$ contient un tel sous-groupe, il est inclus dans $\text{Inn}_S(G)$ et est égal à $\gamma(H)$, pour un sous-groupe H de G de l'une des trois formes suivantes :*
- $G_1 \times 1$ ou $1 \times G_2$;
 - $1 \times H_2$, où $H_2 < G_2$ et $H_2 \simeq G_1$; ou $H_1 \times 1$, où $H_1 < G_1$ et $H_1 \simeq G_2$;
 - $\{(x_1, f(x_1)) : x_1 \in G_1\}$, où $f : G_1 \longrightarrow H_2$ est un isomorphisme et $H_2 < G_2$; ou $\{(f(x_2), x_2) : x_2 \in G_2\}$, où $f : G_2 \longrightarrow H_1$ est un isomorphisme et $H_1 < G_1$;

Remarque 6.18. Ce théorème implique que Γ est CI si et seulement si le normalisateur de S dans G , noté $N_G(S)$, ne contient pas de sous-groupe isomorphe à G_1 ou à G_2 . En effet, le normalisateur de S dans G est en correspondance avec le sous-groupe $\text{Inn}_S(G)$ de $\text{Aut}_S G$, par l'épimorphisme $\gamma : N_G(S) \longrightarrow \text{Inn}_S(G)$. Cet épimorphisme a comme

noyau $C(G)$. Par conséquent $\text{Inn}_S(G) \simeq N_G(S)/C(G)$. Dans le résultat précédent, G est de centre trivial (voir lemme suivant). Donc γ est un isomorphisme et $N_G(S)$ est isomorphe à $\text{Inn}_S(G)$.

Nous aurons besoin de quelques résultats sur la structure de $G = G_1 \times G_2$ pour faire la preuve du théorème 6.17.

Lemme 6.19. *Les seuls sous-groupes normaux de G sont $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$, $G_1 \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \times G_2$ et $G_1 \times G_2$. De plus, le centre de G est trivial.*

DÉMONSTRATION. Tout sous-groupe normal H de G s'écrit comme

$$\bigcup_{x_1 N_1 \in H_1/N_1} x_1 N_1 \times f(x_1 N_1),$$

où f est un isomorphisme de H_1/N_1 dans H_2/N_2 , où $N_i < H_i$ sont des sous-groupes normaux de G_i satisfaisant à $H_i/N_i \subseteq C(G_i/N_i)$.

Il y a quatre possibilités : tous les H_i et N_i sont égaux à $\mathbf{1}$, ou $H_1 = N_1 = G_1$ et $H_2 = N_2 = \mathbf{1}$, ou $H_1 = N_1 = \mathbf{1}$ et $H_2 = N_2 = G_2$, ou $H_i = N_i = G_i$, pour $i = 1, 2$. Ces possibilités nous donnent respectivement comme H : $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$, $G_1 \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \times G_2$ et $G_1 \times G_2$.

Nous pouvons déduire de ce résultat que G est de centre trivial, puisque $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ est le seul sous-groupe normal de G qui est abélien. \square

Lemme 6.20. *$\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$ est un groupe résoluble.*

DÉMONSTRATION. Les groupes $G_1 \times \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \times G_2$ sont les deux seuls sous-groupes normaux propres de G . Par conséquent, si $G_1 \not\simeq G_2$, tout automorphisme de G stabilise ces deux sous-groupes. Dans ce cas, $\text{Aut}G$ est donc isomorphe à $\text{Aut}G_1 \times \text{Aut}G_2$. Si $G_1 \simeq G_2$, les automorphismes de G peuvent aussi interchanger ces deux sous-groupes. Si f est un isomorphisme de G_1 dans G_2 , l'application définie par $g(x_1, x_2) = (f^{-1}(x_2), f(x_1))$ est un automorphisme de G d'ordre 2. On vérifie aisément que $\langle g \rangle$ complète et normalise le sous-groupe d'automorphismes de G isomorphe à $\text{Aut}G_1 \times \text{Aut}G_2$. Le groupe $\text{Aut}G$ est donc, dans ce cas, isomorphe à $(\text{Aut}G_1 \times \text{Aut}G_2) \rtimes \langle g \rangle$.

Considérons à présent $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$. Si $G_1 \not\simeq G_2$, ce quotient est isomorphe à

$$\text{Aut}G_1/\text{Inn}(G_1) \times \text{Aut}G_2/\text{Inn}(G_2),$$

et si $G_1 \simeq G_2$, ce quotient est isomorphe à

$$(\text{Aut}G_1/\text{Inn}(G_1) \times \text{Aut}G_2)/\text{Inn}(G_2) \rtimes \langle g \rangle.$$

Dans les deux cas, les deux membres du produit sont résolubles. Par conséquent, par la proposition 5.4, $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$ est résoluble. \square

Nous aurons besoin d'un dernier résultat pour compléter la preuve :

Lemme 6.21. *Les seuls sous-groupes de G isomorphes à G_1 ou G_2 sont ceux énumérés dans la deuxième partie de l'énoncé du théorème.*

DÉMONSTRATION. Supposons sans perdre de généralité que H est un sous-groupe de G isomorphe à G_1 . Par le théorème 4.3, $H = \bigcup_{x_2 N_2 \in H_2/N_2} f(x_2 N_2) \times x_2 N_2$, où f est un isomorphisme de H_2/N_2 dans H_1/N_1 , où $N_i \triangleleft H_i$ sont des sous-groupes de G_i . Par conséquent, $N_1 \times \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \times N_2$ sont deux sous-groupes normaux de G . Comme H est simple, ils sont égaux à $\mathbf{1}$ ou à H . Si $N_1 \neq \mathbf{1}$, alors $H = N_1 \times \mathbf{1} \simeq G_1$. Donc $H = G_1 \times \mathbf{1}$. Si $N_2 \neq \mathbf{1}$, alors $H = \mathbf{1} \times N_2 \simeq G_1$ implique que N_2 est isomorphe à G_1 . On obtient ainsi $H = \mathbf{1} \times H_2$, avec $H_2 \simeq G_1$. Finalement, si $N_1 = N_2 = \mathbf{1}$, la cardinalité de H est égale à $|H_1| = |H_2|$. Puisque H est isomorphe à G_1 , H_1 doit être égal à G_1 et H_2 doit être un isomorphe à G_1 . On obtient dans ce cas comme $H = \bigcup_{x_2 \in H_2} \{f(x_2)\} \times \{x_2\} = \{(f(x_2), x_2) : x_2 \in H_2\}$. \square

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.17. Montrons premièrement que la condition est nécessaire. Soit M un sous-groupe de $\text{Aut}_5 G$ isomorphe à G_1 ou à G_2 . Supposons sans perdre de généralité qu'il est isomorphe à G_2 .

Puisque $\text{Aut}G/\text{Inn}(G)$ est résoluble et que M est un groupe simple non abélien, la proposition 5.6 entraîne que $M \subseteq \text{Inn}(G)$.

Considérons le groupe $H = \gamma^{-1}(M)$, isomorphe à $M \simeq G_2$. Par le lemme 6.21, H est du deuxième type de l'une des trois formes énumérées dans l'énoncé. Pour chacun des trois cas, on définit un homomorphisme $g : G \rightarrow G$, ayant G_1 comme noyau et H comme image.

Dans le premier cas g est défini par $g(x_1, x_2) = (1, x_2)$, dans le second par $g(x_1, x_2) = (f(x_2), 1)$, et dans le troisième par $g(x_1, x_2) = (f(x_2), x_2)$.

Définissons aussi $h : G \longrightarrow G$ en posant, dans les deux premiers cas $h(x_1, x_2) = (x_1, 1)$, et dans le dernier $h = \text{Id}$.

Définissons finalement l'application α par $\alpha(x) = h(x)g(x)^{-1}$. Cette fonction est un homomorphisme croisé associé à l'homomorphisme non trivial $\theta = \gamma \circ g$. L'image par α de (x_1, x_2) est égale à (x_1, x_2^{-1}) dans le premier cas, à $(x_1 f(x_2^{-1}), x_2)$ dans le second, et à $(x_1 f(x_2)^{-1}, x_2^{-1})$ dans le dernier. Il est facile de vérifier que dans chaque cas α est bijectif. Par conséquent, α est un automorphisme croisé associé à l'homomorphisme non trivial θ . Par le théorème 6.6, Γ n'est pas un graphe de Cayley CI.

Inversement, si Γ n'est pas CI, il existe un homomorphisme non trivial θ de G dans $\text{Aut}_S G$. Puisque G est simple, $\text{Ker}(\theta)$ est égal à 1×1 ou à $G_1 \times 1$ ou à $1 \times G_2$. Le groupe $\text{Im}(\theta) \simeq G/\text{Ker}(\theta)$ est donc isomorphe à G ou à G_2 ou à G_1 . On obtient dans les trois cas un sous-groupe de $\text{Aut}_S G$ isomorphe à G_1 ou à G_2 . (Remarquons que pour un graphe de Cayley non orienté Γ , $\text{Im}(\theta)$ ne peut être isomorphe à G . En effet, si on suppose que $\text{Im}(\theta) \simeq G$, la proposition 5.6 implique que $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(G)$, et par conséquent $\text{Inn}(G) = \text{Im}(\theta) \subseteq \text{Aut}_S G$. Cela est impossible, car un graphe de Cayley holomorphe non orienté sur un groupe non abélien ne peut être normal.) \square

6.4.4. Produit semi-direct de deux groupes simples

Nous nous attaquons maintenant aux graphes de Cayley orientés holomorphes $\Gamma(G, S)$ basés sur un produit semi-direct $K \rtimes_{\theta} Q$ non trivial de deux groupes simples finis. Nous nous sommes restreints aux graphes de Cayley holomorphes complets, le cas général étant beaucoup plus complexe. Remarquons que si G est un groupe complet, alors Γ l'est aussi nécessairement. Par conséquent, les résultats que nous obtiendrons s'appliqueront en particulier à tous les graphes de Cayley orientés holomorphes basés sur un groupe symétrique \mathfrak{S}_n , $n \neq 2, 6$.

