Université de Montréal

Contribution à la conjecture d'Erdős-Farber-Lovász.

par
Khaled Akrout

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

Décembre, 2005

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Contribution à la conjecture d'Erdős-Farber-Lovász.

présenté par:

Khaled Akrout

a été évalué par un jury composé des professeurs :

Pierre McKenzie
président-rapporteur

Geña Hahn
directeur de recherche

Gilles Brassard
membre du jury

Mémoire accepté le 13 décembre 2005

RÉSUMÉ

Ce mémoire intitulé *Contribution à la conjecture d'Erdős Farber Lovász* , se veut une étude de certains cas de la conjecture d'Erdős Farber Lovász. Il est connu que cette conjecture est un problème difficile. Pour cela nous nous sommes restreints aux cas où chaque sommet d'intersection appartient soit à exactement deux graphes, soit à exactement trois graphes.

D'abord,nous prouvons simplement la conjecture pour le cas où chaque sommet d'intersection appartient à exactement 2 graphes K_n. Par la suite, nous prouvons la conjecture pour certains cas où chaque sommet d'intersection appartient à exactement 3 graphes K_n en utilisant les triplets de Steiner.

De nouvelles bornes supérieures inférieures à n pour le coloriage de certains systèmes triples de Steiner cycliques sont déterminées. Jusqu'à présent cette borne était n pour les systèmes triples de Steiner cycliques, et reste conjecturée à n en général.

Mots clés : Erdős-Farber-Lovász, Systèmes de Steiner, Coloriage des systèmes de Steiner.

ABSTRACT

This work entitled Contribution to the Erdős-Farber-Lovász conjecture was aimed to be a study of certain cases of the Erdős-Farber-Lovász conjecture. It is known that this conjecture is a difficult problem. For this reason we restricted our study to the cases where each top of intersection belongs either to exactly two graphs, or with exactly three graphs.

Initially, we prove simply the conjecture for the case where each top of intersection belongs to exactly 2 graphs K_n. Thereafter, we prove the conjecture for certain cases where each top of intersection belongs to exactly 3 graphs K_n by using the triplets of Steiner.

New upper bounds, lower than n, for the colouring of certain cyclic triple systems of Steiner, are determined. Until now these upper bounds were n for the cyclic triple systems of Steiner, and remains conjectured with n in general.

Keywords: Erdős-Farber-Lovász, Steiner's Systems, Coloring of Steiner's systems.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements à mon directeur M. Geña Hahn pour ses encouragements, sa compréhension et son soutien dans les moments difficiles.

Je tiens à exprimer tout particulièrement ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance à M. Pierre McKenzie pour tous les soutiens matériels et psychologiques qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ces années d'études.

Je remercie du fond du coeur ma mère Zebeida, mon père Nouri et ma soeur Amel pour l'amour qu'ils m'ont témoigné et le grand soutien qu'il m'ont apporté.

AVANT-PROPOS

Ce mémoire traite d'un point de vue ensembliste une restriction de la conjecture de Erdős-Farber-Lovász qui énonce que le nombre chromatique d'un ensemble de n graphes complets K_n s'intersectant deux à deux en exactement 1 sommet est égal à n.

Cette conjecture est connue pour être difficile. Erdős a offert 500 USD de récompense pour sa résolution. C'est un montant très élevé quand on connaît les prix habituellement offerts par Erdős pour la résolution des problèmes.

Dans le premier chapitre, nous introduirons les systèmes de Steiner $S(2, k, n)$ et nous expliquerons comment nous y sommes arrivés sans en connaître préalablement l'existence. Nous énoncerons les théorèmes et les lemmes qui nous permettront de savoir si un ensemble de triplets est susceptible de générer un $STS(n)$ cyclique et que nous utiliserons pour démontrer les résultats du chapitres 2.

Dans le deuxième chapitre, nous verrons la manière d'ordonner les éléments des classes d'équivalence de façon à ramener la borne supérieure à $(n + 1)$ c'est à dire pour colorier l'ensemble des triplets d'un $STS(n)$ cyclique avec seulement $(n + 1)$ couleurs. Ensuite, nous étudierons les propriétes des triplets représentant ces classes pour les utiliser afin d'obtenir le résultat principal nouveau qui est de colorier entièrement certains $STS(n)$ cycliques avec un nombre de couleurs non seulement inférieur à n mais surtout représentant seulement une fraction de n.

Dans le troisième chapitre nous prouverons la restriction $I_2(n)$ et nous utiliserons les résultats du chapitre 2 pour prouver la conjecture d'Erdős-Farber-Lovász sur la restriction $I_3(n)$ lorsque son $STS(n)$ associé , que nous définirons, est cyclique.

NOTATION

$\mathbb{R}$	Ensembles des nombres réels
$\mathbb{Z}$	Ensembles des nombres entiers
$\mathbb{N}$	Ensembles des nombres entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}^*$	Ensembles des nombres entiers strictements positifs
$a \equiv_m b$	a congru à b modulo m
$a \not\equiv_m b$	a non congru à b modulo m
$\mathbb{Z}_n$	Ensembles des classes d'équivalence des éléments de $\mathbb{Z}$ obtenues par la relation d'équivalence $a\Re b$ ssi $(a-b) \equiv 0 \pmod{n}$
$[n]$	$= \{0, 1, ..., n-1\}$
STS(n)	**S**ystème **T**riple de **S**teiner à n éléments
S(2,k,n)	**S**ystème de Steiner de k-ensembles à n éléments

CHAPITRE 1

INTRODUCTION, NOTATIONS ET DÉFINITIONS

1.1 Notations utilisées

Dans toute la littérature concernant les systèmes de Steiner, la notation (a, b, c) est utilisée pour désigner un 3-ensemble de Steiner qui est en réalité un ensemble de 3 éléments $\{a, b, c\}$. Dans le présent mémoire, cette notation a été conservée bien qu'elle puisse prêter à confusion pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion d'aborder les systèmes de Steiner. Cette notation couramment usitée a été conservée, mais on dira un 3-ensemble au lieu de triplet. On écrira donc (a, b, c) pour désigner l'ensemble $\{a, b, c\}$, et d'une manière générale on écrira $(a_1, a_2, ..., a_k)$ pour désigner l'ensemble $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, ceci dans le but de faciliter l'utilisation des orbites cycliques dans lesquelles l'addition cyclique $(a, b, c) + 1 = (a + 1, b + 1, c + 1)$ que nous définirons dans la suite est utilisée.

Pour signifier que k objets O_i sont différents deux à deux, nous noterons $Diff\langle O_1, O_2, ..., O_k\rangle$.

Soient $\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$, n ensembles et soit $E = \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i$. La partie propre de E_i notée $Pp(E_i)$ est l'ensemble des éléments de E appartenant exclusivement à E_i : $Pp(E_i) = \{x \in E_i \mid \forall j \neq i \in [n]\ x \notin E_j\}$.

$[n] = \{0, 1, ..., n - 1\}$

1.2 Énoncé de la conjecture

1.2.1 Énoncé 1

Le nombre chromatique d'un ensemble de n graphes complets K_n s'intersectant deux à deux en exactement un sommet est égal à n.

1.2.2 Énoncé 2

Soient n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que

1) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et

2) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$

alors $\exists \varphi : \bigcup_{i\in[n]} E_i \longrightarrow [n]$ une fonction telle que les n restrictions φ_i de φ à E_i soient bijectives.

L'énoncé 1 et l'énoncé 2 sont équivalents. En effet , il suffit de considérer chaque élément d'intersection des ensembles de l'énoncé 2 comme un sommet d'intersection entre des graphes de l'énoncé 1.

1.2.3 Exemples

Pour $n = 3$, il existe deux cas possibles :

1) **Premier cas : les intersections sont des intersections de 2 ensembles.**

Soient $\phi(x_1) = 0$, $\phi(x_2) = 1$, $\phi(x_3) = 2$, $\phi(x_4) = 2$, $\phi(x_5) = 0$, $\phi(x_6) = 1$

$E_1 = \{x_1, x_2, x_4\}$, $E_2 = \{x_2, x_3, x_5\}$, $E_3 = \{x_4, x_5, x_6\}$

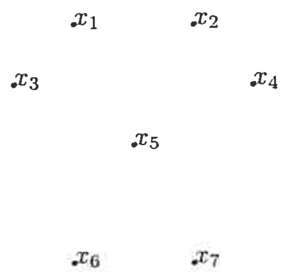
$\phi_1(x_1) = 0$, $\phi_1(x_2) = 1$, $\phi_1(x_4) = 2$

$\phi_2(x_2) = 1$, $\phi_2(x_3) = 2$, $\phi_2(x_5) = 0$

$\phi_3(x_4) = 2$, $\phi_3(x_5) = 0$, $\phi_3(x_6) = 1$

ϕ est bien une fonction de $\bigcup E_i \longrightarrow [3]$. Et ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 sont bijectives.

2) **Deuxième cas : l'intersection est celle des trois ensembles.**



Soient $\phi(x_1) = 1$, $\phi(x_2) = 1$, $\phi(x_3) = 2$, $\phi(x_4) = 2$, $\phi(x_5) = 0$, $\phi(x_6) = 1$, $\phi(x_7) = 2$
$E_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$, $E_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$, $E_3 = \{x_5, x_6, x_7\}$
$\phi_1(x_1) = 1$, $\phi_1(x_3) = 2$, $\phi_1(x_5) = 0$
$\phi_2(x_2) = 1$, $\phi_2(x_4) = 2$, $\phi_2(x_5) = 0$
$\phi_3(x_5) = 0$, $\phi_3(x_6) = 1$, $\phi_3(x_7) = 2$
ϕ est bien une fonction de $\bigcup E_i \longrightarrow [3]$. Et ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 sont bijectives.

Si on se restreint uniquement aux cas où toutes les intersections sont uniquement des intersections de deux ensembles, les cases du tableau ci-dessous représentent les différentes intersections des différents ensembles $\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$, les valeurs dans les cases d'intersections sont les valeurs $\phi(x_j)$ par la fonction ϕ des différents éléments x_j appartenant à $\cup\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$. La diagonale représente les parties propres des ensembles $\{E_i\}_{i=0}^{n-1}$

Pour $n = 4$, on vérifie aisément en le constatant directement sur le tableau suivant qu'il remplit bien les conditions de l'énoncé 2 :

$\cap$	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	0	2	1	3
E_1		0	3	1
E_2			0	2
E_3				0

Pour $n = 13$, on vérifie directement sur le tableau suivant qu'il remplit bien les conditions de l'énoncé 2.

$\cap$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
E_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E_1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
E_2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
E_3				6	7	8	9	10	11	12	0	1	2
E_4					8	9	10	11	12	0	1	2	3
E_5						10	11	12	0	1	2	3	4
E_6							12	0	1	2	3	4	5
E_7								1	2	3	4	5	6
E_8									3	4	5	6	7
E_9										5	6	7	8
E_{10}											7	8	9
E_{11}												9	10
E_{12}													11

Dans les deux cas ci-dessus, la cardinalité de toutes les intersections est 1, tous les ensembles s'intersectent deux à deux et aucun d'entre eux n'a deux fois la même couleur tout en ayant toutes les couleurs.

Définition 1. *: Soient n ensembles* $\{E_i\}_0^{n-1}$*, une restriction de la conjecture d'Erdős-Farber-Lovász sera dite une restriction* $I_k(n)$ *si :*

1) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ *et*

2) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ *et*

3) $\forall x \in \cup E_i \quad |\{i : x \in E_i\}| \in \{1, k\}$

la restriction sera dite vérifiée si $\exists \varphi : \bigcup_{i\in[n]} E_i \longrightarrow [n]$ *une fonction telle que les* n *restrictions* φ_i *de* φ *à* E_i *soient bijectives.*

Toutes les intersections non vides contiennent exactement un élément et sont des intersections de exactement k ensembles.

La conjecture d'Erdős-Farber-Lovász est connue pour être une conjecture difficile. Pendant notre travail, aprés avoir prouvé la restriction $I_2(n)$ (voir chapitre 3 section 3.2), nous avons pensé, étant donné la difficulté de la conjecture, résoudre une autre restriction : celle où toutes les intersections sont des intersections de trois ensembles, c'est à dire la restriction $I_3(n)$.
Dans la restriction $I_3(n)$, l'ensemble E_i intersecte : $E_0, E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_{(n-1)}$ par paire d'ensembles, puisque toutes les intersections non vides sont des intersections de trois ensembles et l'intersection de deux ensembles quelconques est un singleton, donc n est nécessairement impair puisque E_i intersecte $(n-1)$ autres ensembles par groupe de deux ce qui implique que $(n-1)$ doit être divisible par 2. L'intersection de chaque paire d'ensembles étant non vide, il y a donc $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ intersections de paire d'ensembles. Mais comme toutes les intersections sont toutes des intersections de trois ensembles il y donc en tout $\frac{C_n^2}{3} = \frac{n(n-1)}{6}$ intersections de trois ensembles. C'est précisément le nombre de 3-ensembles d'un système triple de Steiner, ce qui nous a amené à étudier les systèmes triples de Steiner pour résoudre la restriction $I_3(n)$.

1.3 Systèmes de Steiner

1.3.1 Un petit historique extrait de [CR99] :

Plücker (1835) observe justement qu'étant donnés n éléments, l'ensemble des 3-ensembles dans lesquels chaque paire d'éléments n'apparait qu'une seule fois est de cardinalité $\frac{1}{3}n\frac{1}{2}(n-1)$. Mais il conclut à tort de cela que n doit être un multiple de 3. Suite à cela, Plücker(1839) observe que $n \equiv_6 1$ ou 3 est une condition nécessaire. Les différentes publications subséquentes ne réfèrent pas à Plücker mais à Woolhouse(1844) ou surtout à Steiner(1853). Il est intéressant de mentionner actuellement que les systèmes triples trouvent leur origine dans l'étude des courbes cubiques plus que dans les problèmes combinatoires comme on le croit souvent.
Le problème des *Dames et des gentilhommes* de Kirkman(1844) posait à l'époque la question de l'année : Déterminer le nombre de combinaisons de p symboles pris parmi n tels que q symboles n'apparaissent qu'une seule fois par combinaison. En language moderne, étant donné un ensemble E tel que $|E| = n$, trouver le plus grand nombre de p-ensembles de E tels que tout q-ensemble de E n'apparaisse pas plus que dans un p-ensemble. Lorsque chaque q-ensemble apparaît exactement dans un seul p-ensemble, on parle alors d'un système de Steiner que l'on note $S(q,p,n)$.
Kirkman(1850) posa un problème en apparence simple qui allait transformer complètement la théorie combinatoire : 15 jeunes filles à l'école se promènent par groupe de 3 pendant 7 jours successivement de telle manière que deux d'entre elles ne se retrouvent jamais ensemble dans le même groupe deux fois.
Steiner(1853) a posé une série de questions pour $q = 2, 3, 4$ etc... dans $S(q,p,n)$. Sa première question fut : quel nombre n a la propriété que les éléments peuvent être classés en 3-ensembles tels que chaque paire se retrouve dans un seul d'entre eux ?
Par la suite le nom de Steiner fut associé fermement à de tels systèmes. Depuis lors, une vaste littérature a été publiée concernant les systèmes de Steiner, notamment par A. Rosa , C.J.Colbourn , Th.Beth , D.Jungnickel et H.Lenz. La construction des systèmes triples de Steiner est restée ouverte jusqu'en 1939, année où Peltesohne [Pel39] a donné une manière d'en construire en s'appuyant sur la publication

faite par Heffter [Hef97] en 1897.

Définition 2. *On appelle système de Steiner $S(2,k,n)$, un ensemble de $k-$ensembles d'éléments de $[n]$ où toute paire $\{a,b\}$ est dans un seul k – ensemble.*

Exemple : Pour $n = 19$ nous avons ci-dessous tous les 3-ensembles d'un $S(2,3,19)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	1	2	3	4	5

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	1
10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	1	2
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	0	1	2	3	4	5	6

On observe bien que chaque élément se trouve une seule fois avec tous les autres éléments dans un 3-ensemble déterminé, et de ce fait aucune paire ne se trouve dans 2 3-ensembles différents.

