Université de Montréal

La logique déontique standard et ses fondements intuitifs

par

Micaël Bérubé

Département de philosophie

Faculté des Arts et Sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès arts (M.A)
en philosophie
option enseignement collégial

Juin 2006

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :
La logique déontique standard et ses fondements intuitifs

présenté par :
Micaël Bérubé

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

.......Jean-Pierre Marquis.......
président-rapporteur

.......François Lepage.......
directeur de recherche

.......Daniel Laurier.......
membre du jury

Mémoire accepté le : ....4 décembre 2006....

Résumé

La logique déontique apparaît sous la plume de Georg Henrik von Wright dans son article *Deontic Logic* [1951] désormais jugé classique. Ses travaux furent ensuite repris par plusieurs, incluant Bengt Hansson qui dans *An Analysis of Some Deontic Logics* [1970] décrit ce que l'on considère depuis lors la logique déontique standard (LDS). Toutefois, la découverte de nombreux théorèmes contre intuitifs jette un doute sur la capacité de LDS à normaliser les raisonnements éthiques et légaux.

L'objectif de ce mémoire est premièrement de présenter LDS dans ses détails techniques et ensuite d'examiner le fondement des paradoxes qui l'affligent. Nous allons procéder en deux étapes.

La première partie expose la structure d'un langage symbolique d'où seront puisés les principes de LDS selon deux approches. Par la méthode syntaxique, nous expliquerons comment LDS est constitué à partir d'un nombre restreint d'axiomes accompagnés de règles d'inférences permettant de dériver un ensemble de théorèmes. Par la méthode sémantique, LDS correspondra aux énoncés valides en fonction d'une liste de conditions de vérité attribuant à chaque énoncé du langage symbolique une valeur d'après les propriétés d'une structure abstraite dites de mondes possibles. Une démonstration que les deux approches produisent la même logique suivra.

La deuxième partie s'inspire des travaux de Lennart Åqvist [1987] pour clarifier la notion générale de paradoxe et analyser les plus fameux cas particuliers. Cela conduira à questionner le rôle de l'intuition dans les arguments réfutant supposément la légitimité de LDS comme logique des raisonnements normatifs. Notre étude nous fera conclure que l'intuition ne suffit pas à établir qu'une logique déontique est adéquate et qu'un nouveau critère d'évaluation doit voir le jour.

Mots-clés

Logique déontique • Complétude • Fiabilité • Paradoxe • Intuition

Summary

Deontic logic appeared in full-fledged form for the first time in a now classic article by Georg Henrik von Wright, *Deontic Logic* [1951]. Other philosophers later contributed to von Wright's original project, including Bengt Hansson who described what we now call Standard Deontic Logic (SDL) in his 1970 article *Analysis of Some Deontic Logics*. However, the discovery of numerous counterintuitive theorems shed some doubt on SDL's capacity to formalise valid ethical and legal reasoning.

The purpose of this paper is first to present SDL in full technical detail and then to study the common cause behind the paradoxes that plague the logic. We will proceed in two stages.

The first part of our paper descibes an artificial language designed to express the principes of SDL. Through a proof theoretic approach we will select from this langage a set of axioms and deduce a number of theorems in accordance with simple rules of inference. Through a model theoretic approach, SDL will arise as a set of formulae valid in the class of serial models. We will then demonstrate soundness and completeness of our formal system relative to the set of valid formulae.

The second part of our work follows the methodology of Lennard Åqvist [1987] to clarify the general notion of a paradox and analyse the most famous cases. This will lead us into questionning the role of intuition as a basis for arguments that refute the legitimacy of SDL as an adequate logic of valid normative reasoning. By the end of our study, we conclude that intuition does not suffice to establish which system of deontic logic is adequate, and that another set of critera is necessary.

Keywords

Deontic logic ● Completeness ● Soundness ● Paradox ● Intuition

Table des matières

Remerciements

J'aimerais avant tout remercier mon directeur de recherche François Lepage, qui avec patience m'a guidé dans l'étude de la logique formelle, n'hésitant pas à m'offrir de son temps à la moindre demande. M. Lepage m'a aussi permis d'avoir accès à un financement adéquat tout au long de mes études.

Merci aussi à Tuan Nguyen, Mathieu Bélanger et Jean-Philippe Villeneuve qui m'ont motivé par leur propre intérêt pour les sciences formelles. Le très analytique Tuan a spécialement contribué à ma réflexion en me tolérant avec patience alors que je niais à plusieurs reprises la possibilité de l'analyse conceptuelle.

Ma famille a aussi contribué, moralement et financièrement, à la complétion de ce mémoire. Je songe tout d'abord à mes parents, Bertrand et Claudette Bérubé, à mon frère Damien, ainsi qu'à ma regrettée tante Thérèse Dumaine.

Enfin, je remercie France Périgny d'avoir enduré mes absences tout au long de mon projet d'étude.

À mes parents

1 Introduction

1.1 Présentation générale et bref historique

La logique établit quelles inférences préservent la vérité (inférences valides). Différentes espèces de logique accomplissent ce travail pour différentes catégories d'expressions. La logique déontique tente de formuler la notion de validité pour les inférences dont les expressions constitutives comprennent des termes normatifs : *obligation*, *permission*, *interdiction*, *indifférence*, *engagement*[1].

La validité de *certaines* inférences est déjà décidée par les logiques propositionnelle et prédicative. Il s'agit des expressions bâties à l'aide des connecteurs logiques classiques, des quantificateurs et de l'identité. Par exemple, l'inférence suivante est valide selon les règles de la logique des prédicats :

Toutes les bonnes actions sont belles.
Servir son prochain est une bonne action.
___
Donc servir son prochain est beau.

Mais il existe visiblement certaines inférences valides qui dépassent le cadre des logiques classiques. Considérez :

Nous sommes obligés de quitter le périmètre.
Si nous quittons le périmètre, alors nous laissons les blessés derrière nous.
___
Donc nous sommes obligés de laisser les blessés derrière nous.

Il est obligatoire de porter un pantalon.
___
Donc il est permis et possible de porter un pantalon.

Il est interdit de lancer des balles de neige.
___
Il n'est pas permis de lancer des balles de neige.

---

[1] Notez toutefois qu'il ne s'agit là que de *notre* point de vue sur l'objectif de la logique déontique. Selon l'auteur considéré, on rencontre deux autres conceptions. Selon la première, la logique déontique tente d'indiquer quel est *l'usage* fait des termes normatifs. Selon la seconde, elle tente d'exprimer une *connaissance a priori* à propos du devoir-être, c'est-à-dire un savoir portant sur les concepts normatifs en tant qu'objets d'étude.

Ces arguments semblent valides sans nécessiter l'extraction de prémisses implicites et pourtant, considérés tels quels, ils sont invalides en vertu des logiques classiques. Ces dernières spécifient le *sens* des connecteurs logiques et des quantificateurs, c'est-à-dire l'ensemble de ce qu'on peut déduire d'expressions comportant ces connecteurs et quantificateurs. De la même façon, la logique déontique souhaite accroître la clarté de nos concepts normatifs.

La première tentative de parvenir à cette fin fut celle de Georg Henrik von Wright[2] [1951] qui dans un article intitulé *Deontic Logic* tenta d'analyser le sens des termes normatifs en traçant un parallèle avec les autres opérateurs modaux qu'il classifia ainsi :

Opérateurs modaux			
Aléthiques *(Modes de la vérité)*	Épistémiques *(Modes du savoir)*	Existentiels *(Modes de l'être)*	Déontiques *(Modes de l'obligation)*
Nécessaire	Vérifié	Universalité	Obligatoire
Possible	Incertain	Existence	Permis
Contingent	Falsifié	Vide	Interdit

L'analyse von Wrightienne permit de spécifier quels liens logiques entretiennent les notions déontiques et comment ceux-ci se distinguent des liens entre les autres opérateurs modaux. Il adopte tout d'abord un langage symbolique permettant de former des *noms génériques d'action*, tels que *le* meurtre (par contraste avec *ce* meurtre-*ci*). Si A et B sont des actions, alors $\neg A$ est *l'acte-négation* de A, et $A \vee B$, $A \wedge B$ $A \supset B$ et $A \equiv B$ sont respectivement *l'acte-disjonction*, *l'acte-conjonction*, *l'acte-implication* et *l'acte-équivalence* de A et de B. Sur cette base, von Wright pose que les opérateurs déontiques s'appliquent à des actes. PA indique que l'acte A est permis, OA qu'il est obligatoire. Il parvient alors à exprimer quatre principes et une règle d'inférence propres à la logique déontique, d'où il déduit plusieurs théorèmes dont les fameuses lois de l'engagement (*laws on commitment*) :

[2] Une contribution plus ancienne remonte à Ernst Mally qui dans les années 1920 tenta de formaliser le concept de « vouloir correct ».

Définition de l'obligation	$Op \equiv \neg P \neg p$
Principe de permission	$Pp \vee P\neg p$
Principe de distribution déontique	$P(p \vee q) \equiv Pp \vee Pq$
Principe de contingence déontique	'$O(p \vee \neg p)$' et '$\neg P(p \wedge \neg p)$' ne sont pas valides[3]
Règle d'extensionalité	Si 'p' et 'q' sont logiquement équivalents, 'Pp' et 'Pq' sont logiquement équivalents.
Lois de l'engagement	$Op \wedge O(p \supset q) \supset Oq$ $Pp \wedge O(p \supset q) \supset Pq$ $\neg Pq \wedge P(p \supset q) \supset \neg Pp$ $P(p \supset q \vee r) \wedge \neg Pq \wedge \neg Pr \supset \neg Pp$ $\neg(O(p \vee q) \wedge \neg Pp \wedge \neg Pq)$ $Op \wedge O(p \wedge q \supset r) \supset O(q \supset r)$ $O(\neg p \supset p) \supset Op$
Théorèmes divers	$O(p \wedge q) \equiv Op \wedge Oq$ $Op \vee Oq \supset O(p \vee q)$ $P(p \wedge q) \supset Pp \wedge Pq$

Hormis une différence déjà notée en bas de page, deux caractéristiques de la logique de von Wright ne seront pas reprises par ses successeurs immédiats. Dans la plupart des logiques déontiques qui suivirent, les opérateurs déontiques portent sur des états du monde plutôt que sur des actions. Puisque les connecteurs logiques du système de von Wright ne servent qu'à former des noms d'actions, une formule telle que $p \supset Oq$ n'y a pas de sens puisque Oq n'est pas une action. Pour permettre de symboliser les connections logiques entre propositions les noms d'action furent entièrement abandonnés. Seconde différence, méthodologique cette fois et de moindre importance : von Wright déroule son système grâce à des tables de vérité au lieu d'employer une axiomatique ou une approche sémantique.

Ce mémoire ne vise pas en premier lieu la logique de von Wright mais une autre logique presque identique nommé *Logique déontique standard* (LDS) par Bengt Hansson [1970]. Il s'agit d'un système désormais présenté dans tous les ou-

[3] Selon l'intuition de von Wright, l'obligation de réaliser les tautologies et l'interdiction portant sur une contradiction n'ont pas de sens car seuls les actes contingents peuvent raisonnablement faire l'objet d'un jugement déontique. Or nous verrons que cette réserve ne fut pas retenue lors des développements subséquents de la logique déontique. On compara en effet l'obligation des tautologies, par exemple, à la vérité des énoncés universels portant sur des ensembles vides (« Toutes les licornes sont blanches » est vrai puisqu'il n'y a aucune licorne).

vrages de logique déontique, incluant les plus récents. On expose la logique standard parfois à des fins pédagogiques pour préparer la construction d'un système plus élaboré, parfois pour illustrer les applications possibles de la logique modale. Mais c'est surtout pour poser les paradoxes de la logique déontique que LDS s'avère utile. Étant une quasi reproduction de la logique originale de von Wright, elle prête flanc aux mêmes objections et détermine les défis que la discipline tente de relever depuis 1951. Toute nouvelle logique déontique doit parer les objections auxquelles succombe LDS, en particulier le *paradoxe de Chisholm* et le *paradoxe du Bon Samaritain.* Les paradoxes sont d'ailleurs un constant irritant pour les philosophes qui s'intéressent à la logique déontique car ils ne sont pas arrivés, après plus de cinquante années d'effort, à s'entendre sur un système ne serait-ce que vaguement reconnu comme tolérable.

1.2 Objectifs et division du mémoire

Notre mémoire se veut tout d'abord une présentation technique complète de LDS—rarement trouvée dans la littérature—en tant que variété de la logique modale. Notre second objectif est d'analyser la nature des paradoxes majeurs qui l'étouffent.

Nous divisons le texte en deux parties. La première se compose elle-même de quatre chapitres. Le premier chapitre met en place le langage symbolique employé pour construire LDS et examine quelques considérations ayant présidé à ces décisions syntaxiques. Les deux chapitres suivants définissent LDS comme un ensemble d'énoncés grâce à des procédures habituelles en logique modale, soit l'axiomatique et la sémantique des mondes possibles. Le quatrième chapitre contient les preuves de fiabilité et de complétude démontrant que l'axiomatique de LDS rassemble exactement les vérités logiques propres à une classe de modèles de mondes possibles dits « sériels ».

La deuxième partie laisse de côté les considérations techniques et aborde les difficultés davantage philosophiques concernant le choix des axiomes et des paramètres du modèle. Pour montrer au lecteur un cas typique de réflexion philosophico-déontique, notre point de départ sera un exposé critique de Brian Chellas [1980]. Nous verrons ensuite en quoi les paradoxes de *Ross*, de *Chisholm*, du *Bon Samari-*

tain, des *Obligations contraires* et des *Tautologies* font de LDS une logique hautement contre intuitive. Toutefois, alors qu'ici nous pourrions être tentés d'examiner les très nombreux réaménagements proposés, l'absence presque totale de consensus au sein de la communauté des logiciens déontiques et l'aspect arbitraire des intuitions qui conduisent aux paradoxes nous a plutôt orienté vers un questionnement plus fondamental. C'est ainsi que nous nous consacrons au rôle de l'intuition dans la construction de LDS. Nous tâcherons de déterminer lesquelles, parmi les différentes conceptions de l'intuition, peuvent servir de base pour juger de la valeur d'une logique et si nulle ne le peut, quels correctifs pourront aider la logique déontique à former de plus larges consensus.

2 Aspects techniques de la logique déontique standard

2.1 Introduction

Les développements qui suivent s'inspirent des travaux de Brian F. Chellas [1980], auteur d'un important ouvrage de logique modale. Selon la classification de Chellas, LDS est formellement identique au système de logique modale normal KD, quoique d'interprétation fort différente.

Notre présentation va suivre la démarche typique de la logique formelle :

1) Définition d'un langage artificiel $\mathfrak{L}_S$ (langage standard) composé d'un vocabulaire et des assemblages qu'il permet (les énoncés) ;
2) Définition de LDS à partir des énoncés de $\mathfrak{L}_S$, dont il est un sous-ensemble ;
3) Étude syntaxique du contenu de LDS ;
4) Étude sémantique de LDS ;
5) Preuves de fiabilité et de complétude.

Lors de l'étude syntaxique, nous choisirons un ensemble d'axiomes d'où nous dériverons le contenu de LDS—les *théorèmes*—par un procédé similaire à la déduction naturelle. L'étude sémantique elle se passe d'axiomes. Nous allons plutôt concevoir une classe de structures mathématiques—les modèles—et faire en sorte que les énoncés de notre langage y réfèrent. Le contenu de LDS sera alors défini comme l'ensemble des énoncés qui s'avèrent vrais de toutes les structures de cette classe. Ce sont les énoncés dits *valides*.

La dernière étape vise à établir l'équivalence des deux méthodes employées pour générer LDS. Nous voudrons montrer que *tout théorème est valide et vice versa.* L'intérêt de cette double approche réside en ce que le modèle, une reproduction ensembliste de notre univers, s'évalue plus facilement par l'intuition qu'une collection d'axiomes. La validation d'énoncés est aussi beaucoup plus aisée que la dérivation de théorèmes. Mais parce que l'axiomatique permet de résumer en une poignée de principes l'ensemble de nos intuitions nous allons l'intégrer à notre démarche.

