

Université de Montréal

Calibration de la distorsion radiale

par

Alexandre Gauthier

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en informatique

novembre, 2005

© Alexandre Gauthier, 2005



QA

76

U54

2006

V. 014

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :
Calibration de la distorsion radiale

présenté par

Alexandre Gauthier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Neil F. Stewart
(Président-rapporteur)

Sébastien Roy
(Directeur de recherche)

Max Mignotte
(Membre du jury)

Mémoire accepté le 23 janvier 2006

RÉSUMÉ

La distorsion radiale est généralement l'aberration la plus visible dans des images provenant d'une caméra. Lorsqu'un objet droit dans le monde est pris en photo, le courbure de cet objet dans l'image est principalement dûe à la distorsion radiale. Comme la vision par ordinateur se base sur ces images pour inférer diverses informations sur le monde, il est important de quantifier cette déformation.

Ce mémoire s'intéresse à la calibration de la distorsion radiale. Par conséquent, le but de l'algorithme proposé est de mesurer la quantité de distorsion radiale dans une ou plusieurs images provenant de la même lentille.

La méthode décrite dans ce document se différencie des autres sur plusieurs points. Premièrement, elle est basée sur les propriétés géométriques de la distorsion radiale. Deuxièmement, la résolution est entièrement linéaire. Troisièmement, le centre de distorsion est calculé et non fixé. Finalement, aucun modèle de distorsion radiale n'est utilisé, ce qui permet de calibrer des fonctions plus générales.

Mots-clé: Calibration de caméras, distorsion radiale

ABSTRACT

One of the most visible aberrations in an image taken with a camera is radial distortion. When straight objects in the real world are projected onto an image as curved objects, this curvature is generally due to radial distortion. Since computer vision uses these images for measurement, it is important to quantify this deformation.

This thesis concentrates on radial-distortion calibration. Hence, the goal of the algorithm described is to measure the amount of radial distortion in one or many images acquired with the same lens.

The method reported in this document differs from others in several ways. First, it is based on the radial distortion's geometric properties. Second, the problem is solved with linear equations. Third, the center of distortion is computed, not fixed. Finally, the solution isn't model-based; consequently, calibration of more general functions is possible.

Keywords: Camera calibration, radial distortion

TABLE DES MATIÈRES

Liste des Figures	iii
Liste des Tables	v
Chapitre 1: Introduction	1
Chapitre 2: Calibration de caméras	4
2.1 Modèle de caméra perspective	4
2.2 Déplacement du point principal dans l'image	6
2.3 Facteur d'agrandissement	7
2.4 Orientation et position de la caméra	9
2.5 Modèle complet	11
2.6 Distorsion Radiale	12
Chapitre 3: Méthodes actuelles	17
3.1 Article: A flexible new technique for camera calibration	17
3.2 Article: Straight lines have to be straight	20
3.3 Conclusion	23
Chapitre 4: Propriétés géométriques de la distorsion radiale	25
4.1 Symétrie	25
4.2 Fonction monotone strictement croissante	27
Chapitre 5: Calibration de la distorsion radiale avec des droites	30
5.1 Description de la contrainte de la droite	31

5.2	Détection du centre de distorsion	34
5.3	Extraction de la fonction de distorsion	36
Chapitre 6: Implémentation proposée		45
6.1	Méthode d'extraction d'une courbe	45
6.2	Représentation de la courbe	49
6.3	Symétrie	53
6.4	Calcul du centre de distorsion	56
6.5	Extraction de la fonction de distorsion	58
Chapitre 7: Résultats		62
7.1	Mesure de colinéarité	62
7.2	Évaluation de l'extraction des points de la courbe	66
7.3	Évaluation de la représentation de la courbe	66
7.4	Évaluation de la détection du centre de distorsion	69
7.5	Évaluation de la fonction de distorsion	71
7.6	Comparaison avec des images réelles contenant peu de distorsion radiale	77
7.7	Comparaison avec des images contenant beaucoup de distorsion radiale	81
Chapitre 8: Conclusion		88
Références		90

LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple d'erreur engendrée par la distorsion radiale	3
2.1	Modèle simple de projection	5
2.2	Modèle simple de projection avec déplacement du point principal	8
2.3	Relation entre deux systèmes 3D	10
2.4	Exemple de figure contenant de la distorsion radiale	13
2.5	Exemple de déplacement radial	14
4.1	Symétrie conservée après la distorsion radiale	27
4.2	Exemple d'image où l'ordre des points est changé	28
4.3	Exemple de caméra qui change l'ordre des points	29
5.1	Projection d'une droite dans une image	31
5.2	Symétrie de la courbe résultant de la distorsion d'une droite	33
5.3	Exemple réel de détection du centre de distorsion	35
5.4	Nouvelle formulation de la distorsion radiale	37
5.5	Exemple où un rayon n'intersecte pas une courbe	41
5.6	Relation entre le rayon avec et sans distorsion	44
6.1	Exemple de courbe à extraire	46
6.2	Bordure synthétique et résultat de l'application d'un laplacien	47
6.3	Interpolation analytique du maximum	49
6.4	Coût de symétrie	55
7.1	Distance entre un point et une droite	63

7.2	Écart moyen pour 100 droites synthétiques	67
7.3	Écart maximum pour 100 droites synthétiques	67
7.4	Relation entre le degré d'une courbe et le σ_{moy}^2	69
7.5	Distance entre les axes de symétrie et le vrai centre de distorsion	72
7.6	Exemple de mesure de colinéarité	73
7.7	Relation entre la distance d'un axe avec le vrai centre et la colinéarité de la courbe	74
7.8	Fonction de distorsion retrouvée: exemple synthétique	75
7.9	Différence entre la fonction réelle et la fonction retrouvée	76
7.10	Fonction retrouvée pour un exemple réel	79
7.11	Comparaison entre les méthodes: exemple avec peu de distorsion	82
7.12	Exemple de droite projetée dans une caméra avec une lentille 3.5mm	83
7.13	Fonction par morceaux retrouvée pour un exemple réel utilisant la lentille 3.5mm	85
7.14	Fonction retrouvée pour l'exemple réel utilisant la lentille 3.5mm	85
7.15	Comparaison entre les méthodes: exemple avec beaucoup de distorsion	86
7.16	Exemple d'image avec et sans distorsion	87

LISTE DES TABLES

7.1	Distance entre le vrai centre et le centre calculé	70
7.2	Comparaison entre les centres trouvés selon les différentes méthodes .	78
7.3	Moyenne des écarts moyens.	80
7.4	Comparaison entre les centres trouvés avec des images contenant beaucoup de distorsion.	83
7.5	Moyenne des écarts moyens.	84

REMERCIEMENTS

Je souhaite remercier tous ceux qui m'ont apporté le support si nécessaire à la création de cette thèse.

Chapitre 1

INTRODUCTION

La vision par ordinateur est une discipline qui englobe une variété de domaines. Par exemple, la stéréo-vision s'intéresse à l'étude de la relation entre plusieurs caméras dans le but d'inférer des structures 3D par rapport à la scène visible. Le flux optique tente d'identifier le ou les mouvements apparents dans une séquence vidéo. La calibration de caméras établit la relation entre le monde 3D et les points d'une image 2D. Malgré la dissemblance notable dans l'aboutissement de ces différents domaines, la source est toujours la même: les images.

L'acquisition des images se fait selon différents moyens, en fonction de ce qui est observé. Habituellement, un capteur est placé derrière un système de lentilles. Le rôle de ce dernier est de faire converger les rayons lumineux vers le capteur le plus fidèlement possible, c'est-à-dire suivant les principes de l'optique des lentilles minces. Dans le cas de systèmes de lentilles réels, cette perfection est impossible à atteindre. En effet, l'épaisseur des lentilles et l'ajout de diaphragmes entraînent inévitablement des aberrations telles l'aberration sphérique, la coma, la distorsion, etc. Les fabricants de lentilles tentent de réduire le plus possible ces anomalies, principalement les aberrations qui affectent la netteté des images, par exemple l'aberration sphérique et la coma. La distorsion produit un déplacement des points dans l'image sans toutefois affecter la qualité.

La distorsion radiale, qui déplace les points radialement par rapport à un point central, est sans aucun doute l'aberration la plus visible dans les images. Lorsque des

images contenant de la distorsion radiale sont utilisées pour effectuer des mesures, ce déplacement des points, s'il est négligé, affecte grandement les algorithmes. Prenons un exemple de la stéréo-vision pour illustrer ce problème. Soient deux caméras de centres o_1 et o_2 placées côte à côte (voir figure 1.1). Un point P de la scène est projeté sur les images aux points p_1 et p_2 . La stéréo-vision utilise l'emplacement de p_1 et p_2 dans les images et la séparation entre o_1 et o_2 pour calculer la profondeur du point P . Cependant, si la lentille contient de la distorsion radiale, les points observés dans les images ne sont pas p_1 et p_2 , mais un déplacement radial de ceux-ci par rapport aux centres de distorsion d_1 et d_2 vers les nouveaux points p'_1 et p'_2 . On constate que l'utilisation des points p'_1 et p'_2 pour calculer la profondeur de P ne révélera pas la profondeur réelle de P , mais bien celle d'un autre point P' . Pour remédier à de telles erreurs, il est essentiel de quantifier ce déplacement, c'est-à-dire de calibrer la distorsion radiale.

La calibration de la distorsion radiale a longtemps été associée à la calibration générale d'une caméra. En effet, une calibration de caméra fidèle à la réalité nécessite généralement que la distorsion radiale soit considérée. Cependant, le contraire n'est pas toujours vrai: il est possible, comme nous verrons dans ce mémoire, de calibrer la distorsion radiale sans aucune information sur la caméra. Les deux types de calibration étant très liées, le chapitre 2 se consacre à définir la calibration de caméras ainsi que la distorsion radiale. Le chapitre 3 décrit deux articles importants concernant la calibration de la distorsion radiale. Le premier exige la calibration complète de la caméra tandis que le deuxième s'applique entièrement à la distorsion radiale. Le chapitre suivant pose les bases géométriques nécessaires à l'édification de la méthode proposée dans ce travail. Le chapitre 5 contient la théorie élaborée qui permet de calibrer la distorsion radiale. Le chapitre 6 décrit une implémentation complète et efficace de la théorie présentée. Finalement, le chapitre 7 fournit une évaluation de chaque étape de l'algorithme proposée ainsi que des comparaisons avec les deux méthodes de calibration décrites dans le chapitre 3.

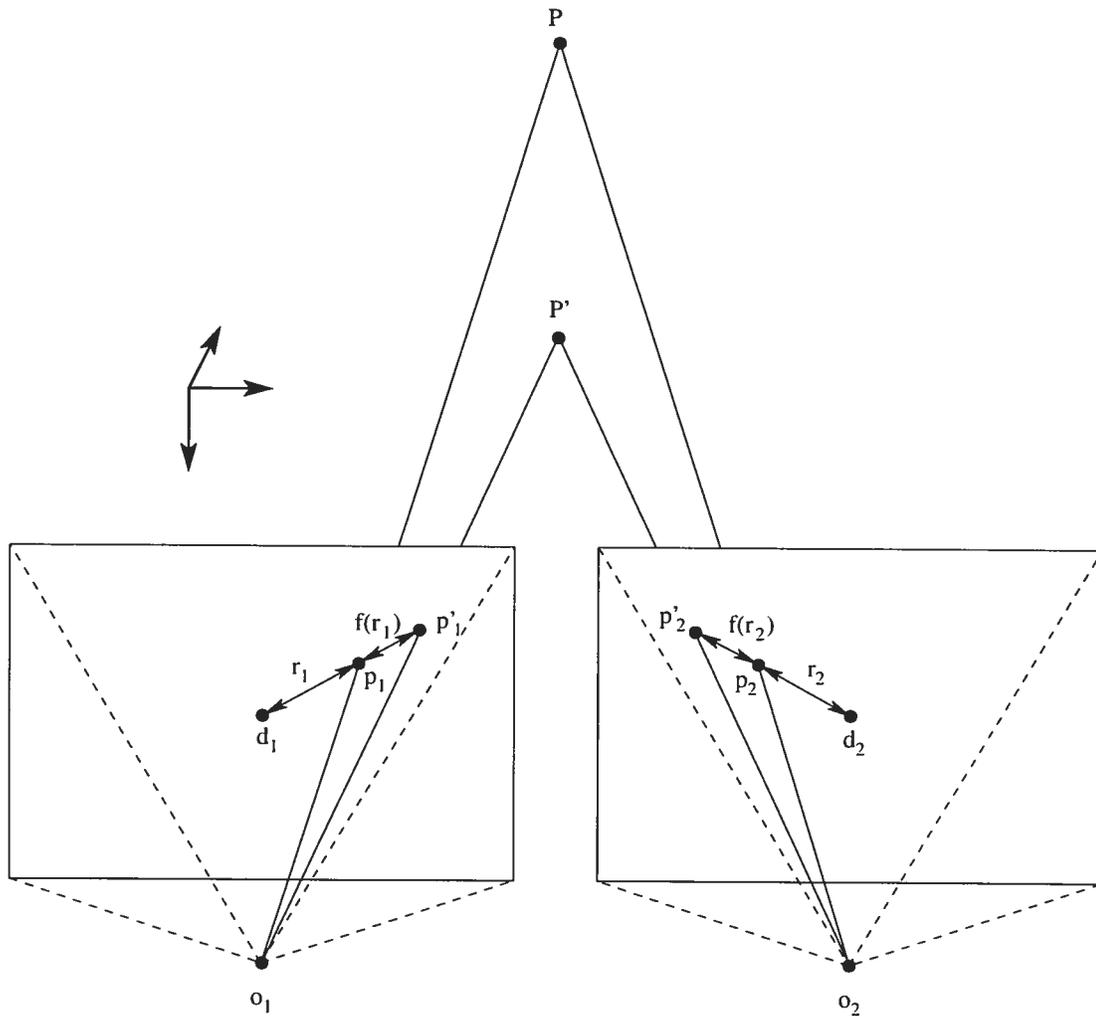


Figure 1.1. Soient deux caméras avec des centres de projection o_1 et o_2 . Soit un point P de la scène projeté vers les points p_1 et p_2 dans les caméras. La stéréo-vision utilise l'emplacement de p_1 et p_2 pour calculer la profondeur de P . Cependant, si la lentille subit de la distorsion radiale, p_1 et p_2 seront déplacés par rapport aux centres de distorsion d_1 et d_2 vers p'_1 et p'_2 . Le calcul de profondeur avec p'_1 et p'_2 donnera alors la profondeur d'un point P' différent de P .

Chapitre 2

CALIBRATION DE CAMÉRAS

Le problème de calibration de caméras consiste à établir une relation entre les points de l'espace 3D et les points de l'image 2D d'une caméra. Cette relation est généralement modélisée par un ensemble de paramètres qui correspondent aux propriétés de la caméra.

Ce chapitre débute par la présentation du modèle de base pour une caméra à projection centrale. À ce modèle simpliste s'ajoute une série de paramètres qui permettent une généralisation fidèle à la réalité. Chaque section apporte un nouvel élément par rapport à la précédente. La description proposée est fortement inspirée de [10] en raison de sa cohérence.

2.1 *Modèle de caméra perspective*

Il existe différents modèles de caméra qui décrivent la projection des points 3D sur l'image 2D. Le modèle perspective, aussi appelé *pinhole*, est sans aucun doute le plus utilisé pour une caméra à projection centrale en raison de sa simplicité et de sa précision.

Soit un système de référence euclidien dans l'espace \mathbb{R}^3 . L'origine O du système de référence est appelé le centre de projection. Le plan de l'image ou plan de projection Π , est parallèle au plan XY et passe par le point $Z = f$ où f est la distance focale de la lentille. L'axe Z est appelé axe optique et son intersection avec le plan Π se nomme point principal (voir Figure 2.1).

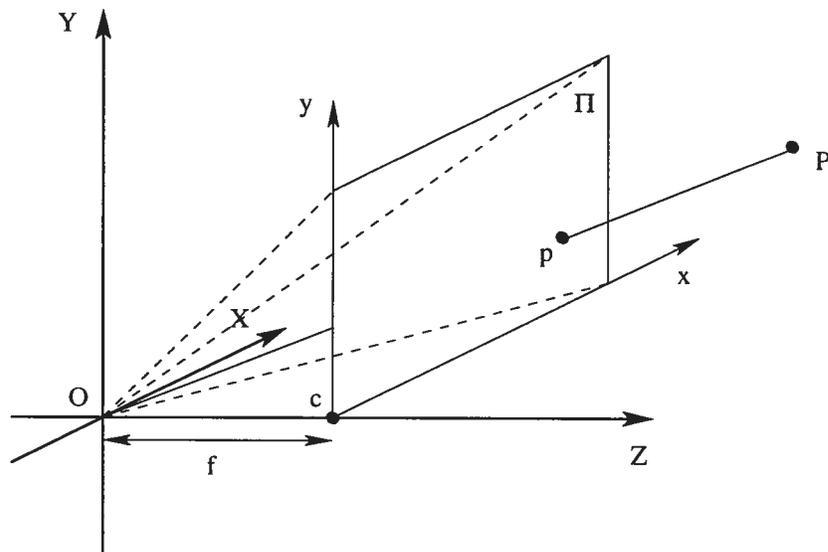


Figure 2.1. Modèle simple de projection où O est le centre de projection. Le plan de projection Π , parallèle au plan XY , traverse l'axe Z au point c . Ce dernier est à une distance f de O .

Un point $P = (X, Y, Z)$ est projeté sur le plan Π selon les équations:

$$x = f \frac{X}{Z}$$

$$y = f \frac{Y}{Z}$$

$$z = f$$

Une fois projetés, tous les points ont une coordonnée en Z égale à f . Par conséquent, seules les coordonnées 2D (x, y) sont considérées.

Le problème peut être formulé avec des coordonnées homogènes. Soit le même point P , sous sa forme homogène, $(X, Y, Z, 1)$ dans l'espace projectif \mathbb{P}^3 . La projection

de ce point sera traduite par:

$$\begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

où (fX, fY, Z) est un point de l'espace projectif \mathbb{P}^2 équivalent au point (x, y) obtenu précédemment. Le principal avantage des coordonnées homogènes est l'utilisation des matrices pour les transformations de projection, de rotation et de translation.

2.2 Déplacement du point principal dans l'image

La premier ajout au modèle provient du fait que le point principal c n'est généralement pas à l'origine de l'image, mais plutôt vers le centre. Sous la forme simple du modèle perspectif, le point principal définit comme l'intersection entre l'image et l'axe Z , en coordonnées homogènes $(0, 0, f, 1)$, est transformé par:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc se projette sur le point $(x, y) = (0, 0)$ de l'image. Supposons que les coordonnées du point principal sont (p_x, p_y) dans l'image. Le nouveau modèle tient compte de cette transformation en ajoutant une translation. Dans l'espace projectif \mathbb{P}^2 , une translation de p_x unités en x et de p_y unités en y est représentée par la matrice [7]:

$$T(p_x, p_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une fois ajoutée au modèle, on obtient:

$$\begin{pmatrix} fp_x \\ fp_y \\ f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{pmatrix}$$

La multiplication des deux matrices donne la matrice correspondant au nouveau modèle. Donc, pour un point homogène $(X, Y, Z, 1)$ de l'espace, la transformation est maintenant:

$$\begin{pmatrix} fX + Zp_x \\ fY + Zp_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figure 2.2 représente ce nouveau modèle.

2.3 Facteur d'agrandissement

Les unités de mesure utilisées jusqu'à présent sont des millimètres. Cependant, lorsqu'une caméra de type CCD est utilisée, les coordonnées finales récupérées sont en unités de pixels. On tient compte de ce changement d'unité en ajoutant un facteur d'échelle correspondant au nombre de pixels par millimètre. Parfois, les pixels ne sont pas carrés. Par conséquent, il est possible de considérer deux facteurs d'échelle, m_x et m_y . Le premier étant le nombre de pixels par millimètre dans la direction des x et le second dans la direction des y .

Une transformation d'échelle d'un point homogène de l'espace projectif \mathbb{P}^2 est décrite par la matrice [7]:

$$S(m_x, m_y) = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

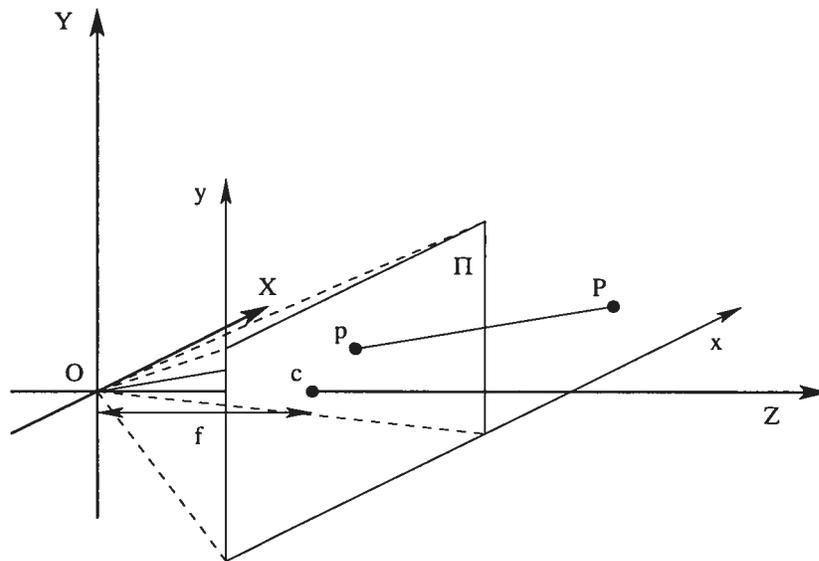


Figure 2.2. Modèle de projection simple additionné d'un déplacement du point principal c . Comme précédemment, O est le centre de projection, Π le plan de projection parallèle au plan XY et passant par le point $Z = f$.

Une fois cette matrice ajoutée au modèle précédent, la transformation du point homogène $(X, Y, Z, 1)$ devient:

$$\begin{pmatrix} m_x f X + m_x Z p_x \\ m_y f Y + m_y Z p_y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f & 0 & p_x & 0 \\ 0 & f & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier la matrice, il est courant de calculer la distance focale f et les coordonnées du point principal $c = (p_x, p_y)$ dans l'image en unités de pixels. Les nouvelles valeurs seront $\alpha_x = m_x f$ et $\alpha_y = m_y f$ pour la distance focale et $x_0 = m_x p_x$ et $y_0 = m_y p_y$ pour les coordonnées du point principal dans l'image. Selon ce nouveau

modèle, un point homogène $(X, Y, Z, 1)$ est transformé par la matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha_x X + x_0 Z \\ \alpha_y Y + y_0 Z \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Orientation et position de la caméra

Jusqu'à présent, les coordonnées d'un point $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ ont été mesurées par rapport au centre de projection, le point où tous les rayons passant par la lentille convergent. Cependant, la position de ce point dans le monde est rarement connu. Habituellement, un point d'une scène est mesuré par rapport à un autre système de coordonnées: le système de référence du monde.

