Université de Montréal

Quelques résultats d'existence de points asymptotiquement critiques

par

Jean-François Perreault

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Orientation mathématiques fondamentales

novembre 2004

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Quelques résultats d'existence de points asymptotiquement critiques

présenté par

Jean-François Perreault

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octavian Cornea
(président-rapporteur)

Marlène Frigon
(directeur de recherche)

Iosif Polterovich
(membre du jury)

Mémoire accepté le:
07-12-04

RÉSUMÉ

Nous étendons la théorie des points asymptotiquement critiques en développant des arguments de type minimax pour des suites de fonctionnelles continûment différentiables. Après avoir défini les conditions de compacité ss-$(PS)_c^*$ et s-$(PS)_c^*$ pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$, nous établissons, grâce à une notion particulière de couple borné inférieurement et une généralisation de l'enlacement entre paires d'ensembles, de nouveaux résultats d'existence de points asymptotiquement critiques.

Nous généralisons par la suite la théorie développée dans le cas où les fonctionnelles de la suite sont semi-continues inférieurement. Ceci nous permet d'une part d'énoncer une théorie nouvelle de points asymptotiquement critiques pour des fonctions semi-continues. D'autre part, nous montrons que la théorie des points critiques pour une fonctionnelle unique est un cas particulier de la théorie des points asymptotiquement critiques. Nous unifions alors les deux théories.

MOTS-CLÉS

Points asymptotiquement critiques, conditions de compacité, enlacement, résultats de minimax.

ABSTRACT

We extend the theory of asymptotically critical points for sequences of continuous differentiable functionals on real Banach spaces. Using recent compactness conditions, a particular notion of lower bound for a couple and a generalization of linking between sets, we obtain new existence results of asymptotically critical points.

Then we generalize this theory to sequences of lower semi-continuous functionals and we establish existence results of asymptotically critical points in this case. Moreover, we show that this theory generalizes the usual theory of critical points using the Palais-Smale-star condition.

KEY WORDS

Asymptotically critical points, compactness conditions, linking, minimax results.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier ma directrice de recherche, Marlène Frigon, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux. Je désire également souligner la rigueur, qualité remarquable, dont elle fait preuve.

Je souhaite remercier mes parents et ma conjointe, Geneviève, qui m'ont toujours supporté et encouragé et qui ont rendu tout cela possible.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

La théorie des points critiques a pour objet l'étude des points critiques, c'est-à-dire les points où la différentielle d'une fonction s'annule. Cette théorie joue un rôle prépondérant dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Pour un problème donné, nous associons une fonctionnelle dont les points critiques sont des solutions du problème. Selon l'espace sur lequel est défini cette fonctionnelle et les propriétés de celle-ci, nous pouvons dans certaines situations garantir l'existence de points critiques et ainsi obtenir l'existence de solutions.

Pour des fonctionnelles de classe C^1, l'une des méthodes utilisées pour démontrer l'existence de points critiques consiste à employer des arguments de type *minimax* **[Ra]**, **[W]**. Nous étudions alors la valeur réelle c déterminée par

$$c := \inf_{B \in \mathcal{F}} \sup_{u \in B} h(\eta(u)),$$

où h est la fonctionnelle, B est un sous-ensemble d'un espace de Banach X et $\mathcal{F}$ est, par exemple, une famille d'ensembles vérifiant une propriété appropriée. Selon le contexte, l'objectif consiste à déterminer si la valeur c est une valeur critique. Ici, trois *ingrédients* entrent souvent en jeu et seront utilisés dans ce mémoire. D'abord, il est commun de considérer des sous-ensembles de X qui s'enlacent **[F1]**, **[Sc]**. L'enlacement ne dépend pas de la fonctionnelle h, mais sa présence se démontre en utilisant le degré de Brouwer, voir **[K]**, **[Z]**, qui nécessite que les ensembles considérés soient homéomorphes à des sous-ensembles d'un espace de dimension finie. Pour montrer l'existence de points critiques, on se dote aussi d'un lemme de déformation et on demande finalement que la fonction h satisfasse une condition de compacité du type Palais-Smale garantissant que c soit une valeur critique.

Or, si nous nous proposons d'étudier les points critiques d'une fonctionnelle h continue ou semi-continue inférieurement, nous devons spécifier ce que nous entendons par *différentielle* et par *point critique.* Pour des fonctionnelles continues ou semi-continues sur un espace métrique complet, il existe également une théorie de points critiques basée sur la notion de *pente faible* **[C3]**, **[CDM]**, **[DM]**, **[F2]**. Cette situation généralise le cas continûment différentiable. Il importe d'insister sur le fait que la fonctionnelle n'est pas nécessairement différentiable et donc ces arguments peuvent être utilisés pour étudier des équations différentielles dont la fonctionnelle associée n'est que continue. Toutefois, nous ne pouvons généralement rien affirmer si la fonctionnelle h n'est ni différentiable, ni continue ou semi-continue. Dans cette situation, un argument de type minimax n'existe pas.

Le but de ce mémoire est de développer une théorie de type minimax permettant d'étudier des suites de fonctionnelles $(h_n)_n$ et une fonctionnelle particulière h. Les résultats présentés aux chapitres 5 et 6 sont entièrement nouveaux et généralisent plusieurs résultats connus de la théorie des points critiques. Ici, la continuité de la fonctionnelle h est à priori inconnue ; c'est-à-dire qu'elle peut être continûment différentiable, continue, semi-continue ou même quelconque. Dans l'optique où h peut être associée à une équation différentielle, il est parfois naturel d'approcher un problème initial (P) dont la fonctionnelle h est associée par une suite de problèmes (P_n) dont les fonctionnelles associées h_n, elles, sont, par exemple, continues ou différentiables **[Ro]**. Cette idée élémentaire justifie à elle seule l'intérêt d'une méthode de minimax pour des couples $((h_n)_n, h)$, c'est-à-dire la paire constituée de la suite $(h_n)_n$ et de la fonctionnelle h.

L'ouvrage sera divisé en trois parties. Dans la première, nous aborderons le cas où la fonctionnelle h est de classe C^1 sur un espace de Banach X et nous supposerons donné une famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de sous-espaces de Banach de dimension finie telle que

$$X_\alpha \subset X_\beta, \forall\, \beta \geq \alpha, \text{ et } X = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha}$$

où Λ est un ensemble ordonné filtrant à droite. Lorsque $\Lambda = \mathbb{N}$, nous définissons la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$ par

$$h_n = h_{|X_n}.$$

Cette situation a été étudiée par plusieurs **[LW]**, **[C2]**, **[F2]**, **[P]** et **[St1]**. Dans **[LW]**, Li et Willem ont obtenu l'existence de points critiques pour la fonctionnelle h en étudiant le comportement asymptotique de la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$. Remarquons par la densité de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ dans X et la définition des fonctionnelles h_n que celles-ci et la fonctionnelle h sont très liées. Cette façon de procéder offre certains avantages notamment dans l'étude d'équations aux dérivées partielles associées à des fonctionnelles fortement indéfinies.

Comme déjà mentionné, il est commun de démontrer l'existence de points critiques en utilisant le degré de Brouwer. Lorsque l'espace X se décompose en somme directe de sous-espaces non triviaux comme $X = X^1 \oplus X^2$, Brézis et Nirenberg **[BN]** ont réussi à montrer l'existence de points critiques pour h en supposant, par exemple, que l'espace X^1 soit de dimension finie. Les travaux de Li et Willem **[LW]** et Struwe **[St2]** permettent d'omettre cette hypothèse lorsqu'il existe une famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ comme mentionnée plus haut. Les résultats obtenus dépendent alors d'une condition de compacité, notée $(PS)_c^*$, que nous traiterons au chapitre 2. Ces arguments ont aussi été utilisés par Corvellec **[C2]** dans le cas où la fonctionnelle h est continue. Nous présenterons également quelques généralisations de Frigon **[F2]** et Picard **[P]**.

Nous aborderons en deuxième lieu des couples $\big((h_n)_n, h\big)$ dans lesquels les fonctionnelles h_n sont de classe C^1 sur un espace de Banach réel X. Il importe de retenir que nous n'imposons pas que la fonctionnelle h soit différentiable, continue ou semi-continue. De plus, nous ne demandons pas que les fonctionnelles h_n convergent vers la fonctionnelle h ou même que la suite $(h_n)_n$ soit convergente.

Cette simple remarque montre aussi que la théorie présentée à la partie précédente et celle-ci sont à priori distinctes l'une de l'autre. En fait, nous pourrions omettre la fonctionnelle h, puisque nous nous intéresserons au comportement asymptotique de la suite de fonctionnelles. Pour ces raisons, nous considérerons la notion de *points asymptotiquement critiques* pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ plutôt que celle de points critiques pour h ou h_n puisqu'en général ces points ne se correspondent pas. Un *point asymptotiquement critique* sera défini dans ce cas-ci comme un point $u \in X$ tel qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et il existe une suite $(u_k)_k$ dans X telles que

$$u_k \to u, \; h_{n_k}(u_k) \to h(u) \text{ et } h'_{n_k}(u_k) \to 0.$$

Nous présenterons à la section 3.2 quelques exemples de couples pouvant être considérés et quelques illustrations simples de ces différentes notions.

Lorsque les fonctionnelles h_n sont de classe C^1, cette théorie de points asymptotiquement critiques a été introduite par Marino et Mugnai **[MM1]**, **[MM2]** en 2001. En utilisant des outils topologiques comme la catégorie relative **[Sz]**, ils ont pu obtenir l'existence de solutions pour des inégalités variationnelles *inversées* **[MM2]**.

Une particularité de ce qui sera fait dans ce mémoire est que nous n'aurons pas recours à la catégorie relative ; nous obtiendrons de nouveaux résultats d'existence de points asymptotiquement critiques en utilisant des arguments de type minimax et l'enlacement entre paires d'ensembles dans le cas où les fonctionnelles $(h_n)_n$ sont continûment différentiables. Le théorème 5.3.2 se veut notre résultat principal qui est aussi nouveau puisqu'il n'existe pas, à notre connaissance, d'équivalent qui utilise ce type d'arguments en présence de tels enlacements. De ce résultat découlera également plusieurs nouveaux corollaires. Nous verrons que lorsqu'il est donné, pour tout n, deux paires d'ensembles (B_n, A_n) et (Q_n, P_n) telles que (B_n, A_n) *enlace* (Q_n, P_n) *via* $\Gamma_{h_n}(A_n)$ au sens introduit par Frigon **[F1]** et lorsque certaines inégalités sont vérifiées, alors tout point d'accumulation c de la suite

$(c_n)_n$ définie par

$$c_n = \inf_{\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)} \sup h_n(\eta(1, B_n))$$

est un point asymptotiquement critique si le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait une condition de compacité au niveau c que nous noterons ss-$(PS)^*_c$. En considérant un enlacement particulier et une notion particulière de couple borné inférieurement, nous montrerons au théorème 5.3.5 l'existence de trois points asymptotiquement critiques. Ces résultats seront démontrés en utilisant un lemme de déformation nouveau pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ qui est basé sur un lemme de déformation quantitatif pour des fonctionnelles de classe C^1 de Willem [**W**]. Nous obtiendrons, à partir de ce lemme de déformation, un théorème d'intervalle non critique et une propriété de déformation qui nous permettront d'établir les résultats d'existence de points asymptotiquement critiques.

En parallèle à la condition ss-$(PS)^*_c$, nous présenterons également une condition *plus faible*, introduite dans [**MM1**], que nous noterons s-$(PS)^*_c$. Nous présenterons pour cette condition un lemme de déformation et un résultat général (théorème 5.4.1) similaire au thérorème 5.3.2 sous des hypothèses plus faibles. Nous verrons par contre que nous obtenons de façon générale moins de points asymptotiquement critiques avec la condition plus faible s-$(PS)^*_c$ qu'avec la condition ss-$(PS)^*_c$. Ces résultats sont aussi nouveaux et montrent qu'il possible, même avec une condition plus faible, d'obtenir l'existence de points asymptotiquement critiques.

Nous aborderons finalement au chapitre 6 le cas où les fonctionnelles de la suite $(h_n)_n$ sont semi-continues inférieurement. D'une part, nous généralisons la théorie exposée aux chapitres 3, 4 et 5 pour le cas continûment différentiable. Les résultats sont donc également nouveaux. Toutefois, cette théorie de points asymptotiquement critiques pour des fonctionnelles semi-continues est entièrement nouvelle et il n'existe pas, jusqu'à ce jour, d'équivalent dans la littérature. Cette théorie offre de nombreux avantages. En particulier, nous verrons que lorsqu'une fonctionnelle continûment différentiable $h : X \to \mathbb{R}$ et une famille de sous-espaces $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont données, nous pouvons considérer le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ où $h_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est définie par

$$h_n(u) = \begin{cases} h(u) & \text{si } u \in X_n, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les résultats de points critiques obtenus dans la première partie (chapitre 2) s'obtiennent alors comme corollaires de cette théorie beaucoup plus générale. Nous unifions alors la théorie des points aymptotiquement critiques et la théorie des points critiques avec une condition de Palais-Smale étoile. Cette théorie semble aussi très prometteuse pour démontrer l'existence de solutions à certains types d'équations diffirentielles.

Nous rappelons d'abord brièvement les notions qui seront utilisées tout au long du mémoire telles que l'enlacement entre paires d'ensembles, la théorie des points critiques pour une fonctionnelle de classe C^1 et la notion de pente faible de Degiovanni et Marzocchi **[DM]**. Nous rappelons finalement à l'annexe A la théorie du degré de Brouwer qui sera entre autres utilisée à la section 5.3.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

Il importe de rappeler quelques définitions, résultats et notions qui seront utilisés par la suite. Plusieurs ouvrages traitent des notions que nous rappelons brièvement ici et le lecteur intéressé pourra consulter entre autres **[St2]**, **[W]**.

1.1. DÉFINITONS ET NOTATIONS

Dans ce chapitre, X désigne un espace de Banach réel.

Si S est un sous-ensemble de X et $\delta > 0$ dans $\mathbb{R}$, nous noterons par $B(S, \delta)$ l'ensemble $\{u \in X \mid d(u, S) \leq \delta\}$ où, par définition,

$$d(u, S) := \inf_{v \in S} \|u - v\|.$$

Définition 1.1.1. Soit $h : X \to \mathbb{R}$. Nous disons que h est *différentiable (au sens de Fréchet)* au point u de X s'il existe L une application linéaire continue de X dans $\mathbb{R}$, i.e. $L \in X'$, telle que

$$\lim_{v \to u} \frac{h(v) - h(u) - \langle L, (v - u) \rangle}{\|v - u\|} = 0.$$

Nous disons que L est la *dérivée de h au point u*. Nous notons $L = h'(u)$.

Définition 1.1.2. Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable en tout point u de X. Nous disons que h est de *classe* C^1 si la fonction de X dans X' qui à $u \in X$ associe $h'(u)$ est continue. Nous écrivons $h \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Définition 1.1.3. Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1. Nous dirons que $u \in X$ est un *point critique* de h si $h'(u) = 0$. Nous noterons pour $c \in \mathbb{R}$

$$h^c := \{u \in X \mid h(u) \leq c\}$$

et par K_c l'*ensemble critique de niveau* c ; c'est-à-dire

$$K_c := \{u \in X \mid h(u) = c, h'(u) = 0\}.$$

Définition 1.1.4. Nous disons qu'une fonction $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *semi-continue inférieurement en* $u \in X$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x tel que

$$h(y) \geq h(x) - \epsilon, \text{ pour tout } y \in U.$$

Nous disons que h est *semi-continue inférieurement* si pour tout $u \in X$, h est semi-continue inférieurement en u.

1.2. Enlacement entre paires d'ensembles

Nous rappelons une définition classique d'un enlacement entre deux ensembles. Nous suivons, par exemple, Struwe [**St2**].

Définition 1.2.1. Soit Q un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach X, B un sous-ensemble de X avec bord ∂B tel que $Q \cap \partial B = \emptyset$. Nous disons que ∂B *enlace* Q *au sens classique* si pour toute application $\xi \in C(X, X)$ telle que $\xi_{|\partial B} = id$, nous avons $\xi(B) \cap Q \neq \emptyset$. Plus généralement, si ∂B et Q sont comme précédemment et si Γ est un sous-ensemble de $C(X, X)$, alors nous dirons que ∂B *enlace* Q *au sens classique par rapport à* Γ, si $\xi(B) \cap Q \neq \emptyset$ pour tout $\xi \in \Gamma$ avec $\xi_{|\partial B} = id$.

Exemple 1.2.2. Soit $\bar{u} \in X$ avec $\bar{u} \neq 0$. Supposons $0 < \rho < \|\bar{u}\|$ et soient

$$Q = \{u \in X \mid \|u\| = \rho\},$$
$$B = \{s\bar{u} \mid 0 \leq s \leq 1\},$$
$$\partial B = \{0, \bar{u}\}.$$

Alors ∂B enlace Q. (Voir figure 1.1(a))

Exemple 1.2.3. Soit $X = X_1 \oplus X_2$ une décomposition en deux sous-espaces fermés X_1, X_2, où $dim(X_2) < \infty$. Considérons

$$\begin{aligned} Q &= X_1, \\ B &= B_2(R) = \{u \in X_2 \mid \|u\| \leq R\}, \\ \partial B &= \{u \in X_2 \mid \|u\| = R\}. \end{aligned}$$

Alors ∂B enlace Q. (Voir figure 1.1(b))

Dans **[F1]**, Frigon généralise certains types d'enlacement en admettant des paires d'ensembles qui s'enlacent. En plus de récupérer les enlacements au sens classique, nous en obtenons de nombreux autres.

Considérons un espace métrique complet (X, d). Pour un ensemble $A \subset X$, nous noterons par

$$\Gamma(A) := \Big\{\eta \in C([0,1] \times X, X) \mid \eta = id \text{ sur } \{0\} \times X \cup [0,1] \times A\Big\}. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.4. Soient $A \subset B \subset X, P \subset Q \subset X$ des fermés tels que $B \cap Q \neq \emptyset$, $A \cap Q = \emptyset$ et $B \cap P = \emptyset$. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma(A)$ un sous-ensemble non vide. Nous disons que (B, A) *enlace* (Q, P) *via* Γ_0 si pour tout $\eta \in \Gamma_0$ un des énoncés suivants est vérifié :

(1) $\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset$;

(2) $\eta(]0,1[, B) \cap P \neq \emptyset$.