Définition 3. *$S(2,3,n)$ est appelé système triple de Steiner et noté $STS(n)$*

Théorème 1. *Dans un $S(2,k,n)$ nous avons :*
(1) $\forall \alpha \in [n]$, *α appartient à $\frac{(n-1)}{k-1}$ k-ensembles*

(2) Le nombre de k-ensembles est égal à $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$

Preuve : Soit $\alpha \in [n]$, il y a $(n-1)$ paires contenant α car toute paire n'apparaît qu'une seule fois. Comptons le nombre de paires contenant α d'une autre manière : il y a r k-ensembles contenant α. Dans chacun de ces k-ensembles, on peut former $(k-1)$ paires contenant α.

$$\text{Donc} \quad r(k-1) = (n-1) \Longrightarrow r = \frac{(n-1)}{(k-1)} .$$

Pour prouver (2), comptons de 2 manières le nombre total d'occurences des éléments de $[n]$ pour former tous les k-ensembles de $S(2,k,n)$. Soit s le nombre total de k-ensembles, on a alors en tout sk occurences des éléments de $[n]$. Comme chaque élément appartient à $\frac{(n-1)}{k-1}$ k-ensembles, on a donc $\frac{n(n-1)}{k-1}$ utilisations des éléments de $[n]$.

$$\text{Donc} \quad sk = \frac{n(n-1)}{k-1} \Longrightarrow s = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}. \quad \textbf{cqfd}$$

Corollaire 1.1. *Soient* $k > 2$, $n > 2$ *appartenant à* $\mathbb{N}$.
Les conditions suivantes :
(1) $\quad n-1 \equiv_{(k-1)} 0$
(2) $\quad n(n-1) \equiv_{k(k-1)} 0$
sont nécessaires pour l'existence d'un système de Steiner $S(2,k,n)$.

Définition 4. *L'addition étant dans* $\mathbb{Z}_n$, *un sous-ensemble* E *d'un* $STS(n)$ *est dit cyclique si* $\forall (a,b,c) \in STS(n) \quad (a,b,c) \in E \Longrightarrow (a+1, b+1, c+1) \in E$.

Théorème 2. *Les conditions suivantes :*
(1) $\quad n-1 \equiv_2 0$ *et*
(2) $\quad n(n-1) \equiv_6 0$
sont suffisantes pour l'existence d'un $S(2,3,n)$ *cyclique.*

Preuve : $\overbrace{(0,a,b)}$ est l'orbite du triplet $(0,a,b)$ (voir définition 5).

D'aprés le théorème 3 on a $n \equiv_6 1$ ou $n \equiv_6 3$.

I)Pour $n \equiv_6 1$ Peltesohne [Pel39] a donné une construction pour $n = 18k+1$, $n = 18k+7$ et $n = 18k+13$.

1) $n = 18k+1$ **et** $k > 1$

Les $3k$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+1) & \text{pour } 0 \leq i < k-1 \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3k, 6k+1) \end{cases}$$

Pour $n = 19$, les 3 orbites $\overbrace{(0,1,6)}$, $\overbrace{(0,2,10)}$, $\overbrace{(0,3,7)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique.

2) $n = 18k+7$ **et** $k > 0$

Les $3k+1$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k+1$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 8k+2i+4) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 6k+i+3) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3k+1, 7k+3) \end{cases}$$

Pour $n = 7$, l'orbite $\overbrace{(0,1,3)}$ définit un $STS(n)$ cyclique.

3) $n = 18k+13$ **et** $k > 0$

Les $3k+2$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k+2$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \le i < k+1 \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 6k+i+5) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 8k+2i+8) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3k+2, 10k+7) \end{cases}$$

Pour $n = 13$, les 2 orbites $\overbrace{(0,1,4)}$, $\overbrace{(0,2,7)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique.

II) Pour $n \equiv_6 3$ Peltesohne [Pel39] a donné une construction pour $n = 18k+3$, $n = 18k+9$ et $n = 18k+15$.

4) $n = 18k + 3$ **et** $k > 0$

Les $3k+1$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k+1$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 8k+2i+2) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 4k+2i+2) & \text{pour } 0 < i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+2) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 6k+1, 12k+2) \end{cases}$$

5) $n = 18k + 9$ **et** $k > 3$

Les $3k+2$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k+2$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \le i < k+1 \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+4) & \text{pour } 2 \le i < k-1 \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+4) & \text{pour } 1 \le i < k-1 \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 6k+3, 12k+6) \\ (0, 2, 8k+5) \\ (0, 3, 8k+4) \\ (0, 5, 8k+7) \\ (0, 3k-1, 6k+1) \\ (0, 3k, 10k+3) \end{cases}$$

Pour $n = 27$, les orbites : $\widehat{(0,1,13)}$, $\widehat{(0,2,7)}$, $\widehat{(0,3,11)}$, $\widehat{(0,4,10)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique.

Pour $n = 45$, les orbites $\widehat{(0,1,12)}$, $\widehat{(0,2,19)}$, $\widehat{(0,3,23)}$, $\widehat{(0,4,14)}$ $\widehat{(0,5,13)}$, $\widehat{(0,6,24)}$, $\widehat{(0,7,16)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique.

Pour $n = 63$, les orbites $\widehat{(0,1,16)}$, $\widehat{(0,2,29)}$, $\widehat{(0,3,28)}$, $\widehat{(0,4,18)}$ $\widehat{(0,5,31)}$, $\widehat{(0,6,23)}$, $\widehat{(0,7,20)}$, $\widehat{(0,8,19)}$, $\widehat{(0,9,33)}$, $\widehat{(0,10,22)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique.

6) $n = 18k + 15$ **et** $k > 0$ Les $3k + 3$ 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des $3k + 3$ orbites définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \leq i < k+1 \quad \textit{première catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+8) & \text{pour } 0 \leq i < k+1 \quad \textit{deuxième catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+6) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{troisième catégorie} \\ (0, 6k+5, 12k+10) & \end{cases}$$

Pour $n = 15$, les orbites $\widehat{(0,1,4)}$, $\widehat{(0,2,8)}$ et $\widehat{(0,5,10)}$ définissent un $STS(n)$ cyclique. **cqfd**

Théorème 3. *Les conditions suivantes :*

(1) $n - 1 \equiv_2 0$ *et*

(2) $n(n-1) \equiv_6 0$

sont équivalentes à $n \equiv_6 1$ *ou* 3

Preuve : $n - 1 \equiv_2 0 \Longrightarrow \exists \lambda$ tel que $n = 2\lambda + 1$

i) $\lambda = 3\delta \Longrightarrow n = 6\delta + 1 \Longrightarrow n \equiv_6 1$

ii) $\lambda = 3\delta + 1 \Longrightarrow n = 6\delta + 3 \Longrightarrow n \equiv_6 3$

iii) $\lambda = 3\delta + 2$ ne convient pas car alors

$n = 6\delta + 5 \Longrightarrow n(n-1) \not\equiv_6 0$.

Réciproque : $n \equiv_6 1 \Longrightarrow (n-1) \equiv_6 0 \Longrightarrow n(n-1) \equiv_6 0$

$n \equiv_6 1 \Longrightarrow (n-1) \equiv_6 0 \Longrightarrow (n-1) \equiv_2 0$

$n \equiv_6 3 \Longrightarrow (n-1) \equiv_6 2 \Longrightarrow n(n-1) \equiv_6 0$

$n \equiv_6 3 \Longrightarrow (n-1) \equiv_6 2 \Longrightarrow (n-1) \equiv_2 0$. **cqfd**

1.4 Orbites et classes dans un STS(n)

Dans toute la suite n est un entier strictement supérieur à 2.

Définition 5. *Soient $a, b, c \in [n]$ on appelle orbite d'un 3-ensemble (a, b, c) l'ensemble $\{(a+i, b+i, c+i) | \ i \in [n]\}$ où les sommes $a+i, b+i, c+i$ sont effectuées dans $\mathbb{Z}_n$, c'est à dire modulo n. On notera $\overbrace{(a, b, c)}$ l'orbite de (a, b, c)*

Définition 6. *Un 3-ensemble (a, b, c) est dit cohérent si $Diff < a, b, c >$*

Définition 7. *On dira qu'un ensemble de 3-ensembles possède une contradiction s'il a au moins deux 3-ensembles contenant une même paire.*

Définition 8. *Un 3-ensemble (a, b, c) est dit générateur si son orbite ne possède pas de contradiction et si sa cardinalité est n . L'orbite est alors dite complète.*

Définition 9. *Une orbite sans contradiction qui n'est pas complète est dite incomplète. Si sa cardinalité est m, on dira qu'elle est m-incomplète.*

Définition 10. *Deux 3-ensembles (a, b, c) et (a', b', c') sont dits compatibles si aucune paire n'apparait plus d'une fois dans l'union de leurs orbites. On dira aussi que leurs orbites sont compatibles.*

Dans un $STS(n)$ cyclique, toute orbite $\overbrace{(a,b,c)}$ est incluse dans $STS(n)$. Ce qui n'est pas le cas dans un $STS(n)$ non cyclique.
Toute orbite $\overbrace{(a,b,c)}$ d'un $STS(n)$ contient un 3-ensemble de la forme $(0,\alpha,\beta)$ car pour $i=(n-a)$ le 3-ensemble $(a+i,b+i,c+i)=(0,b+n-a,c+n-a)\in\overbrace{(a,b,c)}$. Le 3-ensemble $(0,\alpha,\beta)$ sera appelé le *3-ensemble de base* de l'orbite $\overbrace{(a,b,c)}=\overbrace{(0,\alpha,\beta)}$.

Remarque 1 :

1)Tout $STS(n)$ n'est pas forcément cyclique, pour $n=7$ le $STS(7)$ suivant n'est pas cyclique.
$STS(7)=\{(0,1,2),(0,3,4),(0,5,6),(1,3,5),(1,4,6),(2,3,6),(2,4,5)\}$ n'est pas cyclique car $(0+1,3+1,4+1)\notin STS(7)$.

2) L'orbite $\overbrace{(0,1,4)}$ a pour cardinalité 13 dans le $STS(13)$ ci-dessous et l'orbite $\overbrace{(0,5,10)}$ est de cardinalité 5 dans un $STS(15)$ cyclique.

Pour $n=13$, on a la classe $\overbrace{(0,1,4)}$ dans le $STS(13)$ ci-dessous :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6

On a $|\overbrace{(0,1,4)}|=|\overbrace{(0,1,4)}|=13$ car le $STS(13)$ ci-dessus est cyclique.

Pour $n=15$, on a l'orbite $\overbrace{(0,5,10)}$ ci-dessous :

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14

On a bien $|\overbrace{(0, 5, 10)}| = 5$

Définition 11. *Un 3-ensemble $(0, a, b)$ est dit congru à m modulo n si dans $\mathbb{Z}_n$ l'un des éléments de l'ensemble $\{a, n-a, b, n-b, b-a, n-(b-a)\}$ est congru à m modulo n. Dans ce cas, on dira aussi que l'orbite $\overbrace{(0, a, b)}$ est congrue à m modulo n.*

Théorème 4. *Pour tout entier impair $n > 2$, un 3-ensemble cohérent $(0, a, b) \in [n]^3$ est générateur si et seulement si* $\begin{cases} a \not\equiv_n 2b \\ b \not\equiv_n 2a \\ a \not\equiv_n (n-b) \end{cases}$

Preuve : Si $(0, a, b)$ est générateur alors $(0+a, a+a, b+a) \in \overbrace{(0, a, b)}$ et les paires $\{0, a\}$, $\{0, b\}$ et $\{a, b\}$ sont chacune dans seul 3-ensemble. Or $(0+a, a+a, b+a) = (a, 2a, b+a)$ donc $2a \not\equiv_n b$ et $b + a \not\equiv_n 0$ puisque les paires $\{a, b\}$ et $\{0, a\}$ sont aussi dans le 3-ensemble $(0, a, b)$. Si $(0, a, b)$ est générateur alors $(0 + b, a + b, b + b) \in \overbrace{(0, a, b)}$ et les paires $\{0, a\}$,$\{0, b\}$ et $\{a, b\}$ sont chacune dans un seul 3-ensemble. Or $(0 + b, a + b, b + b) = (b, a + b, 2b)$ donc $2b \not\equiv_n a$ puisque la paire $\{a, b\}$ est aussi dans le 3-ensemble $(0, a, b)$.

Réciproque : Considérons dans l'orbite de $\overbrace{(0, a, b)} = \{(i, i + a, i + b) \mid i \in [n]\}$ deux 3-ensembles quelconques $(q, a + q, b + q)$ et $(q', a + q', b + q')$ où $q, q' \in [n]$ et montrons que $\overbrace{(0, a, b)}$ ne possède pas de contradiction. On a nécessairement $q \neq q'$ puisque les deux 3-ensembles sont différents.

1) Si $q \equiv_n a + q'$ alors $a \equiv_n q - q'$

si $a+q\equiv_n q'$ alors $a\equiv_n q'-q \implies q-q'\equiv_n q'-q \rightarrow\leftarrow$ car $q\not\equiv_n q'$ et n impair.

si $a+q\equiv_n b+q'$ alors $b-a\equiv_n q-q' \implies b-a\equiv_n a \rightarrow\leftarrow$ car $b\not\equiv_n 2a$

si $b+q\equiv_n q'$ alors $b\equiv_n q'-q \implies b\equiv_n -a \rightarrow\leftarrow$ car $a\not\equiv_n (n-b)$

2) *Si* $q\equiv_n b+q'$ *alors* $b\equiv_n q-q'$

si $a+q\equiv_n q'$ alors $a\equiv_n q'-q \implies b\equiv_n -a \rightarrow\leftarrow$ car $a\not\equiv_n (n-b)$

si $b+q\equiv_n q'$ alors $b\equiv_n q'-q \implies 2b\equiv_n 0 \rightarrow\leftarrow$ car n est impair, donc $2b \not\equiv_n n$

si $b+q\equiv_n a+q'$ alors $b-a\equiv_n q'-q \implies b-a\equiv_n -b \rightarrow\leftarrow$ car $a\not\equiv_n 2b$

3) *Si* $a+q\equiv_n b+q'$ *alors* $b-a\equiv_n q-q'$

si $q\equiv_n a+q'$ alors $a\equiv_n q-q' \implies b-a\equiv_n a \rightarrow\leftarrow$ car $b\not\equiv_n 2a$

si $b+q\equiv_n q'$ alors $b\equiv_n q'-q \implies b-a\equiv_n -b \rightarrow\leftarrow$ car $a\not\equiv_n 2b$

si $b+q\equiv_n a+q'$ alors $b-a\equiv_n q'-q \implies b-a\equiv_n a-b \rightarrow\leftarrow$ car n est impair et $b\not\equiv_n a$. **cqfd**

Théorème 5. *Deux 3-ensembles cohérents* $(0,a,b),(0,a',b')$ *sont compatibles si et seulement si dans* $\mathbb{Z}_n$ *on a*
$\{a,b,(b-a),n-a,n-b,n-(b-a)\}\cap\{a',b',(b'-a'),n-a',n-b',n-(b'-a')\}=\phi$

Preuve : Soient $(0,a,b),(0,a',b')$ deux 3-ensembles cohérents. Supposons que dans $\mathbb{Z}_n$
$\{a,b,(b-a),n-a,n-b,n-(b-a)\}\cap\{a',b',(b'-a'),n-a',n-b',n-(b'-a')\}=\phi$.
Montrons qu'aucune paire n'apparait pas plus d'une fois dans l'union des 2 orbites. Soient $(q,a+q,b+q)$ et $(q',a'+q',b'+q')$ où $q,q'\in[n]$.

1) Si $q=q'$ alors

$a+q\equiv_n a'+q' \implies a\equiv_n a' \rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n b'+q' \implies a\equiv_n b' \rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b+q\equiv_n a'+q' \implies b\equiv_n a' \rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b+q\equiv_n b'+q' \implies b\equiv_n b' \rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

2) Si $q \equiv_n a' + q'$ alors $a' \equiv_n q - q'$

$a + q \equiv_n q' \implies a \equiv_n q' - q \implies a \equiv_n - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a + q \equiv_n b' + q' \implies b' - a \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n b' - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n q' \implies b \equiv_n q' - q \implies b \equiv_n - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n b' + q' \implies b + a' \equiv_n b' \implies b \equiv_n b' - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intesection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

3) Si $q \equiv_n b' + q'$ alors $b' \equiv_n q - q'$

$a + q \equiv_n q' \implies a \equiv_n q' - q \implies a \equiv_n - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a + q \equiv_n a' + q' \implies a' - a \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n a' - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n q' \implies b \equiv_n q' - q \implies b - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n a' + q' \implies a' - b \equiv_n q - q' \implies b \equiv_n a' - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

4) Si $a + q \equiv_n q'$ alors $a \equiv_n q' - q$

$q \equiv_n a' + q' \implies a' \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q \equiv_n b' + q' \implies b' \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n a' + q' \implies b - a' \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n b' + q' \implies b - b' \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

5) Si $a + q \equiv_n a' + q'$ alors $a - a' \equiv_n q' - q$

$q \equiv_n q' \implies a \equiv_n a' \implies a \equiv_n - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q \equiv_n b' + q' \implies b' \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n a' - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n q' \implies b' \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection st vide.