Pour que le modèle précédent soit utile, il faut établir une relation entre le système de coordonnées du monde et celui de la caméra. Cette relation est définie par une translation et une rotation (Figure 2.3).

Dans les sections précédentes, les transformations étaient effectuées sur des points homogènes de l'espace \mathbb{P}^2 , sauf pour la projection qui établissait la relation entre un point de \mathbb{P}^3 et un point de \mathbb{P}^2 . Le passage entre le système de référence du monde et celui de la caméra est entre deux espaces projectifs \mathbb{P}^3 .

La translation d'un point homogène dans \mathbb{P}^3 est définie par la matrice:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de rotation R peut être définie de plusieurs façons. Cependant elle est

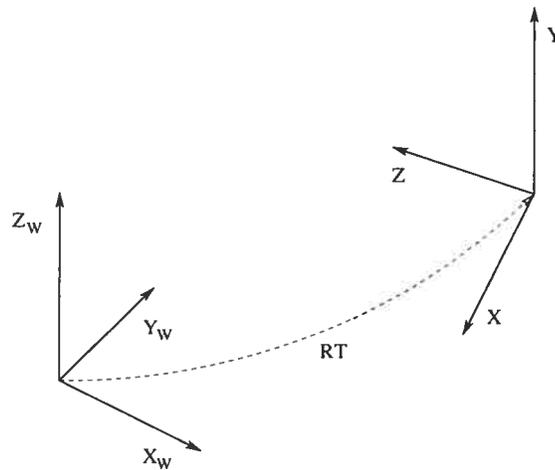


Figure 2.3. Relation entre le système des coordonnées du monde (X_w, Y_w, Z_w) et celui de la caméra (X, Y, Z) . Le passage se fait par une rotation R et une translation T .

sujette à deux contraintes [13]:

$$RR^T = R^T R = I$$

$$\det(R) = 1$$

La paramétrisation la plus intuitive est sans aucun doute la composition de rotations autour des 3 axes principaux. La rotation d'un point autour de l'axe des X d'un angle θ_X est donnée par:

$$R_X(\theta_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_X & -\sin \theta_X & 0 \\ 0 & \sin \theta_X & \cos \theta_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la même façon, les rotations autour des axes Y et Z de θ_Y et θ_Z sont respective-

ment:

$$R_Y(\theta_Y) = \begin{bmatrix} \cos \theta_Y & 0 & \sin \theta_Y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_Y & 0 & \cos \theta_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta_Z) = \begin{bmatrix} \cos \theta_Z & -\sin \theta_Z & 0 & 0 \\ \sin \theta_Z & \cos \theta_Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice R est donc:

$$R(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z) = R_X(\theta_X)R_Y(\theta_Y)R_Z(\theta_Z)$$

Soit un point homogène du monde $(X_W, Y_W, Z_W, 1)$, son passage vers le système de la caméra est donné par:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = R(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)T(t_x, t_y, t_z) \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la suite, on désignera la matrice de rotation $R(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)$ par R et la matrice de translation $T(t_x, t_y, t_z)$ par T .

2.5 Modèle complet

La fusion des paramètres énumérés dans les sections précédentes donne un modèle réaliste et fiable. Ce modèle permet d'établir une relation entre les points du monde et les coordonnées de ce point dans l'image. Soit un point homogène du monde $\mathbf{P}_W = (X_W, Y_W, Z_W, 1)$. La position de ce point dans l'image sera:

$$\mathbf{p} = KRT\mathbf{P}_W$$

où:

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & 0 \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & 0 \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les paramètres sont souvent divisés en deux catégories: internes et externes. Les paramètres internes englobent tous les facteurs qui dépendent uniquement de la caméra et de la manière dont les points sont projetés dans celle-ci, c'est-à-dire la matrice K . Les paramètres externes sont ceux qui dépendent de la position et de l'orientation de la caméra dans l'espace, donc les matrices R et T .

Ce modèle représente une caméra idéalisée. Cependant dans la réalité, ce qui est observé peut diverger grandement du modèle théorique. En effet, l'utilisation d'un système de lentilles peut introduire différentes aberrations. La plus visible est la distorsion radiale.

2.6 Distorsion Radiale

La figure 2.4 est un exemple typique d'une image contenant de la distorsion radiale. La partie centrale de l'image contient un rectangle blanc avec des carrés noirs. Dans l'espace 3D, ce rectangle est parfaitement droit. Cependant, dans cette image les côtés du rectangle semblent courbés. Dans le modèle de la section précédente, une droite de l'espace 3D est projetée sur l'image en une droite 2D. Donc, même si les paramètres de la caméra (distance focale, point principal, facteur d'échelle, rotation et translation) sont connus, la projection des points 3D avec le modèle proposé ne serait pas exacte. Pour améliorer cette projection, il faut calibrer la distorsion radiale.

La distorsion radiale se produit dans le système de lentilles de la caméra. Elle se

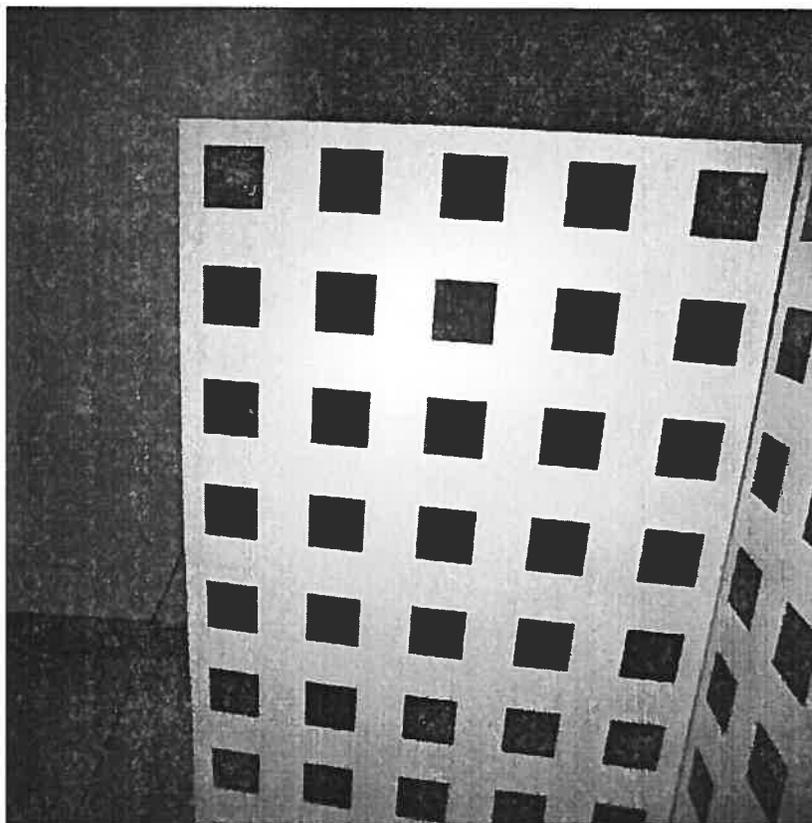


Figure 2.4. Exemple d'image contenant de la distorsion radiale. L'image déforme les objets. Par exemple, l'intersection des 2 panneaux à droite semble courbée. Cependant, dans le modèle 3D, l'intersection des 2 plans est une droite.

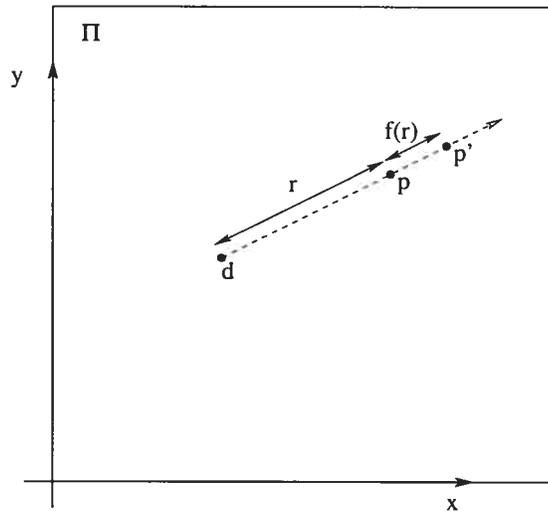


Figure 2.5. Exemple de transformation de distorsion radiale. Le point p , qui est à une distance r par rapport à d est déplacé vers p' . Ce déplacement est radial par rapport à d .

situé entre la projection et la translation du point principal dans le modèle proposé:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{distorsion} \\ \text{radiale} \end{matrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} RT \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

La distorsion radiale n'est pas entre crochet [] dans l'équation précédente car celle-ci n'est pas une transformation linéaire. Cette transformation ne peut pas être représentée par une matrice. La distorsion radiale $f(r)$ caractérise le déplacement radial d'un point image (x, y) par rapport à un centre de distorsion $d = (d_x, d_y)$. La distance entre le point image et le centre de distorsion est $r = \sqrt{(x - d_x)^2 + (y - d_y)^2}$.

Donc, soit un point $\mathbf{P}_W = (X_W, Y_W, Z_W, 1)$ du monde. Ce point subi les transformations suivantes dans l'ordre: translation, rotation, projection (les matrices à droite de la distorsion radiale). Le résultat est un point $p = (x, y)$ toujours en unités de

millimètre. La transformation de distorsion radiale déplace le point de $f(r)$ millimètres radialement par rapport au centre de distorsion d vers le nouveau point $p' = (x', y')$. Cette dernière transformation est illustrée dans la figure 2.5. Finalement, le point p' subi les deux dernières transformations: déplacement du point principal et changement d'échelle (les matrices à gauche de la distorsion radiale).

Il existe, dans la théorie optique, différentes affirmations concernant la distorsion radiale dont les suivantes [3, 4, 6]

1. Le centre de distorsion coïncide avec le point principal.
2. La fonction de distorsion radiale à la forme suivante:

$$f(r) = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots \quad (2.2)$$

La première affirmation est vraie seulement pour l'optique élémentaire ou si le système de lentilles est extrêmement bien conçu. Cependant, on observe dans la réalité que le centre de distorsion s'éloigne du point principal dans des systèmes complexes [15].

Les puissances impaires de la fonction $f(r)$ indiquent une symétrie, i.e. $f(r) = f(-r)$ par rapport au centre de distorsion où $r = 0$. De plus, elle ne contient pas de termes en r^1 car celui-ci serait considéré comme un facteur d'agrandissement de la dioptrique élémentaire et non comme une aberration. Il existe des cas, principalement lorsque la distorsion radiale est très prononcée, où cette formulation n'est pas adéquate [1, 2, 5, 12].

Malgré ces mises en gardes, la plupart des méthodes de calibration de la distorsion radiale présupposent que le centre de distorsion coïncide avec le point principal et que la fonction $f(r)$ est de la forme de l'équation (2.2). La méthode proposée dans ce mémoire permet d'estimer le centre de distorsion et la fonction $f(r)$ de manière plus générale. En effet, le centre de distorsion peut être différent du point principal. De plus, si $F(r) = f(r) + r$ est monotone strictement croissante, ce qui est généralement

le cas, aucun modèle n'est utilisé pour représenter $f(r)$. Cette dernière est calculée point par point.

Chapitre 3

MÉTHODES ACTUELLES

Le sujet de la calibration de la distorsion radiale est étudié depuis les années 1950. Différents articles sont consacrés soit en entier ou en partie à ce sujet. Les sections suivantes décrivent brièvement deux méthodes de calibration tirées d'articles récents. À la fin du chapitre, les intentions de la nouvelle technique sont données en réponse à ces articles.

3.1 Article: *A flexible new technique for camera calibration*

L'article [16] écrit par Zhengyou Zhang est une contribution majeure dans le domaine de la calibration complète d'une caméra. Le "Camera Calibration Toolbox for Matlab", un algorithme très répandu de calibration de caméras, est basé sur celui-ci.

L'algorithme utilise les données provenant d'un plan placé devant la caméra. Un motif contenant des carrés, par exemple la figure 2.4, est visible sur le plan. La caméra est déplacée devant le plan afin d'obtenir différents angles de vues du plan. Avant d'appliquer l'algorithme, les coins des carrés doivent être extraits. Les entrées de l'algorithme sont les M coins de carrés pour chacune des N images d'angles de vues différents.

L'algorithme comporte différentes étapes. Tout d'abord, l'auteur calibre les paramètres internes et externes de la caméra sans tenir compte de la distorsion radiale. Il retrouve donc les paramètres suivants: la distance focale, le facteur d'échelle, le déplacement du point principal de la caméra ainsi que les N rotations et la translation qu'avait la caméra lors de la prise d'images. L'ensemble de ces paramètres constitut

le modèle complet sans distorsion de la section 2.5. Il est donc possible de projeter les M points 3D du monde sur les images et d'observer l'emplacement de ces points sans distorsion. Cependant, comme mentionné dans la section 2.6, plus le système de lentilles subit de distorsion radiale, moins cette calibration sera juste. Dans le cas où l'erreur de reprojection, c'est-à-dire la distance entre la reprojection des points et les points observés, est trop élevée et qu'on observe de la distorsion radiale dans les images, la calibration de cette dernière est nécessaire.

Le modèle de distorsion radiale utilisé est celui de l'équation (2.2) à deux paramètres, k_1 et k_2 . L'étape suivante retrouve ces paramètres. Le centre de distorsion est considéré comme étant le point principal $(d_x, d_y) = (p_x, p_y)$.

Pour retrouver k_1 et k_2 , l'algorithme utilise les paramètres déjà trouvés. Avec ces paramètres, plus précisément la translation, la rotation et la projection, il est possible de calculer la projection des M points du monde $\mathbf{P}_{W,j} = (X_{W,j}, Y_{W,j}, Z_{W,j}, 1)$ vers les N caméras avant la distorsion: $(x_{u,i,j}, y_{u,i,j})$ où l'indice u indique que le point x ne contient pas de distorsion et les indices i et j correspondent au j -ème point de la i -ème image. Cette relation est possible avec l'équation (2.1):

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} RT \begin{pmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{pmatrix}$$

Similairement, avec la position du point principal et le facteur d'échelle, on obtient la position des points dans la caméra avec distorsion $(x_{d,i,j}, y_{d,i,j})$ connaissant les points de l'image $(x_{i,j}, y_{i,j})$, c'est-à-dire les points observés:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec les points de la caméra sans distorsion $(x_{u,i,j}, y_{u,i,j})$ ainsi que les points avec

distorsion $(x_{d,i,j}, y_{d,i,j})$, on peut ré-écrire le modèle:

$$f(r) = k_1 r^3 + k_2 r^5$$

$$\sqrt{(x_u - x_d)^2 + (y_u - y_d)^2} = k_1 (\sqrt{x_u^2 + y_u^2})^3 + k_2 (\sqrt{x_u^2 + y_u^2})^5$$

sous forme de matrice:

$$\begin{bmatrix} \left(\sqrt{x_{u,1,1}^2 + y_{u,1,1}^2}\right)^3 & \left(\sqrt{x_{u,1,1}^2 + y_{u,1,1}^2}\right)^5 \\ \left(\sqrt{x_{u,1,2}^2 + y_{u,1,2}^2}\right)^3 & \left(\sqrt{x_{u,1,2}^2 + y_{u,1,2}^2}\right)^5 \\ \vdots & \vdots \\ \left(\sqrt{x_{u,N,M}^2 + y_{u,N,M}^2}\right)^3 & \left(\sqrt{x_{u,N,M}^2 + y_{u,N,M}^2}\right)^5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_{u,1,1} - x_{d,1,1})^2 + (y_{u,1,1} - y_{d,1,1})^2} \\ \sqrt{(x_{u,1,2} - x_{d,1,2})^2 + (y_{u,1,2} - y_{d,1,2})^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x_{u,N,M} - x_{d,N,M})^2 + (y_{u,N,M} - y_{d,N,M})^2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

On obtient donc un système linéaire $AX = b$ avec le vecteur X comme inconnu. La solution par moindres carrés est obtenue par $X = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Une fois k_1 et k_2 connus, l'algorithme effectue une optimisation nonlinéaire pour minimiser l'erreur de reprojection. Soit $x_{i,j}$ le j -ème point de la i -ème image, l'erreur de reprojection à minimiser est donnée par:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \|x_{i,j} - Proj(p_x, p_y, m_x, m_y, f, R_i, T_i, k_1, k_2, \mathbf{P}_{W,j})\|^2$$

où $Proj(p_x, p_y, m_x, m_y, f, R_i, T_i, k_1, k_2, \mathbf{P}_{W,j})$ est la projection du point $\mathbf{P}_{W,j}$ selon les paramètres courants de la caméra associée à l'image i .

L'avantage de cette technique pour la calibration de la distorsion radiale est que la partie "distorsion radiale" est linéaire. En effet, comme on utilise les paramètres trouvés pour calculer les points dans la caméra avec et sans distorsion, il est possible de formuler le problème par un système linéaire, donc la résolution du système

est directe. Cependant, il n'est pas toujours souhaitable de calculer l'ensemble des paramètres. Par exemple, si on désire seulement supprimer la distorsion radiale dans un ensemble d'images déjà prises, la procédure décrite ici peut s'avérer très complexe pour rien et difficilement réalisable.

De plus, comme le spécifie l'article, cette technique est utile seulement si la distorsion radiale est faible. En effet, il est présupposé que la calibration des paramètres internes et externes est bonne sans la calibration de la distorsion radiale. Ce qui n'est pas le cas lorsque la distorsion radiale est grande.

3.2 Article: *Straight lines have to be straight*

Le deuxième article [5] présenté est écrit par Frederic Devernay et Olivier Faugeras. Contrairement à celui de Zhang qui produit une calibration complète de la caméra, cet article se consacre uniquement à la distorsion radiale.

L'algorithme décrit dans cet article se base sur le fait qu'une droite dans l'espace doit nécessairement être projetée en une droite dans l'image. Donc, lorsqu'une droite de l'espace observée par une caméra devient une courbe sur l'image, cette déviance est due entièrement à la distorsion radiale si l'on considère les autres aberrations nulles. L'objectif de l'algorithme est donc de retrouver le centre et la fonction de distorsion inverse, donc celle qui retransforme ces courbes en droites.

La première étape d'un tel algorithme est l'extraction des courbes de l'image qui sont, avant la projection, des droites. Soient N le nombre de courbes extraites. Chacune de ces courbes contient M_j points où $j = 1, \dots, N$.

Rappelons qu'un point du monde $(X_W, Y_W, Z_W, 1)$ est projeté sur la caméra au

point:

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} RT \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, la distorsion radiale est appliquée sur les points (x_u, y_u) pour obtenir les points (x_d, y_d) . Finalement, les points (x_d, y_d) sont transformés par un facteur d'échelle et un déplacement d'origine.

$$x = m_x(x_d + p_x) \quad (3.2)$$

$$y = m_y(y_d + p_y) \quad (3.3)$$

Les coordonnées (x, y) sont les coordonnées observées.

L'algorithme utilise le modèle suivant de distorsion radiale:

$$x_u = x_d(1 + k_1 r_d^2)$$

$$y_u = y_d(1 + k_1 r_d^2)$$

On remarque une inversion des indices d et u par rapport au modèle énoncé précédemment. Cette fonction de distorsion est une approximation du modèle idéal [11, 14]. Ce modèle explique comment il est possible de passer d'un point avec distorsion vers un point sans distorsion, donc représente la fonction de distorsion inverse. Il est maintenant possible de reformuler le problème pour connaître les coordonnées sans distorsion par rapport aux coordonnées observées:

$$x_u = \left(\frac{x}{m_x} - d_x \right) \left(1 + k_1 \left(\left(\frac{x}{m_x} - d_x \right)^2 + \left(\frac{y}{m_y} - d_y \right)^2 \right) \right) \quad (3.4)$$

$$y_u = \left(\frac{y}{m_y} - d_y \right) \left(1 + k_1 \left(\left(\frac{x}{m_x} - d_x \right)^2 + \left(\frac{y}{m_y} - d_y \right)^2 \right) \right) \quad (3.5)$$

Si l'on compare l'équation précédente avec les équations (3.2) et (3.3), on observe que le point (p_x, p_y) est changé pour le point (d_x, d_y) . En effet, comme les paramètres

internes et externes sont inconnus, le déplacement retrouvé est celui qui replace les points (x, y) par rapport au centre de distorsion.

Comme mentionné plus tôt, les points sur une droite de l'espace devraient être projetés sur une droite dans l'image. Cependant, on observe que ces droites sont courbées. Les équations (3.4) et (3.5) établissent une relation entre les points observés de la courbe et les points dans le système de la caméra sans distorsion. Par conséquent, l'algorithme cherchera les valeurs de m_x , m_y , d_x , d_y et k_1 qui transforment les (x, y) des courbes en (x_u, y_u) de droites.

Pour mesurer la quantité de distorsion dans une droite, l'algorithme utilisé calcule la meilleure droite par moindres carrés pour les points et ensuite calcule la distance totale entre ces points et la droite trouvée. Plus les points forment une courbe, plus ce coût χ^2 augmente et plus les points sont colinéaires, plus le coût est petit. À la limite, si tous les points sont sur la même droite, le coût est 0.

$$\chi^2 = a \sin^2 \phi - 2|b| |\sin \phi| \cos \phi + c \cos^2 \phi$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{M_j} x_i^2 - \frac{1}{M_j} \left(\sum_{i=1}^{M_j} x_i \right)^2 \\ b &= \sum_{i=1}^{M_j} x_i y_i - \frac{1}{M_j} \sum_{i=1}^{M_j} x_i \sum_{i=1}^{M_j} y_i \\ c &= \sum_{i=1}^{M_j} y_i^2 - \frac{1}{M_j} \left(\sum_{i=1}^{M_j} y_i \right)^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |\sin \phi| &= \sqrt{1/2 - \beta} \\ \cos \phi &= \sqrt{1/2 + \beta} \\ \beta &= \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 + 4b^2}} \\ \alpha &= a - c \end{aligned}$$

L'algorithme cherche donc les valeurs de m_x , m_y , d_x , d_y et k_1 qui minimisent la somme des coûts des courbes. La forme du problème nécessite la minimisation d'une fonction non-linéaire.

