

Université de Montréal

Heuristique basée sur des méthodes de montée duale et de voisinage variable
pour la résolution d'un problème de localisation dans un système de distribution

par

Imen Temimi

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en informatique

juin 2005

©Imen Temimi, 2005

11634100



QA

76

U54

2005

V.043



AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Heuristique basée sur des méthodes de montée duale et de voisinage variable
pour la résolution d'un problème de localisation dans un système de distribution**

présenté par:

Imen Temimi

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Jean-Yves Potvin

(président-rapporteur)

Bernard Gendron

(directeur de recherche)

Jacques Ferland

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

3 août 2005

Sommaire

Nous étudions dans ce mémoire un système de distribution composé de centrales qui représentent des centres de tri de produits. Ces produits, une fois triés, sont acheminés vers des plates-formes. À chaque plate-forme est associé un ensemble de satellites qui permettent d'acheminer les produits vers les clients. Chaque satellite doit être approvisionné depuis une unique plate-forme, qui doit elle-même être approvisionnée depuis une unique centrale. Nous signalons que ce problème est dérivé d'une application réelle d'un système de distribution adaptatif (modifiable suivant la variation des demandes).

Dans ce système de distribution, nous étudions le problème consistant à minimiser les dépenses liées au fonctionnement des plates-formes et des satellites, ainsi que tous les coûts de transport pour approvisionner les plates-formes, les satellites et les clients. Une caractéristique de ce problème est la formulation des coûts de transport, qui sont définis en fonction du *nombre de véhicules* qui acheminent les produits, contrairement à ce que nous retrouvons dans la majorité des problèmes de localisation, où la structure des coûts de transport est linéaire et donnée en fonction du *nombre de produits*. Une partie de l'originalité du problème consiste dans sa structure hiérarchique, puisqu'il s'agit d'un système de distribution à trois niveaux, alors que dans la plupart des problèmes de localisation, le plus souvent il n'y a qu'un seul niveau. La difficulté du problème réside également dans la grande taille des applications réelles. Par exemple, dans le cas de l'application réelle qui est à l'origine de notre étude, il y a deux centrales, 93 plates-formes, 320 satellites et 722 clients, ce qui engendre 458014 liaisons possibles entre les centrales et les clients.

La complexité du problème et la grande taille des applications réelles nous conduisent à adopter une approche heuristique pour sa résolution. Nous proposons dans ce travail une approche en trois phases. Dans un premier temps, nous traitons une relaxation du problème par une méthode de montée duale, qui utilise les conditions des écarts complémentaires pour générer des solutions réalisables. Cette méthode permet également de calculer une borne inférieure sur la valeur optimale du problème. À partir de la meilleure solution réalisable obtenue par la méthode de montée duale, nous appliquons une phase d'amélioration locale qui procède en fermant successivement des satellites et des plates-formes, et en réévaluant à chaque fois une nouvelle solution par un appel à la méthode de montée duale. Finalement, nous appliquons une méthode de descente à voisinage variable afin de s'approcher davantage d'une solution optimale.

Nous constatons que l'amélioration locale et la descente à voisinage variable sont des phases importantes pour la détermination d'une bonne solution réalisable. Ainsi, la solution réalisable initiale calculée à la fin de la première phase est à 145.7% de la borne inférieure. L'exécution de la phase d'amélioration locale apporte un gain de 27.1%, alors que la descente à voisinage variable fournit un gain additionnel de 13.8%.

Mots clés : Problème de localisation, montée duale, amélioration locale, descente à voisinage variable.

Abstract

We study in this Thesis a distribution system composed of hubs which represent facilities where products are sorted. These products, once sorted, are delivered to depots. To each depot, a set of satellites is associated, from where the products are finally delivered to the customers. Each satellite must be supplied from a single depot, which must be supplied from a single hub. This problem is derived from a real application from an adaptive distribution system, for which the network configuration varies over time according to variations in the demands.

We study the problem that consists in minimizing the total costs which include the costs of operation at the depots and at the satellites, as well as the transportation costs to supply depots, satellites and customers. This problem is characterized by the structure of the transportation costs, which depend on the number of vehicles used to transport the products, contrary to what is found in most location problems encountered in the literature, where the structure of the transportation costs is a linear function of the number of product units. The hierarchical structure of the problem also contributes to its originality, since it is a three-level distribution system, whereas in most location problems, generally there is only one level. The problem is difficult because of the large size of the real applications. For example, in the case of the real application used in our study, there are two hubs, 93 depots, 320 satellites and 722 customers, which generate 458014 possible connections between the hubs and the customers.

The problem complexity and the large size of the real applications lead us to adopt a heuristic approach to solve it. We propose a heuristic method that

proceeds in three phases. Initially, we solve a relaxation of the problem by a dual-ascent method, which makes use of complementary slackness conditions to generate feasible solutions. This method also allows the computation of a lower bound on the optimal value of the problem. Using the best feasible solution obtained by the dual-ascent method, we apply a local improvement phase which proceeds by successively closing satellites and depots, each time reevaluating a new solution by calling the dual-ascent method. Finally, we apply a variable neighborhood descent method to get closer to an optimal solution.

Our experiments show that the local improvement and the variable neighborhood descent are important to obtain good feasible solutions. The initial feasible solution obtained at the end of the first phase is at 145.7% of the lower bound. The local improvement method improves upon this initial feasible solution by 27.1%, whereas the variable neighborhood descent method provides an additional improvement of 13.8%.

Key words : Location problem, dual-ascent, local improvement, variable neighborhood descent.

Table des matières

Sommaire	iv
Abstract	vi
Table des matières	viii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xii
Remerciements	xiii
Chapitre 1	
Introduction	1
Chapitre 2	
Revue de la littérature	4
2.1 Problèmes de localisation	4
2.2 Métaheuristiques à base de voisinages	6
Chapitre 3	
Modélisation	11
3.1 Modèle à quatre indices ($M4$)	12
3.2 Relaxation à quatre indices ($R4$)	19

3.3	Relaxation simplifiée à quatre indices (<i>R4S</i>)	20
3.4	Relaxation à deux indices (<i>R2</i>)	22

Chapitre 4

	Méthode de résolution	26
4.1	Montée duale	27
4.1.1	Procédure de montée duale	27
4.1.2	Procédure d'ajustement primal-dual	29
4.1.3	Calcul d'une solution réalisable initiale	32
4.2	Méthode d'amélioration locale	33
4.2.1	Principe	33
4.2.2	Stratégie d'amélioration locale	34
4.3	Méthode de descente à voisinage variable	37
4.3.1	Structure et exploration des voisinages	37
4.3.2	Évaluation des voisinages	38

Chapitre 5

	Implémentation et analyse des résultats	41
5.1	Calibrage des paramètres	42
5.2	Comparaison des méthodes	46
	Conclusion	49
	Bibliographie	51
	ANNEXE A	54

Liste des figures

1.1	Système de distribution à trois niveaux	2
3.1	Déplacement des véhicules du chemin (h', i', j) vers le chemin (h, i, j)	21
3.2	Exemple de dominance de la relaxation continue	24
4.1	Échange de l'arc entre un satellite et un client	38
4.2	Échange de l'arc entre une plate-forme et un satellite	39
5.1	Evolution de l'objectif en fonction de la phase III pour $\epsilon = 1.9$	46

Liste des tableaux

5.1	Comparaison des différentes phases de l'heuristique	43
5.2	Comparaison en fonction des phases pour $\epsilon = 1.9$	45
5.3	Comparaison des modèles simplifiés et de leurs relaxations continues	47

Remerciements

Je remercie mon directeur, monsieur Bernard Gendron, pour son aide, ses conseils judicieux et son soutien financier tout au long du processus ayant mené à la réalisation de ce mémoire. Je voudrais le remercier aussi pour m'avoir fait bénéficier de son expérience dans le domaine de l'optimisation des modèles de programmation en nombres entiers. J'aimerais également remercier monsieur Frédéric Semet, pour ses conseils et son aide. Un merci aussi au personnel du Centre de recherche sur les transports, pour l'aide technique fournie pour élaborer ce travail.

Je profite de cette occasion pour présenter mes compliments à ma famille pour son soutien, son encouragement et son réconfort.

Chapitre 1

Introduction

Le développement des technologies de l'information permet la mise en place de nouvelles approches pour l'installation des lieux d'entreposage et des points de livraison, et pour la gestion de l'acheminement des produits dans les systèmes de distribution. Dans le but d'optimiser un système de distribution, divers facteurs sont considérés, notamment le volume, la fiabilité, le délai de livraison, la distance franchie pour atteindre le consommateur et le coût d'entreposage.

Nous étudions dans ce mémoire un système de distribution composé de centrales qui représentent des centres de tri de produits. Ces produits, une fois triés, sont acheminés vers des plates-formes. À chaque plate-forme est associé un ensemble de satellites qui permettent d'acheminer les produits vers les clients. Chaque satellite doit être approvisionné depuis une unique plate-forme, qui doit elle-même être approvisionnée depuis une unique centrale. Nous signalons que ce problème est dérivé d'une application réelle d'un système de distribution adaptatif (modifiable suivant la variation des demandes) [7]. Nous illustrons ce système de distribution à trois niveaux à la figure 1.1.

Dans ce système de distribution, nous étudions le problème consistant à minimiser les dépenses liées au fonctionnement des plates-formes et des satellites, ainsi que tous les coûts de transport pour approvisionner les plates-formes, les satellites et les clients. Une caractéristique de ce problème est la formulation des coûts de transport, qui sont définis en fonction du *nombre de véhicules* qui acheminent les

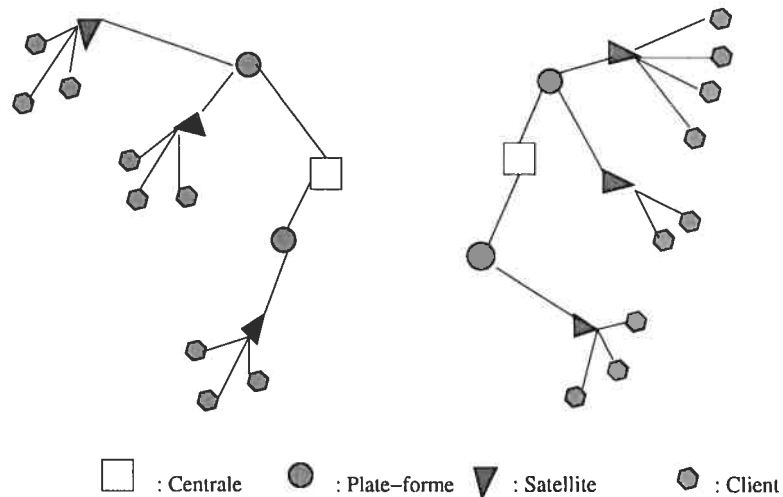


FIG. 1.1 – Système de distribution à trois niveaux

produits, contrairement à ce que nous retrouvons dans la majorité des problèmes de localisation, où la structure des coûts de transport est linéaire et donnée en fonction du *nombre de produits*. Une partie de l'originalité du problème consiste dans sa structure hiérarchique, puisqu'il s'agit d'un système de distribution à trois niveaux, alors que dans la plupart des problèmes de localisation, le plus souvent, il n'y a qu'un seul niveau. La difficulté du problème réside également dans la grande taille des applications réelles. Par exemple, dans le cas de l'application réelle qui est à l'origine de notre étude (présentée pour la première fois dans [7]), il y a deux centrales, 93 plates-formes, 320 satellites et 722 clients, ce qui engendre 458014 liaisons possibles entre les centrales et les clients.

La complexité du problème et la grande taille des applications réelles nous conduisent à adopter une approche heuristique pour sa résolution. Nous proposons dans ce travail une approche en trois phases. Dans un premier temps, nous traitons une relaxation du problème par une méthode de montée duale [4], qui utilise les conditions des écarts complémentaires pour générer des solutions réalisables. Cette méthode permet également de calculer une borne inférieure sur la valeur optimale du problème. A partir de la meilleure solution réalisable obtenue par

la méthode de montée duale, nous appliquons une phase d'amélioration locale qui procède en fermant successivement des satellites et des plates-formes, et en réévaluant à chaque fois une nouvelle solution par un appel à la méthode de montée duale. Finalement, nous appliquons une méthode de descente à voisinage variable afin de s'approcher davantage d'une solution optimale.

Le mémoire est structuré de la façon suivante. Nous débutons, dans le prochain chapitre, par une revue de la littérature portant sur les problèmes de localisation, de même que sur les heuristiques à base de voisinages. Dans le chapitre 3, nous présentons la modélisation du problème, ainsi que plusieurs relaxations qui sont utilisées lors du développement de la méthode de résolution. Dans le chapitre 4, nous présentons en détails la méthode de résolution, qui procède en trois phases, dont la première est une procédure de montée duale avec ajustement primal-dual. Nous analysons ensuite la phase d'amélioration locale et nous présentons la méthode de descente à voisinage variable, pour laquelle nous proposons deux structures de voisinages. Le chapitre 5 présente les résultats expérimentaux générés par l'implantation de l'heuristique et la résolution des modèles relaxés par CPLEX. En conclusion, nous rappelons nos résultats et proposons quelques perspectives de recherche future.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Dans ce chapitre, nous proposons une revue de la littérature concernant les problèmes de localisation, ainsi que les méthodes à base de voisinages. Dans la première section, nous résumons brièvement les différentes classes du problème de localisation, ainsi que les méthodes de résolution. La structure de cette partie est inspirée des travaux de Hale et Moberg [11] et Galvão [5]. Dans la deuxième section, nous présentons brièvement les méthodes de descente, de recuit simulé, de recherche avec tabous et de voisinage variable.

2.1 Problèmes de localisation

Les problèmes de localisation (avec ou sans) capacité abondent dans la littérature ; ils peuvent être statiques ou dynamiques, probabilistes ou déterministes. Les problèmes de localisation les plus courants consistent à déterminer les localisations des entrepôts et les flots des produits entre les entrepôts et les clients de façon à minimiser la somme des coûts fixes et variables (ces derniers sont des coûts de transport et de fonctionnement, la plupart du temps linéaires par produit). Dans les problèmes sans capacité, les entrepôts peuvent produire et transporter des quantités non limitées de produits. Une grande variété de modèles mathématiques sont proposés dans ce cadre ; à titre d'exemples, nous pouvons citer le problème de localisation simple [14] et le problème de la p -médiane [10], qui représentent des cas particuliers d'une formulation plus générale [2].