$b + q \equiv_n b' + q' \implies b - b' \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n b' - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

6) Si $a + q \equiv_n b' + q'$ alors $b' - a \equiv_n q - q'$

$q \equiv_n q' \implies a \equiv_n b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q \equiv_n a' + q' \implies a' \equiv_n q - q' \implies a \equiv_n b' - a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n q' \implies b \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$b + q \equiv_n a' + q' \implies b - a' \equiv_n q' - q \implies b - a \equiv_n a' - b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

7) Si $b+q\equiv_n q'$ alors $b\equiv_n q'-q$

$q\equiv_n a'+q' \Longrightarrow a'\equiv_n q-q' \Longrightarrow b\equiv_n -a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q\equiv_n b'+q' \Longrightarrow b'\equiv_n q-q' \Longrightarrow b\equiv_n -b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n a'+q' \Longrightarrow a-a'\equiv_n q'-q \Longrightarrow b-a\equiv_n -a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n b'+q' \Longrightarrow a-b'\equiv_n q'-q \Longrightarrow b-a\equiv_n -b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

8) Si $b+q\equiv_n a'+q'$ alors $b-a'\equiv_n q'-q$

$q\equiv_n q' \Longrightarrow b\equiv_n a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q\equiv_n b'+q' \Longrightarrow b'\equiv_n q-q' \Longrightarrow b\equiv_n a'-b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n q' \Longrightarrow a\equiv_n q'-q \Longrightarrow b-a\equiv_n a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car (0,a,b) est cohérent.

$a+q\equiv_n b'+q' \Longrightarrow a-b'\equiv_n q'-q \Longrightarrow b-a\equiv_n a'-b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

9) Si $b+q\equiv_n b'+q'$ alors $b-b'\equiv_n q'-q$

$q\equiv_n q' \Longrightarrow b\equiv_n b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$q\equiv_n a'+q' \Longrightarrow a'\equiv_n q-q' \Longrightarrow b\equiv_n b'-a'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n q' \Longrightarrow a\equiv_n q'-q \Longrightarrow b-a\equiv_n b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

$a+q\equiv_n a'+q' \Longrightarrow a-a'\equiv_n q'-q \Longrightarrow a-b\equiv_n a'-b'$ $\rightarrow\leftarrow$ car l'intersection est vide.

Donc les 2 3-ensembles n'ont pas de paire en commun.

Par conséquent les deux orbites n'ont aucune paire en commun donc $(0,a,b)$ et $(0,a',b')$ sont compatibles.

Réciproque : $(0,a,b)$ et $(0,a',b')$ sont compatibles donc $Diff < a,b,a',b' >$ car toute paire n'apparait pas plus d'une fois dans l'union de leurs orbites.

1) Si $a\equiv_n -a'$ alors $(0,a',b')=(0,-a,b')$. On a alors $(0+a,a'+a,b'+a)=(0+a,-a+a,b'+a)=(a,0,b'+a)$ dans l'orbite $\overbrace{(0,a',b')}$, donc la paire $\{0,a\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

2) Si $a\equiv_n -b'$ alors $(0,a',b')=(0,a',-a)$. On a alors $(0+a,a'+a,b'+b)=(0+a,a'+a,-a+a)=(a,a'+a,0)$ dans l'orbite $\overbrace{(0,a',b')}$, donc la paire $\{0,a\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

3) Si $a \equiv_n b' - a'$ alors $(0, a', b') = (0, a', a + a')$. On a alors $(0 + (n - a'), a' + (n - a'), b' + (n - a')) = (0 + (n - a'), a' + (n - a'), a + a' + (n - a')) = (n - a', 0, a)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{0, a\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

4) Si $a \equiv_n a' - b'$ alors $(0, a', b') = (0, a + b', b')$. On a alors $(0 + (n - b'), a' + (n - b'), b' + (n - b')) = (0 + (n - b'), a + b' + (n - b'), b' + (n - b')) = (n - b', a, 0)$ dans l'orbite $\overbrace{(0', a', b')}$, donc la paire $\{0, a\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

5) Si $b \equiv_n -a'$ alors $(0, a', b') = (0, -b, b')$. On a alors $(0 + b, a' + b, b' + b) = (0 + b, -b + b, b' + b) = (b, 0, b' + b)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{0, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

6) Si $b \equiv_n -b'$ alors $(0, a', b') = (0, a', -b)$. On a alors $(0 + b, a' + b, b' + b) = (0 + b, a' + b, -b + b) = (b, a' + b, 0)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{0, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

7) Si $b \equiv_n b' - a'$ alors $(0, a', b') = (0, a', b + a')$. On a alors $(0 + (n - a'), a' + (n - a'), b' + (n - a')) = (0 + (n - a'), a' + (n - a'), b + a' + (n - a')) = (n - a', 0, b)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{0, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

8) Si $b \equiv_n a' - b'$ alors $(0, a', b') = (0, b + b', b')$. On a alors $(0 + (n - b'), a' + (n - b'), b' + (n - b')) = (0 + (n - b'), b + b' + (n - b'), b' + (n - b')) = (n - b', b, 0)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{0, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

9) Si $b - a \equiv_n a'$ alors $(0, a', b') = (0, b - a, b')$. On a alors $(0 + a, (b - a) + a, b' + a) = (a, b, b' + a)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{a, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

10) Si $b - a \equiv_n -a'$ alors $(0, a', b') = (0, a - b, b')$. On a alors $(0 + b, (a - b) + b, b' + b) = (b, a, b' + b)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{a, b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

11) Si $b - a \equiv_n b'$ alors $(0, a', b') = (0, a', b - a)$. On a alors $(0 + a, a' + a, b' + a) = (a, a' + a, b)$ dans l'orbite $\overbrace{(0, a', b')}$, donc la paire $\{a, b\}$ apparaitrait alors dans 2

3-ensembles ce qui est une contradiction.

12) Si $b-a\equiv_n -b'$ alors $(0,a',b') = (0,a',a-b)$. On a alors $(0+b, a'+b, b'+b) = (b, a'+b, a)$ dans l'orbite $\overbrace{(0,a',b')}$, donc la paire $\{a,b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

13) Si $b-a\equiv_n b'-a'$ alors $(0,a',b') = (0,a',b-a+a')$. On a alors $(0+(a-a'), a'+(a-a'), b'+(a-a')) = (0+(a-a'), a'+(a-a'), b-a+a'+(a-a')) = (a-a', a, b)$ dans l'orbite $\overbrace{(0,a',b')}$, donc la paire $\{a,b\}$ apparaitrait alors dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

14) Si $b-a\equiv_n a'-b'$ alors $(0,a',b') = (0,b-a+b',b')$. On a alors $(0+(a-b'), a'+(a-b'), b'+(a-b')) = (0+(a-b'), b-a+b'+(a-b'), b'+(a-b')) = (a-b', b, a)$ dans l'orbite $\overbrace{(0,a',b')}$, donc la paire $\{a,b\}$ apparaitrait dans 2 3-ensembles ce qui est une contradiction.

Par conséquent on a bien

$\{a, b, (b-a), n-a, n-b, n-(b-a)\} \cap \{a', b', (b'-a'), n-a', n-b', n-(b'-a')\} = \phi$.

cqfd

Lemme 1. *Si $n\equiv_6 1$ alors la réunion des orbites de $\frac{(n-1)}{6}$ 3-ensembles générateurs et deux à deux compatibles forme un $STS(n)$ cyclique.*

Par définition l'orbite d'un 3-ensemble générateur est de cardinalité n , donc la réunion des orbites de $\frac{(n-1)}{6}$ 3-ensembles générateurs deux à deux compatibles a pour cardinalité $\frac{n(n-1)}{6}$ 3-ensembles. Or $|STS(n)| = \frac{n(n-1)}{6}$, cette réunion forme donc un $STS(n)$. Il est cyclique car toute orbite est cyclique. **cqfd**

Lemme 2. *Si $n\equiv_6 3$ alors un $STS(n)$ cyclique contient une orbite incomplète.*

En effet $STS(n)$ contient $\frac{n(n-1)}{6}$ 3-ensembles. Or $\frac{n(n-1)}{6}$ n'est pas divisible par n puisque $\frac{(n-1)}{6} \notin \mathbb{N}$. Donc il existe une orbite incomplète car si toute les orbites sont complètes alors le nombre total de 3-ensembles est divisible par n. **cqfd**

Lemme 3. *si* $n \equiv_6 3$ *alors* $\frac{(n-3)}{6}$ *orbites complètes et une orbite* $\frac{n}{3}$*-incomplète deux à deux compatibles forment un* $STS(n)$ *cyclique.*

En effet $\frac{(n-3)}{6}$ orbites complètes contiennent $\frac{n(n-3)}{6}$ 3-ensembles et une orbite $\frac{n}{3}$-incomplète contient $\frac{n}{3}$ 3-ensembles. Or $\frac{n(n-3)}{6} + \frac{n}{3} = \frac{n}{6}(n-3+2) = \frac{n(n-1)}{6}$. Donc $\frac{(n-3)}{6}$ orbites complètes et une orbite $\frac{n}{3}$-incomplète deux à deux compatibles forment un $STS(n)$. Il est cyclique car toute orbite est cyclique. **cqfd**

Théorème 6. *La seule orbite non complète d'un* $STS(n)$ *cyclique est l'orbite* $\overbrace{(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})}$.

Preuve : Soit l'orbite non complète $\overbrace{(0,a,b)} = \{(q, a+a, b+q) | 0 < q < (n-1)\}$, $\exists q \neq q' \in [n]$ tels que les deux 3-ensembles $(q, a+q, b+q) = (q', a+q', b+q')$ soient égaux.

Comme $(0,a,b)$ est cohérent et $q \neq q'$ deux cas se présentent :

$$\begin{cases} q = a + q' \\ a + q = b + q' \\ b + q = q' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} q = b + q' \\ a + q = q' \\ b + q = a + q' \end{cases}$$

$$1)\begin{cases} q \equiv_n a + q' \\ a + q \equiv_n b + q' \\ b + q \equiv_n q' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q - q' \equiv_n a \\ q - q' \equiv_n b - a \\ q - q' \equiv_n - b \end{cases} \Longrightarrow a \equiv_n - b \equiv_n b - a$$

Donc on a $\begin{cases} 2b \equiv_n a \\ 3b \equiv_n 0 \\ 3a \equiv_n 0 \end{cases}$, puique $\begin{cases} 0 < a < n \\ 0 < b < n \end{cases}$ on a alors $\begin{cases} 0 < 3a < 3n \\ 0 < 3b < 3n \end{cases}$

d'où $\begin{cases} 3a = n \vee 3a = 2n \\ 3b = n \vee 3b = 2n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{n}{3} \vee a = \frac{2n}{3} \\ b = \frac{n}{3} \vee b = \frac{2n}{3} \end{cases}$

Puisque $a \neq b$ $\begin{cases} a = \frac{n}{3} \Longrightarrow b = \frac{2n}{3} \\ a = \frac{2n}{3} \Longrightarrow b = \frac{n}{3} \end{cases}$

Donc $(0, a, b) = (0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$.

2) $\begin{cases} q \equiv_n b + q' \\ a + q \equiv_n q' \\ b + q \equiv_n a + q' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q - q' \equiv_n b \\ q - q' \equiv_n - a \\ q - q' \equiv_n a - b \end{cases} \Longrightarrow a \equiv_n - b \equiv_n b - a$

Donc on a $\begin{cases} 2b \equiv_n a \\ 3b \equiv_n 0 \\ 3a \equiv_n 0 \end{cases}$

Nous avons le même cas que précédemment, par conséquent $(0, a, b) = (0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$.

La seule orbite incomplète est donc $\overbrace{(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})}$. **cqfd**

Lemme 4. *Il y a une seule orbite $\overbrace{(0, a, b)}$ où $3a \equiv_n 0$ ou $3b \equiv_n 0$, c'est l'orbite $\overbrace{(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})}$*

Preuve : Si $3a \equiv_n 0$ ou $3b \equiv_n 0$ alors $n \equiv_3 0$.

$$\text{Puisque}\begin{cases}0<a<n\\ \vee\\ 0<b<n\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3a=n\vee 3a=2n\\ \vee\\ 3b=n\vee 3b=2n\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=\frac{n}{3}\vee a=\frac{2n}{3}\\ \vee\\ b=\frac{n}{3}\vee b=\frac{2n}{3}\end{cases}$$

$$\text{Puisque } a\neq b \text{ alors}\begin{cases}a=\frac{n}{3}\Longrightarrow b=\frac{2n}{3}\\ \vee\\ a=\frac{2n}{3}\Longrightarrow b=\frac{n}{3}\end{cases}$$

Comme l'orbite $\overbrace{(0,\frac{n}{3},\frac{2n}{3})}$ est incluse dans $STS(n)$ quand $n\equiv_3 0$ donc $a=\frac{n}{3}\Longleftrightarrow b=\frac{2n}{3}$ et $a=\frac{2n}{3}\Longleftrightarrow b=\frac{n}{3}$. **cqfd**

CHAPITRE 2

COLORIAGE D'UN STS(N)

L'objectif du présent chapitre est le coloriage d'un $STS(n)$ cyclique , c'est à dire l'attribution d'une couleur à chaque 3-ensemble d'un $STS(n)$ cyclique de telle manière qu'aucune couleur ne soit attribuée plus d'une fois à un même élément. Dans la suite n est entier supérieur à 3.

2.1 Exemple

Pour n=(6×2+1)=13, considérons le $STS(13)$ dont les 3-ensembles générateurs sont : $(0,1,4)$ et de $(0,2,7)$.
Les orbites $\overbrace{(0,1,4)}$ et $\overbrace{(0,2,7)}$ sont respectivement les suivantes :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
7	8	9	10	11	12	13	13	12	7	8	9	10

Dans la première orbite, aux trois 3-ensembles $(0,1,4)$, $(9,10,0)$, $(12,0,3)$ contenant l'élément 0 on a attribué respectivement les couleurs 1 , 4 et 2. Dans l'attribution des couleurs aux 3-ensembles de l'orbite $\overbrace{(0,1,4)}$, aucune couleur n'a été attribuée plus d'une fois à l'élément 0.

2.2 Coloriage d'un STS(n) cyclique

Définition 12. *Le coloriage d'un sous-ensemble S d'un $STS(n)$ est une fonction $\rho : S \longrightarrow [m]$. Pour $(i,j,k) \in S, \rho(i,j,k) = C_{ijk} \in [m]$ est appelée la* couleur *de (i,j,k) et m est le nombre de couleurs du coloriage.*

Notre but est de colorier tous les 3-ensembles d'un $STS(n)$ cyclique de telle manière qu'à tout couple de 3-ensembles contenant un même élément de $[n]$ correspondent deux couleurs différentes. Ce qui nous amène à poser la définition suivante.

Définition 13. *Un coloriage ρ de m couleurs d'un sous-ensemble S d'un $STS(n)$ est dit cohérent si $\forall r_0 \in [n]$ la restriction ρ_{r_0} de ρ à $T_{r_0} = \{(i,j,k) \in S \mid i = r_0 \vee j = r_0 \vee k = r_0\}$ dans $[m]$, est injective.*

Remarque 2 : Dans toute orbite d'un $STS(n)$ cyclique, tout élément appartient à au plus trois 3-ensembles.