Le premier avantage de cette méthode est que la distorsion peut être calibrée sans aucune information sur les paramètres internes et externes. De plus, comme l'algorithme nécessite seulement qu'on observe des droites, il est possible de calibrer la distorsion radiale à l'aide d'images de scènes quelconques, en autant que la scène devant l'image contienne des droites. Aucun motif spécifique est nécessaire.

Le principal inconvénient est la résolution non-linéaire. En effet, celle-ci doit être initialisée adéquatement. Les valeurs initiales courantes sont (d_x, d_y) au centre de l'image, $m_x = m_y = 1.0$ et $k_1 = 0.0$. Cependant, comme la solution du système est locale, cet initialisation peut donner des mauvais résultats. La résolution peut aussi prendre beaucoup de temps vu la taille du problème. Finalement, le plus contraignant est que le problème nécessite un modèle bien précis. Lorsque la distorsion radiale est grande, le modèle donné est inadéquat. L'article propose différents modèles, par contre, le choix du modèle reste un problème.

3.3 Conclusion

Basé sur l'observation des techniques utilisées pour la calibration de la distorsion radiale, le nouvel algorithme devra se soumettre à diverses contraintes:

1. Le problème doit être linéaire. Une solution globale doit pouvoir être trouvée rapidement.
2. La fonction de distorsion doit être obtenue sans modèle spécifique. Cela permet une généralisation et supprime le problème du choix du modèle.
3. La calibration de la distorsion radiale doit pouvoir se faire sans connaître les paramètres internes ni externes.

Chapitre 4

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DE LA DISTORSION RADIALE

Ce chapitre aborde les deux propriétés qui forment la base des algorithmes proposés dans les chapitres suivants. Ces propriétés se basent sur la définition de la distorsion radiale donnée dans la section 2.6 et reprise ici: soit un point $d = (d_x, d_y)$ désigné comme le centre de distorsion et une fonction $f(r)$ où r est la distance euclidienne entre d et le point p avant que ce dernier ne soit transformé par la distorsion radiale. La fonction $f(r)$ indique le déplacement radial du point p correspondant à la transformation de distorsion radiale.

Dans ce qui suit, nous verrons que la transformation de distorsion radiale conserve une certaine symétrie dans l'image résultante. Deuxièmement, on observera que $F(r)$, la fonction qui établit la relation entre le rayon avec distorsion $f(r) + r$ et le rayon sans distorsion r , est généralement monotone strictement croissante. Cette propriété servira d'hypothèse nécessaire à l'algorithme proposé. Finalement, pour le reste du mémoire, considérons le facteur d'échelle en x égal au facteur d'échelle en y , $m_x = m_y$. Cette approche, qui s'avère généralement vraie, permet d'utiliser directement les pixels pour effectuer des mesures. En effet, avec cette contrainte, l'image réelle est à un facteur d'échelle du capteur de la caméra et par conséquent, les distances relatives sont conservées.

4.1 Symétrie

La première propriété prend la forme du théorème suivant:

Théorème 4.1.1

Soient deux points à une même distance du centre de distorsion. Il existe un axe de symétrie pour ces points passant par le centre de distorsion. De plus, cet axe reste invariant lors d'une transformation de distorsion radiale.

Preuve: La transformation de distorsion radiale déplace les points par rapport au centre de distorsion. Ce déplacement est, comme le dit le nom de la transformation, exclusivement radial. Les points sont alors soit rapprochés ou éloignés du centre de distorsion d . Soit $F(r) = f(r) + r$ la fonction qui établit la relation entre le rayon sans distorsion r et le rayon avec distorsion $r' = F(r)$. Le terme "rayon" est utilisé car tous les points qui sont à une distance égale par rapport au centre de distorsion sont affectés de la même manière par la distorsion radiale.

Considérons deux points, p_1 et p_2 , qui sont à une distance r du centre de distorsion ($p_1 \neq p_2$). Après une transformation de distorsion radiale, p_1 et p_2 se déplacent vers p'_1 et p'_2 . La distance entre p'_1 et d est $r' = F(r)$. La distance entre p'_2 et d est aussi $r' = F(r)$ (voir figure 4.1).

Le triangle formé par les points d , p_1 et p_2 révèle une première symétrie. En effet, le côté $\overline{dp_1}$ a une longueur r de même que le côté $\overline{dp_2}$. Ce triangle est donc isocèle. Donc, il existe un axe qui sépare le triangle en deux triangles identiques. Cet axe est la droite qui passe par d et qui divise l'angle $\angle p_1dp_2$ en deux. De la même façon, la construction d'un autre triangle avec les points d , p'_1 et p'_2 donne un axe de symétrie. En effet, la distance entre d et p'_1 est r' ce qui est égal à la distance entre d et p'_2 . Encore une fois ce triangle est isocèle et son axe de symétrie passe par le point d et coupe l'angle $\angle p'_1dp'_2$ en deux. On observe facilement que les deux axes de symétrie trouvés sont en fait le même axe. En effet, les points d , p_1 et p'_1 sont sur la même droite de même que les points d , p_2 et p'_2 . Par conséquent les deux angles $\angle p_1dp_2$ et $\angle p'_1dp'_2$ sont égaux. Donc, les axes qui passent par d et qui coupent ces angles en deux parties égales sont superposés.

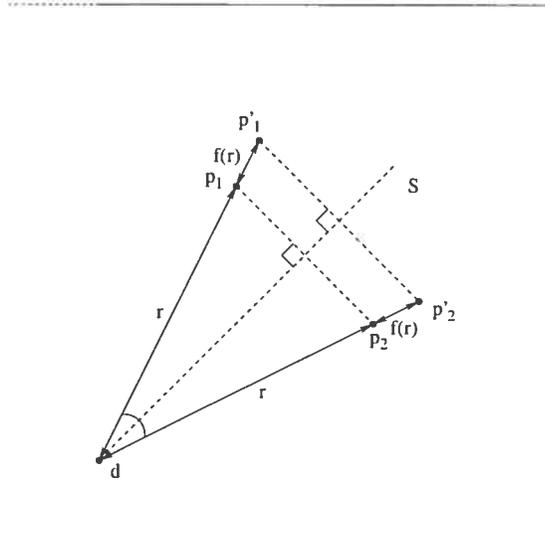


Figure 4.1. Les points p_1 et p_2 sont déplacés vers les points p'_1 et p'_2 par la distorsion radiale. On observe que l'axe de symétrie S entre p_1 et p_2 est aussi un axe entre p'_1 et p'_2 .

4.2 Fonction monotone strictement croissante

Dans les sections qui suivent, l'unique hypothèse faite par rapport à la fonction $F(r)$ est que celle-ci est monotone strictement croissante. Soit r_1 et r_2 tel que $r_1 < r_2$, alors $F(r_1) < F(r_2)$. Cette hypothèse est généralement vérifiée pour des lentilles conventionnelles. Analysons les conséquences occasionnées par une fonction $F(r)$ non monotone strictement croissante.

Soit une fonction de distorsion radiale $F(r)$ quelconque, c'est-à-dire qui n'est pas nécessairement monotone strictement croissante. Soient deux points p_1 et p_2 à des distances respectives de r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$ par rapport au centre de distorsion. Après une transformation de distorsion radiale, les points p_1 et p_2 sont déplacés vers p'_1 et p'_2 . La distance entre ces nouveaux points et le centre de distorsion radiale est

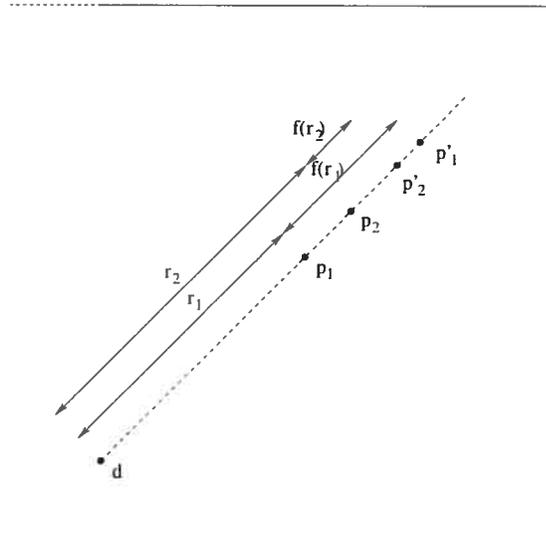


Figure 4.2. Exemple d'image où l'ordre des points n'est pas conservé. Les points p_1 et p_2 sont déplacés radialement par rapport à d vers les points p'_1 et p'_2 . Comme $r_1 < r_2$ et $r_1 + f(r_1) > r_2 + f(r_2)$, l'ordre entre d , p_1 et p_2 est différente de l'ordre entre d , p'_1 et p'_2 .

donnée par $F(r)$. Donc, le point p'_1 est à une distance $F(r_1) = r'_1$ de d tandis que p'_2 est à une distance $F(r_2) = r'_2$. Comme $F(r)$ n'est pas contrainte, il est possible que $r'_1 \geq r'_2$. Supposons que d , p_1 et p_2 soient sur une droite (voir figure 4.2). Dans le cas où $r'_1 > r'_2$, l'ordre de ces points sans distorsion sur la droite est d , p_1 et p_2 tandis que l'ordre des points avec distorsion sera d , p'_2 et p'_1 . Dans le cas où $r'_1 = r'_2$, p'_1 et p'_2 sont superposés.

Ce changement dans l'ordre des points et cette superposition sont inadmissibles pour une caméra photographique. Un changement dans l'ordre des points est possible avec l'utilisation d'un miroir. La figure 4.3 présente un exemple où un miroir doublement bombé placé devant une caméra alterne l'ordre des points d'une droite après sa projection dans l'image. Les points p_1 , p_2 , p_3 et p_4 d'une droite de l'espace sont projetés sur la caméra vers p'_1 , p'_2 , p'_3 et p'_4 après une réflexion sur le miroir. L'ordre

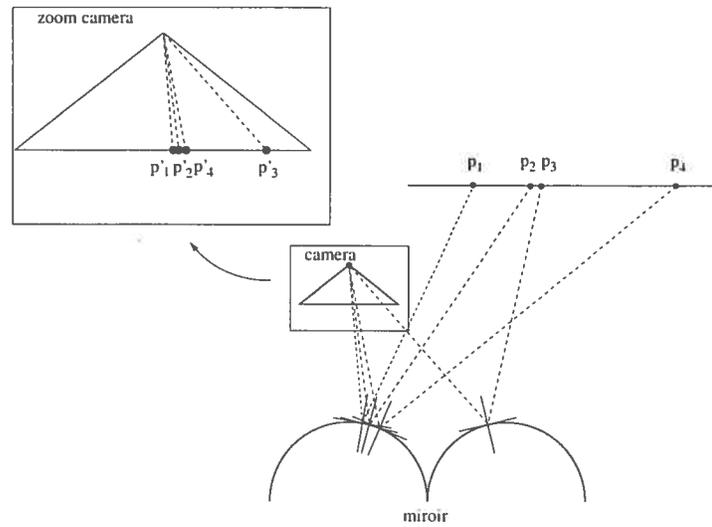


Figure 4.3. Exemple de caméra et miroir qui modifie l'ordre des points. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre points sur une droite. Après une réflexion sur le miroir et une projection dans la caméra, l'ordre des points devient p'_1, p'_2, p'_4 et p'_3 .

des points passe de p_1, p_2, p_3 et p_4 dans l'espace à p'_1, p'_2, p'_4 et p'_3 dans la caméra.

Dans le cas présent, on considère que l'ordre des points est conservé sur un rayon, alors la fonction $F(r)$ est monotone strictement croissante.

Chapitre 5

CALIBRATION DE LA DISTORSION RADIALE AVEC DES DROITES

Dans le chapitre précédent, la fonction $F(r)$ a été qualifiée de monotone strictement croissante. De plus, il est mentionné que lorsqu'un axe de symétrie existe dans la figure et que cet axe passe par le centre de distorsion, la transformation de distorsion radiale conserve cet axe de symétrie. Ce chapitre explique comment ces propriétés sont utilisées pour extraire le centre et la fonction de distorsion.

La calibration de la distorsion radiale se fait généralement par l'observation d'un objet dans l'espace ayant des propriétés connues. En observant les déviations par rapport aux propriétés escomptés dans l'image, il est possible de calibrer la distorsion radiale. Par exemple, dans la section 3.2, l'algorithme utilise des motifs de droites. Ainsi, la déviation causée par la distorsion radiale est la courbure des droites dans les images.

Le choix d'un motif est crucial pour la calibration de la distorsion radiale. Le premier envisagé était le cercle. Lorsqu'un plan sur lequel est dessiné un cercle est observé par une caméra sans distorsion radiale et placée perpendiculairement au plan du cercle, le cercle a la propriété de demeurer un cercle après une projection. Si la caméra contient de la distorsion radiale, la déformation causée par la distorsion conserve un seul axe de symétrie du cercle, et cette symétrie est facilement identifiable en mesurant la variation du rayon du cercle. En observant plusieurs cercles sur un plan, il est possible de retrouver le centre et la fonction de distorsion.

L'inconvénient de ce motif est que la caméra doit absolument être perpendiculaire au cercle. Sinon, la projection d'un cercle sur le plan image n'est pas un cercle, mais

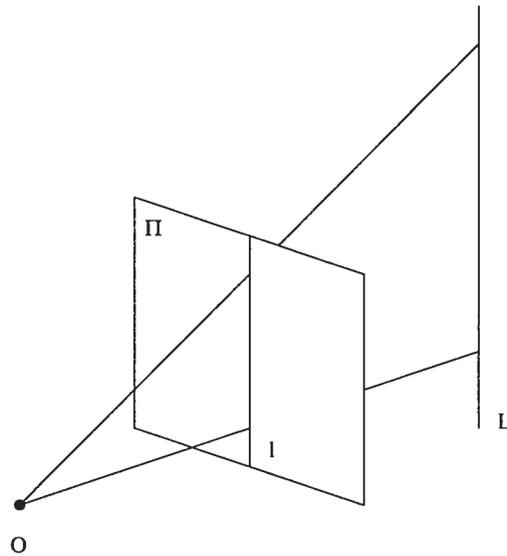


Figure 5.1. Projection d'une droite 3D L sur le plan image Π vers la droite l . La projection des points de la droite passent par le focus de projection O .

une conique et la propriété de symétrie disparaît.

Le deuxième choix de motif devait être invariant sous une projection. La droite a donc été envisagée. On observe facilement qu'une droite en 3D se projette sur l'image en une droite. La droite 3D L de la figure 5.1 et le centre de projection O forment un plan. L'intersection de ce plan avec le plan image Π est la droite l .

5.1 Description de la contrainte de la droite

Dans cette section, le Théorème 4.1.1 et l'hypothèse de la fonction de distorsion monotone strictement croissante sont utilisés pour établir un nouveau théorème:

Théorème 5.1.1

Lorsqu'une droite est déformée par la distorsion radiale, il existe une symétrie dans la courbe résultante. De plus, l'axe de cette symétrie est une droite qui passe par le centre de distorsion et le point de la droite le plus près de ce centre de distorsion.

Preuve: En effet, soit $d = (d_x, d_y)$ le centre de distorsion et l la droite avant la transformation de distorsion (voir figure 5.2). Supposons tout d'abord que l ne passe pas par d . Il existe un point a sur la droite qui, avec d , forment une droite perpendiculaire à l . La distance euclidienne entre a et d est la plus courte distance entre la droite et d . Soit un point p_1 sur la droite l qui est à une distance h_1 de a . Il existe un autre point q_1 sur la droite l à une distance h_1 de a . Comme les triangles $\triangle dap_1$ et $\triangle daq_1$ ont le côté \overline{ad} en commun, que $\overline{ap_1}$ est défini égal à $\overline{aq_1}$ et que $\angle dap_1 = \angle daq_1 = 90$ degrés, par triangles semblables $\overline{dp_1} = \overline{dq_1} = r_1$. Il existe donc pour tout point p_1 de la droite l à une distance r_1 , un point q_1 aussi sur l qui est à une distance r_1 de d . Les points p_1 et q_1 sont symétriques par rapport à l'axe \overline{da} . Dans le cas où $p_1 = a$, $h_1 = 0$, on a $q_1 = p_1$. Si la droite l passe par le centre de distorsion d , le point a égal au point d . L'axe de symétrie est donc la droite perpendiculaire à l passant par a .

Par la propriété de symétrie énoncée dans le chapitre précédent, deux points qui sont à une même distance par rapport au centre de distorsion possèdent un axe de symétrie passant par ce centre de distorsion. De plus, après une transformation de distorsion radiale, ces points sont déplacés vers deux autres points qui possèdent le même axe de symétrie. Comme tous les points de l sont associés à un autre point symétrique par rapport à l'axe S , après une transformation de distorsion radiale, ces points seront encore symétriques par rapport au même axe. Donc, sous une transformation de distorsion radiale, une droite devient une courbe possédant un axe de symétrie.

Le point a est désigné comme le point de la droite l le plus près du centre de distorsion d . Suite à une transformation de distorsion radiale, le point a de la droite l devient le point a' de la courbe résultante. Dans la section précédente, la fonction $F(r)$ est définie comme étant monotone strictement croissante. Comme a était le point de la droite le plus près du centre de distorsion avant la distorsion radiale, a' sera le point de la courbe le plus près du centre de distorsion après la distorsion radiale.

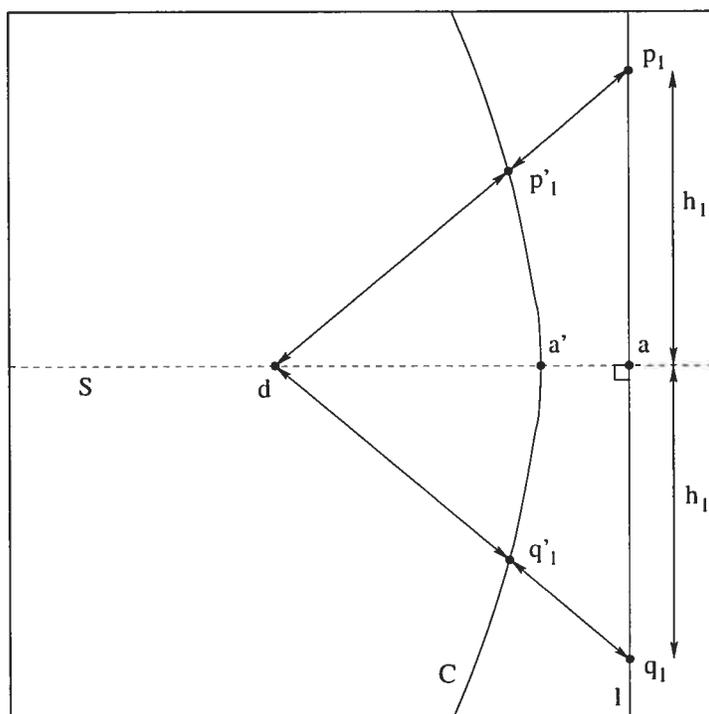


Figure 5.2. Symétrie dans la courbe C résultant de la déformation d'une droite l . Pour tout point p_1 sur la droite à une distance h_1 de a , où a est le point de l le plus près de d , il existe un autre point q_1 sur l à une distance h_1 de a . Les points p_1 et q_1 sont symétriques par rapport à S , tout comme p'_1 et q'_1 leurs déformations.

En résumé, une droite 3D est projetée sur l'image en une droite 2D. Cette droite 2D, lorsqu'elle est déformée par une transformation de distorsion radiale, devient une courbe qui possède un axe de symétrie passant par le centre de distorsion et par le point de la courbe le plus près de ce centre de distorsion.

5.2 Détection du centre de distorsion

Le centre de distorsion est souvent considéré comme étant le centre de l'image. Pour des lentilles à petit angle, cette approximation peut être satisfaisante. Pour des lentilles grands angles contenant plus de distorsion, l'erreur associée à un mauvais choix de centre de distorsion augmente. Il faut alors trouver ce point.

Il a été établi qu'une droite, après une transformation de distorsion radiale, devient une courbe avec comme particularité un axe de symétrie passant par le centre de distorsion et par le point de la courbe le plus près du centre de distorsion. Comme $F(r)$ est monotone strictement croissante, l'axe de symétrie trouvé est unique.

Pour trouver le centre de distorsion d'une image, il suffit d'observer au moins deux droites non parallèles. Après la transformation de distorsion, ces droites deviennent chacune une courbe avec un seul axe de symétrie. Comme ces axes passent par le centre de distorsion, l'intersection de ces droites donne le centre de distorsion. La figure 5.3 est un exemple d'image contenant deux courbes C_1 et C_2 . Ces courbes sont le résultat des droites l_1 et l_2 après une transformation de distorsion radiale par rapport au point d . Afin de mieux visualiser, ces droites sont illustrées dans la figure 5.3. Cependant, seules les courbes C_1 et C_2 sont visibles par la caméra. De plus, les axes de symétries des courbes, S_1 et S_2 sont illustrés. Ces axes s'intersectent au point d . Pour obtenir une solution plus fiable, il est important d'observer plusieurs

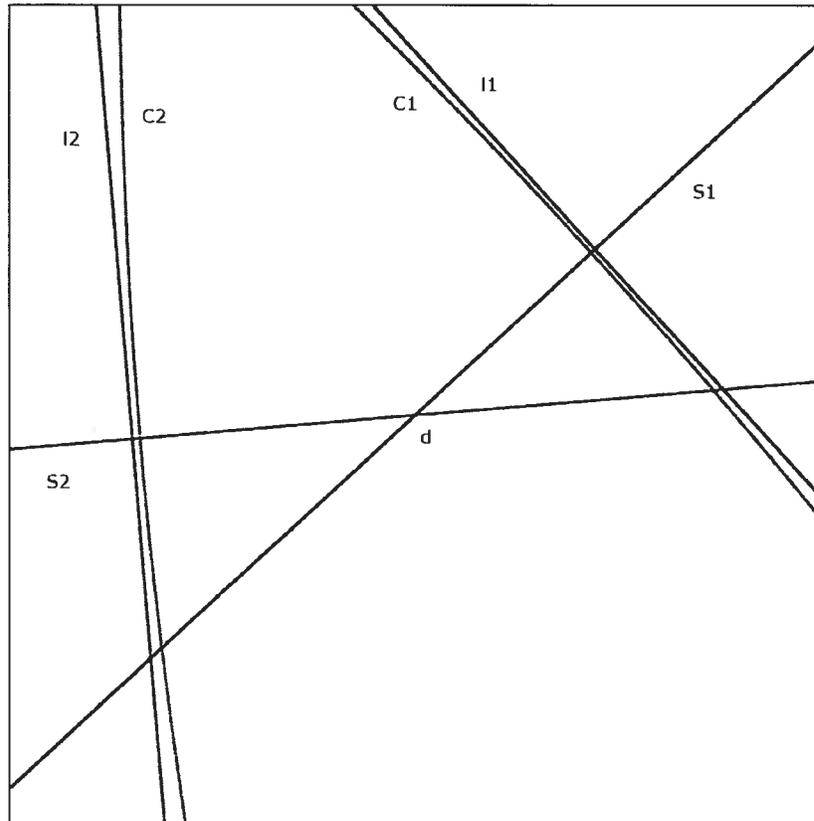


Figure 5.3. Exemple réel de détection du centre de distorsion par l'intersection des axes de symétries. L'image contient deux courbes C_1 et C_2 qui sont les déformations des droites l_1 et l_2 . Les axes de symétries des courbes sont S_1 et S_2 et l'intersection donne le centre de distorsion d .

droites et que ces droites soient bien distribuées dans l'images et qu'elles soient le moins parallèles possible.