2.2 Langage formel de la logique déontique

Voici tout d'abord les symboles primitifs composant les énoncés de la logique déontique :

DÉFINITION 1 : Sont des *symboles de* $\mathfrak{L}_S$ exactement les symboles suivants :

1) Les atomes $A_1, A_2, \ldots$;
2) Les connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\supset$ et $\equiv$;
3) Le symbole de la négation $\neg$;
4) Les symboles de l'obligation O et de la permission P ;
5) Les parenthèses (et).

Dans la liste qui précède nous retrouvons les symboles logiques habituels additionnés de O et P. Ceux-ci joueront le rôle d'opérateurs modaux s'appliquant à des énoncés dans le but d'exprimer qu'un fait est obligatoire ou permis. Notez l'absence de quantificateurs—la logique déontique standard est propositionnelle.

Nous définissons maintenant les énoncés de $\mathfrak{L}_S$ comme certaines suites de symboles :

DÉFINTION 2 : Un *énoncé de* $\mathfrak{L}_S$ satisfait les conditions suivantes :

i. Tout atome est un énoncé de $\mathfrak{L}_S$;
ii. Si E_1 et E_2 sont des énoncés (distincts ou non), alors les suites de symboles OE_1, PE_1, $\neg E_1$, $(E_1 \wedge E_2)$, $(E_1 \vee E_2)$, $(E_1 \supset E_2)$ et $(E_1 \equiv E_2)$ sont des énoncés ;
iii. Rien d'autre n'est un énoncé.

Cette définition des énoncés de $\mathfrak{L}_S$ indique quels sont les énoncés d'un langage que nous croyons assez riche pour traiter notre sujet[4]. Nous pouvons produire de

[4] Évidemment, cette supposition ne tient pas la route. La plupart des logiciens qui suivirent von Wright tentèrent d'enrichir le langage de la logique déontique pour lui permettre d'exprimer les notions aléthiques, temporelles, dynamiques, épistémiques ou agentielles ainsi que l'implication conditionnelle ou l'implication stricte.

nombreux systèmes de logique déontique en sélectionnant chaque fois un sous-ensemble de $\mathfrak{L}_S$. En effet—remarque importante ici—par « système » nous ne dénoterons jamais autre chose qu'un ensemble d'énoncés. Ce qui distingue les systèmes issus d'un langage donné est seulement leur *contenu*.

2.3 Définition syntaxique de LDS

Dagfinn Follesdal et Risto Hilpinen [Hilpinen, 1971 : 15] résument ainsi la méthode syntaxique :

> In [the syntactical or axiomatic approach], plausible-looking candidates for logical truth are selected as axioms for the notions studied, a sample of consequences (or theorems) is derived from these axioms, and the adequacy of the axiom system is decided by considering these consequences. Deontic formulae are normally interpreted simply by translating them to sentences of ordinary language. The plausibility of putative theorems is judged on the basis of the intuitive plausibility of their ordinary-language counterparts.

Nous éviterons pour l'instant de juger de la valeur des axiomes retenus ou des théorèmes dérivés. Conformément à la conception tout juste présentée, nous proposons une définition qui génère LDS à partir de cinq schémas d'axiomes.

DÉFINITION 3 : Sont des *axiomes de LDS* tous les énoncés issus des schémas suivants :

1) (DfP) $PE_1 \equiv \neg O \neg E_1$
2) (OD) $OE_1 \supset PE_1$
3) (LP1) $E_1 \supset (E_2 \supset E_1)$
4) (LP2) $(E_1 \supset (E_2 \supset E_3)) \supset (E_1 \supset E_2) \supset (E_1 \supset E_3)$
5) (LP3) $(\neg E_1 \supset \neg E_2) \supset ((\neg E_1 \supset E_2) \supset E_1)$

(1) et (2) schématisent les axiomes proprement déontiques. Le premier axiome exprime le sens de l'opérateur de permission en fonction de celui de

l'obligation. Ce qui est permis est ce qui n'est pas obligatoirement pas le cas[5]. Le second axiome dit que ce qui est obligatoire est aussi permis, principe qui nous le verrons exclut les conflits d'obligation. Les principes (3), (4) et (5) sont les axiomes de la logique propositionnelle tels qu'on les retrouve par exemple dans Mendelson [1997]. Nous considérerons en effet la logique déontique comme une simple extension de la logique propositionnelle, sauf pour l'introduction des opérateurs modaux O et P. Quoique la plausibilité de pareils énoncés ne saute pas aux yeux, ils rassemblent en trois formules l'ensemble des principes attendus d'une logique propositionnelle classique, tels que le tiers exclus et le principe de non contradiction.

Sur la base de ces cinq schémas et de l'infinité d'axiomes de même forme qu'ils représentent, nous définissons un énoncé de LDS ainsi :

DÉFINITION 4 : Un énoncé E *appartient à LDS* (noté $\vdash_{\text{LDS}} E$) si et seulement si :

i. E est un axiome, ou
ii. (ROK) $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset E_m$ et $E = (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset OE_m$, ou
iii. (MP) $\vdash_{\text{LDS}} E_1$ et $\vdash_{\text{LDS}} E_1 \supset E$.

Les clauses (ii) et (iii) sont les règles d'inférence de LDS, nommées ROK[6] et modus ponens (MP). La première spécifie que la conséquence d'une conjonction de faits obligatoires est elle-même obligatoire. Par exemple, $OA_1 \supset O(A_2 \supset A_1)$ appartient à LDS, ce qu'on voit facilement en appliquant ROK à l'axiome (3). La seconde règle d'inférence est bien connue et permet de dériver toutes les tautologies de la logique propositionnelle à partir des axiomes (3)-(5).

LDS est l'ensemble de tous les énoncés qui sont des axiomes ou qui s'obtiennent à travers les règles d'inférence.

---

[5] Certaines logiques déontiques standard incorporent deux principes définissant les notions d'interdit et de facultatif, ou bien définissent l'obligation en termes de permission.

[6] La signification de cette abréviation mérite d'être précisée. La lettre R indique qu'il s'agit d'une règle. Le O dans ROK renvoie à l'obligation pour distinguer ROK de RK qui est une règle de la logique modale. K est le nom d'un énoncé particulier que nous allons rencontrer plus bas et qui entretient un lien particulier avec la règle d'inférence.

Nos deux précédentes définitions n'indiquent pas de façon évidente le contenu de LDS au-delà de ses axiomes. Il faut donc appliquer un effort déductif pour révéler les théorèmes de LDS. Les théorèmes qui suivent serviront lors des preuves de fiabilité et de complétude ainsi que pour discuter les paradoxes en deuxième partie.

THÉORÈME 1 : $\vdash_{\text{LDS}} E$ si E est une tautologie.

Preuve :

Nous n'allons pas prouver entièrement ce métathéorème, mais le lecteur est invité à consulter Mendelson [1997 : 33-43] Une esquisse de la preuve peut toutefois être donnée et le lecteur la trouvera à l'annexe I. ■

Nous prendrons dès à présent pour acquis tous les résultats de la logique classique. Par exemple, nous ne prendrons pas la peine de montrer qu'un énoncé est une tautologie avant d'affirmer qu'il appartient à LDS. Lorsque nous ferons appel à la logique classique, nous invoquerons la règle RLP, pour « règle de logique propositionnelle ».

THÉORÈME 2 : $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \supset E_2) \supset (OE_1 \supset OE_2)$ (OK)

Preuve :

1) $\vdash_{\text{LDS}} ((E_1 \supset E_2) \wedge E_1) \supset E_2$ [RLP]
2) $\vdash_{\text{LDS}} (O(E_1 \supset E_2) \wedge OE_1) \supset OE_2$ [ROK : 1]
3) $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \supset E_2) \supset (OE_1 \supset OE_2)$ [RLP : 2] ■

Le théorème OK signifie que lorsqu'il est obligatoire qu'un fait en implique un autre, alors si ce premier fait doit être réalisé, il en sera de même pour le second. Par exemple, s'il est obligatoire de porter son chapeau à la messe, alors si je dois aller à la messe je dois aussi porter mon chapeau. Peu de débat entoure l'adoption de cet énoncé.

THÉORÈME 3 : $\vdash_{\text{LDS}} \neg(OE_1 \wedge O\neg E_1)$ (O)

Preuve :

1) $\vdash_{\text{LDS}} OE_1 \supset PE_1$ [OD]
2) $\vdash_{\text{LDS}} OE_1 \supset \neg O\neg E_1$ [MP : DfP, 1]
3) $\vdash_{\text{LDS}} \neg(OE_1 \wedge \neg\neg O\neg E_1)$ [RLP : 2]
4) $\vdash_{\text{LDS}} \neg(OE_1 \wedge O\neg E_1)$ [RLP : 3] ■

Le théorème O signifie qu'il ne peut y avoir de conflits d'obligation. En d'autres termes, ce n'est pas le cas qu'un fait soit à la fois obligatoire et interdit. Contrairement au précédent théorème, O suscite une grande controverse car il rend impossible les raisonnements où apparaissent des conflits, alors qu'une bonne partie de la réflexion morale tente justement de dénouer pareilles impasses. Toutefois les philosophes qui estiment que la logique déontique exprime un standard de raisonnement acceptable et qu'elle pose les contraintes rationnelles s'appliquant aux codes moraux louangent volontiers ce principe car s'imposer des obligations contradictoires, donc simultanément irréalisables, n'a rien de raisonnable et présuppose la violation préalable des principes logiques. De même les philosophes qui croient en l'existence d'une morale universelle—forcément consistante—dont la logique peut rendre compte acceptent naturellement la présence de O en logique déontique.

Notons au passage qu'il existe de nombreuses axiomatisations équivalentes de LDS. Elles se distinguent par la nature des axiomes sélectionnés au départ ainsi que par celle des règles d'inférences choisies. Nous pouvons par exemple montrer que LDS peut se bâtir en remplaçant OD par O, exprimant plus clairement que LDS repose directement sur l'impossibilité des conflits d'obligation :

THÉORÈME 4 : $\vdash_{\text{LDS}} \neg(OE_1 \wedge O\neg E_1)$ si et seulement si $\vdash_{\text{LDS}} OE_1 \supset PE_1$

Preuve :

Nous avons déjà démontré que O appartient à LDS si OD lui appartient. Or la réciproque est facilement démontrable en renversant la preuve du théorème [T3]. ■

THÉORÈME 5 : $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \wedge E_2) \supset (OE_1 \wedge OE_2)$

Preuve :

1) $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge E_2) \supset E_1$ [RLP]
2) $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge E_2) \supset E_2$ [RLP]
3) $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \wedge E_2) \supset OE_1$ [ROK : 1]
4) $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \wedge E_2) \supset OE_2$ [ROK : 2]
5) $\vdash_{\text{LDS}} O(E_1 \wedge E_2) \supset (OE_1 \wedge OE_2)$ [RLP : 3, 4] ■

Le théorème 4 signifie que l'obligation se distribue sur la conjonction : s'il est obligatoire que deux états se réalisent, alors il est obligatoire que le premier se réalise et aussi que le second se réalise.

THÉORÈME 6 : $\vdash_{\text{LDS}} \neg O \bot$

Preuve :

Ici, $\bot$ prend la place d'une contradiction telle que $\neg E_1 \wedge E_1$ et $\top$ prend la place d'une tautologie. C'est d'ailleurs une tautologie que $E \supset \top$, d'où $\vdash_{LDS} \top$ en prenant pour E n'importe quel énoncé déjà présent dans LDS puis en appliquant MP. Donc :

1) $\vdash_{\text{LDS}} \top$ [RLP]
2) $\vdash_{\text{LDS}} O \top$ [ROK ($m = 1$) : 1]
3) $\vdash_{\text{LDS}} P \top$ [MP : OD, 2]
4) $\vdash_{\text{LDS}} \neg O \neg \top$ [MP : DfP, 3]
5) $\vdash_{\text{LDS}} \neg O \bot$ [RLP : 4] ■

Aucune contradiction n'est donc obligatoire. Notez que toutes les tautologies sont obligatoires, et à plus forte raison tous les théorèmes. Ces résultats s'obtiennent en prenant ROK lorsque $m = 1$ comme à l'étape (2) de la preuve précédente. Un débat entoure d'ailleurs le principe selon lequel les tautologies sont obligatoires. La vérité d'une tautologie échappe entièrement à notre contrôle, mais l'obligation ne porterait que sur des états que nous pouvons éviter. Bailhache [1980] et d'autres tentent d'échapper à la difficulté en disant qu'il s'agit d'une obligation vide que nous accomplissons tous par défaut.

Nos déductions aboutissent ici. Les développements de cette section constituent, nous le rappelons, la méthode syntaxique pour découvrir le contenu de LDS. Elle se nomme ainsi parce que la recherche procède en analysant la seule forme des énoncés, laissant aux locuteurs compétents le soin d'interpréter les résultats. Nous abordons à présent la méthode sémantique, qui elle attribue une signification et une valeur de vérité aux énoncés.

2.4 Définition sémantique de LDS

Comment évaluer la vérité des axiomes de la logique déontique ? Une interprétation des symboles du langage est normalement requise car il faut bien savoir ce qu'une affirmation signifie pour la vérifier. Or l'interprétation par traduction dans la langue naturelle, moyen privilégié de l'axiomatique, cause problème :

> Mally and Grelling's attempts to build systems of deontic and imperative logic illustrate the difficulties involved in [the syntactical] approach. The formulation of our intuitions concerning deontic notions in ordinary language often involves ambiguous expressions such as 'implies', 'requires', etc. In many cases it is difficult to see what are the exact formal counterparts of these intuitions, that is, what our intuitions really pertain to [...] Moreover, a 'literal' translation of formulae such as $Op \supset OOp$, POp, etc., to ordinary language yields sentences which are hardly ever used at all. It is almost impossible to decide whether such sentences are acceptable as principles of deontic logic or not. [Hilpinen, 1971 : 15]

La méthode sémantique semble remédier à ces problèmes. Il s'agit de définir une structure mathématique qui reproduit en quelque sorte la partie de notre univers pertinente à l'analyse des concepts normatifs. Nous allons ensuite interpréter les énoncés en fonction de cette structure : un énoncé sera vrai si la structure satisfait tel critère, faux autrement. Parce que la structure est définie avec une précision mathématique, l'interprétation des axiomes ne pose plus problème[7].

Le type de structure dont il sera question est appelé « modèle » et s'inspire directement des travaux de Kripke [1963]. Intuitivement, l'univers réel semble se découper en mondes. L'exemple du temps est sans doute la plus claire illustration de cette conception. À chaque temps correspond un monde, c'est-à-dire une configuration bien particulière de tout ce qui existe. Dans le monde actuel je rédige mon mémoire, mais dans un monde futur je dors sur la plage tandis que dans un passé pas si distant je prends l'avion vers l'Asie. Pour faire davantage référence à Kripke, l'univers semble aussi se découper en monde possibles. Je pige une carte au hasard dans un jeu ; dans un monde possible, je pige un roi de cœur alors que dans un autre je pige un valet de trèfle, et ainsi de suite. Nous pouvons ainsi imaginer l'univers comme une collection de diapositives ordonnées selon certaines relations (temporelles ou aléthiques dans nos exemples).

En logique déontique nous considérons non pas des mondes futurs ou passés, des mondes possibles ou impossibles, mais des *mondes permis*. Considérons une partie d'échec. Chaque configuration du plateau de jeu est un monde. Supposons maintenant que notre désir est d'emporter la partie, et donc d'éviter d'être mis échec et mat par notre adversaire. Nous pourrions alors exprimer notre situation ainsi : quel que soit l'état actuel de la partie, tous les mondes permis relativement à cet état sont tels que notre roi n'est pas échec et mat. Autrement dit, il est obligatoire pour ce monde-ci que le roi ne soit pas échec et mat. *Plus généralement, un monde permis relativement à un autre monde réalise toutes les obligations propres à ce dernier monde.* Nous appellerons parfois *alternative déontique* un monde permis par un autre.

Remplaçons maintenant nos intuitions par une construction formelle. Un modèle n'est qu'un type bien particulier d'ensemble :

---

[7] Le problème qui néanmoins demeure est celui de la correspondance entre le modèle et l'univers modélisé. Le passage indirect de l'intuition au modèle puis aux énoncés ne pose pas moins de problèmes d'interprétation que celui, direct, de l'intuition aux énoncés. L'avantage certain de la structure, par contre, réside dans son caractère plus « graphique » qui facilite son interprétation.