En effet , soit $\overbrace{(0,a,b)} = \{(i, a+i, b+i)/i \in [n]\}$ une orbite. Soit $\alpha \in [n]$. Comme i parcourt $[n]$, i prend une seule fois la valeur $\alpha \in [n]$. Les additions $(a+i)$ et $(b+i)$ s'effectuant modulo n, $(a+i)$ et $(b+i)$ prennent chacun une seule fois la valeur α. Donc α apparait en tout au plus 3 fois dans i ,$(a+i)$ et $(b+i)$ quand i parcourt $[n]$. Si l'orbite $\overbrace{(0,a,b)}$ est complète chaque élément de $[n]$ apparaît dans trois 3-ensembles différents. Si $\overbrace{(0,a,b)}$ est $\frac{n}{3}-$incomplète, chaque élément apparait une seule fois dans toute l'orbite.

Une orbite complète $\overbrace{(0,a,b)}$ d'un $STS(n)$ cyclique contient les trois 3-ensembles $(0,a,b)$, $(n-a,0,n-a+b)$ et $(n-b,n-b+a,0)$, dans cette orbite l'élément 0 se trouve donc avec tous les éléments de $\{a,b,n-a,n-b,n-b+a,n+b-a\}$. On a $\overbrace{(0,a,b)} = \overbrace{(0,n-a,n-a+b)} = \overbrace{(0,n-b,n-b+a)}$.

Définition 14. *Soit un $STS(n)$ cyclique, on appelle groupe de 0 du 3-ensemble $(0,a,b)$ ou de l'orbite $\overbrace{(0,a,b)}$ le sous-ensemble $\{a,b,b-a,n-a,n-b,a-b\}$ de $\mathbb{Z}_n$, on le notera $G_{0,(0,a,b)}$.*

Théorème 7. *Pour tout $m \in [n]$, si une orbite $\overbrace{(0,a,b)}$ d'un $STS(n)$ cyclique , avec a et $b \in [n]$, vérifie $\forall x \in G_{0,(0,a,b)} \quad x \not\equiv_m 0$ alors $\overbrace{(0,a,b)}$ est coloriable de manière cohérente avec m couleurs.*

Preuve : Soit $\overbrace{(0,a,b)}$ une orbite d'un $STS(n)$ cyclique qui vérifie les conditions ci-dessus, et soit le coloriage ρ qui à tout 3-ensemble de $(q,a+q,b+q)$ de $\overbrace{(0,a,b)}$ où $q \in [n]$ fait correspondre $(q \mod m)$.
Montrons que $\rho(q,a+q,b+q) = (q \mod m)$ est un coloriage cohérent de $\overbrace{(0,a,b)}$ avec m couleurs.
Soient $q,q' \in [n]$ et soient $(q,a+q,b+q)$ et $(q',a+q',b+q')$ deux 3-ensembles différents de l'orbite $\overbrace{(0,a,b)}$. Les deux 3-ensembles sont différents donc $q \neq q'$.
Supposons sans perte de généralité que $q' > q$.

1) Si $q \equiv_n a + q'$ alors
$q' - q \equiv_n n - a$, or $(n-a) \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes.

2) Si $q \equiv_n b + q'$ alors

$q' - q \equiv_n n - b$, or $(n-b) \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes.

3) Si $a + q \equiv_n q'$ alors

$q' - q \equiv_n a$, or a $a \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes.

4) Si $a + q \equiv_n b + q'$ alors

$n-(b-a) \equiv_n q' - q$, or $n-(b-a) \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes.

5) Si $b + q \equiv_n q'$ alors

$q' - q \equiv_n b$, or a $b \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes.

6) Si $b + q \equiv_n a + q'$ alors

$b - a \equiv_n q' - q$, or $(b - a \mod n) \not\equiv_m 0$ donc $q' - q \not\equiv_m 0$, par conséquent $q' \mod m \neq q' \mod m \Longrightarrow$ les couleurs deux 3-ensembles sont différentes. **cqfd**

La réciproque n'est pas vraie. En effet, une orbite $\overbrace{(0, a, b)}$ peut être congru à 0 modulo 5 et coloriable avec 5 couleurs.

Exemple : Pour $n = 13$, reconsidérons le $STS(13)$ vu plus haut dont les deux 3-ensembles générateurs sont :$(0, 1, 4)$ et $(0, 2, 7)$.

L'orbite $\overbrace{(0, 1, 4)}$ est le suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile & \smile \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 1 & 2
\end{array}$$

Nous avons dans ce cas $a = 1$ et $b = 4$ ce qui donne $n - (b - a) = 13 - (4 - 1) = 10$, donc $(0, 1, 4)$ est congru à 0 modulo 5. Pourtant l'orbite $\overbrace{(0, 1, 4)}$ est coloriable avec seulement 5 couleurs.

Désignons par N le nombre minimal de couleurs nécessaires pour un coloriage cohérent d'un $STS(n)$. Il faut au moins $\frac{(n-1)}{2}$ couleurs pour un coloriage cohérent de tous les 3-ensembles. En effet, puisque dans un $STS(n)$ on trouve chaque paire (α,β) une et une seule fois dans un des $\frac{n(n-1)}{6}$ 3-ensembles, l'élément α se retrouve donc avec les $(n - 1)$ autres éléments. Comme dans un 3-ensemble (α,β,γ) il y a 2 paires (α,β) et (α,γ) contenant α, il y a donc $\frac{(n-1)}{2}$ 3-ensembles contenant α. Il faut donc $\frac{(n-1)}{2}$ couleurs différentes pour un coloriage cohérent de tous les 3-ensembles contenant α, et par conséquent au moins $\frac{(n-1)}{2}$ couleurs pour un coloriage cohérent de tous les 3-ensembles d'un $STS(n)$. On a alors $N \geq \frac{(n-1)}{2}$.
On remarque que $\frac{3(n-1)}{2}$ couleurs suffisent pour un coloriage cohérent d'un STS(n), car dans un 3-ensemble, pour chacun des trois éléments, $\frac{(n-1)}{2}$ couleurs différentes suffisent. Donc le nombre minimum N de couleurs pour un coloriage cohérent de tous les 3-ensembles du $STS(n)$ est $\frac{(n-1)}{2} \leq N \leq \frac{3(n-1)}{2}$.
Dans un $STS(n)$ cyclique, on peut améliorer la borne supérieure en constatant que, dans une orbite donnée, chacun des éléments α, β, γ d'un 3-ensemble (α, β, γ), appartient à au plus 3 3-ensembles, et a donc déjà reçu au plus 2 couleurs avant le coloriage du 3-ensemble (α, β, γ), 6 couleurs au plus ont été attribuées aux éléments α, β et γ), par conséquent une septième couleur suffit pour un coloriage cohérent

du 3-ensemble (α, β, γ) dans son orbite.
Si $n \equiv_6 1$, il y a $\frac{(n-1)}{6}$ orbites dans un $STS(n)$ cyclique donc $\frac{7(n-1)}{6}$ couleurs suffisent à attribuer un coloriage cohérent à tous les 3-ensembles.
Si $n \equiv_6 3$, il y a $\frac{(n-3)}{6}$ orbites complètes et une orbite $\frac{n}{3}-$incomplète dans un $STS(n)$ cyclique donc $\frac{7(n-3)}{6} + 1$ couleurs suffisent à attribuer un coloriage cohérent à tous les 3-ensembles. En effet tous les éléments de l'orbite incomplète sont différents donc une seule couleur suffit pour colorier de façon cohérente l'orbite incomplète.
Le nombre minimum N de couleurs pour un coloriage cohérent de tous les 3-ensembles d'un $STS(n)$ cyclique vérifie :
si $n \equiv_6 1$, $\quad \frac{(n-1)}{2} \leq N \leq \frac{7(n-1)}{6}$,
si $n \equiv_6 3$, $\quad \frac{(n-1)}{2} \leq N \leq \frac{7(n-3)}{6} + 1$.

Montrons dans ce qui suit que nous pouvons colorier de manière cohérente, grâce à un arrangement particulier de l'ordre des 3-ensembles de chaque orbite, tous les 3-ensembles d'un $STS(n)$ cyclique avec au plus $(n+1)$ couleurs lorsque n est premier ou triple d'un nombre premier. N sera alors borné ainsi $\frac{(n-1)}{2} \leq N \leq n+1$.
Soit l'orbite $\overbrace{(0, a, b)} = \{(i, a+i, b+i) \ / \ i \in [n]\}$ d'un $STS(n)$ cyclique avec n premier, n est alors de la forme $(6p+1)$, n et a sont premiers entre eux et $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha a + \beta n = 1$, on a alors dans $\mathbb{Z}_n$ $\alpha a = 1$, donc a admet un inverse dans $\mathbb{Z}_n$. Par conséquent l'équation $\alpha a = c$ admet une solution unique $\forall c \in \mathbb{Z}_n$, car ($\alpha a = c$ et $\alpha' a = c'$) impliquent ($c = c' \iff \alpha = \alpha'$). On peut donc écrire les 3-ensembles de l'orbite $\overbrace{(0, a, b)}$ de la manière suivante :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & a & 2a & . & . & ka & (k+1)a & . & . & (n-2)a & (n-1)a \\
a & 2a & 3a & . & . & (k+1)a & (k+2)a & . & . & (n-1)a & 0 \\
b & a+b & 2a+b & . & . & ka+b & (k+1)a+b & . & . & (n-2)a+b & (n-1)a+b \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 3 & & & \delta & \mu & & & &
\end{array}
$$

Nous appelerons cet arrangement : arrangement en 3-ensembles successifs en a.
Le 3-ensemble $(ka, (k+1)a, ka+b)$ est suivi du 3-ensemble $((k+1)a, (k+2)a, (k+1)a+b)$. Cet arrangement est possible car l'équation $\alpha a = c$ admet une solution $\forall c \in \mathbb{Z}_n$. Nous avons déjà vu qu'à tout l'élément on peut attribuer au plus 3 couleurs. Pour attribuer une couleur au 3-ensemble $(ka, (k+1)a, ka+b)$ on constate que l'élément $(k+1)a$ se trouve dans le 3-ensemble suivant et donc au plus une couleur lui a déjà été attribuée puisqu'au 3-ensemble $((k+1)a, (k+2)a, (k+1)a+b)$ aucune couleur ne l'a encore été. Donc aux 3 éléments du 3-ensemble $(ka, (k+1)a, ka+b)$ au plus 5 couleurs ont déjà été attribuées, la sixième couleur conviendra nécessairement.
Seul le dernier 3-ensemble $((n-1)a, 0, (n-1)a+b)$ n'a pas de suivant dans la manière ci-dessus d'écrire les 3-ensembles de l'orbite $\widehat{(0,a,b)}$. On ne peut lui appliquer le raisonnement précédent. Comme à ses 3 éléments on a attribué en tout au plus 6 couleurs, une septiéme couleur ϵ conviendra nécessairement. On a ainsi pu colorier l'orbite $\widehat{(0,a,b)}$ avec 7 couleurs dont une n'a été utilisée que pour un seul 3-ensemble.
Si on considère une autre orbite $\widehat{(0,a',b')}$ on peut utiliser 6 autres couleurs différentes des 7 précédemment utilisées mais on peut prendre ϵ comme septième couleur puisque 9 3-ensembles seulement de $\widehat{(0,a',b')}$ contiennent un élément auquel a déjà été attribuée la couleur ϵ, à condition que $n > 9$. La couleur ϵ peut donc être utilisée dans $\lfloor \frac{n}{9} \rfloor$ orbites différentes. Or il y a $\frac{(n-1)}{6}$ orbites et $2\lfloor \frac{n}{9} \rfloor \geq \frac{(n-1)}{6}$ pour $n > 9$ donc $(6\frac{(n-1)}{6} + 2) = (n+1)$ couleurs suffisent pour colorier correctement un $STS(n)$ cyclique lorsque n est premier.

Lemme 5. *Si* $n \equiv_3 0$ *alors* $G_{0,(0,a,b)}$ *d'un 3-ensemble générateur* $(0,a,b)$ *d'un* $STS(n)$ *cyclique a tous ses éléments non nuls et contient soit aucun, soit deux soit six multiples de* 3.

Preuve : 1) Si $a \equiv_3 0$ et $b \not\equiv_3 0$ alors $\begin{cases} n - a \equiv_3 0 \\ b - a \not\equiv_3 0 \\ n - b \not\equiv_3 0 \\ n - (b - a) \not\equiv_3 0 \end{cases}$

$G_{0,(0,a,b)}$ contient deux multiples de 3.

2) Si $a \equiv_3 0$ et $b \equiv_3 0$ alors

$$\begin{cases} n - a \equiv_3 0 \\ b - a \equiv_3 0 \\ n - b \equiv_3 0 \\ n - (b - a) \equiv_3 0 \end{cases}$$

$G_{0,(0,a,b)}$ contient six multiples de 3.

3) Si $a \not\equiv_3 0$ et $b \not\equiv_3 0$ alors

$$\begin{cases} n - a \not\equiv_3 0 \\ n - b \not\equiv_3 0 \end{cases}$$

Si $b - a \equiv_3 0$ alors $n - (b - a) \equiv_3 0$ et $G_{0,(0,a,b)}$ contient deux multiples de 3.

Si $b - a \not\equiv_3 0$ alors $n - (b - a) \not\equiv_3 0$ et $G_{0,(0,a,b)}$ ne contient aucun multiple de 3. **cqfd**

Soit maintenant $n \equiv_6 3$ et l'orbite $\overbrace{(0, a, b)} = \{(i, a+i, b+i) \; / \; i \in [n]\}$ avec $n = 3\nu$ et ν premier. Nous avons vu au chapitre précédent que l'orbite $\frac{n}{3}$−incomplète $(0, \nu, 2\nu)$ est incluse dans le $STS(n)$ cyclique. C'est la seule orbite d'un $STS(n)$ cyclique où a et b ne sont pas premiers avec ν. Cette orbite ayant tous ses élements différents, elle peut être coloriée de manière cohérente avec une seule couleur. Dans toutes les autres orbites complètes on a a et ν premiers entre eux et b et ν premiers entre eux.

Soit une orbite complète, si a et n sont premiers entre eux alors on peut faire un arrangement en 3-ensembles successifs en a et colorier de manière cohérente l'orbite $\widehat{(0,a,b)}$ avec 7 couleurs dont une utilisée pour colorier un seul 3-ensemble. Si a et n ne sont pas premiers entre eux, on peut appliquer la méthode précédente avec b et n s'ils sont premiers entre eux. Mais si n n'est premier ni avec a ni avec b alors $a = 3\alpha$, $b = 3\beta$, $n = 3\nu$. D'aprés le lemme précédent $G_{0,(0,a,b)}$ contient 6 multiples de 3. Comme il y a en tout $\frac{n}{3}$ multiple de 3 non nuls, deux autres groupes $G_{0,(0,a',b')}$ et $G_{0,(0,a",b")}$ au moins ne contiennent aucun multiple de 3. Il y a $\frac{(n-3)}{3}$ orbites complètes, d'aprés le théorème 7 on peut les colorier toutes les deux de manière cohérente avec 3 couleurs chacune. On aura ainsi utlisé au plus $6(\frac{n-3}{6} - 2) + 2 + 1 + 3 + 3 = (n - 6)$ couleurs pour colorier tout le $STS(n)$ cyclique. Par conséquent en pire cas a ou b sont premiers avec n, ce qui nous permet de colorier de manière cohérente l'orbite $\widehat{(0,a,b)}$ avec 7 couleurs dont une utilisée pour colorier seulement un seul triplet, tout le $STS(n)$ est alors coloriable avec $6\frac{n-3}{6} + 2 + 1 = n$.

Ainsi, on peut colorier de manière cohérente un $STS(n)$ cyclique avec $(n + 1)$ couleurs si n est un nombre premier, et avec n couleurs si n est triple d'un nombre premier.

Colburn [CR99] a démontré en utilisant le théorème de Brooks [Bro41] que dans un système de Steiner $S(2, k, n)$ cyclique toutes les orbites sont coloriables de manière cohérente avec $k(k - 1)$ couleurs sauf au plus une qui nécessite $k(k - 1) + 1$ couleurs, ce qui implique que tout système de Steiner $S(2, k, n)$ cyclique est coloriable de manière cohérente avec n couleurs. La preuve de Colburn [CR99] améliore et généralise le résultat qu'on a trouvé pour n premier ou triple d'un nombre premier. Dans la suite nous utiliserons ce résultat de Colburn.

Théorème 8. *Si $n \equiv_9 0$ alors on peut colorier un $STS(n)$ cyclique avec $(n - 4)$ couleurs.*

Preuve : Quand $n \equiv_9 0$ il y a $\frac{n}{3} - 1$ multiples de 3 non nuls.