5.3 Extraction de la fonction de distorsion

Une fois le centre de distorsion identifié, la fonction de distorsion doit être extraite. Celle-ci est reconstruite par morceaux, c'est-à-dire que chaque observation d'une droite distordionnée contribue à une partie de la fonction et que la mise en correspondance entre ces segments forment $F(r)$.

Sachant que des droites sont observées, il est possible de poser le problème sous forme d'un système linéaire et d'en extraire la fonction de distorsion. Le nouveau problème auquel nous faisons face se pose maintenant comme suit: soit un centre de distorsion connu d et un ensemble de courbes $C = \{C_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ ayant subi une transformation de distorsion radiale de fonction F par rapport à d , retrouver F .

Le premier élément à considérer est que le point de la courbe C_i le plus près du centre de distorsion est le point a'_i par lequel passe l'axe de symétrie S_i qui traverse le centre de distorsion radiale. Comme le centre de distorsion est connu et qu'il est possible de trouver le point de la courbe le plus près du centre de distorsion, l'axe de symétrie S_i de la courbe est identifiable.

Dans la section 5.1, il a été établi que l'axe S_i d'une courbe C_i est perpendiculaire à la droite l_i , la droite avant distorsion radiale. Pour chaque courbe C_i , il est donc possible d'identifier une droite l'_i passant par a'_i qui est perpendiculaire à l'axe de symétrie S_i . Les deux droites, l_i et l'_i , sont parallèles. La différence entre ces droites est que l_i contient a_i , le point de la droite le plus près avant la transformation de distorsion tandis que l'_i contient le point a'_i , le point le plus près après la distorsion radiale. Il est fortement probable que $l_i \neq l'_i$. L'orientation de la droite étant connue, il faut donc trouver le déplacement sur l'axe S_i entre l_i et l'_i , appelé e_i (voir figure 5.4).

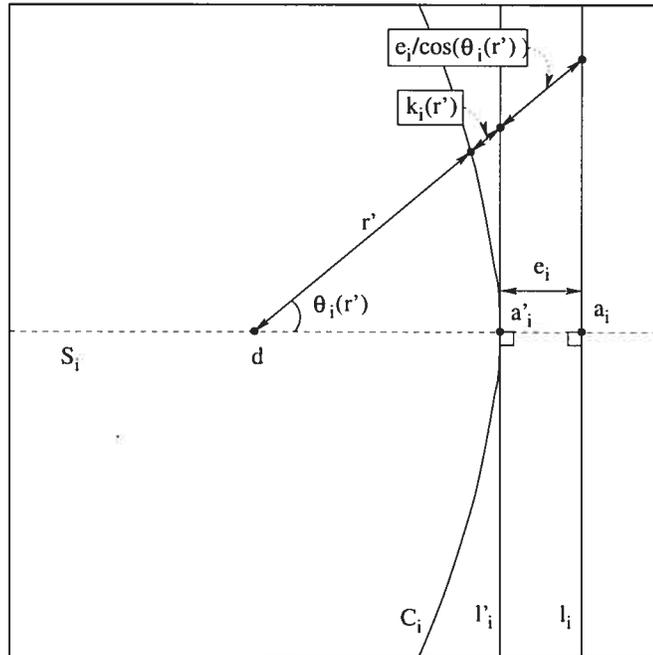


Figure 5.4. Nouvelle formulation du problème pour extraire la fonction de distorsion. Soit la droite l_i qui, après une transformation de distorsion radiale, devient la courbe C_i avec S_i sont axe de symétrie passant par le centre de distorsion d . La formulation utilise une nouvelle droite, l'_i parallèle à l_i et passant par a'_i le point de C_i le plus près de d pour établir une relation entre r' et le rayon associé sans distorsion. La seule mesure inconnu de l'image est e_i . Une fois retrouvée, celle-ci établie une relation complète entre les rayons avec et sans distorsion.

Avec cette formulation, il est possible de représenter, pour la courbe i , le rayon sans distorsion r_i par rapport au rayon avec distorsion r' :

$$r_i(r') = r' + k_i(r') + \frac{e_i}{\cos \theta_i(r')} \quad (5.1)$$

où $k_i(r')$ est la distance entre la courbe C_i et la droite l'_i dans le sens du rayon r' et $\theta_i(r')$ est l'angle entre le rayon r' et l'axe de symétrie S_i . Parmi ces mesures, seule e_i est inconnue. En effet, r' est la distance entre le centre de distorsion et un point de la courbe et est donné, k est la distance entre ce point et la droite l'_i connue et θ est l'angle entre le rayon r' et l'axe de symétrie déjà extrait. De plus, cette équation est valide à un facteur d'échelle près. En effet, si on agrandit l'image par rapport au centre de distorsion d'un facteur d'échelle α , les droites restent des droites. Pour la résolution, ce facteur d'échelle est négligée, le but étant de retrouver des droites. Cependant, dans les résultats au chapitre 7 ce facteur refait surface.

Pour construire le système linéaire et résoudre les valeurs de e_i (une par courbe), il est nécessaire de rappeler que $r' = F(r)$ est monotone strictement croissante. La fonction établie une relation *un à un* entre un rayon avec distorsion r' et un rayon sans distorsion r . Donc, parmi toutes les courbes C_i , tous les points qui sont à une distance r' étaient, avant la transformation de distorsion à une distance $r_i = r$. Le système linéaire est construit en minimisant l'écart des r_i pour l'ensemble des r' correspondants.

Soit r' une distance fixée entre le centre de distorsion radiale et un point d'une courbe C_i . On recherche le rayon avant la transformation de distorsion correspondant: $r_i(r')$. Même si le vrai r est inconnu, l'équation (5.1) donne une valeur de $r_i(r')$ selon r' pour chaque courbe C_i . Soit $I(r')$ l'ensemble des indices i des courbes C_i qui ont au moins une intersection avec le cercle de rayon r' centré au centre de distorsion. Comme les $r_i(r')$ devraient être identiques, il faut minimiser l'écart à la moyenne au

carré $E(r')$:

$$E(r') = \sum_{j \in I(r')} (r_j(r') - \mu)^2$$

où μ est la moyenne des $r_j(r')$.

$$\mu = \frac{1}{|I(r')|} \sum_{j \in I(r')} r_j(r')$$

où $|I(r')|$ est le nombre d'éléments dans l'ensemble $I(r')$. Donc,

$$\begin{aligned} E(r') &= \sum_{j \in I(r')} (r_j(r') - \mu)^2 \\ &= \sum_{j \in I(r')} \left(r' + k_j(r') + \frac{e_j}{\cos \theta_j(r')} - \frac{1}{|I(r')|} \sum_{n \in I(r')} \left(r' + k_n(r') + \frac{e_n}{\cos \theta_n(r')} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser $E(r')$, il faut chercher les endroits où les dérivées partielles par rapport aux e_i sont nulles. En effet, comme $E(r')$ n'a pas de borne supérieure et que $\frac{\partial^2 E(r')}{\partial e_i^2} > 0$ si $|I(r')| > 1$ et $\theta_j(r') > 0$, ces endroits seront nécessairement des minimums.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E(r')}{\partial e_i} \\ &= \sum_{\substack{j \in I(r') \\ j \neq i}} \left(k_j(r') + \frac{e_j}{\cos \theta_j(r')} - \frac{1}{|I(r')|} \sum_{n \in I(r')} \left(k_n(r') + \frac{e_n}{\cos \theta_n(r')} \right) \right) * \\ &\quad \left(\frac{-1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) + \\ &\quad \left(k_i(r') + \frac{e_i}{\cos \theta_i(r')} - \frac{1}{|I(r')|} \sum_{n \in I(r')} \left(k_n(r') + \frac{e_n}{\cos \theta_n(r')} \right) \right) * \\ &\quad \left(\frac{1}{\cos \theta_i(r')} - \frac{1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) \end{aligned}$$

Après réarrangement des termes pour extraire les e , on obtient:

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{\substack{j \in I(r') \\ j \neq i}} \left(\frac{-1}{|I(r')| \cos \theta_i(r') \cos \theta_j(r')} \right) e_j + \\
& \left(\frac{|I(r')| - 1}{|I(r')| \cos^2 \theta_i(r')} \right) e_i + \\
& \sum_{\substack{j \in I(r') \\ j \neq i}} \left(\frac{-1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) k_j(r') + \\
& \left(\frac{|I(r')| - 1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) k_i(r')
\end{aligned} \tag{5.2}$$

L'équation (5.2) est la dérivée partielle de $E(r')$ par rapport à e_i . En utilisant l'ensemble des dérivées partielles égales à zéro, on peut écrire le problème sous forme matricielle $MX = b$, où chaque ligne correspond à une équation. Dans ce système, j_1, j_2, \dots sont les éléments de l'ensemble $I(r')$.

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,|I(r')|} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,|I(r')|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{|I(r')|,1} & m_{|I(r')|,2} & \cdots & m_{|I(r')|,|I(r')|} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_{|I(r')|}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{|I(r')|} \end{pmatrix}$$

Le système contient $|I(r')|$ équations et autant de variables. La solution peut être obtenue de différentes manières, par exemple par décomposition LU.

Jusqu'à présent, la valeur de r' était fixée. La solution trouvée, c'est-à-dire les valeurs de e_i , dépendra uniquement des points des courbes C_i qui sont à la distance r' donnée du centre de distorsion. Pour augmenter la fiabilité et la robustesse de l'algorithme, il est préférable d'utiliser un ensemble de valeurs de r' . Un autre argument en faveur de l'utilisation de différents r' est illustré dans la figure 5.5. Cette figure comporte quatre courbes, C_1, C_2, C_3 et C_4 . Celles-ci proviennent de la déformation de quatre droites par une transformation de distorsion radiale. Si r' est fixé à une seule valeur, il est possible qu'une courbe, la courbe C_1 dans la figure,

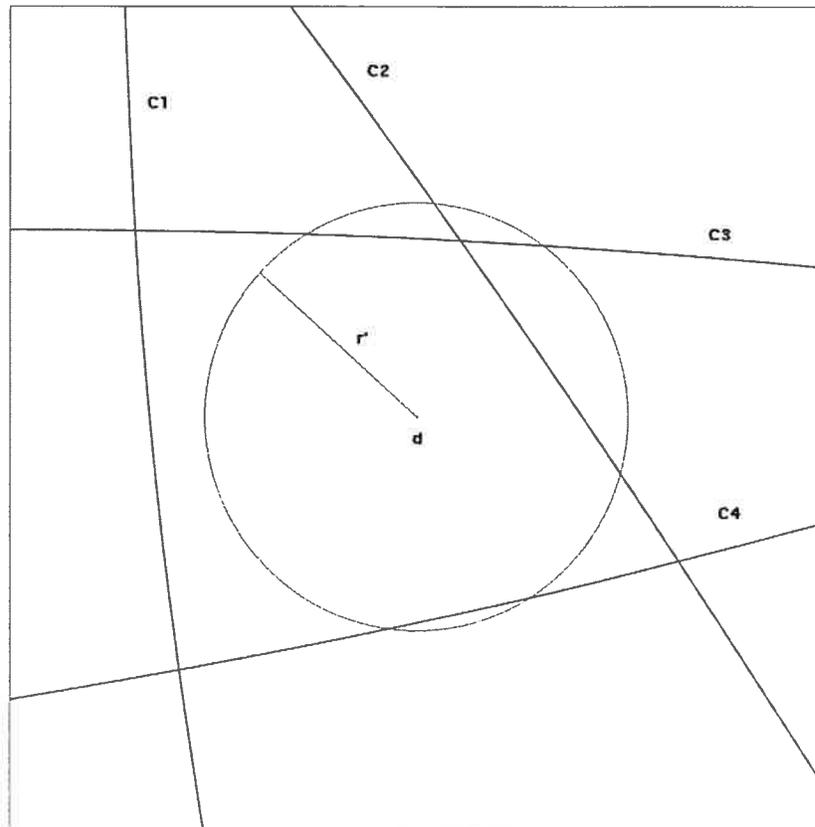


Figure 5.5. Exemple contenant 4 courbes où la courbe C_1 ne contient pas de point à une distance r' du centre de distorsion

ne contienne pas de point à une telle distance par rapport au centre de distorsion. Cette courbe sera négligée lors de la résolution du système et aucune valeur de e n'y sera associée. Sans cette valeur, l'emplacement initial de la droite l_1 est inconnu et donc, la courbe C_1 ne peut être utilisée dans l'extraction de la fonction de distorsion radiale.

Pour ces raisons, il est préférable d'utiliser un ensemble de r' , appelé R' . La minimisation se fera désormais sur la somme des coûts individuels associés à chacun

des r' , E :

$$E = \sum_{r' \in R'} E(r')$$

Les dérivées partielles sont obtenues de la même façon:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial e_i} = \sum_{r' \in R'} \frac{\partial E(r')}{\partial e_i} \\ &= \sum_{\substack{j \in I(r') \\ j \neq i}} \left[\sum_{r' \in R'} \left(\frac{-1}{|I(r')| \cos \theta_i(r') \cos \theta_j(r')} \right) \right] e_j + \\ &\quad \sum_{r' \in R'} \left(\frac{|I(r')| - 1}{|I(r')| \cos^2 \theta_i(r')} \right) e_i + \\ &\quad \sum_{\substack{j \in I(r') \\ j \neq i}} \sum_{r' \in R'} \left(\frac{-1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) k_j(r') + \\ &\quad \sum_{r' \in R'} \left(\frac{|I(r')| - 1}{|I(r')| \cos \theta_i(r')} \right) k_i(r') \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le système à résoudre est semblable. L'ensemble R' risque d'augmenter le nombre de courbes utiles dans le problème. Par conséquent, le nombre d'inconnues e_i et d'équations de dérivées partielles augmentera. Ce qui aura pour effet d'augmenter la taille du système. La résolution est identique.

Une fois la solution du système calculée, les valeurs des e_i sont connues. Cette information permet de calculer l'emplacement des droites initiales (sans distorsion) dans l'image. En effet, l'équation (5.1) établie la relation entre un rayon r' par rapport au centre de distorsion et plusieurs rayons initiaux $r_i(r')$, un par courbe intersectée à r' . La moyenne de ces $r_i(r')$ est désignée comme étant le vrai rayon initial r correspondant à r' . En théorie, les valeurs de $r_i(r')$ devraient être identiques. Cependant, en raison de l'imprécision et des erreurs cumulées, par exemple les erreurs de localisation ou de représentation de la courbe, celles-ci vont généralement différer légèrement.

La figure 5.6 illustre un exemple contenant quatre courbes C_i ainsi que les droites l_i correspondantes avant la distorsion radiale. On observe la relation entre une distance r' et les $r_i(r')$ correspondants. Il suffit d'intersecter les courbes C_i avec un cercle de rayon r' et pour chaque intersection, prolonger la droite jusqu'à l'intersection de l_i . La distance entre le centre de distorsion et cette nouvelle intersection donne $r_i(r')$.

L'ensemble de ces relations entre r' et r forme la fonction $F^{-1}(r')$ et en inversant, $F(r)$. Dans le cas présent, $F^{-1}(r')$ est un ensemble de paires de points (r', r) . Par conséquent, l'inverse s'obtient directement.

Dans les chapitres suivants, lorsqu'on parle de "reconstruction de la fonction de distorsion par morceaux", on considère un morceaux comme étant la relation entre r' et les $r_i(r')$ correspondants pour un i . Donc, chaque courbe i correspond à un morceaux de la fonction de distorsion. Comme ces morceaux sont échantillonnés avec les mêmes valeurs de r' , la fonction de distorsion finale est calculée pour chaque r' en moyennant les valeurs des $r_i(r')$ pour tous les i .

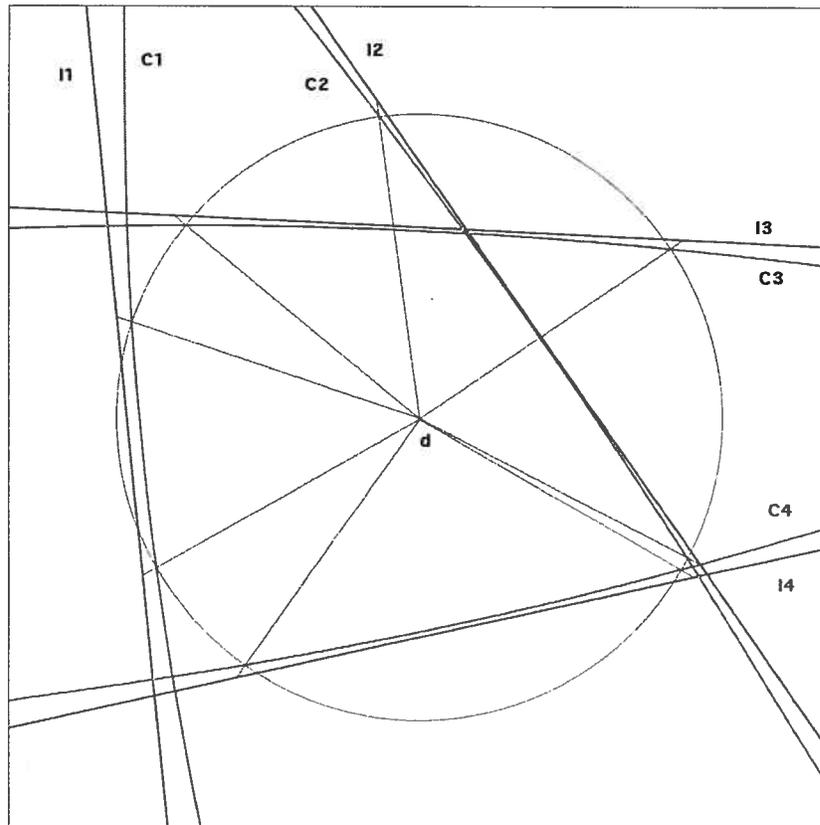


Figure 5.6. Exemple contenant 4 courbes additionnées des droites initiales. Le cercle de rayon r' centré en d indique les points des courbes C_i qui sont à une distance r' du centre de distortion. En continuant le rayon partant de d et passant par ces points sur les courbes, on retrouve les points avant distortion, i.e. les intersection des rayons avec les droites l_i .

Chapitre 6

IMPLÉMENTATION PROPOSÉE

La calibration de la distorsion radiale se fait par l'observation d'un ensemble de droites. Ces droites de l'espace 3D deviennent des courbes sur l'image. Comme la théorie présentée précédemment est basée sur un ensemble de distances directement mesurées dans l'image, la qualité des résultats dépend grandement des choix d'implémentation. Ce chapitre propose une implémentation efficace et précise pour extraire les courbes des images, pour la représentation de ces courbes, ainsi que pour le calcul du centre et de la fonction de distorsion.

6.1 Méthode d'extraction d'une courbe

Pour faciliter l'extraction des courbes, le motif choisi contient une seule droite par image. La combinaison de plusieurs images permettra de résoudre le problème. De plus, cette droite est représentée par l'intersection de deux régions de couleurs opposées: soit une région noire et une blanche (voir figure 6.1). Trois approches ont été testées afin d'extraire la courbe associée à une telle image.

La première est un algorithme de segmentation appelé: "Morphological Watersheds" [9]. Le principe consiste à utiliser la magnitude du gradient de l'image avec les coordonnées d'un point afin d'obtenir une surface 3D. Les parties de l'image ayant une magnitude élevée sont considées comme des régions plus "hautes". Avec une image comme celle de la figure 6.1, on s'attend à ce que la courbe recherchée soit la ligne la plus haute. L'idée de l'algorithme est de sélectionner les deux points les plus "bas" de l'image, un de chaque côté de la crête et de remplir d'eau ces deux bassins.



Figure 6.1. Exemple de courbe à extraire.

Les points où l'eau des deux bassins se touchent sont les points les plus hauts, c'est-à-dire les points de magnitude élevée et donc les pixels de la courbe. Cette méthode comporte deux inconvénients majeurs: l'extraction est très lente pour de grandes images et les points trouvés sont en pixels entiers et non en sous-pixels. Comme le reste de l'algorithme dépend beaucoup de l'extraction, une extraction en sous-pixel est nécessaire.