Outre ces problèmes classiques, il existe plusieurs autres problèmes de localisation possédant des caractéristiques fort différentes :

- Les problèmes avec contraintes de couverture, qui consistent à localiser les entrepôts de façon à ce que les clients soient couverts (un client est dit couvert par un entrepôt s'il est à une distance prédéfinie par rapport à cet entrepôt) ;
- Les problèmes de localisation probabilistes [16, 19], qui sont définis en considérant explicitement la loi de probabilité de variables aléatoires permettant de représenter des demandes ou des coûts de nature stochastique ;
- Les problèmes hiérarchiques, qui modélisent les situations où il y a différents types d'entrepôts reliés entre eux d'une façon hiérarchique ;
- Les problèmes dynamiques [17] qui sont des extensions des problèmes statiques dans lesquels les demandes varient en fonction du temps.

Les techniques utilisées pour résoudre les problèmes de localisation sont issues des méthodes exactes et des heuristiques. Les méthodes de montée duale, la relaxation lagrangienne et la relaxation par agrégation de contraintes (*surrogate relaxation*) sont beaucoup utilisées. Dans certaines applications, ces méthodes tendent à trouver une solution proche de la solution optimale, alors que dans d'autres, elles sont complétées par un appel à d'autres méthodes heuristiques. Erlenkotter [4] a proposé une méthode de montée duale, complétée par une procédure d'ajustement, pour le problème de localisation simple ; cette méthode permet d'identifier des solutions proches de l'optimum. Nous présentons les détails de cette méthode au chapitre 4, car elle est utilisée dans le cadre de notre approche de résolution. Van Roy et Erlenkotter [20] présentent des extensions à cette méthode de résolution.

Galvão et Raggi [6] proposent une méthode en trois phases pour le problème de la p -médiane, composé d'un algorithme primal-dual (pour identifier les deux

bornes du problème), d'une méthode de relaxation lagrangienne par sous-gradient et d'un algorithme de *branch-and-bound*. La montée duale appliquée à la relaxation linéaire fournit une borne inférieure, alors que la borne supérieure est définie via une heuristique présentée par Eilon et Galvão [3]. Les variables duales sont définies à partir de la solution primale initiale, et la solution duale obtenue après la montée duale définit elle-même les noeuds candidats dans une nouvelle solution primale (par substitution). L'algorithme de la relaxation lagrangienne est activé si les deux bornes ne coïncident pas. Cette méthode a été comparée à celle d'Erlenkotter, cette dernière étant généralement plus rapide pour les problèmes de grande taille [6].

2.2 Métaheuristiques à base de voisinages

Le principe des métaheuristiques à base de voisinages, aussi appelées méthodes de recherche locale, consiste, à partir d'une solution initiale, à passer d'une solution courante à une solution voisine par déplacements successifs, appelés mouvements [18]. L'ensemble de solutions générées à partir d'une solution x est dit *voisinage de x* et noté par $N(x)$.

Dans le contexte des métaheuristiques à base de voisinages, les notions de diversification et d'intensification sont souvent utilisées. La diversification consiste à implanter des mécanismes visant à explorer des régions de l'espace des solutions jusqu'à maintenant peu visitées. L'intensification a plutôt comme objectif de développer des stratégies pour explorer l'espace des solutions jugées intéressantes en se basant sur des caractéristiques des solutions déjà visitées. Nous verrons quatre classes de métaheuristiques à base de voisinages : la méthode de descente, la méthode de recuit simulé, la méthode de recherche avec tabous et la méthode de voisinage variable.

Le principe des **méthodes de descente** est de chercher, à partir d'une solution courante, une solution x' dans le voisinage de x et d'accepter cette solution si elle améliore la solution courante. Le processus est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de solutions améliorantes dans le voisinage de la solution courante. La méthode de plus grande descente est basée sur le même principe, sauf qu'il s'agit de choisir la meilleure solution x' dans le voisinage de x . Ces méthodes sont sujettes à plusieurs critiques : elles se basent sur une amélioration progressive de la solution, mais par la suite, elles restent bloquées dans un minimum local. Pour s'échapper du minimum local, il faut permettre à la recherche de faire des mouvements pour lesquels la nouvelle solution retenue sera de qualité moindre que la précédente.

Le principe de la méthode de **recuit simulé** [13] s'inspire d'un processus d'amélioration de la qualité d'un métal solide par recherche d'un état d'énergie minimum correspondant à une structure stable. L'état optimal correspondrait à une structure moléculaire régulière parfaite. En partant d'une température élevée où le métal est liquide, on refroidit le métal progressivement pour trouver le meilleur équilibre thermodynamique. Chaque niveau de température est maintenu jusqu'à l'obtention d'un équilibre. Dans le cas de température constante, il est possible de passer par des états intermédiaires du métal, conduisant à la longue à des états meilleurs. L'analogie entre ce processus et la méthode de recuit simulé consiste à associer une solution à un état du métal et l'équilibre thermodynamique à la valeur de la fonction objectif. Le passage d'un état du métal à un autre correspond au passage d'une solution courante à une solution voisine. Pour passer à une solution voisine, il faut respecter l'une des deux conditions :

- Soit le mouvement améliore la qualité de la solution précédente, c'est-à-dire la valeur de la fonction objectif f ;
- Soit le mouvement détériore la qualité de la solution précédente, mais il existe une probabilité p d'accepter un tel mouvement, dépendant d'un

paramètre t appelé température, et définie par la formule $p = e^{-\frac{\Delta C}{t}}$, où $\Delta C = f(x') - f(x)$.

Cette méthode vise un équilibre entre l'intensification et la diversification. Ainsi, l'intensification est obtenue en acceptant tous les mouvements strictement améliorants, alors que la diversification est obtenue en autorisant des mouvements non améliorants sous condition de probabilité ou en augmentant la température.

L'algorithme de la méthode de recuit simulé s'écrit comme suit :

1. **Initialisation** : Générer une solution initiale x ; choisir un schéma de décroissance T ; initialiser la température t .
2. **Répéter**
 - Générer aléatoirement x' dans $N(x)$, le voisinage de x .
 - Déterminer $\Delta C = f(x') - f(x)$.
 - Générer un nombre n selon une loi uniforme $[0,1]$.
 - **Si** ($\Delta C < 0$ ou $p > n$) **alors** $x' \leftarrow x$.
 - Changer la température suivant le schéma de décroissance T .

Jusqu'à ce qu'un nombre maximum d'itérations soit atteint.

Contrairement au recuit simulé qui génère des solutions aléatoirement, la **méthode de recherche avec tabous** [8, 9], examine de manière exhaustive le voisinage de la solution courante. Comme dans les méthodes de plus grande descente, chaque itération consiste à trouver le mouvement qui permettra de choisir le meilleur voisin de la solution actuelle x . Une liste tabou est utilisée afin d'éviter de revisiter une solution pendant un certain nombre d'itérations. La liste tabou contient certaines caractéristiques des mouvements qui ont engendré les n dernières solutions (où n est un paramètre spécifié par l'utilisateur). Un mouvement est dit tabou si certaines caractéristiques de ce mouvement sont tabous, et une solution est dite taboue si elle est engendrée par un mouvement tabou. Si un mouvement interdit appliqué à la solution courante améliore la valeur de

l'objectif, alors on acceptera le mouvement, même s'il est tabou (on parle alors de critère d'aspiration). L'algorithme s'arrête quand il n'y a pas d'amélioration après un certain nombre d'itérations ou qu'un nombre maximum d'itérations est atteint.

La **recherche à voisinage variable** est une récente métaheuristique proposée par Mladenović et Hansen [15]. La méthode est fondée sur le principe du changement systématique de la structure des voisinages durant la phase de descente et d'exploration, afin d'éviter de rester piégé dans un optimum local. Il s'agit de définir un ensemble de k_{max} voisinages dénotés par $N_{k=1,\dots,k_{max}}$, où k_{max} est un paramètre défini par l'utilisateur. D'abord, une solution de départ x est choisie par une heuristique. Ensuite, à partir d'une solution initiale x' choisie aléatoirement dans le premier voisinage $N_1(x)$ de x , on applique une méthode de recherche locale pour arriver à un minimum local. Si la solution trouvée x'' est meilleure que x , alors on recentre la recherche en repartant du premier voisinage, sinon on passe au voisinage suivant. La recherche s'arrête quand tous les voisinages ont été explorés sans pouvoir d'améliorer la solution. La diversification de la méthode se fait par le choix aléatoire d'une solution x' et le changement de voisinage. L'intensification de la méthode est effectuée par l'appel de la recherche locale. Plusieurs variantes et extensions de cette méthode pour optimiser des problèmes de grande taille paraissent prometteuses.

L'algorithme de la méthode de recherche à voisinage variable s'écrit comme suit :

1. **Initialisation** : Générer une solution initiale x ; $k \leftarrow 1$.
2. **Répéter**
 - Générer aléatoirement x' dans le voisinage de $N_k(x)$.
 - Appliquer une recherche locale à partir de x' pour trouver x'' .
 - **Si** x'' est meilleur que x **alors** $x \leftarrow x''$ et $k \leftarrow 1$;
 - **Sinon** $k \leftarrow k + 1$.

Jusqu'à ce que $k > k_{max}$.

Dans ce travail, nous utilisons une **méthode de descente à voisinage variable**, qui constitue une variante de la recherche à voisinage variable. L'algorithme de la descente à voisinage variable est décrit comme suit :

1. **Initialisation** : Générer une solution initiale x ; $k \leftarrow 1$.
2. **Répéter**
 - Appliquer une méthode de descente à partir de x .
 - **Si** une solution améliorante est trouvée et $k > 1$ **alors** $k \leftarrow 1$;
Sinon $k \leftarrow k + 1$.

Jusqu'à ce que $k > k_{max}$.

Plusieurs méthodes de recherche à base de voisinage ont été appliquées aux problèmes de localisation ; nous pouvons citer la résolution du problème de la p -médiane par la recherche avec tabous [21], le recuit simulé [1] et la recherche à voisinage variable [12].

Chapitre 3

Modélisation

Nous considérons un système de distribution contenant des centrales, qui représentent des centres de tri des produits. Ces produits sont acheminés vers des plates-formes de distribution, qui n'acceptent qu'un flux venant des centrales. Chaque plate-forme ne peut être approvisionnée que par une seule centrale. Le système contient aussi des satellites dont chacun est approvisionné depuis une unique plate-forme. Pour chaque plate-forme i , il existe un ensemble de satellites S_i qui peuvent lui être affectés. Cet ensemble est créé de façon à ce qu'il contienne uniquement les satellites situés à une distance prédéfinie par rapport à une plate-forme. Nous définissons également un ensemble de clients, chacun ne pouvant être desservi que depuis un unique satellite. L'optimisation de ce système de distribution est liée aux coûts de transport engendrés par celui-ci, et aux coûts de fonctionnement des plates-formes et des satellites. Le coût de transport est fonction du nombre de véhicules qui transitent d'un point à l'autre, la distance entre deux points influençant le calcul du coût de transport pour une liaison donnée.

Nous présentons dans une première section le modèle $M4$ qui décrit l'objectif et les contraintes du problème, que nous désignons par l'appellation *modèle à quatre indices*, en raison de la présence de variables à quatre indices. Dans la section 3.2, nous définissons une relaxation du modèle $M4$, notée $R4$, obtenue en relaxant l'intégralité de certaines des variables. Dans la section 3.3, nous présentons un modèle équivalent à $R4$, noté $R4S$, qui est obtenu en éliminant des contraintes devenues redondantes suite à la relaxation des contraintes d'intégralité. Enfin,

nous présentons un modèle équivalent à $R4S$, qui revient à un problème de localisation simple, possédant donc des variables à deux indices au plus, et noté $R2$. Nous montrons que la relaxation $R2$ domine la relaxation continue du modèle $M4$; $R2$ servira de point de départ pour l'approche heuristique que nous décrivons au chapitre 4.

3.1 Modèle à quatre indices ($M4$)

Les ensembles définis pour ce modèle sont :

H = ensemble des centrales ;

P = ensemble des sites potentiels pour les plates-formes ;

S_i = ensemble des sites potentiels pour les satellites de la plate-forme i , avec
 $i \in P$;

S = ensemble des sites potentiels pour les satellites;

L = ensemble des clients.

Les données liées à la capacité sont définies comme suit (nous supposons que toutes ces valeurs sont positives) :

n_l = nombre total d'unités de produits à livrer à un client l ;

v_l = volume total de produits à livrer à un client l ;

Q = capacité de chaque véhicule (en unités de produits) traité par un satellite quelconque;

C_s = capacité en volume d'un véhicule allant d'une plate-forme vers un satellite;

C_p = capacité en volume d'un véhicule allant d'une centrale vers une plate-forme.

Les coûts de fonctionnement et de transport sont définis comme suit (nous sup-

posons aussi que toutes ces valeurs sont positives) :

- c_i^h = coût d'un véhicule allant d'une centrale h à une plate-forme i ;
- c_{ij} = coût d'un véhicule allant d'une plate-forme i à un satellite j ;
- c_{jl} = coût pour desservir un client l depuis un satellite j ;
- f_i = coût de fonctionnement d'une plate-forme i ;
- \tilde{f}_j = coût de fonctionnement d'un satellite j par tranche de Q unités de produits.

Les variables de décision sont :

$$X_i^h = \begin{cases} 1, & \text{si la plate-forme } i \text{ est ouverte et desservie depuis la centrale } h; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$Y_{ij}^h = \begin{cases} 1, & \text{si le satellite } j \text{ est ouvert et desservi depuis la plate-forme } i, \\ & \text{elle-même desservie depuis la centrale } h; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$Z_{ijl}^h = \begin{cases} 1, & \text{si le client } l \text{ est desservi depuis le satellite } j, \text{ lui-même approvisionné} \\ & \text{depuis la plate-forme } i, \text{ elle-même desservie depuis la centrale } h; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous définissons aussi les variables suivantes :

- W_j = taille du satellite j par tranche de Q unités de produits ;
- T_i^h = nombre de véhicules entre la centrale h et la plate-forme i ;
- T_{ij} = nombre de véhicules entre la plate-forme i et le satellite j .