Pour résoudre ce problème nous diviserons les produits semi-directs $G = K \rtimes_{\theta} Q$ non triviaux en quatre familles :

- K et Q sont non abéliens et $\theta : Q \longrightarrow \text{Inn}(K)$ est non trivial ; dans ce cas $G \simeq K \times Q$ (voir la remarque 5.24) ;
- K est non abélien, $Q = Z_p$ pour un p premier, et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Inn}(K)$ est non trivial ; dans ce cas $G \simeq K \times Z_p$;
- K est quelconque, $Q = Z_p$ pour un p premier impair, et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ vérifie $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$;
- K est quelconque, $Q = Z_2$, et $\theta : Z_2 \longrightarrow \text{Aut}K$ vérifie $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$.

À l'aide du lemme 5.16, il est aisé de voir que tout produit semi-direct non trivial est d'un de ces quatre types.

Nous aurons besoin du lemme suivant qui donne le centre de ces groupes :

Lemme 6.22. *Soit K et Q deux groupes simples finis, $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme non trivial et $G = K \rtimes_{\theta} Q$. Le centre de G est non trivial si et seulement si Q est abélien et $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$. Dans ce cas, $C(G) = \{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$, où $g : Q \longrightarrow K$ est le monomorphisme satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$.*

DÉMONSTRATION. Le centre de G est un sous-groupe normal de G . Par la proposition 5.23 il est donc égal à $\mathbf{1}$, ou à $K \times \mathbf{1}$, ou à $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et si $g : Q \longrightarrow K$ est l'unique monomorphisme satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour tout $x \in Q$, ou à $K \rtimes_{\theta} Q$.

Remarquons tout d'abord que $K \times \mathbf{1}$ ne peut être un sous-groupe du centre de G . S'il en était ainsi, nous aurions,

$$(a, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, x)(a, \mathbf{1})(\mathbf{1}, x)^{-1} = (\theta_x(a), \mathbf{1}), \forall a \in K \forall x \in Q,$$

ce qui implique que $\theta_x = \text{Id}$ pour tout $x \in Q$. Cela entre en contradiction avec la non-trivialité de θ . Cette constatation élimine la deuxième et la dernière possibilité. Le centre de G est donc trivial si $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$, et est égal à $\mathbf{1}$ ou à $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$ si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$.

Il nous reste à déterminer, sous l'hypothèse $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ (dans ce cas, $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour un monomorphisme g de Q dans K), dans quel cas $C(G) = \{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$. Pour ce faire, notons que $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\} \subseteq C(G)$ si et seulement si $K \times \mathbf{1}, \mathbf{1} \times Q$

$\subseteq C_G(\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\})$. La première de ces deux inclusions est équivalente à, pour tout $a \in K$ et $x \in Q$,

$$\begin{aligned}(g(x)^{-1}, x) &= (a, \mathbf{1})(g(x)^{-1}, x)(a, \mathbf{1})^{-1} \\ &= (ag(x)^{-1}\theta_x(a^{-1}), x),\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à, pour tout $a \in K$ et $x \in Q$,

$$g(x)^{-1} = ag(x)^{-1}\theta_x(a^{-1}) \iff \theta_x(a) = g(x)ag(x)^{-1},$$

et donc à l'équation

$$\theta_x = \gamma_{g(x)}, \quad \forall x \in Q.$$

Comme cette équation est vraie, la première inclusion est toujours satisfaite. La seconde inclusion quant à elle est équivalente à, pour tout $x, y \in Q$,

$$(g(x)^{-1}, x) = (\mathbf{1}, y)(g(x)^{-1}, x)(\mathbf{1}, y)^{-1} = (\theta_y(g(x)^{-1}), yxy^{-1}),$$

qui est équivalent à, pour tout $x, y \in Q$,

$$\gamma_{g(y)}(g(x)^{-1}) = \theta_y(g(x)^{-1}) = g(x)^{-1} \text{ et } yxy^{-1} = x$$

et donc à Q est abélien.

Par conséquent, le centre de G est non trivial si et seulement si Q est abélien et $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$. De plus, dans ce cas $C(G) = \{(g(x)^{-1}, x) : x \in Q\}$. \square

6.4.4.1. Première famille

Voici le résultat pour les produits semi-directs du premier type.

Théorème 6.23. *Soit $G = K \rtimes_{\theta} Q$, où K et Q sont deux groupes simples finis non abéliens et $\theta : Q \rightarrow \text{Inn}(K)$ un homomorphisme non trivial. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe complet. Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Inn}_S(G)$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à K ou à Q .*

DÉMONSTRATION. Dans ce cas $G \simeq K \times Q$, avec K et Q non abéliens. Il suffit donc d'appliquer le théorème 6.17 pour obtenir le résultat. \square

6.4.4.2. Deuxième famille

Voici le résultat pour les produits semi-directs du second type.

Théorème 6.24. *Soit $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$, où K est un groupe simple fini, p un nombre premier et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Inn}(K)$ un homomorphisme non trivial. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe complet. Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Inn}_S(G)$ est différent de $\text{Inn}(G)$ et ne contient pas d'élément d'ordre p .*

Remarque 6.25. Ce résultat implique que Γ est CI si et seulement si $N_{K \times 0}(S)$ est différent de $K \times 0$ et ne contient pas d'élément d'ordre p .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.24. Remarquons que $C(G) = \{(g(i)^{-1}, i) : i \in Z_p\}$. Cela entraîne, par la remarque 5.24(ii), que $\text{Inn}(G) \simeq K$. De plus, on peut vérifier facilement que $K \times 0$ est un complément de $C(G)$ dans G .

Si $\text{Inn}_S(G) = \text{Inn}(G)$, alors, par la proposition 6.11, Γ n'est pas CI. Si $\text{Inn}_S(G)$ contient un élément d'ordre p , le paragraphe précédant implique que cet automorphisme est égal à $\gamma_{(b,0)}$, pour un $b \in K$ d'ordre p . L'application $(a, i) \mapsto (b^i, 0)$ est, par conséquent, un homomorphisme de G dans $N_G(S)$ ayant comme seul point fixe 1. Par la proposition 6.12, Γ n'est pas CI.

Inversement, si Γ n'est pas CI, il existe un homomorphisme non trivial η de G dans $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S(G)$. Puisque les seuls sous-groupes normaux propres de G sont $K \times 0$ et $C(G)$, le noyau de η est trivial ou égal à l'un de ces deux sous-groupes. Il ne peut être trivial, car un groupe d'ordre $p|K|$ ne peut être injecté dans un groupe d'ordre $|K|$. S'il est égal à $C(G)$, alors $\text{Im}(\eta)$ est isomorphe à K , donc $\text{Inn}(G) = \text{Im}(\eta) \subseteq \text{Inn}_S(G)$. Finalement, si $\text{Ker}(\eta)$ est égal à $K \times 0$, alors $\text{Im}(\eta)$ est un sous-groupe de $\text{Inn}_S(G)$ isomorphe à Z_p . Par conséquent, $\text{Inn}_S(G)$ contient un élément d'ordre p . \square

Dans le cas des graphes de Cayley non orientés ce résultat s'énonce comme suit :

Théorème 6.26. *Soit $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$, où K est un groupe simple fini, p un nombre premier et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Inn}(K)$ un homomorphisme non trivial. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley holomorphe complet. Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Inn}_S(G)$ ne contient pas d'élément d'ordre p .*

Remarque 6.27. Ce résultat implique que Γ est CI si et seulement si $N_{K \times 0}(S)$ ne contient pas d'élément d'ordre p .

6.4.4.3. Troisième famille

Voici le résultat pour les produits semi-directs du troisième type.

Théorème 6.28. Soit $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$, où K est un groupe simple fini, p un nombre premier impair et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme vérifiant $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe complet. Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Inn}_S(G)$ ne contient pas d'élément d'ordre p .

Remarque 6.29. Ce résultat implique que Γ est CI si et seulement si $N_G(S)$ ne contient pas d'élément d'ordre p .

DÉMONSTRATION. Supposons pour commencer que Γ n'est pas CI. Par le théorème 6.6, il existe un homomorphisme non trivial $\eta : G \longrightarrow \text{Aut}_S G = \text{Inn}_S(G)$. Par la proposition 5.23, le noyau de η est trivial ou égal à $K \times 0$. Dans le premier cas $\text{Im}(\eta)$ est isomorphe à G , et dans le second à Z_p . Puisque $\text{Im}(\eta) \subseteq \text{Inn}_S(G)$, le groupe $\text{Inn}_S(G)$ contient un élément d'ordre p .

Inversement, si $\text{Inn}_S(G)$ contient un élément d'ordre p , alors H , le groupe engendré par l'élément de $N_G(S)$ correspondant à cet élément, est égal à $H_K \times 0$, avec $H_K \simeq Z_p$, ou à $\{(\prod_{k=0}^{i-1} \theta_k(z), i) : i \in Z_p\}$, pour un $z \in K$ vérifiant l'équation $\prod_{k=0}^{p-1} \theta_k(z) = \mathbf{1}$. Pour conclure la preuve, il suffit de définir, pour chacun des deux cas, un homomorphisme $h : G \longrightarrow H \subseteq N_G(S)$, ayant comme unique point fixe $(\mathbf{1}_K, 0)$. Posons pour le premier cas $h(a, i) = (f(i), 0)$, où f est un isomorphisme de Z_p dans H_K , et pour le second $h(a, i) = (\prod_{k=0}^{i-1} \theta_k(z), ui)$, où u est une unité de Z_p différente de 1. On vérifie facilement que ces deux homomorphismes n'ont pas de point fixe non trivial. \square

6.4.4.4. Quatrième famille

Voici notre résultat pour les produits semi-directs du quatrième type.

Théorème 6.30. Soit $G = K \rtimes_{\theta} Z_2$, où K est un groupe simple fini et $\theta : Z_2 \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme vérifiant $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley

orienté holomorphe complet. Alors Γ est CI si et seulement si $\text{Inn}_S(G) \cap \gamma(K \times 0)$ ne contient pas d'élément d'ordre 2.