Le deuxième algorithme testé consiste à appliquer un filtre laplacien sur l'image [9]. Le laplacien, pour une image $I(x, y)$, est défini par:

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

La figure 6.2 montre l'effet du laplacien sur une bordure 1D. La figure de gauche contient une suite de pixels débutant avec une intensité de 0 et, à partir de $x = 10$, l'intensité change pour 255. La bordure se trouve au point $x = 9.5$. La figure de

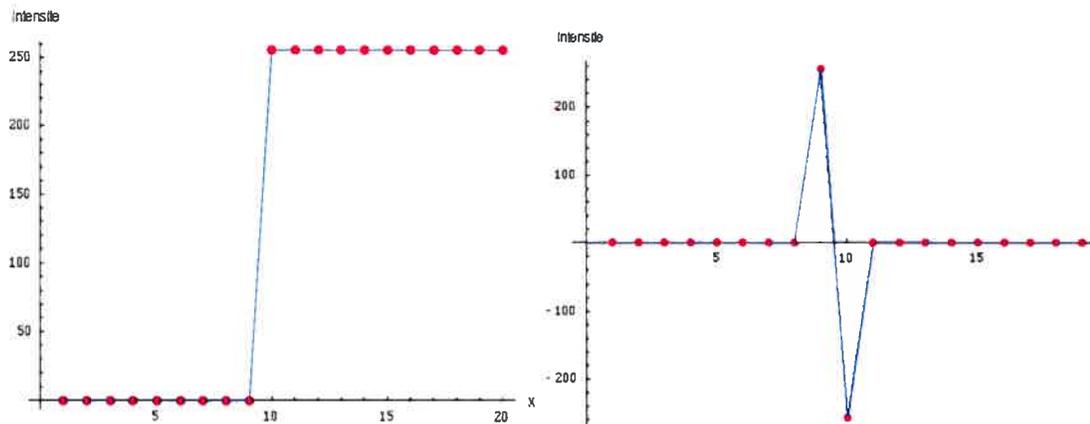


Figure 6.2. À gauche, l'ensemble de points représentant une bordure, c'est-à-dire un passage entre l'intensité 0 vers 255 entre $x = 9$ et $x = 10$. La figure de droite illustre le résultat de l'application du Laplacien discret. On observe le passage par 0 exactement sur la bordure, en $x = 9.5$.

droite montre le résultat de l'application du laplacien discret suivant:

$$\nabla^2 I(x) = I(x - 1) - 2I(x) + I(x + 1)$$

La particularité du résultat de l'application du laplacien est visible au point $x = 9.5$: le passage par 0. Donc, pour extraire les points de la bordure dans l'image 6.1, il faut appliquer un laplacien 2D et trouver les endroits où l'intensité est un *passage* par zéro. L'avantage de cette algorithme par rapport au précédent est que la détection est en sous-pixel. En effet, il est possible d'interpoler pour trouver exactement l'endroit entre deux pixels où la valeur passe par zéro. Le principal inconvénient est que le laplacien, qui est une dérivée seconde, est très sensible au bruit.

Le dernier algorithme présenté est celui donnant les meilleurs résultats. Il est probablement le plus connu et le plus utilisé pour la détection de bordure: "le Canny edge detector". La procédure comporte trois étapes. Premièrement, trouver la magnitude et l'argument du gradient pour chaque point de l'image. Le gradient d'un

point (x, y) de l'image I est défini comme étant le vecteur:

$$\nabla \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le gradient au point (x, y) est un vecteur qui indique la direction de la variation maximale d'intensité et la quantité de variation d'intensité à ce point. La magnitude et l'argument sont donnés par:

$$\begin{aligned} \text{mag}(\nabla \mathbf{f}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} \\ \text{arg}(\nabla \mathbf{f}) &= \arctan\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}}\right) \end{aligned}$$

La deuxième étape est la suppression des non-maximums. La suppression consiste à garder seulement les pixels qui ont une magnitude de gradient plus grande que les deux voisins dans le sens de l'argument du gradient. Les pixels conservés sont les points de variation maximum, c'est-à-dire les points de la bordure. Finalement, pour obtenir l'emplacement exacte en sous-pixel du maximum, une parabole est appliquée sur ce maximum et ses deux voisins dans le sens de l'argument avec les valeurs de la magnitude. Comme le pixel central est un maximum par rapport à ses deux voisins, la parabole passant par ces trois points contiendra nécessairement un maximum dans cet intervalle. La figure 6.3 est un exemple montrant trois points A , B et C en rouge d'intensités 100, 200 et 150 en position 0, 1 et 2 respectivement. La parabole passant par ces points indique un maximum de 202.083 à la position 1.167 (point D).

Le résultat de cette procédure est un ensemble désordonné de points de la courbe. Puisque la section suivante nécessite une suite ordonnée de points, une dernière étape est effectuée. Cette phase implique deux listes. Initialement, la liste 1 contient tous les points trouvés précédemment tandis que la liste 2 est vide. Parmi les points de

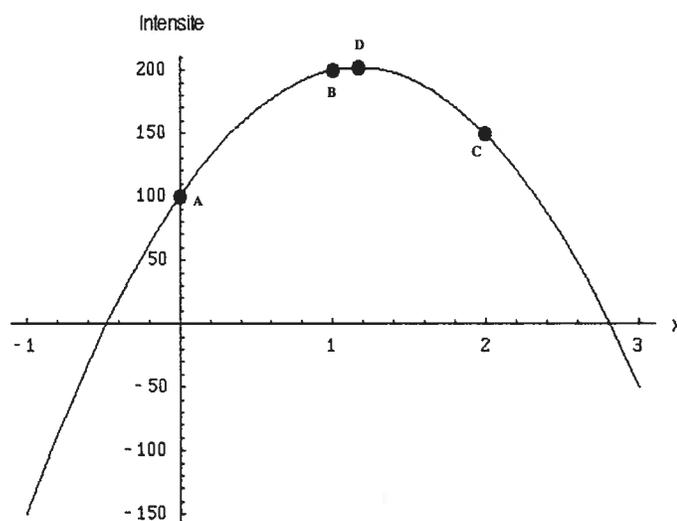


Figure 6.3. Exemple de parabole passant par trois points A:(0,100), B:(1,200) et C:(2,150). Le maximum de la parabole est calculé analytiquement D:(1.167,202.083).

la liste 1, celui ayant la magnitude de gradient le plus élevé est déplacé vers la liste 2. Ce point devient le point courant. L'étape à répéter est de chercher, dans la liste 1, le point le plus près du point courant, de le déplacer vers la liste 2 et de lui affecter le status de "point courant". Lorsque la distance entre le point courant et le point le plus près est plus grande qu'un seuil, l'algorithme s'arrête. L'algorithme réassigne le status de "point courant" au premier point déplacé vers la liste 2 et recommence une dernière fois ce processus. Le résultat est une suite ordonnée des points de la courbe. De plus, cette procédure, en bornant la distance entre deux points subséquents, permet d'éliminer des points erronés.

6.2 Représentation de la courbe

Lors du calcul du centre et de la fonction de distorsion, diverses mesures doivent être faites par rapport à la courbe. Par exemple, il faudra calculer la normale et

la tangente d'un point de la courbe. La suite de points obtenue dans la section précédente ne permet pas de trouver rapidement ces mesures. De plus, une légère erreur dans un point pourrait générer une grande erreur dans de telles mesures (par exemple une tangente trouvée localement). Pour remédier à ces inconvénients, la courbe est modélisée par des équations paramétriques polynomiales de degré N :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=0}^N a_j t^j \\ y(t) &= \sum_{j=0}^N b_j t^j \end{aligned}$$

Soit la suite de points correspondant à la courbe obtenue dans la section précédente (x_i, y_i) avec $i = 1, 2, \dots, M$ où M est le nombre de points total. La procédure pour calculer les paramètres a_j et b_j de la courbe est la suivante. Associer, pour chaque point de la courbe une valeur de t_i entre -1 et 1. La courbe sera valide seulement dans cet intervalle. Un des extrêmes de la liste de points est fixé à -1 tandis que l'autre extrême est fixé à 1. La longueur de la courbe L_C est calculée comme étant la somme des distances géométriques entre deux points adjacents de la liste. Partant du point extrême $t_{i=0} = -1$, la valeur de t_{i+1} du point suivant est:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2.0 \|(x_{i+1}, y_{i+1}) - (x_i, y_i)\|}{L_C} \quad (6.1)$$

Les valeurs de t_i sont fixées de cette façon pour uniformiser le déplacement physique sur la courbe par rapport aux t_i . Comme la courbe est représentée par beaucoup de points très rapprochés, une telle assignation des t_i permet généralement de bien représenter la courbe tout en restant très rapide à calculer. Cependant, comme il est discuté dans la conclusion, d'autres choix d'implémentation pourraient être utilisés pour des cas complexes de distorsion radiale où cette représentation ne suffirait pas. Les résultats obtenus par une telle approche étant très bons (voir chapitre 7), l'étude de la paramétrisation de la courbe, qui est un sujet complet en soi, est laissée en amélioration possible.

Les valeurs de x et de y dépendent uniquement de t . Elles peuvent alors être traitées séparément. La méthode pour calculer les paramètres a_i et b_i est indiquée pour $x(t)$ mais s'applique pour $y(t)$. Soit l'ensemble de tuples (x_i, y_i, t_i) et l'équation $x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_Nt^N$. La distance au carré entre la courbe $x(t)$ au points t_i et le point x_i est donnée par [8]:

$$e_i^2 = (x(t_i) - x_i)^2$$

Les valeurs des a_i recherchées sont celles qui minimisent la somme des erreurs e_i^2 pour tous les i . Soit

$$E = \sum_{i=1}^M e_i^2$$

Au minimum, les dérivées partielles seront nulles:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 0 = \sum_{i=1}^M 2(x_i - a_0 - a_1t_i - \dots - a_Nt_i^N)(-1) \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 0 = \sum_{i=1}^M 2(x_i - a_0 - a_1t_i - \dots - a_Nt_i^N)(-t_i) \\ \frac{\partial E}{\partial a_2} &= 0 = \sum_{i=1}^M 2(x_i - a_0 - a_1t_i - \dots - a_Nt_i^N)(-t_i^2) \\ &\vdots \\ \frac{\partial E}{\partial a_N} &= 0 = \sum_{i=1}^M 2(x_i - a_0 - a_1t_i - \dots - a_Nt_i^N)(-t_i^N) \end{aligned}$$

Une fois réarrangé sous forme de matrice, on obtient:

$$\begin{bmatrix} M & \sum t_i & \sum t_i^2 & \dots & \sum t_i^N \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \dots & \sum t_i^{N+1} \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 & \dots & \sum t_i^{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum t_i^N & \sum t_i^{N+1} & \sum t_i^{N+2} & \dots & \sum t_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \sum x_i t_i \\ \sum x_i t_i^2 \\ \vdots \\ \sum x_i t_i^N \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Si on pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^N \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^N \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \cdots & t_3^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_M & t_M^2 & \cdots & t_M^N \end{bmatrix}$$

il est possible de reformuler (6.2) par:

$$A^T A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}$$

Les paramètres a_j sont trouvés par une décomposition en valeurs singulières de A . Le même procédé est utilisé pour trouver les paramètres b_j .

L'avantage principal d'utiliser les équations paramétriques polynomiales est que la courbe est définie même entre les points (x_i, y_i) . De plus, la dérivée est facilement calculable pour tous les t . En effet, la dérivée à un point t des équations précédentes est:

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1} t^j$$

$$y'(t) = \sum_{j=0}^{N-1} b_{j+1} t^j$$

Ce qui donne la tangente et la normale pour un t directement:

$$\text{tangente}(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{normale}(t) = (-y'(t), x'(t))$$

Le choix des degrés des polynômes à utiliser peut se faire à l'aide de la variance:

$$\sigma^2 = \frac{E}{M - N - 1}$$

En effet, plus le degré d'un polynôme augmente, plus l'erreur E diminue. À la limite, si le degré N égal le nombre de points M , $E = 0$. Dans ce cas, le polynôme obtenu passe exactement par tous les points (x_i, y_i) mais représente mal la courbe sous-jacente. Il est alors préférable de choisir le plus petit degré d'un polynôme pour lequel σ^2 est petit et que l'augmentation d'un degré diminue peu σ^2 .

Finalement, il est possible de calculer une borne supérieure pour la distance géométrique moyenne entre les points (x_i, y_i, t_i) et la courbe $(x(t), y(t))$:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|(x_i, y_i) - (x(t_i), y(t_i))\|$$

Cette valeur n'est pas la distance géométrique moyenne entre les points et la courbe mais plutôt une borne supérieure car la distance géométrique calcule le déplacement entre un point et le point de la courbe le plus près. Dans cette équation, le point de la courbe $(x(t_i), y(t_i))$ n'est pas assuré d'être le plus près de (x_i, y_i) . Cependant, si on observe des valeurs petites, cette mesure indique que la courbe représente bien les points.

6.3 Symétrie

Le chapitre précédent a expliqué le rôle de l'axe de symétrie d'une courbe dans l'algorithme. Le but de cette section est de donner une méthode pour trouver cette droite.

Avant d'entamer la détection de l'axe de symétrie, il est primordial de rappeler que son intersection avec la courbe se fait perpendiculairement par rapport à la tangente de ce point. La normale d'un point de la courbe étant définie comme le vecteur perpendiculaire à la tangente, il est alors possible d'affirmer que l'axe de symétrie est parallèle à la normale au point d'intersection de cet axe avec la courbe.

La méthode pour trouver l'axe de symétrie est de parcourir la courbe et d'assigner un "coût de symétrie" à différents points de la courbe. Ce coût est construit pour

être égal à 0 dans le cas d'une symétrie parfaite et augmente lorsque la symétrie s'estompe.

Soit $t = t_1$ un point de la courbe $(x(t), y(t))$ ayant une tangente T et une normale N . Définissons l_T une droite parallèle à T et qui passe par le point $(x(t_1), y(t_1))$ et l_N une droite parallèle à N et qui passe par ce même point (voir figure 6.4). Le coût de symétrie représente une mesure de la similitude entre les deux côtés de la droite l_N au point considéré. Soient h_1 et h_2 deux points sur l_T à une distance h de $(x(t_1), y(t_1))$. Soient l_{h_1} et l_{h_2} deux droites perpendiculaires à l_T passant respectivement par h_1 et h_2 . Finalement, définissons c_1 comme l'intersection de l_{h_1} avec la courbe C et c_2 l'intersection de l_{h_2} avec C . Si la droite l_N est un axe de symétrie parfait, alors pour toutes distances h , la distance entre h_1 et c_1 est égale à la distance entre h_2 et c_2 . Cette propriété est utilisée comme coût de symétrie. Plus concrètement:

$$\text{Coût de symétrie} = \sum_{h=h_{\min}}^{h_{\max}} (||h_1 - c_1|| - ||h_2 - c_2||)^2$$

Notons que h_1 , h_2 , c_1 et c_2 sont obtenus pour un h donné. Le coût sera nul pour une symétrie parfaite et augmentera progressivement lorsque la symétrie disparaît. L'axe de symétrie est donc choisi comme étant la droite l_N passant par le point de la courbe ayant le coût de symétrie le moins élevé.

Il est important de noter que la courbe est valide seulement entre $t = -1$ et $t = 1$. Donc, il faut absolument que c_1 et c_2 soient dans cet intervalle sur la courbe C . Cette contrainte limite la distance h_{\max} . De plus, afin d'obtenir un coût comparable sur l'ensemble de la courbe, il est important que l'intervalle utilisé $[h_{\min}, h_{\max}]$ soit le même pour tous les points de la courbe. Moins l'image contient de distorsion, plus l'intervalle doit être grand pour être représentatif. Sinon, le coût est calculé sur des segments qui sont pratiquement linéaires et la symétrie sera difficilement mesurable.

Basé sur les contraintes précédentes, il est possible de spécifier certains critères de rejet pour s'assurer que les courbes utilisées dans les étapes qui suivent soient

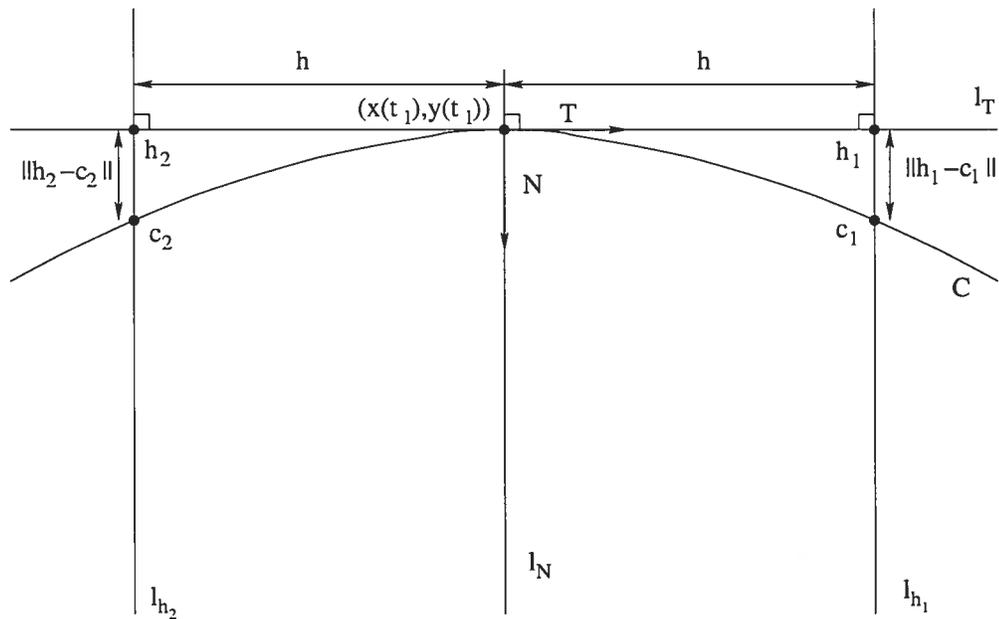


Figure 6.4. Calcul du coût de symétrie au point t_1 de la courbe C . Soit l_T la droite tangente au point t_1 , et h une distance donnée. Il existe 2 points sur l_T à une distance h de t_1 , h_1 et h_2 . Soient l_{h_1} et l_{h_2} deux droites perpendiculaires à l_T et passant par h_1 et h_2 . Ces droites intersectent la courbe C aux points c_1 et c_2 . Le coût de symétrie est calculé comme la somme des différences entre $||h_1 - c_1||$ et $||h_2 - c_2||$ pour différents h .

pertinentes pour les calculs de centre et de fonction de distorsion. Par exemple, si l'intervalle $[h_{min}, h_{max}]$ est trop petit, cela indique que la courbe est courte et par conséquent, contient peu d'information. Si les coûts de symétrie obtenus sont tous petits, la courbe ne contient pas d'axe de symétrie dominant. De plus, si le point ayant le coût minimal est placé sur une des extrémités, cela n'implique pas nécessairement que ce point est le meilleur axe. Il est possible que le meilleur axe intersecte la courbe en dehors de l'image. De tels cas sont facilement identifiables et une décision par rapport au rejet de la courbe peut être prise automatiquement.

6.4 Calcul du centre de distorsion

Une fois le coût de symétrie calculé pour plusieurs points de chaque ligne, il est nécessaire de mettre en commun ces informations. Cependant, il faut noter que le coût de symétrie décrit dans la section 6.3 est indépendant pour deux courbes. En effet, chaque courbe possède son propre intervalle $[h_{min}, h_{max}]$. Un autre choix de coût de symétrie pourrait uniformiser cet intervalle pour toutes les courbes. L'intervalle utilisé serait désigné comme le plus petit parmi les courbes. Ce choix implique cependant une perte d'information. Les courbes longues, qui utilisaient un intervalle plus grand pour calculer le coût de symétrie seraient contraintes d'utiliser un intervalle réduit.

Le calcul du centre de distorsion se fera avec les meilleurs axes de symétrie de chaque courbe. Dans la section 5.2, il a été établi que le centre de distorsion est l'intersection des axes de symétrie. Dans le cas où le nombre d'axes de symétrie est plus grand que 2, la solution est le point qui minimise la distance avec les droites. Soit le centre de distorsion recherché (d_x, d_y) et soient les équations des M axes de

symétrie:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ &\vdots \\ A_Mx + B_My + C_M &= 0 \end{aligned}$$

Il faut changer l'échelle des vecteurs (A_i, B_i, C_i) pour que leur norme soit 1. Ce changement n'altère pas la droite mais assure que tous les axes ont le même poids lors du calcul du centre de distorsion. La distance au carré D_i^2 entre le centre de distorsion et l'axe de la courbe C_i est donnée par:

$$D_i^2 = \frac{(A_id_x + B_id_y + C_i)^2}{A_i^2 + B_i^2}$$

Le point (d_x, d_y) recherché est celui qui minimise les distances avec les axes de symétrie. Donc:

$$\min_{(d_x, d_y)} \sum_{i=1}^M D_i^2$$

Le minimum est atteint lorsque les dérivées partielles sont égales à 0.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial d_x} \left(\sum_{i=1}^M D_i^2 \right) = \sum_{i=1}^M \frac{2(A_id_x + B_id_y + C_i)A_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{A_i^2 d_x + A_i B_i d_y + A_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial d_y} \left(\sum_{i=1}^M D_i^2 \right) = \sum_{i=1}^M \frac{2(A_id_x + B_id_y + C_i)B_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{A_i B_i d_x + B_i^2 d_y + B_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \end{aligned}$$

Après réarrangement on obtient le système suivant qui admet une solution unique.

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{A_i^2}{A_i^2 + B_i^2} & \sum \frac{A_i B_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ \sum \frac{A_i B_i}{A_i^2 + B_i^2} & \sum \frac{B_i^2}{A_i^2 + B_i^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{A_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ \sum \frac{B_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \end{pmatrix}$$

Dans le chapitre 7, on observera que certaines courbes donnent une information plus précise que d'autres concernant l'axe de symétrie. En effet, plus une courbe contient de distorsion, plus son axe est précis. Ce type d'information doit être pris en compte lors du calcul du centre de distorsion. Soit un poids w_i associé à l'axe (A_i, B_i, C_i) d'une courbe C_i . Plus le poids est élevé, plus l'axe est précis. Pour tenir compte de ces valeurs, on multiplie la distance D_i entre le point recherché (d_x, d_y) et l'axe par w_i (donc D_i^2 par w_i^2). La solution sera celle qui minimise les distances entre le centre de distorsion et les axes de symétrie. Donc un axe ayant un poids plus élevé sera plus pénalisé qu'un autre qui a un poids faible.

Le système devient alors:

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{w_i^2 A_i^2}{A_i^2 + B_i^2} & \sum \frac{w_i^2 A_i B_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ \sum \frac{w_i^2 A_i B_i}{A_i^2 + B_i^2} & \sum \frac{w_i^2 B_i^2}{A_i^2 + B_i^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{w_i^2 A_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \\ \sum \frac{w_i^2 B_i C_i}{A_i^2 + B_i^2} \end{pmatrix}$$

6.5 Extraction de la fonction de distorsion

La section 5.3 détermine l'approche utilisée pour retrouver l'inverse de la fonction $F(r)$. Celle-ci nécessite un ensemble de mesures incluant les paramètres r' , k et θ de l'équation (5.1). Cette section présente les moyens concrets pour obtenir de telles mesures selon les choix d'implémentation faits jusqu'ici.