Le modèle s'écrit alors comme suit :

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} f_i X_i^h + \sum_{j \in S} \tilde{f}_j W_j + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} c_i^h T_i^h + \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} c_{ij} T_{ij} + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} c_{jl} Z_{ijl}^h \quad (3.1)$$

sujet à

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} Z_{ijl}^h = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.2)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} Y_{ij}^h \leq 1, \quad \forall j \in S, \quad (3.3)$$

$$\sum_{h \in H} X_i^h \leq 1, \quad \forall i \in P, \quad (3.4)$$

$$Z_{ijl}^h \leq Y_{ij}^h, \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad \forall l \in L, \quad (3.5)$$

$$Y_{ij}^h \leq X_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.6)$$

$$T_{ij} \leq M_1 \sum_{h \in H} Y_{ij}^h, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.7)$$

$$T_i^h \leq M_2 X_i^h, \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad (3.8)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ijl}^h \leq QW_j, \quad \forall j \in S, \quad (3.9)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h \leq C_s T_{ij}, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.10)$$

$$\sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h \leq C_p T_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad (3.11)$$

$$W_j, \quad T_i^h, \quad T_{ij} \geq 0 \text{ et entiers} \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S, \quad (3.12)$$

$$X_i^h, \quad Y_{ij}^h, \quad Z_{ijl}^h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S, \quad \forall l \in L, \quad (3.13)$$

où M_1 et M_2 sont, respectivement, des constantes supérieures aux nombres de véhicules pouvant circuler vers un satellite et vers une plate-forme.

L'objectif (3.1) consiste à minimiser les dépenses liées au fonctionnement des plates-formes et des satellites, ainsi que tous les coûts de transport pour approvisionner les plates-formes, les satellites et les clients. La contrainte (3.2) signifie que chaque client doit être servi et qu'il n'est approvisionné que par un seul satellite. La contrainte (3.3) signifie qu'un satellite ouvert n'est approvisionné que depuis une seule plate-forme et la contrainte (3.4) signifie qu'une plate-forme ouverte n'est approvisionnée que depuis une seule centrale. Les contraintes (3.5) et (3.6) signifient que le chemin (h, i, j, l) (respectivement (h, i, j)) ne peut être ouvert que si le chemin (h, i, j) (respectivement (h, i)) est déjà ouvert). La contrainte

(3.7) signifie que si la plate-forme i n'approvisionne pas le satellite j (dans ce cas $\sum_{h \in H} Y_{ij}^h = 0$), alors le nombre de véhicules entre i et j doit être égal à zéro. De même, la contrainte (3.8) signifie que si la centrale h n'approvisionne pas la plate-forme i (dans ce cas $X_i^h = 0$), alors le nombre de véhicules entre h et i est égal à zéro. La contrainte (3.9) signifie que le nombre d'unités de produits servis aux clients à partir d'un satellite est toujours inférieur ou égal à la taille de ce satellite. La contrainte (3.10) signifie que le volume total livré pour les clients desservis depuis le satellite j , la plate-forme i et la centrale h , est toujours inférieur ou égal à la capacité totale en volume des véhicules transitant de la plate-forme i au satellite j . De même, la contrainte (3.11) signifie que le volume total livré pour les clients desservis depuis le satellite j , la plate-forme i et la centrale h est toujours inférieur ou égal à la capacité totale en volume des véhicules transitant de la centrale h à la plate-forme i . La contrainte (3.12) nous assure que la taille d'un satellite et le nombre de véhicules sont entiers. La contrainte (3.13) nous assure que les variables X_i^h , Y_{ij}^h et Z_{ijl}^h sont binaires.

Le modèle ci-dessus peut être simplifié en éliminant certaines contraintes redondantes.

Proposition 3.1.1 *La contrainte (3.7) est redondante.*

Preuve :

Soit $i \in P$ et $j \in S_i$; il y a deux cas :

- Si $\sum_{h \in H} Y_{ij}^h > 0$, alors (3.7) est redondante.
- Si $\sum_{h \in H} Y_{ij}^h = 0$, alors, d'après (3.5), $\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} Z_{ijl}^h = 0$.

Puisque T_{ij} n'apparaît que dans les contraintes (3.7) et (3.10), T_{ij} doit être nul dans toute solution optimale étant donné que $c_{ij} > 0$, et (3.7) est donc redondante.

Proposition 3.1.2 *La contrainte (3.8) est redondante.*

Preuve :

Soit $i \in P$ et $h \in H$; il y a deux cas :

- Si $X_i^h = 1$, alors (3.8) est redondante.
- Si $X_i^h = 0$, alors, d'après (3.6), $\sum_{j \in S_i} Y_{ij}^h = 0$, ce qui implique, d'après (3.5),

$$\sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} Z_{ijl}^h = 0.$$

Puisque T_i^h n'apparaît que dans les contraintes (3.8) et (3.11), T_i^h doit être nul dans toute solution optimale étant donné que $c_i^h > 0$, et (3.8) est donc redondante.

Proposition 3.1.3 *La contrainte (3.4) est redondante.*

Preuve :

Considérons le modèle obtenu en éliminant la contrainte (3.4). Supposons que dans une solution optimale de ce modèle, il existe une plate-forme i qui est approvisionnée à partir de deux centrales h et h' . Sous l'hypothèse que $c_i^h \leq c_i^{h'}$, il est alors possible de transférer le volume circulant sur l'arc (h', i) vers l'arc (h, i) (sans rien modifier au reste de la solution) et obtenir une solution de moindre coût, contredisant l'hypothèse que la solution est optimale, et montrant ainsi que dans toute solution optimale du modèle sans la contrainte (3.4), celle-ci est automatiquement satisfaite. En posant V_i^h et $V_i^{h'}$, les volumes circulant sur les arcs (h, i) et (h', i) , respectivement, nous obtenons les équations suivantes :

$$V_i^h = C_p T_i^h - R_i^h, \quad 0 \leq R_i^h < C_p,$$

$$V_i^{h'} = C_p T_i^{h'} - R_i^{h'}, \quad 0 \leq R_i^{h'} < C_p.$$

où R_i^h et $R_i^{h'}$ sont, respectivement, les restes de la division entière de V_i^h et $V_i^{h'}$ par C_p .

En transférant tous les volumes de (h', i) vers (h, i) , le volume sur l'arc (h, i) dans

la solution ainsi obtenue, \bar{V}_i^h , satisfait alors la relation suivante :

$$\bar{V}_i^h = V_i^h + V_i^{h'} = \begin{cases} C_p(T_i^h + T_i^{h'}) - \bar{R}_i^h, & \text{si } R_i^h + R_i^{h'} < C_p, \\ C_p(T_i^h + T_i^{h'} - 1) - \bar{R}_i^h, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0 \leq \bar{R}_i^h < C_p$. D'où le nombre de véhicules sur l'arc (h, i) dans cette nouvelle solution est donné par :

$$\bar{T}_i^h = \begin{cases} T_i^h + T_i^{h'}, & \text{si } R_i^h + R_i^{h'} < C_p, \\ T_i^h + T_i^{h'} - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en oubliant la contribution des autres coûts, qui demeure la même, la solution utilisant les deux arcs (h', i) et (h, i) a comme valeur de l'objectif :

$$\begin{aligned} & (f_i + f_i) + c_i^h T_i^h + c_i^{h'} T_i^{h'} \\ & \geq (f_i + f_i) + c_i^h (T_i^h + T_i^{h'}) \\ & \geq (f_i + f_i) + c_i^h \bar{T}_i^h \\ & > f_i + c_i^h \bar{T}_i^h, \end{aligned}$$

qui est égal à la contribution à la valeur de l'objectif de la solution obtenue en transférant tout le volume sur l'arc (h, i) .

Même si la contrainte (3.4) est redondante, ce n'est pas le cas de la contrainte (3.3), qui lui est pourtant similaire. Pour le démontrer, nous utilisons l'exemple suivant, qui illustre un cas où il est plus avantageux de desservir un satellite à partir de deux plates-formes, plutôt qu'à partir d'une seule.

Considérons un problème possédant un seul client, un seul satellite, une seule centrale, mais deux plates-formes, i et i' . Les capacités et les coûts sont donnés par les valeurs suivantes : $C_p = 4$, $C_s = 3$, $c_i^h = 3$, $c_{ij} = 1$, $c_{i'}^h = 2 - \epsilon$ et $c_{i'j} = 2$, où $\epsilon > 0$ est un nombre réel suffisamment petit. Supposons, de plus, que le volume total demandé par le client est de 15 unités. En excluant les coûts associés au client et au satellite, qui sont les mêmes quelle que soit la solution,

les valeurs de l'objectif pour les deux solutions n'empruntant qu'une seule plate-forme sont : $3 \times 4 + 1 \times 5 = 17$ pour la solution passant par le chemin (h, i, j) et $(2 - \epsilon) \times 4 + 2 \times 5 = 18 - 4 \times \epsilon$ pour la solution passant par le chemin le chemin (h, i', j) . Pourtant, il existe une solution de moindre coût que ces deux dernières et qui passe par les deux plates-formes : le coût de cette solution passant sur les chemins (h, i, j) (3 véhicules sur (h, i) , 4 véhicules sur (i, j)) et (h, i', j) (1 véhicule sur (h, i') , 1 véhicule sur (i', j)) est $3 \times 3 + 1 \times 4 + (2 - \epsilon) \times 1 + 2 \times 1 = 17 - \epsilon$.

Suite à l'élimination des contraintes redondantes, le modèle à quatre indices, $M4$, s'exprime ainsi :

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} f_i X_i^h + \sum_{j \in S} \tilde{f}_j W_j + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} c_i^h T_i^h + \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} c_{ij} T_{ij} + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} c_{jl} Z_{ijl}^h \quad (3.14)$$

sujet à

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} Z_{ijl}^h = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.15)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} Y_{ij}^h \leq 1, \quad \forall j \in S, \quad (3.16)$$

$$Z_{ijl}^h \leq Y_{ij}^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad \forall l \in L, \quad (3.17)$$

$$Y_{ij}^h \leq X_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.18)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ijl}^h \leq Q W_j, \quad \forall j \in S, \quad (3.19)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h \leq C_s T_{ij}, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.20)$$

$$\sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h \leq C_p T_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad (3.21)$$

$$W_j, \quad T_i^h, \quad T_{ij} \geq 0 \text{ et entiers} \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S, \quad (3.22)$$

$$X_i^h, \quad Y_{ij}^h, \quad Z_{ijl}^h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S, \quad \forall l \in L, \quad (3.23)$$

3.2 Relaxation à quatre indices (R4)

La relaxation continue des variables W_j, T_{ij} et T_i^h est obtenue lorsque (3.22) est remplacée par $W_j \geq 0, \forall j \in S, T_{ij} \geq 0, \forall i \in P$ et $j \in S_i$, et par $T_i^h \geq 0, \forall i \in P$ et $h \in H$.

Proposition 3.2.1 *Toute solution optimale du modèle relaxé vérifie*

$$W_j = \frac{1}{Q} \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ijl}^h, \quad \forall j \in S, \quad (3.24)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{C_s} \sum_{h \in H} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.25)$$

$$T_i^h = \frac{1}{C_p} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} v_l Z_{ijl}^h, \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P. \quad (3.26)$$

Preuve :

Les coûts c_i^h, c_{ij}, c_{jl} et \tilde{f}_j sont tous positifs ; donc, les variables W_j, T_{ij} et T_i^h doivent prendre les valeurs de leurs bornes inférieures pour que la solution soit optimale.

Après substitution des variables W_j, T_{ij} et T_i^h , la relaxation des contraintes d'intégralité (3.22) aboutit au modèle suivant :

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} f_i X_i^h + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} C_{ijl}^h Z_{ijl}^h \quad (3.27)$$

sujet à

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} Z_{ijl}^h = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.28)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} Y_{ij}^h \leq 1, \quad \forall j \in S, \quad (3.29)$$

$$Z_{ijl}^h \leq Y_{ij}^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad \forall l \in L, \quad (3.30)$$

$$Y_{ij}^h \leq X_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad (3.31)$$

$$X_i^h, Y_{ij}^h, Z_{ijl}^h \in \{0, 1\} \quad \forall h \in H, \forall i \in P, \forall j \in S, \forall l \in L, \quad (3.32)$$

où $C_{ijl}^h = \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s} \right) + c_{jl}$.

3.3 Relaxation simplifiée à quatre indices (*R4S*)

Les deux propositions suivantes nous permettent de transformer le modèle précédent.

Proposition 3.3.1 *La contrainte (3.29) est redondante.*

Preuve :

Considérons le modèle obtenu suite à l'élimination de la contrainte (3.29). Supposons que dans une solution optimale de ce modèle, il y a deux trajets (h, i, j) et (h', i', j) pour acheminer des produits, et supposons de plus, sans perte de généralité, que $\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s} \leq \frac{c_{i'}^{h'}}{C_p} + \frac{c_{i'j}}{C_s}$. Alors il sera plus économique de déplacer ce qui est acheminé sur (h', i', j) vers (h, i, j) tout en maintenant la réalisabilité de la solution (voir figure 3.1). En effet, la contribution à la valeur de la fonction objectif pour servir un client l depuis (h, i, j) et un client l' depuis (h', i', j) est égale à :

$$\begin{aligned} & (f_i + f_{i'}) + \left(\frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s}\right) + c_{jl}\right) + \left(\frac{n_{l'}}{Q} \tilde{f}_j + v_{l'} \left(\frac{c_{i'}^{h'}}{C_p} + \frac{c_{i'j}}{C_s}\right) + c_{jl'}\right) \\ & \geq (f_i + f_{i'}) + \left(\frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s}\right) + c_{jl}\right) + \left(\frac{n_{l'}}{Q} \tilde{f}_j + v_{l'} \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s}\right) + c_{jl'}\right) \\ & > f_i + \left(\frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s}\right) + c_{jl}\right) + \left(\frac{n_{l'}}{Q} \tilde{f}_j + v_{l'} \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s}\right) + c_{jl'}\right) \end{aligned}$$

qui est égale à la contribution à la valeur de la fonction objectif pour servir les clients l et l' depuis le trajet (h, i, j) .