Si $\Gamma_0 = \Gamma(A)$, nous dirons simplement que (B, A) *enlace* (Q, P).

Définition 1.2.5. Soient $A \subset B \subset X, P \subset Q \subset X$ des fermés tels que $B \cap Q \neq \emptyset$, $A \cap Q = \emptyset$ et $B \cap P = \emptyset$. On dit qu'il y a *enlacement entre* (B, A) *et* (Q, P) ou que (B, A) *et* (Q, P) *s'enlacent* si (B, A) enlace (Q, P) ou si (Q, P) enlace (B, A).

Remarque 1.2.6. Nous pouvons remarquer que si ∂B enlace Q au sens classique, alors $(B, \partial B)$ enlace $(Q, \emptyset)$. La définition classique ne permet pas d'avoir $A = \emptyset$ ou $P \neq \emptyset$.

Remarque 1.2.7. Pour simplifier et éviter des problèmes, nous supposerons toujours que si $\eta \in \Gamma(A)$, alors

$$\sup_{(t,x)\in[0,1]\times X} d(x, \eta(t,x)) < \infty.$$

Nous utilisons la théorie du degré de Brouwer (voir annexe A) pour montrer qu'il y a enlacement entre les paires d'ensembles suivantes.

Exemple 1.2.8. Soit $X = X_1 \oplus X_2$ où X_1, X_2 sont des espaces de Banach non triviaux tels que $dim(X_i) < \infty$ pour $i = 1$ ou 2 et $r, R > 0$. Alors il y a enlacement

- entre $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ et $\big(B_2(R), S_2(R)\big)$; (Voir figure 1.1(c))
- entre $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ et $\big(X_2, \emptyset\big)$;
- entre $\big(X_1, \emptyset\big)$ et $\big(X_2, \emptyset\big)$;

où $B_i(r)$ et $S_i(r)$ sont respectivement la boule fermée et la sphère centrées en 0 et de rayon r dans X_i, $i = 1, 2$.

Exemple 1.2.9. Soit $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \mathbb{R}e$ un espace de Banach où $e \neq 0$, $dim(X_i) < \infty$ pour $i = 1$ ou 2. Notons pour $i = 1$ et 2 et $r > 0$,

$$B_{i,e}(x, r) = \big\{v \in X_i \oplus \mathbb{R}e \;\big|\; \|v - x\| \leq r\big\},$$

$$S_{i,e}(x, r) = \big\{v \in X_i \oplus \mathbb{R}e \;\big|\; \|v - x\| = r\big\},$$

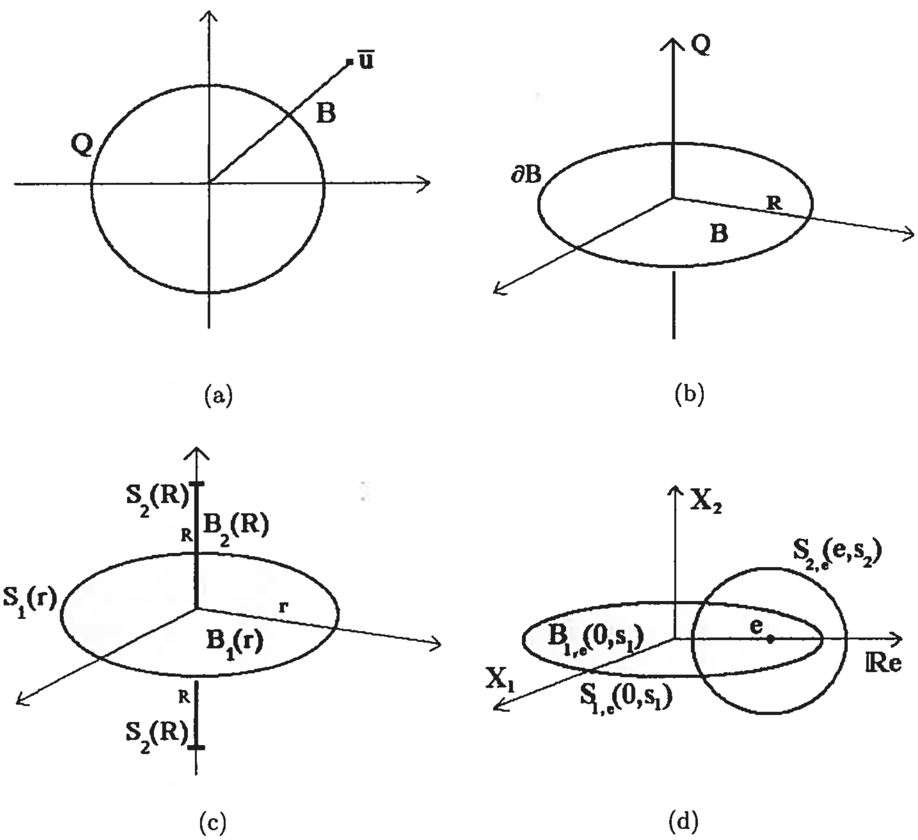
$$X_{i,e}^{+} = \big\{v + te \;\big|\; v \in X_i,\ t \geq 0\big\}.$$

Alors il y a enlacement

- entre $\big(B_{1,e}(0, s_1), S_{1,e}(0, s_1)\big)$ et $\big(S_{2,e}(e, s_2), \emptyset\big)$; (Voir figure 1.1(d))
- entre $\big(S_{1,e}(0, s_1), \emptyset\big)$ et $\big(B_{2,e}(e, s_2), S_{2,e}(e, s_2)\big)$;
- entre $\big(B_{1,e}(0, s_1), S_{1,e}(0, s_1)\big)$ et $\big(X_2, \emptyset\big)$;
- entre $\big(S_{1,e}(0, s_1), \emptyset\big)$ et $\big(X_{2,e}^{+}, X_2\big)$;
- entre $\big(e + B_1(s_1), e + S_1(s_1)\big)$ et $\big(X_{2,e}^{+}, X_2\big)$

où $s_1, s_2 > 0$ et $|s_1 - s_2| < \|e\| < s_1 + s_2$.

FIG. 1.1. Exemples d'enlacements



Remarque 1.2.10. Mentionnons que dans **[LW]**, Li et Willem utilisent un enlacement local en 0 dans $X = X_1 \oplus X_2$ qui implique qu'il y a enlacement entre $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ et $\big(B_2(s), S_2(s)\big)$. Dans **[MM2]**, Marino et Mugnai considèrent une décomposition $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, avec $dim(X_1 \oplus X_2) < \infty$ et les ensembles

$$
\begin{aligned}
B &= \Big\{u \in X_1 \oplus X_2 \mid \|u\| \leq R\Big\},\\
A &= \Big\{u \in X_1 \oplus X_2 \mid \|u\| = R\Big\} \cup \Big\{u \in X_1 \mid \|u\| \leq R\Big\},\\
Q &= \Big\{u \in X_2 \oplus X_3 \mid \|u\| = \rho\Big\}.
\end{aligned}
$$

pour $0 < \rho < R$. Il est aisé de voir que (B, A) enlace $(Q, \emptyset)$.

1.3. Théorie des points critiques

La théorie des points critiques a connu un essor considérable depuis les travaux d'Ambrosetti et Rabinowitz [**AR**]. Voir aussi [**Ra**]. Cette théorie joue, comme celle des points fixes, un rôle prépondérant lorsque que nous voulons démontrer l'existence d'une solution pour une équation différentielle. La façon de procéder consiste à associer au problème donné une fonctionnelle dont les points critiques sont des solutions de l'équation différentielle étudiée.

Dans le cas où la fonctionnelle considérée est de classe C^1 et est définie sur un espace de Banach, plusieurs résultats d'existence de points critiques et donc de solutions sont connus, on pourra consulter [**K**], [**Ra**] [**St2**] ou [**W**]. Les preuves de ces résultats sont souvent basées sur des lemmes de déformation. Le lemme de déformation suivant est présenté dans le livre de Willem [**W**] et jouera un rôle clé par la suite.

Lemme 1.3.1 (Lemme de déformation quantitatif). *Soit X un espace de Banach, $h \in C^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon, \delta > 0$ tels que*

$$\|h'(u)\| \geq 8\epsilon/\delta, \quad \forall u \in h^{-1}\big([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\big) \cap B(S, 2\delta).$$

Alors il existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tel que

(a) $\eta(t,u) = u$, *si* $t = 0$ *ou si* $u \notin h^{-1}\big([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\big) \cap B(S,2\delta)$;

(b) $h(\eta(\cdot,u))$ *est décroissant,* $\forall u \in X$;

(c) $h(\eta(t,u)) < c$, $\forall u \in h^c \cap B(S,\delta)$, $\forall t \in]0,1]$;

(d) $\eta(1, h^{c+\epsilon} \cap S) \subset h^{c-\epsilon}$;

(e) $\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta$, $\forall u \in X, \forall t \in [0,1]$.

Dans les applications, le lemme précédent est utilisé pour établir l'existence d'une suite $(u_n)_n$ de X telle que $h'(u_n) \to 0$ et $h(u_n) \to c$. La définition suivante donne une condition de compacité qui permettra de déduire l'existence d'un point critique.

Définition 1.3.2. Soit X un espace de Banach, $h \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. La fonction h satisfait la *condition de Palais-Smale au niveau* c, notée $(PS)_c$, si toute suite $(u_n)_n$ de X telle que

$$h(u_n) \to c \text{ et } h'(u_n) \to 0$$

possède une sous-suite convergente.

En combinant le lemme de déformation avec la condition de Palais-Smale précédente, nous pouvons démontrer les théorèmes d'existence de points critiques suivants. Pour une démonstration, on pourra consulter **[W]**.

Théorème 1.3.3 (Principe général de minimax). *Soit X un espace de Banach. Soit M_0 un sous-espace fermé d'un espace métrique M et soit $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Définissons*

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C(M, X) \mid \gamma_{|M_0} \in \Gamma_0\right\}$$

Sous l'hypothèse

$$\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} h(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} h(\gamma_0(u)),$$

il existe une suite $(u_n)_n$ de X satisfaisant

$$h(u_n) \to c, \quad h'(u_n) \to 0.$$

En particulier, si h satisfait $(PS)_c$, alors c est une valeur critique de h.

Par convention, nous posons

$$\inf(\emptyset) = +\infty \text{ et } \sup(\emptyset) = -\infty.$$

Théorème 1.3.4. *Supposons donné deux paires de sous-ensembles (B, A) et (Q, P) telles que*

(a) (B, A) enlace (Q, P) ;

(b) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sup h(A) < a = \inf h(Q) \leq \sup h(B) = b < \inf h(P);$$

(c) h satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \in [a, b]$.

Posons

$$c := \inf_{\eta \in \Gamma_h(A)} \sup h(\eta(1, B)).$$

Alors c est une valeur critique pour h.

Ce résultat peut être plus général. Nous n'avons pas à supposer les inégalités strictes ; voir **[F1]**.

Des résultats de multiplicité peuvent aussi être obtenus, voir **[BN]**, **[F1]** ou **[LL]**.

Théorème 1.3.5. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$ avec X_1, X_2 des espaces de Banach non triviaux et $dim(X_1) < \infty$. Supposons que*

(a) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $r, R > 0$ tels que

$$\sup h(S_1(r)) < a \leq \inf h(B_2(R)) \leq \sup h(B_1(r)) \leq b < \inf h(S_2(R));$$

(b) h satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(c) h est bornée inférieurement.

Alors h possède au moins trois points critiques.

1.4. Pente faible

En 1994, Degiovanni et Marzocchi **[DM]** ont introduit la notion de *pente faible* permettant d'appliquer et de généraliser la théorie des points critiques à des fonctionnelles continues et à des fonctionnelles semi-continues inférieurement.

Nous rappelons brièvement les définitions et résultats de **[DM]** et **[CDM]** qui seront utilisés au chapitre 6.

Définition 1.4.1. Soit (M, d) un espace métrique complet de métrique d. Soient $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in M$. Nous appelons la *pente faible de h en u*, notée $|dh|(u)$, le suprémum des $\sigma \geq 0$ tel qu'il existe $\delta > 0$ et une application continue

$$H : B(u, \delta) \times [0, \delta] \to M$$

tels que pour tout $v \in B(u,\delta)$ et pour tout $t \in [0,\delta]$ tel que $d(H(v,t),v) \leq t$,

$$h(H(v,t)) \leq h(v) - \sigma t.$$

Définition 1.4.2. Soit $h : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement. Nous définissons la fonction *graphe*

$$G_h : epi(h) \to \mathbb{R}$$

par $G_h(u,\xi) = \xi$ où $epi(h) = \{(u,\xi) \in M \times \mathbb{R} \mid h(u) \leq \xi\}$ est muni de la métrique

$$\tilde{d}\big((u,\xi),(v,\mu)\big) = \sqrt{d(u,v)^2 + (\xi-\mu)^2}. \tag{1.4.1}$$

Muni de cette métrique, $epi(h)$ est fermé dans $M \times \mathbb{R}$ et donc complet. Nous avons aussi que G_h est une fonction lipschitzienne continue de constante 1. Ceci implique alors que

$$|dG_h|(u,\xi) \leq 1 \text{ pour tout } (u,\xi) \in epi(h).$$

Proposition 1.4.3. *Soit $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soient $u \in M$, $\xi \in \mathbb{R}$. Alors*

$$|dG_h|(u,h(u)) = \begin{cases} \dfrac{|dh|(u)}{\sqrt{1+\big(|dh|(u)\big)^2}} & si\ |dh|(u) < +\infty, \\ 1 & si\ |dh|(u) = +\infty. \end{cases}$$

Nous exploitons la continuité de G_h pour définir, via l'épigraphe de h, la pente faible pour une fonction h semi-continue inférieurement. La définition suivante est alors conséquente avec la proposition 1.4.3.

Tout au long, nous noterons par $dom(h)$ l'ensemble $\{u \in M \mid h(u) < \infty\}$.

Définition 1.4.4. Soit $h : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et soit $u \in dom(h)$. Nous posons

$$|dh|(u) = \begin{cases} \dfrac{|dG_h|(u,h(u))}{\sqrt{1-\big(|dG_h|(u,h(u))\big)^2}} & \text{si } |dG_h|(u,h(u)) < 1, \\ +\infty & \text{si } |dG_h|(u,h(u)) = 1. \end{cases}$$

Remarque 1.4.5. La fonction $|dh|$ est semi-continue inférieurement. De plus, si M est une variété de Finsler de classe C^1 et h est une fonction de classe C^1, alors

$$|dh|(u) = \|h'(u)\|, \quad \forall u \in M.$$

La prochaine proposition de **[DM]** sera utilisée au chapitre 6.

Proposition 1.4.6. *Soit A un sous-ensemble ouvert convexe d'un espace de Banach X, soient $h_0 : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement et convexe, $h_1 : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $h = h_0 + h_1$. Alors pour tout $(u, \xi) \in dom(h) \times \mathbb{R}$ avec $h(u) < \xi$, nous avons que*

$$|dG_h|(u, \xi) = 1.$$

Nous aurons besoin d'un lemme de déformation qui soit valide pour des fonctions continues. Le théorème 2.14 de **[CDM]** qui suit sera utilisé au chapitre 6.

Théorème 1.4.7. *Soit $h : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $c \in \mathbb{R}$. Supposons que h satisfait la condition $(PS)_c$. Alors, pour $\bar{\epsilon} > 0$, N un voisinage ouvert de K_c et $\lambda > 0$ donnés, il existe $\epsilon > 0$ et $\eta : [0,1] \times M \to M$ continue avec*

(a) $\eta(t, u) = u$, *si* $t = 0$ *ou si* $u \notin h^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(b) $h(\eta(t, u)) \leq h(u)$;

(c) $\eta(1, h^{c+\epsilon} \setminus N) \subset h^{c-\epsilon}$;

(d) $d(\eta(t, u), u) \leq \lambda$.

où

$$K_c = \{u \in h^{-1}(c) \mid |dh|(u) = 0\}.$$

Remarque 1.4.8. Une analyse de la preuve du théorème 2.14 de **[CDM]** montre que l'hypothèse *h satisfait la condition $(PS)_c$* peut être remplacée par *il existe μ, $\sigma > 0$ tels que ,*

$$u \in h^{-1}([c - 2\mu, c + 2\mu]) \cap B(M \setminus N, 2\mu) \Rightarrow |dh|(u) > \sigma.$$

Chapitre 2

EXISTENCE DE POINTS CRITIQUES AVEC LA CONDITION $(PS)^*_{\mathrm{C}}$

Dans [**BN**], Brezis et Nirenberg ont établi l'existence de points critiques d'une fonctionnelle de classe C^1 en présence d'enlacement local qui, comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, est un cas particulier de l'enlacement entre $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ et $\big(B_2(s), S_2(s)\big)$, où $X = X_1 \oplus X_2$ avec X_1, X_2 des espaces de Banach non triviaux dont au moins un est de dimension finie. La démonstration de cet enlacement repose sur le degré de Brouwer, voir proposition A.5. Toutefois, lorsque les espaces X_1 et X_2 sont tous deux de dimension infinie, il n'y a pas d'enlacement entre $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ et $\big(B_2(s), S_2(s)\big)$, faisant en sorte que les résultats développés ne sont plus valides.

À la fin du siècle dernier, plusieurs mathématiciens se sont attaqués au problème d'appliquer la théorie des points critiques à des problèmes en dimension infinie et plus précisément à des fonctionnelles indéfinies, c'est-à-dire associées à un opérateur dont les sous-espaces associés aux valeurs propres négatives et aux valeurs propres positives sont tous de dimension infinie ; voir [**B**], [**LL**], [**St1**] ou [**Sz**].

Une méthode similaire à celle utilisée dans la théorie des équations différentielles consiste à étudier le problème en dimension infinie en l'approximant au mieux par des problèmes en dimension finie. Dans [**LW**], Li et Willem développent et approfondissent une condition du type Palais-Smale, la condition $(PS)_c^*$, qui permet d'étudier ce cas. En considérant une famille de sous-espaces de dimension finie d'un espace de Banach, nous pouvons étudier les propriétés d'une suite de fonctionnelles obtenues en restreignant la fonctionnelle à l'étude aux différents sous-espaces. Cette méthode a depuis peu permis d'obtenir plusieurs résultats d'existence et de multiplicité. Corvellec **[C3]** l'a utilisé pour généraliser la théorie aux fonctionnnelles continues. Frigon **[F2]** et Picard **[P]** ont utilisé l'enlacement entre paires d'ensembles pour de nouveau généraliser certains de ces résultats.