La première étape est de recalculer l'axe de symétrie pour chaque courbe C_i mais en tenant compte du centre de distorsion trouvé (d_x, d_y) . En effet, pour diverses raisons, par exemple la fiabilité de la représentation de la courbe, certains axes trouvés précédemment peuvent s'éloigner du centre de distorsion. Le nouvel axe de symétrie sera calculé comme le point de la courbe C_i le plus près du centre de distorsion. Soit

la courbe $C_i = (x(t), y(t))$ avec:

$$x(t) = \sum_{j=0}^N a_j t^j$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^N b_j t^j$$

Le rayon au carré R^2 par rapport au centre de distorsion est:

$$R^2 = (x(t) - d_x)^2 + (y(t) - d_y)^2 \quad (6.3)$$

R^2 est un polynôme de degré $2N$ en t . Pour trouver le point minimum, il faut trouver les endroits où la dérivée par rapport à t est nulle. Il existe $2N - 1$ racines possibles. Celle recherchée possède 2 caractéristiques: elle est réelle et dans l'intervalle $[-1, 1]$. Cette racine indique le point t de la courbe le plus près du centre de distorsion. Ce point est désigné par la lettre a'_i dans la figure 5.4. L'axe de symétrie est choisi comme étant la droite qui passe par le centre de distorsion et par ce point, a'_i .

Une fois les axes de symétrie fixés, il est possible d'extraire les valeurs de k et θ pour différents r' (équation (5.1)). La procédure expliquée ici pour une courbe C_i s'applique à l'ensemble des courbes. Soit r' un rayon donné, la première étape est de trouver le ou les points de C_i qui sont à une distance r' du centre de distorsion (d_x, d_y) . L'équation (6.3), qui établit une relation entre la distance avec le centre de distorsion et les points de la courbe $(x(t), y(t))$, est utilisée:

$$0 = (x(t) - d_x)^2 + (y(t) - d_y)^2 - (r')^2 \quad (6.4)$$

Cette équation possède $2N$ racines. Comme précédemment, seules celles étant réelles et dans l'intervalle $[-1, 1]$ sont retenues. Les solutions d'un polynôme de degré moins de 5 sont obtenues analytiquement. Si le degré du polynôme est de 5 ou plus, il faut utiliser une méthode itérative. Il existe plusieurs bibliothèques qui permettent de

trouver efficacement les racines d'un polynôme. Dans le cas présent, la librairie GNU Scientific Library (GSL) est utilisée.

Comme $F(r)$ est monotone strictement croissante, l'équation (6.4) aura soit une ou deux racines valides. Si une seule racine valide est obtenue, la valeur de $t = t_0$ trouvée est utilisée pour calculer θ et k . Soit $A_{t_0}x + B_{t_0}y + C_{t_0} = 0$ la droite passant par le point $(x(t_0), y(t_0))$ et le centre de distorsion (d_x, d_y) . Soit $A_{a'_i}x + B_{a'_i}y + C_{a'_i} = 0$ l'équation de l'axe de symétrie passant par le point a'_i et le centre de distorsion. Les valeurs des coefficients A , B et C d'une droite passant par deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont obtenues par:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

La valeur de θ est obtenue par:

$$\theta_i(r') = \arctan \frac{A_{a'_i}B_{t_0} - A_{t_0}B_{a'_i}}{A_{a'_i}A_{t_0} + B_{a'_i}B_{t_0}}$$

Sur la figure 5.4, on observe que la valeur de k est obtenue en intersectant la droite $A_{t_0}x + B_{t_0}y + C_{t_0} = 0$ avec la droite l'_i . Cette dernière étant perpendiculaire à l'axe de symétrie et passant par a'_i . Soit $(x_{l'_i}, y_{l'_i})$ cette intersection, k est obtenue par:

$$k = \|(x_{l'_i}, y_{l'_i}) - (x(t_0), y(t_0))\|$$

Dans le cas où l'équation (6.4) a deux racines valides, deux valeurs de θ et k peuvent être calculées. En raison de la symétrie de la courbe, ces valeurs doivent être identiques. L'accumulation d'erreurs due par exemple à la représentation de la courbe peut créer une différence entre ces valeurs. Si cette différence est trop grande, ces valeurs de θ et k ne sont pas utilisées pour trouver les valeurs des e_i dans l'équation (5.3).

Ce chapitre contenait la description d'une implémentation complète et efficace de l'algorithme donné précédemment. Cependant, il en existe beaucoup d'autres. Dans

le chapitre 8, diverses faiblesses de cette implémentation sont discutées avec des solutions possibles. Auparavant, le chapitre qui suit expose différentes évaluations et comparaisons de l'implémentation proposée.

Chapitre 7

RÉSULTATS

Les chapitres précédents proposent une méthode de calibration de la distorsion radiale ainsi qu'une description d'une implémentation complète. Les résultats, qui sont calculés à partir de différentes mesures prises dans l'image, dépendent fortement de l'implémentation choisie. L'objectif de la première partie de ce chapitre est de mesurer l'erreur associée à ces choix par des tests sur des images synthétiques. La deuxième partie comporte les résultats de l'algorithme complet sur des exemples synthétiques pour évaluer la fiabilité des résultats ainsi que des comparaisons avec les algorithmes décrits dans le chapitre 3 sur des images réelles.

7.1 *Mesure de colinéarité*

La mesure de la colinéarité d'un ensemble de points indique si ces points sont sur une même droite. La méthode choisie est de calculer l'écart entre les points et la meilleure droite passant par ceux-ci. Si l'écart est de 0, tous les points sont sur la droite. Plus la mesure augmente, moins les points sont colinéaires.

Soit un ensemble de points (x_i, y_i) avec $i = 1, \dots, N$, la meilleure droite passant par ces points est celle qui minimise la somme des distances entre les points et la droite. La distance perpendiculaire entre une droite $y = m * x + b$ et un point (x_i, y_i) , voir figure 7.1, est donnée par:

$$d_i = \frac{|y_i - (mx_i + b)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Il faut minimiser:

$$\sum_{i=1}^N d_i$$

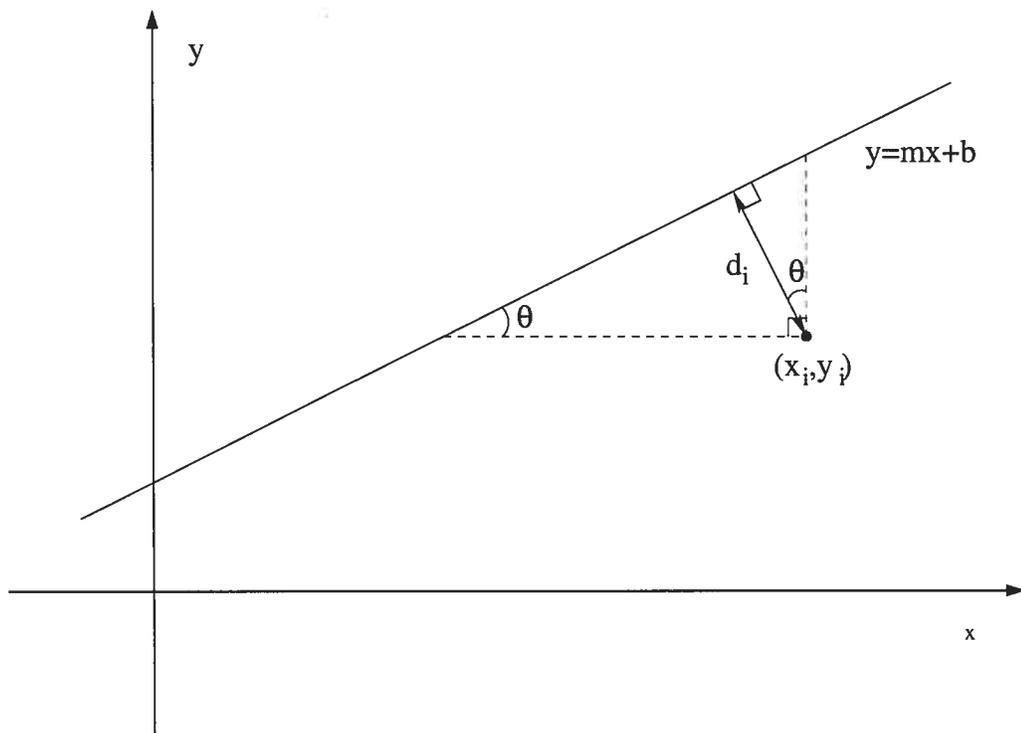


Figure 7.1. Distance entre un point (x_i, y_i) et une droite $y = mx + b$

Pour faciliter la résolution, la minimisation est faite sur la distance au carrée entre un point et la droite. L'effet d'un tel changement est d'éliminer la valeur absolue sans altérer le problème. Donc, il faut minimiser:

$$S = \sum_{i=1}^N d_i^2$$

Le minimum de S est obtenue en calculant le point où les dérivées partielles de S sont 0. Commençons par la dérivée partielle par rapport à b :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial b} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{-2(y_i - (mx_i + b))}{1 + m^2} \\ &= \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + b)) \\ \sum_{i=1}^N y_i &= m \sum_{i=1}^N x_i + Nb \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \right) &= m \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right) + b \end{aligned}$$

On observe que la droite passe par le centroïde $(\sum x_i/N, \sum y_i/N)$. Cette propriété permet de faire un changement de coordonnées. Soient les points $(x'_i, y'_i) = (x_i - \sum x_i/N, y_i - \sum y_i/N)$. Il faut maintenant trouver la meilleur droite passant par l'origine donc trouver la rotation θ du système de coordonnées.

$$\begin{aligned} x''_i &= x'_i \cos \theta + y'_i \sin \theta \\ y''_i &= -x'_i \sin \theta + y'_i \cos \theta \end{aligned}$$

La distance minimale entre un point et une droite est la distance perpendiculaire entre ce point et la droite. Donc, si on cherche le θ qui minimise la somme des distances verticales entre les points et la droite, au minimum, ce θ correspond à l'angle de la

droite qui minimise la distance perpendiculaire. La somme des distances verticales:

$$S' = \sum_{i=1}^N (y_i'')^2$$

Pour trouver le minimum, on cherche parmi les points où les dérivées sont égales à 0. En effet, ces points donnent les extrémums, donc autant les maximums que les minimums. Dans les cas précédents, les fonctions ne comprenaient pas de borne maximale, donc, les points où les dérivées étaient égales à 0 donnaient les minimums. Le problème présent contient un minimum et un maximum. Le minimum étant l'angle qui minimise la somme des $(y_i'')^2$ et le maximum, l'angle qui maximise cette valeur. Évidemment, ces deux angles sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S'}{\partial \theta} \\ &= \sum_{i=1}^N 2(-x_i' \sin \theta + y_i' \cos \theta)(-x_i' \cos \theta - y_i' \sin \theta) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i' y_i' \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^N ((x_i')^2 - (y_i')^2) \sin \theta \cos \theta - \sum_{i=1}^N x_i' y_i' \cos^2 \theta \end{aligned}$$

En divisant par \cos^2 , on obtient une équation quadratique:

$$\sum_{i=1}^N x_i' y_i' \tan^2 \theta + \sum_{i=1}^N ((x_i')^2 - (y_i')^2) \tan \theta - \sum_{i=1}^N x_i' y_i' = 0$$

La résolution de cette équation donne deux réponses, l'angle qui minimise S' et celui qui le maximise. Il faut garder seulement celui qui minimise. Avec cet angle θ et le centroïde, la meilleure droite $Ax + By + C = 0$ passant par les points (x_i, y_i) est identifiable. Cette droite permet alors de calculer différentes mesures intéressantes:

- l'écart total à la droite:

$$\delta_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{|Ax_i + By_i + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- l'écart moyen à la droite pour les N points:

$$\delta_{moy} = \frac{\delta_{tot}}{N} \quad (7.1)$$

- l'écart maximal:

$$\delta_{max} = \max_i \left(\frac{|Ax_i + By_i + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

7.2 *Évaluation de l'extraction des points de la courbe*

La première étape de l'algorithme consiste à extraire de l'image les points de la courbe. La procédure d'extraction est donnée dans la section 6.1. L'évaluation de la qualité de l'extraction consiste à utiliser une image synthétique contenant une droite parfaite sur laquelle on applique le procédé d'extraction des points. Ensuite on calcule l'écart moyen et l'écart maximum des points trouvés. Plus ces valeurs sont petites, plus les points extraits sont sur une même droite. Les résultats des 100 expériences sont présentés dans les figures 7.2 et 7.3.

À la figure 7.2, on observe que la moyenne des 100 écarts moyens δ_{moy} est inférieure à 1 centième de pixel et que δ_{moy} maximal est inférieur à 4 centièmes de pixels. Ce qui indique qu'en général, l'extraction des points de la droite donne des points très colinéaires. La figure 7.3 indique δ_{max} pour chaque expérience. La valeur maximale des 100 expériences est environ 0.64 pixel. Cette valeur peut sembler grande mais comme l'écart moyen est très petit, on en déduit que ce type d'écart est marginal. Les droites vertes dans ces figures indiquent la moyenne.

7.3 *Évaluation de la représentation de la courbe*

Une fois les points d'une courbe extraits, l'étape suivante consiste à trouver les deux courbes paramétriques qui approximent ces points. La procédure est donnée dans la section 6.2. Dans cette procédure, à chaque point (x_i, y_i) est associé une valeur de t_i entre -1 et 1 ce qui permet de calculer les coefficients des courbes paramétriques

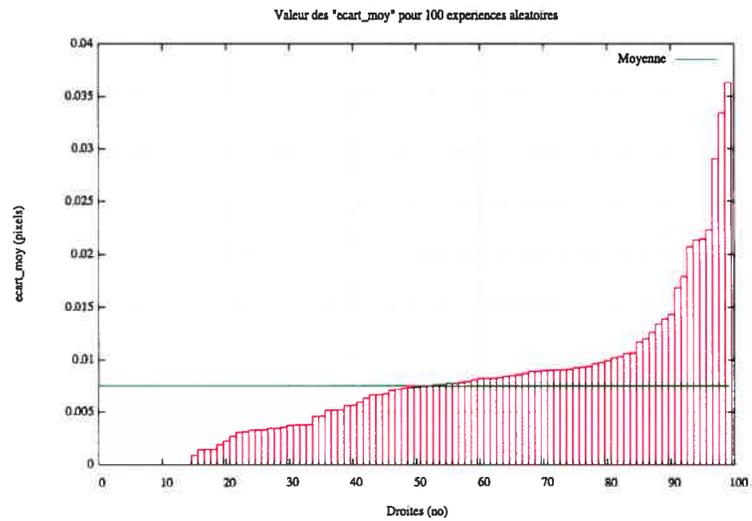


Figure 7.2. Écart moyen des droites. L'écart moyen est calculé sur un ensemble de points en trouvant la meilleur droite passant par ces points et en calculant la distance moyenne entre les points et cette droite.

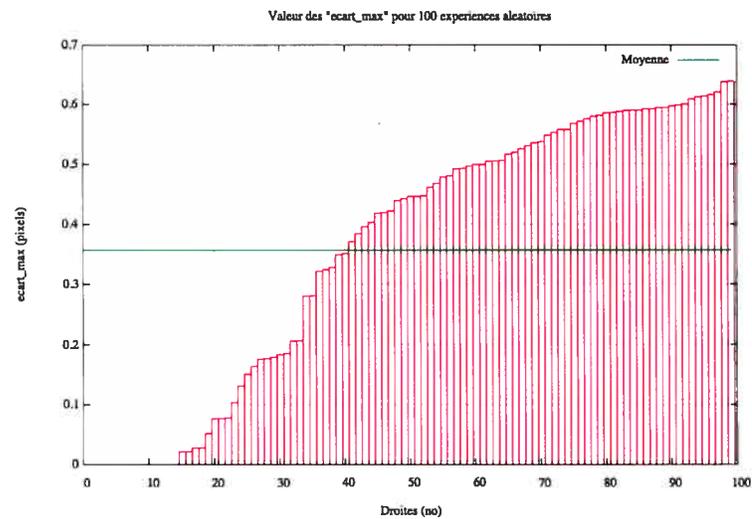


Figure 7.3. Écart maximal des droites. L'écart maximal est calculé sur un ensemble de points en trouvant la meilleur droite passant par ces points et en identifiant la distance maximale entre les points et cette droite.

$(x(t), y(t))$. Dans le cas où ces courbes paramétriques passent exactement par tous les points, on aura, pour tous les triplets (x_i, y_i, t_i) , $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$. Il faut donc que:

$$E = \sum_{i=1}^N \|(x_i, y_i) - (x(t_i), y(t_i))\|$$

soit petit. Cependant, comme il est mentionné précédemment, plus le degré des équations paramétriques augmente, plus E diminue. En effet, si le degré égal au nombre de points utilisés, $E = 0$. Dans ce cas, la courbe paramétrique oscille entre les points. Elle représente parfaitement les points mais très mal la courbe sous-jacente. Il faut donc trouver le degré qui représente aussi bien les points que la droite déformée par la distorsion radiale. La mesure habituelle servant à identifier le degré des courbes paramétriques à utiliser est la variance:

$$\sigma^2 = \frac{E^2}{N - \text{degre} - 1}$$

Alors que E^2 diminue avec l'augmentation de *degre*, σ^2 diminue ou augmente selon le rapport entre E^2 et $N - \text{degre} - 1$. On cherchera donc à augmenter le degré des courbes tant que σ^2 diminue considérablement.

L'expérience consiste à appliquer une transformation de distorsion radiale aux 100 images de droites utilisées dans la section précédente. Extraire ensuite les points et calculer les coefficients des courbes paramétriques. Finalement, calculer la variance moyenne de ces 100 courbes:

$$\sigma_{\text{moy}}^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2$$

Les valeurs de σ_{moy}^2 pour différents degrés sont contenues dans la figure 7.4.

On remarque que le passage au degré 4 est la dernière amélioration importante de la variance. Cette valeur semble être un bon choix de degré.

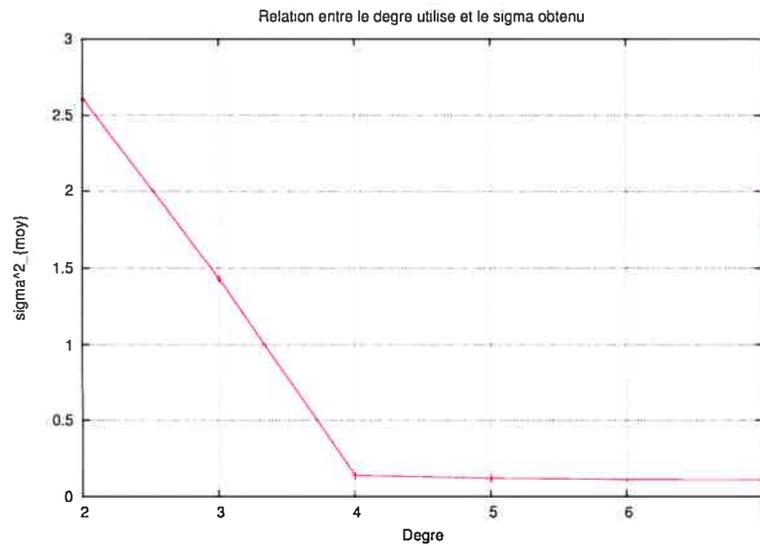


Figure 7.4. Relation entre le degré d'une courbe et le σ_{moy}^2 .

7.4 Évaluation de la détection du centre de distorsion

L'évaluation du centre de distorsion se fait à l'aide de courbes synthétiques semblables à celles utilisées dans la section précédente. Le centre de distorsion est connu: (420, 471). Il est possible de calculer la distance entre le centre obtenu par l'intersection des axes de symétries et le vrai centre. Le tableau 7.4 indique la distance entre le centre trouvé et le vrai centre pour différents degrés et différents nombres de courbes.

Le tableau 7.4 confirme qu'un choix de degré de 4 pour les courbes paramétriques était très bon. En effet, peu importe le nombre de courbes utilisées, le centre trouvé est souvent à moins de 1 pixel du vrai centre. On remarque que le degré 2 est nettement insuffisant pour décrire la courbe. Le degré 3 ne permet pas de trouver la symétrie dans les courbes. Peu importe le degré utilisé, la distance entre les deux centres semble minimale pour 40 courbes et plus. Passé cette quantité, le gain semble minime.

	N	10	20	30	40	50	100	200
degré								
2		43.222	34.787	24.727	16.562	16.711	19.311	27.319
3		-	-	-	-	-	-	-
4		0.644	0.558	0.557	0.338	0.299	0.210	1.023
5		12.733	7.310	6.079	5.329	5.394	3.435	4.969
6		5.371	2.885	2.098	3.242	3.231	1.802	1.580
7		4.575	3.166	3.403	2.314	2.339	1.461	0.978

Table 7.1. Les valeurs du tableau indiquent la distance entre le centre calculé et le vrai centre selon deux facteurs: le degré des courbes paramétriques et N le nombre de courbes utilisées pour la détection du centre de distorsion.

Il est aussi très pertinent d'observer la distance entre le vrai centre de distorsion et chacun des axes de symétrie. Reprenons les 100 courbes utilisées depuis le début. Le choix du degré est 4 pour la représentation des courbes. Une fois les axes extraits, la distance la plus courte entre ces axes et le vrai centre de distorsion est trouvée et affichée à la figure 7.5. La différence entre les deux graphiques de cette figure est simplement l'échelle en ordonnée. Le graphique du haut donne un aperçu global. On observe que parmi les 100 courbes aléatoires utilisées, seules 88 courbes contiennent un axe de symétrie. Comme mentionné précédemment, deux causes expliquent ce fait: lorsque la droite initiale passe par le centre de distorsion et lorsque l'axe de symétrie intersecte la courbe à l'extérieur de l'image. De plus, il existe des cas où l'axe trouvé est très loin du centre de distorsion. La figure 7.7 explique ces écarts. Ce graphique indique la distance des axes de symétrie par rapport au vrai centre selon l'écart moyen de la courbe. L'écart moyen est une mesure qui indique la colinéarité

des points. Plus elle est grande, moins les points de la courbe sont colinéaires. On observe sur ce graphique que plus la courbe distorsionnée est colinéaire, moins l'axe de symétrie semble contraint à passer près du centre. Donc, la quantité de distorsion radiale que contient une courbe est un facteur qui indique la précision de son axe de symétrie. Afin de mieux observer la relation, le graphique contient 500 courbes aléatoires au lieu de 100. La figure 7.6 donne quelques exemples d'écarts moyens et les courbes associées.