Proposition 3.3.2 *Les contraintes (3.30) et (3.31) peuvent être remplacées par l'inégalité suivante :*

$$Z_{ijl}^h \leq X_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad \forall l \in L. \quad (3.33)$$

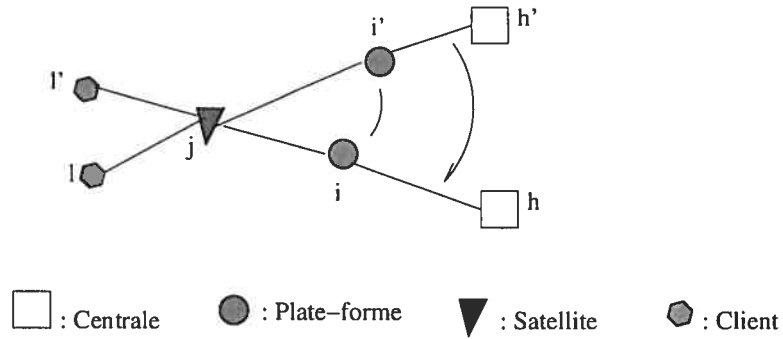


FIG. 3.1 – Déplacement des véhicules du chemin (h', i', j) vers le chemin (h, i, j)

Preuve :

Il est clair que toute solution satisfaisant (3.30) et (3.31) satisfait (3.33).

Supposons maintenant que nous remplaçons (3.30) et (3.31) par (3.33) ; montrons alors que toute solution optimale du modèle ainsi obtenu satisfait (3.30) et (3.31).

Soit $h \in H$ et $i \in P$; il y a deux cas :

- Si $X_i^h = 0$, alors $Z_{ijl}^h = 0, \forall j \in S_i$ et $l \in L$. Il suffit alors de poser $Y_{ij}^h = 0, \forall j \in S_i$ pour obtenir une solution réalisable de même coût, donc optimale pour le modèle (3.27) à (3.32), car ce dernier est une restriction du modèle obtenu en remplaçant (3.30) et (3.31) par (3.33).
- Si $X_i^h = 1$, alors il existe $j' \in S_i$ et $l' \in L$ tel que $Z_{ij'l'}^h = 1$ (sinon, la solution ne serait pas optimale). En posant $Y_{ij'}^h = 1$, nous obtenons alors une solution réalisable de même coût (car il n'y a aucun coût associé aux variables Y_{ij}^h), donc optimale pour le modèle (3.27) à (3.32).

Le modèle *R4S* est ainsi défini par :

$$\min \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} f_i X_i^h + \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} C_{ijl}^h Z_{ijl}^h \quad (3.34)$$

sujet à

$$\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{j \in S_i} Z_{ijl}^h = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.35)$$

$$Z_{ijl}^h \leq X_i^h \quad \forall h \in H, \quad \forall i \in P, \quad \forall j \in S_i, \quad \forall l \in L, \quad (3.36)$$

$$X_i^h \text{ et } Z_{ijl}^h \in \{0, 1\}, \quad \forall h \in H, \quad i \in P, \quad j \in S_i, \quad l \in L, \quad (3.37)$$

où $C_{ijl}^h = \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \left(\frac{c_i^h}{C_p} + \frac{c_{ij}}{C_s} \right) + c_{jl}$.

3.4 Relaxation à deux indices (R2)

La relaxation R4 peut être transformée en un modèle équivalent où les variables ont au plus deux indices. L'idée vient du fait que le coût C_{ijl}^h est un coût linéaire, qui s'écrit en fonction des coûts de transport entre les centrales et les plates-formes et entre les plates-formes et les clients. Le calcul du coût dans ce modèle à deux indices se réalise en deux étapes. On estime d'abord le coût minimal entre chaque centrale et chaque plate-forme, puis on estime le coût minimal entre chaque plate-forme et chaque client, qui est un coût linéaire, et dépend de c_{ij} , f_j et c_{jl} . Pour chaque plate-forme i , on détermine la centrale \hat{h}_i qui minimise c_i^h , soit $\hat{h}_i = \arg \min_{h \in H} \{c_i^h\}$ et pour chaque paire (i, l) , on détermine le satellite \hat{j}_{il} qui minimise $(c_{jl} + \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \frac{c_{ij}}{C_s})$, soit $\hat{j}_{il} = \arg \min_{j \in S_i} \{c_{jl} + \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \frac{c_{ij}}{C_s}\}$.

Proposition 3.4.1 Soit $\hat{h}_i = \arg \min_{h \in H} \{c_i^h\}$, $\hat{j}_{il} = \arg \min_{j \in S_i} \{c_{jl} + \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \frac{c_{ij}}{C_s}\}$

$$\hat{X}_i = \begin{cases} X_i^h, & \text{si } h = \hat{h}_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \hat{Z}_{il} = \begin{cases} Z_{ijl}^h, & \text{si } h = \hat{h}_i, \quad j = \hat{j}_{il} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle (3.34) à (3.37) est équivalent au modèle suivant :

$$\min \sum_{i \in P} f_i \hat{X}_i + \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} C_{il} \hat{Z}_{il} \quad (3.38)$$

sujet à

$$\sum_{i \in P} \hat{Z}_{il} = 1, \quad \forall l \in L, \quad (3.39)$$

$$\hat{Z}_{il} \leq \hat{X}_i, \quad \forall i \in P, \quad l \in L, \quad (3.40)$$

$$\hat{X}_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \quad \text{et } \hat{Z}_{il} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in P, \quad l \in L, \quad (3.41)$$

$$\text{où } C_{il} = \frac{n_l \tilde{f}_{j_{il}}}{Q} + v_l \left(\frac{c_i^{\tilde{h}_i}}{C_p} + \frac{c_{ij_{il}}}{C_s} \right) + c_{j_{il}l}.$$

Preuve :

\Rightarrow

Soit (X_i^h, Z_{ijl}^h) une solution optimale de (3.34) à (3.37). Dans cette solution, posons \tilde{h}_i la centrale affectée à chaque plate-forme i , et \tilde{j}_{il} , le satellite affecté à chaque couple (i, l) . On doit avoir $c_i^{\tilde{h}_i} = \min_{h \in H} \{c_i^h\}$, et $c_{\tilde{j}_{il}l} + \frac{n_l \tilde{f}_{\tilde{j}_{il}}}{Q} + v_l \frac{c_{\tilde{j}_{il}l}}{C_s} = \min_{j \in S_i} \{c_{jl} + \frac{n_l \tilde{f}_j}{Q} + v_l \frac{c_{jl}}{C_s}\}$ car sinon,

1. Si $c_i^{\tilde{h}_i} > c_i^h$ pour un certain i : en affectant à i la centrale $\hat{h}_i = \arg \min_{h \in H} \{c_i^h\}$, nous obtenons une solution réalisable de moindre coût.
2. Si $c_{\tilde{j}_{il}l} + \frac{n_l \tilde{f}_{\tilde{j}_{il}}}{Q} + v_l \frac{c_{\tilde{j}_{il}l}}{C_s} > \min_{j \in S_i} \{c_{jl} + \frac{n_l \tilde{f}_j}{Q} + v_l \frac{c_{jl}}{C_s}\}$ pour un certain (i, l) , en affectant à (i, l) le satellite \hat{j}_{il} , nous obtenons une solution réalisable de moindre coût.

On peut donc poser $\tilde{h}_i = \hat{h}_i$, $i \in P$ et $\tilde{j}_{il} = \hat{j}_{il}$, $i \in P$, $l \in L$. La solution

$$\hat{X}_i = \begin{cases} X_i^h, & \text{si } h = \hat{h}_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \hat{Z}_{il} = \begin{cases} Z_{ijl}^h, & \text{si } h = \hat{h}_i, \quad j = \hat{j}_{il} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est alors réalisable pour (3.38) à (3.41) et de même coût. Elle est donc optimale, puisque (3.38) à (3.41) est une restriction de (3.34) à (3.37).

\Leftarrow

Soit $(\hat{X}_i, \hat{Z}_{il})$ une solution optimale de (3.38) à (3.41). Cette solution définit une solution réalisable dans le modèle à quatre indices $(X_i^{\hat{h}_i}, Z_{ij_{il}}^{\hat{h}_i})$. Le coût de cette solution est :

$$\sum_{i \in P} f_i X_i^{\hat{h}_i} + \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} C_{il} Z_{ij_{il}}^{\hat{h}_i} = \sum_{i \in P} f_i \hat{X}_i + \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} C_{il} \hat{Z}_{il}$$

S'il existait une solution de moindre coût $(\tilde{X}_i^h, \tilde{Z}_{ijl}^h)$, alors dans cette solution, soit \tilde{h}_i la centrale affectée à chaque plate-forme i et \tilde{j}_{il} le satellite affecté à chaque

couple (i, l) ; alors, en posant :

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} X_i^h, & \text{si } h = \tilde{h}_i, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \tilde{Z}_{il} = \begin{cases} Z_{ijl}^h, & \text{si } h = \tilde{h}_i, \quad j = \tilde{j}_{il} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

nous obtenons une solution réalisable de (3.38) à (3.41) de moindre coût, une contradiction.

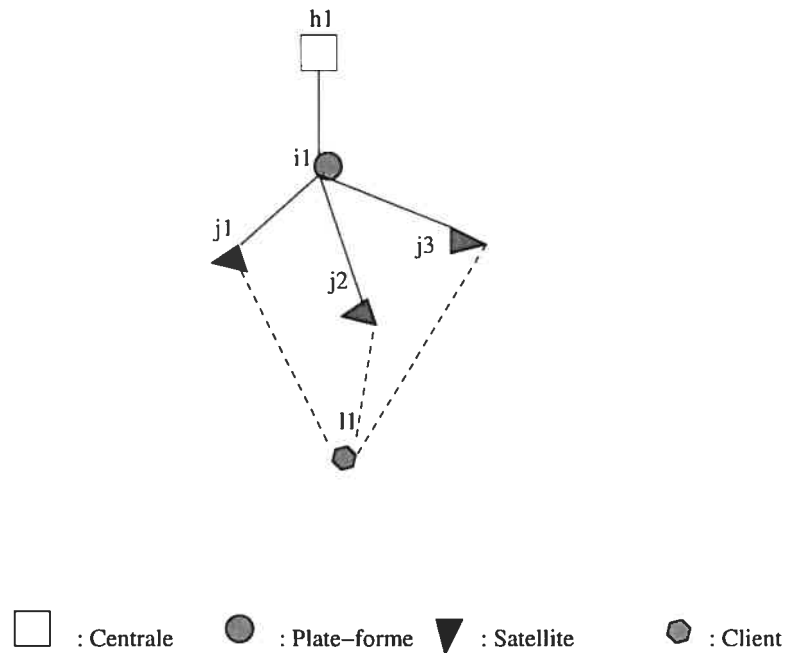


FIG. 3.2 – Exemple de dominance de la relaxation continue

Proposition 3.4.2 *La relaxation continue du modèle (3.38) à (3.41) domine (donne une meilleure borne inférieure que) celle du modèle (3.34) à (3.37).*

Preuve :

Il est clair que la relaxation continue de (3.38) à (3.41) est une restriction de la relaxation continue de (3.34) à (3.37).

Nous proposons l'exemple de la figure (3.2) pour illustrer cette dominance. Soit le réseau formé d'une centrale, d'une plate-forme, de trois satellites et d'un

client tel que les coûts engendrés entre la plate-forme et le client sont égaux : $c_1 = c_{1,1,1}^1 = c_{1,2,1}^1 = c_{1,3,1}^1$. La solution de la relaxation continue du problème (3.34) à (3.37) est : $Z_{1,1,1}^1 = Z_{1,2,1}^1 = Z_{1,3,1}^1 = \frac{1}{3}$ et $X_1^1 = \frac{1}{3}$, alors que la solution de la relaxation continue du problème (3.38) à (3.40) est $Z_{1,1,1}^1 = 1$, $Z_{1,2,1}^1 = Z_{1,3,1}^1 = 0$ et $X_1^1 = 1$. Il est facile de vérifier que la valeur de l'objectif de la relaxation continue du problème (3.38) à (3.41), qui est égale à $f_1 + c_1$, dépasse celle de la relaxation continue du problème (3.34) à (3.37), qui est égale à $\frac{1}{3}f_1 + c_1$.

Le modèle (3.38) à (3.41) est un problème de localisation simple [4]. Le dual de la relaxation linéaire obtenu en remplaçant (3.41) par les inégalités $\hat{X}_i \geq 0$ $\forall i \in P$, et $\hat{Z}_{il} \geq 0$, $\forall i \in P, \forall l \in L$, s'écrit alors comme suit :

$$\max \sum_{l \in L} \mu_l \quad (3.42)$$

$$\mu_l - \alpha_{il} \leq C_{il}, \quad \forall i \in P, \quad \forall l \in L, \quad (3.43)$$

$$\sum_{l \in L} \alpha_{il} \leq f_i, \quad \forall i \in P, \quad (3.44)$$

$$\mu_l \text{ quelconque, } \forall l \in L, \quad \alpha_{il} \geq 0, \quad \forall i \in P, \forall l \in L, \quad (3.45)$$

où μ_l et α_{il} sont les variables duales associées respectivement à la contrainte (3.39) et (3.40).

Chapitre 4

Méthode de résolution

Nous abordons dans ce chapitre la méthodologie de résolution adoptée pour traiter le problème. Nous proposons d'appliquer DUALOC, une méthode de montée duale [4] et d'ajustement primal-dual [20] pour résoudre de manière approximative la relaxation continue du problème de localisation simple ($R2$). La borne inférieure ainsi calculée conduit, suite à la résolution des équations des écarts complémentaires, à la détermination d'une solution au problème de localisation simple. À partir de cette solution, nous dérivons une borne supérieure pour le problème original ($M4$). Puis, nous tentons de réduire cette borne par une phase d'amélioration locale qui procède par une suite de réductions du nombre de plates-formes et de satellites ouverts, puis par l'application d'une méthode de descente à voisinage variable.