La condition de compacité utilisée, $(PS)_c^*$, est plus forte que la condition $(PS)_c$ rappelée au chapitre 1. Une telle théorie ne peut donc pas être utilisée lorsque la fonctionnelle étudiée ne satisfait pas la condition $(PS)_c$.

2.1. La condition $(PS)_c^*$

Soit X un espace de Banach réel. Considérons une famille $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de sous-espaces fermés de dimension finie de X telle que

$$X_\alpha \subset X_\beta \text{ si } \alpha \leq \beta \text{ et } X = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha} \tag{2.1.1}$$

où Λ est un ensemble ordonné filtrant à droite. Pour $h : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1, nous posons $h_\alpha : X_\alpha \to \mathbb{R}$ la restriction de h à X_α.

Définition 2.1.1. Une suite $(\alpha_n)_n \subset \Lambda$ est *admissible* si, pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que dès que $n \geq m$, alors $\alpha_n \geq \alpha$.

Nous utiliserons la condition de compacité suivante :

Définition 2.1.2. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $h \in C^1(X, \mathbb{R})$. La fonction h satisfait la *condition de Palais-Smale étoile au niveau c*, notée $(PS)_c^*$, si toute suite $(u_{\alpha_n})_n$ de X telle que $(\alpha_n)_n \subset \Lambda$ est admissible et satisfaisant

$$u_{\alpha_n} \in X_{\alpha_n},\ h_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \to c,\ h'_{\alpha_n}(u_{\alpha_n}) \to 0,$$

contient une sous-suite qui converge vers un point critique de h.

Remarque 2.1.3. Un point critique trouvé via la condition de Palais-Smale étoile est donc un point critique de h et plus précisément appartient à l'ensemble critique de niveau c de h, K_c, défini au chapitre 1.

Nous rappelons un résultat qui exprime le fait que la condition $(PS)_c^*$ est plus forte que $(PS)_c$.

Proposition 2.1.4. *Soit $h \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Si h satisfait $(PS)_c^*$, alors h satisfait $(PS)_c$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite dans X telle que

$$h(u_n) \to c, \ h'(u_n) \to 0.$$

Par la densité de $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ dans X et la continuité de h et h', nous pouvons choisir $(v_{\alpha_n})_n$ une suite dans X avec $(\alpha_n)_n$ admissible telle que

$$v_{\alpha_n} \in X_{\alpha_n}, \ \|v_{\alpha_n} - u_n\| \leq \frac{1}{n}, \ |h(u_n) - h(v_{\alpha_n})| \leq \frac{1}{n}, \ \|h'(u_n) - h'(v_{\alpha_n})\| \leq \frac{1}{n}.$$

Comme

$$0 \leq \|h'_{\alpha_n}(v_{\alpha_n})\| \leq \|h'(v_{\alpha_n})\| \to 0,$$

nous avons que $h'_{\alpha_n}(v_{\alpha_n}) \to 0$ et aussi $h(v_{\alpha_n}) \to c$. La condition $(PS)_c^*$ implique que la suite $(v_{\alpha_n})_n$ possède une sous-suite convergeant vers un point critique de h et, conséquemment, $(u_n)_n$ aussi. □

2.2. Lemme de déformation

Le lemme de déformation suivant découle directement du lemme 1.3.1.

Lemme 2.2.1. *Soient $h \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$. Soit N un voisinage ouvert de K_c. Supposons que h satisfait $(PS)_c^*$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\beta \in \Lambda$ tel que pour tout $\alpha > \beta$, il existe une déformation continue*

$$\eta_\alpha : [0,1] \times X_\alpha \to X_\alpha$$

telle que

(a) $\eta_\alpha(0, u) = u, \quad \forall u \in X_\alpha$;

(b) $h(\eta_\alpha(t,u)) < c, \quad \forall t \in]0,1], \forall u \in h_\alpha^c \setminus N$;

(c) $\eta_\alpha(1, h_\alpha^{c+\epsilon} \setminus N) \subset h_\alpha^{c-\epsilon}$;

(d) $\|\eta_\alpha(t,u) - u\| \leq \rho, \quad \forall t \in [0,1], \forall u \in X_\alpha$.

Démonstration. Nous avons que la condition $(PS)_c^*$ implique qu'il existe $\beta \in \Lambda$, $\gamma > 0$ et $\sigma > 0$ tels que, pour tout $\alpha \geq \beta$,

$$u \in h_\alpha^{-1}\big([c-2\gamma, c+2\gamma]\big) \cap B(X \setminus N, 2\gamma) \Rightarrow \|h'_\alpha(u)\| \geq \sigma > 0.$$

On applique alors le lemme 1.3.1 avec

$$\delta = \min\{\gamma, \rho\} \text{ et } \epsilon = \min\{\gamma, \delta\sigma/8\}.$$

□

Dans **[F2]**, Frigon présente un résultat de déformation d'un intervalle dont les extrémités sont possiblement des points critiques. C'est un résultat combinant un lemme de déformation similaire au précédent et un théorème d'intervalle non critique que nous rappelons ici.

Théorème 2.2.2 (Propriété de déformation). *Soient X vérifiant (2.1.1), $h : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 et $a < b \in \mathbb{R}$. Supposons que h vérifie $(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a,b]$, et que $K_c = \emptyset$ pour tout $c \in]a,b[$. Alors, pour tous $\lambda, \lambda_0 > 0$, il existe $\beta \in \Lambda$ et $\epsilon, \gamma > 0$ tels que, pour tout $\alpha \geq \beta$, il existe $\eta_\alpha : [0,1] \times X_\alpha \to X_\alpha$ satisfaisant*

(a) $\|u - \eta_\alpha(t,u)\| \leq \gamma$, $\forall (t,u)$;

(b) $h_\alpha(\eta_\alpha(t,u)) \leq h_\alpha(u)$;

(c) si $u \in h_\alpha^{-1}\big([a-\epsilon, b+\epsilon]\big) \setminus B(S_b^\alpha, \lambda)$, *alors*

$$\eta_\alpha(1,u) \in h_\alpha^{-1}\big(]-\infty, a-\epsilon]\big) \cup \big(h_\alpha^{-1}\big(]-\infty, a+\epsilon]\big) \cap B(S_a^\alpha, \lambda)\big);$$

(d) $\|u - \eta_\alpha(t,u)\| \leq \lambda$ *si* $\{u, \eta_\alpha(t,u)\} \in h_\alpha^{-1}\big([c-\epsilon, c+\epsilon]\big)$ *pour* $c \in \{a,b\}$;

avec $S_c^\alpha = B(K_c, \lambda_0) \cap X_\alpha$ *pour* $c \in \{a,b\}$.

2.3. Résultats d'existence et de multiplicité

Nous retrouvons dans la littérature plusieurs résultats d'existence et de multiplicité avec la condition $(PS)_c^*$. Nous présentons un résultat de Frigon **[F2]**. Ce résultat en plus d'être un résultat d'existence est aussi un résultat de localisation ; c'est-à-dire que nous pouvons parfois affirmer dans quel ensemble se situe le point critique trouvé.

Théorème 2.3.1. *Soient X vérifiant (2.1.1) et $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et deux paires (B, A) et (Q, P) tels que*

$$\sup h(A) \leq a = \inf h(Q) \leq \sup h(B) = b \leq \inf h(P),$$

$d(A, Q) > 0$, $d(B, P) > 0$ et il existe $\beta \in \Lambda$ tel que, pour tout $\alpha > \beta$, $\left(B \cap X_\alpha, A \cap X_\alpha\right)$ et $\left(Q \cap X_\alpha, P \cap X_\alpha\right)$ s'enlacent.

Si h vérifie $(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a, b]$, alors au moins un des énoncés suivants est vérifié :

(1) $a = b$ et $d(K_a, Q) = d(K_b, B) = 0$;

(2) $a < b$ et $K_c \neq \emptyset$ pour certain $c \in \,]a, b[$;

(3) $a < b$ et $d(K_a, Q) = 0$ ou $d(K_b, B) = 0$.

En spécifiant les ensembles qui s'enlacent et en ajoutant certaines hypothèses, nous pouvons obtenir plus d'un point critique. Sous des enlacements généraux comme dans le théorème précédent nous pouvons obtenir deux points critiques, voir Frigon **[F2]**.

En considérant un enlacement particulier et en supposant que h soit bornée inférieurement (resp. supérieurement), nous pouvons obtenir un résultat de trois points critiques. Le résultat suivant généralise un résultat de Li et Willem **[LW]**. Pour une démonstration, voir **[F2]** ou **[P]**.

Théorème 2.3.2. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$ un espace de Banach vérifiant (2.1.1) et soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Supposons que* *(a) il existe r et $R > 0$ tels que*

$$\sup h(S_1(r)) < \inf h(B_2(R)) \leq \sup h(B_1(r)) < \inf h(S_2(R));$$

(b) h est bornée inférieurement ;

(c) h vérifie $(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(d) h envoie les bornés sur les bornés.

Alors h possède au moins trois points critiques.

Chapitre 3

THÉORIE DES POINTS ASYMPTOTIQUEMENT CRITIQUES

La notion de points asymptotiquement critiques et les conditions de compacité que nous présentons ont été introduites en 2001 par Marino et Mugnai **[MM1]** pour pouvoir les utiliser avec des ∇-théorèmes de **[MS]**. Contrairement aux fonctionnelles h_α considérées au chapitre précédent, ici, la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$ n'est pas en général la restriction d'une fonctionnelle à des sous-espaces de dimension finie mais simplement une suite de fonctionnelles définies sur le même espace que la fonctionnelle h. La différence entre la théorie du chapitre 2 est majeure car, de plus, nous n'imposons pas que la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$ converge vers la fonctionnelle h faisant en sorte que les fonctionnelles h_n et la fonctionnelle h peuvent être très différentes et très faiblement liées entre elles. La fonctionnelle h intervient peu puisqu'ici nous nous intéresserons au comportement asymptotique de la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$.

Pour ce chapitre et les deux chapitres suivants, nous demanderons que, pour tout n, la fonctionnelle h_n soit de classe C^1 alors que la fonctionnelle h pourra, par exemple, ne pas être différentiable ou même continue. Cependant, les points *critiques* obtenus de cette façon ne seront pas en général des points critiques au sens du chapitre 1 de la fonctionnelle h. Nous conclurons ce chapitre en présentant différents exemples.

3.1. Définitions

Soit $(h_n)_n$ une suite de fonctionnelles à valeur réelle de classe C^1 définies sur un espace de Banach X et considérons une fonctionnelle $h : X \to \mathbb{R}$.

Définition 3.1.1. Nous disons que $u \in X$ est un *point asymptotiquement critique* pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$, s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et il existe une suite $(u_k)_k$ dans X telles que

$$u_k \to u,\ h_{n_k}(u_k) \to h(u) \text{ et } h'_{n_k}(u_k) \to 0.$$

Nous disons aussi que $h(u)$ est une *valeur* (ou *niveau*) *asymptotiquement critique* pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Nous noterons par AK_c l'ensemble des points asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ de niveau c.

Remarque 3.1.2. Le point u n'est pas en général un point critique pour la fonction h. Aussi, nous pouvons complètement éliminer la fonction h en disant que la valeur critique est la limite de $(h_{n_k}(u_k))_k$. Mais, dans ce cas, il serait souhaitable d'ajouter l'hypothèse supplémentaire que, pour tout $u \in X$ satisfaisant la définition modifiée, la limite de $(h_{n_k}(u_k))_k$ ne dépend pas de $(n_k)_k$ et de $(u_k)_k$.

Définition 3.1.3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Nous disons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la *condition s-$(PS)^*_c$*, si pour toute suite $(u_k)_k$ de X telle que

$$h_k(u_k) \to c,\ h'_k(u_k) \to 0,$$

il existe une sous-suite $(k_j)_j$ dans $\mathbb{N}$ et il existe $u \in X$ tels que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$.

Définition 3.1.4. Soit $c \in \mathbb{R}$. Nous disons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la *condition ss-$(PS)^*_c$*, si pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et toute suite $(u_k)_k$ de X telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to c,\ h'_{n_k}(u_k) \to 0,$$

il existe une sous-suite $(k_j)_j$ de $(n_k)_k$ et il existe $u \in X$ tels que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$.

Nous utilisons ici les notations s et ss pour spécifier si nous utilisons les suites $(h_k(u_k))_k$ ou les sous-suites $(h_{n_k}(u_k))_k$. Les conditions s-$(PS)_c^*$ et ss-$(PS)_c^*$ lient implicitement la suite $(h_n)_n$ et la fonctionnelle h en ce sens que, lorsqu'elles sont satisfaites, nous devons avoir $h(u) = c$ pour u la limite de la sous-suite convergente de $(u_k)_k$ dans les définitions. Il peut très bien se produire toutefois que nous ayons un point critique de h (au sens du chapitre 1) qui ne soit pas un point asymptotiquement critique pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$, voir section 3.2.

Remarque 3.1.5. Il est toutefois utile de remarquer qu'à partir des définitions, nous avons ce qui suit :

- La condition ss-$(PS)_c^*$ implique la condition s-$(PS)_c^*$.
- Plus précisément, le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait ss-$(PS)_c^*$ si et seulement si, par définition, pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$, le couple $\big((h_{n_k})_k, h\big)$ satisfait la condition s-$(PS)_c^*$.
- Lorsqu'une sous-suite $(n_k)_k$ est donnée telle que nous avons que le couple $\big((h_{n_k})_k, h\big)$ possède un point asymptotiquement critique, alors le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ possède aussi ce même point asymptotiquement critique.
- S'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que le couple $\big((h_{n_k})_k, h\big)$ satisfait s-$(PS)_c^*$, alors le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait également s-$(PS)_c^*$.

De façon générale, il est plus aisé de travailler avec la condition ss-$(PS)_c^*$ puisque nous sommes naturellement amenés à considérer des sous-suites de $(h_n)_n$ plutôt que la suite entière. Il est bien connu que pour une fonctionnelle de classe C^1 satisfaisant la condition $(PS)_c$ son ensemble de points critiques de niveau c, K_c, est compact. Un résultat analogue est valable dans ce contexte. Il a été établi par Marino et Mugnai **[MM1]**.

Proposition 3.1.6. *Soit $c \in \mathbb{R}$ et supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)_c^*$. Alors AK_c est compact.*

Démonstration. Soit $(z_i)_i$ une suite dans AK_c. Alors, pour tout i, il existe une suite strictement croissante $(n_k^i)_k \in \mathbb{N}$ et il existe $(u_k^i)_k \in X$ telles que $u_k^i \to z_i$, $h'_{n_k^i}(u_k^i) \to 0$ et $h_{n_k^i}(u_k^i) \to h(z_i) = c$.

Ainsi, pour tout i, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|u^i_{k_i} - z_i\| \leq \frac{1}{i}, \ \left\|h'_{n^i_{k_i}}(u^i_{k_i})\right\| \leq \frac{1}{i}, \ \left|h_{n^i_{k_i}}(u^i_{k_i}) - c\right| \leq \frac{1}{i}.$$

Puisque k_i peut être choisi aussi grand que désiré, nous pouvons supposer que $n^i_{k_i} < n^{i+1}_{k_{i+1}}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

En posant $m_i = n^i_{k_i}$ et $v_i = u^i_{k_i}$, nous obtenons que

$$\|v_i - z_i\| \leq \frac{1}{i}, \ h_{m_i}(v_i) \to c, \ h'_{m_i}(v_i) \to 0.$$

Donc, par ss-$(PS)^*_c$ avec $(m_i)_i$ et $(v_i)_i$, il existe une suite strictement croissante $(i_j)_j$ dans $\mathbb{N}$ et il existe $z \in X$ tels que $v_{i_j} \to z$ et $h(z) = c$. Alors $z \in AK_c$, ce qui montre la compacité de AK_c car $z_{i_j} \to z$. □

3.2. Exemples

Nous donnons plusieurs exemples simples montrant la généralité des couples pouvant être considérés et des conditions de compacité.

Nous spécifions d'abord que les points critiques de h ne correspondent pas en général avec les points asymptotiquement critiques pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Exemple 3.2.1. Soit $X = \mathbb{R}$, $h(u) = u$ et $h_n(u) = u^2/2+1/n$ (voir figure 3.1(a)). Le point $u = 0$ n'est pas un point critique de h. Il est toutefois asymptotiquement critique pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ en considérant $(n_k)_k = (k)_k$ et $(u_k)_k = (0)_k$. De plus, les conditions s-$(PS)^*_c$ et ss-$(PS)^*_c$ sont satisfaites pour tout $c \in \mathbb{R}$. En effet, si $c \neq 0$, alors les conditions sont trivialement satisfaites puisque pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$, il n'existe pas de suite $(u_k)_k$ de X telle que

$$h_{n_k}(u_k) \to c \text{ et } h'_{n_k}(u_k) \to 0.$$

Si $c = 0$, soit $(n_k)_k$ une suite strictement croissante et $(u_k)_k$ dans X telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to 0 \text{ et } h'_{n_k}(u_k) = u_k \to 0.$$

Alors $(u_k)_k$ est convergente ce qui implique que ss-$(PS)^*_0$ et donc aussi s-$(PS)^*_0$ sont satisfaites.

À l'opposé, nous pouvons avoir des points critiques de h qui ne soient pas asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Exemple 3.2.2. Considérons $X = \mathbb{R}$, $h(u) = u^2(u+1)^2(u-1)^2$ et $h_n(u) = u^2 + 1/n$ (voir figure 3.1(b)). Nous avons $AK_0 = \{0\}$ tandis que $K_0 = \{1, 0, -1\}$.