Remarque 6.31. Ce résultat implique que Γ est CI si et seulement si $N_{K \times 0}(S)$ ne contient pas d'élément d'ordre 2.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, si $\gamma(b, 0)$ est un élément de $\text{Inn}_S(G) \cap \gamma(K \times 0)$ d'ordre 2, l'application $(a, i) \mapsto (b^i, 0)$ est un homomorphisme de G dans $N_G(S)$, ayant comme seul point fixe $(1, 0)$. Par la proposition 6.12, le graphe de Cayley orienté Γ n'est pas CI.

Réciproquement, si γ n'est pas CI, G possède un automorphisme croisé α de G associé à un homomorphisme non trivial η de G dans $\text{Aut}_S G$. Puisque G est de centre trivial (lemme 6.22), il existe, par le corollaire 4.31, deux homomorphismes $h, k : G \rightarrow G$ tel que $\alpha(a, i) = h(a, i)k(a, i)^{-1}$ et $\eta_{(a, i)} = \gamma_{k(a, i)}$ pour tout $(a, i) \in G$. Par la proposition 5.23, le noyau de h et de k font partie de l'ensemble de groupes $1, K \times 0$, et $K \rtimes Z_2$. Puisque η est non trivial, le noyau de k est différent de $K \rtimes Z_2$.

Si $\text{Ker}(k)$ est égal à 1 , alors $\text{Inn}(G) = \text{Im}(\eta) \subseteq \text{Inn}_S(G)$ et donc $\text{Inn}_S(G)$ contient un élément d'ordre 2 de la forme recherchée.

Si $\text{Ker}(k) = K \times 0$, alors le groupe $\text{Im}(k)$ est isomorphe à $G/\text{Ker}(k) \simeq Z_2$. Cela entraîne, par la proposition 5.17, que $\text{Im}(k)$ est égal à $\langle (b, 0) \rangle$, pour un $b \in K$ d'ordre 2, ou à $\langle (c, 1) \rangle$, pour un $c \in K$ satisfaisant à $c\theta_1(c) = 1_K$. Dans le premier cas la preuve est terminée. Il nous reste donc à éliminer la deuxième possibilité. Supposons que $k(a, i) = (c^i, i)$, pour tout $(a, i) \in G$. Remarquons d'abord que $|K| > 2$. Dans le cas contraire, le groupe d'automorphismes de K serait trivial, donc l'homomorphisme θ de Z_2 dans $\text{Aut}K$ serait lui aussi trivial. De plus, par la proposition 4.28, on a

$$2|K| = |G| = |\text{Im}(\alpha)| \leq |\text{Im}(h)| |\text{Im}(k)| = 2|\text{Im}(h)|,$$

qui entraîne que

$$|K| \leq |\text{Im}(h)|.$$

Puisque $|K| > 2$, le noyau de h est donc différent de $K \times 0$ et de $K \rtimes Z_2$. Ainsi h est un automorphisme. Cela implique que h stabilise $K \times 0$ et $K \times 1$, car $K \times 0$ est le seul

sous-groupe normal propre de G . Par conséquent, pour tout $i \in Z_2$,

$$\alpha(K \times i) \subseteq h(K \times i)k(K \times i)^{-1} = (K \times i)(c^i, i) = K \times 0.$$

Cette inclusion constitue une contradiction; car α est bijectif. \square

6.4.4.5. Groupe symétrique

Le théorème 6.30 permet d'obtenir une caractérisation des graphes de Cayley orientés holomorphes qui sont CI sur \mathfrak{S}_n :

Théorème 6.32. *Soit $n \neq 6$ un entier et $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{S}_n, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe sur \mathfrak{S}_n . Alors Γ est CI si et seulement si $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ ne contient pas de permutation paire d'ordre 2.*

Remarque 6.33. Le théorème est vrai pour $n = 6$ à condition que Γ soit complet.

Remarque 6.34. Puisque $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ est égal à $\text{Aut}T_S$ (le groupe d'automorphismes du graphe de transpositions de S), la condition " $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ ne contient pas de permutation paire d'ordre 2" est équivalente à la condition " $\text{Aut}T_S$ ne contient pas de permutation paire d'ordre 2".

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.32. D'abord $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes_{\theta} Z_2$, où $\theta_1 = \gamma_n$ et $w \in \mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ d'ordre 2. De plus, puisque $n \neq 6$, le groupe \mathfrak{S}_n est complet.

Si $n \neq 4$, le groupe alterné \mathfrak{A}_n est simple. Le résultat découle donc directement du théorème 6.30.

La preuve pour le cas où $n = 4$ est similaire à la preuve du théorème 6.30. La présence du sous-groupe de Klein $V \triangleleft \mathfrak{S}_4$ fait qu'il y a un cas de plus à traiter : $\text{Ker}(k) = V$. On peut vérifier, par un argument technique faisant appel aux éléments des translatés de V dans \mathfrak{S}_4 , que ce cas ne donne pas d'autres automorphismes croisés et donc ne modifie pas le résultat. \square

Exemple 6.35. Le graphe $\text{BS}(5) = \Gamma(\mathfrak{S}_5, \{(12), (23), (34), (45)\})$ est holomorphe mais n'est pas CI car la permutation $(15)(24)$ normalise $\{(12), (23), (34), (45)\}$. Le graphe

$$\Gamma(\mathfrak{S}_5, \{(1425)^{\pm 1}, (15)(234)^{\pm 1}\})$$

est un exemple de graphe de Cayley isomorphe à Γ mais qui n'est pas engendré par un sous-ensemble de Cayley isomorphe à $\{(12), (23), (34), (45)\}$.

Chapitre 7

ISOMORPHIE ENTRE LES GRAPHES DE CAYLEY BASÉS SUR DIFFÉRENTS GROUPES

7.1. INTRODUCTION

Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Le but de ce chapitre est de déterminer les groupes sur lesquels on peut obtenir un graphe de Cayley isomorphe à Γ . Ce problème est en général un problème très complexe dont la solution dépend du groupe d'automorphismes de Γ . Puisque que fort probablement la majorité des graphes de Cayley sont holomorphes et que l'on a une connaissance précise de leur groupe d'automorphismes, il est naturel de se demander s'il est possible d'obtenir un résultat particulier pour cette classe de graphes. C'est pourquoi nous avons restreint nos travaux essentiellement à ces graphes. Notre résultat principal donne une décomposition de tous les groupes sur lesquels un graphe de Cayley orienté holomorphe Γ peut être représenté comme graphe de Cayley orienté holomorphe. Cela nous permettra en particulier de déterminer les groupes sur lesquels peuvent être représentés comme graphe de Cayley holomorphe, les graphes de Cayley holomorphes basés sur

- un groupe cyclique ;
- un groupe simple : nous verrons qu'il n'existe aucun autre groupe sur lequel ils peuvent être représentés ;
- un produit direct de deux groupes simples non abéliens : nous verrons qu'il n'existe aucun autre groupe sur lequel ils peuvent être représentés ;

- un produit semi-direct non trivial¹ de deux groupes simples, pour les graphes de Cayley holomorphes complets²;
- un groupe symétrique \mathfrak{S}_n : nous démontrerons qu'ils peuvent être représentés sur un autre groupe, qui est un produit semi-direct de la forme $\mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ non isomorphe à \mathfrak{S}_n , si et seulement si le normalisateur de l'ensemble de générateurs du graphe contient une permutation impaire d'ordre 2.

Nous démontrerons aussi un résultat (le théorème 7.9) qui donne une décomposition de tous les groupes sur lesquels un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur un groupe abélien peut être représenté (pas seulement comme graphe de Cayley holomorphe).

7.2. PRÉLIMINAIRES

Soit Γ un graphe quelconque. Si Γ est isomorphe à un graphe de Cayley $\Gamma' = \Gamma(H, T)$, $\text{Aut}\Gamma$ et $\text{Aut}\Gamma'$ sont isomorphes comme groupe de permutations. Par conséquent, $\text{Aut}\Gamma$ doit contenir un sous-groupe isomorphe comme groupe de permutations au groupe des translation à gauche $L(H)$, donc un groupe isomorphe à H qui agit régulièrement sur $V(\Gamma)$. Sabidussi a démontré dans [26] que cette propriété donne une condition nécessaire et suffisante permettant de déterminer si un graphe Γ est isomorphe à un graphe de Cayley sur H :

Théorème 7.1. *Un graphe orienté Γ est isomorphe à un graphe de Cayley orienté sur un groupe H si et seulement si son groupe d'automorphismes $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe isomorphe à H qui agit régulièrement sur $V(\Gamma)$.*

Nous dirons parfois simplement d'un tel groupe H qu'il est *régulier*.

Dans ce chapitre nous étudierons principalement le problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes. C'est pourquoi nous avons besoin d'un théorème similaire au théorème précédant, permettant de déterminer quand un graphe est isomorphe à un graphe de Cayley holomorphe. Rappelons que si $\Gamma' = \Gamma(H, T)$ est un

¹ $K \rtimes_{\theta} Q$ est non trivial si $\text{Ker}(\theta) \neq Q$.

²C'est-à-dire qui vérifient $\text{Aut}_5 G = \text{Inn}_5 G$.

graphe de Cayley holomorphe, $L(H)$ est un sous-groupe normal de $\text{Aut}\Gamma$, en plus d'être isomorphe à H et d'agir régulièrement sur $V(\Gamma')$. C'est pourquoi on obtient le résultat suivant :

Théorème 7.2. *Un graphe orienté Γ est isomorphe à un graphe de Cayley orienté holomorphe sur un groupe H si et seulement si son groupe d'automorphismes $\text{Aut}\Gamma$ contient un sous-groupe normal isomorphe à H qui agit régulièrement sur $V(\Gamma)$.*

DÉMONSTRATION. La preuve de ce résultat est pratiquement identique à preuve du théorème 7.1 ; c'est pourquoi nous ne donnons que les grandes étapes. La nécessité de la condition est évidente. Pour montrer la suffisance, considérons un sous-groupe normal H de $\text{Aut}\Gamma$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Choisissons $x_0 \in V(\Gamma)$, posons $T = \{\sigma \in H : \sigma(x_0) \in E^+(x_0)\}$ et $\Gamma' = \Gamma(H, T)$.