Dans la section 4.1, nous présentons la méthode de montée duale, puis nous expliquons dans la section 4.2 la phase d'amélioration locale. Nous terminons dans la section 4.3 par une présentation de l'adaptation à notre problème de la méthode de descente à voisinage variable.

4.1 Montée duale

4.1.1 Procédure de montée duale

Considérons le problème dual décrit dans les équations (3.42) à (3.45). Remarquons que pour tout choix d'une solution duale réalisable μ_l , l'objectif dual reste inchangé et la réalisabilité est toujours vérifiée pour la forme condensée du problème où $\alpha_{il} = \max\{0, \mu_l - C_{il}\}$:

$$\max Z_D = \sum_{l \in L} \mu_l \quad (4.1)$$

$$\sum_{l \in L} \max\{0, \mu_l - C_{il}\} \leq f_i, \quad \forall i \in P. \quad (4.2)$$

La procédure débute avec une solution telle que $\mu_l \geq \min_{i \in P} C_{il}, \forall l \in L$, puisqu'une solution qui ne satisfait pas cette inégalité ne peut pas être optimale. Elle traite un client l à la fois, augmentant μ_l jusqu'à la valeur maximale permise par la contrainte (4.2). La procédure termine lorsque toutes les valeurs de μ_l ne peuvent plus être augmentées.

La procédure de montée duale est exécutée en alternance avec la méthode primale-duale (décrite à la section 4.1.2) qui lui fournit en entrée des valeurs des variables duales. Toutefois, lorsqu'elle est exécutée au tout début, la solution initiale est $\bar{\mu}_l = \min_{i \in P} C_{il}, \forall l \in L$.

Étant donné une solution courante $\bar{\mu}_l$, analysons ce qui limite l'augmentation de la variable μ_l :

1. Soit $i \in P$ et $\bar{\mu}_l < C_{il}$: alors on pourrait augmenter μ_l de $C_{il} - \bar{\mu}_l$ et toujours satisfaire la contrainte (4.2) relative à i ;
2. Soit $i \in P$ et $\bar{\mu}_l \geq C_{il}$: alors la seule façon d'augmenter μ_l tout en satisfaisant la contrainte (4.2) est d'augmenter $\alpha_{il} = \max_{l \in L} \{0, \mu_l - C_{il}\}$ de la même

quantité que μ_l . L'augmentation de α_{il} est limitée par la contrainte (4.2), soit $f_i - \sum_{l \in L} \alpha_{il} \geq 0$.

En posant $S_i = f_i - \sum_l \bar{\alpha}_{il}$, où $\bar{\alpha}_{il}$ est la valeur courante de α_{il} , il est facile de voir que l'augmentation maximale de α_{il} est $S_i \geq 0$.

En résumé, μ_l peut donc augmenter de :

$$\delta_l = \min\left\{\min_{i \in P}\{C_{il} - \bar{\mu}_l : \bar{\mu}_l < C_{il}\}, \min_{i \in P}\{S_i = f_i - \sum_l \bar{\alpha}_{il} : \bar{\mu}_l \geq C_{il}\}\right\}.$$

Le schéma d'augmentation est répété jusqu'à ce que $\delta_l = 0, \forall l \in L$. En pratique, la procédure sera arrêtée lorsque $\delta_l \leq \epsilon, \forall l \in L$, où ϵ est un paramètre. Notons qu'à tout moment nous pouvons calculer $\bar{\alpha}_{il} = \max\{0, \bar{\mu}_l - C_{il}\}$.

La procédure itère sur un sous-ensemble des clients $L^+ \subseteq L$. Au premier appel de la procédure, on pose $L^+ = L$; subséquemment, lors de l'appel de la procédure par la méthode d'ajustement primal-dual (voir section 4.1.2), on pourra avoir $L^+ \subset L$. Pour tout $l \in L^+$, supposons qu'on a ordonné les coûts C_{il} en ordre croissant et qu'ils sont indexés comme suit : $c_l^k, k = 1, \dots, |P|$. L'algorithme de montée duale s'énonce alors ainsi [4] :

1. $\bar{\mu}_l = c_l^1, \forall l \in L^+$.
2. $S_i = f_i - \sum_{l \in L} \max\{0, \bar{\mu}_l - C_{il}\} \geq 0, \forall i \in P$.
3. Définir $k(l) = \min\{k : \bar{\mu}_l \leq c_l^k\}$. Si $\bar{\mu}_l = c_l^{k(l)}$, alors incrémenter $k(l)$ de 1.
4. Initialiser l au premier élément de L^+ , et $\gamma = 0$.
5. Initialiser δ_l à $\max\{\epsilon, \min_{i \in P}\{S_i : \bar{\mu}_l - C_{il} \geq 0\}\}$.
6. Si $\delta_l = \epsilon$, alors aller à (9).
7. Si $\delta_l > c_l^{k(l)} - \bar{\mu}_l$, alors poser $\delta_l = c_l^{k(l)} - \bar{\mu}_l, \gamma = 1$ et augmenter $k(l)$ de 1.
8. Diminuer S_i de δ_l pour tout $i \in P$ tel que $\bar{\mu}_l - C_{il} \geq 0$; augmenter $\bar{\mu}_l$ de δ_l .
9. Passer au client suivant et retourner à (3), sauf si tous les clients sont traités.
10. Si $\gamma = 1$, alors retourner à (2); sinon arrêter.

4.1.2 Procédure d'ajustement primal-dual

Les relations d'écart complémentaire servent à dériver des valeurs des variables primales à partir de la solution duale, et elles s'énoncent comme suit :

$$\hat{X}_i(f_i - \sum_{l \in L} \max\{0, \mu_l - C_{il}\}) = 0, \quad \forall i \in P, \quad (4.3)$$

$$(\hat{X}_i - \hat{Z}_{il}) \max\{0, \mu_l - C_{il}\} = 0, \quad \forall i \in P, \quad \forall l \in L. \quad (4.4)$$

Nous définissons P^+ l'ensemble des sites i tels que $\sum_{l \in L} \max\{0, \mu_l - C_{il}\} = f_i$ et $\mu_l \geq C_{il}, \forall l \in L$, où μ_l est une solution duale réalisable. Pour chaque client l , définissons le site i pour lequel le coût minimum est atteint :

$$i^+(l) = \arg \min_{i \in P^+} \{C_{il}\}, \quad \forall l \in L.$$

Une solution primale à valeur entière est alors dérivée ainsi :

$$\hat{X}_i^+ = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in P^+, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\hat{Z}_{il}^+ = \begin{cases} 1, & \text{si } i = i^+(l), l \in L, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Cette solution primale entière vérifie la première relation d'écart complémentaire, mais elle peut violer la seconde. En effet, $\max\{0, \mu_l - C_{il}\}(\hat{X}_i^+ - \hat{Z}_{il}^+) = 0$ sera violée si, pour l fixe, il existe plusieurs $i \in P^+$ tels que $C_{il} < \mu_l$ (car $\hat{X}_i^+ = \hat{Z}_{il}^+ = 1$ seulement pour le plus petit C_{il}).

Étant donné une solution duale réalisable μ_l et une solution réalisable primale satisfaisant (4.3) et (4.4), notons par $v^+(P)$ et $v^+(D)$, respectivement, les valeurs des objectifs primal et dual des modèles (3.38) à (3.41) et (3.42) à (3.45). Si $v^+(P) > v^+(D)$, cela implique l'existence d'un client l' qui viole l'équation des écarts complémentaires (4.4). On cherchera donc à réduire la valeur de $\mu_{l'}$. Toute réduction de $\mu_{l'}$ entraîne l'augmentation de l'écart de plusieurs contraintes

actives (4.2), celles qui correspondent aux sites i tels que $i \in P^+$ et $\mu_{i'} > C_{i'}$. Suite à une réduction de μ_l , il sera possible d'augmenter les autres μ_l qui étaient bloquées par ces contraintes, ce qui modifiera la valeur de l'objectif dual. Par contre, si un seul μ_l est candidat pour l'augmentation, la valeur duale demeurera la même, mais l'écart créé pourrait altérer la solution primale (P^+ pourrait être modifié). La procédure d'ajustement primal-dual parcourt tous les clients qui violent (4.4) et elle est arrêtée lorsque δ_{max} itérations sont effectuées sans amélioration. À chaque itération, on réduit $\mu_{i'}$ à la prochaine plus petite valeur $C_{i'}$, et on applique d'abord la montée duale seulement pour un sous-ensemble de clients l candidats à l'augmentation. Puis, l' sera ajouté à cet ensemble pour ajuster la diminution qui n'a pu être absorbée par l'augmentation des autres variables duales. Finalement, la montée duale sera exécutée pour tous les clients. À partir de la solution duale ainsi obtenue, une nouvelle solution primale est calculée, permettant ainsi d'estimer le progrès de la réduction d'écart entre $v^+(P)$ et $v^+(D)$, et voir de nouveau les violations qui se présentent.

Nous présentons dans ce qui suit l'algorithme d'ajustement primal-dual. Pour cela, nous définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
 P_l^+ &= \{i \in P^+ : \mu_l > C_{il}\}, \forall l \in L, \\
 P^* &= \{i \in P : \sum_{l \in L} \max(0, \mu_l - C_{il}) = f_i\}, \\
 P_l^* &= \{i \in P^* : \mu_l \geq C_{il}\}, \forall l \in L, \\
 L_i^+ &= \{l \in L : P_l^* = \{i\}\}, \forall i \in P^*.
 \end{aligned}$$

Nous définissons aussi :

$$\begin{aligned}
 i'(l) &= \arg \min_{i \in P^+, i \neq i^+(l)} \{C_{il}\}, \forall l \in L, \\
 C_l^- &= \max_{i \in P} \{C_{il} : \mu_l > C_{il}\}, \forall l \in L.
 \end{aligned}$$

En se basant sur ces définitions, nous pouvons déduire que si $|P_l^+| \leq 1, \forall l \in L$, la solution primale courante est optimale, car alors aucune des conditions

des écarts complémentaires n'est violée. Sinon, dans le cas où P_l^* contient un seul élément, alors l'augmentation de μ_l est limitée par une seule contrainte de type (4.2). À chaque itération, une fois réduite la valeur d'une variable $\mu_{l'}$, le sous-ensemble de clients candidats à l'augmentation est ainsi constitué des l tels que $P_l^* = \{i^+(l')\}$ ou $P_l^* = \{i'(l')\}$, car certains de ces clients risquent de voir augmenter la valeur de leur variable duale suite à la diminution de la valeur de $\mu_{l'}$.

L'algorithme d'ajustement primal-dual s'énonce alors comme suit :

1. Initialiser $v_D = v^+(D)$, $v_P = v^+(P)$, $\delta = 0$; soit l le premier client dans L .
2. **Si** $|P_l^+| \leq 1$, **alors** aller à (9).
3. **Si** $L_{i^+(l)}^+ = \emptyset$ et $L_{i'(l)}^+ = \emptyset$, **alors** aller à (8).
4. Pour chaque i tel que $\mu_l > C_{il}$, incrémenter S_i par $\mu_l - C_{il}^-$, puis décroître μ_l à C_{il}^- .
5. (a) Poser $L^+ = L_{i^+(l)}^+ \cup L_{i'(l)}^+$ et exécuter la procédure de montée duale.
 (b) Augmenter L^+ par l et exécuter la procédure de montée duale.
 (c) Poser $L^+ = L$ et exécuter la procédure de montée duale.
 (d) Mettre à jour les ensembles P^* , P^+ , P_l^* et P_l^+ .
6. **Si** μ_l n'a pas repris sa valeur, **alors** retourner à (2).
7. Identifier une solution primale en utilisant les équations (4.5) et (4.6); soit $v^+(P)$ la valeur de cette solution.
8. **S'il** n'y a pas d'amélioration (ni $v^+(D) > v_D$, ni $v^+(P) < v_P$), **alors** $\delta = \delta + 1$; **sinon**, $\delta = 0$, puis poser $v_D = v^+(D)$ et $v_P = v^+(P)$.
9. **Si** $v_D \geq v_P$ ou $\delta = \delta_{max}$, **alors** arrêter; **sinon**, passer au client suivant et retourner à (2).

4.1.3 Calcul d'une solution réalisable initiale

À partir de la meilleure solution primale identifiée par la procédure d'ajustement primal-dual, $(\hat{X}_i, \hat{Z}_{il})$, nous calculons les valeurs des variables X_i^h , Y_{ij}^h et Z_{ijl}^h , puis nous déterminons les valeurs des variables W_j , T_{ij} et T_i^h . Nous rappelons d'abord que : $\hat{h}_i = \arg \min_{h \in H} \{c_i^h\}$ et $\hat{j}_{il} = \arg \min_{j \in S_i} \{c_{jl} + \frac{n_l}{Q} \tilde{f}_j + v_l \frac{c_{jl}}{C_s}\}$.

Ainsi,

$$(\hat{Z}_{il} = 1) \Rightarrow \begin{cases} Z_{i\hat{j}_{il}}^{\hat{h}_i} = 1, \\ Z_{ijl}^h = 0, \quad \forall h \neq \hat{h}_i \text{ et } j \neq \hat{j}_{il}, \end{cases}$$

$$(\hat{Z}_{il} = 0) \Rightarrow Z_{ijl}^h = 0, \quad \forall h \in H, j \in S_i.$$

Les valeurs des variables Y_{ij}^h sont données par les relations suivantes :

$$(\hat{Z}_{il} = 1) \Rightarrow \begin{cases} Y_{i\hat{j}_{il}}^{\hat{h}_i} = 1, \\ Y_{ij}^h = 0, \quad \forall h \neq \hat{h}_i \text{ et } j \neq \hat{j}_{il}, \end{cases}$$

$$(\hat{Z}_{il} = 0) \Rightarrow Y_{ij}^h = 0, \quad \forall h \in H, j \in S_i.$$

Les valeurs des variables \hat{X}_i sont données par les relations suivantes :

$$(\hat{X}_i = 1) \Rightarrow \begin{cases} X_i^{\hat{h}_i} = 1, \\ X_i^h = 0, \quad \forall h \neq \hat{h}_i, \end{cases}$$

$$(\hat{X}_i = 0) \Rightarrow X_i^h = 0, \quad \forall h \in H.$$

Finalement, les valeurs des variables W_j , T_{ij} et T_i^h sont données par les équations suivantes :

$$W_j = \left\lceil \frac{1}{Q} \sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ijl}^h \right\rceil, \quad \forall j \in S_i, \quad (4.7)$$

$$T_{ij} = \left\lceil \frac{1}{C_s} \sum_{h \in H} \sum_{l \in L} \mu_l Z_{ijl}^h \right\rceil, \quad \forall i \in P, j \in S_i, \quad (4.8)$$

$$T_i^h = \left\lceil \frac{1}{C_p} \sum_{j \in S_i} \sum_{l \in L} \mu_l Z_{ijl}^h \right\rceil, \quad \forall h \in H, i \in P. \quad (4.9)$$

4.2 Méthode d'amélioration locale

Après la détermination au moyen des équations (4.7) et (4.9) du nombre de véhicules qui relient les centrales aux plates-formes et les plates-formes aux satellites, ainsi que les capacités des satellites, nous appliquons une méthode d'amélioration locale basée sur la fermeture de certains satellites et de certaines plates-formes qui sont ouverts dans la solution réalisable courante. Nous décrivons dans ce qui suit cette procédure de fermeture des satellites et des plates-formes, appelée méthode d'amélioration locale.