DÉFINITION 5 : Un *modèle* $\mathfrak{M} = \langle W, R, C \rangle$ est constitué de la façon suivante :

1) Un ensemble infini W d'éléments $w_1, w_2, \ldots$ appelés *mondes* ;
2) Une relation binaire R dite de *permission* entre les mondes ;
3) Une assignation C de l'ensemble des atomes de LDS vers W, appelée *configuration.*

Ce que sont les mondes n'est pas spécifié et il ne faut pas s'inspirer du mot « monde » pour attacher au concept davantage de contenu que nous lui en attribuons par notre définition. Pour l'instant, il peut néanmoins être utile à la compréhension de s'imaginer au départ les mondes comme des espaces vides ou des diapositives vierges. La clause (3) insère ensuite un contenu dans les mondes en spécifiant quels atomes y sont vrais. Enfin, la clause (2) ordonne tous ces mondes pour indiquer quels « passages » d'un monde à l'autre sont permis ou défendus. La nature de la relation peut varier d'un modèle à l'autre, et nous allons justement définir certaines classes de modèles en fonction du type de permissibilité qu'ils présupposent. De même la configuration des mondes individuels peut varier entre les modèles.

Cette structure nous permet d'assigner à chaque énoncé de notre langage une valeur de vérité. La vérité d'un énoncé dépend du modèle selon les spécifications suivantes :

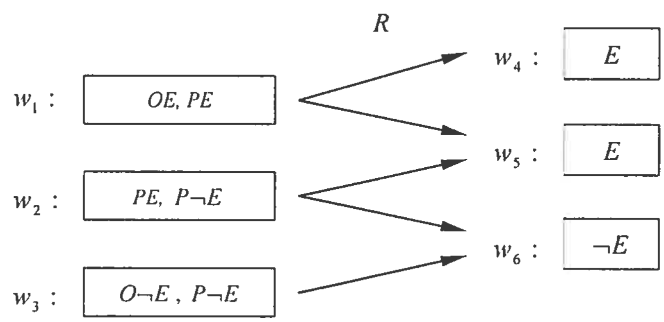
DÉFINITION 6 : Un énoncé (dont la forme est précisée dans les clauses qui suivent) est *vrai pour un monde w d'un modèle* $\mathfrak{M}$ (noté $\models_w^{\mathfrak{M}} E$) dans les conditions suivantes :

1) $\models_w^{\mathfrak{M}} A_n$ si et seulement si $\langle A_n, w \rangle \in C$;
2) $\models_w^{\mathfrak{M}} \neg E_1$ si et seulement si ce n'est pas le cas que $\models_w^{\mathfrak{M}} E_1$;
3) $\models_w^{\mathfrak{M}} E_1 \wedge E_2$ si et seulement si $\models_w^{\mathfrak{M}} E_1$ et $\models_w^{\mathfrak{M}} E_2$;
4) $\models_w E_1 \vee E_2$ si et seulement si $\models_w^{\mathfrak{M}} E_1$ ou $\models_w^{\mathfrak{M}} E_2$;
5) $\models_w E_1 \supset E_2$ si et seulement si $\models_w E_2$ lorsque $\models_w E_1$;
6) $\models_w E_1 \equiv E_2$ si et seulement si $\models_w E_1 \supset E_2$ et $\models_w E_2 \supset E_1$;

7) $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE_1$ si et seulement si $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} E_1$ pour tout w_2 tel que w_1Rw_2 ;

8) $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} PE_1$ si et seulement si $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} E_1$ pour au moins un w_2 tel que w_1Rw_2.

Dans un monde, sont vrais tout d'abord les énoncés atomiques que la configuration du modèle leur assigne. Les énoncés complexes de (2) à (6) sont vrais ou faux en fonction de la valeur des énoncés atomiques à la manière habituelle. Les deux clauses suivantes définissent l'obligation et la permission. Illustrons :



Nous voyons que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE$ et $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} PE$ car E est vrai dans tous les mondes permis pour w_1. Nous pouvons aussi constater que E est permis pour w_2 car E est vrai dans un monde permis pour w_2. Mais puisqu'il ne l'est pas dans tous, ce n'est pas le cas que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} OE$. Le contenu de w_3 est déterminé similairement à w_1 sauf qu'une négation précède E.

La définition de la vérité étant posée, nous allons en distinguer quatre niveaux distincts utiles pour parler de vérité non seulement pour un monde mais pour plusieurs mondes à la fois. Le premier niveau est celui de la vérité pour un monde. Les trois autres niveaux correspondent aux situations suivantes : un énoncé est vrai pour *tous les mondes d'un modèle*, vrai pour *tous les mondes de tous les modèles d'une classe donnée*, ou encore vrai pour *tous les mondes de tous les modèles*. Dans ce dernier cas nous parlerons de validité plutôt que de vérité.

DÉFINITION 7 : Un énoncé E est *vrai pour un modèle* $\mathfrak{W}$ si et seulement si $\models_w^{\mathfrak{M}} E$ pour tous les w de $\mathfrak{W}$. Nous écrivons $\models^{\mathfrak{W}} E$.

DÉFINITION 8 : Un énoncé E est *vrai pour une classe de modèles* $\mathfrak{C}$ si et seulement si $\models^{\mathfrak{W}} E$ pour tous les modèles appartenant à $\mathfrak{C}$. Cela s'écrit $\models^{\mathfrak{C}} E$.

DÉFINITION 9 : Un énoncé est *valide* si et seulement s'il est vrai pour tous les mondes de tous les modèles, ce qui s'écrit $\models E$.

La notion de validité nous intéresse tout particulièrement. Elle tente de capturer l'idée de vérité logique, énoncés dont la valeur de vérité ne change pas selon les circonstances mais demeure vraie quoiqu'il arrive, quel que soit l'aspect de l'univers considéré.

Tout comme nous l'avons fait à la section précédente, nous allons étudier le contenu de LDS grâce à la méthode tout juste présentée. Le lecteur pourra par la même occasion comparer comment s'obtient LDS selon la méthode dont on se sert.

THÉORÈME 7 : $\models E$ si E est une tautologie

Preuve :

Si E est une tautologie, alors il est vrai quelle que soient les valeurs de vérité assignées à ses atomes. Or, cette assignation dépend entièrement de la configuration du modèle. Autrement dit, E est vrai quelle que soit la configuration du modèle, et ce peut importe le monde où il se trouve. Donc E est valide. ■

Tout comme ce fut le cas lors des développements syntaxiques, il s'avère donc que les théorèmes de la logique propositionnelle s'appliquent à la vérité dans un monde. Lorsque nous faisons appel à cette proposition dans nos preuves nous allons encore nous justifier par [RLP].

THÉORÈME 8 : $\models O(E_1 \supset E_2) \supset (OE_1 \supset OE_2)$

Preuve :

Considérons un monde arbitraire d'un modèle quelconque. Supposons que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} O(E_1 \supset E_2)$ et que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE_1$. Par définition, tout monde w_2 permis pour w_1 contient alors $E_1 \supset E_2$ et E_1 [D6.7]. Nous en déduisons facilement que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} E_2$ pour tout w_2 [D6.5]. Il faut donc conclure que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE_2$ [D6.7]. ∎

Ainsi, dans tous les modèles quels qu'ils soient, OK est vrai pour tous les mondes de ces modèles. Nous pouvons montrer qu'il en est de même pour DfP :

THÉORÈME 9 : $\models PE \equiv \neg O \neg E$

Preuve :

Supposons que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} PE$. Alors il existe un monde w_2 permis pour w_1 tel que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} E$ [D6.8]. Dans ce cas, non $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} \neg E$ [D6.2]. Ce n'est donc pas le cas que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} O\neg E$ [D6.7]. Donc $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} \neg O \neg E$ [D6.2]. La preuve dans l'autre sens est tout aussi simple. ∎

On ne peut pas par contre montrer que OD est valide. En fait, on montrera le contraire en donnant un exemple de modèle qui falsifie OD.

THÉORÈME 10 : Non $\models OE_1 \supset PE_1$

Preuve :

Comme contre exemple n'importe quel modèle non sériel suffira. Il s'agit d'un modèle où au moins un monde ne possède aucune alternative déontique. Si un monde w_1 ne possède aucune alternative déontique, alors non $\models^{\mathfrak{M}}_{w_1} PE_1$ puisqu'il n'existe aucun monde w_2 permis pour w_1 tel que $\models^{\mathfrak{M}}_{w_2} E_1$. Un tel monde où OE_1 serait vrai devient donc un monde où OD serait faux, puisque OD prend la forme d'une implication dont la prémisse est vrai mais la conclusion fausse. Or, n'importe quel monde qui ne possède aucune alternative vérifie OE_1 (trivialement) mais falsifie PE_1. Donc OD est invalide. ∎

Nous verrons plus bas que OD est néanmoins valide pour la classe des modèles sériels, c'est-à-dire ceux pour lesquels chaque monde permet au moins un autre monde.

Nous voulons enfin montrer que tout énoncé valide est une obligation, principe discuté au chapitre précédent :

THÉORÈME 11 : Si $\vDash E$ alors $\vDash OE$

Preuve :

Supposons que $\vDash E$. Cela signifie que E est vrai pour tous les mondes de tous les modèles [D9]. Or $\vDash^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE$ si $\vDash^{\mathfrak{M}}_{w_2} E$ pour tout monde w_2 permis pour w_1 [D6.7]. Si E est valide, il est forcément vrai pour toutes les alternatives à w_1. Il faut donc conclure que $\vDash^{\mathfrak{M}}_{w_1} OE$ pour tous les mondes de tous les modèles, ou dit autrement, $\vDash OE$. ■

2.5 *Preuves de fiabilité et de complétude pour LDS*

Dans l'étude d'un système formel, il est d'usage de montrer que les approches syntaxiques et sémantiques mènent aux mêmes résultats. Nous voulons dire par là que les théorèmes que nous obtenons par la méthode syntaxique correspondent aux énoncés valides issus selon la méthode sémantique. Nous allons ici montrer que la logique déontique que nous avons définit est *fiable* relativement aux *modèles sériels* (dont la classe sera dénotée $\mathfrak{C}^s$) puis nous montrerons qu'elle est aussi *complète* par rapport au modèles de cette même classe de modèles[8].

2.5.1 *Preuve de fiabilité*

La *fiabilité* d'un système par rapport à un modèle consiste en ceci, que tout théorème du système est valide pour ce modèle. Nous devons donc démontrer que :

---

[8] Notez que nous ne faisons nullement usage de la classe de modèles sériels comme tel et ne supposons d'ailleurs pas qu'elle existe. Notre façon d'énoncer la fiabilité signifie simplement que « Si un énoncé est théorème de LDS et que M est sériel, alors E est valide pour M ».

$$\text{Si } \vdash_{\text{LDS}} E \text{ alors } \vDash^{\mathfrak{C}^s} E$$

Résumons la démarche de la preuve. Il suffit de montrer que (1) les axiomes de LDS sont valides et que (2) les règles d'inférence préservent la validité. En effet, puisque tous les théorèmes de LDS découlent de ses axiomes, si les deux conditions sont remplies nous aurons effectivement démontré que tous les théorèmes de LDS sont valides.

Nous définissons tout d'abord ce qu'est un modèle sériel :

DÉFINITION 10 : Un modèle $\mathfrak{M}_S$ est sériel si et seulement si, pour tout w_1 de $\mathfrak{M}_S$ il existe un w_2 tel que w_1Rw_2.

Pour valider les axiomes, nous allons montrer que dans chaque cas la sérialité d'un modèle assure la vérité de l'axiome pour tous les mondes de ce modèle. Nous débutons par les axiomes propres à la logique déontique standard.

THÉORÈME 12 : $\vDash^{\mathfrak{C}^s} OE \supset PE$

Preuve :

Soit w_1, un monde quelconque d'un modèle sériel $\mathfrak{M}_S$. Supposons que $\vDash^{\mathfrak{M}_S}_{w_1} OE$. Puisque $\mathfrak{M}_S$ est sériel, il existe un monde w_2 tel que w_1Rw_2 [D10]. Puisque $\vDash^{\mathfrak{M}_S}_{w_1} OE$, nous devons conclure que $\vDash^{\mathfrak{M}_S}_{w_2} E$ en vertu de la définition de l'obligation [D6.7]. Mais puisqu'il existe donc un monde permis pour w_1 où E est vrai, alors $\vDash^{\mathfrak{M}_S}_{w_1} PE$ [D6.8]. Nous avons donc montré que $\vDash^{\mathfrak{M}_S}_{w_1} OE \supset PE$ pour un monde arbitraire w_1 et un modèle sériel quelconque $\mathfrak{M}_S$ [D6.5]. Donc D : $OE \supset PE$ est vrai pour tout monde de tout modèle sériel, c'est-à-dire que $\vDash^{\mathfrak{C}^s} OE \supset PE$. ■

THÉORÈME 13 : $\vDash^{\mathfrak{C}^s} PE \equiv \neg O \neg E$

Preuve :

Nous avons déjà montré que DfP est vrai pour tous les modèles, et donc en particulier pour les modèles sériels [T9]. ■

Pour démontrer la validité des trois axiomes restants, remarquons simplement qu'il s'agit de tautologies et que celles-ci sont valides [T7]. Nous avons donc démontré que les axiomes de LDS sont valides pour la classe des modèles sériels. Il faut désormais établir que tous les théorèmes obtenus à l'aide des règles d'inférence—ROK et MP—sont eux aussi valides.

THÉORÈME 14 : Si $\vDash (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset E_m$ alors $\vDash (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset OE_m$.

Preuve :

Nous allons procéder par induction sur le nombre d'antécédents. Si $n = 0$, alors nous avons pour hypothèse que $\vDash E$ et nous voulons montrer qu'en conséquence $\vDash OE$. Or nous avons déjà prouvé ce fait [T11].

Adoptons maintenant l'hypothèse d'induction (dénotée HI) à l'effet que le théorème soit vrai pour *n*. Montrons qu'en conséquence il est vrai pour $n+1$:

1)	$\vDash (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n \wedge E_{n+1}) \supset E_m$	[HYP]
2)	$\vDash (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset (E_{n+1} \supset E_m)$	[RLP : 1]
3)	$\vDash (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset O(E_{n+1} \supset E_m)$	[HI : 2]
4)	$\vDash O(E_{n+1} \supset E_m) \supset (OE_{n+1} \supset OE_m)$	[T8]
5)	$\vDash (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset (OE_{n+1} \supset OE_m)$	[RLP : 3, 4]
6)	$\vDash (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_{n+1}) \supset OE_m$	[RLP : 5]

Voilà donc le théorème prouvé pour *n* + 1 sur la base de notre hypothèse d'induction. Puisque nous avons de plus prouvé le théorème pour $n = 0$, cela complète l'induction. ■

THÉORÈME 15 : Si $\vDash E_1$ et $\vDash E_1 \supset E_2$ alors $\vDash E_2$

Preuve :

Nous montrons facilement que MP préserve la validité. $\vDash E_1 \supset E_2$ signifie que si $\vDash E_1$ alors $\vDash E_2$ [D6.5]. Puisque nous supposons que $\vDash E_1$, $\vDash E_2$ s'ensuit immédiatement. ■

Passons enfin à la preuve de fiabilité. Elle ne fait que reprendre les propos que nous avons tenus en guise de préambule.

THÉORÈME 16 : (FIABILITÉ) Si $\vdash_{\text{LDS}} E$ alors $\vDash^{\mathfrak{C}^s} E$

Preuve :

Supposons que E soit un théorème de LDS. S'il s'agit d'un de ses axiomes, alors E est valide pour la classe des modèles sériels [T7, T12, T13]. S'il s'agit d'un théorème qui découle des axiomes en vertu des règles d'inférences, E est aussi valide puisque nous avons démontré que les règles préservent la validité [T14, T15]. Puisque tous les théorèmes de LDS sont soit des axiomes, soit des énoncés dérivés à l'aide des règles, tout théorème de LDS est valide pour les modèles sériels. ■

Nous pouvons donc faire confiance aux principes de LDS pour connaître la validité des énoncés dans la classe des modèles sériels. La prochaine étape est de démontrer que la réciproque est elle aussi vraie.