Il est aisé de voir que l'application $\alpha : H \longrightarrow V(\Gamma)$ définie en posant $\alpha(\sigma) = \sigma(\mathbf{1})$ est un isomorphisme de Γ' dans Γ . Donc $\Gamma' \simeq \Gamma$. De plus, l'application $\gamma_\alpha : \text{Aut}\Gamma' \longrightarrow \text{Aut}\Gamma$ définie par $\gamma_\alpha(\sigma) = \alpha \circ \sigma \circ \alpha^{-1}$ est un isomorphisme de groupe de permutation qui satisfait à $\gamma_\alpha[L(H)] = H$. Par conséquent $L(H) \triangleleft \text{Aut}\Gamma$, ce qui implique que Γ' est holomorphe. \square

Ainsi, pour déterminer les groupes sur lesquels un graphe Γ peut être représenté comme graphe de Cayley, il faut déterminer les sous-groupes

$$H < \text{Aut}\Gamma$$

agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Si H est un sous-groupe normal de $\text{Aut}\Gamma$, H est un groupe sur lequel Γ peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe.

Soit

$$\Gamma = \Gamma(G, S)$$

un graphe de Cayley. Puisque nous étudierons essentiellement le problème d'isomorphie pour les graphes de Cayley holomorphes, et que ces graphes satisfont à

$$\text{Aut}\Gamma = \text{Hol}_S(G),$$

nous limiterons nos recherches des sous-groupes réguliers aux sous-groupes de l'holomorphe relatif $\text{Hol}_S(G)$. Notons que si Γ n'est pas holomorphe, $\text{Hol}_S(G)$ est tout de même un sous-groupe de $\text{Aut}\Gamma$. C'est pourquoi nos résultats donnent aussi des groupes sur lesquels un graphe de Cayley non holomorphe peut être représenté, sans toutefois les donner tous.

Nous utiliserons le fait que

$$\text{Hol}_S(G) \simeq G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G,$$

où

$$\theta = \text{Id}_{\text{Aut}_S G},$$

c'est-à-dire l'homomorphisme de $\text{Aut}_S G$ dans $\text{Aut}G$ défini par

$$\theta(f) = f, \forall f \in \text{Aut}_S G,$$

donc vérifiant

$$\theta_f(x) = f(x), \forall f \in \text{Aut}_S G \forall x \in G.$$

L'application $\lambda_x f \mapsto (x, f)$ est un isomorphisme de $\text{Hol}_S(G)$ dans $G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G$. Nous l'utiliserons pour mettre en correspondance les sous-groupes de $\text{Hol}_S(G)$ et de $G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G$.

Soit

$$H < \text{Hol}_S(G)$$

agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Le groupe H donne un groupe sur lequel Γ peut être représenté comme graphe de Cayley. Si H est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$, H donne un groupe sur lequel Γ peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe.

Considérons

$$H' = \{(x, f) : \lambda_x f \in H\}$$

le sous-groupe de $G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G$ correspondant à H . Pour déterminer la forme de H' , et donc celle de H , nous ferons appel au résultats du chapitre 5 sur les sous-groupes du

produit semi-direct. Pour ce faire, considérons

$$K = G \quad Q = \text{Aut}_S G, \quad (7.1)$$

les projections

$$\sigma_K : H' \longrightarrow G \quad \sigma_Q : H' \longrightarrow \text{Aut}_S G$$

et posons

$$\begin{aligned} H_K &= \langle \text{Im}(\sigma_K) \rangle & H_Q &= \text{Im}(\sigma_Q) \\ N_K &= \sigma_K[\text{Ker}(\sigma_Q)] & N_Q &= \sigma_Q[\text{Ker}(\sigma_K)]. \end{aligned}$$

Explicitement

$$\begin{aligned} H_K &= \{x \in G : \exists f \in \text{Aut}_S G \lambda_x f \in H\} & H_Q &= \{f \in \text{Aut}_S G : \exists x \in G \lambda_x f \in H\} \\ N_K &= \{x \in G : \lambda_x \in H\} & N_Q &= \{f \in \text{Aut}_S G : f \in H\}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\text{Im}(\sigma_K) = G$, car H agit transitivement sur $V(\Gamma)$. Donc $H_K = G$. De plus, $N_Q = 1$, car cette action est régulière. Pour alléger la notation posons

$$M = N_K \quad N = H_Q.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} H_K &= G & H_Q &= N \\ N_K &= M & N_Q &= 1, \end{aligned}$$

où

$$M = \{x \in G : \lambda_x \in H\} \quad N = \{f \in \text{Aut}_S G : \exists x \in G \lambda_x f \in H\}.$$

Nous aurons besoin aussi, pour appliquer les résultats du chapitre 5, de l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \longrightarrow \text{Aut} G/M$ induit par θ , introduit dans ce même chapitre.

Rappelons d'abord que :

Proposition 7.3. (L'automorphisme induit \tilde{f})

Soit G un groupe, M un sous-groupe normal de G et f un automorphisme de G . Cet automorphisme induit un automorphisme de G/M faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G \\ \nu_M \downarrow & & \downarrow \nu_M \\ G/M & \xrightarrow{\tilde{f}} & G/M \end{array}$$

c'est-à-dire vérifiant l'équation $\tilde{f}(xM) = f(x)M$, $\forall x \in G$, si et seulement si f stabilise M (c'est-à-dire si $f[M] = M$). De plus, s'il existe, cet automorphisme est unique.

Remarque 7.4. Nous travaillerons dans ce chapitre uniquement sur des graphes de Cayley basés sur des groupes finis. Dans ce cas, f stabilise M (c'est-à-dire $f[M] \subseteq M$) est équivalent à f préserve M (c'est-à-dire $f[M] = M$).

Remarque 7.5. Si $f = \gamma_x$, alors $\tilde{\gamma}_x = \gamma_{xM}$.

De cette proposition découle le résultat suivant :

Proposition 7.6. (L'homomorphisme induit $\tilde{\theta}$)

Si $M \triangleleft G$, l'homomorphisme θ induit un homomorphisme $\tilde{\theta} : N \rightarrow \text{Aut}G/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{\theta}(f) = \tilde{f}, \forall f \in N$$

si et seulement si N stabilise M .

Important : Dans la suite de ce texte, sauf mention contraire, θ est l'homomorphisme

$$\theta = \text{Id}_{\text{Aut}_S G},$$

c'est-à-dire l'homomorphisme vérifiant

$$\theta_f(x) = f(x), \forall f \in \text{Aut}_S G \forall x \in G.$$

7.3. SOUS-GROUPES RÉGULIERS DE L'HOLOMORPHE RELATIF

Voici le résultat le plus général que nous avons obtenu pour trouver les sous-groupes réguliers H de l'holomorphe relatif $\text{Hol}_S(G)$. Il donne une décomposition de ces sous-groupes à condition que $M = \{x \in G : \lambda_x \in H\}$ soit normal dans G .

Théorème 7.7. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté, H un sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Si $M \triangleleft G$, H s'écrit*

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\},$$

où $\beta : N \rightarrow G/M$ un isomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \rightarrow \text{Aut}G/M$ induit par θ .

Inversement,

Théorème 7.8. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Si $M \triangleleft G$, si $N < \text{Aut}_S G$, si $\tilde{\theta} : N \rightarrow \text{Aut}G/M$ est un homomorphisme induit par θ et si $\beta : N \rightarrow G/M$ un $\tilde{\theta}$ -isomorphisme, alors*

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\}$$

est un sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 7.7 et 7.8 . Considérons H , un sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$, et H', M, N les sous-groupes définis précédemment. Par le théorème 5.13, H' se décompose en

$$H' = \bigcup_{f \in N} \beta(f) \times \{f\}, \quad (7.2)$$

où $\beta : N \rightarrow G/M$ est un homomorphisme croisé quasi-surjectif, associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : \text{Aut}_S G \rightarrow \text{Aut}G/M$ induit par θ . Puisque H agit régulièrement sur $V(\Gamma)$, $\text{Im}(\beta) = G/M$ et $\text{Ker}(\beta) = \mathbf{1}$. Par conséquent β est un isomorphisme croisé. De plus, l'équation 7.2 implique que

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{f \in N} \lambda_{\beta(f)} f \\ &= \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\}. \end{aligned}$$

Inversement, par le théorème 5.14,

$$H' = \bigcup_{f \in N} \beta(f) \times f$$

est un sous-groupe de $G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G$. Ce groupe correspond au sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\}.$$

Puisque β est un isomorphisme, l'action de H sur $V(\Gamma)$ est régulière. □

Le prochain résultat, qui découle des théorèmes 7.7 et 7.8, donne une décomposition de tous les sous-groupes réguliers de l'holomorphe relatif $\text{Hol}_S(G)$ si G est abélien. Il permet de trouver tous les groupes sur lesquels un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur un groupe abélien peut être représenté (pas seulement comme graphe de Cayley holomorphe).

Théorème 7.9. *Soit G un groupe abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Tout sous-groupe H de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$ s'écrit*

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\},$$

où $\beta : N \longrightarrow G/M$ est un isomorphisme croisé, associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \longrightarrow \text{Aut}G/M$ induit par θ . Inversement, tout ensemble de cette forme est un sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

Plus généralement :

Proposition 7.10. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G , H un sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Si tous les sous-groupes de G isomorphes à un sous-groupe normal de H sont normaux dans G , alors $M \triangleleft G$ et H s'écrit*

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\},$$

où $\beta : N \longrightarrow G/M$ est un isomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \longrightarrow \text{Aut}G/M$ induit par θ .