Si a est multiple de 3 alors $(n-a)$ l'est aussi. Montrons que le groupe de 0 $G_{0,(0,a,b)}$ du 3-ensemble de base $(0, a, b)$ contient soit aucun multiple de 3, soit 2 multiple de 3 soit 6 multiples de 3.
Si un élément c de $\{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ est multiple de 3, on a $(n-c) \in \{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ et $(n-c)$ multiple de 3.
Sans perte de généralité supposons $c = a$ multiple de 3, si b est multiple de 3 alors $b-a$, $n-(b-a)$ et $(n-b)$, tous les éléments de $\{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ sont multiples de 3.
On a bien ainsi aucun , deux ou six multiples de 3 dans tout $G_{0,(0,a,b)}$.
Un $STS(n)$ cyclique contient le 3-ensemble $(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$ et $\frac{n-3}{6}$ 3-ensembles génŕateurs tous deux à deux compatibles. Lorsque $n \equiv_9 0$ on a $\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}$ qui sont multiples de 3, or il y a $2(\frac{n-3}{6})$ multiples de 3 non nuls dans $[n]$. Par conséquent, en pire cas nous avons au moins un triplet générateur qui ne contient aucun multiple de 3, il n'est donc pas congru à 0 modulo 3, d'aprés le théorème 7 on peut colorier toute son orbite de manière cohérente avec 3 couleurs. Le $STS(n)$ cyclique peut alors être colorié avec au plus $6(\frac{n-3}{6} - 1) + 3 + 1 + 1 = (n-4)$ couleurs car une orbite au plus nécessite 7 couleurs, toutes les autres orbites compètes sont coloriables avec 6 couleurs, l'orbite $(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$ nécessite 1 couleur et 3 couleurs suffisent pour colorier de manière cohérente au moins une orbite complète. **cqfd**

Le coloriage cohérent d'un $STS(n)$ cyclique avec un nombre de couleurs égal à seulement une fraction de n que nous allons montrer s'applique à tous les $STS(n)$ cycliques de la construction de Peltesohne [Pel39]

Montrons maintenant que $\forall n, n \equiv_6 1, 3$ on peut colorier de manière cohérente un $STS(n)$ cyclique obtenu par la construction de Peltesohne [Pel39] avec seulement une fraction de n couleurs.

D'abord considérons les entiers n de la forme $n = 6p+1$. On sait que dans ce cas que $STS(n)$ contient $p = \frac{(n-1)}{6}$ orbites ou classes. Pour leur attribuer un coloriage cohérent, nous reprendrons la décomposition en 3 cas utilisée dans le théorème 2 pour la construction d'un $STS(n)$ cyclique :

1) $p = 3k$

2) $p = 3k + 1$

3) $p = 3k + 2$

2.3 Cas où n=6p+1 avec p>0

2.3.1 Pour p=3k et k>1

Nous avons déjà montré que les p 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des p classes compatibles définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+1) & \text{pour } 0 \leq i < k-1 \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3k, 6k+1) & \end{cases}$$

Parmi les k **3-ensembles** $(0, 3i+1, 4k+2i+2)$ **avec** $0 \leq i < k$

1) Si k pair

si $i \equiv_4 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 4k+1-i \not\equiv_4 0 \\ 4k+2+2i \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(3i+1) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(4k+1-i) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(4k+2+2i) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 1-i \not\equiv_4 0 \\ 2+2i \not\equiv_4 0 \\ 3i \not\equiv_4 0 \\ i \not\equiv_4 0 \\ 1+2i \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} i \not\equiv_4 1 \\ i \not\equiv_4 3 \\ i \not\equiv_4 0 \\ 2i \not\equiv_4 3 \end{cases}$$

Donc, lorsque $k \geq 4$, dans au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 6.

2) Si k impair

si $i \equiv_4 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 4k+1-i \not\equiv_4 0 \\ 4k+2+2i \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(3i+1) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(4k+1-i) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(4k+2+2i) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 1-i \not\equiv_4 0 \\ 2+2i \not\equiv_4 0 \\ 2-3i \not\equiv_4 0 \\ 2+i \not\equiv_4 0 \\ 1-2i \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i \not\equiv_4 3 \\ i \not\equiv_4 1 \\ i \not\equiv_4 3 \\ 3i \not\equiv_4 2 \\ i \not\equiv_4 2 \\ 2i \not\equiv_4 1 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 6.

Parmi les $(k-1)$ **3-ensembles** $(0, 3i+3, 6k+i+2)$ **avec** $0 \leq i < k-1$

1) Si k pair

si $i \equiv_4 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_4 0 \\ 6k+i+2 \not\equiv_4 0 \\ 6k-2i-1 \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(3i+3) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(6k+i+2) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(6k-2i-1) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_4 0 \\ i+2 \not\equiv_4 0 \\ 2i+1 \not\equiv_4 0 \\ 3i+2 \not\equiv_4 0 \\ i-1 \not\equiv_4 0 \\ 2i+2 \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i \not\equiv_4 1 \\ i \not\equiv_4 2 \\ 2i \not\equiv_4 3 \\ 3i \not\equiv_4 2 \\ i \not\equiv_4 1 \\ 2i \not\equiv_4 2 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$

classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k impair

si $i \equiv_4 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_4 0 \\ 6k+i+2 \not\equiv_4 0 \\ 6k-2i-1 \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(3i+3) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(6k+i+2) \not\equiv_4 0 \\ 18k+1-(6k-2i-1) \not\equiv_4 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_4 0 \\ i \not\equiv_4 0 \\ 1-2i \not\equiv_4 0 \\ 3i \not\equiv_4 0 \\ -i-1 \not\equiv_4 0 \\ 2+2i \not\equiv_4 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i \not\equiv_4 1 \\ i \not\equiv_4 0 \\ 2i \not\equiv_4 1 \\ 3i \not\equiv_4 0 \\ i \not\equiv_4 3 \\ 2i \not\equiv_4 2 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 8k+2i+2)$ avec $0 \leq i < k$

Les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 8k+2i+2)$ avec $0 \leq i < k$ sont tous congrus à 0 mod 4.

Examinons la congruence modulo 5 de ces k 3-ensembles.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

si i $\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k+2i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k-i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 3+2i \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ -1-2i \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i \not\equiv_5 2 \\ 2i \not\equiv_5 1 \\ i \not\equiv_5 1 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 3 \\ i \not\equiv_5 3 \end{cases}$$

Dans ce cas au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

a)si i $\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k+2i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k-i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k \not\equiv_5 0 \\ 18k-1 \not\equiv_5 0 \\ -1 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i $\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k+2i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+1-(8k-i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i\not\equiv_5 3 \\ 2i\not\equiv_5 4 \\ i\not\equiv_5 4 \\ 2i\not\equiv_5 3 \end{cases}$$

Dans ce cas au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

En résumé : pour $n = 18k + 1$

$n = 18k+1$	$k \equiv_5 0$	$k \equiv_5 1$	$k \equiv_5 2$	$k \equiv_5 3$	$k \equiv_5 4$
Nombre minimum de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor$
Nombre minimum de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	0	0	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	0
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k+1$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 4$	$18k+1$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 4$	$18k+1$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 4$ $+$ $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$	$18k+1$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 4$ $+$ $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$	$18k+1$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k-1}{4} \rfloor) \times 4$
(N/n) est majoré par	$\frac{34k+29}{36k+2}$	$\frac{34k+29}{36k+2}$	$\frac{168k+205}{180k+10}$	$\frac{166k+265}{180k+10}$	$\frac{34k+29}{36k+2}$
Pour $k \geq 30$	$N < (97\%)n$	$N < (97\%)n$	$N < (97\%)n$	$N < (97\%)n$	$N < (97\%)n$
Pour $k \geq 100$	$N < (95.2\%)n$	$N < (95.2\%)n$	$N < (94.5\%)n$	$N < (93.7\%)n$	$N < (95.2\%)n$

2.3.2 Pour p=3k+1 et k>0

Nous avons déjà montré que les p 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des p classes compatibles définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0,3i+1,8k+2i+4) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0,3i+2,6k+i+3) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0,3i+3,4k+2i+4) & \text{pour } 0 \le i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0,3k+1,7k+3) & \end{cases}$$

Tous les k 3-ensembles $(0,3i+1,8k+2i+4)$ avec $0 \le i < k$ sont congrus a 0 mod 4.
Tous les k 3-ensembles $(0,3i+2,6k+i+3)$ avec $0 \le i < k$ sont congrus a 0 modulo 4.
Tous les k 3-ensembles $(0,3i+3,4k+2i+4)$ avec $0 \le i < k$ sont congrus a 0 modulo 4.

Étudions la congruence modulo 5.

Parmi les k **3-ensembles** $(0,3i+1,8k+2i+4)$ **avec** $0 \le i < k$
1)Si k $\equiv_5 0$ alors
si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \\ 6 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2)Si k $\equiv_5 1$ alors

a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+4 \not\equiv_5 0 \\ 8k+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ -1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

si i$\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(8k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \\ 2-3i \not\equiv_5 0 \\ 3-2i \not\equiv_5 0 \\ 4+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

Parmi les k **3-ensembles** $(0, 3i+2, 6k+i+3)$ **avec** $0 \leq i < k$

1)Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5

2)Si k $\equiv_5 1$ alors

a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k+i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k-2i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 7-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5$2 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k+i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k-2i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 7-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si i$\equiv_5$3 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k+i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k-2i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 7-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k+i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(6k-2i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 7-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 4k+2i+4)$ **avec** $0 \leq i < k$

1)Si k $\equiv_5 0$ alors

a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 2i+4\not\equiv_5 0 \\ -i+1\not\equiv_5 0 \\ 7-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 7-(2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 7-(-i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

2)Si $k \equiv_5 1$ alors

a)si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+1)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ -i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ -i\not\equiv_5 0 \end{cases} \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ -2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i \equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+1) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 3+2i \not\equiv_5 0 \\ -i \not\equiv_5 0 \\ 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 3+2i \not\equiv_5 0 \\ -i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ -3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+1) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ 1-2i \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congru a 0 modulo 5.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

si $i \equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+1 \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+7-(4k-i+1) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 2-i \not\equiv_5 0 \\ 1-3i \not\equiv_5 0 \\ 1+2i \not\equiv_5 0 \\ 2+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

En résumé : pour $n = 18k + 7$

$n = 18k + 7$	$k \equiv_5 0$	$k \equiv_5 1$	$k \equiv_5 2$	$k \equiv_5 3$	$k \equiv_5 4$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	0	0	0	0	0
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	$3\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$8\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	0	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k + 7$ - $(3\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $(3\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 5$	$18k + 7$ - $(8\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $(8\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 5$	$18k + 7$ - $(2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $(2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor) \times 5$	$18k + 7$ - 0 $+$ 0	$18k + 7$ - $(\lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 6$ $+$ $(\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 5$
(N/n) est majoré par	$\frac{87k+130}{90k+35}$	$\frac{82k+280}{90k+35}$	$\frac{88k+100}{90k+35}$	$---$	$\frac{89k+70}{90k+35}$
Pour $k \geq 100$	$N < (97.8\%)n$	$N < (93.9\%)n$	$N < (98.6\%)n$	$---$	$N < (99.3\%)n$

Dans le cas $n = 18k + 7$ et $k \equiv_5 3$ tous les 3-ensembles de base qui déterminent le $STS(n)$ de la construction de Peltesohne [Pel39] sont congrus à 0 modulo 4, et sont congrus à 0 modulo 5. On ne peut pas appliquer le théorème 7 dans ce cas pour obtenir une coloration cohérente du $STS(n)$ avec moins que n couleurs.

2.3.3 Pour p=3k+2 et k>3

Nous avons déjà montré que les p 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des p classes compatibles définissent un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \leq i < k+1 \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 6k+i+5) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 8k+2i+8) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3k+2, 10k+7) & \end{cases}$$

Parmi les $(k+1)$ 3-ensembles $(0, 3i+1, 4k+2i+4)$ avec $0 \leq i < k+1$
Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 4

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 6k+i+5)$ avec $0 \leq i < k$
Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 4

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 8k+2i+8)$ avec $0 \leq i < k$
Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 4

Étudions la congruence modulo 5.

Parmi les $(k+1)$ **3-ensembles** $(0, 3i+1, 4k+2i+4)$ **avec** $0 \leq i < k+1$

1)Si k $\equiv_5 0$ alors
si i$\equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 2i+4\not\equiv_5 0 \\ -i+3\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 4-2i\not\equiv_5 0 \\ i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

2)Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 4k+4\not\equiv_5 0 \\ 4k+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+12\not\equiv_5 0 \\ 14k+9\not\equiv_5 0 \\ 14k\not\equiv_5 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

a)si i$\equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 1+2i \not\equiv_5 0 \\ -i \not\equiv_5 0 \\ 1-3i \not\equiv_5 0 \\ 1-2i \not\equiv_5 0 \\ 2+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 1+2i \not\equiv_5 0 \\ -i \not\equiv_5 0 \\ 1-3i \not\equiv_5 0 \\ 1-2i \not\equiv_5 0 \\ 2+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5)Si k $\equiv_5$4 alors

si i$\equiv_5$1 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}.$$

si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+2i+4 \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k+2i+4) \not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 6k+i+5)$ **avec** $0 \leq i < k$

1)Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

2)Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

a)si $i \equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+5\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k+i+5)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k-2i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+5\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k+i+5)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k-2i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si $i\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+5\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k+i+5)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k-2i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si $i\equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 6k+i+5\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k+i+5)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(6k-2i+3)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 8k+2i+8)$ **avec** $0 \leq i < k$

1)Si k $\equiv_5 0$ alors

si i$\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+8\not\equiv_5 0 \\ 8k-i+5\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k+2i+8)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k-i+5)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 2i+8\not\equiv_5 0 \\ -i+5\not\equiv_5 0 \\ 10-3i\not\equiv_5 0 \\ 5-2i\not\equiv_5 0 \\ 8+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2)Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

3)Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus a 0 modulo 5.

4)Si k $\equiv_5 3$ alors

si i$\equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+8\not\equiv_5 0 \\ 8k-i+5\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k+2i+8)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k-i+5)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \\ 4-3i\not\equiv_5 0 \\ 5-2i\not\equiv_5 0 \\ 8+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5)Si k $\equiv_5 4$ alors

a)si i$\equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+8\not\equiv_5 0 \\ 8k-i+5\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k+2i+8)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k-i+5)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 2i\not\equiv_5 0 \\ 2-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 5-2i\not\equiv_5 0 \\ 8+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 8k+2i+8\not\equiv_5 0 \\ 8k-i+5\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k+2i+8)\not\equiv_5 0 \\ 18k+13-(8k-i+5)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 2i\not\equiv_5 0 \\ 2-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 5-2i\not\equiv_5 0 \\ 8+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k, aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

En résumé : pour $n = 18k + 13$

$n = 18k + 13$	$k\equiv_5 0$	$k\equiv_5 1$	$k\equiv_5 2$	$k\equiv_5 3$	$k\equiv_5 4$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	0	0	0	0	0
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	$\lfloor\frac{k}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$	0	$\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$	$2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k}{5}\rfloor$	$2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + 6\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k + 13$ - $(\lfloor\frac{k}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor\frac{k}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor) \times 5$	$18k + 13$ - 0 $+$ 0	$18k + 13$ - $(\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor) \times 6$ $+$ $(\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor) \times 5$	$18k + 13$ - $(2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k}{5}\rfloor) \times 6$ $+$ $(2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + \lfloor\frac{k}{5}\rfloor) \times 5$	$18k + 14$ - $(2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + 6\lfloor\frac{k}{5}\rfloor) \times 6$ $+$ $(2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor + 6\lfloor\frac{k}{5}\rfloor) \times 5$
(N/n) est majoré par	$\frac{88k+129}{90k+65}$	$--$	$\frac{89k+99}{90k+65}$	$\frac{87k+158}{90k+65}$	$\frac{82k+304}{90k+65}$
Pour $k \geq 100$	$N < (98.5\%)n$	$---$	$N < (99.3\%)n$	$N < (97.8\%)n$	$N < (93.9\%)n$

Dans le cas $n = 18k + 13$ et $k\equiv_5 1$ tous les 3-ensembles de base qui déterminent le $STS(n)$ de la construction de Peltesohne [Pel39] sont congrus à 0 modulo 4, et sont congrus à 0 modulo 5. On ne peut pas appliquer le théorème 7 dans ce cas pour obtenir une coloration cohérente du $STS(n)$ avec moins que n couleurs.