2.5.2 Preuve de complétude

Un système est dit *complet* relativement à un modèle donné si et seulement si tout énoncé vrai dans le modèle est aussi un théorème du système. En ce qui nous concerne, le théorème de complétude à démontrer devient ceci :

$$\text{Si } \vDash^{\mathfrak{C}^s} E \text{ alors } \vdash_{\text{LDS}} E$$

La preuve de complétude est beaucoup plus compliquée que la preuve de fiabilité et un résumé détaillé s'impose avant de débuter. Nous partons de l'hypothèse que E est valide pour la classe des modèles sériels. Cette classe contient un modèle spécial, le *modèle canonique de LDS,* nommé $\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}$. De l'hypothèse il s'ensuit que E est vrai pour ce modèle canonique. Or, une des propriétés fondamentales du modèle canonique est la suivante : tout énoncé vrai pour le modèle canonique de LDS appartient à LDS. Il s'ensuit donc que les énoncés valides pour la classe des modèles sériels appartiennent à LDS, ce qui démontre la complétude.

La preuve peut se diviser en deux grandes étapes. Dans la première, nous devons définir exactement ce qu'est le modèle canonique de LDS pour ensuite démontrer sa sérialité. Nous obtiendrons alors le résultat suivant :

$$\text{Si } \models^{\mathfrak{C}^s} E \text{ alors } \models^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E$$

Pour ce faire, nous aurons besoin des concepts de LDS-déductibilité, de LDS-consistance et de LDS-maximalité. Leurs définitions seront accompagnées de trois théorèmes importants pour la suite, incluant le fameux Lemme de Lindenbaum (théorème 18) selon lequel tout ensemble consistant possède une extension maximalement consistante. Nous utiliserons les concepts de déductibilité et de maximalité ainsi que le Lemme pour montrer que le modèle canonique de LDS est bel et bien sériel (théorème 20).

La seconde étape de la preuve nous conduira à la conclusion que la validité d'un énoncé pour le modèle canonique de LDS entraîne son appartenance au système, ce qui constituera le théorème 24 :

$$\text{Si } \models^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E \text{ alors } \vdash_{\mathrm{LDS}} E$$

Il repose sur le fait qu'un énoncé qui appartient à tous les ensembles LDS-maximaux appartient aussi à LDS (théorème 21) . Or le modèle canonique est construit de sorte que ses mondes soient, *justement*, les ensembles LDS-maximaux. On peut montrer que si un énoncé est vrai pour un monde de $\mathfrak{W}_{\text{LDS}}$ alors cet énoncé appartient dès lors à ce monde (théorème 23). Donc si $\models^{\mathfrak{W}_{\text{LDS}}} E$, alors E est vrai pour tous les mondes de $\mathfrak{W}_{\text{LDS}}$ et appartient aussi à chacun de ces mondes, ce qui signifie qu'il appartient à tous les ensembles maximalement consistants de LDS i.e. il appartient à LDS. En résumé, un énoncé vrai pour tous les mondes du modèle canonique appartient aussitôt à LDS puisqu'il se retrouve dans tous les ensembles LDS-maximaux (théorème 24).

2.5.2.1 Première partie : Définition et sérialité du modèle canonique de LDS

Partons de l'intuition et considérons un ensemble d'énoncés quelconques et les liens logiques qui les unissent. Considérons de plus les règles logiques qui établissent ces liens. Nous pouvons de là obtenir une *théorie* qui comprend la totalité de ce qu'on peut *déduire* de l'ensemble initial au moyen de la logique, incluant les énoncés initiaux eux-mêmes. On dira que cette théorie est *fermée* en ce sens que lui ajouter un énoncé est aller au-delà de ses axiomes et des règles d'inférence. Il est évidemment souhaitable que la théorie soit *consistante*, pour la simple raison qu'autrement elle permettrait de dériver n'importe quoi. Partons donc de cette idée d'une théorie consistante.

Notre théorie est LDS, avec ses cinq axiomes et ses deux règles d'inférence. À supposer que tous ses théorèmes soient vrais, nous souhaitons nous en servir pour nos raisonnements éthiques ou légaux. Nous examinerons des énoncés qui décrivent des situations déontiques puis emploierons LDS pour déduire leurs conséquences. Cela revient à ajouter de nouveaux axiomes à LDS, et on pourra donc fermer la théorie résultante en tirant toutes les conséquences de ces nouveaux énoncés. Il faut bien sûr prendre garde de ne pas produire une contradiction par nos ajouts, c'est-à-dire de préserver la consistance.

Maintenant, il existe certainement plusieurs façons de procéder en la matière, plusieurs ensembles d'axiomes additionnels à ajouter. En bout de ligne, les théories qu'on obtient seront sans doute bien différentes les unes des autres. Néanmoins elles possèdent toutes le système LDS comme noyau et seront toutes consistantes avec lui. Mais alors que certaines théories ainsi produites posséderont deux ou trois axiomes de plus, d'autres théories en possèderont *le plus grand nombre possible*. Une théorie qui provient de l'ajout répété d'axiomes à LDS jusqu'au point où le prochain ajout causerait nécessairement une contradiction est dite *LDS-maximale*. On peut dire, de manière équivalente, que cette théorie consistante contient pour tout énoncé soit E lui-même, soit la négation de E.

La première partie de la preuve de complétude est consacrée à mettre ces intuitions sous un aspect formel puis de les employer pour définir le modèle canonique et en montrer la sérialité. Nous débutons par la notion de LDS-déductibilité.

DÉFINITION 11 : E est *déductible de Γ dans LDS* si et seulement si $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset E$, où $\{E_1, \ldots, E_n\} \in \Gamma$. Nous écrivons alors ceci : $\Gamma \vdash_{\text{LDS}} E$.

Nous enchaînons avec un théorème pour le moins évident selon lequel l'extension d'un ensemble de prémisses qui permet de déduire E permet elle aussi cette déduction.

THÉORÈME 17 : Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$, alors $\Gamma \vdash_{\text{LDS}} E$ implique $\Gamma' \vdash_{\text{LDS}} E$.

Preuve :

Supposons que (1) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et (2) $\Gamma \vdash_{\text{LDS}} E$. Nous avons donc que $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset E$ où $\{E_1, \ldots, E_n\} \in \Gamma$ [2, D11]. Évidemment, $\{E_1, \ldots, E_n\} \in \Gamma'$ [1]. Donc $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset E$, où $\{E_1, \ldots, E_n\} \in \Gamma'$, c'est-à-dire que $\Gamma' \vdash_{\text{LDS}} E$ [D11]. ■

La déductibilité va maintenant nous servir à définir la LDS-consistance qui servira à son tour pour expliquer la consistance maximale.

DÉFINITION 12 : Un ensemble d'énoncés Γ est *consistant avec LDS* si et seulement si ce n'est pas le cas que $\Gamma \vdash_{LDS} \perp$. Nous écrirons simplement $\Gamma \nvdash_{LDS} \perp$ ou que Γ est LDS-consistant.

Exprimée différemment, la consistance de Γ avec LDS signifie que LDS ne contient pas l'énoncé $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset \bot$ où $\{E_1, \ldots, E_n\} = \Gamma$. Et intuitivement elle signifie qu'il n'est pas possible de déduire une contradiction en adoptant comme prémisses additionnelles aux axiomes de LDS les énoncés de Γ.

DÉFINITION 13 : Un ensemble d'énoncés Γ est *maximal* si et seulement si il contient E ou $\neg E$ pour tout énoncé E. En particulier, pour tout atome A, soit A ou $\neg A$ appartient à Γ (on appelle ces énoncés des littéraux).

Un ensemble d'énoncés maximal est en quelque sorte une description totale de l'univers de discours car il se positionne sur tous les énoncés possibles. Toutefois, un ensemble maximal peut bien receler des contradictions internes, ce que la notion suivante va exclure.

DÉFINITION 14 : Un ensemble d'énoncés Γ est *maximalement consistant avec LDS* si et seulement si $\Gamma \nvdash_{LDS} \bot$ et Γ est maximal. Nous exprimons ce fait grâce aux symboles « $Max_{\text{LDS}}\Gamma$ » ou en affirmant que Γ est LDS-maximal.

Ainsi, un ensemble LDS-maximal résulte de l'application exhaustive des règles d'inférences de LDS à ses axiomes accompagnés d'une infinité de prémisses additionnelles sans que ce processus n'ajoute $(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset \bot$ (où $\{E_1, \ldots, E_n\} = \Gamma$) à LDS. Autrement dit, ayant adopté LDS comme logique, un ensemble LDS-maximal constitue une description—parmi plusieurs possibles—complète de l'univers mais en accord avec LDS. Les propriétés de tels ensembles vont nous permettre de démontrer la complétude.

Parmi ces propriétés on retrouve tout d'abord le Lemme de Lindenbaum :

THÉORÈME 18 : (LEMME DE LINDENBAUM) Soit Γ un ensemble d'énoncés. Si $\Gamma \nvdash_{\text{LDS}} \perp$ alors il existe un ensemble d'énoncés Γ' tel que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et $Max_{\text{LDS}}\Gamma'$.

Preuve :

Veuillez consulter l'annexe I pour lire la preuve. ■

Selon ce théorème, tout ensemble consistant pour LDS possède une extension LDS-maximale. Cela signifie qu'en partant d'un ensemble consistant, il existe toujours une façon de lui ajouter sans cesse de nouveaux énoncés jusqu'à le rendre maximalement consistant. La preuve du Lemme contenue en annexe montre comment bâtir cette extension.

Une suite de théorèmes aussi très utiles est la suivante (le lecteur peut consulter les preuves dans Chellas [1980 : 53-54]) :

THÉORÈME 19 : Si Γ est LDS-maximal, alors :

1) $E \in \Gamma$ si et seulement si $\Gamma \vdash_{\text{LDS}} E$;
2) $LDS \subseteq \Gamma$;
3) $\neg E \in \Gamma$ si et seulement si $E \notin \Gamma$;
4) $(E_1 \wedge E_2) \in \Gamma$ si et seulement si $E_1 \in \Gamma$ et $E_2 \in \Gamma$;
5) $(E_1 \vee E_2) \in \Gamma$ si et seulement si $E_1 \in \Gamma$ ou $E_2 \in \Gamma$;
6) $(E_1 \supset E_2) \in \Gamma$ si et seulement si $E_2 \in \Gamma$ si $E_1 \in \Gamma$;
7) $(E_1 \equiv E_2) \in \Gamma$ si et seulement si $E_1 \in \Gamma$ si et seulement si $E_2 \in \Gamma$.

Le sous-théorème (1) révèle que le contenu d'un ensemble maximalement consistant correspond exactement à ce qu'on peut en déduire, et donc qu'on ne peut rien en déduire qu'il ne contiendrait pas déjà. De plus, on peut y trouver tous les énoncés de LDS lui-même, ce qu'affirme (2). Les propositions (3) à (7) nous assurent quant à elles que nous trouverons dans Γ les énoncés complexes qui découlent des littéraux déjà présents.

Ayant couvert les explications concernant la consistance maximale, notre présentation débouche enfin sur la notion de modèle canonique :

DÉFINITION 15 (MODÈLE CANONIQUE) : Un modèle (nommé $\mathfrak{W}_{\text{LDS}}$) est dit *canonique pour LDS* si et seulement s'il remplit les conditions suivantes :

1) $W = \{ \Gamma : Max_{\text{LDS}}\Gamma \}$;
2) Pour tout w_1 et w_2 dans $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$, $w_1\text{R}w_2$ si et seulement si $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$;
3) $\langle A_n, w\rangle \in C$ si et seulement si $A_n \in w$.

Attardons-nous un instant sur les caractéristiques de ce modèle. Nous remarquons premièrement que nous identifions chaque monde à un ensemble LDS-maximal. Selon l'explication intuitive déjà fournie, *W* devient l'ensemble des façons possibles d'entièrement concevoir l'univers en accord avec LDS. Chaque monde est ensuite relié à tous (et seulement) ceux qui réalisent les obligations qu'il contient: c'est le sens de la clause (2). Finalement, *C* assigne aux mondes exactement les atomes qu'ils contiennent. En somme le modèle canonique reproduit dans ses mondes toutes les situations déductives que LDS pourrait rencontrer et les reflète par sa configuration.

Conformément à notre résumé, il faudra maintenant montrer que $\mathfrak{W}_{\text{LDS}}$ est sériel.

THÉORÈME 20 : $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ est sériel.

Preuve :

Pour montrer que $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ est sériel, il suffit de montrer que pour tout w_1 de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ il existe un w_2 tel que $w_1\text{R}w_2$. En mots : tout monde de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ permet un autre monde. Considérons donc un monde arbitraire w_1 et démontrons qu'il permet un monde w_2.

En vertu de la clause (2) de la définition de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ [D15.2], pour tout w_1 et w_2, $w_1\text{R}w_2$ si et seulement si $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$. Il suffira donc de démontrer que

$\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$. Mais il faudra ajouter, conformément à la clause (1), que w_2 est LDS-maximal. Autrement dit, w_2 est une extension LDS-maximale de $\{E : OE \in w_1\}$.

Par le Lemme de Lindenbaum, si nous arrivons à montrer que $\{E : OE \in w_1\}$ est LDS-consistant alors nous pourrons affirmer l'existence souhaitée de w_2. En effet, selon le Lemme tout ensemble LDS-consistant possède une extension LDS-maximale.

Nous allons procéder par l'absurde. Si $\{E : OE \in w_1\}$ est LDS-inconsistant, alors $\{E : OE \in w_1\} \vdash_{\text{LDS}} \bot$ [D12]. Soit $E_1, E_2, \ldots$ les éléments de $\{E : OE \in w_1\}$. Nous avons alors que $\vdash_{\text{LDS}} (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) \supset \bot$ [D11]. Nous déduisons que $\vdash_{\text{LDS}} (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset O\bot$ [ROK]. Il s'ensuit que $\vdash_{w_1} (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset O\bot$ [T19.2]. Et puisque les énoncés $OE_1, OE_2, \ldots$ appartiennent à w_1 nous allons conclure que $\vdash_{w_1} O\bot$ [RLP]. Or $\vdash_{w_1} \neg O\bot$ car $\vdash_{\text{LDS}} \neg O\bot$ et LDS $\subseteq w_1$. Nous obtenons enfin notre contradiction, car w_1 ne contient pas à la fois un énoncé et sa négation puisque w_1 est LDS-consistant. En conséquence, $\{E : OE \in w_1\}$ est bel et bien LDS-consistant.

Pour cette raison, $\{E : OE \in w_1\}$ possède une extension LDS-maximale [T18]. La définition du modèle canonique nous assure donc qu'il existe un monde w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$ puisque $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$. Autrement dit, $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ est sériel. ■

2.5.2.2 La vérité pour $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ entraîne l'appartenance à LDS

La sérialité de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ nous assure que de l'hypothèse qu'un énoncé est valide dans la classe des modèles sériels il découle qu'il est vrai pour $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$. Il faut maintenant poursuivre et montrer qu'un énoncé vrai pour $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ est aussi un théorème de LDS.

Voici tout d'abord la preuve que les énoncés de LDS correspondent exactement aux énoncés appartenant à tous les ensembles LDS-maximaux :

THÉORÈME 21 : $\vdash_{\text{LDS}} E$ si et seulement si E appartient à tous les ensembles LDS-maximaux.

Preuve :

($\rightarrow$) Supposons que $\vdash_{\text{LDS}} E$. Considérons maintenant un ensemble LDS-maximal Γ. Nous savons que $\text{LDS} \subseteq \Gamma$ [T19.2]. Mais puisque $\vdash_{\text{LDS}} E$, il s'ensuit que $\vdash_{\Gamma} E$.

($\leftarrow$) Supposons maintenant que [H] E appartienne à tout ensemble d'énoncés Γ tel que $Max_{\text{LDS}}\Gamma$. Si $\nvdash_{\text{LDS}} E$ alors pour un Γ il s'ensuit que $\Gamma \nvdash_{\text{LDS}} E$ [T19.1], ce qui contredit aussitôt [H], donc par l'absurde nous savons que $\vdash_{\text{LDS}} E$. ■

Le prochain théorème sert de lemme au théorème 23. Il s'agit de montrer que dans le modèle canonique le comportement de l'obligation et de la permission est essentiellement le même que dans le modèle standard.