DÉMONSTRATION. Considérons l'homomorphisme projection $\sigma_Q : H' \longrightarrow \text{Aut}_S G$. Puisque

$$M \times \mathbf{1} = \text{Ker}(\sigma_Q) \triangleleft H' \simeq H,$$

M est isomorphe à un sous-groupe normal de H . Cela entraîne par hypothèse que $M \triangleleft G$. Par le théorème 7.7, H s'écrit $H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\}$, où $\beta : N \longrightarrow G/M$ est un isomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \longrightarrow \text{Aut} G/M$ induit par θ . \square

En particulier :

Corollaire 7.11. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G et Q un groupe simple non isomorphe à G . Alors il n'existe aucun sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$ isomorphe à Q , agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'un sous-groupe simple Q isomorphe à un sous-groupe H de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Montrons que $Q \simeq G$. Par la proposition 7.10, $M \triangleleft G$ et H s'écrit

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \beta(f)\},$$

où $\beta : N \longrightarrow G/M$ est un isomorphisme croisé associé à l'homomorphisme $\tilde{\theta} : N \longrightarrow \text{Aut}(G/M)$ induit par θ . Si $M = G$, alors $H = L(G)$. Si $M = \mathbf{1}$, alors $\text{Ker}(\sigma_Q) = M \times \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Donc σ_Q est un isomorphisme de $H' (\simeq H \simeq Q)$ dans G . Dans les deux cas Q est isomorphe à G . \square

7.3.1. Sous-groupes réguliers normaux de l'holomorphe relatif

Notre résultat principal est une décomposition de tous les sous-groupes normaux d'action régulière de l'holomorphe relatif $\text{Hol}_S(G)$. Il permet de trouver tous les groupes sur lesquels un graphe de Cayley holomorphe peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe.

Théorème 7.12. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Alors M est un sous-groupe*

normal de G stabilisé par $\text{Aut}_S G$ et $N \triangleleft \text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow G/M$ satisfaisant à

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G$$

donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Inversement, si M, N et η satisfont aux propriétés énumérées ci-haut, alors $H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}$ est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Considérons H' (le sous-groupe normal de $G \rtimes \text{Aut}_S G$ correspondant à H), M et N tel que définis dans les préliminaires du chapitre. Par le théorème 5.21, M est un sous-groupe normal de G stabilisé par l'action de $\text{Aut}_S G$ et N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow G/M$ donnant la décomposition

$$H' = \bigcup_{f \in N} \eta(f)^{-1} \times f,$$

et vérifiant les équations

$$\bar{\theta}(f) = \gamma_{\eta(f)}, \forall f \in N \tag{7.3}$$

$$\bar{\theta}(f)|_{G/M} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G, \tag{7.4}$$

où $\bar{\theta} : \text{Aut}_S G \longrightarrow \text{Aut}(G/M)$ est l'homomorphisme induit par θ . La deuxième équation implique que, pour tout $f \in \text{Aut}_S G$,

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \bar{\theta}(f) \\ &= \bar{\theta}(f)|_{G/M} \text{ (car le domaine de } \bar{\theta}(f) \text{ est } G/M) \\ &= \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, H' correspond au sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{f \in N} \lambda_{\eta(f)^{-1}} f \\ &= \{ \lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1} \}. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que M, N et η satisfont aux propriétés énumérées dans la première partie du théorème. Il est facile de vérifier que $H_K = G$, $N_K = M$, $H_Q = N$ et $N_Q = \mathbf{1}$ satisfont aux conditions de la deuxième partie du théorème 5.21. De plus, pour tout $f \in \text{Aut}_S G$,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(f)|_{G/M} &= \bar{\theta}(f) \text{ (car le domaine de } \bar{\theta}(f) \text{ est } G/M) \\ &= \tilde{f} \\ &= \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $f \in N$,

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(f) &= \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1} \\ &= \gamma_{\eta(f)} \text{ (par la proposition 5.1)}. \end{aligned}$$

Ainsi η respecte l'équation (7.3) et (7.4). Par conséquent, les hypothèses du théorème 5.21 sont satisfaites. Donc

$$H' = \bigcup_{f \in N} \eta(f)^{-1} \times f$$

est un sous-groupe normal de $G \rtimes_{\theta} \text{Aut}_S G$. Il correspond au sous-groupe de $\text{Hol}_S(G)$

$$\begin{aligned} H &= \bigcup_{f \in N} \lambda_{\eta(f)^{-1}} f \\ &= \{ \lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1} \}. \end{aligned}$$

□

7.3.2. Décomposition simplifiée des sous-groupes réguliers normaux

On peut obtenir une décomposition simplifiée des sous-groupes normaux de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$ si $C(G/M) = 1$ et $N \subseteq \text{Inn}(G)$. Nous aurons besoin du sous-groupe de $N_G(S)$ correspondant à N , soit

$$P = \gamma^{-1}(N),$$

de $R(P)$, le groupe des translations à droite correspondant aux éléments de P , et du lemme suivant :

Lemme 7.13. *Si $N \subseteq \text{Inn}(G)$, alors $N \triangleleft \text{Aut}_S G$ si et seulement si $\text{Aut}_S G$ stabilise P . Si $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$, cette proposition est aussi équivalente à $P \triangleleft N_G(S)$.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que pour $f \in \text{Aut} G$, on a $f \circ \gamma_x \circ f^{-1} = \gamma_{f(x)}$. Par conséquent, N est normal dans $\text{Aut}_S G$ si pour tout $f \in \text{Aut}_S G$ et $x \in P$,

$$f \circ \gamma_x \circ f^{-1} = \gamma_{f(x)} \in N$$

ce qui est équivalent à $\text{Aut}_S G$ stabilise P . Si $\text{Aut}_S G = \text{Inn}_S G$, il est clair que cette dernière proposition est équivalente à $P \triangleleft N_G(S)$. \square

Voici le résultat :

Théorème 7.14. *Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté et H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Si $C(G/M) = 1$ et $N \subseteq \text{Inn}(G)$, alors $M \triangleleft G$, M et P sont stabilisés par $\text{Aut}_S G$, $M \cap P = C(G)$ et $G = MP$. De plus, H se décompose en*

$$H = L(M)R(P);$$

et si $C(G) = 1$, alors $H \simeq M \times P$.

Inversement,

Théorème 7.15. *Si $M \triangleleft G$ et $P < G$ sont stabilisés par $\text{Aut}_S G$, si $M \cap P = C(G)$ et $G = MP$, alors*

$$H = L(M)R(P)$$

est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

Remarque 7.16. Si $C(G) = 1$, alors $L(M)R(P) \simeq M \times P$

Le théorème 7.15 implique en particulier la proposition bien connue suivante :

Proposition 7.17. Soit $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G tel que $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$. Alors

$$H = R(G)$$

est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 7.14 et 7.15 . Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Par le théorème 7.12, M est un sous-groupe normal de G stabilisé par l'action de $\text{Aut}_S G$, N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \rightarrow G/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \quad \forall f \in \text{Aut}_S G, \quad (7.5)$$

et donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Puisque N est normal dans $\text{Aut}_S G$, le lemme 7.13 implique que $\text{Aut}_S G$ stabilise P . De l'équation (7.5) on déduit que, pour tout $\gamma_x \in N$,

$$\begin{aligned} \gamma_{xM} &= \tilde{\gamma}_x \text{ (par la remarque 7.5)} \\ &= \eta \circ \gamma_{\gamma_x} \circ \eta^{-1} \\ &= \gamma_{\eta(\gamma_x)} \text{ (par la proposition 5.1)}. \end{aligned}$$

Comme $C(G/M)$ est trivial, cette égalité implique que

$$\eta(\gamma_x) = xM, \quad \forall \gamma_x \in N.$$

On tire de cette dernière équation trois choses. Premièrement, pour tout $x \in C(G)$,

$$M = \eta(\gamma_x) = xM.$$

Donc

$$C(G) \subseteq M.$$

Deuxièmement, puisque η est injectif,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \text{Ker}(\eta) \\ &= \{\gamma_x \in N : x \in M\} \\ &= \{\gamma_x : x \in M \cap P\}, \end{aligned}$$

donc

$$M \cap P \subseteq C(G).$$

Puisque $C(G) \subseteq M, P$, on obtient

$$M \cap P = C(G).$$

Troisièmement, le fait que $\eta : N \longrightarrow G/M$ est surjectif entraîne que

$$G = MP.$$

Finalement, la décomposition de H devient

$$\begin{aligned} H &= \{\lambda_x \gamma_y : \gamma_y \in N, x \in \eta(\gamma_y)^{-1}\} \\ &= \{\lambda_x \lambda_y \rho_{y^{-1}} : y \in P, x \in y^{-1}M\} \\ &= \{\lambda_{xy} \rho_{y^{-1}} : y \in P, x \in My^{-1}\} \\ &= \{\lambda_x \rho_{y^{-1}} : y \in P, x \in M\} \\ &= L(M)R(P). \end{aligned}$$

Inversement, considérons M et P satisfaisant les conditions du théorème 7.15. Posons $N = \gamma(P)$ et définissons une application $\eta : N \longrightarrow G/M$ en posant, pour $\gamma_x \in N$,

$$\eta(\gamma_x) = xM.$$

Il est facile de vérifier que M et N respectent les hypothèses de la deuxième partie du théorème 7.12 et que η est un isomorphisme. Il reste à démontrer que η vérifie

l'équation (7.5). Si $f \in \text{Aut}_S G$ et $x \in G$, alors

$$\begin{aligned} \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}(xM) &= \eta \circ \gamma_f(\gamma_x) \\ &= \eta(\gamma_{f(x)}) \text{ (par la proposition 5.2)} \\ &= f(x)M \\ &= \tilde{f}(xM). \end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G.$$

Par conséquent, puisque les hypothèses de la deuxième partie du théorème 7.12 sont vérifiées,

$$\begin{aligned} H &= \{\lambda_x \gamma_y : \gamma_y \in N, x \in \eta(\gamma_y)^{-1}\} \\ &= L(M)R(P) \text{ (voir la justification plus haut)} \end{aligned}$$

est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.17. Posons $M = C(G)$ et $P = G$. Il est aisé de voir que les hypothèses du théorème 7.15 sont vérifiées. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H &= L(C(G))R(G) \\ &= R(G) \end{aligned}$$

est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. \square

7.4. APPLICATIONS

Nous déterminons ici sur quels autres groupes peuvent être représentés comme graphe de Cayley holomorphe, les graphes de Cayley orientés holomorphes basés sur les groupes énumérés au début du chapitre.