4.2.1 Principe

Fermeture des satellites

Dans le but de réaliser des économies lors du processus d'acheminement des produits, on essaie de répartir les produits qui transitent d'un satellite j vers des clients sur d'autres satellites voisins de j . Considérant successivement chaque satellite j servi depuis une plate-forme i ($j \in \bar{S}_i$, l'ensemble des satellites servis depuis i dans la solution courante), la capacité W_j est réduite à zéro (ce satellite est alors dit *fermé*) afin d'étudier l'impact du service des clients $l \in L_j$ à partir d'autres satellites $\bar{j} \in \bar{S}_i$, où L_j est l'ensemble des clients servis depuis j dans la solution courante. Un satellite j servi depuis une plate-forme i est dit *candidat à la fermeture* s'il est possible de réaffecter tous les clients $l \in L_j$ à d'autres satellites dans l'ensemble \bar{S}_i . Les satellites candidats à la fermeture sont examinés en ordre décroissant du ratio r_s qui exprime les coûts totaux associés au satellite par unité de capacité :

$$r_s = \frac{1}{W_j} \left(\sum_{l \in L_j} c_{jl} + \tilde{f}_j W_j + c_{ij} T_{ij} \right), \quad j \in \bar{S}_i. \quad (4.10)$$

Une fois les satellites ordonnés selon ce ratio, la méthode évalue l'impact de

la fermeture pour un sous-ensemble de satellites, ceux jugés les plus intéressants selon la valeur du ratio r_s . Puis, la méthode procède à la fermeture d'un de ces satellites, si celle-ci est jugée intéressante. Nous verrons les détails dans la prochaine sous section. Notons que la méthode examine les plates-formes dans un ordre arbitraire, puis, pour chaque plate-forme, tente de fermer certains satellites reliés à cette plate-forme en réaffectant le flot vers d'autres satellites également reliés à la même plate-forme. Ainsi, l'ordre dans lequel les plates-formes sont examinées est sans importance, puisque la méthode examine indépendamment chaque ensemble \overline{S}_i , étant donné que $\bigcap_i \overline{S}_i = \emptyset$.

Fermeture des plates-formes

De façon similaire, une plate-forme i servie depuis une centrale h est dite *candidate à la fermeture* s'il est possible de réaffecter tous les satellites $j \in S_i$ à d'autres plates-formes dans l'ensemble P_h , contenant les plates-formes servies depuis la centrale h dans la solution courante. Les plates-formes candidates à la fermeture sont examinées en ordre décroissant du ratio r_p qui exprime les coûts d'acheminement des biens et de fonctionnement de la plate-forme par unité de véhicules utilisés :

$$r_p = \frac{1}{T_i^h} \left(\sum_{j \in S_i} c_{ij} T_{ij} + f_i + c_i^h T_i^h \right), \quad i \in P_h. \quad (4.11)$$

Nous verrons dans la prochaine sous-section de quelle façon ce critère est utilisé pour effectuer la fermeture des plates-formes.

4.2.2 Stratégie d'amélioration locale

Une itération de la phase d'amélioration locale consiste à déterminer un ensemble de candidats à la fermeture (satellites ou plates-formes), puis, pour chaque

candidat, à évaluer l'impact de sa fermeture sur la fonction objectif. Le candidat permettant la plus grande amélioration de l'objectif est alors choisi et nous procédons à la fermeture de ce candidat. Si aucun candidat ne permet une amélioration de l'objectif, nous déterminons un nouveau sous-ensemble de candidats à la fermeture, sauf si un nombre maximum d'itérations est atteint.

À chaque itération, si une amélioration est réalisée, alors la solution courante, la valeur de l'objectif, ainsi que la liste des candidats ordonnés selon les critères décrits en (4.10) et (4.11), seront toutes mises à jour. Cette liste est utilisée pour déterminer les sous-ensembles de candidats à chaque itération. Ainsi, nous choisissons les v premiers éléments de cette liste ordonnée comme sous-ensemble de candidats à examiner, où v est un paramètre. Si aucune solution améliorante ne peut être identifiée lors d'une itération, alors un autre sous-ensemble de candidats à la fermeture sera considéré parmi les v suivants.

Pour chaque candidat à la fermeture, nous procédons à la fermeture, puis nous appliquons la montée duale et l'ajustement primal-dual pour évaluer l'impact de la fermeture sur la fonction objectif. Notons que nous pouvons exécuter la montée duale à partir de la solution duale courante, qui reste encore réalisable même après avoir fermé ce candidat. En effet, la fermeture d'un satellite ne peut diminuer la valeur de C_{il} , puisque ce dernier correspond au coût minimum entre chaque plate-forme i et chaque client l . En fermant un satellite, C_{il} ne peut donc qu'augmenter, ou demeurer à la même valeur. Ainsi, l'écart correspondant dans la contrainte (3.43) sera augmenté; la solution duale courante est donc réalisable. Par ailleurs, la fermeture d'une plate-forme revient à poser $f_i = +\infty$, ce qui augmente l'écart correspondant dans la contrainte (3.44); encore une fois, la solution duale courante est donc réalisable.

Plutôt que d'évaluer l'impact de la fermeture d'un candidat en utilisant la montée duale, il aurait été possible de résoudre des modèles de programmation

en nombres entiers qui représentent l'impact de la fermeture d'une plate-forme ou d'un satellite. Nous présentons ces modèles en détails à l'annexe A, bien que nous ne les ayons pas utilisés dans notre implantation.

Procédure d'amélioration locale

1. Sauvegarder la solution initiale dans Sol_Ini de valeur Obj_Sol_Ini et initialiser l'objectif de la meilleure solution ($Obj_Meil_Sol = Obj_Sol_Ini$)
2. Identifier les candidats à la fermeture suivant le critère correspondant et mettre à jour la liste de sous-groupes de candidats.
3. Initialiser k , le compteur du nombre d'itérations sans amélioration : $k = 0$.
4. **Répéter**
 - (a) Identifier les v candidats formant le $(k + 1)^{ème}$ groupe de candidats.
 - (b) Pour chaque candidat du $(k + 1)^{ème}$ groupe, faire
 - Initialiser ($Sol_Cour = Sol_Ini$), fermer le candidat dans la solution courante, appliquer la montée duale et l'ajustement primal-dual pour identifier une nouvelle solution courante, Sol_Cour , et évaluer l'objectif de Sol_Cour , Obj_Sol_Cour .
 - **Si** $Obj_Sol_Cour < Obj_Meil_Sol$, **alors** mettre à jour la meilleure solution : ($Meil_Sol = Sol_Cour$) et ($Obj_Meil_Sol = Obj_Sol_Cour$).
 - (c) **Si** ($Obj_Meil_Sol < Obj_Sol_Ini$), **alors**
 - Mettre à jour la solution initiale ($Sol_Ini = Meil_Sol$).
 - Fermer le candidat, $k = 0$, et retourner à (2).
 - (d) **Sinon** $k = k + 1$;

Jusqu'à ce que le nombre maximum d'itérations sans amélioration soit atteint ($k = maxIter$).

Nous avons appliqué cette procédure d'abord sur les plates-formes, ensuite sur les satellites. Des tests préliminaires ont montré la supériorité de ce choix

sur l'approche inverse consistant à traiter d'abord les satellites, et ensuite les plates-formes.

4.3 Méthode de descente à voisinage variable

Nous proposons d'améliorer la borne supérieure par une méthode de descente à voisinage variable. Nous présentons ci-dessous les structures de voisinages proposées et la méthode d'exploration de ces voisinages.

4.3.1 Structure et exploration des voisinages

Nous proposons deux structures de voisinage :

- Structure de voisinage basé sur les arcs (satellite, client) : un client desservi depuis (h_1, i_1, j_1) , sera desservi depuis (h_1, i_1, j_2) , où j_2 est déjà desservi depuis i_1 . La figure 4.1 illustre le type de mouvement impliqué par ce voisinage.
- Structure de voisinage basé sur les arcs (plate-forme, satellite) : un satellite j_1 desservi depuis (h_1, i_1) sera desservi depuis (h_1, i_2) , où i_2 est déjà desservi depuis h_1 . La figure 4.2 illustre le type de mouvement impliqué par ce voisinage.

L'exploration de chaque voisinage est réalisé au moyen d'une descente simple, basée sur le même processus, indépendamment de la structure des voisinages. Pour la structure basée sur les arcs (satellite, client), nous traitons les clients issus d'une même plate-forme. Pour chacun, nous cherchons dans l'ensemble des satellites voisins, le premier satellite qui peut servir ce client à moindre coût. D'une façon similaire, nous appliquons la descente au niveau des arcs de type (satellite, plate-forme), les satellites issus d'une même centrale étant examinés. Pour chacun, nous cherchons dans l'ensemble des plates-formes voisines, la première plate-forme qui

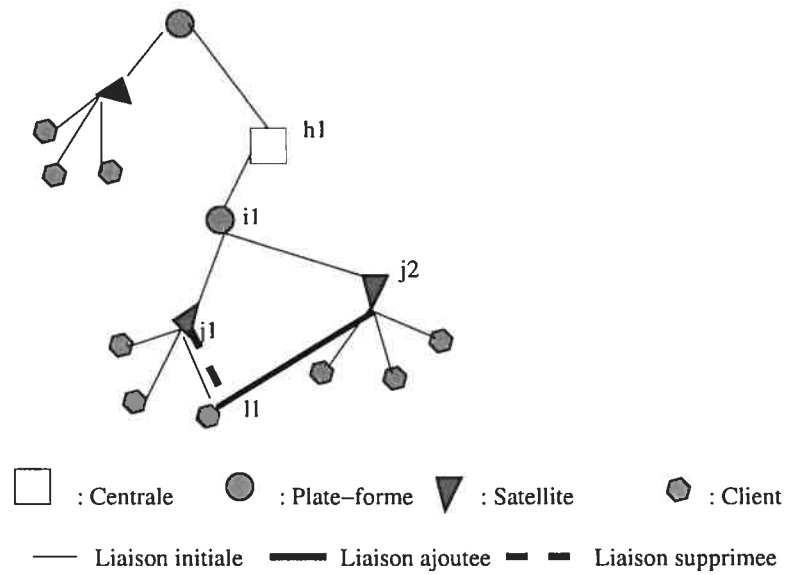


FIG. 4.1 – Échange de l'arc entre un satellite et un client

peut servir ce satellite en réalisant des économies.

4.3.2 Évaluation des voisinages

Mouvement basé sur les arcs de type (satellite, client)

Notons par \bar{W}_j et \bar{T}_{ij} les nouvelles valeurs de W_j et T_{ij} après avoir changé l'arc (j_1, l_1) par l'arc (j_2, l_1) . Ce mouvement sera accepté dans le cas où on réalise des économies par rapport à l'état avant le mouvement, ce qui se traduit par la condition :

$$\sum_{k=1,2} f_{j_k} \bar{W}_{j_k} + \sum_{k=1,2} c_{i_1 j_k} \bar{T}_{i_1 j_k} + c_{j_2 l_1} < \sum_{k=1,2} f_{j_k} W_{j_k} + \sum_{k=1,2} c_{i_1 j_k} T_{i_1 j_k} + c_{j_1 l_1}, \quad (4.12)$$

où

$$\bar{W}_{j_1} = \left\lceil \frac{1}{Q} \left(\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ij_1 l}^h - n_{l_1} \right) \right\rceil, \quad (4.13)$$

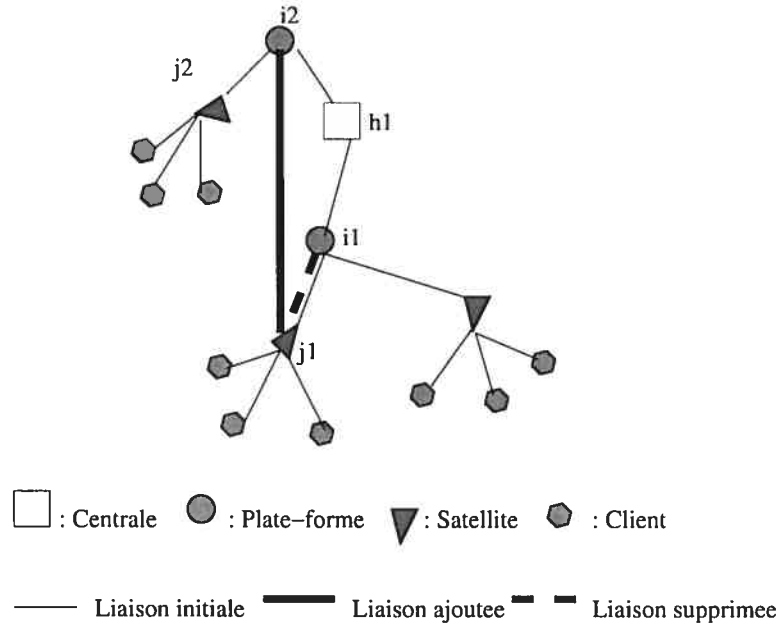


FIG. 4.2 – Échange de l'arc entre une plate-forme et un satellite

$$\bar{W}_{j_2} = \lceil \frac{1}{Q} (\sum_{h \in H} \sum_{i \in P} \sum_{l \in L} n_l Z_{ij_2l}^h + n_{l_1}) \rceil, \quad (4.14)$$

$$\bar{T}_{i_1 j_1} = \lceil \frac{1}{C_s} (\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} v_l Z_{i_1 j_1 l}^h - v_{l_1}) \rceil, \quad (4.15)$$

$$\bar{T}_{i_1 j_2} = \lceil \frac{1}{C_s} (\sum_{h \in H} \sum_{l \in L} v_l Z_{i_1 j_2 l}^h + v_{l_1}) \rceil. \quad (4.16)$$

Mouvement basé sur l'arc de type (plate-forme, satellite)

Notons par \bar{T}_{ij} , \bar{T}_i^h et \bar{X}_i^h les nouvelles valeurs de T_{ij} , T_i^h et X_i^h après avoir changé l'arc (i_1, j_1) pour l'arc (i_2, j_1) . Notons également par L_{j_1} l'ensemble de clients desservis depuis le satellite j_1 .