2.4 Cas où n=6p+3 avec p>0

Maintenant considérons les entiers n de la forme $n = 6p+3$. Pour leur attribuer un coloriage cohérent, nous reprendrons la décomposition en 3 cas utilisée dans le chapitre 2 pour la construction d'un $STS(n)$ cyclique :

1) $p = 3k$

2) $p = 3k + 1$

3) $p = 3k + 2$

2.4.1 Pour p=3k et k>0

Nous avons déjà montré au chapitre précédent que les p 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des p classes compatibles définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 8k+2i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 4k+2i+2) & \text{pour } 0 < i < k \quad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+2) & \text{pour } 0 \leq i < k \quad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 6k+1, 12k+2) & \end{cases}$$

Seuls les 3-ensembles de base $(0, a, b)$ de la troisième catégorie ont a non premier avec n, car $a = 3i + 3$ est multiple de 3 pour toutes les valeurs de i , dans cette catégorie $b = 6k + i +$ 2s, seul le tiers des valeurs prises par b sont multiples de 3 , donc il y a au plus $(\lfloor \frac{k}{3} \rfloor)$ 3-ensembles de base $(0, a, b)$ dans lesquels a et b ne sont pas premiers avec n et $(\lfloor \frac{k}{3} \rfloor) = (\lfloor \frac{n-3}{54} \rfloor)$.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+1, 8k+2i+2)$ **avec** $0 \leq i < k$

1) Si k pair

si $i \equiv_4 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_4 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 2+2i \not\equiv_4 0 \\ 1-i \not\equiv_4 0 \\ 3-(3i+1) \not\equiv_4 0 \\ 3-(1-i) \not\equiv_4 0 \\ 3-(2+2i) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \not\equiv_4 0 \\ 2 \not\equiv_4 0 \end{cases}$$

2) Si k impair

si $i \equiv_4 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_4 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_4 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_4 0 \\ 2+2i \not\equiv_4 0 \\ 1-i \not\equiv_4 0 \\ 3i \not\equiv_4 0 \\ i \not\equiv_4 0 \\ 3-2i \not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_4 0 \\ 2 \not\equiv_4 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

si $i \equiv_5 0$, 2 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

si i$\equiv_5 1$, 2 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 1-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

si i$\equiv_5 0$, 4 alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 8k+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+2\not\equiv_5 0 \\ 10k+2\not\equiv_5 0 \\ 10k+1\not\equiv_5 0 \end{cases} \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

si i$\equiv_5 1$, 4 alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 1+2i\not\equiv_5 0 \\ i\not\equiv_5 0 \\ 1-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+i\not\equiv_5 0 \\ 1-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i \equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ (3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ (3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si $i \equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 8k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+1-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+1-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(8k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4+2i\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ (3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ 4+2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 4k+2i+2)$ **avec** $0 \leq i < k$

Tous les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 4k+2i+2)$ avec $0 \leq i < k$ sont congru à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5$2 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si i$\equiv_5$3 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 4k+2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(4k+2+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor\frac{k}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 6k+i+2)$ **avec** $0 \leq i < k$

Tous les k 3-ensembles sont congru à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5$4 alors

a)si i$\equiv_5$0 alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+2+i\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i-1\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k-2i-1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k+2+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5$1 alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+2+i\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k-2i-1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k+2+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si i$\equiv_5$2 alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+2+i\not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k-2i-1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k+2+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si i$\equiv_5$3 alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 6k+2+i \not\equiv_5 0 \\ 6k-2i+1 \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k-2i-1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+3-(6k+2+i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \\ 3-2i \not\equiv_5 0 \\ 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 3-2i \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

En résumé : pour $n = 18k + 3$

$n = 18k+3$	$k \equiv_5 0$	$k \equiv_5 1$	$k \equiv_5 2$	$k \equiv_5 3$	$k \equiv_5 4$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$	$12\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k+3$ - $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ + $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor \times 4 + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$ + $\lfloor \frac{k}{20} \rfloor$	$18k+3$ - $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ + $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor \times 4 + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$ + $\lfloor \frac{k}{20} \rfloor$	$18k+3$ - $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ + $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor \times 4 + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$ + $\lfloor \frac{k}{20} \rfloor$	$18k+3$ - $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ + $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor \times 4 + \lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$ + $\lfloor \frac{k}{20} \rfloor$	$18k+3$ - $(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 12\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ + $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor \times 4 + 12\lfloor \frac{k}{5} \rfloor \times 5$ + $4\lfloor \frac{k}{20} \rfloor$
(N/n) est majoré par	$\frac{347k+320}{360k+60}$	$\frac{347k+320}{360k+60}$	$\frac{347k+320}{360k+60}$	$\frac{347k+320}{360k+60}$	$\frac{153k+820}{180k+30}$
Pour $k \geq 100$	$N < (97.2\%)n$	$N < (97.2\%)n$	$N < (97.2\%)n$	$N < (97.2\%)n$	$N < (0.90\%)n$

2.4.2 Pour p=3k+1 et k>3

Nous avons déjà montré que les p 3-ensembles ci-dessous sont les représentants des p classes compatibles définissant un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \le i < k+1 \quad \textit{première catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+4) & \text{pour } 2 \le i < k-1 \quad \textit{deuxième catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+4) & \text{pour } 1 \le i < k-1 \quad \textit{troisième catégorie} \\ (0, 6k+3, 12k+6) & \\ (0, 2, 8k+5) & \\ (0, 3, 8k+4) & \\ (0, 5, 8k+7) & \\ (0, 3k-1, 6k+1) & \\ (0, 3k, 10k+3) & \end{cases}$$

Seuls les 3-ensembles de base $(0, a, b)$ de la troisième catégorie ont a qui n'est premier avec n, car $a = 3i + 3$ est multiple de 3 pour toutes les valeurs de i , dans cette catégorie $b = 6k + i + 4$s, seul le tiers des valeurs prises par b sont multiples de 3 , donc il y a au plus $(\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor)$ 3-ensembles de base $(0, a, b)$ dans lesquels a et b ne sont pas premiers avec n et $(\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor) \le (\lfloor \frac{n-9}{54} \rfloor)$. Parmi les 6 3-ensembles $(0, 6k+3, 12k+6)$, $(0, 2, 8k+5)$, $(0, 3, 8k+4)$, $(0, 5, 8k+7)$, $(0, 3k-1, 6k+1)$, $(0, 3k, 10k+3)$ au plus 2 ont leurs éléments a et b non premiers avec n. On a donc au plus $(\lfloor \frac{n-3}{54} \rfloor) + 2$ 3-ensembles de base qui ont leurs éléments a et b non premiers avec n.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+1, 4k+2i+4)$ avec $0 \le i < k+1$.
Tous les k 3-ensembles $(0, 3i+1, 4k+2i+4)$ avec $0 \le i < k+1$ sont congrus à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

si i$\equiv_5$2 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ -i+3 \not\equiv_5 0 \\ 8-3i \not\equiv_5 0 \\ 6+i \not\equiv_5 0 \\ -2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 3+2i \not\equiv_5 0 \\ 2-i \not\equiv_5 0 \\ 1-3i \not\equiv_5 0 \\ i \not\equiv_5 0 \\ 4-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

a)si $i \equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 1-i \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

a)si $i \equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ i-3 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ i-3 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 8k+2i+4)$ **avec** $2 \leq i < k-1$

1) Si k pair

si $i \equiv_4 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 8k+4+2i\not\equiv_4 0 \\ 8k+2-i\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(3i+2)\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(8k+2-i)\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i)\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 2i\not\equiv_4 0 \\ 2-i\not\equiv_4 0 \\ 3-3i\not\equiv_4 0 \\ 3+i\not\equiv_4 0 \\ 1-2i\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_4 0 \\ 2\not\equiv_4 0 \end{cases}$$

2) Si k impair si $i\equiv_4 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 8k+4+2i\not\equiv_4 0 \\ 8k+2-i\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(3i+2)\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(8k+2-i)\not\equiv_4 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i)\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 2i\not\equiv_4 0 \\ 2-i\not\equiv_4 0 \\ 1-3i\not\equiv_4 0 \\ 1+i\not\equiv_4 0 \\ 3-2i\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_4 0 \\ 2\not\equiv_4 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+2 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k-i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ i \not\equiv_5 0 \\ 3i \not\equiv_5 0 \\ 2+i \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

a)si i$\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+2 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k-i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k-i+2 \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k-i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k-3}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k-3}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+4+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k-i+2\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k-i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(8k+4+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 1-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+i\not\equiv_5 0 \\ 2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor\frac{k-3}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor\frac{k-3}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 6k+i+4)$ **avec** $1 \leq i < k-1$

Tous les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 6k+i+4)$ avec $1 \leq i < k-1$ sont congrus à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

a)si i $\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+4+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+1-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+1-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+4+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+3i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i $\equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+4+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+1-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+1-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+4+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+3i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si i $\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+4+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+1-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+1-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+4+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+3i\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si i $\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 6k+4+i \not\equiv_5 0 \\ 6k+1-2i \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+1-2i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+9-(6k+4+i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+3i \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 2-3i \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor \frac{k-2}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor \frac{k-2}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

En résumé : pour $n = 18k + 9$

$n = 18k+9$	$k\equiv_5 0$	$k\equiv_5 1$	$k\equiv_5 2$	$k\equiv_5 3$	$k\equiv_5 4$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	$\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	$\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$	$\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + \lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + 2\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor + 4\lfloor \frac{k-2}{5} \rfloor$	$\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k+9$ - $(\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor \times 4$ $+$ $\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor \times 5$	$18k+9$ - $(\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + \lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor \times 4$ $+$ $(\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + \lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor) \times 5$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{20} \rfloor$	$18k+9$ - $(\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor) \times 6$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + 2\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor + 4\lfloor \frac{k-2}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor \times 4$ $+$ $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + 2\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor + 4\lfloor \frac{k-2}{5} \rfloor) \times 5$ $+$ $2\lfloor \frac{k-3}{20} \rfloor$	$8k+9$ - $(\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor \times 4$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor \times 5$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{20} \rfloor$	$18k+9$ - $(\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor) \times 6$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ $+$ $\lfloor \frac{k-3}{4} \rfloor \times 4$ $+$ $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor \times 5$
(N/n) est majooré par	$\frac{173k+223}{180k+90}$	$\frac{343k+499}{360k+180}$	$\frac{70k+338}{90k+45}$	$\frac{173k+223}{180k+90}$	$\frac{171k+291}{180k+90}$
Pour $k \geq 100$	$N < (96.9\%)n$	$N < (96\%)n$	$N < (81.2\%)n$	$N < (96.9\%)n$	$N < (96.2\%)n$

2.4.3 Pour p=3k+2 et k>0

Nous avons déjà montré que les $3k + 3$ 3-ensembles compatibles ci-dessous définissent un $STS(n)$ cyclique.

$$\begin{cases} (0, 3i+1, 4k+2i+4) & \text{pour } 0 \leq i < k+1 \qquad \textit{première} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+2, 8k+2i+8) & \text{pour } 0 \leq i < k+1 \qquad \textit{deuxième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 3i+3, 6k+i+6) & \text{pour } 0 \leq i < k \qquad \textit{troisième} \quad \textit{catégorie} \\ (0, 6k+5, 12k+10) & \end{cases}$$

Seuls les 3-ensembles de base $(0, a, b)$ de la troisième catégorie ont a non premier avec n, car $a = 3i + 3$ est multiple de 3 pour toutes les valeurs de i , dans cette catégorie $b = 6k + i + 6$s, seul le tiers des valeurs prises par b sont multiples de 3 , donc il y a au plus $(\lfloor \frac{k}{3} \rfloor)$ 3-ensembles de base $(0, a, b)$ dans lesquels a et b ne sont pas premiers avec n et $(\lfloor \frac{k}{3} \rfloor) = (\lfloor \frac{n-15}{54} \rfloor)$.

Parmi les k **3-ensembles** $(0, 3i + 1, 4k + 2i + 4)$ **avec** $0 \leq i < k + 1$
Tous les k 3-ensembles $(0, 3i + 1, 4k + 2i + 4)$ avec $0 \leq i < k + 1$ sont congrus à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors
a)si i$\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k+4+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3i\not\equiv_5 0 \\ 4+2i\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ 4-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+i\not\equiv_5 0 \\ 1-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b)si i$\equiv_5$1 alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k+4+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3i\not\equiv_5 0 \\ 4+2i\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ 4-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+i\not\equiv_5 0 \\ 1-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c)si i$\equiv_5$2 alors

$$\begin{cases} 3i+1\not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i\not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+1)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k-i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k+4+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3i\not\equiv_5 0 \\ 4+2i\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ 4-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+i\not\equiv_5 0 \\ 1-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d)si i$\equiv_5$4 alors

$$\begin{cases} 3i+1 \not\equiv_5 0 \\ 4k+4+2i \not\equiv_5 0 \\ 4k-i+3 \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+1) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k-i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(4k+4+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3i \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ 4-3i \not\equiv_5 0 \\ 2+i \not\equiv_5 0 \\ 1-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+2, 8k+2i+8)$ **avec** $2 \leq i < k-1$

1) Si k pair

si i$\equiv_4 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_4 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 2i\not\equiv_4 0 \\ 2-i\not\equiv_4 0 \\ 1-3i\not\equiv_4 0 \\ 1+i\not\equiv_4 0 \\ 3-2i\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_4 0 \\ 2\not\equiv_4 0 \end{cases}$$

2) Si k impair

si $i\equiv_4 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_4 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_4 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_4 0 \\ 2i\not\equiv_4 0 \\ 2-i\not\equiv_4 0 \\ 3-3i\not\equiv_4 0 \\ 3+i\not\equiv_4 0 \\ 1-2i\not\equiv_4 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_4 0 \\ 2\not\equiv_4 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 4. Par conséquent on peut colorier au moins $\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 4 couleurs d'aprés le théorème 7.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

a) si $i\equiv_5 0$, 2 , 3 , 4 alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c) si $i\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d) si $i\equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 3+2i\not\equiv_5 0 \\ 1-i\not\equiv_5 0 \\ 3-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $4\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $4\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

a) si $i\equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \\ 1-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 1+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \\ 1-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

a) si $i \equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ 2-i \not\equiv_5 0 \\ 4-3i \not\equiv_5 0 \\ 4+i \not\equiv_5 0 \\ 2-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i \equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 4+2i \not\equiv_5 0 \\ 2-i \not\equiv_5 0 \\ 4-3i \not\equiv_5 0 \\ 4+i \not\equiv_5 0 \\ 2-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

a) si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ -i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i\equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ -i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor\frac{k+1}{5}\rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

a) si $i\equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i\not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2\not\equiv_5 0 \\ 2i\not\equiv_5 0 \\ 3-i\not\equiv_5 0 \\ -3i\not\equiv_5 0 \\ 4+i\not\equiv_5 0 \\ 2-2i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i \equiv_5 4$ alors

$$\begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 8k+8+2i \not\equiv_5 0 \\ 8k+6-i \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+2) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+6-i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(8k+8+2i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+2 \not\equiv_5 0 \\ 2i \not\equiv_5 0 \\ 3-i \not\equiv_5 0 \\ -3i \not\equiv_5 0 \\ 4+i \not\equiv_5 0 \\ 2-2i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \not\equiv_5 0 \\ 3 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

Parmi les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 6k+i+6)$ **avec** $0 \leq i < k$

Tous les k 3-ensembles $(0, 3i+3, 6k+i+6)$ avec $0 \leq i < k$ sont congrus à 0 modulo 4.

Examinons la congruence modulo 5.