7.4.1. Groupe cyclique

Rappelons que pour trouver les groupes sur lesquels un graphe de Cayley orienté holomorphe $\Gamma = \Gamma(G, S)$ peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe, il faut trouver les sous-groupes réguliers normaux de $\text{Aut}\Gamma = \text{Hol}_S(G)$. Voici ces sous-groupes pour les graphes de Cayley basés sur un groupe cyclique Z_n :

Théorème 7.18. *Soit n un entier, $\Gamma = \Gamma(Z_n, S)$ un graphe de Cayley orienté sur Z_n et H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(Z_n)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Alors il existe un diviseur de n , m , tel que $U_S(Z_n) \subseteq 1 + mZ_n$, et $v \in U_S(Z_n)$ d'ordre n/m , donnant*

$$H = \bigcup_{j \in Z_n} L(mZ_n - j)\mu_{vj}.$$

Inversement, tout ensemble de cette forme est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(Z_n)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(Z_n)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Par le théorème 7.12, M est un sous-groupe normal de Z_n stabilisé par l'action de $\text{Aut}_S Z_n$, N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S Z_n$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow Z_n/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \quad \forall f \in \text{Aut}_S Z_n, \quad (7.6)$$

donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Soit m un diviseur de n qui engendre M , c'est-à-dire qui satisfait à $M = mZ_n$. Définissons $v \in U(Z_n)$ en posant $\eta(\mu_v) = 1 + M$. Alors v est d'ordre n/m et $N = \langle \mu_v \rangle$. De plus,

on déduit de l'équation (7.6) que, pour tout $u \in U_S(Z_n)$,

$$\begin{aligned}
 u + M &= \tilde{\mu}_u(1 + M) \\
 &= \eta \circ \gamma_{\mu_u} \circ \eta^{-1}(1 + M) \\
 &= \eta \circ \gamma_{\mu_u}(\mu_v) \\
 &= \eta(\mu_v) \\
 &= 1 + M.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u \in 1 + M = 1 + mZ_n, \forall u \in U_S(Z_n).$$

C'est dire que

$$U_S(Z_n) \subseteq 1 + mZ_n.$$

Finalement, la décomposition devient

$$\begin{aligned}
 H &= \{\lambda_{x\mu_{vj}} : j \in Z_n, x \in \eta(\mu_{vj})^{-1}\} \\
 &= \{\lambda_{x\mu_{vj}} : j \in Z_n, x \in -j + mZ_n\} \\
 &= \{\lambda_{im-j\mu_{vj}} : i, j \in Z_n\} \\
 &= \bigcup_{j \in Z_n} L(mZ_n - j)\mu_{vj}.
 \end{aligned}$$

Il est tout aussi facile de vérifier à l'aide de théorème 7.12, que tout sous-ensemble de cette forme est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(Z_n)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$.

□

7.4.2. Groupe simple

Un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur un groupe simple ne peut être représenté sur aucun autre groupe comme graphe de Cayley orienté holomorphe :

Théorème 7.19. *Soit G un groupe simple et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe sur G . Alors Γ se représente comme graphe de Cayley holomorphe uniquement sur G , c'est-à-dire*

$$\Gamma(H, T) \simeq \Gamma(G, S) \text{ et } \Gamma(H, T) \text{ holomorphe} \implies H \simeq G.$$

Ce résultat découle du lemme suivant :

Lemme 7.20. *Soit G un groupe simple et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Les sous-groupes normaux de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$ sont*

- $L(G)$;
- $R(G)$, si Γ est normal.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Par le théorème 7.12, M est un sous-groupe normal de G stabilisé par l'action de $\text{Aut}_S G$ et N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow G/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G, \quad (7.7)$$

et donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Si $M = G$ on obtient $H = L(G)$. Si $M = 1$, alors $N \simeq G$. Cela entraîne, par la proposition 5.6, que $N = \text{Inn}(G)$. Puisque $C(G/M) = 1$, les hypothèses du théorème 7.14 sont satisfaites. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H &= L(M)R(P) \\ &= L(1)R(G) \text{ (car } P = \gamma^{-1}(N) = \gamma^{-1}(\text{Inn}(G)) = G) \\ &= R(G). \end{aligned}$$

Notons que dans ce cas $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$, donc Γ est normal.

Inversement, il est facile de vérifier que chacun de ces sous-ensembles est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. □

7.4.3. Produit direct de deux groupes simples

Un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur un produit direct de deux groupes simples non abéliens ne peut être représenté sur aucun autre groupe comme graphe de Cayley orienté holomorphe :

Théorème 7.21. *Soit $G = G_1 \times G_2$ un produit direct de deux groupes simples non abélien et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur G . Alors Γ se représente uniquement sur G comme graphe de Cayley holomorphe, c'est-à-dire*

$$\Gamma(H, T) \simeq \Gamma(G, S) \text{ et } \Gamma(H, T) \text{ holomorphe} \implies H \simeq G.$$

Pour obtenir ce résultat nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.22. *Soit G_1, G_2 deux groupes simples non abéliens, $G = G_1 \times G_2$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté sur G . Les sous-groupes normaux de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$ sont :*

- $L(G)$
- $L(G_1 \times \mathbf{1})R(P)$, si $G_1 \times \mathbf{1}$ et P sont stabilisés par $\text{Aut}_S G$ et P est un sous-groupe de $N_G(S)$ égal à $\mathbf{1} \times G_2$ ou de la forme $\{(f(x_2), x_2) : x_2 \in G_2\}$, pour un monomorphisme $f : G_2 \longrightarrow G_1$;
- $L(\mathbf{1} \times G_2)R(P)$, si $\mathbf{1} \times G_2$ et P sont stabilisés par $\text{Aut}_S G$ et P est un sous-groupe de $N_G(S)$ égal à $G_1 \times \mathbf{1}$ ou de la forme $\{(x_1, f(x_1)) : x_1 \in G_1\}$, pour un monomorphisme $f : G_1 \longrightarrow G_2$;
- $R(G)$, si Γ est normal.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Par le théorème 7.12, M est un sous-groupe normal de G stabilisé par l'action de $\text{Aut}_S G$ et N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow G/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G, \quad (7.8)$$

donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Par le lemme 6.19, M est un des groupes suivants : $\mathbf{1}$, $G_1 \times \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \times G_2$ et G .

Si $M = G$ on obtient $H = L(G)$.

Si $M = \mathbf{1}$, on obtient, de la même manière que dans la preuve du lemme 7.20, $H = R(G)$, à condition que Γ soit normal.

Dans le cas où M est égal à $G_1 \times \mathbf{1}$ (le cas $M = \mathbf{1} \times G_2$ se traite de la même façon), $N \simeq G/M \simeq G_2$. Cela entraîne, grâce à la proposition 5.6, que $N < \text{Inn}(G)$. Puisque $C(G/M) \simeq C(G_2) = \mathbf{1}$, les hypothèses du théorème 7.14 sont vérifiées. Ainsi M et P sont stabilisés par $\text{Aut}_S G$, $M \cap P = \mathbf{1}$, $G = MP$ et $H = L(M)R(P)$.

Le lemme 6.21 implique que $P (= \gamma^{-1}(N) \simeq G_2)$ est un des groupes suivants : $\mathbf{1} \times G_2$, $H_1 \times \mathbf{1}$, où H_1 est un sous-groupe de G_1 isomorphe à G_2 , $\{(f(x_2), x_2) : x_2 \in G_2\}$, où f est une injection de G_2 dans G_1 . Le fait que $M \cap P = \mathbf{1}$ élimine la deuxième possibilité. Les deux autres cas donnent les groupes du point 2 de l'énoncé du théorème. Les groupes du point 3 de l'énoncé s'obtiennent dans le cas $M = \mathbf{1} \times G_2$.

Inversement, on vérifie sans difficulté, à l'aide du théorème 7.15, que tous ces groupes sont normaux dans $\text{Hol}_S(G)$ et qu'ils agissent régulièrement sur $V(\Gamma)$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.21 . Il suffit de voir que les groupes du lemme 7.22 sont isomorphes à G . Il est évident que $L(G)$ et $R(G)$ sont isomorphes à G . Les groupes $L(G_1 \times \mathbf{1})R(P)$ et $L(\mathbf{1} \times G_2)R(P)$ le sont aussi car, dans les deux cas, un des facteurs est isomorphe à G_1 et l'autre à G_2 , et les deux facteurs sont normaux. \square

7.4.4. Produit semi-direct de deux groupes simples

Nous étudions ici le cas des graphes de Cayley orientés holomorphes complets $\Gamma = \Gamma(G, S)$ basés sur un produit semi-direct de deux groupes simples. Rappelons que si G est complet, tout graphe de Cayley orienté holomorphe est complet. Par conséquent, les résultats de cette section s'appliqueront en particulier aux graphes de Cayley basés sur un groupe symétrique \mathfrak{S}_n , $n \neq 2, 6$.

Pour déterminer les groupes sur lesquels ces graphes peuvent être représentés comme graphe de Cayley holomorphe il faut, comme précédemment, trouver les sous-groupes normaux de $\text{Aut}\Gamma$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Remarquons que si Γ est un graphe de Cayley holomorphe complet et H est un sous groupe de $\text{Aut}\Gamma = \text{Hol}_S(G)$, alors $N = \{f \in \text{Aut}_S G : \exists x \in G \lambda_x f \in H\}$ est sous-groupe de $\text{Inn}(G)$. C'est pourquoi nous ferons l'hypothèse que $N \subseteq \text{Inn}(G)$ dans les résultats de cette section. Tout au long de cette section $P = \gamma^{-1}(N)$.