THÉORÈME 22 : Soit le modèle canonique $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ et w_1 un monde arbitraire du modèle. Alors :

1) $OE \in w_1$ si et seulement si $E \in w_2$ pour tout w_2 tel que $w_1\text{R}w_2$;
2) $PE \in w_1$ si et seulement si $E \in w_2$ pour au moins un w_2 tel que $w_1\text{R}w_2$

Preuve :

Commençons par démontrer (1). Nous savons que pour tout w_1 et w_2 dans $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$, $w_1\text{R}w_2$ si et seulement si $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$ [D15.2]. En remplaçant $w_1\text{R}w_2$ par $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$ dans la proposition à démontrer nous obtenons l'énoncé équivalent qu'il faut maintenant prouver : $OE_1 \in w_1$ si et seulement si $E \in w_2$ pour tout w_2 tel que $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$.

($\rightarrow$) Supposons que $OE \in w_1$, puis considérons que $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$. Puisque tous les E tels que $OE \in w_1$ appartiennent à w_2, il s'ensuit immédiatement que $E \in w_2$ en vertu de notre hypothèse.

($\leftarrow$) Pour démontrer le théorème dans l'autre sens, supposons que $E \in w_2$ pour tout w_2 tel que $\{E : OE \in w_1\} \subseteq w_2$. Rappelons que w_2 est LDS-maximal. Donc E appartient à LDS [T21]. Nous avons donc que $\{E : OE \in w_1\} \vdash_{\text{LDS}} E$ [T17]. Cela signifie que $\vdash_{\text{LDS}} \{E : OE \in w_1\} \supset E$ par définition, et parce que LDS possède la règle ROK, nous avons que $\vdash_{\text{LDS}} (OE_1 \wedge \ldots \wedge OE_n) \supset OE$. Donc $w_1 \vdash_{\text{LDS}} OE$ car $OE_1, \ldots, OE_n \in w_1$. Nous pouvons enfin en déduire que $OE \in w_1$.

Pour (2) : Nous devons montrer que $PE \in w_1$ si et seulement si $E \in w_2$ pour un w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$.

($\rightarrow$) Supposons que $PE \in w_1$. Puisque w_1 est LDS-maximal nous savons aussi que $\mathrm{DfP} \in w_1$ [D3, T19.2]. Maintenant, il s'avère que :

$$\vdash_{\text{LDS}} (PE \wedge (PE \equiv \neg O \neg E)) \supset \neg O \neg E$$

et donc que :

$$(PE \wedge (PE \equiv \neg O \neg E)) \supset \neg O \neg E \in w_1 \quad \text{[T1, T19.2]}.$$

Et puisque $(PE \wedge (PE \equiv \neg O \neg E)) \in w_1$, nous concluons que $\neg O \neg E \in w_1$ [T19.4, T19.6]. Cela signifie que $O \neg E \notin w_1$ [T19.3]. Ce n'est donc pas le cas que $\neg E \in w_2$ pour tout w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$ [D6.7]. Autrement dit, $\neg E \notin w_2$ pour un w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$, ou encore $E \in w_2$ [T19.3].

($\leftarrow$) Supposons maintenant que $E \in w_2$ pour un w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$. Dans ce cas, $\neg E \notin w_2$ [T19.3]. Logiquement donc ce n'est pas le cas que $\neg E \in w_2$ pour tout w_2 tel que $w_1 \mathrm{R} w_2$, ce qui implique que $\neg O \neg E \in w_1$ [D6.7]. Nous avons alors évidemment que $PE \in w_1$. ■

Nous voulons maintenant montrer qu'un énoncé appartient à un ensemble LDS-maximal si et seulement si le modèle canonique rend l'énoncé vrai pour cet ensemble (monde).

THÉORÈME 23 : $\models_w^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ si et seulement si $E \in w$.

Preuve :

Nous pouvons prouver ce théorème par induction sur la complexité de E.

Prenons le cas où E est atomique : $E = A_n$. Par définition, $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} A_n$ si et seulement si $\langle A_n, w\rangle \in \mathrm{C}$ où C est, rappelons-le, la configuration propre à $\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}$ [D6.1]. Dans ce cas il apparaît immédiatement que $A_n \in w$ [D15.3].

Adoptons maintenant l'hypothèse d'induction selon laquelle [HI] tous les énoncés de complexité n satisfont le théorème. Ainsi, $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E$ si et seulement si $E \in w$ pour tous les énoncés de complexité n. Nous allons montrer qu'en conséquence les énoncés de complexité $n+1$ le satisfont également.

Nommons « E^{n+1} » un énoncé arbitraire de complexité n + 1. Cet énoncé peut-être de plusieurs formes. Supposons qu'il s'agisse d'une négation, $\neg E_1$. Par définition, $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} \neg E_1$ si et seulement si non $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_1$ [D6.2]. Puisque la complexité de E_1 est n, il en découle que $E_1 \notin w$ [HI]. Mais puisque w est LDS-maximal cela entraîne que $\neg E_1 \in w$ [D15.1, T19.3]. La preuve dans le sens inverse suit les mêmes étapes dans l'ordre inverse.

Considérons maintenant $E_1 \wedge E_2$. Si $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_1 \wedge E_2$ alors $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_1$ et $\models_w^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_2$ [D6.3]. Il s'ensuit alors que $E_1 \in w$ et $E_2 \in w$ [HI]. Mais w est LDS-maximal [D15.1]. Donc $E_1 \wedge E_2 \in w$ [T19.4]. Encore une fois, la preuve dans le sens inverse ne fait que reprendre les mêmes étapes dans l'autre sens.

Le raisonnement pour la disjonction, l'implication et l'équivalence est similaire à celui pour la conjonction, faisant à chaque fois usage de [D6], [D15] et [T19].

Passons aux cas où E^{n+1} est composé d'un opérateur déontique. Commençons par OE_1. Si $\models_{w_1}^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} OE_1$ alors $\models_{w_2}^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_1$ pour tous les mondes w_2 permis par w_1 [D6.7]. Mais alors $OE_1 \in w_1$ [T22.1]. La preuve pour PE_1 va ainsi : Si $\models_{w_1}^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} PE_1$ alors $\models_{w_2}^{\mathfrak{W}_{\mathrm{LDS}}} E_1$ pour un monde w_2 permis par w_1 [D6.8]. Mais si E_1 est vrai pour w_2, alors $E_1 \in w_2$ [HI]. Cela implique que $PE_1 \in w_1$ [T22.2]. Dans les deux cas, la preuve inverse est encore laissée au lecteur.

Ayant montré que le théorème s'avère exact pour une complexité égale à 0 et ayant complété le pas d'induction, la preuve est terminée. ■

Il ne reste plus qu'à montrer qu'un énoncé vrai pour le modèle canonique est un théorème de LDS, d'où s'ensuit la complétude.

THÉORÈME 24 : $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ si et seulement si $\vdash_{\text{LDS}} E$.

Preuve :

Nous savons tout d'abord que pour tout monde w, $\vDash_w^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ si et seulement si $E \in w$ [T23]. Nous allons montrer que [1] $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ équivaut à $\vDash_w^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ pour tout w et que [2] $\vdash_{\text{LDS}} E$ équivaut à $E \in w$ pour tout w, ce qui implique notre théorème. En effet, $((A \equiv C) \wedge (B \equiv D)) \supset ((A \equiv B) \supset (C \equiv D))$.

La proposition [1] s'obtient facilement car par définition, $\vDash_w^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ pour tout monde w équivaut à $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ [D7]. Il reste à montrer la seconde proposition.

Considérons donc que $E \in w$ pour tout w de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$. N'oublions pas que w est LDS-maximal [D15.1]. L'affirmation tout juste posée signifie donc que E appartient à tous les ensembles LDS-maximaux. Or nous avons justement démontré que $\vdash_{\text{LDS}} E$ si et seulement si $E \in \Gamma$ pour tout Γ tel que $Max_{\text{LDS}}\Gamma$ [T21]. Autrement dit, E est un théorème de LDS juste au cas où E appartient à tous les ensembles LDS-maximaux. En conséquence, $E \in w$ pour tout w de $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ équivaut à dire que $\vdash_{\text{LDS}} E$.

Ayant montré [1] et [2], nous pouvons en déduire que $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ si et seulement si $\vdash_{\text{LDS}} E$. ■

Ficelons enfin les résultats des deux parties de notre raisonnement :

THÉORÈME 25 : (COMPLÉTUDE) Soit $\mathfrak{C}^s$, la classe des modèles sériels. Si $\vDash^{\mathfrak{C}^s} E$ alors $\vdash_{\text{LDS}} E$.

Preuve :

Supposons que [H] $\vDash^{\mathfrak{C}^s} E$. Puisque que $\mathfrak{M}_{\text{LDS}}$ est sériel [T20], il s'ensuit que $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ [D8]. Mais puisque $\vDash^{\mathfrak{M}_{\text{LDS}}} E$ si et seulement si $\vdash_{\text{LDS}} E$ [T24], alors E est un théorème de LDS. ■

La preuve complétée, nous pouvons affirmer que le système d'axiomes défini syntaxiquement détermine entièrement la classe des modèles sériels. Nous avons du même coup complété la section technique de ce mémoire qui se voulait une présentation détaillée des aspects formels de la logique déontique. Malheureusement, la rigueur mathématique de nos démarches n'assure en rien la pertinence du système développé. Selon l'interprétation que l'on fait des théorèmes de LDS ou des modèles correspondants, différents problèmes sautent aux yeux. Les chapitres suivants veulent mettre certains de ces problèmes en lumière.

3 Fondements intuitifs de la logique déontique

3.1 Introduction

Appelons « formellement adéquat » un système de logique à la fois fiable et complet relativement à une structure associée. Si les preuves précédentes sont justes, LDS possède cette propriété pour les modèles sériels. Étant donné la quantité d'efforts déboursés dans la démonstration on se surprendrait que le critère d'évaluation d'un système soit autre chose que l'adéquation formelle. Or c'est effectivement le cas.

Appelons « intuitivement adéquat » un système de logique qui est fiable et complet relativement à nos intuitions. En quoi celles-ci consistent nous ne pouvons l'affirmer avec précision. Pourtant, il s'agit du véritable critère qu'emploient les philosophes pour juger d'un système, en particulier parmi les premiers logiciens déontiques (Mally, von Wright, Anderson, Grelling). Ceux-ci n'utilisent que l'approche axiomatique. À l'origine, le choix des axiomes et des règles d'inférence reposait sur leur caractère « plausible », « évident », « indubitable », termes que nous rassemblons sous la notion d'intuitif. L'usage de modèles n'apparaît en logique déontique qu'à partir de 1957 grâce aux contributions de Kanger, Kripke, Hintikka, Montague et Hanson[9]. Il revient alors au modèle d'être intuitivement apaisant, ce qui équivaut en bout de ligne à la même chose.

Mais voilà, LDS n'est pas, selon l'opinion de tous les spécialistes de logique déontique, un système intuitivement adéquat, et le modèle qui l'accompagne est trop simplet pour rendre compte du devoir-être. On rejette donc cette logique universellement, sauf en guise d'outil pédagogique préparant la voie à l'introduction d'un système plus élaboré.

Un nombre considérable de systèmes concurrents existent actuellement et nous pouvons distinguer deux phases dans leur développement. Au cours des années suivant la parution de *Deontic Logic* en 1951, les discussions tournent autour de trois grands axes. Tout d'abord, les chercheurs ont dû se pencher sur la validité intuitive des règles d'inférence et des énoncés que l'on peut formuler à l'aide du langage standard de la logique déontique, et c'est au cours de cet exercice que les plus importants

[9] D. Follesdal et R. Hilpinen [1971]

paradoxes furent découverts. En raison de plusieurs paradoxes reliés à l'implication matérielle, von Wright[10] en particulier travailla sur des systèmes de normes conditionnelles, en contraste avec les normes absolues qu'on rencontre dans LDS. C'est là un second axe de recherche qui occupa les premiers logiciens déontiques. Troisièmement, d'autres philosophes déjà nommés s'affairèrent a munir la logique déontique d'une sémantique permettant d'interpréter ses formules avec davantage de précision, et le résultat fut d'identifier la logique déontique standard à une variété de la logique modale.

Depuis les années 1970, l'accent repose davantage sur l'enrichissement sémantique et syntaxique de la logique déontique par croisement avec d'autres logiques, telles que les logiques modales (temporelle, épistémique, dynamique, aléthique, agentielle, etc.), la théorie de la quantification, celle des probabilités ou encore les logiques à plusieurs valeurs ou non monotones (*defeasible logics*). Le moteur qui propulse ces travaux est généralement l'hypothèse selon laquelle la logique standard échoue en raison de son faible pouvoir d'expression. Certaines logiques découlant de travaux modernes évitent effectivement les paradoxes originaux, mais on trouve fréquemment des reformulations permettant de les reconstituer à l'intérieur des nouveaux systèmes.

De ce foisonnement théorique sans précédent n'est donc surgi aucun consensus positif. À ce propos, Aqvist écrivait il y a un peu moins de vingt ans : « What is Deontic Logic ? It is tempting to answer with Rescher, *à propos* the closely related area of the logic of imperatives and commands, that it is a field with the property that there is virtually no single issue in it upon which a settled consensus has been reached. » [1987 : 8] Le constat n'a pas changé dix ans plus tard : «Alternative formulations [of SDL] are common, and there seems to be no way of telling which, if any, is correct » [Forrester, 1996 : 1] Dans un ouvrage très récent, Rod Girle affirmait que : « Deontic logic is an interpretation of modal logic rife with disagreements about what should be the case. » [Girle, 2000 : 173] Aujourd'hui la discipline continue de générer de nouveaux systèmes sans qu'un seul n'arrive à s'imposer.

---

[10] von Wright [1956]

Malgré tout, il existe au moins un consensus parmi les logiciens déontiques : c'est par l'intuition qu'ils parviendront éventuellement à discriminer les logiques valables. Par essai et erreur, à force de complexifier l'analyse et de comparer les intuitions, un système surgira sûrement contre lequel aucun reproche n'aura de poids. Le lecteur attentif discernera ce fait aisément dans la littérature et pourra l'apprécier lorsque nous aborderons les paradoxes. Partout on retrouve les formules « Ce principe nous apparaît évident », « plausible », « hors de doute », « axiomatique », ou au contraire « incompréhensible », « non intuitif », « absurde », etc. Et c'est toujours là le mot final sur la question : l'auteur exprime son intuition et cela suffit inévitablement pour abattre ou sauver un axiome ou une règle d'inférence. Mais nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que les intuitions des auteurs ne s'accordent point entre elles. La notion même d'intuition varie d'un auteur à l'autre, comme nous le verrons plus bas. Pourtant, nul ne semble s'inquiéter de ce qu'on fasse un usage si généreux d'une méthode portant aussi peu de fruits.

Or, et voilà notre hypothèse, c'est là que le bât blesse. *La notion d'adéquation intuitive ne convient pas pour guider la construction de la logique déontique.*

Cette deuxième partie sera donc entièrement consacrée à une étude de l'usage fait de l'intuition pour évaluer la logique déontique standard présentée en première partie. Nous avons décidé de débuter en présentant le chapitre du livre de Chellas qui porte sur la logique déontique. Le lecteur pourra ainsi apprécier le type d'argumentation qui prévaut dans la discipline. Nous allons par la suite tenter d'en extraire une conception générale qui orbite autour de la notion de *paradoxe*. Il faudra d'ailleurs présenter les plus fameux cas de paradoxes. Nous verrons alors que trois types de correctifs s'imposent logiquement dans ce cadre, sans toutefois produire les résultats escomptés.

3.2 Un cas particulier d'argumentation basée sur l'intuition

Rappelons que l'objectif de cette partie n'est pas d'examiner en détail tous les reproches faits à LDS et les correctifs proposés. Nous voulons plutôt *porter un jugement général sur les méthodes argumentatives* employées par les logiciens déontiques. À cette fin, l'étude détaillée d'un cas particulier pourra servir de tremplin pour lancer la réflexion. La lecture d'autres ouvrages de logique déontique révélera au lecteur que le cas sélectionné est représentatif de l'ensemble de la littérature.