Un des avantages d'étudier un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ et les conditions ss-$(PS)^*_c$ et s-$(PS)^*_c$ est que nous n'avons pas besoin de demander que la fonctionnelle h soit de classe C^1, qu'elle soit différentiable et même qu'elle soit continue. Voici quelques situations simples :

Exemple 3.2.3. Soit $X = \mathbb{R}$ et considérons $h(u) = |u|$ et $h_n(u) = |u|^{1+1/n}$ pour tout n (voir figure 3.1(c)). Il est facile de constater que les conditions ss-$(PS)^*_0$ et s-$(PS)^*_0$ sont satisfaites même si h n'est pas différentiable en 0. En effet, soit $(n_k)_k$ une suite strictement croissante et $(u_k)_k$ une suite dans $\mathbb{R}$ telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to 0, \;\; h'_{n_k}(u_k) = (1 + 1/n_k)|u_k|^{1/n_k} \to 0.$$

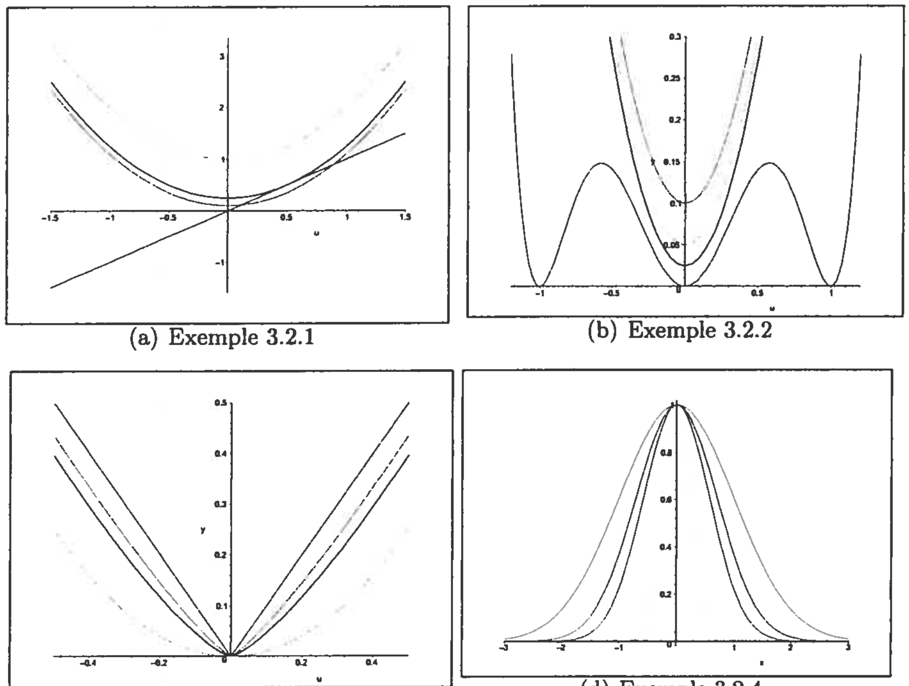
Donc, en particulier, $(u_k)_k$ converge vers 0 qui est un point asymptotiquement critique.

Exemple 3.2.4. Considérons

$$h(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $h_n(u) = e^{-\frac{nu^2}{2}}$ (voir figure 3.1(d)). On vérifie aisément que les conditions ss-$(PS)^*_1$ et s-$(PS)^*_1$ sont satisfaites. Remarquons que h n'est pas continue en 0 et qu'il n'est en aucun cas demandé, dans les définitions 3.1.3 et 3.1.4, que la sous-suite convergente trouvée, $(u_{k_j})_j$, soit telle que $h(u_{k_j}) \to h(u)$. Remarquons aussi que la condition s-$(PS)_0$ n'est pas satisfaite.

FIG. 3.1. Exemples de couples $\big((h_n)_n, h\big)$



(a) Exemple 3.2.1

(b) Exemple 3.2.2

(c) Exemple 3.2.3

(d) Exemple 3.2.4

Les prochains exemples expriment le fait que la condition s-$(PS)^*_c$ quoique similaire à ss-$(PS)^*_c$ peut être plus facile à vérifier.

Exemple 3.2.5. Soit $X = \mathbb{R}^2$. Considérons la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x,y) = (x+y)^3.$$

Il est aisé de constater que la fonction h ne satisfait pas la condition $(PS)_0$ en considérant la suite $(u_k)_k = ((k,-k))_k$. Définissons $h_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$h_{2n}(x,y) = h(x,y),$$
$$h_{2n-1}(x,y) = h(x,-y).$$

Le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ ne satisfait donc pas ss-$(PS)^*_0$ en considérant de nouveau $(u_k)_k = ((k,-k))_k$ et $(n_k)_k = (2k)_k$, par exemple. Montrons toutefois qu'il satisfait s-$(PS)^*_0$.

Soit $(u_k)_k$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ avec $u_k = (x_k, y_k)$ telle que

$$h_k(u_k) \to 0 \text{ et } h'_k(u_k) \to 0.$$

Nous devons montrer que $(u_k)_k$ possède une sous-suite convergeant vers u telle que $h(u) = 0$. Puisque $h'_k(u_k) \to 0$, nous devons avoir simultanément que

$$\alpha_k := (x_k + y_k)^2 \to 0, \quad \beta_k := (x_k - y_k)^2 \to 0. \tag{3.2.1}$$

En effet, puisque si $h'_k(u_k) \to 0$, alors

$$h'_{2k}(u_{2k}) \to 0, \quad h'_{2k-1}(u_{2k-1}) \to 0.$$

D'où, (3.2.1) se produit. Or, comme somme de suites convergentes, nous avons que

$$\frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \to 0$$

avec

$$\frac{\alpha_k + \beta_k}{2} = \|u_k\|^2.$$

Donc $(u_k)_k$ converge vers 0 et la condition $s\text{-}(PS)_0^*$ est satisfaite.

Exemple 3.2.6. Considérons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) & \text{si cette série converge,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$. Si, par exemple,

$$f_{2j}(x) = x + \frac{1}{2^{2j}},$$
$$f_{2j-1}(x) = -x + \frac{1}{2^{2j-1}},$$

alors

$$h'_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j = \begin{cases} -1 & \text{si n est impair,} \\ 0 & \text{si n est pair.} \end{cases}$$

Donc, pour toute suite $(x_n)_n$, $(h'_n(x_n))_n$ ne converge pas vers 0 et alors, la condition $s\text{-}(PS)_c^*$ est satisfaite pour tout réel c. Si pour une certaine suite strictement croissante $(n_k)_k$ de $\mathbb{N}$ et une certaine suite $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}$, nous avons que $h'_{n_k}(x_k) \to 0$, alors, pour k suffisamment grand, $h'_{n_k}(x_k) = 0$ et donc que n_k est pair. Ceci implique alors que

$$h_{n_k}(x_k) = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{2^{2j}} \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = 1/3$$

et donc que la condition $ss\text{-}(PS)^*_{1/3}$ n'est pas vérifiée. Par ailleurs, la condition $ss\text{-}(PS)^*_c$ est vérifiée pour tout $c \neq 1/3$.

Exemple 3.2.7. Considérons $h : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} u^2(x) + u(x)\, dx & \text{si } u \in L^1(\mathbb{R}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et, pour tout n, $h_n : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définies par

$$h_n(u) = \int_{-n}^{n} u^2(x) + u(x)\, dx.$$

Soient $(n_k)_k$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$ et $(u_k)_k$ une suite dans $L^2(\mathbb{R})$ telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to 0 \text{ et } h'_{n_k}(u_k) \to 0. \tag{3.2.2}$$

Un calcul simple donne que

$$\langle h'_{n_k}(u_k), u_k \rangle = h_{n_k}(u_k) + \int_{-n_k}^{n_k} u_k^2(x)\, dx.$$

Or, $|\langle h'_{n_k}(u_k), u_k \rangle| \leq \|h'_{n_k}(u_k)\| \|u_k\|_{L^2}$ et ainsi

$$\|u_k\|^2_{L^2} \leq |h_{n_k}(u_k)| + \|h'_{n_k}(u_k)\| \|u_k\|_{L^2}. \tag{3.2.3}$$

L'hypothèse (3.2.2) implique, par définition, que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, si $n_k \geq m$,

$$|h_{n_k}(u_k)| \leq \epsilon \text{ et } \|h'_{n_k}(u_k)\| \leq \epsilon.$$

Donc, (3.2.3) devient $\|u_k\|^2_{L^2} \leq \epsilon + \epsilon \|u_k\|_{L^2}$ ou, de façon équivalente,

$$\frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2} \leq \|u_k\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2}.$$

Ceci montre que la suite $(u_k)_k$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$. Le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ vérifie donc la condition $ss\text{-}(PS)^*_0$.

Pour $c \in \mathbb{R}$ différent de 0, on ne peut pas montrer que les conditions ss-$(PS)_c^*$ ou s-$(PS)_c^*$ soient satisfaites compte tenu du fait que h est invariante par rapport aux translations $u(\cdot) \mapsto u(\cdot + s)$. Ce fait est traité dans le cas classique en utilisant entre autres le principe de concentration-compacité de P.-L. Lions ; voir [**St2**] ou [**W**].

Chapitre 4

THÉORÈMES DE DÉFORMATION

Nous présentons des résultats de déformation pour une paire $\big((h_n)_n, h\big)$ et pouvant être obtenus en utilisant le lemme de déformation quantitatif pour des fonctionnelles de classe C^1 (lemme 1.3.1). De tels résultats nous seront essentiels pour obtenir des résultats d'existence et de multiplicité de points asymptotiquement critiques.

4.1. Avec ss-$(PS)^*_c$

Nous considérerons d'abord la condition ss-$(PS)^*_c$ puisque celle-ci permet de considérer des sous-suites de $(h_n)_n$. Nous présentons un lemme de déformation pour un certain niveau c.

Théorème 4.1.1 (Lemme de déformation). *Soient $c \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Considérons N un voisinage ouvert de AK_c. Supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)^*_c$. Alors il existe $\epsilon \in \,]0, \rho[$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues*

$$\eta_n : [0,1] \times X \to X$$

satisfaisant

(a) $\eta_n(t,u) = u$, *si* $t = 0$ *ou si* $u \notin h_n^{-1}\big([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\big)$;

(b) $h_n(\eta_n(t,u)) \leq h_n(u)$;

(c) $\eta_n\big(1, h_n^{c+\epsilon} \setminus N\big) \subset h_n^{c-\epsilon}$;

(d) $h_n(\eta_n(t,u)) < c, \quad \forall t \in]0,1], \forall u \in h_n^c \setminus N$;

(e) $\|u - \eta_n(t,u)\| \leq \rho$.

Démonstration. Nous avons que la condition $ss\text{-}(PS)^*_c$ implique qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $\mu > 0$ tels que, pour tout $n \geq m$, nous ayons

$$u \in h_n^{-1}\big([c-2\mu, c+2\mu]\big) \cap B(X \setminus N, 2\mu) \Rightarrow \|h_n'(u)\| \geq \mu.$$

En effet, si l'affirmation est fausse, alors nous pouvons trouver une suite strictement croissante $(n_k)_k$ et une suite $(u_k)_k$ dans X telles que

$$u_k \in B(X \setminus N, 2/k),\ c - \frac{2}{k} \leq h_{n_k}(u_k) \leq c + \frac{2}{k},\ \|h_{n_k}'(u_k)\| \leq \frac{1}{k}.$$

La suite $(h_{n_k}(u_k))_k$ converge vers c. En appliquant $ss\text{-}(PS)^*_c$, nous avons alors qu'il existe $(k_j)_j$ une suite strictement croissante et $u \in X$ tel que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$. Donc $u \in AK_c$. Toutefois, $u_k \in B(X \setminus N, 2/k)$ par construction. Nous avons donc que $u \in X \setminus N$. Nous avons alors une contradiction puisque $(X \setminus N) \cap AK_c = \emptyset$.

Pour conclure, nous appliquons le lemme 1.3.1 à h_n pour tout $n \geq m$, avec $\delta = \min\{\rho, \mu, 8\}$ et $\epsilon = \mu\delta/8$. □

Remarque 4.1.2. Si $AK_c = \emptyset$, alors on peut prendre $N = \emptyset$ et l'argument reste le même. Remarquons que le ϵ trouvé est valide pour tout $n \geq m$. Dans cette situation, nous dirons que nous avons l'*uniformité par rapport à n*.

Nous présentons un résultat d'intervalle non critique semblable au théorème 2.15 de **[CDM]**. Nous présenterons par la suite un résultat mixte. Il s'agit en fait d'un analogue pour la condition $ss\text{-}(PS)^*_c$ du théorème 2.2.2.

Théorème 4.1.3 (Theorème d'intervalle non critique). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Supposons que l'intervalle $[a,b]$ ne contient pas de valeur asymptotiquement critique pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$. Supposons aussi que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition $ss\text{-}(PS)^*_c$ pour tout $c \in [a,b]$. Alors, pour tout $\rho > 0$, il existe $\gamma > 0$, $\epsilon \in \,]0, \rho[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations* *continues*

$$\eta_n : [0,1] \times X \to X$$

satisfaisant

(a) $\|u - \eta_n(t,u)\| \leq \gamma$;

(b) $h_n(\eta_n(t,u)) \leq h_n(u)$;

(c) si $h_n(u) \leq b$, alors $h_n(\eta_n(1,u)) \leq a$;

(d) si $u \notin h_n^{-1}\big([a-2\epsilon, b+2\epsilon]\big)$ ou si $t=0$, alors $\eta_n(t,u) = u$.

Démonstration. Pour $\rho > 0$ donné, le théorème 4.1.1 implique que, pour tout $c \in [a,b]$, il existe $m_c \in \mathbb{N}$ et il existe $\epsilon_c \in \,]0,\rho[$ tels que pour tout $n \geq m_c$, il existe des déformations continues $\eta_n(c) : [0,1] \times X \to X$.

Nous avons que $\big\{]c-\epsilon_c, c+\epsilon_c[\;\big|\; c \in [a,b]\big\}$ est un recouvrement ouvert de $[a,b]$. Utilisant la compacité de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, soit $\big\{]c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i[\big\}_{i=1,\ldots,k}$ un sous-recouvrement fini qu'on ordonne de sorte que $c_1 = b$, $c_k = a$ et $c_i - \epsilon_i < c_{i+1} + \epsilon_{i+1}$ où $\epsilon_i = \epsilon_{c_i}$. Nous avons que les déformations $\eta_n(c_i)$ satisfont, pour $n \geq m_{c_i}$,

$$u \notin h_n^{-1}\big([c_i - 2\epsilon_i, c_i + 2\epsilon_i]\big) \Rightarrow \eta_n(c_i)(t,u) = u.$$

Posons $m = \max\big\{m_{c_i} \;\big|\; i = 1,\ldots,k\big\}$.

Définissons récursivement par rapport à k, pour tout $n \geq m$,

$$\eta_n(t,u) = \begin{cases} \eta_n(b)(kt,u) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{k}, \\ \eta_n(c_i)\big(kt-(i-1), \eta_n(\frac{i-1}{k},u)\big) & \text{si } \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} \text{ et } 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\eta_n \in C([0,1] \times X, X)$. Nous devons vérifier que les propriétés demandées sont satisfaites.

a) Soit $(t,u) \in [0,1] \times X$ avec $t \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|\eta_n(t,u) - u\| \leq \Big\|u - \eta_n\Big(\frac{1}{k},u\Big)\Big\| + \Big\|\eta_n\Big(\frac{1}{k},u\Big) - \eta_n\Big(\frac{2}{k},u\Big)\Big\| \\ + \ldots + \Big\|\eta_n\Big(\frac{i-1}{k},u\Big) - \eta_n(t,u)\Big\| \leq i\rho.\end{aligned}$$

Donc, $\gamma = k\rho$ satisfait (a). Remarquons qu'il dépend du recouvrement mais est fini.

b) Soient (t, u) comme en a) et posons $s = kt - (i-1)$. Nous avons

$$\begin{aligned} h_n(\eta_n(t,u)) &= h_n\Big(\eta_n(c_i)\Big(s, \eta_n\Big(\frac{i-1}{k}, u\Big)\Big)\Big) \\ &\leq h_n\Big(\eta_n\Big(\frac{i-1}{k}, u\Big)\Big) \leq \ldots \leq h_n(\eta_n(0,u)) = h_n(u). \end{aligned}$$

Donc, (b) est aussi satisfaite.

c) Pour $1 \leq i \leq k$, nous avons que

$$h_n\Big(\eta_n\Big(\frac{i}{k}, u\Big)\Big) \leq c_i - \epsilon_i, \text{ si } h_n\Big(\eta_n\Big(\frac{i-1}{k}, u\Big)\Big) \leq c_i + \epsilon_i.$$

Or, par le recouvrement, $c_i - \epsilon_i \leq c_{i+1} + \epsilon_{i+1}$. En particulier, si $h_n(u) \leq b$, on obtient par récurrence que $h_n(\eta_n(1,u)) \leq a$.

d) Posons $\epsilon = \max\{\epsilon_a, \epsilon_b\}$. Nous pouvons supposer que les ϵ_i sont suffisamment petits pour avoir $b + 2\epsilon \geq c_i + \epsilon_i$, $a - 2\epsilon \leq c_i - \epsilon_i$, pour tout i. Le lemme de déformation nous donne alors la conclusion désirée. □

Théorème 4.1.4 (Propriété de déformation). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $\lambda_0 > 0$. Supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a,b]$ et que pour tout $c \in]a,b[$, $AK_c = \emptyset$. Alors il existe $0 < \lambda \leq \lambda_0$, $0 < \epsilon \leq \lambda_0/2$, $\gamma > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues*

$$\eta_n : [0,1] \times X \to X$$

satisfaisant

(a) $\|u - \eta_n(t,u)\| \leq \gamma$;

(b) $h_n(\eta_n(t,u)) \leq h_n(u)$;

(c) si $u \in h_n^{-1}([a-\epsilon, b+\epsilon]) \setminus B(AK_b, \lambda)$, *alors*

$$\eta_n(1,u) \in h_n^{-1}(]-\infty, a-\epsilon]) \cup \big(h_n^{-1}(]-\infty, a+\epsilon]) \cap B(AK_a, \lambda)\big).$$

Démonstration. Posons $N_b = B(AK_b, \lambda/2)$ et $N_a = B(AK_a, \lambda/2)$ pour $\lambda = \min\{\lambda_0, d(AK_a, AK_b)/3\}$.

Par le théorème 4.1.1 pour $\rho = \lambda/2$, il existe $\epsilon_c > 0$, $m_c \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m_c$, il existe des déformations continues $\eta_n(c)$ pour $c \in \{a, b\}$. Nous avons en particulier que

$$\|u - \eta_n(c)(t,u)\| \leq \lambda/2, \text{ pour tout } (t,u),$$

et que $\epsilon_c < \lambda/2$. Posons $m_1 = \max\{m_a, m_b\}$, $\epsilon = \min\{\epsilon_a, \epsilon_b\}$ et considérons les déformations correspondantes $\eta_n(a)$ et $\eta_n(b)$ pour tout $n \geq m_1$. Sans perte de généralité, quitte à considérer ϵ plus petit, nous pouvons supposer que $a+\epsilon < b-\epsilon$.