7.5 *Évaluation de la fonction de distorsion*

Une fois le centre de distortion connu, la fonction de distortion peut être retrouvée par la procédure de la section 5.3. Le résultat obtenu établit la relation entre les rayons avec distorsion et les rayons avant distorsion (voir équation (5.1)). Donc, chaque courbe contribue à retrouver une partie de la fonction de distorsion.

Soit les 88 courbes contenant des axes de symétries de la section précédente. Le graphique du haut de la figure 7.8 montre les 88 morceaux qui constituent la fonction de distorsion. Cette fonction donne le déplacement qu'on doit appliquer à un point de la courbe pour inverser la transformation de distorsion. Le graphique du bas contient la fonction récupérée en moyennant les valeurs obtenues pour chaque rayons r' .

Finalement, la fonction $f(r)$ est facilement calculable. Une fois trouvée, il est possible de la comparer avec la fonction réelle utilisée lors de la transformation de distorsion radiale. La figure 7.9 illustre cette comparaison. On observe la différence absolue entre la fonction réelle et la fonction calculée pour tous les rayons r' utilisés pour retrouver la fonction. Il faut rappeler que la relation trouvée établit un rapport entre r' et r mais à un facteur d'échelle près. Ce facteur a été calculé pour obtenir la différence minimale entre les valeurs de r retrouvées et celles de la vraie fonction. Une fois ce facteur estimé, il est possible de mesurer la différence moyenne entre les déplacements obtenus et les vrais provenant de la fonction réelle. Pour des rayons r'

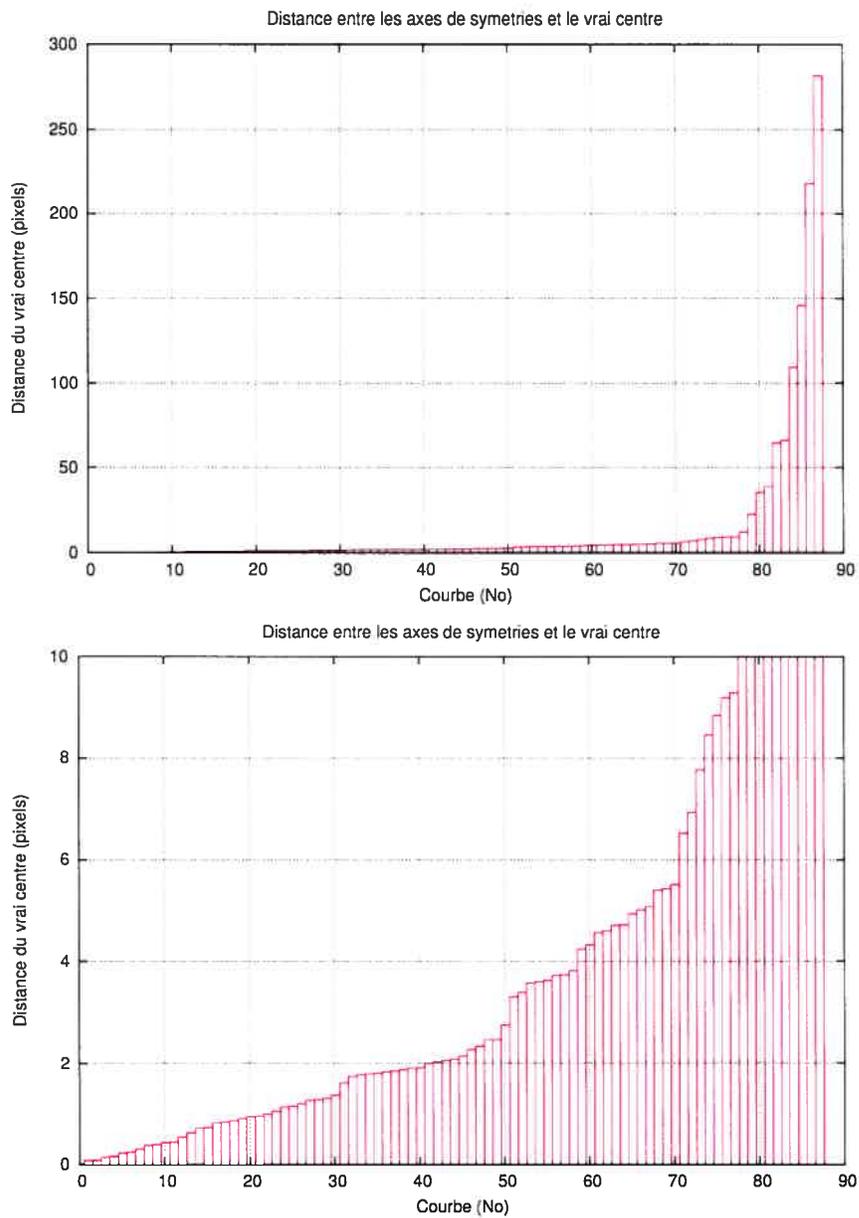


Figure 7.5. Distance entre les axes de symétries et le vrai centre de distorsion. La différence entre les deux graphiques est le changement d'échelle de l'ordonnée.

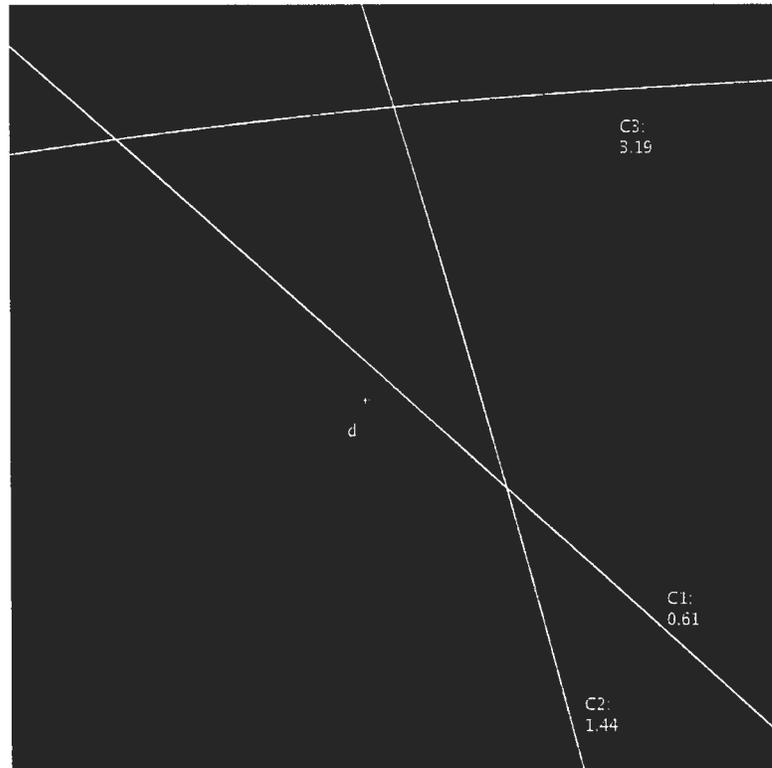


Figure 7.6. Exemple de mesure d'écart moyen. Le point \bar{d} est le centre de distortion. L'écart moyen de la courbe C1 est 0.61, de C2 est 1.44 et de C3 est 3.19.

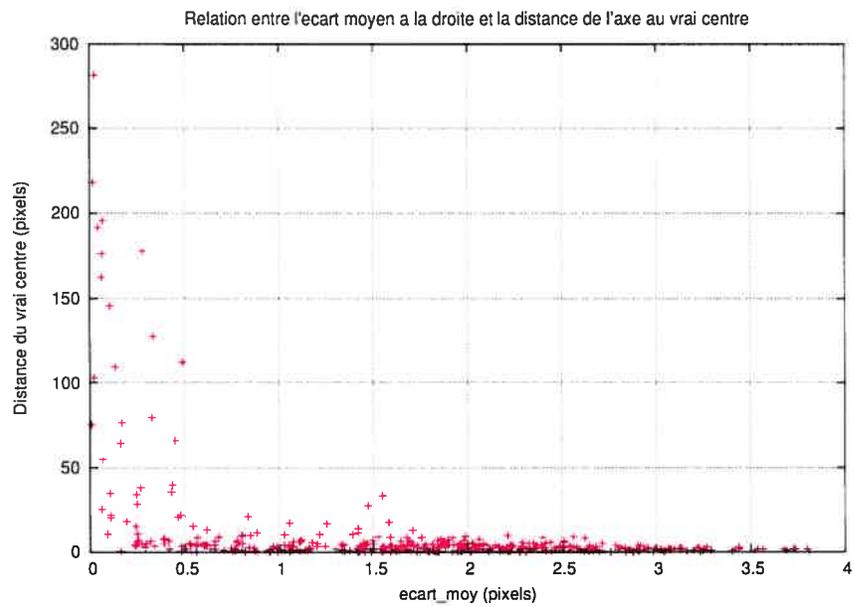


Figure 7.7. Relation entre la distance d'un axe avec le vrai centre et la colinéarité de la courbe distorsionnée.

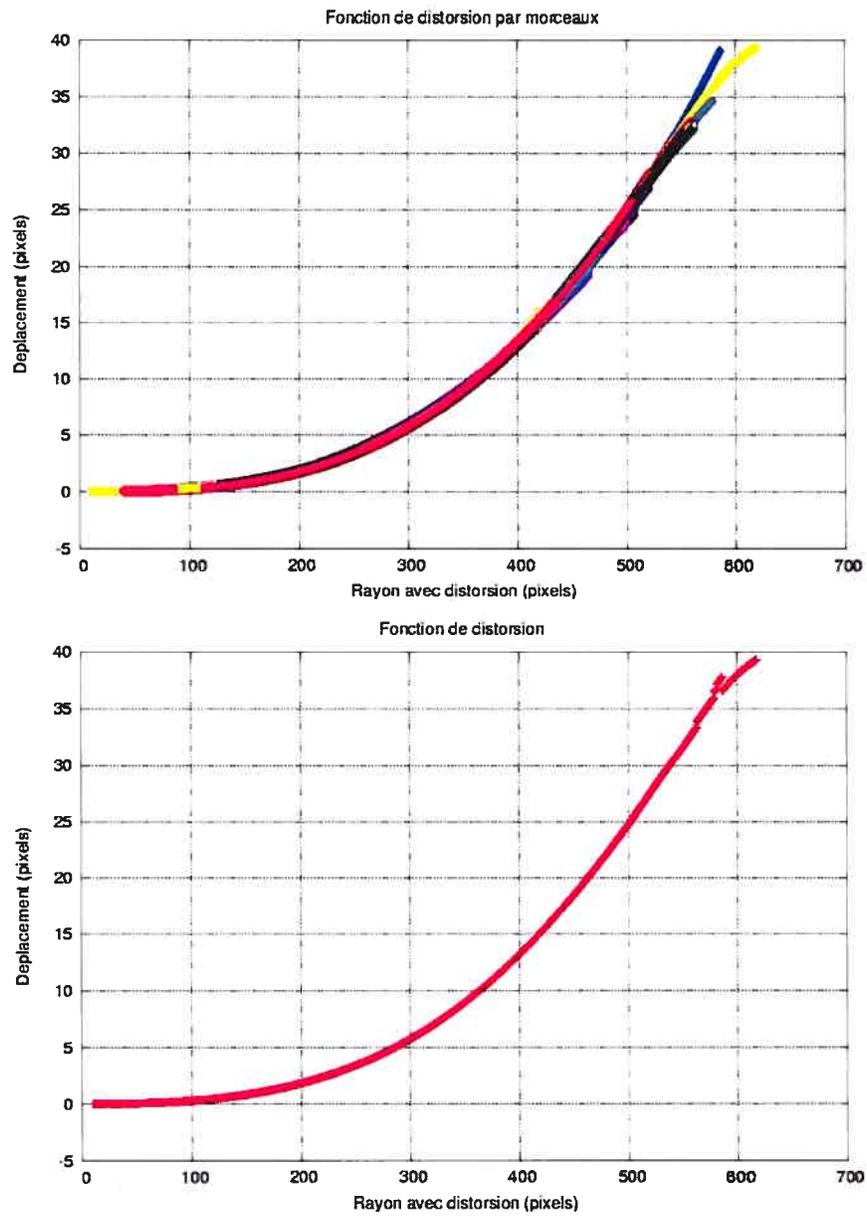


Figure 7.8. La relation entre le rayon avec distorsion r' et le déplacement radial nécessaire pour retrouver des droites, donc $r - r' = -f(r)$. Le graphique du haut contient la reconstruction par morceaux avec 88 courbes tandis que celui du bas extrait la relation finale.

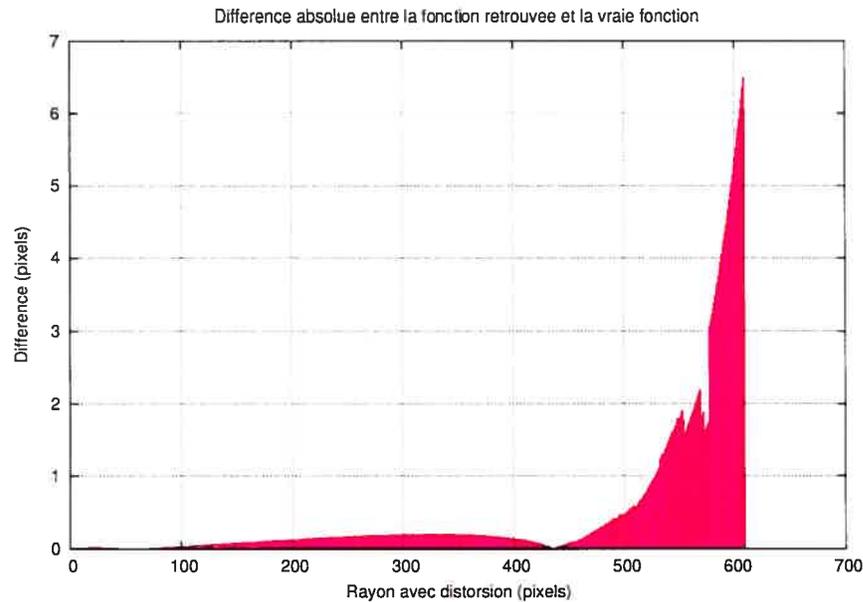


Figure 7.9. Comparaison entre la fonction réelle utilisée pour la transformation de distorsion et la fonction retrouvée. L'ordonnée correspond à la différence absolue entre les deux fonctions aux rayons donnés.

plus petits que 500 pixels, la différence avec la vraie fonction est inférieure à 0.5 pixels. Sur cet intervalle, la fonction retrouvée est donc très semblable à la vraie fonction. Pour des rayons plus grands que 500 pixels, l'erreur augmente considérablement. Dans cet exemple, deux causes expliquent cette erreur. Premièrement, le nombre de courbes utiles pour des rayons $r' > 500$ diminue fortement. La moyenne est donc calculée sur moins de valeurs. Deuxièmement, on observe l'impact que produit une erreur dans les valeurs de e_i pour des grands angles θ_i sur les rayons retrouvés sans distorsion $r_i(r')$. En effet, si la résolution des e_i de l'équation (5.3) contient des erreurs, les rayons $r_i(r')$ retrouvés seront plus affectés pour des grands angles en raison de la division par $\cos \theta_i(r')$ de l'équation (5.1).

7.6 Comparaison avec des images réelles contenant peu de distorsion radiale

Il existe différents algorithmes pour calibrer la distorsion radiale. Le chapitre 3 contient la description de deux de ces méthodes. Cette section tente de comparer le plus fidèlement possible trois méthodes par rapport à des exemples réels. La première méthode est celle proposée dans ce mémoire. La deuxième, appelée *OpenCV* provient d'une implémentation inspirée de l'algorithme de la section 3.1, le "Camera calibration toolbox for Matlab". Et finalement, la dernière est une implémentation directe de la section 3.2, nommée *Straight line*.

L'ensemble d'images utilisées pour la calibration de la distorsion par les méthodes *Straight line* et la méthode proposée est le même. Celui-ci consiste en un ensemble de 46 images de droites (par exemple, voir la figure 6.1) prises avec une caméra Basler munie d'une lentille 8mm qui donne un angle de vue d'environ 60 degrés. Comme la lentille contient de la distorsion radiale, ces droites deviennent des courbes dans les images. Les points des courbes sont extraits par l'algorithme décrit dans la section 6.1. Ces points sont les entrées des deux algorithmes. Le degré des courbes paramétriques utilisé pour la représentation des courbes dans la méthode proposée est le même que celui dans l'exemple synthétique précédent. Pour la méthode *OpenCV*, les entrées de l'algorithme sont différentes (voir section 3.1). L'ensemble des images utilisées est constitué de 14 images contenant un motif de carrés (voir figure 2.4). Ces images sont produites avec la même caméra, la même lentille ainsi que les mêmes paramètres internes que ceux utilisés précédemment. La procédure nécessite une extraction des coins des carrés faite à la main.

Les différents centres de distorsion obtenus sont donnés dans le tableau 7.2. Le vrai centre étant inconnu, peu d'informations peuvent être tirées de ce tableau. Il est intéressant toutefois de remarquer que les méthodes donnent tous un centre semblable.

Méthodes	Coordonnées du centre de distorsion
<i>OpenCV</i>	(477.0,523.6)
<i>Straight line</i>	(468.1,508.3)
Méthode proposée	(478.0,516.3)

Table 7.2. Comparaison entre les centres de distorsion trouvés lors de la calibration de la distorsion radiale sur un exemple réel.

La fonction de distorsion obtenue par l'algorithme proposé est donnée dans la figure 7.10. On observe que tous les morceaux sont très bien superposés et que par conséquent, la fonction retrouvée ne contient pas de changement rapide. À la figure 7.10, un morceau de fonction s'écarte des autres. Cet écart provient de la position de la courbe. En effet, cette courbe passe très près du centre de distorsion et donc est très linéaire. Comme la fonction finale est calculée avec la moyenne des morceaux, cet écart ne semble pas affecter grandement le résultat.

La comparaison des trois fonctions de distorsion trouvées est contenue dans la figure 7.11. Comme la fonction réelle est inconnue, une mesure de comparaison est nécessaire. Pour ce faire, on se sert des 46 courbes utilisées pour la calibration des deux méthodes de droites (*Straight line* et celle proposée). Il a été mentionné précédemment que ces courbes, après une transformation de distorsion inverse, devraient redevenir des droites. Donc, pour chacune de ces 46 courbes, les fonctions de distorsion inverses sont appliquées et la mesure d'écart moyen de l'équation (7.1) est calculée. Plus l'écart moyen est grand après la transformation, moins les points sont colinéaires, donc, moins la transformation inverse est bonne.

Sur la figure 7.11, chaque entier de l'axe horizontal correspond à un numéro de courbe. L'axe vertical indique l'écart moyen. Les valeurs rouges correspondent aux

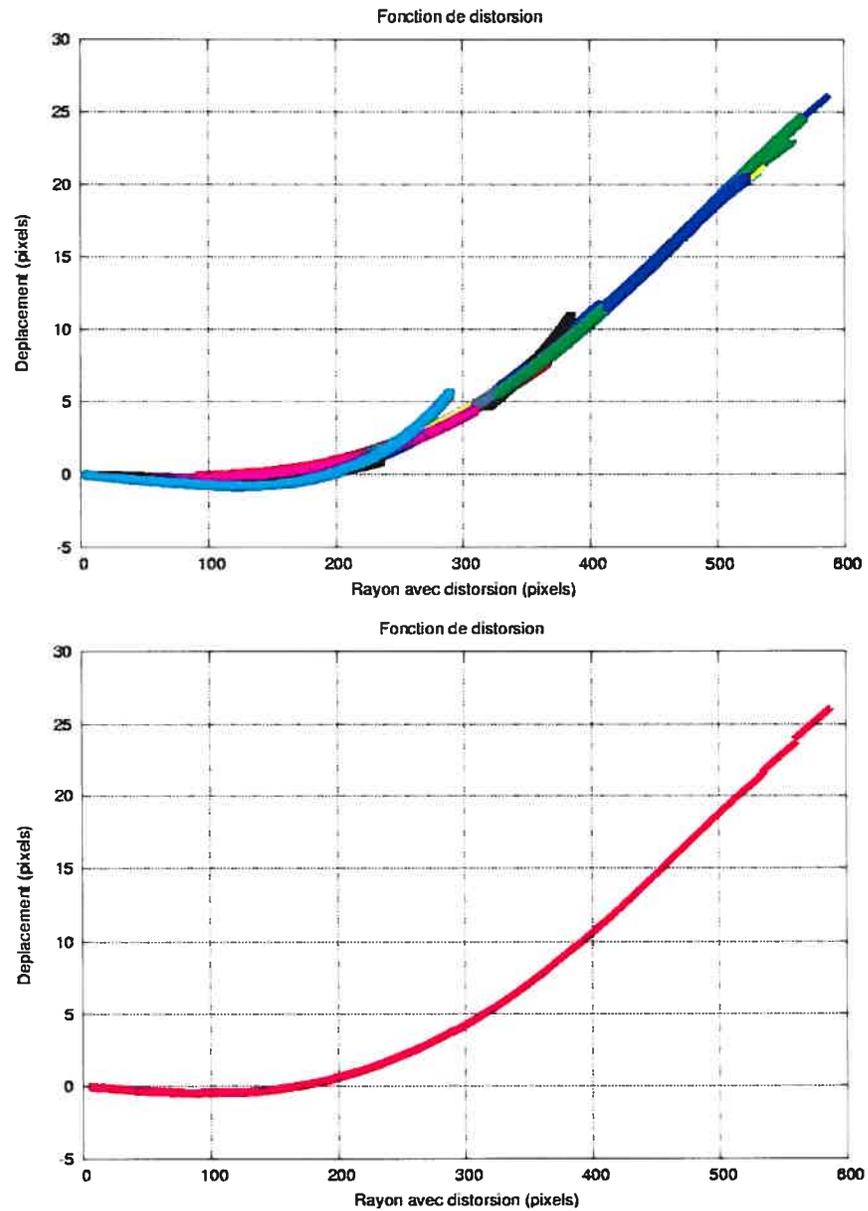


Figure 7.10. La relation entre le rayon avec distorsion r' et le déplacement radial $r - r'$. Le graphique du haut contient la reconstruction par morceaux avec 46 courbes tandis que celui du bas illustre la relation finale.