Un extrait de *Modal Logic* par Brian F. Chellas [1980 : 190-203] conviendra parfaitement. Il s'agit d'une succincte présentation de la logique déontique standard, de quelques extensions bien connues et d'un examen critique de chaque système.

La logique déontique de Chellas (LDC) comprend les mêmes théorèmes que LDS, mais sa base axiomatique est différente. En plus de la logique propositionnelle et de la définition de la permission, LDC s'élabore à partir de trois axiomes et d'une règle d'inférence[11] :

(ROM) $\dfrac{A \to B}{OA \to OB}$

(OC) $(OA \wedge OB) \to O(A \wedge B)$

(ON) $O\top$

(OD*) $\neg O\bot$

ROM, OC et ON pris ensemble produisent un système équivalent à celui qu'on obtiendrait en retirant OD à LDS. Incidemment, OD et OD* sont substituables.

LDC peut être enrichi en lui ajoutant divers principes :

(O4) $OA \to OOA$

(O5) $\neg OA \to O\neg OA$

(OU) $O(OA \to A)$

(O4c) $OOA \to OA$

Avec ou sans ces principes additionnels, Chellas juge que la logique déontique est un échec et nous allons à présent examiner ses arguments.

Un premier reproche concerne la capacité de LDC à exprimer les obligations conditionnelles. Par exemple, « Tu dois t'amuser » est une obligation inconditionnelle, alors que « Si tu t'amuses, fais-le de façon responsable » est une obligation conditionnelle. Ainsi, les obligations conditionnelles valent lorsque certaines condi-

[11] Nous allons employer la notation de l'auteur.

tions sont remplies. Si nous cherchons à formaliser une obligation conditionnelle à l'aide des ressources de LCD, deux candidats sautent aux yeux :

$$A \to OB$$
$$O(A \to B)$$

Selon la première option, une obligation conditionnelle est vraie lorsque A est faux ou OB est vrai. Il s'agit là ni plus ni moins que des propriétés fondamentales de l'implication matérielle telles que résumées dans sa table de vérité. Pour Chellas, ce simple fait logique constitue une objection contre cette lecture de l'obligation conditionnelle. Sous la seconde interprétation, l'obligation conditionnelle est vraie lorsque $O\neg A$ ou OB est vraie. En effet, $O(A \to B)$ signifie que $A \to B$ est le cas pour tous les mondes permis, et donc que $\neg A$ ou B sont vrais dans tous ces mêmes mondes, d'où les deux obligations correspondantes.

Les deux cas froissent l'intuition. Si nous lisons $A \to OB$ comme une obligation conditionnelle, alors selon LDC de « Je ne commets pas un meutre » il s'ensuit que si je commets un meurtre, alors il est obligatoire d'en commettre un second. De « Tu dois aimer ton prochain » il s'ensuivra que « Si tu aimes ton prochain, alors tu dois le tuer ». $O(A \to B)$ produit des résultats tous aussi absurdes. D'une part, de l'obligation de ne pas réaliser un état de choses il s'ensuivra que si cet état est réalisé, n'importe quelle obligation s'ensuit. D'autre part, de n'importe quelle obligation il découle qu'advenant la réalisation de n'importe quel état de fait, cette obligation s'applique.

La conclusion qu'il faut tirer et qui se rapproche des propos que tient Roderick Chisholm, l'auteur du plus célèbre paradoxe de la logique déontique, est que LDC (tout comme LDS) est incapable de formaliser l'obligation conditionnelle. Toutes les traductions envisageables provoquent de trop étranges conséquences.

D'autres problèmes affligent notre système. Selon Chellas plusieurs principes de LDC s'avèrent nuisibles indépendamment de toute explication complexe comme c'est le cas pour l'obligation conditionnelle. Par exemple, la règle ROK implique que tout théorème de LDC est aussi obligatoire. Cela signifie qu'il existe des obligations dans tous les mondes possibles. Mais, nous dit Chellas : « It seems reasonable to assume that there exist possible worlds (presumably very unlike our own) at which nothing at all is obligatory. »[12]

Un second point qui concerne l'axiome O a été soulevé plus tôt dans ce mémoire. Rappelons-en la forme : $\neg(OA \wedge O\neg A)$, ce qui signifie qu'un état et sa négation ne sont pas simultanément obligatoires. Or : « It is arguable that the possibility of such conflict is a main feature of some concepts of obligation, that it is often this, for example, that gives moral dilemmas their poignancy. »

Si nous reprenons O et le mettons en relation avec OD*, nous obtenons un troisième résultat insatisfaisant : ces deux théorèmes sont équivalents. Le premier affirme que deux obligations contraires ne sont pas simultanément obligatoires, alors que le second indique que l'impossible n'est pas obligatoire (l'obligatoire est possible). Chellas affirme simplement que ces deux principes sont logiquement intuitivement *différents*, alors que selon LDC ils sont équivalents[13].

Plus tôt nous évoquions certains principes pouvant enrichir LDC. Traitons-les à présent, en commençant par $OA \to OOA$ (O4). Ce principe n'apparaît pas dans le langage naturel : « Si A est obligatoire, alors A est obligatoirement obligatoire ». En conséquence, il faut se rabattre sur la sémantique des mondes possible pour lui attribuer un sens. Il faut alors le comprendre ainsi : si A est obligatoire pour w_1 alors A est obligatoire pour tout w_2 tel que $w_1 R w_2$. Ce qui est obligatoire le demeure dans

---

[12] Selon cet argument, il est possible que certains mondes ne comportent aucune obligation. Or puisque les tautologies sont vraies dans tous les mondes, il s'ensuit que les tautologies peuvent ne pas être obligatoires.

[13] La pensée de Chellas sur ce point nous échappe. Lorsque l'on considère les expressions en langue naturelle « Les conflits d'obligation ne sont pas possibles » et « L'obligatoire est possible » il semble certes y avoir une grande différence logique qui sépare les deux principes. En effet, une action considérée par elle-même peut s'avérer impossible sans qu'un conflit d'obligations soit en cause. Mais il appert que OD*, par exemple, ne reflète pas entièrement le sens de « L'obligatoire est possible ». Selon OD*, ce qui est *logiquement* impossible n'est pas obligatoire. Cela signifie que OD* n'exclut pas une obligation telle que « Tu dois t'envoler en battant des bras », qui est impossible mais pour des raisons matérielles et non logiques. La façon correcte de lire OD* est : « Il n'est pas obligatoire que A et non A », alors que O se lit : « Il n'est pas obligatoire que A et obligatoire que non A ». Ces deux expressions apparaissent intuitivement équivalentes. Mais même si l'objection de Chellas semble alors se désintégrer, on découvre que LDC serait *intuitivement incomplet* car il n'exclut désormais pas les obligations irréalisables au sens matériel du terme. un principe hautement prisé que les logiciens attribuent à Kant et souhaitent absolument intégrer à la logique déontique.

tous les mondes permis – la relation de permission est transitive. « This principle is not altogether implausible » selon Chellas [1980 : 193] qui rend le même verdict à l'endroit de $OOA \to OA$ (O4c), d'où la loi de réduction $OOA \leftrightarrow OA$ (O4!). Le juge n'aura pas la même clémence envers O5 et OU.

$\neg OA \supset O\neg OA$ (O5) signifie que le facultatif est obligatoirement facultatif. En remplaçant A par $\neg A$ nous obtenons $\neg O\neg A \supset O\neg O\neg A$, ce qui entraîne l'absurde conséquence que tout ce qui est permis est dès lors obligatoirement permis.

$O(OA \to A)$ (OU) provoque aussi un résultat indésirable. Sémantiquement, il signifie qu'il est obligatoire que toute obligation soit remplie. Adopter le principe $O(OA \to A)$ entraîne que $OA \to A$ pour tout monde permis. Toutes les obligations sont alors réalisées dans ce monde, ce qui en fait un monde parfait. Mais alors, notre monde, dans lequel certaines obligations ne sont pas remplies, n'est permis pour aucun autre monde car s'il l'était, toutes les obligations y seraient remplies en vertu de OU. Voilà une manière de dire que notre monde est parmi les pires mondes qui puissent être, un constat que Chellas rejette par optimisme.

Au terme de notre examen des arguments de Chellas, nous remarquons un critère essentiel qui revient sans cesse quoique sous des appellations différentes. En effet, pour chaque réfutation d'un principe de logique déontique, notre auteur fait appel à un critère – une intuition – externe à la logique elle-même. Nous pouvons rassembler les intuitions de Chellas dans leur ordre d'apparition :

$O\neg A$ et OB n'entraînent pas toujours l'obligation conditionnelle $A \to OB$.

$O\neg A$ et OB n'entraînent pas toujours l'obligation conditionnelle $O(A \to B)$.

Certains mondes sont dénués de toute obligation.

Les conflits d'obligations sont possibles.

O et OD ne sont pas équivalents.

Ce qui est permis n'est pas nécessairement obligatoirement permis.

Notre monde est permis relativement à un autre monde.

Indiquer l'existence d'un conflit entre l'intuition exprimée dans la langue naturelle et le langage formel est la majeure, sinon la seule méthode argumentative en logique déontique. Elle ne manque pas de rappeler la philosophie rationaliste de Descartes pour qui toute théorie devait reposer sur des principes clairement et distinctement établis pour vrais par la seule raison. Nous en venons donc à la notion de paradoxe qui résume cette idée.

3.3 Les paradoxes

Comme Nowell-Smith et E. J. Lemmon le soulignent dans leur article de 1960, les paradoxes de la logique déontique ne sont pas des « paradoxes de logiciens » comme celui de Russell par exemple. Dans ce fameux cas, une contradiction formelle apparaît à l'intérieur du système lui-même—ses axiomes affirment à la fois une chose et son contraire indépendamment de leur signification. Or on montre facilement que la logique déontique standard est consistante. Les paradoxes dont nous discuterons ici se situent plutôt entre les énoncés du système et un autre ensemble d'énoncés, soit le royaume des « vérités intuitives » exprimées dans la langue naturelle.

Impossible donc de discuter de la nature des paradoxes sans tout d'abord s'attarder au langage naturel[14]. Le langage formel, rappelons-le, vise à remplacer la langue naturelle, ou du moins à indiquer quelles inférences naturelles sont valides et quels énoncés naturels sont des vérités logiques. Pour y arriver, nous construisons un langage artificiel accompagné de définitions formelles pour la validité et la vérité logique. Ces deux notions de vérité et de validité *formelles*, il faut le souligner, s'appliquent essentiellement aux arguments et aux énoncés *formels*. Les énoncés et arguments naturels eux sont dit *intuitivement* valides. Or, nous procédons ensuite à l'assignation d'un énoncé formel à chaque énoncé de la langue naturelle qui possède la forme correspondante grâce à ce que certains appellent un dictionnaire, ou clé de traduction, typiquement représenté comme dans cet exemple :

p : Pierre va à la chasse.

q : Pierre apporte à souper.

$p \supset q$: Si Pierre va à la chasse alors Pierre apporte à souper.

---

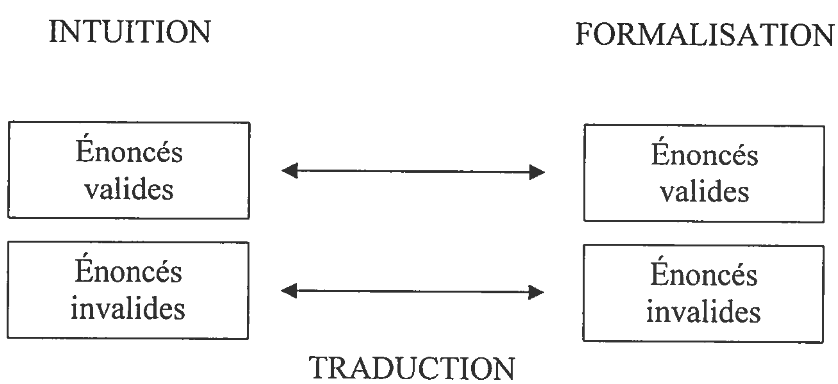
[14] La présentation qui suit reprend les grandes lignes des travaux d'Aqvist [1987].

Notre visée ultime est de concevoir un système logique tel que les deux propositions suivantes s'avèrent satisfaites :

I) *Tout énoncé est intuitivement valide si et seulement si sa traduction formelle est formellement valide.*

II) *Tout argument est intuitivement valide si et seulement si sa traduction formelle est formellement valide.*

Le tableau suivant résume notre idée :



Le diagramme représente la situation idéale où le système formel parvient à exprimer nos intuitions avec exactitude. Nous définissons maintenant facilement un paradoxe. *Il s'agit de l'existence d'une paire d'énoncés ou d'arguments, l'un formel, l'autre intuitif, possédant des valeurs de validité (intuitives ou formelles, selon le cas) opposées mais qui pourtant se traduisent l'un par l'autre.* Tous les paradoxes connus de l'auteur de ce mémoire possèdent cette structure qui ressemble, il faut le souligner, à la relation entre système et modèle[15]. Les réfutations de Chellas plus haut en sont d'ailleurs de pertinents exemples.

---

[15] Nous pouvons d'ailleurs en tirer les concepts « d'intuitivement complet (ou incomplet) » et « d'intuitivement fiable (ou non fiable) ».

Nous pouvons approfondir la généralisation en classifiant les correctifs permettant d'éradiquer un paradoxe. Sur les bases de notre définition, trois classes de correctifs nous apparaissent alors possibles :

1) Transformer le système logique ;
2) Modifier nos intuitions ;
3) Changer la traduction.

Nous allons illustrer notre concept de paradoxe ainsi que les correctifs qui s'offrent au logicien déontique en examinant tour à tour les plus célèbres paradoxes.

Nous pouvons débuter notre illustration en examinant le fameux **paradoxe de Ross**, présenté pour la première fois par Alf Ross [1941] dans un article traitant de la logique des impératifs. Le paradoxe, adapté à la logique déontique, concerne certains théorèmes de LDS composés à l'aide de la disjonction :

$$OE_1 \supset O(E_1 \vee E_2)$$

$$PE_1 \supset P(E_1 \vee E_2)$$

Une lecture possible du premier principe serait : « S'il est obligatoire de poster cette lettre, il est obligatoire de la poster ou de la brûler ». À première vue, nous pourrions donc croire que selon LDS, toute obligation (ou permission) entraîne une seconde obligation quelconque, probablement immorale ou contredisant l'obligation originale. Dans le cas présent, il est impossible de poster et brûler une lettre, d'où notre malaise. Mais surtout, nous ne croyons pas être l'objet d'une obligation que nous pourrions satisfaire en brûlant la lettre plutôt qu'en la postant. Il est en effet tentant de penser que $O(E_1 \vee E_2)$ nous oblige indifféremment à poster la lettre ou à la brûler, de sorte que celui qui la brûle remplit son obligation autant que celui qui la poste. Il s'agit d'un cas très simple de résultats formels froissant nos intuitions. Pour corriger ce genre de problème, le chemin le plus simple consiste souvent à modifier la traduction, donc à considérer différentes symbolisations de la langue naturelle ou d'interpréter différemment les théorèmes du système.

Nous parvenons ainsi à dissiper le paradoxe de Ross qui repose sur une confusion entourant la disjonction. Car lorsque nous examinons de plus près ce qu'il y à d'étrange à prescrire « Poste cette lettre ou brûle-la », nous remarquons que l'intuition suggère qu'en conséquence, brûler la lettre est permis ou du moins encouragé, comme dans l'obligation « Gagne la médaille d'or, la médaille d'argent ou la médaille de bronze ». Mais la sémantique des modèles lui donne un sens plus strict : « L'une des deux actions suivantes permet de satisfaire l'obligation : soit la poster, soit la brûler ». Formulée en des termes qui suggèrent la disjonction exclusive plutôt qu'inclusive, l'obligation nous froisse moins. Voilà donc comment nous pouvons par moment réduire la gravité d'un paradoxe en variant la traduction des énoncés formels.

Mais bien souvent, modifier la traduction ne suffit pas et il faut mettre en branle des mesures plus draconiennes : soit changer notre système formel, soit abandonner nos chères intuitions. Le **Paradoxe de Chisholm**, que nous expliquerons à présent, offre un exemple frappant d'une tentative ratée de réinterpréter le formalisme. Notez toutefois que l'analyse du paradoxe reprend en partie les propos de Chellas.