Utilisant l'hypothèse que $AK_c = \emptyset$ pour tout $c \in]a, b[$, nous pouvons appliquer le théorème d'intervalle non critique 4.1.3 sur $[a+\epsilon, b-\epsilon]$. Nous obtenons l'existence de $m_2 \in \mathbb{N}$ et $\gamma' > 0$ tels que pour tout $n \geq m_2$, il existe des déformations continues ξ_n. Posons $m = \max\{m_1, m_2\}$ et définissons, pour tout $n \geq m$,

$$\eta_n(t,u) = \begin{cases} \eta_n(b)(3t,u) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/3; \\ \xi_n\big(3t-1, \eta_n(b)(1,u)\big) & \text{si } 1/3 \leq t \leq 2/3; \\ \eta_n(a)\big(3t-2, \xi_n(1, \eta_n(b)(1,u))\big) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pour $\gamma = \gamma' + \lambda$, la condition (a) est satisfaite. La condition (b) est satisfaite en procédant comme dans la preuve précédente. Montrons que (c) est aussi satisfaite. Soit $u \in h_n^{-1}\big([a-\epsilon, b+\epsilon]\big) \setminus B(AK_b, \lambda)$. Nous avons que $\xi_n\big(1, \eta_n(b)(1,u)\big) \in h_n^{a+\epsilon}$. Si $\xi_n\big(1, \eta_n(b)(1,u)\big) \in B(AK_a, \lambda/2)$, alors, puisque $\|v - \eta_n(a)(t,v)\| \leq \lambda/2$ pour tout (t,v),

$$\eta_n(1,u) \in B(AK_c, \lambda).$$

Sinon, par le théorème 4.1.1,

$$\eta_n(1,u) = \eta_n(a)\Big(1, \xi_n\big(1, \eta_n(b)(1,u)\big)\Big) \leq a - \epsilon.$$

La condition (c) est donc satisfaite. □

4.2. AVEC s-$(PS)_c^*$

Il est aisé de remarquer que les deux derniers résultats ne dépendent que du théorème 4.1.1. De tels résultats découleraient donc naturellement avec

s-$(PS)^*_c$ si le lemme de déformation fonctionne aussi avec s-$(PS)^*_c$. Toutefois l'argument utilisé dans le lemme de déformation n'est plus valide avec la condition s-$(PS)^*_c$ car nous n'avons pas le choix de considérer une sous-suite de $(h_n)_n$ et alors la condition s-$(PS)^*_c$ ne peut être utilisée.

Nous avons deux alternatives. La première est beaucoup plus *forte* que la seconde et est utilisée dans le lemme 2.1 de [**MM1**]. Nous pourrions assumer une hypothèse locale garantissant que le théorème 4.1.1 est valide avec s-$(PS)^*_c$. Une telle hypothèse serait

$$\liminf_{n\to\infty} \inf \left\{ \|h_n'(u)\| \mid u \in B(X \setminus N, 2\rho), c-\rho \le h_n(u) \le c+\rho \right\} > 0 \tag{4.2.1}$$

avec N un voisinage ouvert de AK_c et $\rho > 0$ donnés. Nous obtiendrions ainsi un lemme de déformation identique dans sa conclusion au théorème 4.1.1. De plus, nous aurions l'uniformité par rapport à n.

La deuxième option est d'énoncer un lemme de déformation *faible*. Nous y perdons l'uniformité mais nous n'avons plus besoin d'une hypothèse locale comme (4.2.1). En fait, cette version faible présente de nombreux avantages et se veut plus *fidèle* à ce que nous avons développé à la section 4.1.

Théorème 4.2.1 (Lemme de déformation faible)**.** *Soient c et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\rho > 0$. Considérons N un voisinage ouvert de AK_c. Supposons que le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait la condition s-$(PS)^*_c$. Alors il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$, $\epsilon \in]0, \rho[$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n_k \ge m$, il existe des déformations continues*

$$\eta_{n_k} : [0,1] \times X \to X$$

satisfaisant

(a) $\eta_{n_k}(t,u) = u$ *, si* $t = 0$ *ou si* $u \notin h_{n_k}^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ *;*

(b) $h_{n_k}(\eta_{n_k}(t,u)) \le h_{n_k}(u)$ *;*

(c) $\eta_{n_k}(1, h_{n_k}^{c+\epsilon} \setminus N) \subset h_{n_k}^{c-\epsilon}$ *;*

(d) $h_{n_k}(\eta_{n_k}(t,u)) < c, \quad \forall t \in]0,1], \forall u \in h_{n_k}^c \setminus N$ *;*

(e) $\|u - \eta_{n_k}(t,u)\| \le \rho$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que (4.2.1) se produit pour une certaine sous-suite. Si ce n'est pas le cas, alors pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$ et pour tout $\mu > 0$, nous avons

$$\liminf_{k\to\infty} \inf\left\{\|h'_{n_k}(u)\| \mid u \in B(X \setminus N, 2\mu), c - 2\mu \le h_{n_k}(u) \le c + 2\mu\right\} = 0.$$

Ce qui revient à dire que pour tout $\mu > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left\{\|h'_n(u)\| \mid u \in B(X \setminus N, 2\mu), c - 2\mu \le h_n(u) \le c + 2\mu\right\} = 0.$$

En procédant comme au théorème 4.1.1, nous déduisons l'existence d'une suite $(u_n)_n$ telle que

$$u_n \in B(X \setminus N, 2/n),\ \ h_n(u_n) \to c,\ \ \|h'_n(u_n)\| \to 0.$$

Utilisant s-$(PS)^*_c$, nous obtenons alors une contradiction. Nous pouvons donc trouver $\mu > 0$ et une suite strictement croissante $(n_k)_k$ tels que

$$\liminf_{k\to\infty} \inf\left\{\|h'_{n_k}(u)\| \mid u \in B(X \setminus N, 2\mu), c - 2\mu \le h_{n_k}(u) \le c + 2\mu\right\} > 0.$$

En procédant comme au théorème 4.1.1 et en utilisant le lemme 1.3.1, nous montrons l'existence de $\epsilon > 0$ et de $m \in \mathbb{N}$ voulus. □

Chapitre 5

RÉSULTATS D'EXISTENCE ET DE MULTIPLICITÉ

Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont nouveaux et permettent d'établir l'existence de points asymptotiquement critiques pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ en utilisant les théorèmes de déformation du chapitre précédent.

Nous introduirons à la section 5.1 une notion de borne inférieure pour un couple qui nous permettra d'établir sous la condition ss-$(PS)_c^*$ et grâce au théorème 4.1.1 que cette borne est une valeur asymptotiquement critique.

Nous énoncerons à la section 5.2 un principe de minimax pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ sous la condition ss-$(PS)_c^*$ qui est analogue au théorème 1.3.3. Nous verrons, en outre, que lorsqu'il est donné, pour tout n, une suite de Palais-Smale de niveau c_n pour la fonctionnelle h_n, alors tout point d'accumulation de la suite $(c_n)_n$ est une valeur asymptotiquement critique.

Les sections 5.3 et 5.4 se veulent la concrétisation des résultats obtenus au chapitre 4 et des définitions du chapitre 3. Nous verrons qu'en présence d'enlacement entre paires d'ensembles, que lorsque la condition ss-$(PS)_c^*$ ou la condition faible s-$(PS)_c^*$ sont satisfaites et sous certaines hypothèses, nous obtenons alors l'existence d'un, deux et même trois points asymptotiquement critiques.

5.1. Notion de couple $((h_n)_n, h)$ borné

Il est bien connu que lorsqu'une fonctionnelle est bornée inférieurement et satisfait la condition $(PS)_d$ pour d sa borne inférieure, alors d est une valeur critique. Nous voulons introduire une notion de borne inférieure pour un couple afin d'obtenir un résultat analogue. C'est-à-dire obtenir que cette borne est une valeur asymptotiquement critique lorsque la condition ss-$(PS)^*_d$ est satisfaite. Nous considérerons la définition suivante.

Définition 5.1.1. Nous dirons que le couple $((h_n)_n, h)$ est *borné inférieurement* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout n, h_n est bornée inférieurement ;

(ii) la valeur

$$d := \liminf_{n\to\infty} \inf h_n(X) \in \mathbb{R}.$$

Nous dirons que la *borne inférieure* pour le couple $((h_n)_n, h)$ est alors d ou que *le couple est borné inférieurement par d.*

Proposition 5.1.2. *Supposons que le couple $((h_n)_n, h)$ est borné inférieurement par d. Si le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait ss-$(PS)^*_d$, alors d est une valeur asymptotiquement critique pour le couple $((h_n)_n, h)$.*

Démonstration. Si d n'est pas une valeur asymptotiquement critique, alors l'ensemble $AK_d = \emptyset$ et alors, par le théorème 4.1.1, il existe $\epsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq m$, $h_n^{d+\epsilon}$ peut se déformer dans $h_n^{d-\epsilon}$.

Par définition de d, il existe $m_1 \geq m$ tel que pour tout $n \geq m_1$, nous avons

$$h_n^{d-\epsilon} = \emptyset.$$

Aussi par définition de d, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geq m_1$ tel que

$$h_{n_0}^{d+\epsilon} \neq \emptyset.$$

Or $h_{n_0}^{d+\epsilon}$ peut se déformer dans $h_{n_0}^{d-\epsilon}$ qui est vide, ce qui est contradictoire. □

Remarque 5.1.3. Les conditions de la définition 5.1.1 peuvent évidemment être affaiblies puisque nous ne nous intéressons qu'au comportement asymptotique des fonctionnelles h_n.

Utilisant les résultats de déformation du chapitre 4, nous obtenons le lemme suivant qui sera utilisé à la section 5.3 pour montrer l'existence de trois points asymptotiquement critiques.

Lemme 5.1.4. *Supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ est borné inférieurement par d. Soit $b > d$ et supposons que le couple satisfait ss-$(PS)^*_c$ pour tout $c \in [d, b]$. Supposons de plus que $AK_c = \emptyset$ pour tout $c \in]d, b[$. Alors pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit, il existe $k > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$,*

$$h_n^b \setminus B(AK_b, \lambda) \subset B(AK_d, k).$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de la propriété de déformation (théorème 4.1.4). Par celle-ci, nous avons qu'il existe $\epsilon, \gamma > 0$, $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues

$$\eta_n : [0, 1] \times X \to X$$

telles que si $u \in h_n^{-1}\big([d - \epsilon, b + \epsilon]\big) \setminus B(AK_b, \lambda)$, alors

$$\eta_n(1, u) \in h_n^{-1}\big(] - \infty, d - \epsilon]\big) \cup \big(h_n^{-1}\big(] - \infty, d + \epsilon]\big) \cap B(AK_d, \lambda)\big).$$

Or, par définition, $d = \liminf_{n\to\infty} \inf h_n(X)$. Donc qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq \max\{m, m_0\}$,

$$h_n^{-1}\big(] - \infty, d - \epsilon]\big) = \emptyset$$

et donc que $\eta_n(1, u) \in B(AK_d, \lambda)$. Nous avons aussi que $\|u - \eta_n(1, u)\| \leq \gamma$. D'où, $u \in B(AK_d, \lambda + \gamma)$. On choisit alors $k \geq (\lambda + \gamma)$. $\square$

5.2. Un principe de minimax

La prochaine proposition repose sur le théorème 1.3.3. Une application de celui-ci donne, sous certaines hypothèses, l'existence de valeurs asymptotiquement critiques. Nous présentons d'abord un lemme.

Lemme 5.2.1. *Considérons un couple $((h_n)_n, h)$. Supposons donné, pour tout n, une suite $(u_k^n)_k$ dans X telle que $(u_k^n)_k$ satisfait*

$$h_n(u_k^n) \to c^n, \; h_n'(u_k^n) \to 0,$$

pour certain $c^n \in \mathbb{R}$ dépendant de n. Si le couple $((h_n)_n, h)$ satisfait la condition ss-$(PS)_c^*$ pour tout c tel que c est un point d'accumulation de $(c^n)_n$, alors $AK_c \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de $(c^n)_n$. Il existe donc une sous-suite $(c^{i_j})_j$ telle que

$$c^{i_j} \to c.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\left|c^{i_j} - c\right| \leq \frac{1}{2j}.$$

Par hypothèse, nous avons que

$$h_{i_j}(u_k^{i_j}) \to c^{i_j}.$$

Nous pouvons donc trouver, pour tout j, k_j tel que, pour tout $k \geq k_j$,

$$\left|h_{i_j}(u_k^{i_j}) - c\right| \leq \frac{1}{j} \text{ et } \|h_{i_j}'(u_k^{i_j})\| \leq \frac{1}{j}.$$

Pour tout j, notons $w_j = u_{k_j}^{i_j}$. Les suites $(i_j)_j$ et $(w_j)_j$ ainsi construites satisfont la définition de la condition ss-$(PS)_c^*$ et donc, c est une valeur asymptotiquement critique. □

Le résultat suivant suit alors directement du lemme 5.2.1 et du principe de minimax 1.3.3.

Proposition 5.2.2. *Soit H un espace de Hilbert. Soit M_0 un sous-espace fermé d'un espace métrique M et soit $\Gamma_0 \subset C(M_0, H)$. Définissons*

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C(M, H) \mid \gamma_{|M_0} \in \Gamma_0\right\}.$$

Supposons que, pour tout n, nous avons

$$\infty > c^n := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} h_n(\gamma(u)) > a_n := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} h_n(\gamma_0(u)).$$

Supposons que $A = \{c \mid c$ *est un point d'accumulation de* $(c^n)_n\} \neq \emptyset$ *et que la condition ss-*$(PS)^*_c$ *est satisfaite pour tout* $c \in A$. *Alors* $AK_c \neq \emptyset$ *pour tout* c *dans* A.

Démonstration. Soit $c \in A$. Les fonctionnelles $(h_n)_n$ sont de classe C^1 et donc, utilisant le théorème 1.3.3, il existe pour tout n une suite $(u^n_k)_k$ qui soit de Palais-Smale pour h_n de niveau c^n. Les hypothèses faites ici garantissent que les conditions du lemme 5.2.1 sont satisfaites et donc, par celui-ci, $AK_c \neq \emptyset$. □

5.3. Résultats en présence d'enlacement

Nous présentons des résultats d'existence de points asymptotiquement critiques en présence d'enlacement entre paires d'ensembles que nous avons introduit au chapitre 1. Nous rappelons d'abord un résultat de **[F1]** qui sera réinvesti. Soit $h \in C(X, \mathbb{R})$ et $A \subset X$, on note par $\Gamma_h(A)$ le sous-ensemble suivant de $\Gamma(A)$ introduit en (1.2.1)

$$\Gamma_h(A) = \{\eta \in \Gamma(A) \mid h(\eta(t,x)) \leq h(x), \text{ pour tout } (t,x)\}.$$

Lemme 5.3.1. *Soit* A *un sous-ensemble de* X *un espace de Banach et soit* $h \in C(X, \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe deux paires* (B, A) *et* (Q, P) *telles que* (B, A) *enlace* (Q, P) *via* $\Gamma_h(A)$. *Si* $h(x) < h(y)$ *pour tout* $x \in B$ *et* $y \in P$, *alors*

$$\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset, \text{ pour tout } \eta \in \Gamma_h(A).$$

Théorème 5.3.2. *Considérons le couple* $((h_n)_n, h)$. *Supposons donné pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *deux paires de sous-ensembles* (B_n, A_n) *et* (Q_n, P_n) *telles que*

(a) (B_n, A_n) *enlace* (Q_n, P_n) *via* $\Gamma_{h_n}(A_n)$ *;*

(b) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\sup_n \sup h_n(A_n) < a \leq \inf_n \inf h_n(Q_n)$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_n) \leq b < \inf_n \inf h_n(P_n);$$

(c) le couple $((h_n)_n, h)$ *satisfait ss-*$(PS)^*_c$ *pour tout* $c \in [a, b]$.

Posons

$$c_n := \inf_{\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)} \sup h_n(\eta(1, B_n)).$$

Alors tout point d'accumulation de $(c_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une valeur asymptotiquement critique pour le couple* $\big((h_n)_n, h\big)$. *En particulier, il existe au moins une valeur asymptotiquement critique dans* $[a, b]$.

Démonstration. Les hypothèses (a) et (b) nous permettent d'affirmer que la conclusion du lemme 5.3.1 est vérifiée pour tout n ; c'est-à-dire que, pour tout n et pour tout $\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)$, nous avons

$$\eta(1, B_n) \cap Q_n \neq \emptyset.$$

La suite $(c_n)_n$ est dans $[a, b]$ qui est compact et possède donc un point d'accumulation. Soit alors c un point d'accumulation de $(c_n)_n$. Nous voulons montrer que $AK_c \neq \emptyset$. Supposons donc que $AK_c = \emptyset$.

Remarquons d'abord que, pour tout n, le lemme 5.3.1 implique, en particulier, que

$$c_n \geq \inf h_n(Q_n).$$

Soit $\delta \in \big]0, \min\{(a - \sup_n \sup h_n(A_n))/2, (\inf_n \inf h_n(P_n) - b)/2\}\big[$. Par (c) et comme, par hypothèse, $AK_c = \emptyset$, nous pouvons appliquer le lemme de déformation (théorème 4.1.1) avec $N = \emptyset$ et ce δ. Nous obtenons alors l'existence d'un $\epsilon \in]0, \delta[$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues $\eta_n : [0, 1] \times X \to X$.

Par choix de δ, la déformation $\eta_n \in \Gamma_{h_n}(A_n)$. En effet, puisque si $u \in A_n$, $u \notin h_n^{-1}\big([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\big)$ et alors $\eta_n(t, u) = u$, pour tout $t \in [0, 1]$. Soit $(n_k)_k$ une suite dans $\mathbb{N}$ telle que $c_{n_k} \to c$. Pour k suffisamment grand, nous avons que

$$|c_{n_k} - c| < \epsilon/4.$$

Nous pouvons donc trouver $\hat{\eta}_{n_k} \in \Gamma_{h_{n_k}}(A_{n_k})$ tel que

$$\sup h_{n_k}(\hat{\eta}_{n_k}(1, B_{n_k})) \leq c_{n_k} + \epsilon/4 \leq c + \epsilon/2.$$

Nous avons aussi que

$$\eta_{n_k}(t, \hat{\eta}_{n_k}(t,u)) \in \Gamma_{h_{n_k}}(A_{n_k})$$

et alors, en utilisant le lemme 5.3.1, nous obtenons l'existence de $y_{n_k} \in \hat{\eta}_{n_k}(1, B_{n_k})$ tel que

$$\eta_{n_k}(1, y_{n_k}) \in Q_{n_k}.$$

Par choix de $\hat{\eta}_{n_k}$, nous avons

$$h_{n_k}(y_{n_k}) \leq c + \epsilon$$

et, puisque η_{n_k} provient du lemme de déformation,

$$h_{n_k}(\eta_{n_k}(1, y_{n_k})) \leq c - \epsilon.$$

Or, puisque $\eta_{n_k}(1, y_{n_k}) \in Q_{n_k}$, nous avons par définition de c_{n_k} que

$$h_{n_k}(\eta_{n_k}(1, y_{n_k})) \geq c_{n_k} \geq c - \epsilon/2;$$

contradiction. Donc, $AK_c \neq \emptyset$. □

Les corollaires suivants suivent directement.