1) Si k $\equiv_5 0$ alors

a) si $i \equiv_5 0$ alors

$$\begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 6k+6+i \not\equiv_5 0 \\ 6k+3-2i \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+3) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+3-2i) \not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+6+i) \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3 \not\equiv_5 0 \\ 1+i \not\equiv_5 0 \\ 3-2i \not\equiv_5 0 \\ 2-3i \not\equiv_5 0 \\ 2+2i \not\equiv_5 0 \\ 4-i \not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \not\equiv_5 0 \\ 1 \not\equiv_5 0 \\ 2 \not\equiv_5 0 \\ 4 \not\equiv_5 0 \end{cases}$$

b) si $i \equiv_5 1$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+6+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+3-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+3-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+6+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

c) si $i \equiv_5 2$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+6+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+3-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+3-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+6+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \\ 2\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

d) si $i \equiv_5 3$ alors

$$\begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 6k+6+i\not\equiv_5 0 \\ 6k+3-2i\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(3i+3)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+3-2i)\not\equiv_5 0 \\ 18k+15-(6k+6+i)\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3i+3\not\equiv_5 0 \\ 1+i\not\equiv_5 0 \\ 3-2i\not\equiv_5 0 \\ 2-3i\not\equiv_5 0 \\ 2+2i\not\equiv_5 0 \\ 4-i\not\equiv_5 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\not\equiv_5 0 \\ 4\not\equiv_5 0 \\ 3\not\equiv_5 0 \\ 1\not\equiv_5 0 \end{cases}$$

Donc dans au moins $\lfloor \frac{k}{5} \rfloor$ 3-ensembles parmi les k , aucun élément n'est congru à 0 modulo 5. Par conséquent on peut colorier au moins $2\lfloor \frac{k-3}{5} \rfloor$ classes de 3-ensembles avec seulement 5 couleurs d'aprés le théorème 7.

2) Si k $\equiv_5 1$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

3) Si k $\equiv_5 2$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

4) Si k $\equiv_5 3$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

5) Si k $\equiv_5 4$ alors

Tous les 3-ensembles sont congrus à 0 modulo 5.

En résumé : pour $n = 18k + 15$

$n = 18k+15$	$k \equiv_5 0$	$k \equiv_5 1$	$k \equiv_5 2$	$k \equiv_5 3$	$k \equiv_5 4$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 4 couleurs	$\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor$
Nombre minimun de 3-ensembles coloriables avec 5 couleurs	$4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor + 8\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$	$2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor$
N Nombre de couleurs utilisées pour colorier tous les 3-ensembles du STS(n)	$18k+15$ - $(8\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + 4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 6$ + $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 4$ + $(8\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor + 4\lfloor \frac{k}{5} \rfloor) \times 5$ + $4\lfloor \frac{k+1}{20} \rfloor$	$18k+15$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 6$ + $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 4$ + $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 5$ + $2\lfloor \frac{k+1}{20} \rfloor$	$18k+15$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 6$ + $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 4$ + $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 5$ + $2\lfloor \frac{k+1}{20} \rfloor$	$18k+15$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 6$ + $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 4$ + $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 5$ + $2\lfloor \frac{k+1}{20} \rfloor$	$18k+15$ - $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 6$ - $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 6$ + $(\lfloor \frac{k+1}{4} \rfloor) \times 4$ + $(2\lfloor \frac{k+1}{5} \rfloor) \times 5$ + $2\lfloor \frac{k+1}{20} \rfloor$
(N/n) est majoré par	$\frac{153k+921}{180k+150}$	$\frac{86k+166}{90k+75}$	$\frac{86k+166}{90k+75}$	$\frac{86k+166}{90k+75}$	$\frac{86k+166}{90k+75}$
Pour $k \geq 100$	$N < (90\%)n$	$N < (96.6\%)n$	$N < (96.6\%)n$	$N < (96.6\%)n$	$N < (96.6\%)n$

2.5 Amélioration de la borne supérieure du nombre de couleurs pour le coloriage cohérent des STS(n) cycliques lorsque $n \equiv_5 0$

Lemme 6. *Si $n \equiv_5 0$ alors il suffit de $\lceil \frac{14n}{15} \rceil$ couleurs pour colorier de manière cohérente un $STS(n)$ cyclique.*

Preuve : Quand $n \equiv_5 0$ il y a $\frac{n}{5} - 1$ multiples de 5 non nuls.
Si a est multiple de 5 alors $(n-a)$ l'est aussi. Montrons que le groupe de 0 $G_{0,(0,a,b)}$ du 3-ensemble de base $(0,a,b)$ contient soit aucun multiple de 5, soit 2 multiple de 5 soit 6 multiples de 5.
Si un élément c de $\{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ est multiple de 5, on a $(n-c) \in \{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ et $(n-c)$ multiple de 5.
Sans perte de généralité supposons $c = a$ multiple de 5, si b est multiple de 5 alors $b-a$, $n-(b-a)$ et $(n-b)$ sont multiples de 5, tous les éléments de $\{a, b, b-a, n-a, n-b, a-b)\}$ sont alors multiples de 5.
On a bien ainsi aucun , deux ou six multiples de 5 dans tout $G_{0,(0,a,b)}$.

Si $n \equiv_6 1$ alors $\frac{n}{5} - 1$ est pair, un $STS(n)$ cyclique contient $\frac{n-1}{6}$ 3-ensembles génŕateurs tous deux á deux compatibles. En pire cas il y a $q = \frac{\frac{n}{5}-1}{2}$ 3-ensembles de base ayant un multiple de 5. Il reste $\frac{n-1}{6} - q$ 3-ensembles de base non congrus à 0 modulo 5, d'aprés le théroème 7 on peut colorier de manière cohérente ces $\frac{n-1}{6} - q$ avec $5(\frac{n-1}{6} - q)$ couleurs. Toutes les orbites du $STS(n)$ cyclique sont coloriables avec en tout au plus $5(\frac{n-1}{6} - q) + 6q + 1$ couleurs. Or $5(\frac{n-1}{6} - q) + 6q + 1 = (\frac{5(n-1)}{6} - 5q + 6q + 1) = (\frac{5(n-1)}{6} + q + 1) = (\frac{5(n-1)}{6} + \frac{n-5}{10} + 1) = \frac{14n-5}{15} \leq \lceil \frac{14n}{15} \rceil$.

Si $n \equiv_6 3$ alors $\frac{n}{5} - 1$ est pair, un $STS(n)$ cyclique contient le 3-ensemble $(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$ et $\frac{n-3}{6}$ 3-ensembles génŕateurs tous deux à deux compatibles. Le 3-ensemble $(0, \frac{n}{3}, \frac{2n}{3})$ contient 2 multiples de 5 car $\frac{n}{3}$ et $\frac{2n}{3}$ sont multiples de 5. En pire cas il y a $q = (\frac{\frac{n}{5}-1}{2} - 1)$ 3-ensembles générateurs ayant un multiple de 5. Il reste $\frac{n-3}{6} - q$ 3-ensembles de base non congrus à 0 modulo 5, d'aprés le théroème 7 on peut colorier de manière cohérente ces $\frac{n-3}{6} - q$ avec $5(\frac{n-3}{6} - q)$ couleurs, toutes les orbites du $STS(n)$ cyclique sont alors coloriables avec en tout au plus $5(\frac{n-3}{6} - q) + 6q + 1$ couleurs. Or $5(\frac{n-3}{6} - q) + 6q + 1 = (\frac{5(n-3)}{6} - 5q + 6q + 1) = (\frac{5(n-3)}{6} + q + 1) = (\frac{5(n-3)}{6} + \frac{n-5}{10}) = \frac{14n-45}{15} \leq \lceil \frac{14n}{15} \rceil$. **cqfd**

Dans ce chapitre, nous avons prouvé que les $STS(n)$ cycliques obtenus par la construction de Peltesohne [Pel39] sont coloriables avec seulement une fraction de n couleurs mis à part les deux cas où $n = 18k + 7$ et $k \equiv_5 3$, et où $n = 18k + 13$ et $k \equiv_5 1$, que tout $STS(n)$ cyclique est coloriable avec $\lceil \frac{14n}{15} \rceil$ lorsque $n \equiv_5 0$, que tout $STS(n)$ cyclique est coloriable avec $(n - 4)$ lorsque $n \equiv_9 0$.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS À LA RÉSOLUTION DES RESTRICTIONS $I_2(N)$ ET $I_3(N)$

L'objectif du présent chapitre est l'utilisation de la coloration d'un $STS(n)$ cyclique pour la résolution de la restriction $I_3(n)$ de la conjecture d'Erdős-Farber-Lovász dont le $STS(n)$ associé, défini ci-desous, est cyclique.

3.1 Système de Steiner S(2,k,n) associé à une restriction $I_k(n)$ donnée

Soit une restriction $I_k(n)$, nous avons alors n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que
i) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et
ii) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ et
iii) $\forall a \in \bigcup_{i\in[n]} E_i \quad |\{i : a \in E_i\}| \in \{1, k\}$

Toutes les intersections non vides sont des intersections entre k ensembles $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ où deux ensembles différents n'ont en commun qu'un élément.
Si à chaque intersection non vide de k ensembles $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ nous associons le k-ensemble $(l_0, l_1, ..., l_{(k-1)})$ nous obtenons un ensemble S de k-ensembles dans lesquels chaque paire n'apparaît qu'une seule fois, par conséquent nous avons un ensemble S de k-ensembles qui est un système de Steiner $S(2, k, n)$.

Définition 15. *Soit une restriction $I_k(n)$, le $S(2, k, n)$ obtenu comme décrit ci-dessus à partir de cette restriction $I_k(n)$ est dit système de Steiner $S(2, k, n)$ associé à cette restriction $I_k(n)$.*

Si nous pouvons construire une fonction φ de $E = \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \longrightarrow [n]$ dont les restrictions φ_i à $E_i \setminus Pp(E_i)$ soient injectives $\forall i \in [n]$, alors la conjecture serait

vérifiée pour $I_k(n)$ puisqu'il suffit d'attribuer aux éléments de $Pp(E_i)$ les couleurs manquantes pour obtenir une fonction φ_i bijective de E_i dans $[n]$.
En effet, un ajustement de φ rendant bijective la restriction de φ à $Pp(E_i)$ n'affecte pas l'injectivité de tout φ_j sur $E_j \setminus Pp(E_j)$ $\forall j \in [n]$.

On voit donc que toute la difficulté réside dans la coloration cohérente des éléments de $E_i \setminus Pp(E_i)$ c'est à dire des éléments appartenant aux intersections, de telle manière qu'aucun ensemble n'ait dans 2 intersections différentes 2 éléments ayant la même couleur, ce qui équivaut à la restriction de φ_i à $E_i \setminus Pp(E_i)$ injective. Si cette condition est réalisée , la coloration des parties propres c'est à dire la restriction de φ_i à $Pp(E_i)$ injective ne pose aucun problème puisqu'on peut aisément construire une injection entre 2 ensembles de même cardinalité sans avoir à tenir compte des éléments n'appartenant pas à $Pp(E_i)$. De ce fait la définition suivante découle naturellement.

Définition 16. *Les éléments de $E = \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i$ sont dits coloriables de façon cohérente avec m couleurs s'il existe une fonction ψ, $\psi : E \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} Pp(E_i) \longrightarrow [m]$ telle que $\forall i \in [n]$ la restriction ψ_i de ψ à $E_i \setminus Pp(E_i)$ soit injective.*

3.2 Cas de la restriction $I_2(n)$

La restriction $I_2(n)$ est définie par :
Soient n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que
1) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et
2) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ et
3) $\forall a \in \bigcup_{i\in[n]} E_i \quad |\{i : a \in E_i\}| \leq 2$

La restriction $I_2(n)$ vérifie la conjecture si $\exists \varphi : \bigcup_{i\in[n]} E_i \longrightarrow [n]$ une fonction telle que les n restrictions φ_i de φ à E_i soient bijectives.

Soit la fonction $\varphi : \bigcup_{i\in[n]} E_i \longrightarrow [n]$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = ((i+j) \mod n) & si \quad x \in (E_i \cap E_j) \quad et \quad i \neq j \\ \varphi(x) = ((i+i) \mod n) & si \quad x \in Pp(E_i) \end{cases}$$

φ est bien définie car tout élément reçoit une seule couleur.

La restriction φ_i de φ à E_i est définie par $\begin{cases} \varphi_i(x) = ((i+j) \mod n) & si \quad x \in E_j \quad avec \quad i \neq j \\ \varphi_i(x) = ((i+i) \mod n) & sinon \end{cases}$

Montrons que $\varphi_i : E_i \longrightarrow [n]$ est une bijection.

Exemple pour $n = 13$: l'attribution d'une couleur à tous les éléments de $\bigcup_{i\in[13]} E_i$ peut se faire dans le tableau suivant où chaque case représente un élément colorié avec la couleur indiquée dans la case.

$\cap$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
E_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E_1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
E_2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
E_3				6	7	8	9	10	11	12	0	1	2
E_4					8	9	10	11	12	0	1	2	3
E_5						10	11	12	0	1	2	3	4
E_6							12	0	1	2	3	4	5
E_7								1	2	3	4	5	6
E_8									3	4	5	6	7
E_9										5	6	7	8
E_{10}											7	8	9
E_{11}												9	10
E_{12}													11

$\varphi_i(x) = \varphi_i(x') \Longrightarrow (i+j) \mod n = (i+j') \mod n \Longrightarrow j \mod n = j' \mod n \Longrightarrow$ $j = j'$ car $0 \leq j, j' < n$. Donc φ_i est injective $\forall i \in [n]$
Comme $|E_i| = |[n]| = n$ donc φ_i est surjective et par conséquent bijective.

Nous avons pu construire une fonction $\varphi : \bigcup_{i\in[n]} E_i \longrightarrow [n]$ dont les restrictions φ_i de φ à E_i sont bijectives $\forall i \in [n]$. Par conséquent la conjecture est vérifiée pour la restriction $I_2(n)$.

Remarque : La fonction $\varphi(x) = ((i+j) \mod n)$ si $x \in (E_i \cap E_j)$ définie ci-dessus pour prouver la restriction $I_2(n)$ ne permet donc pas de colorier les éléments appartenant exclusivement aux intersections avec moins de n couleurs. Mais on peut dans le cas de $I_2(4)$, dans le schéma ci-dessous, colorier ces éléments avec seulement 3 couleurs :

$\cap$	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0		2	1	3
E_1			3	1
E_2				2
E_3				

Il est clair que cette stratégie est optimale car il faut au moins $(n-1)$ couleurs pour colorier de manière cohérente tous les éléments n'appartenant pas à la réunion des parties propres $\bigcup_{i\in[n]} Pp(E_i)$. Mais la restriction φ_i de φ à E_i définie par $\varphi_i(x) = ((i+j) \mod (n-1))$ si $i \neq j$ n'est pas injective.

3.3 Cas de la restriction $I_3(n)$

La restriction $I_3(n)$ est définie par :

Soient n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que

1) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et

2) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ et

3) $\forall a \in \bigcup_{i \in [n]} E_i \quad |\{i : a \in E_i\}| \in \{1, 3\}$

La restriction $I_3(n)$ vérifie la conjecture si $\exists \varphi : \bigcup_{i \in [n]} E_i \longrightarrow [n]$ une fonction telle que les n restrictions φ_i de φ à E_i soient bijectives.

Dans le cas de la restriction $I_3(n)$, on ne connaît pas de fonction explicite φ qui vérifie les conditions de la conjecture. On construit la fonction φ en utilisant les systèmes triples de Steiner.

Exemple : Pour $n = 13$, construisons à partir du tableau précédent de même taille qui résoud $I_2(13)$ un tableau qui résoud $I_3(13)$. Lorsqu'on essaie de remplir correctement ce tableau de manière à résoudre $I_3(13)$, on ne peut le faire qu'en réalisant un $STS(13)$. Et tout $STS(13)$ permet de construire le tableau convenablement. C'est cela qui nous avait amené à l'étude des $STS(n)$.

Le tableau suivant est construit à partir du $STS(13)$ cyclique dont les orbites qui le génèrent sont $\overbrace{(0, 1, 4)}$ et $\overbrace{(0, 2, 7)}$.

⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3
⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢	⌢
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6
⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣	⌣
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Nous plaçons dans le tableau ci-dessus la couleur attribuée à chaque 3-ensemble, par exemple au 3-ensemble $(0,1,4)$ on attribue la couleur 1.