Ce mouvement sera accepté si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f_{i_1} \bar{X}_{i_1}^{h_1} + \sum_{k=1,2} c_{i_k}^{h_1} \bar{T}_{i_k}^{h_1} + c_{i_2 j_1} \bar{T}_{i_2 j_1} < f_{i_1} X_{i_1}^{h_1} + \sum_{k=1,2} c_{i_k}^{h_1} T_{i_k}^{h_1} + \sum_{k=1,2} c_{i_k j_1} T_{i_k j_1}, \quad (4.17)$$

où

$$\bar{X}_{i_1}^{h_1} = \begin{cases} 0, & \text{si } j_1 \text{ est le seul satellite desservi depuis } i_1, \\ X_{i_1}^{h_1}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\bar{T}_{i_1}^{h_1} = \lceil \frac{1}{C_p} (\sum_{j \in S_{i_1}} \sum_l v_l Z_{i_1 j l}^{h_1} - \sum_{k \in L_{j_1}} v_k) \rceil, \quad (4.19)$$

$$\bar{T}_{i_2}^{h_1} = \lceil \frac{1}{C_p} (\sum_{j \in S_{i_2}} \sum_l v_l Z_{i_2 j l}^{h_1} + \sum_{k \in L_{j_1}} v_k) \rceil, \quad (4.20)$$

$$\bar{T}_{i_2 j_1} = \lceil \frac{1}{C_s} \sum_{k \in L_{j_1}} v_k \rceil. \quad (4.21)$$

Chapitre 5

Implémentation et analyse des résultats

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs tests effectués sur les trois phases de notre heuristique. Les objectifs de l'expérimentation sont les suivants :

- calibrer les paramètres de l'heuristique en vue d'une meilleure performance ;
- étudier l'impact de chacune des trois phases de l'heuristique sur la qualité de la solution ;
- comparer la solution obtenue avec la résolution des modèles ou de leurs relaxations par CPLEX.

L'heuristique a été développée en C (compilateur cc) sur une station SUN (Ultra-10 à 300 MHz et 512 MO de mémoire vive). La méthode a été testée sur une application réelle comprenant deux centrales, 93 plates-formes, 320 satellites et 722 clients. Dans le modèle désagrégé (3.14) à (3.23), le nombre des variables Z_{ijl}^h est égal à 458014, alors que le nombre de contraintes est de l'ordre de $2 \times |P| \times |S| \times |L| = 42973440$. Il s'agit donc d'un modèle de grande taille qui ne peut être résolu, en pratique, par une méthode exacte.

Les mesures de performance utilisées dans nos tests sont :

- le temps d'exécution en minutes, noté Δ_t ;
- la valeur de l'objectif du modèle $M4$, (3.1) à (3.13), notée Z .

5.1 Calibrage des paramètres

Rappelons que v définit la taille d'un sous-groupe de candidats à la fermeture lors de la phase d'amélioration et que $MaxIter$ définit le nombre maximum d'itérations successives sans amélioration lors de cette même phase. Nous désignons par $|\overline{P}|$ le nombre de plates-formes ouvertes (utilisées dans la meilleure solution réalisable) et par $|\overline{S}|$ la cardinalité de l'ensemble \overline{S} des satellites ouverts, alors que $|\overline{PS}|$ est le nombre de liaisons utilisées entre les plates-formes et les satellites. Ces valeurs donnent une indication sur la structure de la solution, en particulier, sur le nombre de satellites et de plates-formes fermés suite à l'exécution de la méthode d'amélioration locale.

Nous présentons d'abord, dans le tableau 5.1 les résultats générés par les différentes phases de l'heuristique en faisant varier le paramètre ϵ , utilisé dans la méthode de montée duale, et en fixant $(v, MaxIter) = (2, 4)$ (choix que nous justifierons par la suite en présentant les tests réalisés sur les valeurs de ces deux paramètres). Dans ce tableau, les différentes phases sont dénotées ainsi :

- I : Exécution de la montée duale avec ajustement primal-dual.
- $I + III$: Phase I + exécution de la descente à voisinage variable.
- $I + II$: Phase I + exécution de l'amélioration locale.
- $I + II + III$: Les trois phases de l'heuristique.

La méthode est sensible à la valeur de ϵ , car la valeur de l'objectif Z varie significativement suivant la valeur de ϵ ; cette variation est cependant difficile à prévoir. Nous pouvons conclure aussi qu'il est préférable d'effectuer la phase II avant la phase III , puisque la valeur de l'objectif Z suite à l'exécution de $I + II$ est généralement inférieure à sa valeur suite à l'exécution de $I + III$. Aussi, nous constatons que les temps requis pour l'exécution de la phase II sont importants, alors que les deux autres phases s'exécutent rapidement. La meilleure solution est obtenue par l'exécution des trois phases pour $\epsilon = 1.9$

ϵ	<i>Phases</i>	<i>Z</i>	$(\overline{P} , \overline{PS} , \overline{S})$	Δ_t
$\epsilon = 1.9$	<i>I</i>	230304324	(17, 265, 192)	2
	<i>I + III</i>	190577628	(17, 165, 156)	4
	<i>I + II</i>	168027462	(12, 191, 173)	28
	<i>I + II + III</i>	144862680	(13, 141, 138)	31
$\epsilon = 1.5$	<i>I</i>	213194978	(15, 247, 189)	2
	<i>I + III</i>	178493227	(15, 165, 153)	5
	<i>I + II</i>	179078979	(13, 208, 185)	18
	<i>I + II + III</i>	152130500	(15, 151, 142)	21
$\epsilon = 0.9$	<i>I</i>	239248932	(17, 272, 194)	3
	<i>I + III</i>	199302385	(17, 174, 160)	6
	<i>I + II</i>	183441625	(13, 208, 177)	29
	<i>I + II + III</i>	157591783	(14, 148, 143)	32
$\epsilon = 0.5$	<i>I</i>	223992110	(16, 256, 194)	3
	<i>I + III</i>	187741030	(17, 170, 158)	6
	<i>I + II</i>	178861848	(13, 198, 179)	30
	<i>I + II + III</i>	155074950	(14, 146, 144)	33

TAB. 5.1 – Comparaison des différentes phases de l'heuristique

En fixant ϵ à 1.9, l'exécution de la phase d'amélioration locale apporte un gain de $\frac{230304324-168027462}{230304324} \times 100 = 27.1\%$. Les résultats de la phase $I + II$, ainsi que ceux de $I + II + III$ sont présentés dans le tableau 5.2 pour des valeurs différentes de $(v, MaxIter)$. Les meilleures solutions sont généralement obtenues lorsque $v = 2$, ce qui indique qu'il est inutile d'examiner de trop longues listes de candidats dans la méthode d'amélioration locale. Nous constatons aussi que, lorsque $MaxIter = 4$, les solutions ne sont que légèrement meilleures que lorsque $MaxIter = 3$. Nous ne jugeons donc pas utile de considérer des valeurs plus grandes que 4, qui augmenteront le temps d'exécution et ne mèneront probablement qu'à de faibles améliorations de la valeur de l'objectif. La figure 5.1 illustre les variations des phases $I + II$ et $I + II + III$ en fonction des valeurs de $MaxIter$ et de v . Nous constatons que, peu importe $(v, MaxIter)$, l'ajout de la phase III permet d'améliorer significativement la valeur de Z . Par exemple, pour $(v, MaxIter) = (2, 4)$, la phase III entraîne une amélioration de $\frac{168027462-144862680}{168027462} \times 100 = 13,8\%$ de la valeur de l'objectif. Cette amélioration se traduit par une légère augmentation du nombre de plates-formes utilisées, combinée toutefois à une diminution du nombre de liens utilisés entre les plates-formes et les satellites, de même qu'entre les satellites et les clients.

$\epsilon = 1.9$								
$(v, MaxIter)$	<i>Phase I + II</i>				<i>Phase I + II + III</i>			
	Z	$(\bar{P} , \bar{PS} , \bar{S})$	Δ_t	Z	$(\bar{P} , \bar{PS} , \bar{S})$	Δ_t		
(1, 2)	207881591	(14, 237, 178)	3	177871284	(16, 169, 145)	6		
(2, 2)	182039541	(13, 204, 171)	7	156303180	(14, 145, 138)	9		
(3, 2)	179526221	(13, 203, 170)	13	150947833	(14, 139, 133)	15		
(4, 2)	177659726	(13, 199, 177)	22	153439322	(14, 144, 140)	25		
(1, 3)	182213170	(12, 203, 16)	9	156833636	(13, 144, 138)	11		
(2, 3)	168027463	(12, 191, 173)	20	145168381	(13, 143, 137)	23		
(3, 3)	176701592	(13, 198, 170)	17	150054477	(14, 137, 132)	19		
(4, 3)	176250356	(13, 196, 175)	44	152521294	(14, 142, 139)	47		
(1, 4)	182213170	(12, 203, 168)	9	155904970	(13, 142, 136)	11		
(2, 4)	168027462	(12, 191, 173)	28	144862680	(13, 141, 138)	31		
(3, 4)	174584487	(13, 192, 166)	28	149735570	(14, 136, 133)	30		
(4, 4)	176250356	(13, 196, 175)	52	152521294	(14, 142, 139)	55		

TAB. 5.2 – Comparaison en fonction des phases pour $\epsilon = 1.9$

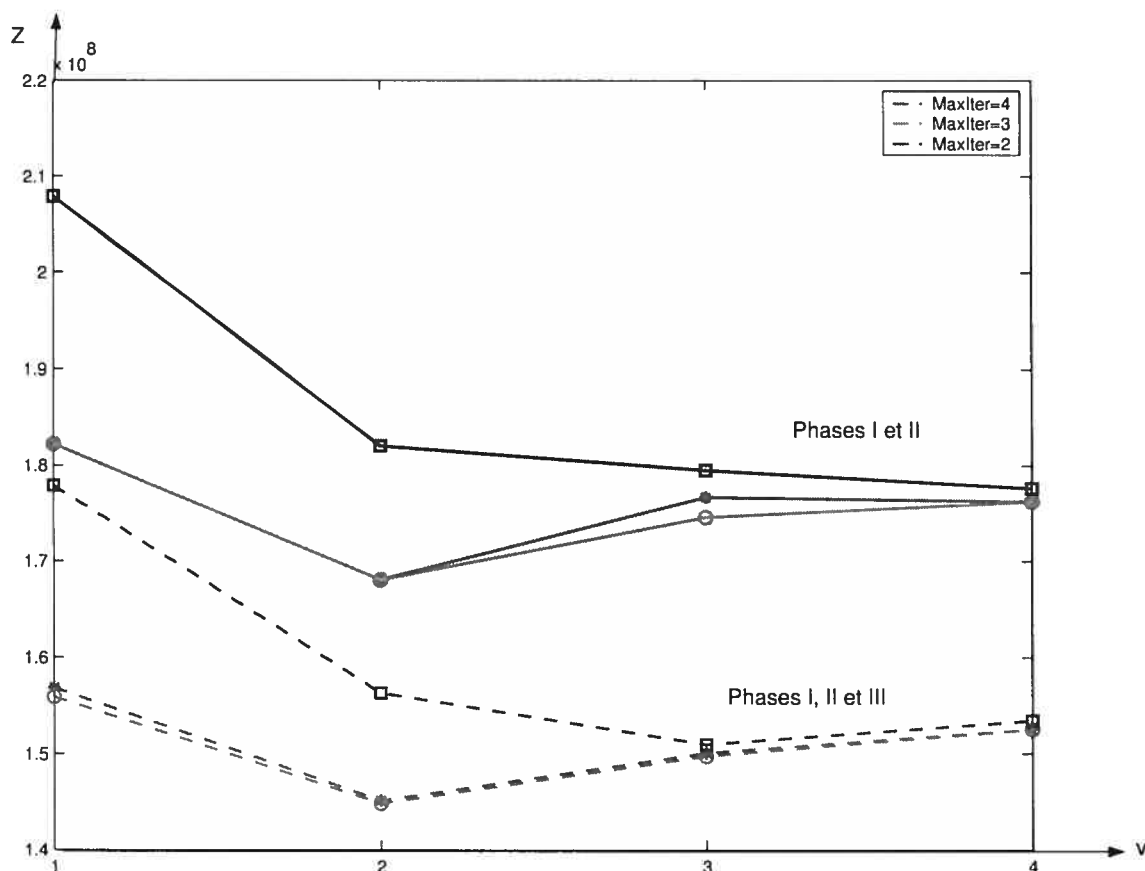


FIG. 5.1 – Evolution de l'objectif en fonction de la phase III pour $\epsilon = 1.9$

5.2 Comparaison des méthodes

Gendron, Smet et Strozyk [7] ont tenté de résoudre avec CPLEX plusieurs modèles équivalents au modèle original, mais sans succès : les temps de calculs atteignaient plusieurs jours. Nous avons néanmoins effectué quelques tests avec CPLEX sur des relaxations du modèle original :

- Relaxation à 4 indices, incluant les variables Y_{ij}^h , (3.27) à (3.32) : *R4*.
- Relaxation à 4 indices, après simplification et élimination des variables Y_{ij}^h , (3.34) à (3.37) : *R4S*.