Corollaire 5.3.3. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$ avec $dim(X_1) < \infty$. Supposons qu'il existe U_1, U_2 des voisinages ouverts de 0 dans X_1, X_2 respectivement avec U_1 borné et*

(a) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}\sup_n \sup h_n(\partial U_1) < a \leq \inf_n \inf h_n(\overline{U}_2) \\ \leq \sup_n \sup h_n(\overline{U}_1) \leq b < \inf_n \inf h_n(\partial U_2);\end{aligned}$$

(b) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait ss-$(PS)^*_c$ pour tout $c \in [a,b]$.

Alors il existe au moins un point asymptotiquement critique pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Corollaire 5.3.4. *Considérons le couple $\big((h_n)_n, h\big)$. Supposons donné pour tout $n \in \mathbb{N}$, deux paires de sous-ensembles (B_n, A_n) et (Q_n, P_n) avec $A_{n_0} \neq \emptyset$ pour au moins un $n_0 \in \mathbb{N}$ et telles que*

(a) (B_n, A_n) enlace (Q_n, P_n) via $\Gamma_{h_n}(A_n)$;

(b) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sup_n \sup h_n(A_n) < a \leq \inf_n \inf h_n(Q_n)$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_n) \leq b < \inf_n \inf h_n(P_n);$$

(c) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(d) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ est borné inférieurement par d.

Alors il existe au moins deux points asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Démonstration. Nous savons que d est une valeur asymptotiquement critique et, par le théorème 5.3.2, qu'il existe une valeur asymptotiquement critique $c \in [a, b]$. Comme A_{n_0} n'est pas vide, l'inégalité stricte entre d et a se produit et nous avons deux valeurs asymptotiquement critiques distinctes ; d'où la conclusion. □

En spécifiant les ensembles qui s'enlacent et en ajoutant certaines hypothèses, nous obtenons l'existence de trois points asymptotiquement critiques. La preuve du théorème suivant suit les arguments utilisés dans le théorème 6.2 de **[F2]**.

Théorème 5.3.5. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$ avec X_1, X_2 des espaces de Banach non triviaux et $dim(X_1) < \infty$. Supposons que*

(a) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $r, R > 0$ tels que

$$\sup_n \sup h_n(S_1(r)) < a \leq \inf_n \inf h_n(B_2(R))$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_1(r)) \leq b < \inf_n \inf h_n(S_2(R)),$$

et la fonction h satisfait $\sup h(S_1(r)) < a$ et $\inf h(S_2(R)) > b$;

(b) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(c) pour tout borné $B \subset X$,

$$\sup_n \sup h_n(B) < \infty;$$

(d) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ est borné inférieurement par d et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} \sup h_n(B(AK_d, \lambda_0)) < a.$$

Alors il existe au moins trois points asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Démonstration. Nous avons par le corollaire 5.3.3 qu'il existe au moins deux points asymptotiquement critiques distincts $u_0 \in AK_d$ et $u_1 \in AK_c$ pour un certain $c \in [a, b]$. Supposons que ce soient les seuls points asymptotiquement critiques.

Nous avons en particulier que $d < a \leq c$, $d(AK_a, S_1(r)) > 0$ et $d(AK_b,\ S_2(R)) > 0$. En effet, si $c = a$, alors $AK_a = \{u_1\}$ et par la condition ss-$(PS)_a^*$, nous avons que $h(u_1) = a$. L'hypothèse (a) implique donc $d(AK_a, S_1(r)) > 0$ puisque $\sup h(S_1(r)) < a$. Le même argument montre aussi que nous pouvons supposer que $d(AK_b, S_2(R)) > 0$.

L'existence de d implique qu'il existe une suite $(n_k)_k$ telle que

$$\inf h_{n_k}(X) \to d.$$

Par l'hypothèse (d), il existe $\delta > 0$, $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $k \geq \bar{k}$, nous avons que

$$h_{n_k}(u) \leq d + \delta < a, \text{ pour tout } u \in B(u_0, \lambda_0).$$

Nous avons aussi qu'il existe $l > r$ tel que $h_{n_k}^a \subset B(0, l)$. En effet, puisque

$$h_{n_k}^a = \big(h_{n_k}^a \setminus B(AK_a, \lambda)\big) \cup \big(h_{n_k}^a \cap B(AK_a, \lambda)\big)$$

et, par le théorème 5.1.4, il existe $l' > 0$ tel que

$$h_{n_k}^a \setminus B(AK_c, \lambda) \subset B(u_0, l').$$

Donc

$$h_{n_k}^a \subset B(u_0, l') \cup B(AK_a, \lambda) \subset B(0, l),$$

avec l pouvant être choisi plus grand que r. Ceci étant possible puisque AK_a est compact donc borné.

Nous appliquons la propriété de déformation (théorème 4.1.4) sur $[d, a]$ pour

$$\lambda \in \left]0, \min\left\{\delta, \lambda_0, r, R, d(AK_a, S_1(r))/2, d(AK_b, S_2(R))/2\right\}\right[.$$

Nous obtenons alors l'existence d'un $\epsilon > 0$ et de $k^* \geq \bar{k}$ tels que pour tout $k \geq k^*$, il existe des déformations continues η_{n_k} satisfaisant les propriétés du théorème 4.1.4.

Définissons, pour tout $k \geq k^*$,

$$\phi_{n_k}(t,u) = \begin{cases} u_0 & \text{si } u = 0 \text{ et } t = 1; \\ u & \text{si } u \in B_1(r) \text{ et } t = 0; \\ \eta_{n_k}(t,u) & \text{si } u \in S_1(r) \text{ et } t \in [0,1]; \\ \frac{\|u\|}{r}\eta_{n_k}\left(1, \frac{ru}{\|u\|}\right) + \left(1 - \frac{\|u\|}{r}\right)u_0 & \text{si } u \in B_1(r) \setminus \{0\} \text{ et } t = 1. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ϕ_{n_k} est continue et puisque X_1 est de dimension finie, nous pouvons considérer, pour tout $k \geq k^*$, un prolongement continu de ϕ_{n_k},

$$\Phi_{n_k} : [0,1] \times B_1(r) \to X.$$

Posons alors pour tout $k \geq k^*$,

$$B_{n_k} = \Phi_{n_k}([0,1] \times B_1(r)),$$

$$A_{n_k} = \phi_{n_k}(\partial([0,1] \times B_1(r))),$$

$$Q_{n_k} = S_2(R) \text{ et } P_{n_k} = \emptyset.$$

Par le théorème A.6, (B_{n_k}, A_{n_k}) enlace (Q_{n_k}, P_{n_k}) pour tout $k \geq k^*$.

Aussi, par construction et grâce à la propriété de déformation, nous avons que

$$A_{n_k} \setminus \phi_{n_k}\left(\{0\} \times B_1(r)\right) \subset h^a_{n_k} \subset B(0,l)$$

et nous pouvons choisir les prolongements Φ_{n_k} tels que $B_{n_k} \subset B(0,l)$. En effet, soit $v \in A_{n_k} \setminus \phi_{n_k}\left(\{0\} \times B_1(r)\right)$. Si $v = u_0$, alors $v \in h^a_{n_k}$ par l'hypothèse (d).

Si $v = \eta_{n_k}(t,u)$ avec $(t,u) \in [0,1] \times S_1(r)$, nous avons, par le théorème 4.1.4 et l'hypothèse (a), que

$$h_{n_k}(v) \leq h_{n_k}(u) < a.$$

Finalement, si $v = \frac{\|u\|}{r}\eta_{n_k}(1, \frac{ru}{\|u\|}) + (1 - \frac{\|u\|}{r})u_0$, pour $u \in B_1(r) \setminus \{0\}$, nous avons, par le théorème 4.1.4, que

$$\|v - u_0\| \leq \left\|\eta_{n_k}\left(1, \frac{ru}{\|u\|}\right) - u_0\right\| \leq \lambda \leq \lambda_0.$$

Donc, par ce qui précède, $h_{n_k}(v) < a$. Nous avons alors qu'il existe $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \sup_k \sup h_{n_k}(A_{n_k}) < \bar{a} \leq \inf_k \inf h_{n_k}(Q_{n_k}) \\ \leq \sup_k \sup h_{n_k}(B_{n_k}) \leq \bar{b} < \inf_k \inf h_{n_k}(P_{n_k}). \end{aligned}$$

Pour $\bar{b}$, fixons, en utilisant l'hypothèse (c),

$$\bar{b} \in \left]\sup_n \sup h_n(B(0,l)), +\infty\right[.$$

Par convention, $\bar{b} < \inf_k \inf h_{n_k}(P_{n_k}) = +\infty$. Utilisant l'hypothèse (a),

$$b < \inf_n \inf h_n(S_2(R)) = \inf_k \inf h_{n_k}(Q_{n_k});$$

et, par l'enlacement,

$$\inf_k \inf h_{n_k}(Q_{n_k}) \leq \sup_k \sup h_{n_k}(B_{n_k}).$$

Posons $\bar{a} := \inf_n \inf h_n(S_2(R))$. Nous devons donc vérifier que

$$\sup_k \sup h_{n_k}(A_{n_k}) \leq b < \bar{a}.$$

Mais ceci suit directement du fait que $A_{n_k} \setminus \phi_{n_k}(\{0\} \times B_1(r)) \subset h_{n_k}^a$ avec $a \leq b$ et que $\sup_n \sup h_n(B_1(r)) \leq b$ par hypothèse.

Donc, nous pouvons appliquer le théorème 5.3.2. Nous obtenons alors l'existence d'une valeur asymptotiquement critique dans $[\bar{a}, \bar{b}]$ pour le couple $((h_{n_k})_k, h)$ et donc aussi pour $((h_n)_n, h)$. Mais $[\bar{a}, \bar{b}] \cap [d, c] = \emptyset$ par construction ; contradiction. $\square$

Remarque 5.3.6. Il semble difficile d'affaiblir les hypothèses faites puisqu'à priori les fonctionnelles h_n ne sont pas liées entre elles et donc, nous ne pouvons pas déduire de celles-ci des résultats valides uniformément par rapport à n. C'est entre autres pour ces raisons que nous avons dû supposer les inégalités strictes et l'hypothèse particulière pour la condition (d) du théorème précédent. Pour une fonctionnelle unique h de classe C^1, bornée inférieurement, il est aisé de constater que cette hypothèse ne résulte que de la continuité de h et est donc trivialement satisfaite.

Remarquons également que le fait d'admettre des paires d'ensembles qui dépendent de n dans le théorème 5.3.2 a été utilisé de façon essentielle dans le théorème 5.3.5.

5.4. Commentaires

Il est aisé de remarquer que si, pour tout n, $h_n = h$ et que h est de classe C^1, alors la condition ss-$(PS)_c^*$ est équivalente à la condition $(PS)_c$. Ceci montre que nous pouvons déduire les théorèmes 1.3.4 et 1.3.5 comme corollaires des théorèmes 5.3.2 et 5.3.5 respectivement.

Nous n'avons peu ou pas parlé de la condition s-$(PS)_c^*$. Nous avons vu que c'est une condition plus faible que la condition ss-$(PS)_c^*$. En général, nous obtenons moins de points asymptotiquement critiques avec s-$(PS)_c^*$ qu'avec ss-$(PS)_c^*$ puisque la condition ss-$(PS)_c^*$ permet de considérer aussi les sous-suites.

Grâce au théorème 4.2.1, nous pouvons également obtenir des résultats d'existence de points asymptotiquement critiques. Nous présentons un analogue du théorème 5.3.2 avec s-$(PS)_c^*$ où moins de points asymptotiquement critiques sont obtenus.

Théorème 5.4.1. *Considérons le couple $\big((h_n)_n, h\big)$. Supposons donné pour tout $n \in \mathbb{N}$, deux paires de sous-ensembles (B_n, A_n) et (Q_n, P_n) telles que*

(a) (B_n, A_n) enlace (Q_n, P_n) via $\Gamma_{h_n}(A_n)$;

(b) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\sup_n \sup h_n(A_n) < a \leq \inf_n \inf h_n(Q_n)$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_n) \leq b < \inf_n \inf h_n(P_n);$$

(c) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ *satisfait* s-$(PS)^*_c$ *pour tout* $c \in [a, b]$.

Posons

$$c_n := \inf_{\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)} \sup h_n(\eta(1, B_n)).$$

Si la suite $(c_n)_n$ *converge vers une certaine valeur réelle* c*, alors* c *est une valeur asymptotiquement critique pour le couple* $\big((h_n)_n, h\big)$.

Démonstration. En procédant comme au théorème 5.3.2, supposons que $AK_c = \emptyset$. Appliquons le théorème 4.2.1 avec $N = \emptyset$ et

$$\delta \in \big]0, \min\big\{(a - \sup_n \sup h_n(A_n))/2, (\inf_n \inf h_n(P_n) - b)/2\big\}\big[.$$

Soit $(n_k)_k$ la suite strictement croissante obtenue par le théorème 4.2.1. La suite $(c_{n_k})_k$ converge aussi vers c et, puisque le lemme 5.3.1 est valide, nous pouvons procéder comme dans la preuve du théorème 5.3.2 pour conclure. $\square$

Chapitre 6

GÉNÉRALISATION À DES COUPLES DE FONCTIONNELLES SEMI-CONTINUES INFÉRIEUREMENT

Dans ce chapitre, nous généralisons la théorie des chapitres 3, 4 et 5 pour des couples $\big((h_n)_n, h\big)$ dans lesquels les fonctionnelles h_n sont semi-continues inférieurement. Nous développons donc une théorie de points asymptotiquement critiques pour des fonctionnnelles semi-continues inférieurement. Une telle théorie est entièrement nouvelle. La généralité de la théorie des points asymptotiquement critiques combinée au fait de pouvoir considérer des fonctionnelles semi-continues portent à croire qu'une telle théorie pourrait avoir de nombreuses applications dans la théorie des équations différentielles.

Nous serons également en mesure de montrer que cette approche contient comme cas particulier la théorie présentée au chapitre 2. De ce fait, nous unifions alors la théorie des points asymptotiquement critiques et la théorie des points critiques avec une condition de Palais-Smale-étoile.

La pente faible rappelée à la section 1.4 nous permettra d'étendre la théorie des points asymptotiquement critiques au cas où les fonctionnelles h_n sont semi-continues inférieurement. Ces mêmes arguments ont aussi permis d'étendre la théorie des points critiques avec les conditions $(PS)_c$ ou $(PS)_c^*$ à des fonctionnelles continues ou semi-continues, voir **[CDM]**, **[C2]**, **[C3]** ou **[F2]**.

6.1. Points asymptotiquement critiques pour des fonctionnelles s.c.i.

Soit X un espace de Banach. Considérons un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ tel que, pour tout n, $h_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement et $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous supposerons que h_n et h ne sont pas identiquement égales à $+\infty$.

Définition 6.1.1. Nous disons que $u \in dom(h)$ est un *point asymptotiquement critique* pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$, s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et il existe une suite $(u_k)_k$ dans X telles que

$$u_k \to u,\ h_{n_k}(u_k) \to h(u),\ |dh_{n_k}|(u_k) \to 0.$$

Nous disons aussi que $h(u)$ est une *valeur* (ou *niveau*) *asymptotiquement critique* pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Définition 6.1.2. Soit $c \in \mathbb{R}$. Nous disons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la *condition ss-$(PS)^*_c$*, si pour toute suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et toute suite $(u_k)_k$ de X telles que

$$h_{n_k}(u_k) \to c,\ |dh_{n_k}|(u_k) \to 0,$$

il existe une sous-suite $(k_j)_j$ de $(n_k)_k$ et il existe $u \in dom(h)$ tels que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$.

De nouveau, nous noterons par AK_c l'ensemble des points asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ de niveau c. Comme au chapitre 3, cet ensemble est compact lorsque la condition ss-$(PS)^*_c$ est satisfaite.

Nous rappelons la fonction G_h définie à la section 1.4, c'est-à-dire la fonction graphe

$$G_h : epi(h) \to \mathbb{R}$$

définie par $G_h(u,\xi) = \xi$ où $epi(h) = \big\{(u,\xi) \in X \times \mathbb{R} \mid h(u) \le \xi\big\}$. Considérons aussi, pour tout n, la fonction G_{h_n} associée à h_n et considérons le couple

$\big((G_{h_n})_n, G_h\big)$.

Pour éviter la confusion, nous noterons dans la suite AK_c l'ensemble des points asymptotiquement critiques de niveau c pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ et, par $\widetilde{AK}_c$, l'ensemble des points asymptotiquement critiques de niveau c pour le couple $\big((G_{h_n})_n, G_h\big)$.

Il est clair que $AK_c \subset \widetilde{AK}_c$. Puisque les G_{h_n} sont continues, nous préférerons utiliser ces fonctions avec lesquelles il est plus facile de travailler. Obtenir que $\widetilde{AK}_c \neq \emptyset$ ne sera par conséquent pas suffisant. Pour éviter ce problème, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ pour que les points asymptotiquements critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ correspondent à des points asymptotiquements critiques pour le couple $\big((G_{h_n})_n, G_h\big)$; c'est-à-dire que $u \in AK_c$ si et seulement si $(u, h(u)) \in \widetilde{AK}_c$. Nous supposerons que

$$\text{(6.1.1)} \qquad \liminf_{n\to\infty} \inf \big\{ |dG_{h_n}|(u,\xi) \;\big|\; (u,\xi) \in X \times \mathbb{R} \text{ tel que } h_n(u) < \xi \big\} > 0.$$

Cette condition peut être satisfaite dans plusieurs cas, voir **[CDM]**. Elle nous permet également d'obtenir les deux propositions suivantes qui sont très importantes. Nous supposerons dans ce qui suit que les couples $\big((h_n)_n, h\big)$ considérés satisfont toujours (6.1.1).