Méthodes	Moyenne des écarts moyen
OpenCV	0.25
StraightLine	0.17
Méthode proposée	0.12

Table 7.3. Moyenne des écarts moyens.

courbes avec la distorsion radiale placées en ordre croissant d'écart moyen. Les valeurs bleues représentent ces courbes lorsque la fonction inverse de distorsion radiale, calculée par la méthode de *Straight line*, est appliquée. Les valeurs vertes représentent les écarts moyens des courbes associés à la méthode *OpenCV* et celle en magenta, les écarts moyens associés à la méthode proposée. Il faut noter que les fonctions $F(r)$ trouvées sont comparables à un facteur d'échelle près. En effet, les droites retrouvées pourraient subir un changement d'échelle et resteraient des droites. Afin de mieux comparer les méthodes, les fonction de distorsion $F^{-1}(r')$ sont multipliés par un facteur qui assure que ces fonctions passent par un même point.

Les écarts moyens des courbes obtenus après avoir appliqué la transformation de distorsion inverse sont très bons pour les trois méthodes. Cependant, on observe que la méthode *OpenCV* performe légèrement moins bien que les deux autres. Il faut noter que la méthode *Straight line* ne convergeait pas avec seulement un paramètre (voir équation (3.4) et (3.5)). Pour obtenir les valeurs présentées, il aura fallu deux paramètres du modèle de l'équation (2.2), soient k_1 et k_2 . Le tableau 7.3 contient la moyenne, pour chaque méthode, des écarts moyens des courbes après avoir corriger la distorsion radiale.

Pour des images contenant peu de distorsion, l'apport de la méthode proposée provient de la forme du problème. La résolution linéaire, opposée à la résolution

non-linéaire de la méthode *Straight line* assure une plus grande robustesse. En effet, les méthodes non-linéaires, lorsqu'elles convergent, peuvent donner des mauvais résultats. La résolution linéaire donnera généralement une solution stable. De plus, la résolution linéaire est souvent plus rapide qu'une résolution non-linéaire. Finalement, l'algorithme proposé n'oblige pas l'utilisation d'un modèle de distorsion radiale précis.

7.7 Comparaison avec des images contenant beaucoup de distorsion radiale

La comparaison de la calibration pour des images contenant beaucoup de distorsion radiale utilise 19 images provenant de la même caméra mais avec une lentille 3.5 mm (angle de vue d'environ 110 degré). La distorsion est très grande dans cette lentille. La figure 7.12 est un exemple d'image d'une droite. On observe que la droite est très déformée dans l'image.

La comparaison est effectuée pour deux algorithmes: *Straight line* et la méthode proposée. Deux raisons expliquent pourquoi la méthode *OpenCV* n'est pas utilisée. Premièrement, comme il est mentionné dans la section 3.1, cette technique est utile seulement lorsque la distorsion est faible. Deuxièmement, l'implémentation faite dans le "Camera calibration toolbox for Matlab" nécessite une initialisation réaliste pour résoudre. Cependant, le but est de calibrer la distorsion radiale sans aucune information initiale. Pour ce qui est de la méthode *Straight line*, l'initialisation du système non-linéaire est toujours le même. Le centre de distorsion est initialisé au centre de l'image et les valeurs des coefficients sont tous 0.0.

Les centres de distorsion retrouvés sont donnés dans le tableau 7.4. On observe qu'il sont très près l'un de l'autre. La figure 7.13 montre la fonction obtenue par morceaux pour la méthode proposée. On observe que les morceaux sont très bien

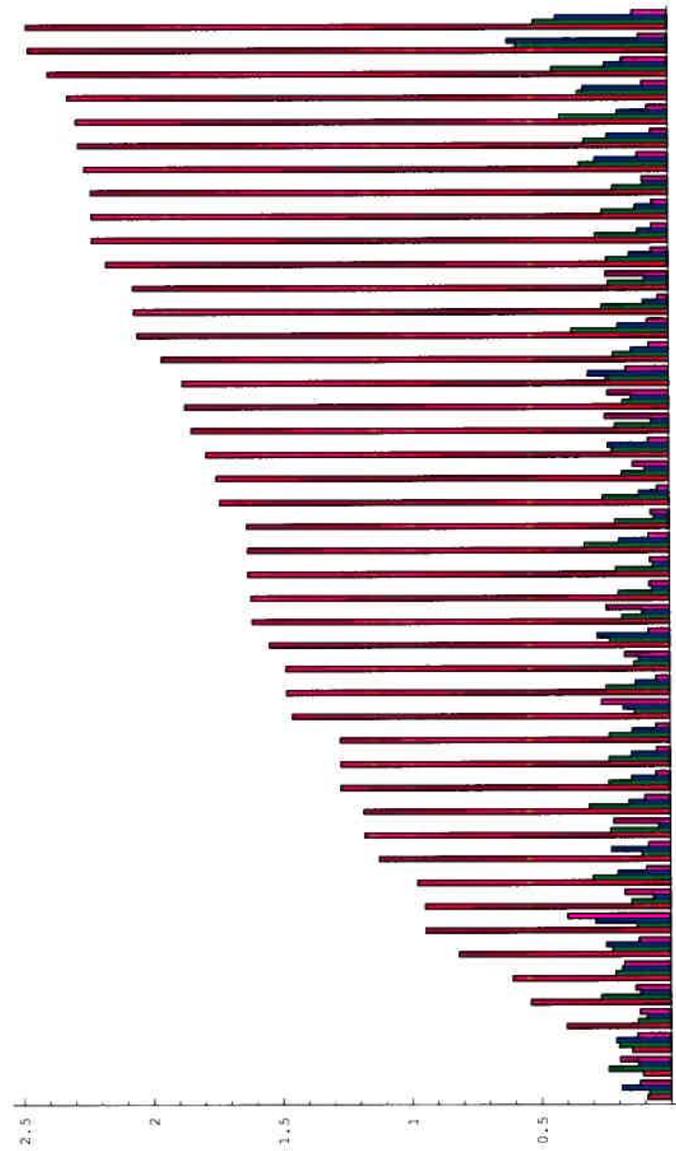


Figure 7.11. Erreur moyenne (en ordonnée) pour chaque courbes (en abscisse). Comparaison entre les méthodes décrites. Pour chaque méthode, la distorsion radiale est calibrée et est utilisée pour replacer les points. En rouge, les erreurs moyennes des courbes avec la distorsion. En bleu, les erreurs moyennes après avoir calibré et remplacé avec la méthode de *Straight line have to be straight* de Devernay. En vert, les erreurs moyennes après calibration avec la méthode *OpenCV* et en magenta, les erreurs moyennes après calibration avec la méthode proposée.



Figure 7.12. Exemple de projection d'une droite dans une caméra munie d'une lentille 3.5 mm. On observe que la droite est très déformée.

Méthodes	Coordonnées du centre de distorsion
<i>Straight line</i>	(520.4,506.5)
Méthode proposée	(522.1,508.8)

Table 7.4. Comparaison entre les centres trouvés avec des images contenant beaucoup de distorsion.

Méthodes	Moyenne des écarts moyen
StraightLine	1.60
Méthode proposée	0.57

Table 7.5. Moyenne des écarts moyens.

superposés. Cela indique que pour chaque r' donnés, les valeurs de $r_i(r')$ de chaque courbes sont très semblables. La figure 7.14 affiche la fonction extraite des différents morceaux. La figure 7.15 montre l'écart moyen pour les 19 courbes avec distorsion ainsi que les écarts moyens pour ces courbes après avoir calibré la distorsion radiale par les deux méthodes. On voit que l'écart moyen est réduit considérablement. On observe que la méthode proposée performe mieux que la méthode *Straight line* pour toutes les courbes. Il est fortement probable que le gain obtenu par la méthode proposée provient du fait que la forme de la distorsion n'est pas contrainte. En effet, pour calibrer avec la méthode *Straight line*, le nombre de paramètres utilisés dans le modèle 2.2 a dû passer à trois, k_1 , k_2 et k_3 , pour converger.

C'est dans la comparaison avec des images contenant beaucoup de distorsion radiale que la méthode proposée se démarque le plus. En effet, plus la distorsion dans une courbe est prononcée, plus l'axe de symétrie est précis et aussi le reste de l'algorithme. Donc les points de la fonction finale retrouvés seront justes. La méthode *Straight line* semble souffrir de la rigidité de son modèle. Effectivement, les deux méthodes donnent un centre de distorsion similaire, cependant, l'erreur moyenne des droites après correction de la distorsion est environ deux fois plus élevée pour la méthode *Straight line*. Le tableau 7.5 contient la moyenne, pour chaque méthode, des écarts moyens des courbes après correction de la distorsion radiale.

Finalement, la figure 7.16 contient un exemple réel. L'objet devant la caméra est un échiquier. On observe par les lignes courbes que la figure du haut contient beaucoup de distorsion radiale. La figure du bas est l'image corrigée, plus droite.

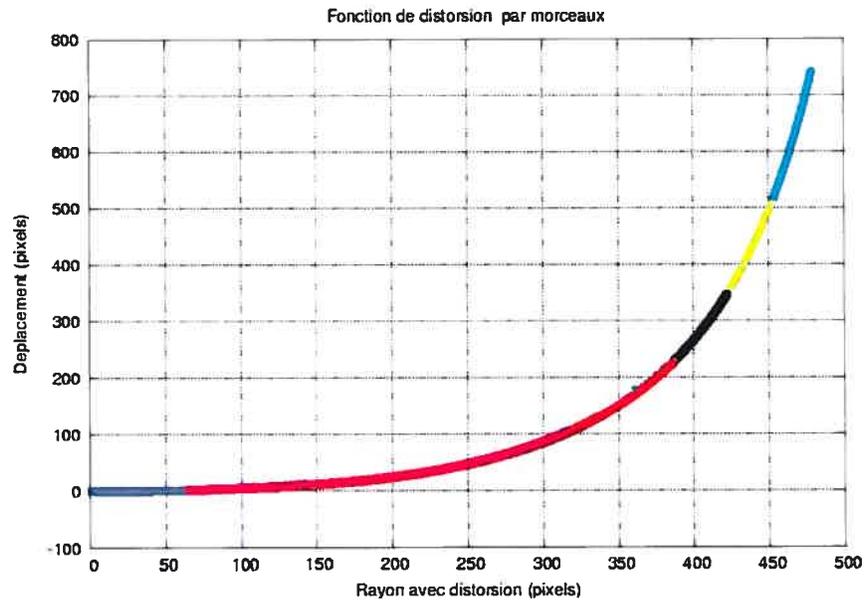


Figure 7.13. La relation entre le rayon avec distorsion r' et le déplacement radial nécessaire pour supprimer la distorsion. Ce graphique montre les différents morceaux retrouvés

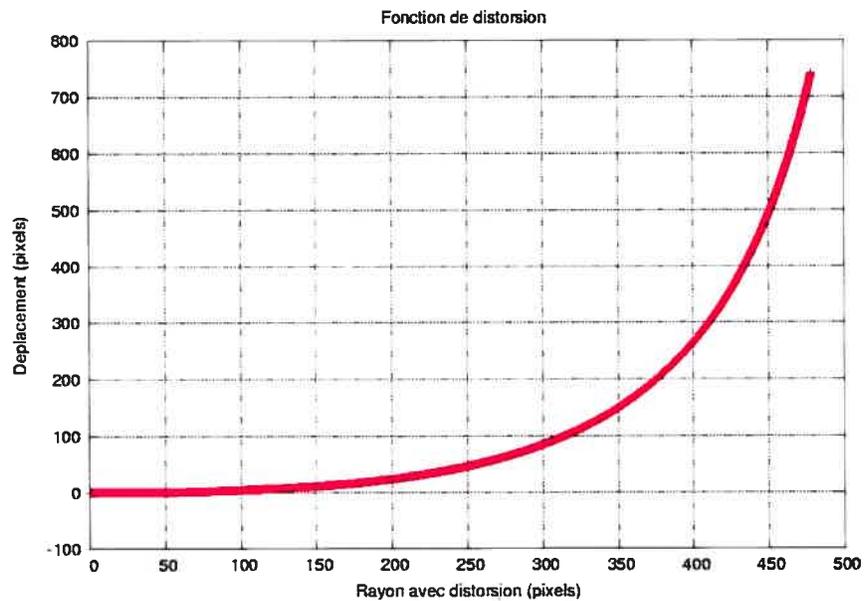


Figure 7.14. La relation entre le rayon avec distorsion r' et le déplacement radial nécessaire pour supprimer la distorsion. Ce graphique la fonction extraite des morceaux de la figure 7.13.

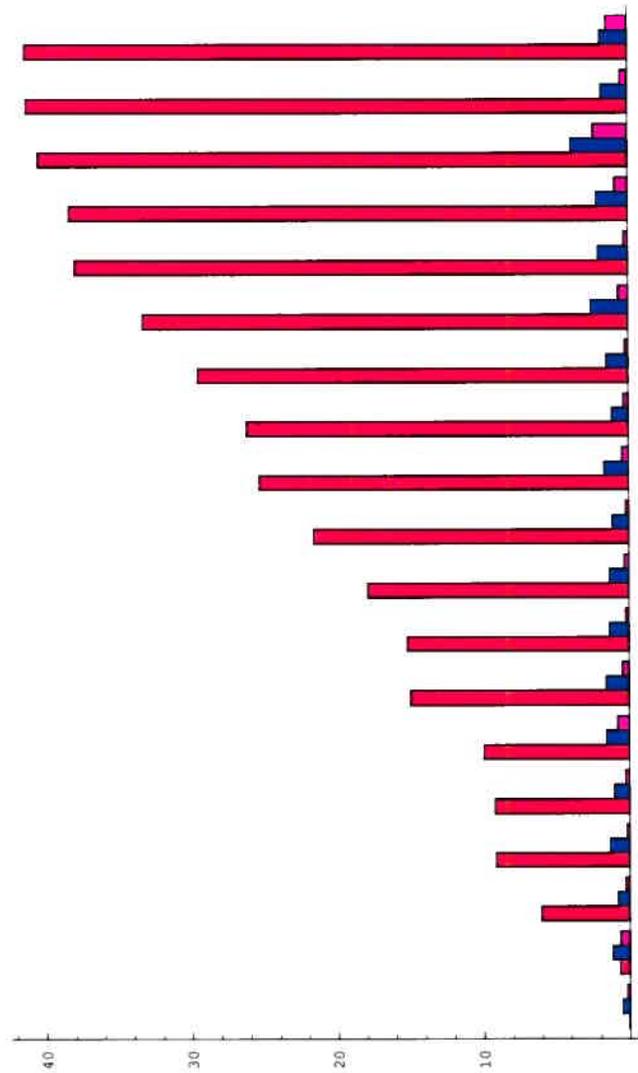


Figure 7.15. Erreur moyenne (en ordonnée) pour chaque courbes (en abscisse). Comparaison entre les méthodes décrites. Pour chaque méthode, la distorsion radiale est calibrée et est utilisée pour replacer les points. En rouge, les erreurs moyennes des courbes avec la distorsion. En bleu, les erreurs moyennes après avoir calibré et replacé avec la méthode de *Straight line have to be straight* de Devernay. En magenta, les erreurs moyennes après calibration avec la méthode proposée.

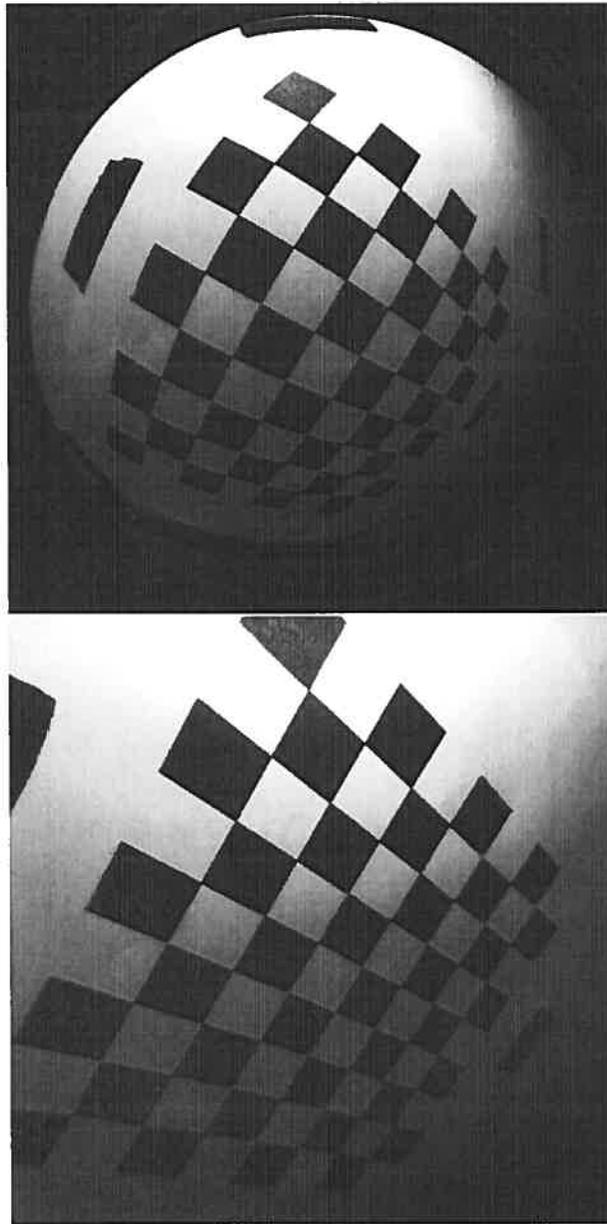


Figure 7.16. Exemple d'image d'échiquier. La figure du haut est l'image avec distorsion. La figure du bas est la même image mais sans la distorsion radiale.

Chapitre 8

CONCLUSION

Le mémoire présente une nouvelle approche pour calibrer la distorsion radiale. Celle-ci contient divers avantages par rapport aux méthodes précédentes.

Premièrement, les données observées sont simplement des droites. En effet, la calibration de la distorsion radiale peut se faire par l'observation d'une scène quelconque, nécessitant seulement quelques droites. À l'opposé, une méthode comme *OpenCV* nécessite des données de calibration contenant des structures plus complexe. Dans le cas où la calibration de la distorsion radiale doit se faire sans la caméra mais seulement avec des images données, il est bien plus probable que ces images contiennent des droites que des structures connues.

Deuxièmement, elle n'impose aucun modèle précis par rapport à la distorsion radiale observée. Elle permet donc de retrouver des fonctions de distorsion plus générales. Si le problème le nécessite, il est possible d'imposer un modèle une fois la fonction trouvée.

Finalement, la solution est obtenue linéairement contrairement à beaucoup de méthodes. Bien que l'initialisation habituelle des algorithmes non-linéaires, c'est-à-dire le centre de distorsion au centre de l'image et tous les coefficients du modèle à 0.0, semble faire converger vers des bonnes solutions, il est facile d'imaginer des cas où une telle intialisation serait inadéquate. Par exemple, si le centre de distorsion était loin du centre de l'image, il est fort probable que la méthode non-linéaire ne convergerait pas ou convergerait vers une mauvaise solution.

Comme cette méthode est basée sur les propriétés géométriques de la distorsion radiale, il est possible d'évaluer les résultats intermédiaires et de prendre des décisions

appropriées. Par exemple, il est pratique de rejeter les courbes trop courtes ou qui ne contiennent pas d'axe de symétrie se démarquant des autres lors du calcul du coût de symétrie. Il est aussi possible d'utiliser le cas théorique pour identifier des situations anormales. Par exemple, dans l'extraction de la fonction de distorsion (section 6.5), si pour un rayon r' on obtient deux intersections avec une courbe C_i , les deux valeurs de k_i et θ_i sont identiques en théorie. En pratique, si ces valeurs sont trop différentes, la courbe peut être négligée pour ce rayon.

Le principal désavantage de la méthode est que la solution dépend des mesures prises dans l'image, principalement des tangentes aux courbes. Il est donc très important que la représentation des courbes soit fidèle. On observe dans les résultats que la représentation utilisée dans ce mémoire semble convenir pour des cas normaux de distorsion faible ou forte. Cependant, si l'on considère une distorsion radiale plus générale, il est fort probable que celle-ci soit insuffisante. Une option serait d'utiliser un ensemble de splines pour représenter la courbe. Toutefois, le domaine des splines est très vaste et une recherche approfondie serait essentielle. Une autre option serait d'utiliser directement les points extraits de l'image sans représentation de la courbe. Différentes implémentations apportent différents avantages. Celle proposée est rapide et efficace, sans toutefois avoir la prétention d'être la meilleure.

En conclusion, le plus important est que la partie théorique de la méthode proposée permet une résolution simple et efficace basée sur les propriétés géométriques de la fonction de distorsion radiale. De plus, les résultats provenant de l'implémentation produite sont très prometteurs et se comparent très bien avec les méthodes récentes.

RÉFÉRENCES

- [1] Anup Basu et Sergio Licardie. Alternative models for fish-eye lenses. *Pattern Recognition Letters*, 16(4):433–441, 1995.
- [2] C. Brauer-Burchardt et K. Voss. A new algorithm to correct fish-eye and strong wide-angle-lens-distortion from single images. *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, 1:225 – 228, November 2001.
- [3] Charles Theurer Chester C Slama et Soren W. Henriksen. *Manual of Photogrammetry*. American Society of Photogrammetry, 1980.
- [4] Henri Chretien. *Calcul des Combinaisons Optiques*. Masson, Paris, 1980.
- [5] Frederic Devernay et Olivier D. Faugeras. Straight lines have to be straight. *Machine Vision and Applications*, 13(1):14 – 24, 2001.
- [6] James S. Bethel Edward M. Mikhail et J. Chris McGlone. *Introduction to Modern Photogrammetry*. John Wiley and Sons, New York, USA, 2001.
- [7] James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, et John F. Hughes. *Computer graphics (2nd ed. in C): principles and practice*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1996.
- [8] Curtis F. Gerald et Patrick O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis (6th ed.)*. Addison-Wealey, 1999.
- [9] Rafael C. Gonzalez et Richard E. Woods. *Digital image processing (2nd ed.)*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2002.

- [10] R. I. Hartley et A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, 2004.
- [11] Paul Cohen Juyang Weng et Marc Herniou. Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(10):965 – 980, October 1992.
- [12] K.L. Ma, L.; YangQuan Chen; Moore. Flexible camera calibration using a new analytical radial undistortion formula with application to mobile robot localization. *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 799 – 804, October 2003.
- [13] Emanuele Trucco et Alessandro Verri. *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1998.
- [14] Guo-Qing Wei et Son De Ma. Implicit and explicit camera calibration: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(5):469 – 480, May 1994.
- [15] Reg Willson et Steven Shafer. What is the center of the image? *Journal of the Optical Society of America A*, 11(11):2946 – 2955, November 1994.
- [16] Zhengyou Zhang. A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11):433–441, 2000.