	<i>R4</i>	<i>R4S</i>	<i>R2</i>	<i>Phase I</i>
$Z(PL(M))$	91757471	91757471	93744623	91922118
Δ_t	480	20	10	3
$Z(M)$		93744623	93744623	128798773
Δ_t	> 480	90	15	3

TAB. 5.3 – Comparaison des modèles simplifiés et de leurs relaxations continues

– Relaxation à 2 indices (3.38) à (3.41) : *R2*.

Rappelons, d'après les développements du chapitre 3, que $Z(R4) = Z(R4S) = Z(R2)$ et $Z(PL(R4)) = Z(PL(R4S)) \leq Z(PL(R2))$, où $Z(M)$ est la valeur optimale du modèle M et $PL(M)$ est la relaxation continue du modèle M .

Dans le tableau 5.3, nous présentons les résultats des tests effectués sur les relaxations en nombres entiers *R4*, *R4S* et *R2*, ainsi que sur leurs relaxations continues. Nous comparons également les résultats trouvés avec ceux obtenus par l'exécution de DUALOC à la fin de la phase *I* : $Z(PL(M))$ désigne alors la valeur de l'objectif dual (3.42) à (3.45) à la fin de l'exécution de DUALOC, et $Z(M)$ désigne la valeur de l'objectif du modèle de localisation simple (3.38) à (3.41) pour la meilleure solution primale identifiée par DUALOC.

La comparaison des modèles simplifiés et leurs relaxations continues vérifient la dominance de *R2*, la relaxation continue du modèle (3.38) à (3.41), qui a été démontrée au chapitre 3. Nous constatons que pour le modèle le plus simple à deux indices, *R2*, la relaxation continue exige tout de même un temps de calcul important (10mn), alors que la montée duale obtient une borne inférieure de qualité en peu de temps (3 mn) avec un écart de 1.9%. La solution primale obtenue par DUALOC est cependant un peu éloignée de la solution optimale du modèle *R2* : elle est à $\frac{128798773-93744623}{93744623} \times 100 = 37.4\%$ de l'optimum.

En comparant les phases (avec $\epsilon = 1.9$, $\nu = 2$ et $MaxIter = 4$), nous concluons que les trois phases ensemble ($I + II + III$) conduisent à la meilleure solution parmi l'ensemble des tests effectués. La valeur de cette solution est 144862680 (voir tableau 5.1). Cette meilleure solution est à moins de $\frac{144862680-93744623}{93744623} \times 100 = 54.5\%$ de l'optimum (lorsqu'on la compare avec la borne inférieure donnée par le modèle $R2$), ce qui est élevé. Nous croyons que cet écart important s'explique en grande partie par la piètre qualité de la borne inférieure qui provient de la relaxation des contraintes d'intégralité sur les variables W_j , T_i^h et T_{ij} . En effet, la solution réalisable initiale obtenue à partir de cette relaxation à la fin de la phase I (la valeur de cette solution est 230304324, voir tableau 5.1) est à $\frac{230304324-93744623}{93744623} \times 100 = 145.7\%$ de cette borne inférieure, ce qui en indique la piètre qualité. La meilleure solution obtenue à la fin de la phase III , améliore cette solution initiale de $\frac{230304324-144862680}{230304324} \times 100 = 37.0\%$, ce qui illustre la bonne performance de notre méthode heuristique.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème de localisation dans un système de distribution où les produits sont acheminés à partir des centrales vers des plates-formes. À chaque plate-forme est associé un ensemble de satellites qui permettent d'acheminer les produits vers les clients. Chaque satellite doit être approvisionné depuis une unique plate-forme, qui doit elle-même être approvisionnée depuis une unique centrale. Ce problème est dérivé d'une application réelle d'un système de distribution dont la caractéristique majeure est présentée dans la structure des coûts qui sont donnés en fonction de nombre de véhicules qui acheminent les produits, contrairement à ce que nous retrouvons dans la majorité des problèmes de localisation, où le coût de transport linéaire est donné en fonction de nombre de produits. La structure hiérarchique à trois niveaux contribue aussi à l'originalité du problème. Les instances réelles de ce problème combinatoire sont de très grande taille ce qui rend les outils commerciaux d'optimisation incapables d'identifier une solution optimale en des temps raisonnables.

Malgré la complexité théorique de ce problème de localisation, nous avons pu résoudre le problème pour une instance de grande taille par une heuristique procédant en trois phases et basée sur des méthodes d'optimisation (calcul des bornes par relaxation, montée duale, réoptimisation par ajustement primal-dual, amélioration locale et descente à voisinage variable). Nous constatons que l'amélioration locale et la descente à voisinage variable sont des phases importantes pour la détermination d'une bonne solution réalisable. Ainsi, la solution réalisable initiale calculée à la fin de la première phase est à 145.7% de la borne inférieure. L'exécution de la phase d'amélioration locale apporte un gain de 27.1%,

alors que la descente à voisinage variable fournit un gain additionnel de 13.8%.

Nous signalons toutefois que la méthode manque de robustesse car les résultats varient significativement en fonction des valeurs des paramètres $(\epsilon, v, MaxIter)$. Nous proposons d'améliorer la robustesse de la méthode en modifiant, par exemple, les critères de choix des candidats à la fermeture lors de la deuxième phase, ou en améliorant la solution initiale par introduction de la relaxation lagrangienne. Les extensions de ce sujet sont très variées. En effet, nous pouvons ajouter la contrainte temporelle au modèle de base pour assurer la livraison des produits en temps réel, ce qui donne au problème un aspect plus réaliste. Également, nous pouvons combiner le problème de localisation avec celui des tournées. Enfin, nous proposons la possibilité d'implémenter la descente à voisinage variable en remplaçant la simple descente par une méthode tabou ou de recuit simulé, afin de mieux explorer les voisinages spécifiés. Il serait aussi intéressant d'étendre l'heuristique à d'autres structures de voisinages.

Bibliographie

- [1] CHIYOSHI F.Y., Galvão R.D., «A Statistical Analysis of Simulated Annealing Applied to the p -Median Problem», *Annals of Operations Research*, vol. 96, 2000, pp. 61-74.
- [2] CORNUEJOLS G., Fisher M.L. et Nemhauser G.L., «Location of Bank Accounts to Optimize Float : An Analytical Study of Exact and Approximate Algorithms», *Management Science*, vol. 23, 1977, pp. 789-810.
- [3] EILON S., Galvão R.D., «Single and Double Vertex Substitution in Heuristic Procedures for the p -median Problem», *Management Science*, vol. 24, 1978, pp. 1763-1766.
- [4] ERLINKOTTER D., «A Dual Procedure for Uncapacitated Facility Location», *Operations Research*, vol. 26, 1978, pp. 992-1009.
- [5] GALVÃO R.D., «Uncapacitated Facility location Problems : Contributions», *Pesquisa Operacional*, vol. 24, 2004, pp. 7-38.
- [6] GALVÃO R.D., Raggi L.A., «A Method for Solving to Optimality Uncapacitated Location Problems», *Annals of Operations Research*, vol. 18, 1989, pp. 225-244.
- [7] GENDRON B., Semet F. et Strozyk C., «An Adaptative Distribution System», *TRANSTECH Transport Technology Product and Process Innovation Management*, Presses Universitaires de Valenciennes, 2002, pp. 36-42.
- [8] GLOVER F., «Tabu Search I», *ORSA Journal on Computing*, vol. 1, 1989, pp. 190-206.

- [9] GLOVER F., «Tabu Search II», *ORSA Journal on Computing*, vol. 2, 1990, pp. 4-32.
- [10] HAKIMI S.L., «Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph», *Operations Research*, vol. 12, 1964, pp. 450-459.
- [11] HALE T.S., Moberg C.R., «Location Science Research : A Review», *Annals of Operations Research*, vol. 123, 2003 , pp. 21-35.
- [12] HANSEN P., Mladenovic N., «Variable Neighborhood Search for the p -Median», *Location Science*, vol. 5, 1998, pp. 207-226.
- [13] KIRKPATRICK S., Gelatt C.D., Vecchi M.P., «Optimization by Simulated Annealing», *Science*, vol. 220, 1983, pp. 671-680.
- [14] KUHN A.A., Hamberger M.J., «A Heuristic Program for Locating Warehouses», *Management Science*, vol. 9, 1963, pp. 643-666.
- [15] MLADENOVIC N., Hansen P., «Variable Neighbourhood Decomposition Search», *Computers and Operations Research*, vol. 24, 1997, pp. 1097-1100.
- [16] REVELLE C.S., «Review, Extensions and Predictions in Emergency Service Siting Models», *European Journal of Operational Research*, vol. 40, 1989, pp. 58-69.
- [17] SCOTT A.J., «Dynamic Location-Allocation Systems : Some Basic Planning Strategies», *Environment and Planning*, vol. 3, 1971, pp. 73-82.
- [18] SEVAUX M., *Métaheuristiques : Stratégies pour l'optimisation de la production de biens et de services*, Laboratoire d'Automatique, de Mécanique d'informatique, Industrielles et Humaines du CNRS dans l'Equipe Systèmes de Production, UVHC, 2004.
- [19] SWERSEY A.J., «The Deployment of Police, Fire and Emergency Medical Units», *Handbooks in OR and MS* edited by S.M Pollock et al), Elsevier Science, vol. 6, 1994, pp. 151-200.

- [20] VAN ROY T., Erlenkotter D., «A Dual Procedure for Dynamic Facility Location», *Management Science*, vol. 28, 1982, pp. 1091-1105.
- [21] VOSS S., «A Reserve Elimination Approach for the p -Median Problem», *Studies in Locational Analysis*, vol. 8, 1996, pp. 49-58.

ANNEXE A

Modélisation du problème de fermeture de satellites

Pour chaque j' , nous définissons :

- $h_{i'}$: la centrale qui sert la plate-forme i' ;
- $J_{i'}$: ensemble de satellites servis depuis i' ;
- $L_{j'}$: ensemble des clients déjà servis depuis le satellite j' (qui est à son tour servi depuis i') ;
- $L_{\bar{j}}$: ensemble des clients déjà servis depuis les satellites \bar{j} (eux-mêmes servis depuis i') ;
- $\bar{W}_{j'} = 0$ et $\bar{W}_j = W_j$, $\forall j \in J_{i'} - \{j'\}$;
- $\bar{T}_{i'j'} = 0$ et $\bar{T}_{i'j} = T_{i'j}$, $\forall j \in J_{i'} - \{j'\}$.

Nous définissons aussi les variables binaires ω_j et $\tau_{i'j}$ comme suit :

$$\omega_j = \begin{cases} 1, & \text{si la capacité du satellite } j \text{ est augmentée d'une unité,} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\tau_{i'j} = \begin{cases} 1, & \text{si le nombre de véhicules entre } i' \text{ et } j \text{ est augmenté d'une unité,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle s'écrit alors :

$$\min \sum_{\substack{l \in L_{j'} \\ j \in J_{i'} - \{j'\}}} c_{i'jl}^{h_{i'}} Z_{i'jl}^{h_{i'}} + \sum_{j \in J_{i'} - \{j'\}} \tilde{f}_j \omega_j + \sum_{j \in J_{i'} - \{j'\}} c_{i'j} \tau_{i'j}$$

sujet à

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{i'} - \{j'\}} Z_{i'jl}^{h_{i'}} &= 1, \quad \forall l \in L_{j'} \\ \sum_{l \in L_{j'}} n_l Z_{i'jl}^{h_{i'}} &\leq Q(\bar{W}_j + \omega_j) - N_j, \quad \forall j \in J_{i'} - \{j'\} \\ \sum_{l \in L_{j'}} v_l Z_{i'jl}^{h_{i'}} &\leq C_s(\bar{T}_{i'j} - \tau_{i'j}^{h_{i'}}) - V_j, \quad \forall j \in J_{i'} - \{j'\} \\ Z_{i'jl}^{h_{i'}} &\in \{0, 1\}, \quad \forall l \in L_{j'} \quad j \in J_{i'} - \{j'\} \end{aligned}$$

où N_j et V_j désignent, respectivement, le nombre et le volume des colis déjà servis à partir des satellites $j \in J_{i'} - \{j'\}$.

Modélisation du problème de fermeture de plate-formes

Nous définissons initialement :

- $H_{i'}$: ensemble de plates-formes qui sont servies depuis la même centrale que i' ;
- L_j : ensemble des clients servis depuis le satellite j ;
- $\bar{T}_i^{h_{i'}} = T_i^{h_{i'}}$, $\forall i \in H_{i'} - \{i'\}$ et $\bar{T}_{i'}^{h_{i'}} = 0$.

Nous définissons aussi les variables binaires Y_{ij} et $\tau_i^{h_{i'}}$ comme suit :

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la plate forme } i \text{ où } i \in H_{i'} - \{i'\} \text{ servira avec } j \in J_{i'}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $Y_{i'j} = 0$ pour tout $j \in J_{i'}$.

$$\tau_i^{h_{i'}} = \begin{cases} 1, & \text{si le nombre de véhicules entre } h_{i'} \text{ et } i \text{ est augmenté d'une unité,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle s'écrit alors :

$$\min \sum_{i \in H_{i'} - \{i'\}} c_i^{h_{i'}} \tau_i^{h_{i'}} + \sum_{\substack{i \in H_{i'} - \{i'\} \\ j \in J_{i'}}} c_{ij} Y_{ij}$$

sujet à

$$\sum_{i \in H_{i'} - \{i'\}} Y_{ij} = 1, \quad \forall j \in J_{i'}$$

$$\sum_{j \in J_{i'}} \left(\sum_{l \in L_j} v_l \right) Y_{ij} \leq C_p (\bar{T}_i^{h_{i'}} + \tau_i^{h_{i'}}) - V_{J_{i'}}, \quad \forall i \in H_{i'} - \{i'\}$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in H_{i'} - \{i'\}, j \in J_{i'}$$

où V_{J_j} désigne le total des volumes de colis déjà servis aux clients à partir des satellites j servis eux-mêmes depuis les plates-formes i , tel que $i \in H_{i'} - \{i'\}$.