Pour résoudre ce problème nous diviserons les produits semi-directs $G = K \rtimes_{\theta} Q$ non triviaux en deux familles :

- K et Q sont non abéliens et $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ est un homomorphisme défini par $\theta_x = \gamma_{g(x)}$ pour un monomorphisme $g : Q \longrightarrow K$; Dans ce cas $G \simeq K \times Q$;
- K est quelconque, $Q = Z_p$, et $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ est non trivial ; rappelons que si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors $G \simeq K \times Z_p$ (voir la remarque 5.24) ;

À l'aide du lemme 5.16, il est aisé de voir que tout produit semi-direct non trivial est d'un de ces deux types.

7.4.4.1. Première famille

Si $G = K \rtimes_{\theta} Q$ est un produit semi-direct de la première famille, alors K et Q sont deux groupes simples non abéliens et $G \simeq K \times Q$. Il suffit donc dans ce cas d'appliquer le théorème 7.21.

Théorème 7.23. *Soit K et Q deux groupes simples finis non abéliens, $g : Q \longrightarrow K$ un monomorphisme, $\theta : Q \longrightarrow \text{Aut}K$ l'homomorphisme défini par $\theta_x = \gamma_{g(x)}$, $G = K \rtimes_{\theta} Q$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur G . Alors Γ se représente uniquement sur G comme graphe de Cayley holomorphe, c'est-à-dire*

$$\Gamma(H, T) \simeq \Gamma(G, S) \text{ et } \Gamma(H, T) \text{ holomorphe} \implies H \simeq G.$$

7.4.4.2. Deuxième famille

Voici les résultats pour la deuxième famille. On distingue deux cas. Tout d'abord, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$:

Théorème 7.24. Soit p un nombre premier, K un groupe simple fini, $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme non trivial vérifiant $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe. Alors Γ se représente uniquement sur G comme graphe de Cayley holomorphe, c'est-à-dire

$$\Gamma(H, T) \simeq \Gamma(G, S) \text{ et } \Gamma(H, T) \text{ holomorphe} \implies H \simeq G.$$

Ensuite, si $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$:

Théorème 7.25. Soit p un nombre premier, K un groupe simple fini, $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme vérifiant $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$, $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe. Si $N_G(S)$ contient un élément $(z, 1)$ d'ordre p tel que $\langle (z, 1) \rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$, alors Γ peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe sur un groupe non isomorphe à G , de la forme

$$H = K \rtimes_{\zeta} Z_p$$

avec $\zeta_1 = \gamma_w$, où w est un élément de K d'ordre p . Sinon Γ se représente uniquement sur G comme graphe de Cayley holomorphe, c'est-à-dire

$$\Gamma(H, T) \simeq \Gamma(G, S) \text{ et } \Gamma(H, T) \text{ holomorphe} \implies H \simeq G.$$

Pour faire la preuve de ces théorèmes nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.26. Soit p un nombre premier, K un groupe simple fini, $\theta : Z_p \longrightarrow \text{Aut}K$ un homomorphisme non trivial, $G = K \rtimes_{\theta} Z_p$ et $\Gamma = \Gamma(G, S)$ un graphe de Cayley orienté. Les sous-groupes normaux de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$ tel que $N \subseteq \text{Inn}(G)$ sont :

- $L(G)$;
- $R(G)$, si Γ est normal ;
- $\cup_{i \in Z_p} L(K \times i) \gamma_{(z, j)^{p-i}}$, si $N_G(S)$ contient un élément (z, j) d'ordre p qui n'appartient pas à $C(G)$ tel que $\langle (z, j) \rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$.

DÉMONSTRATION. Soit H un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. Par le théorème 7.12, M est un sous-groupe normal de G stabilisé par l'action

de $\text{Aut}_S G$, N est un sous-groupe normal de $\text{Aut}_S G$. De plus, il existe un isomorphisme $\eta : N \longrightarrow G/M$ vérifiant l'équation

$$\tilde{f} = \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}, \forall f \in \text{Aut}_S G, \quad (7.9)$$

donnant la décomposition

$$H = \{\lambda_x f : f \in N, x \in \eta(f)^{-1}\}.$$

Par la proposition 5.23, M est un des groupes suivants : 1 , $K \times 0$, G , ou $\{(g(x)^{-1}, x) : x \in Z_p\}$, si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et $g : Z_p \longrightarrow K$ est l'homomorphisme satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$.

Si $M = G$ on obtient $H = L(G)$.

Si $M = 1$, on obtient, de la même manière que dans la preuve du lemme 7.20, $H = R(G)$, à condition que Γ soit normal.

Supposons que $M = \{(g(x)^{-1}, x) : x \in Z_p\}$. Dans ce cas $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et $g : Z_p \longrightarrow K$ est l'homomorphisme satisfaisant à $\theta_x = \gamma_{g(x)}$. Rappelons d'abord que K ne peut être abélien car $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$ et par hypothèse $\text{Ker}(\theta) \neq Z_p$. Par les propositions 5.17 et 6.22 et la remarque 5.24, M est le centre de G et est isomorphe à Z_p , et $N \simeq G/M \simeq K$. Puisque K n'est pas abélien, $C(G/M) = 1$. De plus, par hypothèse, $N \subseteq \text{Inn}(G)$. Le théorème 7.14 s'applique donc et donne $H = L(M)R(P)$. Comme $N \simeq K \simeq G/C(G) \simeq \text{Inn}(G)$, on a $N = \text{Inn}(G)$, donc $\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}_S G$ et $P = \gamma^{-1}(N) = G$. Ainsi Γ est normal et $H = L(M)R(G)$ est égal à $R(G)$, car $M = C(G)$.

Si $M = K \times 0$, alors $N \simeq G/M \simeq Z_p$. Considérons l'automorphisme $f \in \text{Inn}_S(G)$ d'ordre p défini par $f = \eta^{-1}(K \times \{1\})$. Rappelons que si $\text{Im}(\theta) \not\subseteq \text{Inn}(K)$, alors $C(G) = 1$, donc $\text{Inn}(G) \simeq G$, et si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors $C(G) = \{(g(x)^{-1}, x) : x \in Z_p\}$, et K est un complément de $C(G)$ dans G . On peut donc dans les deux cas trouver un élément $(z, j) \in N_G(S)$ d'ordre p qui n'appartient pas à $C(G)$ tel que $f = \gamma_{(z,j)}$. Alors $\langle (z, j) \rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$ car $N = \langle \gamma_{(z,j)} \rangle$ est normal dans $\text{Aut}_S G$. De plus, $\eta(\gamma_{(z,j)}^k) =$

$K \times \{k\}$, donc

$$\begin{aligned}
 H &= \{\lambda_{(x,k)}\gamma_{(z,j)^i} : i \in Z_p, (x,k) \in \eta(\gamma_{(z,j)^i})^{-1}\} \\
 &= \{\lambda_{(x,k)}\gamma_{(z,j)^i} : i \in Z_p, (x,k) \in K \times \{p-i\}\} \\
 &= \{\lambda_{(x,k)}\gamma_{(z,j)^{p-i}} : i \in Z_p, (x,k) \in K \times \{i\}\} \\
 &= \cup_{i \in Z_p} L(K \times i)\gamma_{(z,j)^{p-i}}.
 \end{aligned}$$

Inversement, si (z, j) est un élément d'ordre p de $N_G(S)$ qui n'appartient pas à $C(G)$, tel que $\langle(z, j)\rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$, il est facile de voir que

$$M = K \times 0 \text{ et } N = \langle\gamma_{(z,j)}\rangle$$

satisfont aux hypothèses de la deuxième partie du théorème 7.12.

Si en plus on définit $\eta : N \longrightarrow G/M$ en posant, pour $k \in Z_p$,

$$\eta(\gamma_{(z,j)^k}) = K \times \{k\},$$

alors l'équation (7.9) est satisfaite. En effet, considérons $f \in \text{Aut}_S G$. Puisque $N \triangleleft \text{Aut}_S G$, alors $P = \gamma^{-1}(N) = \langle(z, j)\rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$. Donc il existe $0 \neq u \in Z_p$ tel que

$$f(z, j) = (z, j)^u.$$

Par conséquent, si $k \in Z_p$,

$$\begin{aligned}
 \eta \circ \gamma_f \circ \eta^{-1}(K \times \{k\}) &= \eta \circ \gamma_f(\gamma_{(z,j)^k}) \\
 &= \eta(\gamma_{f(z,j)^k}) \\
 &= \eta(\gamma_{(z,j)^{uk}}) \\
 &= K \times \{uk\}.
 \end{aligned}$$

De plus, $\sigma_{Z_p} \circ f|_{\mathbf{1} \times Z_p}$ est un isomorphisme de $\mathbf{1} \times Z_p$ dans Z_p . Puisque

$$\begin{aligned}
 \sigma_{Z_p} \circ f(\mathbf{1}, j) &= \sigma_{Z_p} \circ f(z, 0) + \sigma_{Z_p} \circ f(\mathbf{1}, j) \\
 &= \sigma_{Z_p} \circ f(z, j) \\
 &= uj,
 \end{aligned}$$

alors

$$\sigma_{Z_p} \circ f(\mathbf{1}, i) = ui, \forall i \in Z_p.$$

Par conséquent, si $k \in Z_p$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(K \times \{k\}) &= f(\mathbf{1}, k)(K \times 0) \\ &= K \times \{\sigma_{Z_p} \circ f(\mathbf{1}, k)\} \\ &= K \times \{uk\}. \end{aligned}$$

Donc l'équation (7.9) est satisfaite. Par le théorème 7.12,

$$\begin{aligned} H &= \{\lambda_{(x,k)} \gamma_{(z,j)^i} : i \in Z_p, (x,k) \in \eta(\gamma_{(z,j)^i})^{-1}\} \\ &= \cup_{i \in Z_p} L(K \times i) \gamma_{(z,j)^{p-i}}. \end{aligned}$$

est un sous-groupe normal de $\text{Hol}_S(G)$ agissant régulièrement sur $V(\Gamma)$. \square

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 7.24 et 7.25. Il suffit de déterminer ce à quoi sont isomorphes les groupes du lemme 7.26. Premièrement $L(G)$ et $R(G)$ sont isomorphes à G . Il reste à considérer le groupe $H = \cup_{i \in Z_p} L(K \times i) \gamma_{(z,j)^{p-i}}$, qui apparaît si $N_G(S)$ contient un élément (z, j) d'ordre p qui n'appartient pas à $C(G)$ tel que $\langle (z, j) \rangle$ est stabilisé par $\text{Aut}_S G$.