Une classe de paradoxes provient des tentatives pour formaliser certaines obligations, les soi-disant engagements (*commitment*). Ces obligations ne sont pas absolues, ce qui pourrait se formaliser par OE, mais conditionnelles et donc formalisables par $O(E_1 \supset E_2)$ ou $E_1 \supset OE_2$. Par exemple, « Si tu traverses la frontière, tu dois avoir en main ton passeport » est présumément une obligation dérivée. La difficulté de base que rencontre LDS à ce niveau est qu'il attribue à $O(E_1 \supset E_2)$ ou $E_1 \supset OE_2$ un comportement logique que nous ne retrouvons intuitivement pas dans l'engagement, ce qui rend LDS incapable de traiter ceux-ci.

Parmi les paradoxes de l'obligation dérivée nous trouvons celui de l'obligation contraire au devoir (contrary-to-duty obligation) présenté pour la première fois par R. Chisholm [1963]. Chisholm nous demande de considérer une certaine classe d'obligations dites « contraires au devoir » (contrary-to-duty imperatives). Il s'agit d'obligations réparatrices qui s'activeraient seulement lorsqu'une obligation première est violée. Par exemple : « Il est obligatoire de remettre les biens volés ». Il est bien sûr interdit de voler, mais advenant un vol les biens doivent être remis, tandis que les biens ne sont pas à remettre si aucun vol n'a eu lieu.

Viendra donc le moment de formaliser ce genre d'obligation. Selon Chisholm, parmi les énoncés de LDS seuls deux candidats peuvent raisonnablement exprimer les obligations contraires au devoir : $O(E_1 \supset E_2)$ et $E_1 \supset OE_2$, où E_1 est l'interdit et E_2 la réparation. Il examine tour à tour ces énoncés pour conclure qu'aucun d'entre eux n'est acceptable.

Il faut tout d'abord noter qu'une interdiction $O\neg E_1$ implique l'obligation $O(E_1 \supset E_2)$ pour n'importe quel E_2. Chisholm constate ce qui suit :

> Let us suppose we wish to remind a potential thief of the duty to restore stolen property. The locution of the obligatory conditional—'It is obligatory that if you steal then you return the money'—is not adequate for what we want to say. For, if stealing is wrong, then this locution, 'O(if a then b)' interpreted in the way just described, also allows us to say 'It is obligatory that if you steal then you do not return the money', and, indeed, 'It is obligatory that if you steal then you steal again and lead a life of sin henceforth'.

Autrement dit, n'importe quelle interdiction implique l'existence d'une infinité d'obligations contraires au devoir dont la plupart choquent notre intuition. Si nous considérons donc que $O(E_1 \supset E_2)$ est une formalisation correcte de l'obligation contraire au devoir, alors il nous faudra, en vertu de LDS, accepter comme conséquence logique l'infinité des obligations sus-mentionnées. Or, intuitivement, les interdictions n'impliquent rien de tel.

L'autre candidat, $E_1 \supset OE_2$, entraîne lui aussi quelques difficultés. Certaines situations très réalistes se produisent semblables à ceci :

1) Il est obligatoire que Paul aide son voisin ;
2) Il est obligatoire que si Paul aide son voisin, alors Paul avertit son voisin ;
3) Si ce n'est pas le cas que Paul aide son voisin, alors il est obligatoire que ce n'est pas le cas que Paul avertit son voisin ;
4) Ce n'est pas le cas que Paul aide son voisin.

La formalisation de chaque énoncé se trouve à être ceci :

1) OE_1 ;
2) $O(E_1 \supset E_2)$;
3) $\neg E_1 \supset O\neg E_2$;
4) $\neg E_1$.

Or l'ensemble contenant ces quatre énoncés est LDS-inconsistant alors que la situation comme telle nous apparaît intuitivement possible et donc non contradictoire. Selon Chisholm, donc, il serait impossible d'exprimer une situation comportant une obligation contraire au devoir dans LDS car les deux « locutions » disponibles pour ce faire entraînent de graves difficultés.

Von Wright [1964] présente un argument similaire, quoique bien plus simple, contre l'adoption de $E_1 \supset OE_2$. Notez que $E_1 \supset (\neg E_1 \supset E_2)$ est une tautologie, soit celle qui affirme que d'une contradiction tout énoncé s'ensuit. En particulier, $E_1 \supset (\neg E_1 \supset OE_2)$ est théorème de LDS, ce qui signifie que l'accomplissement d'une action quelle qu'elle soit implique encore une fois l'existence d'une foule d'obligations contraires au devoir.

Le problème n'est pas, comme le souligne Hilpinen [1970], que les énoncés de la forme $O\neg E_1 \supset O(E_1 \supset E_2)$ et $E_1 \supset (\neg E_1 \supset E_2)$ causent intrinsèquement problème. Ils s'apparentent au principe $E_1 \supset (E_1 \vee E_2)$ qui n'est en rien inhabituel, puisque le connecteur $\vee$ indique la disjonction inclusive. Le problème est d'exprimer une obligation dérivée au moyen de $O(E_1 \supset E_2)$ et $E_1 \supset OE_2$. Si cela s'avère impossible, nous ne pouvons pas nous servir de LDS pour analyser une catégorie importante d'arguments éthico-légaux et LDS est intuitivement incomplet. Très souvent, un tel problème de traduction pousse un philosophe à enrichir sa logique pour permettre une analyse plus minutieuse d'un énoncé naturel. Ainsi a-t-on tenté d'inclure les logiques temporelle, dynamique, aléthique et épistémique à la logique déontique dans l'espoir d'en arriver à une analyse plus fine. C'est ce que von Wright fait lorsqu'il renie son système de 1951. Jugeant que ce dernier succombait aux paradoxes de l'implication matérielle ce qui causait, à son avis, les paradoxes de l'obligation dérivée (dont fait partie le paradoxe de Chisholm), von Wright adopta l'implication conditionnelle au sein d'une nouvelle logique « dyadique ». Le paradoxe original de Chisholm s'en trouve souvent dissipé, même si on parvient généralement à le ressusciter sous une autre forme à l'intérieur du nouveau système [Hilpinen, 1971].

Mais avant d'entreprendre une telle refonte, on songe tout d'abord à abandonner le système formel en rejetant l'un de ses axiomes ou de ses règles d'inférence, bref, en modifiant le système formel. Pour donner un exemple, certains philosophes tels que Donald Nute [Defeasible logic] rejettent l'axiome OD qui empêche les conflits d'obligations, et développent une logique non-monotone qui permet de raisonner en présence d'obligations contradictoires. Ce remède est, des trois possibles, de loin le plus appliqué. Quoique les deux exemples précédents suggèrent que le système est alors enrichi de nouveaux symboles, cela n'est point nécessaire.

Le **Paradoxe du Bon Samaritain** semble justifier ce genre de remise en question de LDS car il jette le doute sur sa principale règle d'inférence, ROK. Il existe plusieurs versions de ce paradoxe. Présenté originalement par A. N. Prior [1958], il s'énonce à l'intérieur d'une logique déontique plus riche que LDS, notamment en raison de l'ajout d'opérateurs modaux (nécessité et possibilité). Nous utilisons ici une version simplifiée qui s'articule dans le dialecte plus restreint de LDS :

1) Il est obligatoire d'aider la victime d'une injustice ;
2) Si on aide la victime d'une injustice, alors celle-ci est victime d'une injustice ;
3) Donc il est obligatoire que cette personne soit victime d'une injustice.

Les prémisses nous paraissent plausibles, spécialement la seconde. Comment pourrait-il être possible de corriger une injustice à moins que celle-ci n'ait eu lieu ? Or la conclusion choque, car quoique porter assistance à son prochain s'avère souvent obligatoire, le fait que l'assistance requiert l'existence préalable d'une injustice ne devrait pas rendre l'injustice obligatoire. Pourtant, l'argument formalisé est bel et bien valide :

1) OE_1
2) $E_1 \supset E_2$
3) OE_2

On montre très directement qu'en vertu de ROK et de (2) il s'ensuit que $OE_1 \supset OE_2$. Il suffit ensuite d'appliquer MP pour obtenir OE_2. En effet, LDS prescrit les conditions nécessaires de toute obligation. Nous pouvons éliminer ce paradoxe en affaiblissant ROK, mais alors la logique devient méconnaissable.

Lorsque les sacrifices paraissent trop lourds, il arrive qu'un philosophe décide de rejeter ses intuitions au profit du système qu'il a créé. Dans une oeuvre récente, James Forrester exprime cette opinion :

« The principles of logic must be checked against the actual reasonings which people make and think good; but people's reasoning must in turn be checked against the principles which have led to important correct results. » [1996, p. 17]

Malgré quelques réserves, cette attitude peut nous pousser par exemple à ignorer le **Paradoxe des tautologies**. Notons que $O\top$ est un théorème de LDS. Cela signifie que nous sommes tenus de faire ce qui de toute façon est inévitable, de surcroît pour des raisons purement linguistiques et formelles. Or l'obligation présuppose normalement une certaine liberté de l'agent, ou au moins la possibilité de ne point parvenir à remplir l'obligation—un certain degré de contingence. De même LDS interdit-il de faire en sorte que deux propositions contradictoires soient satisfaites. On se demande alors à quoi bon interdire l'impossible.

Des considérations similaires amènent la plupart des auteurs à ignorer le **Paradoxe des conflits d'obligations.** Les conflits d'obligations font partie de notre vie éthique, et ce indéniablement. L'élève de Sartre ne lui demandait-il pas s'il devait quitter pour le front ou rester auprès de sa mère malade ? Par une approche légèrement différente de celle de Chellas, nous pouvons représenter un dilemme de la façon suivante :

1) OE_1
2) OE_2
3) $E_1 \equiv \neg E_2$

Mais cet ensemble est inconsistant sous LDS, encore une fois en raison de la règle ROK. Puisque $\neg E_2$ est conséquence de E_1, l'obligation OE_1 entraîne $O\neg E_2$. Or nous montrions plus haut (théorème 3) que $\neg(OE_1 \wedge O\neg E_2)$ appartient à LDS. Il n'y a donc pas moyen d'utiliser LDS pour raisonner à propos d'un dilemme moral.

Ceci conclut notre survol des paradoxes. Par l'application répétée des trois types de correctifs, la logique déontique s'est lentement complexifiée et multipliée en de nombreux systèmes concurrents qui tentent tous de consolider les intuitions des philosophes.

3.4 Critique de l'intuition

Cette méthode n'arrive pourtant pas à des résultats probants. Lorsque nous rassemblons les intuitions de tous les philosophes qui se penchent sur ces questions[16], nous obtenons un ensemble inconsistant de propositions[17]. De plus, on traite l'intuitif

[16] Il suffit pour cela de rassembler en une liste unique tous les principes sur lesquels se basent leurs objections face à un système quelconque.

[17] Chaque fois qu'un philosophe prétend découvrir un paradoxe dans le système d'un collègue, il s'en prend aussitôt aux intuitions de ce dernier, puisque son système repose logiquement sur des axiomes

comme s'il s'agissait du monde naturel et la logique déontique comme si elle opérait à la manière de la physique, c'est-à-dire par hypothèse et essai erreur. Mais du même coup on affirme que le normatif n'appartient pas aux réalités empiriques, qu'il n'est donc pas susceptible de définition opératoire et que l'observation et l'expérimentation ne peuvent pas indiquer les propriétés des obligations, des permissions, etc. On croit parfois étudier les concepts eux-mêmes plutôt que les phénomènes, supposant par là qu'il y aurait donc un monde de concepts auquel l'intuition accède, ou bien dont le langage naturel serait témoin. Mais alors que nous nous apprêtons à dire qu'il s'agit donc de mathématiques et que la logique étudie des objets abstraits contenus sans doute dans l'esprit du philosophe, alors le logicien s'objecte, affirmant que sa discipline souhaite s'ancrer dans la réalité et que ses modèles doivent être jugés à sa lumière. Bref, la guerre des intuitions cache une tension plus fondamentale à propos des visées mêmes de la logique déontique.

Ces différentes tendances se réduisent à l'une de trois conceptions de la logique déontique que nous rencontrons régulièrement dans la littérature. Elles n'apparaissent pas toujours séparément, comme le révèlent les citations qui suivent (en bas de page), mais souvent en paire, voire toutes ensemble. Le lecteur estimera peut-être qu'il s'agit en fin de compte des trois visages d'une même créature.

Une *première conception* pose que la logique déontique vise à rendre compte des usages normatifs du langage[18]. Mais vu l'absurdité évidente d'un tel projet due à l'inconsistance des usages linguistiques, cette conception partage presque toujours son espace avec la *seconde conception*. Celle-ci considère que la logique déontique tente de standardiser les usages avec la consistance comme critère essentiel, voire suffisant. Malheureusement, les systèmes consistants varient comme les flocons de neige. Pour la raison déjà posée, ajouter les usages comme contrainte ne permettra pas de sélectionner un système consistant plutôt qu'un autre. On cherche alors un standard objectif qui permettrait de distinguer, parmi les systèmes consistants possibles, lequel rend véritablement compte de l'obligation. Entre alors la *troisième*

---

considérés comme intuitivement valides.

[18] « [...] we say that Deontic Logic, broadly conceived, is the logical study of the normative *use of language* and that its subject matter is a variety of normative concepts, notably those of obligation, prohibition, permission and commitment. » [Aqvist 1987 : 8]

conception[19] qui propose de prendre les concepts normatifs eux-mêmes comme support à l'intuition. Il s'agit ici d'analyser le concept d'obligation comme s'il s'agissait d'un objet d'étude muni d'une certaine objectivité, comme celle que possède un phénomène empirique ou une Forme platonicienne.

Autrement dit, par l'examen d'un grand nombre d'obligations on tente par essai et erreur de saisir la nature unique et objective de l'obligation en général avec une définition formelle et universelle, en partant de l'hypothèse que les obligations partagent certains caractères communs que l'analyse peut éventuellement révéler. Mais l'ensemble des obligations dont nous cherchons le caractère commun n'est pas défini au départ (il ne le serait qu'à la fin de notre démarche analytique), donc comment pouvons-nous évaluer l'adéquation de notre définition ? Pour rassembler cet ensemble de cas particuliers, nous pouvons soit procéder arbitrairement—sans critères de départ, ce qui n'est pas du tout notre intention, soit au moyen d'une liste de critères établis a priori. Mais alors nous aurons déjà en main, avec cette liste de critères, la définition souhaitée et ce avant même que l'analyse ne commence. L'analyse conceptuelle apparaît dès lors superflue.

Dans bien des cas, l'analyse de concept se ramène à la première approche et se confond avec elle. En partant d'énoncés intuitivement plaisants et évidents sur des bases linguistiques on tire souvent des conclusions concernant la nature des concepts normatifs, ce qui conduit à construire un système consistant qui rassemble autant d'intuitions que possible[20]. Mais il existe plusieurs systèmes de ce genre sans que

---

[19] Nous avons ici un commentaire de Menger, un logicien qui a démontré que le système de Mally contenait le théorème *OA* si et seulement si *A*. Nous y retrouvons la première et la troisième conception bien mises en valeur : « This result seems to me to be detrimental for Mally's theory, however. It indicates that the introduction of the sign ! [! = *O*] is superfluous in the sense that it may be cancelled or inserted in any formula at any place we please. But this result (in spite of Mally's philosophical justification) *clearly contradicts not only our use of the word "ought" but also some of Mally's own correct remarks about this concept*, e.g. the one at the beginning of his development to the effect that p → (!q or !r) and p → !(q or r) are not equivalent. Mally is quite right that these two propositions are not equivalent according to the ordinary use of the word "ought." But they are equivalent according to his theory by virtue of the equivalence of p and !p. » [1939 : 58]

[20] Dans les deux extraits qui suivent, le lecteur pourra retrouver la fusion des trois conceptions :

« Le travail d'analyse formelle qui nous attend est très voisin de celui qu'ont opéré, en leur temps, les fondateurs de la logique moderne. Il faut dégager des structures précises, de style mathématique, à partir de cette rationalité diffuse, sinon confuse, dont le *langage courant est le premier témoin*, et même l'unique témoin disponible dans le domaine qui nous occupe (nous ne pouvons pas faire un appel direct à l'Expérience, comme le pratiquent les sciences physiques). Il faut porter remède à l'imprécision fondamentale des langues vernaculaires, *tenter d'en normaliser l'usage* dans le domaine nous possédions de méthode pour distinguer lequel reflète correctement le concept sous étude.