Proposition 6.1.3. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Nous avons que $u \in AK_c$ si et seulement si $(u, h(u)) \in \widetilde{AK}_c$. De plus, si $(u,\xi) \in \widetilde{AK}_c$, alors $\xi = h(u)$.*

Démonstration. Si $u \in AK_c$, on montre aisément par la définition 1.4.4 que $(u, h(u)) \in \widetilde{AK}_c$. Nous avons besoin de (6.1.1) pour montrer que si $(u, h(u)) \in \widetilde{AK}_c$, alors $u \in AK_c$. En effet, soit $(u, h(u)) \in \widetilde{AK}_c$, alors il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ dans $\mathbb{N}$ et il existe $(u_k, \xi_k)_k$ dans $X \times \mathbb{R}$ telles que $u_k \to u$, $\xi_k \to h(u)$ et $|dG_{h_{n_k}}|(u_k, \xi_k) \to 0$. Par (6.1.1), pour k suffisamment grand, $\xi_k = h_{n_k}(u_k)$. Ainsi d'une part, $h_{n_k}(u_k) \to h(u)$ et d'autre part, par la définition 1.4.4, $|dh_{n_k}|(u_k) \to 0$. D'où, $u \in AK_c$. $\square$

Remarque 6.1.4. Pour une fonctionnelle unique h, un analogue de (6.1.1) n'est pas nécessaire pour avoir que $u \in K_c$ si et seulement si $(u, h(u)) \in \widetilde{K_c}$. Nous en avons seulement besoin pour pouvoir affirmer que si $(u, \xi) \in \widetilde{K_c}$, alors $u \in K_c$.

Proposition 6.1.5. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Si le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)^*_c$, alors le couple $\big((G_{h_n})_n, G_h\big)$ satisfait ss-$(PS)^*_c$.*

Démonstration. Soit $(n_k)_k$ une suite strictement croissante et $((u_k, \xi_k))_k$ une suite dans $X \times \mathbb{R}$ telles que

$$(u_k, \xi_k) \in epi(h_{n_k}),\ \ G_{h_{n_k}}(u_k, \xi_k) = \xi_k \to c,\ \ |dG_{h_{n_k}}|(u_k, \xi_k) \to 0.$$

Nous avons donc, utilisant (6.1.1), qu'il existe $\bar{k}$ tel que pour tout $k \geq \bar{k}$, $\xi_k = h_{n_k}(u_k)$. Il s'en suit que $h_{n_k}(u_k) \to c$. La définition 1.4.4 implique aussi que $|dh_{n_k}|(u_k) \to 0$.

Par ss-$(PS)^*_c$, il existe $(k_j)_j$ et $u \in dom(h)$ tels que $u_{k_j} \to u$ et $h(u) = c$. Nous avons alors que $(u_{k_j}, \xi_{k_j}) \to (u, c)$; d'où la conclusion. □

6.2. Théorèmes de déformation

Dans **[CDM]**, Corvellec, Degiovanni et Marzocchi démontrent un théorème de déformation pour des fonctionnelles continues en supposant $(PS)_c$ (théorème 1.4.7). En exploitant la continuité de la fonction graphe, nous pourrons déduire, grâce à celui-ci, un lemme de déformation pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ en supposant la condition ss-$(PS)^*_c$.

Nous supposerons de nouveau que les couples $\big((h_n)_n, h\big)$ considérés satisfont la condition (6.1.1).

Théorème 6.2.1 (Lemme de déformation). *Soient $c \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. Considérons N un voisinage ouvert de AK_c. Supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)^*_c$. Alors il existe $\epsilon \in\,]0, \rho[$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout*

$n \geq m$, il existe des déformations continues

$$\eta_n : [0,1] \times dom(h_n) \to dom(h_n)$$

satisfaisant

(a) $\eta_n(t,u) = u$, *si* $t = 0$ *ou si* $u \notin h_n^{-1}\big([c-2\epsilon, c+2\epsilon]\big)$;

(b) $h_n(\eta_n(t,u)) \leq h_n(u)$;

(c) $\eta_n\big(1, h_n^{c+\epsilon} \setminus N\big) \subset h_n^{c-\epsilon}$;

(d) $\|u - \eta_n(t,u)\| \leq \rho$.

Démonstration. Nous utiliserons la continuité de G_{h_n}. Par la proposition 6.1.3, l'ensemble $\widetilde{N} = (N \times \mathbb{R}) \cap\ epi(h)$ est un voisinage de $\widetilde{AK}_c$. La proposition 6.1.5 implique que $\big((G_{h_n})_n, G_h\big)$ satisfait ss-$(PS)^*_c$. De là, on déduit l'existence de $m \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$ tels que pour tout $n \geq m$,

$$(u,\xi) \in G_{h_n}^{-1}\big([c-2\mu, c+2\mu]\big) \cap B(X \times \mathbb{R} \setminus \widetilde{N}, 2\mu) \Rightarrow |dG_{h_n}|(u,\xi) > \mu.$$

En appliquant le théorème 1.4.7, nous obtenons l'existence de $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues

$$\tilde{\eta}_n = (\tilde{\eta}_n^1, \tilde{\eta}_n^2) : [0,1] \times epi(h_n) \to epi(h_n)$$

satisfaisant

(a) $\tilde{\eta}_n(t,(u,\xi)) = (u,\xi)$, si $t = 0$ ou si $\xi \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$;

(b) $\tilde{\eta}_n^2(t,(u,\xi)) \leq \xi$;

(c) $\tilde{\eta}_n^2(1,(u,\xi)) \leq c - \epsilon$, si $\xi \leq c + \epsilon$ et $u \notin N$;

(d) $\tilde{d}\big((u,\xi), \tilde{\eta}_n(t,(u,\xi))\big) \leq \rho, \quad \forall t \in [0,1], \forall (u,\xi) \in epi(h_n),$

avec $\tilde{d}$ la métrique définie en (1.4.1). Une fois $\tilde{\eta}_n$ donnée, définissons, pour tout $n \geq m$,

$$\eta_n : [0,1] \times dom(h_n) \to dom(h_n)$$

par $\eta_n(t,u) = \tilde{\eta}_n^1\big(t,(u,h_n(u))\big)$. Puisque $\tilde{\eta}_n$ prend ses valeurs dans $epi(h_n)$, nous avons

$$h_n\big(\tilde{\eta}_n^1(t,(u,h_n(u)))\big) \leq \tilde{\eta}_n^2(t,(u,h_n(u))).$$

Nous pouvons aisément déduire les propriétés demandées. $\square$

En procédant de façon analogue à ce que nous avons fait au chapitre 4, nous pouvons obtenir à partir du théorème précédent la propriété de déformation suivante :

Théorème 6.2.2 (Propriété de déformation). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Supposons que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait la condition ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in [a,b]$ et que pour tout $c \in]a,b[$, $AK_c = \emptyset$. Alors, pour tous $\lambda_0, \lambda > 0$, il existe $\epsilon, \gamma > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq m$, il existe des déformations continues*

$$\eta_n : [0,1] \times dom(h_n) \to dom(h_n)$$

satisfaisant

(a) $\|u - \eta_n(t,u)\| \leq \gamma$;

(b) $h_n(\eta_n(t,u)) \leq h_n(u)$;

(c) si $u \in h_n^{-1}\big([a-\epsilon, b+\epsilon]\big) \setminus B(S_b^n, \lambda)$, *alors*

$$\eta_n(1,u) \in h_n^{-1}\big(]-\infty, a-\epsilon]\big) \cup \big(h_n^{-1}\big(]-\infty, a+\epsilon]\big) \cap B(S_a^n, \lambda)\big);$$

avec $S_c^n = B(AK_c, \lambda_0) \cap dom(h_n)$ *pour* $c \in \{a, b\}$.

Il n'est pas surprenant que le théorème 6.2.2 soit similaire au théorème 2.2.2. Il diffère donc du théorème 4.1.4 par le fait que nous considérons à la propriété (c) $B(S_c^n, \lambda)$ au lieu de $B(AK_c, \lambda)$. Ceci vient du fait que nous devons tenir compte des domaines des fonctionnelles h_n. Toutefois, la preuve est analogue à celle du théorème 4.1.4. Remarquons qu'on n'a pas

$$S_c^n = (AK_c) \cap dom(h_n)$$

puisque ces ensembles peuvent être vides même si $AK_c \neq \emptyset$.

6.3. Résultats en présence d'enlacement

Le théorème 6.2.1 nous permet d'avoir comme à la section 5.3 un résultat général d'existence d'une valeur asymptotiquement critique en présence d'enlacement. Ceci grâce au fait que le lemme 5.3.1 est toujours valide même avec des fonctionnelles semi-continues inférieurement. Nous nous intéressons de nouveau aux déformations qui *descendent* les points.

Le théorème suivant se démontre de la même manière que le théorème 5.3.2.

Théorème 6.3.1. *Considérons un couple* $\big((h_n)_n, h\big)$ *satisfaisant (6.1.1). Supposons donné pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *deux paires de sous-ensembles* (B_n, A_n) *et* (Q_n, P_n) *telles que*

(a) (B_n, A_n) *enlace* (Q_n, P_n) *via* $\Gamma_{h_n}(A_n)$ *;*

(b) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\sup_n \sup h_n(A_n) < a \leq \inf_n \inf h_n(Q_n)$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_n) \leq b < \inf_n \inf h_n(P_n);$$

(c) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ *satisfait ss-*$(PS)^*_c$ *pour tout* $c \in [a, b]$.

Posons

$$c_n := \inf_{\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)} \sup h_n(\eta(1, B_n)).$$

Alors tout point d'accumulation de $(c_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est une valeur asymptotiquement critique pour le couple* $\big((h_n)_n, h\big)$. *En particulier, il existe au moins une valeur asymptotiquement critique dans* $[a, b]$.

Remarque 6.3.2. Nous demandons implicitement que, pour tout n, les ensembles B_n, A_n, Q_n et P_n soient des sous-ensembles de $dom(h_n)$. Nous avons alors, pour tout $\eta \in \Gamma_{h_n}(A_n)$, que

$$h_n(\eta(1, u)) \leq h_n(u) \leq b, \text{ pour tout } u \in B_n \subset dom(h_n),$$

ce qui implique que $\eta(1, B_n) \subset dom(h_n)$. Utilisant le lemme 5.3.1, nous avons que $c_n \geq \inf h_n(Q_n)$ et donc que $c_n \in [a, b]$.

Démonstration. L'ensemble des points d'accumulation de la suite $(c_n)_n$ n'est pas vide puisque $[a, b]$ est compact. Soit c un point d'accumulation de $(c_n)_n$ et supposons que $AK_c = \emptyset$. Fixons

$$\delta \in \big]0, \min\big\{(a - \sup_n \sup h_n(A_n))/2, (\inf_n \inf h_n(P_n) - b)/2\big\}\big[.$$

En appliquant le théorème 6.2.1 pour $N = \emptyset$ et en procédant comme au théorème 5.3.2, nous obtenons une contradiction. $\square$

Pour un couple de fonctionnelles semi-continues inférieurement, la notion de couple borné inférieurement introduite à la section 5.1 est toujours valide. Dans le cas semi-continu inférieurement et sous la condition (6.1.1), nous avons aussi un résultat de trois points asymptotiquement critiques semblable au théorème 5.3.5.

Considérons $X = X_1 \oplus X_2$ avec X_1 et X_2 des espaces de Banach non triviaux de dimension possiblement infinie et une suite de fonctionnelles $h_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continues inférieurement telles que

(6.3.1) $\quad$ $dom(h_n)$ est un sous-espace fermé de dimension finie pour tout n.

Théorème 6.3.3. *Soient $X = X_1 \oplus X_2$ et un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfaisant (6.1.1) et (6.3.1). Supposons que*

(a) il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $r, R > 0$ tels que

$$\sup_n \sup h_n(S_1(r) \cap dom(h_n)) < a \leq \inf_n \inf h_n(B_2(R))$$
$$\leq \sup_n \sup h_n(B_1(r) \cap dom(h_n)) \leq b < \inf_n \inf h_n(S_2(R)),$$

et la fonction h satisfait $\sup h(S_1(r) \cap \ dom(h)) < a$ et $\inf h(S_2(R)) > b$;

(b) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ satisfait ss-$(PS)_c^*$ pour tout $c \in \mathbb{R}$;

(c) pour tout borné $B \subset X$,

$$\sup_n \sup h_n(B \cap dom(h_n)) < \infty;$$

(d) le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ est borné inférieurement par d et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\limsup_{n \to \infty} \sup h_n(B(AK_d, \lambda_0) \cap dom(h_n)) < a.$$

Alors il existe au moins trois points asymptotiquement critiques pour le couple $\big((h_n)_n, h\big)$.

Démonstration. Nous procédons comme au théorème 5.3.5. Puisque par (d), le couple est borné inférieurement par d, il existe $u_0 \in AK_d$.

Même si les dimensions de X_1 et X_2 sont possiblement infinies, le théorème 6.3.1 nous fournit également l'existence d'une valeur asymptotiquement critique $c \in [a, b]$. En effet, par hypothèse, le sous-espace $dom(h_n)$ est de dimension finie. Aussi, en utilisant la proposition A.5, nous avons, pour tout n, que la paire d'ensembles $\big(B_1(r) \cap \; dom(h_n),\; S_1(r) \cap \; dom(h_n)\big)$ enlace la paire $\big(B_2(R) \cap \; dom(h_n),\; S_2(R) \cap \; dom(h_n)\big)$. Nous avons alors que l'intersection $B_1(r) \cap B_2(R) \cap dom(h_n)$ n'est pas vide et donc que

$$\begin{aligned}\sup_n \sup h_n(S_1(r) \cap dom(h_n)) < a \leq \inf_n \inf h_n(B_2(R) \cap dom(h_n)) \\ \leq \sup_n \sup h_n(B_1(r) \cap dom(h_n)) \leq b < \inf_n \inf h_n(S_2(R) \cap dom(h_n)).\end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème 6.3.1. De nouveau, quitte à restreindre le problème au couple $\big((h_{n_k})_k, h\big)$ pour $(n_k)_k$ telle que $\inf_X h_{n_k} \to d$, nous pouvons supposer que c est une valeur asymptotiquement critique obtenue par le couple $\big((h_{n_k})_k, h\big)$. Il existe donc $u_1 \in AK_c$ pour certain $c \in [a, b]$. Supposons que $u_0 \in AK_d$ et $u_1 \in AK_c$ soient les seuls points asymptotiquement critiques. Nous avons de nouveau que $d < a \leq c$,

$$d(AK_a, S_1(r)) > 0 \text{ et } d(AK_b, S_2(R)) > 0.$$

Nous pouvons trouver par (d), $\delta > 0$ tel que, pour k suffisamment grand,

$$h_{n_k}(u) \leq d + \delta < a, \quad \forall u \in B(u_0, \lambda_0) \cap dom(h_{n_k}).$$

Fixons

$$\lambda \in \;\big]0, \min\big\{\delta, \lambda_0, r, R, d(AK_a, S_1(r))/2, d(AK_b, S_2(R))/2\big\}\big[.$$

En appliquant le théorème 6.2.2 sur $[d, a]$ avec ce λ, nous obtenons l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n_k \geq m$, il existe des déformations

$$\eta_{n_k} : [0, 1] \times dom(h_{n_k}) \to dom(h_{n_k}).$$

satisfaisant les conclusions du théorème 6.2.2. Nous déduisons l'existence d'une application

$$\phi_{n_k} : \partial([0,1] \times B_{1,n_k}(r)) \to dom(h_{n_k})$$

où $B_{1,n_k}(r) := B_1(r) \cap \ dom(h_{n_k})$. On prolonge ϕ_{n_k} sur $B_{1,n_k}(r)$ par Φ_{n_k}. Nous posons alors

$$\begin{aligned} A_{n_k} &= \phi_{n_k}\big(\partial([0,1] \times B_{1,n_k}(r))\big), \\ B_{n_k} &= \Phi_{n_k}\big([0,1] \times B_{1,n_k}(r)\big), \\ Q_{n_k} &= S_2(R) \cap dom(h_{n_k}) \text{ et } P_{n_k} = \emptyset. \end{aligned}$$

Nous construisons alors deux paires telles que (B_{n_k}, A_{n_k}) enlace (Q_{n_k}, P_{n_k}) pour tout k tel que $n_k \geq m$.

Utilisant un analogue du théorème 5.1.4 (qui résulte de la propriété de déformation et du fait que AK_c est compact), nous pouvons trouver $l > r$ tel que

$$A_{n_k} \setminus \big(\{0\} \times B_{1,n_k}(r)\big) \subset h^a_{n_k} \subset \big(B(0,l) \cap dom(h_{n_k})\big)$$

et

$$B_{n_k} \subset \big(B(0,l) \cap dom(h_{n_k})\big).$$

En procédant comme au théorème 5.3.5 et en appliquant le théorème 6.3.1, nous obtenons alors une contradiction. □

6.4. Commentaires

Le fait d'avoir considéré des fonctionnelles semi-continues inférieurement dans les sections précédentes offre l'avantage, en plus d'être plus général, de pouvoir récupérer le cas traité au chapitre 2 lorsque $\{X_n\}_n$ est une famille de sous-espaces fermés d'un espace de Banach X avec

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X \text{ et } X = \overline{\bigcup_n X_n}.$$

Considérons $h : X \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et posons

$$\text{(6.4.1)} \qquad h_n(x) = \begin{cases} h_{|X_n}(x) & \text{si } x \in X_n, \\ +\infty & \text{sinon;} \end{cases}$$

et considérons le couple $\big((h_n)_n, h\big)$. Nous avons alors que la condition ss-$(PS)^*_c$ est équivalente à la condition $(PS)^*_c$. Ceci montre que la condition $(PS)^*_c$ est un cas particulier de la condition ss-$(PS)^*_c$.