Remarquons d'abord que $L(K \times 0)$ est un sous-groupe normal de H isomorphe à K . Trouvons un complément de $L(K \times 0)$ dans H .

Si $j \neq 1$, considérons

$$\omega = \lambda_{(x,i)} \gamma_{(z,j)^{p-i}} \in H,$$

où $i = (1-j)^{-1}$, $x = \theta_i[(\prod_{k=0}^{p-i-1} \theta_{kj}(z))^{-1}]$. Alors $\omega = \lambda_{(x,i)} \gamma_{(z,j)^{p-i}} \rho_{(z,j)^{p-i}} = \lambda_{(1,1)} \rho_{(z,j)^{p-i}}$ est d'ordre p et n'appartient pas à $L(K \times 0)$. Donc $\langle \omega \rangle$ est un complément de $L(K \times 0)$ et $H = L(K \times 0) \langle \omega \rangle \simeq K \rtimes_{\zeta} Z_p$ où $\zeta_1 = \theta_1$. Donc $H \simeq G$.

Si $j = 1$, considérons $\omega = \lambda_{(x,i)} \gamma_{(z,1)^{p-i}} \in H$, où $i = p-1$, $x = \theta_{p-1}(z)^{-1}$. Alors $\omega = \lambda_{(1,0)} \rho_{(z,1)} = \rho_{(z,1)}$ est d'ordre p , n'appartient pas à $L(K \times 0)$ et commute avec les éléments de ce groupe. Donc $\langle \omega \rangle$ est un complément de $L(K \times 0)$ qui est normal dans H et $H = L(K \times 0) \langle \omega \rangle \simeq K \times Z_p$. Si $\text{Im}(\theta) \subseteq \text{Inn}(K)$, alors $G \simeq K \times Z_p \simeq H$. Sinon

$G \neq K \times Z_p$, car par la proposition 5.23, $K \times 0$ est le seul sous-groupe normal de G , donc $G \neq H$. \square

7.4.4.3. Groupe symétrique

Rappelons que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes_{\theta} Z_2$, où $\theta_1 = \gamma_w$ et $w \in \mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ d'ordre 2. De plus, si $n \neq 4$, le groupe alterné \mathfrak{A}_n est simple, et si $n \neq 6$, le groupe \mathfrak{S}_n est complet. Par conséquent, si $n \neq 4, 6$, le théorème 7.25 de la section précédente s'applique aux graphes de Cayley orientés holomorphes basés sur un groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

Théorème 7.27. *Soit $n \neq 4, 6$ un entier et $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{S}_n, S)$ un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur \mathfrak{S}_n . Si $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ contient une permutation impaire d'ordre 2 stabilisée par $\text{Aut}_S \mathfrak{S}_n$, alors Γ peut être représenté comme graphe de Cayley holomorphe sur un groupe non isomorphe à \mathfrak{S}_n , de la forme*

$$H = \mathfrak{A}_n \rtimes_{\zeta} Z_2$$

avec $\zeta_1 = \gamma_w$, où w est une permutation paire d'ordre 2. Sinon Γ se représente uniquement sur \mathfrak{S}_n comme graphe de Cayley holomorphe.

Remarque 7.28. Le résultat reste vrai pour $n = 4$ avec l'ajout suivant : s'il existe un sous-groupe normal P de $N_G(S)$ qui est isomorphe à \mathfrak{S}_3 , Γ peut être représenté sur le groupe

$$H = V \times S_3$$

où V dénote le groupe de Klein. Notons que les sous-groupes P de \mathfrak{S}_4 isomorphes à \mathfrak{S}_3 sont de la forme $F_k = \{x \in \mathfrak{S}_4 : x \text{ fixe } k\}$.

Remarque 7.29. Le théorème est aussi vrai pour un graphe de Cayley orienté holomorphe basé sur \mathfrak{S}_6 s'il est complet.

Remarque 7.30. Puisque $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ est égal à $\text{Aut}_S T_S$ (le groupe d'automorphismes du graphe de transpositions de S), la condition " $N_{\mathfrak{S}_n}(S)$ contient une permutation impaire d'ordre 2 stabilisée par $\text{Aut}_S \mathfrak{S}_n$ " est équivalente à la condition "le centre de $\text{Aut}_S T_S$ contient une permutation impaire d'ordre 2".

CONCLUSION

Beaucoup reste à faire avant d'être en mesure de démontrer que la vaste majorité des graphes de Cayley sont holomorphes. Nos principales contributions à la solution de ce problème sont notre résultat qui montre que les graphes de Cayley engendrés par des transpositions sont tous holomorphes, à l'exception de ceux dont le graphe de transpositions possède une composante carrée ou complète d'ordre supérieur à 2, ainsi que les outils que nous avons employés pour y parvenir, soit le concept de graphe de Cayley localement holomorphe, les localisations et les déviateurs.

Nos contributions les plus notables au problème d'isomorphie sont la solution complète de ce problème pour les graphes de Cayley holomorphes basés sur un groupe cyclique, un groupe simple, un groupe symétrique, un produit direct de deux groupes simples non abéliens, et un produit semi-direct non trivial de deux groupes simples (pour les graphes de Cayley holomorphes complets) et, encore une fois, les résultats développés pour y arriver, soit la caractérisation des isomorphismes d'un graphe de Cayley quelconque dans un graphe de Cayley holomorphe, et notre caractérisation des sous-groupes d'action régulière de l'holomorphe relatif $\text{Hol}_5(G) = L(G)\text{Aut}_5G$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Alspach, *Point-symmetric graphs and digraphs of prime order and transitive permutation groups of prime degree*, J. Combinatorial Theory Ser. B 15 (1973), 12–17.
- [2] B. Alspach, T. D. Parsons, *Isomorphism of circulant graphs and digraphs*, Discrete Math. 25 (1979), 97–108.
- [3] L. Baibai, *Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 29 (1977), 329–336.
- [4] L. Babai, C. D. Godsil, *On the Automorphism groups of almost all Cayley graphs*, Europ. J Combinatorics, (3)1982, 9–15
- [5] Y.G. Baik, Y. Feng, H.S. Sim, M. Xu, *On the normality of Cayley graphs of abelian groups*, Algebra Colloq. 5 (1998), 297–304.
- [6] Y.G. Baik, Y. Feng, H.S. Sim, *The normality of Cayley graphs of finite abelian groups with valency 5*, Systems Sci. Math. Sci. 13 (2000), 425–431.
- [7] J.-C. Bermond, K. Takako, S. Pérennes, *Gossiping in Cayley graphs by packets*, Combinatorics and computer science (Brest, 1995), 301–315, Lecture Notes in Comput. Sci., 1120, Springer, Berlin, 1996.
- [8] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.
- [9] E. Dobson, D. Witte, *Transitive permutation groups of prime-squared degree*, J. Algebraic Combin. 16 (2002), 43–69.
- [10] Dixon, John D, *Groups with a Cayley graph isomorphic to a hypercube*, Bull. Austral. Math. Soc. 55 (1997), 385–393.
- [11] S.F. Du, R.J. Wang, M.Y. Xu, *On the normality of Cayley digraphs of groups of order twice a prime*, Australas. J. Combin. 18 (1998), 227–234.

- [12] X.G. Fang, C.H. Li, J. Wang, M.Y. Xu, *On cubic Cayley graphs of finite simple groups*, Algebraic and topological methods in graph theory (Lake Bled, 1999), Discrete Math. 244 (2002), 67–75.
- [13] Y. Feng, J.H. Kwak, R. Wang, *Automorphism groups of 4-valent connected Cayley graphs of p -groups*, Chinese Ann. Math. Ser. B 22 (2001), 281–286.
- [14] C.D. Godsil, *On Cayley graph isomorphisms*, Ars Combin. 15 (1983), 231–246.
- [15] C.D. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics Vol. 207 (2001)
- [16] D. Gorenstein, *Finite Simple Groups : An Introduction to Their Classification*, Plenum Press, New York and London, 1982.
- [17] M.-C. Heydemann, J.-C. Meyer, D. Sotteau, J. Opatrny, *Forwarding indices of consistent routings and their complexity*, Networks 24 (1994), 75–82.
- [18] A. Joseph, *The isomorphism problem for Cayley digraphs on groups of prime-squared order*, Discrete Math. 141 (1995), 173–183.
- [19] S. Lakshmivarahan, Jung Sing Jwo, S. K. Dhall, *Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups : a survey*, Parallel Comput. 19 (1993), 361–407.
- [20] C.H. Li, *On isomorphisms of connected Cayley graphs*, Discrete Math. 178 (1998), 109–122.
- [21] C.H. Li, *On isomorphisms of finite Cayley graphs—a survey*, Discrete Math. 256 (2002), 301–334.
- [22] Z.P. Lu, M.Y. Xu, *On the normality of Cayley graphs of order pq* , Australas. J. Combin. 27 (2003), 81–93.
- [23] J. Morris, *Isomorphic Cayley graphs on nonisomorphic groups*, J. Graph Theory 31 (1999), 345–362.
- [24] C. Praeger, *Finite normal edge-transitive Cayley graphs*, Bull. Austral. Math. Soc. 60 (1999), 207–220.
- [25] J.J. Rotman, *An introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, 1995.

- [26] G. Sabidussi, *On a class of fixed-point-free graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 800–804.
- [27] J. Lauri, R. Scapellato, *Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction*, Cambridge University Press, 2003.
- [28] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math, (54)1932, 150-168.
- [29] M. Y. Xu, *Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs*, Graph theory (Lake Bled, 1995), Discrete Math. 182 (1998), 309–319.