Après avoir consulté les nombreuses citations offertes à titre d'exemples, notre lecteur devrait, nous l'espérons, ressentir une étrange et curieuse impression de confusion. Comment se fait-il que l'on souhaite à la fois préserver et réformer nos intuitions ? Si la rationalité commune et les usages sont confus, alors pourquoi devraient-ils tant nous tenir rigueur ? Comment expliquer que l'on se serve pour critère de ce qui pose justement problème ? Comment justifier que la logique déontique, notre meilleur effort pour mettre de l'ordre dans nos concepts normatifs, prenne pour modèle les concepts inadéquats qui nous inspirent tant de dégoût ? Toute ces questions se rapportent à une unique constatation : les logiciens déontiques tentent de bâtir des concepts nouveaux au moyen du formalisme mais sans abandonner les anciens qui sont représentés par l'intuition. À notre avis, le paradigme actuel de la logique déontique est profondément contradictoire et sans issue. Un changement de cap s'impose.

Nous croyons que l'analyse de concepts porte mal son nom car elle est en fait de la création de concepts, création limitée par certains critères certes, mais des critères en fin de compte *choisis* par le logicien. En ce sens, les nombreux systèmes de logique déontique sont tous légitimes à la condition de se développer conformément à leurs axiomes de départ. Qu'ils froissent les usages n'a rien de surprenant ni de regretable puisque l'intuition est mauvais guide. Mais si l'intuition ne fournit pas un

---

qui nous occupe, voire d'y porter réforme, s'il n'y a pas d'autre solution pour aboutir à la consistance. De même que le calcul des propositions est sorti d'une réflexion analytique rigoureuse sur les quelques mots « non », « et », « ou », etc., de même nous proposons-nous maintenant de formaliser la rationalité déontique à partir des termes d' « obligation », de « permission », etc. » [Bailhache 1991 : 13]

« Quelle est la véritable signification de cette production ? [Ces systèmes], qui n'ont certes pas l'universalité et la pertinence de structures mathématiques ou physiques, et dont il n'est guère possible d'affirmer que nous avons découverts plutôt qu'inventés, ne sont cependant pas arbitraires [...] L'important est qu'il y ait de l'*a priori* dans le devoir-être [...] Car si le devoir-être n'est pas produit par les faits bruts, il faut bien qu'il trouve son origine ailleurs. Certes, cela ne signifie pas que les structures *a priori* du devoir-être se trouvent « déjà écrites » et qu'il ne reste plus au logicien qu'à les lire et les mettre au jour [...] En revanche, rien n'interdit de penser qu'il existe néanmoins un *a priori*, que la formalisation approche du mieux qu'elle peut. [...] Il ne peut s'agir de créer de toutes pièces un nouveau langage sans aucun rapport avec la réalité; car cette réalité [du devoir-être], contrairement à celle de la nature (l'objet de la physique), nous ne la connaissons d'abord que par les langues ordinaires ». [Bailhache 1991 : 203-205] test permettant de valider nos constructions conceptuelles, comment arriver à une « bonne » reconstruction des concepts normatifs ?

Tout dépend de la raison pour laquelle nous nous engageons dans cette activité au départ. Si la motivation première est celle du mathématicien qui apprécie l'étude formelle pour elle-même, alors toutes les constructions sont légitimes à condition d'être cohérentes. Si notre motivation est plutôt de produire des concepts utiles à la recherche empirique, alors il faudra définir les concepts normatifs en désignant des phénomènes, en plus d'assurer leur cohérence formelle. Quoiqu'il en soit, nous répétons qu'au terme de nos recherches nous sommes fortement portés à rejetter les approches qui visent à analyser les concepts normatifs, à analyser les usages ou à créer concepts et usages en adéquation avec l'intuition. Il faut renouveller la réflexion à propos de la fonction que devront remplir ces concepts puis les déterminer en conséquence.

Annexe I : Preuves laissées en suspens

THÉORÈME 1 : $\vdash_{LDS} E$ si E est une tautologie.

Preuve :

Rappelons qu'une tautologie est un énoncé dont la valeur de vérité est le vrai, quelle que soit la valeur de vérité attribuée aux atomes qui le composent. Plus rigoureusement, soit $v(A)$ qui assigne à chaque atome de $\mathfrak{L}_s$ une valeur de vérité ($\top$ ou $\bot$) ainsi qu'à chaque énoncé complexe de la façon habituelle, soit en fonction de la valeur des atomes qui le composent. Une tautologie est un énoncé E tel que $v(E) = \top$ pour toutes les évaluations. Nous avons l'habitude de représenter une évaluation par une table de vérité :

E_1	E_2	E_1	$\supset$	$(E_2$	$\supset$	$E_1)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Ces quelques rappels complétés, nous voulons montrer que toute tautologie est un théorème de LDS. Considérons pour commencer un métathéorème très important. Soit l'énoncé E et $A_1, \ldots, A_n$ les atomes qui le composent. Nous allons construire *l'énoncé d'évaluation E'* de E sous v ainsi :

1) Si $v(E) = \top$, alors $E' = E$;
2) Si au contraire $v(E) = \bot$, alors $E' = \neg E$.

La même procédure s'applique pour produire l'énoncé d'évaluation d'un atome. Très simplement, l'énoncé d'évaluation de E est E lui-même si E est vrai, et la négation de E si E est faux. Le métathéorème annoncé affirme que

$(A_1' \wedge \ldots \wedge A_n') \vdash_{\text{LDS}} E'$ pour toutes les évaluations[21]. Par exemple, soit l'évaluation qui assigne respectivement à A_1, A_2 et A_3 les valeurs $\top, \top, \bot$, et soit $E = (A_1 \supset (A_2 \vee A_3))$. Le théorème indique alors que $(A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vdash_{\text{LDS}} E$. L'idée derrière ce théorème est qu'il est possible de représenter chaque ligne d'une table de vérité par un énoncé.

Puisqu'une tautologie reçoit $\top$ sous toutes les évaluations, nous avons que $(A_1' \wedge \ldots \wedge A_n') \vdash_{\text{LDS}} E$ quels que soit l'évaluation considérée ($E' = E$). La définition de la déductibilité nous permet alors de dire que $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge A_n') \supset E$. Puisque certaines évaluations assignent la vérité à A_n et d'autres la fausseté, nous avons que $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge A_n) \supset E$ et $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge \neg A_n) \supset E$.

La fin de la preuve dépend largement de l'usage de MP qui avec les axiomes (3) à (5) reproduit la logique propositionnelle au sein de LDS. Des derniers résultats présentés, il découle que [1] $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge A_{n-1}') \supset (A_n \supset E)$ et [2] $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge A_{n-1}') \supset (\neg A_n \supset E)$. Maintenant, la tautologie suivante découle des axiomes : $(A_n \supset E) \supset ((\neg A_n \supset E) \supset E)$, ce qui nous permet avec [1] d'affirmer que $\vdash_{\text{LDS}} (A_1' \wedge \ldots \wedge A_{n-1}') \supset ((\neg A_n \supset E) \supset E)$. De paire avec [2] nous arrivons enfin à montrer que $\vdash_{\text{LDS}} E$. Toute tautologie est donc bel et bien un théorème de LDS. ■

LEMME 18a : Soit Γ un ensemble d'énoncés quelconque. Alors $\Gamma \nvdash_{LDS} \bot$ si et seulement si tous les sous-ensembles finis de Γ sont LDS-consistants.

Preuve :

Voir Chellas [1980 : 47-48] ■

THÉORÈME 18 : (LEMME DE LINDENBAUM) Soit Γ un ensemble d'énoncés. Si $\Gamma \nvdash_{LDS} \bot$ alors il existe un ensemble d'énoncés Γ' tel que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ et

[21] Voir la définition 11 concernant la déductibilité. Pour la preuve de ce métathéorème, le lecteur est renvoyé à Mendelson [1997] p. 41, lemme 1.13.

$Max_{\text{LDS}}\Gamma'$. Autrement dit, tout ensemble consistant pour LDS possède une extension LDS-maximale.

Preuve :

Considérons Γ, un ensemble LDS-consistant quelconque. Il faut trouver un ensemble LDS-maximal qui contienne Γ. La preuve consiste à définir cet ensemble puis à prouver qu'il possède bien la caractéristique voulue.

Nous allons définir Γ' en regroupant tous les membres d'une infinité d'extensions de Γ. Soit la liste $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de tous les énoncés du langage et une suite $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \ldots$ d'extensions de Γ. Pour commencer, posons que $\Gamma'_0 = \Gamma$.

[Définition Da] : Les autres extensions de la suite sont définies ainsi (pour $n > 0$) :

1) $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \cup \{\mathrm{E_n}\}$ si $\Gamma'_{n-1} \cup \{\mathrm{E_n}\}$ est LDS-consistant ;
2) $\Gamma'_n = \Gamma'_{n-1}$ autrement.

Par exemple, $\Gamma'_1 = \Gamma'_0 \cup \{\mathrm{E_1}\}$ si $\Gamma'_0 \cup \{\mathrm{E_1}\}$ est LDS-consistant, sinon $\Gamma'_1 = \Gamma'_0$. Autrement dit, chaque nouvelle extension Γ'_n est bâtie en ajoutant le $n^{\text{ième}}$ énoncé à la précédente extension, à la condition que le résultat soit consistant et laissant donc de côté tous les énoncés qui provoqueraient une contradiction.

[Définition Db] : L'ensemble Γ' que nous cherchions à bâtir est l'ensemble de tous les énoncés appartenant aux extensions $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \ldots$.

Nous devons maintenant prouver qu'il s'agit bel et bien d'une extension LDS-maximale de Γ. Cela s'opère en trois temps :

i) Pour montrer que Γ' est une extension de Γ, il suffit de montrer que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Or, par définition Γ' contient les éléments de tous les ensembles de la série $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \ldots$, incluant Γ'_0 qui est identique à Γ.

ii) Montrons maintenant que Γ' est LDS-consistant i.e. que $\Gamma' \nvdash_{\text{LDS}} \bot$. Tout d'abord, chaque élément de la série $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \ldots$ est LDS-consistant. Nous pouvons le montrer par induction sur *n*. Si $n = 0$, alors $\Gamma'_n = \Gamma$ et est dès lors LDS-consistant en vertu de notre hypothèse de départ. Supposons maintenant que [HI] : Γ'_n est LDS-consistant. Considérons l'extension suivante Γ'_{n+1} et rappelons que $\Gamma'_{n+1} = \Gamma'_n$ ou bien $\Gamma'_{n+1} = \Gamma'_n \cup E_{n+1}$ [Da]. Dans les deux cas, Γ'_{n+1} s'avère LDS-consistant [HI, D.2]. Donc par induction toutes les extensions $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2 \ldots$ sont LDS-consistantes. Supposons maintenant que [H] : Γ' possède un sous-ensemble fini Γ^* LDS-inconsistant. Soit E_n l'énoncé de Γ^* pour lequel n est le plus grand (cet énoncé existe puisque Γ^* est fini). Alors : $\Gamma^* \subseteq \Gamma'_n$ car $\Gamma^* \subseteq \Gamma'$ et Γ'_n contient tous les énoncés de Γ' plus petits ou égaux à n. Mais dans ce cas Γ^* est LDS-consistant, ce qui contredit notre hypothèse. Γ' ne possède donc pas de sous-ensemble fini Γ^* LDS-inconsistant. Il en résulte la LDS-consistance de Γ' [T18a].

iii) Il ne reste qu'à montrer que Γ' est maximal, c'est-à-dire que pour tout énoncé *E*, soit $E \in \Gamma'$ ou $\neg E \in \Gamma'$. Puisque cet énoncé est dans la liste de tous les énoncés, nommons-le E_n. Nous allons supposer que ni $E_n \in \Gamma'$ ni $\neg E_n \in \Gamma'$ pour tout $n > 0$. Évidemment, cela signifie que [1] ni $E_n \in \Gamma'_n$ ni $\neg E_n \in \Gamma'_n$ (E_n et sa négation n'appartient à aucune extension de Γ) [Db]. Il est alors forcément vrai que $\Gamma'_{n-1} \cup \{E_n\} \vdash_{\text{LDS}} \bot$ car autrement nous aurions que $E_n \in \Gamma'_n$ [Da, 1]. De même, il s'avère que $\Gamma'_{n-1} \cup \{\neg E_n\} \vdash_{\text{LDS}} \bot$. Mais alors, nous obtenons l'ensemble d'affirmations suivant :

1) $\vdash_{\text{LDS}} (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge E_n) \supset \bot$
2) $\vdash_{\text{LDS}} (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \neg E_n) \supset \bot$

3) $\vdash_{\mathrm{LDS}} E_n \vee \neg E_n$ [RPL]

Nous pouvons alors déduire que $\vdash_{\mathrm{LDS}} (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1}) \supset \perp$, puis $\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathrm{LDS}} \perp$ contrairement à ce qui fut démontré précédemment [ii]. Nous avons donc montré que Γ' est une extension maximalement consistante de Γ. Donc si Γ est consistant, il possède une telle extension. ■

Sources documentaires

AQVIST, Lennart. Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems, Bibliopolis, Naples : 1987.

BAILHACHE, Patrice. Essai de logique déontique, Mathesis, Paris : 1991.

CASTANEDA, Hector-Neri. The Paradoxes of Deontic Logic : The Simplest Solution to all of them in One Fell Swoop, in New Studies in Deontic Logic : Norms, Actions, and the Foundations of Ethics, ed. HILPINEN, Risto, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht :1981.

CHELLAS, Brian F. Modal Logic ; an Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

CHISHOLM, Roderick M. Contrary-to-duty Imperatives and Deontic Logic, Analysis, 24 : 33-36, 1963,

FORRESTER, James Wm. Being Good and Being Logical ; Philosophical Groundwork for a New Deontic Logic, M.E. Sharpe, Armonk, New York : 1996.

GIRLE, Rod. Modal Logics and Philosophy, McGill-Queen's University Press, Montréal & Kingston : 2000.

HILPINEN, Risto. Deontic Logic : Introductory and Systematic Readings, D. Reidel, Dordrecht, Hollande : 1971.

HORTY, John F. Agency and Deontic Logic, Oxford University Press, Oxford : 2001.

KALINOWSKI, Georges. La logique des normes, Presses universtaires de France, Paris : 1972.

KONYNDYK, Kenneth. Introductory Modal Logic, University of Notre Dame Press, Notre Dame : 1986.

KRIPKE, Saul Aaron. Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Modal Propositional Calculi', Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9 (1963) 67-96.

KRIPKE, Saul Aaron. Semantical Considerations on Modal Logic, Proceedings of a Colloquium on Modal and Many-Valued Logics (Acta Philosophica Fennica 16), Helsinki 1963, pp. 83-94.

MENDELSON, Elliott. Introduction to Mathematical Logic, Chapman & Hall, London : 1997.

MENGER, Karl. A logic of the doubtful: On Optative and Imperative Logic, dans Reports of a Mathematical Colloquium, 2ième série, Numéro 2, Indiana University Press, Notre Dame : 1939.

PRIOR, Arthur. Escapism: the Logical Basis of Ethics, dans *Essays in Moral Philosophy*, ed. A. I. Melden, Seattle : 1958, pp. 135-146.

RESHER, Nicholas. The Logic of Commands. Routeledge & Kegan Paul, London : 1966.

ROSS, ALF. Imperatives and Logic, *Theoria* 7 : 1941, pp. 53-71.

von WRIGHT, G. H. An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action, North-Holland, Amsterdam : 1968.

von WRIGHT, G. H. *Practical Reason*, Cornell University Press, Ithaca, New York : 1983.

von WRIGHT, G. H. Deontic Logic, *Mind* 60 : 1951, pp. 1-15.

von WRIGHT, G. H. A Note on Deontic Logic and Derived Obligation, *Mind* 65 : 1956, pp. 507-509.

von WRIGHT, G. H. A New System of Deontic Logic, *Danish Yearbook of Philosophy* 1 : 1964, pp. 173-182.

von WRIGHT, G. H. A Correction to a New System of Deontic Logic, *Danish Yearbook of Philosophy* 2 : 1965, pp. 103-107.