Nous pouvons déduire certains résultats d'existence de points critiques avec $(PS)^*_c$ comme corollaires de résultats de points asymptotiquement critiques. Par exemple, le théorème 2.3.2 suit directement comme corollaire du théorème 6.3.3. En effet, il est clair que le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ ainsi défini satisfait (6.3.1) si h vérifie les conditions du théorème 2.3.2. Les hypothèses (a), (b) et (c) du théorème 6.3.3 suivent directement. Si h est bornée inférieurement par d, alors (d) résulte par continuité en utilisant le fait que $\bigcup_n X_n$ est dense dans X et que, pour tout n, $X_n \subset X_{n+1}$. De plus, dans cette situation, un point asymptotiquement critique est un point critique de h. Nous devons donc seulement justifier que (6.1.1) est satisfaite. Toutefois, nous pouvons utiliser la proposition 1.4.6 car $h_n(x) = h(x) + I_{X_n}(x)$ où

$$I_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X_n, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par celle-ci, nous avons que, pour tout n, si $u \in dom(h_n)$ et $h_n(u) < \xi$, alors $|dG_{h_n}|(u, \xi) = 1$. Donc, la condition (6.1.1) est vérifiée.

Ceci étant vérifié, nous avons donc montré que la théorie développée au chapitre 6 généralise celle du chapitre 2. Lorsque les fonctionnelles h_n sont dans $C^1(X, \mathbb{R})$ pour tout n, la condition (6.1.1) est aussi satisfaite. On généralise donc également la théorie des chapitres 3, 4 et 5.

Dans **[MM2]**, on présente en annexe une théorie similaire pour des fonctionnelles non-différentiables. C'est-à-dire, on énonce la condition ss-$(PS)^*_c$ pour des couples $\big((h_n)_n, h\big)$ avec h_n des fonctions φ_n-convexes d'ordre 2 pour certain φ_n (voir **[MT]**). Marino et Mugnai ont pu ainsi obtenir certains résultats d'existence de points asymptotiquement critiques en utilisant la catégorie relative et en se limitant à cette classe de fonctions. Lorsqu'on considère un espace de Hilbert et en utilisant le théorème 4.4 de **[CDM]**, nous avons, pour des fonctionnelles de cette classe, que la condition (6.1.1) est aussi satisfaite. La théorie présentée aux sections 6.1 à 6.3 prend donc également en compte ce type particulier de couples.

CONCLUSION

Nous avons étudié les points asymptotiquement critiques pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ avec $(h_n)_n$ une suite de fonctionnelles. Ceci nous a entre autres permis de développer des arguments de type minimax pour des suites de fonctionnelles.

En premier lieu, nous avons rappeler quelques résultats classiques concernant le cas particulier où $h_n = h_{|X_n}$ avec h une fonctionnelle de classe C^1 et X_n un sous-espace de l'espace de Banach X. Ces différents résultats montrent qu'il est possible d'obtenir l'existence de points critiques pour la fonctionnelle h en étudiant le comportement asymptotique de la suite de fonctionnelles $(h_n)_n$.

Nous avons par la suite considéré des couples $\big((h_n)_n, h\big)$ où, d'une part, les fonctionnelles de la suite $(h_n)_n$ sont continûment différentiables et, d'autres part, semi-continues inférieurement et où h est quelconque. Dans ces deux cas, nous avons obtenu plusieurs nouveaux résultats d'existence et de multiplicité de points asymptotiquement critiques pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$. Les théorèmes 5.3.2 et 6.3.1 sont généraux et nous ont permis d'obtenir entre autres comme corollaires, sous l'hypothèse que le couple est borné inférieurement, des résultats de trois points asymptotiquement critiques. Le théorème 5.4.1 ainsi que les exemples de la section 3.2 montrent qu'il peut également être avantageux de considérer la condition plus faible s-$(PS)^*_c$ même si nous obtenons de façon générale moins de points asymptotiquement critiques. Nous avons également montré que la théorie exposée au chapitre 6 généralise celle des chapitres 2 à 5 et unifie la théorie des points asymptotiquement critiques et la théorie *classique* des points critiques. Pour alléger la présentation, nous avons considéré au chapitre 6 des couples $\big((h_n)_n, h\big)$.

Nous aurions pu tout aussi bien considérer des couples $\big((h_\alpha)_\alpha, h\big)$ avec $\alpha \in \Lambda$ un ensemble ordonné filtrant à droite.

Nous sommes persuadés que les résultats obtenus présentent un intérêt dans la théorie générale des points critiques et des applications de celle-ci dans celle des équations différentielles. Ils permettent en particulier d'appliquer la méthode de minimax à des suites et des couples de fonctionnelles. Par conséquent, ces arguments permettraient d'étudier des problèmes d'équations différentielles dont la fonctionnelle associée manque de continuité. Il peut aussi s'avérer, lorsque les fonctionnelles sont associées à des équations différentielles, que les points asymptotiquement critiques trouvés soient, à défaut d'être des points critiques de la fonctionnelle h, des solutions faibles au sens du calcul des variations, voir **[MM2]**.

Jusqu'à présent, la théorie des points asymptotiquement critiques n'a été appliquée que pour des inégalités variationnelles inversées **[M]**, **[MM2]**. Nous pouvons imaginer d'autres types d'applications. Pensons par exemple à un problème elliptique

$$(P) \qquad\qquad -\Delta u(x) = f(x, u(x)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N$$

et la suite de problèmes

$$(P_n) \qquad\qquad -\Delta u(x) = f_n(x, u(x)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^N.$$

Le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ défini sur $H_0^1(\Omega)$ avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ par

$$h(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u^2(x) - \Big(\int_0^{u(x)} f(x,s)ds\Big)\, dx,$$
$$h_n(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u^2(x) - \Big(\int_0^{u(x)} f_n(x,s)ds\Big)\, dx$$

pourrait être étudié selon les propriétés des fonctionnelles f_n et f et la théorie présentée dans les chapitres précédents. Nous pourrions également faire varier le domaine en considérant le couple $\big((h_n)_n, h\big)$ défini par

$$h(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2}\nabla u^2(x) - \Big(\int_0^{u(x)} f(x,s)ds\Big)\, dx,$$
$$h_n(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{1}{2}\nabla u^2(x) - \Big(\int_0^{u(x)} f_n(x,s)ds\Big)\, dx$$

où

$$f_n(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \text{si } \|x\| < n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait, plusieurs questions restent ouvertes et d'autres façons d'appliquer ces arguments minimax pour un couple $\big((h_n)_n, h\big)$ peuvent être envisagées. La prochaine étape consisterait à appliquer cette théorie de points asymptotiquement critiques à des problèmes particuliers d'équations différentielles.

Annexe A

THÉORIE DU DEGRÉ DE BROUWER

Nous rappelons la définition du degré de Brouwer utilisé dans les chapitres 1 et 5 ainsi que quelques propriétés. Nous montrons en outre que les paires d'ensembles (B_n, A_n) et (Q_n, P_n) définies dans la preuve du théorème 5.3.5 s'enlacent.

Le lecteur intéressé peut aussi consulter **[K]** ou **[Z]** où une théorie plus élaborée est développée et où les propositions énoncées sont démontrées. Nous suivons essentiellement **[P]** où la preuve de l'enlacement est donnée.

Définition A.1. (Degré de Brouwer). Soient $U \in \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $b \in \mathbb{R}^N$. Alors un *degré* est une application $deg(\cdot, U, b)$, à valeurs entières non négatives, définie pour tout $\phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R})$, telle que $b \notin \phi(\partial U)$ et qui satisfait les propriétés suivantes :

(a) $deg(id, U, b) = 1$ si $b \in U$, $deg(id, U, b) = 0$ si $b \notin \overline{U}$;

(b) $deg(\phi, U, b) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in U$ tel que $\phi(x) = b$;

(c) (additivité-excision) : Si $U_1, U_2 \subset U$ sont des ensembles ouverts tels que $U_1 \cap \ U_2 = \emptyset$ et $b \notin \phi(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, alors

$$deg(\phi, U, b) = deg(\phi, U_1, b) + deg(\phi, U_2, b);$$

(d) (continuité) $deg(\psi, U, b) = deg(\phi, U, b)$ pour ψ près de ϕ dans la norme du suprémum sur $C(\overline{U}, \mathbb{R})$.

Proposition A.2. *Si $H \in C([0,1] \times \overline{U}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin H\big([0,1] \times \partial U\big)$, alors*

$$deg\big(H(t,\cdot), U, b\big) = cte, \quad \forall t \in [0,1].$$

Corollaire A.3. *Si ψ, $\phi \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^N)$, $\psi = \phi$ sur ∂U et $b \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial U)$, alors*

$$deg(\phi, U, b) = deg(\psi, U, b).$$

Théorème A.4. *Soit $H \in C([0,1] \times \overline{U}, \mathbb{R}^N)$. Supposons que*

(a) $b \notin H\big([0,1] \times \partial U\big)$;

(b) $deg\big(H(0,\cdot), U, b\big) \neq 0$.

Alors il existe un continuum $C \subset [0,1] \times U$ tel que pour tout $(t,x) \in C$, $H(t,x) = b$ et pour tout $t \in [0,1]$, il existe $x \in U$ tel que $(t,x) \in C$.

Par souçi de complétude, nous montrons également un exemple du chapitre 1 utilisé au chapitre 5.

Proposition A.5. *Soit $X = X_1 \oplus X_2$ avec $dim(X_1) < \infty$ et soient $r, R > 0$. Alors $\big(B_1(r), S_1(r)\big)$ enlace $\big(B_2(R), S_2(R)\big)$.*

Démonstration. Soit $\eta \in \Gamma(S_1(r))$. Clairement, par la proposition A.2, $0 \notin \pi_1\big(\eta([0,1] \times S_1(r))\big)$ et $deg\big(H(1,\cdot), B_1(r), 0\big) = deg\big(id, B_1(r), 0\big) = 1$, où $H : [0,1] \times B_1(r) \to X_1$ est donnée par $H(t,x) = \pi_1\big(\eta(t,x)\big)$ où π_1 est la projection de X sur X_1. Par le théorème A.4, nous pouvons choisir un continuum $C \subset [0,1] \times B_1(r)$ tel que pour tout $(t,x) \in C$, $\eta(t,x) \in X_2$ et pour tout $t \in [0,1]$, il existe $x \in B_1(r)$ tel que $(t,x) \in C$.

Comme η est continue, $\eta(C)$ est connexe. Si $\eta(C) \subset B_2(R)$, alors la condition (1) de la définition 1.2.3 est vérifiée. Si, au contraire, il existe $(t,x) \in C$ tel que $\|\eta(t,x)\| > R$, comme $\|\eta(0,y)\| < R$ pour $(0,y) \in C$, alors, par la connexité de $\eta(C)$, il existe $(t',x') \in C$ tel que $\|\eta(t',x')\| = R$ et donc, la condition (2) de la définition 1.2.3 est vérifiée. □

Théorème A.6. *Les paires d'ensembles (B_{n_k}, A_{n_k}) et (Q_{n_k}, P_{n_k}) définies dans la preuve du théorème 5.3.5 sont telles que (B_{n_k}, A_{n_k}) enlace (Q_{n_k}, P_{n_k}) via $\Gamma_{h_{n_k}}(A_{n_k})$ pour tout k.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour un seul n_k. Pour simplifier la notation, soient $\phi := \phi_{n_k}, \Phi := \Phi_{n_k}$, $B := B_{n_k}$, $A := A_{n_k}$, $Q := Q_{n_k}$ et $P := P_{n_k}$. Soit $\eta \in \Gamma_{h_{n_k}}(A)$. Nous voulons montrer que

$$\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset.$$

Définissons $\psi : X \to X$ par $\psi(u) = \eta(1, u)$. Nous devons donc montrer que

$$\psi(B) \cap Q \neq \emptyset.$$

Posons $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $\psi_1(X) \subset X_1$ et $\psi_2(X) \subset X_2$ et définissons $H : \big([0,1] \times B_1(r)\big) \times [0,1] \to \mathbb{R} \times X_1$ par

$$H\big((t,u),\lambda\big) = \Big(\lambda\|\psi(\Phi(t,u))\| + (1-\lambda)\Big(\frac{\|u\|R}{r} + 2tR\Big) - R, \quad \psi_1(\Phi(t,u))\Big).$$

Remarquons que $H\big((t,u),1\big) = (0,0)$ est équivalent à $\psi(\Phi(t,u)) \in S_2(R) = Q$.

En appliquant le degré de Brouwer sur $[0,1] \times B_1(r) \subset [0,1] \times X_1$ qui est de dimension finie, nous allons montrer qu'il existe $(t,u) \in [0,1] \times B_1(r)$ tel que $H\big((t,u),1\big) = (0,0)$. Montrons d'abord que

$$H\big((t,u),\lambda\big) \neq (0,0), \quad \forall (t,u) \in \partial\big([0,1] \times B_1(r)\big) \text{ et } \lambda \in [0,1].$$

Nous avons, puisque $\eta \in \Gamma_{h_{n_k}}(A)$, que

$$H\big((0,u),\lambda\big) = (0,0) \Leftrightarrow \Big(\lambda\|u\| + (1-\lambda)\frac{\|u\|R}{r} - R, \quad u\Big) = (0,0);$$

ce qui est impossible. Aussi, pour tout $(t,u) \in \partial\big([0,1] \times B_1(r)\big) \setminus \big(\{0\} \times B_1(r)\big)$, nous avons que $\psi_1\big(\phi(t,u)\big) = 0$ implique $\|\psi(\Phi(t,u))\| > R$ car

$$\psi\big(\Phi(t,u)\big) = \Phi(t,u) \notin B_2(R).$$

Donc

$$\lambda\|\psi(\Phi(t,u))\| + (1-\lambda)\Big(\frac{\|u\|R}{r} + 2tR\Big) - R > 0$$

et donc que $H\big((t,u),\lambda\big) \neq (0,0)$.

Conséquemment, par la proposition A.2,

$$deg\big(H(\cdot,1), [0,1] \times B_1(r), 0\big) = deg\big(H(\cdot,0), [0,1] \times B_1(r), 0\big).$$

Soit

$$G\big((t,u),\lambda\big) := \Big(\frac{\|u\|R}{r} + 2tR - R, \quad \lambda\psi_1(\Phi(t,u)) + (1-\lambda)u\Big).$$

Nous avons $G(\cdot,1) = H(\cdot,0)$. Pour tout $(t,u) \in \partial([0,1] \times B_1(r))$, $\lambda \in [0,1]$, nous avons que $G\big((t,u),\lambda\big) \neq (0,0)$. De nouveau par la proposition A.2, nous avons que

$$deg\big(G(\cdot,1),[0,1] \times B_1(r),0\big) = deg\big(G(\cdot,0),[0,1] \times B_1(r),0\big).$$

Finalement, soit $K : \big([0,1] \times B_1(r)\big) \times [0,1] \to \mathbb{R} \times X_1$ définie par

$$K\big((t,u),\lambda\big) = \lambda G\big((t,u),0\big) + (1-\lambda)(t-1/2,u).$$

Nous avons que $G(\cdot,0) = K(\cdot,1)$ et nous déduisons, par la proposition A.2, que

$$deg\big(G(\cdot,1),[0,1] \times B_1(r),0\big) = deg\big(K(\cdot,0),[0,1] \times B_1(r),0\big) = 1$$

car $K(\cdot,0) = id - (1/2,0)$. Nous avons donc que

$$deg\big(H(\cdot,1),[0,1] \times B_1(r),0\big) = 1,$$

ce qui implique, par la définition A.1(b), l'existence de $(t,u) \in [0,1] \times B_1(r)$ tel que $H\big((t,u),1\big) = (0,0)$. Nous avons donc montré que (B,A) enlace (Q,P). $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[AR] Ambrosetti A. et Rabinowitz P.H., *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[B] Benci V., *On Critical Point Theory for Indefinite Functionals in the Presence of Symmetries*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 533-572.

[BN] Brezis H. et Nirenberg L., *Remarks on Finding Critical Points*, Comm. Pure Appl. Math. **64** (1991), 939-963.

[C1] Corvellec J.-N., *Sur un principe général de type min-max*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I **311** (1990), 443-446.

[C2] Corvellec J.-N., *Quantitative Deformations Theorems and Critical Point Theory*, Pacific J. Math. **187** (1999), 263-279.

[C3] Corvellec J.-N., *On Critical Point Theory with the $(PS)^*$ Condition*, Calculus of Variations and differential equations., A. Ioffe, S. Reich and I. Shafrir Eds. Chapman-Hall/ CRC Research Notes in Math. Series, vol.410, CRC Press, Boca Raton, 2000, 65-81.

[CDM] Corvellec J.-N., Degiovanni M. et Marzocchi M., *Deformation Properties for Continuous Functionals and Critical Point Theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 151-171.

[DM] Degiovanni M. et Marzocchi M., *A Critical Point Theory for Nonsmooth Functionals*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **167** (1994), 73-100.

[F1] Frigon M., *On an New Notion of Linking and Application to Elliptic Problems at Resonance*, J. Differential Equations **153** (1999), 96-120.

[F2] Frigon M., *Remarques sur l'enlacement en théorie des points critiques pour des fonctionnelles continues*, Canad. Math. Bull. À paraître.

[K] Kavian O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathematiques & Applications 13, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[LL] Li S. et Liu J.Q., *Nontrivial Critical Points for Asymptotically Quadratic Function*, J. Math. Anal. Appl. **165** (1992), 333-345.

[LW] Li S. et Willem M., *Applications of Linking to Critical Point Theory*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 6-32.

[MM1] Marino A. et Mugnai D., *Asymptotically Critical Points and theirs Applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **19** (2002), 29-38.

[MM2] Marino A. et Mugnai D., *Asymptotical Multiplicity and Some Reversed Variational Inequalities*, Univ. di Pisa, prépublication 2001.

[MS] Marino A. et Saccon C., *Nabla Theorems and Multiple Solutions for Some Non Cooperatives Elliptic Systems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **17** (2001), 213-237.

[MT] Marino A. et Tosques M., *Some Variational Problems with Lack of Convexity and Some Partial Differential Inequalities*, Methods of nonconvex analysis, Lecture Notes in Math., 1446, Springer, Berlin, 1990, 58-83.

[M] Mugnai D., *On a reversed variational inequality*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **17** (2001), 321-357.

[P] Picard F., *Généralisation de résultats sur l'enlacement local en théorie des points critiques*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal (1999).

[Ra] Rabinowitz P.H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Series Math., vol. XV, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 185-212.

[Ro] Robinson J.C., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and Theory of Global Attractors*, Cambridge Texts Appl. Math., Cambridge, 2001.

[Sc] Schechter M., *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[St1] Struwe M., *Quasilinear Elliptic Eigenvalue Problems*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 509-527.

[St2] Struwe M., *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Sz] Szulkin A., *A relative Category and Applications to Critical Point Theory for Strongly Indefinite Functionals*, Nonlinear Analysis TMA **15** (1990), 725-739.

[W] Willem M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Z] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.