$\cap$	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}
E_0		1	14	13	1	25	20	14	20	10	10	25	13
E_1			2	15	1	2	26	21	15	21	11	11	26
E_2				3	16	2	3	14	22	16	22	12	12
E_3					4	17	3	4	15	23	17	23	13
E_4						5	18	4	5	16	24	18	24
E_5							6	19	5	6	17	25	19
E_6								7	20	6	7	18	26
E_7									8	21	7	8	19
E_8										9	22	8	9
E_9											10	23	9
E_{10}												11	24
E_{11}													12
E_{12}													

Lemme 7. $\forall k \in [n]$ *un système de Steiner* $(2, k, n)$ *existe si seulement si une restriction* $I_k(n)$ *existe.*

Preuve : Soit un système de Steiner $S(2, k, n)$, il est formé de k-ensembles dans lesquels toute paire apparaît une seule fois. Si au k-ensemble $(l_1, l_2, ..., l_{(k-1)})$ on associe l'intersection des k ensembles $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ dans laquelle nous mettons à chaque fois un singleton différent nous obtenons n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ vérifiant :

i') $|E_i| = \frac{(n-1)}{(k-1)}$ $\forall i \in [n]$ et

ii') $|E_i \cap E_j| = 1$ $\forall i \neq j \in [n]$ et

iii') $\forall a \in \bigcup_{i\in[n]} E_i$ $|\{i : a \in E_i\}| = k$

Ajoutons dans la partie propre $Pp(E_i)$ de chacun des E_i $(n - \frac{(n-1)}{(k-1)})$ éléments , tous différents , nous obtenons alors n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ vérifiant :

iv) $|E_i| = n$ $\forall i \in [n]$ et

v) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ et

vi) $\forall a \in \bigcup_{i\in[n]} E_i \quad |\{i : a \in E_i\}| \in \{1, k\}$.

On a donc n ensembles vérifiant la restriction $I_k(n)$.

Réciproque : Si une restriction $I_k(n)$ existe alors nous avons n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que

i) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et

ii) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$ et

iii) $\forall a \in \bigcup_{i\in[n]} E_i \quad |\{i : a \in E_i\}| \in \{1, k\}$

Toutes les intersections non vides sont des intersections de k ensembles $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ où deux ensembles différents n'ont en commun qu'un singleton.

Si à $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ nous associons le k-ensemble $(l_0, l_1, ..., l_{(k-1)})$ nous obtenons un ensemble S de k-ensembles dans lesquels chaque paire n'apparaît qu'une seule fois, par conséquent nous avons un ensemble S de k-ensembles qui est un système de Steiner $S(2, k, n)$. **cqfd**

Théorème 9. *Toute restriction $I_k(n)$, dont le $S(2, k, n)$ associé est cyclique, vérifie la conjecture de Erdős-Farber-Lovász.*

Preuve : Soit une restriction $I_k(n)$ dont le $S(2, k, n)$ associé est cyclique. Le $S(2, k, n)$ associé est obtenu en associant à chaque intersection de k ensembles $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ de $I_k(n)$ le k-ensemble $(l_0, ., ., ., l_{k-1})$, nous obtenons ainsi un ensemble S de k-ensembles dans lesquels chaque paire n'apparaît qu'une seule fois, par conséquent nous avons un ensemble S de k-ensembles qui est un système de Steiner $S(2, k, n)$. Par hypothèse il est cyclique.

Nous savons d'après le chapitre 3 que nous pouvons colorier de manière cohérente tous les k-ensembles de ce $S(2, k, n)$ avec au plus n couleurs. À tout k-ensemble $(l_0, ., ., ., l_{k-1})$ de ce $S(2, k, n)$ cyclique nous pouvons associer une couleurs $c \in [n]$ de telle façon que le $S(2, k, n)$ soit colorié de manière cohérente.

Associons maintenant à l'intersection $\bigcap_{i\in[k]} E_{l_i}$ de $I_k(n)$ la couleur $c \in [n]$ précédemment attribuée au k-ensemble $(l_0, ., ., ., l_{k-1})$. De cette façon toutes les intersections seront coloriées et aucun ensemble n'aura deux fois la même couleur. Pour un ensemble donné E_i tous ses éléments n'appartenant pas à sa partie propre $Pp(E_i)$ ont des couleurs différentes. Il existe donc une fonction φ de $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} Pp(E_i)$ dans $[n]$ dont la restriction φ_i à $E_i \setminus Pp(E_i)$ est une injection de $E_i \setminus Pp(E_i)$ dans $[n]$ pour tout $i \in [n]$.
Pour satisfaire à la conjecture de Erdős-Farber-Lovász, il suffit de placer dans la partie propre $Pp(E_i)$ les couleurs appartenant à l'ensemble $\{[n] \setminus Im(\varphi_i)\}$. **cqfd**

Corollaire 9.1. *Tout restriction $I_3(n)$, dont le $STS(n)$ associé est cyclique, vérifie la conjecture de Erdős-Farber-Lovász.*

Soient n ensembles $\{E_i\}_0^{n-1}$ tels que
i) $|E_i| = n \quad \forall i \in [n]$ et
ii) $|E_i \cap E_j| = 1 \quad \forall i \neq j \in [n]$
c'est à dire vérifiant les conditions de la conjecture d'Erdös-Farber-Lovász.
Notons Δ_i le nombre d'intersections non vides de plus de deux ensembles auxquelles participe l'ensemble E_i. Soit $\Delta = \{max(\Delta_i)\}_0^{n-1}$. Soit F l'ensemble des éléments de $\{\bigcup E_i\}_0^{n-1}$ appartenant à des intersections de plus de deux ensembles.
Dans le cas particulier où $\Delta \leq 3$ et où tous les éléments de F sont coloriables de manière cohérente avec Δ couleurs **Jackson, Sethuraman** et **Whitehead [12]** ont démontré que la conjecture d'Erdös-Farber-Lovász est vérifiée. Leur preuve a été faite en utilisant les hypergraphes.

Un hypergraphe H sur un ensemble $V(H) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est une famille $E(H) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ de sous-ensembles non vides de $V(H)$ tels que $\bigcup_{i=1}^{m} e_i = V(H)$. Les éléments de $V(H)$ sont appelés les sommets et les éléments de $E(H)$ les arêtes de

H. Un hypergraphe peut être défini par sa matrice d'incidence $A(H) = [a_{ij}]$ dans laquelle les rangées sont représentées par les sommets v_1, v_2,...,v_n et les colonnes représentées par les arêtes e_1, e_2, ...,e_m et où $a_{ij} = 1$ si $v_i \in e_j$ et $a_{ij} = 0$ sinon.
Un hypergraphe H est dit linéaire si deux arêtes quelconques de H s'intersectent en au plus un sommet et dit sans boucle si la taille de toute arête est supérieure à 1. Une coloration cohérente avec q couleurs des arêtes de H est une coloration des arêtes de H avec q couleurs de telle manière que deux arêtes ayant une intersection non vide aient deux couleurs différentes. Si on note Δ_H le degré maximum de H, la conjecture d'Erdös-Farber-Lovász est équivalente à dire que l'ensemble des arêtes de tout hypergraphe linéaire sans boucle de n sommets est coloriable de manière cohérente avec n couleurs. Jackson, Sethuraman et Whitehead [JSW03] ont démontré que la conjecture d'Erdös-Farber-Lovász est vérifiée lorsque l'hypergraphe partiel S de H déterminé par les arêtes de taille au moins 3 est coloriable de manière cohérente avec Δ_S couleurs et que $\Delta_S \leq 3$.

3.4 Systèmes triples de Steiner non isomorphes

Définition 17. *Deux systèmes de Steiner $S_1(2,k,n)$ et $S_2(2,k,n)$ sont dits isomorphes s'il existe une permutation σ_n des éléments de $[n]$ qui permet d'obtenir $S_2(2,k,n)$ à partir de $S_1(2,k,n)$, c'est à dire si σ_n préserve les triplets ,* **i.e.** *si $\{(\sigma_n(x), \sigma_n(y), \sigma_n(z)) | (x,y,z) \in S_1(2,k,n)\} = S_2(2,k,n)$. Si une telle permutation σ_n n'existe pas, les systèmes de Steiner $S_1(2,k,n)$ et $S_2(2,k,n)$ sont dits non isomorphes.*

Pour savoir si deux systèmes de Steiner sont isomorphes, il suffit de vérifier si chaque permutation de $[n]$ est un isomorphisme. En pire cas, il faut faire par cette approche $n!$ vérifications, ce qui demande un temps exponentiel.
Dans le livre de C.C. Lindner et A. Rosa [LR80], nous pouvons voir que le nombre de $STS(n)$ non isomorphes pour une valeur de n donnée croît très vite. Le tableau

suivant extrait des pages 347-348 de [LR80] permet de se faire une idée.

n	Nombre de $STS(n)$ non isomorphes
15	$= 80$
19	> 284406
21	> 2160979
25	$\geq 10^{14}$

Il n'est donc pas possible de réaliser une coloration cohérente de tous les $STS(n)$ en un temps raisonnable dés que n dépasse les petites valeurs.

Soit $S(2,k,n)$ un système de Steiner, $S(2,k,n)$ est un ensemble de $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$ k-ensembles que nous noterons $\{t_j\}_{j=0}^{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}-1}$ dans lesquels chaque paire ne se retrouve qu'une seule fois. Associons à $S(2,k,n)$ le graphe bipartite $G(S,A)$ où $S = [n] \cup \{t_j\}_{j=0}^{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}-1}$ et où $a_{ij} \in A$ ssi $i \in t_j$. Les arêtes $a_{ij} \in A$ relient les éléments de $[n]$ aux éléments de $\{t_j\}_{j=0}^{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}-1}$.
Chaque élément de $[n]$ est de degré $\frac{(k-1)}{(n-1)}$ car il appartient à $\frac{(k-1)}{(n-1)}$ k-ensembles, et chaque élément de $\{t_j\}_{j=0}^{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}-1}$ est de degré k car à chaque k-ensemble appartiennent k éléments.
Le graphe $G(S,A)$ ainsi défini représente le système de Steiner $S(2,k,n)$. Ainsi deux systèmes de Steiner sont isomorphes si et seulement si les graphes qui leur sont associés le sont aussi. La définition d'un tel graphe représentant un $S(2,k,n)$ se fait en temps polynomial, car on définit un nombre polynômial de sommets et d'arêtes. Donc le problème de décider si deux systèmes de Steiner $S_1(2,k,n)$ et $S_2(2,k,n)$ sont isomorphes est réductible en temps polynomial au problème de décider si les graphes qui leurs sont associés sont isomorphes. Ce qui nous renseigne sur la complexité du problème des isomorphises des systèmes de Steiner puisque la complexité du problème des isomorphismes de graphes est encore non résolue.

Chaque $S(2,k,n)$ possède $n!-1$ autres systèmes de Steiner qui lui sont isomorphes. Il est évident que la coloration cohérente de l'un de ces $n!$ $S(2,k,n)$ permet la coloration cohérente des $n!-1$ autres. Mais nous ne savons colorier de manière cohérente avec n couleurs ou moins que les $S(2,k,n)$ cycliques. On ne sait pas colorier même avec n couleurs un $S(2,k,n)$ non cyclique de manière cohérente s'il n'est pas isomorphe à un $S(2,k,n)$ cyclique.
Or, la résolution de la conjecture Erdős-Farber-Lovász inclut la coloration cohérente des systèmes de Steiner puisque les restrictions $I_k(n)$ génerent des systèmes $S(2,k,n)$ et inversement. En constatant la difficulté de la coloration cohérente des $S(2,k,n)$ et notamment des $STS(n)$, nous saisissons mieux la difficulté de cette conjecture.

CONCLUSION

Nous avons établi dans ce mémoire qu'il est possible d'obtenir des bornes supérieures non triviales pour la coloration de certains $STS(n)$ cycliques inférieures à une fraction de n dans la plupart des cas, ce qui permet de prouver la conjecture de Erdős-Farber-Lovász pour la restriction $I_3(n)$ dont le $STS(n)$ associé est cyclique. Jusque là, la borne inféreure du nombre de couleurs nécessaires pour colorier un système de Steiner cyclique était n.

L'étude des restrictions $I_k(n)$ se réduit à celle des systèmes de Steiner $S(2,k,n)$. Nous avons prouvé que les $STS(n)$ cycliques obtenus par la construction de Peltesohne [Pel39] sont coloriables avec seulement une fraction de n couleurs mis à part les deux cas où $n = 18k + 7$ et $k \equiv_5 3$, et où $n = 18k + 13$ et $k \equiv_5 1$, que tout $STS(n)$ cyclique est coloriable avec $\lceil \frac{14n}{15} \rceil$ lorsque $n \equiv_5 0$, que tout $STS(n)$ cyclique est coloriable avec $(n-4)$ lorsque $n \equiv_9 0$.

Intuitivement, on perçoit à travers la simple preuve de la restriction $I_2(n)$ que le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les points d'intersections des ensembles utilisés dans l'énoncé ensembliste de la conjecture, est toujours inférieure ou égale à n puisqu'il vaut au plus n dans le cas $I_2(n)$ où le nombre d'intersections est maximal.

Nous avons volontairement évité de flirter avec l'infini pour des raisons évidentes d'utilité pratique, mais Pippenger et Spencer [PS89] ont montré par une preuve probabiliste que pour n suffisamment grand $\frac{n}{2} + o(n)$ couleurs suffisent pour colorier de manière cohérente un $STS(n)$ cyclique. L'approche que nous avons adoptée est nouvelle, elle a permis l'obtention de résultats qui constituent un progrés. Elle est aisément généralisable aux constructions qui à l'avenir seront trouvées. Un autre apport de cette approche est que les triplets d'un $STS(n)$ en particulier et les k-uplets d'un système de Steiner en général peuvent être vus comme des objets à part entière ayant des propriétés intrinsèques, comme la congruence qui a été définie.

Il va sans dire que nous n'avons traité qu'un bout de la pointe de l'iceberg, car les restrictions $I_k(n)$ ne représentent qu'une toute petite partie des variantes possibles de la conjecture.

BIBLIOGRAPHIE

[BJL86] Th. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz. *Design Theory.* Wissenchaft Verlag, 1986.

[Bos39] R.C. Bose. On the construction of balanced incomplete block designs. *Ann. Eugenics*, IX :353–399, 1939.

[Bro41] R.L. Brooks. On coloring the nodes of a network. proc. *Cambridge Philo. Soc.*, 37 :194–197, 1941.

[CC82] C.J. Colburn and M.J. Colburn. The chromatic index of cyclic steiner 2-designs. *Internat. J. Math. and Math. sci. Vol.5*, IV :823–825, 1982.

[CM80] M.J. Colburn and A. Marthon. Annals of discrete mathematics. *Annals of discrete mathematics*, VII :215–253, 1980.

[CR99] C.J. Colburn and A. Rosa. *Triples Systems.* Oxford science publication, 1999.

[Han60] H. Hannani. A note on steiner triple systems. *Math. Scand.*, VIII :154–156, 1960.

[Han61] H. Hannani. The existence and construction of balanced incomplete blocks designs. *Anna. Math. Statist.*, 32 :361–386, 1961.

[Hef97] L. Heffter. Ueber triplelsysteme. *Math. Annalen*, 49 :101–102, 1897.

[Hin81] N. Hindman. On a conjecture of erdos, farber and lovász about n-colorings. *Canadian J. Math*, 33 :563–570, 1981.

[HT90] P. Horak and Z. Tuza. A coloring problem related to the erdös-farber-lovàsz conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, 50 :321–322, 1990.

[JSW03] B. Jackson, G. Sethuraman, and C. Whitehead. A note on the erdös-farber-lovàsz conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, preprint, 2003.

[LR80] C.C. Lindner and A. Rosa. *Annals of discrete Mathematics 7, Topics on Steiner System.* North-Holland Publishing Company, 1980.

[MNR] M. Meszka, R. Nedela, and A. Rosa. Circulants and the chromatic index of steiner triple systems. *preprint.*

[Moo93] E.H. Moore. Concerning triple systems. *Math. Ann.*, 42 :271–285, 1893.

[Net93] E. Netto. Zur theorie der tripelsysteme. *Math. Ann.*, 43 :143–153, 1893.

[Pel39] R. Peltesohne. Eine lösung der beiden heffterschen differenzenprobleme. *Compositio Math.*, VI :251–257, 1939.

[PS89] N. Pippenger and J. Spencer. Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs. *J. Combi. Theory*, 51 :24–42, 1989.

[Sko58] T. Skolem. Some remarks on the triple systems of steiner. *Math. Scand.*, 6 :273–280, 1958.

[Tom85] I. Tomascu. *Problems in combinatorics and graph theory.* Wiley interscience, Series in discrete Mathematics, 1985.